

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDUARDO MAGALHÃES DE CASTRO

ESTABILIDADE NUMÉRICA DE ONDAS SOLITÁRIAS PARA
EQUAÇÕES DE EULER EM ESCOAMENTOS COM VORTICIDADE
CONSTANTE

CURITIBA

2022

EDUARDO MAGALHÃES DE CASTRO

ESTABILIDADE NUMÉRICA DE ONDAS SOLITÁRIAS PARA
EQUAÇÕES DE EULER EM ESCOAMENTOS COM VORTICIDADE
CONSTANTE

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Santos Junior

Co-orientador: Prof. Dr. Marcelo Veloso Flamarion Vasconcellos

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNO

Castro, Eduardo Magalhães de

Estabilidade numérica de ondas solitárias para equações de Euler em escoamentos com vorticidade constante / Eduardo Magalhães de Castro. – Curitiba, 2022.

1 recurso on-line : PDF..

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Santos Junior

Coorientador: Prof. Dr. Marcelo Velloso Flamarion Vasconcellos

1. Métodos numéricos. 3. Euler, Equações. I. Santos Junior, Roberto Ribeiro. II. Vasconcellos, Marcelo Velloso Flamarion. III. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Matemática. IV. Título

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA -
40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **EDUARDO MAGALHÃES DE CASTRO** intitulada: **Estabilidade numérica de ondas solitárias para equações de Euler em escoamentos com vorticidade constante**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO RIBEIRO SANTOS JUNIOR, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 27 de Abril de 2022.

Assinatura Eletrônica

03/05/2022 14:03:48.0

ROBERTO RIBEIRO SANTOS JUNIOR

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

28/04/2022 08:52:44.0

AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

28/04/2022 10:10:19.0

ANDRE NACHBIN

Avaliador Externo (ASSOCIAÇÃO INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, quero agradecer aos meus pais, Adilson e Ana Paula, que sempre me apoiaram nas minhas escolhas.

Ao resto da minha família, pois a distância é grande mas não permite o esquecimento de como colaboraram para formar a pessoa que me tornei.

Também gostaria de agradecer aos meus amigos; a indescritível sorte de ter tão raras pessoas sempre ao meu lado.

À Bia, minha namorada e companheira, que acompanhou de perto toda minha trajetória e forneceu apoio em cada etapa.

À Universidade Federal do Paraná e em especial ao Departamento de Matemática, tem sido um prazer fazer parte de uma instituição tão especial.

Aos membros da banca avaliadora Prof. Dr. André Nachbin e Profa. Dra. Ailin Ruiz de Zarate pelos seus comentários ricos e atenciosos.

Ao meu co-orientador Professor Marcelo Flamarion, quem forneceu vital suporte moral e técnico em cada obstáculo inesperado desse trabalho.

Finalmente, ao meu orientador, Professor Roberto Ribeiro Jr, por continuamente prestar sua parceria fraternal e tão bem-humorada.

“Escolho o otimismo como um axioma.”

Yanis Varoufakis

RESUMO

Dentre uns dos problemas que tem despertado a curiosidade de leigos e cientistas por séculos está a propagação das ondas aquáticas. Matematicamente, o movimento das ondas aquáticas é modelado por meio das equações da hidrodinâmica deduzidas por Euler em meados do século XVIII. As equações de Euler consistem de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares de fronteira-livre e móvel. Diversos trabalhos têm abordado este problema no contexto de ondas aquáticas viajantes em escoamentos com vorticidade constante. No entanto, poucos autores têm considerado o estudo da estabilidade numérica de tais ondas. A hipótese de ondas viajantes permite eliminar a dependência na variável tempo das equações governantes de modo que o escoamento passa a ser permanente, tornando até certo ponto mais fácil o tratamento numérico das equações. Neste trabalho estudamos numericamente a estabilidade de ondas solitárias em escoamentos com vorticidade constante soluções das equações de Euler permanentes. Por meio da técnica do mapeamento conforme reescrevemos as equações de Euler (permanentes e dependentes do tempo) em um domínio mais simples onde as soluções numéricas são calculadas via métodos numéricos pseudo-espectrais. A abordagem empregada nos permite tomar as soluções das equações de Euler permanentes como dados iniciais para as equações de Euler dependentes do tempo. Com isso, investigamos até que ponto as ondas solitárias rotacionais para as equações de Euler permanentes são de fato ondas viajantes. Nossos resultados indicam que embora possam existir ondas solitárias para as equações de Euler permanentes para valores de vorticidade arbitrariamente grandes, essas ondas não são numericamente estáveis. Mais ainda, as simulações apontam que as ondas solitárias são estáveis apenas para valores de vorticidade pequenos.

Palavras-chave: Ondas solitárias, Equações de Euler, Equação de KdV, Escoamento com vorticidade constante, Métodos numéricos.

ABSTRACT

Among the problems that have brought curiosity of laymen and scientists for centuries is the propagation of water waves. Mathematically speaking, the movement of water waves is modelled by the hydrodynamic equation derived by Euler in the middle of the 18th century. The Euler equations consist of a system of nonlinear partial differential equations with free boundary conditions. Several authors have studied this problem in the context of travelling water wave with constant vorticity, however there are only a few works devoted to the study of the numerical stability of such waves. The assumption of travelling wave allows to eliminate the time dependence in the governing equations turning the flow into a steady one, which makes the numerical treatment somewhat simpler. In this work we study numerically the stability of solitary waves for the steady Euler equation in a shear flow with constant vorticity. Through a conformal mapping we rewrite the (steady and time-dependent) Euler equations in a new coordinate system in which numerical computations are performed via a pseudo-spectral method. This approach permit us to consider the solutions of the steady problem as initial data for the time-dependent Euler equations. Consequently, we investigate in what extent solutions of the steady problem are indeed travelling wave solutions for the the time-dependent problem. Although we are able to compute solitary waves for the steady Euler equations for large values of vorticity, our results indicate that these waves are not numerically stable. Furthermore, we notice that only solitary waves in flows with small values of vorticity turn out to be numerically stable.

Keywords: Solitary Wave, Euler Equations, KdV Equation, Shear flow with constant vorticity, Numerical methods.

Lista de Figuras

1	Foto de uma onda solitária na costa de Maui(Havaí).	11
2	Foto de uma onda solitária gerada em laboratório. Clique aqui e veja o vídeo deste experimento.	12
1.1	Correnteza de cisalhamento: solução trivial das equações (1.1.1).	18
2.1	Esquema ilustrativo do mapeamento conforme $Z(\xi, \eta)$	24
2.2	Perfis de onda com amplitudes $A = 0.1$ (esquerda) e $A = 0.2$ (direita).	37
2.3	Relação entre velocidade e vorticidade	38
2.4	Relação entre velocidade e amplitude para diferentes escolhas de vorticidade e comparação com KdV.	40
3.1	Instabilidade perceptível na solução para parâmetros $A = 0.1$ e $\Omega = -5$. Tracejado em vermelho está o dado \mathbf{Y}_0 enquanto em azul vemos $\mathbf{Y}(t)$ no instante t	52

Sumário

Introdução	11
1 Formulação Matemática	17
1.1 As Equações de Euler	17
1.2 Abordagem via Teoria do Potencial	18
1.3 Reescalonamento e referencial viajante	20
2 Ondas solitárias para as equações de Euler permanentes	23
2.1 A ferramenta crucial: o mapeamento conforme	23
2.2 As equações governantes no sistema de coordenadas canônico	28
2.3 Discretização e o método	34
2.4 Simulações numéricas	37
2.4.1 Ondas solitárias com vorticidade	37
2.4.2 Soluções de Euler vs. soluções de KdV	38
2.4.3 Estudo de resolução	41
3 As equações de Euler dependentes do tempo	42
3.1 Mapeamento conforme dependente do tempo	42
3.2 Equações dinâmicas	44
3.3 Simulações numéricas: estabilidade das ondas solitárias viajantes	49
Considerações Finais	53
Referências	55
A Resolução das equações de ϕ e ψ	59

Introdução

“A mesma curiosidade que nos manda para as estrelas na velocidade do pensamento nos incita a ir lá na realidade” [44]. É a curiosidade que temos de entender as situações-problema mais banais do cotidiano que nos leva a novas descobertas e tecnologias.

Dentre uns dos problemas que tem despertado a curiosidade de leigos e cientistas por séculos está a propagação das ondas aquáticas. Estas se movimentam de diversas formas, são influenciadas por uma gama de fatores, por exemplo, topografia do fundo do mar, a presença de uma correnteza submersa, velocidade e direção do vento, dentre outros. De modo que devido à complexidade intrínseca a este problema, para a realização de um estudo matemático é necessário considerar algumas hipóteses simplificadoras.

Dito isso, apresentamos abaixo algumas hipóteses acerca das ondas aquáticas que fazemos neste estudo:

- (i) Consideraremos apenas ondas solitárias. Tais ondas tem a forma de uma elevação solitária, propagam em uma direção horizontal fixada, com velocidade constante e sem mudar de forma, e o movimento é o mesmo em qualquer direção paralela sua a crista¹. Por esta razão, é suficiente analisar uma seção transversal do escoamento paralelo a direção de propagação da onda. A figura 1 mostra uma fotografia de uma onda solitária na costa de Maui (Havaí) e a figura 2 a foto de uma onda solitária gerada em laboratório.



Figura 1: Foto de uma onda solitária na costa de Maui(Havaí).
Fonte: Constantin [14].

¹A crista da onda é o ponto mais elevado da onda.

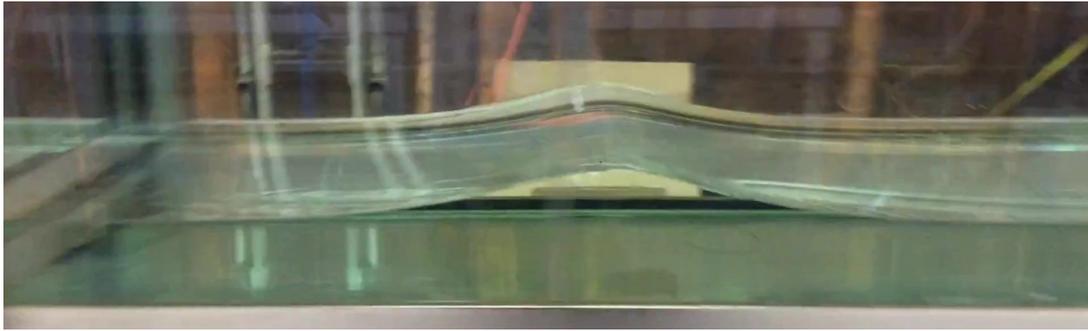


Figura 2: Foto de uma onda solitária gerada em laboratório. [Clique aqui](#) e veja o vídeo deste experimento.

Fonte: Scripps Institution of Oceanography [43].

- (ii) Supomos que as ondas solitárias interagem com uma correnteza submersa que varia linearmente com a profundidade, ou seja, ondas em escoamentos com vorticidade constante. Do ponto de vista físico, este perfil de correnteza pode ser considerado se as ondas são longas quando comparadas com a profundidade média do canal [45]. Em particular, vorticidade constante dá uma boa descrição das correntes de maré, isto é, o movimento alternado e horizontal da água associado à subida da maré, sendo a vorticidade positiva/negativa apropriada para vazante e enchente respectivamente. Em áreas da plataforma continental e em muitas enseadas costeiras estas são as correntes mais significativas – além disso, o fato de serem as correntes mais regulares e previsíveis aumentam o interesse por este tópico [15].
- (iii) Supomos que o fundo do mar é plano. Embora a topografia no fundo do mar tenha um grande efeito na onda de superfície esta interação não é investigada no presente trabalho.

Além das hipóteses (i)-(iii), consideraremos a água como um fluido invíscido e incompressível. Posto isso, usaremos como modelo matemático para a dinâmica das ondas as equações de Euler bidimensionais – tais equações foram deduzidas por Euler em meados do século XVIII e são consideradas até os dias atuais como as equações fundamentais da hidrodinâmica.

As equações de Euler consistem de um sistema de equações diferenciais parciais (EDP) deduzido a partir dos princípios físicos de conservação de massa e conservação da quantidade de movimento (vide [52] p.431 e [37] p.35). Diferente das equações diferenciais parciais comumente tratadas nos cursos de EDP a nível de graduação e de mestrado, as equações de Euler são EDPs não lineares. Além da dificuldade inerente à não linearidade das equações, ao trabalhar com este modelo, no primeiro instante já deparamos com a dificuldade de encontrar a fronteira do domínio no qual as EDPs estão sendo resolvidas. Pois, embora o domínio seja limitado por baixo pelo fundo do mar, no topo temos a onda de água, cujo perfil é uma das incógnitas do problema. Por esta razão dizemos que as

equações de Euler constituem um problema de fronteira livre.

O objetivo primário deste trabalho consiste em realizar um estudo numérico a respeito da interação das ondas aquáticas com correntezas que variam linearmente com a profundidade. Este tipo de escoamento é classificado como sendo de vorticidade constante. Estamos particularmente interessados em:

1. *Encontrar numericamente ondas solitárias com vorticidade² que sejam soluções viajantes das equações de Euler.* O adjetivo “viajante” significa que a onda se propaga com velocidade constante e sua forma não muda ao longo do tempo. No contexto de tais ondas é conveniente passar as equações para um referencial que viaja com a velocidade da onda, de modo que eliminamos a dependência do tempo e passamos a trabalhar com um escoamento permanente ou estacionário ([48] p.16). Daí, quando escritas neste referencial móvel as equações de Euler são chamadas de equações de Euler permanentes ou estacionárias.
2. *Investigar até que ponto as ondas solitárias com vorticidade soluções das equações de Euler permanentes são de fato viajantes.* Mais especificamente, pretendemos analisar o efeito da vorticidade na estabilidade das ondas solitárias.

Ondas solitárias com vorticidade constante tem sido amplamente estudadas dentro das diversas correntes de pesquisa existentes no campo da teoria matemática das ondas aquáticas. De modo que torna-se difícil apresentar uma descrição minuciosa acerca de todos os resultados existentes. Dito isso, mencionamos a seguir apenas alguns trabalhos cujos resultados e referências são suficientes para compreendermos o histórico do problema e o estado da arte.

O estudo de ondas solitárias teve início no século XIX com John Scott Russell. Em 1834 Russell estava andando pelo Union Canal em Edimburgo (Escócia) quando se deparou com um barco que estava sendo puxado por dois cavalos. À frente desse barco uma onda começou a se formar e, quando repentinamente o barco parou, esta onda continuou o curso do canal. Intrigado pelas qualidades dessa onda, que tomou a forma de uma elevação solitária, Russell seguiu-a pelo canal por aproximadamente três quilômetros. Durante seu trajeto, a onda não se mostrou dispersiva, retendo sua forma original. Além disso, esta onda manteve uma velocidade constante e viajava celeremente [42]. Depois de sua descoberta, a qual ele chamou de Onda de Translação, Russell realizou diversos experimentos em tanques de água a fim de encontrar propriedades da onda solitária. Russell acreditava que a onda solitária tinha grande relevância, no entanto muitos cientistas discordavam disto. Matemáticos renomados como George Airy e George G. Stokes tentaram dar uma explicação teórica rigorosa para a onda solitária, mas eles não tiveram sucesso. Airy argumentou erroneamente que a onda solitária era uma consequência de

²Usaremos o termo ondas solitárias com vorticidade ou ondas solitárias rotacionais para nos referir as ondas solitárias em escoamentos com vorticidade constante.

sua teoria de ondas aquáticas lineares em águas rasas, enquanto Stokes duvidava que a onda solitária mantinha sua forma permanente [35]. A primeira abordagem teórica para ondas solitárias foi dada por Boussinesq [9]. Contudo, a controvérsia em torno das ondas solitárias permaneceu até o trabalho de Diederik Korteweg e Gustav de Vries [29], que em 1895 deduziram um modelo reduzido para descrever a dinâmica da onda solitária - tal modelo ficou conhecida como a equação de Korteweg-de Vries (ou simplesmente equação de KdV).

Da equação de KdV até os primeiros resultados analíticos a respeito de ondas solitárias para as equações de Euler foram por volta de cinquenta anos. A existência de ondas solitárias para as equações de Euler completas é provada de forma rigorosa apenas em meados do século XX para ondas de pequena amplitude [33, 46, 23, 6] e mais tarde para ondas solitárias de grande amplitude por Benjamin e Bona [7], e por Toland e colaboradores [3, 5, 4]. Todos estes trabalhos tratam apenas de ondas solitárias em escoamentos irrotacionais, isto é, escoamentos com vorticidade igual a zero. A prova da existência de ondas solitárias com vorticidade é dada por Hur [26] (para ondas de amplitude pequena) e por Wheeler [51] (para ondas de amplitude grande). Ambos autores utilizam em seus trabalhos a transformação de Dubreil-Jacotin que pressupõe a não existência de pontos de estagnação - partículas de fluido com velocidade zero no referencial da onda. Apenas recentemente, Kozlov et al. [32] provaram a existência de ondas solitárias para as equações de Euler completas em escoamentos com vorticidade constante e com pontos de estagnação no interior do fluido. Entretanto, trabalhos na linha de métodos assintóticos da década de 80 já indicavam a existência de ondas solitárias em escoamentos com pontos de estagnação no interior [28].

Modelos assintóticos para ondas aquáticas solitárias com vorticidade foram inicialmente estudados por Benjamin [8], para ondas solitárias permanentes, e por Freeman e Johnson [22], que deduziram uma equação do tipo KdV a partir das equações de Euler na presença de uma correnteza não uniforme variando verticalmente. Nestes trabalhos os autores supõem que a razão entre a profundidade da água e o comprimento de onda característico é pequena (regime fracamente dispersivo), assim como também é pequena a razão entre a amplitude da onda e a profundidade da água (regime fracamente linear). Sem impor nenhuma restrição na amplitude da onda, Choi [11] deduziu um modelo assintótico para ondas solitárias fracamente dispersivas em escoamentos com vorticidade constante. Mais recentemente, Guan [25] estudou numericamente a estrutura do escoamento abaixo da onda solitária com vorticidade constante. Neste trabalho, o referido autor comparou as trajetórias das partículas capturadas pelo modelo de KdV com as trajetórias provenientes das equações de Euler completas. Seus resultados apontam que ambos modelos capturam praticamente a mesma estrutura no interior do fluido (trajetórias e pontos de estagnação) quando a amplitude da onda é pequena.

As equações de Euler completas são difíceis de lidar numericamente porque a onda de

superfície é uma incógnita do sistema que muda a fronteira do domínio a cada instante de tempo. Devido a isso ao buscar por soluções viajantes, recorre-se as equações de Euler permanentes. Teles da Silva e Peregrine [45] utilizam esta estratégia. Daí, por meio de um mapeamento conforme que transforma o domínio físico em uma região meio que anular, usam um método de integral de contorno para construir ondas solitárias com vorticidade para as equações de Euler permanentes. Mais tarde, Vanden-Broeck [50] revisita este problema, e por meio de uma formulação integral de contorno, mostra que as equações de Euler permanentes permitem como solução ondas solitárias exóticas, isto é, ondas que não são gráfico de uma função. Ademais, ele mostra que existem ramos de soluções que não bifurcam do fluxo cisalhante trivial, isto é, do fluxo induzido pela correnteza variando linearmente com a profundidade para a superfície livre em repouso.

Com relação aos esquemas numéricos para as equações de Euler dependentes do tempo, destaca-se a técnica introduzida por Dyachenko, Zakharov e Kuznetsov [19]. Por meio de um mapeamento conforme dependente do tempo, o procedimento proposto por estes autores transforma as equações de Euler em um sistema de EDOs. Esta ferramenta tem mostrado resultados numéricos com boa acurácia, conforme mostrado, por exemplo, por Flamarion [20] no estudo da dinâmica de ondas geradas pela interação correnteza-topografia. Ressaltamos também que este mapeamento tem sido amplamente aplicado no estudo numérico das equações de Euler permanentes, principalmente na investigação das estruturas abaixo das ondas periódicas com vorticidade [17, 18, 40, 12].

Neste trabalho estudamos a estabilidade das ondas solitárias em escoamentos com vorticidade constante que são soluções das equações de Euler permanentes. Mais especificamente, baseados no trabalho de Ribeiro-Jr et al [40] para ondas periódicas e viajantes em escoamentos com vorticidade constante, construímos um esquema numérico para determinar ondas solitárias com vorticidade para as equações de Euler permanentes. Em seguida, usamos estas ondas como dado inicial das equações de Euler dependentes do tempo – o que nos permite analisar se as soluções das equações de Euler permanentes são de fato viajantes. Para o cálculo da dinâmica das ondas fazemos uma adaptação do esquema proposto por Flamarion [20] no estudo de ondas geradas. Até onde sabemos, não há estudos acerca da estabilidade das ondas solitárias no sentido que estamos fazendo aqui. Os estudos de estabilidade existentes na literatura tem sido feitos no contexto de ondas periódicas com foco na instabilidade de Benjamin-Feir [12] e estabilidade linear [21].

Nossos resultados indicam que embora possam existir ondas solitárias para as equações de Euler permanentes para valores de vorticidade arbitrariamente grandes, essas ondas não são numericamente estáveis. Mais ainda, as simulações apontam que as ondas solitárias são estáveis apenas para valores de vorticidade pequenos.

Acreditamos que seja relevante destacar que o esquema numérico proposto aqui para resolver as equações de Euler permanentes não é adequado para construir as soluções

limites, isto é, as ondas exóticas ou as ondas com perfil do tipo cúspide na crista. Isso acontece por dois motivos: (i) A formulação matemática utilizada para construção do método numérico requer um certo grau de suavidade da solução; (ii) Fixado a vorticidade e amplitude da onda o problema pode admitir mais de uma solução (veja Figura 10 de Teles da Silva e Peregrine [45]), a saber, uma que pode ser obtida do processo de continuação na amplitude e outras que surgem de uma nova família. Todavia, nossas simulações revelam que as ondas solitárias são numericamente instáveis antes mesmo de alcançar as situações limítrofes do espaço solução. De maneira geral, esse texto está estruturado e escrito de forma mais simples possível de modo a torná-lo acessível aos leitores não familiarizados com a teoria matemática de ondas aquáticas e métodos numéricos para EDPs. É com este intuito que as ideias supracitadas estão organizadas ao longo deste texto da seguinte forma: no primeiro capítulo são expostas as equações governantes das ondas aquáticas em escoamentos com vorticidade constante. No segundo capítulo descrevemos o estudo que realizamos acerca das soluções das equações de Euler permanentes. Já no terceiro capítulo tratamos das equações de Euler dependentes do tempo. Por fim apresentamos nossas considerações finais.

Capítulo 1

Formulação Matemática

Neste capítulo mostraremos as equações que governam a dinâmica de ondas aquáticas de superfície.

1.1 As Equações de Euler

Nesta seção introduziremos as famosas equações de Euler que modelam o movimento dos fluidos não viscosos. Consideremos como contexto físico um canal bidimensional de profundidade fixa d (fundo plano) por onde escoar um fluido com campo de velocidade igual a $\vec{U}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$. Sendo $\zeta(x, t)$ a elevação do nível da água ao longo do canal e $p(x, y, t)$ a pressão no corpo do fluido, então sua dinâmica é governada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \vec{U}_t + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} &= -\frac{\nabla p}{\rho} - g\mathbf{j} && \text{em } -d < y < \zeta(x, t), \\ \nabla \cdot \vec{U} &= 0 && \text{em } -d < y < \zeta(x, t), \\ p &= p_{atm} && \text{sobre } y = \zeta(x, t), \\ v &= \zeta_t + u\zeta_x && \text{sobre } y = \zeta(x, t), \\ v &= 0 && \text{sobre } y = -d, \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

onde g denota a aceleração gravitacional da Terra, \mathbf{j} a direção $(0, 1)$, ρ a densidade e p_{atm} é a pressão atmosférica que por simplicidade supomos constante. As duas primeiras equações, no interior do fluido, são as equações de Euler propriamente ditas (por vezes também chamadas de equações de Stokes [24]), onde a primeira é a Equação do Balanço da Quantidade de Movimento, decorrente da segunda Lei de Newton, enquanto a segunda é a Equação de Incompressibilidade, consequência da suposição de que a densidade é constante. A quarta equação é chamada de Condição de Cinemática e é derivada a partir do princípio de que a trajetória de uma partícula que inicialmente localiza-se sobre a superfície está inteiramente contida na superfície (o que implica não haver “respingos” para fora do domínio). Por fim a última equação significa apenas que o fundo do canal é

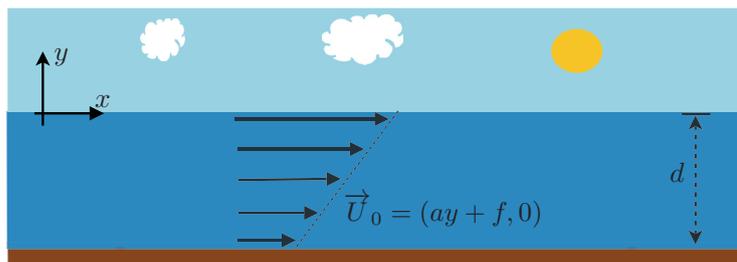


Figura 1.1: Correnteza de cisalhamento: solução trivial das equações (1.1.1).

impermeável.

Estamos interessados em estudar escoamentos cuja vorticidade é constante. O termo vorticidade refere-se ao módulo do campo $\text{rot } \vec{U}$; se este é nulo, dizemos que o escoamento é irrotacional. Para entender o que significa essa propriedade suponha que um grão de areia se move no fluido. Se o escoamento é irrotacional, o grão de areia não gira em torno de um eixo que passa pelo seu centro de massa, embora possa girar em torno de um eixo qualquer.

Postas todas as hipóteses sobre as equações governantes é fácil verificar que

$$\zeta(x, t) \equiv 0, \quad \vec{U}_0 = (ay + f, 0), \quad p(x, y, t) = p_{atm} - \rho gy, \quad (1.1.2)$$

onde a e f são constantes, é uma solução trivial das equações (1.1.1).

Na ausência de qualquer velocidade na direção vertical como no caso, dizemos que o campo se trata de uma correnteza ou fluxo cisalhante. No exemplo ilustrado na Figura 1.1, note que uma bolinha pequena e leve no interior do fluido, além de transladar ao longo da correnteza (para a direita) apresentaria tendência de girar em torno do próprio eixo no sentido horário, o que intuitivamente delata a presença da vorticidade. Um cálculo rápido mostra que a vorticidade de \vec{U}_0 é precisamente o valor $-a$. Um dos objetivos centrais desse trabalho é estudar a influência dessa grandeza nas soluções que encontraremos, por isso dedicaremos atenção a esse valor em diversos passos do desenvolvimento. No que segue, buscaremos soluções não triviais a partir de uma perturbação irrotacional da correnteza considerada acima.

1.2 Abordagem via Teoria do Potencial

A motivação dessa abordagem é devida parcialmente ao Teorema de Helmholtz-Hodge, que afirma que todo campo de vetores suficientemente suave em domínio limitado pode ser escrito unicamente como a soma de um campo irrotacional com um campo incompressível [13] (p. 36).

Procuraremos soluções da forma $\vec{U} = \vec{U}_0 + \nabla \bar{\phi}$, onde $\bar{\phi} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escalar chamada função potencial. Aqui, ∇ simboliza o gradiente aplicado somente

em relação às variáveis espaciais (x, y) . Assim temos o campo explicitamente dado por $\vec{U} = (u, v)$ onde

$$\begin{cases} u = \bar{\phi}_x(x, y, t) + ay + f, \\ v = \bar{\phi}_y(x, y, t). \end{cases} \quad (1.2.1)$$

A ideia é reescrevermos a primeira equação de (1.1.1) como uma igualdade de gradientes e para esse fim faremos uso da identidade vetorial

$$\frac{1}{2}\nabla(\vec{U} \cdot \vec{U}) = -\text{rot } \vec{U} \times \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U},$$

que juntamente com (1.1.1)₁, nos dá

$$\vec{U}_t + \frac{1}{2}\nabla(\vec{U} \cdot \vec{U}) - a\mathbf{k} \times \vec{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\mathbf{j} \quad (1.2.2)$$

onde \mathbf{k} denota o vetor unitário que sai do plano onde o fluido se encontra (plano xy). Note que

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = u^2 + v^2 = (\bar{\phi}_x + ay + f)^2 + \bar{\phi}_y^2 = \bar{\phi}_x^2 + \bar{\phi}_y^2 + 2\bar{\phi}_x(ay + f) + (ay + f)^2$$

e também, tomando $\bar{\psi}$ como uma conjugada harmônica de $\bar{\phi}$

$$\begin{aligned} a\mathbf{k} \times \vec{U} &= a(-v, u) = a(-\bar{\phi}_y, \bar{\phi}_x + ay + f) = \\ &= a(\psi_x, \psi_y) + a(0, ay + f) = a\nabla\psi + a\nabla\left(\frac{ay^2}{2} + fy\right) = a\nabla\psi + a\nabla\psi_0 \end{aligned}$$

com $\psi_0 = ay^2/2 + fy$.

Substituindo (1.2.1) em (1.1.1), levando em conta os cálculos acima, temos:

$$\nabla\left(\bar{\phi}_t + \frac{1}{2}(\bar{\phi}_x^2 + \bar{\phi}_y^2) + (ay + f)\bar{\phi}_x + \frac{1}{2}(ay + f)^2 - a\psi - a\psi_0\right) = \nabla\left(-\frac{p}{\rho} - gy\right).$$

Podemos perceber que

$$\frac{1}{2}(ay + f)^2 - a\psi_0 = \frac{1}{2}(a^2y^2 + 2ayf + f^2 - a^2y^2 - 2ayf) = \frac{f^2}{2},$$

isto é, esse termo é constante em x e y . Daqui então obtemos a equação de Bernoulli para fluxos com vorticidade constante:

$$\bar{\phi}_t + \frac{1}{2}(\bar{\phi}_x^2 + \bar{\phi}_y^2) + gy + (ay + f)\bar{\phi}_x - a\psi = -\frac{p - p_{atm}}{\rho} + B(t),$$

onde $B(t)$ é alguma função de t . Com isso, ao longo da fronteira livre $y = \zeta(x, t)$, a

condição se torna

$$\bar{\phi}_t + \frac{1}{2} (\bar{\phi}_x^2 + \bar{\phi}_y^2) + gy + (ay + f)\bar{\phi}_x - a\psi = B(t). \quad (1.2.3)$$

Substituindo (1.2.1) nas demais equações de (1.1.1), temos

$$u_x + v_y = 0 \implies \bar{\phi}_{xx} + \bar{\phi}_{yy} = \Delta\bar{\phi} = 0,$$

no interior do domínio,

$$v = \zeta_t + u\zeta_x \implies \bar{\phi}_y = \zeta_t + (\bar{\phi}_x + ay + f)\zeta_x$$

na superfície $y = \zeta(x, t)$ e

$$v = 0 \implies \bar{\phi}_y = 0,$$

no fundo $y = -d$.

Resumindo, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} \Delta\bar{\phi} &= 0 && \text{em } -d < y < \zeta(x, t), \\ \zeta_t + (a\zeta + f + \bar{\phi}_x)\zeta_x &= \bar{\phi}_y && \text{sobre } y = \zeta(x, t), \\ \bar{\phi}_t + \frac{1}{2} (\bar{\phi}_x^2 + \bar{\phi}_y^2) + (a\zeta + f)\bar{\phi}_x + g\zeta - a\bar{\psi} &= B(t) && \text{sobre } y = \zeta(x, t), \\ \bar{\phi}_y &= 0 && \text{sobre } y = -d. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

1.3 Reescalonamento e referencial viajante

Dois passos importantes são endereçados nesta seção: o reescalonamento do sistema de unidades para novas unidades adimensionais e, em seguida, uma mudança de referencial que nos permitirá trabalhar com variáveis viajantes.

Introduzimos, em primeiro lugar, novas variáveis que se relacionam com as variáveis originais de acordo com as relações (1.3.1). Registramos aqui que o parâmetro F é chamado de número de Froude e $-\Omega$ é a vorticidade adimensional. Note que o número de Froude representa a razão entre a componente uniforme (independente de y) do fluxo cisalhante e a velocidade característica de águas rasas.

$$\begin{aligned} x &= dx', & \zeta &= d\zeta', & \Omega &= \frac{ad}{\sqrt{dg}}, \\ y &= dy', & \bar{\phi} &= (d\sqrt{dg})\bar{\phi}', & p &= p_{atm} + \rho g dp', \\ t &= \sqrt{\frac{d}{g}}t', & \bar{\psi} &= (d\sqrt{dg})\bar{\psi}', & F &= \frac{f}{\sqrt{dg}}. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

É pertinente trazer uma breve discussão sobre esse processo. Já nessa etapa do desenvolvimento do estudo das equações governantes sob a meta de expressar soluções gerais ou

particulares, a maneira com que se realiza essa adimensionalização pode variar de acordo com os objetivos que se tem em mente. No nosso caso por exemplo, todas as variáveis de distância são re-escaladas em termos da profundidade d como comprimento característico, mas em outras situações, como na dedução da equação de Kortweg-De Vries via expansão de Boussinesq, as direções horizontal e vertical são reescaladas independentemente em termos do comprimento de onda λ e profundidade d , respectivamente. Uma das consequências dessa alternativa é que dois parâmetros relevantes aparecem naturalmente de maneira explícita nas equações resultantes: o parâmetro de dispersão $\beta = d/\lambda$ e o parâmetro de não-linearidade $\epsilon = A/d$, onde A é amplitude da onda ζ , isto é, a distância vertical da crista até o vale. Uma vez fixada a profundidade d , a influência da não-linearidade no sistema é determinada diretamente pela amplitude que será portanto, juntamente com a vorticidade, um parâmetro de interesse primário nas discussões que se seguirão nesse trabalho.

Seguindo, podemos substituir (1.3.1) em (1.2.4), obtendo, depois de abandonar a notação ',

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{\phi} &= 0 && \text{em } -1 < y < \zeta(x, t), \\
\zeta_t + (\Omega \zeta + F + \bar{\phi}_x) \zeta_x &= \bar{\phi}_y && \text{sobre } y = \zeta(x, t), \\
\bar{\phi}_t + \frac{1}{2} (\bar{\phi}_x^2 + \bar{\phi}_y^2) + (\Omega \zeta + F) \bar{\phi}_x + \zeta - \Omega \bar{\psi} &= B(t) && \text{sobre } y = \zeta(x, t), \\
\bar{\phi}_y &= 0 && \text{sobre } y = -1.
\end{aligned} \tag{1.3.2}$$

A partir de agora, assumiremos que as soluções que estamos buscando são da forma viajante, isto é, que existe alguma função de uma variável, para a qual utilizaremos o mesmo símbolo, $\zeta(z)$ tal que $\zeta(x, t) = \zeta(x - ct)$, para uma certa velocidade c , a ser determinada *a posteriori*. Ademais, supomos que $\bar{\phi}$ e $\bar{\psi}$ possuem também uma dependência nas variáveis x e t da forma $x - ct$. Nesse caso, é conveniente estudarmos nosso problema em um sistema de coordenadas que viaje com a mesma velocidade da onda solução, o que algebricamente pode ser feito com a introdução das seguintes variáveis:

$$\begin{cases} X = x - ct, \\ Y = y. \end{cases}$$

Com a suposição dessas funções serem viajantes, aplicações imediatas da regra da cadeia nos fornecem o novo sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{\phi} &= 0 && \text{em } -1 < Y < \zeta(X), \\
-c\zeta_X + (F + \Omega\zeta + \bar{\phi}_X)\zeta_X &= \bar{\phi}_Y && \text{sobre } Y = \zeta(X), \\
-c\bar{\phi}_X + \frac{1}{2}(\bar{\phi}_X^2 + \bar{\phi}_Y^2) + (\Omega\zeta + F)\bar{\phi}_X + \zeta - \Omega\bar{\psi} &= B && \text{sobre } Y = \zeta(X), \\
\bar{\phi}_Y &= 0 && \text{sobre } Y = -1.
\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Note que a constante de Bernoulli, que antes era uma função dependente de t passa a ser uma constante. De fato, primeiramente note que $B(t)$ é combinação linear de produtos de funções viajantes, então $B(t) = B(X(x, t))$. Então

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[B(X(x, t)) \right] = \frac{\partial B}{\partial X}(X(x, t)) \frac{\partial X}{\partial x} \implies \frac{\partial B}{\partial X}(X) = 0 \\
&\implies \frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} = 0.
\end{aligned}$$

Vamos supor, daqui para frente, que $\zeta(X)$ é uma onda solitária cuja crista se encontra em $X = 0$ e que satisfaz

$$\zeta(X) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |X| \rightarrow \infty. \tag{1.3.4}$$

Isto garante que podemos eleger certo $\lambda \gg 1$ de modo que toda a dinâmica de interesse está contida em $-\lambda/2 < X < \lambda/2$, permitindo-nos aproximar como domínio físico apenas uma região limitada para que possamos abordar o problema computacionalmente.

O sistema (1.3.3) representa a versão das equações de Euler mais adequada para nossos primeiros objetivos. Na próxima seção, submeteremos (1.3.3) a uma transformação mais profunda do que simples reescalonamentos lineares, o que será essencial para depois abordarmos o problema de maneira discreta e finalmente desenvolvermos um método para encontrar soluções numéricas.

Capítulo 2

Ondas solitárias para as equações de Euler permanentes

Fenômenos modelados por equações não lineares são, amiúde, quase impossíveis de explorar usando apenas a intuição física. De modo que para examinar sistematicamente as implicações das não linearidades presentes no modelo se faz necessário uma abordagem numérica. A dinâmica de fluidos, em particular, é notória por essa conexão com a imprevisibilidade do aspecto não linear e até mesmo caótico, no caso de fenômenos mais turbulentos. Versões lineares e até fracamente não lineares – como a equação de Kortweg-de Vries por exemplo – das equações de Euler podem ser solucionadas analiticamente. No entanto, nesse estudo nenhuma suposição é feita sobre a intensidade da contribuição de fenômenos da não linearidade *a priori*, o que costuma tornar pouco viável qualquer estratégia que não envolva métodos computacionais. Antes, entretanto, vamos considerar uma importante transformação sobre nossas variáveis.

2.1 A ferramenta crucial: o mapeamento conforme

No que segue, faremos uso do isomorfismo $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$, o que nos fornecerá conveniências advindas da análise complexa.

Um desafio central desse problema é o aspecto da fronteira-livre, que adiciona uma camada de complexidade por tornar incerto o próprio domínio das equações. A estratégia engenhosa que surge para abordar precisamente esse aspecto, é considerar uma transformação que relacione esse domínio enredado em um novo, mais simples em algum sentido. Esse novo domínio, a que chamaremos de *domínio canônico*, será de fato uma faixa; região retangular dada por $\tilde{\Gamma} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2; -L/2 < \xi < L/2, -D < \eta < 0\}$, onde L e D serão fixados mais a frente. Em contrapartida, o domínio original chamaremos de *domínio físico*, dado por $\Gamma = \{(X, Y) \in \mathbb{C}; -\lambda/2 < X < \lambda/2, -1 < Y < \zeta(X)\}$.

Consideraremos um mapa $Z : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$, dado por

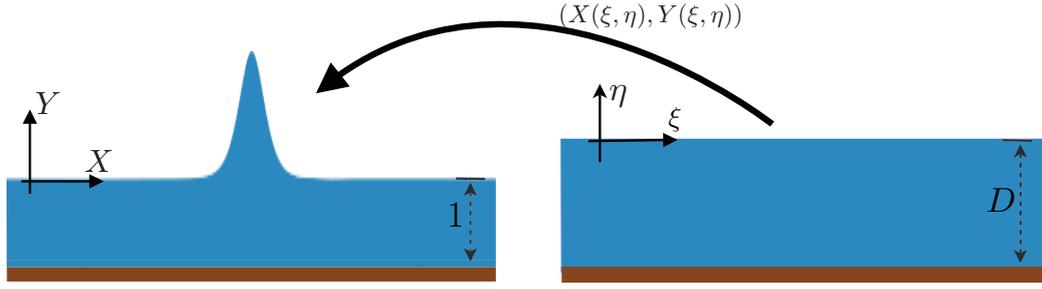


Figura 2.1: Esquema ilustrativo do mapeamento conforme $Z(\xi, \eta)$.

$$Z(\xi, \eta) = X(\xi, \eta) + iY(\xi, \eta), \quad (2.1.1)$$

que assumiremos ter a propriedade de ser conforme, o que é o mesmo que dizer que essa função (localmente) preserva ângulos. É possível mostrar que essa condição é garantida pela condição de ser uma função complexa analítica, localmente invertível ([1], cap. 6). No caso, a invertibilidade é essencial, pois o interesse é resolver o problema no domínio simples (canônico) mas tendo a capacidade de expressar as soluções novamente no domínio original (físico). A analiticidade de Z mostra-se também indispensável uma vez que fornece as condições de Cauchy-Riemann sobre as suas componentes

$$\begin{cases} X_\xi = Y_\eta, \\ X_\eta = -Y_\xi, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

juntamente com a consequência imediata de que X e Y serão ambas harmônicas.

Outra característica central dessa transformação é a maneira como as fronteiras de cada região estão relacionadas:

$$\begin{cases} Y(\xi, 0) = \zeta(X(\xi, 0)), \\ Y(\xi, -D) = -1, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

o que é simplesmente a maneira rigorosa de dizer que a superfície livre e o fundo do canal são, respectivamente, imagens das curvas $\eta = 0$ e $\eta = -D$. Juntando (2.1.3) com o fato de que $\Delta Y = 0$, temos a equação de Laplace para $Y(\xi, \eta)$, com dados de Dirichlet:

$$\begin{cases} Y_{\xi\xi} + Y_{\eta\eta} = 0 \text{ em } -D < \eta < 0, \\ Y(\xi, 0) = \mathbf{Y}(\xi), \\ Y(\xi, -D) = -1, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

onde $\mathbf{Y}(\xi) := \zeta(X(\xi, 0))$, uma função que por ora será assumida como conhecida.

Resolvendo o mapeamento conforme

Para resolver (2.1.4), faremos uso da transformada de Fourier periódica sobre a variável ξ , assim como sua inversa. Esses operadores, que aqui definimos no espaço de funções integráveis em $[-L/2, L/2]$, são dados por

$$\mathcal{F}(f(\xi)) = \hat{f}(k) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi,$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(k)) = f(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ik\xi},$$

onde $k = k(j) = (2\pi/L)j$. Aplicando \mathcal{F} em (2.1.4) traduzimos esta EDP na família de EDOs

$$\begin{cases} -k^2 \hat{Y}(k, \eta) + \hat{Y}_{\eta\eta}(k, \eta) = 0 & \text{em } -D < \eta < 0, \\ \hat{Y}(k, 0) = \hat{\mathbf{Y}}(k), \\ \hat{Y}(k, -D) = \begin{cases} -1, & \text{se } k = 0 \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases}, \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Resolvemos dividindo em casos. Para $k \neq 0$, se $\hat{Y}(k, \eta) = e^{r\eta}$, chegamos que $r = \pm k$ e a solução geral de (2.1.5)₁ é

$$\hat{Y}(k, \eta) = A(k)e^{k\eta} + B(k)e^{-k\eta}.$$

Veja [10] (seção 3.5) para mais detalhes sobre solução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes.

A condição de fronteira (2.1.5)₂ nos diz que

$$\hat{\mathbf{Y}}(k) = \hat{Y}(k, 0) = A(k) + B(k) \quad (2.1.6)$$

enquanto de (2.1.5)₃ temos

$$0 = \hat{Y}(k, -D) = A(k)e^{-kD} + B(k)e^{kD}. \quad (2.1.7)$$

Isolando $A(k)$ em (2.1.7) e aplicando em (2.1.6), temos

$$\hat{\mathbf{Y}}(k) = B(k) \left[\frac{-e^{kD} + e^{-kD}}{e^{-kD}} \right] \implies B(k) = -\hat{\mathbf{Y}}(k) \frac{e^{-kD}}{2 \sinh(kD)}.$$

Substituindo as expressões das constantes $A(k)$ e $B(k)$ na solução geral, obtem-se

$$\begin{aligned}
\hat{Y}(k, \eta) &= -B(k) \frac{e^{kD}}{e^{-kD}} e^{k\eta} + B(k) e^{-k\eta} \\
&= \hat{Y}(k) \frac{e^{kD} e^{k\eta}}{2 \sinh(kD)} - \hat{Y}(k) \frac{e^{-kD} e^{-k\eta}}{2 \sinh(kD)} \\
&= \frac{\hat{Y}(k)}{\sinh(kD)} \left[\frac{e^{k(D+\eta)} - e^{-k(D+\eta)}}{2} \right] \\
&= \hat{Y}(k) \frac{\sinh(k(D+\eta))}{\sinh(kD)}.
\end{aligned}$$

Examinando o caso restante, i.e., $k = 0$, a solução geral é $\hat{Y}(0, \eta) = \alpha\eta + \beta$, sujeito agora às condições de contorno

$$\begin{cases} \hat{Y}(0, 0) = \hat{Y}(0), \\ \hat{Y}(k, -D) = -1. \end{cases}$$

Breves manipulações algébricas nessas condições fornecem as constantes

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\hat{Y}(0) + 1}{D} \\ \beta = \hat{Y}(0). \end{cases}$$

Portanto, tem-se

$$\hat{Y}(k, \eta) = \begin{cases} \hat{Y}(k) \frac{\sinh(k(D+\eta))}{\sinh(kD)}, & \text{se } k \neq 0 \\ \frac{\hat{Y}(0) + 1}{D} \eta + \hat{Y}(0), & \text{se } k = 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Com isso, expressa-se

$$Y(\xi, \eta) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{Y}(k, \eta)] = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1}[\hat{Y}(k, \eta)] + \hat{Y}(0, \eta) \implies$$

$$Y(\xi, \eta) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{\sinh(k(\eta + D))}{\sinh(kD)} \mathcal{F}(\mathbf{Y}) \right] + \frac{(\eta + D)\hat{Y}(0) + \eta}{D}, \quad (2.1.9)$$

onde a notação $\mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1}[\cdot]$ significa realizar o somatório em todos os modos não nulos da expressão no argumento.

Para completar a descrição do mapeamento, precisamos expressar a componente $X(\xi, \eta)$. Podemos derivar (2.1.9) em relação a variável η e utilizar as condições de Cauchy-Riemann (2.1.2), chegando em

$$X_\xi(\xi, \eta) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{k \cosh(k(\eta + D))}{\sinh(kD)} \mathcal{F}(\mathbf{Y}) \right] + \frac{\hat{Y}(0) + 1}{D},$$

onde aplica-se a integração em ξ , obtendo

$$X(\xi, \eta) = -\mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{i \cosh(k(\eta + D))}{\sinh(kD)} \mathcal{F}(\mathbf{Y}) \right] + \frac{\hat{\mathbf{Y}}(0) + 1}{D} \xi. \quad (2.1.10)$$

Por fim, será conveniente denotar $\mathbf{X}(\xi) := X(\xi, 0)$, o que significa

$$\mathbf{X}_\xi(\xi) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} [k \coth(kD) \mathcal{F}(\mathbf{Y})] + \frac{\hat{\mathbf{Y}}(0) + 1}{D} \quad (2.1.11)$$

e implica

$$\hat{\mathbf{X}}_\xi(0) = \frac{\hat{\mathbf{Y}}(0) + 1}{D}. \quad (2.1.12)$$

Daqui podemos tratar de como relacionar as dimensões dos domínios físico e canônico. Trabalharemos sob a imposição que ambos domínios possuam o mesmo comprimento. Com isso, da definição de \mathcal{F} temos

$$\mathbf{X}(\xi = L/2) - \mathbf{X}(\xi = -L/2) = \lambda \implies \int_{-L/2}^{L/2} \mathbf{X}_\xi(\xi) d\xi = \lambda \implies \hat{\mathbf{X}}_\xi(0) = \frac{\lambda}{L}.$$

Por outro lado, de (2.1.12) tem-se

$$\hat{\mathbf{X}}_\xi(0) = \frac{\hat{\mathbf{Y}}(0) + 1}{D} \implies \frac{\hat{\mathbf{Y}}(0) + 1}{D} = \frac{\lambda}{L}.$$

Mas da imposição $\lambda = L$, podemos fixar a profundidade do domínio canônico na relação

$$D = \langle \mathbf{Y} \rangle + 1, \quad (2.1.13)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota a média sobre $\xi \in [-L/2, L/2]$, especificamente

$$\langle f \rangle = \hat{f}(0) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(\xi) d\xi.$$

Note que (2.1.13) permite simplificar ligeiramente as expressões das componentes X e Y , em (2.1.10) e (2.1.9), respectivamente. Assim, as fórmulas do mapeamento conforme são dadas por:

$$\begin{cases} X(\xi, \eta) = -\mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{i \cosh(k(\eta + D))}{\sinh(kD)} \mathcal{F}(\mathbf{Y}) \right] + \xi, \\ Y(\xi, \eta) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{\sinh(k(\eta + D))}{\sinh(kD)} \mathcal{F}(\mathbf{Y}) \right] + \hat{\mathbf{Y}}(0) + \eta. \end{cases} \quad (2.1.14)$$

2.2 As equações governantes no sistema de coordenadas canônico

Uma vez que temos em mãos a descrição do mapeamento conforme, vamos agora tratar de escrever as equações de Euler nas variáveis do domínio canônico.

Potencial nas variáveis canônicas

Podemos considerar o potencial nas variáveis canônicas,

$$\begin{cases} \phi(\xi, \eta) = \bar{\phi}(X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)), \\ \psi(\xi, \eta) = \bar{\psi}(X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

e fazer uso do fato de que a equação de Laplace é preservada por transformações conformes. De uma aplicação direta da regra da cadeia pode-se deduzir que

$$\phi_\eta = \bar{\phi}_X X_\eta + \bar{\phi}_Y Y_\eta,$$

para todo (ξ, η) . De (2.1.3)₂, sabe-se que $X_\eta = Y_\xi = 0$ sobre $\eta = 0$ e, além disso, da impermeabilidade do fundo, $\bar{\phi}_Y(X, -1) = 0$; portanto

$$\phi_\eta(\xi, -D) = 0.$$

Mas ϕ e ψ são conjugadas harmônicas, então satisfazem relações de Cauchy-Riemann, em particular $\psi_\xi = -\phi_\eta$, logo se anula em $\eta = -D$. Isso nos fornecerá as indispensáveis condições de fronteira para novas equações de Laplace para ϕ e ψ :

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0, \text{ em } -D < \eta < 0, \\ \phi(\xi, 0) = \Phi(\xi), \\ \phi_\eta(\xi, -D) = 0, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0, \text{ em } -D < \eta < 0, \\ \psi(\xi, 0) = \Psi(\xi), \\ \psi(\xi, -D) = Q, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

onde Φ e Ψ são tomados como dados *a priori* e Q denota uma constante arbitrária. As equações acima podem ser resolvidas de maneira essencialmente análoga ao que foi feito para Y e X , resolução essa que omitiremos aqui, mas pode ser consultada no apêndice A. Chegaremos em

$$\phi(\xi, \eta) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cosh(k(\eta + D))}{\cosh(kD)} \mathcal{F}(\Phi) \right],$$

$$\psi(\xi, \eta) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{\sinh(k(\eta + D))}{\sinh(kD)} \mathcal{F}(\Psi) \right] - Q \frac{\eta}{D}.$$

Note que aplicando a transformada de Fourier periódica na relação $\phi_\eta = -\psi_\xi$ e avaliando em $\eta = 0$ temos

$$\hat{\phi}_\eta(k, 0) = k \tanh(kD) \hat{\Phi}(k) = -\tanh(kD) \hat{\Phi}_\xi(k),$$

então, isolando $\hat{\Phi}_\xi(k)$ para todo $k \neq 0$ chegaremos em

$$\Phi_\xi(\xi) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} [-i \coth(kD)] \mathcal{F}_k(\Psi_\xi), \quad (2.2.4)$$

que virá a ser de considerável importância mais a frente.

Façamos um intervalo nos cálculos para recapitular o processo. Nosso objetivo é expressar, de alguma forma, o perfil $\zeta(X)$ da onda de superfície, mas (2.1.3) nos diz que para isso é suficiente saber expressar $\mathbf{Y}(\xi)$. Isto é, a descrição explícita do mapeamento conforme permite que realizemos essa expressão nas variáveis canônicas, quando pudermos, mais a frente, resolver as equações de fronteiras nesse novo contexto. O que de alguma forma facilita esse processo é um aspecto central desse mapeamento que garante a propriedade da conjugação harmônica entre os pares $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$ e os pares $\Phi-\Psi$ e as maneiras, muito similares, como as derivadas desses pares estão relacionadas, descritas em (2.1.11) e (2.2.4). Disso, se torna natural a introdução de um operador que condense em si, em termos de notação, essas relações substanciais.

Operadores \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}

Comumente chamado de operador de Hilbert (em uma faixa), denotaremos por $\mathcal{C}[\cdot]$ o operador definido por

$$\mathcal{C}[f(\xi)] = \mathcal{C}_0[f(\xi)] + \lim_{k \rightarrow 0} i \coth(kD) \hat{f}(k), \quad (2.2.5)$$

com $\mathcal{C}_0[\cdot] = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{H} \mathcal{F}[\cdot]$ e \mathcal{H} dado por

$$\mathcal{H}(k) = \begin{cases} i \coth(kD), & k \neq 0 \\ 0, & k = 0. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Em algumas situações, o cálculo do limite em (2.2.5) pode consistir um certo empecilho. Por outro lado, esse operador possui uma conveniente sinergia com argumentos da forma $f_\xi(\xi)$. Nesses casos, que serão os presentes no decorrer desse trabalho, da propriedade $\hat{f}_\xi(k) = ik \hat{f}(k)$, temos

$$i \coth(kD) \hat{f}_\xi(k) = -\coth(kD) k \hat{f}(k).$$

Pela regra de L'Hôpital,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \coth(kD)k = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\cosh(kD)}{\sinh(kD)}k = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D \sinh(kD)k + \cosh(kD)}{D \cosh(kD)} = \frac{1}{D}$$

e assim

$$\lim_{k \rightarrow 0} i \coth(kD) \hat{f}_\xi(k) = -\frac{\hat{f}(0)}{D}. \quad (2.2.7)$$

Como mencionado, o propósito dessa definição é tornar sucintas as importantes relações entre os pares incógnitas $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$ e $\Phi-\Psi$, que de (2.1.11) e (2.2.4) agora se resumem em

$$\begin{cases} \mathbf{X}_\xi = \frac{1}{D} - \mathcal{C}[\mathbf{Y}_\xi] \\ \Phi_\xi = -\mathcal{C}[\Psi_\xi]. \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Por definição, $\mathcal{C}[\mathbf{Y}_\xi] = \mathcal{C}_0[\mathbf{Y}_\xi] - \frac{\hat{\mathbf{Y}}(0)}{D}$ o que implica

$$\mathbf{X}_\xi = \frac{1}{D} - \mathcal{C}_0[\mathbf{Y}_\xi] + \frac{\hat{\mathbf{Y}}(0)}{D} = 1 - \mathcal{C}_0[\mathbf{Y}_\xi],$$

devido à relação (2.1.13). Se além disso, consideramos que a conjugada harmônica escolhida é tal que a média $\langle \Psi \rangle$ é nula, então (2.2.8) também pode ser expressada como

$$\begin{cases} \mathbf{X}_\xi = 1 - \mathcal{C}_0[\mathbf{Y}_\xi] \\ \Phi_\xi = -\mathcal{C}_0[\Psi_\xi]. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Deduzindo as condições de fronteira no domínio canônico

Nossa atenção agora se volta para a questão de expressar as condições de fronteira nas variáveis canônicas.

Diferenciação em (2.1.3) e (2.2.1) irá nos fornecer as relações necessárias entre os diferentes domínios. A primeira dessas relações é imediata:

$$Y(\xi, 0) = \zeta(X(\xi, 0)) \implies \mathbf{Y}_\xi = \zeta_X \mathbf{X}_\xi. \quad (2.2.10)$$

Diferenciando a primeira equação de (2.2.1) em relação a ξ e η temos

$$\begin{cases} \phi_\xi = \bar{\phi}_X X_\xi + \bar{\phi}_Y Y_\xi, \\ \phi_\eta = \bar{\phi}_X X_\eta + \bar{\phi}_Y Y_\eta, \end{cases} \implies \begin{cases} \phi_\xi = \bar{\phi}_X X_\xi + \bar{\phi}_Y Y_\xi, \\ \phi_\eta = \bar{\phi}_Y X_\xi - \bar{\phi}_X Y_\xi, \end{cases} \quad (2.2.11)$$

onde usamos novamente as relações de Cauchy-Riemann (2.1.2). Aqui, chamando de $J = X_\xi^2 + Y_\xi^2$ (determinante da Jacobiana de Z), conseguimos inverter o sistema acima

chegando em

$$\begin{cases} \phi_Y = \frac{-\psi_\xi X_\xi + \phi_\xi Y_\xi}{J}, \\ \phi_X = \frac{\phi_\xi X_\xi + \psi_\xi Y_\xi}{J}, \end{cases} \quad (2.2.12)$$

já que J é diferente de zero pelas propriedades da transformação.

Finalmente avaliando em $\eta = 0$ e juntando com (2.2.10), obtemos:

$$\begin{cases} \zeta_X = \frac{\mathbf{Y}_\xi}{\mathbf{X}_\xi}, \\ \Phi_Y = \frac{-\Psi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Phi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J}, \\ \Phi_X = \frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J}, \end{cases} \quad (2.2.13)$$

onde de (2.2.13) em diante renomeamos $J = J(\xi) = \mathbf{X}_\xi^2(\xi) + \mathbf{Y}_\xi^2(\xi)$.

As relações acima revelam sua importância no momento que retornamos ao problema principal, isto é, resolver a equação (1.3.3), em particular as condições de fronteira

$$\begin{aligned} -c\zeta_X + (F + \Omega\zeta + \bar{\phi}_X) \zeta_X &= \bar{\phi}_Y && \text{sobre } Y = \zeta(X), \\ -c\bar{\phi}_X + \frac{1}{2}(\bar{\phi}_X^2 + \bar{\phi}_Y^2) + (F + \Omega\zeta)\bar{\phi}_X + \zeta - \Omega\bar{\psi} &= B && \text{sobre } Y = \zeta(X). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Aplicando (2.2.13) em (2.2.14)₁, temos

$$\begin{aligned} -c\frac{\mathbf{Y}_\xi}{\mathbf{X}_\xi} + \left(\frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J} + \Omega\mathbf{Y} + F \right) \frac{\mathbf{Y}_\xi}{\mathbf{X}_\xi} &= \frac{-\Psi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Phi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J} \implies \\ -c\mathbf{Y}_\xi + \frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi^2}{J} + (\Omega\mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi &= \frac{\Phi_\xi \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_\xi - \Psi_\xi \mathbf{X}_\xi^2}{J} \implies \\ -c\mathbf{Y}_\xi + (\Omega\mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi &= -\Psi_\xi \frac{\mathbf{X}_\xi^2 + \mathbf{Y}_\xi^2}{J} \implies \end{aligned}$$

$$\Psi_\xi = c\mathbf{Y}_\xi - (\Omega\mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi. \quad (2.2.15)$$

Similarmente, aplicando (2.2.13) em (2.2.14)₂,

$$\begin{aligned}
& -c \left[\frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J} \right] + \\
& \frac{1}{2} \left[\frac{\Phi_\xi^2 \mathbf{X}_\xi^2 + 2\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi + \Psi_\xi^2 \mathbf{Y}_\xi^2}{J^2} + \frac{\Psi_\xi^2 \mathbf{X}_\xi^2 - 2\Psi_\xi \mathbf{X}_\xi \Phi_\xi \mathbf{Y}_\xi + \Phi_\xi^2 \mathbf{Y}_\xi^2}{J^2} \right] + \\
& + \mathbf{Y} + (\Omega \mathbf{Y} + F) \frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J} - \Omega \Psi = B \quad \implies \\
& -c \left[\frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\Phi_\xi^2 (\mathbf{X}_\xi^2 + \mathbf{Y}_\xi^2) + \Psi_\xi^2 (\mathbf{X}_\xi^2 + \mathbf{Y}_\xi^2)}{J^2} \right] + \mathbf{Y} + \\
& + (\Omega \mathbf{Y} + F) \frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J} - \Omega \Psi = B \quad \implies \\
& -c \frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J} + \frac{1}{2J} (\Phi_\xi^2 + \Psi_\xi^2) + \mathbf{Y} + (\Omega \mathbf{Y} + F) \frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J} - \Omega \Psi = B. \quad (2.2.16)
\end{aligned}$$

Das relações (2.2.9) e (2.2.15), escrevemos

$$\Phi_\xi = -\mathcal{C}_0[c\mathbf{Y}_\xi - (\Omega \mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi] = -c\mathcal{C}_0[\mathbf{Y}_\xi] + \mathcal{C}_0[(\Omega \mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi] \implies$$

$$\Phi_\xi \underset{(2.2.9)_1}{=} c\mathbf{X}_\xi - c + \mathcal{C}_0[(\Omega \mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi] \quad (2.2.17)$$

Agora, é conveniente abordar esse problema calculando partes diferentes da expressão separadamente. Escrevemos

$$A_1 + A_2 + A_3 = B, \quad (2.2.18)$$

onde

$$\begin{cases}
A_1 = -c \frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J} \\
A_2 = \frac{1}{2J} (\Phi_\xi^2 + \Psi_\xi^2) + \mathbf{Y} \\
A_3 = (\Omega \mathbf{Y} + F) \frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J} - \Omega \Psi.
\end{cases} \quad (2.2.19)$$

Substituindo (2.2.15) nas duas primeiras equações acima, obtemos

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{c}{J} \Phi_\xi \mathbf{X}_\xi - \frac{c}{J} \mathbf{Y}_\xi (c\mathbf{Y}_\xi - (\Omega \mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi) \\
&= -\frac{c}{J} \Phi_\xi \mathbf{X}_\xi - \frac{c^2}{J} \mathbf{Y}_\xi^2 + \frac{c}{J} (\Omega \mathbf{Y} + F) \mathbf{Y}_\xi^2
\end{aligned} \quad (2.2.20)$$

e

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2J} \Phi_\xi^2 + \frac{1}{2J} (c\mathbf{Y}_\xi - (\Omega\mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi)^2 + \mathbf{Y} \\
&= \frac{1}{2J} \Phi_\xi^2 + \frac{1}{2J} c^2 \mathbf{Y}_\xi^2 + \frac{1}{2J} (\Omega\mathbf{Y} + F)^2 \mathbf{Y}_\xi^2 - \frac{1}{J} c (\Omega\mathbf{Y} + F) \mathbf{Y}_\xi^2 + \mathbf{Y}.
\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Portanto, nós temos

$$A_1 + A_2 = -\frac{c}{J} \Phi_\xi \mathbf{X}_\xi - \frac{c^2}{2J} \mathbf{Y}_\xi^2 + \frac{1}{2J} \Phi_\xi^2 + \frac{1}{2J} (\Omega\mathbf{Y} + F)^2 \mathbf{Y}_\xi^2 + \mathbf{Y}. \tag{2.2.22}$$

Simplificando a notação por $C := \mathcal{C}_0[(\Omega + F)\mathbf{Y}_\xi]$, calculamos a partir de (2.2.17),

$$\begin{aligned}
A_1 + A_2 &= -\frac{c}{J} [c\mathbf{X}_\xi - c + C] \mathbf{X}_\xi - \frac{c^2}{2J} \mathbf{Y}_\xi^2 + \frac{1}{2J} [c(\mathbf{X}_\xi - 1) + C]^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2J} (\Omega\mathbf{Y} + F)^2 \mathbf{Y}_\xi^2 + \mathbf{Y} \\
&= -\frac{2c^2 \mathbf{X}_\xi^2}{2J} + \frac{c^2}{J} \mathbf{X}_\xi - \frac{c}{J} C \mathbf{X}_\xi - \frac{c^2}{2J} \mathbf{Y}_\xi^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2J} [c^2(\mathbf{X}_\xi - 1)^2 + 2c(\mathbf{X}_\xi - 1)C + C^2] + \\
&\quad + \frac{1}{2J} (\Omega\mathbf{Y} + F)^2 \mathbf{Y}_\xi^2 + \mathbf{Y} \\
&= -\frac{c^2 \mathbf{X}_\xi^2}{2J} - \frac{c^2(\mathbf{X}_\xi^2 + \mathbf{Y}_\xi^2)}{2J} + \frac{c^2}{J} \mathbf{X}_\xi - \frac{c}{J} C \mathbf{X}_\xi + \frac{c^2}{2J} (\mathbf{X}_\xi^2 - 2\mathbf{X}_\xi + 1) + \\
&\quad + \frac{c(\mathbf{X}_\xi - 1)C}{J} + \frac{C^2}{2J} + \frac{1}{2J} (\Omega\mathbf{Y} + F)^2 \mathbf{Y}_\xi^2 + \mathbf{Y},
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

o que implica

$$A_1 + A_2 = -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2J} + \mathbf{Y} + \otimes \tag{2.2.24}$$

onde

$$\otimes = \frac{\mathcal{C}_0^2[(\Omega\mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi]}{2J} - \frac{c\mathcal{C}_0[(\Omega\mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi]}{J} + \frac{(\Omega\mathbf{Y} + F)^2 \mathbf{Y}_\xi^2}{2J}.$$

Resta o cálculo de A_3 . De (2.2.15), nós temos

$$\Psi = c\mathbf{Y} - \mathbf{Y} \left(\frac{\Omega\mathbf{Y}}{2} + F \right) - M, \tag{2.2.25}$$

onde

$$M = \langle c\mathbf{Y} - \mathbf{Y} \left(\frac{\Omega\mathbf{Y}}{2} + F \right) \rangle,$$

garantindo que $\hat{\Psi}(0) = 0$. Substituindo (2.2.15), (2.2.25) e (2.2.17) na expressão de A_3 em (2.2.19), obtemos

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{(\Omega \mathbf{Y} + F)}{J} (cJ - c\mathbf{X}_\xi + \mathcal{C}_0[(\Omega \mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi]\mathbf{X}_\xi - (\Omega \mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi^2) \\
&\quad - \Omega \left(c\mathbf{Y} - \mathbf{Y} \left(\frac{\Omega \mathbf{Y}}{2} + F \right) \right) + \Omega M \implies \\
A_3 &= Fc - \frac{(\Omega \mathbf{Y} + F)c\mathbf{X}_\xi}{J} + \frac{(\Omega \mathbf{Y} + F)\mathcal{C}_0[(\Omega \mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi]\mathbf{X}_\xi}{J} \\
&\quad - \frac{(\Omega \mathbf{Y} + F)^2\mathbf{Y}_\xi^2}{J} + \Omega \mathbf{Y} \left(\frac{\Omega \mathbf{Y}}{2} + F \right) + \Omega M.
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

Finalmente, somando (2.2.24) com (2.2.26) e subtraindo B conseguimos

$$\begin{aligned}
&-\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2J} + \mathbf{Y} + \frac{(\mathcal{C}_0[(\Omega \mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi])^2}{2J} - \frac{\mathcal{C}_0[(\Omega \mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi]}{J} (c - (\Omega \mathbf{Y} + F)\mathbf{X}_\xi) \\
&-\frac{(\Omega \mathbf{Y} + F)^2\mathbf{Y}_\xi^2}{2J} - \frac{c(\Omega \mathbf{Y} + F)\mathbf{X}_\xi}{J} + Fc + \Omega \left(\frac{\Omega \mathbf{Y}}{2} + F \right) \mathbf{Y} + \Omega M - B = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

Chamando de \mathcal{G} à expressão do lado esquerdo da equação acima, para cada ξ , condensamos as duas condições de fronteira (2.2.14) em uma única equação

$$\mathcal{G}(\mathbf{Y}(\xi), c, D, B) = 0,$$

cujas resolução de maneira numérica será o tópico da próxima sessão.

2.3 Discretização e o método

Podemos ler a equação (2.2.27) como uma família de equações parametrizadas por ξ . Um passo fundamental para tornar viável sua resolução por uma via computacional é torná-la finita.

Considere uma malha igualmente espaçada no eixo ξ do domínio canônico dada por:

$$\xi_j = -L/2 + (j - 1)\Delta\xi, \quad j = 1, \dots, N, \quad \text{onde } \Delta\xi = L/N, \tag{2.3.1}$$

com $N = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$. Uma imposição razoável é a simetria em relação ao eixo η de modo que $Y_j = Y_{N-j+2}$, onde denotamos $Y_j = \mathbf{Y}(\xi_j)$. Antecipa-se aqui, com clareza, uma conveniente economia computacional, reduzindo-se pela metade o número de equações do sistema. Fixando Ω e F , temos $N/2 + 4$ incógnitas: $Y_1, \dots, Y_{N/2+1}, c, B$ e D . Avaliamos a equação (2.2.27) nos pontos de grade (2.3.1). Os modos de Fourier são calculados por meio da transformada rápida de Fourier e as derivadas na variável ξ são calculadas

espectralmente [47]. Isto resulta em $N/2 + 1$ equações $G_j(Y_1, \dots, Y_{N/2+1}, c, D, B) = 0$, $j = 1, \dots, N/2 + 1$.

Mais ainda, como por hipótese a crista da onda está localizada em $X = 0$, podemos agora fixar a amplitude, escolhendo A positivo e impondo

$$Y_{N/2+1} - Y_1 = A. \quad (2.3.2)$$

Duas razões podem ser dadas para essa aparente arbitrariedade. A primeira é a antecipação da necessidade de uma restrição adicional que iguale o número de equações com o número de incógnitas, algo que ficará claro no decorrer do texto. A segunda, é que com essa imposição teremos um método que fornecerá ao usuário soluções com base em uma escolha de amplitude. Esse controle será importante para uma série de análises que será feita sobre como combinações entre altas presenças de vorticidade e não linearidade influenciam soluções.

Da condição (1.3.4),

$$\zeta(X) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |X| \rightarrow \infty,$$

se mostra razoável a inclusão da equação $Y_1 = 0$. Por fim adicionamos também a condição (2.1.13), a qual fixa o comprimento dos domínios físico e canônico. Aqui, para a discretização da média de \mathbf{Y} , utilizamos a regra do trapézio, isto é,

$$\langle \mathbf{Y} \rangle \approx \frac{2}{N} \left(\frac{Y_1 + Y_{N/2+1}}{2} + \sum_{j=2}^{N/2} Y_j \right). \quad (2.3.3)$$

Estamos agora na capacidade de condensar nossas equações discretizadas em um único sistema quadrado e não linear. Chamamos esse sistema de $G : \mathbb{R}^{N/2+4} \rightarrow \mathbb{R}^{N/2+4}$, $(Y_1, \dots, Y_{N/2+1}, c, D, B) \mapsto (G_1, \dots, G_{N/2+4})$, onde as componentes G_j são dadas por

$$\begin{cases} G_j = \mathcal{G}(Y_1, \dots, Y_{N/2+1}, c, D, B) = 0, & j = 1, \dots, N/2 + 1 \\ G_{N/2+2} = Y_{N/2+1} - Y_1 - A = 0 \\ G_{N/2+3} = Y_1 = 0 \\ G_{N/2+4} = \frac{2}{N} \left(\frac{Y_1 + Y_{N/2+1}}{2} + \sum_{j=2}^{N/2} Y_j \right) + 1 - D = 0. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

A estratégia, inspirada no trabalho exposto em [40], é resolver (2.3.4) através do método de Newton. É reconhecido da literatura que o funcionamento e a convergência desse método exige uma mínima precisão quanto à escolha do chute inicial [41]. Tendo isso em mente, a escolha aqui é a solução exata da equação de Kortweg-de Vries (KdV), em sua

versão clássica, irrotacional:

$$\mathbf{Y}(\xi) = A_0 \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{3A_0/4\xi} \right), \quad c = 1 + \frac{A_0}{2}, \quad (2.3.5)$$

onde deve ser escolhido um valor pequeno para A_0 , respeitando os limites do regime de KdV, onde $O(\epsilon) \approx O(\mu) \ll 1$. Além disso, uma vez que $A_0 \ll 1$, o perfil $\zeta(X)$ está muito próximo do eixo $Y = 0$, portanto o mapeamento conforme deforma apenas sutilmente o domínio canônico. Em particular, a profundidade é praticamente inalterada, o que sugere que $D = 1$ é uma escolha razoável para compor o chute inicial. Por fim, B é empiricamente tomado como nulo.

A partir disso, para obter uma solução de amplitude A e vorticidade Ω , primeiro determinam-se malhas $(A_0, A_0 + \Delta A, A_0 + 2\Delta A, \dots, A)$ e $(0, \Delta\Omega, \dots, \Omega)$. É feita então uma continuação nesses parâmetros onde soluções intermediárias são encontradas. Por exemplo, a onda de amplitude $A_0 + 2\Delta A$ e vorticidade 0 é encontrada via Newton, utilizando a onda de amplitude de $A_0 + \Delta A$ e vorticidade 0 como chute inicial, que por sua vez é encontrada também via Newton, mas utilizando (2.3.5) como chute inicial. O mesmo esquema é utilizado para encontrar soluções com vorticidade não nula. Isso garante que, em cada ciclo completo de iterações do método de Newton, a solução desejada esteja próxima do chute inicial escolhido, colaborando para a melhor convergência do método. Embora pudesse haver algum benefício, por menor que seja, em tentar otimizar a escolha dos passos ΔA e $\Delta\Omega$, a fim reduzir tempo computacional, na prática nenhum empecilho ocorreu com escolhas puramente empíricas destes valores.

A matriz jacobiana do sistema G é calculada via diferenças finitas e o método de Newton é utilizado considerando como critério de parada

$$\frac{\sum |G_j|}{N/2 + 4} < 10^{-10}.$$

É relevante destacar que o domínio computacional a ser utilizado não deve ser pequeno demais uma vez que o objetivo é buscar especificamente por soluções solitárias. No caso, para todos os experimentos executados nesse trabalho, escolhemos $L = 1500$. Uma tentativa de economizar demais nesse comprimento, mantendo N fixo, por um lado pode ser interessante pois de fato torna a malha mais refinada como delata a definição (2.3.1), mas, por outro lado, pode vir a “confundir” o método de Newton que potencialmente convergirá para uma solução não-solitária (periódica). Por fim, para cada escolha de Ω , o número de Froude utilizado foi, em todos os exemplos que serão apresentados mais a frente, $F = \Omega/2$. Isso implica a anulação do fluxo médio de massa da correnteza $\vec{U}_0 = (\Omega Y + F, 0)$, o que pode ser conveniente a depender do estudo que se faça em cima dos dados obtidos. Uma discussão mais detalhada quanto a este assunto pode ser encontrada em Whitham [52].

No restante desse trabalho, o método numérico descrito na presente seção será referido

por “método numérico para ondas solitárias”.

2.4 Simulações numéricas

Compilamos, no que segue, resultados obtidos de diversas aplicações do método para ondas solitárias, juntamente com análises dos comportamentos de perfis de onda e velocidade em função dos parâmetros Ω e A .

2.4.1 Ondas solitárias com vorticidade

É conhecido da literatura que os perfis de onda tornam-se mais arredondados na vizinhança da crista à medida que Ω decresce. Isto foi mostrado por Teles da Silva & Peregrine [45], Vanden-Broeck [49], Ko & Strauss [30] e Dyachenko & Hur [19] para ondas periódicas, e por Vanden-Broeck [50] para ondas solitárias.

A figura 2.2 exibe vários perfis de onda para diferentes valores de vorticidade. Conforme pode ser notado o método numérico captura bem as características conhecidas acerca de ondas com vorticidade: perfis mais arredondados ou pontiagudos a depender do sinal de Ω . Apesar do domínio computacional utilizado ter sido igual a 1500, para propósitos de visualização a janela de plotagem foi escolhida para ter 100 unidades de comprimento.

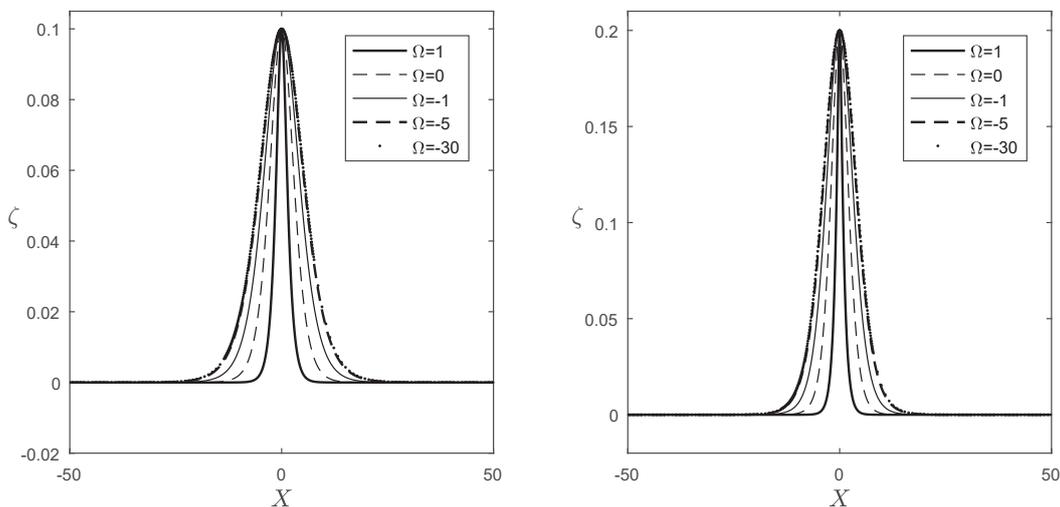


Figura 2.2: Perfis de onda com amplitudes $A = 0.1$ (esquerda) e $A = 0.2$ (direita).

Na figura 2.3, apresentamos a velocidade da onda (c) em termos de Ω para diferentes valores de A . Fixada uma amplitude, existe um valor máximo de Ω para o qual podemos encontrar solução, contudo podemos tomar valores negativos de Ω consideravelmente grandes em módulo.

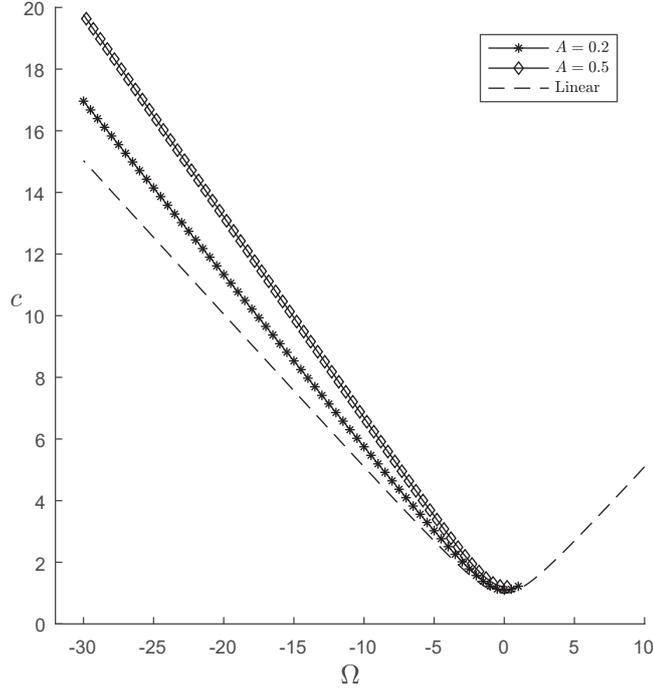


Figura 2.3: Relação entre velocidade e vorticidade

Da relação de dispersão para ondas lineares resulta que

$$c_{lin} = F - \frac{\Omega}{2} + \sqrt{\frac{\Omega^2}{4} + 1},$$

ilustrada na linha tracejada na Figura 2.3 para fins de comparação. De fato, observa-se que as relações velocidade-vorticidade das ondas não lineares computadas através do método apresentam também um formato similar ao da relação linear, no entanto novamente se vê que o método apresenta dificuldades para convergir quando escolhe-se valores positivos de Ω .

2.4.2 Soluções de Euler vs. soluções de KdV

Nesta seção, comparamos a velocidade da onda solitária com vorticidade solução da equação de Euler com a velocidade da onda do tipo sech^2 , solução da equação de KdV com vorticidade.

De acordo com Xin Guan [25], esta equação é dada por

$$s_t + Pss_x + Qs_{xxx} = 0 \quad (2.4.1)$$

onde

$$\begin{cases} P = (\Omega^2 + 3)/(2\tilde{c} + \Omega), \\ Q = \tilde{c}^2/(3(2\tilde{c} + \Omega)), \\ \tilde{c} = \frac{-\Omega + \sqrt{\Omega^2 + 4}}{2}, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

cuja solução é

$$s(x, t) = \operatorname{sech}^2(\delta(x - \tilde{v}t)), \quad (2.4.3)$$

onde

$$\begin{cases} \delta = \sqrt{\frac{(\Omega^2 + 3)}{4\tilde{c}^2}}, \\ \tilde{v} = \frac{4\delta^2\tilde{c}}{3(2\tilde{c} + \Omega)}. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

A equação de KdV é deduzida no limite assintótico de ondas longas, fracamente não lineares e fracamente dispersivas. De modo que suas variáveis estão em uma escala diferente da utilizada nas equações de Euler. Dito isso, para que possamos fazer uma comparação entre a velocidade da onda solitária com vorticidade capturada por estes dois regimes é necessário realizar um reescalonamento das variáveis. Para isso precisamos transformar a velocidade de KdV para a escala Euler, o que é realizado por

$$c_{KdV} = \tilde{c} + \epsilon\tilde{v} + F. \quad (2.4.5)$$

Aqui, ϵ é o parâmetro de não linearidade A/d , que no presente caso equivale à amplitude A uma vez que nossa adimensionalização fixou a profundidade em $y = -1$. Veja Guan [25] para mais detalhes.

Para amplitudes baixas, espera-se que as ondas soluções das equações de Euler apresentem comportamento semelhante à solução da equação KdV. A seguir, podemos ver como as velocidades são influenciadas pelo aumento da amplitude, mantendo a vorticidade fixa.

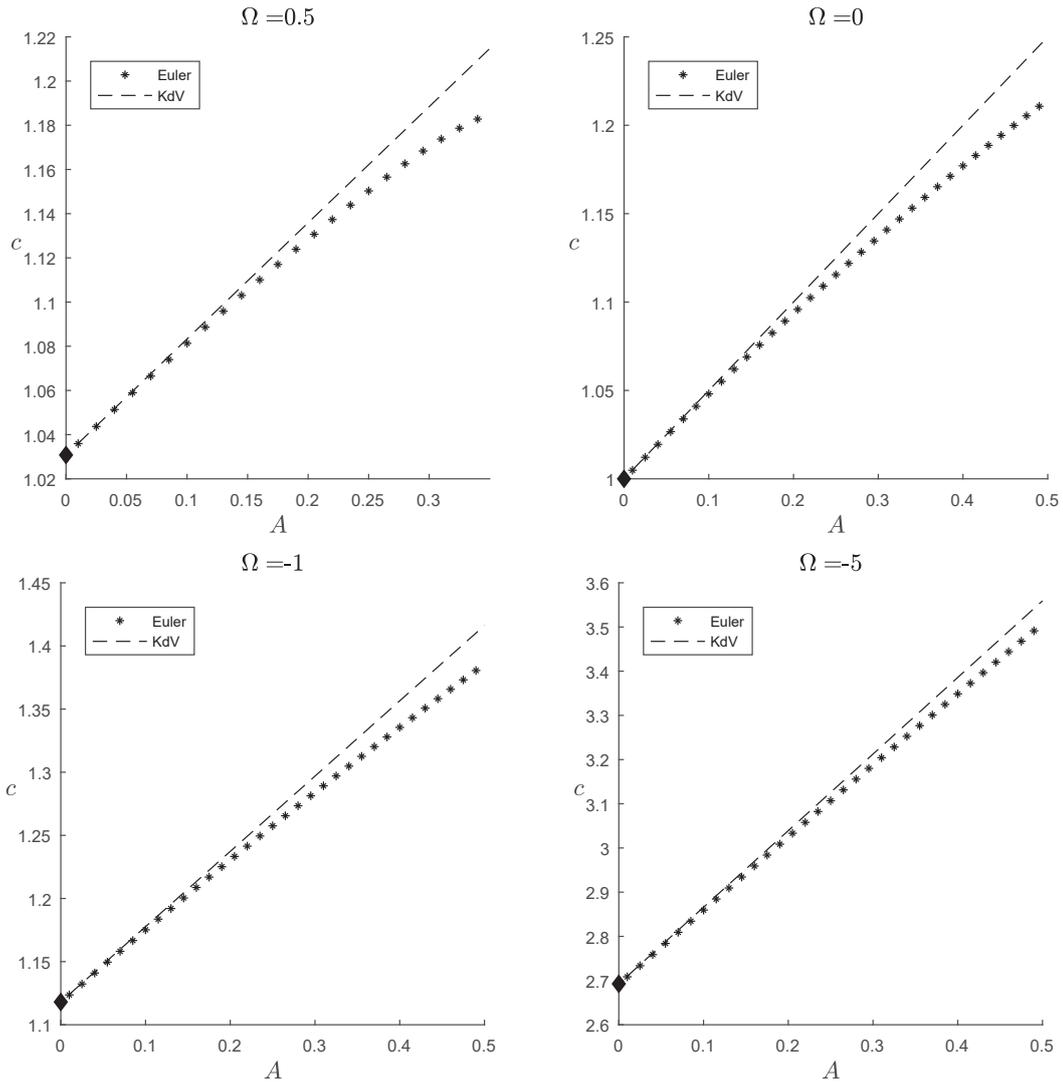


Figura 2.4: Relação entre velocidade e amplitude para diferentes escolhas de vorticidade e comparação com KdV.

Na Figura 2.4, a linha tracejada se refere a velocidade da solução de KdV com vorticidade (2.4.5).

Uma breve discussão pertinente provém da observação de que, em certo sentido, para uma dada escolha de parâmetros Ω e A a Figura 2.4 pode indicar a distância entre nossas soluções até a solução analítica encontrada no regime KdV. Como esperado, vemos velocidades muito próximas sempre que A é muito pequeno, mas o padrão geral da relação velocidade/amplitude no caso de soluções de Euler apresenta um claro desvio da distribuição linear encontrada em KdV. Em particular, aproximadamente a partir de $A = 0.2$ vemos um sutil descolamento do regime de Euler em comparação com KdV, enquanto é interessante observar que o aspecto geral desta “curva de descolamento” é mantido inalterado quando variamos as escolhas de vorticidade.

2.4.3 Estudo de resolução

A seguir, demonstramos que a solução numérica é essencialmente independente do tamanho da grade. Para isso calculamos a distância entre *outputs* de mesmos parâmetros físicos (A , Ω e F), mas com diferentes escolhas de $\Delta\xi$. A grade de referência tomada é $\Delta\xi^* = 0.0458$, melhor resolução entre as executadas.

Na tabela 2.1, $\zeta_{\Delta\xi}$ e $c_{\Delta\xi}$ denotam, respectivamente, o perfil de onda e velocidade obtidos a partir de uma aplicação do método utilizando uma grade de tamanho $\Delta\xi$. Além disso denotamos $\zeta^* = \zeta_{\Delta\xi^*}$ e $c^* = c_{\Delta\xi^*}$. Esses experimentos foram feitos para ondas de amplitude $A = 0.2$.

Ω	$\Delta\xi$	$\ \zeta_{\Delta\xi} - \zeta^*\ _2 / \ \zeta^*\ _2$	$ c_{\Delta\xi} - c^* / c^* $
0	0.0916	5.36×10^{-12}	1.61×10^{-13}
0	0.1831	5.57×10^{-12}	1.46×10^{-13}
0	0.3662	9.21×10^{-8}	2.56×10^{-10}
0	0.7324	1.51×10^{-4}	4.34×10^{-6}
-1	0.0916	1.58×10^{-12}	9.92×10^{-15}
-1	0.1831	6.49×10^{-10}	9.75×10^{-12}
-1	0.3662	4.45×10^{-10}	3.91×10^{-13}
-1	0.7324	1.58×10^{-7}	1.30×10^{-9}
1	0.0916	9.54×10^{-5}	5.13×10^{-7}
1	0.1831	0.0034	1.28×10^{-4}
1	0.3662	0.0493	0.0012
1	0.7324	0.1216	0.0085

Tabela 2.1: Estudo de resolução para ondas de amplitude $A = 0.2$.

Nota-se que para $\Omega = 1$, o esquema numérico necessita de uma malha mais refinada para aproximar com mais acurácia a solução. Isso é uma consequência direta da combinação de dois fatores: (i) a tendência de formação de cúspides na medida que Ω se torna mais positivo (como visto na figura 2.2), de modo que a solução perde regularidade necessitando de mais modos de Fourier para melhor aproximá-la; (ii) um fenômeno de espalhamento de malha que ocorre quando o mapeamento conforme é aplicado, isto é, as distâncias $\mathbf{X}(\xi_{j+1}) - \mathbf{X}(\xi_j)$ crescem quando j está próximo de $N/2 + 1$ (posição da crista da onda). Por esta razão, grades mais refinadas são fortemente recomendadas para descrever com mais precisão ondas com parâmetro Ω positivo.

Capítulo 3

As equações de Euler dependentes do tempo

Até agora trabalhamos sob a suposição de que as soluções buscadas serão ondas viajantes, mas é perfeitamente possível e certamente comum a ocorrência de ondas não-viajantes, que mudam sua forma, quebram ou se dispersam depois de um determinado intervalo de tempo. Nesse capítulo sintetizaremos um método similar ao apresentado no capítulo anterior, todavia renunciando à hipótese de onda viajante. Essa exposição se justificará mais tarde na última seção desse capítulo, onde soluções providas pelo método para ondas solitárias serão utilizadas como dado inicial para um método de evolução, efetivamente colocando em teste a estabilidade das ondas construídas.

O presente capítulo é baseado no trabalho de Flamarion et al. [20], onde este método é construído na finalidade de estudar ondas geradas a partir da interação de correntezas com topografia. Uma versão para canais com fundo plano é brevemente resumida nesta seção.

3.1 Mapeamento conforme dependente do tempo

Retornamos agora à equação (1.3.2), que reescrevemos aqui com a alteração de que a constante de Bernoulli $B(t)$ é tomada como nula

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\phi} &= 0 && \text{em } -1 < y < \zeta(x, t), \\ \zeta_t + (\Omega\zeta + F + \bar{\phi}_x)\zeta_x &= \bar{\phi}_y && \text{sobre } y = \zeta(x, t), \\ \bar{\phi}_t + \frac{1}{2}(\bar{\phi}_x^2 + \bar{\phi}_y^2) + (\Omega\zeta + F)\bar{\phi}_x + \zeta - \Omega\bar{\psi} &= 0 && \text{sobre } y = \zeta(x, t), \\ \bar{\phi}_y &= 0 && \text{sobre } y = -1. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Lembrando que a componente irrotacional do campo de velocidade é dada pelo gradiente $\nabla \bar{\phi}$, não há perda de generalidade nessa alteração, pois ela deriva da troca de potencial

$$\tilde{\phi} = \bar{\phi} - \int_0^t B(s)ds, \quad (3.1.2)$$

o que garante

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(x, y, 0) = \bar{\phi}(x, y, 0), \\ \nabla \tilde{\phi} = \nabla \bar{\phi}. \end{cases}$$

Derivando (3.1.2), isolando $\bar{\phi}_t$ e inserindo em (1.3.2), podemos abandonar a notação com tilde, recuperando (3.1.1), da qual trataremos seguindo o mesmo roteiro exposto na seção 2.1.

Consideramos o mapeamento conforme dado por

$$z(\xi, \eta, t) = x(\xi, \eta, t) + iy(\xi, \eta, t),$$

que, como antes, mapeia uma faixa (domínio canônico) sobre o domínio físico, satisfazendo as condições de fronteira

$$\begin{cases} y(\xi, 0, t) = \zeta(x(\xi, 0, t), t), \\ y(\xi, -D(t), t) = -1. \end{cases} \quad (3.1.3)$$

Sejam

$$\begin{cases} \phi(\xi, \eta, t) = \bar{\phi}(x(\xi, \eta, t), y(\xi, \eta, t), t), \\ \psi(\xi, \eta, t) = \bar{\psi}(x(\xi, \eta, t), y(\xi, \eta, t), t), \end{cases} \quad (3.1.4)$$

e denote por $\Phi(\xi, t)$ e $\Psi(\xi, t)$ seus traços ao longo de $\eta = 0$, respectivamente, assim como $\mathbf{X}(\xi, t)$ e $\mathbf{Y}(\xi, t)$ para denotar as coordenadas horizontal e vertical em $\eta = 0$. O mapeamento é solucionado de maneira totalmente análoga ao que é feito no caso viajante e obtemos:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, t) = -\mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{i \cosh(k(\eta + D))}{\sinh(kD)} \mathcal{F}(\mathbf{Y}(\xi, t)) \right] + \xi, \\ y(\xi, \eta, t) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{\sinh(k(\eta + D))}{\sinh(kD)} \mathcal{F}(\mathbf{Y}(\xi, t)) \right] + \hat{\mathbf{Y}}(0, t) + \eta, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

onde, assim como antes, fixamos a profundidade do domínio canônico através da relação

$$D(t) = \langle \mathbf{Y}(\xi, t) \rangle + 1,$$

de modo que o comprimento do domínio canônico se iguale ao comprimento do domínio físico.

As relações sobre ϕ e ψ também seguem sem diferenças relevantes do caso independente do tempo:

$$\begin{cases} \phi(\xi, \eta, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cosh(k(D + \eta))}{\cosh(kD)} \mathcal{F}(\Phi(\xi, t)) \right], \\ \psi(\xi, \eta, t) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{\sinh(k(D + \eta))}{\sinh(kD)} \mathcal{F}(\Psi(\xi, t)) \right] - \frac{Q}{D} \eta, \end{cases} \quad (3.1.6)$$

e seguem essencialmente as mesmas relações

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\xi(\xi, t) &= \frac{1}{D} - \mathcal{C}[\mathbf{Y}_\xi(\xi, t)], \\ \Phi_\xi(\xi, t) &= -\mathcal{C}[\Psi_\xi(\xi, t)], \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

onde \mathcal{C} é o operador introduzido na seção anterior.

3.2 Equações dinâmicas

Utilizamos a regra da cadeia para derivar (3.1.3)₁, primeiro em relação a ξ , onde se obtém

$$\mathbf{Y}_\xi = y_\xi(\xi, 0, t) = \zeta_x x_\xi(\xi, 0, t) = \zeta_x \mathbf{X}_\xi \implies \zeta_x = \frac{\mathbf{Y}_\xi}{\mathbf{X}_\xi}. \quad (3.2.1)$$

Em relação a t , agora, calculamos

$$\mathbf{Y}_t = \zeta_x x_t(\xi, 0, t) + \zeta_t \implies \zeta_t = \mathbf{Y}_t - \frac{\mathbf{Y}_\xi}{\mathbf{X}_\xi} \mathbf{X}_t. \quad (3.2.2)$$

Voltamos a atenção agora à equação (3.1.4)₁, a qual derivamos em relação às variáveis ξ , η e t , obtendo

$$\begin{cases} \phi_\xi = \bar{\phi}_x x_\xi + \bar{\phi}_y y_\xi, \\ \phi_\eta = \bar{\phi}_x x_\eta + \bar{\phi}_y y_\eta, \\ \phi_t = \bar{\phi}_t + \bar{\phi}_x x_t + \bar{\phi}_y y_t. \end{cases}$$

Usando as relações de Cauchy-Riemann dos pares x - y e ϕ - ψ , estas equações podem ser reescritas eliminando-se derivadas em η , a saber,

$$\begin{cases} \phi_\xi = \bar{\phi}_x x_\xi + \bar{\phi}_y y_\xi, \\ \psi_\xi = \bar{\phi}_x y_\xi - \bar{\phi}_y x_\xi, \\ \phi_t = \bar{\phi}_t + \bar{\phi}_x x_t + \bar{\phi}_y y_t, \end{cases}$$

relações que podem ser invertidas, resultando em

$$\begin{cases} \bar{\phi}_x = \frac{1}{x_\xi^2 + y_\xi^2}(\phi_\xi x_\xi + \psi_\xi y_\xi), \\ \bar{\phi}_y = \frac{1}{x_\xi^2 + y_\xi^2}(\phi_\xi y_\xi - \psi_\xi x_\xi), \\ \bar{\phi}_t = \phi_t - \frac{\phi_\xi x_\xi + \psi_\xi y_\xi}{x_\xi^2 + y_\xi^2} - \frac{\phi_\xi y_\xi - \psi_\xi x_\xi}{x_\xi^2 + y_\xi^2}. \end{cases}$$

Avaliando em $\eta = 0$ chega-se em

$$\begin{cases} \bar{\phi}_x = \frac{1}{J}(\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi), \\ \bar{\phi}_y = \frac{1}{J}(\Phi_\xi \mathbf{Y}_\xi - \Psi_\xi \mathbf{X}_\xi), \\ \bar{\phi}_t = \Phi_t - \frac{\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi}{J} \mathbf{X}_t - \frac{\Phi_\xi \mathbf{Y}_\xi - \Psi_\xi \mathbf{X}_\xi}{J} \mathbf{Y}_t, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

onde $J = \mathbf{X}_\xi^2 + \mathbf{Y}_\xi^2$ denota o determinante do Jacobiano da transformação conforme avaliado na superfície livre $\eta = 0$. Usando as relações (3.2.1), (3.2.2) e (3.2.3) na condição de cinemática (3.1.1)₁:

$$\zeta_t + (\Omega\zeta + F + \bar{\phi}_x)\zeta_x = \bar{\phi}_y,$$

igualdade válida sobre $y = \zeta(x, t)$, temos

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{Y}_t - \frac{\mathbf{Y}_\xi}{\mathbf{X}_\xi} \mathbf{X}_t \right) + \left((\Omega\mathbf{Y} + F) + \frac{1}{J}(\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi) \right) \frac{\mathbf{Y}_\xi}{\mathbf{X}_\xi} &= \frac{1}{J}(\Phi_\xi \mathbf{Y}_\xi - \Psi_\xi \mathbf{X}_\xi) \\ \mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_t - \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_t + (\Omega\mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi + \frac{1}{J}(\Phi_\xi \mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_\xi + \Psi_\xi \mathbf{Y}_\xi^2) &= \frac{1}{J}(\Phi_\xi \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_\xi - \Psi_\xi \mathbf{X}_\xi^2) \\ \mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_t - \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_t &= -\Psi_\xi \left(\frac{\mathbf{X}_\xi^2 + \mathbf{Y}_\xi^2}{J} \right) - (\Omega\mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi \\ \mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_t - \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_t &= -\Psi_\xi - (\Omega\mathbf{Y} + F)\mathbf{Y}_\xi. \end{aligned}$$

Para fazermos o mesmo na condição de Bernoulli (3.1.1)₂, é conveniente separar termos e proceder em partes. Reescrevemos a equação de Bernoulli como

$$P_1 + P_2 = 0 \quad \text{sobre } y = \zeta(x, t), \quad (3.2.4)$$

onde

$$\begin{cases} P_1 = \bar{\phi}_t + \frac{1}{2}(\bar{\phi}_x^2 + \bar{\phi}_y^2) \\ P_2 = (\Omega\zeta + F)\bar{\phi}_x + \zeta - \Omega\bar{\psi}. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Começando com P_1 , vemos que vale, em $\eta = 0$

$$\begin{aligned}
P_1 &= \Phi_t - \frac{\Phi_\xi X_\xi + \Psi_\xi Y_\xi}{J} X_t - \frac{\Phi_\xi Y_\xi - \Psi_\xi X_\xi}{J} Y_t + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\Phi_\xi X_\xi + \Psi_\xi Y_\xi}{J} \right)^2 + \left(\frac{\Phi_\xi Y_\xi - \Psi_\xi X_\xi}{J} \right)^2 \right) \\
&= \Phi_t + \frac{1}{J} [(\Phi_\xi X_\xi X_t - \Psi_\xi Y_\xi X_t - \Phi_\xi Y_\xi Y_t + \Psi_\xi X_\xi Y_t)] + \\
&\quad + \frac{\Phi_\xi^2 X_\xi^2 + 2\Phi_\xi X_\xi \Psi_\xi Y_\xi + \Psi_\xi^2 Y_\xi^2}{2J^2} + \\
&\quad + \frac{\Phi_\xi^2 Y_\xi^2 - 2\Phi_\xi Y_\xi \Psi_\xi X_\xi + \Psi_\xi^2 X_\xi^2}{2J^2} \\
&= \Phi_t + \frac{1}{J} [\Phi_\xi (X_\xi X_t - Y_\xi Y_t) + \Psi_\xi (X_\xi Y_t - Y_\xi X_t)] + \\
&\quad + \frac{1}{2J} \left[\Phi_\xi^2 \frac{X_\xi^2 + Y_\xi^2}{J} + \Psi_\xi^2 \frac{X_\xi^2 + Y_\xi^2}{J} \right] \\
&= \Phi_t + \frac{1}{J} \left[\Phi_\xi (X_\xi X_t - Y_\xi Y_t) + \Psi_\xi (X_\xi Y_t - Y_\xi X_t) + \frac{1}{2} (\Phi_\xi^2 + \Psi_\xi^2) \right].
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Enquanto isso, para P_2 , temos

$$P_2 = \frac{1}{J} (\Omega Y + F) (\Phi_\xi X_\xi + \Psi_\xi Y_\xi) + Y - \Omega \Psi, \tag{3.2.7}$$

e assim obtemos

$$\begin{cases}
X_\xi Y_t - Y_\xi X_t = -\Psi_\xi - (F + \Omega Y) Y_\xi, \\
\Phi_t + Y + \frac{1}{J} \left[-(X_\xi X_t + Y_\xi Y_t) \Phi_\xi + (X_\xi Y_t - Y_\xi X_t) \Psi_\xi + \frac{1}{2} (\Phi_\xi^2 + \Psi_\xi^2) \right] + \\
\frac{1}{J} (F + \Omega Y) (X_\xi \Phi_\xi + Y_\xi \Psi_\xi) - \Omega \Psi = 0.
\end{cases} \tag{3.2.8}$$

Queremos reescrever (3.2.8) como um sistema de evolução, o que significa que, de alguma forma, precisamos desacoplar X_t e Y_t . Para essa finalidade, vamos considerar agora a função analítica

$$w(\xi, \eta, t) = \frac{x_t + iy_t}{x_\xi + iy_\xi} = \frac{x_t x_\xi + y_t y_\xi}{x_\xi^2 + y_\xi^2} + i \frac{y_t x_\xi - x_t y_\xi}{x_\xi^2 + y_\xi^2}. \tag{3.2.9}$$

Definindo $\Gamma(\xi, \eta, t) = Re(w)$ e $\Lambda(\xi, \eta, t) = Im(w)$, então Γ e Λ são funções conjugadas harmônicas sujeitas ainda a (3.2.8). Desta forma, temos um problema de Laplace para Λ :

$$\begin{cases} \Lambda_{\xi\xi} + \Lambda_{\eta\eta} = 0, \text{ em } -D < \eta < 0, \\ \Lambda = -\frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J} \text{ sobre } \eta = 0, \\ \Lambda = 0 \text{ sobre } \eta = -D, \end{cases} \quad (3.2.10)$$

onde $\Theta_\xi(\xi, t) = \Psi_\xi + F\mathbf{Y}_\xi + \Omega\mathbf{Y}\mathbf{Y}_\xi$. Seja $\Gamma_0(\xi, t) = \Gamma(\xi, \eta, t)$, então Γ deve satisfazer o seguinte problema envolvendo a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \Gamma_{\xi\xi} + \Gamma_{\eta\eta} = 0, \text{ em } -D < \eta < 0, \\ \Gamma = \Gamma_0(\xi, t) \text{ sobre } \eta = 0, \\ \Gamma_\eta = 0 \text{ sobre } \eta = -D. \end{cases} \quad (3.2.11)$$

A situação aqui é análoga às equações (2.2.2) e (2.2.3), portanto podemos resolver da mesma forma (ver Apêndice A), deduzindo

$$\Gamma_0(\xi, t) = \mathcal{C} \left[\frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J} \right],$$

informação que, juntamente com a primeira equação em (3.2.8), nos leva a

$$\begin{cases} \mathbf{X}_\xi \mathbf{Y}_t - \mathbf{Y}_\xi \mathbf{X}_t = -\Theta_\xi(\xi, t), \\ \mathbf{X}_\xi \mathbf{X}_t + \mathbf{Y}_\xi \mathbf{Y}_t = J\mathcal{C} \left[\frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J} \right]. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Podemos enfim isolar \mathbf{X}_t e \mathbf{Y}_t invertendo essas equações, obtendo

$$\begin{cases} \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_\xi \mathcal{C} \left[\frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J} \right] + \mathbf{Y}_\xi \frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J}, \\ \mathbf{Y}_t = \mathbf{Y}_\xi \mathcal{C} \left[\frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J} \right] - \mathbf{X}_\xi \frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J}. \end{cases} \quad (3.2.13)$$

Isolando Φ_t em (3.2.8)₂ e usufruindo de (3.2.12), calcula-se

$$\begin{aligned} \Phi_t &= -\frac{1}{J} \left[-J\mathcal{C} \left[\frac{\Theta_\xi}{J} \right] + (-\Psi_\xi - (F + \Omega\mathbf{Y})\mathbf{Y}_\xi)\Psi_\xi + \frac{1}{2}(\Phi_\xi^2 + \Psi_\xi^2) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{J}(F + \Omega\mathbf{Y})(\mathbf{X}_\xi\Phi_\xi + \mathbf{Y}_\xi\Psi_\xi) + \Omega\Psi - \mathbf{Y} \\ &= \mathcal{C} \left[\frac{\Theta_\xi}{J} \right] - \frac{1}{J} \left[-(F + \Omega\mathbf{Y})\mathbf{Y}_\xi\Psi_\xi + \frac{1}{2}(\Phi_\xi^2 - \Psi_\xi^2) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{J}(F + \Omega\mathbf{Y})(\mathbf{X}_\xi\Phi_\xi + \mathbf{Y}_\xi\Psi_\xi) + \Omega\Psi - \mathbf{Y} \\ &= \mathcal{C} \left[\frac{\Theta_\xi}{J} \right] - \frac{1}{2J}(\Phi_\xi^2 - \Psi_\xi^2) - \frac{1}{J}(F + \Omega\mathbf{Y})\mathbf{X}_\xi\Phi_\xi + \Omega\Psi - \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Resumindo, na superfície livre $\eta = 0$ temos o sistema:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_t &= \mathbf{Y}_\xi \mathcal{C} \left[\frac{\Theta_\xi}{J} \right] - \mathbf{X}_\xi \frac{\Theta_\xi}{J}, \\
\Phi_t &= -\mathbf{Y} - \frac{1}{2J} (\Phi_\xi^2 - \Psi_\xi^2) + \Phi_\xi \mathcal{C} \left[\frac{\Theta_\xi}{J} \right] - \frac{1}{J} (F + \Omega \mathbf{Y}) \mathbf{X}_\xi \Phi_\xi + \Omega \Psi.
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Observa-se que o cálculo do limite

$$\lim_{k \rightarrow 0} i \coth(kD) \mathcal{F} \left[\frac{\Theta_\xi}{J} \right] (k, t) \tag{3.2.15}$$

é necessário. Seria conveniente encontrarmos $M(\xi, t)$ tal que

$$M_\xi(\xi, t) = \frac{\Theta_\xi}{J},$$

mas isso é possível pois Θ_ξ e J são ambas funções suaves, com $J \neq 0$. Temos então

$$\mathcal{C} \left[\frac{\Theta_\xi}{J} \right] = \mathcal{C}_0 \left[\frac{\Theta_\xi}{J} \right] - \frac{\langle M \rangle}{D},$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota a média em relação a variável ξ e omite-se, por comodidade de notação, a dependência da variável t . Substituindo em (3.2.13)₁ se encontra

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_\xi \mathcal{C}_0 \left[\frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J} \right] + \mathbf{Y}_\xi \frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J} - \mathbf{X}_\xi \frac{\langle M \rangle}{D},$$

o que, tomando a média em ambos os lados, se transforma em

$$\langle \mathbf{X}_t \rangle = \left\langle \mathbf{X}_\xi \mathcal{C}_0 \left[\frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J} \right] + \mathbf{Y}_\xi \frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J} \right\rangle - \langle \mathbf{X}_\xi \rangle \frac{\langle M \rangle}{D}.$$

Isolando $\langle M \rangle$, se determina

$$\langle M \rangle = \frac{D}{\langle \mathbf{X}_\xi \rangle} \left\langle \mathbf{X}_\xi \mathcal{C}_0 \left[\frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J} \right] + \mathbf{Y}_\xi \frac{\Theta_\xi(\xi, t)}{J} \right\rangle - D \frac{\langle \mathbf{X}_t \rangle}{\langle \mathbf{X}_\xi \rangle}.$$

Mas

$$X_\xi = \frac{1}{D} - \mathcal{C}_0[\mathbf{Y}_\xi] + \frac{\langle \mathbf{Y} \rangle}{D} = 1 - \mathcal{C}_0[\mathbf{Y}_\xi] \implies X = \xi - \mathcal{C}_0[\mathbf{Y}],$$

o que significa que $\langle \mathbf{X}_\xi \rangle = 1$ e $\langle \mathbf{X}_t \rangle = 0$. Portanto, tem-se

$$-\frac{\langle M \rangle}{D} = - \left\langle \mathbf{X}_\xi \mathcal{C}_0 \left[\frac{\Theta_\xi}{J} \right] + \mathbf{Y}_\xi \frac{\Theta_\xi}{J} \right\rangle,$$

expressão essa que, de acordo com (2.2.7), é precisamente o termo (3.2.15).

É pertinente também comentar Ψ precisa ser calculado, o que é feito a partir de

(3.1.7)₂. Essa equação determina

$$\hat{\Psi}(k, t) = i \tanh(kD) \hat{\Phi}(k, t)$$

para todo $k \neq 0$ e

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \coth(kD) \hat{\Psi}(k, t) = \lim_{k \rightarrow 0} \hat{\Phi}_\xi(k, t) \implies \hat{\Psi}(0, t) = D \hat{\Phi}_\xi(0, t).$$

Tendo $\hat{\Psi}(k, t)$ para todo k , temos $\Psi(\xi, t)$.

Finalizamos esta seção notando que (3.2.14) é agora interpretado como um problema de valor inicial, onde dados iniciais devem ser fornecidos para que se possa estudar a dinâmica e evolução do sistema. Serão esses dados precisamente os valores de saída do nosso método numérico para ondas solitárias, especificamente o perfil \mathbf{Y} , uma vez que o dado inicial para a função Φ pode ser obtido a partir de \mathbf{Y} a partir de relações já estabelecidas (o que será melhor detalhado na próxima seção). Uma vez estabelecidos os dados iniciais, o método então consiste na evolução do tempo no sistema (3.2.14) via algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem. Além disso, assim como no método independente do tempo, todas as derivadas na variável ξ são calculadas espectralmente via FFT [47]. Mais detalhes podem ser encontrados em Flamarion et al. [20].

3.3 Simulações numéricas: estabilidade das ondas solitárias viajantes

Nesta seção, fazemos uso do método de evolução numérica sintetizado na seção 3.2 para analisar a evolução das ondas construídas no capítulo 2, ou seja, para verificar se as soluções dadas pelo nosso método numérico para ondas solitárias são de fato viajantes. Embora ondas solitárias viajantes com vorticidade já tenha sido objeto de estudo de outros trabalhos [50], até onde sabemos o estudo de estabilidade apresentado aqui é inédito na literatura.

A onda solitária, de amplitude A , solução do escoamento de vorticidade Ω_0 e número de Froude F_0 é calculada numericamente através do sistema (2.3.4). Vamos denotar por \mathbf{Y}_0 seu perfil e c_0 sua velocidade. Agora, estamos interessados em resolver o sistema (3.2.14) com os parâmetros $\Omega = \Omega_0$ e $F = F_0 - c_0$. Com esta escolha, estamos incluindo uma contracorrente que anula precisamente a velocidade da onda, deixando uma onda estacionária como solução, se c_0 for sua velocidade original. Além disso, é necessário um cálculo numérico de Φ_0 a partir de \mathbf{Y}_0 , mas isso pode ser obtido por

$$\Phi_0 = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[-i \frac{1}{k} \hat{\Phi}_\xi(k) \right], \quad (3.3.1)$$

levado em conta (2.2.9)₂ e (2.2.15). Os dados iniciais de (3.2.14) agora podem ser fixados como

$$\begin{cases} \mathbf{Y}(\xi, 0) = \mathbf{Y}_0, \\ \Phi(\xi, 0) = \Phi_0. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Usando $f(t)$ para denotar o vetor com entradas $(f(\xi_j, t))$, $j = 1, \dots, N/2 + 1$, uma função de erro pode ser definida por:

$$E(t) = \frac{\|\mathbf{Y}(t) - \mathbf{Y}_0\|_\infty}{\|\mathbf{Y}_0\|_\infty}, \quad (3.3.3)$$

onde $\|v\|_\infty = \max\{|v_j|\}$ se $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Essencialmente, queremos investigar como a vorticidade, assim como a amplitude, de uma dada solução de Euler, afeta a estabilidade da onda. Para o critério de estabilidade, utilizamos a grandeza empírica denominada *comprimento de onda efetivo*, denotado por EW , que é o comprimento do intervalo que contém quase toda a energia da onda. O teste é então se a onda seria capaz de viajar (sem mudar de forma ou velocidade) uma distância que seja pelo menos 25 vezes seu comprimento de onda efetivo, se retirássemos a contracorrente. Tudo o que precisamos fazer é ver se a onda permanece parada e estável até o tempo $t = \lfloor 25 \times EW/c \rfloor$ ou mais. A medida da preservação da forma e da velocidade durante a evolução é então calculada pela função de erro $E(t)$. Quanto à evolução de quarta ordem de Runge-Kutta, a escolha do passo de tempo foi $\Delta t = 10^{-2}$. Aqui, a grade de tempo usada é dada por $t_j = (j-1)\Delta t$, $j = 1, \dots, N_t$ com $N_t = 2000/\Delta t$.

Ao selecionar os dados de saída do método do capítulo 2 para alimentar como dados iniciais para o código de evolução, escolhemos $\Delta\xi = 0.1831$ ($N = 2^{13}$) como o intervalo de grade de referência para este experimento. Vale ressaltar, o refinamento da grade de espaço e/ou tempo pode influenciar os resultados, especialmente em casos limites, como ondas de amplitude e/ou vorticidade críticas, que podem situar-se na fronteira do espaço solução ou próximo a ela. Essas escolhas aparentemente arbitrárias são na verdade sugeridas por uma mistura de análise empírica mas também pelo estudo de resolução apresentado na seção 2.4.3.

A tabela 3.1 sintetiza o núcleo dos resultados desta seção.

A	Ω	T	$E(t = T)$
0.1	1	2000	3.92×10^{-9}
	0.5	2000	4.01×10^{-7}
	0	2000	2.10×10^{-8}
	-0.5	2000	3.47×10^{-9}
	-1	2000	8.36×10^{-12}
	-5	74.95	0.0415
0.2	1	2000	0.1167
	0.5	2000	3.21×10^{-7}
	0	2000	1.14×10^{-12}
	-0.5	2000	1.44×10^{-9}
	-1	2000	5.62×10^{-5}
	-5	6.7900	0.0045
0.3	1	*	*
	0.5	2000	0.0016
	0	2000	4.67×10^{-12}
	-0.5	58.51	0.0855
	-1	21.77	0.0410
	-5	4.11	0.0700

Tabela 3.1: Estudo de estabilidade: soluções com diferentes parâmetros apresentam diferentes níveis de estabilidade e podem explodir em tempo anterior a $t = 2000$. (A linha marcada com “*” significada que o método para obtenção do dado inicial não convergiu).

Para este experimento, escolhemos $T = \min\{2000, t^*\}$, onde t^* representa o passo da malha temporal imediatamente anterior a ocasião de uma explosão do método, caso alguma ocorra. O tempo de referência $t = 2000$ foi escolhido por garantir que todas as ondas selecionadas trafeguem pelo menos 25 vezes seu comprimento de onda efetivo.

Notamos que, em geral, as ondas são instáveis para valores de Ω cujo módulo seja grande e, além disso, essa instabilidade tende a apresentar caráter de ruído como pode ser observado na Figura 3.1. Para $\Omega > 0$, essa instabilidade é de certa forma esperada, pois a solução perde suavidade quando Ω cresce (como observado na figura 2.2 a onda tende a formar cúspides na vizinhança de $X = 0$ para $\Omega \gg 0$.) Por outro lado, para $\Omega < 0$, embora as soluções sejam suaves para valores de Ω cujo módulo seja arbitrariamente grande, as ondas são instáveis a partir de um certo valor crítico. Isto indica que embora possamos calcular ondas solitárias viajantes para qualquer valor negativo de Ω a existência destas ondas para $|\Omega| \gg 1$ é apenas teórica – no sentido que são soluções para a versão permanente das equações de Euler, mas quando fornecidas como dado inicial para as equações de Euler dependentes do tempo não apresentam características de ondas viajantes.

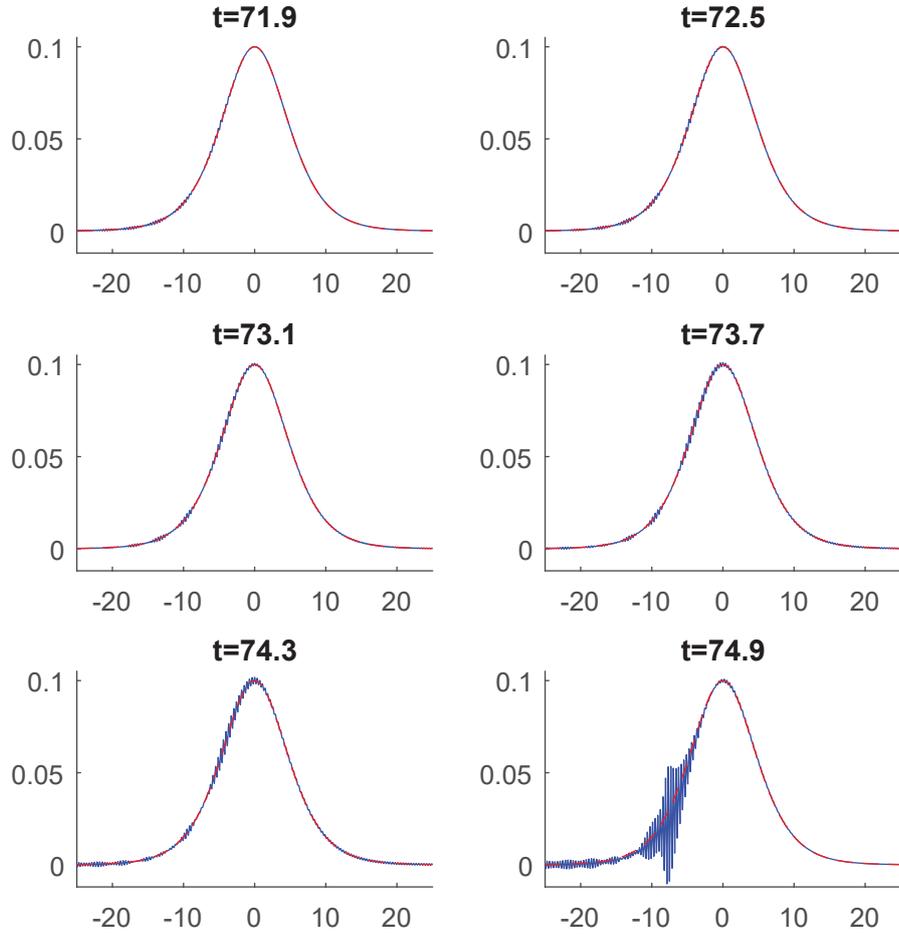


Figura 3.1: Instabilidade perceptível na solução para parâmetros $A = 0.1$ e $\Omega = -5$. Tracejado em vermelho está o dado \mathbf{Y}_0 enquanto em azul vemos $\mathbf{Y}(t)$ no instante t .

Além disso, os dados da tabela 3.1 indicam que o parâmetro da amplitude das ondas é diretamente correlato ao surgimento de instabilidade. Em outras palavras, fixado o valor de $\Omega \neq 0$ o aumento da amplitude leva a uma instabilidade da solução. Isto acontece mesmo quando $|\Omega|$ é pequeno, como indicado pela coluna referente a $E(t = T)$. Destaca-se aqui que o caso $\Omega = 0$ se mostra estável para todas as amplitudes apresentadas na tabela, o que aponta que a estabilidade das ondas rotacionais tende a ser mais sensível ao aumento da amplitude.

Considerações Finais

Neste trabalho foi realizado um estudo numérico acerca da estabilidade das ondas solitárias rotacionais soluções das equações de Euler permanentes.

Construímos um esquema numérico que nos permitiu encontrar ondas solitárias rotacionais para as equações de Euler. A derivação desse método foi minuciosamente explicada a partir das equações governantes como ponto de partida. Este esquema se baseia em abordagens bem-sucedidas de problemas semelhantes apresentados em trabalhos anteriores [40]. Ele consiste principalmente da técnica do mapeamento conforme, aliada a métodos espectrais de Fourier e ao método de Newton com continuação nos parâmetros relevantes do escoamento: amplitude da onda (A) e vorticidade ($-\Omega$). Os efeitos desses parâmetros nas soluções são então apresentados visualmente e discutidos rigorosamente, mantendo também a teoria linear, bem como a onda solitária solução da equação de KdV com vorticidade como referência para comparação e validação. Em seguida, tomamos as soluções das equações de Euler permanentes e as alimentamos como dados iniciais para as equações de Euler dependentes do tempo, as quais foram resolvidas via uma adaptação do esquema proposto por Flamarion et al [20]. Este procedimento nos permitiu entender como se dá a estabilidade numérica das ondas solitárias com vorticidade. Mais especificamente, nossas simulações indicam que estas ondas são estáveis apenas em escoamentos cuja intensidade da vorticidade é pequena.

Um problema em aberto relacionado as ondas solitárias com vorticidade é analisar se a vorticidade causa anomalias na pressão no interior do fluido [32, 45, 40]. Essa tarefa está para além dos objetivos deste trabalho, todavia é importante ressaltar que ela seria uma extensão natural do estudo realizado aqui. Ademais, outras direções que podem ser tomadas a partir deste estudo são: o estudo de ondas presas em regiões de baixa pressão em escoamentos com vorticidade; uma investigação acerca dos efeitos de uma distribuição de pressão variável na onda solitária com vorticidade; o estudo da interação de uma onda solitária com vorticidade com uma topografia variável.

Embora ao longo deste texto, e historicamente, as ondas solitárias tenham sido motivadas por meio das equações da hidrodinâmica, sua relevância e notoriedade veio apenas em 1965 a partir dos trabalhos de Zabusky e Kruskal [53] que ao analisar numericamente a equação de KdV notaram que: ondas solitárias da KdV de diferentes amplitudes, ao se colidirem, não se destroem, e também não se dispersam; elas recuperam sua forma e

sua velocidade após a colisão. Como resultado eles decidiram nomear tais soluções como sólitons. “O sufixo ‘on’ (que em grego significa partícula), ilustra o comportamento tipo partícula destas ondas.” [24] Desde então o conceito de ondas solitárias (solitons) tem sido aplicado em diversos outros contextos, por exemplo, na modelagem de ondas de pressão sanguínea ([39] p. 34) e na biologia [38].

Para finalizar, sublinhamos que de maneira geral as descobertas provenientes deste trabalho poderão ser úteis em matemática na área de Análise das EDPs, fornecendo *insights* para novos resultados teóricos a respeito da estabilidade das ondas solitárias com vorticidade, e para a área de Métodos Numéricos em EDPs. Ademais, o presente texto contribui para o avanço científico na área de teoria matemática das ondas aquáticas, campo de pesquisa cuja relevância tem sido reforçada pela Organização das Nações Unidas, que em dezembro de 2017 declarou a década de 2021-2030 como “Década da Ciência Oceânica para o Desenvolvimento Sustentável” ou simplesmente “Década do Oceano” como ficou conhecida. A Década do Oceano tem como uma de suas metas: “[To] harness, stimulate and empower interdisciplinary ocean research at all levels ...”([27], p. 6)

Referências

- [1] ALENCAR, L. R.; RABELLO, T. N. *Uma Variável Complexa: Teoria e Aplicações*. EDUSP, 2019.
- [2] AMANN D.; KALIMERIS, K. A numerical continuation approach for computing water waves of large wave height. *European Journal of Mechanics*. 67, 314-328, 2018.
- [3] AMICK, C.; FRAENKEL, L.; TOLAND, J. On the Stokes conjecture for the wave of extreme form. *Acta Mathematica* 148, 193–214, 1982.
- [4] AMICK, C.; TOLAND, J. On periodic water waves and their convergence to solitary waves in the long-wave limit. *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 303, 633–669, 1981.
- [5] AMICK, C.; TOLAND, J. On solitary water waves of finite amplitude. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 76, 9–95, 1981.
- [6] BEALE, J. T. The existence of solitary water waves. *Comm. Pure Appl. Math.* 30, 373-389, 1977.
- [7] BENJAMIN, T. B.; BONA, J. L., BOSE, D. K. Solitary-wave solutions of nonlinear problems. *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 331, 195–244, 1990.
- [8] BENJAMIN, T. B. The solitary wave on a stream with an arbitrary distribution of vorticity. *J. Fluid Mech.* 12, 97–116, 1962.
- [9] BOUSSINESQ, J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 55-108, 1872. <<http://eudml.org/doc/234248>>.
- [10] BOYCE, E. W.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Guanabara, 1988.
- [11] CHOI, W. Strongly nonlinear long gravity waves in uniform shear flows *Physical Review E*. 68, 026305, 2003.

- [12] CHOI, W. Nonlinear surface waves interacting with a linear shear current *Mathematics and Computers in Simulation*. 80, 29-36, 2009.
- [13] CHORIN, A.; MARSDEN, J. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, 2000.
- [14] CONSTANTIN, A. *Nonlinear Water Waves with Applications to Wave-Current Interactions and Tsunamis*, Vol. 81. Philadelphia:SIAM, 2011.
- [15] CONSTANTIN, A.; STRAUSS, W; VARVARUCA, E. Global bifurcation of steady gravity water waves with critical layers. *Acta Mathematica*, 217, 2016.
- [16] CRAIK, A. The Origins of Water Wave Theory. *Annual Review Of Fluid Mechanics*, [S.L.], 36 (1), 1-28, 2004. Annual Reviews. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.122118>.
- [17] DYACHENKO, S. A.; HUR, V. M. Stokes waves with constant vorticity: folds, gaps and fluid bubbles. *J. Fluid Mech.* 878, 502-521, 2019.
- [18] DYACHENKO, S. A.; HUR, V. M. Stokes waves with constant vorticity: I. Numerical computation. *Stud. Appl. Maths* 142, 162-189, 2019.
- [19] DYACHENKO, A.; ZAKHAROV, V.; KUZNETSOV, E. Nonlinear dynamics of the free surface of an ideal fluid. *Plasma Phys.* 22, 916-928, 1996.
- [20] FLAMARION, M. V.; MILEWSKI, P. A.; NACHBIN, A. Rotational waves generated by current-topography interaction. *Stud Appl Math*, 142, 433-464, 2019.
- [21] FRANCIUS, M.; KHARIF, C. Two-dimensional stability of finite-amplitude gravity waves on water of finite depth with constant vorticity. *J. Fluid Mech.* 830, 631–659, 2017.
- [22] FREEMAN, N. G.; JOHNSON, R. S. Shallow water waves on shear flows. *J. Fluid Mech.* 42, 401–409, 1970.
- [23] FRIEDRICHS, K. O.; HYERS, D. H. The existence of solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* 7, 517–550, 1954.
- [24] GONDAR, J. L. CIPOLATTI, R. *Iniciação à Física Matemática: Modelagem de Processos e Métodos de Solução*. IMPA, 2016.
- [25] GUAN, X. Particle trajectories under interactions between solitary waves and a linear shear current. *Theoretical & Applied Mechanics Letters*. 10, 125-131, 2020.
- [26] HUR, V. M. Exact solitary water waves with vorticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 188, 213–244, 2008.

- [27] INTERGOVERNAMENTAL OCEANIC COMMISSION OF UNESCO. *United Nations Decade of Ocean Science for Sustainable Development 2021-2030: Implementation Plan*. Disponível em: < http://decada.ciencianomar.mctic.gov.br/wp-content/uploads/2021/01/IP_v2_eng.pdf >. Acesso em: 28 de mar. de 2022.
- [28] JOHNSON, R. S. On the nonlinear critical layer below a nonlinear unsteady surface wave. *Journal of Fluid Mechanics*, 167, (327-351), 1986.
- [29] KORTEWEG, D. J.; DE VRIES, G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. **Phil. Mag.** (5) 39, 422-443, 1895.
- [30] KO, J.; STRAUSS, W. Effect of vorticity on steady water waves *J Fluid Mech.* 608, 197-215, 2008.
- [31] KO, J.; STRAUSS, W. Large-amplitude steady rotational water waves *European Journal of Mechanics.* 27, 96-109, 2008.
- [32] KOZLOV, V.; KUZNETSOV, N; LOKHARU, E. Solitary waves on constant vorticity flows with an interior stagnation point. *J. Fluid Mech.*, 904, 2020.
- [33] LAVRENTIEV, M. A. On the theory of long waves I A contribution to the theory of long waves II. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* 102, 3–50, 1954.
- [34] LI, Y. A.; HYMAN, J. M.; CHOI, W. A Numerical Study of the Exact Evolution Equations for Surface Waves in Water of Finite Depth. *Stud Appl Math*, **113**, 303-324, 2004.
- [35] MANUKURE, S.; BOOKER, T. A short overview of solitons and applications. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics* , 4, 100-140, 2021.
- [36] MILEWSKI, P. A.; VANDEN-BROECK, J.-M.; WANG, Z. Dynamics of steep two-dimensional gravity–capillary solitary waves. *J. Fluid Mech.*, 664, 466–477, 2010.
- [37] NACHBIN, A. **Aspectos de Modelagem Matemática e Dinâmica dos Fluidos**. Rio de Janeiro. IMPA, 2001.
- [38] PEYRARD, M. *Nonlinear Excitations in Biomolecules* Berlin: Sprigener-Verlag, 1994.
- [39] PEYRARD, M. *Physique des solitons* Paris: CNRS Editions, 2004.
- [40] RIBEIRO JR., R.; MILEWSKI, P.; NACHBIN, A. Flow structure beneath rotational water waves with stagnation points. *J Fluid Mech.* 812, 792-814, 2017.

- [41] RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Pearson, 2000.
- [42] RUSSELL, J. S. *Report on Waves*. London: Richard and John E. Taylor, 1845.
- [43] SCRIPPS INSTITUTION OF OCEANOGRAPHY. *Shallow water wave generation (quasi solitary wave with breaking)*. Disponível em: <https://youtu.be/w-oDnVbV8mY>. Acesso em: 26 Mar 2022.
- [44] TEDx TALKS. Why exploring space matters | Stephen Hawking | TEDxLondon. Jul 2016. Disponível em: <<https://youtu.be/B91cd3D0HL4>>. Acesso em: 28 mar. 2022.
- [45] TELES DA SILVA, A.; PEREGRINI, D. H. Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity. *J Fluid Mech.* 195, 281-302, 1984.
- [46] TER-KRIKOROV, A. M. The existence of periodic waves which degenerate into a solitary wave. *J. Appl. Math. Mech.* 24, 930-949, 1960.
- [47] TREFETHEN, L. N. *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia: SIAM, 2001.
- [48] VANDEN-BROECK, J.-M. *Gravity-capillary Free-surface Flows*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [49] VANDEN-BROECK, J.-M. Periodic waves with constant vorticity in water of infinite depth. *Journal of Applied Mathematics.* 56, 207-217, 1996.
- [50] VANDEN-BROECK, J.-M. Steep solitary waves in water of finite depth with constant vorticity. *J Fluid Mech.* 274, 339-348, 1994.
- [51] WHEELER, M. H. Large-amplitude solitary water waves with vorticity. *SIAM J. Math. Anal.* 45 (5), 2937-2994, 2013.
- [52] WHITHAM, G. B. Mass, momentum and energy flux in water waves. *Journal of Fluid Mechanics.* 12, 135 - 147, 1961.
- [53] ZABUSKY, N.; KRUSKAL, M. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Physical Review Letters.*, 15, 240-243, 1965.

Apêndice A

Resolução das equações de ϕ e ψ

Esse apêndice dedica-se a explicar detalhadamente a resolução das equações (2.2.2) e (2.2.3), que apesar de muita parecidas com as equações das componentes X e Y do mapeamento conforme, com resoluções explicitadas na seção 2.1, apresentam sutis distinções. A tática em si, porém, é precisamente a mesma.

Resolução da componente ϕ

Começando por ϕ , aplica-se a transformada de Fourier \mathcal{F} na variável ξ , chegando em

$$\begin{cases} -k^2 \hat{\phi}(k, \eta) + \hat{\phi}_{\eta\eta}(k, \eta) = 0 & \text{em } -D < \eta < 0 \\ \hat{\phi}(k, 0) = \hat{\Phi}(k), \\ \hat{\phi}_{\eta}(k, -D) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.0.1})$$

Concentrando no caso $k \neq 0$, a solução geral é dada por

$$\hat{\phi}(k, \eta) = A(k)e^{k\eta} + B(k)e^{-k\eta}, \quad (\text{A.0.2})$$

o que implica, das condições de fronteira, as relações

$$\begin{cases} \hat{\Phi}(k) = A(k) + B(k) \\ 0 = A(k)e^{-kD} - B(k)e^{kD} \end{cases} \implies \begin{cases} A(k) = \hat{\Phi}(k) - B(k) \\ B(k) = A(k) \frac{e^{-kD}}{e^{kD}} \end{cases} \implies$$

$$\begin{aligned} B(k) &= \hat{\Phi}(k) \frac{e^{-kD}}{e^{kD}} - B(k) \frac{e^{-kD}}{e^{kD}} \implies \\ 2B(k) \left[\frac{e^{kD} + e^{-kD}}{2e^{kD}} \right] &= \hat{\Phi}(k) \frac{e^{-kD}}{e^{kD}} \implies \\ B(k) &= \hat{\Phi}(k) \frac{e^{-kD}}{2 \cosh(kD)}. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões de $A(k)$ e $B(k)$ em (A.0.2), temos

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(k, \eta) &= \left[\hat{\Phi}(k) - \hat{\Phi}(k) \frac{e^{-kD}}{2 \cosh(kD)} \right] e^{k\eta} + \hat{\Phi}(k) \frac{e^{-kD}}{2 \cosh(kD)} e^{-k\eta} \\
&= \left[\left[\hat{\Phi}(k)(e^{kD} - e^{-kD}) - \hat{\Phi}(k)e^{-kD} \right] e^{k\eta} + \hat{\Phi}(k)e^{-kD} e^{-k\eta} \right] \frac{1}{2 \cosh(kD)} \\
&= \left[\frac{e^{kD} e^{k\eta} + e^{-kD} e^{-k\eta}}{2} \right] \frac{\hat{\Phi}(k)}{\cosh(kD)} \implies \\
\hat{\phi}(k, \eta) &= \hat{\Phi}(k) \frac{\cosh(k(D + \eta))}{\cosh(kD)}. \tag{A.0.3}
\end{aligned}$$

Se agora, assumimos $k = 0$, então (A.0.1) se torna

$$\begin{cases} \hat{\phi}_{\eta\eta}(0, \eta) = 0 & \text{em } -D < \eta < 0 \\ \hat{\phi}(0, 0) = \hat{\Phi}(0), \\ \hat{\phi}_{\eta}(0, -D) = 0, \end{cases} \tag{A.0.4}$$

e portanto, a solução geral é $\hat{\phi}(0, \eta) = \alpha\eta + \beta$, o que, dos dados de fronteira, de imediato informa

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \hat{\Phi}(0) = \beta \end{cases} \implies \hat{\phi}(0, \eta) = \hat{\Phi}(0). \tag{A.0.5}$$

Concluimos então que

$$\phi(\xi, \eta) = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\cosh(k(D + \eta))}{\cosh(kD)} \hat{\Phi}(k) \right]. \tag{A.0.6}$$

Resolução da componente ψ

Sobre a equação de ψ , dada por (2.2.3), aplicamos \mathcal{F} , chegando em

$$\begin{cases} -k^2 \hat{\psi}(k, \eta) + \hat{\psi}_{\eta\eta}(k, \eta) = 0 & \text{em } -D < \eta < 0 \\ \hat{\psi}(k, 0) = \hat{\Psi}(k), \\ \hat{\psi}(k, -D) = \begin{cases} Q, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \end{cases} \tag{A.0.7}$$

Nota-se que as EDOs com $k \neq 0$ são idênticas a (2.1.5), logo teremos como solução

$$\hat{\psi}(k, \eta) = \hat{\Psi}(k) \frac{\sinh(k(D + \eta))}{\sinh(kD)}. \tag{A.0.8}$$

Para o caso $k = 0$, a solução geral é $\hat{\psi}(0, \eta) = \alpha\eta + \beta$, condicionado a

$$\begin{cases} \hat{\psi}(0, 0) = \hat{\Psi}(0), \\ \hat{\psi}(0, -D) = Q, \end{cases} \quad (\text{A.0.9})$$

implicando

$$\begin{cases} \beta = \hat{\Psi}(0), \\ -\alpha D + \beta = Q \end{cases} \implies \alpha = \frac{\hat{\Psi}(0) - Q}{D} \implies$$

$$\hat{\psi}(0, \eta) = \frac{\hat{\Psi}(0) - Q}{D} \eta + \hat{\Psi}(0).$$

Levando em conta que, entre as possíveis conjugadas harmônicas de ϕ escolhemos uma ψ que especificamente satisfaça a condição $\hat{\Psi}(0)$ (2.2.25), temos então

$$\hat{\psi}(0, \eta) = -\frac{Q}{D} \eta, \quad (\text{A.0.10})$$

e, finalmente,

$$\psi(\xi, \eta) = \mathcal{F}_{k \neq 0}^{-1} \left[\frac{\sinh(k(D + \eta))}{\sinh(kD)} \hat{\Psi}(k) \right] - \frac{Q}{D} \eta. \quad (\text{A.0.11})$$