WALTER JAIR PERACETA

MODELO DE CRESCIMENTO ECONÔMICO DE SOLOW E PROGRAMAÇÃO LINEAR

Trabalho de conclusão de curso apresentado à disciplina de Monografia I do Curso de Graduação em Ciências Econômicas do Setor de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Professor Doutor Armando Vaz Sampaio

CURITIBA

2007

TERMO DE APROVAÇÃO

WALTER JAIR PERACETA

MODELO DE CRESCIMENTO ECONÔMICO DE SOLOW E
PROGRAMAÇÃO LINEAR

Monografia aprovada como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas do Setor de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Armando Vaz Sampaio

Orientador: Prof. Dr. Armando Vaz Sampaio
Setor de Ciência Sociais Aplicadas, UFPR

Prof. Dr. José Gabriel Porcile Meirelles
Setor de Ciência Sociais Aplicadas, UFPR

Maurício Bittencourt

Prof. Dr. Maurício Vaz Lobo Bittencourt
Setor de Ciência Sociais Aplicadas, UFPR

Curitiba, 28 de novembro de 2007

SUMÁRIO

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

RESUMO

O tema proposto para este trabalho, Modelo de Crescimento Econômico de Robert Solow e Programação Linear, tem como objetivo demonstrar, através do estudo das teorias econômicas associadas à utilização do computador, as possibilidades de tornar os modelos econômicos mais dinâmicos sob o aspecto de suas demonstrações, e por análises que podem ser feitas alterando e testando variáveis e parâmetros, bem como, através do estudo da programação linear, buscar soluções de maximização ou minimizações de acordo com o problema proposto. A elaboração de modelos com base nas teorias de crescimento econômico consiste em reproduzir os modelos em computador e criar economias hipotéticas com o auxílio do computador no sentido de sugerir e debater soluções e suposições encontradas, mensurando e analisando valores do produto, investimentos, capital, etc. A Teoria de Crescimento Econômico de Solow foi escolhida como base de estudo neste trabalho, por ser um modelo que pode ser expresso de forma dinâmica e simples, utilizando para isso recursos de informática de fácil acesso como planilhas eletrônicas e gráficos do microsoft excel, além da programação linear.

1. INTRODUÇÃO

A Teoria do Crescimento Econômico vem destacando-se ao longo do tempo pela importância do estudo do comportamento e sensibilidade das variáveis que envolvem o processo de obtenção do produto final em uma economia. Para detalhar este processo, inúmeras técnicas são aplicadas na descrição dos impactos na economia como um todo. Com base em conceitos de crescimento econômico e estudos a partir do Modelo de Crescimento elaborado por Harrod-Domar e Robert Solow , é possível analisar esses modelos a partir das Técnicas de Programação Linear. O consumo em um período de tempo significa mais utilidade neste mesmo período, mas menos investimento, menos estoque de capital e menos produção em períodos posteriores de tempo (trad. de: KENDRICK, David A.; MERCADO, P. Ruben; ANNAN, Hans M., 2005).

Assim, são elementos fundamentais do modelo de crescimento econômico, a função de produção com capital que é usado para produzir a relação de acumulação, com investimento que produz capital novo e, a função utilidade[1] que está relacionada com o nível de consumo, bem como o estudo do estado estacionário e do caminho de crescimento equilibrado e seus pressupostos. Com base nisso, após definição do termo função objetivo (combinação de variáveis), serão encontrados níveis de consumo e investimento, para teste de uma solução ótima[2] para o modelo de crescimento econômico construído a partir da teoria de programação linear em computador com o uso do software excel, e ainda a formatação de planilhas e recursos gráficos neste mesmo software para análise e mensuração das teorias expostas neste trabalho.

---

[1] Função Utilidade segundo PINDICK, Robert S, RUBINFELD, Daniel I. 2002 é uma fórmula que atribui um nível de utilidade a cada cesta de mercado. Exemplo: Alimento (A) e vertuário (B) seja u(A,V) = A + 2V.

[2] Solução Ótima de acordo com LACHTERMACHER Gerson. 2002 é uma solução viável que tem o valor mais favorável da função-objetivo, isto,é, maximiza ou minimiza a função-objetivo em toda uma região viável, podendo ser única ou não.

1.1 PROBLEMA

O crescimento econômico é objeto de estudo e pesquisa de vários autores e estudiosos durante décadas. Tornam-se complexas as comparações dos resultados obtidos por meio da análise do comportamento das variáveis: consumo, utilidade, capital e produto, bem como de seus parâmetros ao longo do tempo. Como então encontrar níveis de consumo e investimento tendo como resultado a solução ótima para o modelo de crescimento econômico a ser elaborado? De que forma mensurar os dados da economia? Como utilizar recursos como o computador e softwares para desenvolver a pesquisa e a simulação de dados? A utilização do recurso da teoria da programação linear pode ser um instrumento para a análise da teoria do crescimento econômico?

1.2 JUSTIFICATIVA

A utilização de recursos de informática está cada vez mais intensa. Com isso, promove avanços em diversos campos de pesquisa, inclusive o econômico, tornando importante a sua aplicação no tratamento e análise de dados, bem como embasando teorias econômicas. O crescimento econômico é o objetivo principal da economia mundial, logo, torna-se necessária à análise e pesquisa desse assunto sob diferentes aspectos.

A elaboração de um modelo de crescimento econômico aplicando a teoria da programação linear para avaliar indicadores de crescimento e o comportamento de algumas variáveis macroeconômicas, torna-se relevante à pesquisa e observação destas variáveis, da análise de sensibilidade e mudanças de trajetórias, bem como suas causas e conseqüências considerando-se um período de longo prazo. Para tanto, serão utilizados como recursos o computador e as análises resultantes das técnicas de programação linear, formatação de planilhas, recursos gráficos e das teorias de crescimento econômico.

1.3 OBJETIVOS

Este capítulo apresenta o objetivo geral e específicos de acordo com problema do tema abordado no projeto.

1.3.1 Objetivo Geral

Análise de Crescimento Econômico através da Programação Linear e formatação de planilhas em excel será objeto de estudo deste projeto, desta forma, torna-se necessário o estudo do comportamento e sensibilidade da variável consumo, estoque de capital, utilidade e produto, bem como dos parâmetros através da construção de um modelo de Programação Linear em excel, baseado nas Teorias de Crescimento, e na utilização de dados hipotéticos. Os dados serão avaliados através da simulação do comportamento dos principais indicadores de crescimento da economia.

1.3.2 Objetivos Específicos

a) Apresentar o conceito de Crescimento Econômico, bem como os Modelos de Crescimento Econômico de Harrod - Domar e de Solow e da Programação Linear.

b) Ampliar os conceitos por meio da elaboração e aplicação de um modelo de programação linear e planilhas eletrônicas desenvolvidos no software excel.

c) Ilustrar estruturas e análises de comportamento da sensibilidade das variáveis sob o enfoque do crescimento econômico.

d) Mensurar, simular e alterar restrições e outros parâmetros, bem como avaliar impactos através da observação e aplicação no modelo de crescimento elaborado.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 TEORIAS E PESQUISAS - CRESCIMENTO ECONÔMICO

A maioria dos economistas e estudiosos adota o conceito de crescimento econômico como SHAPIRO (1985, p. 600), ou seja, "refere-se ao aumento do produto em determinada economia, em determinados períodos ou ciclos". A melhor forma de mensuração para o crescimento em determinada economia é o PNB real per capita, devidamente ajustado às oscilações dos preços, tendo em vista a comparação de sua trajetória em diferentes períodos de tempo em relação ao desempenho de outras economias e a população, onde o seu aumento ou redução determina sua participação no produto e parcela na renda.

De acordo com SILVA (2007), o crescimento econômico pode ser conceituado como "o aumento qualitativo da capacidade produtiva, e não da transformação qualitativa da estrutura da economia". Segundo o autor, o problema da economia, encontra-se na satisfação das necessidades das pessoas de acordo com a escassez dos recursos disponíveis e do padrão tecnológico existente, levando em consideração as escolhas feitas no presente que, de forma direta, influenciarão o bem estar de futuras gerações. Desta forma, o bem estar social está associado diretamente à relação entre as quantidades dos bens e serviços que são produzidos em uma economia, e o tamanho da população, utilizando-se então para a mensuração do bem estar social, o PIB[3] per capita ou ainda o consumo per capita, levando em consideração que é com o consumo, que as pessoas satisfazem as suas necessidades.

Com base no exposto, a teoria do crescimento econômico tem com foco principal, tentar explicar as diferenças entre as taxas de crescimento do produto e procurar identificar políticas que busquem aumentar a taxa de crescimento.

---

[3] PIB – Produto Interno Bruto segundo DORNBUSCH, Rudiger, 1991 é o valor de todos os bens finais e serviços produzidos na economia em um dado período de tempo.

2.2 TEORIAS DE CRESCIMENTO

Para melhor ilustrar o modelo que será proposto neste trabalho se faz necessário o estudo de algumas das principais teorias de crescimento econômico.

2.3 MODELO DE CRESCIMENTO ECONÔMICO DE HARROD – DOMAR (1939)

O Modelo de Harrod-Domar é conhecido pelo enfoque no duplo caráter do investimento, que consiste no equilíbrio[4] entre investimento e estoque de capital.

$$I = \Delta K$$

Onde ocorre o aumento da oferta de bens e serviços do produto potencial de crescimento Y através da relação produto – capital, como segue abaixo:

$$\delta = \frac{Y}{K}$$

δ (sigma)	Relação **produto / capital**
Y	**Produto**
K	**Capital**
I	**Investimento**

Aumenta também a demanda de bens e serviços via efeito multiplicador dos investimentos.

Y = C + I (Demanda Agregada)
C = b . Y (Função Consumo)

[4] De Acordo com CHIANG, 1982 equilíbrio é "uma constelação de variáveis selecionadas que se inter-relacionam enter si, de tal forma ajustadas uma às outras que não existe nenhuma tendência inerente à mudança que prevaleça no modelo constituído por elas".

Pela igualdade entre I e ΔK,

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta I}{I} = s\,\delta$$

ΔY	**Taxa de crescimento do produto potencial**
Y	**Taxa de crescimento do produto**
s	**Propensão a poupar**
s δ	**Taxa garantida de crescimento**

Segundo a teoria, para que haja o pleno emprego dos fatores, e utilização plena da capacidade instalada, nem oferta em excesso nem demanda em excesso, é necessário uma taxa específica sδ. Esta taxa representa a propensão a poupar vezes à relação produto capital. Segundo a teoria representa o ritmo do crescimento onde o aumento da oferta (produto potencial – capacidade instalada) é de mesma magnitude do aumento de bens e serviços.

2.3.1 Suposições básicas do modelo

Mudanças na taxa anual do fluxo de investimentos I(t) causará um duplo efeito: afetará a demanda agregada e a capacidade produtiva da economia.

Alterações em I(t) produzem efeito na demanda através do multiplicador onde, um aumento em I(t) causará um acréscimo no fluxo de renda anual Y(t) da ordem de um múltiplo do acréscimo em I(t). O multiplicador é K=1/s, onde s indica a propensão marginal a poupar dada (constante). Sendo I(t) o único fluxo de despesas que afeta a renda, afirma-se que: (CHIANG, 1982, p. 402)

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dI}{dt}\,\frac{1}{s} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Y	**Fluxo de renda anual**
I	**Fluxo de investimentos**
s	**Propensão marginal a poupar**

O efeito do investimento sobre a capacidade é medido pela observação na mudança no nível de produção potencial da economia. Supondo a relação capacidade produtiva-capital seja constante,

$$\frac{k}{K} \equiv \rho \quad (= \text{uma constante})$$

k (capa)	**Capacidade produtiva**
K	**Estoque de capital**
ρ (rô)	**Relação capacidade produtiva-capital dada**

Com um estoque de capital **K**(t), a economia é capaz de uma produção anual ou renda, igual a k =ρ**K** unidades monetárias onde,

k = ρ**K (função de produção)**

dk = ρd**K**

$$\frac{dk}{dt} = \rho \frac{dK}{dt} = \rho I \qquad \textbf{(2.2)}$$

De acordo com o modelo, CHIANG (1982, p. 403) define "equilíbrio como a situação na qual a capacidade produtiva é usada plenamente". Para que a economia esteja em equilíbrio é necessário, portanto, que a demanda agregada seja exatamente igual à capacidade produtiva potencial do período; isto é, **Y** = k.

Entretanto, se partirmos de uma posição inicial de equilíbrio, a condição se reduz à igualdade das mudanças na capacidade e na demanda agregada, ou seja:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dk}{dt} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Para satisfazer a condição de equilíbrio ao longo do tempo, será necessário definir uma trajetória temporal para o investimento. Substituindo (2.1) e (2.2) na condição de equilíbrio (2.3):

$$\frac{dk}{dt}\,\frac{1}{s} = \rho I \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{I}\,\frac{dI}{dt} = \rho s \tag{2.4}$$

A partir das equações diferenciais (2.4), deduz um padrão de mudança para **I** (investimento), de forma que se deduz a trajetória de equilíbrio do investimento, integrando-se diretamente os lados da segunda equação de (2.4) em relação a t:

$$\int \frac{1}{I}\,\frac{dI}{dt}\,dt = \int \rho s \;dt$$

Aplicando as regras logarítmicas e de substituição, o lado esquerdo fica da seguinte forma:

$$\int \frac{dI}{I} \quad \ln|I| + c_1$$

Tendo ρs como constante, o lado direito da equação ficará como:

$$\int \rho s \;dt = \rho st + c_2$$

Igualando os dois resultados e fazendo uma combinação das constantes,

$$\ln|I| = \rho st + c$$

A última equação servirá de expoente de e, onde:

$$\boxed{e^{\ln|I|} = e^{(\rho st + c)} \quad \text{ou} \quad |I| = e^{\rho st}\, e^{c} = Ae^{\rho st} \quad \text{onde } \mathbf{A} \text{ (idêntico)} \equiv e^{c}}$$

Sendo o investimento positivo, então $|I| = I$, de forma a obter:

$$\boxed{I(t)^{c} = Ae^{\rho st} \qquad \text{onde } \mathbf{A} \text{ é constante e arbitrário}}$$

Desta forma, para eliminação de A, fazemos que t = 0 onde obtemos,

$I(t) = Ae^{\rho st}$ sendo $I(0) = Ae^{0}$ = A definindo a constante

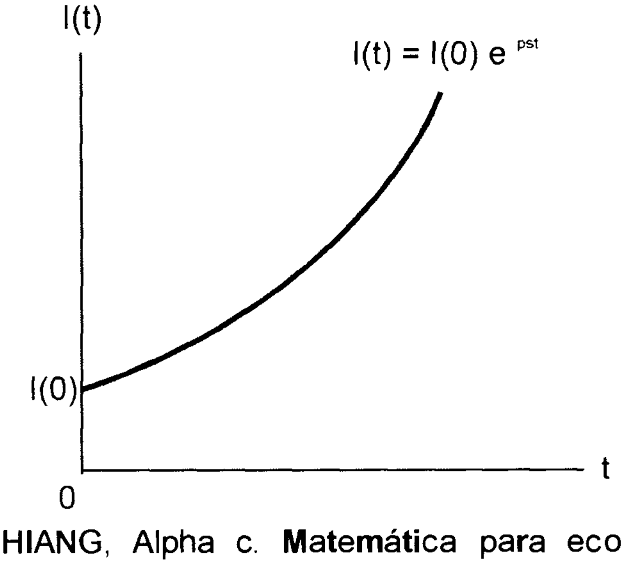
A solução para a trajetória do investimento é definida como,

$$I(t) = I(0)e^{\rho st} \qquad \textbf{(2.5)}$$

I (0) é a taxa inicial de investimento.

CHIANG (1982, p. 404) refere-se ao resultado do significado econômico do modelo, mostra que para que o equilíbrio entre a capacidade e a demanda seja mantido no tempo, o fluxo de investimentos deve crescer exatamente a uma taxa exponencial ρs, de acordo com a trajetória ilustrada no gráfico abaixo, onde quanto maior a taxa exigida para o crescimento do investimento, maior deverá ser a relação capacidade produtiva-capital e a propensão marginal a poupar, desde que os valores de ρ e s sejam conhecidos, a trajetória do crescimento do investimento será rigidamente determinada.

GRÁFICO 1 – FLUXO DO INVESTIMENTO



FONTE: CHIANG, Alpha c. **Matemática para economistas**. São Paulo. Editora da Univ. de São Paulo,1982. p.404.

2.3.2 A Questão do Fio da Navalha

Uma questão importante referente ao modelo exposto é o que aconteceria com a taxa real de crescimento do investimento r, se fosse diferente da taxa ps. Define um coeficiente de utilização como:

$$u = \frac{r}{ps}$$

u	**Capacidade produtiva**
r	**Taxa real de crescimento do investimento**
ps	**Taxa requerida**

$$\boxed{u = \lim_{(t \to \infty)} \frac{Y(t)}{k(t)}}$$

u = 1 (Plena utilização dos fatores)

De acordo com CHIANG (1982, p. 404-405) "com o passar do tempo ($t \to \infty$) ocorrerá escassez produtiva ($u > 1$) ou excesso de capacidade ($u < 1$), dependendo do valor de r em relação a ps".

Demonstrando a conclusão sobre o excesso ou escassez da capacidade produtiva, verifica-se que é válida em qualquer ponto t, não sendo apenas para $t \to \infty$. Uma taxa de crescimento r implica que:

$$I(t) = I(0)e^{rt} \qquad \text{e} \qquad \frac{dI}{dt} = rI(0)e^{rt}$$

De acordo com a equação (2.1) comparada com (2.2):

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI}{dt} = \frac{r}{s} I(0)e^{rt}$$

$$\frac{dk}{dt} = pI(t) = pI(0)e^{rt}$$

Da razão entre as derivadas:

$$\frac{dY / dt}{dk / dt} = \frac{r}{\rho s}$$

A equação anterior nos mostra os efeitos que o investimento causa na demanda e sobre a capacidade em qualquer período t, sob a taxa de crescimento r. Se r (taxa real) exceder ps (taxa requerida), dY / dt > dk / dt, o efeito criador da demanda será maior que o efeito da capacidade, ocasionando escassez de capacidade. Por outro lado, caso aconteça o contrário, se (r < ps), haverá uma deficiência da demanda agregada e um excesso na capacidade produtiva. Se o investimento realmente cresce a uma taxa superior a requerida (r > ps), o resultado será uma escassez de capacidade ao invés de um excesso. Se o crescimento for inferior ao da taxa requerida (r < ps), haverá um excesso de capacidade. De acordo com estes resultados, se a taxa de crescimento real r (considerada até o momento constante) fosse ajustada de acordo com a situação vigente respeitando a capacidade, este seria certamente um ajuste equivocado, visto que no caso em que (r > ps), a escassez emergente de capacidade irá motivar uma taxa ainda mais rápida de investimento, causando um aumento de r, ao invés da redução que se faria necessária diante destas circunstâncias, causando uma maior discrepância entre as duas taxas.

Diante destes resultados, dadas as constantes p e s, o único meio de evitar a escassez como o excesso de capacidade produtiva, é direcionar o fluxo de investimento, mantendo-o sempre na trajetória de equilíbrio, onde r (constante) = ps. Qualquer desvio "fio da navalha" (a trajetória temporal) produzirá uma incapacidade de satisfazer a norma de plena utilização do modelo (CHIANG, 1982, p. 405).

2.4 O MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW

O estudo do trabalho sobre o crescimento econômico realizado por Robert Solow, intitulado "A Contribution to the Theory of Economic Growth" Quarterly Journal of Economics, fevereiro de 1956, 65-94 ("Uma Contribuição para a Teoria de Crescimento Econômico" [5].

O Modelo de Crescimento de Solow demonstra entre outras coisas, que a trajetória de crescimento do Modelo de Harrod-Domar intitulado "fio da navalha" tem como resultado a suposição específica adotada por Solow a respeito da função de produção, e sob condições diferenciadas, a necessidade do equilíbrio[6] tão "delicado" não acontece (CHIANG, 1982, p. 434).

Como visto no modelo de Harrod-Domar, a produção é considerada como uma função, apenas do capital, onde k =ρ**K**, ou seja, "a capacidade produtiva, ou produto potencial, é um múltiplo constante do estoque de capital" (CHIANG, 1982, p. 434).

A ausência do insumo trabalho na função de produção sugere que o trabalho é combinado, proporcionalmente, com o capital de maneira fixa, considerando-se apenas um desses fatores de produção.

Solow demonstra em sua análise que o trabalho e o capital podem combinar-se em proporções variáveis da seguinte forma:

A Função de Produção Agregada:

$$\mathbf{Y = f\,(K\,,N) \quad onde \quad (K,\,L > 0)}$$

Y = Produto agregado

K = Capital (refere-se ao somatório de instalações, máquinas e equipamentos, fábricas, etc.).

N = Número de trabalhadores ou força de trabalho (somatório total de trabalhadores, inclui-se nesta soma aqueles que trabalham na indústria, escritórios e

---

[5] Segundo BLANCHARD, 1999 com este trabalho, Solow foi ganhador do Prêmio Nobel de Economia, em 1987.

[6] De Acordo com CHIANG, 1982 equilíbrio é "uma constelação de variáveis selecionadas que se inter-relacionam enter si, de tal forma ajustadas uma às outras que não existe nenhuma tendência inerente à mudança que prevaleça no modelo constituído por elas".

serviços, bem como aqueles que possuem ou não nível superior, não levando em conta a função ou grau de qualificação de cada trabalhador).

F = Função de produção agregada (quantidade produzida referente a uma determinada quantidade da combinação de capital e trabalho).

Dentro do contexto exposto, pode-se obter resultados do produto referente às diferentes combinações das quantidades de capital e trabalho. Deve-se ressaltar que as quantidades dos últimos dependem do processo tecnológico ou, segundo (BLANCHARD, 1999, p.425) dependem do "estado de tecnologia", visto que, economias com desenvolvimento tecnológico mais avançado obterão certamente melhores resultados nas combinações dos fatores de capital e mão-de-obra, e consequentemente um melhor desempenho do produto agregado.

De acordo com o autor, refere-se ainda ao estado de tecnologia como sendo a estrutura de uma certa economia como um todo, ou seja, sua organização política, social e de mercado, legislações, controle de gastos públicos, inflação, investimentos em educação e saúde, infra-estrutura como estradas, fontes de energia, portos, etc.

Considerando todas as variáveis no sentido macro, segundo CHIANG (1982, p.435) pode-se ainda supor que a função f é linearmente homogênea tendo rendimentos constantes de escala podendo ser ainda escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{Y = Nf\left(\frac{K}{N}, 1\right) = Nf(k) \qquad k \equiv \frac{K}{N}} \tag{2.6}$$

Y	**Produto**
k	**Relação capital - força de trabalho**
N	**Força de trabalho**

Tendo f_K e f_{KK} como positivos, a nova função que será introduzida baseada somente no argumento k será caracterizada pela derivada primeira positiva e uma derivada segunda negativa onde:

$$\mathbf{f_X \equiv MPP_K = f'(k)}$$

Desta forma, $f_K > 0$ significa que $f'(k) > 0$ assim:

$$f_{KK} = \frac{\partial}{\partial K} f'(k) = \frac{df'(k)}{dk} \frac{\partial k}{\partial K} = f''(k) \frac{1}{N}$$

Quando $f_{KK} < 0$ leva a $f''(k) < 0$. A função que fornece o $PFMe_N$ para cada razão de capital – trabalho, aumenta junto com k a uma taxa decrescente. Sendo que Y depende de K e **N** estas variáveis serão encontradas da seguinte forma:

$$\dot{k} \equiv \left(\frac{dK}{dt}\right) = sY \qquad \textbf{(2.7)}$$

Uma proporção constante de Y é invertida.

$$N = N_0 e^{\lambda t} \qquad \lambda > 0 \qquad \textbf{(2.8)}$$

Temos que a força de trabalho cresce exponencialmente.

$\dot{k}$	**Variação do capital em relação ao tempo**
N_0	**Força de trabalho inicial**
λ (lambda)	**Taxa de crescimento de N_0**
s	**Propensão marginal a poupar (constante)**
t	**Período (tempo)**

Levando em conta que a força de trabalho está totalmente empregada em todos os períodos do tempo, logo, os dois **N** em (2.6) e (2.8) são iguais, juntando-se as três equações do modelo obtém-se a equação (2.9):

$$\dot{k} = sN_0 e^{\lambda t} f(k) \qquad \textbf{(2.9)}$$

A equação resultante é uma equação diferencial em que a função do lado direito encontra-se em termos de K*, e a derivada do lado esquerdo é um termo da variável K.

Uniformizando a variável, pode-se estabelecer a relação entre $\dot{k}$ e (K^*) de forma que,

$$k^* \equiv \left(\frac{dk}{dt}\right)$$

De acordo com (2.10), e visto em (2.6):

$$k \equiv \frac{K}{N} \tag{2.6}$$

Obtemos a seguinte equação:

$$K = k\,N = k\;N_0 e^{\lambda t}$$

Utilizando a regra do produto,

$$k = N_0 e^{\lambda t} \frac{d}{dt}\,k + k\,\frac{d}{dt}\,N_0 e^{\lambda t}$$

$$= N_0 e^{\lambda t}\,k + k\;N_0 e^{\lambda t} \tag{2.10}$$

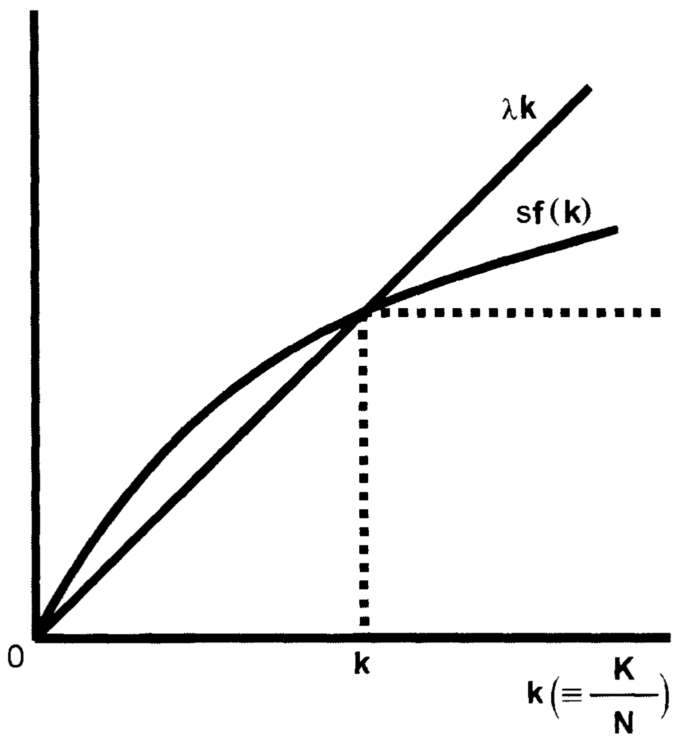
Na substituição de (2.10) em (2.9), dividindo por $N_0 e^{\lambda t}$ encontra-se a equação diferencial em termos de k. Esta equação obtida com os parâmetros s e λ, é a equação fundamental do modelo de Solow (CHIANG, 1982, p.434-435).

$$k^* = sf(\,k\,) - \lambda k \tag{2.11}$$

2.4.1 Análise Gráfica do Modelo de Solow

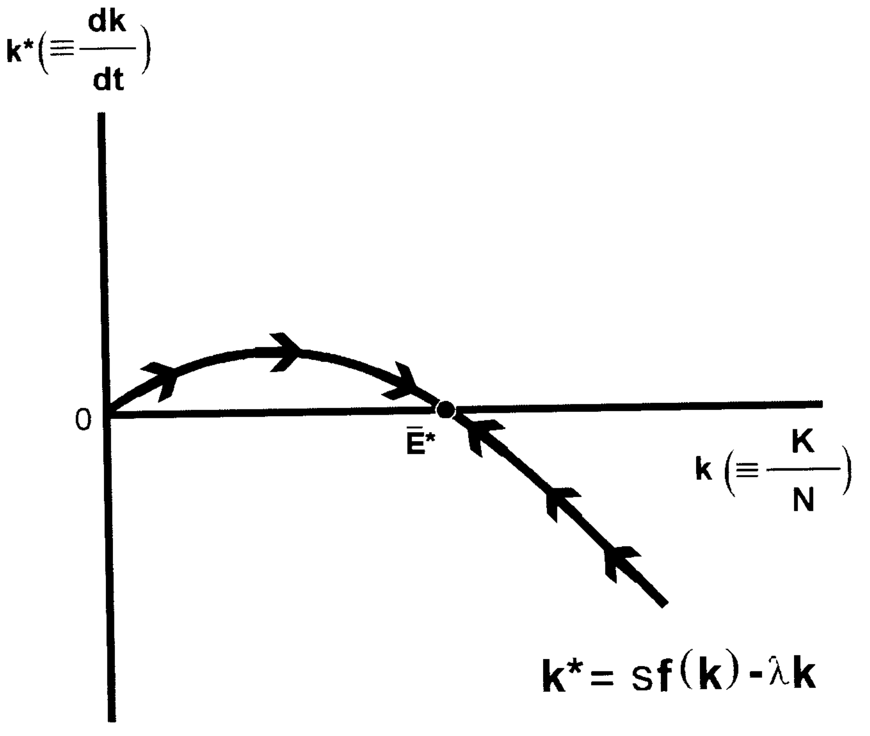
Representando k no eixo horizontal e vertical, e segundo a equação (2.11) fundamental do modelo, os termos à direita serão representados, primeiramente, em curvas separadas. Como o termo λk é uma função linear de k, será representada por uma linha reta, com intercepto vertical igual a zero e inclinação igual a λ. O primeiro termo, sf(k) será representado por uma curva que cresce a uma taxa decrescente como f(k), pois sf(k) é uma fração constante da curva f(k), tendo K como fator relevante e primordial para a produção, teremos que a curva f(k) terá de partir, obrigatoriamente, do ponto de origem devido a K=0, e, conseqüentemente, k=0. Com isso, deduz-se que Y será igual a zero, bem como f(k) e também sf(k). Supõe-se ainda de acordo com o modelo que a representação da curva mostra que existe um conjunto de valores de k onde sf(k) excede λk, assim, as duas curvas se interceptam em um valor positivo de k, chamado de $\bar{E}^*$. Podemos obter o valor de k* para cada k observando as curvas e medindo as distâncias verticais entre as duas curvas comparando os valores de k* e k como verifica-se no GRÁFICO 3. As duas curvas interceptam-se quando a razão capital-trabalho é $\bar{E}^*$, como ilustrado no GRÁFICO 2, ainda, para que $\bar{E}^*$, seja a razão entre capital e trabalho de equilíbrio intertemporal, é necessário que a linha de fase no GRÁFICO 3 intercepte o eixo horizontal em $\bar{E}^*$, mesmo que neste ponto a linha de fase tenha inclinação negativa, encontra-se em equilíbrio estável. Sendo qualquer valor inicial positivo para k a dinâmica do modelo convergirá sempre para $\bar{E}^*$. Pode-se observar que após alcançado o ponto de equilíbrio, e onde a razão capital-trabalho seja invariável ao longo do tempo, o capital passará a crescer à mesma taxa que o trabalho λ necessitando, com isso, que o investimento tenha de crescer a mesma taxa λ. A diferença do Modelo de Solow para a do Modelo de Domar, é que no primeiro, dada uma taxa de crescimento λ, força de trabalho, a economia tende "automaticamente" a atingir o crescimento contínuo onde investimento crescerá a mesma taxa λ, K e N, o que não acontece no Modelo de Domar – A questão do Fio da Navalha (o delicado equilíbrio). Ainda segundo o modelo, Y necessita crescer a uma mesma taxa para satisfazer a equação (2.6) visto que f(k) é constante quando a razão capital-trabalho não varia em $\bar{E}^*$. Segundo o modelo, esta é uma situação de estado de equilíbrio, ou ainda, estado estacionário, onde todas as variáveis importantes do modelo crescem a iguais taxas (taxa zero). (CHIANG, 1982, p. 436-437).

GRÁFICO 2 – ESTADO DE EQUILÍBRIO DE SOLOW - REPRESENTAÇÃO 1



FONTE: CHIANG, Alpha c. **Matemática para economistas**. São Paulo. Editora da Univ. de São Paulo,1982, p.436

GRÁFICO 3 – ESTADO DE EQUILÍBRIO DE SOLOW - REPRESENTAÇÃO 2



FONTE: CHIANG, Alpha c. **Matemática para economistas**. São Paulo. Editora da Univ. de São Paulo, 1982, p.436

2.4.2 A Função de Produção com Progresso Técnico

Na presença de tecnologia, ou progresso técnico, a função de produção deve ser alterada em relação ao exposto anteriormente da seguinte forma:

$$\mathbf{Y} = \theta(t)\, \mathbf{f}\,(\mathbf{K}, \mathbf{N}) \qquad \left(\frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{dt}} > 0\right)$$

Temos agora θ como sendo progresso técnico, representado como uma multiplicação crescente ao longo do tempo. A presença deste parâmetro implica em níveis maiores para K e N fixados anteriormente.

Voltando a análise do gráfico da seção anterior, supomos que a curva em sf(k) sofrerá um deslocamento para cima de forma a provocar sucessivas intersecções em um nível superior com λk com também maiores valores para $\bar{E}^*$, ocorrendo desta maneira, através da inserção do progresso técnico, constantes estados de equilíbrio, onde haverão estoques cada vez maiores de capital por trabalhador e, conseqüentemente, aumento da produtividade. Este processo será demonstrado no item referente à metodologia onde serão apresentadas simulações sobre este processo.

2.4.3 Modelo de Solow – Uma segunda análise

Exemplificando, segundo BLANCHARD (1999, p.432) pode-se ainda demonstrar a relação de quantidade entre produto por trabalhador e capital trabalho da seguinte forma:

λ (lambda) = Valor a ser determinado, assumindo que este seja por trabalhador, como segue:

$$\lambda = \frac{1}{N}$$

$$Y = F(K, N) \tag{2.11}$$

$$\lambda Y = F(\lambda K, \lambda N)$$

$$\frac{1}{N} Y = F\left(\frac{1}{N} K, \frac{1}{N} N\right)$$

$$\frac{Y}{N} = F\left(\frac{K}{N}, 1\right) \tag{2.12}$$

Deduz-se, então, que as quantidades de produto serão determinadas pela relação produto trabalhador e capital por trabalhador.

Elevações constantes de **Y / N** (produto por trabalhador) podem estar relacionados com o aumento de **K / N** (capital por trabalhador), ou melhorias no processo tecnológico. Desta forma, o processo de crescimento é obtido a partir da acumulação de capital e ou, também ao desenvolvimento tecnológico.

De acordo com BLANCHARD (1999, p. 432) para que possa existir o processo da acumulação de capital, deve haver investimento (empresários poupam e investem partes de suas rendas para comprar mais máquinas e equipamentos) sendo este, proporcional ao nível de renda. Somente a poupança não consegue prover o crescimento, mas sim o nível de produto:

$$I = S$$

$$S = sY$$

I	**Investimento**
S	**Poupança**
s	**Propensão a poupar**
Y	**Produto / Renda**

2.4.4 O Processo da Acumulação de Capital

Com base no exposto anteriormente, pode-se manter uma relação dos investimentos **I**, (novas fábricas, infra-estrutura, etc.) com o capital **K**, fator este, determinado em termos de estoque, (fábricas / infra-estrutura produzidas ou melhorias em um determinado período do tempo), ou seja, será demonstrado o processo da acumulação para um período posterior ao atual pela relação:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \tag{2.13}$$

$$\frac{K_{t+1}}{N} = \frac{(1 - \delta) K_t}{N} + \frac{s Y_t}{N} \tag{2.14}$$

$$\frac{K_{t+1}}{N} - \frac{K_t}{N} = \frac{s Y_t}{N} - \frac{\delta K_t}{N} \tag{2.15}$$

K_t	**Capital no período atual**
K_{t+1}	**Capital no período posterior**
$(1 - \delta)$	**Depreciação**
I_t	**Investimento no período atual**

Verifica-se na relação (2.13), que o estoque de capital no próximo período, será o capital atual, descontando-se a depreciação e acrescentado o investimento do mesmo período. Logo, trocando-se o investimento pela poupança, (I = S e S = s**Y**) teremos a situação (2.14) , onde presume-se que o montante total de capital do período seguinte virá a ser igual ao capital por trabalhador do período atual, e o produto por trabalhador multiplicado pela poupança será o investimento.

Reorganizando a relação chega-se a equação (2.15), que mostra que o estoque de capital por trabalhador no período seguinte será igual à poupança por trabalhador menos a depreciação do capital por trabalhador do período atual, logo, desta relação, deduzimos que o montante do produto determinará o estoque de capital no período seguinte (BLANCHARD, 1999, 424-434).

2.4.5 O Resíduo de Solow

A taxa de crescimento da economia de longo prazo é determinada pelo desempenho da taxa de crescimento da produtividade dos fatores, mas de acordo com ELLERY , Roberto; GOMES, Victor (2003), esta afirmação pode se tornar um problema se não souber os meios de medir a produtividade em questão. Para tentar resolver esta questão, Solow (1957) sugeriu o cálculo de um resíduo na função de produção.

Ainda segundo o autor, se for conhecido os valores do estoque de capital, a mão-de-obra ocupada bem como o produto, com a utilização da função de produção poderá se obter o nível de tecnologia, ao qual denomina-se tecnologia ou progresso técnico.

Através do estudo da função Cobb-Douglas:

$$Y_t = \theta_t K_t^{\alpha} (N_t)^{t-\alpha} \qquad \textbf{(2.16)}$$

Resíduo de Solow, onde todas as variáveis podem ser observadas, exceto a taxa de crescimento da produtividade total dos fatores, podendo ser calculada como um resíduo como segue.

$$\Rightarrow \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta \theta}{\theta} + \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha) \frac{\Delta N}{N}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta \theta}{\theta} = \frac{\Delta Y}{Y} - \alpha \frac{\Delta K}{K} - (1-\alpha) \frac{\Delta N}{N}$$

2.4.6 A Contabilidade do Crescimento

De acordo com (2.16) Isolando 0 $_t$ no lado esquerdo da equação, obtém-se a seguinte equação:

$$\theta_t = \frac{Y_t}{K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}} \tag{2.17}$$

θ_t	**Produtividade**
Y	**Produto / Renda**
K_t	**Capital**
N	**Mão-de-obra ou trabalho**
a	**Explicador do capital**

Observando a equação (2.17) e supondo valores para os termos, pode-se calcular a produtividade dos fatores.

Segundo SILVA (2007) define-se contabilidade do crescimento como a contribuição dos diferentes fatores para o crescimento econômico, onde o crescimento do produto resulta basicamente do crescimento do estoque do capital, da força de trabalho e da produtividade total dos fatores. A relação destes fatores mencionados é feita juntamente com o produto através da função de produção, onde o progresso técnico (ou tecnologia) interfere diretamente na produtividade do capital e do trabalho.

Em ELLERY , Roberto; GOMES, Victor (2003) uma outra maneira de mensurar a contabilidade do crescimento consiste em dividir todos os termos da função Cobb-Douglas (equação 2.16) pela população L_t como demonstrado a seguir:

$$\theta_t = \frac{Y_t}{K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}} \qquad \textbf{(2.18)}$$

Reorganizando a equação acima, obtemos:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \theta_t \left[\frac{K_t}{N_t}\right]^{\alpha} \frac{N_t}{L_t} \qquad \textbf{(2.19)}$$

$\frac{Y_t}{L_t}$	**Produto per capita**
$\theta_t \left[\frac{K_t}{N_t}\right]^{\alpha} \frac{N_t}{L_t}$	**Produtividade total dos fatores**
$\theta_t \left[\frac{K_t}{N_t}\right]^{\alpha}$	**Relação capital e mão-de-obra ou Intensividade do capital**
$\frac{N_t}{L_t}$	**Porcentagem da população empregada**

Na equação (2.19) ainda segundo ELLERY , Roberto; GOMES, Victor (2003) o produto per capita está representado no primeiro termo e a seguir, no segundo termo, verifica-se a produtividade total dos fatores.

Ainda segundo a equação (2.19), verifica-se que o produto per capita está determinado pela produtividade, intensidade do uso do capital e população empregada. Assim, a taxa de produto per capita será a soma da taxa de crescimento dos três termos descritos, permitindo determinar o quanto contribuem a produtividade, o capital e o trabalho para a taxa de crescimento de uma certa economia em determinado período de tempo.

2.5 PROGRAMAÇÃO LINEAR

É uma técnica de planejamento que busca a otimização de resultados obtidos por meio de opções de escolha, sujeitas a restrições de acordo com a construção / elaboração de um modelo matemático. A construção destes modelos tem como ferramenta essencial o uso de computadores e softwares adequados pela inserção de dados, análises e posterior avaliação de resultados.

O primeiro passo para a elaboração de um modelo em programação linear, consiste em definir suas variáveis, ou seja, a função objetivo e o conjunto de restrições a serem levadas em consideração. As variáveis podem ser identificadas, por exemplo, por meio da busca de lucros máximos e custos mínimos (variável a ser otimizada), bem como na definição das variáveis básicas, como quantidades ótimas a serem produzidas, definindo assim, condições para se alcançar o lucro ótimo ou custo mínimo.

A função objetivo obtém-se das combinações das variáveis básicas de modo que satisfaça a equação a ser otimizada. O próximo passo é a definição das restrições, que podem ser número de trabalhadores, quantidades de matéria-prima, espaço físico, utilização de máquinas e equipamentos, etc.

A solução do problema se dá quando se encontra uma resposta viável ou ótima, sendo a primeira uma solução onde todas as restrições são atendidas, e a segunda o valor mais adequado maximizando ou minimizando a função objetivo, podendo esta ser única, ou não.

Solução: Especificação de valores para as variáveis

Solução Viável: Todas as restrições são satisfeitas

Solução Ótima: Valor mais adequado que maximiza ou minimiza a função objetivo.

Variável de decisão: Determinadas para se atender o objetivo proposto

Variáveis de entrada: São relacionadas ou independentes (CARVALHO, 2004, p. 15-34).

2.5.1 Programação Linear – Forma Tabular

Utilização do Quadro Simplex: Utilização das principais informações do problema proposto, ou seja, registro dos coeficientes das variáveis, constantes da restrição e variáveis básicas (dadas pelo modelo) e não básicas (variáveis de folga) em um quadro. Antes disso, porém, deve-se iniciar o cálculo com a introdução de variáveis de folga, como segue exercício proposto adaptado. (PRADO, 2004, p. 15-22).

Uma indústria fabrica aparelhos de celular *standart* (simples sem câmera) e aparelhos de celular com câmera, e procura maximizar seu lucro de produção diário por meio de duas linhas de produção com o potencial máximo de 56 funcionários.

Linha de Produção Celular *Standart* (s/ câmera)
Funcionários: Máximo 24
Produção de 01 aparelho: 01 operário / dia.
Lucro para cada celular produzido: R$ 30,00

Linha de Produção Celular com câmera
Funcionários: Máximo 32
Produção de 01 aparelho: 02 operário / dia.
Lucro para cada celular produzido: R$ 40,00

Baseado nos dados acima é possível elaborar um modelo matemático procurando maximizar o lucro e desta forma elaborar uma função objetivo, variáveis e um conjunto de restrições impostas pelo problema.

Variável a ser otimizada.
Lucro: Maximizar o lucro onde L = R – C (Lucro é igual a receita menos custos)
Variáveis não básicas do problema.
Quantidades ótimas da produção dos dois aparelhos.
CSC (x_1)
CCC (x_2)

Função objetivo:

Lucro = R$30,00 x CSC + R$40,00 x **CCC** ou, L (Z) = 30 x **CSC** + 40 x CCC

Restrições:

Produção diária de **CSC**:

CSC <= 24 (funcionários 01 /dia)

Produção diária de CCC:

CCC<= 16 (32 funcionários 02 /dia)

Disponibilidade de funcionários:

Produção de CSC + **CCC** = 40 funcionários ou,

01 x **CSC** + 2 x CCC <= 40 (Até 40 funcionários)

De acordo com os dados elabora-se o modelo de programação Tabular:

Maximixar:

L **(Z) = 30 x** CSC **(x_1) + 40 x CCC (x_2)**

Sujeito a:

CSC (x_1) <= 24

CCC (x_2) <= 16

01 x CSC (x_1) + 2 x CCC (x_2) <= 40

O primeiro passo para a determinação de uma solução viável será o de transformar as inequações das restrições em um conjunto de equações equivalentes pela introdução no problema de variáveis de folga (básicas) de acordo com o lado direito (LD) e esquerdo (LE) das inequações, sendo estas: x_3, x_4, x_5 representando as diferenças entre LD e LE.

$x_1 <= 24$

$x_2 <= 16$

$01x_1 + 02x_2 <= 40$

Lucro (L) = 30 x_1 + 4(

$x_3 = 24 - x_1$

$x_4 = 16 - x_2$

$x_5 = 40 - x_1 - 2x_2$

Lucro (L) = 30 $x_1 + 40x_2$

Onde, x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 >= 0

Após esta transformação, busca-se as variáveis originais do problema e traz para o lado esquerdo da equação (inclusive da função objetivo) da seguinte forma:

$x_3 = 24 - x_1$

$x_4 = 16 - x_2$

$x_5 = 40 - x_1 - 2x_2$

Lucro (L) = 30 x_1 + 4(

$x_1 + x_3 = 24$

$x_2 + x_4 = 16$

$x_1 + 2x_2 + x_5 = 40$

$L - 30\ x_1 - 40x_2.= 0$

Montando agora o quadro tabular, procura-se retirar da linha de L os números negativos para podermos encontrar a solução ótima para o modelo.

Solução viável inicial:

Para encontrar a solução ótima, deve-se observar se na linha 0 de L (coeficientes de x_1 a x_5) não existem números negativos, caso existam, deve-se removê-los da seguinte forma:

Retirar uma variável e colocar outra com o número mais negativo na linha L que deve ser "eliminado". Para tal, escolhe-se a constante que mais restringe o crescimento de L, no caso, divide-se todas as constantes pelos seus respectivos coeficientes (da coluna escolhida pelo número negativo), o menor resultado apresentado, mostrará quem irá sair da base.

- Linha pivô representa a linha da variável que deixará a base.
- Coluna pivô representa a coluna da variável que entrará na base.
- Número pivô representará o valor simultâneo à coluna e linha pivô.
- De acordo com o exercício extraído e adaptado de PRADO (2004, P. 27-34) ao método proposto, os cálculos e tabelas estão dispostos no ANEXO 1.

4.3 Resultado do exercício de programação Tabular:

De acordo com os valores finais obtidos no Ciclo 2.1, e os dados do problema, pode-se conclui que:

Valor de L (constante) = 1360
Variável CSC (x_1) = 24 unidades
Variável CCC (x_2) = 16 unidades

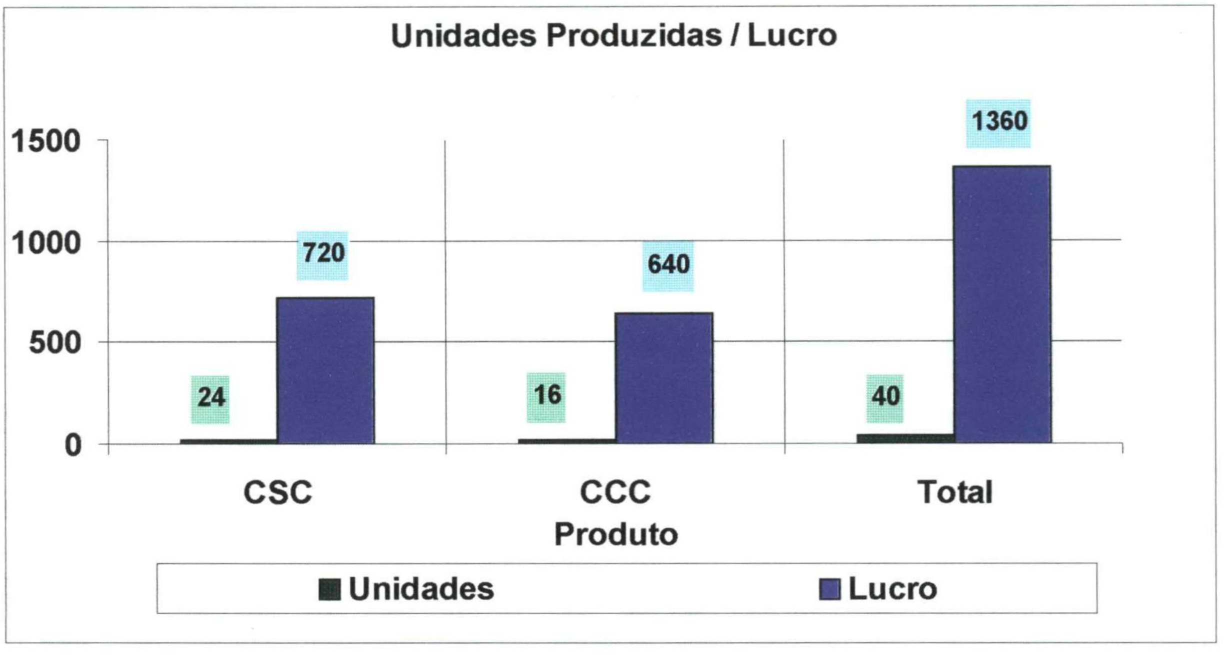
Sujeito a:
CSC (x_1) <= 24
CCC (x_2) <= 16
01 x CSC (x_1) + 2 x CCC (x_2) <= 40

Maximizar:
L (Z) = 30 x CSC (x_1) + 40 x CCC (x_2)
L (Z) = 30 x 24 + 40 x 16
L (Z) = 1360

Respeitando as restrições do problema deduz-se que as quantidades ótimas a serem produzidas e a maximização do lucro da linha de produção são:

CSC (Celular sem câmera) = R$ 720,00
CCC (Celular com câmera) = R$ 640,00
Total do lucro da produção = R$ 1360,00

GRÁFICO 4 – UNIDADES PRODUZIDAS / LUCRO



FONTE: O autor

3. METODOLOGIA

Neste capítulo, serão apresentados os Modelos de Crescimento Econômico baseados na Teoria de Robert Solow, com o auxílio da Programação Linear, bem como do software excel com a finalidade de tornar os modelos propostos mais "dinâmicos" com relação à sua elaboração, simulação e resultados.

3.1 Modelo de Crescimento de Solow, Programação Linear e o Software Excel – Consumo e Utilidade.

O primeiro modelo a ser analisado foi extraído de KENDRICK, David A.; MERCADO, P. Ruben; ANNAN, Hans M., (2005) baseado nos estudos da Teoria de Solow do Crescimento Equilibrado, consiste em testar e simular as relações entre consumo, utilidade, capital e produto durante um determinado período de tempo, bem como suas variações e sensibilidades durante este mesmo período, buscando por finalidade, o aumento do produto dentro de uma economia hipotética.

De acordo com o modelo, mais consumo em determinado período de tempo significa mais utilidade, e com isso, menos investimento e menos estoque de capital neste mesmo período. Para a demonstração matemática deste modelo, será utilizada uma função de produção com capital, proporcionando a relação de acumulação com investimento que gera capital novo e a relação consumo utilidade.

3.1.1 Elaboração do modelo matemático

Função de produção com capital:

$$Y_t = \theta K_t^{\alpha} \quad (3.20)$$

Y_t	**Podução no período t**
θ (theta)	**Parâmetro de tecnologia**
α (alfa)	**Explicador do capital**
K_t	**Estoque de capital no período t**

Capital no próximo período:

Acumulação do capital

$$K_{t+1} = K_t + Y_t - C_t \quad (3.21)$$

C_t	**Consumo no período t**

O Modelo proposto informa o valor do capital inicial e sua condição de valor após o último período como sendo:

$$K_0 = 7,000$$

Supõe-se ainda uma restrição para o capital, a qual no final do período **K_n** deve ser igual ou maior ao capital limite **K*** requerido para o final do período (30% do capital inicial **K_0**).

$$K_n >= K^*$$

K_n	**Capital final**
K*	**Limite mínimo de capital requerido ao final do período**

Segundo a fórmula descrita acima, o capital no próximo período será igual ao capital atual mais à diferença entre o produto e o consumo do mesmo período (acúmulo de capital). Em (3.21) ao inserir a função de produção, acrescentando os parâmetros θ (theta) e α (alfa) à acumulação de capital no próximo período, obtém-se, assim, a equação de número (3.22).

$$K_{t+1} = K_t + \theta K_t^{\alpha} - C_t \tag{3.22}$$

Após definição de (3.22) que informará os valores do capital acumulado durante o transcorrer da série temporal, será construída a função objetivo a ser maximizada com base na teoria do crescimento.

Utilidade por período:

De acordo com a teoria, quanto mais utilidade em cada período, mais consumo e menos investimentos. Torna-se necessário então, encontrar valores para o consumo e utilidade. Para isso, será utilizada a função utilidade. O parâmetro tau (τ), correspondente à elasticidade de substituição temporal de uma constante, ou seja, o grau de substituição correspondente ao consumo hoje e amanhã, por meio da curva de indiferença de tempo e consumo, ou, o consumo em dois pontos do tempo.

$$U(C_t) = \frac{1}{(1 - \tau)} C_t^{(1 - \tau)} \tag{3.23}$$

$U(C_t)$	Utilidade em função do período em determinado período de tempo
τ (tau)	Parâmetro da função utilidade

Somando as utilidades descontadas em cada período de tempo:

$$J = \sum_{(t = 0)}^{(n - 1)} \beta^t U(C_t) \tag{3.24}$$

J	Função **Objetivo**
β (beta)	**Fator** de desconto
ρ **(rho)**	Taxa de desconto

$$\beta = \frac{1}{(1 - \rho)}$$

Substituindo (3.23) em (3.24), obteremos a equação da função objetivo final:

$$J = \sum_{(t=0)}^{(n-1)} \beta^t \frac{1}{(1 - \tau)} C_t^{(1-\tau)} \qquad \textbf{(3.25)}$$

Objetivo do modelo:

Este modelo tem como objetivo encontrar os níveis de consumo ideais nos períodos cobertos, que proporcionem níveis satisfatórios entre consumo e investimento, desta forma, maximizar a função objetivo (3.25), e para isso, será necessária a utilização de equações da acumulação de capital, observar os valores estabelecidos para os parâmetros, bem como, observar as restrições impostas pelo modelo descrito anteriormente ($K_n >= K^*$).

Serão ainda estudadas as sensibilidades e variações ocasionadas por alterações nos valores estipulados no modelo.

Para atingir o objetivo proposto, será elaborada, de acordo com os dados disponíveis, uma planilha eletrônica do Microsoft Excel.

3.1.2 Elaboração da planilha eletrônica – Software Excel

Serão anotados na coluna B da planilha os valores referentes ao período, das variáveis consumo (a ser calculado), o produto, o capital e a utilidade, bem como, os valores fornecidos pelo modelo dos parâmetros tau, beta, alfa e theta descritos na coluna A sendo:

Componentes do Modelo		
Período	De 0 a 8	Série Temporal
K_0	7,00	Capital Inicial
Função Objetivo	$J = \sum_{(t=0)}^{(n-1)} \beta^t \frac{1}{(1-\tau)} C_t^{(1-\tau)}$	(SOLVER)
Variáveis		
Consumo	(SOLVER)	Consumo nos períodos
Produção	$Y_t = \theta K_t^{\alpha}$	Função de Produção
Capital	$K_{t+1} = K_t + \theta K_t^{\alpha} - C_t$	Equação da Acumulação de Capital
Utilidade	$U(C_t) = \frac{1}{(1-\tau)} C_t^{(1-\tau)}$	Utilidade Descontada
Parâmetros		
τ (tau)	0,50	Parâmetro da função utilidade
β (beta)*	0,98	Fator de desconto
ρ (rho)**	0,02	Taxa de desconto
θ (theta)	0,30	Parâmetro de tecnologia
Observando a restrição		
$K_n >= K^*$ (30% ↑ de $K_0 = 9{,}100$)		

$$\beta = \frac{1}{(1-\rho)}$$

$$\rho = \frac{1}{\beta} - 1 \rightarrow \rho = \frac{1}{0{,}98} - 1 \rightarrow \rho = 0{,}02$$

Os dados/equações acima estão ilustrados conforme ANEXO 2.

3.1.3 Resolvendo o Modelo

O objetivo proposto é o de encontrar níveis ideais de consumo para cada período proposto, para isso, será utilizada a ferramenta do microsoft excel - solver.

A ferramenta Solver

Esta ferramenta funciona como um algorítimo, uma seqüência não ambígua de instruções que é executada até que determinada condição se verifique, um conjunto de processos e símbolos representados para se obter o cálculo.

Com o auxílio da ferramenta Solver, pode-se localizar um valor ideal para uma fórmula em uma célula destino na planilha. O Solver relaciona-se com um grupo de células direta ou indiretamente de acordo com a fórmula da célula destino ajustando-se aos valores das células variáveis especificadas para conduzir ao resultado na fórmula da célula destino, condicionando a ferramenta a restrições impostas de maneira a restringir os valores que poderão ser usadas no modelo. Estas restrições podem se referir a outras células que afetem a fórmula da célula destino.

Na seqüência deste trabalho, será apresentada a maneira de utilização da ferramenta no auxílio da resolução do Modelo de Crescimento Econômico proposto. (ver ANEXO 3 e Capítulo Resultados).

3.2 Modelo de Crescimento de Solow – Análise do Modelo Equilibrado e Modelo Excluindo os Pressupostos do Equilíbrio.

O segundo modelo a ser apresentado foi elaborado por CAHILL, Miles; KOSICKI, George, (2000) com a finalidade de demonstrar através de ilustrações visuais e numéricas com o auxílio do software excel, o caminho da convergência ao crescimento equilibrado, bem como os comportamentos das taxas de poupança, tecnologia e depreciação e suas influencias neste caminho de longo prazo, comparadas a um outro modelo elaborado a partir dos estudos da Teoria de Crescimento de Solow, mas sem levar em consideração as suposições sobre o equilíbrio. Serão feitas análises comparativas, conclusões e simulações, bem como alterações dos valores de parâmetros e variáveis, visando a mensuração dos resultados obtidos.

3.2.1 Elaboração do Modelo de Solow de Crescimento Equilibrado.

Em sua teoria, Solow afirma que a economia está em estado estacionário (variáveis macroeconômicas assumem um valor constante) quando atinge o crescimento equilibrado (todas as variáveis macroeconômicas crescem a uma mesma taxa) de forma que o capital K (ajustado à produtividade) deve crescer a mesma taxa oferta de trabalho **N**, desde que a mão-de-obra cresça a uma taxa n e a produtividade da força de trabalho cresça a uma taxa g, sendo que a oferta de trabalho **N** crescerá a taxa (n+g) ao longo do tempo segundo a equação:

$$\Delta N_t = (n + g)(N_{t-1}) \qquad \textbf{(3.26)}$$

De acordo com o modelo exposto pelo autor, trabalho promove crescimento, conforme equação do crescimento equilibrado. Investimento líquido do período é igual a taxa de crescimento da mão-de-obra n mais a taxa de produtividade do trabalho g vezes o capital do período anterior (conclui-se pelo modelo de Solow que o capital do período anterior deve ser acrescido a produção atual mais uma parcela de investimento).

Equação do crescimento equilibrado

$$\Delta K_t = (n+g)\, K_{t-1}$$

N	**Oferta de trabalho**
n	**Taxa de crescimento da mão-de-obra**
g	**Taxa de crescimento da produtividade do trabalho**
s	**Propensão marginal a poupar**
ΔK_t	**Investimento líquido**
dK_t	**Depreciação do capital**
K_t	**Estoque de capital no período t**

Com relação à renda, ainda segundo o autor, ou é consumida ou poupada, definindo consumo C_t em relação à taxa de poupança s e renda ou produto Y.

$$C_t = Y_t - sY_t \qquad (3.27)$$

A poupança do período é agregada ao período seguinte, sendo então igual ao investimento.

$$S_t = sY_t = I_t \qquad (3.28)$$

O capital K segundo o modelo deprecia-se a taxa **d**, assim, o investimento líquido **ΔK** será investimento total I_t menos a depreciação do capital dK_t. Assim, para o capital crescer a uma taxa de crescimento equilibrado de (n+g), o investimento total será conforme a equação:

$$\Delta K_t = I_t - dK$$

$$I_t^* = (n + g + d)\, K_t^* \qquad (3.29)$$

$$\boxed{\text{Depreciação} = dK_t}$$

Reescrevendo (3.29) de acordo com (3.28), verificamos a relação entre K_t^* / Y_t^* (constante).

$$sY_t^* = (n + g + d)\, K_t^*$$

Como definido em (3.29) $sY_t = I_t$, logo,

$$\frac{K_t^*}{Y_t^*} = \frac{s}{(n + g + d)\, K_t^*}$$

O capital de crescimento equilibrado produz uma relação que define o capital de estado estacionário (investimento é igual a depreciação) como uma função de produção, assumindo que o produto depende de um parâmetro de tecnologia (θ), capital efetivo (K_t) ajustado para a produtividade[8].

$$Y_t = \theta_t\, K_t^{\alpha} (N_t)^{1-\alpha}$$

3.2.2 Modelo de Crescimento Solow – Excluindo os Pressupostos do Equilíbrio.

O modelo a ser apresentado extraído de CAHILL, Miles; KOSICKI, George, (2000) cuja elaboração está baseada na Teoria de Crescimento de Solow excluindo os pressupostos de equilíbrio, tem como finalidade, comparar os dois modelos [9].

Em sua Teoria, Solow mostra que a economia convergirá a um crescimento equilibrado, ignorando esta afirmação, para este modelo, de acordo com o nível de investimento, o capital aumenta ou diminui, logo, o investimento total é novamente igual à poupança e depreciação do capital igual a dK_t.

$$S_t = sY_t = I_t$$

$$\boxed{\text{Depreciação} = dK_t}$$

[8] Como foi definido anteriormente, $\Delta K_t = (n+N)K_{t-1}$

[9] Este modelo (3.2.2) em relação ao anterior e mensurar os resultados obtidos.

Para este modelo, o investimento líquido será:

$$\Delta K_t = sY_t - dK$$

Acrescentando o investimento líquido ao estoque de capital, compondo o capital para o próximo período, conforme equação:

$$K_{t+1} = K_t + \Delta K_t$$

Definindo a função de produção da mesma forma que o modelo de equilíbrio exposto anteriormente.

$$Y_t = \theta_t K_t^{\alpha} (N_t)^{1-\alpha}$$

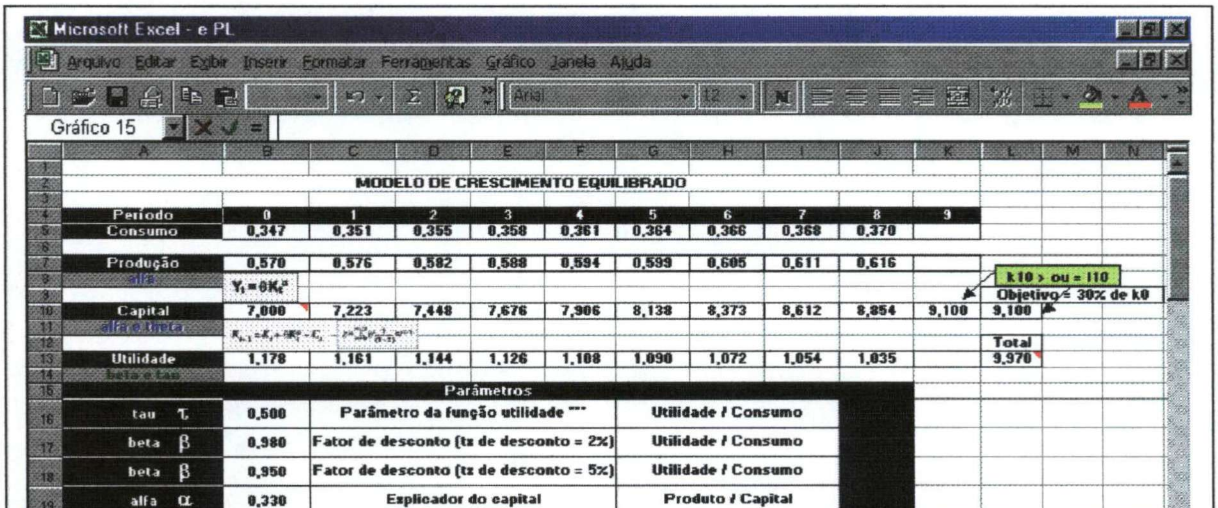
O objetivo proposto deste capítulo foi o de demonstrar o processo teórico e matemático do Modelo de Crescimento de Solow – Análise do Modelo Equilibrado e Modelo Excluindo os Pressupostos do Equilíbrio - Formatação dos modelos no software excel. A formatação dos modelos no Microsoft excel será ilustrada no anexo 03 deste trabalho, bem como os resultados e análises dos modelos serão observados e descritos no capítulo 4 .2 – Resultados.

4. RESULTADOS

4.1 Resultados do Modelo de Crescimento de Solow, programação linear e o software excel – Consumo e Utilidade.

Este capítulo tem como finalidade analisar os resultados obtidos por meio da observação dos dados e análise gráfica, no quadro 1, verifica-se o resultado do modelo proposto onde através da utilização de uma planilha eletrônica e da ferramenta solver do Microsoft excel, o modelo foi resolvido de acordo com o objetivo proposto e restrições impostas ao modelo.

QUADRO 1 – MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW, PROGRAMAÇÃO LINEAR E O SOFTWARE EXCEL – CONSUMO E UTILIDADE.



MODELO DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO

Período	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Consumo	0,347	0,351	0,355	0,358	0,361	0,364	0,366	0,368	0,370		
Produção	0,570	0,576	0,582	0,588	0,594	0,599	0,605	0,611	0,616		
Capital	7,000	7,223	7,448	7,676	7,906	8,138	8,373	8,612	8,854	9,100	9,100
Utilidade	1,178	1,161	1,144	1,126	1,108	1,090	1,072	1,054	1,035		Total 9,970

k10 > ou = I10

Objetivo = 30% de k0

Parâmetros

tau τ	0,500	Parâmetro da função utilidade ***	Utilidade / Consumo
beta β	0,980	Fator de desconto (tx de desconto = 2%)	Utilidade / Consumo
beta β	0,950	Fator de desconto (tx de desconto = 5%)	Utilidade / Consumo
alfa α	0,330	Explicador do capital	Produto / Capital
theta θ	0,300	Parâmetro de tecnologia	Produto / Capital
rho ρ	0,02	Taxa de desconto	Utilidade / Consumo
rho ρ	0,05	Taxa de desconto	Utilidade / Consumo

*** Grau de substituição entre consumo hoje e amanhã - consumo entre dois pontos

$$U(C_t) = \frac{1}{(1-\tau)} C_t^{(1-\tau)}$$

$$J = \sum_{(t=0)}^{(n-1)} \beta^t \frac{1}{(n-\tau)} C_t^{(1-\tau)}$$

$$Y_t = \theta K_t^{\alpha}$$

$$\beta = \frac{1}{(1-\rho)}$$

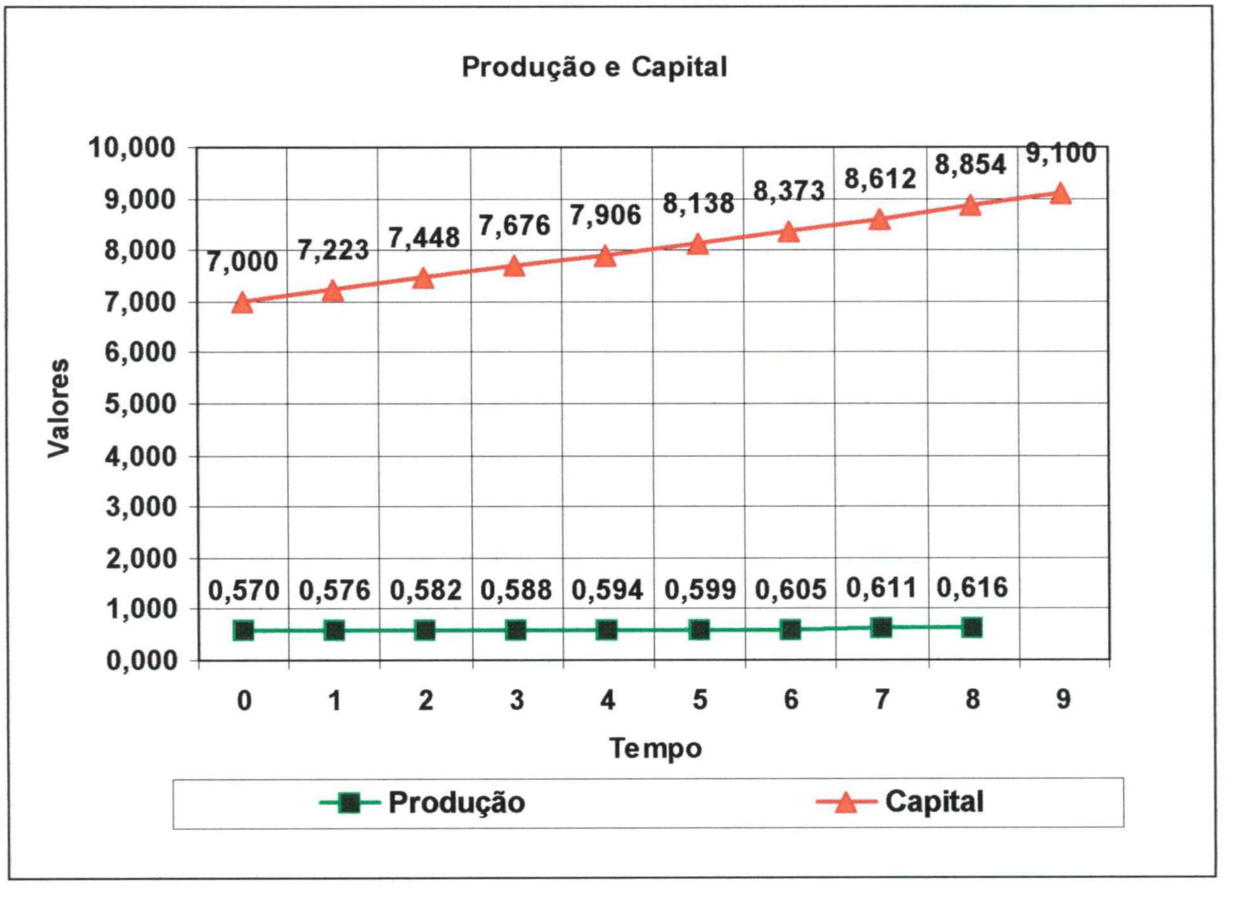
$$K_{t+1} = K_t + \theta K_t^{\alpha} - C_t$$

$$K_{t+1} = K_t + Y_t - C_t$$

FONTE: KENDRICK, David A.; MERCADO, P. Ruben; ANNAN, Hans M. **Computational Economics**. Adaptado pelo autor.

Propondo uma melhor avaliação e visualização dos resultados obtidos, verifica-se no GRÁFICO 5 as trajetórias da produção e do capital, onde pode-se observar suas trajetórias, pois o objetivo do modelo é o de encontrar níveis de consumo (gráfico 6) que permitam atingir um capital de 30% maior que o inicial no tempo nove. Este processo foi calculado através da ferramenta do excel solver, de acordo com os dados previamente fornecidos pelo modelo e da combinação das restrições, variáveis e parâmetros.

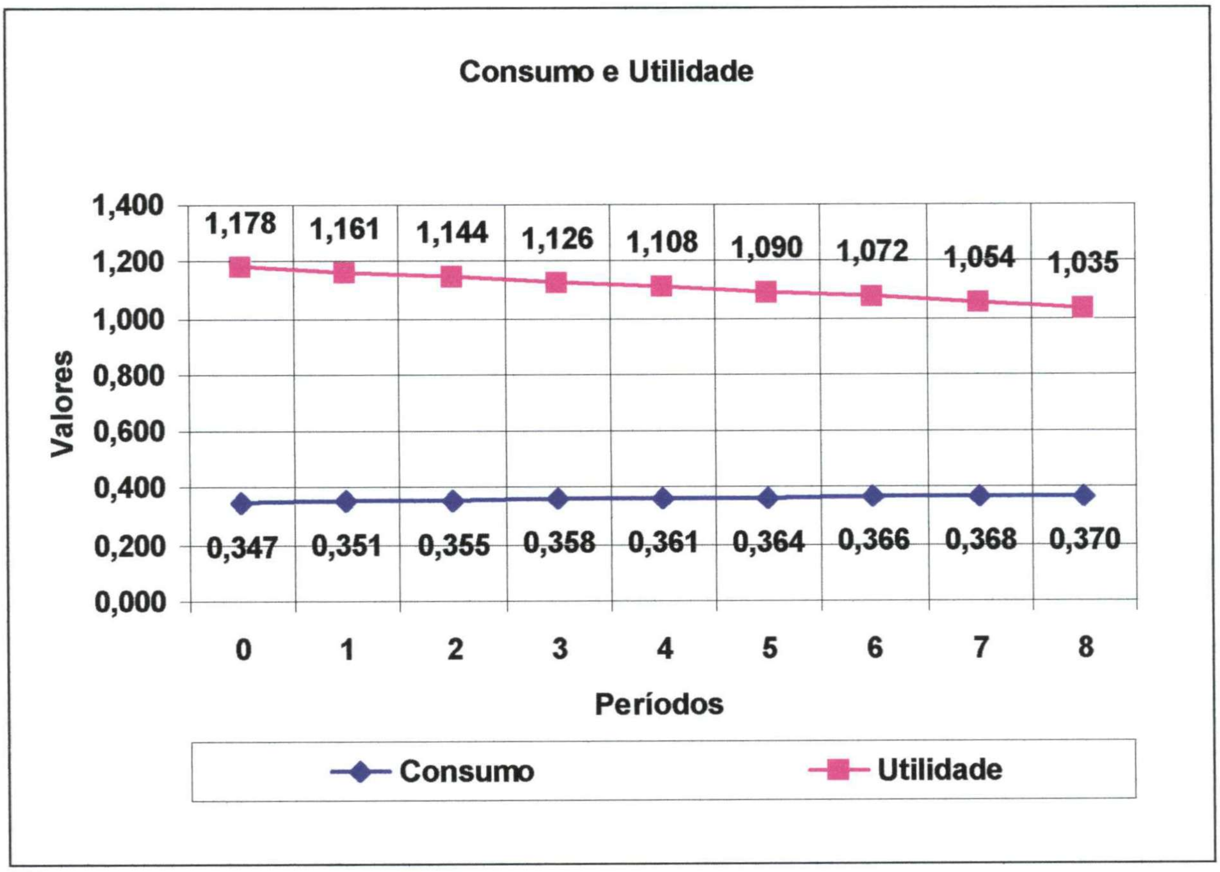
GRÁFICO 5 – TRAJETÓRIA DA PRODUÇÃO E DO CAPITAL AO LONGO DO TEMPO.



FONTE: O autor.

O GRÁFICO 6 demonstra os níveis de consumo ideais que maximizam o capital encontrados com a resolução do modelo, onde observa-se também um crescimento acentuado, bem como a queda da utilidade, verificando a relação consumo e utilidade.

GRÁFICO 6 – TRAJETÓRIA DO CONSUMO E DA UTILIDADE AO LONGO DO TEMPO.



FONTE: O autor.

A análise inicial do modelo partirá da comparação entre os valores dos parâmetros, ou seja, os valores serão alterados e novamente será resolvido o modelo para que, assim, possamos obter diferentes resultados e posteriormente análises de algumas variações verificadas, pois uma das maneiras de estudar e avaliar o comportamento das variáveis nos modelos de crescimento é a de alterar alguns de seus dados e observar os resultados. Partindo deste ponto, neste modelo será alterado o valor de theta (tecnologia) de 0,300 para 0,400 segundo o QUADRO 2. Os resultados serão avaliados graficamente na seqüência deste trabalho.

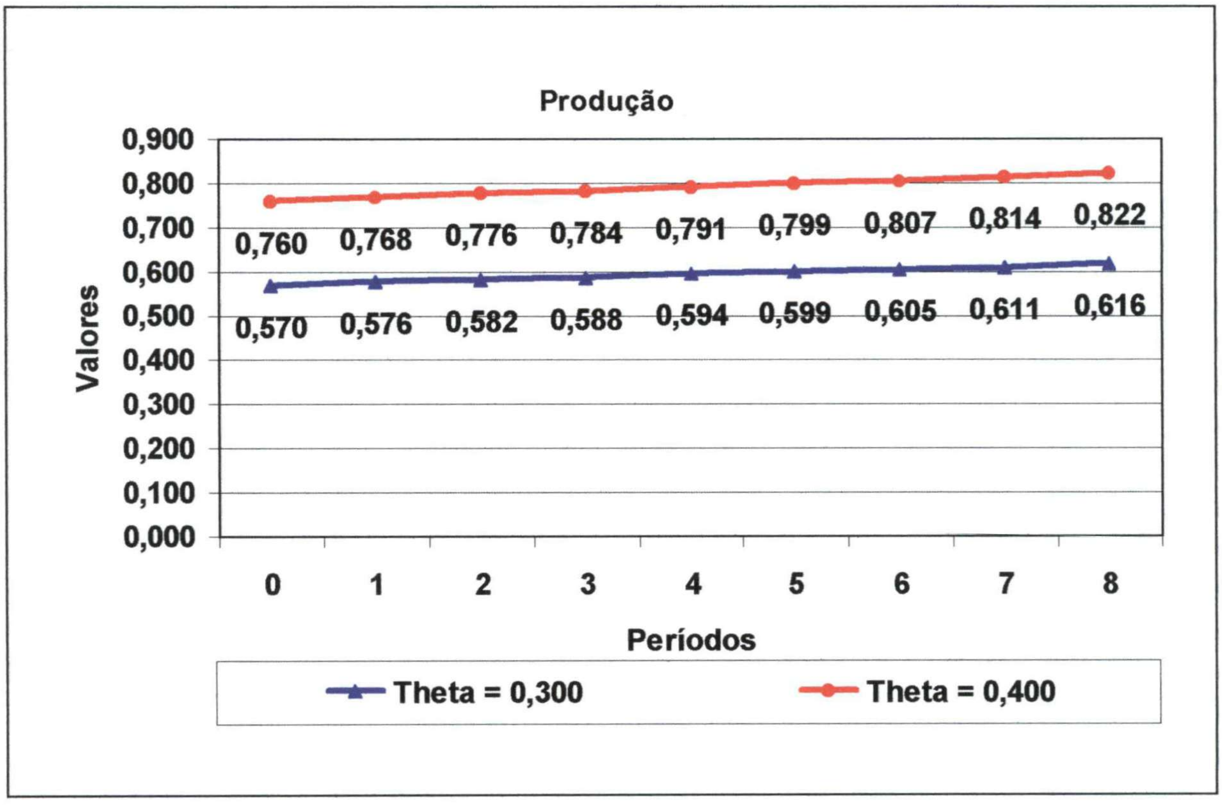
QUADRO 2 – MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW, PROGRAMAÇÃO LINEAR E O SOFTWARE EXCEL – AUMENTO DO PARÂMETRO THETA (TECNOLOGIA)

(Tecnologia) theta = 0,300										
Período	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Consumo	0,347	0,351	0,355	0,358	0,361	0,364	0,366	0,368	0,370	
Variação do Consumo		0,004	0,004	0,003	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002	
Utilidade	1,178	1,161	1,144	1,126	1,108	1,090	1,072	1,054	1,035	
Variação da Utilidade		-0,017	-0,017	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,019	
tau	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
beta	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980
alpha	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330
theta	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
Produção	0,570	0,576	0,582	0,588	0,594	0,599	0,605	0,611	0.616	
Variação Produção		0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	
Capital	7,000	7,223	7,448	7,676	7,906	8,138	8,373	8,612	8,854	9,100
Variação Capital		0,223	0,225	0,227	0,230	0,232	0,235	0,239	0,242	0,246
Variação Beta (0,98)	1,000	0,980	0,960	0,941	0,922	0,904	0,886	0,868	0,851	0,834
Variação Tx desc. (0,02)	0,000	0,020	0,041	0,062	0,084	0,106	0,129	0,152	0,175	0,199
Para (tecnologia) theta = 0,400										
Período	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Consumo	0,404	0,417	0,430	0,442	0,455	0,467	0,479	0,490	0,502	
Variação do Consumo		0,013	0,013	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	0,012	
Utilidade	1,272	1,266	1,259	1,252	1,244	1,235	1,226	1,216	1,206	
Variação da Utilidade		-0,006	-0,006	-0,007	-0,008	-0,009	-0,009	-0,010	-0,010	
tau	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
beta	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980
alpha	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330
theta	0,400	0,400	0,400	0,400	0,400	0,400	0,400	0,400	0,400	0,400
Produção	0,760	0,768	0,776	0,784	0,791	0,799	0,807	0,814	0,822	
Variação Produção		0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,008	0,007	
Capital	7,000	7,306	7,534	7,763	7,996	8,231	8,468	8,709	8,954	9,202
Variação Capital		0,306	0,227	0,229	0,233	0,235	0,237	0,241	0,245	0,248
Variação Beta (0,98)	1,000	0,980	0,960	0,941	0,922	0,904	0,886	0,868	0,851	0,834
Variação Tx desc. (0,02)	0,000	0,020	0,041	0,062	0,084	0,106	0,129	0,152	0,175	0,199

FONTE: O autor.

Analisando a produção, percebe-se um aumento significativo, isso ocorre porque o aumento do fator tecnologia afeta diretamente o resultado através do aumento da produtividade dos trabalhadores. Segundo a Teoria de Solow, trabalho gera crescimento e quando a economia encontra-se em estado estacionário, somente um aumento na tecnologia poderia fazer com que esta economia voltasse ao caminho de crescimento equilibrado, pois, ainda segundo ele, a poupança (investimento) só repõe o capital depreciado. Conclui-se então que, políticas governamentais buscando o progresso técnico seriam de grande importância para uma economia crescer.

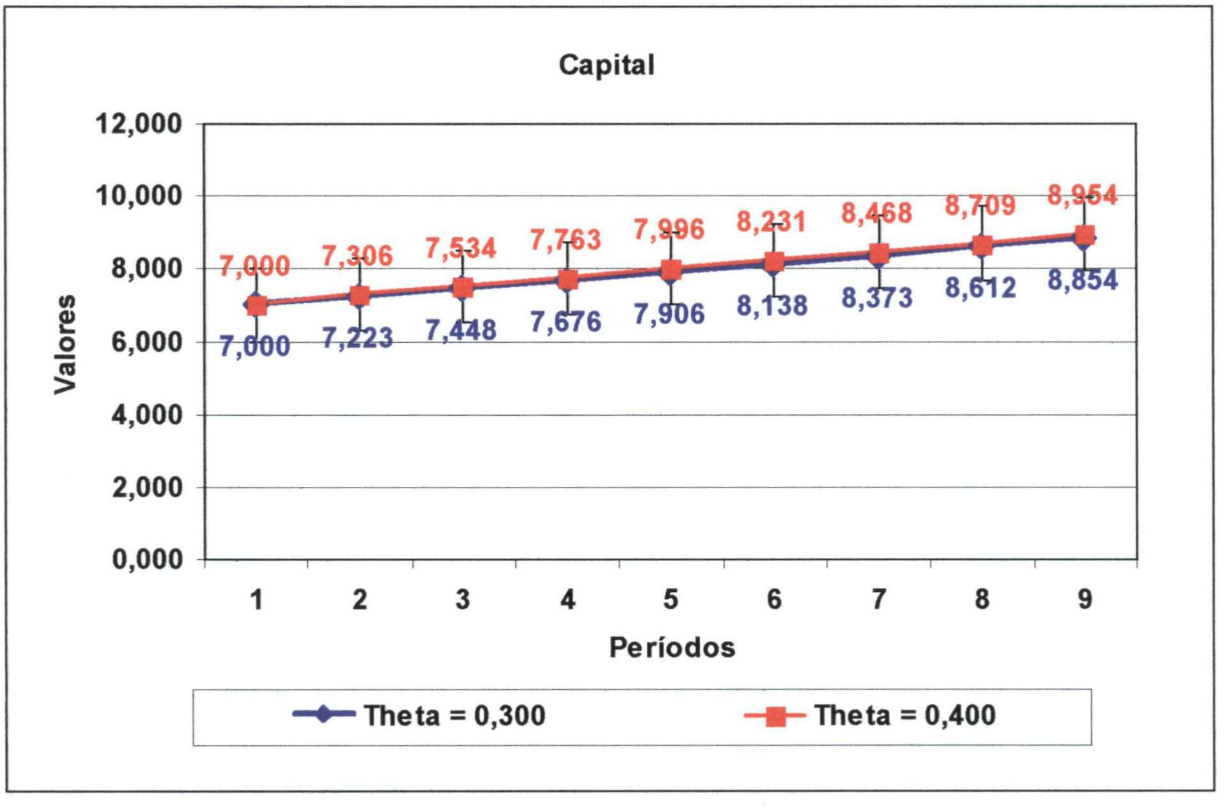
GRÁFICO 7 – COMPARATIVO DA PRODUÇÃO COM THETA (TECNOLOGIA) 0,300 E 0,400



FONTE: O autor

De acordo com GRÁFICO 8 deste modelo, um aumento do fator tecnologia provoca aumentos na quantidade de capital devido ao processo de acumulação em cada período subseqüente.

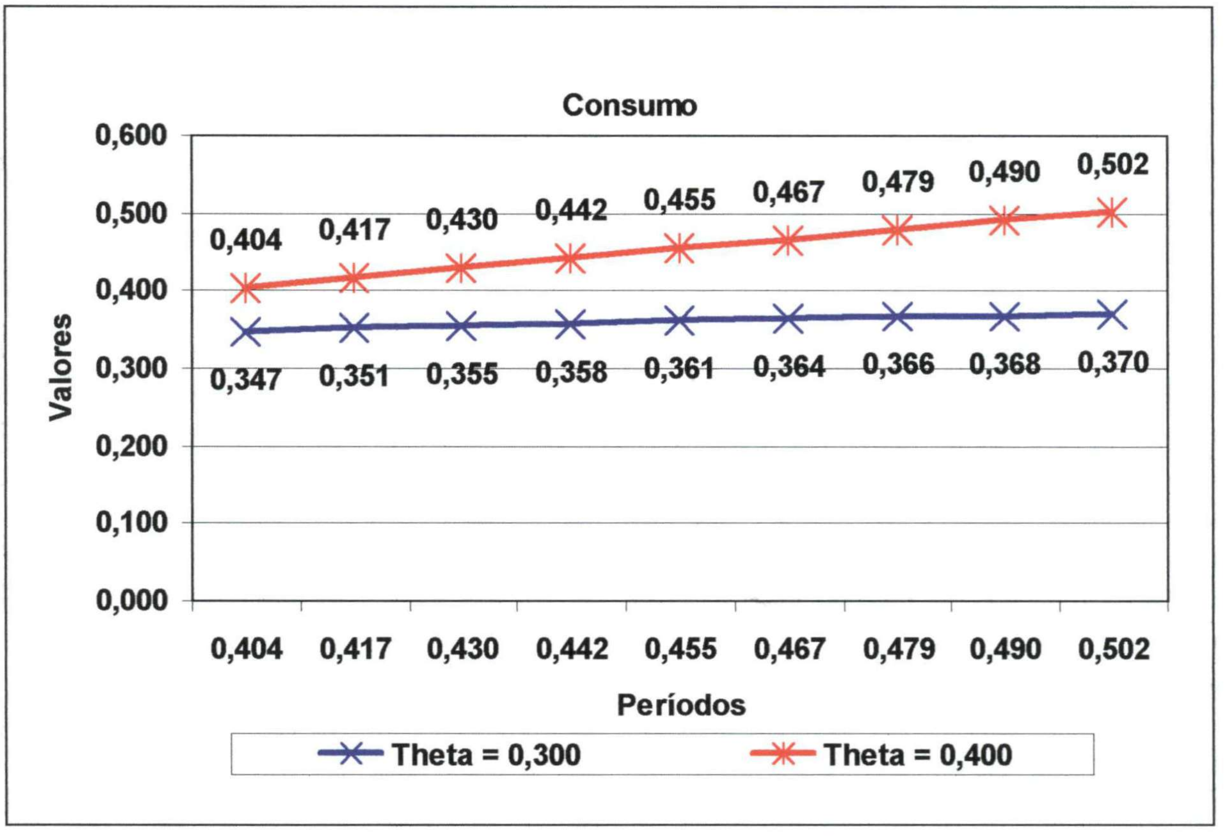
GRÁFICO 8 – COMPARATIVO DO CAPITAL COM THETA (TECNOLOGIA) 0,300 E 0,400



FONTE: O autor

O consumo tende a crescer devido a aumentos no estoque de capital, como mostra o GRÁFICO 9.

GRÁFICO 9 – COMPARATIVO CONSUMO COM THETA (TECNOLOGIA) 0,300 E 0,400

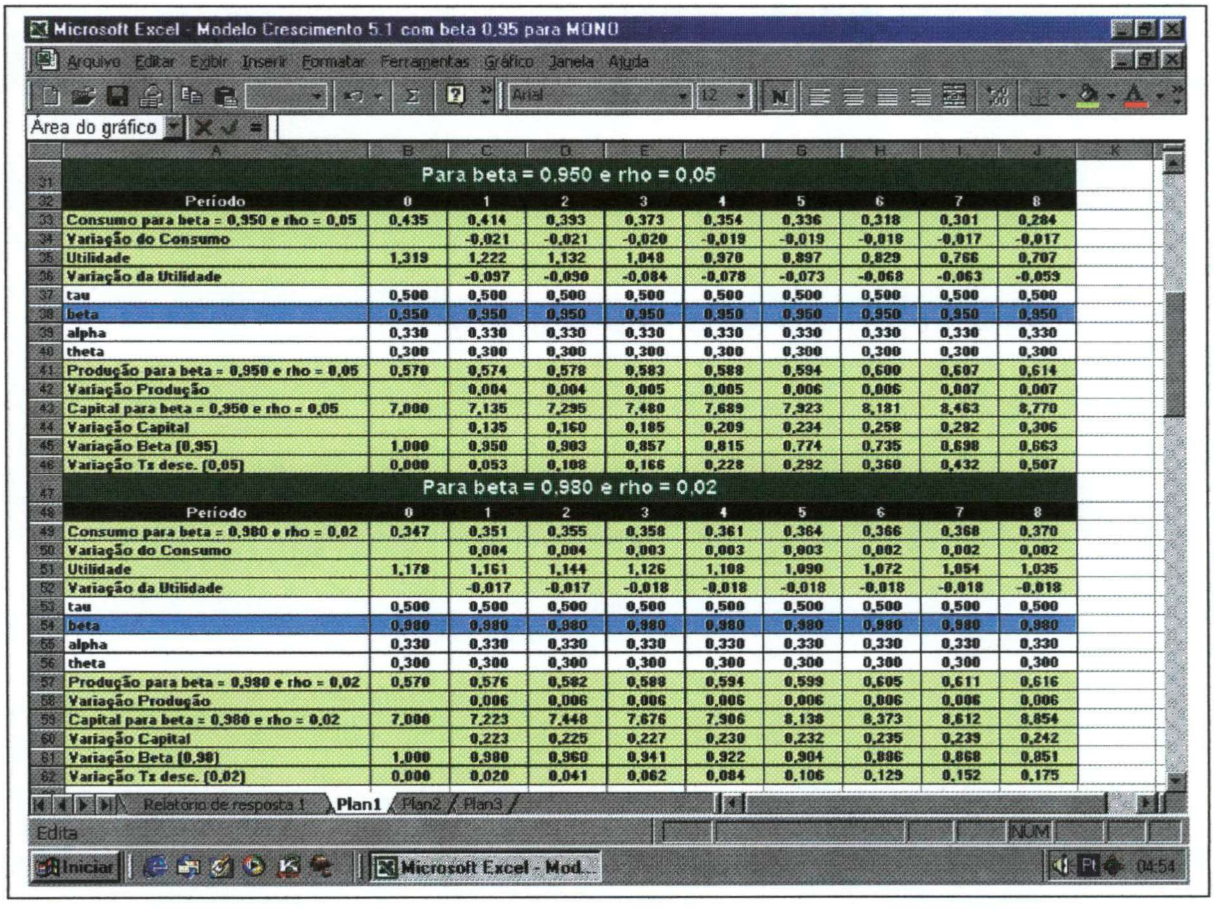


FONTE: O autor

Para demonstração de uma segunda análise, um modelo será resolvido com o parâmetro beta ou fator de desconto igual a 0,98 com rho ou taxa de desconto de 0,02 e outro com fator de desconto igual a 0,95 e com taxa de desconto igual a 0,05 permanecendo inalterados os demais valores fornecidos pelo modelo.

Observando o QUADRO 3, pode-se concluir que aumentando a taxa de desconto, beta diminui mais rapidamente ao longo do tempo, a relação com o consumo e o estoque de capital será analisada graficamente.

QUADRO 3 – MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW, PROGRAMAÇÃO LINEAR E O SOFTWARE EXCEL – AUMENTO DA TAXA DE DESCONTO E DIMINUIÇÃO DO FATOR DE DESCONTO BETA

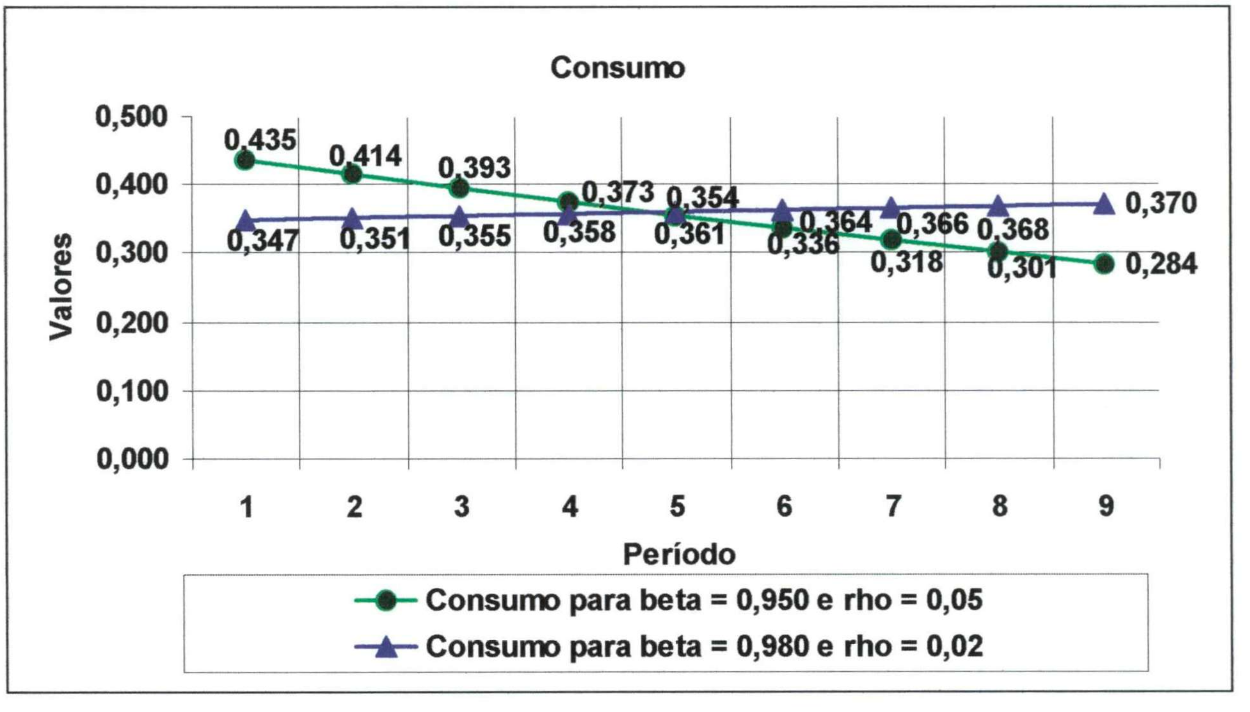


Para beta = 0.950 e rho = 0,05									
Período	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Consumo para beta = 0,950 e rho = 0,05	0,435	0,414	0,393	0,373	0,354	0,336	0,318	0,301	0,284
Variação do Consumo		-0,021	-0,021	-0,020	-0,019	-0,019	-0,018	-0,017	-0,017
Utilidade	1,319	1,222	1,132	1,048	0,970	0,897	0,829	0,766	0,707
Variação da Utilidade		-0,097	-0,090	-0,084	-0,078	-0,073	-0,068	-0,063	-0,059
tau	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
beta	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950
alpha	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330
theta	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
Produção para beta = 0,950 e rho = 0,05	0,570	0,574	0,578	0,583	0,588	0,594	0,600	0,607	0,614
Variação Produção		0,004	0,004	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,007
Capital para beta = 0,950 e rho = 0,05	7,000	7,135	7,295	7,480	7,689	7,923	8,181	8,463	8,770
Variação Capital		0,135	0,160	0,185	0,209	0,234	0,258	0,282	0,306
Variação Beta (0,95)	1,000	0,950	0,903	0,857	0,815	0,774	0,735	0,698	0,663
Variação Tx desc. (0,05)	0,000	0,053	0,108	0,166	0,228	0,292	0,360	0,432	0,507
Para beta = 0,980 e rho = 0,02									
Período	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Consumo para beta = 0,980 e rho = 0,02	0,347	0,351	0,355	0,358	0,361	0,364	0,366	0,368	0,370
Variação do Consumo		0,004	0,004	0,003	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002
Utilidade	1,178	1,161	1,144	1,126	1,108	1,090	1,072	1,054	1,035
Variação da Utilidade		-0,017	-0,017	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018
tau	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
beta	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980
alpha	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330	0,330
theta	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
Produção para beta = 0,980 e rho = 0,02	0,570	0,576	0,582	0,588	0,594	0,599	0,605	0,611	0,616
Variação Produção		0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006	0,006
Capital para beta = 0,980 e rho = 0,02	7,000	7,223	7,448	7,676	7,906	8,138	8,373	8,612	8,854
Variação Capital		0,223	0,225	0,227	0,230	0,232	0,235	0,239	0,242
Variação Beta (0,98)	1,000	0,980	0,960	0,941	0,922	0,904	0,886	0,868	0,851
Variação Tx desc. (0,02)	0,000	0,020	0,041	0,062	0,084	0,106	0,129	0,152	0,175

FONTE: O autor

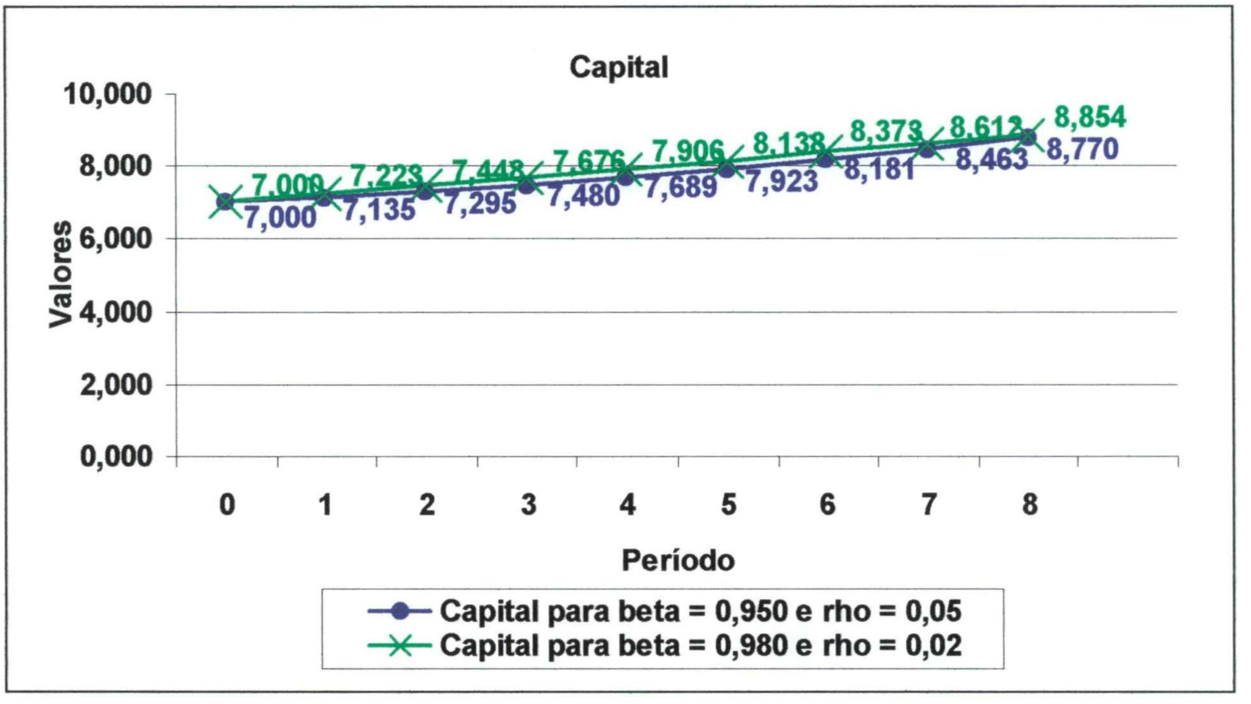
Se aumentarmos a taxa de desconto, conseqüentemente ocorrerá uma diminuição mais rápida do fator de desconto pela relação já exposta obtendo uma utilidade mais baixa por período, logo, como será demonstrado no GRÁFICO 10, a uma taxa de desconto de 0,05 o consumo tenderá a uma queda, influenciando no estoque de capital. Para mensurar os níveis de estoque de capital ao longo dos períodos, se faz necessário uma análise entre as taxas de desconto e o objetivo do capital a ser atingido, como observa-se no gráfico 11.

GRÁFICO 10 – MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW, PROGRAMAÇÃO LINEAR E O SOFTWARE EXCEL – CONSUMO E O AUMENTO DA TAXA DE DESCONTO E DIMINUIÇÃO DO FATOR DE DESCONTO BETA



FONTE: O autor

GRÁFICO 11 – MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW, PROGRAMAÇÃO LINEAR E O SOFTWARE EXCEL – CAPITAL E O AUMENTO DA TAXA DE DESCONTO E DIMINUIÇÃO DO FATOR DE DESCONTO BETA

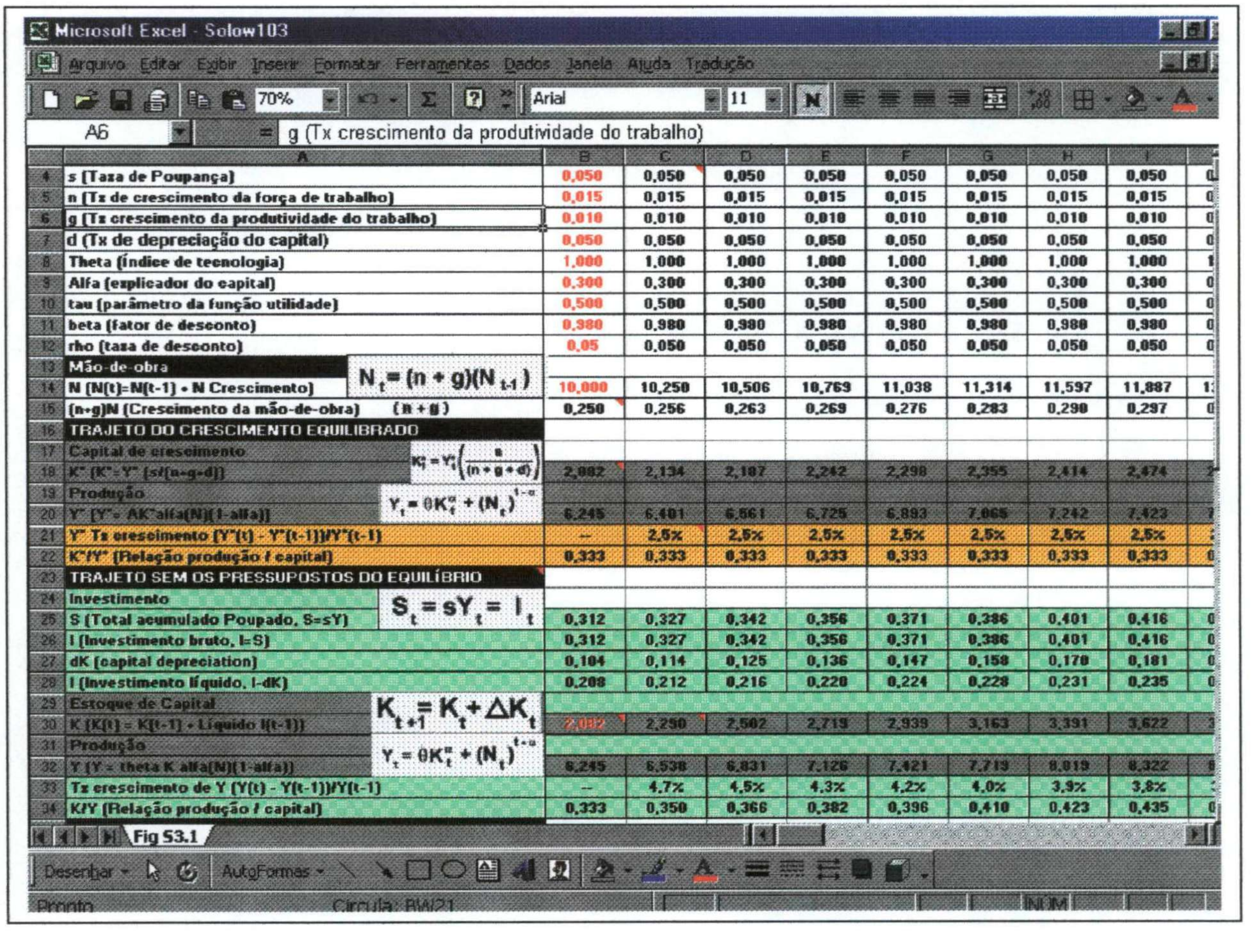


FONTE: O autor

4.2 Modelo de Crescimento de Solow – Análise do Modelo Equilibrado e Modelo Excluindo os Pressupostos do Equilíbrio.

O quadro que segue representa os modelos propostos, que serão objeto de análise.

QUADRO 4 – MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW – ANÁLISE DO MODELO DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO E O MODELO EXCLUINDO OS PRESSUPOSTOS DO CRESCIMENTO EQUILÍBRADO



Microsoft Excel - Solow103

A6 = g (Tx crescimento da produtividade do trabalho)

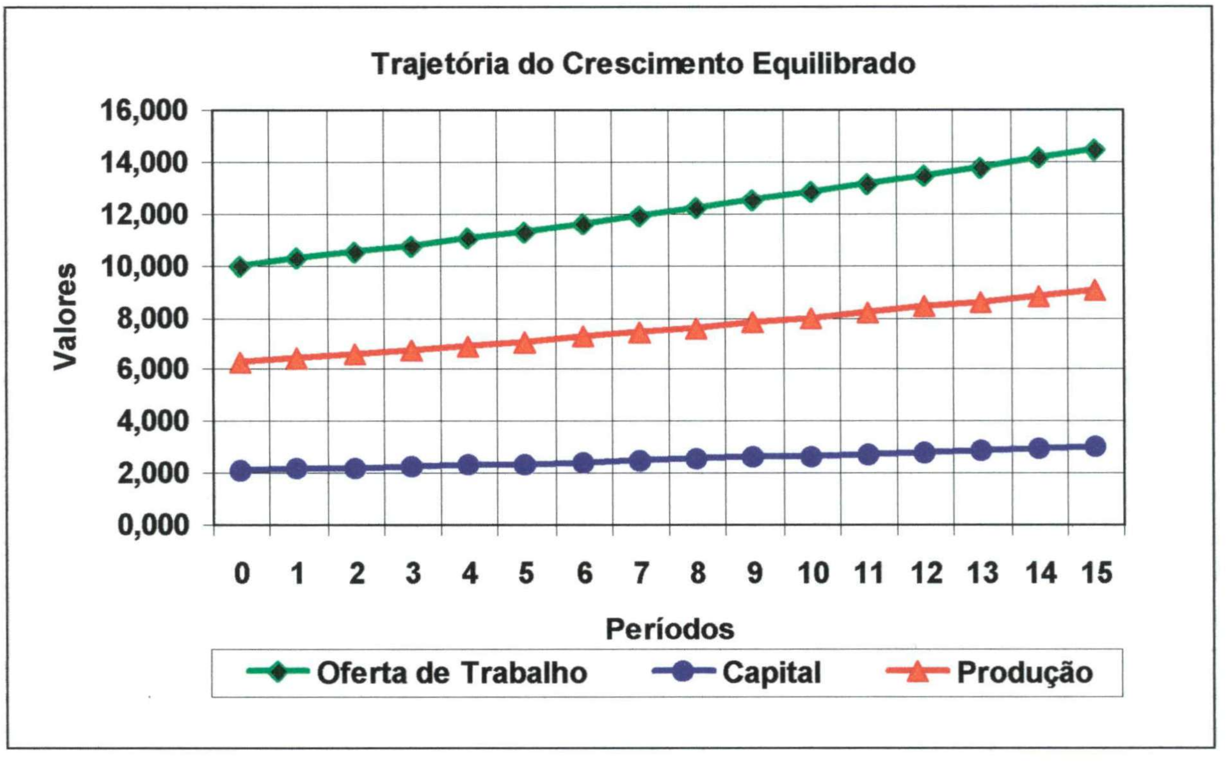
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
4	s (Taxa de Poupança)	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050
5	n (Tx de crescimento da força de trabalho)	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015
6	g (Tx crescimento da produtividade do trabalho)	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010
7	d (Tx de depreciação do capital)	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050
8	Theta (índice de tecnologia)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
9	Alfa (explicador do capital)	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
10	tau (parâmetro da função utilidade)	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
11	beta (fator de desconto)	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980
12	rho (taxa de desconto)	0,05	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050
13	Mão-de-obra $N_t = (n+g)(N_{t-1})$								
14	N (N(t)=N(t-1) + N Crescimento)	10,000	10,250	10,506	10,769	11,038	11,314	11,597	11,887
15	(n+g)N (Crescimento da mão-de-obra) $(n+g)$	0,250	0,256	0,263	0,269	0,276	0,283	0,290	0,297
16	TRAJETO DO CRESCIMENTO EQUILIBRADO								
17	Capital de crescimento $K^*_t = Y^*_t\left(\frac{s}{(n+g+d)}\right)$								
18	K* (K* = Y* (s/(n+g+d))	2,082	2,134	2,187	2,242	2,298	2,355	2,414	2,474
19	Produção $Y_t = \theta K^{\alpha}_t + (N_t)^{1-\alpha}$								
20	Y* [Y* = AK*alfa(N)(1-alfa)]	6,245	6,401	6,561	6,725	6,893	7,065	7,242	7,423
21	Y* Tx crescimento (Y*(t) - Y*(t-1))/Y*(t-1)	--	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%
22	K*/Y* (Relação produção / capital)	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
23	TRAJETO SEM OS PRESSUPOSTOS DO EQUILÍBRIO								
24	Investimento $S_t = sY_t = I_t$								
25	S (Total acumulado Poupado, S=sY)	0,312	0,327	0,342	0,356	0,371	0,386	0,401	0,416
26	I (Investimento bruto, I=S)	0,312	0,327	0,342	0,356	0,371	0,386	0,401	0,416
27	dK (capital depreciation)	0,104	0,114	0,125	0,136	0,147	0,158	0,170	0,181
28	I (Investimento líquido, I-dK)	0,208	0,212	0,216	0,220	0,224	0,228	0,231	0,235
29	Estoque de Capital $K_{t+1} = K_t + \Delta K_t$								
30	K (K(t) = K(t-1) + Líquido I(t-1))	2,082	2,290	2,502	2,719	2,939	3,163	3,391	3,622
31	Produção $Y_t = \theta K^{\alpha}_t + (N_t)^{1-\alpha}$								
32	Y (Y = theta K alfa(N)(1-alfa))	6,245	6,538	6,831	7,126	7,421	7,719	8,019	8,322
33	Tx crescimento de Y (Y(t) - Y(t-1))/Y(t-1)	--	4,7%	4,5%	4,3%	4,2%	4,0%	3,9%	3,8%
34	K/Y (Relação produção / capital)	0,333	0,350	0,366	0,382	0,396	0,410	0,423	0,435

Fig S3.1

FONTE: Exploring Economic Models using Excel. Southern Economic Journal, vol. 66, n.3, january 2000, - Adaptado pelo autor.

O gráfico abaixo ilustra as suposições de Solow sobre a trajetória do crescimento equilibrado onde o capital K cresce a mesma taxa (ajustado a produtividade) da oferta de trabalho N, desde que a mão-de-obra cresça a uma taxa n, e a produtividade do trabalho cresça a uma taxa g. A oferta de trabalho será então (n+g).

GRÁFICO 12 – MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW – ANÁLISE DO ESTADO DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO

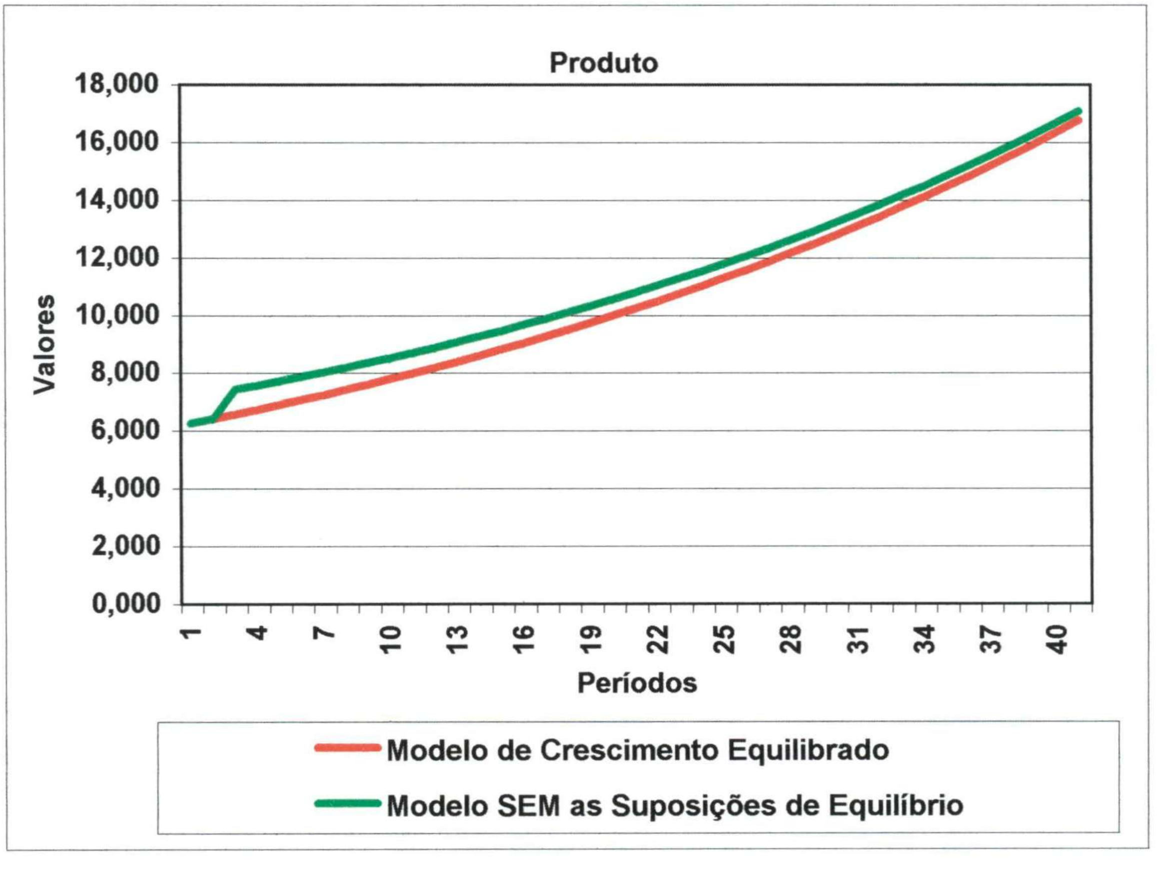


FONTE: O autor

Analisando a produção de acordo com o modelo com as suposições de equilíbrio e o modelo sem estas suposições, neste último, será aumentado o valor da poupança de 0,025 para 0,200 no primeiro período. De acordo com o GRÁFICO 12 percebemos um aumento na produção, tendendo a voltar à condição de crescimento equilibrado. Segundo a teoria de Solow, a economia se encontrará em estado de crescimento equilibrado quando as variáveis macroeconômicas crescem a uma taxa constante.

O produto tende a cair porque a poupança não é suficiente para sustentar o crescimento, e segundo Solow, um aumento (constante) do padrão tecnológico ou maior da poupança poderiam tirar esta suposta economia do estado estacionário.

GRÁFICO 13 – MODELO DE CRESCIMENTO DE SOLOW – ANÁLISE DO ESTADO DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO - PRODUÇÃO



5. CONCLUSÔES

A Teoria do Crescimento Econômico, ou a busca pela "fórmula" do crescimento econômico desperta o interesse de estudiosos à vários anos, fato este, que planilhas eletrônicas específicas e softwares como o excel, tem ganhado destaque cada vez maior como ferramenta de estudo desta "busca" no que se refere ao crescimento econômico.

Algumas conclusões relevantes e que foram expostas no Referencial Teórico e Resultados são as de que a essência do modelo de Solow para o crescimento econômico é o de que a poupança por si somente não poderá sustentar o crescimento de longo prazo, sendo que em determinado tempo se igualaria à taxa de depreciação e que a tecnologia ou fator técnico (exógeno) teria de ser aperfeiçoado, fato último que não define claramente em sua teoria. Por outro lado, embora **S**olow não explique algumas se suas suposições não se deve considerar o modelo errado, justamente porque não foi possível provar este fato, e ainda porque o modelo desenvolvido por ele é uma referência.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BLANCHARD, O. **Macroeconomia**. Rio de Janeiro: Campus, 1999.

CARVALHO, G. **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões**, Editora Campus ,2004

CHIANG, A. **Matemática para Economistas**. São Paulo: Ed. Livro de São Paulo, 1982.

KENDRICK, D. A.; MERCADO, P. R.; ANNAN, H. M. **Computational Economics**. Princeton University Press, 2005, 448 p.

MILES, C; KOSICKI, G. **Macroeconomia 2** – Crescimento Econômico, texto de apoio. **Supplement 3: The General Solow Balanced Growth Model**

_____. Exploring Economic Models using Excel. Southern Economic Journal, vol. 66, n.3, january 2000, pp. 770-792.

PRADO, D. **Programação Linear,** (Série Pesquisa Operacional – Volume 1, 4ª Edição) 2004

SHAPIRO, E. **Análise Macroeconômica**.2ª ed. São Paulo: Atlas, 1985.

ELLERY Jr, R; GOMES, V. **Modelo de Solow, Resíduo de Solow e Contabilidade do Crescimento.** Disponível em <http://www.victorgomes.com.br/docs/cursos/ecb1/solow_ecb.pdf>

SILVA, J. C. **Crescimento Econômico.** Capítulo I. Disponível em http://www.fep.up.pt/docentes/joao/macro2.htm

7. ANEXOS

ANEXO 1 – EXERCÍCIO PROGRAMAÇÃO TABULAR

Tabela Inicial

Ciclo 0

Variáveis			Não Básicas						
Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
Z	0	1	-30	-40	0	0	0	0	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	24	#DIV/0!
X_4	2	0	0	1	0	1	0	16	16
X_5	3	0	1	2	0	0	1	40	20

Cálculo da Linha 2 - PIVÔ (X_2 Entrou na base)

Ciclo 1

Variáveis									
Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
Z	0								
X_3	1								#DIV/0!
X_2	2	0	0	1	0	1	0	16	16
X_5	3								#DIV/0!

Fórmula: Nova linha Pivô = Antiga linha pivô / nº pivô

Cálculo da Nova Linha 0

Tabela Inicial

Ciclo 0

Variáveis			Não Básicas						
Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
Z	0	1	-30	-40	0	0	0	0	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	24	#DIV/0!
X_4	2	0	0	1	0	1	0	16	16
X_5	3	0	1	2	0	0	1	40	20

Nova Linha 0

Ciclo 1

Variáveis									
Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
Z	0	1	-30	0	0	40	0	640	
X_2	1	0	0	1	0	1	0	16	
X_3	2								
X_5	3								

Fórmula: Nova linha 0=Antiga linha zero - (coeficiênte da coluna pivô x nova linha pivô)

Cálculo da Nova Linha 1

Tabela Inicial

Ciclo 0

Variáveis			Não Básicas						
Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
Z	0	1	-30	0	0	40	0	640	
X_3	1	0	1	0	1	0	0	24	#DIV/0!
X_4	2	0	0	1	0	1	0	16	16
X_5	3	0	1	2	0	0	1	40	20

Nova Linha 1 (X_2)

Ciclo 1

Variáveis									
Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
Z	0	1	-30	0	0	40	0	640	0
X_2	1	0	0	1	0	1	0	16	
X_3	2								
X_5	3								

Cálculo da Nova Linha 2 (X3)

Tabela Inicial

Ciclo 0	Variáveis			Não Básicas						
	Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
	Z	0	1	-30	0	0	40	0	640	
	X_3	1	0	1	0	1	0	0	24	#DIV/0!
	X_4	2	0	0	1	0	1	0	16	16
	X_5	3	0	1	2	0	0	1	40	20

Nova Linha 2 (X3)

Ciclo 1	Variáveis									
	Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
	Z	0	1	-30	0	0	40	0	640	
	X_2	1	0	0	1	0	1	0	16	
	X_3	2	0	1	0	1	0	0	24	
	X_5	3								

Fórmula: Nova linha 2=Antiga linha 2 - (coeficiênte da coluna pivô x nova linha pivô)

Cálculo da Nova Linha 3 (x5)

Tabela Inicial

Ciclo 0	Variáveis			Não Básicas						
	Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
	Z	0	1	-30	0	0	40	0	640	
	X_3	1	0	1	0	1	0	0	24	#DIV/0!
	X_4	2	0	0	1	0	1	0	16	16
	X_5	3	0	1	2	0	0	1	40	20

Nova Linha 3 (x5)

Ciclo 1	Variáveis									
	Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
	Z	0	1	-30	0	0	40	0	640	
	X_2	1	0	0	1	0	1	0	16	
	X_3	2	0	1	0	1	0	0	24	
	X_5	3	0	0	1	0	1	0	16	

Fórmula: Nova linha 3=Antiga linha 3 - (coeficiênte da coluna pivô x nova linha pivô)

CICLO 02

Tabela Inicial do CICLO 02

Ciclo 2.0	Variáveis									
	Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
	Z	0	1	-30	0	0	40	0	640	
	X_2	1	0	0	1	0	1	0	16	#DIV/0!
	X_3	2	0	1	0	1	0	0	24	24
	X_5	3	0	0	1	0	1	0	16	#DIV/0!

Cálculo da Nova Linha Pivô

Linha Pivô

Ciclo 2.1	Variáveis									
	Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
	Z	0	1	-30	0	0	40	0	640	
	X_1	1	0	1	0	1	0	0	24	24
	X_2	2	0	0	1	0	1	0	16	#DIV/0!
	X_5	3	0	0	1	0	1	0	16	#DIV/0!

Cálculo da Nova Linha 0

Ciclo 2.0

Tabela Inicial

Variáveis Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
Z	0	1	-30	0	0	40	0	640	
X_1	1	0	1	0	1	0	0	24	24
X_2	2	0	0	1	0	1	0	16	#DIV/0!
X_5	3								

Ciclo 2.1

Cálculo da Nova Linha 0

Variáveis Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
Z	0	1	0	0	30	40	0	1360	
X_1	1	0	1	0	1	0	0	24	24
X_2	2	0	0	1	0	1	0	16	#DIV/0!
X_5	3								

Cálculo da Nova Linha 0

Ciclo 2.0

Tabela Inicial

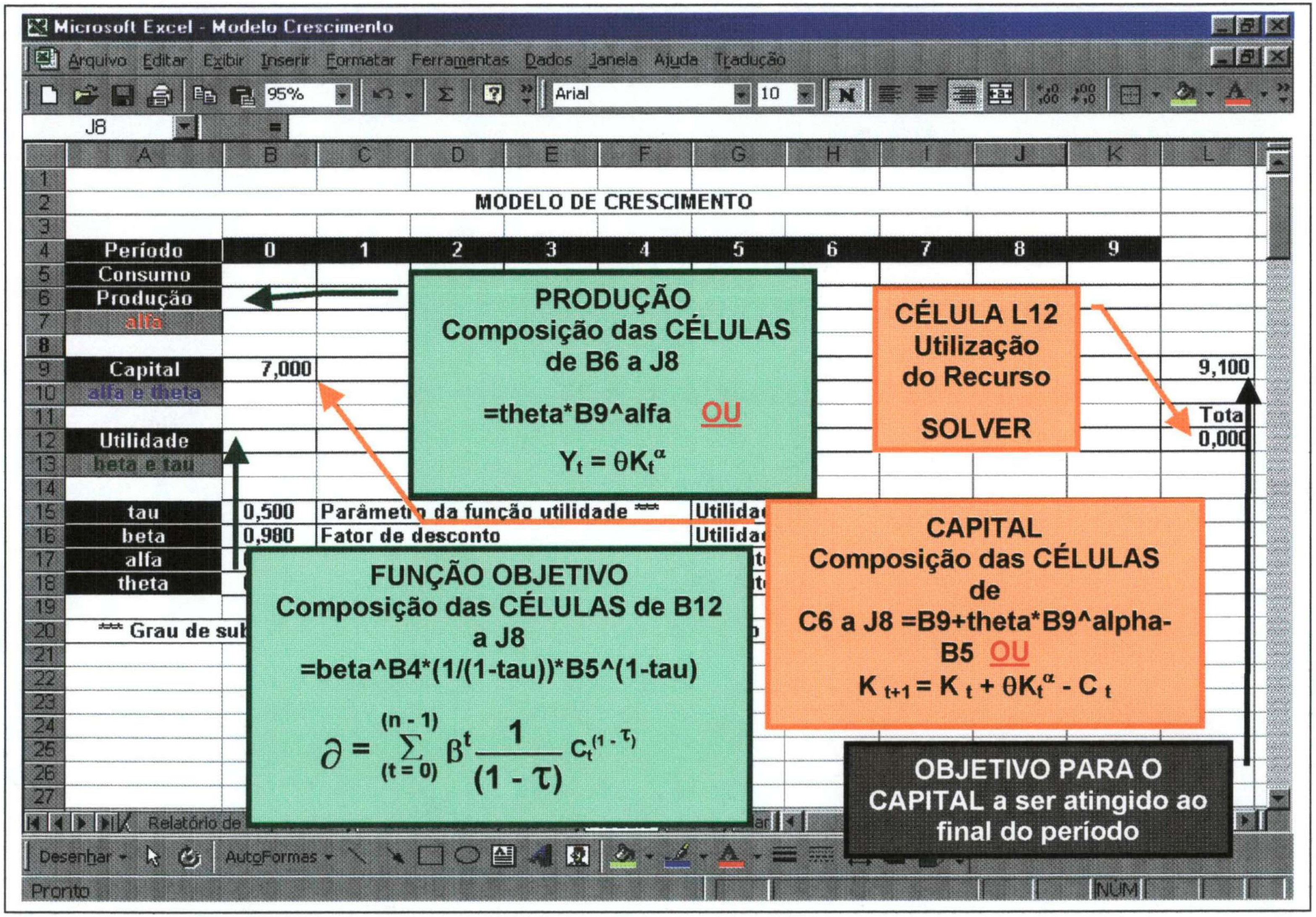
Variáveis Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
Z	0	1	-30	0	0	40	0	640	
X_1	1	0	1	0	1	0	0	24	24
X_2	2	0	0	1	0	1	0	16	#DIV/0!
X_5	3								

Ciclo 2.1

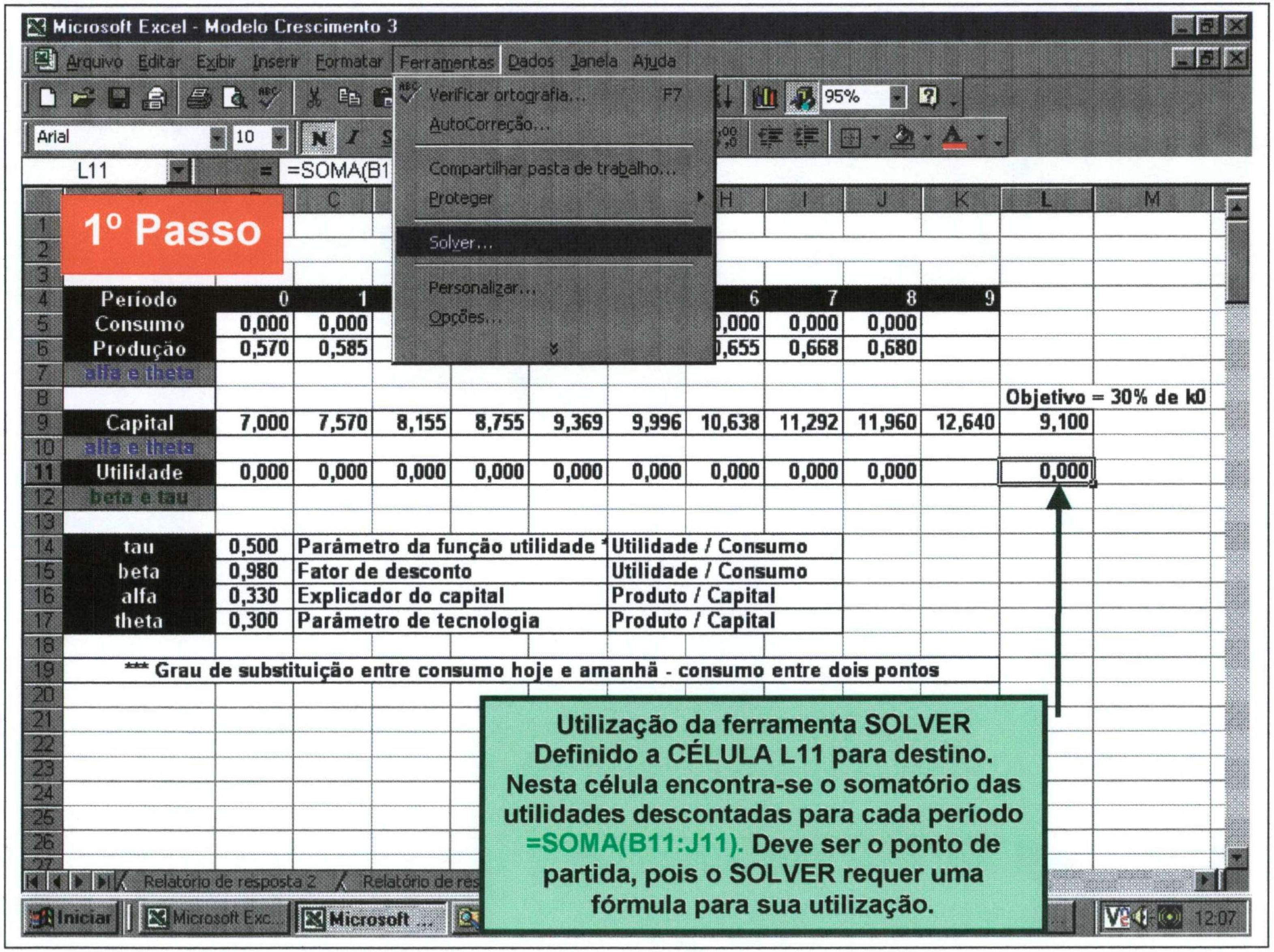
Cálculo da Nova Linha 0

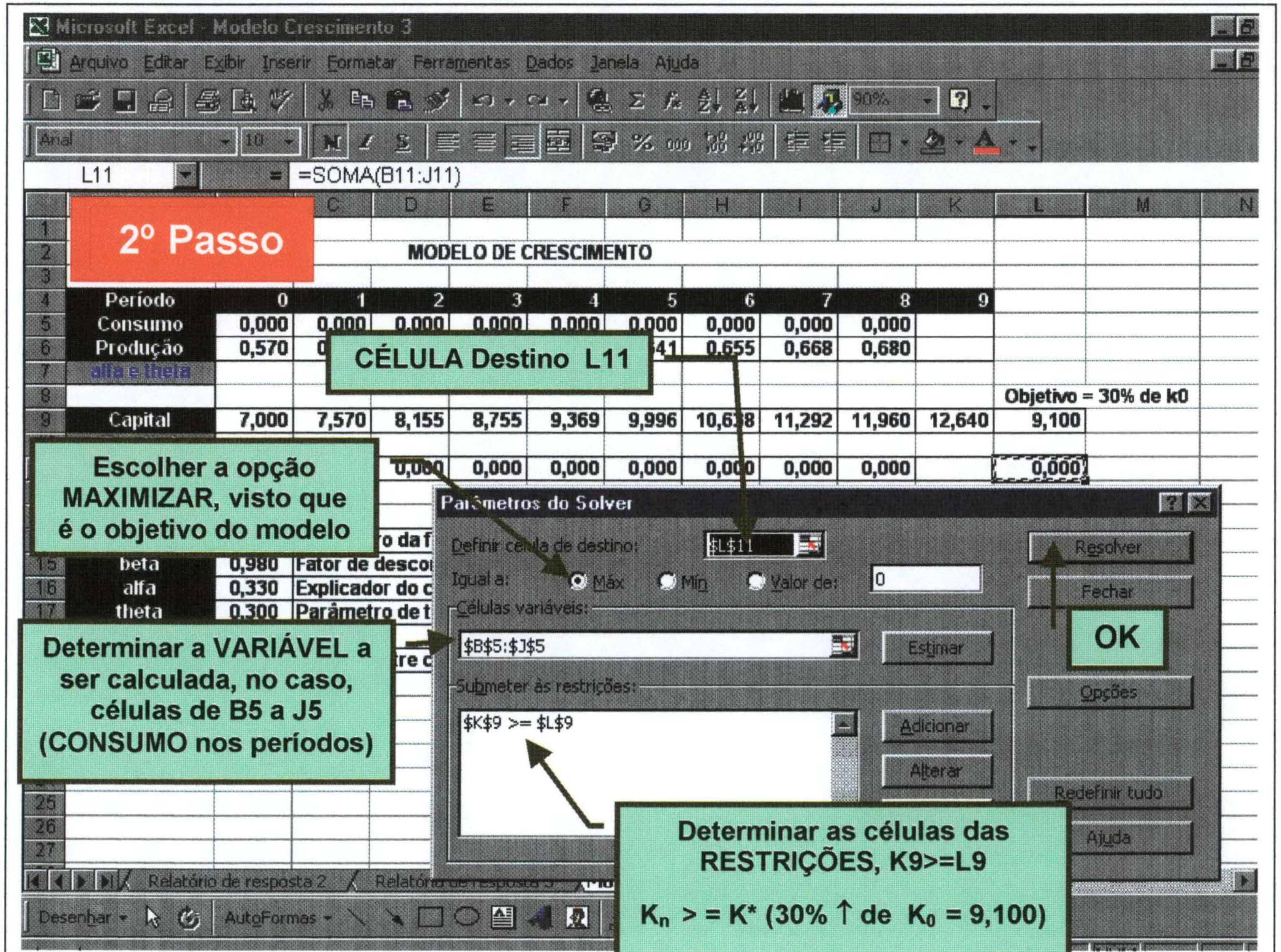
Variáveis Básicas	Equação	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Constante	Divisão
Z	0	1	0	0	30	40	0	1360	
X_1	1	0	1	0	1	0	0	24	24
X_2	2	0	0	1	0	1	0	16	#DIV/0!
X_5	3								

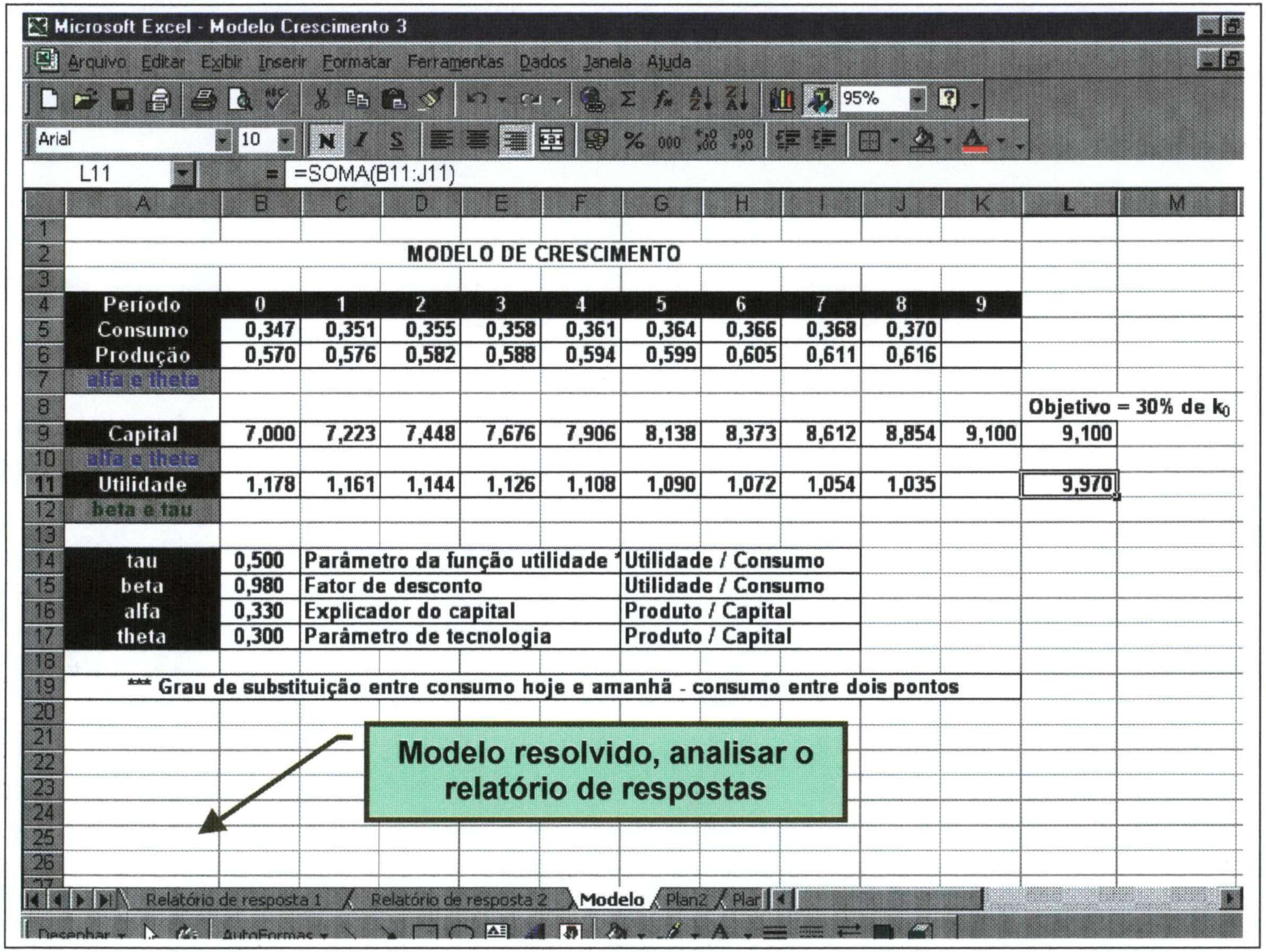
ANEXO 2 – ELABORAÇÃO DO MODELO DE CRESCIMENTO - CONSUMO E UTILIDADE NA PLANILHA ELETRÔNICA

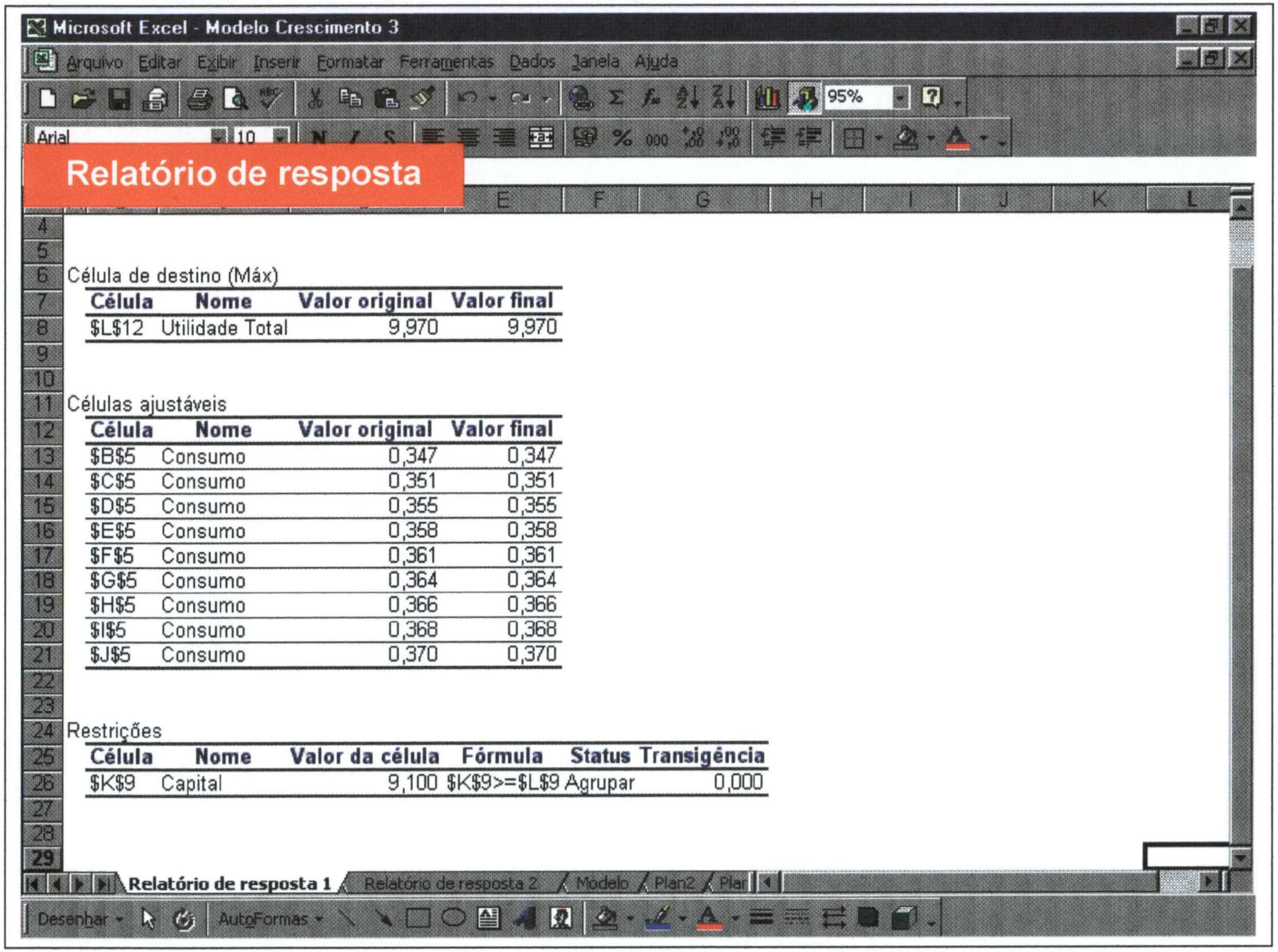


ANEXO 3 – UTILIZAÇÃO DA FERRAMENTA SOLVER




Microsoft Excel - Modelo Crescimento 3
2º Passo
MODELO DE CRESCIMENTO
CÉLULA Destino L11
Objetivo = 30% de k0
Escolher a opção MAXIMIZAR, visto que é o objetivo do modelo
Parâmetros do Solver
Definir célula de destino: $L$11
Igual a: Máx Mín Valor de: 0
Células variáveis: $B$5:$J$5
Submeter às restrições: $K$9 >= $L$9
Resolver
Fechar
OK
Estimar
Opções
Adicionar
Alterar
Redefinir tudo
Ajuda
Determinar a VARIÁVEL a ser calculada, no caso, células de B5 a J5 (CONSUMO nos períodos)
Determinar as células das RESTRIÇÕES, K9>=L9
Kn > = K* (30% ↑ de K0 = 9,100)


Microsoft Excel - Modelo Crescimento 3
Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda
95%
Arial 10
L11 = =SOMA(B11:J11)
MODELO DE CRESCIMENTO
Período 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Consumo 0,347 0,351 0,355 0,358 0,361 0,364 0,366 0,368 0,370
Produção 0,570 0,576 0,582 0,588 0,594 0,599 0,605 0,611 0,616
alfa e theta
Objetivo = 30% de k0
Capital 7,000 7,223 7,448 7,676 7,906 8,138 8,373 8,612 8,854 9,100 9,100
alfa e theta
Utilidade 1,178 1,161 1,144 1,126 1,108 1,090 1,072 1,054 1,035 9,970
beta e tau
tau 0,500 Parâmetro da função utilidade * Utilidade / Consumo
beta 0,980 Fator de desconto Utilidade / Consumo
alfa 0,330 Explicador do capital Produto / Capital
theta 0,300 Parâmetro de tecnologia Produto / Capital
*** Grau de substituição entre consumo hoje e amanhã - consumo entre dois pontos
Modelo resolvido, analisar o relatório de respostas
Relatório de resposta 1
Relatório de resposta 2
Modelo
Plan2
Desenhar
AutoFormas



Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$L$12	Utilidade Total	9,970	9,970

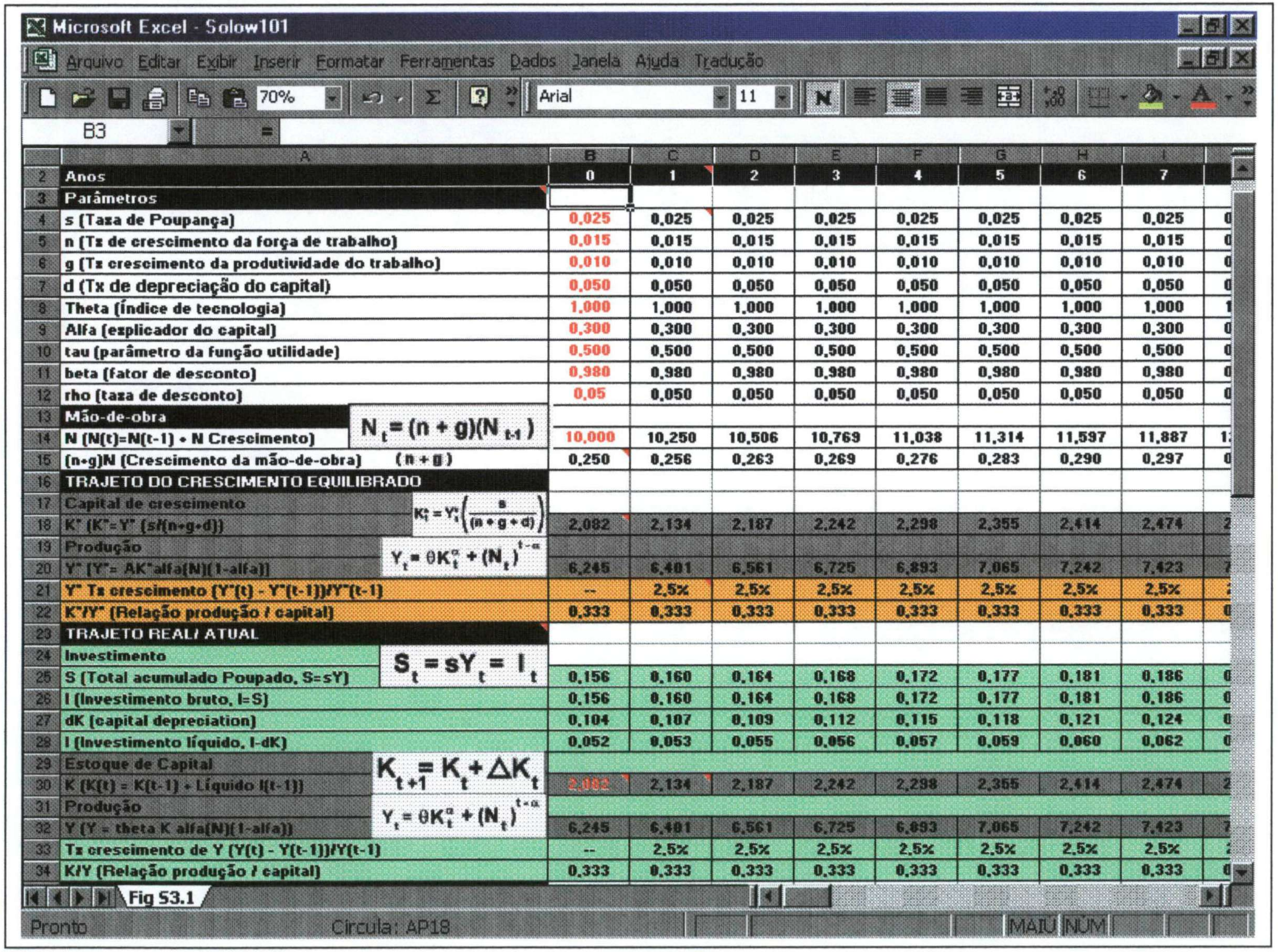
Células ajustáveis

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$B$5	Consumo	0,347	0,347
$C$5	Consumo	0,351	0,351
$D$5	Consumo	0,355	0,355
$E$5	Consumo	0,358	0,358
$F$5	Consumo	0,361	0,361
$G$5	Consumo	0,364	0,364
$H$5	Consumo	0,366	0,366
$I$5	Consumo	0,368	0,368
$J$5	Consumo	0,370	0,370

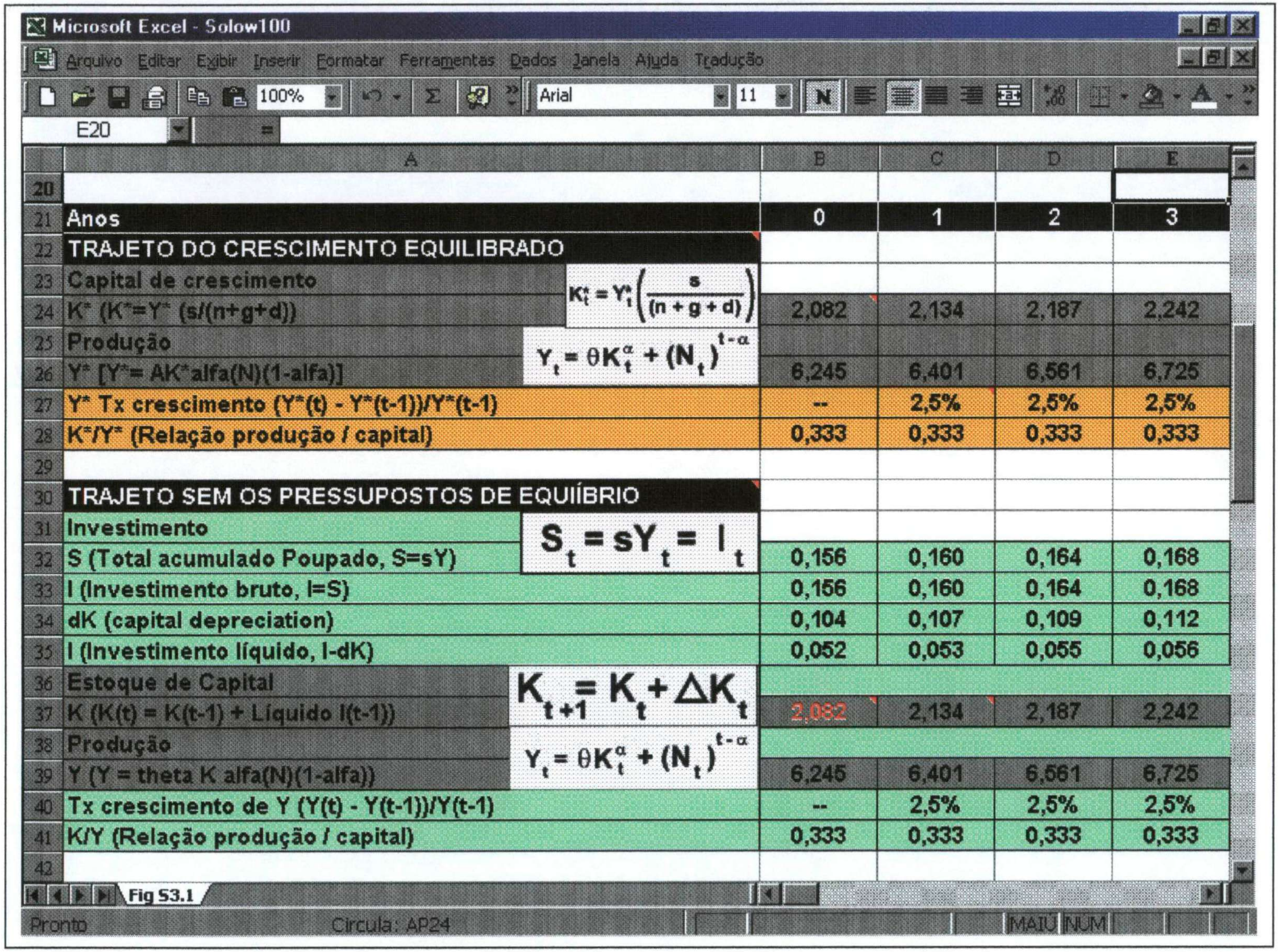
Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Status	Transigência
$K$9	Capital	9,100	$K$9>=$L$9	Agrupar	0,000

ANEXO 4. ELABORAÇÃO DO MODELO DE CRESCIMENTO EQUILIBRADO DE SOLOW E DO MODELO SEM AS SUPOSIÇÕES DE EQUILÍBRIO.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2	Anos	0	1	2	3	4	5	6	7
3	Parâmetros								
4	s (Taxa de Poupança)	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025
5	n (Tx de crescimento da força de trabalho)	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015
6	g (Tx crescimento da produtividade do trabalho)	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010
7	d (Tx de depreciação do capital)	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050
8	Theta (Índice de tecnologia)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
9	Alfa (explicador do capital)	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300	0,300
10	tau (parâmetro da função utilidade)	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
11	beta (fator de desconto)	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980
12	rho (taxa de desconto)	0,05	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050	0,050
13	Mão-de-obra $N_t = (n+g)(N_{t-1})$								
14	N (N(t)=N(t-1) + N Crescimento)	10,000	10,250	10,506	10,769	11,038	11,314	11,597	11,887
15	(n+g)N (Crescimento da mão-de-obra) (n + g)	0,250	0,256	0,263	0,269	0,276	0,283	0,290	0,297
16	TRAJETO DO CRESCIMENTO EQUILIBRADO								
17	Capital de crescimento $K_t^* = Y_t^*\left(\frac{s}{(n+g+d)}\right)$								
18	K* (K*=Y* (s/(n+g+d))	2,082	2,134	2,187	2,242	2,298	2,355	2,414	2,474
19	Produção $Y_t = \theta K_t^{\alpha} + (N_t)^{t-\alpha}$								
20	Y* (Y*= AK*alfa(N)(1-alfa))	6,245	6,401	6,561	6,725	6,893	7,065	7,242	7,423
21	Y* Tx crescimento (Y*(t) - Y*(t-1))/Y*(t-1)	--	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%
22	K*/Y* (Relação produção / capital)	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333
23	TRAJETO REAL/ ATUAL								
24	Investimento $S_t = sY_t = I_t$								
25	S (Total acumulado Poupado, S=sY)	0,156	0,160	0,164	0,168	0,172	0,177	0,181	0,186
26	I (Investimento bruto, I=S)	0,156	0,160	0,164	0,168	0,172	0,177	0,181	0,186
27	dK (capital depreciation)	0,104	0,107	0,109	0,112	0,115	0,118	0,121	0,124
28	I (Investimento líquido, I-dK)	0,052	0,053	0,055	0,056	0,057	0,059	0,060	0,062
29	Estoque de Capital $K_{t+1} = K_t + \Delta K_t$								
30	K (K(t) = K(t-1) + Líquido I(t-1))	2,082	2,134	2,187	2,242	2,298	2,355	2,414	2,474
31	Produção $Y_t = \theta K_t^{\alpha} + (N_t)^{t-\alpha}$								
32	Y (Y = theta K alfa(N)(1-alfa))	6,245	6,401	6,561	6,725	6,893	7,065	7,242	7,423
33	Tx crescimento de Y (Y(t) - Y(t-1))/Y(t-1)	--	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%	2,5%
34	K/Y (Relação produção / capital)	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333



	A	B	C	D	E
20					
21	Anos	0	1	2	3
22	TRAJETO DO CRESCIMENTO EQUILIBRADO				
23	Capital de crescimento $K^*_t = Y^*_t\left(\frac{s}{(n+g+d)}\right)$				
24	K* (K*=Y* (s/(n+g+d))	2,082	2,134	2,187	2,242
25	Produção $Y_t = \theta K^{\alpha}_t + (N_t)^{t-\alpha}$				
26	Y* [Y*= AK*alfa(N)(1-alfa)]	6,245	6,401	6,561	6,725
27	Y* Tx crescimento (Y*(t) - Y*(t-1))/Y*(t-1)	--	2,5%	2,5%	2,5%
28	K*/Y* (Relação produção / capital)	0,333	0,333	0,333	0,333
29					
30	TRAJETO SEM OS PRESSUPOSTOS DE EQUIÍBRIO				
31	Investimento $S_t = sY_t = I_t$				
32	S (Total acumulado Poupado, S=sY)	0,156	0,160	0,164	0,168
33	I (Investimento bruto, I=S)	0,156	0,160	0,164	0,168
34	dK (capital depreciation)	0,104	0,107	0,109	0,112
35	I (Investimento líquido, I-dK)	0,052	0,053	0,055	0,056
36	Estoque de Capital $K_{t+1} = K_t + \Delta K_t$				
37	K (K(t) = K(t-1) + Líquido I(t-1))	2,082	2,134	2,187	2,242
38	Produção $Y_t = \theta K^{\alpha}_t + (N_t)^{t-\alpha}$				
39	Y (Y = theta K alfa(N)(1-alfa))	6,245	6,401	6,561	6,725
40	Tx crescimento de Y (Y(t) - Y(t-1))/Y(t-1)	--	2,5%	2,5%	2,5%
41	K/Y (Relação produção / capital)	0,333	0,333	0,333	0,333
42					