

JOSÉ CARLOS ALBERTO DE PONTES

**MEMÓRIAS DE CURTA DURAÇÃO  
EM SISTEMAS DINÂMICOS**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio M. Batista

CURITIBA

2004

+++++MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**PARECER**

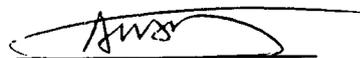
Os abaixo-assinados, membros da banca examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado do estudante José Carlos Alberto de Pontes são de parecer favorável e consideram aprovada a redação final da Defesa de Dissertação cujo título é **Memórias de Curta Duração em Sistemas Dinâmicos**.

Curitiba, 19 de fevereiro de 2004.

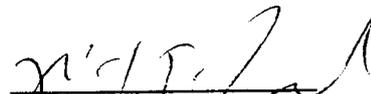
**Banca Examinadora**

**Assinatura**

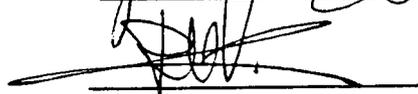
**Prof. Antônio Marcos Batista  
(Orientador/Presidente) (UFPR)**



**Prof. José Tadeu Teles Lunardi**



**Prof. Ricardo Luiz Viana  
(UFPR)**



# RESUMO

Nesta dissertação investigamos as formações das memórias em dois tipos de sistemas dinâmicos: (i) em uma rede de mapas acoplados com um acoplamento do tipo local (primeiros vizinhos) e em uma rede de mapas acoplados com um acoplamento do tipo lei de potência (alcance variado) e (ii) em uma cadeia de osciladores acoplados com um acoplamento do tipo local. Na rede de mapas localmente acoplados estudamos os tempos transientes dos padrões de memórias, as múltiplas memórias para o caso onde o sistema possui um pequeno termo não linear e como os padrões da rede e os tempos transientes são afetados por uma perturbação estocástica. Para a rede de mapas acoplados com um acoplamento do tipo lei de potência estudamos as formações dos padrões das memórias para o caso linear e não-linear e os tempos transientes em função do alcance do acoplamento para o caso linear como para o caso não-linear e como os padrões da rede e seus tempos transientes são afetados pela perturbação estocástica. Foi estudada a formação das múltiplas memórias em um sistema de  $N$  circuitos  $RL$  e  $RLC$  acoplados através de indutores (uma cadeia de osciladores localmente acoplados) e foram analisadas as memórias na presença de um ruído.

# ABSTRACT

In this work we investigated the formation of the memory in two kinds of dynamical systems: (i) in a coupled maps lattices with a local coupling (first neighbour) and in a coupled maps lattice with a power law kind (varied range) and (ii) in a chain of coupled oscillators with a local coupling. In the locally coupled map lattice we studied the transient times of the pattern of memory, the multiple memories for the case where the system possess a small nonlinear term and how the pattern of lattices and the transient times are affected for a stochastic perturbation. For the coupled map lattice with power law coupling we studied the formation pattern of the memories to linear case and nonlinear case and the transient times in function of coupling range to the linear case how to the case nonlinear and how the pattern of lattice in its transient times are affected by a stochastic perturbation. It was studied the formation of the multiple memories in a system of  $N$   $RL$  and  $RLC$  circuits couple through inductors (a chain oscillators locally coupled) and where it were studied the memories of system in the presence of a noise.

# AGRADECIMENTOS

Agradecimento a Capes pelo suporte financeiro, indispensável para a conclusão desse trabalho.

Ao Prof. Carlos de Carvalho, pela manutenção da rede de computadores.

Agradecimento aos meus pais, meus irmãos e irmã pelo amor e incentivos.

A minha noiva pelo incentivo e carinho que me foi dado.

Ao professor Antônio Marcos Batista pela orientação e paciência durante a execução desse trabalho.

A todos os professores que contribuíram para essa dissertação, em especial aos professores Sergio Roberto Lopes e Ricardo Luiz Viana.

A todos os colegas de pós-graduação.

Agradecimento a todos que de uma maneira ou outra ajudaram na elaboração desse trabalho.

A Deus.

# Sumário

Agradecimentos	5
<b>1 Introdução</b>	<b>8</b>
<b>2 Redes de Mapas Acoplados</b>	<b>10</b>
2.1 Mapas . . . . .	11
2.1.1 Mapa logístico . . . . .	12
2.2 Conceitos Básicos de redes de mapas acoplados . . . . .	17
2.2.1 Condições iniciais e condições de contorno . . . . .	18
2.2.2 Dinâmica local . . . . .	19
2.2.3 Tipos de acoplamentos . . . . .	20
2.3 Acoplamento local . . . . .	22
2.4 Acoplamento Global . . . . .	24
2.5 Acoplamento tipo lei de potência . . . . .	24
<b>3 Memórias de curta duração em redes de mapas acoplados</b>	<b>27</b>
3.1 Tempo transiente das memórias . . . . .	30
3.2 Padrões das memórias . . . . .	33
3.3 Perturbação estocástica . . . . .	34
3.3.1 Perturbação estocástica na função $f(x)$ . . . . .	35
3.3.2 Perturbação Estocástica na perturbação externa $A_n$ . . . . .	37
<b>4 Memórias de curta duração em redes com acoplamento do tipo lei de potência</b>	<b>43</b>

4.1	Modelo . . . . .	44
4.2	Caso linear . . . . .	45
4.3	Caso não-linear . . . . .	49
4.4	Perturbação Estocástica . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Memórias de curta duração em circuitos <math>RL</math> e <math>RLC</math></b>	<b>58</b>
5.1	Circuitos $RL$ . . . . .	58
5.1.1	Formação das memórias . . . . .	63
5.1.2	Ruído . . . . .	66
5.2	Circuito $RLC$ . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>74</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>77</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Sistemas dinâmicos possuem um grande interesse na comunidade científica devido a sua interdisciplinaridade, sendo fortemente estudados em todas as áreas científicas nos últimos anos. Muitos sistemas dinâmicos de interesse da ciência e tecnologia possuem muitos graus de liberdade. Podemos citar como exemplo turbulência em fluidos, sistemas ópticos, química, etc. Para o estudo desses tipos de sistemas dinâmicos deve-se usar sistemas espacialmente estendidos, como foi citado por Kaneko em seu livro, onde podemos ter [1]:

1. *Equações Diferenciais Parciais*: São modelos onde o tempo, o espaço e a variável de estado são contínuos. Podemos citar com exemplo a equação de Ginzburg-Landau, utilizada como modelo de estudos numéricos [1].
2. *Cadeias de Osciladores Acoplados*: Os osciladores acoplados possuem o tempo contínuo, a variável de estado contínua e o espaço é discreto. São na verdade equações diferenciais ordinárias acopladas. Temos como exemplo os pêndulos acoplados e as junções Josephon [2].
3. *Autômatos Celulares*: Os autômatos celulares possuem o tempo, o espaço e a variável de estado discretos. Esse sistema foi introduzido por Von Neumann. Um dos mais famosos autômatos celulares bidimensionais foi proposto J. H. Conway e ficou conhecido como jogo da vida [3].
4. *Redes de Mapas Acoplados*: São sistemas que possuem o tempo discreto, o espaço discreto e a variável de estado contínua. Esses sistemas apresentam maior complexidade do que os autômatos celulares e são de mais fácil manipulação do que as equações diferenciais parciais. As redes de mapas acoplados foram introduzidas no estudo de sistemas dinâmicos na tese de doutoramento de Kaneko em 1983 [4]. As redes de mapas acoplados apresentam inúmeros tipos de acoplamentos, podemos citar em especial o acoplamento do tipo local [1] e o acoplamento do tipo global [5]. O estudo de redes de mapas acoplados possui uma grande importância no estudo de sistemas dinâmicos, pelo fato

de apresentarem caos espaço-temporal. As redes de mapas acoplados estão presentes em vários ramos da ciência, como química, biologia, geofísica, em sistemas tecnológicos e engenharias.

Uma aplicação de modelos de redes de mapas acoplados foi utilizado por Coppersmith e colaboradores [6]. Eles tentaram explicar a formação de padrões de memórias de curta duração em cerâmicas semi-condutoras  $NbSe_3$ , sujeitas a uma perturbação externa. Esse mapa surge de uma equação diferencial sujeita a um potencial senoidal, a qual também é usada para o estudo de terremotos. Formação desses padrões sugere o estudo de redes de neurônios, pois o espaço e o tempo são discretos mas a variável de estados é contínua, podendo dessa forma armazenar padrões complexos de informações

A. M. Batista e R. L. Viana estudaram uma forma de armazenar informações em linguagem Braille em um circuito  $RL$ [7]. Para tanto utilizaram uma cadeia de osciladores acoplados, definindo uma variável de curvatura para o sistema. Eles analisaram os padrões quando o sistema estava sujeito a um ruído tanto no resistor e no indutor, como na tensão senoidal.

A dissertação está organizada da seguinte forma: No segundo capítulo analisaremos a formação das memórias de curta duração em uma rede de mapas acoplados, com um acoplamento do tipo local. Nesse capítulo analisaremos os padrões de memórias formados e o tempo transiente necessário para a formação desses padrões tanto para o caso linear como o não-linear. Estudaremos o sistema quando este está sujeito a uma perturbação estocástica tanto no mapa que descreve o sistema local com na perturbação externa, analisando os padrões formados pelas memórias do sistema e os tempos transientes.

No terceiro capítulo estudaremos a formação das memórias de curta duração em uma rede de mapas acoplados com um acoplamento de alcance variado, acoplamento do tipo lei de potência. Faremos a análise dos tempos transientes e dos padrões formados pelo sistema tanto para o caso linear como para o caso não-linear em função do alcance do acoplamento. Daremos uma principal atenção para o caso onde o alcance do acoplamento é global e para o caso onde o alcance do acoplamento é local. Analisaremos o sistema quando a perturbação externa do sistema estiver sujeita à uma perturbação estocástica, quais serão os padrões formados pelo sistema e a variação do tempo transiente para a obtenção dos padrões médios das memórias.

No quarto capítulo veremos a formação das memórias de curta duração em uma cadeia de osciladores acoplados que descreve circuitos elétricos acoplados, com um acoplamento através de indutâncias e sujeitos a uma tensão alternada. Faremos a análise da formação dos padrões de memórias para o caso onde o circuito possui apenas a fonte de tensão alternada, dois indutores e um resistor. Para este circuitos faremos a análise do ruído inserido no resistor ou no indutor e também quando a tensão do sistema possui um ruído. Faremos, também, a análise da cadeias de osciladores acoplados quando o circuito possui um elemento a mais, um capacitor. Analisaremos a formação dos padrões para três casos diferentes.

## Capítulo 2

# Redes de Mapas Acoplados

As redes de mapas acoplados foram introduzidas em sistemas dinâmicos em 1983 na tese de doutoramento de Kunihiko Kaneko, para o estudo de caos espaço-temporal [8].

A modelagem de redes de mapas acoplados são importantes no estudo de fenômenos gerais de turbulência que não inclui somente fluidos mas também outras áreas da ciência (Junção de Josephson ou onda da densidade da carga, dinâmica de fluidos, dinâmica de populações, dinâmica neural e nas engenharias) [1]. Exemplos de caos espaço-temporal são vistos em convecção de Bénard, convecção em cristais líquidos, alguns sistemas de estado sólido como junções Josephson, ondas de densidade de cargas e ondas de turbulência de spin, e redes biológicas.

Redes de mapas acoplados são sistemas dinâmicos com tempo e espaço discretos e variável de estado contínua, onde cada sítio da rede influencia e é influenciado por outro(s) sítio(s) da rede (acoplamento).

Na tabela (2.1) apresentamos uma hierarquia de sistemas dinâmicos espacialmente estendidos. Nas equações diferenciais parciais o espaço, o tempo e a variável de estado são contínuos. Equações funcionais iteradas diferem no tratamento do tempo como variável discreta. Nas cadeias de osciladores o espaço é discreto, a variável de estado e o tempo são contínuos. Os osciladores são na verdade equações diferenciais ordinárias acopladas. Já os autômatos celulares possuem tempo, espaço e variável de estado discretos [9].

O uso de um ou outro sistema leva a uma “situação de custo benefício”. Por exemplo podemos utilizar equações diferenciais parciais devido a sua “generalização”, mas o tempo computacional necessário pode tornar-se um problema e para efetuarmos a integração numérica necessitamos discretizar o espaço e o tempo. Podemos utilizar os autômatos celulares, mas devido ao fato do tempo, espaço e a variável de estado serem discretos podemos perder em “generalização” [9].

Em seu livro Kaneko introduz alguns passos para o modelamento de sistemas espacialmente estendidos através de redes de mapas acoplados [1]:

Tabela 2.1: Lista hierárquica de sistemas espacialmente estendidos [9].

Sistema	Espaço	Tempo	Variável de Estado
equações diferenciais parciais	contínuo	contínuo	contínuo
equações funcionais iteradas	contínuo	discreto	contínuo
cadeia de osciladores	discreto	contínuo	contínuo
redes de mapas acoplados	discreto	discreto	contínuo
autômatos celulares	discreto	discreto	discreto

1. Escolha uma variável ou um conjunto de variáveis em uma rede. Este conjunto de variáveis ou essa variável deve ser variável macroscópica dessa rede e não variável microscópica (Exemplos para um sistema fisico-químico pode ser a temperatura, velocidade do fluido, ou concentração local de alguma substância química).
2. Decomponha o processo subjacente ao fenômeno em componentes independentes (Exemplo, para um sistema fluido não homogêneo e condutor de calor, os processos de convecção, difusão, reação, etc. . . )
3. Substitua cada componente por uma dinâmica paralela e simples da rede. A dinâmica consiste em uma transformação não linear das variáveis de estado da rede em cada sítio e um termo de acoplamento escolhido adequadamente.
4. Leve a cabo cada unidade dinâmica da rede, ou processos sucessivamente.

## 2.1 Mapas

Mapas também são conhecidos como equação a diferenças, relação de recorrência e mapas iterados [10]. Eles têm sido muito utilizados em sistemas dinâmicos, tanto para estudo de formação de padrões como para o estudo de caos [10]. A vantagem da utilização de mapas no estudo de caos está no fato deles apresentarem caos em um sistema unidimensional, bastando para tanto que o mapa não seja invertível.

Com o auxílio dos mapas, podemos modelar de maneira simples alguns sistemas biológicos: colônias de insetos de interesse econômico ou não, mudanças na frequência de genes em função do tempo, em epidemiologia (fração da população infectada em um tempo  $t$ ) [11]. Pode se modelar também a relação entre preço e quantidade de mercadoria [12], ou em ciências sociais [13], onde encontra-se, por exemplo, em teoria do aprendizado ou a propagação de rumores em várias estruturas da sociedade, etc . . . .

Como exemplo de mapas podemos citar o mapa logístico [11], onde os valores da variável de estado ficam no intervalo fechado entre 0 e 1 ( $x_n \in [0, 1]$ ) e o valor do

parâmetro de controle no intervalo fechado entre 1 e 4 ( $r \in [1, 4]$ ), muito utilizado no estudo de caos. Podemos obter o mapa logístico pelo seguinte raciocínio.

Vamos supor uma determinada população de insetos, onde a população da próxima geração depende da população de uma geração anterior, pois essa última colocará ovos os quais germinarão em novos indivíduos. Podemos descrever essa população pela relação matemática (2.1):

$$z_{n+1} = rz_n, \quad (2.1)$$

onde  $n$  seria o tempo referente a um período para ocorrer o crescimento, desenvolvimento e reprodução de dada espécie. Assim essa população vai aumentar de uma maneira exponencial com o passar do tempo. Supondo que essa população possa aumentar até um valor máximo  $z_{max}$ , onde se esgotariam os recursos naturais para essa espécie, assim podemos colocar esse número de ovos como uma dependência em relação ao número máximo da população de insetos:

$$z_{n+1} = rz_n \left( 1 - \frac{z_n}{z_{max}} \right), \quad (2.2)$$

dividindo os dois membros pelo número máximo de indivíduos dessa população e sendo  $x = z_n/z_{max}$  obtemos:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (2.3)$$

que é o mapa logístico [14].

O mapa logístico apresenta um grande interesse devido a sua dinâmica apresentar bifurcações, pontos críticos (atratores e repulsores), etc.

### 2.1.1 Mapa logístico

O mapa logístico apresenta certos comportamentos, quando o seu parâmetro  $r$  é variado (atratores, repulsores, órbitas periódica, bifurcações, etc ...).

A figura (2.1) mostra a evolução da variável de estado do mapa logístico para quatro diferentes valores do parâmetro de controle ( $r = 2, 8; r = 3, 3; r = 3, 5; r = 3, 9$ ), com condições iniciais iguais ( $x_0 = 0, 1$ ). Para a figura (2.1a) onde o parâmetro de controle  $r = 2, 8$ , a condição inicial evolui para o ponto fixo  $x^* = 0, 64285714$ . Observamos pela figura (2.1) que no mapa logístico a mesma condição inicial pode apresentar diferentes comportamentos, com apenas a variação do parâmetro de controle  $r$ .

Na figura (2.1b) o sistema evolui para uma órbita periódica de período 2, para o valor do parâmetro de controle  $r = 3, 3$  a órbita periódica apresenta os seguintes valores para a variável de estado  $x = 0, 479427$  e  $x = 0, 823603$ . Para a figura (2.1c), com  $r = 3, 5$  o sistema evolui para uma órbita periódica de período 4 com os seguintes valores para a variável de estado  $x = 0, 382820$ ,  $x = 0, 826941$ ,  $x = 0, 500884$  e  $x = 0, 874997$ . Para a figura (2.1d) com o parâmetro de controle

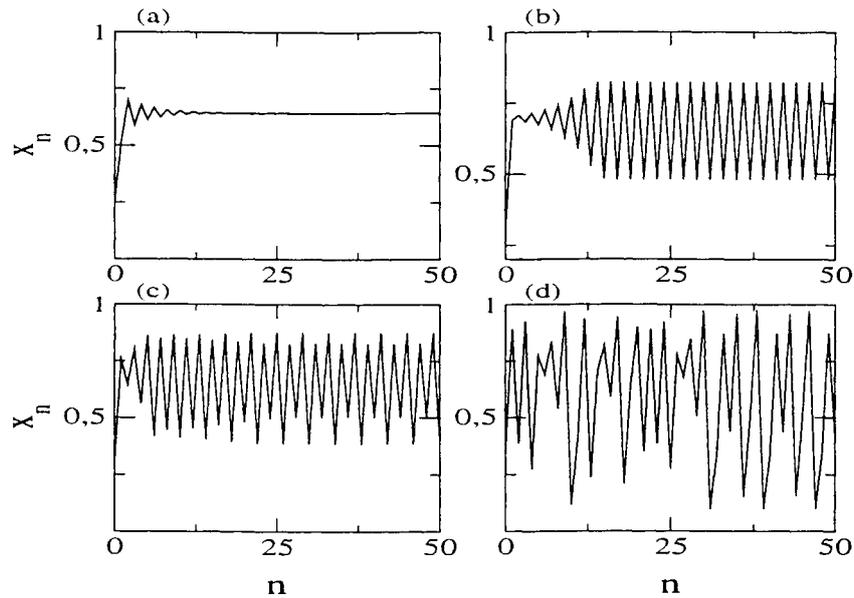


Figura 2.1: (a) Com  $r = 2,8$  o sistema tem um ponto fixo  $x^* = 0,64285714$ . (b) Com  $r = 3,3$  o sistema possui uma órbita periódica alternando entre os valores de  $x = 0,479427$  e  $x = 0,823603$ . (c) Com  $r = 3,5$  o sistema possui uma órbita periódica de período 4 com os seguintes valores de  $x = 0,382820$ ,  $x = 0,826941$ ,  $x = 0,500884$  e  $x = 0,874997$ . (d) Com  $r = 3,9$  o sistema torna-se aperiódico.

$r = 3,9$  o mapa logístico apresenta sensibilidade as condições iniciais.

Um ponto fixo é um valor que mapeia nele mesmo, ou seja, a função que descreve o mapa, no ponto fixo possui o mesmo valor do ponto fixo. Vamos tomar com exemplo o mapa logístico para obtermos o ponto fixo em função do parâmetro de controle  $r$ . O valor da função do mapa logístico, no ponto fixo, é o próprio ponto fixo

$$f(x^*) = x^*, \quad (2.4)$$

assim temos

$$x^* = x^*r(1 - x^*), \quad (2.5)$$

realizando as manipulações algébricas necessárias obtêm-se a seguinte relação para o ponto fixo em função do parâmetro de controle  $r$ ,

$$x^* = 1 - \frac{1}{r}. \quad (2.6)$$

Para determinar a instabilidade do ponto fixo pode-se tomar uma órbita, próxima do ponto fixo  $x_n = x^* + \eta_n$ , onde  $\eta_n$  é o desvio da órbita em relação ao ponto fixo, e observar se o ponto fixo atrai ou repele a órbita periódica. Necessitamos saber

se o desvio  $\eta_n$  aumenta ou diminui quando  $n \rightarrow \infty$ . Para isso devemos substituir o valor da órbita na função que descreve o mapa [10]

$$x_{n+1} = f(x^* + \eta_n), \quad (2.7)$$

com  $\eta_n \rightarrow 0$ , podemos expandir a função em uma série de potências em torno de  $\eta_n = 0$

$$x_{n+1} = f(x^* + \eta_n) = x^* + \eta_{n+1} = f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2). \quad (2.8)$$

Deixando de lado os termos de ordem superiores  $O(\eta_n^2)$  obtemos o mapa linearizado  $\eta_{n+1} = \lambda\eta_n$ , onde  $\lambda$  fornece a evolução do desvio da órbita em relação ao ponto fixo. Com  $\lambda = f'(x^*)$  podemos classificar o ponto fixo em atrator com  $\lambda < 1$ , pois a cada nova iteração a órbita aproxima-se do ponto fixo. Para  $\lambda > 1$  o ponto fixo é um repulsor, pois a cada nova iteração a órbita afasta-se do ponto fixo. Quando  $\lambda = 1$  não se pode afirmar nada sobre o ponto fixo [10].

Outra maneira para se obter os pontos fixos é através do diagrama de escada (método gráfico *Cobwebs*) [10], onde plota-se o  $x_{n+1} = f(x_n)$ , juntamente com a reta de  $x_{n+1} = x_n$ . Quando a reta  $x_{n+1} = x_n$  e a curva  $x_{n+1} = f(x_n^{(i)})$  possuem o mesmo valor  $x_{n+1} = x_n = f(x_n^{(i)})$ , temos um ponto fixo [15].

Para observar se o ponto fixo é estável ou instável, basta escolher um ponto qualquer um pouco distante do ponto fixo e traçar uma reta vertical até a curva de  $x_{n+1}$  do mapa logístico, então traça-se uma reta horizontal até a reta de  $x_{n+1} = x_n$ , novamente traça-se uma reta vertical até a curva  $x_{n+1}$  do mapa logístico. Seguindo esses passos várias vezes observa-se que ocorre um aproximação (estável) ou afastamento (instável) do ponto fixo [10].

O diagrama de escada pode ser observado pela figura (2.2), com o parâmetro de controle  $r = 2, 8$  e a condição inicial  $0, 2$ . Os pontos fixos encontrados foram  $x^* = 0$  e  $x^* = 0,64285714$ . O primeiro ponto fixo  $x^* = 0$  é um repulsor, pois nossa condição inicial  $0, 2$ , afasta-se dele. O segundo ponto fixo  $x^* = 0,64285714$  é um atrator, pois nossa condição inicial aproxima-se dele

Para valores de  $r$  maiores que 3, o mapa logístico apresenta órbitas periódicas

$$f^{(k)}(p) = p, \quad (2.9)$$

onde  $f(x)$  é a função logística do mapa,  $k$  é o número de iterações (um pequeno número inteiro) necessários para o ponto  $p$  retornar nele mesmo. Para uma órbita de período 2 é necessário duas iterações para que o ponto  $x = 0,480151$ , retorne nele mesmo (figura 2.3).

Para a obtenção das órbitas periódicas podemos utilizar o mesmo raciocínio para a obtenção dos pontos da órbita periódica em função do parâmetro de controle  $r$ . Vamos tomar com o exemplo a órbita periódica de período 2. Para obtermos os pontos da órbita periódica  $k$  em função de  $r$  devemos pegar as  $k$  iteradas do mapa logístico. Para maior simplicidade vamos tomar uma órbita de período 2

$$f^2(x) - x = r^2x(1-x)[1-rx(1-x)] - x = 0, \quad (2.10)$$

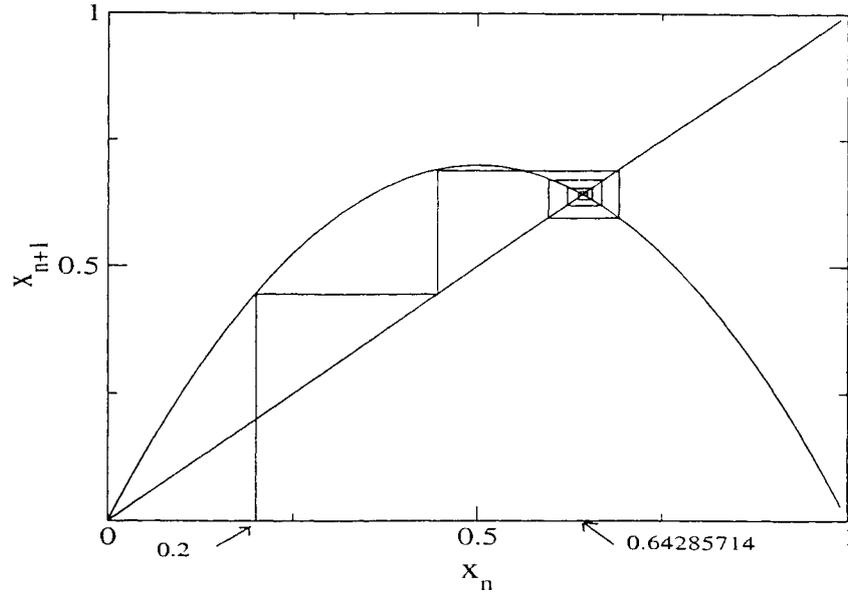


Figura 2.2: O parametro de controle  $r = 2,8$ , o ponto fixo  $x^* = 1 - \frac{1}{r} = 0,64285714$ , tomando um condição 0,2 aplicando ao algoritmo para obtenção dos pontos fixo pelo diagrama de escada (método gráfico *Cobwebs*).

realizando as operações algébricas necessárias, e obtendo a solução da equação do segundo grau obtemos a seguinte relação para os pontos da órbita periódica.

$$p, q = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r - 3)(r + 1)}}{2r} \quad (2.11)$$

As órbitas periódicas apresentam casos semelhantes aos pontos fixos, em relação a instabilidade. Vamos supor que em nossa órbita periódica existe um pequeno desvio. Tomando a derivada dessa nossa função, função esta que deverá ser  $k$  vezes o mapa aplicado nele mesmo.

Tomando como exemplo o período 2 do mapa logístico <sup>1</sup>

$$(f^2)'(p_1) = f'(f(p_1)) f'(p_1), \quad (2.12)$$

<sup>1</sup>Utilizando a regra da cadeia do cálculo, para obter a expansão da derivada de uma composição de funções (derivada da função composta) [15]

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d(f(g(x)))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx},$$

assim

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

como  $f(p_1) = p_2$ , as derivadas das órbitas periódicas são iguais

$$(f^2)(p_1) = f'(f(p_1)) f'(p_1) = f'(p_2) f'(p_1) = f'(p_2) f'(f(p_2)) = (f^2)(p_2), \quad (2.13)$$

generalizando teremos

$$(f^k)(x) = f'(f^{k-1}(p_1)) f'(f^{k-2}(p_1)) \dots f'(p_1) \quad (2.14)$$

fazendo a o módulo da equação (2.14) igual a um  $\lambda^p$ ,

$$\lambda = |f'(p_k) f'(p_{k-1}) \dots f'(p_1)|, \quad (2.15)$$

temos para  $\lambda^p > 1$  a órbita periódica é instável, para  $\lambda^p < 1$  a órbita periódica é estável [15].

Da mesma forma que para o ponto fixo podemos utilizar o método gráfico *Cobwebs* [15], para observar as órbita de periódicas, seguindo os mesmos passos utilizados no ponto fixo. Na figura (2.3), observarmos a órbita periódica do mapa logístico para  $r = 3,3$ , com os pontos da órbita periódica estável. Na figura (2.3) temos a curva da função  $f(x) = x$ , a reta  $x_{n+1} = x_n$  e a condição inicial começando do valor 0,25 e aproximando da órbita periódica estável.

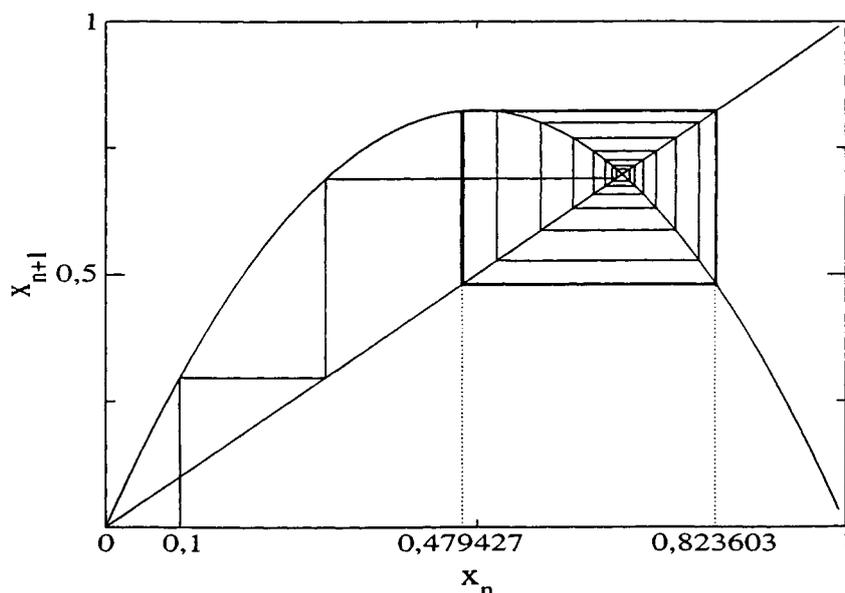


Figura 2.3: O parâmetro de controle 3,3, os pontos da órbita periódica estável  $p = 0,8237$  e  $q = 0,480151$ , condição inicial  $x_0 = 0,1$ .

O mapa logístico apresenta duplicação de período com a variação do parâmetro de controle. A partir de um certo valor o mapa logístico apresenta uma cascata de duplicação de período até o valor em que atinge um com ausência de periodicidade,

onde o número de períodos é  $\infty$ , como pode ser visto pela tabela 2.2. Para valores de  $r < 3$  o mapa logístico apresenta apenas pontos fixos, para valores  $r > 3$  ele apresenta duplicações de períodos. Para o valor do parâmetro de controle  $r = 3,568759$  o mapa logístico apresenta comportamento com ausência de periodicidade. Para alguns valores de  $r > r_\infty = 3,569946$  o mapa logístico apresenta janelas de periodicidade, a maior dessas janelas ocorre para  $r = 3,83$ , como pode ser visto na figura (2.4).

Utilizando o diagrama de bifurcação do mapa logístico, podemos observar

Tabela 2.2: Tabela com alguns valores dos parâmetros de controle, onde ocorre bifurcação de períodos [10].

$r$	Períodos
3	2
3,449	4
3,54409	8
3,5644	16
3,568759	32
$\vdots$	$\vdots$
3,569946	$\infty$

melhor a cascata de duplicação de período até o comportamento caótico. Podem ser observados também as inúmeras janelas de periodicidade, para valores do parâmetro de controle  $r > r_\infty$ . A figura (2.4) mostra o diagrama de bifurcação do mapa logístico. Na figura (2.4a) o parâmetro de controle ( $r$ ) varia de 1 até 4 e o valor da variável de estado ( $x_n$ ) do mapa logístico possui valores entre 0 e 1. A figura (2.4b) mostra a janela de periodicidade do mapa logístico.

## 2.2 Conceitos Básicos de redes de mapas acoplados

Vamos supor uma rede  $M$ -dimensional com  $M = 1$  para introduzirmos os conceitos básicos. A cada sítio da rede atribuímos uma variável real  $D$ -dimensional  $x^{(i)} \in R^D$ , onde  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) é o índice que faz referência ao  $i$ -ésimo sítio em uma rede unidimensional.

Na maioria dos casos estudados ( $D = 1$ ), mas existem casos onde ( $D = 2$ ). O tempo é discretizado e indicado por  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ , onde  $x_n^{(i)}$  é o valor da variável de estado do sítio  $i$  no tempo  $n$ , como está representado na figura (2.5).

A dinâmica da variável de estado é governada por dois fatores:

1. A dinâmica local do sítio  $i$ , através da função  $f(x)$ .

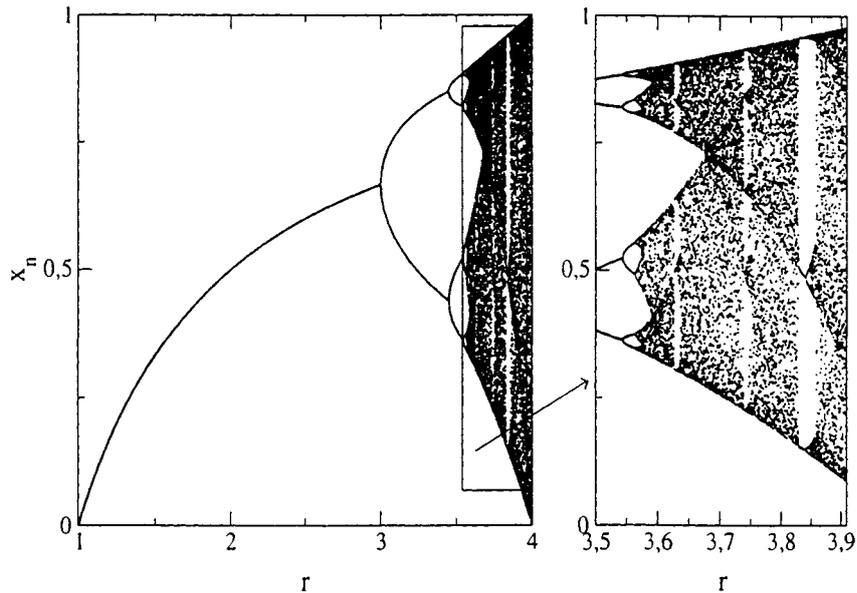


Figura 2.4:  $x_n \times r$ , para o mapa logístico (1.3), com 1032 iterações sendo desprezadas 1000 como transiente.

2. E pela dinâmica dos demais sítios da rede, através do acoplamento.

De forma geral a equação que define uma rede de mapas acoplados é:

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + C^{(i)}(x_n^{(j)}), \quad (2.16)$$

onde  $C^{(i)}(x_n^{(j)})$  é um termo genérico de acoplamento do sítio  $i$  com os demais sítios da rede, esse termo de acoplamento depende do  $j = 1, 2, 3, \dots, N$  sítios da rede inclusive o sítio  $i$ . O vetor  $N$ -dimensional  $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})$ , que representa o estado da rede no tempo  $n$ , é dito o padrão da rede nesse instante [9].

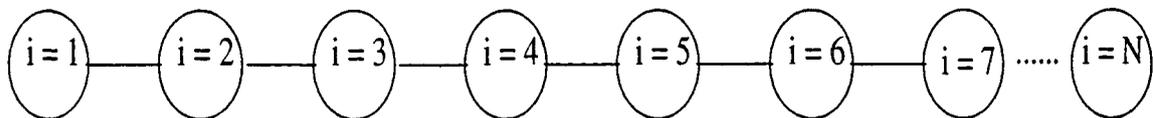


Figura 2.5: Figura esquemática para um acoplamento local de  $N$  sítios.

## 2.2.1 Condições iniciais e condições de contorno

Sendo um sistema espacialmente extenso, uma rede de mapas acoplados necessita de condições de contorno adequadas (nos extremos da rede  $i = 0$  e  $i = N + 1$ ):

1. Fixas:  $x_n^{(0)} = a$ ,  $x_n^{(N)} = b$ , onde usualmente  $a = b = 0$ ;
2. Periódicas:  $x_n^{(0)} = x_n^{(N)}$  e  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(1)}$ , ou em geral  $x_n^{(i+N)}$  para todo o  $i$  (mais utilizado);
3. Livres:  $x_n^{(0)}$  e  $x_n^{(N)}$  podem ter quaisquer valores;
4. Mistas: uma extremidade fixa e outra livre.

Devem ser também especificadas as condições iniciais em  $n = 0$  para todos os sítios da rede. Dentre as diversas escolhas possíveis, destacam-se as seguintes condições iniciais.

1. Perfil constante  $x_0^{(i)} = \text{constante}$  ;
2. Perfil senoidal  $x_0^{(i)} = A + B \text{sen} \left( \frac{2\pi i}{N} \right)$  ;
3. Perfil gaussiano  $x_0^{(i)} = C e^{-\frac{(i-j)^2}{N}}$  ;
4. Perfil aleatório  $x_0^{(i)} = \text{número pseudo-aleatório dentro de um certo domínio } [0, 1]$ .

Certas características, como veremos, dependem desta escolha. Outras não, razão pela qual os perfis aleatórios são preferíveis em muitas aplicações [9].

## 2.2.2 Dinâmica local

A dinâmica local tem sido investigada por meio de mapas de baixa dimensionalidade e bem conhecidos. O exemplo mais utilizado é o mapa logístico

$$x \rightarrow f(x) = rx(1-x). \quad (2.17)$$

Também merecem destaque os mapas lineares por partes, como

$$x \rightarrow f(x) = 2x, \quad (\text{mod. } 1) \quad (2.18)$$

mapa do padeiro para  $x \in [0, 1]$ , e o mapa seno-círculo

$$x \rightarrow f(x) = x + \omega + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x), \quad (\text{mod. } 1) \quad (2.19)$$

onde  $x \in [0, 1]$  é uma variável angular,  $0 \leq \omega < 1$  é frequência natural, e  $K > 0$  mede a não-linearidade do sistema.

Quanto a mapas bidimensionais (D=2), podemos citar o mapa de Hénon

$$x_{n+1} = A - (x_n)^2 + B y_n \quad y_{n+1} = x_n, \quad (2.20)$$

e o mapa padrão de Chirikov-Taylor

$$p_{n+1} = p_n + K \text{sen}(\theta_{n+1}) \quad \text{e} \quad \theta_{n+1} = \theta_n + p_n. \quad (2.21)$$

Quanto ao tipo de acoplamento podemos classificar a rede como:

1. Homogênea: quando os mapas são idênticos em todos os sítios.
2. Não-homogênea: quando os mapas não são idênticos devido às mudanças nos seus parâmetros para cada sítio da rede ou os seus mapas são diferentes.

Redes homogêneas são mais comuns nos estudos computacionais, mas para alguns casos como no estudo de sincronização, é conveniente usar redes não-homogêneas com parâmetros aleatórios distribuídos em um dado intervalo [9].

### 2.2.3 Tipos de acoplamentos

Há inúmeras formas de acoplamento entre os mapas. Nos acoplamentos locais, a dinâmica de um dado sítio  $i$  é determinada apenas pelos sítios vizinhos mais próximos:  $i + 1$  e  $i - 1$ . Acoplamentos não-locais permitem que o sítio  $i$  seja influenciado por um número arbitrariamente grande de outros sítios mais distantes.

Vamos abordar inicialmente o primeiro caso. Um tipo genérico de acoplamento local é dado pelo termo de acoplamento.

$$C_{j=i,i\pm 1}^{(i)}(x_n^{(i)}) = \epsilon_0 g(x_n^{(i)}) + \epsilon_R g(x_n^{(i+1)}) + \epsilon_L g(x_n^{(i-1)}) \quad (2.22)$$

onde o vetor  $\vec{\epsilon} = (\epsilon_0, \epsilon_R, \epsilon_L)$  é chamado o *núcleo do acoplamento*. Podemos enumerar quatro casos de interesse [9]:

1. Acoplamento aditivo:  $\epsilon_0 = 0, \epsilon_R = \epsilon_L$ ;
2. Acoplamento Laplaciano ou difusivo:  $\frac{-\epsilon_0}{2} = \epsilon_R = \epsilon_L$ ;
3. Acoplamento totalístico:  $\epsilon_0 = \frac{-2}{3}, \epsilon_R = \epsilon_L = \frac{1}{3}$ ;
4. Acoplamento unidirecional:  $-\epsilon_0 = \epsilon_L, \epsilon_R = 0$ .

O acoplamento Laplaciano

$$x_{n+1}^{(i)} = g(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon_0}{2} [g(x_n^{(i-1)}) - 2g(x_n^{(i)}) + g(x_n^{(i+1)})], \quad (2.23)$$

é o mais utilizado nos estudos de redes de mapas acoplados. Seu nome decorre do fato que o termo de acoplamento pode ser encarado como a discretização de uma derivada segunda espacial

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} \rightarrow \frac{1}{2} [g(x^{(i-1)}) - 2g(x^{(i)}) + g(x^{(i+1)})], \quad (2.24)$$

onde o parâmetro de rede espacial é igual a um:  $\Delta x = (i + 1) - i = 1$ . Tais derivadas ocorrem em termos difusivos de equações de reação-difusão [9].

As três primeiras escolhas para o núcleo do acoplamento referem-se a sistemas com difusão simétrica, ao passo que o último tipo corresponde a um acoplamento assimétrico. Redes com esta característica têm sido usadas para modelar fluxos abertos [16].

A função  $g(x)$  define a dinâmica de acoplamento. Há apenas dois casos de interesse:

1. Acoplamento Linear:  $g(x) = x$ ,
2. Acoplamento Futuro:  $g(x) = f(x)$ .

As vantagens do acoplamento futuro estão no fato dos mapas permanecerem dentro do domínio do mapa isolado, e assim os mapas da rede continuam normalizados. Além do mais, os mapas dos sítios  $i \pm 1$  são iterados antes de serem acoplados ao sítio  $i$ , isso fornece uma melhor aproximação do mapeamento estroboscópico de uma cadeia análoga de osciladores a tempo contínuo.

A iteração simultânea dos vizinhos é uma aproximação melhor do estado corrente da rede, em relação ao simples uso de seus valores no instante precedente. Por exemplo, um acoplamento Laplaciano futuro é dado por

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon_0) f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon_0}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})]. \quad (2.25)$$

No entanto, poderíamos permutar os processos, primeiro acoplando os valores dos vizinhos e depois aplicando a função do mapa ao resultado

$$x_{n+1}^{(i)} = f\left((1 - \epsilon_0) x_n^{(i)} + \frac{\epsilon_0}{2} [x_n^{(i-1)} + x_n^{(i+1)}]\right), \quad (2.26)$$

Esta substituição não deve alterar qualitativamente nenhum dos resultados obtidos com a primeira forma do mapa.

O caso extremo de acoplamentos não locais é o chamado *acoplamento global*, onde o sítio  $i$  acopla com a média de todos os sítios da rede, e por esse motivo também é chamado de acoplamento do tipo *campo médio* [5].

$$x_{n+1}^{(i)} = f\left(x_n^{(i)} + \frac{\epsilon_0}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n^{(j)})\right). \quad (2.27)$$

Outro exemplo de acoplamento não-local é o acoplamento tipo lei de potência, que leva em conta a distância de uma sítio  $i$  em relação a outro sítio na rede [24].

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon_0}{\eta} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} [f(x_n^{(i-j)}) + f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)})], \quad (2.28)$$

onde

$$N' = \frac{N-1}{2}, \quad (2.29)$$

e

$$\eta = \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha}, \quad (2.30)$$

é um fator de normalização que depende do parâmetro de alcance  $\alpha$ .

O sistema com um acoplamento do tipo lei de potência possui dois casos limites em relação ao valor de  $\alpha$  (alcance do acoplamento).

1. Acoplamento do tipo local para o valor de  $\alpha \rightarrow \infty$ ,
2. Acoplamento do tipo global quando o valor de  $\alpha = 0$ .

Existe também um modelo de mapas acoplados, denominado redes de *Small-world* [18], em analogia com o fenômeno de 'pequeno mundo' [17]. Redes de pequeno mundo são uma interpolação entre redes conectadas regularmente e rede conectadas aleatoriamente [18]. Algumas aplicações de redes de pequeno mundo seria a propagação de doenças [18], fenômenos de mundo pequeno e redes de artistas que atuaram juntos [17], etc.

## 2.3 Acoplamento local

Uma rede de mapas acoplados é um sistema dinâmico que pode ser usado para descrever variações no espaço e tempo em processos de interesse físico. Uma grande classe de sistemas físicos pode ser modelada por uma equação de difusão e reação periodicamente forçada. Partindo do modelo unidimensional para uma variável de estado  $u(x, t)$  [19]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G(t) R(u), \quad (2.31)$$

sendo  $u = f(x, t)$ ,  $x$  a posição e  $t$  o tempo,  $D$  é a constante de difusão,  $R(u)$  a reação não linear e  $G(t)$  a função periódica no tempo. Considerando

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau), \quad (2.32)$$

podemos integrar a (1.25) sobre um intervalo infinitesimal  $[n\tau - \epsilon, n\tau + \epsilon]$ .

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{n\tau - \epsilon}^{n\tau + \epsilon} \frac{\partial u}{\partial t} dt - \int_{n\tau - \epsilon}^{n\tau + \epsilon} D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt - \int_{n\tau - \epsilon}^{n\tau + \epsilon} R(u) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau) dt = 0, \quad (2.33)$$

como  $\epsilon$  é muito pequeno, a integral com a segunda derivada espacial anula-se, assim fazendo a integração obtêm-se o seguinte resultado para a equação 2.33.

$$u(n\tau + \epsilon) = u(n\tau - \epsilon) + R(u(n\tau)). \quad (2.34)$$

Durante  $[n\tau - \epsilon, n\tau + \epsilon]$  apenas a difusão age sobre o sistema, assim derivando  $u$  em relação ao tempo obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(i\omega, (n+1)\tau + \epsilon) - u(i\omega, n\tau + \epsilon)}{\tau}, \quad (2.35)$$

sendo  $\tau$  a diferença entre os tempos  $n+1$  e  $n$ . Para

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(i(\omega+1), n\tau + \epsilon) - u(i\omega, n\tau + \epsilon)}{\omega}, \quad (2.36)$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(i(\omega+1), n\tau + \epsilon) - 2u(i\omega, n\tau + \epsilon) + u(i-1\omega, n\tau + \epsilon)}{\omega^2}, \quad (2.37)$$

na equação (2.31), sendo o  $\omega$  o intervalo entre o sítio  $i$  e  $i+1$ , temos

$$\frac{u(i\omega, (n+1)\tau + \epsilon) - u(i\omega, n\tau + \epsilon)}{\tau} =$$

$$D \frac{u(i(\omega+1), n\tau + \epsilon) - 2u(i\omega, n\tau + \epsilon) + u(i-1\omega, n\tau + \epsilon)}{\omega^2}, \quad (2.38)$$

fazendo que  $u_n^{(i)} = u(i\omega, n\tau + \epsilon)$ , encontramos a relação de recorrência para os mapas acoplados,

$$u_{n+1}^{(i)} = f(u_n^{(i)}) + a_0 f(u_n^{(i)}) + a_L f(u_n^{(i+1)}) + a_R f(u_n^{(i-1)}), \quad (2.39)$$

onde o mapa local é,

$$f(u) = u + R(u), \quad (2.40)$$

e

$$a_0 = -2\epsilon_0,$$

$$a_L = a_R = \epsilon_0, \quad (2.41)$$

com  $\epsilon_0 = \tau D / \omega^2$ , que é a constante de acoplamento. Finalmente, substituindo os valores das equações (3.15) na (2.39) e trocando variável  $u$  por  $x$  para deixar na forma

mais usual encontrado na literatura, temos os mapas acoplados com um acoplamento Laplaciano local.

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon_0) f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon_0}{2} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)})], \quad (2.42)$$

sendo  $\epsilon_0$  a constante de acoplamento.

Para as fronteiras da rede, no acoplamento local, utiliza-se condições de contorno que podem ser, periódicas, fixas, etc . . . . O mapa possui necessidade de condições de iniciais que podem ser: funções periódicas, funções gaussianas, aleatórias, constantes, etc.

## 2.4 Acoplamento Global

No acoplamento local o alcance do acoplamento é pequeno, o sítio  $i$  interage apenas com os seus primeiros vizinhos. O limite oposto corresponde ao acoplamento global, onde interações tem alcance infinito [20], o sítio  $i$  interage com todos os outros sítios da rede, essa interação pode ser descrita pela seguinte relação:

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon_0}{N} \sum_{j=1}^N f(x_n^{(j)}), \quad (2.43)$$

sendo que  $n$  é o tempo discreto e  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) é o espaço discretizado e  $N$ , o tamanho da rede. Esse tipo de acoplamento é chamado na literatura de acoplamento de *campo médio* [5], pois o termo de iteração é na verdade a média espacial de todos os sítios da rede.

O acoplamento global pode simular sistemas que possuem forças de longo alcance na Física e Biologia [20].

Podemos citar situações de um acoplamento do tipo global como a dinâmica *vortex* em fluidos possui ( que possui um longo alcance e iterações não-lineares) [21], o processamento de informação biológica e as possíveis aplicações em engenharia [22], a dinâmica neural que é um sistema não-linear com acoplamento global [22], em modelos de populações onde um aumento da conexão entre populações isoladas conduz a sincronização em fase da população local e desse modo aumentando o perigo de uma extinção global, [23], etc . . . .

## 2.5 Acoplamento tipo lei de potência

O acoplamento tipo lei de potência é aplicado no estudo da sincronização em sistemas biológicos (ritmos cardíacos, redes neurais, espécies de vaga-lumes quando o ritmo de um membro começa a tornar-se único e em outros sistemas biológicos) e em sincronização de sistemas físicos (Junções Josephson, lasers, em sistemas de spin

onde a sincronização seria o comportamento ferromagnético, entre outros sistemas físicos) [24].

O acoplamento tipo lei de potência é dado pela seguinte relação

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon_0}{\eta} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} [f(x_n^{(i-j)}) + f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)})], \quad (2.44)$$

onde para  $N$  ímpar temos

$$N' = \frac{N-1}{2}, \quad (2.45)$$

$$\eta = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha}, \quad (2.46)$$

Ele vem da observação que a somatória no termo de acoplamento acima é uma média aritmética ponderada das parcelas  $f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})$ , sendo o fator  $\eta(\alpha)$  a soma de todos os pesos estatísticos correspondentes. Este tipo de acoplamento foi introduzido por Rogers e Wille [24] para uma cadeia de osciladores, e estendida por Viana e Batista para redes de mapas acoplados [25].

O expoente  $\alpha$  está relacionado com o alcance do acoplamento, e  $\alpha$  possui dois extremos. Um quando  $\alpha = 0$ ,

$$\eta = N - 1, \quad (2.47)$$

e a equação (2.44), fica

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon_0}{N-1} [f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i+1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + \dots \\ + f(x_n^{(i+N')}) + f(x_n^{(i-N')}) - 2f(x_n^{(i)})], \end{aligned} \quad (2.48)$$

como  $N' = \frac{N-1}{2}$

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon_0) f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon_0}{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^N f(x_n^{(j)}), \quad (2.49)$$

e todos os sítios interagem igualmente com o sítio  $i$ , tendo assim uma acoplamento global.

Outro quando  $\alpha \rightarrow \infty$ ,

$$\eta = 2, \quad (2.50)$$

e a equação (2.44) fica,

$$\begin{aligned}
 x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\epsilon_0}{2} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} & \left[ \frac{1}{1^\alpha} \left( f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)}) \right) + \right. \\
 & \frac{1}{2^\alpha} \left( f(x_n^{(i-2)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+2)}) \right) + \dots + \\
 & \left. \frac{1}{N'^\alpha} \left( f(x_n^{(i-N')}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+N')}) \right) \right] \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

pode-se observar que apenas os termos  $i+1$  e  $i-1$  são importantes para a dinâmica do sistema, os demais termos todo tendem para 0. Então apenas os primeiros vizinhos interagem com o sítio  $i$ , assim temos um acoplamento local.

## Capítulo 3

# Memórias de curta duração em redes de mapas acoplados

As memórias de curta duração foram utilizadas por Coppersmith para explicar as ondas de densidades de carga (*CDW*) em  $NbSe_3$  [6], onde as memórias eram descritas pela sincronização das respostas a um trem de pulsos  $V/I$  ( $V$  = voltagem,  $I$  = a corrente (*CDW*), proporcional a velocidade (*CDW*)  $v_{CDW}$ ) que diminui em cada final de pulso. O *CDW* “recorda” a duração do pulso e ajusta a resposta para estar sincronizada com o pulso, Coppersmith propôs o efeito das memórias com uma assinatura de um processo que ocorre em muitos sistemas dinâmicos [26].

Coppersmith considerou uma rede de mapas acoplados [1], com a intenção de analisar a formação de memórias de curta duração em um sistema dinâmico com muitos graus de liberdade. O sistema é uma equação de difusão que armazena memórias, podendo ser comparado com uma rede neural [27], que é um sistema de parâmetros ajustáveis que armazena certos padrões que minimizam a energia funcional do sistema.

Para obter o modelo matemático do sistema, podemos partir do trabalho de Coppersmith [28], onde ele modela as densidades de cargas por um modelo que consiste em  $N$  partículas, de massa  $m$ , acopladas por molas de constante elástica  $\kappa$ , sujeitas a um forçamento periódico externo e um potencial senoidal. A equação que descreve esse movimento

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x}_j + \kappa(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) - A \sin(x_j) + E, \quad (3.1)$$

com  $j = 1, 2, \dots, N$ , onde  $x_j$  é a posição da partícula,  $\gamma$  é a constante de amortecimento e  $A$  a amplitude do potencial. Considerando  $\gamma \gg m$ , podemos desprezar o termo inercial da equação (3.1), obtendo a seguinte relação

$$\dot{x}_j = K(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) - V \sin(x_j) + F, \quad (3.2)$$

onde se  $K$  for zero, então as equações desacoplam e podemos integrá-las analiticamente [29].

O mapa utilizado por Coppersmith [29] consiste em dois passos equação (3.3) (3.4). O primeiro passa imita o comportamento do sistema durante o pulso, quando a força aplicada domina o movimento, desde que  $F \gg V \gg K$ .

O segundo passo imita o efeito de quando o pulso é desligado quando as partículas tende a cair em um minimo potencial.

$$y_j^{(n)} = x_j^n + t \left[ K \left( x_{j+1}^{(n)} - 2y_j^{(n)} + x_{j-1}^{(n)} \right) + F + d_j \right], \quad (3.3)$$

$$x_j^{(n+1)} = \text{int} \left[ y_j^{(n)} + \frac{1}{2} \right], \quad (3.4)$$

onde  $d_j$  são referentes aos potenciais [30].

As equações (3.3) e (3.4), tomamos que  $F$  pode ser um inteiro e rescrevemos as duas equações [26]

$$x_j^{(n)} = x_j^{(n)} + \text{int} \left[ K \left( x_{j+1}^{(n)} - 2y_j^{(n)} + x_{j-1}^{(n)} \right) + F + d_j + \frac{1}{2} \right] \quad (3.5)$$

Em seu trabalho, “*Self-Organized Short-Term Memories*” [6], Coppersmith utilizou a equação (3.6), para modelar um sistema de  $N$  graus de liberdade,

$$x_{n+1}^{(i)} = x_n^{(i)} + \text{int} \left\{ K \left[ x_n^{(i+1)} + x_n^{(i-1)} - 2x_n^{(i)} \right] - (1 + A_n) \right\}. \quad (3.6)$$

Essa equação descreve um sistema de  $N$  partículas. Todas a partículas estão acoplados com seus primeiros vizinhos, através de molas de constantes  $K$  iguais e sujeitas a um forçamento externo periódico  $A_n$ . Uma das extremidades do sistema é fixa ( $x_n^{(0)} =$ ) e a outra é livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$ . A função  $\text{int}\{z\}$ , é uma função descontínua que retorna o maior inteiro igual ou menor do que  $z$ , a função  $\text{int}\{z\}$  surge na equação (3.6), pois a cada final de pulso as partículas estão em um potencial mínimo.

A variável de estado  $x_n^{(i)}$ , na equação (3.6), pode representar a posição, fase ou outra propriedade física do sistema.

Para observamos as formações das memórias utilizaremos a variável de curvatura (equação 3.7), que é a segunda derivada da variável de estado (vide equação 2.24)

$$c_n^{(i)} = K \left[ x_n^{(i+1)} + x_n^{(i-1)} - 2x_n^{(i)} \right]. \quad (3.7)$$

Em nosso trabalho utilizaremos no lugar de  $x_n^{(i)}$  nas equações (3.7) e (3.6) a função utilizada por Batista e Viana em seu trabalho [31]

$$f(x) = x + Rx^2, \quad (3.8)$$

onde  $R > 0$ , controla a não-linearidade do sistema.

Utilizando a equação (3.6), (3.7) e (3.8), podemos estudar a formação das memórias de curta duração e as memórias permanentes (valores transientes e valores finais das variáveis de curvatura). Podemos ver pela figura (3.1) (onde  $N$  é o tamanho da rede,  $n$  o tempo de iteração,  $A_n$  o forçamento externo e  $K$  a constante da mola), a formação das memórias transientes e das memórias permanentes em uma

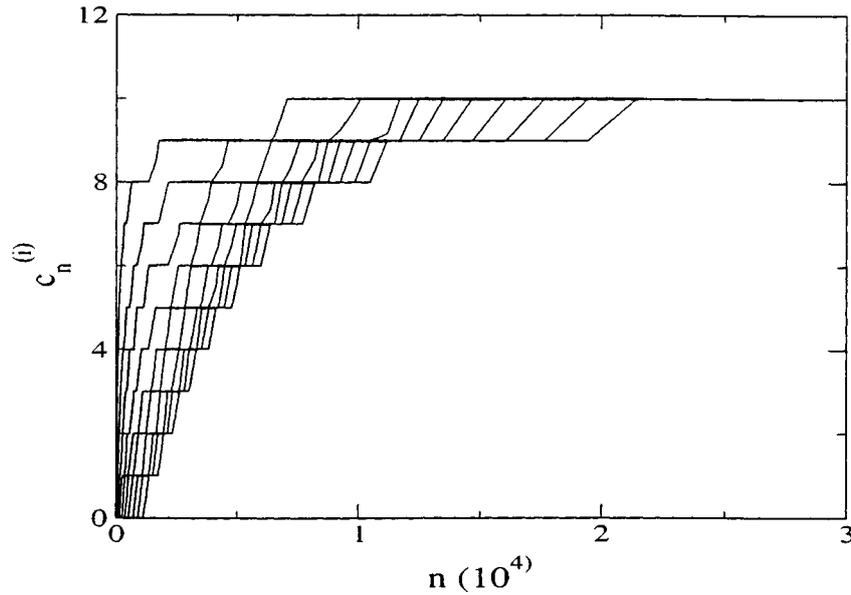


Figura 3.1:  $c_n^{(i)} \times n$ . O tamanho da rede é  $N = 10$ , com  $K = 0, 1$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar e  $A_n = 10$  para  $n$  par. A função  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$

rede de 10 mapas acoplados localmente, onde a dinâmica do mapa isolado é linear.

Para compreender a formação das memórias, necessitamos olhar para a figura (3.1). Inicialmente, cada pulso causa um incremento em todos os  $x_n^{(i)}$ , menos para o mapa acoplado na extremidade fixa, na qual começa a apresentar um aumento da variável de curvatura  $c_n^{(i)}$ . Com o decorrer das iterações a variável de curvatura aumenta cada vez mais até que o acoplamento entre o primeiro sítio e a extremidade fixa, possui um valor constante com a aplicação ( $A_1 = 9$ ). Depois de algumas iterações o acoplamento não é mais suficiente para mudar a ação do forçamento  $A_2 = 10$ , ocasionando um aumento da variável de curvatura até a memória permanente. Isso ocorre para o  $c_n^{(2)}$ ,  $c_n^{(3)}$  e para os outros  $c_n^{(i)}$ . Assim a variável de curvatura estende-se para todos os valores inteiros dos  $c_n^{(i)}$ , e ao final de um longo tempo, ocorre uma saturação [6, 31],  $c_n^{(i)} = 10$ .

Utilizando a figura (3.1), podemos observar que as memórias transientes são formadas durante um número determinado de iterações e posteriormente perde-se toda a sua informação, não podendo ser mais recuperada. A medida que o tempo ( $n$ ) evolui, a variável de curvatura é forçada para um ponto fixo, onde ficará enquanto o pulso periódico estiver agindo sobre o sistema.

Podemos variar os valores finais das variáveis de curvatura com o termo não-linear  $R \neq 0$  ou inserindo uma perturbação estocástica ao forçamento do sistema. Quando inserimos uma perturbação estocástica no mapa que descreve a dinâmica do sítio isolado as memórias transientes são mantidas por um tempo maior [6].

### 3.1 Tempo transiente das memórias

Podemos variar o tempo e os padrões das memórias modificando certas características da rede (constante de acoplamento  $K$ , valor do forçamento  $A_n$ , o tamanho da rede  $N$  e a função que descreve o mapa  $f(x)$ ).

Redes maiores possuem memórias transientes com um maior tempo de duração do que redes menores e conseqüentemente as redes maiores necessitam de um tempo maior para apresentar um valor final constante para variável de curvatura.

Podemos observar através da figura (3.2), que para um rede de  $N = 2$  as memórias transientes quase não estão presentes no sistema, em um rede de  $N = 10$ , ocorre o surgimento das memórias transientes [6] e o tempo necessário para os sítios atingirem o valor final da variável de curvatura é maior do que uma rede de  $N = 2$ .

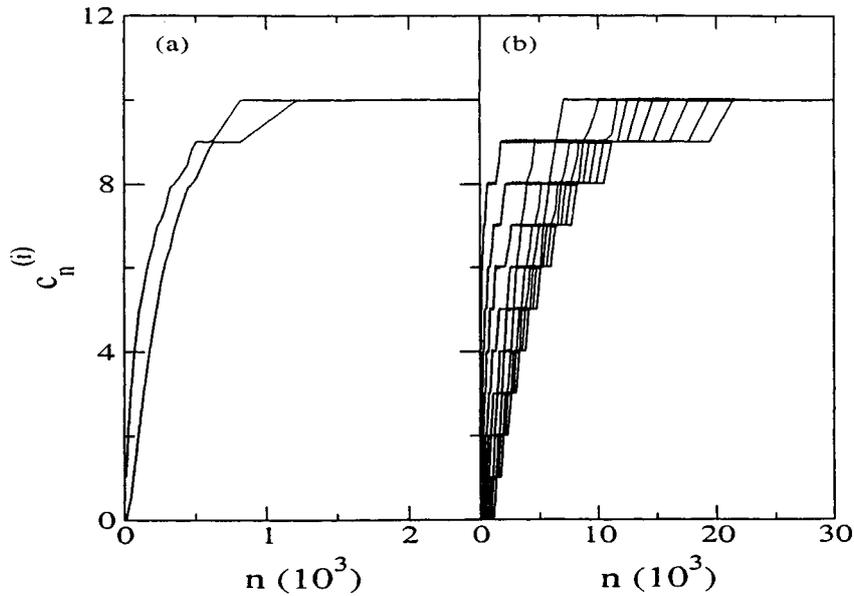


Figura 3.2:  $c_n^{(i)} \times n$ , com  $K = 0,01$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par e  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$ . (a)  $N = 2$  e (b)  $N = 10$ .

Na figura (3.2) podemos observar que o tempo necessário para o sítio  $i$  atingir o valor permanente da variável de curvatura  $c_n^{(i)} = 10$ , varia em relação ao tamanho da rede.

O tempo necessário para o sítio  $i$  atingir o padrão final da memórias depende de sua posição na rede [31], onde os sítios mais distantes da extremidade fixa necessitam de um tempo maior para atingir o valor final da memória, como pode ser observado na figura (3.3). Na figura (3.3) temos  $n^* \times i$ , com uma rede com tamanho  $N = 50$ ,  $K = 0,01$  e  $A_n = 10$  para estudar e entender como a distância do sítio  $i$  em relação a extremidade fixa influencia no tempo ( $n^*$ ) necessário para a variável de curvatura do sítio  $i$  atingir um valor permanente.

A figura (3.3) nos mostra que o tempo para a variável de curvatura atingir

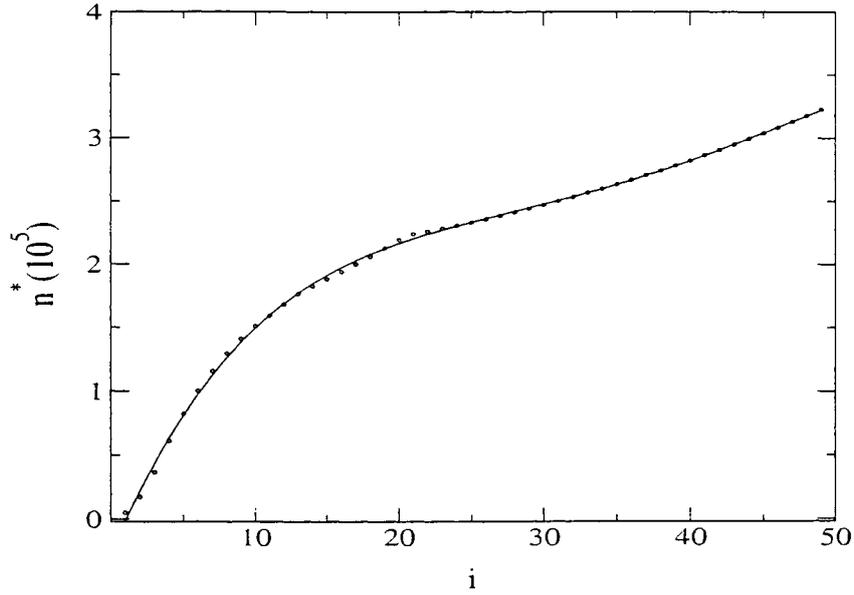


Figura 3.3:  $n^* \times i$ , para uma rede  $N = 10$ ,  $K = 0,01$  e  $A_n = 10$ . Uma extremidade fixa  $x_n^{(0)} = 0$  e outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$ .

o valor permanente varia de forma não-linear a medida que nos afastamos da extremidade fixa, assim o tempo aumenta muito rapidamente para os sítios próximos a extremidade livre, como pode ser descrita pela equação (3.4), que foi obtida pelo ajuste polinomial dos pontos da curva da [31] figura (3.3)

$$n = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + a_4 i^4. \quad (3.9)$$

Os valores dos coeficientes do polinômio de quarta ordem, equação (3.4), são apresentados na tabela (3.1).

Tabela 3.1: Valores das constantes do ajuste polinomial da equação (3.3).

Constante	Valor
$a_0$	-26563
$a_1$	26345
$a_2$	-1065,3
$a_3$	20,603
$a_4$	-0,14022

Assim se queremos uma rede onde as memórias sejam formadas rapidamente, teremos que optar por redes pequenas, pois dessa maneira os últimos sítios da rede (a extremidade livre) necessitam de um tempo menor para atingir o valor final dos

padrões das variáveis de curvatura ( $c_n^{(i)}$ ).

Outro parâmetro do sistema que influencia no tempo transiente ( $n^*$ ) para obtenção do valor permanente da variável de curvatura (padrões finais das memórias) é o valor da constante de acoplamento (constante da mola)  $K$ . Para valores pequenos da constante  $K$  da mola o tempo ( $n^*$ ) aumenta rapidamente, já para constantes da mola maiores o tempo ( $n^*$ ) diminui [31].

A figura (3.4) nos indica como varia  $n^*$ , para o sítio  $i = 10$ , em função da constante de acoplamento  $K$  da rede, para um rede de  $N = 10$ . Ela também sugere que uma forma de controlar o tempo ( $n^*$ ) das memórias, seria aumentar ou diminuir o acoplamento entre os sítios vizinhos.

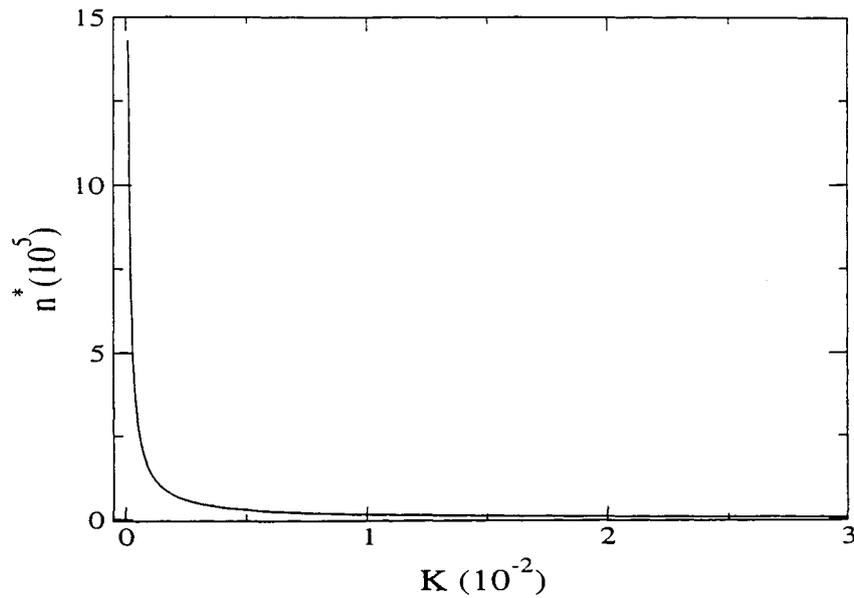


Figura 3.4:  $n^* \times K$ ,  $N = 10$ ,  $i = 10$ ,  $A_n = 10$  para todos os  $n$  e  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$ .

A figura (3.4) mostra o comportamento do sítio 10, esse comportamento é semelhante para todos os sítios da rede atingirem o valor da memória. A função que descreve  $n^{*(i)} \times K$  é

$$n^{*(i)} = b^{(i)} K^{\beta^{(i)}}. \quad (3.10)$$

Os valores dos expoentes ( $\beta^{(i)}$ ), das constantes ( $b^{(i)}$ ) e do coeficiente de correlação ( $r$ ) são mostrados na tabela (3.2).

Existem outras maneiras de variar o tempo transiente para obtenção do valor final da memória, uma delas é a presença de um termo não linear na função que descreve o mapa localmente, como pode ser visto na próxima seção.

Tabela 3.2: sítio  $i$ ,  $\beta^{(i)}$ ,  $b^{(i)}$  e  $r$ .

$i$	$b^{(i)}$	$\beta^{(i)}$	$r$
1	40,788	-1,0009	-0,9999973
2	69,586	-1,0005	-0,9999993
3	85,904	-1,0004	-0,9999996
4	98,321	-0,99969	-0,9999993
5	103,16	-0,99995	-0,9999995
6	108,94	-1,0003	-0,9999994
7	115,73	-1,0005	-0,9999992
8	123,41	-1,0009	-0,9999987
9	132,14	-1,0012	-0,9999981
10	141,46	-1,0018	-0,9999973

### 3.2 Padrões das memórias

Modificando algumas características da rede podemos observar a formação de diferentes padrões de memórias em uma rede de mapas acoplados.

Uma maneira de observarmos a formação de diferentes padrões nos valores das memórias, seria fazer  $R \neq 0$  na equação (3.8), como pode ser observado na figura (3.5), onde  $N$  é o tamanho da rede,  $n$  o tempo,  $K$  a constante de acoplamento e  $A_n$  o forçamento.

Como para  $R = 0$ , existe uma variação contínua de pontos fixos instáveis, com a inserção do termo não-linear  $R = 10^{-8}$  a variável de estado varia de forma não linear, dependendo do parâmetro  $R$ . Fazendo o gráfico do mapa isolado de  $x$  versus  $f(x)$ , podemos observar que o mapa fica muito próximo da reta  $f(x) = x$ . Essa pequena variação  $x_n^{(i)}$  no mapa isolado, quando acoplado, faz surgir memórias isoladas e grupos de memórias com valores diferentes. Apesar do termo não-linear ser pequeno  $R = 10^{-8}$ , as variáveis de estado são da ordem de  $10^4$ , assim o termo não-linear, embora pequeno é muito significativo para a dinâmica do sistema [31].

Com a presença do termo não-linear as variáveis de estado tendem a sincronizar em amplitude e a medida em que aumentamos o termo que controla a não linearidade do sistema ( $R$ ) as variáveis de estado sincronizam cada vez mais, assim as variáveis de curvatura tendem a se anularem pois os valores de  $x_n^{(i)}$  encontram-se cada vez mais próximos [31].

Podemos obter diferentes padrões alterando o forçamento do sistema, pois o valor final da variável de curvatura depende do valor do forçamento. Outra maneira seria inserir uma perturbação estocástica. Essa perturbação também altera o valor final da variável de curvatura apresentando assim diferentes padrões de memórias.

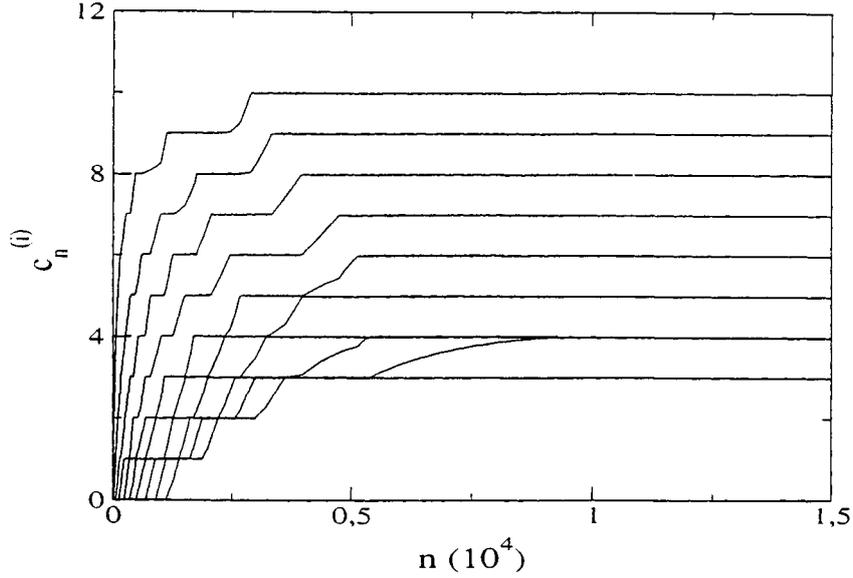


Figura 3.5:  $c_n^{(i)} \times n$ . O tamanho da rede é  $N = 10$ , com  $K = 0,1$ ,  $A_n = 10$  para qualquer  $n$ . A função  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 10^{-8}$ .

### 3.3 Perturbação estocástica

Em nosso trabalho surgiu o interesse de estudar o sistema, quando esse estivesse sob a influência de uma perturbação totalmente aleatória. Neste sistema Coppersmith observou que a presença de um ruído alterava o tempo das memórias de curta duração [6, 32].

Vamos denominar perturbações aleatórias pela letra grega  $\rho$ , quando fizermos referência à perturbação aleatória na função que descreve o mapa. Vamos denominar  $\rho$  por perturbação estocástica no mapa, definida da seguinte maneira,

$$\rho = \frac{Amp_F}{\max\{A_n\}}, \quad (3.11)$$

onde  $Amp_F$  é a amplitude máxima da perturbação estocástica que a função  $f(x)$  está sujeito e o  $\max\{A_n\}$  é o valor máximo do pulso da perturbação externa.

Para uma perturbação estocástica inserida no forçamento do sistema faremos referência pela letra grega  $\delta$ , definida na equação (3.12)

$$\delta = \frac{Amp_A}{\max\{A_n\}}, \quad (3.12)$$

com  $Amp_A$  sendo a amplitude máxima de nossa perturbação estocástica.

Para analisarmos o sistema sobre a influência da perturbação estocástica, utilizaremos do desvio padrão ( $\sigma^{(i)}$ ). Usaremos para o cálculo do desvio padrão a

relação (3.13)

$$\sigma^{(i)} = \sqrt{\frac{1}{n_{\infty} - n_{tran}} \sum_{t=n_o}^{n_{\infty}} (\overline{c_t^{(i)}})^2 - (\overline{c_t^{(i)}})^2}, \quad (3.13)$$

onde  $n_{tran}$  é o número de iterações necessárias para as variáveis de curvatura alcançarem um regime no qual elas oscilam sobre um valor médio constante. O  $n_{\infty}$  é o número de iterações para o último cálculo da variável de curvatura. Para o cálculo dos valores médios das variáveis de curvatura utilizaremos a relação (3.14)

$$\overline{c^{(i)}} = \frac{1}{n_{\infty} - n_{tran}} \sum_{t=n_o}^{n_{\infty}} c_t^{(i)}. \quad (3.14)$$

### 3.3.1 Perturbação estocástica na função $f(x)$

Para compreender a perturbação estocástica na função  $f(x)$  do sistema, vamos supor que o sistema esteja sujeito a perturbações aleatórias diferentes em cada sítio  $i$  da rede. Essas perturbações estocásticas são irregulares no tempo e no espaço, possuindo apenas a mesma amplitude máxima, que define a perturbação estocástica na equação (3.11). O valor da perturbação estocástica possui a sua amplitude máxima que é multiplicada por um valor aleatório, diferente para cada sítio da rede em um determinado  $n$  (tempo). Essa perturbação estocástica afeta cada sítio em separado, mas devido ao acoplamento toda a rede acaba sentindo essas perturbações estocásticas.

A perturbação na função  $f(x)$ , podemos relacionar que em nosso sistema cada sítio da rede sente uma perturbação estocástica com valores diferentes em relação aos outros sítios da rede. Esse forçamento faz com que os mapas possuam diferenças em cada interação, pois os valores das perturbações são diferentes para um sítio em relação ao outro, e diferente para o mesmo sítio em relação ao tempo.

Para a descrição do sistema foram utilizadas as equações (3.6) e (3.7), ocorrendo apenas uma mudança na função  $f(x)$  da equação (3.8)

$$f(x) = x + Rx^2 + \rho\eta_n^{(i)}, \quad (3.15)$$

onde o valor de  $\eta_n^{(i)}$  é um número aleatório que varia no tempo  $[0, 10]$  para um mesmo sítio em relação ao tempo, variando também para os sítios diferentes para um mesmo instante de tempo.

Estudaremos a perturbação estocástica na função  $f(x)$ , equação (3.15), apenas para o caso linear ou seja  $R = 0$ , não sendo estudado o caso não-linear.

A perturbação estocástica aumenta o tempo das memórias transientes. Para compreender o que ocorre com o sistema devemos lembrar que cada pulso causa um aumento em todos os  $x_n^{(i)}$ , menos na extremidade fixa, na qual começa apresentar um aumento na variável de curvatura  $c_n^{(i)}$ . Após algumas iterações o valor do acoplamento entre a extremidade fixa e o primeiro sítio adquire um valor constante sobre a aplicação do menor pulso ( $A_1 = 9$ ), a medida que  $\rho$  aumenta o número dessas

iterações diminui. Com o decorrer de algumas iterações o valor entre o acoplamento entre a extremidade fixa e o sítio  $i$ , não é mais suficiente para alterar o pulso maior ( $A_2 = 10$ ) fazendo a variável de curvatura atingir o valor final ( $c_n^{(i)}$ ). Isto ocorre primeiro para o sítio  $i = 1$ , depois  $i = 2, \dots$  até  $i = N$ .

Na figura (3.6) podemos observar o aumento das memórias transientes para quatro valores da perturbação estocástica  $\rho$ , para uma rede com  $N = 10$  sítios,  $K = 0,01$ ,  $A_1 = 9$ ,  $A_2 = 10$  e  $n$  o número de iterações.

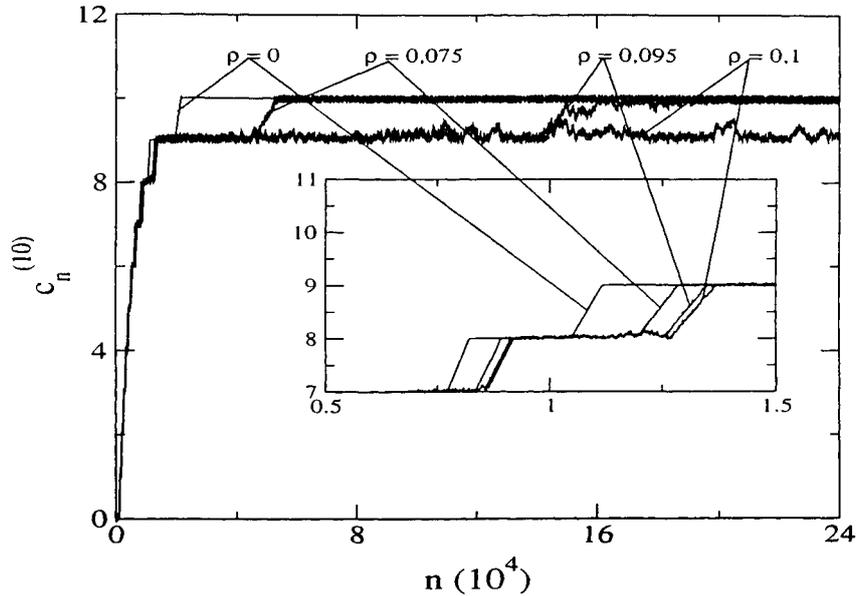


Figura 3.6:  $c_n^{(10)} \times n$ . O tamanho da rede é  $N = 10$ , com  $K = 0,01$ ,  $A_n = 10$  para qualquer  $n$ , com diferentes valores da perturbação estocástica de  $\rho = 0$ ,  $\rho = 0,075$ ,  $\rho = 0,095$  e  $\rho = 0,1$ . A função  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$ . Uma extremidade fixa  $x_n^{(0)} = 0$  e outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$ .

A medida que  $\rho$  aumenta, o número de iterações para o acoplamento do sítio  $i$  não é mais suficiente para alterar o pulso  $A_2$ . Para a perturbação estocástica inserida no mapa vamos apenas considerar aqueles valores onde o valor médio das variáveis de curvatura ficam próximos de 10.

O tempo necessário para a rede atingir a memória permanente aumenta de forma não linear em função da perturbação estocástica ( $\rho$ ) na função  $f(x)$ , como pode ser observado pela figura (3.7). O pico maior é para a perturbação estocástica ( $\rho = 0,095$ ), a partir dessa perturbação estocástica da função  $f(x)$ , o valor médio das variáveis de curvatura ficará mais próximo do valor 9 do que do valor 10 (figura 3.6), neste caso estamos apenas interessados nas memórias próximas a 10.

Na figura (3.7) podemos observar como aumenta o tempo transiente  $\tau$  necessário para uma rede de  $N = 10$  partículas acopladas por molas de constante elástica  $K$  atingirem o padrão médio final das memórias em função da perturbação estocástica.

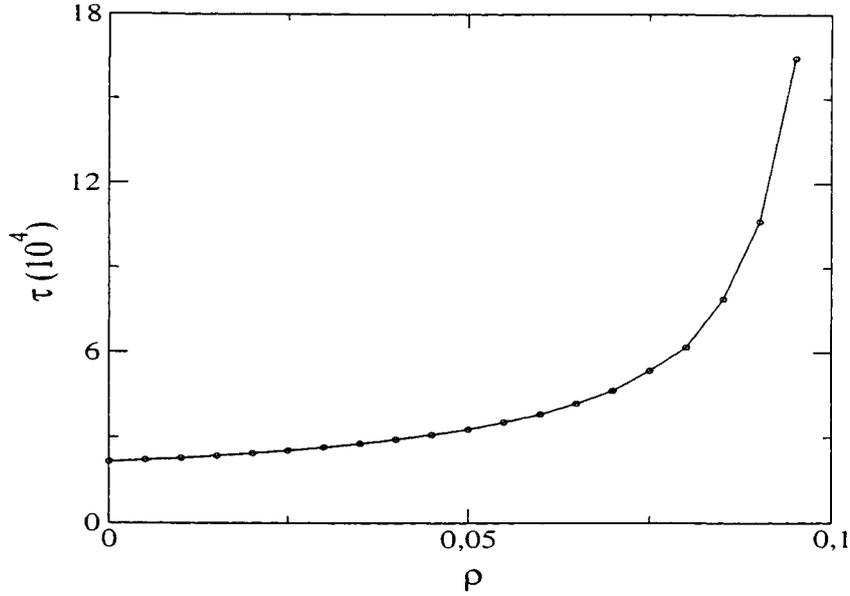


Figura 3.7:  $\tau \times \rho$ . O tamanho da rede é  $N = 10$ , com  $K = 0,01$ ,  $A_n = 10$  para qualquer  $n$ , condições de contorno um extremidade fixa  $x_n^{(0)} = 0$  e a outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$ . A função  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$ .

A equação (3.16) ajusta o tempo transiente  $\tau$  em função da perturbação estocástica com um coeficiente de correlação  $r = 0,99$ .

$$\tau = \frac{10^5}{4,9376 - 41,563\rho}, \quad (3.16)$$

o intervalo considerado foi  $\rho \in [0, 0,095]$

A perturbação estocástica diminui lentamente o valor médio final da variável de curvatura como pode ser visto na figura (3.8a), sendo que o valor da variável de curvatura para  $\rho = 0,1$  é muito próximo de 9.

O desvio padrão do sistema aumenta em função da perturbação estocástica ( $\rho$ ) como pode ser observado na figura (3.8b). Com a figura (3.8b) podemos compreender como os graus de liberdades do sistema aumentam em função da perturbação estocástica. A medida que o sistema sofre a influência de perturbações estocásticas maiores a variável de curvatura possui um número maior oscilações em torno do seu valor médio.

### 3.3.2 Perturbação Estocástica na perturbação externa $A_n$

Foi inserida uma perturbação estocástica no forçamento  $A_n$  do sistema. Podemos descrever o forçamento e a perturbação estocástica pela relação (3.17), onde a perturbação estocástica será um termo que se soma ao forçamento pois sempre

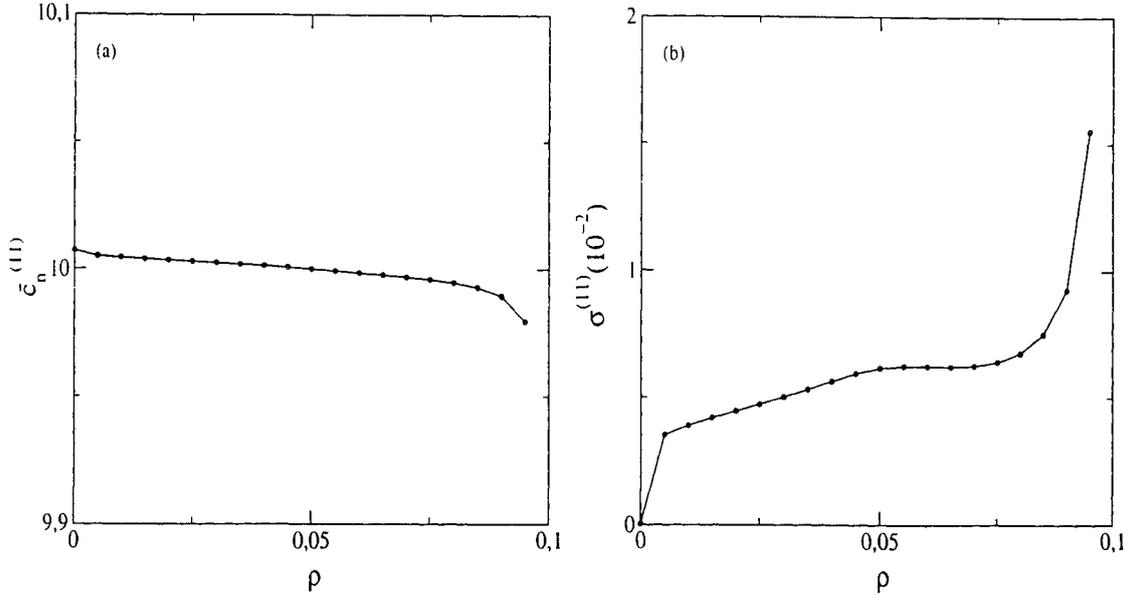


Figura 3.8: O tamanho da rede é  $N = 10$ , com uma extremidade fixa  $x_n^{(0)} = 0$  e outra livre  $x_n^{(N+1)}$ ,  $K = 0,01$ ,  $A_n = 10$  para qualquer  $n$ . A função  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$ . (a)  $\bar{c}_n^{(10)} \times \rho$  e (b)  $\sigma_n^{(10)} \times \rho$ .

terão o mesmo sentido e direção.

$$1 + A_n \rightarrow 1 + A_n + \delta\eta_n, \quad (3.17)$$

onde  $\eta_n$ , varia no tempo entre 0 e 10.

Na figura (3.9) podemos observar como evolui, no tempo, a última variável de curvatura ( $i = 10$ ) para diferentes perturbações estocásticas ( $\delta$ ).

O valor médio da variável de curvatura aumenta em relação a perturbação estocástica, apresentando oscilações para certos valores da perturbação estocástica e o tempo das memórias de curta duração começam a desaparecer a medida que  $\delta$  aumenta.

Para compreender o que ocorre com a rede quando sujeita a um forçamento devemos olhar para a figura (3.9), no começo a variável de curvatura da extremidade fixa começa a aumentar, se o nosso sistema estivesse sem a perturbação estocástica após algumas iterações nossa variável de curvatura ficaria constante sobre a aplicação do forçamento  $A_1$ , mas como temos uma perturbação estocástica o tempo pelo qual  $c_n^{(i)}$  fica constante sobre aplicação de  $A_1$  diminui. A medida que o tempo evolui o acoplamento não é mais suficiente para mudar o forçamento  $A_2$  mais um termo da perturbação estocástica, ocorrendo um aumento no valor da variável de curvatura até um valor final ou valor médio final.

Como a perturbação estocástica diminui o tempo pelo quais as variáveis de curvatura do sistema possuem um valor constante sobre a aplicação de  $A_1$  mais a perturbação estocástica, as memórias transientes vão diminuindo em função de  $\delta$  até

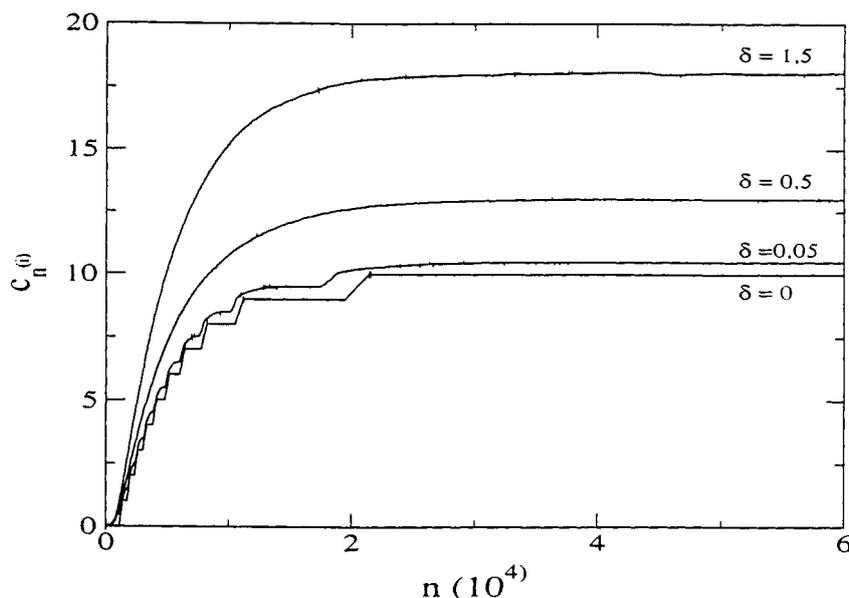


Figura 3.9:  $c_n^{(10)} \times n$ . O tamanho da rede é  $N = 10$ , com  $K = 0,01$ ,  $A_n = 10$  para  $n$  par e  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar. A função  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$ .

não existirem mais no sistema (figura 3.9). Para valores pequenos da perturbação estocástica ( $\delta < 0,1$ ) o sistema apresenta memórias transientes.

A perturbação estocástica influencia o tempo necessário para o sistema chegar a um valor médio da variável de curvatura (figura 3.10).

Para valores menores da perturbação estocástica, menores do que 0,1, a perturbação estocástica tende a aumentar os valores do tempo. Para valores superiores a 0,1 para a perturbação estocástica o tempo tende a diminuir com algumas oscilações.

Pela figura (3.11a) podemos observar que o valor médio das variáveis de curvatura aumenta de forma linear em função a perturbação estocástica ( $\delta$ ), podendo ser descrita por duas retas com coeficientes angulares diferentes. Assim como o valor médio da variável de curvatura e o tempo necessário para a obtenção dos padrões finais das memórias, o desvio padrão  $\sigma^{(10)}$  apresenta uma mudança para uma perturbação estocástica igual a 0,9 como pode ser observado pela figura (3.11b).

Para uma perturbação estocástica menor ou igual a 0,09 ( $\delta \leq 0,09$ ), o valor final da variável de curvatura aumenta com um coeficiente angular aproximadamente igual a 10. O valor médio final da variável de curvatura seria  $10 + \delta$ , não ocorrendo oscilações nas variáveis de curvatura finais. A reta que ajusta a variável de curvatura média em função da perturbação estocástica, é dada pela equação (3.18)

$$c^{(10)} = 10,006 + 10,001\delta, \quad (3.18)$$

com  $r = 0,9999691$ .

Para uma perturbação estocástica superior a 0,09 ( $\delta > 0,09$ ), o valor final da qual a variável de curvatura aumenta com um coeficiente angular aproximadamente

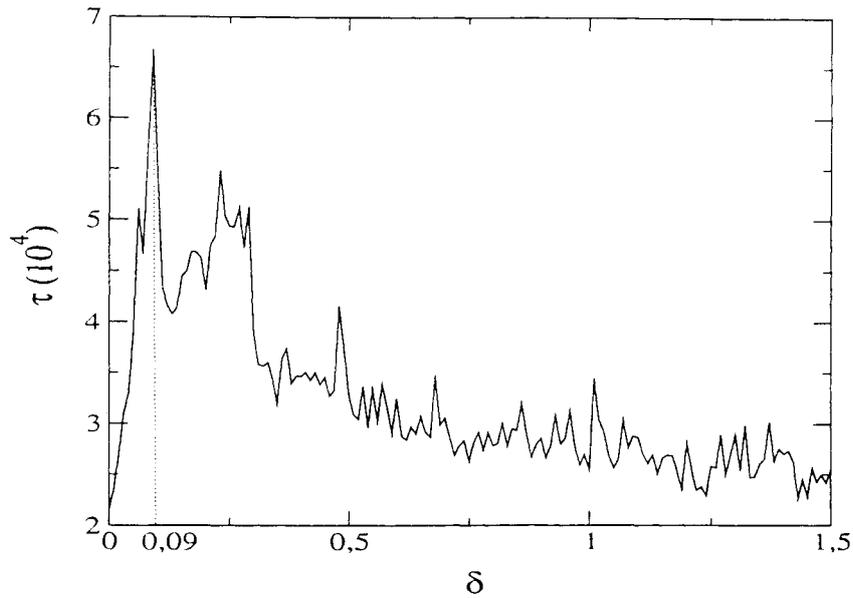


Figura 3.10:  $\tau \times \delta$ . O tamanho da rede é  $N = 10$ , com  $K = 0,01$ ,  $A_n = 10$  para  $n$  par e  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar. A função  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$ .

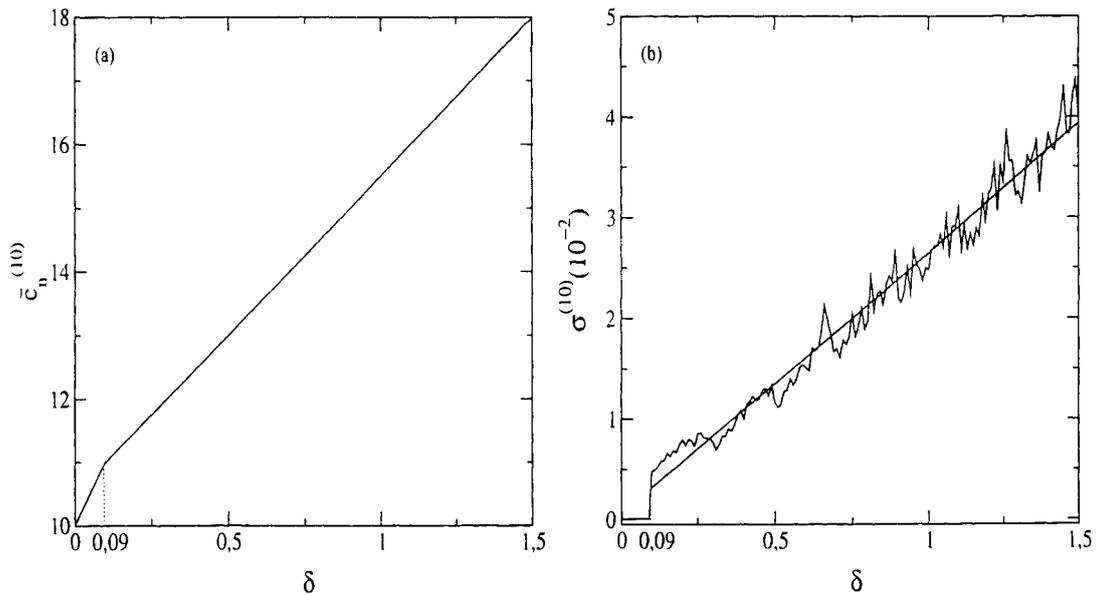


Figura 3.11: O tamanho da rede é  $N = 10$ , com uma extremidade fixa  $x_n^{(0)} = 0$  e outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$ ,  $K = 0,01$ ,  $A_n = 10$  para  $n$  par e  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar. A função  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$ . (a)  $\overline{c_n^{(10)}} \times \delta$  e (b)  $\sigma^{(10)} \times \delta$

5, as variáveis de curvatura finais oscilam em torno do forçamento mais o valor médio da perturbação estocástica. O valor médio final das variáveis de curvatura será  $10 + 0,5\delta$ . A equação (3.19) ajusta a variável de curvatura média em função da perturbação estocástica

$$c^{(10)} = 10,501 + 4,999\delta, \quad (3.19)$$

com  $r = 0,9999993$ .

Para valores da perturbação estocástica menores do que 0,09 ( $\delta \leq 0,09$ ) o desvio padrão é muito pequeno ( $\sigma \approx 0$ ). Para valores da perturbação estocástica maiores do que 0,09 ( $\delta > 0,09$ ) o valor do desvio padrão aumenta de forma linear com a perturbação estocástica, onde o ajuste é a equação (3.20) com  $r = 0,9867763$ ,

$$\sigma_n^{(10)} = 0,00054361 + 0,025883\rho. \quad (3.20)$$

Pelas figuras (3.10),(3.11a) e (3.11b) podemos observar que o sistema quando sujeito a dois forçamentos com valores diferentes apresentam uma mudança de comportamento quando sujeitos a uma perturbação estocástica de no forçamento periódico.

Todos esses resultados da perturbação estocástica foram apresentados quando o sistema estava sujeito a dois forçamentos periódicos, quando aumentamos o número de forçamentos, não observou-se mudanças no sistema. Mas quando diminuimos os dois forçamentos para apenas um forçamento periódico, as mudanças dos comportamentos ocorreram para perturbações estocásticas diferentes, como podemos observar pela figura (3.12).

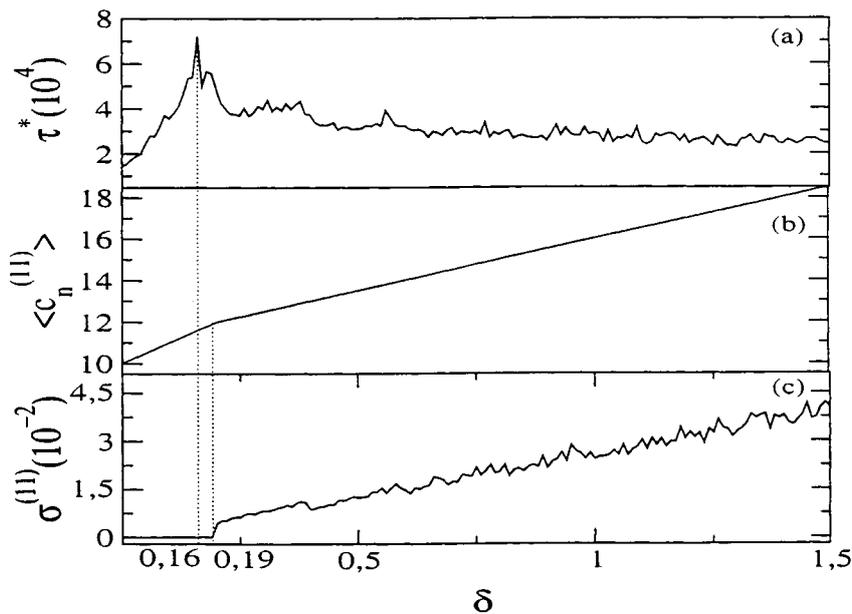


Figura 3.12: O tamanho da rede  $N = 10$ ,  $K = 0,01$ ,  $A_n = 10$  para todos os valores  $n$  e  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$ .(a)  $\tau^* \times \delta$ , (b)  $\langle c_n^{(11)} \rangle \times \delta$  e (c)  $\sigma^{(10)} \times \delta$

Pelas figuras (3.10), (3.11a), (3.11b) e (3.12) podemos observar que o valor da perturbação estocástica para a mudança no comportamento do valor médio  $\overline{c^{(10)}}$  e do desvio padrão  $\sigma^{(10)} \times \delta$  mudaram para  $\delta = 0,19$ . e o tempo ( $\tau$ ) para obtenção da memória média final para um  $\delta = 0,16$ . Outra mudança no sistema é que o valor médio  $\overline{c^{(10)}}$  e o desvio  $\sigma^{(10)}$  mudam sua dinâmica em um ponto da perturbação estocástica ( $\delta = 1,9$ ) diferente que a mudança na dinâmica do tempo ( $\tau^*$ ) ( $\delta = 1,6$ ). Já para o caso de 2 forçamentos periódicos ele ocorrem simultaneamente.

## Capítulo 4

# Memórias de curta duração em redes com acoplamento do tipo lei de potência

No capítulo anterior analisamos a formação de memórias de curta duração em uma rede de mapas acoplados, com um acoplamento do tipo local. Neste capítulo analisaremos a formação de memórias de curta duração em uma rede de mapas acoplados com um acoplamento do tipo lei de potência.

No acoplamento do tipo local a variável de estado ( $x_n^{(i)}$ ) e a variável de curvatura ( $c_n^{(i)}$ ) do sítio  $i$  eram influenciadas apenas pelos sítios vizinhos. Agora com o acoplamento tipo lei de potência, o alcance do acoplamento é aumentado, e a variável de estado e a variável de curvatura do sítio  $i$  sofrem as influências dos sítios mais distantes dele na rede. Os primeiros vizinhos sempre exercem influência no sistema, mas os outros sítios possuem sua influência ajustada pela potência  $\alpha$ . A iteração do sítio  $i$  como os demais sítios da rede diminui com o fator [24]

$$\frac{1}{j^\alpha}. \quad (4.1)$$

Há o interesse no estudo das memórias de curta duração em uma rede de mapas acoplados com acoplamento do tipo lei de potência, porque existem sistemas na natureza que envolvem iterações locais (iterações apenas com os primeiros vizinhos) e não locais (iteração com os demais sítios da rede) descritas por um acoplamento do tipo lei de potência. Podemos citar como exemplos de iterações locais e não locais em uma rede de mapas acoplados alguns fenômenos biológicos, como redes de neurônios que podem armazenar padrões [31] ou populações de vaga-lumes [33], sistemas geofísicos como os terremotos, e outros sistemas físicos como avalanches, resposta da cerâmica  $NbSe_3$  quando sujeitas a pulsos elétricos, sistema massa mola [6], modelos de reações químico-psíquicas, assemble de células biológicas com osciladores ativos, etc [34]. Assim podemos estudar o comportamento de sistemas físicos, que apresentam um padrão (uma resposta) quando sujeitos a um forçamento

externo e periódico, onde os sítios são acoplados com um alcance variável. O padrão formado, a resposta do sistema, é tal que minimiza a energia potencial do sistema.

Neste capítulo analisaremos as memórias de curta duração em redes de mapas com acoplamento do tipo lei de potência para os caso linear, para o caso onde o mapa local possui uma pequena não linearidade ( $R \ll 1$ ) e quando o sistema está sujeito a uma perturbação estocástica.

## 4.1 Modelo

A variável de estado depende da dinâmica do mapa para o sítio isolado mais a dinâmica dos outros sítios da rede e o termos de forçamento, como é descrita pela equação (4.2). O  $\text{int}[z]$  é uma função descontínua, que retorna o maior inteiro menor ou igual a  $z$ .

A função  $\text{int}[z]$  surge na equação (4.2), pois para cada final de pulso uma grande parte das partículas possui sua energia potencial minimizada, onde ao decorrer das iterações formará um padrão na rede (padrão das memórias). O valor da função  $\text{int}[z]$ , depende do somatório (iterações do sítio  $i$  com os demais sítios da rede) e o forçamento externo periódico sobre o sistema.

Utilizaremos a variável de estado para uma rede de partículas acopladas com molas de constante elástica ( $K \ll 1$ ). Para descrever a dinâmica da variável de estado utilizaremos a equação (3.6), substituindo apenas o somatório dentro da função  $\text{int}[z]$ , pois nele que se encontra o acoplamento.

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \text{int} \left\{ \frac{2K}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} [f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-j)})] - (1 + A_n) \right\}, \quad (4.2)$$

onde nossas condições de contorno são uma extremidade fixa e outra livre, assim quando  $i - j < 1$  ou  $i + j > N + 1$  temos o valor zero para o mapa ( $f(x) = 0$ )

A relação (4.3) descreve a dinâmica da variável de curvatura

$$c_n^{(i)} = \frac{2K}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} [f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-j)})]. \quad (4.3)$$

Na função  $\text{int}[z]$  o somatório realiza-se de  $j = 1$  até  $j = N'$ , onde  $N'$  para uma rede com o número de sítios ímpar é dado pela equação (4.4)

$$N' = \frac{N - 1}{2}. \quad (4.4)$$

Já  $\eta(\alpha)$  é uma constante de normalização da rede, que possui um determinado valor em relação a um dado  $\alpha$ , pois  $\eta(\alpha)$  é a soma de todas as contribuições que o sítio  $i$  recebe dos demais sítios da rede. A constante  $\eta(\alpha)$  obedece a relação

com  $\alpha$  dada pela equação (4.1)

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha},$$

existindo dois limites para os valores de  $\alpha$ :

1. Quando  $\alpha \rightarrow 0$ , o valor de  $\eta(\alpha) = N - 1$ , assim temos o caso do acoplamento global ou *campo médio*[21].
2. Quando  $\alpha \rightarrow \infty$ , o valor de  $\eta(\alpha) = 2$  dessa maneira temos o caso local.

A função  $f(x)$  que descreve o mapa isolado na equação (4.2) é um função do tipo

$$f(x) = x + Rx^2, \quad (4.5)$$

com um termo não linear proporcional a  $R$ . Para  $R = 0$ , temos que o mapa isolado é linear.

## 4.2 Caso linear

Primeiramente analisaremos o caso linear, onde a função  $f(x)$  que descreve o mapa isolado é

$$f(x) = x + Rx^2, \quad (4.6)$$

com o parâmetro que regula a não linearidade  $R$  igual a zero.

O primeiro passo no estudo da formação das memórias de curta duração em uma rede de mapas acoplados, com um acoplamento do tipo lei de potência começa pela determinação dos limites de  $\alpha$  para os quais temos um acoplamento do tipo local e um acoplamento do tipo global.

O acoplamento do tipo global é fácil de ser determinado, pois para o valor de  $\alpha = 0$  todos os sítios da rede interagem entre si, sendo o sítio  $i$  influenciado pela média global de todos os sítios da rede. Já o acoplamento do tipo local exige um pouco mais de trabalho para obter o valor de  $\alpha$ . Como no capítulo anterior foi estudado as memórias de curta duração em uma rede de mapas localmente acoplados, assim fica mais fácil obtermos o valor de  $\alpha$  (um grande valor de  $\alpha \rightarrow \infty$ ), para o qual temos o acoplamento local. O valor de  $\alpha$  para o qual o sistema apresentou um comportamento local foi  $\alpha = 15$ .

A figura 4.1 mostra a dinâmica da variáveis de curvatura do sistema para dois valores diferentes de  $\alpha$ . Para  $\alpha = 15$  temos o local, o mesmo comportamento da figura(3.2), para  $\alpha = 0$  temos em nosso sistema um acoplamento do tipo global.

Observamos pela figura (4.1b) que para o caso global ocorrem poucas memórias transientes durante um pequeno intervalo de tempo, necessitando de um número pequeno de iterações para atingir as memórias permanentes. Já para o

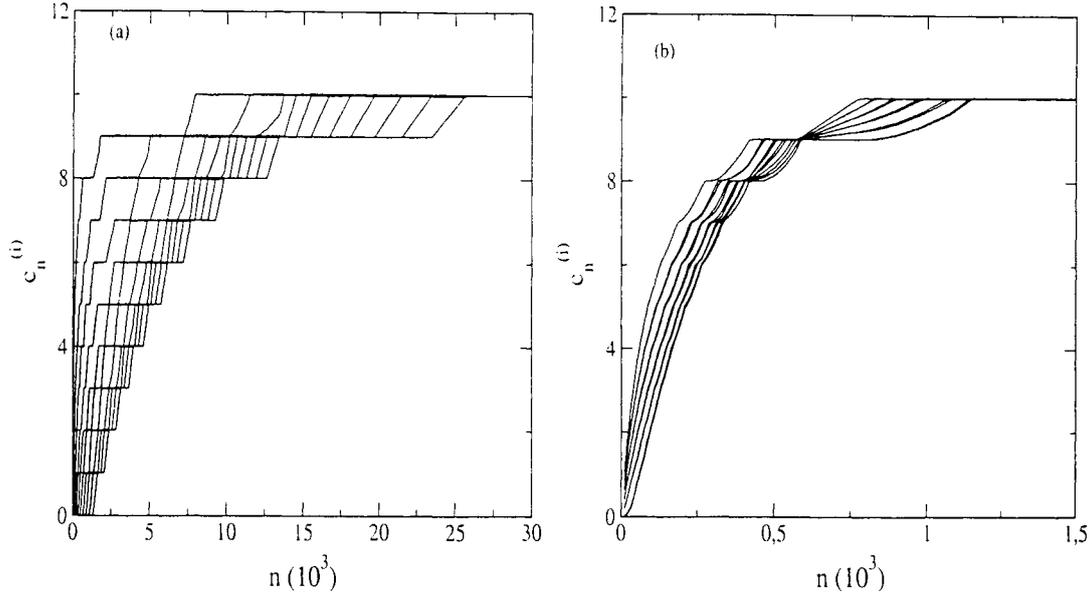


Figura 4.1:  $c_n^{(i)} \times n$ . Rede com  $N = 11$  mapas acoplados,  $K = 0,02$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + Rx^2$ ,  $R = 0$ , condições iniciais aleatórias, uma extremidade fixa  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i < 1$ , outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$  e  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i > N + 1$ . (a)  $\alpha = 15$ , caso local e (b)  $\alpha = 0$  caso global.

caso local, como pode ser observado na figura (4.1a), ocorre um número maior de memórias transientes, assim o caso local necessita de um número de iterações maiores para atingir as memórias permanentes. Assim as memórias transientes são mais bem observadas em sistemas com alcances menores.

Para compreendermos o que ocorre com o sistema quando  $\alpha = 0$  devemos olhar para a função  $\text{int}[z]$  da equação (4.2), onde o termo do somatório

$$\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^0} \left( f(x_n^{(i+j)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i-j)}) \right), \quad (4.7)$$

não influencia na dinâmica inicial das variáveis de estado, pois a razão entre a diferença das variáveis de estado e o termo  $N - 1$  é pequena, sendo que a dinâmica inicial é influenciada apenas pelo forçamento presente na função  $\text{int}[z]$

$$(1 + A_n). \quad (4.8)$$

Em nosso sistema as condições iniciais estão em um intervalo  $[0, 1]$ . Como estamos interessados na diferença das variáveis de estado, o valor do somatório nas primeiras iterações torna-se desprezível, não influenciando o valor da variável de estado já que a soma é dividida por  $N - 1$ . As variáveis de estado são influenciadas apenas pelo forçamento externo nas primeiras iterações.

Dessa forma em poucas iterações o acoplamento torna-se insuficiente para mudar a ação de  $A_n = 10$  ocasionando um rápido aumento da variável de curvatura.

Assim todas as variáveis de estado apresentam um comportamento muito semelhante, onde sua posição na rede sofre apenas a influência devido a sua distância em relação à extremidade fixa ou livre. A dinâmica das variáveis de estado pode ser observada pela figura (4.2).

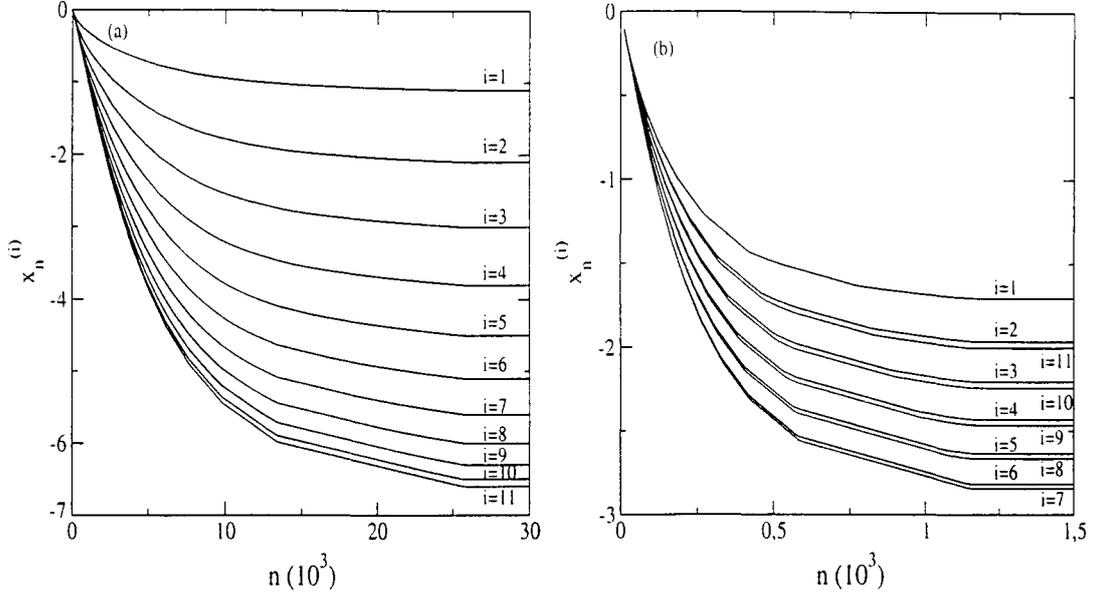


Figura 4.2:  $x_n^{(i)} \times n$ . Rede com  $N = 11$  mapas acoplados,  $K = 0,01$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + Rx^2$ ,  $R = 0$ , condições iniciais aleatórias, uma extremidade fixa  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i < 1$ , outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$  e  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i > N + 1$ . (a)  $\alpha = 15$ , caso local e (b)  $\alpha = 0$  caso global.

Na figura (4.2a) podemos observar que os valores da variável de estado do sítios  $i = 2$  e  $i = 11$  estão afastados um do outro, mas na figura (4.2b) estão muito próximas uma da outra. Logo para  $\alpha = 0$ , o que importa é a distância do sítio  $i$  em relação a extremidade fixa. Como em nosso sistema o número de sítios é ímpar e temos uma extremidade fixa e outra livre, podemos observar que o sítio 11 comporta-se de maneira semelhante ao sítio 2, seria algo muito parecido se tivéssemos um sistema com o 12 graus de liberdade ao lado de uma extremidade fixa.

Quando aumentamos o valor da constante de acoplamento  $K$  na figura (4.2b), ocorre uma diminuição na diferença entre os sítios com o valor da variável de estado mais próximos. A medida que o alcance diminui ( $\alpha$  aumenta) os sítios 2 e 11 vão afastando-se um do outro, como pode ser visto pelas figuras (4.2a) e (4.2b), até que temos o caso local onde o sítio 11 é o último a atingir o valor da memória final, pela figura (4.2a).

Podemos observar pelas figuras (4.2a) e (4.2b) que o tempo para as variáveis de curvatura atingirem as memórias finais varia do acoplamento do tipo local para o acoplamento do global. Dessa maneira efetuou-se o estudo do tempo necessário

para o sistema todo atingir a memória final em função do alcance  $\alpha$ . O tempo necessário para atingir a memória final aumenta de forma não linear a medida que o alcance diminui, como pode ser observado na figura (4.3).

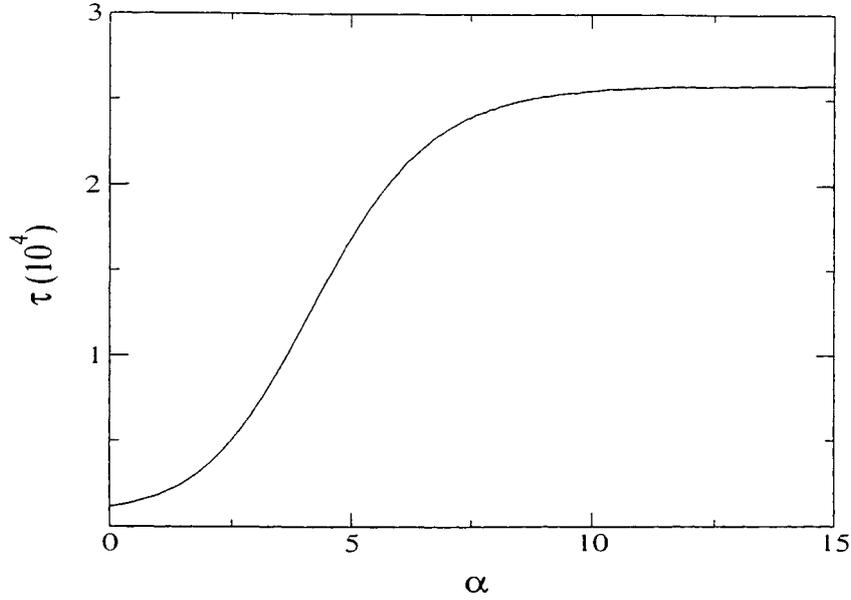


Figura 4.3:  $\tau \times n$ . Rede com  $N = 11$  mapas acoplados,  $K = 0,02$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + Rx^2$ ,  $R = 0$  condições iniciais aleatórias, uma extremidade fixa  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i < 1$ , outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$  e  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i > N + 1$ . A curva foi ajustada pela função Sigmoideal.

A variação do tempo para a memória permanente em função do alcance ( $\alpha$ ) foi ajustada por uma função do tipo Sigmoideal,

$$\tau = \frac{B_1 - B_2}{1 + e^{\frac{(\alpha - \alpha_0)}{d\alpha}}} + B_2, \quad (4.9)$$

os parâmetros que ajustam a função Sigmoideal<sup>1</sup> são:  $B_1 = 451,14$  (o valor inicial de  $\tau$  na função Sigmoideal),  $B_2 = 25757$  (o valor final de  $\tau$  na função Sigmoideal),  $r^2 = 0,99993$  (coeficiente de correlação),  $\alpha_0 = 4,244$  (o valor de  $\alpha$  no centro da sigmoideal) e  $d\alpha = 1,2326$ . A função Sigmoideal é uma função muito utilizada no estudo de redes neurais, para a ativação dos neurônios<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>ajuste do Origin 6.0

<sup>2</sup> O trabalho em redes neurais artificiais e comumente referido com redes neurais[35], onde o "neurônios" são os processadores básicos em uma rede neural. São utilizadas funções não-lineares para a ativação dos "neurônios", podemos citar como exemplo de funções não-lineares as funções Sigmoideais. As funções Sigmoideais são as mais utilizadas na ativação de "neurônios", pois são funções que apresentam um aumento com propriedades regulares e são funções diferenciáveis.

### 4.3 Caso não-linear

Considerando o termo não linear  $R \neq 0$ , obtemos uma função do tipo não-linear que descreve o mapa isolado.

No capítulo anterior, onde o sistema estava acoplado localmente, o termo não linear ocasionava a formação de padrões intermediários para as memórias permanentes (figura (3.5)) devido a uma sincronização em amplitude das variáveis de estado [31]. Como a variável de curvatura do sítio  $i$  depende da diferença entre a variável de estado do sítio  $i$  em relação ao seus vizinhos, a sincronização devido ao termo não linear fazia os valores das variáveis de curvatura diminuírem [31].

A figura (4.4) mostra a dinâmica da variável de curvatura para dois valores de  $\alpha = 0$  e para  $\alpha = 15$ , caso global e local respectivamente. As figuras (4.4a) e (4.4b) possuem as mesmas condições iniciais e de contorno, os mesmos valores para  $A_n$ ,  $K$  e  $N$ , apenas o alcance do acoplamento muda. As figuras (4.4) e (4.1) possuem os mesmos  $A_n$ ,  $K$  e  $N$ , a única diferença é que na figura (4.4) existe a presença do termo não linear ( $R = 10^{-8}$ ). Em (4.4a) o alcance é local e na figura (4.4b) o alcance é global.

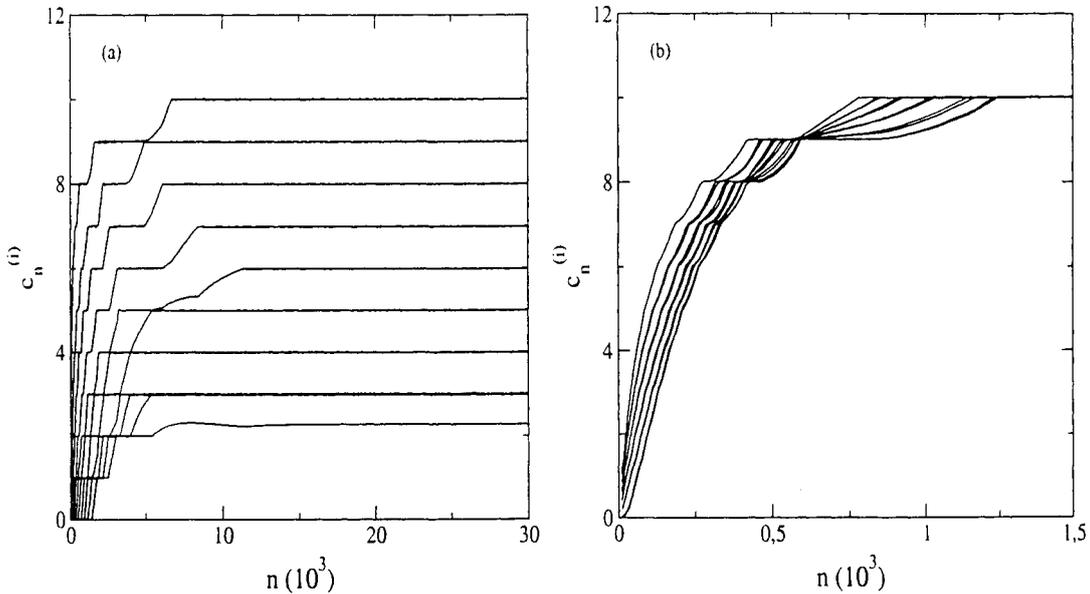


Figura 4.4:  $c_n^{(i)} \times n$ . Rede com  $N = 11$  mapas acoplados,  $K = 0,02$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + Rx^2$  com  $R = 10^{-8}$ , condições iniciais aleatórias, uma extremidade fixa  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i < 1$ , outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$  e  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i > N + 1$ . (a)  $\alpha = 15$ , caso local e (b)  $\alpha = 0$  caso global.

Analisando os limites para a rede, quando temos o acoplamento do tipo global ( $\alpha = 0$ ) podemos observar que os valores das memórias não são afetados pelo termo não linear, mas quando o acoplamento é do tipo local ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) ocorre mudanças nos padrões das memórias.

Podemos observar que figura a (4.4b) e a figura (4.1b) são iguais, apesar da figura (4.4b) possuir um termo não linear. Assim um sistema acoplado com um acoplamento do tipo lei de potência com  $\alpha = 0$ , não é afetado por um termo não linear. pois as condições iniciais estão no intervalo  $[0, 1]$  e a diferença das variáveis de estado presentes no somatório da função  $\text{int}\{z\}$  é muito pequeno, assim nas primeiras iterações do nosso sistema o forçamento periódico possui maior importância do que a dinâmica inicial das variáveis de estado ( $x_n^{(i)}$ ). Observamos na figura (4.4b) que as memórias finais são todas as mesmas, já na figura (4.4a) ocorre a formação de memórias intermediárias, onde podemos calcular um valor médio para as variáveis de curvatura da rede e um desvio em relação a memória média da rede como pode ser observado na figura (4.5). Na figura (4.5) para pequenos valores de  $\alpha$  o valor médio da variável de curvatura da rede ( $c_L$ ) é constante e o desvio padrão em relação a média da rede ( $\sigma_L$ ) muito próximo de zero. Para o cálculo da variável de curvatura média da rede utilizou-se a equação (4.10) e o desvio padrão da rede em relação a média utilizou-se da equação (4.11),

$$c_L = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \overline{c_n^{(j)}}, \quad (4.10)$$

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left( \overline{c_n^{(j)}} \right)^2 - c_L^2}. \quad (4.11)$$

Pela figura (4.5) podemos observar que para o caso não linear o sistema apresenta um comportamento do tipo global até um  $\alpha = 1,6$ , pois a partir desse valor de  $\alpha$  o valor médio da variável de curvatura começa a diminuir e o valor do desvio padrão em relação a média começa a aumentar. O aumento do desvio padrão e a diminuição do valor médio da variável de curvatura ocorre pelo fato de que o sistema começa a apresentar memórias intermediárias, como pode ser visto pela figura (4.6), memórias que não estão presentes no caso global quando  $\alpha = 0$ .

A figura (4.5) mostra que os padrões médios formados pela rede são diferentes para o caso local e global. Analisando a figura (4.6) vemos que a rede apresenta padrões diferentes para determinados valores de  $\alpha$ . Para o caso global o padrão das variáveis de curvatura  $c^{(i)}$  são todos aproximadamente iguais à 10, mas a medida que o alcance diminui ( $\alpha$  aumenta) vão surgindo diferentes padrões na rede. Quando o acoplamento é local o padrão formado na rede é  $c_n^{(1)} = 9,996677$ ,  $c_n^{(2)} = 8,990253$ ,  $c_n^{(3)} = 8,009873$ ,  $c_n^{(4)} = 6,982756$ ,  $c_n^{(5)} = 5,989003$ ,  $c_n^{(6)} = 4,995053$ ,  $c_n^{(7)} = 3,996320$ ,  $c_n^{(8)} = 3,002406$ ,  $c_n^{(9)} = 3,000947$ ,  $c_n^{(10)} = 2,993097$  e  $c_n^{(11)} = 2,282953$ .

Assim, acoplamentos locais e com termos não lineares, embora muito pequenos ( $R \ll 1$ ), apresentam formações de padrões mais complexos de memórias devido a sincronização de amplitude das variáveis de estado.

Pela figura (4.4) observamos que o tempo necessário para a variável de curvatura do sítio  $i$  atingir o padrão final da memória permanente é diferente para os dois valores de  $\alpha$ . Pela figura (4.7) podemos observar a variação do tempo ( $\tau$ ) necessário para a rede atingir o valor final da memória permanente, onde a medida que

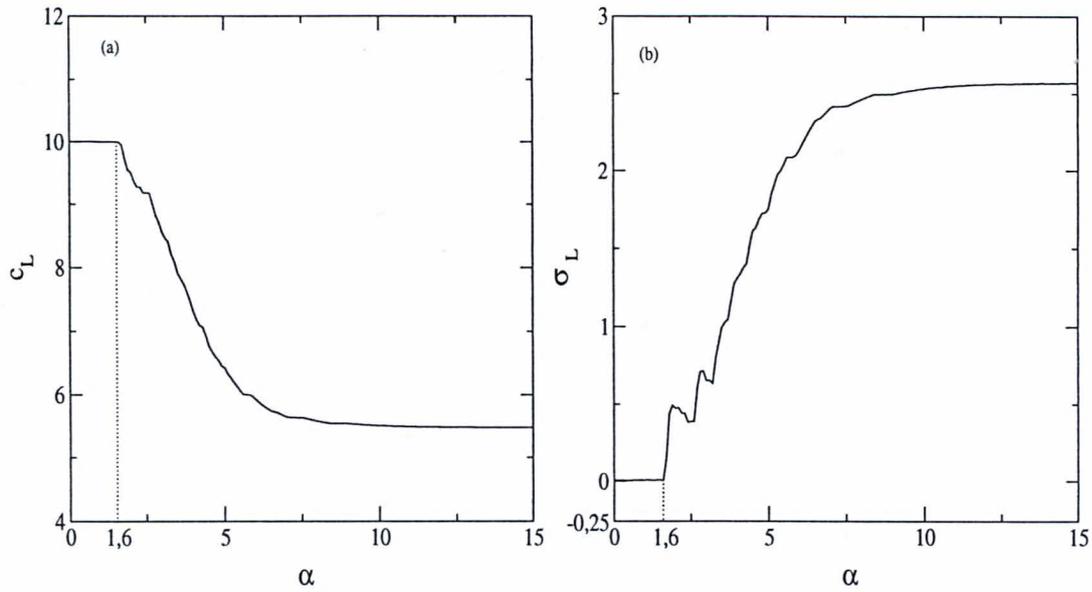


Figura 4.5: Rede com  $N = 11$  mapas acoplados,  $K = 0,02$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + Rx^2$  com  $R = 10^{-8}$ , condições iniciais aleatórias, uma extremidade fixa  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i < 1$ , outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$  e  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i > N + 1$ . (a)  $c_L \times \alpha$  e (b)  $\sigma_L \times \alpha$ .

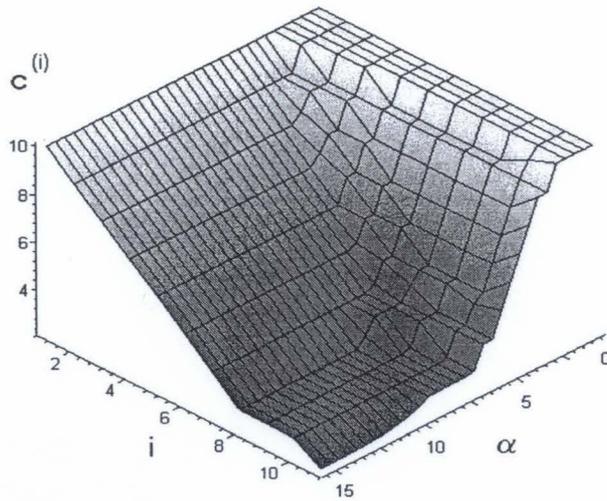


Figura 4.6: O padrão formado por uma rede com  $N = 11$  mapas acoplados,  $K = 0,02$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + Rx^2$  com  $R = 10^{-8}$ , condições iniciais aleatórias, uma extremidade fixa  $x_n^{(0)} = 0$  e outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$ , em função do alcance  $\alpha$ .

o alcance aumenta a não linearidade influência o número de iterações necessárias para a rede atingir o valor da memória final.

Outro fato importante que pode ser visto na figura (4.7) é que para grandes

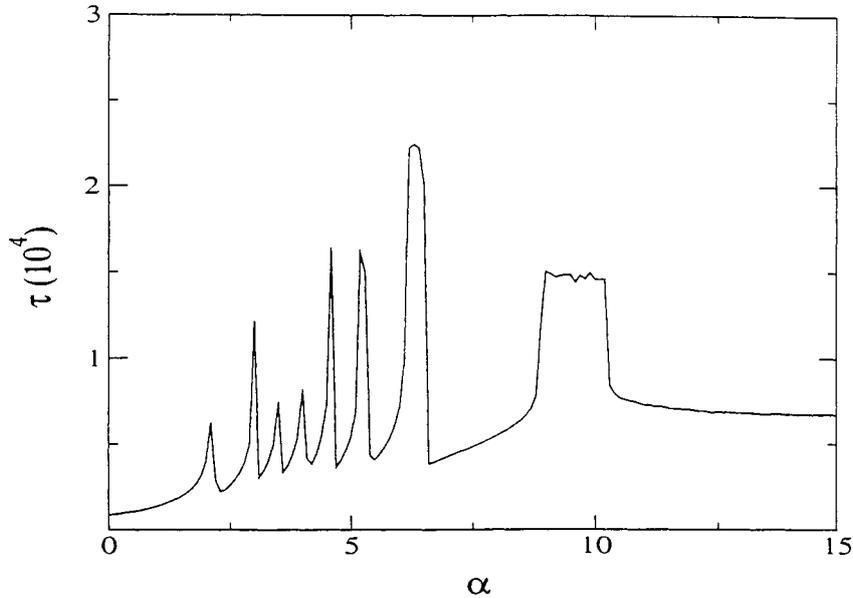


Figura 4.7:  $\tau \times \alpha$ . Rede com  $N = 11$  mapas acoplados,  $K = 0,02$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + Rx^2$  com  $R = 10^{-8}$ , condições iniciais aleatórias, uma extremidade fixa  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i < 1$ , outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$  e  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i > N + 1$ .

valores do alcance ( $\alpha$  pequenos) o número necessário de iterações é muito semelhante ao caso descrito pela função não linear ( $R = 0$ ).

## 4.4 Perturbação Estocástica

No capítulo anterior foi analisado a formação dos padrões de memória em um sistema localmente acoplado, onde o forçamento externo está sujeito a uma perturbação estocástica. Nesta seção analisaremos o que ocorre com o sistema com um acoplamento do tipo lei de potência, quando este está sujeito a uma perturbação estocástica. Analisaremos os dois casos, no primeiro o caso linear quando  $R = 0$  e no segundo o caso não linear para um valor de  $R \ll 1$ .

Quando inserimos a perturbação estocástica devemos lembrar que o nosso sistema possui um alcance delimitado por  $\alpha$ . Assim podemos esperar que o sistema responda, para uma mesma perturbação estocástica, de maneiras diferentes em função de  $\alpha$ . Na figura (4.8) podemos observar o que ocorre com a variável de curvatura para diferentes valores da perturbação estocástica. Na figura (4.8) temos dois valores para  $\alpha$  ( $\alpha = 0$  e  $\alpha = 15$ ) e quatro valores da perturbação estocástica

( $\delta = 0, 0; \delta = 0, 1; \delta = 0, 5; \delta = 1, 5$ ).

Na figura (4.8a) e (4.8b) observamos que o tempo necessário para o sis-

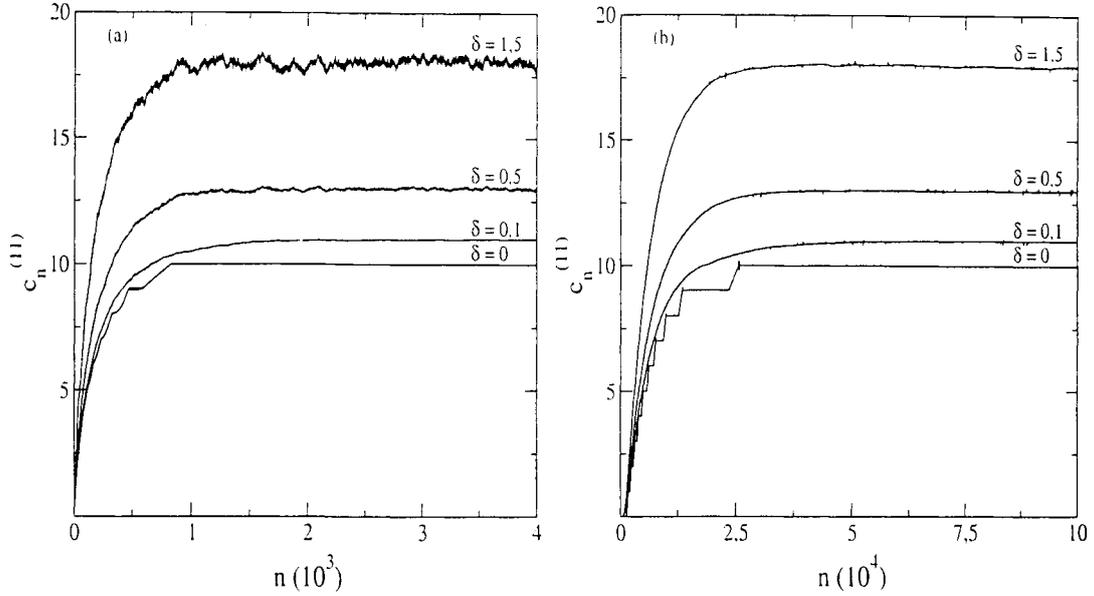


Figura 4.8:  $c_n^{(i)} \times n$ . Rede com  $N = 11$  mapas acoplados,  $K = 0,02$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + Rx^2$ ,  $R = 0$ , condições iniciais aleatórias, uma extremidade fixa  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i < 1$ , outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$  e  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i > N + 1$ . Com quatro valores da perturbação estocástica. (a)  $\alpha = 0$ , caso global e (b)  $\alpha = 15$  caso local.

tema atingir a memória final aumenta em relação a  $\alpha$ , para um mesmo valor da perturbação estocástica. Isso já era esperado, pois quanto maior o valor de  $\alpha$  (alcance menor) o sistema leva um tempo maior para atingir o valor final da memória. A perturbação estocástica influencia o tempo necessário para o sistema atingir o valor final das variáveis de curvatura, como pode ser observado pelas figuras (4.8a) e (4.8b), para onde um mesmo  $\alpha$  o sistema apresenta um número de iterações diferentes quando é variado a perturbação estocástica.

Outro fator importante, é que o sistema possui maiores oscilações em seu valor final da memória para um sistema com alcance maior. No caso global ( $\alpha = 0$ ), o sistema com uma perturbação estocástica  $\delta = 1,5$ , possui oscilações maiores em relação ao sistema com acoplamento do tipo local ( $\alpha = 15$ ). No caso onde a perturbação estocástica é  $\delta \leq 0,1$ , ocorre apenas a mudança no valor final da memória e no tempo necessário para o sistema atingir o valor final da memória, não ocorre maiores oscilações no padrão final das memórias do sistema.

A perturbação estocástica afeta também o tempo necessário  $\tau$  (foi utilizado o tempo do último sítio da rede para atingir o valor final da variável de curvatura) para o sistema atingir os padrões finais das memórias, como ocorria para o caso dos padrões de memórias de um sistema com um acoplamento do tipo local.

Podemos observar pela figura (4.9a), como comporta-se o tempo necessário para a formação dos padrões de memórias para três valores diferentes de  $\alpha$ . A medida que aumentamos a perturbação estocástica o tempo necessário ( $\tau$ ) para o sistema atingir o padrão final das memórias aumenta, até um certo valor limite (o pico), a partir desse valor o tempo  $\tau$  vai diminuindo em função da perturbação estocástica.

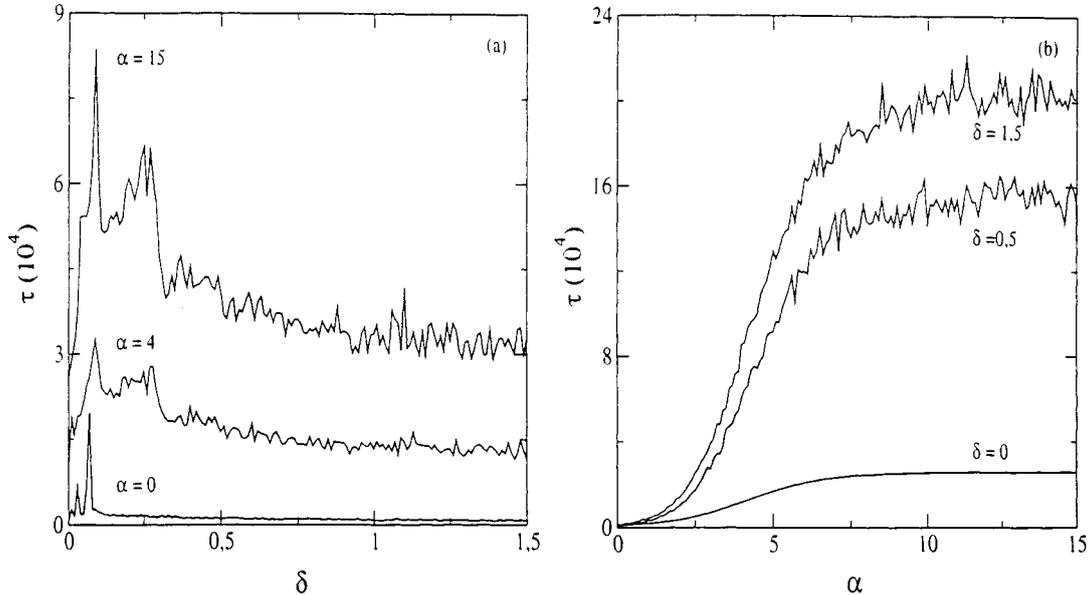


Figura 4.9: Rede com  $N = 11$  mapas acoplados,  $K = 0,02$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + R^2$ , com  $R = 0$ , uma extremidade fixa e outra livre. O sistema sofre uma perturbação estocástica, no seu forçamento periódico. (a)  $\tau \times \delta$ , com  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 4$  e  $\alpha = 15$  e (b)  $\tau \times \alpha$ , com  $\delta = 0$ ,  $\delta = 0,5$  e  $\delta = 1,5$ .

O pico, o tempo máximo para a obtenção do padrão final da memória, depende do valor de  $\alpha$ . Para  $\alpha = 0$  o pico de tempo para a formação dos padrões finais de memória ( $\tau$ ) ocorre para um valor da perturbação estocástica  $\delta = 0,07$ , enquanto que para valores de  $\alpha = 4$  e  $\alpha = 15$  o pico de  $\tau$  ocorre para uma perturbação estocástica  $\delta = 0,1$ .

Pela figura (4.9a) podemos observar como varia o tempo em função da perturbação estocástica para três valores de  $\alpha$ . Na figura (4.9b) como varia o tempo em função do alcance para três valores de  $\delta$ . Observamos que o sistema sofre influência de  $\alpha$  (o alcance do sistema) e de  $\delta$  (a perturbação estocástica) para atingir o seu valor final dos padrões de memórias. Mas como fica o tempo ( $\tau$ ) para obtenção do padrão final das memórias em função do alcance, quando o sistema está sujeito a uma perturbação estocástica?

A figura (4.9b) mostra que a função Sigmoidal continua descrevendo o tempo final para a obtenção dos padrões na rede em função do alcance  $\alpha$ , quando o sistema está sujeito a uma perturbação estocástica. A função Sigmoidal para as três perturbações estocásticas apresentam diferenças em suas constantes ( $B_1$  e  $B_2$ ). Para

valores de alcance pequenos os tempos ( $\tau$ ) necessários para a obtenção dos padrões finais das memórias aumentam. E os valores dos parâmetros que ajustam as Sigmoidais das curvas da figura (4.9b) estão na tabela (4.1), com sua respectiva perturbação estocástica.

Tabela 4.1: Parâmetros de ajuste das Sigmoidais (4.9).

Parâmetros	$\delta = 0$	$\delta = 0,5$	$\delta = 1,5$
$B_1$	151,14	-8173,3	-4982,6
$B_2$	25767	2016000	154150
$d\alpha$	1,2326	1,2006	1,1519
$\alpha_0$	4,2440	4,4019	4,4635
$r^2$	0,99993	0,99544	0,99366

Através da figura (4.8) podemos observar que o valor final das variáveis de curvatura aumenta em função da perturbação estocástica ( $\delta$ ). Na figura 4.10 temos o valor médio final da variável de curvatura. Ocorrem dois regimes no sistema, primeiro quando  $\delta \leq 0,1$  e o segundo quando  $\delta > 0,1$ , onde a principal diferença entre os dois regimes, está no valor do coeficiente angular da reta  $\bar{c}^{(11)}(\delta)$ . Em cada regime a variação do valor médio final da variável de curvatura é do tipo linear. Para os três valores de  $\alpha$  a mudança de comportamento ocorre sobre o mesmo ponto.

No primeiro caso, quando  $\delta \leq 0,1$ , a equação que descreve o aumento do valor médio da variável de curvatura é a equação (4.12), independentemente do valor de  $\alpha$ , pois uma reta sobrepõe a outra

$$\bar{c}^{(11)} = 10,007 + 9,9711333\delta, \quad (4.12)$$

com um coeficiente de correlação  $r^2 = 0.9999101$ .

Para o segundo caso, independente do valor de  $\alpha$ , o aumento do valor médio da variável de curvatura é descrito pela equação (4.13)

$$\bar{c}^{(11)} = 10,498 + 5,0034\delta, \quad (4.13)$$

com um coeficiente de correlação  $r^2 = 0.99999647$ .

Na figura (4.8a) e (4.8b) podemos observar que para  $\alpha = 0$  existe um aumento nas oscilações em torno do valor médio das variáveis de curvatura. Isso sugere um aumento no desvio padrão ( $\sigma^{(i)}$ ) do sítio  $i$  em relação ao valor médio da variável de curvatura.

A figura (4.11), mostra o comportamento do desvio padrão do sítio 11 em função da perturbação estocástica. Para valores da perturbação estocástica menores do que 0,1 ( $\delta < 0,1$ ), o valor do desvio padrão  $\sigma^{(11)}$  é da ordem de  $10^{-5}$ . Para valores da perturbação estocástica maiores do que 0,1 ( $\delta > 0,1$ ), o desvio padrão  $\sigma^{(11)}$  aumenta com a perturbação estocástica. Para valores de  $\alpha$  pequenos o desvio padrão

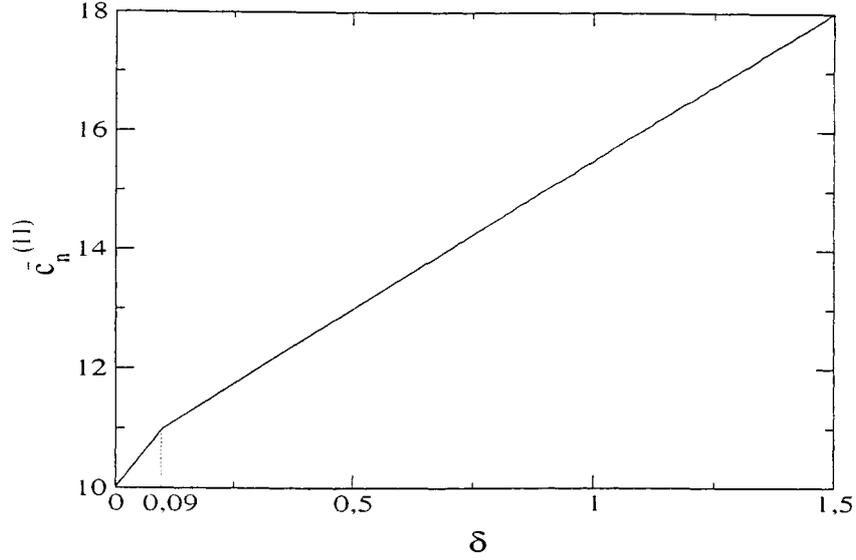


Figura 4.10:  $\bar{c}^{(11)} \times \delta$ . Rede com  $N = 11$  mapas acoplados,  $K = 0,02$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$ , condições iniciais aleatórias e uma extremidade fixa  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i < 1$ , outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$  e  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i > N + 1$ .

aumenta pois as variáveis de curvatura dependem dos outros sítios da rede. Assim as variáveis de curvatura do sítio ( $i$ ) estão sujeitas às perturbações estocásticas dos demais sítios da rede, que dependem do alcance do acoplamento.

O aumento do desvio padrão em função da perturbação estocástica, é dado pela equação (4.14)

$$\sigma^{(11)} = b + a\delta, \quad (4.14)$$

onde para cada valor de  $\alpha$ , existe um valor para as constantes  $a$  e  $b$ . Para  $\alpha = 0$ ,  $b = -0,0045371$ ,  $a = 0,14814$  com coeficiente linear  $r^2 = 0,9962532$ . Com o valor de  $\alpha = 4$  temos  $b = -0,00010821$ ,  $a = 0,035878$  e  $r^2 = 0,97457$ . E para  $\alpha = 15$  temos  $b = 0,00074408$ ,  $a = 0,022916$  e  $r^2 = 0,9493606$ .

Para o caso não-linear podemos observar que a perturbação estocástica influencia o valor final das variáveis de curvatura. Isso pode ser observado pela figura (4.12), onde temos o valor médio das variáveis de curvatura da rede em função de  $\alpha$ , para um sistema onde o mapa local possui uma não linearidade pequena ( $R \ll 1$ ). Na figura (4.12b), temos o desvio padrão da rede em relação a média versus  $\alpha$ .

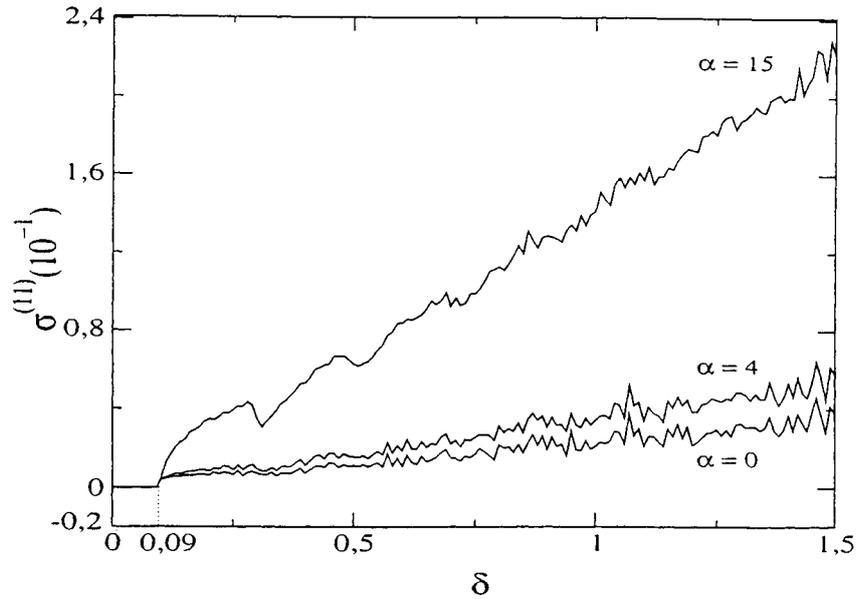


Figura 4.11:  $\sigma^{(11)} \times \delta$ . Com  $N = 11$ ,  $K = 0,02$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 0$ , condições iniciais aleatórias, uma extremidade fixa  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i < 1$ , outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$  e  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i > N + 1$ .

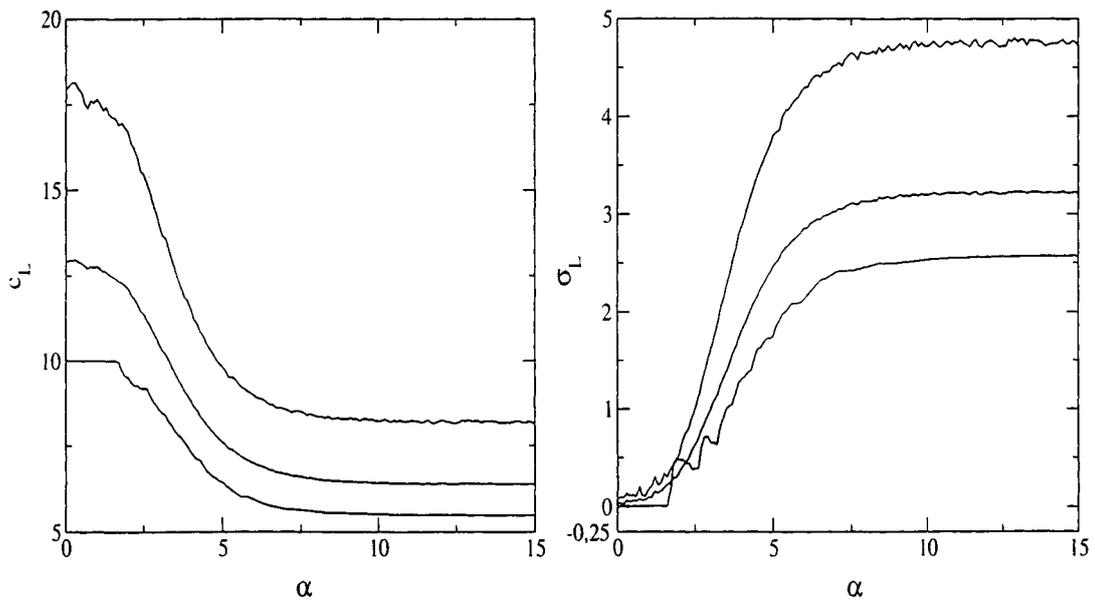


Figura 4.12: Rede com  $N = 11$  mapas acoplados,  $K = 0,02$ ,  $A_n = 9$  para  $n$  ímpar,  $A_n = 10$  para  $n$  par,  $f(x) = x + Rx^2$ , com  $R = 10^{-8}$  condições iniciais aleatórias, uma extremidade fixa  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i < 1$ , outra livre  $x_n^{(N+1)} = x_n^{(N)}$  e  $x_n^{(i)} = 0$  para  $i > N + 1$ . (a)  $c_L \times \alpha$  e (b)  $\sigma_L \times \alpha$

## Capítulo 5

# Memórias de curta duração em circuitos $RL$ e $RLC$

Neste capítulo estudaremos a formação de memórias de curta duração em circuitos elétricos com corrente alternada. Os circuitos elétricos serão descritos por uma cadeia de osciladores acoplados (espaço discreto, tempo e variável de estado contínuas), com um acoplamento indutivo. Começaremos pelo estudo de  $N$  circuitos  $RL$  acoplados através de indutores ( $L$ ). Analisaremos a formação dos padrões de memórias neste sistema e o comportamento dos padrões de memórias quando o sistema está sujeito a um ruído branco. Estudaremos também a formação dos padrões de memórias em circuitos  $RLC$ .

### 5.1 Circuitos $RL$

Inicialmente começaremos o estudo das memórias em circuitos elétricos com corrente alternada, com um modelo que pode ser visto na figura (5.1). Pela figura podemos observar  $N$  circuitos  $RL$  acoplados através de indutores, com um fonte de tensão realizando um forçamento sobre o sistema.

Podemos modelar este sistema através das cadeias de osciladores acoplados, descritos na tabela (2.1) do segundo capítulo. Para compreendermos a equação dos osciladores, utilizaremos a *lei de Kirchhoff*, onde a queda de tensão nos indutores  $k$ , com indutância  $L$ , depende da variação da corrente menos o fluxo magnético dos indutores dos circuitos vizinhos (indutores acoplados com indutância mútua  $M$ ), depende também da corrente dissipada pelo resistor  $R$  e a diferença de potencial fornecida pela fonte de tensão. Pela *lei de Kirchhoff* a soma das tensões dos indutores  $L$  e da resistência  $R$  deve ser igual a tensão da fonte  $V_k$ .

$$2L \frac{di^{(k)}}{dt} + Ri^{(k)} - M \left[ \frac{di^{(k+1)}}{dt} + \frac{di^{(k-1)}}{dt} \right] = V_k \text{sen}(wt), \quad (5.1)$$

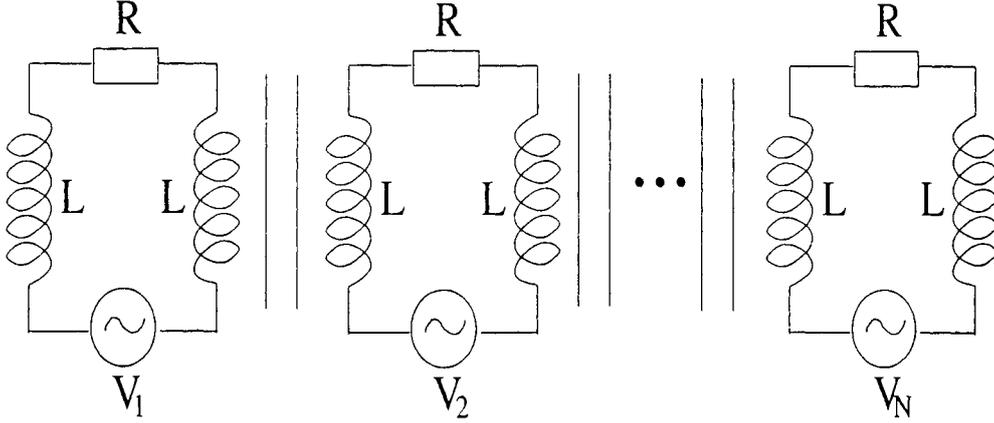


Figura 5.1:  $N$  circuitos  $RL$  acoplados através da indutância mútua

Em nosso sistema o acoplamento ocorre através do campo magnético, onde a indutância é definida como [36]

$$M_{kj} = \frac{d\phi_{kj}}{dI_j}, \quad k \neq j \quad (5.2)$$

sendo  $k$  e  $j$  os índices dos circuitos,  $I_j$  a corrente do circuito  $j$  e  $\phi_{kj}$  é o fluxo magnético do circuito  $j$  (devido a variação da corrente  $I_j$ ) sobre o circuito  $k$ .

Para os valores de  $k = j$  temos a auto indutância do circuito de índice  $k$ , então  $M = L$ . Temos que os valores de  $M_{kj} = M_{jk}$ . A indutância mútua entre o circuito  $k$  e  $j$ , é descrita pela equação (5.3)

$$M = \sqrt{L_k L_j}, \quad (5.3)$$

que representa um limite imposto para a indutância mútua. A indutância mútua deve ser igual ou menor que a raiz quadrada do produto das duas indutâncias [36]. Assim podemos definir a constante de acoplamento da forma

$$\epsilon = \frac{M}{\sqrt{L_k L_j}}, \quad (5.4)$$

onde  $|\epsilon| \leq 1$ . Caso a maior parte do fluxo magnético atravessasse o indutor temos um  $\epsilon$  muito próximo de 1, caso os indutores estejam um pouco afastado o valor de  $\epsilon$  será menor. Sendo  $L_1 = L_2 = \dots = L_k = L$  a equação (5.1) fica da seguinte forma

$$-\frac{M}{2L} \frac{di^{(k-1)}}{dt} + \frac{di^{(k)}}{dt} - \frac{M}{2L} \frac{di^{(k+1)}}{dt} = -\frac{R}{2L} i^{(k)} + \frac{V_k}{2L} \text{sen}(wt), \quad (5.5)$$

substituindo o valor de  $\epsilon$  na equação (5.5) obtemos

$$-\frac{\epsilon}{2} \frac{di^{(k-1)}}{dt} + \frac{di^{(k)}}{dt} - \frac{\epsilon}{2} \frac{di^{(k+1)}}{dt} = ai^{(k)} + B_k(t), \quad (5.6)$$

onde

$$a = \frac{R}{2L} \quad e \quad B_k(t) = \frac{V_k}{2L} \text{sen}(wt). \quad (5.7)$$

Considerando  $\epsilon = 0$ , poderemos encontrar uma solução analítica para os nossos osciladores desacoplados. A solução geral do sistema desacoplado é dada por

$$i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ \frac{V_0}{2L} \int e^{-\frac{R}{2L}t} \text{sen}(wt) dt + c \right], \quad (5.8)$$

fazendo a integração por partes obtemos

$$i(t) = \phi e^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{V_0}{R^2 + 2w^2L^2} [R \text{sen}(wt) - 2wL \text{cos}(wt)], \quad (5.9)$$

onde  $\phi$  é uma constante de integração. A equação (5.9) pode ser reescrita como

$$i(t) = \phi e^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + 4w^2L^2}} \text{sen}(wt - \delta), \quad (5.10)$$

onde

$$\delta = \text{arctg} \left( \frac{2wL}{R} \right). \quad (5.11)$$

Utilizando a condição de contorno na qual  $i(0) = 0$ , podemos determinar o valor de  $\phi$ . Assim a equação (5.10) assume a seguinte forma

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + 4w^2L^2}} \left[ e^{-\frac{R}{2L}t} \text{sen}(\delta) + \text{sen}(wt - \delta) \right], \quad (5.12)$$

com o termo exponencial aproximando-se de 0 quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto significa que após um tempo suficientemente grande, a corrente  $i(t)$  oscila de maneira harmônica. Para  $L = 0$  ocorre que  $\delta = 0$  e as oscilações em  $i$  são oscilações harmônicas com a tensão  $V_k$ .

Para realizarmos a integração numérica da equação (5.1), vamos definir duas grandezas adimensionais  $t'$  e  $i'$  dadas por

$$t' = \frac{t}{\tau}, \quad (5.13)$$

$$i' = \frac{i}{I}, \quad (5.14)$$

onde  $\tau$  é uma unidade de tempo e  $I$  uma unidade de corrente para todo o sistema.

Utilizando-se das relações (5.13) e (5.14) obtemos a seguinte relação para a derivada temporal da corrente

$$\frac{di}{dt} = \frac{I}{\tau} \frac{di'}{dt'}, \quad (5.15)$$

substituindo (5.15) na equação (5.6) obtemos a seguinte relação para os nosso osciladores

$$-\frac{\epsilon}{2} \frac{di'^{(k-1)}}{dt'} + \frac{di'^{(k)}}{dt'} - \frac{\epsilon}{2} \frac{di'^{(k+1)}}{dt'} = ai'^{(k)} + B_k(t'). \quad (5.16)$$

Utilizamos o software *Lsode* [37] para efetuar a integração numérica da equação (5.16). O lado direito da equação (5.16) é conhecido, já o lado esquerdo é necessário a resolução de um conjunto de equações algébricas lineares, pois possui a derivada da corrente do sítio  $k$  e dos seus primeiros vizinhos,

$$\frac{di'^{(1)}}{dt'} - \frac{\epsilon}{2} \frac{di'^{(2)}}{dt'} = ai'^{(1)} + B_1(t') \quad (5.17)$$

$$-\frac{\epsilon}{2} \frac{di'^{(1)}}{dt'} + \frac{di'^{(2)}}{dt'} - \frac{\epsilon}{2} \frac{di'^{(3)}}{dt'} = ai'^{(2)} + B_2(t') \quad (5.18)$$

$$-\frac{\epsilon}{2} \frac{di'^{(2)}}{dt'} + \frac{di'^{(3)}}{dt'} - \frac{\epsilon}{2} \frac{di'^{(4)}}{dt'} = ai'^{(3)} + B_3(t') \quad (5.19)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad (5.20)$$

$$-\frac{\epsilon}{2} \frac{di'^{(N-1)}}{dt'} + \frac{di'^{(N)}}{dt'} = ai'^{(N)} + B_N(t'). \quad (5.21)$$

Esse é um sistema linear de  $N$  equações e  $N$  incógnitas que pode ser descrito na forma matricial.

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{r}, \quad (5.22)$$

onde a matriz  $\mathbf{M}$  recebe os seguintes elementos

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix},$$

e a matriz  $\mathbf{d}$  possui os seguintes elementos

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{di'^{(1)}}{dt'} \\ \frac{di'^{(2)}}{dt'} \\ \vdots \\ \frac{di'^{(N)}}{dt'} \end{pmatrix},$$

e a matriz  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} ai'^{(1)} + B_1(t') \\ ai'^{(2)} + B_2(t') \\ \vdots \\ ai'^{(N)} + B_N(t') \end{pmatrix}.$$

Nosso sistema não é homogêneo, desta forma ele possui uma única solução se a matriz dos coeficientes for não singular, isto é diferente de zero [38].

A matriz  $\mathbf{M}$  é a matriz tridiagonal onde todos os elementos são nulos exceto a diagonal principal, a subdiagonal e a superdiagonal. A matriz tridiagonal pode ser decomposta em duas matrizes denominadas  $\mathbf{LU} : \mathbf{M} = \mathbf{LU}$  [38], onde  $\mathbf{L}$  é uma matriz triangular inferior e  $\mathbf{U}$  é uma matriz triangular superior. Neste caso podemos considerar a matriz  $\mathbf{L}$  apenas como

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{3,2} & l_{3,3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & l_{3,4} & l_{4,4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{N-1,N} & l_{N,N} \end{pmatrix},$$

onde todos os elementos da matriz são nulos exceto a diagonal principal e a subdiagonal.

Já a matriz  $\mathbf{U}$  pode ser considerada apenas como

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_{3,3} & u_{3,4} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{4,4} & u_{4,5} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & u_{N,N+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_{N,N} \end{pmatrix},$$

com todos os elementos da matriz nulos exceto a diagonal principal e a superdiagonal.

A decomposição  $\mathbf{LU}$  com substituição leva em torno de  $N$  operações para obtermos a solução do sistema  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{r}$ . Essa decomposição torna-se necessária a cada passo do algoritmo *Lsode* [37] para obtermos a solução das correntes  $i'_k$  dos osciladores.

A figura (5.2) mostra o comportamento das correntes  $i'^{(k)}(t')$  (para  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$ ) em função do tempo  $t'$ . O valor dos parâmetros na figura (5.2) são  $\epsilon = 0,83$ ,  $b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = b_6 = 0,1$ ,  $b_3 = 0,05$ ,  $w = 0,1$  e  $a = 0,1$ . Podemos observar pela figura que as correntes  $i'_{(k)}(t')$  apresentam um comportamento oscilatório apresentando diferentes valores de amplitudes. Essas diferenças nas amplitudes servem com base para o estudo da formação dos padrões de memórias. As amplitudes das correntes estão defasadas umas em relação as outras. O sistema apresenta condições de contorno fixas  $di'^{(0)}/dt' = 0$  e  $di'^{(N+1)}/dt' = 0$ .

Os osciladores acoplados descritos pela equação (5.1) podem ser transformados em uma rede de mapas acoplados. Como o espaço já é discretizado, necessitamos apenas discretizar a derivada temporal da corrente  $i'_k$

$$\frac{di'^{(k)}}{dt'} = \frac{i'_{n+1} - i'_n}{\Delta n}, \quad (5.23)$$

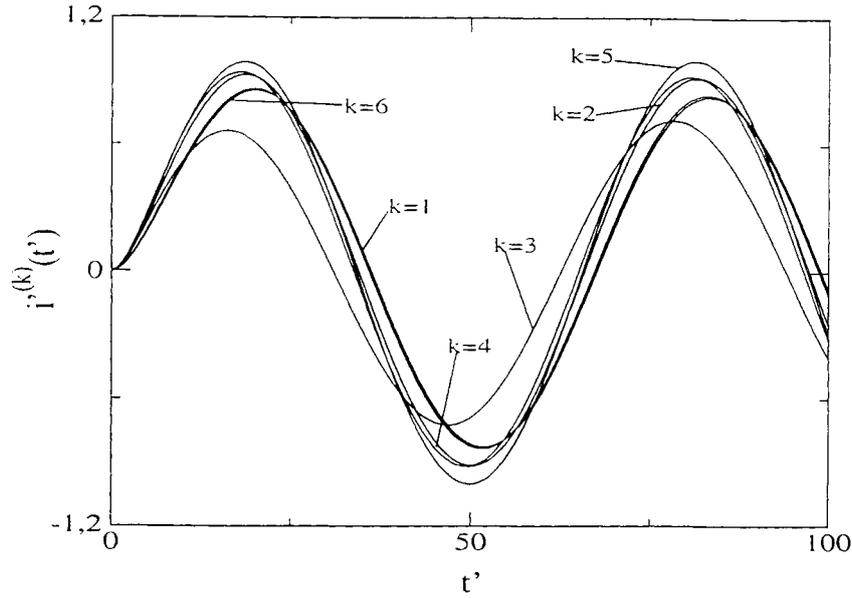


Figura 5.2:  $i'^{(k)}(t') \times t'$ ,  $N = 6$  circuitos acoplados com uma acoplamento indutivo  $B_k = 0,1$  para  $k \neq 3$ ,  $B_3 = 0,05$ ,  $a = 0,1$ ,  $w = 0,1$  e  $\epsilon = 0,83$ .

com  $\Delta n = 1$  pois o tempo em mapas é discreto. Dessa forma obtemos uma rede de mapas acoplados descritos pela equação (5.24)

$$i'_{n+1}{}^{(k)} - \frac{\epsilon}{2} (i'_{n+1}{}^{(k+1)} + i'_{n+1}{}^{(k-1)}) = (1 - a)i'_n{}^{(k)} - \frac{\epsilon}{2} (i'_n{}^{(k+1)} + i'_n{}^{(k-1)}) + b_n^{(k)}, \quad (5.24)$$

onde  $b_n^{(k)} = V/2L\text{sen}(wn)$ .

A rede de mapas acoplados possui o mesmo comportamento das equações diferenciais dos osciladores acoplados, necessitando para isso que os  $w < 1$  [7], para que os períodos sejam maiores do que 1. A vantagem de introduzirmos mapas acoplados está no fato de não necessitarmos de um integrador numérico. Mas continuamos necessitando resolver o sistema de equações lineares, pois o lado esquerdo da equação (5.24) possui o valor de  $i_n^{(k+1)}$ ,  $i_n^{(k)}$  e  $i_n^{(k-1)}$  no mesmo instante da iteração. Logo, a cada iteração necessitamos resolver a matriz tridiagonal.

### 5.1.1 Formação das memórias

Vamos definir a variável de curvatura para uma rede de mapas acoplados que descreve a dinâmica dos circuitos elétricos pela equação (5.25). O valor da variável de curvatura do circuito  $k$  é o máximo valor da diferença entre a corrente do circuito  $k$  e o acoplamento das correntes dos seus sítios vizinhos, como pode ser visto pela equação

$$c^{(k)}(t') = \max \left\{ i'^{(k)}(t') - \frac{\epsilon}{2} (i'^{(k+1)}(t') + i'^{(k-1)}(t')) \right\}, \quad (5.25)$$

os valores das correntes são tomados a cada período completo de oscilação do sistema.

Na figura (5.3) temos 6 circuitos-AC  $RL$  acoplados com  $w = 1$ ,  $\epsilon = 0,83$ ,  $a = 0,1$ .  $B_k = 0,6$  para  $k \neq 3$ ,  $B_3 = 0,3$  e os resistores e indutores dos circuitos possuem o mesmo valor. As condições de contorno são fixas,  $i^{(0)}(t') = 0$  e  $i^{(N+1)}(t') = 0$ . Podemos observar as formações das memórias dos circuitos em função de  $(t')$ . Depois de um certo transiente a diferença máxima entre as correntes torna-se constante.

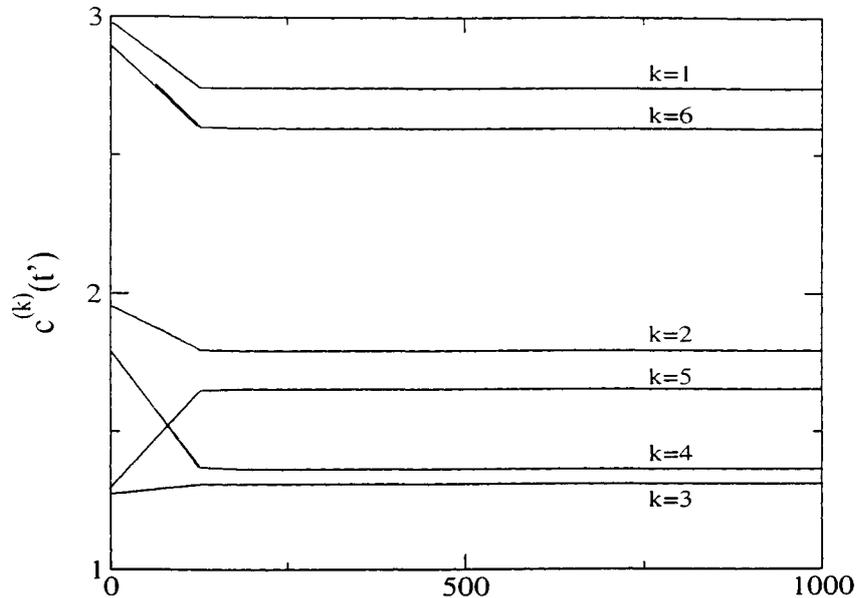


Figura 5.3:  $c^{(k)}(t') \times t'$ , com  $N = 6$  circuitos  $RL$  acoplados através da indutância mútua, constante de acoplamento  $\epsilon = 0,83$ ,  $w = 0,1$ ,  $a = 0,1$ ,  $B_k = 0,6$  para  $k \neq 3$  e  $B_3 = 0,6$ .

Podemos observar pela figura (5.3) que a diferença máxima entre as correntes (dada pela variável de curvatura  $c^{(k)}(t')$ ) ocorre para os extremos da rede e a diferença menor ocorre para os sítios que estão no meio da rede. O valor máximo ocorre nos extremos pois existe apenas um circuito acoplado com a extremidade, dessa maneira o máximo valor da diferença torna-se maior. O menor valor da memória ocorre para o circuito com um menor valor na tensão.

As formações dos vários padrões de memórias, com valores diferentes, sugere que por meio desta rede podemos armazenar informações complexas, como foi citado por Batista e Viana [7] onde eles utilizaram um circuito igual a esse para exemplificar a armazenagem de letras do alfabeto Braille<sup>1</sup>.

Na figura (5.4) temos que  $N = 6$ ,  $\epsilon = 0,83$ ,  $w = 0,1$ ,  $a = 0,1$  e  $B_k = 0,6$  para  $k \neq 3$ , onde podemos observar como ocorre a variação na formação dos padrões das memórias em função de  $B_3$ . Enquanto a variável de curvatura aumenta para

<sup>1</sup>Sistema inventado por Louis Braille, é um método tátil universalmente usado para escrita e leitura de deficientes visuais. O sistema emprega grupos de pontos impressos, onde o grupo de seis pontos é uma célula Braille. Para cada célula Braille pode ser formado 63 padrões diferentes.

o sítio  $k = 3$  as demais variáveis de curvatura vão diminuindo. A diminuição e o aumento dos valores das variáveis de curvatura dos sítios  $k$ 's, ocasiona uma mudança entre no sítio com maior valor na variável de curvatura e o sítio com o menor valor da variável de curvatura.

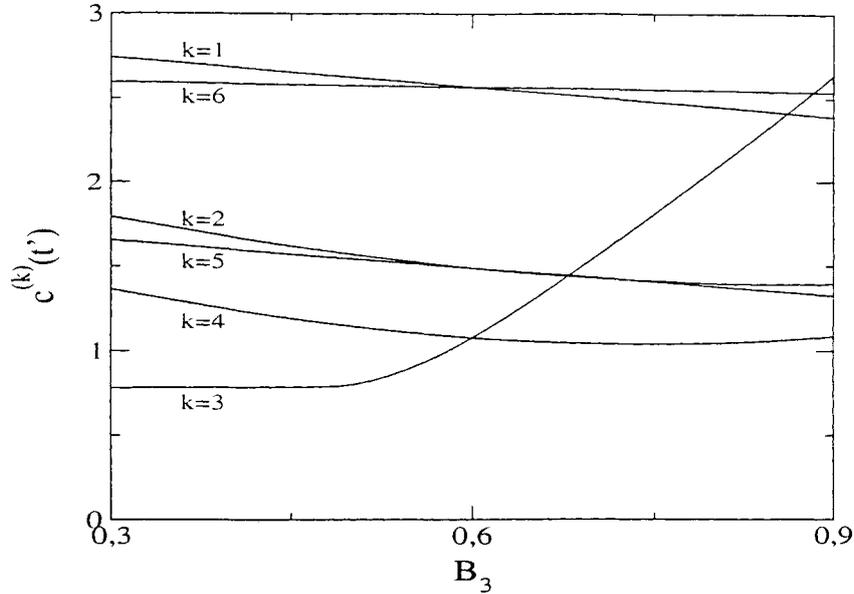


Figura 5.4:  $c^{(k)}(t) \times V^{(3)}$ , com  $N = 6$  circuitos  $RL$  acoplados através da indutância mútua, constante de acoplamento  $\epsilon = 0,83$ ,  $w = 0,1$ ,  $a = 0,1$ ,  $V_k = 0,6$  para  $k \neq 3$ .

Para compreender o que ocorre na figura (5.4) vamos considerar os padrões formados por cada sítio em relação aos outros, ou seja, não vamos nos interessar no valor das variáveis de curvatura mas sim se elas são menores ou maiores em relação as outras. Podemos observar pela figura (5.4) que para  $B_3 = 0,3$  as variáveis de curvatura possuem o seguinte padrão  $c^{(1)} > c^{(6)} > c^{(2)} > c^{(5)} > c^{(4)} > c^{(3)}$ , a medida que  $B_3$  vai aumentando os valores de  $c^{(k)}$  vão diminuindo até que para  $B_3 \approx 0,6$  ocorre uma mudança nos padrões formados pelas variáveis de curvatura, pois  $c^{(6)} \approx c^{(1)}$ ,  $c^{(3)} \approx c^{(4)}$  e  $c^{(5)} \approx c^{(2)}$ . Quando  $B_3 \approx 0,68$  ocorre a formação de novos padrões de memórias, a variável de curvatura do sítio  $k = 3$  torna-se maior do que a variável de curvatura dos sítios  $k = 2, 5$ . Para  $B_3 \approx 0,72$  ocorre novamente uma mudança no padrão das memórias do sistema pois  $c^{(2)} > c^{(5)}$  novamente. Em  $B_3 \approx 0,86$  ocorre outra mudança nos padrões das memórias, pois a partir desse valor a variável de curvatura  $k = 3$  torna-se maior do que a variável de curvatura  $k = 1$ . Outra mudança no padrão do sistema só vai ocorrer agora para  $B_3 \approx 0,88$  onde a variável de curvatura do sítio  $k = 3$  torna-se a maior de todas as variáveis de curvatura.

Os padrões das variáveis de curvatura finais, para  $B_3 = 0,9$ , serão  $c^{(3)} > c^{(6)} > c^{(1)} > c^{(2)} > c^{(5)} > c^{(4)}$ . Como podemos observar pela figura (5.4) podemos utilizar o valor de  $B_3$  como parâmetro de controle dos padrões de nossas variáveis de

curvatura.

Pela figura (5.4) podemos observar, que para um circuito  $RL$ , o valor para a menor e maior memória do sistema depende da localização do sítio e do valor do parâmetro  $B_k$ . Para  $B_3 < 0,6$  o valor das memórias são maiores nos extremos ( $c^{(1)} > c^{(6)}$  e  $c^{(3)}$  é a menor memória) onde o extremo mais próximo do menor valor de  $B_k$  é para  $k = 1$ . Para  $B_3 > 0,6$  ocorre uma mudança entre os sítios com maiores valores da variável de curvatura, pois agora o  $B_3$  é o maior valor do sistema.

### 5.1.2 Ruído

A compreensão dos efeitos do ruído sobre o sistema torna-se importante quando deseja-se implementar um sistema experimental. O ruído pode estar presente em vários parâmetros do sistema como resistores, indutores ou f.e.m<sup>2</sup>. Necessitamos analisar os efeitos do ruído na formação das memórias em nosso sistema.

Inserimos o ruído na constante  $a$ , podendo exemplificar um ruído no resistor  $R$  ou no indutor  $L$  do sistema. Assim  $a$  torna-se dependente do tempo, podendo ser redefinida como

$$a^{(k)}(t') = a \pm \delta_1 r_k(t'), \quad (5.26)$$

sendo  $\delta_1$  a amplitude máxima do ruído e  $r_k(t')$  um valor aleatório no intervalo  $[0, 1]$ . Também vamos inserir o ruído na f.e.m do sistema, alterando a amplitude máxima de  $V_0$

$$V_k(t') = V_0 \pm \delta_2 r_k(t'). \quad (5.27)$$

Agora não teremos mais  $V_0$ , mas sim um  $V_k(t')$ , que possui valores no intervalo entre  $[V_0 - \delta_2, V_0 + \delta_2]$ .

Na figura (5.5) temos  $N = 6$  circuitos acoplados através de indutores, com  $B_k = 0,1$  com  $k \neq 3$  e  $B_3 = 0,05$ ,  $a = 0,1$  e  $\epsilon = 0,83$  mostrando o que ocorre com a variável de curvatura quando ela está sujeita a um ruído.

Na figura (5.5a) temos um ruído inserido no parâmetro  $a$  como é mostrado pela equação (5.26), e na figura (5.5b) o ruído é inserido em  $V$ , como mostra a equação (5.27). Os valores médios das variáveis de curvatura  $c^{(k)}(t')$  permanecem os mesmos, apenas ocorrem oscilações maiores nas variáveis de curvatura.

Observamos na figura (5.5a) que para uma amplitude de ruído igual 4% do valor de  $a$  as oscilações das variáveis de curvatura começam a se sobrepor, perdendo dessa forma o interesse, pois não conseguimos distinguir qual o padrão formado pelo sistema. Já para um ruído inserido na tensão os sistema suporta um valor maior da amplitude do ruído, como pode ser visto na figura (5.5b) onde as oscilações das variáveis de curvatura irão sobrepor-se para uma amplitude de ruído igual a 18% da tensão.

---

<sup>2</sup>força eletro-motriz

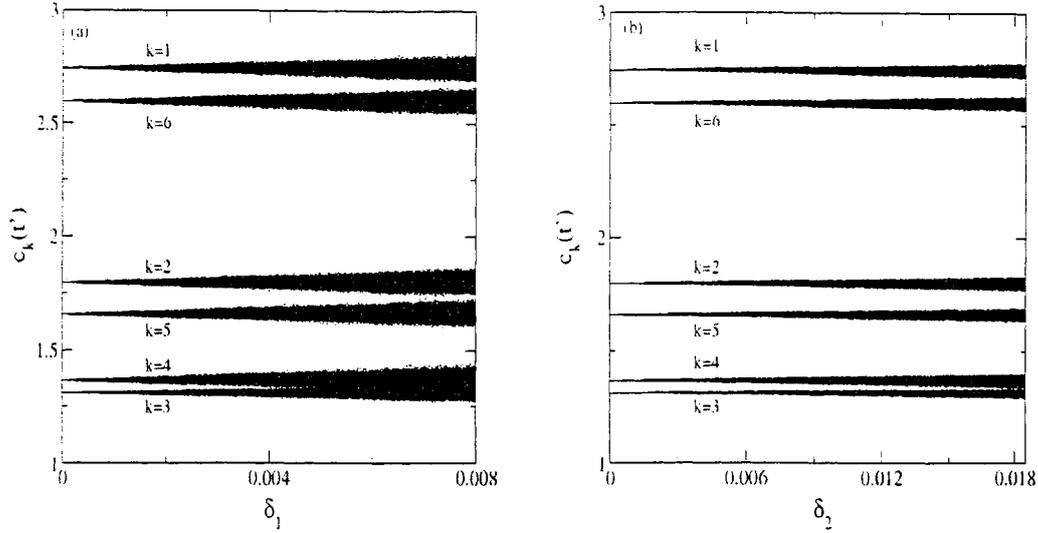


Figura 5.5:  $N = 6$  circuitos  $RL$  acoplados através da indutância mútua,  $\epsilon = 0,83$ ,  $a = 0,1$ ,  $B_k = 0,1$  para  $k \neq 3$  e  $B_3 = 0,05$ . (a)  $c^{(k)}(t') \times \delta_1$  e (b)  $c^{(k)}(t') \times \delta_2$ .

## 5.2 Circuito $RLC$

Vamos analisar a formação dos padrões de memórias em sistema com  $N$  circuitos  $RLC$  acoplados através de indutores. Podemos observar os circuitos acoplados utilizando a figura (5.6), sujeitos a uma tensão alternada.

Utilizando a *lei de Kirchhoff* onde a soma das quedas de tensão nos indutores, no capacitor e no resistor é igual a tensão da fonte, descrita pela equação(5.28). Como foi utilizado para obtermos a equação (5.1), obtemos

$$2L \frac{di^{(k)}}{dt} - M \left[ \frac{di^{(k+1)}}{dt} + \frac{di^{(k-1)}}{dt} \right] + \frac{q^{(k)}}{C} + Ri = V_k + \text{sen}(wt), \quad (5.28)$$

Fazendo uso das relações (5.2), (5.3), (5.4) e (5.7) a equação (5.28) fica da seguinte maneira

$$-\frac{\epsilon}{2} \frac{di^{(k-1)}}{dt} + \frac{di^{(k)}}{dt} - \frac{\epsilon}{2} \frac{di^{(k+1)}}{dt} = -ai^{(k)}(t) - Dq^{(k)}(t) + B_k(t), \quad (5.29)$$

sendo o valor da constante  $D$  definida pela equação (5.30)

$$D = \frac{1}{2LC} \quad (5.30)$$

Para  $M = 0$ , onde os sistemas não possuem indutância mútua, a equação (5.29) possui uma solução analítica, mas para tanto é necessário lembrar que

$$i(t) = \frac{dq}{dt}, \quad (5.31)$$

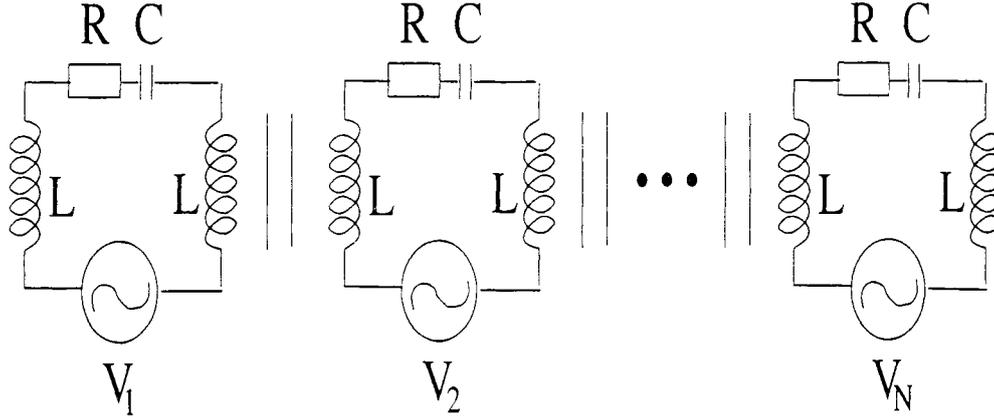


Figura 5.6:  $N$  circuitos  $RLC$  acoplados através da indutância mútua

substituindo (5.31) na equação (5.28), com  $M = 0$  temos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{2L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{2LC} = \frac{V}{2L} \text{sen}(wt). \quad (5.32)$$

A solução da equação (5.32) é a soma de duas soluções, uma solução homogênea ( $q_h$ ) e uma solução particular ( $q_p$ )

$$q = q_p + q_h. \quad (5.33)$$

A solução particular é dada pela soma de um  $\text{sen}(wt)$  mais um  $\text{cos}(wt)$ , onde  $\nu_1$  e  $\nu_2$  são constantes do sistema. A solução homogênea é a soma de duas exponenciais, onde  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são constantes que serão determinadas pelas condições de contorno

$$\begin{aligned} q_p &= \nu_1 \text{sen}(wt) + \nu_2 \text{cos}(wt), \\ q_h &= \beta_1 e^{\theta_+ t} + \beta_2 e^{\theta_- t}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

As constantes  $\nu_1$  e  $\nu_2$  possuem os seguintes valores fornecidos pelas equações (5.35) e (5.36), respectivamente

$$\nu_1 = \frac{V}{2L} \left[ \frac{(\frac{1}{2LC} - w^2)}{(\frac{R}{2L}w)^2 + (\frac{1}{2LC} - w^2)} \right], \quad (5.35)$$

$$\nu_2 = \frac{V}{2L} \left[ \frac{-w \frac{R}{2L}}{(\frac{R}{2L}w)^2 + (\frac{1}{2LC} - w^2)} \right]. \quad (5.36)$$

O valores de  $\theta_+$  e  $\theta_-$  são definidos

$$\theta_{\pm} = -\frac{R}{4L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2}{LC}}, \quad (5.37)$$

Para os valores de  $\theta_-$  e  $\theta_+$  existem três casos possíveis [39] para a solução da equação homogênea:

1. O primeiro caso ocorre quando  $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2}{LC} > 0$ , a solução da equação homogênea é um decaimento exponencial.

$$C_1 e^{\left[-\frac{R}{4L} - \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2}{LC}\right)^{\frac{1}{2}}\right] t} + C_2 e^{\left[-\frac{R}{4L} + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2}{LC}\right)^{\frac{1}{2}}\right] t}. \quad (5.38)$$

2. O segundo caso ocorre quando  $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2}{LC} = 0$ , a solução da equação homogênea fica da seguinte forma

$$e^{-\frac{R}{4L} t} (C_1 + C_2 t). \quad (5.39)$$

3. O terceiro caso ocorre quando  $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{2}{LC} < 0$ , a equação homogênea decai de uma forma exponencial e oscila com um cosseno e um seno.

$$e^{-\frac{R}{4L} t} \left( C_1 \cos \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{4L^2} - \frac{2}{LC} \right)^{\frac{1}{2}} t \right] + C_2 \sin \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{4L^2} - \frac{2}{LC} \right)^{\frac{1}{2}} t \right] \right). \quad (5.40)$$

Os valores de  $\theta_-$  e  $\theta_+$  influenciam no resultado final pelo fato de controlarem os valores dos tempos transientes, tempo que este que depende de  $R$ ,  $L$  e  $C$ . Para valores de  $R$  grandes e  $L$  e  $C$  pequenos os  $\theta_-$  e  $\theta_+$  tornam-se grandes e os valores dos transientes são pequenos, pois a exponencial decai rapidamente e o sistema chega a oscilações harmônicas. Para valores de  $L$  e  $C$  muito maiores do que  $R$  os  $\theta_-$  e  $\theta_+$  tornam-se pequenos e os tempo transientes tornam-se grandes, pois o decaimento exponencial é muito lento.

Derivando e somando as equações (5.34), obtemos a equação (5.41) que descreve o comportamento das correntes para os circuitos desacoplados.

$$i(t) = \theta_+ \beta_1 e^{\theta_+ t} + \theta_- \beta_2 e^{\theta_- t} + \frac{Vw}{2L \sqrt{\left(\frac{1}{2LC} - w^2\right)^2 + \left(\frac{Rw}{2L}\right)^2}} \cos(wt - \phi), \quad (5.41)$$

onde

$$\phi = \arctg \frac{\frac{Rw}{2L}}{\left(\frac{1}{2LC} - w^2\right)}. \quad (5.42)$$

As constantes  $\beta_1$  e  $\beta_2$  podem ser obtidas pelas condições iniciais  $q(0) = 0$  e  $i(0) = 0$

$$\beta_1 = \frac{-V}{2L \sqrt{\left(\frac{1}{2LC} - w^2\right)^2 + \left(\frac{Rw}{2L}\right)^2}} \frac{(\sin(\phi)\theta_- + \cos(\phi)w)}{\theta_- - \theta_+},$$

$$\beta_2 = \frac{V}{2L \sqrt{\left(\frac{1}{2LC} - w^2\right)^2 + \left(\frac{Rw}{2L}\right)^2}} \frac{(\sin(\phi)\theta_+ + \cos(\phi)w)}{\theta_- - \theta_+}. \quad (5.43)$$

Podemos discretizar a equação (5.28) obtendo um sistema de dois mapas. Mas primeiramente vamos substituir a derivada da corrente ( $di^{(k)}/dt$ ) pela derivada segunda da carga ( $d^2q^{(k)}/dt^2$ ), assim a equação (5.28) otêm a relação (5.44)

$$\frac{d^2q^{(k)}}{dt^2} - \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{d^2q^{(k+1)}}{dt^2} - \frac{d^2q^{(k-1)}}{dt^2} \right) = -\frac{R}{2L} \frac{dq^{(k)}}{dt} - \frac{q^{(k)}}{2L} + \frac{V_k}{2L} \sin(wt), \quad (5.44)$$

definindo a variável  $x^{(k)}$  5.45

$$\frac{dq^{(k)}}{dt} = x^{(k)} \quad e \quad \frac{d^2q^{(k)}}{dt^2} = \frac{dx^{(k)}}{dt}, \quad (5.45)$$

e substituindo na equação (5.44) ficaremos com um oscilador acoplado (5.46) e uma equação diferencial (5.47).

$$\frac{dx^{(k)}}{dt} - \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{dx^{(k+1)}}{dt} - \frac{dx^{(k-1)}}{dt} \right) = -\frac{R}{2L}x^{(k)} - \frac{q^{(k)}}{2L} + \frac{V_k}{2L}\text{sen}(wt), \quad (5.46)$$

$$\frac{dq^{(k)}}{dt} = x^{(k)}. \quad (5.47)$$

Lembrando que a para mapas o tempo é discreto então as derivadas da  $dx^{(k)}/dt$  e  $dq^{(k)}/dt$  discretizadas ficam

$$\frac{dx^{(k)}}{dt} = \frac{x_{n+1}^{(k)} - x_n^{(k)}}{\Delta n} \quad e \quad \frac{dq^{(k)}}{dt} = \frac{q_{n+1}^{(k)} - q_n^{(k)}}{\Delta n}, \quad (5.48)$$

onde  $\Delta n = 1$ . Observando pela equação (5.45) que  $x^{(k)}$  é na verdade a corrente  $i^{(k)}$ , assim substituindo as relações (5.48) em (5.46) e (5.47), obtemos os mapas (5.49) e (5.50)

$$i_{n+1}^{(k)} - \frac{\epsilon}{2} \left( i_{n+1}^{(k+1)} + i_{n+1}^{(k-1)} \right) = \left( 1 - \frac{R}{2L} \right) i_n^{(k)} - \frac{\epsilon}{2} \left( i_n^{(k+1)} + i_n^{(k-1)} \right) - \frac{q_n^{(k)}}{2LC} + V_k \text{sen}(wt), \quad (5.49)$$

$$q_{n+1}^{(k)} = q_n^{(k)} + i_n^{(k)}, \quad (5.50)$$

para resolver esse dois mapas, necessitamos ainda resolver as equações tridiagonais, mas não necessitamos mais do integrador numérico.

A figura (5.7a) mostra as oscilações das correntes dos circuitos quando colocamos um capacitor no circuito. Podemos observar na figura (5.7a) que as correntes possui amplitudes diferentes, mas estão quase todas em fase e o valor da corrente do sítio  $k = 3$  apesar de possuir o menor forçamento possuem a segunda maior amplitude da corrente. As memórias formadas pelos circuitos que possuem correntes com amplitudes da figura (5.7a), podem ser observadas na figura (5.7b).

O capacitor altera a formação das memórias do sistema, e o padrão das memórias é

$$c^{(4)} > c^{(5)} > c^{(3)} > c^{(2)} > c^{(6)} > c^{(1)}, \quad (5.51)$$

mesmo com  $V_3$  sendo o menor valor das tensões do sistema.

A figura (5.8a) mostra o que ocorre para um sistema onde a razão entre o indutancia e o capacitancia é igual a  $1H/F$ . Notamos que os valores das correntes são menores do que na figura (5.7a), ocorrendo uma defasagem entre as correntes, sendo que a maior defasagem ocorre em relação ao sítio  $k = 3$  e os demais sítios  $k$  da rede.

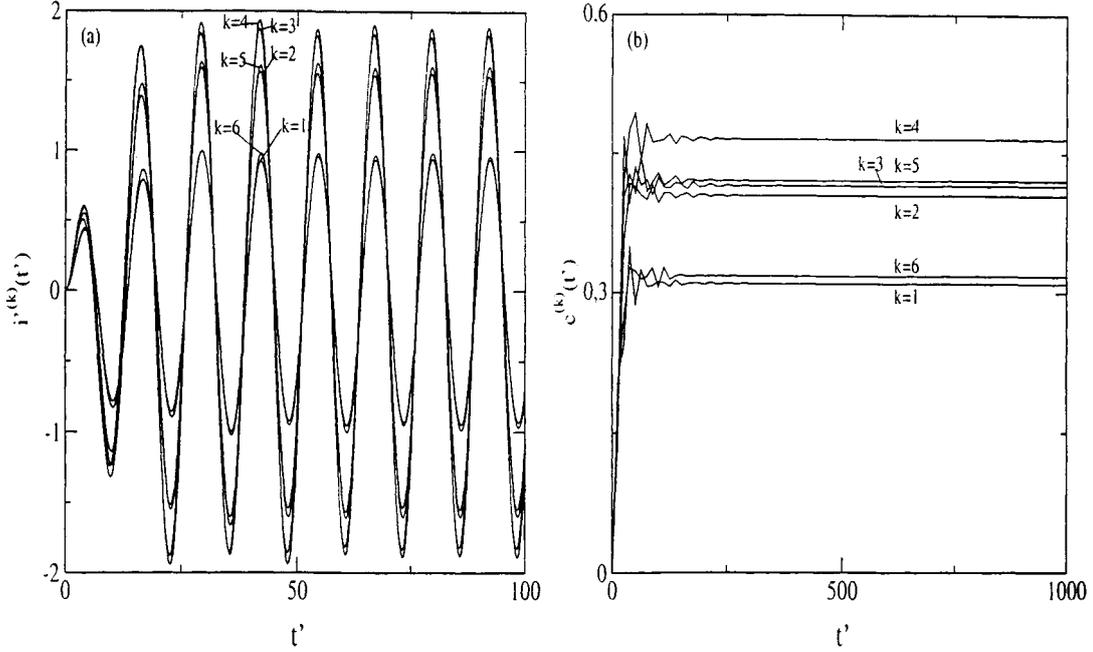


Figura 5.7: 6 circuitos  $RLC$  acoplados através da indutância mútua, constante de acoplamento  $\epsilon = 0,83$ ,  $\omega = 0,5Hz$ ,  $L = 10H$ ,  $C = 1F$ ,  $\frac{L}{C} > 1\frac{H}{F}$ ,  $R = 1\Omega$ ,  $V_k = 2V$  para  $k \neq 3$  e  $V_3 = 1V$ . (a)  $i^{(k)}(t') \times t'$  e (b)  $c^{(k)}(t') \times t'$ .

Podemos observar as memórias formadas pelo circuito com  $L/C = 1H/F$  na figura (5.8b). Os valores das variáveis de curvatura da figura (5.8b) aumentam em relação aos valores das variáveis de curvatura da figura (5.7b). Novamente no sistema a menor variável de curvatura dos circuitos não é a variável de curvatura do sítio com o menor valor de tensão  $k = 3$ .

O sistema possui o seguinte padrão formado pelas variáveis de curvatura onde os osciladores possuem resistores, indutores e capacitores iguais,

$$c^{(6)} = c^{(1)} > c^{(3)} > c^{(4)} > c^{(2)} > c^{(5)} \quad (5.52)$$

Agora vamos analisar o caso onde a razão entre o indutancia e o capacitancia é menor do que  $1H/F$ . Na figura (5.9a) observamos o que ocorre com as correntes dos circuitos quando a razão do indutancia capacitancia do circuito é menor  $1H/F$ . Verificamos que as amplitudes das correntes são muito parecidas com as correntes da figura (5.7a), ocorrendo diferenças entre os valores das amplitudes são bem menores. As correntes também apresentam uma pequena defasagem umas em relação as outras. Os padrões de memórias formado pela correntes apresentadas na figura (5.9a) são mostrada na figura (5.9b). Podemos observar que os padrões formados pelas correntes são diferentes do padrões apresentados na figuras (5.7b) e (5.8b).

Novamente o valor da variável de curvatura do sítio  $k = 3$  não é o menor padrão formado. O padrão formado em um sistema onde a razão indutancia

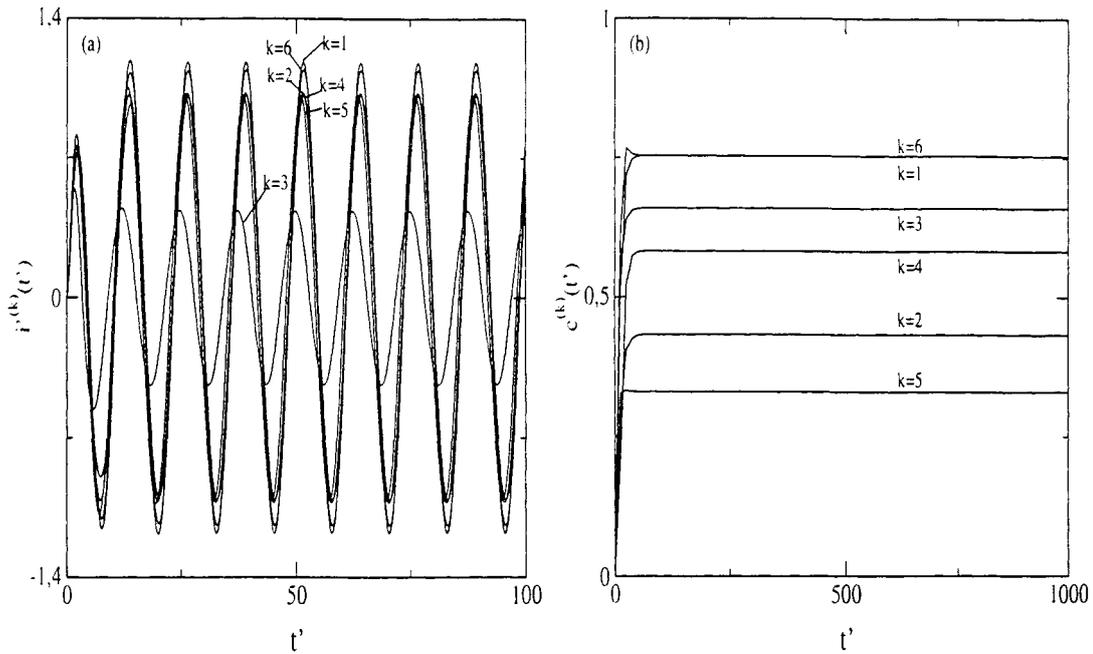


Figura 5.8: 6 circuitos  $RLC$  acoplados através da indutância mútua, constante de acoplamento  $\epsilon = 0,83$ ,  $\omega = 0,5\text{Hz}$ ,  $L = 1\text{H}$ ,  $C = 1\text{F}$ ,  $\frac{L}{C} = 1\frac{\text{H}}{\text{F}}$ ,  $R = 1\Omega$ ,  $B_k = 1\text{V}/\text{H}$  para  $k \neq 3$  e  $B_3 = 0,5\text{V}/\text{H}$ . (a)  $i_k(t') \times t'$  e (b)  $c^{(k)}(t') \times t'$ .

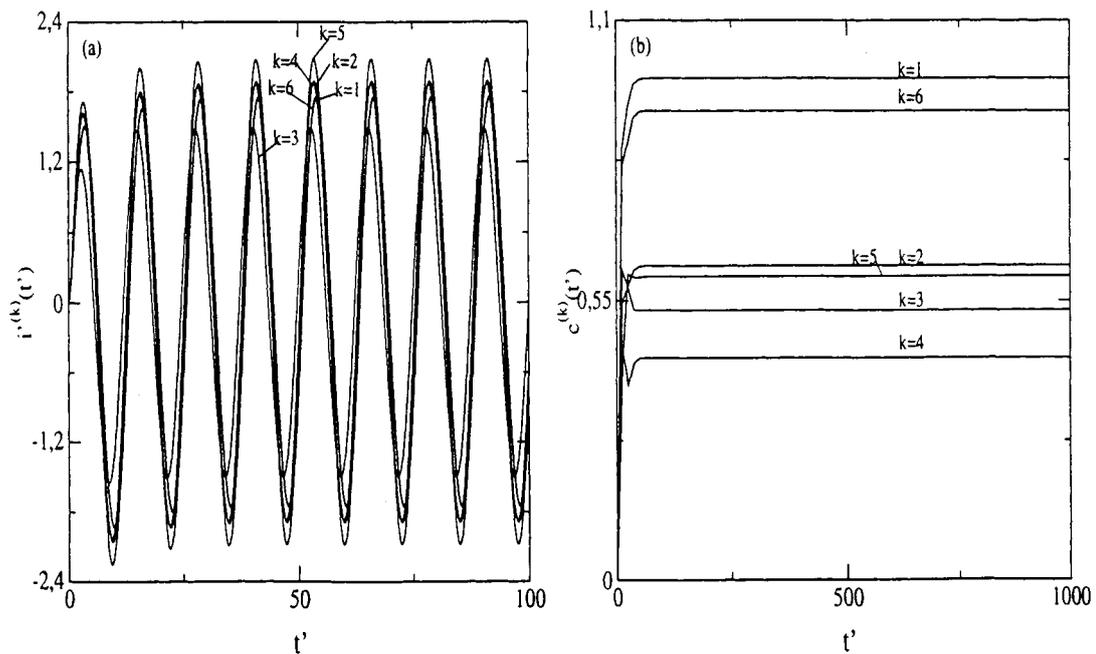


Figura 5.9:  $i^{(k)}(t') \times t'$ , com  $N = 6$  circuitos  $RLC$  acoplados através da indutância mútua, constante de acoplamento  $\epsilon = 0,83$ ,  $\omega = 0,5\text{Hz}$ ,  $L = 1\text{H}$ ,  $C = 10\text{F}$ ,  $\frac{L}{C} < 1\frac{\text{H}}{\text{F}}$ ,  $R = 1\Omega$ ,  $B_k = 1\text{V}/\text{H}$  para  $k \neq 3$  e  $B_3 = 0,5\text{V}/\text{H}$ .

capacitancia do sistema é menor  $1H/F$

$$c^{(1)} > c^{(6)} > c^{(2)} > c^{(5)} > c^{(3)} > c^{(4)} \quad . \quad (5.53)$$

Observando as figuras (5.7), (5.8) e (5.9) notamos que a presença do capacitor altera o valor das memórias transientes. Para armazenar informação em uma rede de circuitos *RLC* devesse lembrar que o sistema pode estar sujeito a um ruído, e com a presença do capacitor pode-se obter resultados não desejáveis, por isso sugerimos para trabalhos futuros o estudo do ruído em circuitos *RLC*.

# Capítulo 6

## Conclusões

Os sistemas dinâmicos oferecem muitas informações dos sistemas físicos, com eles podemos modelar vários sistemas de interesse tecnológicos e científicos. Os vários métodos de modelagem de sistemas dinâmicos são equivalentes apenas ocorrendo uma razão custo benefício, neste trabalho foi utilizado cadeias de osciladores e redes de mapas acoplados, os quais oferecem a descrição dos comportamentos dos sistemas em estudo.

Primeiramente estudamos a formação de padrões de memórias, que foi utilizada por Coopersmith para explicar [6] a formação dos padrões no  $NebSe_3$ . Esse sistema é similar a uma rede de partículas acopladas com seus primeiros vizinhos através de molas e estão sujeitas a forçamento periódico, em resposta a esse forçamento o sistema apresenta uma dinâmica de formação de memórias de curta duração e evolui para padrões de memórias permanentes. As memórias permanentes do sistema são pontos fixos, sendo que após o sistema atingir esses padrões perde-se toda a informação das memórias transientes.

O tempo transiente para a obtenção da memória permanente do sistema em uma rede com acoplamento local, depende de certos parâmetros do sistema. Um dos parâmetros do sistema que influencia no tempo transiente é o tamanho do sistema [6], quanto maior o número de partículas do sistema o tempo necessário para a obtenção do padrão final das memórias aumenta. O tempo transiente para a obtenção das memórias é inversamente proporcional a constante de acoplamento (constante da mola), onde a constante de proporcionalidade aumenta para os sítios mais distantes da extremidade fixa. Os sítios mais distantes do início da rede apresentam um aumento no tempo transiente. O tempo necessário para o sítio obter o padrão final da memória aumenta com um polinômio de quarta ordem em relação ao início da rede. Outra forma de ocorrer a variação do tempo transiente é a presença de uma perturbação estocástica e por um termo não linear na função que descreve o mapa isolado.

Os padrões de memórias formados pelo sistema dependem do maior forçamento externo exercido sobre o sistema. Outra forma de alterarmos os padrões, seria a pre-

sença de um termo não linear que descreve o mapa de cada sítio isolado, onde o termo não linear gera a formação de memórias permanentes intermediárias [31]. Podemos alterar os padrões das memórias com a presença de uma perturbação estocástica no forçamento do sistema, onde o valor da memória permanente é alterado.

A presença do termo não linear na função que descreve o mapa isolado, altera os valores das memórias finais fazendo surgir as memórias intermediárias devido ao fato que as variáveis de estado começam a sincronizar em amplitude, e como o valor das variáveis de curvatura está relacionado com a diferença entre os valores das variáveis de estado, as variáveis de curvatura diminuem seus valores. A diminuição no valor final das variáveis de curvatura faz com que o tempo transiente também diminua. O termo não linear é importante, pois nesse sistema podemos armazenar informações mais complexas, devido a formação das memórias intermediárias.

Nós fizemos o estudo da perturbação estocástica inserida de duas maneiras no sistema. No primeiro caso inserimos a perturbação estocástica na função que descreve o mapa isolado. Nesse caso observamos um aumento no tempo das memórias de curta duração, sendo que o tempo para a obtenção das memórias permanentes aumenta com o valor da perturbação estocástica.

Em um segundo momento estudamos a perturbação estocástica inserida no forçamento do sistema. A perturbação estocástica no forçamento faz com que as memórias transientes vão desaparecendo, e o valor médio final das variáveis de curvatura aumente de forma linear com a perturbação estocástica. O tempo para o sistema obter o valor final das memórias aumenta até um certo valor da perturbação estocástica, a partir desse valor os tempos começam a diminuir. O sistema apresenta uma mudança no comportamento para um determinado valor da perturbação estocástica. Nesse valor da perturbação estocástica o coeficiente da reta que descreve o aumento do valor médio da variável de curvatura muda de valor, o tempo transiente para a obtenção da memória possui um pico e começa a diminuir com o aumento da perturbação estocástica e o desvio padrão que até esse valor era muito próximo de zero começa a aumentar.

Para um sistema que possui apenas um forçamento periódico a mudança no comportamento do sistema ocorre para perturbações estocásticas maiores. Para sistemas com mais de dois valores das perturbações periódicas a mudança no sistema sempre ocorre para o mesmo valor da perturbação estocástica. Isso ocorre tanto para uma rede de mapas com um acoplamento do tipo local como para um rede de mapas acoplados com um acoplamento do tipo lei de potência.

Nós estudamos a formação das memórias de curta duração em rede de mapas acoplados com um acoplamento do tipo lei de potência, com alcance variado. O valor da potência para o qual o sistema possui um comportamento local ou global foram 15 ou 0, respectivamente.

Para o caso onde a função que descreve o mapa isolado é linear, o tempo transiente para a obtenção das memórias de curta duração em uma rede com um acoplamento do tipo lei de potência aumenta com a diminuição do alcance do acoplamento. A função que descreve o aumento do tempo transiente em função do alcance é uma função do tipo sigmoidal. Para o caso não linear ocorrem variações do tempo

transiente em função do alcance do acoplamento.

Para o caso global temos que os padrões formados, tanto no caso onde a função que descreve o mapa é linear como para o caso não linear, são iguais. A medida que o acoplamento começa a diminuir padrões intermediários vão sendo formados.

Um aumento no alcance do acoplamento faz com que o valor das variáveis de estado diminua, aumentando o valor da constante de acoplamento o valor das variáveis de estado diminuem ainda mais. Para o alcance global as variáveis de estado apresentam um comportamento semelhante entre os sítios na extremidade fixa e os sítios para a extremidade livre.

No sistema com o acoplamento do tipo lei de potência ocorre a mudança de comportamento para o valor médio das variáveis de curvatura, para o tempo transiente para obtenção da memória permanente e para o desvio padrão do sistema. Para o alcance global o sistema sente mais a perturbação estocástica, pois devido ao acoplamento o sítio  $i$  é influenciado pela perturbação estocástica dos outros sítios da rede, essas perturbações tendem a se somarem aumentando assim o desvio padrão do sítio  $i$ .

Propomos para trabalhos futuro o estudo da formação de memórias de curta duração em uma rede de mapas acoplados com um acoplamento do tipo *small-world*.

No capítulo 5 estudamos a formação das memórias de curta duração em uma cadeia de osciladores com acoplamento indutivo. Foi considerado o caso onde o circuito elétrico é do tipo  $RL$  e em um segundo caso quando o circuito elétrico era do tipo  $RLC$ . No primeiro caso foi realizada a discretização no tempo dos osciladores, onde as redes de mapas acoplados possuem o comportamento semelhante aos dos osciladores acoplados. O sistema apresenta a formação de valores diferentes de memórias. Realizou-se o estudo do sistema quando os circuitos estavam sujeitos a um ruído no seu indutor ou no resistor, e também quando ele estivesse sujeito a um ruído junto ao sinal periódico da tensão. Para um ruído inserido no resistor ou no indutor, com uma amplitude de ruído igual a 4% da amplitude da tensão os circuitos  $RL$  apresentaram uma sobreposição dos valores das memórias, não podendo dessa forma armazenar mais informações. Quando o ruído foi inserido no sinal periódico da tensão o sistema começou a apresentar sobreposição a partir de uma amplitude do ruído superior a 18% da amplitude do sinal periódico da tensão.

Os osciladores acoplados possuíam um sítio com tensão diferente das demais, com a variação do valor dessa tensão o sistema apresentou variações nos valores das outras memórias, assim uma maneira de controlar a armazenagem de informação no sistema seria a variação da menor tensão.

No segundo caso estudamos a formação das memórias em uma cadeia de osciladores que representam circuitos  $RLC$  acoplados através de indutores. Foi observado que a presença do capacitor no sistema modificou os valores das variáveis de curvatura.

Propomos para trabalhos futuros o estudo do ruído nesse circuitos  $RLC$ , para analisar a formação dos padrões de memórias e observar se não ocorre ressonância estocástica no sistema.

# Bibliografia

- [1] K. Kaneko, (1993), *Theory and application of coupled map lattices*. Wiley, Chichester;
- [2] K. Wiesenfeld e P. Hadley, (1989) *Attractor crowding in oscillator array*, Phys. Rev. Letters, **62**, 1335;
- [3] A. E. Jackson, (1990), *Perspectives of nonlinear dynamics*, **2**, Cambridge University Press, 390;
- [4] J. P. Crutchfield e K. Kaneko, (1987), *Phenomenology of spatiotemporal chaos*, in: *Directions in chaos*, **1**, ED. Hao Bai-lin, World Scientific, Singapore;
- [5] K. Kaneko (1991), *Globally coupled circle maps*. Physica D, **54**, 5;
- [6] S. N. Coppersmith, T. C. Jones, L. P. Kadanoff, A. Levine, J. P. McCarten, S. R. Nagel, S. C. Venkataramani e X. Wu, (1997), *Self-Organized Short-Time Memories*, Phys. Rev. Letters, **78**, 3983;
- [7] A. M. Batista e R. L. Viana, (2002), *Short-term memories in lattices of inductively coupled AC-driven circuits*, Physica A, **303**, 410;
- [8] K. Kaneko, (1983), *Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems*, Ph. D. Thesis, p. 222 (uma versão foi publicada pela editora World Scientific, Singapore, 1986);
- [9] R. L. Viana, (2001), *Introdução às Redes de Mapas Acoplados Modelos para o Estudo de Caos Espaço-Temporal*, Departamento de Física da Universidade Federal do Paraná, Notas de Aula do mini-curso ministrado no Instituto de Física de São Paulo de 21 a 25/02/2000, IFUSP, publicação 1527;
- [10] S. H. Strogatz, (1999), *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Perseus Books Publishing, New York, E.U.A.;
- [11] R. M. May, (1976), *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, **261**, 459;

- [12] P. A. Samuelson, (1947), *Foundations of economic analysis* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts;
- [13] J. Kemeny e J. L. Snell. (1972.) *Mathematical Models in the Social Sciences* MIT Press, Cambridge, Massachusetts;
- [14] E. Ott, (1993), *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, New York, EUA;
- [15] K. Alligood e T., Sauer T. D. , J. A. Yorke, (1997): *Chaos an introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag New York, Inc;
- [16] P. G. Lind, J. Corte-Real e J. A. C. Gallas, (2002), *Modeling velocity in gradient flows with coupled-map lattices with advection*, Phys. Rev. E, **66**, 016219;
- [17] D. J. Watts, (1999), *The Dynamics of Networks Between Order and Randomness*, Princeton. Princeton University Press;
- [18] D. J. Watts e S. H. Strogatz, (1998), *Collective dynamics of 'small-world' networks*, Nature, **393**, 440;
- [19] A. Lichtenberg e M. Lieberman, (1983), *Regular and Stochastic Motion*, Springer Verlag, Berlin;
- [20] M. Y. Choi e J. Choi, (2003), *Stability and Ensemble Inequivalence in a Globally Coupled System*, Phys. Rev. Letters, **91**, 124101;
- [21] K. Kaneko, (1990), *Globally Coupled Chaos Violates the Law of large Numbers but Not the Central-Limit Theorem*, Phys. Rev. Letters, **65**, 1391;
- [22] K. Kaneko, (1989), *Chaotic but Regular Posi-Nega Switch among Coded Attractors by cluster-Size Variation*, Phys. Rev. Letters, **63**, 219;
- [23] A. C. Martí e C. Masoller, (2003), *Delay-induced synchronization phenomena in an array of globally coupled logistic map*, Phys. Rev. E, **67**, 056119;
- [24] J. L. Rogers e L.T. Wille, (1996), *Phase transitions in nonlinear oscillator chains*. Phys. Rev. E, **54**, 2193;
- [25] R. L. Viana e A. M. Batista, (1998), *Synchronization of Coupled Kicked Limit Cycle Systems*. Chaos, Solitons and Fractal, **9**, 1931;
- [26] S. N. Coppersmith P. B. Littlewood, (1987), *Pulse-duration memory effect and deformable charge-density waves*, Phys. Rev. B, **36**, 311;
- [27] J. J. Hopfield, (1982), *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **79**2554; J. J. Hopfield e D. W. Tank (1996), *Science*, **233**, 625;
- [28] C. Tang, K. Wiesenfeld, P. Bak, S. Coppersmith and P. Littlewood, (1987), *Phase Organization*, Phys. Rev. Letters, **58**, 1161;

- [29] S. N. Coppersmith, (1987), *Overdamped Frenkel-Kontorova model with randomness as a dynamical system: Mode locking and derivation of discrete maps*, Phys. Rev. A, **36**, 3375;
- [30] S. N. Coppersmith, (1991), *Nonlinear dynamics of sliding charge density waves*, Physica D, **51**, 131;
- [31] A. M. Batista, R. L. Viana e S. R. Lopes, (2000), *Multiple short-time memories in coupled weakly nonlinear map lattices*. Phys. Rev. E, **61**,5990;
- [32] M. L. Povinelli, S. N. Coppersmith, L. P. Kadanoff, S. R. Nagel e S. C Venkataram, (1999), *Noise stabilization of self-organized memories*. Phys. Rev. E, **59**,4970;
- [33] A. V. M. Herz e J. J. Hopfield, (1995),*Earthquake Cycles and Neural Reverberations:Collective Oscillations in systems with Pulse-Coupled Threshold Elements*, Phys. Rev. Letters, **75**, 1222;
- [34] C. Anteneodo, S. E. de S. Pinto, A. M. Batista e R. L. Viana, (2003), *Analytical results for coupled-map lattices with long-range interactions*. Phys. Rev. E, **68**, 045202;
- [35] A. Blum, (1992) *Neural networks in C++; an object-oriented framework for building connectionist systems*, Editora John Wiley Sons Inc., New York, EUA;
- [36] J. R. Reitz, F. J. Milford and R. W. Christy, (1982) *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*, Editura Campus Ltda, Rio de Janeiro;
- [37] K. Radhakrishnan e C. Hindmarsh, (1994), *Discpription and Use of LSODE, the Libermore Solver for Ordinary Differential Equations* LLNL Report UCRL-ID-113855;
- [38] H. William et al.,(1992), *Numerical recipes in C*, Cambrigde University Press, Cambrigde;
- [39] K. D. Machado, (1999), *Equações diferencias aplicadas à Física*, Editora UEPG, Ponta Grossa, Paraná;