UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GABRIEL AKIYUKI WOLFF
GRR20158296

A ARTE DO ORIGAMI E A MATEMÁTICA: JOGOS E APLICAÇÕES

PONTAL DO PARANÁ
2022

GABRIEL AKIYUKI WOLFF
GRR20158296

A ARTE DO ORIGAMI E A MATEMÁTICA: JOGOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Ciências Exatas habilitação em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Tadeu Bacalhau.

PONTAL DO PARANÁ
2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

INFORMAÇÃO Nº 41/2022/UFPR/R/PP

TERMO DE APROVAÇÃO

GABRIEL AKIYUKI WOLFF

A Arte do Origami e a Matemática: Jogos e Aplicações.

Trabalho de Conclusão de Curso **aprovado** como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Ciências Exatas - Matemática, da Universidade Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:

Dr. Eduardo Tadeu Bacalhau

Orientador e Presidente

Dr. Alex Paulo Francisco

Membro Examinador

Dr. Guilherme Sippel Machado

Membro Examinador

Pontal do Paraná, 09 de maio de 2022.

Documento assinado eletronicamente por **EDUARDO TADEU BACALHAU**, **PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 11/05/2022, às 20:29, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **GUILHERME SIPPEL MACHADO**, **PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 11/05/2022, às 20:30, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

Documento assinado eletronicamente por **ALEX PAULO FRANCISCO**, **PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 11/05/2022, às 20:31, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

A autenticidade do documento pode ser conferida aqui informando o código verificador **4491849** e o código CRC **1382A365**.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por seu enorme amor e compaixão por todos aqueles que cometem erros, assim como eu, e por me conceder o perdão.

A meus pais e familiares e amigos que foram grandes incentivadores e que, apesar de não acreditarem em meu potencial, eu busquei ser melhor. Mas agradeço aos mesmos por todo o amor e compreensão e auxílio para conclusão dessa etapa. Ao meu amigo e irmão de coração Eng. Prod. Leonardo do Nascimento, por me auxiliar nas adversidades e agregar conhecimento as nossas prosas.

Aos meus amigos, em especial Matheus, Bruno, Roberto, Alessandro e Camila.

Enorme gratidão aos grandes professores e orientadores que me ensinaram todos os conceitos durante o período que estive no curso, em especial ao orientador Prof. Dr. Eduardo Tadeu Bacalhau.

"E lembre-se, com grandes poderes vêm grandes responsabilidades... " - Stan Lee, Tio Ben, Spider Man."

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo apresentar as dimensões teórica, prática e aplicações que a relação matemática do origami podem abranger. Com o auxílio do referencial bibliográfico descritivo e exploratório, são explanadas as principais relações axiomáticas e angulares de Huzita-Hatori que a arte milenar do origami pode compor. Estas dobraduras são partes importantes da aplicação, tal como a representação do Teorema de Pitágoras, visto com um viés mais simplista e de fácil compressão, que vem sendo utilizada nas áreas de ensino-aprendizagem da Geometria. Ainda no viés de aplicação que os origamis apresentam são explorados jogos diversos como: o Tangram, que auxiliam no conhecimento e desenvolvimento espacial dos jovens alunos; e as modelagens das aplicações tecnológicas que preveem o uso de dobraduras, como por exemplo a aplicabilidade em painéis solares dobráveis a partir do método de Miura-Ori. Por fim, são apresentadas as conclusões do trabalho, visando expor o caráter investigativo da pesquisa realizada.

Palavras-Chave: Matemática, Geometria, Origami.

ABSTRACT

This work aims to present the theoretical, practical and application dimensions of origami's mathematical relationship can include. Supported by a descriptive and exploratory bibliographic reference, the main axiomatic and angular relationships of Huzita-Hatori, which the millenary art of origami comprises, are explored. These folds are important parts of the application, such as the representation of the Pythagorean Theorem, seen as a simplistic and easily comprehensible bias, which has been used in the teaching and learning areas of Geometry. Still, in the application presented by origami, several games are explored such as: Tangram, which helps in the knowledge and spatial development of young students; and the modeling of technological applications that provide for the use of folds, such as the applicability in solar panels foldable using the Miura-Ori method. Finally, the conclusions are presented, aiming to expose the investigative character of this developed research.

Key words: Mathematics, Origami, Geometry.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 Introdução

O origami tem por objetivo dobrar papel de forma artística, sendo sua tradução provida do Japonês: "oru" (dobrar) e "kami" (papel). Esse método de dobradura chegou as mais diversas nações do mundo, sendo objeto lúdico para todas as idades, inclusive sendo muito usado dentro do processo de ensino-aprendizagem (Magalhães et.al, 2012).

De acordo com estudiosos da área, essa arte de fazer pequenas esculturas tem origem junto com o próprio papel que utiliza. Os primeiros registros do surgimento do papel vêm da China do ano 105 d.C. Mas foi a partir do século VII no Japão que a técnica do origami foi legitimada e desenvolvida. Já no século VIII, as dobraduras passaram a fazer parte de cerimônias xintoístas, representando divindades adoradas pelos japoneses (Imenes, 2004).

Tendo em vista sua longa data de utilização como meio de entretenimento artístico, a sua aplicação no meio educacional é dada mais recentemente. Há pouco tempo foi notado que as dobras feitas no origami podem referir com clareza conteúdos geométricos. Assim, no estudo com o uso do origami, são perceptíveis as boas contribuições que podem ser adquiridas no decorrer do tempo, podendo ser usado como uma ferramenta pedagógica e se tornando um instrumento que colabora no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Quando utilizado o origami em favor da educação matemática, torna-se um mecanismo que proporciona experiências práticas aos estudantes, ajudando a desenvolver o pensamento geométrico por meio das suas formas, e de modo lento, auxiliando na construção desde as ideias iniciais até sua conclusão, que são as dedutivas, com base na intuição, organização e visualização espacial.

A aplicação desse método para estudantes tem sugerido a oportunidade de envolvimento com a matemática de modo que haja entendimento a cerca do que está sendo ministrado pelo professor, de forma que consiga perceber a ligação desse material com o conteúdo em estudo (Barreto, 2013).

Desta maneira, o objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo teórico, prático e lúdico das principais características matemáticas do origami, sejam elas relacionadas com a história do origami, com os axiomas de Huzita-Hatori, ou até mesmo com suas aplicações na sala de aula, em jogos, conceitos lúdicos, demonstrações, ou tecnologias do futuro.

Como um objetivo mais específico, o trabalho busca apresentar a relação entre as dobraduras e o processo de ensino-aprendizagem da geometria na sala de aula, e além disso, apresentar aplicações do origami quanto a jogos, utilizando as relações axiomáticas do origami mencionadas.

O trabalho está descrito em quatro capítulos: a introdução; o desenvolvimento da pesquisa no Capítulo 2, em que é apresentados o histórico e os axiomas; as relações entre o origami e a geometria no Capítulo 3, descrevendo os principais jogos e as aplicações lúdicas; e por fim, o Capítulo 4 que traz as principais conclusões do trabalho.

2 Desenvolvimento

2.1 O Origami

O origami é uma arte ancestral do oriente que consiste em dobrar papéis e modelar diversos tipos de figuras sem cortes ou cola, o qual possui funções representativas da natureza como os animais ou figuras abstratas.

Segundo (Imenes, 2004), não há uma data exata do surgimento da arte contemporânea do origami, alguns historiadores acreditam que tenha surgido logo após a maior invenção da época, o papel, e afirmam que a mesma foi introduzida no Japão por volta dos séculos V e VI, sendo uma decorrência natural da invenção do papel. A técnica teve origem no Japão, sendo muito aperfeiçoada, estudada e propagada pelo mundo inteiro. As figuras representadas no origami têm diferentes significados para os japoneses e estudiosos da técnica, como, por exemplo, Tsuru (Cegonha, Figura 1) que simboliza a felicidade, alegria, boa sorte e saúde, já o sapo significa amor e felicidade, entre outros. As primeiras dobraduras foram criadas quando o Estado e a religião eram um só, dessa forma representavam a natureza das cerimônias religiosas.

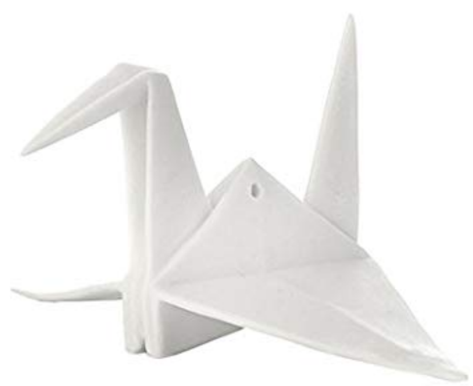

FIGURA 1 – Tsuru (Fonte:amazon.fr)

O origami era conhecido como um passatempo divertido e interessante, e com o passar do tempo se tornou uma grande arte. Hoje ele é bastante divulgado entre crianças, jovens, adultos que continuam as tradições dos séculos passados (Lang, 2017).

Atualmente, o origami tem apresentado uma série de mudanças significativas em sua maneira de se expressar. Sua trajetória histórica que possui mais de quinze séculos de existência, porém, foi nos últimos anos que a expansão do estudo dessa técnica vem apresentando boas expectativas de pesquisas e aplicações.

> *Examinando-se mais de perto, ciência e origami não estão tão separados quanto você pensa, ou mesmo ciência e arte em geral. [...] Termos estéticos como "elegância" estão infiltrando-se na ciência; [...] Muitos cientistas, matemáticos, e tecnólogos são motivados pela ordem, beleza e elegância de suas áreas assim como qualquer pintor, escritor ou escultor. Pegue um cientista bem-sucedido em seu âmago, e você encontrará um artista perto da sua superfície. [...] Estruturas dobradas com base em princípios do origami estão sendo aplicadas em voo espacial, eletrônicos de consumo, saúde e segurança, só para citar apenas algumas das áreas onde origami faz uma aparição inesperada. (LANG, 2017, p. ix, tradução nossa).*

Segundo Nakata e Teixeira (2017), inúmeros grandiosos estudos estão sendo com base na técnica e nas propriedades matemáticas aplicadas no origami usando como matéria propriedades rígidas que estão se desenvolvendo, possuindo aplicações em diversas áreas da tecnologia como, por exemplo, medicina, arquitetura, home center (móveis), em telescópios espaciais pela NASA, painéis solares para maior captação dos raios solares, entre outras novas apropriações das dobras que podem ser de grande valia. A prática do origami está tanto sob a discussão e exploração estética, quanto em aplicações tecnológicas e científicas o que torna difícil e trabalhoso identificar onde uma prática acaba e a outra começa em verdade, muitas vezes elas estão intrínsecas entre si, pois cada técnica do origami apresenta algo relevante.

2.2 Relações Axiomáticas do Origami

De acordo com Maxwell (2014), existem cerca de sete axiomas que envolvem a relação direta entre a geometria e a arte de dobradura. Tais axiomas foram desenvolvidos em 1989 pelo matemático Humiaki Huzita que elaborou estudos acerca do tema, Assim, foram desenvolvidos os seis primeiros axiomas existentes até hoje, que explanam sobre as seis operações básicas capazes de alinhar retas e pontos pré-existentes em uma folha de papel por meio de dobraduras. A seguir, serão explanados os axiomas de Huzita-Hatori juntamente com as imagens que ilustram as dobragens.

- Axioma 1: *Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que os contém. (Figura 2)*

  Consideram-se os pontos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$. Este axioma resume-se a uma dobragem pela reta que passa pelos dois pontos dados inicialmente, ou seja, é equivalente a resolver equações de primeiro grau. De fato, pretende-se encontrar os valores de m e b na equação $y = mx + b$. Sendo $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ou, equivalentemente, $b = y_2 - mx_2$.

- Axioma 2: *Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra capaz de torná-los coincidentes. (Figura 3)*

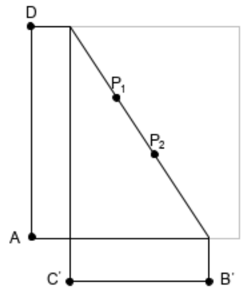

FIGURA 2 – Primeiro Axioma de Huzita

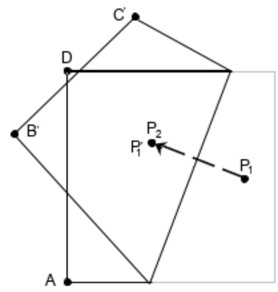

FIGURA 3 – Segundo Axioma de Huzita

Para resolução do axioma considera-se que:

Consideram-se os pontos $P_1 = (x_1,y_1)$ e $P_2 = (x_2,y_2)$. Este axioma refere-se a uma dobragem pela mediatriz do segmento de reta definido pelos dois pontos iniciais, sendo também equivalente a resolver equações do primeiro grau. Para tal é necessário determinar uma reta perpendicular à que é definida pelos dois pontos dados inicialmente e que passa pelo ponto médio do segmento definido pelos mesmos. Assim, uma vez que o referido ponto médio é dado pelas coordenadas $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$, basta realizar uma dobragem pela reta $y = mx+b$, onde, $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ e $b = \frac{y_1+y_2}{2} - m\frac{x_1+x_2}{2}$

- Axioma 3: *Dadas duas retas distintas,* r_1 *e* r_2*,existem no máximo duas dobras capazes de colocar uma reta sobre a outra. Se são paralelas ou o ponto de interseção encontra-se fora do papel, então, a dobra é única. (Figura 4)*

  Para resolução considera-se que:

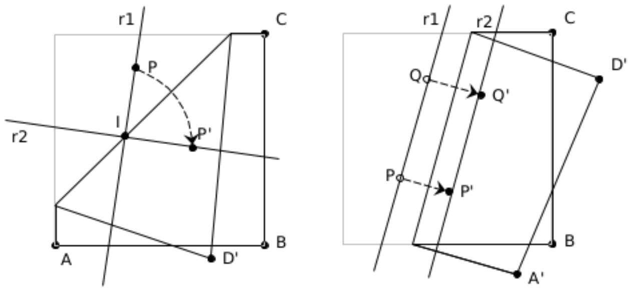

FIGURA 4 – Terceiro Axioma de Huzita

Consideram-se as retas $r_1: \ y = m_1 + b_1$ e $r_2: \ y = m_2 + b_2$. Se r_1 e r_2 forem paralelas, é necessário realizar uma dobragem por uma reta paralela às iniciais e que se encontre à mesma distância de ambas. Analiticamente, é necessário começar por escolher um ponto de uma das retas iniciais. Sem perda de generalidade, seja $P_1 = (x_1,y_1)$, pertencente a reta r_1. Tem-se dois casos a considerar, a saber $m_1 = 0$ ou $m_1 \neq 0$.

Começa-se por ver o que se passa se $m_1 = 0$. Neste caso, as retas iniciais são da forma $r_1: \ y = b_1$ e $r_2: \ y = b_2$, pelo que $P_1 = (x_1,b_1)$. A reta perpendicular a r_1 que passa em P_1 é dada pela equação $x = x_1$, sendo portanto, $P_2 = (x_1,b_2)$ o seu ponto de intersecção com a reta r_2. Resta então realizar a dobragem que torna os pontos P_1 e P_2 coincidentes, tal como é descrito no Axioma 2.

Veja-se agora o que ocorre se $m_1 \neq 0$. Neste caso a reta perpendicular a r_1, é dada pela equação de primeiro grau $y = \frac{-1}{m_1}x + \left(\frac{1}{m_1}x_1 + y_1\right)$. O ponto de intersecção P_2 entre esta última reta e l_2 é a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{-1}{m_1}x + \left(\frac{1}{m_1}x_1 + y_1\right) \\ y = m_2 x + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2 x + b_2 = \frac{-1}{m_1}x + \left(\frac{1}{m_1}x_1 + y_1\right) \\ y = m_2 x + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(m_2 + \frac{1}{m_1}\right)x = \frac{1}{m_1}x_1 + y_1 - b_2 \\ y = m_2 x + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\frac{1}{m_1}x_1 + y_1 - b_2}{m_2 + \frac{1}{m_1}} \\ y = m_2 x + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + y_1 m_1 - b_2 m_1}{m_2 m_1 + 1} \\ y = m_2 \frac{x_1 + y_1 m_1 - b_2 m_1}{m_2 m_1 + 1} + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + y_1 m_1 - b_2 m_1}{m_2 m_1 + 1} \\ y = \frac{x_1 m_2 + y_1 m_1 m_2 - b_2 m_1 m_2 + b_2 m_1 m_2 + b_2}{m_2 m_1 + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x_1+y_1m_1-b_2m_1}{m_2m_1+1} \\ y = \frac{x_1m_2+y_1m_1m_2+b_2}{m_2m_1+1} \end{cases}$$

Ou seja,

$$P_2 = \left(\frac{x_1 + y_1m_1 - b_2m_1}{m_2m_1 + 1}, \frac{x_1m_2 + y_1m_1m_2 + b_2}{m_2m_1 + 1}\right)$$

Resta então realizar a dobragem que torna os pontos P_1 e P_2 coincidentes, tal como é descrito no axioma 2.

Agora suponha que r_1 e r_2 não sejam paralelas. Neste caso, basta fazer a bisseção de um dos ângulos definidos pelas duas retas e dobrar segundo a bissetriz.

Começa-se então por determinar o ponto P_0 de intersecção das duas retas:

$$\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_2x + b_2 = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m_2 - m_1)x = b_1 - b_2 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{b_1-b_2}{m_2-m_1} \\ y = m_2\frac{b_1-b_2}{m_2-m_1} + b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{b_1-b_2}{m_2-m_1} \\ y = \frac{m_2b_1-m_2b_2+m_2b_2-m_1b_2}{m_2-m_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{b_1-b_2}{m_2-m_1} \\ y = \frac{m_2b_1-m_1b_2}{m_2-m_1} \end{cases}$$

Onde

$$P_0 = (x_0,y_0) = \left(\frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1}, \frac{m_2b_1 - m_1b_2}{m_2 - m_1}\right)$$

Note que este procedimento é possível, pois as retas não são paralelas, já que $m_1 \neq m_2$ e, consequentemente, $m_2 - m_1 \neq 0$. Considera-se então uma circunferência não degenerada de centro p_0 e raio arbitrário, diga-se r, dada pela equação $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$. Esta circunferência vai intersecta as retas r_1 e r_2 em quatro pontos distintos (dois pontos em cada uma das retas). Seja $P_{1,1} = (x_{1,1},y_{1,1})$ e $P_{1,2} = (x_{1,2},y_{1,2})$ os pontos resultantes da intersecção da circunferência com a reta r_1, e $P_{2,1} = (x_{2,1},y_{2,1})$ e $P_{2,2} = (x_{2,2},y_{2,2})$ os pontos resultantes de intersecção da circunferência com a reta r_2. Agora, sem perda de generalidade, deve-se determinar os pontos médios M_1 e M_2 dos segmentos de reta $[P_{1,1},P_{2,1}]$ e $[P_{1,2},P_{2,2}]$, respectivamente.

Note-se também o raciocínio que se segue para os segmentos de reta $[P_{1,1},P_{2,2}]$ e $[P_{1,2},P_{2,1}]$.

Tem-se que,

$$M_1 = \left(\frac{x_{1,1}+x_{2,1}}{2},\frac{y_{1,1}+y_{2,1}}{2}\right) \text{ e}$$

$$M_2 = \left(\frac{x_{1,2}+x_{2,2}}{2},\frac{y_{1,2}+y_{2,2}}{2}\right).$$

Resta então realizar a dobragem que passa pelos pontos M_1 e M_2, tal como é descrito no Axioma 1. Note-se que a circunferência utilizada na explicação anterior é apenas auxiliar. Os pontos que foram determinados com o seu auxilio, poderiam também sê-lo através da adição de vetores, com a direção de ambas as retas e com ambos os sentidos, ao ponto de intersecção das mesmas. Deste modo, também neste axioma, apenas estão envolvidas equações de primeiro grau.

Note-se ainda que existam duas formas de efetuar a dobragem para o caso das retas iniciais não serem paralelas (uma para cada par de ângulos opostos) e apenas uma para o caso de retas paralelas.

- Axioma 4: *Dados um ponto P e uma reta r, existe apenas uma dobra perpendicular a r que passa por P. (Figura 5)*

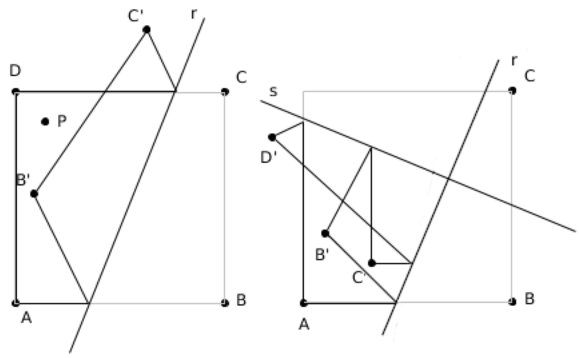

FIGURA 5 – Quarto Axioma de Huzita

Consideram-se o ponto $P = (x, y)$ e a reta $r : .y = mx + b$. Para encontrar a reta por onde deve ser realizada a dobragem, começa-se por considerar uma circunferência de centro P e raio superior à distância de P a r, para que esta intersecte r em dois pontos distintos, F e G. Posteriormente, consideram-se as circunferências de centro em F e G, respectivamente, e raio igual à distância entre estes dois pontos. Resta então realizar a dobragem que passa pelos pontos F e G, tal como é descrito no Axioma 2 para obtermos o pretendido.

- Axioma 5: *Dados dois pontos P_1 e P_2 , e uma reta r, se a distância entre P_1 e P_2 for maior ou igual à distância de P_2 à r, existe pelo menos uma dobra capaz de fazer com que P_1 incida em r de forma que a mesma passe pelo ponto P_2. Se a distância de P_1 a*

P_2 for igual à distância de P_2 a r, então, a dobra é única, caso contrário, existem duas dobras possíveis (Figura 6) .

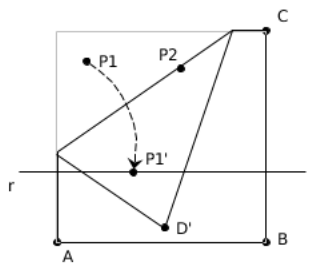

FIGURA 6 – Quinto Axioma de Huzita

Consideram-se os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, a reta $r : .y = mx + b$. Pretende-se neste axioma determinar uma dobragem que coloca P_1 sobre r e que passa por P_2. Deste modo, pretende-se encontrar a intersecção da reta com a circunferência de centro P_2 e raio $\overline{P_1P_2}$.
Calcula-se esse intersecção, designando $\overline{P_1P_2} = L$.

$$\begin{cases} y = mx - b \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = L^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx - b \\ (x - x_2)^2 + (mx + b - y_2)^2 = L^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx - b \\ (1 + m^2)x^2 + (2mb - 2x_2 - 2my_2)x + ({x_2}^2 + b^2 - 2by_2 + y_2^2 - L^2) = 0 \end{cases}$$

Deste modo, podem-se ter zero, uma ou duas soluções para o problema, consoante o valor do discriminante da fórmula resolvente seja inferior, igual ou superior à zero, respectivamente.
Caso a distância de P_1 a P_2 seja inferior à distância de P_2 a r, o discriminante é menor que zero, pelo que não existem soluções e é impossível vetores a dobragem pretendida.
Se a distância de P_1 a P_2 for igual à distância de P_2 a r, o discriminante é zero, pelo existe uma única solução. Supondo agora que a distância de P_1 a P_2 é superior à distância de P_2 a r, ou seja, o discriminante é maior que zero. Neste caso existem dois pontos de intersecção entre a circunferência e a reta r, Q_1 e Q_2. As soluções do problema são então:

- dobragem perpendicular a $[P_1Q_1]$ e que passa no seu ponto médio (fará coincidir os pontos P_1 e Q_1, passando por P_2);
- dobragem perpendicular a $[P_1Q_2]$ e que passa no seu ponto médio (fará coincidir os pontos P_1 e Q_2, passando por P_2).

Em ambos os casos, a dobragem é efetuada pelo método descrito no Axioma 1, utilizando para tal o ponto médio de cada um dos segmentos referidos e o ponto P_2. Nota-se que, na prática, o que é realizado neste axioma é determinar a reta tangente à parábola de foco P_1 e diretriz r, que passa pelo ponto P_2. Provando-se esta afirmação.

Quando é feita uma dobragem por P_2 de forma a P_1 incidir em r, uma parte da reta r vai ficar dobrada noutra direção que não a inicial. Considera-se então a reta perpendicular a r na sua direção de dobragem, que passa por P_1, s. Uma vez que P_1 não pertence a r, vem que a direção de r após a dobragem não é paralela à sua direção inicial. Consequentemente, s não é paralela à reta de dobragem e pode-se determinar o ponto de intersecção entre ambas, denota-se U. Por construção, a distância de U a r é igual à distância de U a P_1 e é o único ponto da dobragem com esta propriedade. Uma vez que uma parábola é, por definição, o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto e de uma reta, prova-se que a reta de dobragem é tangente à parábola de foco P_1 e diretriz r. De referir ainda que este é o primeiro axioma desta lista que necessita efetivamente da resolução de uma equação de segundo grau (para a determinação dos pontos de intersecção da reta inicial com a circunferência).

- Axioma 6: *Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 e duas retas não paralelas r_1 e r_2 (se paralelas, a distância entre as mesmas não deve ser superior à distância entre os pontos) existe uma dobra que faz, simultaneamente, com que P_1 incida em r_1 e P_2 em r_2 (Figura 7)* .

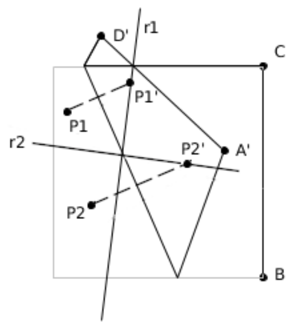

FIGURA 7 – Sexto Axioma de Huzita

Consideram-se os pontos P_1 e P_2 e as retas r_1 e r_2. Pretende-se determinar uma dobragem que faça incidir P_1 em r_1 e P_2 em r_2. Uma vez que se pretende fazer incidir P_1 em r_1, a dobragem que se pretende fazer será tangente à parábola de foco P_1 e diretriz r_1, como foi visto na explicação do axioma 5. Por outro lado, uma vez que se pretende fazer incidir P_2 em r_2, a dobragem que se pretende fazer será tangente à parábola de foco P_2 e diretriz r_2. Deste modo, este axioma consiste em encontrar uma reta simultaneamente tangente a duas parábolas distintas.

Veja-se agora que este procedimento é equivalente a resolver uma equação de terceiro grau. Para tal, considera-se, sem perda de generalização, que $r_1 : y = -1$ e $P_1 = (0,1)$. Designa-se por $P_1^{'} = (t, -1)$ o ponto em que P_1 incide na reta r_1 através da dobragem pretendida.

A reta criada pelo vinco é a mediatriz do segmento de reta $\left[P_1P_1^{'}\right]$ uma vez que, por construção, todos os seus pontos são equidistantes de P_1 e de $P_1^{'}$, já que o vinco e o segmento de reta são perpendiculares. Além disso, o ponto médio de $\left[P_1P_1^{'}\right]$ tem as coordenadas $\left(\frac{0+t}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \left(\frac{t}{2}, 0\right)$. Deste modo, a equação realizada com a dobradura é dada por:

$$y = \frac{-1}{\frac{-1-1}{t-0}}\left(x - \frac{t}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4}$$

Por definição, tem-se que o ponto médio de $\left[P_2P_2^{'}\right]$ pertence a essa reta, onde $P_2 = (a,b)$ e $P_2^{'} = (x,y)$ é o ponto em que P_2 incide na reta r_2 através da dobragem pretendida. Designa-se este ponto $M = \left(\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2}\right)$. Substituindo na equação acima:

$$\frac{y+b}{2} = \frac{t}{2}\left(\frac{x+a}{2}\right) - \frac{t^2}{4}$$

Além disso, veja-se que essa dobradura é tangente a duas parábolas, os declives de $\left[P_1P_1^{'}\right]$ e $\left[P_2P_2^{'}\right]$ são iguais, ou seja,

$$\frac{-2}{t} = \frac{y-b}{x-a}$$

Assim, substituindo na equação anterior:

$$\frac{y+b}{2} = \left(-\frac{x-a}{y-b}\right)\left(\frac{x+a}{2}\right) - \frac{(x-a)^2}{(y-b)^2} \Leftrightarrow$$
$$(y+b)(y-b)^2 = -(x^2-a^2)(y-b) - 2(x-a)^2$$

Que é uma equação cúbica (sendo y^3 e x^2y os termos de terceiro grau). Refere-se que pode ser impossível resolver este problema (se as duas retas iniciais forem paralelas e a distância entre elas for superior à distância entre os dois pontos) ou pode haver uma única solução.

- Axioma 7: *Dadas duas retas r_1 e r_2 não paralelas e um ponto P não pertencente a r_1, existe uma dobragem que faz P incidir em r_1 de forma que a dobradura gerada pela dobra seja perpendicular a r_2 (Figura 8)* .

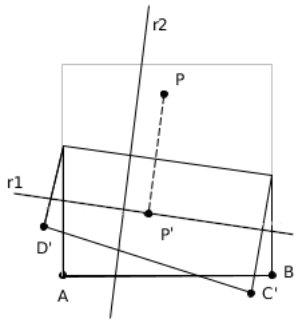

FIGURA 8 – Sétimo Axioma de Huzita

Considera-se o ponto $P = (x_0{,}y_0)$ e as retas $r_1 : y = m_1x + b_1$ e $r_2 : y = m_2x + b_2$. Pretende-se determinar uma dobragem que faça incidir P em r_1 e que seja perpendicular a r_2, o que é equivalente a resolver equações de primeiro grau. Começa a notar que este problema apenas tem solução se as retas iniciais não forem paralelas. Considera-se a reta (l) que é paralela a r_2, que passa por P:

$$y = m_2x + (y_0 - m_2x_0)$$

As retas r_1 e l intersectam-se quando:

$$\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + (y_0 - m_2x_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ m_1x + b_1 = m_2x + (y_0 - m_2x_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ x = \frac{y_0 - m_2x_0 - b_1}{m_1 - m_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = m_1\left(\frac{y_0 - m_2x_0 - b_1}{m_1 - m_2}\right) + b_1 \\ x = \frac{y_0 - m_2x_0 - b_1}{m_1 - m_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{m_1y_0 - m_1m_2x_0 - m_2b_1}{m_1 - m_2} \\ x = \frac{y_0 - m_2x_0 - b_1}{m_1 - m_2} \end{cases}$$

Ou seja, intersectam-se no ponto $P' = \left(\frac{y_0 - m_2x_0 - b_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_0 - m_1m_2x_0 - m_2b_1}{m_1 - m_2}\right)$. Resta então realizar a dobragem que torna os pontos P e P' coincidentes, tal como é descrito no Axioma 2, para obtermos o pretendido. Nota-se que este procedimento resolve o problema, pois nessa construção é feita a dobragem por uma reta perpendicular a $[PP']$ e, consequentemente, perpendicular a r_2.

2.3 Comentários

Neste Capítulo foram apresentadas as principais curiosidades sobre o origami e sua origem, além das relações axiomáticas, a qual é uma das principais contribuições deste trabalho, descrevendo as explicações e demonstrações de cada uma das dobraduras relacionadas aos sete axiomas de Huzita-Hatori.

Este Capítulo também ilustra um breve estudo bibliográfico, contemplando a história e a parte teórica do tema. Outros estudos, que contemplam a revisão bibliográfica do trabalho, são apresentados no capítulo seguinte, destacando a utilização do origami na sala de aula.

3 Relação entre Origami e Geometria

A relação entre a geometria e a arte do origami é grande, pois se observa que com o caminho inverso da dobradura, é possível notar interessantes relações matemáticas das marcas deixadas no papel.

A utilização de dobradura no ensino da geometria além de ser uma forma prática de aprender, é atraente e motivadora para se ensinar. O pensamento geométrico é estimulado, gerando uma visão espacial geométrica, propiciando uma experiência didática, lúdica e assertiva, pois construir figuras com o auxílio do Origami pode tornar a matemática mais leve e de mais fácil compreensão (Santos et. al, 2013).

> No origami, enquanto as mãos se movimentam ativam os dois lados do cérebro. A zona do tato, motora e visual está em atividade e os sentimentos são de satisfação, orgulho e alegria ao completar uma dobradura. Outros benefícios do origami são o desenvolvimento da inteligência espacial, atenção, paciência, memória e imaginação. (Ribeiro, 2010).

Pesquisas apontam que anos atrás apenas os japoneses praticavam origami com frequência, não sendo comum pessoas de outros países praticar em uma maior frequência. Observam-se que origami não é apenas uma arte e sim uma técnica que tem se estendido para sala de aula, onde além de auxiliar nos estudos de geometria, pode também ser utilizado para desenvolver outras atividades como nos estudos de frações, aritmética, álgebra e funções. As demais disciplinas também podem receber a contribuição do origami para o processo de ensino-aprendizagem, pois ele apresenta formas que podem facilmente atender aos objetivos esperados pelo professor (Nascimento et. al, 2012).

É possível obter diversas formas geométricas com o uso do origami, pode-se citar, por exemplo, Polígonos Regulares que são linhas fechadas formadas apenas por segmentos de reta que não se cruzam e que estão no mesmo plano. Em outras palavras, um polígono é uma figura geométrica limitada por lados. Os polígonos são chamados regulares quando são convexos, possuem todos os lados com a mesma medida e todos os ângulos internos congruentes conforme a Figura 9 (Schotten, 2005).

3.1 Origami em Sala de Aula

O trabalho com origami é um recurso útil para auxiliar o professor nos conteúdos de geometria a serem abordados em sala de aula, como fonte de visualização e desenvolvimento de noção espacial de um objeto, para o aprimoramento de aspectos como a concentração, persistência, idealização, atenção, autoconfiança, coordenação motora e, sobretudo, a criatividade, sendo fonte para um trabalho interdisciplinar bastante interessante. Esta arte milenar japonesa

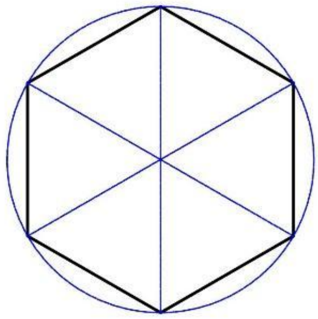

FIGURA 9 – Polígono Regular (Fonte: O autor)

oferece recursos para auxiliar o desenvolvimento cognitivo motor de todo aquele que dela se utiliza, pois permite um amplo processo de criação (Lima, 2013).

Com o uso da arte milenar do origami é possível desenvolver um planejamento de aulas onde seja demonstrando, mesmo que brevemente, elementos fundamentais da confecção e produção de origamis, começando com a concepção de formação geométrica e sua utilização, partindo de figuras simples como a do barquinho, passando por elementos um pouco mais elaborados, desde o cisne até sólidos geométricos. Com objetivo principal de aproximar os alunos das formas geométricas e também das possibilidades que a dobradura de papel apresenta.

Para tal criação, seria necessário o auxílio de ferramentas tais como régua, tesoura e papel em formato de quadrado. A partir destes utensílios, iniciar as atividades demonstrando as várias possibilidades de dobras alinhando com a confecção de novas formas geométricas, tais como triângulos, retângulos, losangos, quadrados e assim sucessivamente.

3.2 Jogos Lógicos com a Utilização do Origami

Segundo Brougere, (1998) jogo é o adjetivo técnico científico que denomina "atividade lúdica", essa intitulação diz respeito principalmente a um objetivo pessoal que cada um pode conceber nas devidas circunstâncias, que um jogo pode proporcionar. A palavra lúdica é originária de ludo, o qual tem base latim, que em outras palavras, significa jogo, divertimento e passatempo (Cruvinel, 2016).

Em geral os jogos configuram aspectos organizacionais e espaços ou dinâmicas em que os jogadores atuam colocando em prática uma série de habilidades e conhecimentos, tanto cognitivas como técnicos e espaciais os quais adquiriram durante as repetições. As regras do jogo delimitam e regulam as ações que ocorrem dentro do contexto lúdico, sendo que todos os elementos relacionados a esse recurso simulam aspectos presentes no dia a dia, possibilitando transcendências entre o que foi vivido por meio do jogo e como é possível aplicar essas aprendizagens em outras situações, isso é notável quanto se apresenta os aspectos do origami, os quais têm como base conceitos disciplinares e que agregam no sentido de desenvolvimento dos estudantes durante o divertimento relacionado aos jogos.

De acordo com Schmidt, (1969), os jogos relacionados com atividades que auxiliam no desenvolvimento da geometria, como é o caso do origami, são entretenimentos úteis, pois são de grande auxílio para a aceleração da aprendizagem. Ainda segundo o autor, pesquisas têm demonstrado que durante a fase de aprendizado, as crianças que satisfazem plenamente sua necessidade de brincar aprendem mais depressa e sua assimilação é mais duradoura.

3.2.1 Pickomino

Pickomino é um jogo simples, porém, com uma grande capacidade de prender a atenção e ensinar alguns conceitos, embora sua simplicidade esteja apenas nas regras.

São elaboradas peças utilizando folhas quadradas recortadas de revista, sendo utilizada uma folha para cada módulo, com resultado final de um prisma de base retangular conforme a Figura 10.

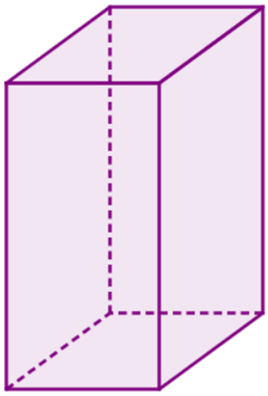

FIGURA 10 – Paralelepípedo

Já os dados, utilizam-se seis folhas cujo módulo é feito com apenas três dobras simples cada folha. Para a colocação dos números e círculos, são colocados sobre a peça retangular, papéis coloridos e escreve-se com caneta.

O jogo é composto por 8 dados e 16 peças retangulares. Os dados devêm conter a numeração de 1 a 5 com a sexta face sendo uma estrela (conta como se fosse número 5), já as peças retangulares são divididas em quatro conjuntos de quatro:

1. Peças numeradas de 21 a 24, com uma bolinha laranja;
2. Peças numeradas de 25 a 28, com duas bolinhas verdes;
3. Peças numeradas de 29 a 32, com três bolinhas vermelhas;
4. Peças numeradas de 33 a 36, com quatro bolinhas azuis.

- Como Jogar

O primeiro jogador deve jogar os 8 dados, e com eles fazer conjuntos de números de valores iguais, escolhendo apenas um conjunto por vez, repetindo o processo até acabar sua rodada. No final de sua rodada deverá somar a quantidade de números de faces nos dados e com ela pegar uma face retangular.

FIGURA 11 – Jogo Pickomino (Fonte: brjoga.wordpress.com)

- **Observação:** Todos os jogadores quando terminarem sua jogada devém ter no mínimo uma estrela em seu conjunto, ou perderá sua vez.
- **Observação 2:** Assim que o jogador escolher um conjunto de Dados, não poderá pegar esta face novamente na rodada.

O objetivo é pegar o maior número de peças retangulares, quando não houver mais peças pra pegar, o jogo termina. Os jogadores somam as bolinhas (não os números) das peças coletadas e aquele que conseguiu mais é o vencedor.

3.2.2 Exemplo de aplicação do jogo Pickomino

A aplicação do jogo na sala de aula se deve quando for lecionado o conteúdo sobre sólidos geométricos, geometria espacial, área e volume de sólidos pois o jogo auxilia com base no origami, o desenvolvimento de habilidades e noção espacial para criação de polígonos regulares como quadrados, retângulos além de bases dos fundamentos da matemática, como adição, subtração, multiplicação e divisão.

3.2.3 Tangram

O Tangram é um jogo popularmente conhecido dentro de escolas, pela sua simplicidade de montagem e desenvolvimento que pode atingir dentro do ensino-aprendizagem. O jogo é de origem chinesa, em vários lugares do mundo é jogado por pessoas de diversas faixas etárias. Acredita-se que o jogo surgiu na China durante a dinastia Song (960 – 1279 d.C.) e era um dos mais famosos "testes" utilizados para estudar a inteligência humana, durante a China antiga. O objetivo do Tangram consiste em montar um quebra-cabeça, onde peças deverão ser posicionadas, formando desenhos de acordo com o formato ou imagem que o criador desejar.

As peças do Tangram consistem em três triângulos menores, dois triângulos grandes, um paralelogramo e um quadrado, como ilustra a Figura 12. O seu objetivo é construir figuras sugeridas já molduradas utilizando-se todas as sete peças.

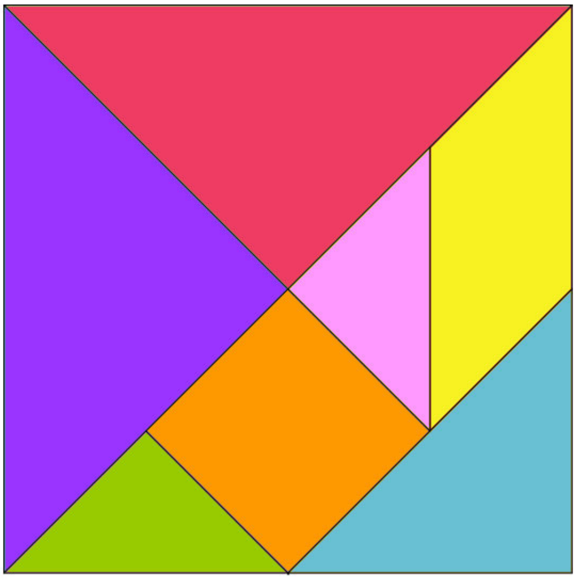

FIGURA 12 – Tangram (Fonte: www.paraeducar.com.br)

- Como Jogar

O segredo do Tangram é chegar ao objetivo utilizando todas as peças e muitos problemas são realmente complicados. Com o "Origami Modular", é possível, partindo também de Folhas quadradas, chegar a todas as peças do Tangram e com isso ter o Jogo disponível à mesa de forma simples, embora existam algumas peças do Tangram que são um pouco complicadas para se dobrar.

3.2.4 Exemplo de aplicação do Tangram

Na sala de aula o jogo pode ser aplicado nos conteúdos que abordam área de figuras geométricas, retas, segmentos de retas e auxilia em alguns aspectos importantes no desenvolvimento pessoal, como por exemplo, auxiliar a resolução de problemas pois, para montar a figura é preciso planejar onde cada peça será alocada, além de estimular a criatividade, pois as peças permitem construir várias formas, sendo que algumas dessas imagens podem ser montadas de maneiras distintas, o que auxilia na criatividade do jogador. A atividade ajuda a melhorar a noção espacial, pois o Tangram exige que as peças sejam posicionadas e rotacionadas, levando o cérebro a trabalhar as regiões responsáveis pelo reconhecimento e posicionamento de formas geométricas conforme mostrado na Figura 13

FIGURA 13 – Tangram – Coelho (Fonte: leiturinha.com.br)

3.2.5 Triminó

É uma espécie de jogo de dominó, porém são utilizados triângulos, Figura 14, de diversos tamanhos, formados a partir de dobraduras do origami, e ao invés de números são utilizados cores.

FIGURA 14 – Triminó (Fonte: lema.ufsc.br)

- Como Jogar

  O objetivo do jogo é ficar sem nenhuma peça na mão, sendo assim é trabalhado durante o jogo alguns aspectos como, estratégia, e noção espacial para encaixe dos triângulos de acordo com a cor e tamanho.

3.2.6 Exemplo de aplicação do Triminó

A utilização e aplicabilidade na sala de aula se devem aos conteúdos de geometria na criação de triângulos isósceles e equiláteros. Auxiliando o aluno no entendimento de geometria espacial. A Figura 15 apresenta outra versão do jogo.

FIGURA 15 – Triminó (Fonte: brjoga.wordpress.com)

3.3 Aplicações Lúdicas em Conceitos Matemáticos

Quando se menciona Pitágoras, é necessário retroceder à linha do tempo, e abordar a história principalmente da Matemática e Geometria no qual está inserido o Teorema de Pitágoras. De acordo com os estudiosos Baroni et.al, (1999), a história é uma esplêndida e vasta área de conhecimento a qual não pode ser deixada de lado:

> [...] apesar da História da Matemática estar ganhando destaque no meio acadêmico- educacional e se destacando como instrumento para propostas didático-pedagógicas, bem como a Modelagem Matemática, a Etnomatemática, a Informática, entre outras, não se deve esquecer que antes de tudo a História da Matemática é uma área do conhecimento matemático, um campo de investigação e, portanto, não pode ser analisado simplesmente como um instrumento metodológico (Baroni et.al, 1999)

Pitágoras é considerado até hoje o pai da matemática e da música, além de ser considerado uma das grandes mentes filosofais da época, como dito por Bertrand Russel, que declarou que "Pitágoras é um dos homens mais interessantes e desconcertantes da história" (Russel, 2016). Por volta de 500 a.C., Pitágoras foi acusado de apoiar a aristocracia, contrária ao governo e após se refugiar em Metaponto, três anos depois faleceu. Mas durante mais de vinte séculos seus ensinamentos continuam a serem transmitidos em escolas e universidades. De acordo com Stratern, (1998):

> O primeiro matemático, o primeiro filósofo e o primeiro a praticar a metempsicose. E isso, não por ter sido a primeira pessoa a usar números, a primeira a buscar uma explicação racional para o mundo ou a primeira a acreditar que numa vida anterior sua alma havia habitado uma planta, um faraó ou algo do gênero. Foi ele quem inventou, ou usou pela primeira vez as palavras; matemático, filósofo e metempsicose nos sentidos hoje aceitos e logo aplicou a si mesmo. Também inventou a palavra cosmos, que aplicava ao mundo. Em grego, Kosmo significa ordem e Pitágoras usou o termo para designar o mundo por causa de sua perfeita harmonia e ordenação. (Stratern, 1998)

Sendo assim, apesar das grandes dificuldades da época, a engenhosidade de Pitágoras sempre esteve presente e deixou uma das mais importantes ferramentas o qual é o teorema mais famoso da matemática conforme no enunciado abaixo.

Seja em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos. Se c é a medida da hipotenusa e se a e b são as medidas dos catetos, o enunciado do Teorema de Pitágoras nos afirma que

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Outro exemplo de que os jogos lúdicos auxiliam no aprendizado, seriam com a semelhança de triângulos.

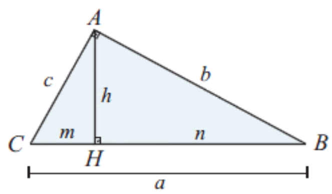

FIGURA 16 – Triângulo Retângulo (Fonte: Lima et al. 2006)

A partir de um triângulo ABC, retângulo em A, traça-se a altura AH e verifica-se que os triângulos AHB e AHC são semelhantes ao triângulo ABC.

Esta demonstração é a mais usual nas escolas, pois construir o Teorema de Pitágoras, como também encontrar importantes relações métricas no triângulo retângulo (Lima et al., 2006).

3.3.1 Demonstração do Teorema de Pitágoras com Origami

Considere que a folha de papel seja um quadrado ABCD e os seguintes passos, como mostra a Figura 17:

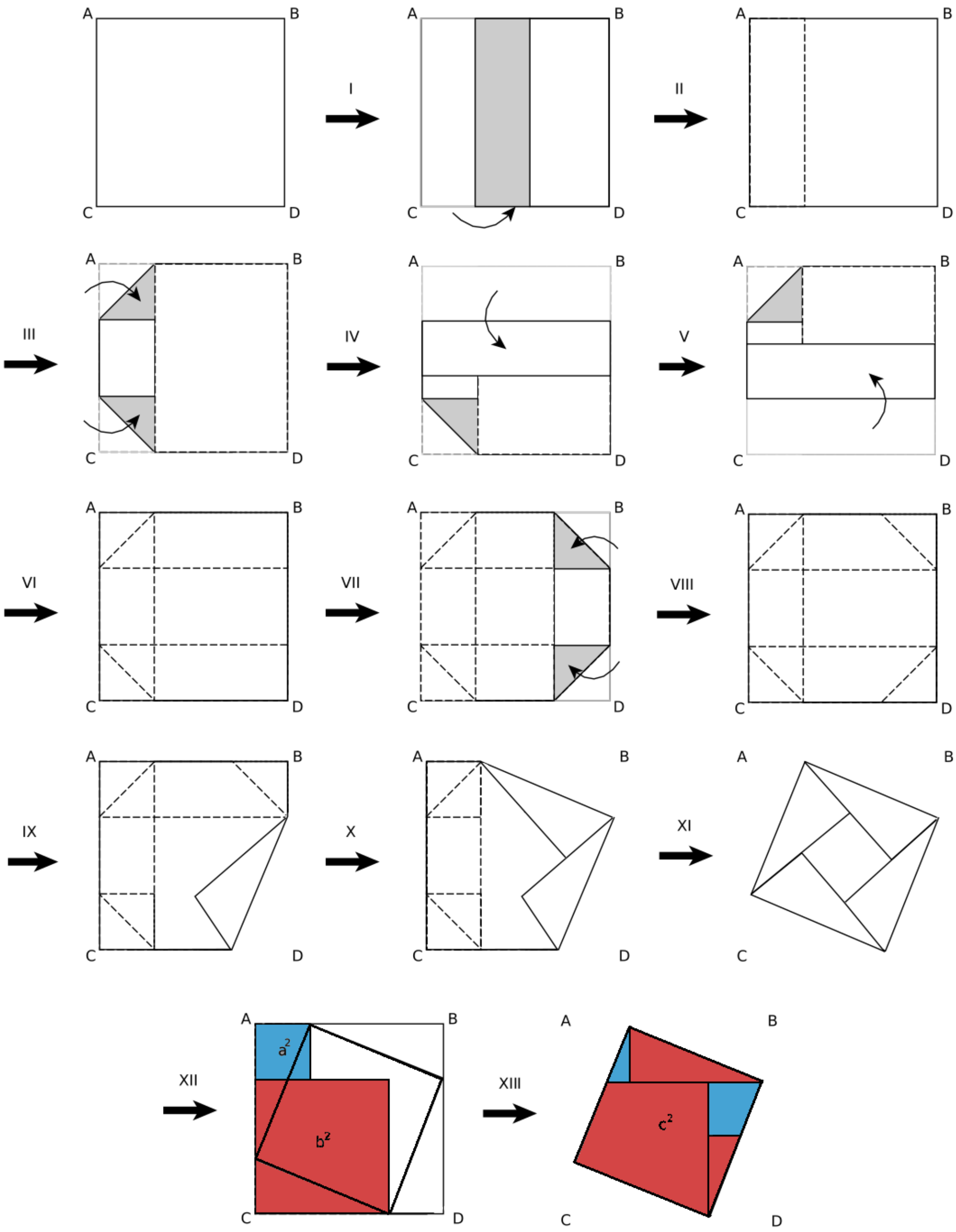

FIGURA 17 – Demonstração Teorema de Pitágoras

I e II – Faça uma dobradura paralela a um dos lados e desdobre-a;

II – III Pegue A e C e dobre até a linha indicada;

IV, V e VI – Siga os passos indicados;

VII e VIII – Pegue B e D e dobre até a linha indicada e desdobre-a;

IX, X e XI – Faça as seguintes dobraduras e desdobre-a;

XII – Hachure as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos;

XIII – Utilizando uma tesoura, recorte os dois triângulos hachurados. E coloque nas áreas não hachuradas.

Como resultado dos passos anteriores, é possível observar que as áreas hachuradas são nominadas $a^2 + b^2$. É possível observar também, que conforme indicado, o quadrado formado possui lado igual a c e área igual a c^2, demonstrando o teorema.

3.4 Origami Moldando as Tecnologias do Futuro

Enviar satélites para o espaço não é uma tarefa fácil segundo pesquisadores da NASA, mesmo 50 anos depois do lançamento da Apollo 11 as dificuldades para se trabalhar com as variáveis como tamanho, peso e custo ainda são elementos de grande valia, e não devem ser descartados. E isso tudo se deve a necessidade e vontade de transmitir a energia de painéis solares no espaço para a Terra ou para estações e veículos espaciais (França, 2016).

Com base nas dificuldades explanadas, estudiosos junto à pesquisadores da NASA esboçaram uma possível solução para resolução de problemas relacionados a aerodinâmica que sempre dificultou o envio dos grandes discos planos coletores de luz para fora do planeta a solução é muito antiga e vem de forma desconfiada. A arte oriental dos origamis (França, 2016).

O engenheiro Brian Trease, do Laboratório de Propulsão a Jato da instituição, passou dois anos trabalhando no desenvolvimento de um enorme painel de quase 25 metros de diâmetro que pode ser dobrado assim como as dobraduras orientais do origami (França, 2016).

Quando compactada lançamento com o objetivo de chegar ao espaço, a estrutura reduziria para entorno de 2,7 metros e diâmetro, a qual apresenta dobradura do satélite de acordo com a dobradura de Miura-Ori, vide Figura 18.

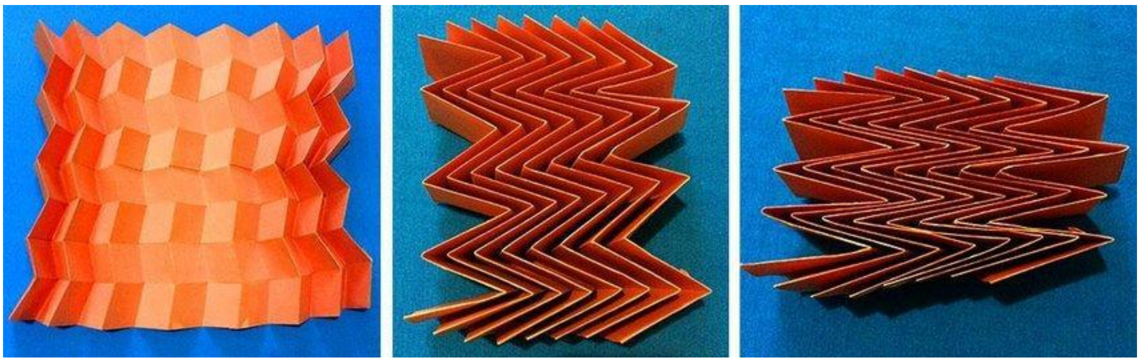

FIGURA 18 – Origami Miura-Ori (Fonte: researchgate.net)

De acordo com Oliveira, (2004), o origami, e suas sequências de dobras, estão sendo cada vez mais estudados na engenharia computacional, criando uma área de pesquisa conhecida como computacional do origami o qual é a intersecção entre a ciência da computação e a matemática do origami com ênfase principalmente em estrutura como Miura-ori, e desenvolve algoritmos que resolvam problemas relacionados à dobragem de papeis e que pode ser utilizado na ciência para o desenvolvimento de painéis solares, por exemplo (Silva, 2019).

Portanto, aplicando princípios de origami em painéis solares rígidos de silício – um material consideravelmente mais grosso do que o papel usado para a arte tradicional japonesa – Um projeto de a matriz solar desdobraria a quase 10 vezes seu tamanho armazenado (Lang, 2017).

Sendo assim, o potencial do Origami para ajudar na pesquisa espacial é vasto, devido à sua capacidade de dobrar para armazenamento compacto e, em seguida, expandir após a implantação (Moraes, 2018).

3.5 Comentários

Este Capítulo discutiu as relações entre o origami e a geometria, ressaltando a utilização das dobraduras dentro da sala de aula, relacionada diretamente com o processo de ensino-aprendizagem.

Foram destacados três principais jogos, que utilizam o origami, realizados dentro do ensino, tal como o Tangram, que é uma ferramenta importantíssima na construção do conhecimento.

Além disso, foi apresentada uma demonstração do Teorema de Pitágoras utilizando dobraduras. Neste cenário, fica visível a aplicação do origami, tanto no ensino fundamental, como médio e até superior, como também mostra a última Seção, que ilustra a aplicação do origami em pesquisas de alto nível.

4 Conclusões

Considerando que o origami e a matemática são ciências que existem há mais de dois mil anos, ambas estão muito ligadas e correlacionadas no âmbito acadêmico teórico e prático.

Ademais, com o decorrer do projeto, foi possível observar as grandes interações matemáticas e angulares que o origami e a matemática apresentaram, sendo notável nos axiomas de Huzira-Hatori correlações geométricas das duas artes moldando novos conceitos e auxiliando na simplicidade do processo de ensino-aprendizagem.

A interação também ocorreu dentro de jogos ilustrados, os quais buscaram alinhar os dois objetos de estudo, sendo apresentados de forma mais dinâmica, por meio de atividades lúdicas, tais como Tangram, Triminó e o Pickomino. Além disso, muitas relações puderam ser demonstradas, como pôde ser comprovado no caso do Teorema de Pitágoras, que através da ilustração dos origamis, foi exposto de forma menos abstrata.

Contudo, também foram exploradas pesquisas que apresentaram estudos realmente complexos, como o desenvolvimento de um enorme painel solar, o qual foi dobrado usando técnicas orientais do origami, diminuído em até 90% seu tamanho original, possibilitando a alocação dentro uma estrutura espacial. Pesquisas deste nível explicam o novo universo de estudo baseado na técnica de dobradura do origami, elevando a outro patamar noções e métodos para a arte da dobradura aplicada à ciência.

Sendo assim, é imprescindível que o origami é uma ferramenta pedagógica versátil e eficaz, no processo de ensino aprendizagem em sala de aula.

REFERÊNCIAS

AABOÉ Asger. **Episódios da Historia Antiga da Matematica.** 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

BARONI, Rosa Lúcia Sverzut; NOBRE, Sérgio. **A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática.** Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, p. 129-136, 1999.

BARRETO, Carlos A. **A Geometria do Origami como ferramenta para o ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica.** Universidade Federal de Sergipe, 2013.

BROUGERE, Gilles. **Jogo e Educação.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

CAVACAMI, Eduardo; FURUYA, Yolanda Kioko Saito. **Explorando Geometria com Origami.** Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos, 2009.

CRUVINEL, Bruna de Paula. **O jogo e a formação de sujeitos protagonistas na educação infantil: uma proposta coletiva de trabalho.** 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016.

FRANÇA, Emanuella Martins de. **Origami euclidiano.** Tese de Mestrado. Universidade federal de Pernambuco, 2016.

GUASCO, Eduardo Rodrigues da Cunha. **OS SETE AXIOMAS DE HUZITA-HATORI USADOS NA CONSTRUÇÃO DE ORIGAMIS.** Anais do Encontro de Educação Matemática-UEG/UnUGoiás, v. 1, n. 11, p. 10, 2013.

IMENES, Luiz Marcio. **Geometria das dobraduras, coleção: Vivendo a Matemática.** São Paulo: Scipione, 2004.

KANBAR, Maurice S. **Tangram game assembly.** U.S. Patent n. 4,298,200, 3 nov. 1981.

LANG, Roberto. **Origami no espaço.** Ted Talks, 2017.

LEAL, Rodrigo A.; Nunes, Rondineli A.; Sousa, Wildson P. **O Teorema de Pitágoras e suas demonstrações em sala de aula.** Amapá: UNIFAP, 2015.

LEROY, Luciana. **Aprendendo Geometria com Origami.** UFMG, Belo Horizonte, 2010.

LIMA, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C. **Temas e Problemas Elementares.** Coleção do Professor de Matemática. Editora SBM, 2006.

LIMA, S. M. Z. D. **Origami: estratégia para tornar as aulas de educação artística mais interessante.** MONOGRAFIA EDUCAÇÃO: MÉTODOS E TÉCNICAS DE ENSINO. Medianeira, PR. (2013).

LIMA, Joelma T. **Origami - Além da Arte de Dobrar Papel.** Os desafios da Escola Pública Paranaense na perspectiva do professor PDE, Paraná, vol. 2, 2014.

Magalhães, A., Batista, D., De Almeida, N. **A geometria através da arte do origami: aprendendo na ponta dos dedos**. Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), Actas del 2o. Congreso Uruguayo de Educación Matemática (pp. 187-193). Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, 2012.

MONTEIRO, Liliana Cristina. **Origami: História de uma Geometria Axíomática**. Departamento de Matemática – Universidade de Lisboa, 2008.

MORAES, Daniel Seda Pereira de. **Origami e robótica: do plano ao tridimensional.** Dissertação de mestrado. Unesp. 2018.

NASCIMENTO, Adriana V.; Matumoto, Luiza T. **Trabalhando a Geometria por meio do Origami.** O professor PDE e os desafios da escola Pública Paranaense, Paraná, vol. 1, 2012.

OLIVEIRA, Fátima Ferreira. **Origami: Matemática e Sentimento**. 2004

PARANÁ, GOVERNO. DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **Diretrizes curriculares da educação básica: Matemática.** Secretária de Estado da Educação, Curitiba, 2008.

RIBEIRO, R. **Blog: Origami: Arte e Aprendizagem. Origami e seus benefícios**; disponível em:http://denifazendocomarte.blogspot.com/2010/11/origami-e-seus-beneficios.html Acesso em: 22/07/2020.

RUSSEL, Bertrand. **História da filosofia ocidental-Livro 1**. Nova Fronteira, 2016.

SANTOS, A. G. D., SILVA, M. R. D. O., SANTOS, V. D. G. D. **A utilização do Origami como material didático para o ensino de Geometria Espacial no Ensino Fundamental.** Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013.

SCHMIDT, Maria Junqueira. **Educar pela recreação.** Rio de Janeiro: Agir, 1969.

SCHOTTEN, Morgana. **Polígonos: um estudo didático.** (2005).

SILVA, José Eduardo Corrêa Santana. **Desenvolvimento de crash box do tipo origami através de metamodelos**. Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo. 2019

SHENG, Lee Yun; PONCE, Vanessa Cristina; FENG, Lee Yun; PIGIANI, André Lopes. **Utilização da arte do origami no ensino de geometria.** Disponível em: < www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/c3.pdf >. Acesso em 22/07/2020.

STRATHERN, Paul. **Pitágoras e seu Teorema em 90 Minutos.** Zahar, 1998.

SUZUKI, Soraya S.; Marques, Rafaella C.; Parra, Danilo. **A Geometria do Origami.** Unicamp, Novembro, 2006.

TEIXEIRA, Samanta A.; NAKATA, Milton K.; LANDIM, Paula C. **A prática da dobra: Como o paradigma do origami intermedia a busca pelo conhecimento, inovação e design contemporâneo.** Londrina, 2017.

TEIXEIRA, Samanta A.; Nakata, Milton K. **A evolução artística e científica do origami: Um estudo teórico e prático sobre a prática e técnicas das dobraduras.** Palíndromo, v.9, n.18, p.142-163, maio, 2017.

TRIDAPALLI, Marília P. **Sugestões de práticas de ensino de geometria utilizando origami modular.** USP – São Carlos, 2007.