

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

VITHOR BERNARDO NYPWIPWY

MODELAGEM DE AMPLIFICADORES DE POTÊNCIA PARA  
SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES MÓVEIS ATRAVÉS DE SÉRIE DE  
VOLTERRA POLAR EXPANDIDA POR FUNÇÕES DE BASE DE  
LAGUERRE E FRACIONÁRIA

CURITIBA

2022

VITHOR BERNARDO NYPWIPWY

MODELAGEM DE AMPLIFICADORES DE POTÊNCIA PARA  
SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES MÓVEIS ATRAVÉS DE SÉRIE DE  
VOLTERRA POLAR EXPANDIDA POR FUNÇÕES DE BASE DE  
LAGUERRE E FRACIONÁRIA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Área de Concentração Telecomunicações, Departamento de Engenharia Elétrica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Ph.D. Eduardo Gonçalves de Lima

Coorientador: Prof. Dr. César Augusto Dartora

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Nypwipwy, Vithor Bernardo

Modelagem de amplificadores de potência para sistemas de comunicações móveis através de série de Volterra polar expandida por funções de base de Laguerre e fracionária / Vithor Bernardo Nypwipwy. – Curitiba, 2022.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Orientador: Eduardo Gonçalves de Lima

Coorientador: César Augusto Dartora

1. Amplificadores de potência. 2. Sistemas de comunicação móvel. 3. Volterra, Equações de. 4. Laguerre, Funções de. 5. Volterra, Série de. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. III. Lima, Eduardo Gonçalves de. IV. Dartora, César Augusto. V. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA  
ELÉTRICA - 40001016043P4

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA ELÉTRICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **VITHOR BERNARDO NYPWIPWY** intitulada: **Modelagem de amplificadores de potência para sistemas de comunicações móveis através de série de Volterra polar expandida por funções de base de Laguerre e fracionária**, sob orientação do Prof. Dr. EDUARDO GONÇALVES DE LIMA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 04 de Março de 2022.

Assinatura Eletrônica

04/03/2022 17:29:34.0

EDUARDO GONÇALVES DE LIMA

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

04/03/2022 16:58:45.0

LUIS HENRIQUE ASSUMPCÃO LOLIS

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

06/03/2022 06:38:39.0

MARCELO KAMINSKI LENZI

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

04/03/2022 17:32:13.0

LUIS CARLOS VIEIRA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Difícil é conviver com os medos, porém...

“há quem tenha medo que o medo acabe”  
Mia Couto

Aos

Meus pais (in memorian): Paulina Canhaua e Armando Chuva  
Minha Esposa  
Meus Filhos;  
Meus irmão e familiares.

Dedico

## AGRADECIMENTOS

À Deus, pelo dom da vida e conhecimento  
Ao Prof. Ph.D. Eduardo Gonçalves de Lima, pela sábia e incansável orientação;  
Ao Prof. Dr. César Augusto Dartora, pela co-orientação;  
À minha esposa, filhos e irmãos, pelo crédito e encorajamento;  
Aos familiares e amigos, pela força;  
Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Esta tese propõe três abordagens diferentes. A primeira abordagem expande o modelo da série de Volterra Polar em um conjunto de funções de base ortogonal de Laguerre, denominado modelo de Laguerre-Volterra Polar. O modelo possui um conjunto de polos de valor real que podem ser otimizados para descrever a dinâmica de um amplificador de potência de radiofrequência (RF PA) e é usado para a definição da segunda abordagem. A segunda abordagem modifica o modelo de Laguerre-Volterra Polar usando técnicas de truncamento independentes de modo que tenha 10 fatores de truncamento, dentre eles, três conjuntos de Funções de Base Ortonormal de Laguerre. O modelo resultante da segunda abordagem é denominado modelo de Laguerre-Volterra Polar Modificado. A terceira abordagem estende o modelo de Volterra Polar bidimensional para uma ordem de derivada fracionária através da solução numérica de Mittag-Leffler de um conjunto de funções geradoras ortonormais fracionárias. O modelo resultante da terceira abordagem é denominado modelo de Volterra Polar fracionário bidimensional. Os três modelos, além de reproduzirem as distorções das não linearidades de um RF PA, reduzem significativamente a quantidade de parâmetros gerados e melhoram substancialmente as respectivas acurácias de modelagem. No primeiro e segundo modelos, foi utilizado um dispositivo em teste. Em comparação com vários modelos, o modelo de Laguerre-Volterra Polar Modificado proposto, contendo um número maior de fatores de truncamento independentes, pode proporcionar uma redução superior a 50% no número de coeficientes gerados, chegando a um máximo de 84%. Em outra comparação com os demais modelos, o modelo de Laguerre-Volterra Polar Modificado contendo três conjuntos de funções de Laguerre melhorou significativamente a precisão da modelagem, quantificada por melhorias do erro quadrático médio normalizado de até 6,51 dB e a razão de potência de erro do canal adjacente de até 7,29 dB, quando comparado ao anterior modelo de Volterra Polar modificado sob a mesma complexidade computacional. No terceiro modelo foram utilizados três dispositivos diferentes em teste. Em comparação com vários modelos, a abordagem de Volterra Polar fracionário bidimensional proporcionou uma redução do número de parâmetros gerados no modelo acima de 81,5% e melhorou significativamente a precisão da modelagem, quantificada por melhorias do erro quadrático médio normalizado de até 8,72 dB.

Palavras-chave: Amplificador de Potência. Derivada Fracionária. Funções Geradoras Fracionárias. Funções de Laguerre. Funções de Mittag-Leffler. Série de Volterra. Truncamento Independente.

## ABSTRACT

This thesis proposes three different approaches. The first approach expands the Polar-Volterra series into a set of Laguerre orthonormal basis functions, called the Laguerre-Volterra Polar model. The model has a set of real-value poles that can be optimized to describe the Radio Frequency Power Amplifier (RF PA) dynamics and is used to define the second approach. The second approach modifies the Laguerre-Volterra Polar model using independent truncation techniques so that it has 10 truncation factors, including three sets of Laguerre Orthonormal Basis Functions. The model resulting from the second approach is called the Modified Laguerre Polar-Volterra model. The third approach extends the two-dimensional Polar Volterra series to a fractional derivative order through the numerical Mittag-Leffler solution of fractional orthonormal generating functions. The model resulting from the third approach is called the two-dimensional fractional Polar Volterra model. The three models, in addition to reproducing the distortions of the nonlinearities of a RF PA, significantly reduce the amount of parameters generated and substantially improve the modeling accuracy. In the first and second models, a device under test was used. In comparison of several models, the proposed modified Laguerre-Volterra Polar model, containing a larger number of independent truncation factors, can provide a reduction over 50% in the number of generated coefficients, reaching a maximum of 84%. In another comparison with the other models, the modified Laguerre-Volterra Polar model containing three sets of Laguerre functions significantly improved the modeling accuracy, quantified by improvements of normalized mean square error of up to 6.51 dB and the adjacent channel error power ratio of up to 7.29 dB, when it is compared to the previous modified Polar-Volterra model under the same computational complexity. In the third model, three different devices under test were used. In comparison of several models, the two-dimensional fractional Polar Volterra approach provided a reduction of the number of generated parameters in the model over 81.5% and significantly improved the modeling accuracy, quantified by improvements of normalized mean square error of up to 8.72 dB.

Keywords: Behavioral Modeling. Fractional Derivative. Independent Truncation. Laguerre Functions. Mittag-Leffler Functions. Power Amplifier. Volterra Series.

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Representação da envoltória complexa no plano complexo. Fonte: (REY-NAERT; STEYAERT, 2006) . . . . .	4
2.2	RF PA em aplicação no transmissor comunicação sem fio. Fonte: Modificado de (EROGLU, 2018) . . . . .	6
2.3	Rede de três portas do RF PA. Fonte: Modificado de (EROGLU, 2018) . . . . .	8
2.4	Representação do ponto de compressão de 1 dB para RF PAs. Fonte: Modificado de (BONFIM, 2016) . . . . .	12
2.5	Topologia cascata da DPD e o RF PA. . . . .	13
2.6	Arquitetura de aprendizagem direta e indireta da DPD. Fonte: Adaptado de (YU; JIANG, 2013) e (HUI <i>et al.</i> , 2015) . . . . .	14
2.7	Arquitetura de aprendizagem indireta da DPD com cópia do PoD. Fonte: Adaptado de (GILABERT; MONTORO; BERTRAN, 2005) . . . . .	15
2.8	Arquitetura de Redes de Função de Base Radial. Fonte: Adaptado de (LIMA; CUNHA; PEDRO, 2011) . . . . .	24
2.9	Arquitetura de rede perceptron de três camadas de múltiplas entradas. Fonte: Adaptado de (LIMA; CUNHA; PEDRO, 2011) . . . . .	26
2.10	Diagrama ilustrando a modelagem de um RF PA. Fonte: Adaptado de (BONFIM, 2016) . . . . .	33
3.1	Diagrama de blocos do modelo $LPVmdf$ . . . . .	56
5.1	Diagrama esquemático da configuração experimental . . . . .	70
5.2	Modelagem direta: NMSE em função do Número de Parâmetros . . . . .	73
5.3	PSD do sinal de erro da modelagem direta de $PVmdf$ e $LPVmdf$ . . . . .	75
5.4	Conversão AM-AM para modelagem direta de $LPVmdf$ . . . . .	76
5.5	Conversão AM-PM para modelagem direta de $LPVmdf$ . . . . .	77
5.6	Modelagem inversa: NMSE em função do Número de Parâmetros . . . . .	78
5.7	PSD do sinal de erro da modelagem inversa de $PVmdf$ e $LPVmdf$ . . . . .	79
5.8	Conversão AM-AM para modelagem inversa com 32 coeficientes . . . . .	80
5.9	Conversão AM-PM para modelagem inversa com 32 coeficientes . . . . .	81
5.10	NMSE/Número de Parâmetros das modelagens direta (RF PA) e inversa (DPD) usando $DUT_1$ . . . . .	84
5.11	Conversões AM-AM e AM-PM da modelagem direta usando $DUT_1$ . . . . .	85
5.12	Conversões AM-AM e AM-PM da modelagem inversa usando $DUT_1$ . . . . .	85
5.13	NMSE/Número de Parâmetros das modelagens direta (RF PA) e inversa (DPD) usando $DUT_2$ . . . . .	88
5.14	Conversão AM-AM e AM-PM da modelagem direta usando $DUT_2$ . . . . .	88
5.15	Conversão AM-AM e AM-PM da modelagem inversa usando $DUT_2$ . . . . .	89
5.16	NMSE/Número de Parâmetros das modelagens direta (RF PA) e inversa (DPD) usando $DUT_3$ . . . . .	91
5.17	Conversão AM-AM e AM-PM da modelagem direta usando $DUT_3$ . . . . .	92
5.18	Conversão AM-AM e AM-PM da modelagem inversa usando $DUT_3$ . . . . .	93

## LISTA DE TABELAS

2.1	Estado de Arte de Modelos de Laguerre-Volterra . . . . .	49
2.2	Estado de Arte de Modelos de Ordem Fracionária . . . . .	51
5.1	NMSEs da modelagem direta dos modelos $PV$ e $LPV$ . . . . .	72
5.2	NMSEs da modelagem inversa dos modelos $PV$ e $LPV$ . . . . .	72
5.3	NMSEs da modelagem direta dos modelos $PV$ , $PVmdf$ e $LPVmdf$ . . . . .	74
5.4	Comparação dos NMSEs da modelagem direta . . . . .	74
5.5	NMSEs da modelagem inversa dos modelos $PV$ , $PVmdf$ e $LPVmdf$ . . . . .	77
5.6	Comparação dos NMSEs da modelagem inversa . . . . .	78
5.7	Comparação dos modelos Laguerre-Volterra de (SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016) e $LPVmdf$ . . . . .	80
5.8	Comparação dos modelos Laguerre-Volterra de (WANG; NGUYEN; SCHUTTAINÉ, 2020) e $LPVmdf$ . . . . .	81
5.9	NMSE/Número de Parâmetros da modelagem direta usando $DUT_1$ . . . . .	84
5.10	NMSE/Número de Parâmetros da modelagem inversa usando $DUT_1$ . . . . .	84
5.11	Comparação dos NMSEs da modelagem direta de $2D - PV$ e $2D - frPV$ usando $DUT_1$ . . . . .	86
5.12	Comparação dos NMSEs da modelagem inversa de $2D - PV$ e $2D - frPV$ usando $DUT_1$ . . . . .	86
5.13	NMSE/Número de Parâmetros da modelagem direta usando $DUT_2$ . . . . .	87
5.14	NMSE/Número de Parâmetros da modelagem inversa usando $DUT_2$ . . . . .	88
5.15	Comparação dos NMSEs da modelagem direta de $2D - PV$ e $2D - frPV$ usando $DUT_2$ . . . . .	89
5.16	Comparação dos NMSEs da modelagem inversa de $2D - PV$ e $2D - frPV$ usando $DUT_2$ . . . . .	90
5.17	NMSE/Número de Parâmetros da modelagem direta usando $DUT_3$ . . . . .	92
5.18	NMSE/Número de Parâmetros da modelagem inversa usando $DUT_3$ . . . . .	92
5.19	Comparação dos NMSEs da modelagem direta de $2D - PV$ e $2D - frPV$ usando $DUT_3$ . . . . .	93
5.20	Comparação dos NMSEs da modelagem inversa de $2D - PV$ e $2D - frPV$ usando $DUT_3$ . . . . .	94
A.1	Polos e NMSEs (dB) da modelagem direta do modelo $LPVmdf$ . . . . .	106
A.2	Polos e NMSEs (dB) da modelagem inversa do modelo $LPVmdf$ . . . . .	106
B.1	Fração e NMSE da modelagem direta do modelo $2D - frPV$ usando $DUT_1$	107
B.2	Fração e NMSE da modelagem inversa do modelo $2D - frPV$ usando $DUT_1$	107
B.3	Fração e NMSE da modelagem direta do modelo $2D - frPV$ usando $DUT_2$	107
B.4	Fração e NMSE da modelagem inversa do modelo $2D - frPV$ usando $DUT_2$	108
B.5	Fração e NMSE da modelagem direta do modelo $2D - frPV$ usando $DUT_3$	108
B.6	Fração e NMSE da modelagem inversa do modelo $2D - frPV$ usando $DUT_3$	108

## LISTA DE SIGLAS

RF PA - Amplificador de Potência de Radiofrequência

PSD - Densidade Espectral de Potência

*MMSE* - Erro Mínimo Médio Quadrático

BST - Estações-Base Móveis

OFB - Funções de Base Ortogonal

*OF* - Função Objetivo

IoT - Internet das Coisas

*LS* - Mínimos Quadrados

*LMS* - Mínimos Quadrados Médio

*RLS* - Mínimos Quadrados Recursivos

*LPV* - Modelo de Laguerre Volterra Polar

*2D – frPV* - Modelo de Volterra Polar Fracionário Bidimensional

*LPV<sub>mfd</sub>* - Modelo de Laguerre Volterra Polar Modificado

OFDM - Multiplexação de Divisão de Frequência Ortogonal

*D* - Operador Derivada

MP - Polinômio de Memória

GMP - Polinômio de Memória Generalizada

AMP - Polinômio de Memória Avançado

3D-MP - Polinômio de Memória Tridimensional

MBMP - Polinômio de Memória de Múltiplas Bandas

3D-IMP - Polinômio de Memória Tridimensional Aprimorado

DPD - Pré-Distorcedor Digital

4G - Quarta Geração

5G - Quinta Geração

*SV* - Série de Volterra

*CV* - Série de Volterra Clássica

*PV* - Séries de Volterra Polar

*2D – PV* - Série de Volterra Polar Bidimensional

*PVmdf* - Série de Volterra Polar Modificada

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a(n)$  - Componente de Amplitude de  $\tilde{x}(n)$

$b(n)$  - Componente de Amplitude de  $\tilde{y}(n)$

$\varphi_n + \phi_n$  - Componente de Fase de  $\tilde{x}(n)$

$\phi(n)$  - Componente de Fase de  $\tilde{y}(n)$

$i_{out}(t)$  - Corrente Instantânea de Saída

$\eta(\%)$  - Eficiência

$\eta_{PAE}$  - Eficiência de Potência Adicionada

$NMSE$  - Erro Quadrático Médio Normalizado

$\xi$  - Fator de Crista

$\zeta$  - Fator de Linearidade

$f_c$  - Frequência da Portadora

$F_\tau(s)$  - Funções Geradoras Fracionárias no Domínio da Frequência

$f_\tau(f)$  - Funções Geradoras Fracionárias no Domínio de Tempo

$G_{1dB}$  - Ganho no Ponto de Compressão de 1 dB

$G$  - Ganho de Potência

$\theta_\tau(z, \beta)$  - Modelo Discreto de Laguerre

$N_P$  - Número de Coeficientes ou Parâmetros

$D = \frac{d}{dt}$  - Operador de Diferenciação

${}_a D_t^\alpha f(t)$  - Operador de Diferenciação Fracionária

$D^\alpha f(t)$  - Operador de Diferenciação Fracionária

$\alpha$  - Ordem da Derivada Fracionária

$A_{max}$  - Pico de Amplitude da Tensão

$V_{out,max}$  - Pico de Tensão de Saída

$\beta$  - Polo de Laguerre

$P_{diss}$  - Potência Dissipada

$P_{in}$  - Potência de Entrada

$PEP$  - Potência da Envoltória de Saída

$P_{DC}$  - Potência da Fonte

$P_{out,fc}$  - Potência Média Fundamental de Saída

$P_{rms}$  - Potência Quadrática Média

$P_{out}$  - Potência de Saída

$P_{out}(A)$  - Potência de Saída da Envoltória Fixa

$\varphi_L$  - Quantidade de Funções de Base de Laguerre

$ACEPR$  - Razão de Potência de Erro do Canal Adjacente

$PAPR$  - Razão de Potência de Pico pela Potência Média

$\lambda_\tau(n)$  - Saída do Modelo Discreto de Laguerre

$\tilde{x}(n)$  - Sinal de Envoltória Complexa de Entrada

$\tilde{x}(n)$  - Sinal de Envoltória complexa de Saída

$MEMR$  - Taxa de Modelagem de Efeitos de Memória

$v_{out}(t)$  - Tensão Instantânea de Saída

$V_{out,rms}$  - Tensão Média de Saída

$V_{o,rms}$  - Tensão Média Total

$V_{out}$  - Valor de Pico da Tensão Senoidal de Saída

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Contextualização . . . . .	1
1.2	Objetivos . . . . .	2
1.2.1	Geral . . . . .	2
1.2.2	Específico . . . . .	2
1.3	Lista de Publicações e Contribuições . . . . .	3
1.3.1	Periódicos . . . . .	3
1.3.2	Anais de Congresso . . . . .	3
1.3.3	Contribuições . . . . .	3
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>4</b>
2.1	Amplificador de Potência de Radiofrequência . . . . .	4
2.1.1	Potência e Energia . . . . .	6
2.1.1.1	Ganho de Potência e Eficiência Energética . . . . .	8
2.1.1.2	Pico da Potência de Saída e Fator de Crista . . . . .	9
2.1.2	Linearidade e Compressão de Ganho . . . . .	11
2.2	Conceitos básicos sobre Pré-Distorção Digital . . . . .	12
2.2.1	Construção e Identificação de Parâmetros da DPD . . . . .	14
2.2.2	Algoritmos para Estimação de Parâmetros DPD . . . . .	15
2.2.2.1	Série de Volterra . . . . .	16
2.2.2.2	Modelos de Wiener e de Hammerstein . . . . .	17
2.2.2.3	Modelos Polinomiais de Memória Multidimensionais . . . . .	19
2.2.2.4	Redes Neurais Artificiais . . . . .	23
2.3	Série de Volterra Clássica . . . . .	26
2.4	Séries de Volterra Polar . . . . .	27
2.4.1	Série de Volterra Polar Bidimensional . . . . .	28

2.4.2	Modelo de Volterra Polar Modificada . . . . .	30
2.5	Modelagem Equivalente Banda Base . . . . .	32
2.6	Funções de Base Ortogonal de Laguerre . . . . .	34
2.6.1	Expansão Ortogonal . . . . .	35
2.6.2	Funções de Base de Laguerre de Tempo Contínuo . . . . .	37
2.6.3	Funções de Base de Laguerre de Tempo Discreto . . . . .	38
2.7	Diferenciação Fracionária . . . . .	40
2.7.1	Funções Especiais . . . . .	41
2.7.1.1	Função Gamma . . . . .	41
2.7.1.2	Funções de Mittag-Leffler . . . . .	42
2.7.2	Derivadas Fracionárias . . . . .	43
2.7.2.1	Derivada Fracionária Segundo Riemann–Liouville . . . . .	43
2.7.2.2	Derivada Fracionária Segundo Caputo . . . . .	44
2.7.2.3	Derivada Fracionária Segundo Grünwald-Letnikov . . . . .	44
2.7.2.4	Representação de Sistemas Fracionários de Tempo Dis- creto por Equações de Espaço de Estados . . . . .	46
2.7.2.5	Transformada de Laplace . . . . .	47
2.8	Estado da Arte . . . . .	48
2.8.1	Expansão da Série de Volterra por Funções de Laguerre . . . . .	48
2.8.2	Expansão da Série de Volterra para o Domínio Fracionário . . . . .	50
<b>3</b>	<b>MODELO DE LAGUERRE VOLTERRA POLAR MODIFICADO</b>	<b>52</b>
3.1	Expansão dos Coeficientes por Funções de Laguerre . . . . .	52
3.2	Extração de Parâmetros dos Modelos $LPV$ e $LPV_{mdf}$ . . . . .	57
<b>4</b>	<b>MODELO DE VOLTERRA POLAR FRACIONÁRIO BIDIMENSIO- NAL</b>	<b>59</b>
4.1	Funções Geradoras Ortogonais Fracionárias . . . . .	60
4.1.1	Procedimento de Ortogonalização de Gram-Schmidt . . . . .	60
4.1.2	Generalização de Funções Geradoras Fracionárias . . . . .	61

4.2	Expansão dos Coeficientes de Volterra Polar Bidimensional por Funções Geradoras Ortogonais Fracionárias . . . . .	61
4.3	Extração de Parâmetros do Modelo $2D - frPV$ . . . . .	68
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>69</b>
5.1	Validação Experimental dos Modelos LPV e LPVmdf . . . . .	69
5.1.1	Amplificador de Potência GaN HEMT classe AB . . . . .	70
5.2	Validação Experimental do Modelo 2D-frPV . . . . .	82
5.2.1	Amplificador de Potência GaN HEMT classe AB . . . . .	83
5.2.2	Amplificador de Potência GaN HEMT classe AB . . . . .	87
5.2.3	Amplificador de Potência GaN classe AB . . . . .	91
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>95</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>MODELO DE LAGUERRE VOLTERRA POLAR MODIFICADO</b>	<b>106</b>
<b>B</b>	<b>MODELO DE VOLTERRA POLAR FRACIONÁRIO BIDIMENSIONAL</b>	<b>107</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Contextualização

Os atuais sistemas de comunicação sem fio da quarta geração (4G) lidam com uma enorme quantidade de informação a uma taxa de transmissão de dados relativamente alta. A demanda mundial por conteúdo em multimídia (som, imagem e vídeo) e novos aplicativos (BONFIM, 2016), serviços agregados e dispositivos da Internet das Coisas (IoT) que requerem maior fluxo de dados multi-Gb/s, incluindo a melhoria de alguns desafios que não podem ser superados até pelo 4G, como a crise do espectro e o alto consumo de energia (CHENG; ZHU; WU, 2015), impulsionam o rápido desenvolvimento e padronização da quinta geração (5G) (WANG; WANG, 2021). As variantes e versões 5G baseadas na Multiplexação de Divisão de Frequência Ortogonal (OFDM) (CHO *et al.*, 2019), fornecem um grande aumento nas taxas de transmissão de dados, possíveis graças a larguras de banda de transmissão maiores que chegam até várias centenas de MHz. Todavia, a energia consumida pelas estações-base móveis (BST), bem como pelos dispositivos de comunicação sem fio, 4G e 5G, deve ser limitada para reduzir, ao máximo, o consumo de energia da cadeia de transmissores (MORGAN *et al.*, 2006; LIU *et al.*, 2013; SUN *et al.*, 2014; LOPEZ-BUENO *et al.*, 2015; AGIWAL; ROY; SAXENA, 2016), principalmente do amplificador de potência de radiofrequência (RF PA) e, conseqüentemente, melhorar em até 90% a eficiência energética em comparação com o padrão 4G.

No transceptor de rádio, o RF PA é o elemento de maior consumo de energia e, geralmente, é o componente responsável pela maioria das características não lineares em toda a cadeia de transmissores. Alcançar um RF PA em operação próxima à região de saturação, com baixo consumo de energia e mantendo seu comportamento linear (GUAN; ZHU, 2014), tornou-se a questão de pesquisa nesta tese. Na literatura, uma solução economicamente viável consiste em incluir um bloco de pré-distorção digital de banda base (DPD) para distorcer, propositalmente, o sinal de envoltória em banda base antes de passar pelo RF PA (ÁLVAREZ-LÓPEZ *et al.*, 2020).

A construção da unidade DPD considerando, simultaneamente, a precisão, a complexidade e a capacidade pode ser feita recorrendo à implementação de algoritmos, como a série de Volterra Polar (*PV*), que relacionam a amplitude e fase do sinal de entrada com o sinal de saída do RF PA para a estimativa de parâmetros DPD. O principal problema é que os coeficientes gerados na *PV* crescem exponencialmente com o aumento dos fatores de truncamento.

A estratégia seguida aqui para reduzir a quantidade de parâmetros gerados na

identificação dos modelos de RF PA e DPD, sem afetar a precisão e esforço computacional, por um lado, inclui técnicas de simplificação da  $PV$  que podem considerar apenas os termos unidimensionais e bidimensionais ou ainda a redução da influência de instantes passados. E, por outro lado, envolvem o uso de funções de base ortogonal (OBF), como as de Laguerre (OLIVEIRA; AMARAL; LATAWIEC, 2003; ZHU; BRAZIL, 2005) ou fracionárias (MAACHOU *et al.*, 2014) para expansão da  $PV$  e suas modificações.

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Geral

Este trabalho é dedicado à modelagem comportamental equivalente passa baixas da característica de transferência direta de um RF PA e da DPD, usando a série de Volterra polar expandida em base ortogonal de Laguerre e em base ortogonal fracionária. Os seus coeficientes são extraídos para posterior aplicação dos modelos resultantes na pré-distorção digital de um circuito de RF PA. O objetivo geral é obter descrições que apresentem os melhores custos-benefícios como precisão de modelagem e esforço computacional.

### 1.2.2 Específico

Propor novos modelos comportamentais do RF PA baseado na série de Volterra polar expandida através de funções:

- i) de base ortogonal de Laguerre, cuja dinâmica de extração é dependente da escolha da quantidade de funções de base ortogonal e da determinação da posição dos polos em relação aos polos fundamentais;
- ii) geradoras ortogonais fracionárias, onde a dinâmica de não linearidade do modelo é totalmente definida pela posição da ordem fracionária em relação à ordem fracionária fundamental.

Para o alcance do objetivo geral, todos os parâmetros dos modelos são então escolhidos. No processo, o número de parâmetros gerados e as respectivas acurácias, necessários para a implementação de cada modelo, são investigados, tendo como base o número de funções ortogonais e os polos para o caso dos modelos de base de Laguerre e tendo como base a ordem fracionária para o modelo de base ortogonal fracionária. Em seguida, os seus resultados são comparados preliminarmente com os de outros modelos previamente disponíveis na literatura. São utilizados diferentes dados medidos em um laboratório de radiofrequência (RF) e os modelos propostos para RF PA e DPD são implementados no ambiente MATLAB.

## 1.3 Lista de Publicações e Contribuições

### 1.3.1 Periódicos

- NYPWIPWY, V. B.; CAVALHEIRO, R. A. S.; DARTORA, C. A.; LIMA, E. G. Power Amplifier Behavioral Modeling Based on Laguerre Polar-Volterra Series with Independent Truncations. **International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering**, v. 32, n. 5, p. e23104, 2022, DOI: 10.1002/mmce.23104
- MACHADO, A. P. P.; NYPWIPWY, V. B.; FRANÇA, C.; LIMA, E. G. Selective Algorithm for Expanded Group Method of Data Handling Applied to Power Amplifier Modeling. **Journal of Integrated Circuits and Systems**, v. 17, n. 2, 2022, DOI: 10.29292/jics.v17i1.544

### 1.3.2 Anais de Congresso

- NYPWIPWY, V. B.; DARTORA, C. A.; LIMA, E. G. Série de Volterra expandida na base de Laguerre de ordem fracionária **ANAIS DOS SEMINÁRIOS DE MICROELETRÔNICA DO PARANÁ 2019**

### 1.3.3 Contribuições

- Expandir o modelo da série de Volterra Polar em um conjunto de funções de base ortonormais de Laguerre, denominado modelo de Laguerre-Volterra Polar (*LPV*). Esse modelo *LPV* possui um conjunto de polos de valor real que podem ser otimizados para descrever a dinâmica de RF PA e DPD.
- Modificar o modelo de Laguerre-Volterra Polar através de 4 divisões para ter 10 fatores de truncamento independentes, obtendo assim o chamado modelo de Laguerre-Volterra Polar modificado (*LPVmdf*). Esse modelo *LPVmdf* possui vários conjuntos de funções de base ortonormal de Laguerre e um conjunto de polos de valor real que podem ser otimizados para descrever a dinâmica de um RF PA e de uma DPD.
- Estender o modelo da série de Volterra Polar bidimensional por um conjunto de funções geradoras ortonormais fracionárias, denominado modelo de Volterra Polar fracionário bidimensional (*2D-frPV*). Esse modelo *2D-frPV* possui uma ordem fracionária de valor real que pode ser otimizada para descrever a dinâmica de RF PA e DPD.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO DA LITERATURA

#### 2.1 Amplificador de Potência de Radiofrequência

Amplificar um sinal elétrico proveniente de um sistema de radar, ou de imagem por ressonância magnética, ou multimídia (som, imagem e vídeo) de comunicação sem fio é o único objetivo de um PA de RF. Embora sejam triviais à primeira vista, várias condições impedirão o seu projeto e a sua implementação. Para um RF PA projetado especialmente para um sistema de comunicação sem fio, a potência de saída, a eficiência energética, o ganho e a linearidade são os parâmetros mais importantes e podem ser facilmente quantificados. Por outro lado, o custo e a confiabilidade não são tão fáceis de quantificar, mas sua importância não deve ser subestimada. O primeiro passo no projeto de um RF PA para comunicação sem fio é um bom conhecimento do próprio sistema de comunicação, dos sinais que precisam ser amplificados e suas propriedades, incluindo o sistema de modulação digital. Um sinal passa-banda modulado  $v(t)$  pode ser representado por

$$v(t) = \text{Re} \{ g(t)e^{j\omega_c t} \}, \quad (2.1)$$

onde  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$  é a frequência da portadora e  $g(t)$  é a envoltória de valor complexo de  $v(t)$  que modula o fasor  $e^{j\omega_c t}$  (REYNAERT; STEYAERT, 2006). Como  $g(t)$  é uma função complexa, o seu valor instantâneo pode ser representado no plano complexo, como ilustra a Figura 2.1.

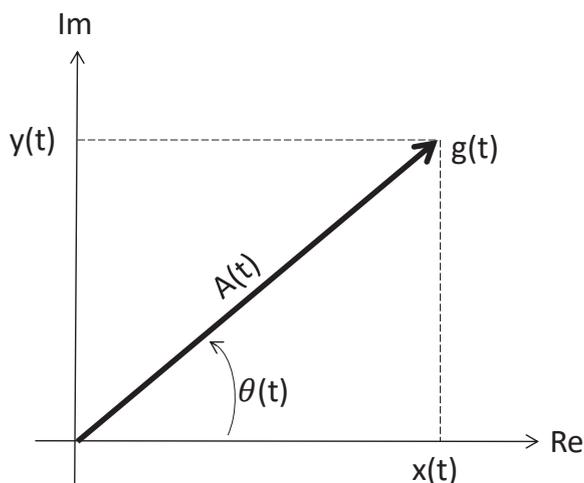


Figura 2.1: Representação da envoltória complexa no plano complexo.  
Fonte: (REYNAERT; STEYAERT, 2006)

Um ponto no interior do plano complexo também pode ser representado usando

coordenadas cartesianas e polares:

$$g(t) = x(t) + jy(t) = A(t)e^{j\theta(t)}. \quad (2.2)$$

Assim, usando as representações cartesiana e polar de  $g(t)$ , o sinal modulado  $v(t)$  pode ser agora expresso como:

$$\begin{aligned} v(t) &= x(t)\cos(\omega_c t) - y(t)\sin(\omega_c t) \\ v(t) &= A(t)\cos(\omega_c t + \theta(t)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde  $A(t)$  carrega consigo a modulação de amplitude e é chamado sinal de envoltória de amplitude.  $\theta(t)$  contém as informações da fase e é chamado sinal de fase. Por razões semelhantes,  $x(t)$  é a in-phase ou sinal  $I(t)$  e  $y(t)$  é a quadratura ou sinal  $Q(t)$ . Todos esses sinais são sinais de banda base com uma largura de banda relativamente baixa, pelo menos em comparação com  $\omega_c$ . A conversão entre as duas representações equivalentes é apresentada na forma de equações:

$$A(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (2.4a)$$

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \quad (2.4b)$$

$$x(t) = A(t)\cos(\theta(t)) \quad (2.4c)$$

$$y(t) = A(t)\sin(\theta(t)) \quad (2.4d)$$

No transceptor de rádio, em comparação com a maioria dos outros componentes presentes no transmissor, o RF PA é o elemento com maior custo, com o maior consumo de energia, a unidade que mais dissipa calor (QI; HE, 2019). Enquanto transfere potência da fonte de entrada em potência de saída irradiada pela antena, o RF PA é, normalmente, o integrante responsável pela maioria das características não lineares em toda cadeia de transmissores. O seu uso, em conjunto com uma antena, nos transmissores para sistemas de comunicação sem fio é ilustrado na Figura 2.2.

As topologias comumente utilizadas em projetos de construção dos RF PAs são baseadas em transistores de estado sólido operando nas classes: a) A, B, AB, que apresentam os mais comuns modos de operação linear em relação à amplificação do sinal; b) C, D, E, F e S, que apresentam um modo de operação não linear. Estas topologias referem-se ao modo como o RF PA é construído: i) se são usados amplificadores de extremidade única ou amplificadores de arquiteturas mais avançadas como o RF PA Doherty; ii) da amplificação linear usando componentes não lineares; iii) do rastreamento de envoltória e assim por diante (GHANNOUCHI; HAMMI; HELAOUI, 2015). Os RF PAs que operam nas classes D, E, F e S são conhecidos como amplificadores de comutação, onde os dispositivos

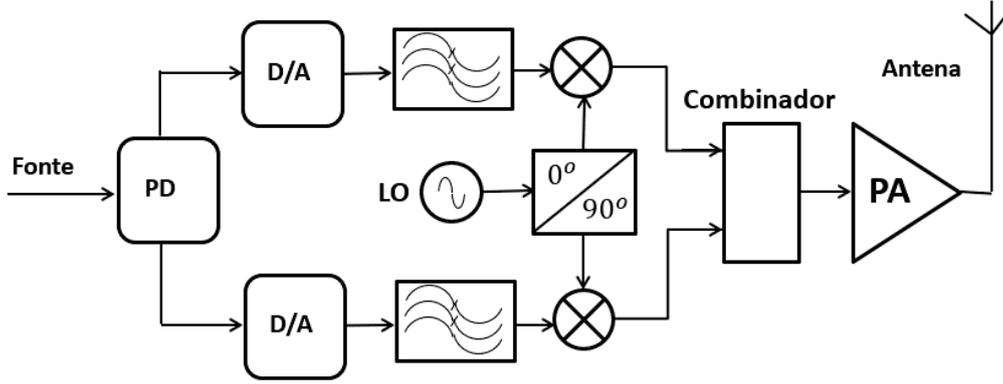


Figura 2.2: RF PA em aplicação no transmissor comunicação sem fio.  
Fonte: Modificado de (EROGLU, 2018)

são usados como chaves comutadoras durante a operação do próprio RF PA. No caso de um RF PA operando no modo linear e de baixa eficiência, a relação entre a forma de onda do sinal de RF, na entrada e na saída linear do RF PA pode ser expressa como:

$$v_{out}(t) = \zeta v_{in}(t) \quad (2.5)$$

onde  $v_{in}(t)$  e  $v_{out}(t)$  são os sinais de entrada e de saída do RF PA e  $\zeta$  é o fator de linearidade. Porém, quando o RF PA opera no modo não linear e de alta eficiência, este é o modo de maior interesse onde se deseja obter o tão almejado compromisso entre linearidade e eficiência energética (LIU *et al.*, 2013), onde se exige que o RF PA opere demandando altas taxas de transferência de dados com baixíssimo consumo de energia, mantendo seu comportamento linear (GUAN; ZHU, 2014) e respeitando as restrições impostas pelas agências reguladoras de espectro eletromagnético. A relação entre os sinais de entrada e de saída do RF PA é expressa usando uma série de potência dada por:

$$v_{out}(t) = \varrho_0 + \varrho_1 v_{in}(t) + \varrho_2 v_{in}^2(t) + \varrho_3 v_{in}^3(t) + \dots + \varrho_n v_{in}^n(t) \quad (2.6)$$

onde  $\varrho_i, i = 1, 2, \dots, n$  são os fatores de não linearidades da 1ª, da 2ª, 3ª,  $\dots$  e da n-ésima ordens. Fisicamente, a equação (2.6) representa não linearidades bastante fracas na resposta do RF PA. Quando fracas distorções tomam lugar, os harmônicos associados as ordens de não linearidade desaparecem a medida que a amplitude do sinal vai diminuindo.

$$\varrho_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n v_{out}(t)}{d v_{in}^n} \quad (2.7)$$

### 2.1.1 Potência e Energia

A potência de saída de um RF PA é definida como sendo a potência ativa, fornecida pelo amplificador e fluindo em direção à antena que a dissipa sob a forma de uma

onda eletromagnética irradiada. Geralmente, assumindo por hipótese que as redes de casamento de entrada e saída nos circuitos e sistemas de RF e de micro-ondas ressoem na frequência de operação e supondo que a impedância da antena  $Z_{in}$  seja já projetada para valores puramente resistivos de  $50 \Omega$  nas frequências de interesse, a antena pode ser representada por um único resistor de carga  $R_L$ , Figura 2.3. A potência dissipada em  $R_L$  sob a forma de calor é igual à potência da onda eletromagnética, transmitida pela antena.

A potência instantânea de saída no RF PA é dada por:

$$P_{out}(t) = v_{out}(t) \cdot i_{out}(t) \quad (2.8)$$

onde  $v_{out}(t)$  e  $i_{out}(t)$  são a tensão e a corrente instantâneas na saída do RF PA. A potência média total na saída do RF PA  $P_{o,tot}$  é definida como:

$$P_{o,tot} = \langle P_o(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} P_{out}(t) dt \quad (2.9)$$

onde  $\langle \cdot \rangle$  é um operador de tempo médio. Se a tensão de saída do RF PA  $v_{in}(t)$  for uma onda senoidal com frequência  $f_c$  e período  $T_c$ , a equação (2.9) é simplificada para:

$$P_{o,tot} = \langle P_o(t) \rangle = \frac{1}{T_c} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} P_{out}(t) dt. \quad (2.10)$$

Supondo que a carga  $R_L$  é resistiva, então a potência entregue à carga é simplesmente:

$$P_{o,tot} = \langle v_{out}(t) \cdot i_{out}(t) \rangle = \frac{\langle v_{out}^2(t) \rangle}{R_L} = \frac{V_{o,rms}^2}{R_L} \quad (2.11)$$

com o valor RMS bem conhecido da tensão de saída:

$$V_{o,rms} = \sqrt{\langle v_{out}^2(t) \rangle}. \quad (2.12)$$

Embora triviais à primeira vista, essas definições básicas já apresentadas nem sempre são tão úteis para um RF PA, visto que este dispositivo não gera energia apenas na frequência de interesse, mas também em múltiplos inteiros da frequência fundamental  $f_c$ . Geralmente, apenas a potência na frequência fundamental é desejada e a potência associada às harmônicas deve ser filtrada e suprimida na saída do RF PA. Portanto, é mais importante e útil definir a potência média fundamental de saída,  $P_{out,f_c}$  ou simplesmente  $P_{out}$ , igual à potência de saída apenas na frequência fundamental como:

$$P_{out} = \frac{V_{out}^2}{2R_L} \quad (2.13)$$

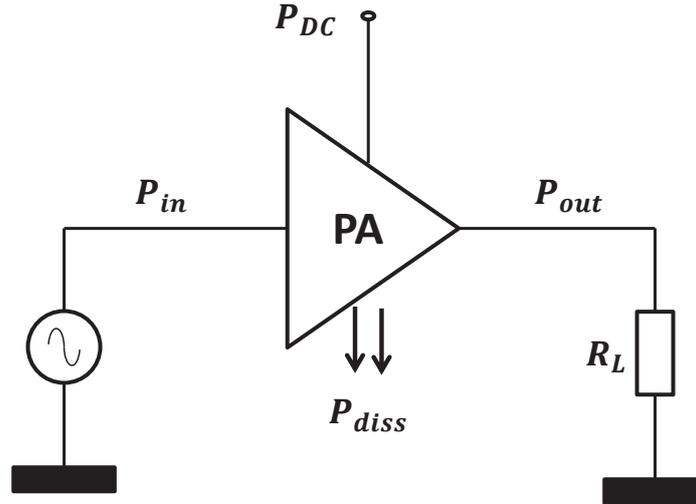


Figura 2.3: Rede de três portas do RF PA.  
Fonte: Modificado de (EROGLU, 2018)

onde  $V_{out}$  é a amplitude ou valor de pico da tensão senoidal de saída na frequência  $f_c$ , valor que pode ser obtido a partir da expansão da série de Fourier de  $v_{out}(t)$ .

Um RF PA é considerado como uma rede de três portas (EROGLU, 2018), nomeadamente, a porta de entrada do sinal de RF, a porta de entrada da polarização DC e a porta de saída de sinal RF, como ilustrado na Figura 2.3. A energia que não é convertida em potência de saída  $P_{out}$  do RF PA, é toda ela dissipada sob a forma de calor e designada por  $P_{diss}$ . A potência dissipada,  $P_{diss}$ , é definida como:

$$P_{diss} = (P_{in} + P_{DC}) - P_{out} \quad (2.14)$$

### 2.1.1.1 Ganho de Potência e Eficiência Energética

O ganho de potência  $G$  do RF PA é definido como a razão entre a potência de saída  $P_{out}$  e a potência de entrada  $P_{in}$ , matematicamente dado por:

$$G = \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (2.15)$$

e pode ser definido em decibéis através de:

$$G_{(dB)} = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P_{out}}{P_{in}} \right), [dB]. \quad (2.16)$$

Na terminologia do RF PA, além do decibel, também é usada a unidade dBm para definir a potência. O dBm é expresso como:

$$dBm = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{P}{1mW} \right). \quad (2.17)$$

Em aplicações práticas, o RF PA é implementado como um subsistema e consome a maior parte da energia DC da fonte de alimentação. Como resultado, o consumo mínimo de energia DC para o amplificador se torna importante e pode ser alcançado com alta eficiência. A eficiência do RF PA é um dos parâmetros críticos e mais importantes do desempenho do amplificador e pode ser usada para definir a eficiência do dreno para um transistor FET e/ou MOSFET, ou eficiência do coletor para um transistor de junção bipolar (BJT) (EROGLU, 2018). A eficiência do RF PA diretamente descreve a parte da potência associada à polarização DC convertida em potência de RF. Matematicamente é definida como sendo a razão entre a potência de saída  $P_{out}$  e a energia fornecida pela fonte de corrente contínua  $P_{DC}$  e pode ser expressa em porcentagem como:

$$\eta(\%) = \frac{P_{out}}{P_{DC}} \times 100\%. \quad (2.18)$$

Relacionando a potência dissipada em calor  $P_{diss}$ , a potência de saída  $P_{out}$  e o ganho de potência  $G$ , a eficiência pode ser expressa por:

$$\eta(\%) = \frac{1}{1 + \left(\frac{P_{diss}}{P_{out}}\right) - \left(\frac{1}{G}\right)} \times 100\%. \quad (2.19)$$

A eficiência máxima é possível quando não há dissipação, ou seja,  $P_{diss} = 0$ . Então, a equação (2.19) é igual a:

$$\eta(\%) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{G}\right)} \times 100\%. \quad (2.20)$$

Qualquer RF PA em operação precisa de energia proveniente da fonte DC para entregar energia à carga na frequência de RF. Quando a potência de entrada  $P_{in}$  é incluída no cálculo da eficiência na equação (2.18), a eficiência dessa conversão é medida pela eficiência de energia adicionada (PAE) chamada de eficiência da potência adicionada,  $\eta_{PAE}$ , definida como:

$$\eta_{PAE}(\%) = \frac{P_{out} - P_{in}}{P_{DC}} \times 100\% \quad (2.21)$$

ou simplesmente tendo em conta apenas o ganho de potência  $G$  do RF PA:

$$PAE(\%) = \eta_{PAE}(\%) = \eta \left(1 - \frac{1}{G}\right) \times 100\%. \quad (2.22)$$

### 2.1.1.2 Pico da Potência de Saída e Fator de Crista

Para sinais modulados, o perfil da envoltória ou sinal de amplitude  $A(t)$  se torna importante. Pode-se provar como em (2.13) que a potência média de saída de um sinal

modulado em banda passante (REYNAERT; STEYAERT, 2006) é dada por:

$$P_{out} = \frac{\langle A^2(t) \rangle}{2R_L} = \frac{(A_{rms})^2}{2R_L}. \quad (2.23)$$

Se o sinal de saída de RF for modulado apenas em fase, a potência de saída será a mesma que se o sinal não tivesse sido modulado. Portanto, para sistemas de envoltória constante, a presença da modulação não altera a potência de saída. Certamente que, a potência média de saída dependerá do comportamento do sinal de envoltória e, assim sendo, pode-se definir a potência de saída da envoltória fixa  $P_{out}(A)$  como a potência média de saída dissipada na carga, se o sinal de amplitude for mantido constante em um valor específico  $A$

$$P_{out}(A) = \frac{\langle A^2(t) \rangle}{2R_L} = \frac{A^2}{2R_L} \quad (2.24)$$

que é basicamente o mesmo que a definição em (2.13). Pode-se também definir o pico da potência da envoltória de saída  $PEP$ , sendo a potência dissipada na carga, se o sinal de envoltória for mantido em seu valor máximo (COUCH; KULKARNI; ACHARYA, 1997).

$$PEP = \max \{P_{out}(A(t))\} = \frac{(\max \{A(t)\})^2}{2R_L} = \frac{A_{max}^2}{2R_L} \quad (2.25)$$

Este valor de pico da potência de saída é de grande importância no projeto do RF PA já que, o amplificador é projetado para transmitir esses picos altos. No entanto, a potência média de saída pode ser muito menor que o pico da potência. Nesse sentido, outro parâmetro muito importante é a razão entre o pico da potência e a potência média do sinal,  $PAPR$ , definida como:

$$PAPR = \frac{PEP}{P_{out}} \quad (2.26)$$

$$PAPR = \frac{V_{out,max}}{V_{out,rms}} = \frac{A_{max}}{A_{rms}} \quad (2.27)$$

Valores altos de  $PAPR$ , na ordem de 10 dB (CHO *et al.*, 2019), afetam significativamente a eficiência  $\eta(\%)$  do RF PA por ação dos atuais esquemas de modulação de espectro eficiente de alta complexidade, como a modulação OFDM, o que exige uma compensação razoável da eficiência espectral para propiciar um  $PAPR$  mais baixo e poder acondicionar o RF PA operando em sua região linear (LIEN *et al.*, 2017). A relação entre pico e média também pode ser calculada com base nas tensões  $V_{out,max}$  e  $V_{out,rms}$ , a qual expressa o fator de crista  $\xi$ , definido como a razão entre o valor de pico de amplitude da tensão  $A_{max}$  e o valor da potência quadrática média  $P_{rms}$  do sinal modulado:

$$\xi = \frac{A_{max}}{\sqrt{P_{rms}}} \quad (2.28)$$

Relacionando as equações (2.26), (2.27) e (2.28), é fácil perceber que:

$$PAPR_{(dB)} = 10 \cdot \log_{10}(\xi^2) = 20 \cdot \log_{10}(\xi) \quad (2.29)$$

### 2.1.2 Linearidade e Compressão de Ganho

A linearidade é uma medida que está diretamente ligada à capacidade de um RF PA de não introduzir distorções na amplitude e na fase do sinal que está sendo amplificado. Aqui, entende-se como distorção um fenômeno inerentemente não linear associado à adição de componentes de frequência extras, de origens variadas, ao sinal conforme ele passa pelo circuito amplificador (WOOD, 2014). Como um RF PA operando em compressão de ganho ou na sua região de saturação, vide Figura 2.4, onde as curvas de potência de saída e do ganho se desviam significativamente da relação linear, é muito não linear, devido a essas componentes de frequência extras e a novos tons que não estão presentes no sinal de entrada. Tons harmônicos e de intermodulação aparecem na saída do amplificador, o que significa que o RF PA está produzindo distorção. Idealmente, espera-se que a amplitude instantânea do sinal de saída do RF PA seja proporcional a do sinal de entrada e que a diferença de fases entre o sinal à entrada e à saída permaneça a mesma. Em um RF PA podem ser definidas as linearidades de fase e de amplitude. A linearidade de fase é fácil de ser alcançada, desde que a largura de banda do sinal modulado seja pequena em comparação com a frequência da portadora, enquanto a linearidade de amplitude é muito mais difícil de alcançar e, em geral, resulta em uma eficiência mais baixa (REYNAERT; STEYAERT, 2006).

Na literatura, as não linearidades de fase são denotadas como distorções AM-PM e as distorções de amplitude são denotadas como conversão AM-AM. A distorção AM-PM refere-se à alteração na diferença de fase entre os sinais de envoltória de saída e entrada como uma função da amplitude do sinal de envoltória de entrada (PEDRO; MAAS, 2005) e é muito dependente da configuração do RF PA onde o ponto de polarização desempenha um papel importante (WOOD, 2014). Esta categoria de distorção é causada principalmente por uma variação na impedância de entrada do RF PA quando é acionado por um sinal grande (ELMALA; PARAMESH; SOUMYANATH, 2006; ONIZUKA *et al.*, 2012). Embora seja dada menos atenção, a distorção AM-PM tem um impacto perceptível nos sinais digitais modulados em fase e, assim, uma correção no mecanismo de distorção AM-PM pode fornecer ao RF PA um melhor desempenho de linearidade (ELMALA; PARAMESH; SOUMYANATH, 2006; PALASKAS *et al.*, 2006). A distorção AM-AM refere-se à não linearidade de amplitude que qualquer RF PA operando na região de compressão em uma condição não linear pode experimentar. Essa distorção é refletida no efeito de compactação observado na curva de potência de entrada e potência de saída ( $P_{in} - P_{out}$ ) onde as características da potência de saída e o ganho se desviam da relação linear, Figura 2.4, quando um teste

de tom único é realizado ou nos produtos de intermodulação no caso de um teste de dois tons (RUIZ; PÉREZ, 2013). A conversão modulação em amplitude para modulação em amplitude AM-AM do RF PA determina como a amplitude da envoltória de saída se altera em função da amplitude da envoltória de entrada (PEDRO; MAAS, 2005) e é medida na região de saturação ou de compressão de ganho igual a 1 dB (BONFIM, 2016), o ponto onde o ganho do RF PA se torna 1 dB abaixo do seu ganho linear ideal, como mostra a Figura 2.4. Depois que o ponto de compressão de 1 dB é identificado na faixa de potência de entrada correspondente, o RF PA poderá ser operado no modo linear ou não linear. Portanto, o ponto de compressão de 1 dB também pode ser convenientemente usado para identificar as características lineares do RF PA (EROGLU, 2018).

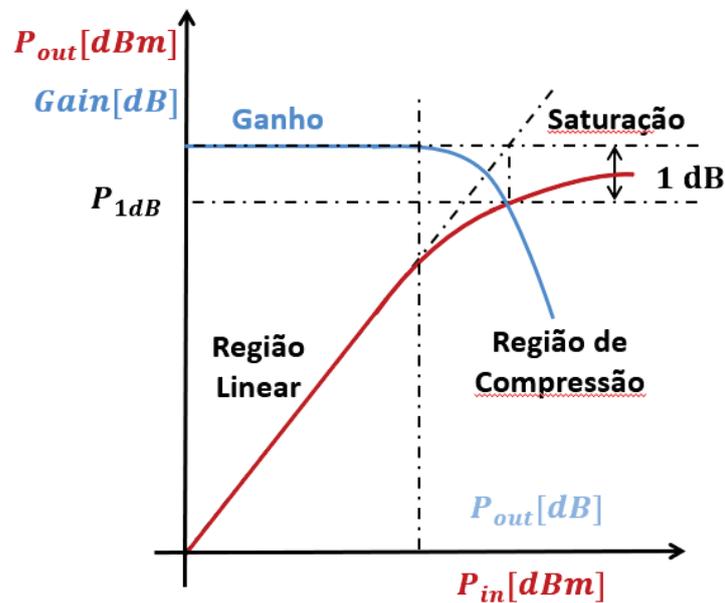


Figura 2.4: Representação do ponto de compressão de 1 dB para RF PAs.  
Fonte: Modificado de (BONFIM, 2016)

O ganho no ponto de compressão de 1 dB pode ser determinado como:

$$P_{1dB,out} - P_{1dB,in} = G_{1dB} = G - 1 \quad (2.30)$$

onde  $G$  é o ganho de pequeno sinal ou simplesmente o ganho linear do amplificador na frequência fundamental  $f_c$ .

## 2.2 Conceitos básicos sobre Pré-Distorção Digital

Para manter o RF PA não linear operando próximo à região de saturação demandando altas taxa de transferência de dados com baixo consumo de energia, é necessário incluir no processamento digital um bloco de pré-distorção denominado *digital baseband predistortion* (DPD) para distorcer, propositalmente, o sinal de envoltória de banda base

antes que o mesmo passe pelo RF PA (ÁLVAREZ-LÓPEZ *et al.*, 2020). O bloco DPD é caracterizado pelas suas boas propriedades: possui alta flexibilidade, reduzido esforço de implementação e possibilidades de adaptação. O DPD apresenta um excelente desempenho e eficiência (GUAN; ZHU, 2010; YU; JIANG, 2013; FAGER *et al.*, 2019) quando usado na linearização de RF PAs, uma vez que ele é construído a partir da característica de transferência inversa de um RF PA com altas não linearidades e efeitos de memória consideráveis. Uma topologia da DPD em série com o RF PA, operando juntos, permite que a característica final resultante da combinação de ambos se aproxime a uma função linear (LIU *et al.*, 2013), que indica que as não linearidades do RF PA foram removidas ou reduzidas (JIANG; WILFORD, 2010), tornando-se possível a linearização e a alta eficiência do sinal propagado. A figura 2.5 apresenta esquematicamente a topologia cascata da DPD e o RF PA cujo efeito final esperado é uma característica linear como da figura 2.5 c).

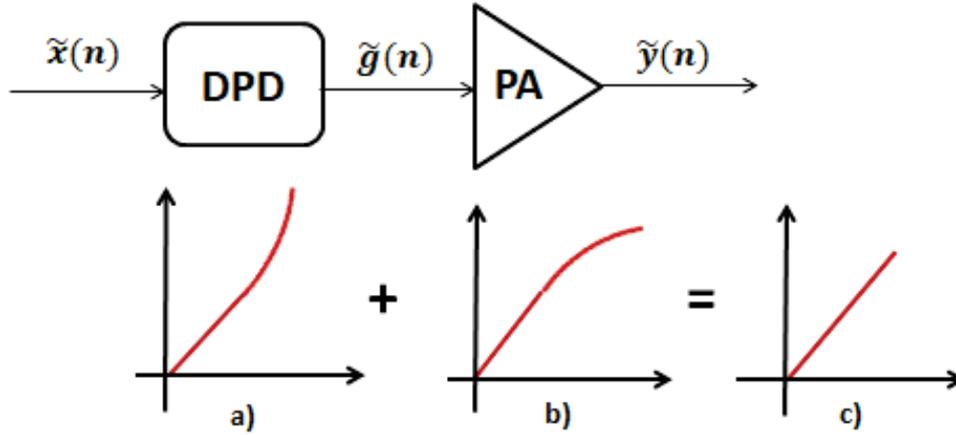


Figura 2.5: Topologia cascata da DPD e o RF PA.

Assumindo que existe uma função que traduz uma relação matemática entre os sinais de envoltória de entrada  $\tilde{g}(n)$  e de saída  $\tilde{y}(n)$  do RF PA dada por  $\tilde{y}(n) = F[\tilde{g}(n)]$  e outra função que relaciona os sinais de envoltória de entrada  $\tilde{x}(n)$  e de saída  $\tilde{g}(n)$  da DPD dada por  $\tilde{g}(n) = G[\tilde{x}(n)]$ , então, substituindo  $\tilde{g}(n) = G[\tilde{x}(n)]$  em  $\tilde{y}(n) = F[\tilde{g}(n)]$  resulta que  $\tilde{y}(n) = F[G[\tilde{x}(n)]]$ . Como a DPD é construída a partir da característica inversa do RF PA, isto é,  $G[\cdot] = F^{-1}[\cdot]$  conseqüentemente,  $\tilde{y}(n) = F[F^{-1}[\tilde{x}(n)]] \Rightarrow F[F^{-1}[\tilde{x}(n)]] = \tilde{x}(n)$ . Então existirá uma relação entre o sinal de envoltória de entrada  $\tilde{x}(n)$  da DPD e sinal de envoltória de saída  $\tilde{y}(n)$  do RF PA cujo resultado representa a característica linear da figura 2.5 c).

Usando modelo baseado na equivalente passa-baixa de um RF PA que retrata com precisão o comportamento de um sistema físico, pode-se representar a característica direta da função  $F[\cdot]$ . Se a função inversa de  $F[\cdot]$  existe e é dedutível em  $F^{-1}[\cdot]$ , então a relação entre a função  $G[\cdot]$  que representa a DPD e a função  $F[\cdot]$  que representa o comportamento físico de um RF PA é alcançada através da relação  $G[\cdot] = F^{-1}[\cdot]$  e, desta

forma, pode-se chegar a característica que representa o comportamento físico da DPD.

Quando o sinal de envoltória  $\tilde{x}(n)$ , que possui uma determinada largura de banda, passa através da DPD, um processo de distorção não linear associado à característica inversa do RF PA acontece. Portanto, a DPD introduz não linearidade no sinal fazendo com que sua largura de banda aumente consideravelmente, obtendo-se assim o sinal de envoltória pré-distorcido  $\tilde{g}(n)$ , cuja característica se assemelha a da figura 2.5 a). O sinal de envoltória pré-distorcido  $\tilde{g}(n)$  pela DPD, ao passar pelo RF PA que tem uma característica semelhante à da figura 2.5 b), é submetido à segunda distorção através de outra função não linear, distorcendo-o novamente de forma que o sinal de envoltória  $\tilde{y}(n)$  na saída do RF PA tenha a mesma largura de banda que o sinal de envoltória  $\tilde{x}(n)$  à entrada da DPD, como demonstrado em  $\tilde{y}(n) = F[F^{-1}[\tilde{x}(n)]] = \tilde{x}(n)$ .

### 2.2.1 Construção e Identificação de Parâmetros da DPD

A construção de unidades DPD a partir de modelos orientados por blocos, além de executarem simulações sob diferentes suposições, reduzem a complexidade e melhoram a estabilidade numérica dos respectivos modelos (DESGREYS *et al.*, 2017). São unidades que visam a implementação da característica inversa de um RF PA com altas não linearidades e efeitos de memória consideráveis, desde que o bloco que compõe o modelo final consiga compensar, com a máxima precisão possível, os efeitos não lineares da função de transferência que representa o RF PA (ÖZGÜL *et al.*, 2014).

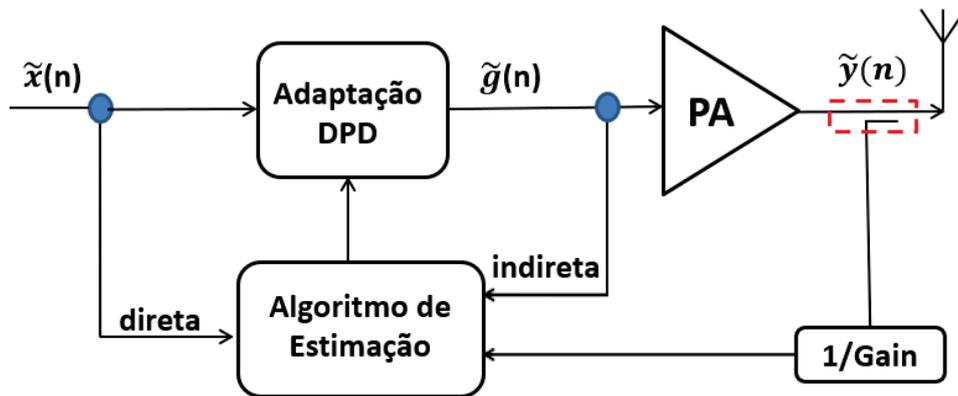


Figura 2.6: Arquitetura de aprendizagem direta e indireta da DPD.  
Fonte: Adaptado de (YU; JIANG, 2013) e (HUI *et al.*, 2015)

Na estimação da unidade DPD, os parâmetros podem ser identificados por duas arquiteturas de aprendizagem distintas, nomeadamente a arquitetura de aprendizagem direta e a arquitetura de aprendizagem indireta. A figura 2.6 ilustra os esquemas genéricos das aprendizagens direta e indireta, onde  $\tilde{x}(n)$  é o sinal de envoltória de entrada para a unidade de pré-distorção digital, cuja saída  $\tilde{g}(n)$ , no que lhe concerne, alimenta o RF PA para produzir a saída  $\tilde{y}(n)$ . A arquitetura de aprendizagem direta usa o sinal original de

entrada  $\tilde{x}(n)$  e o sinal de saída ou de realimentação  $\tilde{y}(n)$  para minimizar por iteratividade a diferença entre esses dois sinais. Em contrapartida, a aprendizagem indireta, sendo a usada para extração de parâmetros de todos os modelos desta tese, resulta da relação inversa existente entre os sinais de envoltória de entrada  $\tilde{g}(n)$  pré-distorcido na unidade DPD e do sinal de saída  $\tilde{y}(n)$  do RF PA. Esta aprendizagem indireta tem a vantagem de possuir uma complexidade computacional menor e de não exigir iteratividade alguma.

Alguns pesquisadores sugeriram a realização de unidades DPD em dispositivos de baixo custo para RF PAs usando as séries de Volterra para gerar polinômios recursivos de linearização e obtiveram bons resultados (GUAN; ZHU, 2010). Todavia, uma DPD efetiva deve também conseguir compensar mudanças dinâmicas temporais mais lentas, da ordem de segundos, associadas aos efeitos de memória de longo prazo, causadas pelos efeitos da temperatura. Para isso, é também utilizada a aprendizagem indireta em que a adaptação dos coeficientes da DPD, causada pelas mudanças físicas no RF PA, pode ser feita separadamente. Esta estratégia de aprendizagem indireta tem a vantagem de permitir a adição de um sistema de identificação de parâmetros denominado *post-distorter* (PoD), que tem o mesmo escopo de uma DPD e é, nada mais que, uma cópia da DPD utilizada para a atualização de parâmetros. (GILABERT; MONTORO; BERTRAN, 2005) demonstrou que a DPD e o PoD de um mesmo RF PA ou sistema são idênticos. A figura 2.7 ilustra o método de aprendizagem indireta da DPD com cópia do PoD.

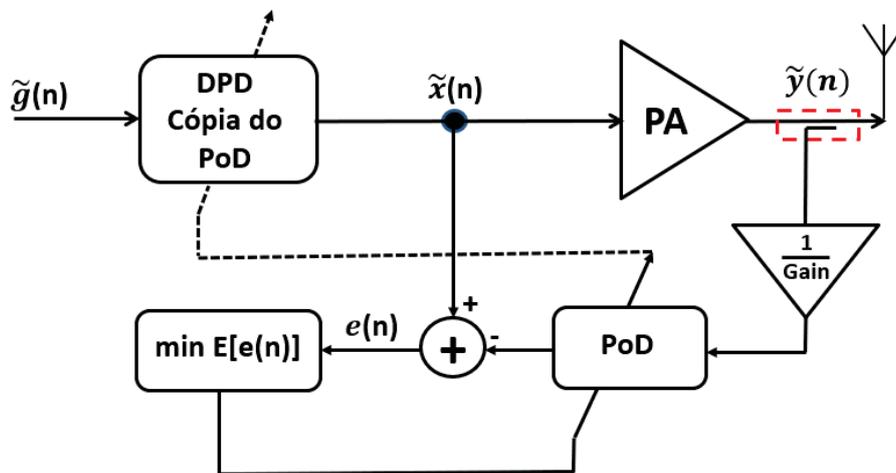


Figura 2.7: Arquitetura de aprendizagem indireta da DPD com cópia do PoD.  
Fonte: Adaptado de (GILABERT; MONTORO; BERTRAN, 2005)

### 2.2.2 Algoritmos para Estimação de Parâmetros DPD

A implementação de algoritmos que relacionam amostras nos instantes passados e atual dos sinais de entrada e saída do RF PA para a estimação de parâmetros DPD pode ser desenvolvida a partir de esquemas de DPD de baixa complexidade. Em todos eles,

os parâmetros da unidade DPD são e devem ser estimados em função do comportamento físico do RF PA, isto é, por um conjunto de dados de entrada e saída medidos no RF PA físico.

### 2.2.2.1 Série de Volterra

Uma série de Volterra (SV) é definida como sendo uma combinação de um sistema não linear estático expresso através de uma série de Taylor e uma representação na forma de integral de convolução unidimensional de sistemas lineares dinâmicos. As integrais de convolução multidimensionais resultantes (SCHETZEN, 1981) têm sido usadas em diferentes áreas de estudo para a descrição de sistemas não lineares, causais, invariantes no tempo e com memória desvanecente (MATHEWS; SICURANZA, 2000).

Um sistema linear invariante no tempo (LTI) é caracterizado por três parâmetros, nomeadamente a sua resposta ao impulso  $h_1(t)$ , o sinal de entrada  $u(t)$  e o respectivo sinal de saída  $y_1(t)$ , que pode ser expresso através de uma integral de convolução, tal que:

$$y_1(t) = h_1(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(q)u(t - q)dq \quad (2.31)$$

Como o sistema LTI é considerado causal então, o limite inferior na integral na equação (2.31) é definido como zero e como se supõe que o sistema tem uma resposta de impulso finito de duração  $M$ , já que nos sistemas com memória desvanecente, tal como um RF PA, a influência que uma entrada exerce sobre a saída diminuiu conforme o passar do tempo. Portanto, a quantidade de amostras passadas pode ser limitada em  $M$ , chamada duração de memória ou profundidade de memória (BONFIM, 2016). Então, o limite superior da integral na equação (2.31) é truncado em  $M$  e, dessa forma, a causalidade e o comprimento da memória finita são sempre assumidos (LIMA, 2009). Assim:

$$y_1(t) = \int_0^M h_1(q)u(t - q)dq \quad (2.32)$$

Para um sistema não linear causal, invariante no tempo e de desvanecimento da memória (STODDARD; WELSH, 2018), a estrutura do modelo da SV, escrita como uma soma infinita de p-ésima ordem é:

$$y(t) = \sum_{p=1}^{\infty} y_p(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_p(t) \dots \quad (2.33)$$

onde a saída de p-ésima ordem do modelo  $y_p(t)$  pode ser escrita como uma generalização

dos produtos da convolução de p-ésima ordem, tal como na equação (2.32):

$$y_p(t) = \int_0^M \cdots \int_0^M h_{p(q_1, \dots, q_p)} \prod_{i=1}^p x(t - q_i) dq_i \quad (2.34)$$

Combinando as equações (2.33) e (2.34), a saída  $y(t)$  do sistema não linear da equação (2.33) pode resultar em uma série de potência de ordem de truncamento polinomial  $P$ , expressando uma soma discreta das p-ésimas saídas da equação (2.34):

$$y(t) = \sum_{p=1}^P \int_0^M \cdots \int_0^M h_{p(q_1, \dots, q_p)} \prod_{i=1}^p x(t - q_i) dq_i \quad (2.35)$$

onde  $h_{p(q_1, \dots, q_p)}$  são os coeficientes de p-ésima ordem da SV.

Para este trabalho, apenas sistemas de tempo discreto ( $n$ ) têm maior interesse, daí que, ao longo do restante desenvolvimento, a SV de tempo discreto será usada para a modelagem comportamental de um RF PA e da DPD. Nesse sentido, a generalização de uma representação de série de potências com memória finita de comprimento  $M$  é dada por:

$$y(n) = \sum_{p=1}^P \sum_{q_1=0}^M \sum_{q_2=q_1}^M \cdots \sum_{q_p=q_{p-1}}^M h_{p(q_1, q_2, \dots, q_p)} \prod_{i=1}^p x(n - q_i) \quad (2.36)$$

onde  $x(n)$  e  $y(n)$  são, respectivamente, os sinais de entrada e saída na amostra temporal  $n$ ,  $P$  é a ordem de truncamento polinomial e  $M$  é o comprimento da memória do sistema. Aqui, assume-se que todos os coeficientes da SV de tempo discreto sejam funções simétricas de seus argumentos:

$$h_{p(q_1, q_2, \dots, q_p)} = h_{p(q_{i_1}, \dots, q_{i_p})} \quad (2.37)$$

onde  $(i_1, i_2, \dots, i_p)$  são as permutações de  $(1, 2, \dots, p)$ . A suposição de simetria dos coeficientes não implica nenhuma perda de generalidade.

## 2.2.2.2 Modelos de Wiener e de Hammerstein

### A. Modelo de Wiener

Um caso especial da formulação de Volterra definida na equação (2.36) é o modelo de Wiener (GILABERT; MONTORO; BERTRAN, 2005; MORGAN *et al.*, 2006), que resulta da modificação dos coeficientes  $h_{p(q_1, q_2, \dots, q_p)}$  em  $a_p h(q_1) \cdots h(q_p)$ , isto é  $h_{p(q_1, q_2, \dots, q_p)} = a_p h(q_1) \cdots h(q_p)$ ,  $p = 1, 2, \dots, P$ . A equação do modelo Wiener é dado por:

$$y_W(n) = \sum_{p=1}^P a_p \left[ \sum_{q=0}^{M-1} h(q) x(n - q) \right]^p \quad (2.38)$$

onde  $a_p$  são os coeficientes polinomiais das não linearidades de Wiener,  $P$  é a ordem de truncamento polinomial e  $M$  é o comprimento da memória de Wiener. O diferencial do modelo de Wiener está no fato deste modelo ser uma das maneiras mais simples possíveis de se conseguir uma combinação entre efeitos de memória e as não linearidades, todavia, a sua eficácia na modelagem da maioria dos RF PAs e DPDs é muito limitada. Além disso, o modelo de Wiener tem um atributo indesejável em que a saída da equação (2.38) depende não linearmente dos coeficientes, tornando sua estimativa mais problemática do que para modelos lineares nos seus parâmetros.

## B. Modelo de Hammerstein

Quando se pretende chegar ao modelo de Hammerstein, caracterizado por não linearidade de memória simples (GILABERT; MONTORO; BERTRAN, 2005; MORGAN *et al.*, 2006), é útil reescrever o modelo de Volterra da equação (2.36) em uma forma alternativa, fazendo uma alteração nas variáveis de índice diagonais proposta por (RAZ; VEEN, 1998), tal que  $k_l = q_{l+1} - q_1, l = 1, 2, \dots, p$ . Assim, o modelo de Volterra da equação (2.36) torna-se (MORGAN *et al.*, 2006):

$$y(n) = \sum_{p=1}^P \sum_{k_1=-M+1}^{M-1} \sum_{k_2=-M+1}^{M-1} \cdots \sum_{k_{p-1}=-M+1}^{M-1} g_{k_1, k_2, \dots, k_{p-1}}^{(p)}(n) * \left[ x(n) \prod_{l=1}^{p-1} x(n - k_l) \right] \quad (2.39)$$

onde  $*$  denota convolução unidimensional e  $g_{k_1, k_2, \dots, k_{p-1}}^{(p)}(n) = h_p(k, k+k_1, \dots, k+k_{p-1})$ . Para todos os  $g_{k_1, k_2, \dots, k_{p-1}}^{(p)}(n)$  definidos em  $k = 0$ , isto é,  $g_{k_0, \dots, 0}^{(p)}(n)$  resulta que  $g_{0, \dots, 0}^{(p)}(n) = a_p g(q), p = 1, 2, \dots, P$ . Assim, para o modelo de Hammerstein (GILABERT; MONTORO; BERTRAN, 2005; MORGAN *et al.*, 2006), tem-se:

$$y_H(n) = \sum_{q=0}^{M-1} g(q) \sum_{p=1}^P a_p x^p(n - q) \quad (2.40)$$

onde  $P$  é a ordem de truncamento polinomial e  $M$  é o comprimento da memória de Hammerstein. Este modelo de Hammerstein também é de não linearidade de memória muito simples. Embora seja uma regressão linear nos parâmetros  $a_p g(q)$ , o modelo de Hammerstein é de eficácia limitada para aplicação como algoritmo de estimação de parâmetros da DPD.

## C. Modelo Combinado de Wiener-Hammerstein

Partindo dos modelos separados de Wiener e Hammerstein e com base na forma alternativa de Volterra (2.39), (MORGAN *et al.*, 2006) apresentou uma proposta de combinação dos dois modelos em um único que chamou modelo Wiener-Hammerstein. Expres-

sando primeiro a parte dos coeficientes  $a_p h(q_1) \cdots h(q_p)$  de Wiener na forma alternativa de Volterra (2.39) e, em seguida, convolvendo com Hammerstein, resulta nos coeficientes  $g_{k_1, k_2, \dots, k_{p-1}}^{(p)}(n) = a_p g(q) * [h(k)h(k+k_1), \dots, h(k+k_{p-1})]$  definidos em  $p = 1, 2, \dots, P$ . Assim, o modelo combinado de Wiener-Hammerstein é descrito como:

$$y_{WH}(n) = \sum_{q_2=0}^{M-1} g(q_2) \sum_{p=1}^P a_p \left[ \sum_{q_1=0}^{M-1} h(q_1) x(n - q_1 - q_2) \right]^p \quad (2.41)$$

onde  $P$  é a ordem de truncamento polinomial e  $M$  é o comprimento da memória de Wiener-Hammerstein. Este modelo combinado de Wiener-Hammerstein, embora mais geral do que os modelos de Wiener e de Hammerstein, ainda é não linear nos seus parâmetros.

### 2.2.2.3 Modelos Polinomiais de Memória Multidimensionais

#### A. Polinômio de Memória Unidimensional

Dentre os modelos simplificados baseados na série de Volterra, um modelo comportamental de banda base relativamente simples que acomoda a memória e também o comportamento não linear, comumente aplicado à modelagem comportamental de RF PA e DPD é o polinômio de memória (MP) (KIM; KONSTANTINOU, 2001; MORGAN; MA; DING, 2003; MORGAN *et al.*, 2006; SCHUARTZ *et al.*, 2019) de termos unidimensionais, dado por:

$$y_{MP}(n) = \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{P-1} h_{m,p} x(n-m) |x(n-m)|^p \quad (2.42)$$

onde os coeficientes  $h_{m,p}$  são parâmetros que especificam o modelo MP,  $P$  é a ordem de truncamento polinomial e  $M$  é o comprimento da memória. Para dar resposta à falta de um modelo comportamental adequado para o RF PA reconfigurável, com comutação em tempo real, onde cada modo de ganho deve ter seu próprio conjunto privado de polinômios de memória, (SCHUARTZ *et al.*, 2019) usou polinômios de memória limitados em ambos os lados em que os limites inferior e superior podem garantir os recursos locais e seletivos necessários. Para impor não apenas limites inferiores, mas também superiores e atrasos de comutação, o sinal de entrada foi particionado em sinais zonais tais que  $x_z(n) = 0$ , se  $|x(n-p)| \leq l_z \cup |x(n-p)| \leq l_{z+1}$  ou  $x_z(n) = x(n)$ , se  $l_z < |x(n-p)| \leq l_{z+1}$ . Então, combinando estas partições com o MP da equação (2.42), (SCHUARTZ *et al.*, 2019) chegou-se a :

$$y_{MP}(n) = \sum_{m=0}^M \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{z=1}^Z h_{m,p,z} x_z(n-m) |x_z(n-m)|^p \quad (2.43)$$

onde  $Z$  é o número de modos de ganho de RF PA e  $l_z$  é a amplitude de entrada para a comutação entre os modos  $(z-1)$  e  $(z)$ .

## B. Polinômio de Memória Generalizado

Inserindo versões de amostras atrasadas entre o sinal  $x(n - m)$  e sua envoltória exponencial  $|x(n - m)|^p$ , isto é, alguns termos bidimensionais no MP da equação (2.42), (MORGAN *et al.*, 2006) obteve o chamado polinômio de memória generalizada (GMP), sendo um modelo comportamental muito poderoso, usado para linearizar RF PAs fortemente não lineares:

$$\begin{aligned}
 y_{GMP}^{(k)}(n) &= \sum_{p=0}^{P_1-1} \sum_{l=0}^{L_1-1} h_{p,l} x(n-l) |x(n-l)|^p \\
 &+ \sum_{p=1}^{P_2} \sum_{l=0}^{L_2-1} \sum_{m=1}^{M_2} h_{p,l,m} x(n-l) |x(n-l-m)|^p \\
 &+ \sum_{p=1}^{P_3} \sum_{l=0}^{L_3-1} \sum_{m=1}^{M_3} h_{p,l,m} x(n-l) |x(n-l+m)|^p
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

onde  $P_1$  e  $L_1$  são, respectivamente, os truncamentos polinomial e de memória que geram o número de coeficientes  $h_{p,l}$  do sinal e da envoltória alinhada ao polinômio de memória;  $P_2$  é a ordem polinomial, e  $L_2$  e  $M_2$  são os truncamentos de memória que determinam o número de coeficientes  $h_{p,l,m}$  do sinal e da envoltória de atraso;  $P_3$  é a ordem polinomial, e  $L_3$  e  $M_3$  são os truncamentos de memória, de fase e de amplitude, respectivamente, que geram o número de coeficientes  $h_{p,l,m}$  do sinal de envoltória principal. A vantagem deste modelo é ser linear nos seus parâmetros.

Em muitos casos, não se exigem todos os coeficientes do modelo GMP da equação (2.44) o que leva à consideração de alguns termos bidimensionais e negligenciando os termos que contêm produtos das componentes de amplitude em mais de duas amostras de tempo diferentes. Assim, o modelo GMP da equação (2.44) reduzido por (BONFIM; LIMA, 2016) resulta em:

$$y_{GMP}(n) = \sum_{p=1}^{P-1} \sum_{m_1=0}^M \sum_{m_2=1}^M h_{p,m_1,m_2} |x(n-m_1)|^p x(n-m_2) \tag{2.45}$$

onde  $P$  é a ordem de truncamento polinomial e  $M$  é o comprimento da memória.

## C. Polinômio de Memória Avançado

O polinômio de memória avançado (AMP) definido por (BONFIM; LIMA, 2016) é um caso geral do GMP e leva em conta todos os termos unidimensionais e bidimensionais

das séries de Volterra:

$$y_{AMP}(n) = \sum_{m_1=0}^M \sum_{m_2=0}^M \sum_{p_1=0}^P \sum_{p_2=0}^P h_{m_1, m_2, p_1, p_2} |x(n - m_1)|^{p_1} |x(n - m_2)|^{p_2} x(n - m_1) \quad (2.46)$$

onde  $P$  e  $M$  são, respectivamente, os truncamentos polinomiais de não linearidade e de memória. Este modelo AMP apresenta melhor acurácia de modelagem comparado aos anteriores, porém com maior quantidade de coeficientes gerados em comparação com o GMP. Para garantir bom condicionamento da matriz de entradas do modelo AMP de (BONFIM; LIMA, 2016) apresentado em (2.46), as colunas repetidas correspondentes a  $m_1 \neq m_2$  devem ser totalmente removidas para evitar redundâncias. Ao incluir estas restrições associadas à remoção de colunas repetidas e incluindo a condição  $(p_1 + p_2) = p < P$  tendo em conta que o grau de não linearidade máxima permitido é  $P$ , o modelo AMP reescrito por (SCHUARTZ *et al.*, 2019) é definido como:

$$\begin{aligned} y_{AMP}(n) = & \sum_{m_1=0}^M x(n - m_1) \sum_{p_1=0}^{P-1} h_{m_1, p_1, p_2} |x(n - m_1)|^{p_1} + \sum_{m_1=0}^M x(n - m_1) \\ & \sum_{\substack{m_2=0 \\ m_1 \neq m_2}}^M \sum_{\substack{p_1=0 \\ p < P}}^{P-1} \sum_{p_2=1}^P h_{m_1, m_2, p_1, p_2} |x(n - m_1)|^{p_1} |x(n - m_2)|^{p_2} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Tanto no modelo AMP da equação (2.46), assim como no AMP da equação (2.47), para os mesmos valores de  $P$  e  $M$ , a quantidade de parâmetros é muito maior do que a quantidade de parâmetros gerados no modelo MP da equação (2.42).

## D. Polinômio de Memória Tridimensional

Polinômio de memória tridimensional (3D-MP) foi proposto por (YOUNES *et al.*, 2013) para a linearização de RF PAs de três bandas concorrentes, onde a DPD é vista como um sistema de três entradas e três saídas, e considera as não linearidades associadas à compressão de ganho de potência, as interferências crosstalking entre bandas distintas e os efeitos de memória devido à resposta de frequência não uniforme de circuitos de polarização. Este modelo de (YOUNES *et al.*, 2013) calcula a amostra de saída instantânea em cada banda como um polinômio de amostras de entrada atuais e passadas de acordo com:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{3D-MP}^{(k)}(n) = & \sum_{q=0}^M \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^i h_{q,p,i,j}^{(k)} \tilde{x}_k(n - q) |\tilde{x}_1(n - q)|^{p-i} \\ & \times |\tilde{x}_2(n - q)|^{i-j} |\tilde{x}_3(n - q)|^j \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde  $h_{q,p,i,j}^{(k)}(n)$ ,  $k = 1,2,3$  é o coeficiente ajustável nas três bandas,  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2$  e  $\tilde{x}_3$  indicam, respectivamente, as entradas dos canais 1, 2 e 3, e  $\tilde{y}_{3D-MP}^{(k)}(n)$ ,  $k = 1,2,3$  são os sinais de envoltória de valor complexo de saída do RF PA de três bandas,  $P$  e  $M$  são, respectivamente, a ordem de truncamento polinomial das não linearidades e a duração da memória. Este é um modelo linear nos seus parâmetros.

## E. Polinômio de Memória Multidimensional

Um modelo polinomial de memória com várias bandas (MBMP), sendo uma extensão do modelo polinômio de memória tridimensional de (YOUNES *et al.*, 2013) foi proposto por (KWAN *et al.*, 2017) cuja formulação matemática pode ser representada multidimensionalmente para várias bandas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{MBMP}^{(k)}(n) &= \sum_{p_1=0}^{P_1} \sum_{p_2=0}^{P_1-p_1} \sum_{p_3=0}^{P_1-(p_1+p_2)} \sum_{q=0}^{M_1} h_{1,p_1,p_2,p_3,q}^{(k)} x_k(n-q) |x_1(n-q)|^{p_1} |x_2(n-q)|^{p_2} \\ &\times |x_3(n-q)|^{p_3} + \sum_{p_2=0}^{P_2} \sum_{p_3=0}^{P_2-p_1} \sum_{p_3=0}^{P_1-(p_1+p_2)} h_{2,p_1,p_2,p_3}^{(k)} x_k(n) |x_1(n)|^{p_1} \\ &\times |x_2(n)|^{p_2} |x_3(n)|^{p_3} + \sum_{p_1=0}^{P_3} \sum_{p_2=0}^{P_3-p_1} \sum_{p_3=0}^{P_3-(p_1+p_2)} \sum_{q=0}^{M_2} h_{3,p_1,p_2,p_3,q}^{(k)} x_k^2(n) \\ &\times x_k^*(n-q) |x_1(n)|^{p_1} |x_2(n)|^{p_2} |x_3(n)|^{p_3} \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde, por exemplo no caso de 3 bandas,  $\tilde{x}_1$ ,  $\tilde{x}_2$  e  $\tilde{x}_3$  indicam as entradas nos canais 1, 2 e 3, respectivamente,  $h_{1,p_1,p_2,p_3,q}^{(k)}$ ,  $h_{2,p_1,p_2,p_3}^{(k)}$  e  $h_{3,p_1,p_2,p_3,q}^{(k)}$  são o conjunto dos coeficientes na  $i$ -ésima banda,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  são as ordens de truncamento polinomial das não linearidades, enquanto  $M_1$  e  $M_2$  são os comprimentos de memória. Este também é um modelo linear nos seus parâmetros.

## F. Polinômio de Memória Tridimensional Aprimorado

Modelo polinomial de memória tridimensional aprimorado (3D-IMP) foi proposto por (SCHUARTZ *et al.*, 2021) para melhorar o compromisso entre a precisão da modelagem e a complexidade computacional dos modelos 3DMP de (YOUNES *et al.*, 2013) e MBMP de (KWAN *et al.*, 2017). O raciocínio adotado por (SCHUARTZ *et al.*, 2021) no desenvolvimento do 3DIMP foi incluir tantos, quanto possíveis, fatores de truncamento independentes entre si para, por um lado, reduzir substancialmente a quantidade de coeficientes e, por outro, melhorar significativamente a quantidade de realizações dos modelos atingíveis, com pouca ou nenhuma deterioração na precisão da modelagem, bem como para separar as contribuições sem memória das contribuições de memória. Matematicamente, o modelo

3DIMP é descrito como:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{3DIMP}^{(i)}(n) &= \sum_{p_1=0}^{P_1-1} h_{p_1}^{(i)} x_i(n) |x_i(n)|^{p_1} + \sum_{p_2=0}^{P_2-1} \sum_{m_1=1}^{M_1} h_{m_1,p_2}^{(i)} x_i(n - m_1) |x_i(n - m_1)|^{p_2} \\
&+ \sum_{p_3=0}^{P_3-1} \sum_{q_1=1}^{Q_1} h_{p_3q_1}^{(i,j)} x_i(n) |x_i(n)|^{p_3} |x_j(n)|^{q_1} + \sum_{p_4=0}^{P_4-1} \sum_{q_2=1}^{Q_2} \sum_{m_2=1}^{M_2} h_{m_2,p_4,q_2}^{(i,j)} x_i(n - m_2) \\
&\times |x_i(n - m_2)|^{p_4} |x_j(n - m_2)|^{q_2} + \sum_{p_5=0}^{P_5-1} \sum_{r_1=1}^{R_1} h_{p_5r_1}^{(i,k)} x_i(n) |x_i(n)|^{p_5} |x_k(n)|^{r_1} \\
&+ \sum_{p_6=0}^{P_6-1} \sum_{r_2=1}^{R_2} \sum_{m_3=1}^{M_3} h_{m_3,p_6,r_2}^{(i,k)} x_i(n - m_3) |x_i(n - m_3)|^{p_6} |x_k(n - m_3)|^{r_2} \quad (2.50) \\
&+ \sum_{p_7=0}^{P_7-1} \sum_{q_3=1}^{Q_3} \sum_{r_3=1}^{R_3} h_{q_3,p_7,r_3}^{(i,j,k)} x_i(n) |x_i(n)|^{p_7} |x_j(n)|^{q_3} |x_k(n)|^{r_3} + \sum_{p_8=0}^{P_8-1} \sum_{q_4=1}^{Q_4} \sum_{r_4=1}^{R_4} \\
&\sum_{m_4=1}^{M_4} h_{m_4,p_8,q_4,r_4}^{(i,j,k)} x_i(n - m_4) |x_i(n - m_4)|^{p_8} |x_j(n - m_4)|^{q_4} |x_k(n - m_4)|^{r_4}
\end{aligned}$$

onde  $\tilde{x}_i$ ,  $\tilde{x}_j$  e  $\tilde{x}_k$  indicam as entradas nas i-ésima, j-ésima e k-ésima bandas, respectivamente,  $h_{p_1}^{(i)}$ ,  $h_{m_1,p_2}^{(i)}$ ,  $h_{p_3q_1}^{(i,j)}$ ,  $h_{m_2,p_4,q_2}^{(i,j)}$ ,  $h_{p_5r_1}^{(i,k)}$ ,  $h_{m_3,p_6,r_2}^{(i,k)}$ ,  $h_{q_3,p_7,r_3}^{(i,j,k)}$  e  $h_{m_4,p_8,q_4,r_4}^{(i,j,k)}$  são os coeficientes ajustáveis,  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  são as dezesseis ordens de truncamento polinomial das não linearidades, enquanto  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  são os quatro diferentes comprimentos de memória. Este, também é um modelo linear nos seus parâmetros.

#### 2.2.2.4 Redes Neurais Artificiais

Redes neurais artificiais são modelos matemáticos ensinados através da aprendizagem para reproduzir o comportamento dos neurônios humanos com intuito de processar informações ou problemas complexos usando como entrada dados de imagem ou de som ou mesmo de sinais não lineares contendo certo nível de ruído. São consideradas máquinas constituídas de um conjunto de neurônios artificiais interconectados entre si para gerar, dependendo da aplicação, uma ou mais saídas a partir de uma, ou várias entradas. Têm sido preferencialmente usadas para modelar sistemas dinâmicos não lineares em muitos campos de aplicação, dentre eles, eletrônica e telecomunicações. Nestes dois campos de aplicação, para a modelagem comportamental equivalente passa-baixa de RF PA e DPD, as redes neurais artificiais e as séries de Volterra em coordenadas cartesianas e polares, têm recebido interesse particular por parte da comunidade de micro-ondas e dispositivos de RF (PEDRO; MAAS, 2005; MKADEM; BOUMAIZA, 2011; LIMA; CUNHA; PEDRO, 2011).

Modelos de redes neurais artificiais não recursivas, principalmente as redes neurais feed-forward de múltiplas camadas (HORNIK; STINCHCOMBE; WHITE, 1989) são de-

nominadas redes aproximadoras universais por conseguirem aproximar qualquer função arbitrária mensurável, independentemente da função de ativação, com qualquer grau de precisão desejado e não apresentam restrições sob ponto de vista teórico que possam colocar em causa o sucesso da rede. Estas redes feed-forward de múltiplas camadas têm sido largamente utilizadas para modelagem de RF PAs e DPDs por duas arquiteturas diferentes: a função de base radial e o perceptron de múltiplas camadas de entradas. A diferença entre as duas arquiteturas está na maneira como o espaço de entrada das redes neurais feed-forward multidimensional é mapeado nos sinais unidimensionais a serem aplicados na entrada das funções de ativação na camada oculta (LIMA; CUNHA; PEDRO, 2011).

Redes neurais artificiais de função de base radial consistem de três camadas de múltiplas entradas: a camada de entrada é composta de nós de origem que conectam a rede ao seu ambiente; a camada escondida consiste em uma ou várias unidades ocultas que sofrem influência das condições de polarização e têm como função principal a transformação não linear do espaço da camada de múltiplas entradas para o espaço da camada oculta (XU; LI; XI, 2004; ISAKSSON; WISELL; RONNOW, 2005; HAYKIN, 2009), resultando nos sinais unidimensionais  $\tilde{g}_r(n)$  definidos em (LIMA; CUNHA; PEDRO, 2011), dados por:

$$\tilde{g}_r(n) = \sqrt{\sum_{m=0}^M [x(n-m) - \omega_{r,m}]^2} \quad (2.51)$$

onde  $x(n-m)$ ,  $m = 0, \dots, M$  são os sinais de entrada de diferentes instantes de tempo,

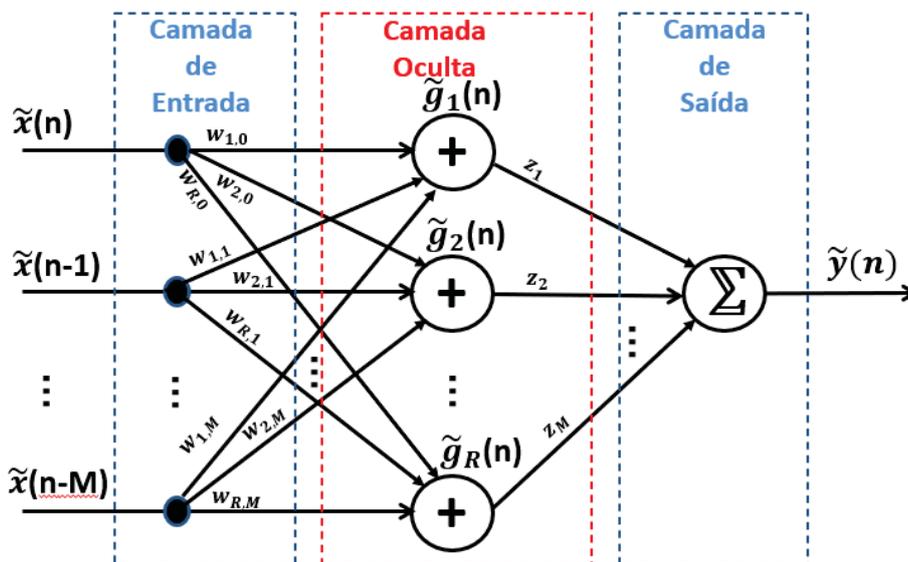


Figura 2.8: Arquitetura de Redes de Função de Base Radial.  
Fonte: Adaptado de (LIMA; CUNHA; PEDRO, 2011)

$M$  é o comprimento de memória e  $\omega_{r,m}$  é a resposta ao impulso finito. Para a maioria das aplicações, a dimensionalidade da única camada oculta da rede é alta. Essa camada

é treinada de maneira não supervisionada, usando o estágio 1 (camada de entrada) do procedimento de aprendizado híbrido; uma camada de saída normalmente linear nos seus parâmetros, projetada para fornecer a resposta da rede ao padrão de ativação aplicado à camada de entrada. Esta camada de saída linear é treinada de forma supervisionada usando o estágio 2 (segunda camada) do procedimento híbrido (XU; LI; XI, 2004; ISAKSSON; WISELL; RONNOW, 2005; HAYKIN, 2009; LIMA; CUNHA; PEDRO, 2011). A figura 2.8 ilustra o diagrama estrutural de uma rede neural artificial de função de base radial de três camadas.

Redes Neurais artificiais perceptron de três camadas de entradas são baseadas no perceptron linear padrão e caracterizadas pela presença de pelo menos uma camada intermediária (totalmente escondida) de neurônios com funções de ativação não lineares, situada entre a camada de múltiplas entradas e a respectiva camada neural de saída. O treinamento das camadas é efetivado de forma supervisionada e isso leva esta categoria de rede à modelagem de efeitos da memória de longo prazo, podendo ser usada para simular mudanças dinâmicas lentas das características não lineares do RF PA (BENVENUTO; PIAZZA; UNCINI, 1993; LIU; BOUMAIZA; GHANNOUCHI, 2004; SILVA; SPATTI; FLAUZINO, 2010; MARWALA, 2013). A camada intermediária extrai a maioria das informações provenientes das camadas de múltiplas entradas e, por uma combinação linear, as codifica por meio dos pesos sinápticos e limiares de seus neurônios (LIU; BOUMAIZA; GHANNOUCHI, 2004; SILVA; SPATTI; FLAUZINO, 2010), formando assim os sinais unidimensionais  $\tilde{g}_r(n)$  definidos em (LIMA; CUNHA; PEDRO, 2011), dados por:

$$\tilde{g}_r(n) = \sum_{m=0}^M \omega_{r,m} x(n-m) + b_r \quad (2.52)$$

onde  $x(n-m)$ ,  $m = 0, \dots, M$  são os sinais de entrada de diferentes instantes de tempo,  $M$  é o comprimento de memória,  $\omega_{r,m}$  são os pesos sinápticos e  $b_r$  são as condições de polarização. Por fim, os neurônios da camada de saída recebem os estímulos advindos dos neurônios da camada intermediária, produzindo um padrão de resposta que será a saída disponibilizada pela rede (LIU; BOUMAIZA; GHANNOUCHI, 2004; SILVA; SPATTI; FLAUZINO, 2010; MARWALA, 2013). A figura 2.9 ilustra o diagrama estrutural de uma rede neural artificial perceptron de três camadas de múltiplas entradas, largamente usada na modelagem comportamental de RF PA e DPD. Usando apenas a componente de amplitude de valor real do sinal de entrada sujeito ao operador sigmóide não linear como a função de ativação de valor complexo definida em (GEORGIU; KOUTSOUGERAS, 1992), (FREIRE *et al.*, 2021) além de estender o uso de redes neurais artificiais perceptron de três camadas de múltiplas entradas para lidar com RF PAs de múltiplos modos, apresentou uma nova função de ativação complexa bem ajustada à modelagem comportamental de RF PA e DPD, que considera os comportamentos das conversões AM-AM e AM-PM.

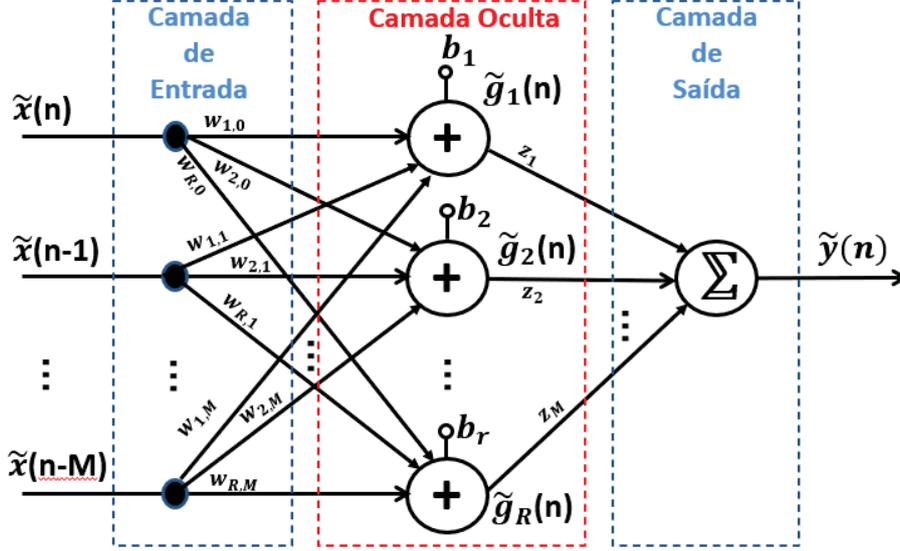


Figura 2.9: Arquitetura de rede perceptron de três camadas de múltiplas entradas.  
Fonte: Adaptado de (LIMA; CUNHA; PEDRO, 2011)

### 2.3 Série de Volterra Clássica

Para a finalidade de modelagem da DPD e do RF PA, a equação (2.36) representa a relação entre o sinal de saída  $y(n)$  e o de entrada  $x(n)$  do RF PA. A representação equivalente passa-baixa dessa equação (2.36) descrevendo a relação entre os sinais de envoltória de valores complexos na entrada  $\tilde{x}(n)$  e na saída  $\tilde{y}(n)$  do RF PA (BENEDETTO; BIGLIERI; DAFFARA, 1979; ZHU; BRAZIL, 2004), respectivamente, é dada pelo chamado modelo clássico de Volterra ( $CV$ ):

$$\tilde{y}(n) = \sum_{p=1}^P \sum_{q_1=0}^M \sum_{q_2=q_1}^M \cdots \sum_{q_p=q_{p-1}}^M \sum_{q_{p+1}=0}^M \sum_{q_{p+2}=q_{p+1}}^M \cdots \sum_{q_{2p-1}=q_{2p-2}}^M \tilde{h}_{2p-1}(q_1, q_2, \dots, q_{2p-1}) \prod_{i_1=1}^p \tilde{x}(n - q_{i_1}) \prod_{i_2=p+1}^{2p-1} \tilde{x}^*(n - q_{i_2}) \quad (2.53)$$

onde  $(*)$  denota complexo conjugado,  $2P - 1$  é a ordem de truncamento polinomial e  $\tilde{h}_{2p-1}(q_1, q_2, \dots, q_{2p-1})$  são os coeficientes da  $CV$  correspondentes a uma generalização da equivalente passa-baixa da resposta ao impulso dos sistemas lineares e não lineares.

As séries de Volterra de tempo discreto, como a  $CV$ , têm a importante propriedade de serem lineares em seus parâmetros  $\tilde{h}_{2p-1}(q_1, q_2, \dots, q_{2p-1})$ . Isso significa que, em um cenário de modelagem comportamental onde são usadas medidas experimentais por dados discretos de sinais de envoltória de valor complexo de entrada e de saída, a extração dos coeficientes de  $CV$  tem sido feita usando técnicas de identificação de sistemas lineares como os algoritmos de: mínimos quadrados ( $LS$ ), erro mínimo médio quadrático ( $MMSE$ ), mínimos quadrados médios ( $LMS$ ) e mínimos quadrados recursivos ( $RLS$ )

(MATHEWS; SICURANZA, 2000). Contudo, o número de coeficientes ou parâmetros ( $N_P$ ) necessário para uma perfeita representação do modelo cresce muito rapidamente com a alteração da ordem polinomial  $P$ , que já respeita as restrições de frequência do próprio RF PA em  $P_0 = 2P - 1$ , e o comprimento da memória  $M$  (ISAKSSON; WISELL; RONNOW, 2006), aumenta em:

$$N_P = \sum_{p=0}^{P-1} \frac{[(M+p)!]^2 (M+p+1)}{(M!p!)^2 (p+1)} \quad (2.54)$$

o que faz com que, uma extração direta dos coeficientes de Volterra usando as técnicas de identificação de sistemas lineares acima descritas, ( $LS$ ,  $MMSE$ ,  $LMS$  e  $RLS$ ), possam não ser satisfatórias com o resultado esperado, quando o número de parâmetros gerados é grande.

## 2.4 Séries de Volterra Polar

Tradicionalmente, a representação cartesiana dos sinais de envoltória de valor complexo de entrada  $\tilde{x}(n) = x_r(n) + jx_i(n)$  e de saída  $\tilde{y}(n) = y_r(n) + jy_i(n)$  foi adotada em modelos de expansão de banda base de  $CV$  da equação (2.53), devido à sua associação direta às componentes cartesianas, in-phase ( $I$ ) e quadrature ( $Q$ ), do modulador/demodulador comumente usado em transceptores sem fio. No entanto, para uma representação polar de sinais de envoltória complexa, o RF PA processa de forma diferente as componentes de amplitude e fase do sinal, situação esta prevista em qualquer amplificador convencional que consiga demodular a componente de amplitude e processá-la, independentemente da componente de fase. Para reduzir o número de coeficientes  $N_P$  gerados na  $CV$  da equação (2.53), (CUNHA; LIMA; PEDRO, 2010a) e (CUNHA; LIMA; PEDRO, 2010b) estudaram o processo de expansão do modelo de  $CV$  e, escolhendo e substituindo a representação do sinal de envoltória complexa de entrada  $\tilde{x}(n)$  na equação (2.53) por suas componentes polares, de amplitude  $a(n)$  e de fase  $e^{j\phi(n)}$ , resultou na chamada série de Volterra em coordenadas polares ( $PV$ ), dada por:

$$\tilde{y}_{PV}(n) = \sum_{p_1=1}^{P_1} \sum_{p_2=1}^{P_2} \sum_{m_1=0}^M \cdots \sum_{m_{p_1}=m_{p_1-1}}^M \sum_{l_1=0}^L \cdots \sum_{l_{p_2}=l_{p_2-1}}^L \sum_{l_{p_2+1}=0}^L \cdots \sum_{l_{2p_2-1}=l_{2p_2-2}}^L \quad (2.55)$$

$$\tilde{h}_{p_1, 2p_2-1}(m_1, \dots, m_{p_1}, l_1, \dots, l_{2p_2-1}) \prod_{q=1}^{p_1} a(n - m_q) \prod_{r=1}^{p_2} e^{j\phi(n-l_r)} \prod_{s=p_2+1}^{2p_2-1} e^{-j\phi(n-l_s)}$$

onde  $\tilde{h}_{p_1, 2p_2-1}(m_1, \dots, m_{p_1}, l_1, \dots, l_{2p_2-1})$  são coeficientes complexos do modelo,  $a(\cdot)$  representa a amplitude de entrada e  $e^{j\phi(\cdot)}$  é a fase de entrada.  $P_1$  é o truncamento polinomial para a amplitude,  $M$  é a duração de memória para a amplitude,  $P_2$  é a ordem de truncamento

polinomial para a fase e  $L$  é a duração de memória para a fase do sinal. Em termos comparativos, (i) o modelo  $PV$  apresenta maior flexibilidade e tem mais graus de liberdade do que o modelo  $CV$ ; (ii) na modelagem de RF PAs, a representação polar, tanto dos sinais de envoltória complexa assim como do próprio modelo de  $PV$ , apresenta uma vantagem maior em termos de acurácia alcançada do que a representação cartesiana tradicional do modelo  $CV$ .

Assim como a equação (2.55), usando como dados sinais de envoltória de valor complexo de entrada e de saída na equação (2.53), uma extração direta dos coeficientes de  $PV$  pode ser feita recorrendo a técnicas de identificação de sistemas lineares como  $LS$ ,  $MMSE$ ,  $LMS$  e  $RLS$  (MATHEWS; SICURANZA, 2000). Porém, quanto maior a precisão do modelo  $PV$ , maior é a quantidade de parâmetros  $N_P$  gerados, isto é, o número de coeficientes da  $PV$  cresce muito rapidamente com a alteração das ordens polinomiais de amplitude  $P_1$  e de fase  $P_2$  e os comprimentos da memória de amplitude  $M$  e de fase  $L$ . Isso faz com que, uma extração direta dos coeficientes de Volterra usando as técnicas de identificação de sistemas lineares possa não ser satisfatória com o resultado esperado e uma implementação de um modelo de DPD em hardware consumiria uma quantidade maior de energia.

Para diminuição do elevado número de parâmetros gerado no modelo  $PV$ , variadas estratégias têm sido adotadas. Por um lado, as estratégias de (KIM; KONSTANTINOU, 2001), (MORGAN *et al.*, 2006) e de (BONFIM; LIMA, 2016) foram usadas para se chegar a polinômio de memória de termos unidimensionais e bidimensionais sem, contudo diminuir a precisão do modelo e, muito menos comprometer o esforço computacional para a identificação dos modelos de RF PA e DPD. Por outro lado, usando estratégias de simplificação da série de Volterra, (CAVALHEIRO, 2018) modificou a  $PV$  introduzindo vários fatores de truncamento independentes entre si, quantos necessários e obteve o chamado modelo de Volterra Polar modificado, que conserva quase toda a precisão do modelo e não compromete, de forma alguma, o esforço computacional para a identificação dos modelos de RF PA e DPD.

### 2.4.1 Série de Volterra Polar Bidimensional

O número de coeficientes gerados no modelo  $PV$  da equação (2.55) é fortemente condicionado pelos quatro fatores de truncamento  $P_1$ ,  $M$ ,  $P_2$  e  $L$ . No entanto, essa quantidade de coeficientes  $N_P$  aumenta muito rapidamente com o aumento dos valores desses fatores de truncamento  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $M$  e  $L$ . Um aumento nos coeficientes de RF PA tem um efeito direto no aumento da complexidade computacional de um modelo de Volterra Polar, o que não permite um compromisso entre a precisão e o esforço computacional. Por outro lado, independentemente dos valores dos fatores de truncamento polinomial e de memória, maior precisão no modelo  $PV$  significa maior quantidade de parâmetros

gerados. A consequência disso é que se torna um desafio alcançar um RF PA operando em sua mais alta eficiência energética. No entanto, uma implementação em hardware de DPD baseada na característica do RF PA terá um alto consumo de energia que pode ser ainda maior dependendo do número de multiplicações entre a amplitude  $a(n)$  e seus atrasos temporais  $a(n - m_q)$  onde  $m_q \in [0, M]$ , entre a componente positiva de fase  $e^{j\phi(n)}$  e os respectivos atrasos temporais  $e^{j\phi(n-l_r)}$  onde  $l_r \in [0, L]$ , e por fim, entre a componente de fase negativa  $e^{-j\phi(n)}$  e seus atrasos temporais  $e^{-j\phi(n-l_s)}$  onde  $l_s \in [0, L]$ , produtos das amplitudes, produtos das fases positivas e produtos das fases negativas, todos requeridos no modelo  $PV$ . Então, isso faz com que o consumo de energia do RF PA e DPD atuando juntos seja maior que o consumo de energia do RF PA atuando sozinho.

Uma proposta para reduzir o número de parâmetros gerados no modelo  $PV$  da equação (2.55) sem, no entanto, reduzir sua precisão de forma alguma e sem comprometer o esforço computacional realizado na modelagem comportamental equivalente passa-baixa de um RF PA e a respectiva DPD (KIM; KONSTANTINOU, 2001; MORGAN *et al.*, 2006; BONFIM; LIMA, 2016), inclui a estratégia de simplificação do modelo  $PV$  para diminuir a influência dos instantes de tempo passados sem comprometer a precisão e o esforço computacional. Esta técnica de simplificação da série Volterra com termos polares considera apenas termos unidimensionais e bidimensionais. Assim, seguindo o mesmo raciocínio de (BONFIM; LIMA, 2016) de considerar apenas os termos unidimensionais e bidimensionais, a equação (2.55) pode ser reescrita na forma geral como o modelo de Volterra Polar bidimensional, ( $2D - PV$ ), por:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{2D-PV}(n) = & \sum_{p_1=1}^{P_1} \sum_{p_2=0}^{p_1-1} \sum_{m_1=0}^M \sum_{m_2=m_1+1}^M \sum_{p_3=1}^{P_3} \sum_{p_4=0}^{p_3-1} \sum_{l_1=0}^L \sum_{l_2=l_1+1}^L \sum_{p_5=1}^{p_3-1} \sum_{p_6=0}^{p_5-1} \sum_{l_3=0}^L \sum_{l_4=l_3+1}^L \\ & \tilde{h}_{p_1,p_2,p_3,p_4}(m_1,m_2,l_1,l_2,l_3,l_4) a^{(p_1-p_2)}(n-m_1) \times a^{p_2}(n-m_2) \times \\ & (e^{j\phi(n-l_1)})^{(p_3-p_4)} \times (e^{j\phi(n-l_2)})^{p_4} \times (e^{-j\phi(n-l_3)})^{(p_5-p_6)} \times (e^{-j\phi(n-l_4)})^{p_6} \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde  $\tilde{h}_{p_1,p_2,p_3,p_4}(m_1,m_2,l_1,l_2,l_3,l_4)$  são coeficientes complexos do modelo,  $a(n)$  representa a amplitude de entrada e  $e^{j\phi(n)}$  é a fase de entrada.  $P_1$  é o truncamento polinomial de amplitude,  $M$  é a duração de memória para a amplitude,  $P_3$  é a ordem de truncamento polinomial de fase e  $L$  é a duração de memória de fase do sinal.

Neste modelo  $2D - PV$ , os termos unidimensionais estão relacionados às contribuições dos sinais de entrada de amplitude e fase em uma única amostra de tempo, onde as multiplicações e produtos são realizados quando os atrasos de memória de amplitude e fase são  $m_q = l_r = l_s$ , independentemente das ordens de truncamento polinomial de amplitude e fase.

Os termos bidimensionais estão relacionados às contribuições dos sinais de entrada de amplitude e fase em duas amostras de tempo diferentes, consecutivas ou não, se as

multiplicações e produtos forem realizados através de dois atrasos de memória distintos.

Os termos tridimensionais são negligenciados, bem como os termos relacionados aos sinais de entrada de amplitude e fase em mais de três amostras temporais.

### 2.4.2 Modelo de Volterra Polar Modificada

A  $PV$  definida na equação (2.55), conforme o aumento dos valores dos truncamentos polinomiais  $P_1$  e  $P_2$  e a duração das memórias  $M$  e  $L$ , pode gerar um grande número de coeficientes. Conforme o número de coeficientes gerados aumenta, o esforço computacional para prever a saída do modelo aumenta de forma exponencial, dificultando de se manter o compromisso entre a precisão e o esforço computacional. (CAVALHEIRO, 2018), na sua dissertação de mestrado, introduziu uma nova abordagem para reduzir substancialmente a quantidade de coeficientes do modelo  $PV$ , da equação (2.55), com pouca ou nenhuma deterioração na precisão da modelagem. A estratégia adotada por (CAVALHEIRO, 2018), mais tarde usada por (SCHUARTZ *et al.*, 2021) para definição do modelo  $3D - IMP$ , consiste em dividir ainda mais a maneira pela qual o modelo  $PV$  manipula as entradas complexas, adicionando tanto quanto necessário novos fatores de truncamento independentes. O novo modelo comporta quatro divisões ou sub-blocos de modelo, de forma resumida: (i) O primeiro sub-bloco ou a primeira divisão assume que a saída atual é uma função apenas da entrada atual e consegue modelar apenas efeitos sem memória; (ii) O segundo sub-bloco acrescenta à primeira divisão a capacidade de lidar com efeitos de memória não linear, relacionados às amostras das amplitudes das entradas anteriores; (iii) O terceiro sub-bloco amplia a divisão anterior, manipulando entre outras, as informações passadas de fase de entrada, o que lhe confere a capacidade de considerar não apenas os efeitos de memória e as não linearidades de amplitude, como também os efeitos de memória para a fase de maneira linear; (iv) O quarto sub-bloco, contrariamente aos anteriores, mapeia a saída complexa como uma função não linear da informação da fase de entrada. Matematicamente, o modelo de Volterra Polar modificado ( $PVmdf$ )

contendo 10 fatores de truncamento independentes é dado por:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{PVmdf}(n) = & \sum_{p_1=1}^{P_{11}} \tilde{h}_{p_1,1}(0) a^{p_1}(n) e^{j\phi(n)} + \\
& + \sum_{p_1=1}^{P_{12}} \sum_{m_1=0}^{M_2} \cdots \sum_{m_{p_1}=m_{p_1-1}}^{M_2} \tilde{h}_{p_1,1}(m_1, \dots, m_{p_1}) \prod_{q=1}^{p_1} a(n - m_q) e^{j\phi(n)} + \\
& + \sum_{p_2=1}^{P_{13}} \sum_{m_1=0}^{M_3} \cdots \sum_{m_{p_1}=m_{p_1-1}}^{M_3} \sum_{l_1=0}^{L_3} \tilde{h}_{p_1,1}(m_1, \dots, m_{p_1}, l_1) \prod_{q=1}^{p_1} a(n - m_q) e^{j\phi(n-l_1)} + \\
& + \sum_{p_1=1}^{P_{14}} \sum_{p_2=1}^{P_{24}} \sum_{m_1=0}^{M_4} \cdots \sum_{m_{p_1}=m_{p_1-1}}^{M_4} \sum_{l_1=0}^{L_4} \cdots \sum_{l_{p_2}=l_{p_2-1}}^{L_4} \sum_{l_{p_2+1}=0}^{L_4} \cdots \sum_{l_{2p_2-1}=l_{2p_2-2}}^{L_4} \\
& \tilde{h}_{p_1,2p_2-1}(m_1, \dots, m_{p_1}, l_1, \dots, l_{2p_2-1}) \prod_{q=1}^{p_1} a(n - m_q) \prod_{r=1}^{p_2} e^{j\phi(n-l_r)} \prod_{s=p_2+1}^{2p_2-1} e^{-j\phi(n-l_s)}
\end{aligned} \tag{2.57}$$

onde  $a(n)$  e  $\phi(n)$  representam a amplitude e a fase do sinal de envoltória complexa de entrada, respectivamente;  $P_{11}$  é o fator de truncamento polinomial de amplitude do primeiro sub-bloco,  $P_{12}$  e  $M_2$  são os fatores de truncamento polinomial de amplitude e de memória de amplitude do sinal de entrada do segundo sub-bloco;  $P_{13}$  e  $M_3$  representam os fatores de truncamento polinomial de amplitude e de memória de amplitude do sinal de entrada e  $L_3$  representa a memória de fase do sinal de entrada do terceiro sub-bloco;  $P_{14}$  e  $M_4$  são o truncamento polinomial de amplitude e de memória de amplitude do sinal de entrada e  $P_{24}$  e  $L_4$  são os truncamentos, polinomial e de memória de fase do sinal de entrada do quarto sub-bloco.

O modelo proposto por (CAVALHEIRO, 2018), equação (2.57), possui 10 fatores de truncamento, independentes entre si, a serem determinados em que, para cada combinação particular de valores para esses fatores de truncamento, uma realização de modelo distinta é obtida. No caso de uma atribuição livre de valores aos 10 fatores de truncamento, o número de realizações de modelo a serem investigadas pode se tornar extremamente alto. Para reduzir a quantidade de candidatos a modelo, (CAVALHEIRO, 2018) recomenda o cumprimento das seguintes condições:

$$\begin{aligned}
P_{11} & \geq P_{12} \geq P_{13} \geq P_{14} \\
M_2 & \geq M_3 \geq M_4 \\
L_3 & \geq L_4.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

## 2.5 Modelagem Equivalente Banda Base

Um passo de extrema importância no projeto da DPD é a seleção correta e apropriada do modelo de RF PA. Idealmente, na combinação de uma DPD e um RF PA é esperada, teoricamente, uma característica linear idêntica ao gráfico da figura 2.5 c). Na prática, cada RF PA possui diferentes estruturas e características construtivas. Por um lado, em virtude das altas taxas de transmissão de dados requeridas nos atuais sistemas de comunicação móvel 4G e 5G, e, por outro lado, devido ao alto valor de PAPR do esquema de modulação OFDM e a grande largura de banda do sinal 5G a ser amplificado, o modelo criado deve conseguir reproduzir os comportamentos dinâmicos de RF PA. Deve ser também capaz de estimar, com precisão, os efeitos não lineares relacionados ao mecanismo de saturação e de compressão de ganho, incluindo os efeitos de memória creditados à resposta em frequência nos capacitores e indutores parasitas que distorcem o sinal amplificado. Partindo das características a serem estimadas, para modelar o RF PA por uma simulação completa no nível de sistema não linear onde não se exige o conhecimento prévio da composição física do dispositivo ou quando o circuito equivalente do RF PA não está disponível, modelos empíricos, ou comportamentais ou mesmo modelos “caixa-preta” têm sido escolhidos para a modelagem comportamental, baseando-se somente em medições (dados numéricos) realizadas na entrada e saída do circuito. Pelo fato de que dados específicos dos dispositivos são usados para construir relações constitutivas não lineares, os modelos baseados em medidas são precisos e têm a vantagem de apresentar uma menor complexidade computacional, embora a sua precisão seja ligeiramente sensível à estrutura do modelo adotado, bem como a maneira como é realizada a estimação ou extração dos parâmetros (BENEDETTO; BIGLIERI, 1999).

Ao longo do tratamento das abordagens comportamentais, são também realizadas resoluções de equações matemáticas para simular o comportamento observado. Esta técnica de modelagem baseada em sistemas de “caixa-preta” para caracterizar e/ou pré-inverter o comportamento do RF PA no nível do sistema apresenta vantagens na redução da complexidade computacional (BENEDETTO; BIGLIERI, 1999). Considerando os requisitos da modelagem, pode-se classificar o RF PA como um sistema com memória, onde os sinais de saída instantâneos desse sistema são uma função não somente dos sinais de entrada instantâneos, mas também dos sinais de entrada de instantes passados. Assim, na alteração da resposta instantânea do sistema, as influências das amostras passadas não podem ser negligenciadas, de forma alguma. Para isso, é importante que se disponha de medidas reais, isto é, sinais de entrada  $\tilde{x}(n)$  e de saída  $\tilde{y}(n)$ , obtidos a partir de experimentos laboratoriais de um RF PA específico, o qual se pretende modelar. O sinal de entrada  $\tilde{x}(n)$  é usado para estimular o modelo matemático do RF PA, resultando numa saída de estimação  $\tilde{y}_{est}(n)$  o qual é comparada à saída real  $\tilde{y}(n)$  através da determinação do respectivo erro  $e(n)$ . A Figura 2.10 ilustra essa filosofia da modelagem comportamental

usando a série de Volterra.

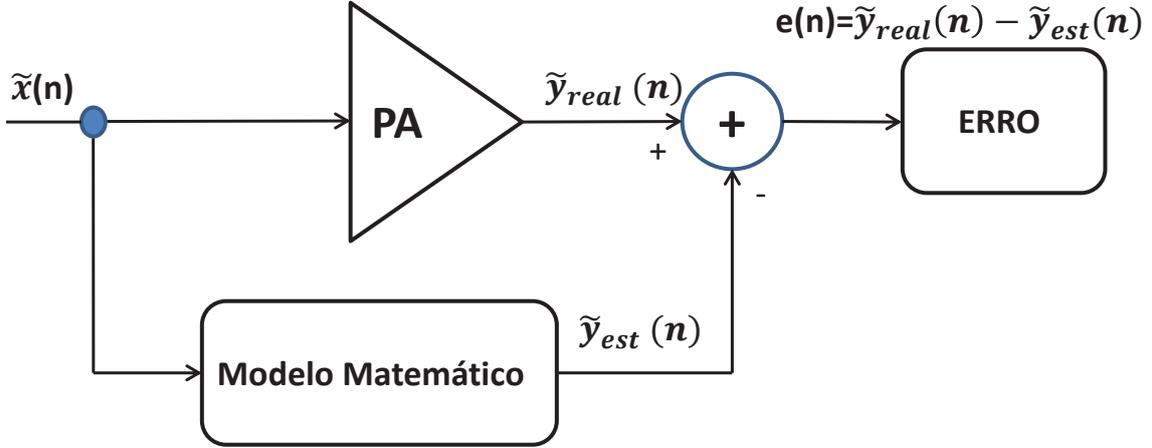


Figura 2.10: Diagrama ilustrando a modelagem de um RF PA.

Fonte: Adaptado de (BONFIM, 2016)

Para modelos baseados na série de Volterra Polar (CUNHA; LIMA; PEDRO, 2010a) e suas modificações discutidas na seção (2.4), esses sinais de valores reais de entrada  $x(n)$  e de saída  $y(n)$  do RF PA são definidos como:

$$x(n) = \text{Re} \{ \tilde{x}(n) e^{j\omega_c n} \} = a(n) \cos(\omega_c n + \phi_n) \quad (2.59)$$

$$y(n) = \text{Re} \{ \tilde{y}(n) e^{j\omega_c n} \} = b(n) \cos(\omega_c n + \varphi_n + \phi_n) \quad (2.60)$$

onde  $a(n)$  e  $\phi(n)$  são as componentes de amplitude e de fase, respectivamente, do sinal de envoltória complexa de entrada  $\tilde{x}(n)$ ,  $b(n)$  e  $\varphi_n + \phi_n$  são as componentes de amplitude e de fase do sinal de envoltória complexa de saída  $\tilde{y}(n)$ .  $\omega_c$  é a frequência da portadora de RF. Estes sinais de envoltória de valor complexo são descritos, em coordenadas polares, como:

$$\tilde{x}(n) = x_I(n) + jx_Q(n) = a(n) e^{j\phi_n} \quad (2.61)$$

$$\tilde{y}(n) = y_I(n) + jy_Q(n) = b(n) e^{j(\varphi_n + \phi_n)} \quad (2.62)$$

Para modelos de tempo discreto baseados em circuitos analógicos deve ser respeitado o teorema da amostragem de Nyquist (CRIPPS, 2006). Nestes modelos, a complexidade computacional é uma função do intervalo de amostragem dos dados do modelo, pois, intervalos de amostragem mais curtos exigem maior esforço computacional, enquanto os mais longos exigem complexidade reduzida (WOOD, 2014). Um modelo comportamental de RF PA excitado por sinais de RF de valor real, como os das equações (2.59) e (2.60), em que a frequência central da portadora é muito maior que a largura de banda da envoltória complexa, o intervalo de amostragem é limitado a ser muito curto, na ordem recíproca da frequência da portadora, para obedecer ao critério de amostragem de Nyquist. Dessa

maneira, o número de amostras anteriores necessárias para uma previsão aprimorada dos efeitos da memória de longa duração, em baixas frequências, é extremamente alto e isso torna a complexidade computacional de um algoritmo de linearização muito alta quando aplicado em RF. Para fins de linearização, onde o custo computacional é uma preocupação, uma descrição equivalente passa-baixa de um RF PA, trabalhando apenas com os sinais de envoltória de valor complexo, como os das equações (2.61) e (2.62), fornece uma abordagem mais apropriada (OLIVEIRA *et al.*, 2012). Na verdade, excelentes previsões podem ser obtidas por um modelo equivalente passa-baixa de um RF PA que requer um pequeno número de amostras anteriores.

## 2.6 Funções de Base Ortogonal de Laguerre

No processo de identificação de sistemas lineares e não lineares têm sido usadas várias categorias de modelos a eles relacionados, dentre eles, aqueles baseados nas funções de base ortogonal, como é o caso da função de Laguerre (OLIVEIRA; AMARAL; LATAWIEC, 2003; ZHU; BRAZIL, 2005; SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016; WANG; NGUYEN; SCHUTTAÍNÉ, 2020). O modelo de Laguerre tem sido preferencialmente utilizado na expansão das SVs (WAHLBERG, 1991; MARMARELIS, 1993) pelas inúmeras vantagens que o mesmo apresenta: i) O fato de possuir apenas dois parâmetros por especificar, nomeadamente o polo de valor real  $\beta$  e a ordem ou número (inteiro) de funções de base de Laguerre  $\varphi_L$ ; ii) Devido à sua semelhança com o modelo de Volterra, dado que as não linearidades na saída do polinômio de SV acabam sendo também uma característica da função de Laguerre; iii) Fornecem um bom desempenho e uma boa aproximação a sistemas com características de baixa frequência e atraso de tempo, tal como um RF PA com efeitos de memória a longo prazo (ZHU; BRAZIL, 2005), modelado por SV; iv) Possuem sensibilidade reduzida aos parâmetros estimados (DUMONT; FU, 1993); v) A função de Laguerre é ortogonal no conjunto  $L_2[0, \infty)$  e forma um conjunto completo no domínio real; vi) Os coeficientes de ordem inferior do modelo de Laguerre permanecem praticamente inalterados quando a ordem do modelo ou o número de funções de Laguerre é aumentada.

A capacidade de representação dos modelos pode ser melhorada simplesmente aumentando o número de funções na base ortogonal (OLIVEIRA *et al.*, 2011) porém, um número maior de funções de base ortogonal de Laguerre pode aumentar significativamente a quantidade de coeficientes do modelo e isso dificulta o processo de aproximação e aumenta a complexidade computacional do modelo. No caso da expansão dos coeficientes dos modelos *PV* e *PVmdf* para dentro do espaço ortogonal de Laguerre, como o modelo de Laguerre tem uma memória infinita e é independente das memórias (ZHU; BRAZIL, 2005) de qualquer um dos modelos *PV* e *PVmdf*, é importante que exista um compromisso direto entre o número de funções de Laguerre  $\varphi_L$  e os comprimentos de memória de amplitude  $M$  ou de fase  $L$  dos modelos *PV* e *PVmdf*. Se a escolha de expansão dos

coeficientes for em relação à memória de amplitude  $M$  de qualquer um dos modelos  $PV$  e  $PVmdf$ , esta deve ser absolutamente agrupável na memória do sistema  $[0, M]$ . Este compromisso deve ser assumido dentro do intervalo de existência do conjunto completo de funções de Laguerre  $[0, \varphi_L]$  (ZHENG; ZAFIRIOU, 1995) (ZHENG; ZAFIRIOU, 2004). Isto significa dizer que a escolha do número de funções de Laguerre  $\varphi_L$  deve ser tal que seja igual ao comprimento de memória de amplitude  $M$  dos modelos  $PV$  e  $PVmdf$ .

Os polos  $\beta$  desempenham um papel extremamente importante na qualidade da aproximação dos coeficientes dos modelos  $PV$  e  $PVmdf$  por um ou vários conjuntos de funções de Laguerre truncadas em  $\varphi_L$ . Todavia, uma dificuldade na identificação dos modelos está diretamente associada à saída da base de Laguerre, visto que essa saída é uma função não linear dos polos  $\beta$  do modelo de Laguerre (ZHU; BRAZIL, 2005). Devido a essa não linearidade, o projeto de sequência sob medida para identificação direta dos modelos de Laguerre é difícil. Para contornar essa dificuldade, a escolha ideal dos polos da base de Laguerre tem sido discutida há várias décadas atrás (CLOWES, 1965; PARKS, 1971) e alguns pesquisadores sugeriram a utilização de técnicas de pesquisa numérica (SILVA, 1995), como as técnicas de otimização numérica (SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016) e de seleção de um número adequado de filtros de Laguerre (ZHU; BRAZIL, 2005).

A base ortogonal de Laguerre que se supõe que forme um conjunto completo no domínio real e pode descrever uma classe de funções com precisão arbitrária pode ser usada para descrever exatamente o comportamento dinâmico de uma função não linear. O modelo básico de Laguerre de ordem infinita para essa descrição pode ser dado como:

$$\hat{y}_l = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \Omega_j \quad (2.63)$$

Nessa equação (2.63),  $\hat{y}_l$  representa a saída do modelo de Laguerre,  $\Omega_j$  representa o filtro ou simplesmente funções de Laguerre de ordem  $j$  e  $b_j$  representam os coeficientes que descrevem a saída como uma combinação linear das funções de Laguerre. Na prática, apenas um número finito de funções de Laguerre são necessárias para que o limite superior do termo de soma discreta na equação (2.63) seja dado por  $\varphi_L$ , como constataremos na equação (2.84).

## 2.6.1 Expansão Ortogonal

### Definição 1

Se uma determinada sequência de  $i$  funções reais  $l_1(t), l_2(t), l_3(t), \dots, l_i(t)$  forma um conjunto de funções ortogonais no interior do intervalo  $[0, \infty)$  (LEE, 1961), então elas

obedecem às propriedades:

$$\int_0^{\infty} l_i^2(t) dt = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (2.64a)$$

e

$$\int_0^{\infty} l_i(t) l_j(t) dt = 0, \forall i \neq j \quad (2.64b)$$

### Definição 2

A mesma sequência de  $i$  funções reais  $l_1(t), l_2(t), l_3(t), \dots, l_i(t)$  que forma um conjunto de funções ortogonais no interior do intervalo  $[0, \infty)$ , é dita completa (LEE, 1961) se a relação

$$\int_0^{\infty} f(t) l_i(t) dt = 0 \quad (2.65a)$$

possui todos os valores de  $i$  que satisfazem

$$\int_0^{\infty} f(t)^2 dt = 0 \quad (2.65b)$$

### Definição 3

Uma dada função arbitrária  $f(t)$  pode ser expandida de forma análoga a uma expansão de Fourier se o conjunto de funções  $l_i(t), i = 1, 2, \dots$  for ortogonal e completo ao longo do intervalo  $[0, \infty)$  (WYLIE, 1960; CHONG; ZAK, 2013). No contexto da aproximação, a função  $f(t)$  é escrita como

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i l_i(t) \quad (2.66)$$

onde  $c_i, i = 1, 2, \dots$  são os coeficientes da expansão definidos como:

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^{\infty} l_1(t) f(t) dt \\ c_2 &= \int_0^{\infty} l_2(t) f(t) dt \\ &\vdots \\ c_i &= \int_0^{\infty} l_i(t) f(t) dt \end{aligned} \quad (2.67)$$

A expansão (2.66) em teoria, tem um número infinito de coeficientes. No entanto, a suposta integralidade do conjunto de funções ortogonais (WYLIE, 1960), (LEE, 1961) garante que, para qualquer função contínua  $f(t)$

$$\int_0^{\infty} f^2(t) dt < \infty \quad (2.68)$$

e para qualquer erro  $\varepsilon > 0$ , existe um número inteiro  $N$  tal que

$$\int_0^{\infty} (f(t) - \sum_{i=0}^N c_i l_i(t))^2 dt < \varepsilon \quad (2.69)$$

## 2.6.2 Funções de Base de Laguerre de Tempo Contínuo

As funções de Laguerre são um conjunto de funções ortogonais (LEE, 1961) que satisfazem as propriedades ortogonais e completas definidas a partir de (2.64a) a (2.65b). O conjunto de funções de Laguerre de tempo contínuo é definido, para qualquer fator escalar de tempo ou simplesmente polo  $p > 0$ , como sendo:

$$\begin{aligned} l_1(t) &= \sqrt{2p} \times e^{-pt} \\ l_2(t) &= \sqrt{2p} \times (-2pt + 1)e^{-pt} \\ &\vdots \\ l_i(t) &= \sqrt{2p} \times \frac{e^{pt}}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} (t^{i-1} e^{-pt}) \end{aligned} \quad (2.70)$$

cuja representação no domínio da frequência pode ser obtida aplicando a transformação unilateral de Laplace sobre as funções temporais de Laguerre dadas na equação (2.70), resultando na chamada Rede de Laguerre ou Funções de Base de Laguerre ou simplesmente Filtros de Laguerre  $L_i(s)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  (WAHLBERG, 1991), onde

$$\begin{aligned} L_1(s) &= \int_0^{\infty} l_1(t) e^{-st} dt = \frac{\sqrt{2p}}{(s+p)} \\ L_2(s) &= \int_0^{\infty} l_2(t) e^{-st} dt = \frac{\sqrt{2p}(s-p)}{(s+p)^2} \\ &\vdots \\ L_i(s) &= \int_0^{\infty} l_i(t) e^{-st} dt = \frac{\sqrt{2p}(s-p)^{i-1}}{(s+p)^i} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Embora as funções de base de Laguerre possam ser geradas usando as equações (2.70) como descrito acima, existe outra maneira sistemática de gerar essas funções. No caso geral e de forma compacta, podem-se derivar as funções de Laguerre para a construção de uma representação na forma de espaço de estados (WANG, 2009)

$$\tilde{L}(t) = A_p L(t), \quad (2.72)$$

cuja matriz e vetores de estado são definidos por

$$A_p = \begin{bmatrix} -p & 0 & \cdots & 0 \\ -2p & -p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -2p & \cdots & -2p & -p \end{bmatrix}, \quad (2.73)$$

$$\tilde{L}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1(t) & \tilde{l}_2(t) & \cdots & \tilde{l}_N(t) \end{bmatrix}^T \quad (2.74)$$

e

$$L(t) = \begin{bmatrix} l_1(t) & l_2(t) & \cdots & l_N(t) \end{bmatrix}^T \quad (2.75)$$

respectivamente, assumindo que as condições iniciais desse vetor de estado  $L(t)$  são definidas como  $L(0) = \sqrt{2p} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$ .

### 2.6.3 Funções de Base de Laguerre de Tempo Discreto

Neste trabalho é de interesse o estudo e a utilização das funções de base de Laguerre de tempo discreto, funções geradas a partir da discretização da base de Laguerre de tempo contínuo. A transformada Z para cada uma das funções de base de Laguerre de tempo discreto (BROOME, 1965; WANG, 2009) é descrita como

$$\begin{aligned} \theta_1(z) &= \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta z^{-1}} \\ \theta_2(z) &= \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta z^{-1}} \frac{z^{-1}-\beta}{1-\beta z^{-1}} \\ &\vdots \\ \theta_\tau(z) &= \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta z^{-1}} \left( \frac{z^{-1}-\beta}{1-\beta z^{-1}} \right)^\tau \end{aligned} \quad (2.76)$$

cuja generalização para  $\theta_\tau(z, \beta)$  (ZHU; BRAZIL, 2005) (STODDARD; WELSH, 2018) é:

$$\theta_\tau(z, \beta) = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta z^{-1}} \left( \frac{z^{-1}-\beta}{1-\beta z^{-1}} \right)^\tau, \tau \geq 0 \quad (2.77)$$

onde  $\beta$  é o polo da função de base ortogonal de Laguerre de tempo discreto e deve assumir a condição  $-1 < \beta < 1$  para a estabilidade da rede de Laguerre. Tal como as funções de base ortogonal de Laguerre para tempo contínuo  $L_i(s, p)$ , as funções de base de Laguerre para tempo discreto  $\theta_\tau(z, \beta)$  são muito bem conhecidas por sua ortogonalidade em que, no domínio da frequência, essa ortogonalidade pode ser expressa em termos das equações ortogonais para  $\theta_m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , cuja definição é:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(e^{j\omega}) \theta_m(e^{j\omega})^* d\omega = 1 \quad (2.78a)$$

e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(e^{j\omega}) \theta_n(e^{j\omega})^* d\omega = 0, \forall m \neq n \quad (2.78b)$$

onde  $(*)$  denota complexo conjugado (WANG, 2009).

As funções Laguerre de tempo discreto são obtidas através da transformada Z

inversa das funções de base de Laguerre. No entanto, a transformada Z inversa das redes de Laguerre não leva a uma expressão compacta das funções de Laguerre no domínio do tempo discreto. Uma maneira mais direta de encontrar essas funções de tempo discreto é baseada na realização de espaço de estados, dado que as funções de Laguerre são recursivas. Fazendo com que  $\lambda_1(n)$  denote a transformada Z inversa de  $\theta_1(z, \beta)$ ,  $\lambda_2(n)$  a transformada Z inversa de  $\theta_2(z, \beta)$  e assim por diante para  $\lambda_\tau(n)$  a transformada Z inversa de  $\theta_\tau(z, \beta)$ , esse conjunto de funções de base de Laguerre em tempo discreto pode ser expresso na forma vetorial como (WANG, 2009)

$$\lambda_\tau(n+1) = A_\beta \lambda_\tau(n), \quad (2.79)$$

cujas matriz  $A_\beta$  é uma matriz triangular inferior de dimensões  $(\tau \times \tau)$  contendo o arranjo dos polos  $\beta$  que definem o comportamento dinâmico da base de Laguerre e o parâmetro  $\eta = 1 - \beta^2$  (MAIONE; TURCHIANO, 1985), (DUMONT; FU, 1993)

$$A_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \eta & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ -\eta\beta & \eta & \beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta(-\beta)^{\tau-1} & \eta(-\beta)^{\tau-2} & \eta(-\beta)^{\tau-3} & \cdots & \beta \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

e vetores são definidos por

$$\lambda_\tau(n+1) = \left[ \lambda_1(n+1) \quad \lambda_2(n+1) \quad \cdots \quad \lambda_\tau(n+1) \right]^T \quad (2.81)$$

e

$$\lambda_\tau(n) = \left[ \lambda_1(n) \quad \lambda_2(n) \quad \cdots \quad \lambda_\tau(n) \right]^T \quad (2.82)$$

respectivamente, cujas condições iniciais do vetor  $\lambda_\tau(n)$  da equação (2.82) definidas em (DUMONT; FU, 1993), (WANG, 2009) são

$$\theta(0) = \sqrt{\eta} \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \\ \beta^2 \\ \vdots \\ (-1)^{\tau-1} \beta^{\tau-1} \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

Assim, o modelo linear baseado nas funções de Laguerre de tempo discreto, com a entrada

$\tilde{x}(n)$  representada em suas coordenadas polares,  $a(n)$  e  $\phi(n)$ , pode ser descrito como:

$$y(n) = e^{j\phi(n)} \sum_{\tau=0}^{\varphi_L-1} d_\tau \theta_\tau(z, \beta) a(n) \quad (2.84)$$

onde  $\varphi_L$  é um número finito de funções de Laguerre usadas para representar, neste caso, os coeficientes da série polar de Volterra,  $d_\tau$  são os coeficientes de regressão de  $\tau$ -ésima ordem, e  $\theta_\tau(z, \beta)$  é a função de Laguerre de tempo discreto de  $\tau$ -ésima ordem, definida na equação (2.77). O modelo linear de Laguerre da equação (2.84) pode ser reescrito como

$$y(n) = e^{j\phi(n)} \sum_{\tau=0}^{\varphi_L-1} d_\tau \lambda_\tau(n) \quad (2.85)$$

onde  $\lambda_\tau(n)$  é a saída de valor real do modelo de Laguerre de tempo discreto de  $\tau$ -ésima ordem, definido como:

$$\lambda_\tau(n) \doteq \theta_\tau(z, \beta) a(n) \quad (2.86a)$$

e

$$\lambda_0(n) \doteq \theta_0(z, \beta) a(n) \quad (2.86b)$$

onde

$$\theta_0(z, \beta) = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta z^{-1}} \quad (2.86c)$$

e

$$\lambda_\tau(n) \doteq G(z, \beta) \lambda_{\tau-1}(n), \tau = 1, \dots, \varphi_L - 1 \quad (2.86d)$$

onde

$$G(z, \beta) = \frac{-\beta + z^{-1}}{1 - \beta z^{-1}} \quad (2.86e)$$

## 2.7 Diferenciação Fracionária

A partir do conceito de operador de diferenciação  $D = \frac{d}{dt}$ , a  $n$ -ésima derivada de uma função conhecida  $D^n f(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}$ , é bem definida quando  $n$  é um número inteiro positivo. No caso da derivada de ordem arbitrária ou de ordem não inteira, o operador de diferenciação fracionária pode ser representado com o símbolo  ${}_a D_t^\alpha f(t)$  ou simplesmente

$D^\alpha f(t)$ , onde  $\alpha$  é a ordem da derivada fracionária,  $D$  é um operador derivada. Os subscritos  $a$  e  $t$  em  ${}_a D_t^\alpha f(t)$  representam, respectivamente, os limites inferior e superior do operador  $D$  de diferenciação fracionária.

O cálculo fracionário teve origem a partir de uma pergunta formulada em uma correspondência de l'Hopital a Leibniz em 1695 “*qual a interpretação do significado na notação  $D^\alpha f$  caso a ordem da derivada  $\alpha$  fosse uma fração?*”. Esta questão não teve resposta imediata, porém, anos mais tarde, o paradoxo de Leibniz despertou atenção a muitos estudiosos, como Lagrange que, em 1772 deu sua tentativa de contribuição na chamada lei dos expoentes; Laplace que, em 1812 definiu uma derivada fracionária através de uma integral; Lacroix que, em 1819 mencionou as derivadas de ordem arbitrária em seu livro de cálculo o qual introduziu modificações resultando na chamada derivada fracionária no sentido de Reimann-Liouville (OLDHAM; SPANIER, 1974), cujos resultados foram unificados por Grünwald. Como resposta à resolução de problemas numéricos, Post, em 1930, usando a definição de Grünwald e estudos de Letnikov apresentou a definição da diferenciação por operadores generalizados o qual chamou derivada de ordem arbitrária no sentido de Grünwald-Letnikov. De modo a resolver problemas de viscoelasticidade, Caputo propôs uma definição o qual é conhecida como derivada fracionária no sentido de Caputo (CAPUTO; MAINARDI, 1971; CAPUTO, 1974; CAPUTO, 1976).

O desenvolvimento do cálculo fracionário depende intrinsecamente do conhecimento de uma série de funções, de suas características e de suas propriedades. Uma das mais importantes e comuns funções relacionadas ao cálculo de ordem fracionária é a função de Mittag-Leffler (CAMARGO; CHIACCHIO; OLIVEIRA, 2008). É uma função largamente utilizada para representação temporal da solução do cálculo fracionário. Associada às funções de Mittag-Leffler estão outras funções especiais, dentre elas a função gamma (OLIVEIRA *et al.*, 2014).

## 2.7.1 Funções Especiais

### 2.7.1.1 Função Gamma

Seja  $n = 0, 1, 2, \dots$ . A Função Gamma definida através da integral imprópria, devida à função de Euler de segunda espécie, generalizada ao conceito de *fatorial de um número natural*

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n! \quad (2.87)$$

sugere substituir  $n$  por um número, em princípio complexo  $z = x + iy$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ , de modo que

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.88)$$

com  $Re(z) > 0$ , representa a função gamma, denotada por  $\Gamma(z)$ . Considera-se  $x \in \mathbb{R}$ , diferente de um inteiro negativo ou zero, de modo que

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (2.89)$$

Efetuada integração por partes, mostra-se que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (2.90)$$

pode ser interpretada como a generalização da identidade  $n! = n(n-1)!$ .

### 2.7.1.2 Funções de Mittag-Leffler

Uma das mais importantes e comuns funções relacionadas ao cálculo fracionário e a solução das equações diferenciais de ordem não inteira é a função de Mittag-Leffler (CAMARGO *et al.*, 2009; CAMARGO; OLIVEIRA, 2015), função que pode ser de um, de dois, de três ou mais parâmetros (TEODORO *et al.*, 2014), porém, neste trabalho, só têm interesse as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros.

A função de Mittag-Leffler de um único parâmetro,  $E_{\alpha}(z)$  é uma função complexa que depende de um parâmetro também complexo  $\alpha$  com  $Re(\alpha) > 0$ , dada a partir da seguinte série de potência:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{z^{\gamma}}{\Gamma(\alpha\gamma+1)} \quad (2.91)$$

Esta função de um parâmetro pode ser interpretada como uma generalização fracionária para a função exponencial visto que, para  $\alpha = 1$ , recupera-se a função exponencial:

$$E_1(z) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{z^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{z^{\gamma}}{\gamma!} = e^z \quad (2.92)$$

A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros,  $E_{\alpha,\beta}(z)$  é uma função complexa que depende de dois parâmetros complexos, nomeadamente,  $\alpha$  e  $\beta$  com  $Re(\alpha) > 0$  e  $Re(\beta) > 0$ , definida por:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{z^{\gamma}}{\Gamma(\alpha\gamma+\beta)} \quad (2.93)$$

Esta função de Mittag-Leffler de dois parâmetros generaliza a função de Mittag-Leffler de um parâmetro quando  $\beta = 1$ :

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) \quad (2.94)$$

## 2.7.2 Derivadas Fracionárias

Dependendo da aplicação que se pretende dar, as três definições mais frequentemente usadas para a diferenciação fracionária são: a definição de Riemann-Liouville, a definição de Caputo e a definição de Grünwald-Letnikov (OLDHAM; SPANIER, 1974; PODLUBNY, 1998; CAPONETTO, 2010; CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

### 2.7.2.1 Derivada Fracionária Segundo Riemann–Liouville

A derivada fracionária de Riemann-Liouville (RL) tem sido mais amplamente usada para descrição de problemas porque impõe menos restrições à função em questão. A teoria matemática (OLDHAM; SPANIER, 1974; PODLUBNY, 1998; CAPONETTO, 2010; CAMARGO; OLIVEIRA, 2015) correspondente é bem estabelecida para diferentes campos de aplicação, porém esta derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville possui algumas características que levam a dificuldades em aplicações práticas concretas (DIETHELM, 2010). A definição da derivada de ordem fracionária no sentido Riemann-Liouville é:

$${}_{a}^{RL}D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (2.95)$$

para  $(n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N})$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  e  $\Gamma(\cdot)$  é função Gamma. Contudo, Riemann-Liouville definiu suas derivadas fracionárias em um intervalo finito do eixo real  ${}_a D_t^\alpha f(t)$  e  ${}_{-b} D_t^\alpha f(t)$  de ordem  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $Re(\alpha) \geq 0$  e  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , como:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, n = [Re(\alpha)] + 1; t > a \quad (2.96)$$

e

$${}_{-b} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, n = [Re(\alpha)] + 1; t < b \quad (2.97)$$

respectivamente, onde  $[Re(\alpha)]$  significa a parte inteira de  $Re(\alpha)$ . Em um particular intervalo dado por  $0 < Re(\alpha) < 1$ , tem-se:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-[Re(\alpha)]}} d\tau; t > a \quad (2.98)$$

e

$${}_{-b} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^b \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-[Re(\alpha)]}} d\tau; t < b \quad (2.99)$$

### 2.7.2.2 Derivada Fracionária Segundo Caputo

A definição de derivada fracionária no sentido de Caputo (C) pode ser escrita como:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (2.100)$$

para  $(n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N})$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  e  $\Gamma(\cdot)$  é função Gamma. Seguindo o mesmo raciocínio de Riemann-Liouville sobre a derivada no sentido de Caputo existente no intervalo de dois pontos  $[a, b]$ , se  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  ${}^C D_{a+}^\alpha f(t)$  e  ${}^C D_{b-}^\alpha f(t)$  são representadas por:

$${}_{a+} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (2.101)$$

e

$${}_{b-} D_t^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \quad (2.102)$$

Em particular, quando  $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$  e  $f(t)$  existe em  $[a, b]$ :

$${}_{a+} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (2.103)$$

e

$${}_{b-} D_t^\alpha f(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^b \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (2.104)$$

Em função das condições iniciais homogêneas, a derivada de Riemann-Liouville da equação (2.95) e de Caputo da equação (2.100), são equivalentes cuja relação entre elas é:

$${}^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) \quad (2.105)$$

para  $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, \dots, n-1)$ . As condições iniciais homogêneas para as equações diferenciais de ordem fracionária como as derivadas de Caputo são da mesma forma que para as equações diferenciais de ordem inteira.

### 2.7.2.3 Derivada Fracionária Segundo Grünwald-Letnikov

A definição da derivada de ordem arbitrária segundo Grünwald-Letnikov e seus casos particulares são de grande importância sob o ponto de vista numérico e na formulação de problemas aplicados envolvendo valores iniciais (LORENZO; HARTLEY, 2007) com significado físico conhecido, representam uma ferramenta muito eficiente na resolução de problemas numéricos. Para sua definição, em 1867, Grünwald unificou os resultados alcançados por Riemann-Liouville e introduziu a ideia da derivada de ordem arbitrária como o limite de uma soma (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015), cuja definição foi estendida em

1930 por (POST, 1930) usando somente quocientes de diferenças.

Sobre uma função  $y(t)$  definida em um dado intervalo e  $t$  um ponto fixo no interior desse intervalo, as derivadas de ordem arbitrária  $\alpha$  no sentido de Grünwald-Letnikov, à esquerda e à direita, são definidas pelas expressões:

$$y_{+}^{(\alpha)}(t) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{(\Delta_h^\alpha y)(t)}{h^\alpha}, \alpha > 0 \quad (2.106)$$

e

$$y_{-}^{(\alpha)}(t) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{(\Delta_{-h}^\alpha y)(t)}{h^\alpha}, \alpha > 0 \quad (2.107)$$

respectivamente. Esta definição é baseada na generalização da usual diferenciação de uma função  $y(t)$  de ordem  $n \in \mathbb{N}$  na forma:

$$y^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{(\Delta_h^n y)(t)}{h^n} \quad (2.108)$$

Aqui  $(\Delta_h^n y)(t)$  é uma diferenciação finita de ordem  $n \in \mathbb{N}$  de uma função  $y(t)$  com um passo  $h \in \mathbb{R}$  e centrada no ponto  $t \in \mathbb{R}$ .

A partir das equações (2.106) e (2.107), substituindo diretamente  $n \in \mathbb{N}$  na equação (2.108) por  $\alpha > 0$ , define-se a derivada de ordem arbitrária:

$$(\Delta_h^\alpha y)(t) = \Delta^\alpha y(t) := \sum_{\tau=0}^{\infty} (-1)^\tau \binom{\alpha}{\tau} y(t - \tau h), t, h \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \quad (2.109)$$

onde  $\binom{\alpha}{\tau}$  são coeficientes binomiais. Desenvolvendo as equações (2.106), (2.107) e (2.109), e substituindo  $\Delta_h^\alpha$  por  $D^\alpha$  tem-se a derivada fracionária  $D^\alpha$  de uma função contínua no tempo  $f(t)$ , no sentido de Grünwald-Letnikov (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015):

$$D^\alpha f(\tau h) = \lim_{h \rightarrow +0} \sum_{\tau=0}^{\infty} (-1)^\tau \binom{\alpha}{\tau} f(t - \tau h) \quad (2.110)$$

onde  $\binom{\alpha}{\tau} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\tau+1)\Gamma(\alpha-\tau+1)}$  são coeficientes binomiais. Quando a função  $f(t)$  é discretizada a um período de amostragem  $h$ , a  $D^\alpha$  da função é:

$$D^\alpha f(\tau h) = \lim_{h \rightarrow +0} \sum_{\tau=0}^{\infty} (-1)^\tau \binom{\alpha}{\tau} f(t - \tau h) + \Theta(h) \quad (2.111)$$

Uma simples, comum e familiar formulação da derivada de Grünwald-Letnikov é a derivada fracionária de tempo discreto (STANISLAWSKI *et al.*, 2013)  $\Delta^\alpha y(n)$  e de comprimento finito (LATAWIEC *et al.*, 2017), descrita pela equação:

$$D^\alpha x_\tau = x_\tau + \sum_{j=0}^{\tau} \Phi_\tau(\alpha_\tau) x_{\tau-j}, \tau = 0, 1, \dots \quad (2.112)$$

onde  $\alpha \in ]0,2[$  é a ordem fracionária e

$$\Phi_\tau = \text{diag} \left[ \Phi_1(\alpha_1) \quad \Phi_2(\alpha_2) \quad \cdots \quad \Phi_\tau(\alpha_\tau) \right] \quad (2.113a)$$

$$\Phi_\tau(\alpha_\tau) = (-1)^\tau \begin{cases} 1 & \text{se } \tau = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\tau+1)}{\tau!} & \text{se } \tau = 1,2,3,\dots \end{cases} \quad (2.113b)$$

#### 2.7.2.4 Representação de Sistemas Fracionários de Tempo Discreto por Equações de Espaço de Estados

As equações de espaço de estados para sistemas lineares fracionários de tempo discreto têm a forma seguinte:

$$D^\alpha f_{\tau+1}(n) = Af_\tau(n) + Bx(n) \quad (2.114a)$$

$$y(n) = Cf_\tau(n) + Dx(n) \quad (2.114b)$$

onde  $\alpha \in ]0,2[$ ,  $\tau \in \mathbb{Z}_+$ ,  $f_\tau \in \mathbb{R}^n$ ,  $x(n)$  e  $y(n)$  são: o estado, os vetores de entrada e de saída, respectivamente, e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Substituindo a definição da equação (2.112) na equação (2.114a) obtém-se:

$$f_{\tau+1} + \sum_{j=1}^{\tau+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f_{\tau-j+1} = Af_\tau + Bx_\tau \quad (2.115a)$$

ou

$$f_{\tau+1} = Af_\tau + \sum_{j=1}^{\tau+1} (-1)^{j+1} \binom{\alpha}{j} f_{\tau-j+1} + Bx_\tau \quad (2.115b)$$

Na prática, para um sistema fracionário sem atraso temporal, assumindo-se que  $j$  seja delimitado pelo número natural  $q$  (KACZOREK; ROGOWSKI, 2015), resulta em:

$$f_{\tau+1} = A_\alpha f_\tau + \sum_{j=1}^q (-1)^j \binom{\alpha}{j+1} f_{\tau-j} + Bx_\tau \quad (2.116a)$$

$$y_\tau = Cf_\tau + Dx_\tau \quad (2.116b)$$

onde  $A_\alpha = A + \alpha \mathbb{I}_n$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$ .

Considerando um sistema linear fracionário de tempo discreto com atraso tem-

poral  $h$

$$D^\alpha f_{\tau+1} = \sum_{i=0}^h (A_i f_{\tau-i} + B_i x_{\tau-i}) \quad (2.117a)$$

$$y_\tau = C f_\tau + D x_\tau \quad (2.117b)$$

onde  $\alpha \in ]0,2[$ ,  $\tau \in \mathbb{Z}_+$ ,  $f_\tau \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_\tau \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_\tau \in \mathbb{R}^p$  são: o estado, os vetores de entrada e de saída, respectivamente, e  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Substituindo a definição da equação (2.112) na equação (2.116a) obtém-se:

$$f_{\tau+1} = \sum_{j=1}^{\tau+1} (-1)^{j+1} \binom{\alpha}{j} f_{\tau-j+1} + \sum_{i=0}^h (A_i f_{\tau-i} + B_i x_{\tau-i}) \quad (2.118a)$$

$$y_\tau = C f_\tau + D x_\tau \quad (2.118b)$$

onde  $\tau \in \mathbb{Z}_+$ . Se  $i$  é delimitado pelo número natural  $L$  (KACZOREK; ROGOWSKI, 2015) e considerando o caso prático onde  $h = L$ , obtém-se:

$$f_{\tau+1} = \sum_{j=1}^{L+1} (-1)^{j+1} \binom{\alpha}{j} f_{\tau-j+1} + \sum_{i=0}^L (A_i f_{\tau-i} + B_i x_{\tau-i}) \quad (2.119a)$$

$$y_\tau = C f_\tau + D x_\tau \quad (2.119b)$$

onde  $\tau \in \mathbb{Z}_+$ .

### 2.7.2.5 Transformada de Laplace

Seja  $f(t)$  uma função contínua no tempo, definida no intervalo  $0 \leq t < \infty$ . Defina-se a transformada de Laplace da função  $f(t)$ , denotada por  $\mathcal{L}[f(t)]$  ou simplesmente  $F(s)$ , pela integral:

$$F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (2.120)$$

onde  $s = \sigma + iq$  com  $\sigma, q \in \mathbb{R}$  é o parâmetro da transformada, tal que  $Re(s) > 0$ .

A transformada de Laplace é um operador linear, pois se,  $F(s)$  e  $G(s)$  são as transformadas de Laplace das funções admissíveis  $f(t)$  e  $g(t)$  respectivamente e,  $a$  e  $b$  são constantes, então pela propriedade de linearidade diz-se que:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = aF(s) + bG(s) \quad (2.121)$$

A transformada de Laplace de  $D^\alpha f(t)$  em  $t = 0$ , isto é, todas as derivadas de  $f(t)$

são nulas quando  $t < 0$  (OLDHAM; SPANIER, 1974), é dada por:

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) \quad (2.122)$$

cujos resultados são coerentes com o caso clássico quando  $\alpha$  é um número inteiro, por exemplo, quando  $\alpha = 1$ :  $\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = sF(s)$

Da definição da transformada de Laplace acima apresentada:  $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ ,  $\mathcal{L}[h(t)] = H(s)$  e  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , e fazendo o uso do teorema da convolução para transformada de Laplace apresentada por (OLIVEIRA *et al.*, 2014), para  $h(t) \otimes f(t)$  resulta em:  $H(s)F(s)$  então, a transformada de Laplace de um produto de convolução resulta em:

$$\mathcal{L}[h(t) \otimes f(t)] = \mathcal{L}[h(t)]\mathcal{L}[f(t)] = H(s)F(s) \quad (2.123)$$

Assim, a relação  $y(t) = h(t) \otimes f(t)$  pode ser escrita no domínio da frequência através da sua transformada de Laplace:

$$Y(s) = H(s)F(s) \quad (2.124)$$

## 2.8 Estado da Arte

### 2.8.1 Expansão da Série de Volterra por Funções de Laguerre

As séries de Volterra, *CV*, *PV* e *PVmdf*, são modelos dinâmicos não lineares amplamente utilizados para a modelagem comportamental equivalente passa-baixa de RF PAs. São modelos lineares nos seus parâmetros, daí que, a utilização destas séries de Volterra truncadas para a extração de parâmetros de modelos não lineares a partir de dados medidos, geralmente é feita recorrendo as técnicas *LS*, *MMSE*, *LMS* e *RLS* (MATHEWS; SICURANZA, 2000), abordagens que fornecem a solução ideal como critério de mínimos quadrados e, na sua execução, são de fácil convergência. No entanto, estas técnicas têm a desvantagem de aumentar a complexidade computacional devido à inversão de uma matriz que requer um número de multiplicações de ordem exponencial dos coeficientes do modelo (DESGREYS *et al.*, 2017), o que faz com que o número de parâmetros  $N_P$ , da equação (2.54), necessários para obter uma representação precisa dos modelos de Volterra, *CV*, *PV* e *PVmdf*, também aumente exponencialmente com as ordens polinomiais das não linearidades e os respectivos comprimentos da memória. Na literatura existem estratégias para reduzir a quantidade de parâmetros gerados nos modelos de Volterra, *CV*, *PV* e *PVmdf*, sem por isso, diminuir sua precisão e sem comprometer o esforço computacional para a identificação do modelo de RF PA e DPD (KIM; KONSTANTINOU, 2001; MORGAN *et al.*, 2006). Essas estratégias envolvem a utilização de funções de base ortogonal (OBF), como são os casos da função de base de Laguerre.

Entre os anos de 1991 e 2009, alguns pesquisadores das áreas de concentração

Tabela 2.1: Estado de Arte de Modelos de Laguerre-Volterra

Artigo	Modelo/ Campo/Características
(WAHLBERG, 1991)	Id.Sist. – Controle Automático
(MARMARELIS, 1993)	IId.Sist. - Biologia
(OLIVEIRA; AMARAL; LATAWIEC, 2003)	Id.Sist. – Controle Automático
(ZHENG; ZAFIRIOU, 2004)	Id.Sist. – Controle Automático
<b>(ZHU; BRAZIL, 2005)</b>	<b>RF PA - 5<sup>a</sup>, <math>\varphi_L = 3</math></b>
(WANG, 2009)	Id.Sist. – Controle Automático
<b>(SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016)</b>	<b>RF PA - 5<sup>a</sup>, <math>\varphi_L = 1</math></b>
<b>(WANG; NGUYEN; SCHUTT-AINÉ, 2020)</b>	<b>LVFFN - 4<sup>a</sup>, <math>\varphi_L = 2</math> à <math>\varphi_L = 5</math></b>

de Controle Automático e de Biologia, como (WAHLBERG, 1991), (MARMARELIS, 1993), (OLIVEIRA; AMARAL; LATAWIEC, 2003), (ZHENG; ZAFIRIOU, 2004) e (WANG, 2009), usaram OBF de Laguerre, caracterizadas pela dinâmica de apenas um polo de valor real, para identificação de sistemas, de Controle Automático e Biológicos, através da expansão da  $CV$ . Isto despertou interesse a muitos pesquisadores de outras áreas de concentração, entre elas eletrônica e telecomunicações.

A partir do trabalho de (OLIVEIRA; AMARAL; LATAWIEC, 2003), (ZHU; BRAZIL, 2005) propôs o primeiro modelo comportamental de RF PA obtido a partir da expansão da  $CV$  por meio de um conjunto de OBF de Laguerre. Essa eficiente técnica de modelagem baseada em Volterra-Laguerre reproduziu com precisão distorções não lineares de um RF PA de quinta ordem (5<sup>a</sup>) de truncamento polinomial, incluindo todos os efeitos de memória usando, no máximo,  $\varphi_L = 3$  funções de base ortogonal de Laguerre. A abordagem permitiu uma redução substancial no número de parâmetros  $N_P$  envolvidos e proporcionou a reprodução do comportamento transitório e de estado estacionário de RF PA com excelente precisão.

No que lhe concerne e na mesma sequência, (SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016) usou um conjunto de OBF de Laguerre para expandir a  $CV$  e reproduziu com precisão distorções não lineares de um RF PA de quinta ordem (5<sup>a</sup>) e efeitos de memória usando  $\varphi_L = 1$  funções de base ortogonal de Laguerre.

Recentemente, (WANG; NGUYEN; SCHUTT-AINÉ, 2020) apresentaram uma abordagem de rede neural feedforward, de três camadas de  $\varphi_L = 2$  até  $\varphi_L = 5$  entradas, expandida de Laguerre-Volterra (LVFFN), com 1 camada oculta e 10 neurônios, para modelar até a quarta (4<sup>a</sup>) ordem da  $CV$  o buffer de um link de alta velocidade PAM-4 de 28 Gb/s. O modelo LVFFN proposto reduziu o tamanho do modelo e melhorou drasticamente a eficiência computacional em comparação com o modelo da  $CV$  e outros modelos de redes neurais artificiais de transição. A tabela 2.1 apresenta o quadro resumo do estado de arte de modelos de Laguerre-Volterra.

## 2.8.2 Expansão da Série de Volterra para o Domínio Fracionário

Atualmente, os modelos fracionários têm recebido atenção de muitos pesquisadores. Comparados com os modelos clássicos de ordem inteira, os modelos derivados de ordem fracionária fornecem ferramentas poderosas para a descrição e identificação de sistemas de memória. Portanto, é mais preciso modelar sistemas de memória, como RFPA, por derivadas fracionárias do que de ordem inteira. Devido à sua boa eficiência, alguns pesquisadores aplicaram a diferenciação fracionária linear em diferentes categorias de modelagem e identificação de sistemas não lineares.

Usando a definição de diferenciação fracionária de Riemann-Liouville, o pesquisador (MOHAMED *et al.*, 2002) propôs o chamado modelo fracionário de Hammerstein, através da extensão da parte linear dos modelos do tipo Hammerstein, para a identificação de sistemas não lineares de tempo contínuo caracterizados por dinâmicas de ordem fracionária. Era um modelo fracionário compacto e usou para modelar dinâmicas complexas com poucos parâmetros.

Em uma comparação com modelo de elementos finitos, pela primeira vez, usando funções geradoras ortogonais fracionárias que seguem a definição de diferenciação fracionária de Grünwald-Letnikov, (MAACHOU *et al.*, 2014) expandiu os coeficientes da série de Volterra para o domínio fracionário e usou para identificar a difusão térmica em uma amostra de ferro com dados gerados pelo método dos elementos finitos e variações de temperatura de até 700 K.

No campo das redes neurais, (BENOÎT-MARAND *et al.*, 2006) em seu estudo estimou, tanto a derivada de ordem não inteira quanto a lei física de um sistema fracionário não linear, ambos no domínio do tempo. Para atingir seu objetivo, os pesquisadores usaram Redes Neurais de Tempo Contínuo, estruturas neurais dinâmicas que diferem das redes neurais recorrentes clássicas no uso de blocos integradores em vez de blocos de atraso.

Visando estender e aprimorar alguns trabalhos anteriores sobre redes neurais recorrentes convencionais baseadas em memristores, recorrendo às condições de estabilidade e de sincronização global das funções de Mittag-Leffler, estabelecidas usando o método de Lyapunov, (CHEN; ZENG; JIANG, 2014) apresentou redes neurais de ordem fracionária baseadas em memristores. A análise conduzida emprega resultados da teoria das equações diferenciais de ordem fracionária com lados direitos descontínuos.

Buscando a estabilidade de Mittag-Leffler e sincronização impulsiva adaptativa de redes neurais de ordem fracionária no campo quaternion e por meio de algumas técnicas de desigualdade fracionária e funcional de Lyapunov, (PRATAP *et al.*, 2020) apresentou as redes neurais com valor de quaternion de ordem fracionária e separou-as em quatro sistemas de valor real formando quatro redes neurais de ordem fracionária de valor real equivalentes. Isso diminui a complexidade computacional evitando a não comutatividade

Tabela 2.2: Estado de Arte de Modelos de Ordem Fracionária

<b>Artigo</b>	<b>Modelo/ Campo/Características</b>
(MOHAMED <i>et al.</i> , 2002)	Hammerstein Fracionários
(BENOÎT-MARAND <i>et al.</i> , 2006)	
(CHEN; ZENG; JIANG, 2014)	Redes Neurais Fracionária
(PRATAP <i>et al.</i> , 2020)	
<b>(MAACHOU <i>et al.</i>, 2014)</b>	<b>Séries de Volterra Fracionária</b>
(LUPUPA; HADJILOUCAS, 2020)	Identif/Equalização de Canais MIMO massivos

da multiplicação de quaternion. No seu estudo, duas simulações numéricas foram fornecidas para verificar a precisão e validação dos resultados teóricos obtidos.

Para cumprir alguns dos requisitos do 5G, outros pesquisadores têm buscado soluções aplicando a diferenciação fracionada na modelagem e identificação de vários componentes e dispositivos do sistema 5G. Recentemente, na identificação e equalização de canais MIMO massivos através da definição de Riemann-Liouville, (LUPUPA; HADJILOUCAS, 2020) propôs um algoritmo de identificação de sistema de espaço de estado de erro de saída multivariável de ordem fracionária, uma melhoria sobre sua contraparte de ordem inteira, e obteve bons resultados na taxa de dados de erro de símbolo e forneceu uma solução mais parcimoniosa para modelagem de desvanecimento multipath. A Tabela 2.2 apresenta o quadro resumo do estado de arte sobre modelos de diferenciação fracionária.

## CAPÍTULO 3

### MODELO DE LAGUERRE VOLTERRA POLAR MODIFICADO

#### 3.1 Expansão dos Coeficientes por Funções de Laguerre

Assumindo que os coeficientes de  $PV$ ,  $\tilde{h}_{p_1, 2p_2-1}(m_1, \dots, m_{p_1}, l_1, \dots, l_{2p_2-1})$ , da equação (2.55) representam um modelo completo contendo a ordem mais alta de não linearidade do sistema e que o mesmo contém todas as memórias de amplitude  $[0; M]$  e de fase  $[0; L]$ , o número de parâmetros do modelo de Laguerre, por um lado, é independente do comprimento da memória de amplitude e, por outro lado, não se relaciona com a memória de fase devido às propriedades de um número complexo representado na forma polar. Portanto, os coeficientes  $\tilde{h}_{p_1, 2p_2-1}(\cdot)$  da equação (2.55) podem ser aproximados usando uma base completa de funções de Laguerre definidas sobre o intervalo da sua existência  $[0; \varphi_L]$  correspondente a todo intervalo da existência da memória de amplitude  $[0; M]$ . Isso significa dizer que todo o comprimento de memória de amplitude é completamente agrupável no interior do intervalo  $[0; \varphi_L]$  (ZHENG; ZAFIRIOU, 1995), o que permite fazer com que o número total de parâmetros gerados no modelo tenha majoritariamente dependência das ordens de truncamento polinomial das não linearidades  $P_1$  e  $P_2$ , e da quantidade de funções de base ortogonal de Laguerre  $\varphi_L$  necessárias para modelar todas as distorções de amplitude e todas as distorções de fase  $L$ .

O número total de parâmetros por estimar requer especial consideração dado que estes estão intrinsecamente relacionados à precisão da estimativa e o esforço computacional empreendido. Neste tipo de modelos, a precisão geralmente melhora muito conforme diminui a proporção entre a quantidade de parâmetros estimados e com o número total de pontos dos dados de entrada e de saída. O esforço computacional aumenta com o número total de parâmetros e o número total de pontos dos dados de entrada e de saída grandes, contudo, esse esforço computacional é mais sensível ao aumento da quantidade de coeficientes estimados. Desse modo, como a ordem do modelo é ditada pelas características não lineares do sistema, tornar o número de funções de base ortogonal de Laguerre  $\varphi_L$  o mínimo positivo não nulo possível é extremamente importante para obter um número de parâmetros estimados o mínimo possível.

Generalizando a aproximação dos coeficientes  $\tilde{h}_{p_1, 2p_2-1}(m_1, \dots, m_{p_1}, l_1, \dots, l_{2p_2-1})$  da equação (2.55), capazes de obter o mínimo de parâmetros estimados para as ordens

polinomiais máximas de amplitude e de fase tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{p_1, 2p_2-1}(m_1, \dots, m_{p_1}, l_1, \dots, l_{2p_2-1}) &\approx \sum_{\tau_1=0}^{\varphi_L-1} \cdots \sum_{\tau_{p_1}=0}^{\varphi_L-1} \sum_{\sigma_1=0}^J \cdots \sum_{\sigma_{2p_2-1}=0}^J \quad (3.1) \\ \tilde{d}_{p_1, 2p_2-1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_{2p_2-1}) &\prod_{q=1}^{p_1} \theta_{p_1, \tau_q}(n) \prod_{r=1}^{p_2} \delta_{2p_2-2, \sigma_r}^+(n) \prod_{s=p_2+1}^{2p_2-1} \delta_{2p_2-2, \sigma_s}^-(n) \end{aligned}$$

Então, o modelo *PV* da equação (2.55) pode ser expandido por um conjunto de funções de base ortogonal de Laguerre resultando no modelo *LPV* dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{LPV}(n) &= \sum_{p_1=1}^{P_1} \sum_{p_2=1}^{P_2} \sum_{\tau_1=0}^{\varphi_L-1} \cdots \sum_{\tau_{p_1}=\tau_{p_1-1}}^{\varphi_L-1} \sum_{\sigma_1=0}^J \cdots \sum_{\sigma_{p_2}=\sigma_{p_2-1}}^J \sum_{\sigma_{p_2+1}=0}^J \cdots \sum_{\sigma_{2p_2-1}=\sigma_{2p_2-2}}^J \quad (3.2) \\ \tilde{d}_{p_1, 2p_2-1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_{2p_2-1}) &\prod_{q=1}^{p_1} \lambda_{p_1, \tau_q}(n) \prod_{r=1}^{p_2} \delta_{2p_2-2, \sigma_r}^+(n) \prod_{s=p_2+1}^{2p_2-1} \delta_{2p_2-2, \sigma_s}^-(n) \end{aligned}$$

onde  $\tilde{d}_{p_1, 2p_2-1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_{2p_2-1})$  são os coeficientes de expansão de Laguerre relativos ao modelo da equação (2.55).

A aproximação dos coeficientes,  $\tilde{h}_{p_1, 1}(0)$ ,  $\tilde{h}_{p_1, 1}(m_1, \dots, m_{p_1})$ ,  $\tilde{h}_{p_1, 1}(m_1, \dots, m_{p_1}, l_1)$  e  $\tilde{h}_{p_1, 2p_2-1}(m_1, \dots, m_{p_1}, l_1, \dots, l_{2p_2-1})$ , todos do modelo *PV mfd* da equação (2.57), capazes de gerar o mínimo de parâmetros estimados é dada por:

$$\tilde{h}_{p_1, 1}(0) \approx \tilde{d}_{p_1, 1}(0) \cdot \theta_{p_1, 0}^{p_1}(n) \cdot \delta^+(n) \quad (3.3a)$$

$$\tilde{h}_{p_1, 1}(m_1, \dots, m_{p_1}) \approx \sum_{\tau_1=0}^{\varphi_L-1} \cdots \sum_{\tau_{p_1}=0}^{\varphi_L-1} \tilde{d}_{p_1, 1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}) \prod_{q=1}^{p_1} \theta_{p_1, \tau_q}(n) \cdot \delta^+(n) \quad (3.3b)$$

$$\tilde{h}_{p_1, 1}(m_1, \dots, m_{p_1}, l_1) \approx \sum_{\tau_1=0}^{\varphi_L-1} \sum_{\tau_{p_1}=0}^{\varphi_L-1} \sum_{\sigma_1=0}^J \tilde{d}_{p_1, 1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}, \sigma_1) \prod_{q=1}^{p_1} \theta_{p_1, \tau_q}(n) \cdot \delta_{1, \sigma_1}^+(n) \quad (3.3c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{p_1, 2p_2-1}(m_1, \dots, m_{p_1}, l_1, \dots, l_{2p_2-1}) &\approx \sum_{\tau_1=0}^{\varphi_L-1} \cdots \sum_{\tau_{p_1}=0}^{\varphi_L-1} \sum_{\sigma_1=0}^J \cdots \sum_{\sigma_{2p_2-1}=0}^J \\ \tilde{d}_{p_1, 2p_2-1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_{2p_2-1}) &\prod_{q=1}^{p_1} \theta_{p_1, \tau_q}(n) \prod_{r=1}^{p_2} \delta_{2p_2-2, \sigma_r}^+(n) \prod_{s=p_2+1}^{2p_2-1} \delta_{2p_2-2, \sigma_s}^-(n) \quad (3.3d) \end{aligned}$$

Assim, o modelo *PV mfd* apresentado em (2.57) podem ser expandido por funções de base de Laguerre, resultando no modelo de Laguerre Volterra Polar modificado (*LPV mfd*),

dado por:

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{LPVmdf}(n) = & \sum_{p_1=1}^{P_{11}} \tilde{d}_{p_1,1}(0) \cdot \lambda_{p_1,0}^{p_1}(n) \cdot \delta^+(n) + \\
& + \sum_{p_1=1}^{P_{12}} \sum_{\tau_1=0}^{\varphi_{L_2-1}} \cdots \sum_{\tau_{p_1}=\tau_{p_1-1}}^{\varphi_{L_2-1}} \tilde{d}_{p_1,1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}) \prod_{q=1}^{p_1} \lambda_{p_1,\tau_q}(n) \cdot \delta^+(n) + \\
& + \sum_{p_1=1}^{P_{13}} \sum_{\tau_1=0}^{\varphi_{L_3-1}} \cdots \sum_{\tau_{p_1}=\tau_{p_1-1}}^{\varphi_{L_3-1}} \sum_{\sigma_1=0}^{J_3} \tilde{d}_{p_1,1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}, \sigma_1) \prod_{q=1}^{p_1} \lambda_{p_1,\tau_q}(n) \cdot \delta_{1,\sigma_1}^+(n) + \quad (3.4) \\
& + \sum_{p_1=1}^{P_{14}} \sum_{p_2=1}^{P_{24}} \sum_{\tau_1=0}^{\varphi_{L_4-1}} \cdots \sum_{\tau_{p_1}=\tau_{p_1-1}}^{\varphi_{L_4-1}} \sum_{\sigma_1=0}^{J_4} \cdots \sum_{\sigma_{p_2}=\sigma_{p_2-1}}^{J_4} \sum_{\sigma_{p_2+1}=0}^{J_4} \cdots \sum_{\sigma_{2p_2-1}=\sigma_{2p_2-2}}^{J_4} \\
& \tilde{d}_{p_1,2p_2-1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_{2p_2-1}) \prod_{q=1}^{p_1} \lambda_{p_1,\tau_q}(n) \prod_{r=1}^{p_2} \delta_{2p_2-2,\sigma_r}^+(n) \prod_{s=p_2+1}^{2p_2-1} \delta_{2p_2-2,\sigma_s}^-(n)
\end{aligned}$$

onde  $\tilde{d}_{p_1,1}(0)$ ,  $\tilde{d}_{p_1,1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1})$ ,  $\tilde{d}_{p_1,1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}, \sigma_1)$  e  $\tilde{d}_{p_1,2p_2-1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}, \sigma_1, \dots, \sigma_{2p_2-1})$  são os coeficientes de expansão de Laguerre, respectivamente, do primeiro, do segundo, do terceiro e do quarto sub-blocos do modelo  $LPVmdf$  da equação (3.4).

Como o RF PA banda passante impõe restrições apenas nas componentes de fase e não havendo nenhuma restrição nos produtos das componentes de amplitude (CUNHA; LIMA; PEDRO, 2010a), os polos  $\beta$  dos modelos,  $LPV$  e  $LPVmdf$ , são uma função da ordem polinomial de amplitude  $P_1$  no modelo  $LPV$  e uma função das ordens polinomiais de  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  e  $P_{14}$  no modelo de  $LPVmdf$ . Estes polos  $\beta$  modelam quase todas as não linearidades dos dois modelos,  $LPV$  e  $LPVmdf$ , daí que, para a entrada  $a(n)$ ,  $\lambda_{p_1,\tau}(n)$  representa uma única saída de valor real da função  $\theta_{p_1,\tau}(n)$  no modelo  $LPV$  e representa quatro saídas distintas de valor real de  $\theta_{p_1,\tau}(n)$  no modelo  $LPVmdf$ . A flexibilidade dessas saídas  $\lambda_{p_1,\tau}(n)$  para os dois modelos é fornecida pelo operador de deslocamento  $z$  sobre a amplitude do sinal  $a(n)$ , tal que  $za(n) = a(n+1)$ , através da equação:

$$\lambda_{p_1,\tau}(n) = \sum_{k=0}^{\varphi_{L-1}} \theta_{p_1,\tau}(n) a(n-k) = \frac{\sqrt{1-|\beta|^2}}{1-\beta z^{-1}} \left( \frac{z^{-1}-\beta}{1-\beta z^{-1}} \right)^\tau a(n). \quad (3.5)$$

Tanto  $\delta_{2p_2-2,\sigma_r}^+(n)$  assim como  $\delta_{2p_2-2,\sigma_s}^-(n)$  das equações (3.2) e (3.4), são as componentes de fase escolhidas separadamente e são necessárias para assegurar a representação efetiva das frequências, positiva e negativa, impostas nos dois modelos,  $LPV$  e  $LPVmdf$ . Por isso que  $\delta_{2p_2-2,\sigma_r}^+(n)$  e  $\delta_{2p_2-2,\sigma_s}^-(n)$  são definidos por somas ponderadas dos seus valores instantâneos atual e passado da entrada de fase em função dos pesos

correspondentes da ordem de truncamento polinomial de fase através de:

$$\delta_{2p_2-2,\sigma_r}^+(n) = \sum_{\sigma_r=0}^{J_4} e^{j\phi(n-\sigma_r)} \quad (3.6)$$

$$\delta_{2p_2-2,\sigma_s}^-(n) = \sum_{\sigma_s=0}^{J_4} e^{-j\phi(n-\sigma_s)} \quad (3.7)$$

Assim como no modelo *PVmdf* de (CAVALHEIRO, 2018), o modelo *LPVmdf* proposto na equação (3.4) possui 10 fatores de truncamento, independentes a serem determinados. Em cada combinação particular de valores para esses fatores de truncamento, uma realização distinta é obtida no modelo *LPVmdf*. A escolha de cada valor de truncamento polinomial de amplitude  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  e  $P_{14}$ , do número de funções de base de Laguerre  $\varphi_{L_2}$ ,  $\varphi_{L_3}$  e  $\varphi_{L_4}$  e da ordem de memória de fase  $J_3$  e  $J_4$  é, a princípio, independente para cada um dos diferentes sub-blocos. No entanto, ao atribuir livremente cada valor, o número de realizações por investigar no modelo *LPVmdf* pode se tornar extremamente alto. Para reduzir a quantidade de candidatos envolvidos, recomenda-se o cumprimento das condições: a primeira premissa é imposta aos quatro truncamentos polinomiais destinados a modelar as não linearidades de amplitude:  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  e  $P_{14}$ . A segunda condição diz respeito aos três fatores de truncamentos para o número de funções de base de Laguerre,  $\varphi_{L_2}$ ,  $\varphi_{L_3}$  e  $\varphi_{L_4}$ . A terceira condição está relacionada aos dois fatores de truncamentos para memórias de fase:  $J_3$  e  $J_4$ . Portanto, rescrevendo as equações (2.58) do modelo *PVmdf* de (CAVALHEIRO, 2018), têm-se os três requisitos descritos matematicamente para o modelo *LPVmdf*:

$$\begin{aligned} P_{11} &\geq P_{12} \geq P_{13} \geq P_{14} \\ \varphi_{L_2} &\geq \varphi_{L_3} \geq \varphi_{L_4} \\ J_3 &\geq J_4. \end{aligned} \quad (3.8)$$

O modelo de Laguerre Volterra Polar modificado (*LPVmdf*) proposto na equação (3.4) tem 4 sub-blocos e um total de 10 fatores de truncamento, independentes entre si, nomeadamente  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $\varphi_{L_2}$ ,  $P_{13}$ ,  $\varphi_{L_3}$ ,  $J_3$ ,  $P_{14}$ ,  $\varphi_{L_4}$ ,  $P_{24}$  e  $J_4$ . A sua implementação em diagrama de blocos é ilustrada na Figura 3.1. O primeiro sub-bloco possui um único fator de truncamento de ordem polinomial de amplitude  $P_{11}$  e uma representação de Laguerre sem memória obtida em  $\tau = 0$ , isto é, apenas  $\frac{\sqrt{1-|\beta|^2}}{1-\beta z^{-1}}$  e assume que a saída complexa instantânea é uma função não linear da amplitude de entrada instantânea e uma função não linear da fase de entrada instantânea. Como no modelo *PVmdf*, este primeiro sub-bloco do modelo *LPVmdf* considera apenas efeitos estáticos não lineares associados à compressão de ganho de potência e saturação de saída, conhecidos na literatura como conversão de modulação em amplitude para modulação em amplitude (AM-AM), que

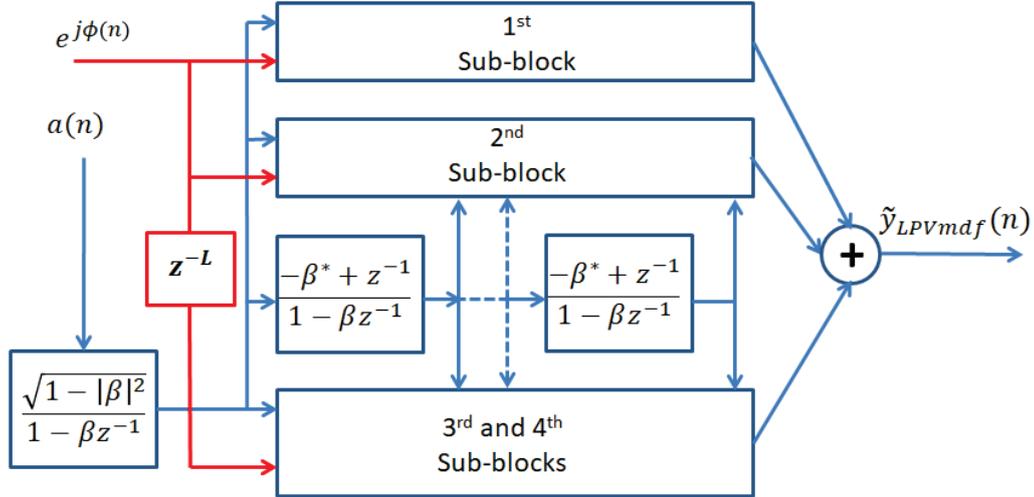


Figura 3.1: Diagrama de blocos do modelo  $LPVmdf$ .

determina como a amplitude da envoltória de saída se altera em função da amplitude da envoltória de entrada, e conversão de modulação em amplitude para modulação em fase (AM-PM), que indica alterações na diferença entre as fases das envoltórias de saída e de entrada como função da amplitude da envoltória de entrada (PEDRO; MAAS, 2005).

O segundo sub-bloco considera que a saída complexa instantânea é uma função não linear das amplitudes de entrada instantânea e anteriores, caracterizadas pelo primeiro conjunto de funções de base de Laguerre e uma função linear da fase de entrada instantânea. Esta parte possui dois fatores de truncamento: ordem polinomial de amplitude  $P_{12}$  e o número de funções de base de Laguerre  $\varphi_{L_2}$  cuja quantidade forma o primeiro conjunto de funções de base. Este segundo sub-bloco consegue reproduzir efeitos de memória não linear atribuídos à resposta em frequência não plana do circuito de polarização em torno da frequência zero.

O terceiro sub-bloco adota que a saída complexa instantânea é uma função não linear das amplitudes de entrada instantânea e passada, e uma função linear das fases de entrada instantânea e anteriores. Este sub-bloco requer três fatores de truncamento: a ordem polinomial de amplitude  $P_{13}$ , o número de funções de base de Laguerre  $\varphi_{L_3}$  cuja quantidade forma o segundo conjunto de funções de base, e o comprimento de memória de fase  $J_3$ . Este terceiro sub-bloco, além de ser capaz de reproduzir os mesmos mecanismos do segundo sub-bloco, é também adequado para modelar efeitos de memória linear originados por uma resposta em frequência não uniforme das redes de casamento de impedância em torno da frequência da portadora. Tais efeitos de memória são chamados lineares porque estão presentes na saída ao redor da frequência da portadora, mesmo em regimes de operação linear (BONFIM; LIMA, 2016). Os novos mecanismos que podem ser manipulados pelo terceiro sub-bloco são conhecidos na literatura como conversão de modulação em fase para modulação em amplitude PM-AM, que indica alterações na am-

plitude da envoltória de saída como função da variação da fase da envoltória de entrada e conversão de modulação em fase para modulação em fase PM-PM, que indica alterações na diferença entre as fases das envoltórias de saída e de entrada como função da variação da fase da envoltória de entrada (LIMA; CUNHA; PEDRO, 2011).

O quarto sub-bloco assume que a saída complexa instantânea é uma função não linear das amplitudes de entrada instantânea e passada, e uma função não linear das fases de entrada instantânea e anterior. Os quatro fatores de truncamento do quarto sub-bloco são: a ordem polinomial de amplitude  $P_{14}$ , o número de funções de base  $\varphi_{L_4}$  cuja quantidade representa o terceiro conjunto de funções de base, a ordem polinomial de fase  $P_{24}$  e o comprimento de memória de fase  $J_4$ .

### 3.2 Extração de Parâmetros dos Modelos $LPV$ e $LPVmdf$

Diferentemente dos modelos  $PV$  da equação (2.55) e  $PVmdf$  da equação (2.57) que usam o método indireto sem condicionalismos, para o caso dos modelos  $LPV$  da equação (3.2) e  $LPVmdf$  da equação (3.4) existem dois parâmetros livres que devem ser considerados com base no conhecimento prévio dos dois modelos: a escolha do número de funções de base (comprimento) de Laguerre  $\varphi_L$  e a seleção dos polos  $\beta$ . Em um cenário prático, a escolha do comprimento de Laguerre  $\varphi_L$  depende da complexidade do sistema. Aumentando-se o valor real, inteiro e positivo de  $\varphi_L$ , pode-se aumentar a exatidão (ZHU; BRAZIL, 2005; SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016) dos dois modelos, porém, é importante que  $\varphi_L$  não seja tão grande para, em combinação com uma escolha adequada dos polos, seja possível obter uma ilustração mais eficiente dos dois sistemas, que sejam de fácil convergência.

Em virtude das equivalentes passa-baixa de (3.2) e de (3.4) não serem lineares em suas dinâmicas de função básica, não é fácil realizar uma escolha adequada dos respectivos polos  $\beta$  (ZHENG; ZAFIRIOU, 2004). Como em (SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016) e (ZHENG; ZAFIRIOU, 2004), a solução passa pela escolha e otimização de uma função objetivo que minimiza o erro de aproximação entre a estimação e os dados de saída para que os polos resultantes estejam próximos dos polos fundamentais. É uma função objetivo, com condições iniciais, que depende inteiramente da dinâmica dos polos  $\beta$  e que a sua resolução permite uma rápida convergência dos dois modelos. A função objetivo  $OF$  é definida como:

$$OF(n, \beta) = \sum_{n=1}^N \left| \tilde{y}(n) - \tilde{\psi}(n, \beta)^T \Theta(\beta) \right|^2 \quad (3.9)$$

onde o vetor  $\tilde{\psi}(n, \beta)$  contém os produtos entre  $\lambda_{p_1, \tau}(n)$ ,  $\delta_{2p_2-2, \sigma_r}^+(n)$  e  $\delta_{2p_2-2, \sigma_s}^-(n)$  das equações (3.2) e (3.4). Considerando que a matriz  $X(n, \beta)$  é constituída por todos os vetores  $\tilde{\psi}(n, \beta)$ , portanto, o vetor  $\Theta(\beta)$  contendo os coeficientes  $\tilde{d}_{p_1, 2p_2-1}(\cdot)$  do modelo  $LPV$  da equação (3.2) ou os coeficientes  $\tilde{d}_{p_1, 1}(0)$ ,  $\tilde{d}_{p_1, 1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1})$ ,  $\tilde{d}_{p_1, 1}(\tau_1, \dots, \tau_{p_1}, \sigma_1)$  e

$\tilde{d}_{p_1, 2p_2-1}(\cdot)$  do modelo *LPVmdf* da equação (3.4), pode ser estimado pelo método dos mínimos quadrados em um problema não linear com restrição de otimização nos polos  $-1 < \beta < 1$ , através de:

$$\Theta(\beta) = (X(n, \beta)^H X(n, \beta))^{-1} X(n, \beta)^H Y(n) \quad (3.10)$$

em que o argumento mínimo que encontra o mínimo local e retorna, como resultado, os polos dominantes  $\hat{\beta}$  dentro do intervalo desejado, cuja quantidade é uma função da ordem de truncamento  $P_1$  no modelo *LPV* da equação (3.2) ou  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  e  $P_{14}$  no modelo *LPVmdf* da equação (3.4), é dado por:

$$(\hat{\beta}) = \underset{\beta}{\operatorname{argmin}} OF(n, \beta) \quad (3.11)$$

## CAPÍTULO 4

### MODELO DE VOLTERRA POLAR FRACIONÁRIO BIDIMENSIONAL

Visto que o comportamento de um sistema não linear, tal como um RF PA modelado através da série de Volterra, pode ser descrito pelos parâmetros  $\tilde{h}_{2p-1(q_1, q_2, \dots, q_{2p-1})}$  da equação (2.53), então, supondo que os coeficientes  $\tilde{h}_{p_1, p_2, p_3, p_4}(m_1, m_2, l_1, l_2, l_3, l_4)$  do modelo de Volterra polar bidimensional ( $2D - PV$ ) da equação (2.56), representam também um modelo de um RF PA contendo a máxima ordem de não linearidade, os comprimentos totais das memórias de amplitude  $[0; M]$  e de fase  $[0; L]$ , sem considerar o tipo de dados experimentais, as suas características e a quantidade de amostras medidas nos sinais de entrada e saída, a precisão do modelo  $2D - PV$  pode ser significativamente melhorada sem, de qualquer forma, aumentar a quantidade de coeficientes gerados no modelo. Este aumento da precisão pode ser alcançado dependendo de como as amostras instantâneas e passadas de amplitude e fase dos sinais de entrada e de saída são, simultânea ou separadamente, matematicamente manipuladas. Uma dessas ferramentas disponíveis na literatura são os modelos de diferenciação fracionária linear (MAACHOU *et al.*, 2014), que têm se mostrado eficientes na identificação de sistemas não lineares, tal como um RF PA.

Considerando que o modelo  $2D - PV$  na equação (2.56) pode ser visto, por hipótese, como uma generalização de modelos lineares baseados na série de Volterra Polar bidimensional, isso significa que o mesmo modelo  $2D - PV$  pode ser expandido para o domínio fracionário como um modelo de diferenciação fracionária linear. Assim, os coeficientes  $\tilde{h}_{p_1, p_2, p_3, p_4}(m_1, m_2, l_1, l_2, l_3, l_4)$  do modelo  $2D - PV$  podem ser estendidos para a base ortogonal fracionária de Volterra (SCHETZEN, 1965),  $\tilde{c}_{p_1, p_2, p_3, p_4}(q_1, q_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ , usando um conjunto de funções geradoras ortogonais fracionárias (MALTI *et al.*, 2005a; AOUN *et al.*, 2007). A representação do conjunto de funções geradoras ortogonais fracionárias no domínio do tempo discreto corresponde, numericamente, à derivada fracionária de Grünwald-Letnikov (STANISLAWSKI *et al.*, 2013), uma vez que a definição da derivada no sentido de Grünwald-Letnikov é mais adequada para descrever problemas de cálculo numérico de ordem fracionária com condições iniciais zero (MATIGNON, 1998).

Aplicando o procedimento de ortogonalização de Gram Schmidt apresentado em (MALTI *et al.*, 2005b; AOUN *et al.*, 2007) sobre um determinado conjunto de funções geradoras, (MALTI *et al.*, 2005a) e (AOUN *et al.*, 2007) estenderam as funções de base ortogonal para uma ordem de derivada fracionária para aplicação na aproximação de sistemas.

## 4.1 Funções Geradoras Ortogonais Fracionárias

### 4.1.1 Procedimento de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Dado um conjunto arbitrário de funções  $\{F_\tau\}_{\tau=1}^M$ , onde  $F_\tau \in H^2(\mathbb{C}^+) \forall \tau$ , as funções ortogonalizadas  $\{G_\tau\}_{\tau=1}^M$  são obtidas, segundo o procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt (MALTI *et al.*, 2005b; AOUN *et al.*, 2007), como uma combinação linear de funções  $F_\tau, \tau = 1, 2, \dots, M$ :

$$G = \Delta * F \quad (4.1)$$

onde  $\Delta$  é uma matriz de dimensões  $M \times M$ , de valor real e

$$G = [G_1(s) \ G_2(s) \ \cdots \ G_M(s)]^T \quad (4.2a)$$

$$F = [F_1(s) \ F_2(s) \ \cdots \ F_M(s)]^T \quad (4.2b)$$

Como  $\{G_\tau\}_{\tau=1}^M$  é um conjunto de vetores de funções ortogonais, então:

$$\langle G, G^T \rangle = \begin{bmatrix} \langle G_{\tau_0}, G_{\tau_0} \rangle & G_{\tau_0}, G_{\tau_0+1} & \cdots & G_{\tau_0}, G_M \\ G_{\tau_0+1}, G_{\tau_0} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ G_M, G_{\tau_0} & G_M, G_{\tau_0+1} & \cdots & G_M, G_M \end{bmatrix} = I \quad (4.3)$$

onde  $\langle G, G^T \rangle$  é uma matriz de produtos escalares cujos elementos  $(i,j)$  são  $\langle G_i, G_j \rangle$  e  $I$  denota uma matriz de identidade de dimensões  $M \times M$ . Assim, usando a equação (4.1) é possível demonstrar que:

$$\langle G, G^T \rangle = \Delta \langle F, F^T \rangle \Delta^T = I \quad (4.4)$$

o que permite obter a forma quadrática seguinte

$$\Delta^T \Delta = \langle F, F^T \rangle^{-1} \quad (4.5)$$

onde a matriz triangular inferior  $\Delta$  é calculada usando a decomposição de Cholesky:

$$\Delta = \text{Cholesky}(\langle F, F^T \rangle^{-1}) \quad (4.6)$$

Deste modo, como resultado, o conjunto de funções ortonormais deduzidas a partir da equação (4.1), (MALTI *et al.*, 2005b; AOUN *et al.*, 2007) é dado por:

$$G = \text{Cholesky}(\langle F, F^T \rangle^{-1}) \times F \quad (4.7)$$

### 4.1.2 Generalização de Funções Geradoras Fracionárias

Para extrapolar os coeficientes  $\tilde{h}_{p_1, p_2, p_3, p_4}(m_1, m_2, l_1, l_2, l_3, l_4)$  do modelo de Volterra polar bidimensional  $2D - PV$  da equação (2.56) para ordem de diferenciação fracionária é necessária a aplicação de um conjunto de funções geradoras ortogonais fracionárias no domínio da frequência  $F_\tau(s)$  (MALTI *et al.*, 2005a; MALTI *et al.*, 2005b), obtidas a partir do procedimento de ortogonalização de Gram-Schmidt (método descrito na Subseção 4.1.1). Essas funções geradoras são escolhidas de modo que tenham a forma:

$$F_\tau(s) = \frac{1}{(s^\alpha + \beta_\tau)^\tau}, \tau = 1, 2, 3, \dots \quad (4.8)$$

onde  $\alpha \in ]0, 2[$  é a ordem fracionária e  $\beta_\tau$  é um parâmetro pertencente ao conjunto de números reais estritamente positivo. Esses dois parâmetros,  $\beta$  e  $\alpha$ , representam as condições decorrentes do teorema de estabilidade que define que um sistema comensurado de ordem  $0 < \alpha < 1$  ou  $1 < \alpha < 2$  descrito por uma função de transferência  $F(s)$ , equação (4.8), é estável apenas se  $|\arg(\beta)| > \alpha \frac{\pi}{2}$  (MATIGNON, 1996) ou  $|\arg(s^\alpha)| < \alpha \frac{\pi}{2}$  (MATIGNON, 1998).

Analisando a equação (4.8), a base generalizada fracionária permite escolher qualquer combinação de funções geradoras tendo em conta os valores de  $\beta_\tau$ , quantos possíveis  $\tau = 1, 2, 3, \dots$  (MAACHOU *et al.*, 2014):

- Se  $\tau = 1$ , então:

$$F_1(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta_1} \quad (4.9)$$

- Se  $\tau = 2$ , isso significa que existem 2 valores de  $\beta$  dados por  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Então a combinação é:

$$F_2(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta_2} F_1(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta_2} \frac{1}{s^\alpha + \beta_1} \quad (4.10)$$

- E se  $\tau = 3$ , então a combinação de funções geradoras é dada por:

$$F_3(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta_3} \frac{1}{s^\alpha + \beta_2} \frac{1}{s^\alpha + \beta_1} \quad (4.11)$$

Generalizando para  $\tau > 1$ :

$$F_\tau(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta_\tau} F_{\tau-1}(s) \quad (4.12)$$

## 4.2 Expansão dos Coeficientes de Volterra Polar Bidimensional por Funções Geradoras Ortogonais Fracionárias

Para facilitar a compreensão do processo de expansão fracionária usando um conjunto de funções geradoras fracionárias, enquanto evitamos a integral temporal da con-

volução envolvendo funções geradoras fracionárias no domínio do tempo contínuo, vamos inicialmente considerar a parte linear, isto é, a primeira ordem da série de Volterra  $h_1(t)$  da equação (2.36) e a seguir a saída da terceira ordem do modelo *CV* da equação (2.53). Para limitar a memória de um sistema de ordem fracionária, já que possui memória infinita (CHEN; ZENG; JIANG, 2014), a primeira ordem da série de Volterra  $h_1(t)$  da equação (2.36), pode ser aproximada usando um conjunto finito de  $K$  funções geradoras fracionárias no domínio de tempo contínuo  $f_\tau(t)$ :

$$h_1(t \approx) \sum_{\tau=1}^{K+1} b_\tau f_\tau(t), \quad (4.13)$$

onde  $b_\tau$  definido para  $\tau = 1, 2, \dots, K + 1$ , são os coeficientes associados à decomposição de  $h_1(t)$  através de  $f_\tau(t)$  e  $K$  é o número de funções geradoras fracionárias. Se a base fracionária é caracterizada por  $K = 2$ , então:

$$h_1(t \approx) \sum_{\tau=1}^3 b_\tau f_\tau(t), \quad (4.14)$$

isto é,  $\tau = 1, 2, 3$ , então podem ser usadas três funções geradoras fracionárias definidas por suas transformadas de Laplace:

$$F_1(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta_1} \quad (4.15a)$$

$$F_2(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta_2} \frac{1}{s^\alpha + \beta_1} \quad (4.15b)$$

$$F_3(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta_3} \frac{1}{s^\alpha + \beta_2} \frac{1}{s^\alpha + \beta_1} \quad (4.15c)$$

A saída da terceira ordem do modelo *CV* da equação (2.53):

$$\tilde{y}(t) = \tilde{y}_1(t) + \tilde{y}_3(t) \quad (4.16)$$

onde

$$\tilde{y}_1(t) = \sum_{q_1=0}^M \tilde{h}_{1,q_1} \tilde{x}(t - m_{q_1}) \quad (4.17a)$$

$$\tilde{y}_3(t) = \sum_{q_1=0}^M \sum_{q_2=q_1}^M \sum_{q_3=0}^M \tilde{h}_{3,(q_1,q_2,q_3)} \tilde{x}(t - m_{q_1}) \tilde{x}(t - m_{q_2}) \tilde{x}^*(t - m_{q_3}) \quad (4.17b)$$

pode ser expandida através de um conjunto de funções geradoras fracionárias no domínio da frequência. Tendo em conta que sistemas de ordem fracionária têm memória infinita (CHEN; ZENG; JIANG, 2014), assumindo que a quantidade  $K + 1$  de funções geradoras

ortogonais fracionárias no domínio da frequência corresponda a toda duração de memória  $M$ , então os coeficientes  $\tilde{h}_{1,q_1}$  da equação (4.17a) e  $\tilde{h}_{3,(q_1,q_2,q_3)}$  da equação (4.17b) podem ser expandidos através de um conjunto de  $K + 1$  funções geradoras fracionárias, por:

$$\tilde{h}_{1,q_1} \approx \sum_{\tau_1=1}^{K+1} \tilde{c}_{1,\tau_1} f_{\tau_1}(t) \quad (4.18a)$$

$$\tilde{h}_{3,(q_1,q_2,q_3)} \approx \sum_{\tau_1=1}^{K+1} \cdots \sum_{\tau_3=1}^{K+1} \tilde{c}_{3,(\tau_1,\tau_2,\tau_3)} f_{\tau_1,\tau_2,\tau_3}(t) \quad (4.18b)$$

De forma semelhante, as componentes  $\tilde{y}_1(t)$  da equação (4.17a) e  $\tilde{y}_3(t)$  da equação (4.17b) podem ser expandidos por um conjunto de  $K + 1$  funções geradoras fracionárias, em princípio, no domínio do tempo contínuo como:

$$\tilde{y}_1(t) = \sum_{\tau_1=1}^{K+1} \tilde{c}_{1,\tau_1} \mathcal{L}^{-1} \left[ F_{\tau_1}(s) \tilde{X}(s) \right] \quad (4.19a)$$

$$\tilde{y}_3(t) = \sum_{\tau_1=1}^{K+1} \sum_{\tau_2=\tau_1}^{K+1} \sum_{\tau_3=1}^{K+1} \tilde{c}_{3,(\tau_1,\tau_2,\tau_3)} \mathcal{L}^{-1} \left[ F_{\tau_1}(s) \tilde{X}(s) \right] \mathcal{L}^{-1} \left[ F_{\tau_2}(s) \tilde{X}(s) \right] \mathcal{L}^{-1} \left[ F_{\tau_3}(s) \tilde{X}^*(s) \right] \quad (4.19b)$$

Porém, como o parâmetro  $\tilde{J}_\tau(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_\tau(s)\tilde{X}(s)]$  se encontra no domínio de tempo contínuo e, por outro lado, tanto a função geradora fracionária  $F_\tau(s)$ , assim como o sinal de envoltória complexa de entrada  $\tilde{X}(s)$ , se encontram no domínio da frequência, para solução de  $\tilde{J}_\tau(t)$ , dois caminhos podem ser seguidos:

- O primeiro caminho a seguir consiste em transformar o sinal de envoltória de valor complexo de entrada  $\tilde{x}(t)$  para o domínio da frequência através da transformada direta de Laplace  $\tilde{X}(s)$  para, em seguida, realizar o produto  $F_\tau(s)\tilde{X}(s)$ . O resultado do produto seria, na sequência, submetido à transformada inversa de Laplace  $\mathcal{L}^{-1}[F_\tau(s)\tilde{X}(s)]$  para tornar o resultado no domínio de tempo.
- O segundo caminho a seguir, visto que o sinal de envoltória de valor complexo de entrada  $\tilde{x}(t)$  já se encontra no domínio de tempo, a ideia consiste em buscar a transformada inversa da função geradora fracionária  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$  e posteriormente, realizar a convolução temporal com o sinal de envoltória de valor complexo de entrada  $\tilde{x}(t)$ .

Indo na direção do segundo caminho, a transformada de Laplace da função geradora fracionária  $F(s)$ , no domínio de tempo contínuo  $f(t)$  de ordem  $s^\alpha$  não é analiticamente derivável. Mas, a sua expansão em série é derivável (CAPONETTO, 2010) e, assim sendo, a respetiva transformada inversa de Laplace,  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ , pode ser obtida. Logo, expandindo

$F(s)$  da equação (4.8) em uma série, resulta que:

$$F(s) = \frac{1}{s^\alpha + \beta} = \frac{1}{s^\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^\gamma}{s^\alpha} \quad (4.20)$$

Isso significa que a resposta ao impulso  $f(t)$  pode ser determinada através da transformada inversa de Laplace da função geradora ortogonal fracionária  $F(s)$  expandida em uma série e expressa através da função numérica de Mittag-Leffler, dada por:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^\gamma}{s^\alpha} \right\} = t^{\alpha-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-\beta t^\alpha)^\gamma}{\Gamma(\alpha\gamma + \alpha)} \quad (4.21)$$

Usando para o efeito a definição da transformada de Laplace de um operador fracionário de Grünwald-Letnikov da equação (2.122) e recorrendo à sua condição de existência em  $t = 0$ , considerando que  $D^\alpha f(t) = 0$  e para que a equação (4.21) não seja  $f(t) = 0, \forall t < 0$  (OLDHAM; SPANIER, 1974), leva a definir a função geradora da equação (4.21), que forma uma base em  $L_2([0, \infty[)$  (AOUN *et al.*, 2007), em  $t = 0^+$  como:

$$f_\tau(t) = t^{\alpha_\tau-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-\beta_\tau t^{\alpha_\tau})^\gamma}{\Gamma(\alpha_\tau\gamma + \alpha_\tau)} \Big|_{t=0^+}, \tau = 1, 2, 3, \dots, K+1 \quad (4.22)$$

Uma vez conhecida a função geradora fracionária no domínio do tempo  $f_\tau(t)$ , definida na equação (4.22), então o parâmetro  $\tilde{J}_\tau(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_\tau(s)\tilde{X}(s)]$  das equações (4.19a) e (4.19b) pode ser solucionado através de uma operação de convolução temporal envolvendo a função geradora fracionária no domínio do tempo  $f_\tau(t)$  e o sinal de envoltória de valor complexo de entrada  $\tilde{x}(t)$  através de:

$$\tilde{J}_\tau(t) = f_\tau(t) \otimes \tilde{x}(t) = t^{\alpha_\tau-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-\beta_\tau)^\gamma (t)^{\alpha_\tau\gamma}}{\Gamma(\alpha_\tau\gamma + \alpha_\tau)} \Big|_{t=0^+} \otimes \tilde{x}(t) \quad (4.23)$$

No entanto, como a equação (4.23) está representada no domínio de tempo contínuo  $t$ , é de interesse a sua representação no domínio de tempo discreto. Então, assumindo que a relação matemática entre o tempo discreto e o tempo contínuo é dada por  $t = nT$ , logo, a equação (4.23) pode ser reescrita no domínio do tempo discreto por:

$$\tilde{J}_\tau(nT) = (nT)^{\alpha_\tau-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-\beta_\tau)^\gamma (nT)^{\alpha_\tau\gamma}}{\Gamma(\alpha_\tau\gamma + \alpha_\tau)} \Big|_{nT=0^+} \otimes \tilde{x}(n) \quad (4.24)$$

onde  $T$  é o período de amostragem do sinal de envoltória de valor complexo de entrada  $\tilde{x}(n)$ . No que lhe diz respeito, o sinal de envoltória de valor complexo de entrada  $\tilde{x}(n)$  pode ser representado por suas componentes polares, respectivamente, de amplitude  $a(n)$

e de fase  $e^{j\phi_n}$ . Substituindo ambas as componentes,  $a(n)$  e  $e^{j\phi_n}$ , na equação (4.24) resulta que:

$$\tilde{J}_\tau(nT) = \lambda_\tau(n) \cdot e^{j\phi_n} \quad (4.25)$$

onde a magnitude  $\lambda_\tau(n)$ , que mais adiante será assumido como um vetor de espaço de estado, é um parâmetro dependente de  $f_\tau(t)$  e de  $a(n)$  cuja flexibilidade é proporcionada pelo operador de deslocamento  $z$  sobre a amplitude  $a(n)$ , tal que  $za(n) = a(n+1)$ .

Devido à sua semelhança com a representação de modelos de espaço de estado de ordem inteira (DAS; PAN, 2011), os modelos de ordem fracionária também podem ser representados na forma de espaço de estado:

$$D^\alpha f(n) = Af(n) + Bx(n) \quad (4.26a)$$

$$y(n) = Cf(n) + Dx(n) \quad (4.26b)$$

onde  $x(n)$  e  $y(n)$  são, respectivamente, os vetores  $m \times 1$  de entrada e  $p \times 1$  de saída.  $A$  é a matriz de estado de dimensões  $n \times n$  e descreve a dinâmica do sistema de diferenciação fracionária.  $B$  é o vetor de entrada de dimensões  $n \times 1$  e descreve a transformação linear pela qual o sinal de entrada  $x(n)$  influencia o próximo estado.  $C$  é a matriz de saída  $p \times p$  e descreve como o estado é transferido para a saída.  $D$  é o vetor feedforward de dimensões  $p \times 1$ .  $\alpha$  é a ordem fracionária e  $D^\alpha$  é a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov (TEPLJAKOV, 2017) de ordem  $\alpha$ .  $f(n)$  é o vetor de estados da função geradora fracionária  $t \times 1$  no domínio do tempo contínuo.

Para descrever a dinâmica de expansão do modelo de Volterra polar bidimensional para o domínio de diferenciação fracionária através da representação de espaço de estados, o vetor de espaço de estados é a magnitude  $\lambda_\tau(n)$  e a matriz de estado  $A$  deve conter na diagonal principal produtos de arranjos diagonais de  $\alpha_\tau$  definidos nas equações (2.113a) e (2.113b) e de  $f_\tau(nT)$ . Assim, o modelo de Volterra polar fracionário bidimensional ( $2D - frPV$ ) pode ser alcançado usando a modelagem de espaço de estado de ordem fracionária dada por:

$$\lambda_\tau(n+1) = \Phi_\tau \Psi_\tau \lambda_\tau(n) + B_\tau a(n+1) \quad (4.27a)$$

$$\tilde{y}_{2D-frPV}(n) = \mathcal{H} \left( \tilde{J}_1(n), \tilde{J}_2(n), \dots, \tilde{J}_\tau(n) \right) \quad (4.27b)$$

onde  $\lambda_0(n)$  representa a condição inicial-zero da magnitude  $\lambda_\tau(n)$ . O parâmetro  $\Phi_\tau$  contém o arranjo da ordem fracionária  $\alpha_\tau$  que, em função da quantidade  $K$ , mapeia os efeitos instantâneo e passado da memória de amplitude  $M$  do modelo  $2D - PV$ . Este parâmetro  $\Phi_\tau$  está definido nas equações (2.113a) e (2.113b).  $B_\tau = [\text{ones}(\tau, 1)]$ ,  $\tau = 1, 2, 3, \dots, K+1$ .  $\mathcal{H}(\cdot)$  é um operador não linear atuando sobre o parâmetro complexo  $\tilde{J}_\tau(n)$ . Este parâmetro complexo  $\tilde{J}_\tau(n)$  contém produtos e multiplicações obtidas entre  $\lambda_\tau(n+1)$  e as fases,

positiva  $e^{j\phi(n-l_r)}$  onde  $l_r \in [0, L]$ , e/ou negativa  $e^{-j\phi(n-l_s)}$  onde  $l_s \in [0, L]$ , todos requeridos no modelo  $2D - PV$  da equação (2.56), e

$$\Psi_\tau = \text{diag} \left[ f_1(n) \quad f_2(n)f_1(n) \quad \cdots \quad (f_\tau(n))^\tau \right] \quad (4.28a)$$

$$f_\tau(n) = (nT)^{\alpha_\tau-1} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-\beta_\tau)^\gamma (nT)^{\alpha_\tau \gamma}}{\Gamma(\alpha_\tau \gamma + \alpha_\tau)} \Big|_{nT=0+} \quad (4.28b)$$

Analicamente, o modelo de Volterra polar fracionário bidimensional ( $2D - frPV$ ) pode ser dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{2D-frPV}(n) = & \sum_{p_1=1}^{P_1} \sum_{p_2=0}^{p_1-1} \sum_{\tau_1=0}^K \sum_{\tau_2=\tau_1+1}^K \sum_{p_3=1}^{P_3} \sum_{p_4=0}^{p_3-1} \sum_{\sigma_1=0}^{\Upsilon} \sum_{\sigma_2=\sigma_1+1}^{\Upsilon} \sum_{p_5=1}^{p_3-1} \sum_{p_6=0}^{p_5-1} \sum_{\sigma_3=0}^{\Upsilon} \sum_{\sigma_4=\sigma_3+1}^{\Upsilon} \\ & \tilde{c}_{p_1,p_2,p_3,p_4}(\tau_1,\tau_2,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4) \lambda_{\tau_1}^{(p_1-p_2)}(n) \times \lambda_{\tau_2}^{p_2}(n) \times \\ & (\delta_{p_3,\sigma_1}^+)^{(p_3-p_4)}(n) \times (\delta_{p_4,\sigma_2}^+)^{p_4}(n) \times (\delta_{p_5,\sigma_3}^-)^{(p_5-p_6)}(n) \times (\delta_{p_6,\sigma_4}^-)^{p_6}(n) \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde  $\tilde{c}_{p_1,p_2,p_3,p_4}(\tau_1,\tau_2,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$  são coeficientes complexos do modelo,  $P_1$  é o truncamento polinomial para a amplitude,  $K$  é a duração de memória para a amplitude,  $P_3$  é a ordem de truncamento polinomial para a fase e  $\Upsilon$  é a duração de memória para a fase do sinal.  $\delta_{p_3,\sigma_1}^+(n)$ ,  $\delta_{p_4,\sigma_2}^+(n)$ ,  $\delta_{p_5,\sigma_3}^-(n)$  e  $\delta_{p_6,\sigma_4}^-(n)$  da equação (4.29), são componentes de fase escolhidas separadamente necessárias para a representação das frequências positiva e negativa do modelo  $2D - frLPV$ , definidos por somas ponderadas dos seus valores instantâneos atual e passados da entrada de fase em função dos pesos correspondentes da ordem de truncamento polinomial de fase através de:

$$\delta_{p_3,\sigma_1}^+(n) = \sum_{\sigma_1=0}^{\Upsilon} e^{j\phi(n-\sigma_1)} \quad (4.30)$$

$$\delta_{p_4,\sigma_2}^+(n) = \sum_{\sigma_2=0}^{\Upsilon} e^{j\phi(n-\sigma_2)} \quad (4.31)$$

$$\delta_{p_5,\sigma_3}^-(n) = \sum_{\sigma_3=0}^{\Upsilon} e^{j\phi(n-\sigma_3)} \quad (4.32)$$

$$\delta_{p_6,\sigma_4}^-(n) = \sum_{\sigma_4=0}^{\Upsilon} e^{j\phi(n-\sigma_4)} \quad (4.33)$$

Como no modelo  $2D - PV$  da equação (2.56), nesta nova abordagem  $2D - frPV$ , os termos unidimensionais estão relacionados às contribuições dos sinais de entrada de amplitude e fase em uma única amostra de tempo, onde as multiplicações e produtos são realizados quando os atrasos de memória de amplitude e fase são  $m_q = l_r = l_s$ . Esta parte do modelo, independentemente das ordens de truncamento polinomial de amplitude

e fase, mapeia os efeitos da memória de forma simples, reduzindo os coeficientes multidimensionais à contribuição unidimensional. Nos termos bidimensionais, as contribuições dos sinais de entrada de amplitude e fase estão relacionadas em duas amostras de tempo diferentes, consecutivas ou não, se as multiplicações e produtos são realizados através de dois atrasos de memória distintos e isso mapeia o efeito de memória de forma dual, reduzindo os coeficientes multidimensionais à contribuição bidimensional. Os termos tridimensionais e os termos relacionados aos sinais de entrada de amplitude e fase em mais de três amostras temporais, são negligenciados.

Diferentemente dos polinômios de memória amplamente utilizados na literatura, nomeadamente o unidimensional (KIM; KONSTANTINOU, 2001), o bidimensional e o generalizado (MORGAN *et al.*, 2006), que representam casos particulares do modelo  $2D - PV$  se o sinal de envoltória de valor complexo de entrada  $\tilde{x}(n)$  for representado pelas suas componentes polares, de amplitude  $a(n)$  e de fase  $e^{j\phi(n)}$ , no modelo  $2D - frPV$  proposto, há truncamento polinomial para a evolução das amostras de fase. Esse truncamento força certas amostras de fase a serem do mesmo instante de tempo e outras amostras de fase a serem de instantes de tempo diferentes das amostras de amplitude. Nos modelos de RF PA, com forte não linearidade e de banda larga altamente eficiente, excitados na entrada por um sinal de envoltória modulado em amplitude e fase, o reconhecimento das distorções não lineares do próprio RF PA e da DPD não podem ser completamente determinadas apenas pelas distorções estáticas e dinâmicas AM-AM. Também se exige que sejam analisadas as distorções AM-PM que surgem nas características físicas dos transistores (capacitâncias porta-fonte, porta-dreno e dreno-fonte) (PEDRO; NUNES, 2014) ou presentes nos sinais de entrada com componentes de um, de dois ou de três tons (JARDÓN-AGUILAR *et al.*, 2006), e devem ser modeladas usando amostras de todos os efeitos de memória de amplitude e fase em, no máximo, dois instantes de tempo diferentes.

O número de parâmetros gerados pelos modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  são baseados nas multiplicações do sinal de entrada até um máximo de dois instantes de tempo e podem avaliar as não linearidades de RF PA e da DPD medindo as curvas AM-AM e AM-PM nas frequências de interesse. Esses dois modelos,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ , também podem modelar fenômenos de variação do sinal de envoltória de fase, podendo manipular mecanismos como conversão de modulação de fase para modulação de amplitude (PM-AM), que indica mudanças na envoltória de amplitude de saída em função da variação da envoltória de fase de entrada e mecanismos como conversão de modulação de fase para modulação de fase (PM-PM), que indica mudanças na diferença entre as fases de saída e entrada em função da variação da envoltória de fase de entrada (LIMA; CUNHA; PEDRO, 2011). Eles também conseguem modelar efeitos de memória linear e não linear do sinal 5G com base em dois instantes diferentes de amostras passadas, tanto de amplitude assim como de fase.

### 4.3 Extração de Parâmetros do Modelo $2D - frPV$

O modelo  $2D - frPV$  proposto em (4.29) usa o método de extração com restrição em um único parâmetro livre denominado ordem fracionária  $\alpha$ , que deve ser considerado com base no conhecimento prévio do modelo  $2D - frPV$ . Independentemente do nível de truncamento polinomial de amplitude, a ordem fracionária dominante  $\hat{\alpha}$  modela todas ou quase todas as não linearidades do modelo. Em um cenário prático, a seleção da ordem fracionária  $\alpha$  pode ser feita da mesma forma que a expansão das funções de Fourier, onde o primeiro termo da aproximação de uma função de transferência fracionária pela ordem de base ortogonal fracionária é o termo dominante. No entanto, usar este procedimento para encontrar a ordem fracionária fundamental  $\hat{\alpha}$  requer o uso de um gráfico logarítmico da inclinação (NAZARI; HAERI; TAVAZOEI, 2008) associado à resposta ao impulso do sistema.

Assumindo que existe um conhecimento prévio sobre o parâmetro  $\alpha$  que modela todas as ordens de não linearidade do modelo equivalente passa-baixa do RF PA ou da DPD, a escolha de  $\alpha$  pode envolver a otimização de uma função objetivo que minimiza o erro de aproximação entre o estimado e dados desejados, de modo que a ordem fracionária resultante  $\alpha$  seja próxima à ordem fracionária fundamental  $\hat{\alpha}$ . É uma função objetivo que depende inteiramente da dinâmica de ordem fracionária  $\alpha$  e que sua resolução permite uma rápida convergência do modelo  $2D - frPV$ . A função objetivo ( $OF$ ) é definida como:

$$OF(n, \alpha) = \sum_{n=1}^N \left| \tilde{y}(n) - \tilde{\psi}(n, \alpha)^T \Theta(\alpha) \right|^2 \quad (4.34)$$

onde o vetor  $\tilde{\psi}(n, \alpha)$  contém todas as multiplicações e produtos entre  $\lambda_\tau(n)$  e as fases positivas  $\delta_{p_3, \sigma_1}^+(n)$  e  $\delta_{p_4, \sigma_2}^+(n)$ , tal que  $\sigma_{1,2} \in [0, \Upsilon]$ , e/ou as fases negativas  $\delta_{p_5, \sigma_3}^-(n)$  e  $\delta_{p_6, \sigma_4}^-(n)$ , tal que  $\sigma_{3,4} \in [0, \Upsilon]$ , todos requeridos no modelo  $2D - frPV$  da equação (4.29). Como a matriz  $X(n, \alpha)$  é composta por todos os distintos vetores  $\tilde{\psi}(n, \alpha)$ , portanto, o vetor  $\Theta(\alpha)$  contendo o coeficiente  $\tilde{c}_{p_1, p_2, p_3, p_4}(\cdot)$  do modelo  $2D - frPV$  pode ser estimado pelo método dos mínimos quadrados dentro de um modelo de otimização não linear com uma restrição nos valores de ordem fracionária em  $0 < \alpha < 1$  ou  $1 < \alpha < 2$ , por meio:

$$\Theta(\alpha) = (X(n, \alpha)^H X(n, \alpha))^{-1} X(n, \alpha)^H Y(n) \quad (4.35)$$

em que o argumento mínimo que encontra o mínimo local e retorna a fração dominante  $\hat{\alpha}$  é dado por:

$$(\hat{\alpha}) = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} OF(n, \alpha) \quad (4.36)$$

## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

#### 5.1 Validação Experimental dos Modelos LPV e LPVmdf

Com intuito de comparação, os novos modelos propostos em (3.2) e (3.4), e os anteriores (2.55) e (2.57), foram utilizados para modelar as características de transferência direta e inversa de um RF PA sob análise. Estas etapas de modelagem foram executadas no software MATLAB (GUIDE, 1995), usando aritmética de vírgula flutuante de precisão dupla. A identificação dos dois modelos é realizada pela aproximação através do algoritmo de *LS* (MATHEWS; SICURANZA, 2000). Para aferir o desempenho dos modelos, duas métricas de domínio de tempo têm sido regularmente utilizadas na literatura, nomeadamente: o erro quadrático médio normalizado (*NMSE*) e a taxa de modelagem de efeitos de memória (*MEMR*) (GHANNOUCHI; HAMMI; HELAOUI, 2015). Essas duas métricas, *NMSE* e *MEMR* são calculadas sobre os sinais de erro definidos pela diferença entre o sinal medido  $y_{medido}(i)$  na saída do RF PA e o sinal estimado  $y_{estimado}(i)$  na saída do modelo. A métrica do NMSE, relatado em (MUHA *et al.*, 1999; GHANNOUCHI; HAMMI; HELAOUI, 2015) e expresso em decibéis, é a métrica usada neste trabalho para a avaliação de desempenho dos quatro modelos, da seguinte forma:

$$NMSE = 10 \log_{10} \left[ \frac{\sum_{i=1}^N |\tilde{y}_{medido}(i) - \tilde{y}_{estimado}(i)|^2}{\sum_{i=1}^N |\tilde{y}_{medido}(i)|^2} \right] \quad (5.1)$$

onde  $i$  especifica uma amostra e  $N$  é o número total de amostras. O sinal  $y_{medido}(i)$  é o sinal de saída de envoltória de valor complexo, medido no instante  $i$ . O sinal  $y_{estimado}(i)$  é o sinal de saída de envoltória de valor complexo estimado pelo modelo do RF PA no instante de tempo  $i$ .

Embora estas métricas, *MEMR* e *NMSE*, sejam preferencialmente mais usadas na modelagem comportamental de RF PA pela sua simplicidade matemática, elas por si só não conseguem fornecer uma validação exaustiva e/ou rigorosa. Pelo fato de serem fortemente afetadas pelos erros decorrentes da modelagem no canal in-band, elas não são capazes de avaliar a razão de potências que ocorre entre as bandas laterais, superior, inferior e a banda passante (LEE, 1998). Uma métrica alternativa tem sido a métrica razão de potência de erro de canal adjacente (*ACEPR*) (ISAKSSON; WISELL; RONNOW, 2006) definida como:

$$ACEPR = \frac{\int_{adj} |E(f)|^2 df}{\int_{ch} |Y(f)|^2 df} \quad (5.2)$$



Figura 5.1: Diagrama esquemático da configuração experimental

onde  $E(f)$  é a transformada discreta de Fourier do sinal de erro e  $Y(f)$  é a transformada discreta de Fourier do sinal de referência. Aqui, os resultados são relatados em termos  $NMSE$  em  $[dB]$  e  $ACEPR$  superior, médio e inferior em  $[dB]$ , dos dados de validação.

### 5.1.1 Amplificador de Potência GaN HEMT classe AB

O dispositivo sob análise (DUT) é um RF PA GaN HEMT classe AB, estimulado por uma onda portadora de 900 MHz modulada por um sinal de envoltória 3GPP WCDMA de duas portadoras, em que cada portadora tem 3,84 MHz de largura de banda e deslocadas entre si de 5 MHz. Para a obtenção dos resultados apresentados neste trabalho, os dados de entrada e saída foram medidos usando um VSA Rohde & Schwarz FSQ, com frequência de amostragem de 61,44 MHz. O primeiro passo está relacionado com a escolha do sinal de entrada e a medição experimental do sinal de saída. A medição realizada foi a da banda base no domínio do tempo usando um VSA onde, um sinal de entrada com amplitude  $a(n)$  e modulação de fase  $\phi_n$  é aplicado à entrada RF PA e o sinal de envoltória de valor complexo na saída RF PA é amostrado em instantes de tempo tomados em intervalo de tempo constante. O diagrama esquemático da configuração experimental utilizada para a coleta de dados de entrada-saída é mostrado na Figura 5.1. Os componentes de amplitude  $a(n)$  e fase  $\phi_n$  do sinal de envoltória de valor complexo de entrada  $\tilde{x}(n)$  são aplicados ao gerador de forma de onda arbitrária (AWG) de um Rohde & Schwarz SMU200A (VSG). Como  $a(n)e^{j\phi_n} = x_I(n) + jx_Q(n)$ , no VSG, um modulador IQ em fase e quadratura converte o sinal de banda base para RF que passa pela cascata de um driver seguido pelo RF PA. Um VSA Rohde & Schwarz FSQ converte o sinal de RF na saída do RF PA em banda base e armazena os componentes de amplitude  $b(n)$  e fase  $\varphi_n + \phi_n$  do sinal de saída de valor complexo  $\tilde{y}(n)$ . Assim, um conjunto de 4.500 amostras de estimativa e outro de 4.500 amostras de validação, resultantes das medidas experimentais, foram utilizados para identificação e modelagem de validação dos modelos,  $PV$ ,  $LPV$ ,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ . Os resultados são apresentados em termos dos dados de validação.

Nesta tese não são considerados sinais de envoltória com maiores larguras de banda, dado que, os efeitos de memória são mais pronunciados quando a largura de banda do sinal de envoltória é aumentada, especialmente devido às dificuldades de projetar redes com resposta de frequência plana dentro de toda a zona fundamental coberta pelo sinal de envoltória. As funções de Laguerre consideram os efeitos de memória através de funções racionais no domínio da frequência com polos únicos. Como as funções Laguerre têm

memória infinita, espera-se que sejam adaptadas para lidar com sinais de modulação de banda larga gerados em futuras comunicações sem fio.

Para a comparação de resultados, o critério seguido é de selecionar aqueles modelos gerados por um mesmo número de parâmetros de entrada, mas que apresentam a maior diferença entre os seus NMSEs, ou selecionar aqueles modelos que apresentam o mesmo valor ou próximo de seus NMSEs, mas com diferenças significativas nos coeficientes gerados por cada um. Por exemplo, dois modelos A e B podem ser comparados se, para qualquer combinação de fatores de truncamento em que ambos os modelos geram 13 de coeficientes, os NMSEs calculados para cada um forem -35,00 dB e -45,00 dB, respectivamente. Se, através de uma outra combinação de fatores de truncamento correspondente a quantidade de 200 parâmetros, os modelos A e B atingem NMSEs de -49,00 dB e -50,00 dB, porém, como a diferença entre seus NMSEs não é tão significativa quanto no caso anterior, então esses dois modelos não são utilizados para a comparação. Em um cenário onde a diferença entre seus NMSEs não é tão significativa ou mesmo que seus NMSEs são iguais, é importante que exista uma diferença bastante significativa entre a quantidade de parâmetros gerados por ambos.

Na comparação estrutural das abordagens, os modelos  $PV$  da equação (2.55) e  $LPV$  da equação (3.2) têm um truncamento para o polinômio de amplitude  $P_1$  e um truncamento para o polinômio de fase  $P_2$ , enquanto os dois modelos modificados,  $PVmdf$  da equação (2.57) e  $LPVmdf$  da equação (3.4), têm quatro fatores de truncamento independentes entre si para o polinômio de amplitude  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{13}$  e  $P_{14}$  e um fator de truncamento para o polinômio de fase  $P_{24}$ . O modelo  $PV$  possui um truncamento para a memória de amplitude  $M$  e um truncamento para a memória de fase  $L$ , enquanto o modelo  $PVmdf$  possui três truncamentos para a memória de amplitude  $M_2$ ,  $M_3$  e  $M_4$  e dois truncamentos para a memória de fase  $L_3$  e  $L_4$ . O modelo  $LPV$  possui um truncamento para as funções de base de Laguerre  $\varphi_L$  e um truncamento para a memória de fase  $J$ , enquanto  $LPVmdf$  possui três truncamentos para as funções de base de Laguerre  $\varphi_{L_2}$ ,  $\varphi_{L_3}$  e  $\varphi_{L_4}$ , e dois truncamentos para a memória de fase  $J_3$  e  $J_4$ . Se fizermos  $P_{11} = P_{12} = P_{13} = P_{14} = P_1$ ,  $M_2 = M_3 = M_4 = M$ ,  $L_3 = L_4 = L$  e  $P_{24} = P_2$ , após remover todos os núcleos redundantes, os modelos (2.57) e (2.55) são os mesmos. Este mesmo fenômeno acontece com (3.4) e (3.2), se  $P_{11} = P_{12} = P_{13} = P_{14} = P_1$ ,  $\varphi_{L_2} = \varphi_{L_3} = \varphi_{L_4} = \varphi_L$ ,  $J_3 = J_4 = J$  e  $P_{24} = P_2$ . No entanto, espera-se que os valores de alguns dos fatores de truncamento de (2.57) e de (3.4) possam ser reduzidos sem, contudo, comprometer a precisão da modelagem. Para uma questão de validade desta expectativa, várias instâncias dos modelos (2.55) e (3.2) são implementadas, em cenários onde os seus valores de truncamento variam entre o seu valor mínimo e o máximo.

Estruturalmente, os modelos  $PVmdf$  e  $LPVmdf$  são idênticos, todavia o modelo  $LPVmdf$  realiza otimização de uma função objetivo que minimiza o erro de aproximação entre a estimação e os dados de entrada para que os polos resultantes estejam próximos

Tabela 5.1: NMSEs da modelagem direta dos modelos *PV* e *LPV*

	NMSE (dB) para $N_P = 5$	NMSE (dB) para $N_P = 16$	NMSE (dB) para $N_P = 35$	NMSE (dB) para $N_P = 64$
<i>PV</i>	-21,6053	-40,8927	-41,8614	-42,6428
<i>LPV</i>	-22,2568	-41,3015	-42,0093	-42,8250

Tabela 5.2: NMSEs da modelagem inversa dos modelos *PV* e *LPV*

	NMSE (dB) para $N_P = 5$	NMSE (dB) para $N_P = 16$	NMSE (dB) para $N_P = 35$	NMSE (dB) para $N_P = 64$
<i>PV</i>	-21,2878	-30,3193	-35,8151	-37,2479
<i>LPV</i>	-21,8355	-30,5373	-36,1391	-38,0063

dos polos fundamentais. Esse esforço adicional, contudo importante, faz com que o tempo necessário para realizar uma simulação completa do modelo *LPVmdf* da equação (3.4) seja muito grande, quando comparado com o tempo necessário para realizar uma simulação completa do modelo *PVmdf* da equação (2.57). Uma estratégia para reduzir o tempo de simulação de *LPVmdf* passa por analisar o quarto sub-bloco dos dois modelos *PVmdf* e *LPVmdf*, que não deixam de ser idênticos aos modelos *PV* e *LPV*, no seu todo. Assim, as contribuições do quarto sub-bloco dos modelos *PVmdf* e *LPVmdf* podem ser mínimas. A estratégia consiste em introduzir, com pouca ou nenhuma deterioração na precisão da modelagem do quarto sub-bloco, apenas valores mínimos, de truncamento polinomial de fase  $P_{24} = 1$ , de truncamento de memória de fase  $L_4 = J_4 = 0$  e de truncamento de memória de amplitude  $M_4 = \varphi_{L_4} = 0$ .

Outra questão de comparação que pode ser dada atenção entre os modelos *LPV* e *LPVmdf* e que, mais a diante, poderá explicar a diferença entre os *NMSEs* dos modelos *PVmdf* e *LPVmdf*, está relacionado ao número de funções de base que cada um dos modelos *LPV* e *LPVmdf* comporta. Sem considerar o fator de tempo de simulação, uma função de base do modelo *LPV* é equivalente a três funções de base independentes entre si no modelo *LPVmdf*. Por exemplo, se  $\varphi_L = 2$  que corresponde a três funções de base no modelo *LPV*, desse modo,  $\varphi_{L_2} = 2$ ,  $\varphi_{L_3} = 2$  e  $\varphi_{L_4} = 2$  corresponderão a nove funções de base agrupadas de forma independente 3 a 3 no modelo *LPVmdf*. A consequência disso é que o modelo *LPVmdf* terá maior precisão do que os modelos *PVmdf* e *LPV*.

Para obtenção dos resultados das simulações, os valores máximos para os fatores de truncamento dos modelos *PV* da equação (2.55) e *LPV* da equação (3.2) são definidos como  $P_1 = 4$ ,  $P_2 = 1$ ,  $M = \varphi_L = 2$  e  $L = J = 1$ , o que correspondeu a um total de 64 parâmetros quando todos os valores de truncamento dos dois modelos, *PV* e *LPV*, atingem os seus máximos. Para os modelos *PVmdf* da equação (2.57) e *LPVmdf* da equação (3.4), várias instâncias são implementadas também, onde os valores dos 10 fatores

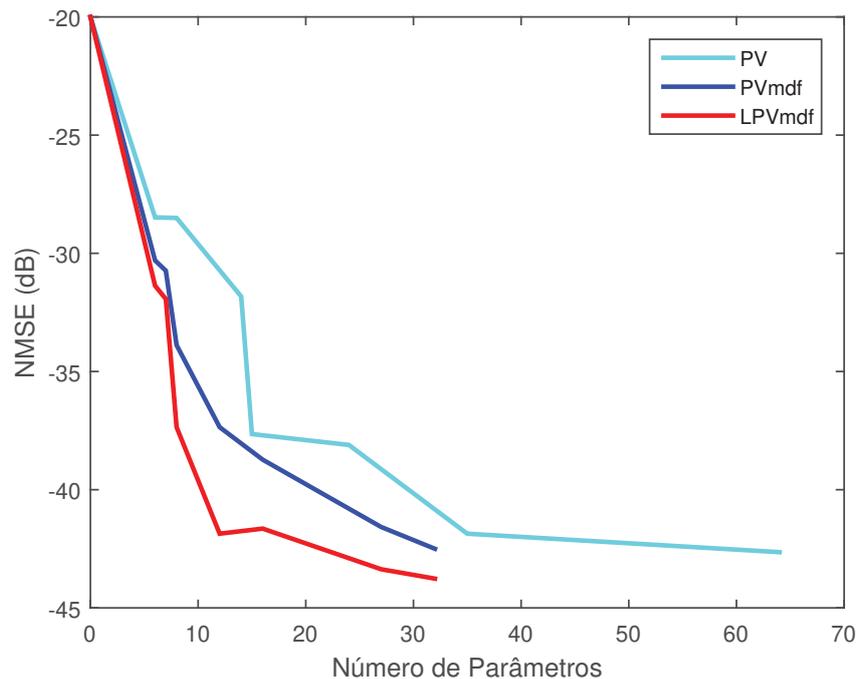


Figura 5.2: Modelagem direta: NMSE em função do Número de Parâmetros

de truncamentos variam entre seus mínimos e máximos, que são, neste caso, iguais aos mínimos e máximos escolhidos em (2.55) e (3.2). Porém, uma segunda condição, que também está relacionada à redução do tempo de simulação, principalmente do modelo  $LPVmdf$  e que não entra em contradição com a condição apresentada na equação (3.8), foi imposta apenas aos valores máximos alcançados pelos fatores de truncamento  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{13}$ ,  $P_{14}$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $\varphi_{L_2}$ ,  $\varphi_{L_3}$ . Se  $P_{11}$  atinge o seu valor máximo  $P_{11_{max}}$ , isto é,  $P_{11} = P_{11_{max}}$ , então  $P_{12_{max}} = P_{11_{max}} - 1$  e  $P_{13_{max}} = P_{12_{max}} - 1$ . Assim, se  $P_{11_{max}} = 4$  então  $P_{12_{max}} = 3$  e  $P_{13_{max}} = 2$ . Para os comprimentos de memória  $M_2$ ,  $M_3$  e as funções de base de Laguerre  $\varphi_{L_2}$ ,  $\varphi_{L_3}$ , se  $M_2 = M_{2_{max}}$  e  $\varphi_{L_2} = \varphi_{L_{2_{max}}}$ , logo  $M_{3_{max}} = M_{2_{max}} - 1$  e  $\varphi_{L_{3_{max}}} = \varphi_{L_{2_{max}}} - 1$ . Resumidamente os máximos são:  $P_{11} = 4$ ,  $P_{12} = 3$ ,  $P_{13} = 2$ ,  $P_{14} = 1$ ,  $M_2 = 2$ ,  $M_3 = 1$ ,  $\varphi_{L_2} = 2$ ,  $\varphi_{L_3} = 1$ ,  $M_4 = \varphi_{L_4} = 0$ ,  $L_3 = J_3 = 1$ ,  $L_4 = J_4 = 0$  e  $P_{24} = 1$ .

Em um primeiro cenário de resultados, a Tabela 5.1 e a Tabela 5.2 mostram os NMSEs relativos à modelagem direta e inversa, respectivamente, dos modelos  $PV$  e  $LPV$ . É notório que estes dois modelos,  $PV$  e  $LPV$ , possuem uma quantidade de coeficientes iguais em qualquer combinação dos fatores de truncamento, como, por exemplo, para  $P_1 = 4$ ,  $P_2 = 1$ ,  $M = \varphi_L = 2$  e  $L = J = 1$ , os dois modelos alcançam 64 coeficientes cada um. Porém, como a diferença entre seus NMSEs não é tão significativa para cada uma das variações de  $P_1$ , então, apenas um dos dois modelos será usado no segundo e no terceiro cenários de resultados, para comparação com os demais modelos.

Em um segundo cenário de modelagem comportamental, os três modelos,  $PV$ ,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ , são aplicados para a representação da característica de transferência

Tabela 5.3: NMSEs da modelagem direta dos modelos  $PV$ ,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ 

$PV$		$PVmdf$		$LPVmdf$	
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
64	-42,6428	32	-42,5012	32	-43,7631
35	-41,8614	27	-41,5777	27	-43,3658
24	-38,1063	16	-38,7297	16	-41,6466
15	-37,6476	12	-37,3557	12	-41,8609
14	-31,8256	8	-33,8864	8	-37,3581
8	-28,5039	7	-30,7361	7	-31,9331
6	-28,4804	6	-30,3020	6	-31,3705

Tabela 5.4: Comparação dos NMSEs da modelagem direta

	$PVmdf$	$LPVmdf$
$N_P$	NMSE (dB)	NMSE (dB)
22	-38,1717	-44,0179
18	-36,9237	-43,4307
14	-36,7035	-42,8470
10	-36,0848	-41,3947
8	-33,8864	-37,3581
5	-27,1124	-31,5850
4	-19,7462	-23,1588

direta de um RF PA, onde os sinais de entrada usados são os sinais de envoltória de valor complexo (em coordenadas polares) aplicados à entrada do RF PA. O sinal de saída utilizado para calcular os coeficientes de cada um dos três modelos é o sinal medido experimentalmente na saída do DUT. Os valores máximos dos truncamentos foram definidos em  $P_{11} = 4$ ,  $P_{12} = 3$ ,  $P_{13} = 2$ ,  $P_{14} = 1$ ,  $M_2 = 2$ ,  $M_3 = 1$ ,  $\varphi_{L_2} = 2$ ,  $\varphi_{L_3} = 1$ ,  $M_4 = \varphi_{L_4} = 0$ ,  $L_3 = J_3 = 1$ ,  $L_4 = J_4 = 0$  e  $P_{24} = 1$ . A Tabela 5.3 e a Figura 5.2 mostram os resultados obtidos do NMSE em função do Número de Parâmetros necessários para uma boa representação da precisão dos três modelos em análise, nomeadamente  $PV$ ,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ . O modelo  $LPVmdf$  atinge uma boa precisão para um número menor de parâmetros, quando comparado com o número de parâmetros gerados nos modelos  $PV$  e  $PVmdf$ . A comparação entre os modelos  $PV$ ,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ , em que estes dois últimos contêm uma quantidade maior de fatores de truncamento, proporcionou uma redução superior a 50% no número de coeficientes gerados, que pode ser vista na linha 1 da Tabela 5.3, onde o modelo  $PV$  alcançou 64 coeficientes e os modelos  $PVmdf$  e  $LPVmdf$  alcançaram 32 coeficientes cada um. Na Tabela A.1 do Apêndice A encontram-se os polos e NMSEs (dB) da modelagem direta do modelo  $LPVmdf$ .

O modelo  $LPVmdf$  contém um máximo de três conjuntos de funções de base de Laguerre independentes, que permitem melhorias na modelagem comportamental de

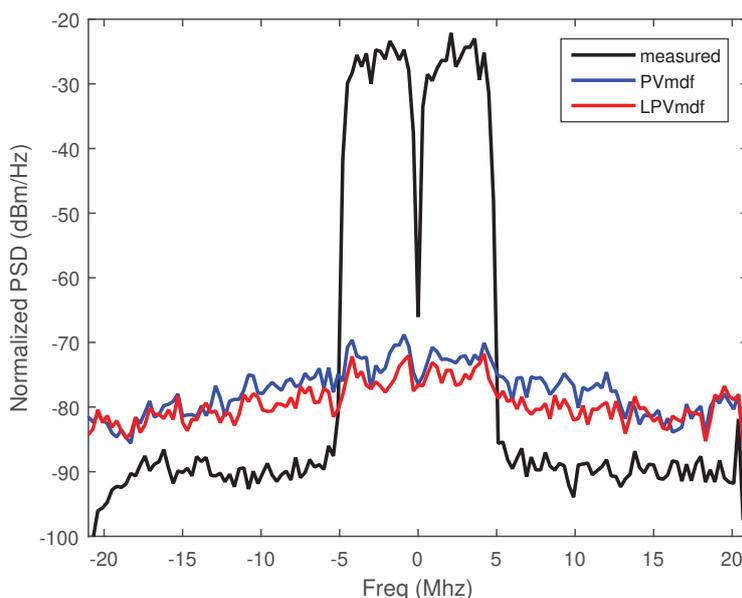


Figura 5.3: PSD do sinal de erro da modelagem direta de  $PVmdf$  e  $LPVmdf$

RF PA representada por um modelo Polar-Volterra de ordem maior. Cada conjunto é livremente atribuído ao respectivo sub-bloco e a quantidade de elementos do conjunto depende do comprimento de memória atribuída às não linearidades do sub-bloco em causa. Conforme o número de funções de base incluídas em cada sub-bloco aumenta de forma independente, cada sub-bloco fornece sua contribuição na melhoria da precisão do modelo. Então, agrupando todas as contribuições de cada sub-bloco, uma resposta completa em termos de NMSE do modelo  $LPVmdf$  é obtida e pode ser constatada na Tabela 5.3. Analisando as acurácias dos modelos  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ , é notória a diferença entre os seus NMSEs. Nos casos onde o número de funções de base em cada sub-bloco do modelo  $LPVmdf$  atinge ou quase atinge o seu máximo, a diferença entre o NMSE do modelo  $LPVmdf$  com o modelo  $PVmdf$  é significativa. Olhando ainda para a parte sombreada da Tabela 5.3, onde os três modelos,  $PV$ ,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ , têm 8 parâmetros cada, é notório que a diferença entre o maior NMSE, o do modelo  $PV$ , e o menor NMSE, o do modelo  $LPVmdf$ , é de 8,85 dB. A Tabela 5.4 ilustra, com mais detalhes, essa diferença entre os NMSEs dos dois modelos,  $LPVmdf$  e  $PVmdf$ , onde a maior diferença alcançada foi de até 6,51 dB com 18 parâmetros, o que valida que o modelo  $LPVmdf$  apresenta melhor NMSE que o modelo  $PVmdf$  devido ao número de conjuntos de funções de base ortogonal de Laguerre incrementadas de forma independente.

Os modelos  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ , contendo 32 coeficientes, foram utilizados para construir a densidade espectral de potência (PSD) da característica direta. A Figura 5.3 apresenta os espectros no domínio da frequência do sinal de saída medido do RF PA e dos dois sinais de erro entre saída medida e saída obtida dos dois modelos  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ . Da literatura se sabe que grandes melhorias no NMSE e ACEPR para os

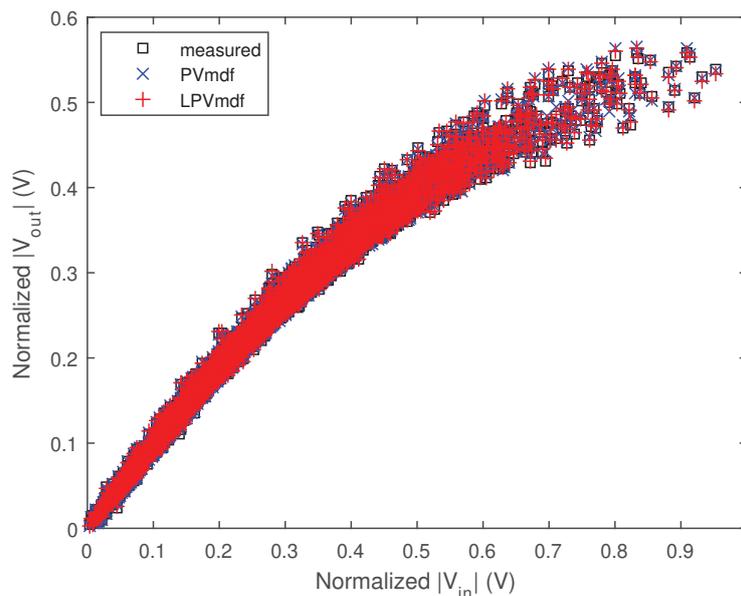


Figura 5.4: Conversão AM-AM para modelagem direta de *LPVmdf*

canais adjacentes ocorrem quando os modelos de Volterra expandidos por funções de base ortogonal são utilizados (SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016). Nesse contexto, fazendo uma análise da Figura 5.3, constatou-se que a PSD do sinal de erro de *LPVmdf* é claramente menor do que a PSD do sinal de erro de *PVmdf*, principalmente no canal principal situado entre as faixas de frequência de -5 à 5 MHz, e nos canais adjacentes localizados nas faixas de frequências laterais de -15 à -5 MHz e de 5 à 15 MHz, sendo a máxima diferença alcançada de 5,80 dB. É perceptível que o aumento do número de funções de base com um único polo de valor real para cada ordem de não linearidade melhora significativamente a precisão em termos de NMSE, como visto na Tabela 5.3 e na Tabela 5.4, contudo, não havendo melhorias significativas no ACEPR. Aqui, grandes melhorias de ACEPR podem ser alcançadas se, de fato, forem considerados dois ou mais polos (reais ou complexos) diferentes para cada ordem de não linearidade. A PSD do sinal de saída medido e normalizado também foi incluído na Figura 5.3 para destacar a largura de banda e a frequência central do canal principal, e para ilustrar como os níveis de potência do sinal de erro são tão pequenos em comparação com os níveis de potência de saída.

Observando a Figura 5.4 e a Figura 5.5, uma análise mais profunda pode ser feita a partir das conversões AM-AM e AM-PM dos valores medidos no DUT e calculados no modelo *LPVmdf*. Note que, em ambas as imagens, embora os valores medidos no DUT tenham muito efeito de memória, não há diferenças perceptíveis entre os modelos *LPVmdf* e *PVmdf* e os dados medidos, validando a precisão do modelo *LPVmdf*.

O objetivo do terceiro cenário de modelagem é representar a característica de transferência inversa de um RF PA, portanto a DPD, através da aplicação dos três mo-

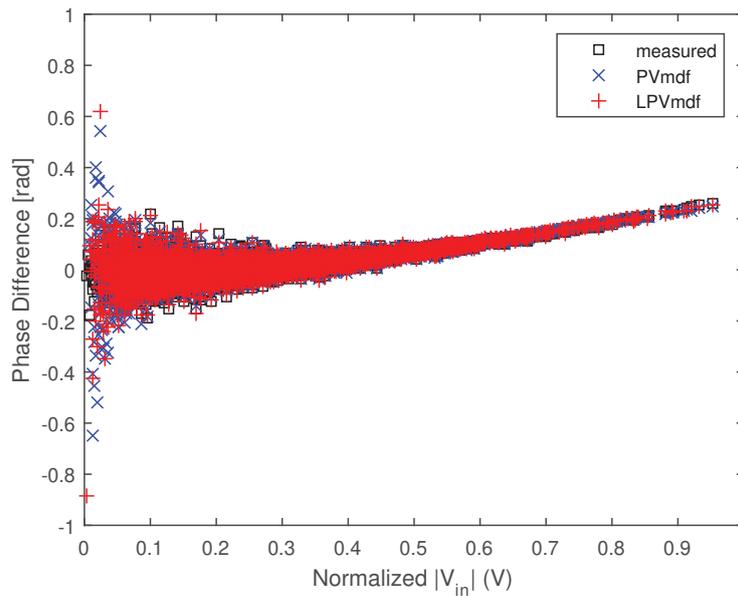


Figura 5.5: Conversão AM-PM para modelagem direta de  $LPVmdf$

Tabela 5.5: NMSEs da modelagem inversa dos modelos  $PV$ ,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$

	$PV$		$PVmdf$		$LPVmdf$
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
64	-37,2479	32	-35,9983	32	-36,8368
35	-35,8151	31	-35,5758	31	-36,7328
24	-34,3644	16	-34,1226	16	-36,0765
19	-31,5398	11	-31,9957	11	-33,7130
16	-30,3193	9	-29,5955	9	-30,0344
9	-28,6871	8	-28,7245	8	-29,4397
8	-26,2691	7	-25,9556	7	-27,0891

delos,  $PV$ ,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ . O sinal de entrada utilizado nos modelos simulados é o mesmo sinal envoltória de valor complexo, em coordenadas polares, medido na saída do RF PA. Na verdade, tanto o sinal de entrada, assim como o de saída, são os mesmos utilizados no primeiro e no segundo cenários de modelagem comportamental. A Tabela 5.5 e a Figura 5.6 mostram os resultados obtidos do NMSE, em (dB) em função do Número de Parâmetros ( $N_P$ ) extraídos da modelagem da DPD nos modelos  $PV$ ,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ . A comparação entre os modelos  $PV$ ,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ , em que estes dois últimos contêm uma quantidade maior de fatores de truncamento, proporcionou também uma redução superior a 50% no número de coeficientes gerados, que pode ser vista na linha 1 da Tabela 5.5, onde o modelo  $PV$  alcançou 64 coeficientes e os modelos  $PVmdf$  e  $LPVmdf$  alcançaram 32 coeficientes cada um. Na parte sombreada da Tabela 5.5, onde os três modelos,  $PV$ ,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ , têm 16 parâmetros cada, é notório que a diferença entre o maior NMSE, o do modelo  $PV$ , e o menor NMSE, o do modelo  $LPVmdf$ ,

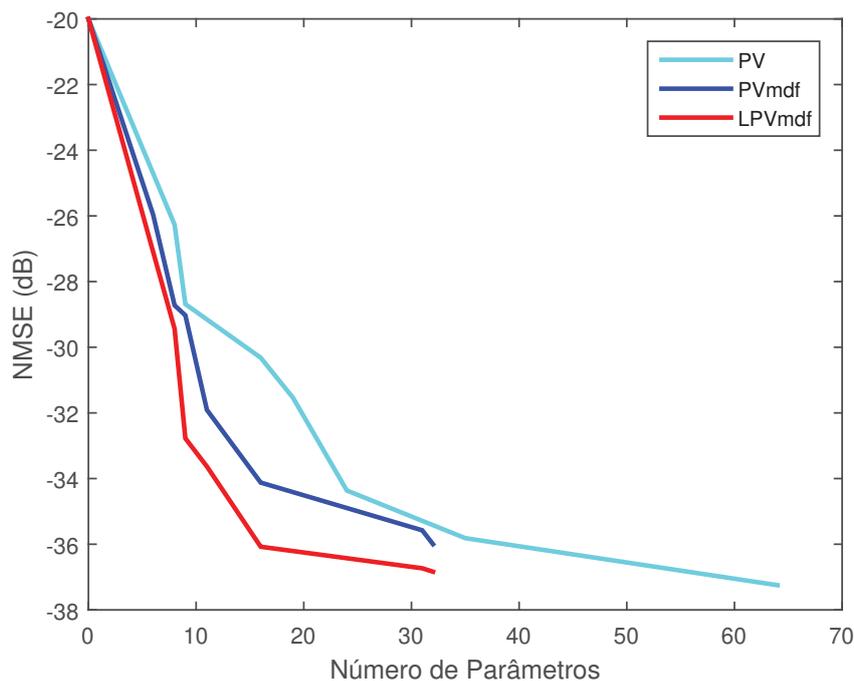


Figura 5.6: Modelagem inversa: NMSE em função do Número de Parâmetros

Tabela 5.6: Comparação dos NMSEs da modelagem inversa

$N_P$	$PVmdf$ NMSE (dB)	$LPVmdf$ NMSE (dB)
22	-34,7442	-37,0097
18	-34,2293	-36,8545
14	-32,4987	-36,3811
10	-29,3092	-33,0368
8	-27,3342	-30,4988
5	-24,3936	-27,7190
4	-19,8482	-22,3826

é de 5,76 dB. Na Tabela A.2 do Apêndice A encontram-se os polos e  $NMSEs$  (dB) da modelagem inversa do modelo  $LPVmdf$ .

Enfatizando a análise realizada na Tabela 5.4 relativa à comparação dos  $NMSEs$  da modelagem direta dos modelos  $LPVmdf$  e  $PVmdf$ , a Tabela 5.6 ilustra a diferença entre os  $NMSEs$  da modelagem inversa dos modelos  $LPVmdf$  e  $PVmdf$  onde a maior diferença alcançada foi de até 3,88 dB com 14 parâmetros. O modelo  $LPVmdf$  continua tendo a melhor precisão devido à existência de vários conjuntos de funções de base de Laguerre, incrementadas independentemente. Os mesmos modelos,  $PVmdf$  e  $LPVmdf$ , foram utilizados, desta vez, para construir a PSD da característica inversa. Fazendo uma análise na Figura 5.7, novamente, o modelo  $LPVmdf$  mostra uma precisão maior, principalmente no canal adjacente correspondentes às faixas de frequências laterais de -15

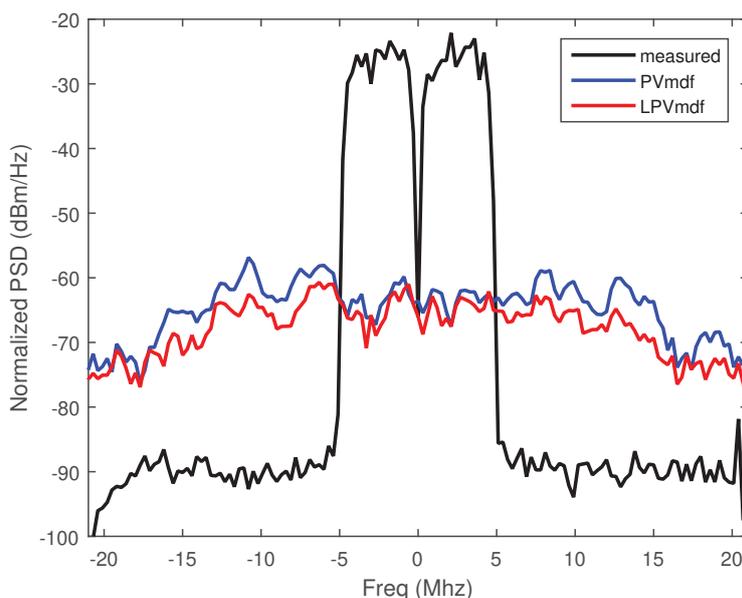


Figura 5.7: PSD do sinal de erro da modelagem inversa de  $PVmdf$  e  $LPVmdf$

à -5 MHz e de 5 à 15 MHz, do que o modelo  $PVmdf$ , ambos sob o mesmo número de parâmetros, isto é, 32 coeficientes. Portanto, a PSD do sinal de erro de  $LPVmdf$  é menor que a PSD do sinal de erro de  $PVmdf$ , sendo a máxima diferença na ordem de 7,29 dB.

Assim como no segundo cenário, o modelo  $LPVmdf$  alcança melhor precisão com menos parâmetros do que os modelos  $PVmdf$  e  $PV$ . Uma análise mais detalhada pode ser feita a partir das conversões de AM-AM e AM-PM dos valores medidos no DUT e calculados para o mesmo modelo  $LPVmdf$ . Tanto no cenário anterior, assim como na modelagem comportamental da característica de transferência inversa de um PA RF, é notório na Figura 5.8 e na Figura 5.9 que não há diferenças perceptíveis entre o modelo  $PVmdf$  e o modelo  $LPVmdf$  e os dados medidos, validando a acurácia AM-AM e AM-PM do modelo  $LPVmdf$ . Vale a pena mencionar aqui que o modelo  $LPVmdf$ , incluindo o modelo  $PVmdf$ , não consegue imitar exatamente a conversão de AM-AM medido quando o sinal é grande. Em particular, quando o sinal é grande apenas para as amostras ao redor do contorno inferior do AM-AM medido, não há diferenças perceptíveis entre os dados medidos e estimados no modelo  $LPVmdf$ . As amostras ao redor do contorno superior do AM-AM medido, quando o sinal é grande, não são perfeitamente estimadas, provavelmente devido a limitações teóricas da modelagem inversa, relacionadas à representação de um sistema inverso com um modelo que formula a amostra de saída como uma função explícita de amostras de entrada de instantes atuais e passados.

Para destacar a vantagem do modelo  $LPVmdf$  apresentado nesta tese, são exibidas comparações detalhadas com outros modelos de expansão de Laguerre-Volterra, recentemente publicados por (SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016) e (WANG; NGUYEN; SCHUTT-AINÉ, 2020). Para o efeito, o mesmo sinal medido e utilizado no modelo  $LPVmdf$ ,

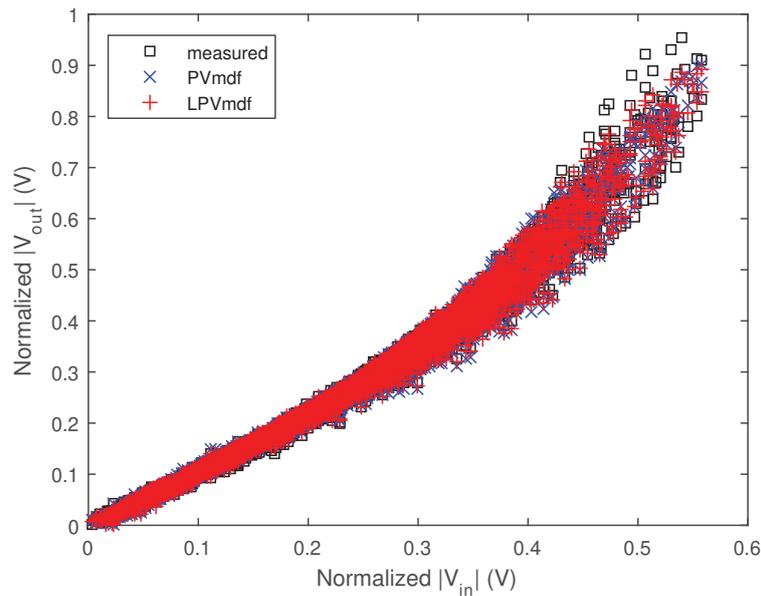


Figura 5.8: Conversão AM-AM para modelagem inversa com 32 coeficientes

Tabela 5.7: Comparação dos modelos Laguerre-Volterra de (SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016) e *LPVmdf*

(SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016)		<i>LPVmdf</i>	
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
70	-44,2447	22	-44,0179
40	-42,9728	17	-43,0970
20	-39,6637	11	-39,8814
8	-32,5961	8	-37,8053

também foi aplicado no modelo expandido de Laguerre-Volterra apresentado por (SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016). A comparação dos resultados de desempenho está ilustrada na Tabela 5.7. Nos casos onde os NMSEs são quase iguais, o modelo *LPVmdf* aqui proposto apresenta uma melhora bastante significativa em termos de redução do número de coeficientes, atingindo uma redução até 68,57%, que pode ser vista na linha sombreada. Para o único cenário onde os dois modelos, de (SCHUMACHER; LIMA; OLIVEIRA, 2016) e *LPVmdf*, possuem o mesmo número de parâmetros, neste caso 8 coeficientes que podem ser vistos na linha 4 da Tabela 5.7, a diferença entre seus NMSEs é significativa, igual a 5,21 dB, onde o melhor desempenho é apresentado pelo modelo *LPVmdf* proposto nesta tese.

Com relação a (WANG; NGUYEN; SCHUTT-AINÉ, 2020), a comparação é realizada considerando o número de funções de base de Laguerre ( $\varphi_L$ ) e o número de parâmetros gerados. Os resultados apresentados na Tabela 5.8 estão relacionados a 2 e 3 funções de base de Laguerre e o truncamento polinomial variando da primeira à quarta ordens. Ob-

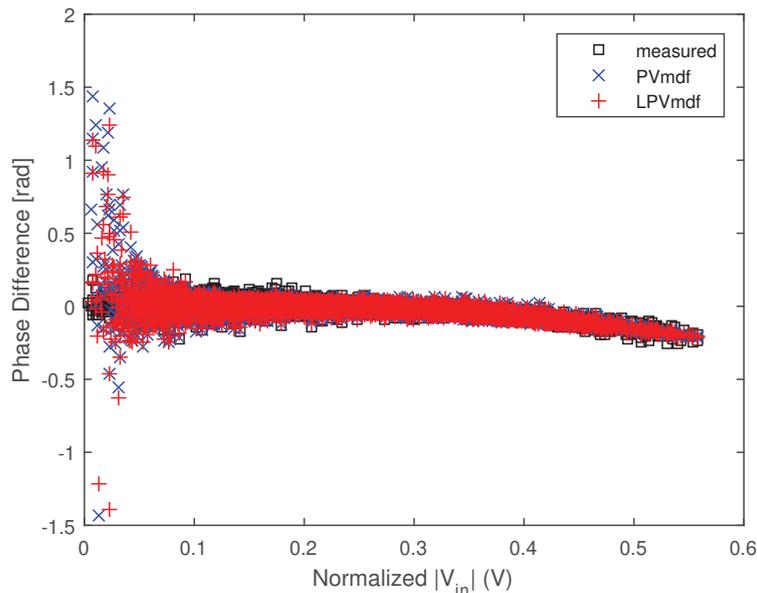


Figura 5.9: Conversão AM-PM para modelagem inversa com 32 coeficientes

Tabela 5.8: Comparação dos modelos Laguerre-Volterra de (WANG; NGUYEN; SCHUTT-AINÉ, 2020) e *LPVmdf*

(WANG; NGUYEN; SCHUTT-AINÉ, 2020)			<i>LPVmdf</i>							
$\varphi_L$	Ordens	$N_P$	$\varphi_{L_1}$	$\varphi_{L_2}$	$\varphi_{L_3}$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	$P_{14}$	$N_P$
2	1 <sup>st</sup>	2				1	1	1	1	7
	2 <sup>nd</sup>	6				2	1	1	1	8
	3 <sup>rd</sup>	14	1	1	0	3	2	1	1	12
	4 <sup>th</sup>	30				4	3	2	1	22
3	1 <sup>st</sup>	3				1	1	1	1	8
	2 <sup>nd</sup>	12				2	1	1	1	9
	3 <sup>rd</sup>	39	2	1	0	3	2	1	1	16
	4 <sup>th</sup>	120				4	3	2	1	32

serve que no modelo *LPVmdf*, quando a ordem de truncamento polinomial é aumentada o número de coeficientes aumenta mais lentamente do que no modelo de expansão de Laguerre-Volterra apresentado por (WANG; NGUYEN; SCHUTT-AINÉ, 2020). Para ordens polinomiais maiores, como as ilustradas nas linhas 4 e 8 da Tabela 5.8, onde o modelo de (WANG; NGUYEN; SCHUTT-AINÉ, 2020) possui, respectivamente, 30 e 120 parâmetros gerados, o modelo *LPVmdf* proposto nesta tese apresenta, em ambos os casos, um número menor de parâmetros gerados, portanto 22 e 32, respectivamente, correspondendo a uma redução de até 73,33%, correspondente a última linha sombreada da Tabela 5.8. Fazendo uma análise ao quarto sub-bloco, sem restrições algumas, quando todos os 10 fatores de truncamento do modelo atingem seus máximos, o modelo *LPVmdf* alcança cerca de 204 parâmetros, enquanto o modelo expandido de Laguerre-Volterra apresentado (WANG;

NGUYEN; SCHUTT-AINÉ, 2020) atinge 340 parâmetros.

## 5.2 Validação Experimental do Modelo 2D-frPV

Três diferentes dispositivos em teste (DUTs) são investigados. Em cada um dos DUTs, um conjunto de entrada e saída de amostras de estimação e validação foram usadas para identificação e validação do modelo  $2D - frPV$  proposto e dos modelos anteriores  $PV$  e  $2D - PV$ . Seus resultados da modelagem da característica de transferência de RF PA e da DPD foram analisados. Como os sinais de envoltória dos três DUTs têm a mesma largura de banda de 3,84 MHz, o conjunto de funções geradoras ortogonais fracionárias no domínio do tempo discreto, definido na equação (4.28b), foi condicionado em  $n = 1$  e  $T = 0,26$ , lembrando que  $T$  é o período de amostragem.

Para os modelos  $PV$  e  $2D - PV$ , a identificação foi realizada pelo método dos LS (MATHEWS; SICURANZA, 2000). No caso do modelo  $2D - frPV$ , a identificação foi realizada pelo método LS e por um algoritmo de otimização não linear com restrição denominado fmincon, utilizado para otimizar e encontrar o mínimo local da função objetivo  $OF$  da equação (4.34), dentro de uma otimização não linear com uma restrição no valor  $\alpha$ . Essas duas etapas foram realizadas no software MATLAB (GUIDE, 1995), utilizando aritmética de vírgula flutuante de dupla precisão.

Visando avaliar o desempenho do modelo  $2D - frPV$ , a métrica do  $NMSE$ , relatado em (MUHA *et al.*, 1999; GHANNOUCHI; HAMMI; HELAOUI, 2015) e expresso em decibéis, é a métrica usada para a avaliação de desempenho de modelo comportamental baseado na série de Volterra polar fracionária bidimensional, e é definido conforme a equação (5.1). Aqui, os resultados são relatados em termos  $NMSE$ , em  $[dB]$ , dos dados de validação, calculado usando a métrica da equação (5.1).

Os modelos  $PV$ ,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  são cuidadosamente comparados sob a mesma complexidade computacional. Duas análises diferentes são realizadas nos três modelos,  $PV$ ,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ . A primeira está relacionada a  $NMSE$  e ao número de parâmetros gerados. O primeiro cenário é realizado nos modelos  $PV$  e  $2D - PV$ . Foi estabelecida uma relação entre seus  $NMSEs$  e o número de coeficientes gerados nos modelos em estudo. Para comparação dos resultados, o critério seguido é selecionar aqueles modelos que possuem os mesmos  $NMSEs$  ou que tenham as menores diferenças entre seus  $NMSEs$ , mas que apresentem maior diferença entre seus parâmetros gerados. O segundo cenário é realizado nos modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ , mesmo que o número de parâmetros gerados seja o mesmo nos dois modelos, é importante que haja uma diferença muito significativa entre seus  $NMSEs$ . A segunda análise é realizada apenas para os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  onde, com os valores medidos na saída dos três DUTs, são calculadas e comparadas as curvas das conversões de modulação instantânea AM-AM e de modulação AM-PM.

Para satisfazer as condições de estabilidade,  $|\arg(\beta)| > \alpha \frac{\pi}{2}$  (MATIGNON, 1996), no modelo  $2D - frPV$ , a magnitude  $\beta$  foi definida como  $\beta = 1$  e a ordem fracionária  $\alpha$  foi considerada dentro do intervalo  $0 < \alpha < 1$ . O intervalo  $1 < \alpha < 2$  não foi considerado porque o modelo  $2D - frPV$  não foi eficaz o suficiente para a ordem fracionária localizada no intervalo analisado, portanto, seus resultados não são aqui apresentados, pois, precisam de um estudo mais aprofundado.

Relativamente aos fatores de truncamento polinomial e de memória para os três modelos,  $PV$ ,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ , cada um tem quatro fatores de truncamento livremente selecionados.  $P_1$  é o fator de truncamento para a ordem polinomial de amplitude dos três modelos.  $P_2$  é a ordem de truncamento do polinômio de fase do modelo  $PV$ , enquanto nos modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ , o truncamento do polinômio de fase é  $P_3$ .  $M$  e  $L$  são, respectivamente, o truncamento para as memórias de amplitude e fase nos modelos  $PV$  e  $2D - PV$ , enquanto no modelo  $2D - frPV$ , são  $K$  e  $\Upsilon$ , respectivamente. Para obter os resultados da simulação da modelagem direta e inversa, os valores máximos dos fatores de truncamento nas equações (2.55), (2.56) e (4.29) foram definidos como  $P_1 = 5$ ,  $P_2 = P_3 = 3$ ,  $M = K = 2$  e  $L = \Upsilon = 1$ . Para esses três modelos, várias instâncias foram implementadas, onde os valores dos quatro truncamentos variam entre seus mínimos e máximos. Quando todos os valores de truncamento atingem seu máximo,  $P_1 = 5$ ,  $P_2 = P_3 = 3$ ,  $M = K = 2$  e  $L = \Upsilon = 1$ , cada modelo gera um total de 204 parâmetros.

### 5.2.1 Amplificador de Potência GaN HEMT classe AB

O primeiro DUT analisado ( $DUT_1$ ) é um RF PA GaN HEMT classe AB, excitado por um sinal de portadora a 900 MHz modulado por um sinal de envoltória 3GPP WCDMA com uma largura de banda de 3,84 MHz. Os dados de entrada e saída são obtidos usando VSA FSQ da Rohde & Schwartz. A frequência de amostragem do VSA é 30,72 MHz. As medições de saída e entrada são normalizadas primeiro. O conjunto de 3.320 amostras de estimativa e 2.100 amostras de validação medidas experimentalmente foi utilizado para a modelagem de identificação e validação dos três modelos, denominados  $PV$ ,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ .

A Tabela 5.9, Tabela 5.10 e Figura 5.10 mostram, em síntese, os resultados obtidos do  $NMSE$  em função do Número de Parâmetros relativos à modelagem direta e inversa, onde os sinais de entrada e saída usados nos modelos  $PV$ ,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  são os sinais de envoltória de valor complexo, em coordenadas polares, medidos experimentalmente na saída do  $DUT_1$ . Em ambas as modelagens, os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  alcançam boa precisão para um número muito menor de parâmetros do que o número de parâmetros no modelo  $PV$ . Na modelagem direta, os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  proporcionaram uma redução do número de coeficientes gerados acima de

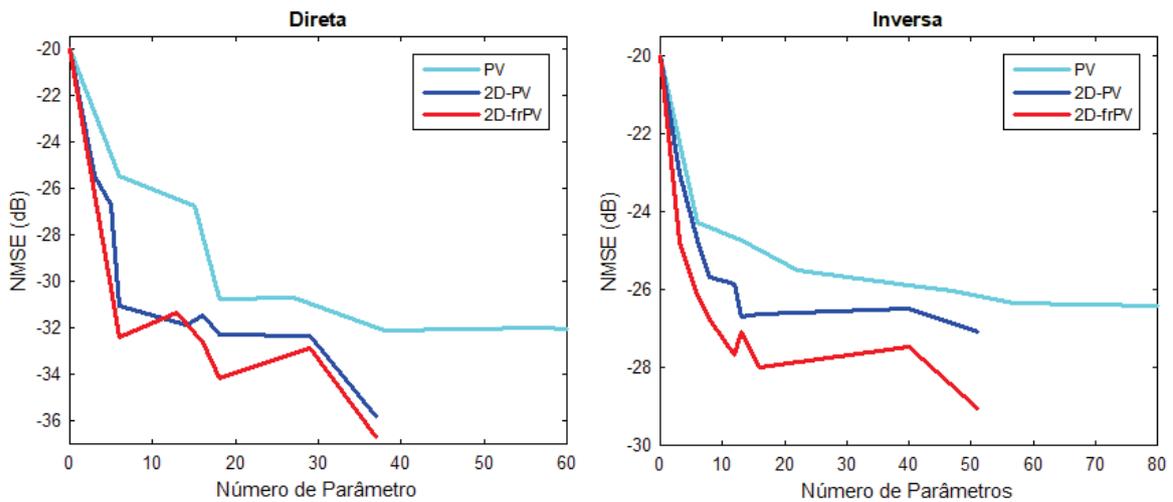


Figura 5.10: NMSE/Número de Parâmetros das modelagens direta (RF PA) e inversa (DPD) usando  $DUT_1$

Tabela 5.9: NMSE/Número de Parâmetros da modelagem direta usando  $DUT_1$

	<i>PV</i>		<i>2D – PV</i>		<i>2D – frPV</i>
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
81	-35,3056	37	-36,0230	37	-36,6973
68	-32,2628	29	-32,3571	29	-32,8751
57	-32,0175	18	-32,3044	18	-34,1708
38	-32,1484	16	-31,4484	16	-32,6610
27	-30,7099	14	-31,8747	14	-31,3428
18	-30,7949	6	-31,0861	6	-32,4202
15	-26,7952	5	-26,7337	5	-30,3064
6	-25,4884	3	-25,4938	3	-26,2464

Tabela 5.10: NMSE/Número de Parâmetros da modelagem inversa usando  $DUT_1$

	<i>PV</i>		<i>2D – PV</i>		<i>2D – frPV</i>
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
105	-28,2246	51	-27,0813	51	-29,0629
81	-26,4094	40	-26,4846	40	-27,4824
57	-26,3472	16	-26,6402	16	-28,0060
47	-26,0324	13	-26,6880	13	-27,0794
40	-25,9043	12	-25,8456	12	-27,6928
22	-25,5149	8	-25,6849	8	-26,7693
13	-24,7240	6	-24,7372	6	-26,1203
6	-24,2810	3	-23,0199	3	-24,7596

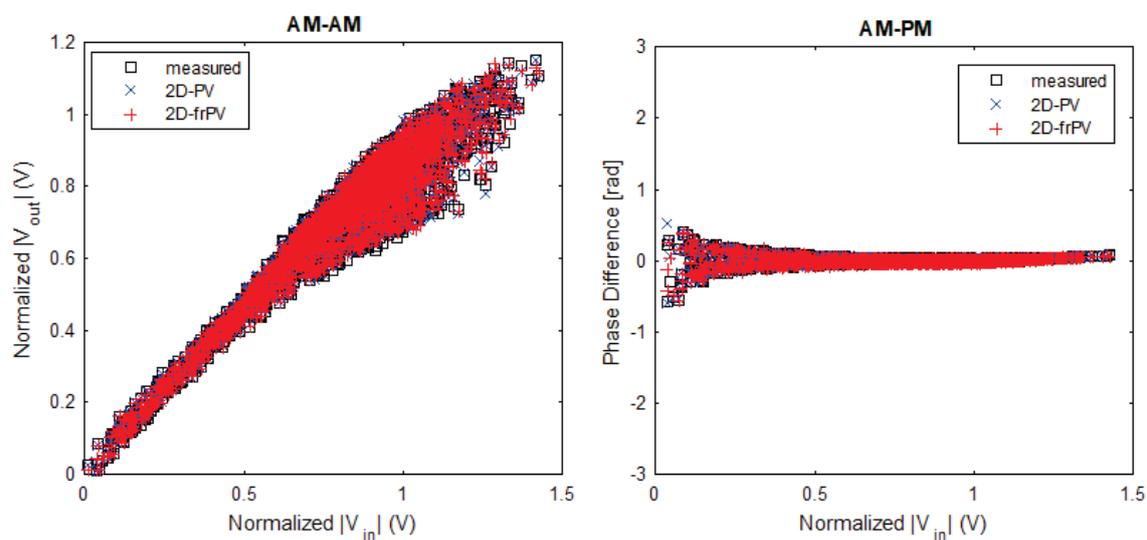


Figura 5.11: Conversões AM-AM e AM-PM da modelagem direta usando  $DUT_1$

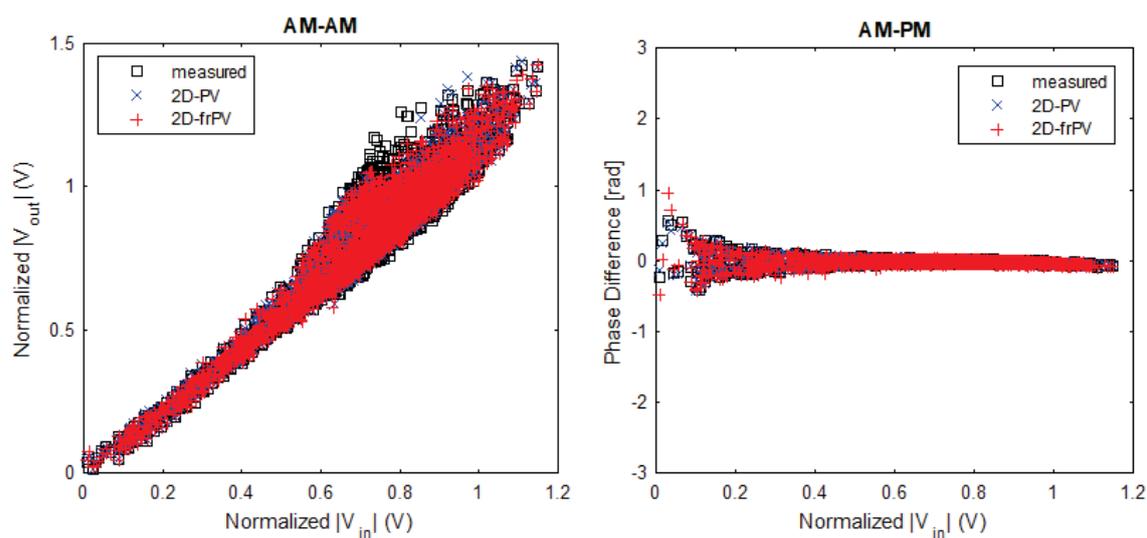


Figura 5.12: Conversões AM-AM e AM-PM da modelagem inversa usando  $DUT_1$

Tabela 5.11: Comparação dos NMSEs da modelagem direta de  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  usando  $DUT_1$ 

$2D - PV$		$2D - frPV$	
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
88	-28,1892	88	-32,2711
82	-28,7270	82	-36,2252
56	-28,2238	56	-32,1296
42	-28,3730	42	-32,5463
22	-27,7963	22	-32,5875
12	-28,2407	12	-33,3378
11	-27,3421	11	-32,7024
7	-24,3186	7	-30,9867

Tabela 5.12: Comparação dos NMSEs da modelagem inversa de  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  usando  $DUT_1$ 

$2D - PV$		$2D - frPV$	
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
82	-26,6752	82	-28,7180
60	-26,5875	60	-30,1541
51	-27,0813	51	-29,0629
42	-26,3068	42	-27,5956
22	-25,6696	22	-28,2032
11	-25,2397	11	-27,4485
7	-23,0662	7	-26,9746
5	-23,0627	5	-26,9818

68,4%, correspondendo à terceira linha da Tabela 5.9, onde o modelo  $PV$  gerou 57 coeficientes e os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  geraram 18 coeficientes. Na modelagem inversa, a redução do número de coeficientes gerados foi de cerca de 72,3%, correspondendo à quarta linha da Tabela 5.10, onde o modelo  $PV$  gerou 47 coeficientes enquanto os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  geraram apenas 13 coeficientes. Ainda na Tabela 5.9 e Tabela 5.10, dando mais atenção à parte destacada que possui o mesmo número de parâmetros gerados, uma análise mais aprofundada pode ser realizada a partir dos valores de  $NMSE$  para os três modelos contendo 6 parâmetros (Tabela 5.9) e contendo 13 parâmetros (Tabela 5.10). A partir da análise é possível observar ainda melhor que os valores de  $NMSE$ s agregados pelos dois modelos,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ , são melhores que  $NMSE$  de  $PV$ . As diferenças são da ordem de 2,36 dB na Tabela 5.10 e 6,93 dB na Tabela 5.9. Na Tabela B.1 e na Tabela B.2, âmbas do Apêndice B, encontram-se as frações e os NMSEs (dB) das modelagens direta e inversa do modelo  $2D - frPV$ .

Para entender melhor o valor adicionado pelo modelo  $2D - frPV$  proposto, a Figura 5.11 e a Figura 5.12 apresentam as características dinâmicas AM-AM e AM-PM

Tabela 5.13: NMSE/Número de Parâmetros da modelagem direta usando  $DUT_2$ 

$PV$		$2D - PV$		$2D - frPV$	
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
104	-41,7261	51	-40,6575	51	-41,8919
46	-40,7813	19	-38,2112	19	-40,8475
38	-37,0983	16	-36,6556	16	-39,2720
22	-37,0866	13	-37,9018	13	-39,0316
20	-28,3736	8	-28,4588	8	-31,4394
12	-27,0852	6	-28,4355	6	-31,0661
10	-28,4525	4	-29,5846	4	-30,2151
4	-20,4667	2	-20,4703	2	-21,8970

das modelagens direta e inversa, ambas com 60 coeficientes gerados a partir dos dados experimentais medidos no DUT1 e calculadas pelos modelos  $2D - PV$  e  $D - frPV$ . Note que, em ambas as figuras, não há diferenças perceptíveis entre os dados estimados nos modelos, o que significa que as não linearidades dinâmicas no RF PA e no DPD são muito bem estimadas. No entanto, as duas figuras mostram um maior espalhamento em pontos correspondentes a amplitudes elevadas, o que significa que possuem muita memória de amplitude. Por outro lado, eles têm muito pouca distorção de fase.

Embora a simulação do modelo  $2D - frPV$  dure mais tempo quando comparado com os restantes dois modelos, a otimização do parâmetro  $\alpha$  dentro do intervalo  $0 < \alpha < 1$  leva facilmente à função mínima e conseqüentemente, à melhor precisão. Comparando a diferença de  $NMSE$  entre os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ , a Tabela 5.11 e a Tabela 5.12 ilustram em detalhes essas diferenças de  $NMSE$  dos dois modelos,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  para a mesma quantidade de parâmetros gerados. Nas linhas destacadas da Tabela 5.11 e da Tabela 5.12, as maiores diferenças alcançadas para  $DUT_1$  foram, respectivamente, 7,50 dB com 82 parâmetros gerados (Tabela 5.11) e 3,90 dB com 7 parâmetros (Tabela 5.12). Isso valida que o modelo de Volterra Polar fracionário bidimensional proposto,  $2D - frPV$ , tem um desempenho  $NMSE$  melhor do que a abordagem  $2D - PV$ .

### 5.2.2 Amplificador de Potência GaN HEMT classe AB

O segundo DUT analisado é um GaN HEMT classe AB RF PA, excitado por uma onda portadora de 900 MHz modulada através de um sinal de envoltória 3GPP WCDMA de duas portadoras, cada uma com largura de banda de 3,84 MHz e com deslocamento de 5 MHz. Para obter os resultados apresentados neste etapa, os dados de entrada e saída foram medidos em um VSA Rohde & Schwarz FSQ, com frequência de amostragem de 61,44 MHz. O conjunto de 4.500 amostras de estimativa e outras 4.500 amostras de validação, medidas experimentalmente, foi utilizado para a modelagem de identificação e validação dos três modelos, denominados  $PV$ ,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ .

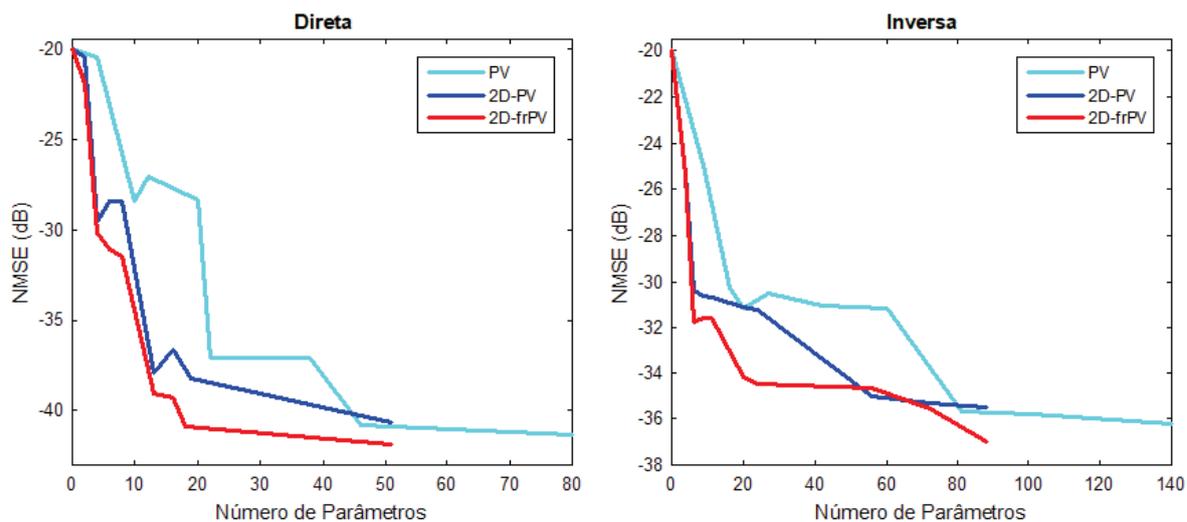


Figura 5.13: NMSE/Número de Parâmetros das modelagens direta (RF PA) e inversa (DPD) usando  $DUT_2$

Tabela 5.14: NMSE/Número de Parâmetros da modelagem inversa usando  $DUT_2$

	<i>PV</i>	<i>N</i>	<i>2D - PV</i>	<i>2D - frPV</i>	
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
184	-36,7673	88	-35,4698	88	-35,9606
101	-35,7722	72	-35,3318	72	-35,5465
81	-35,6813	56	-35,0454	56	-34,6491
60	-31,1623	24	-31,2374	24	-34,4862
42	-31,0295	20	-31,0780	20	-34,1940
27	-30,5059	11	-30,6958	11	-31,5773
20	-31,1799	9	-30,6370	9	-31,5444
16	-30,2709	6	-30,3772	6	-31,7745
9	-24,9689	4	-25,3483	4	-25,3573

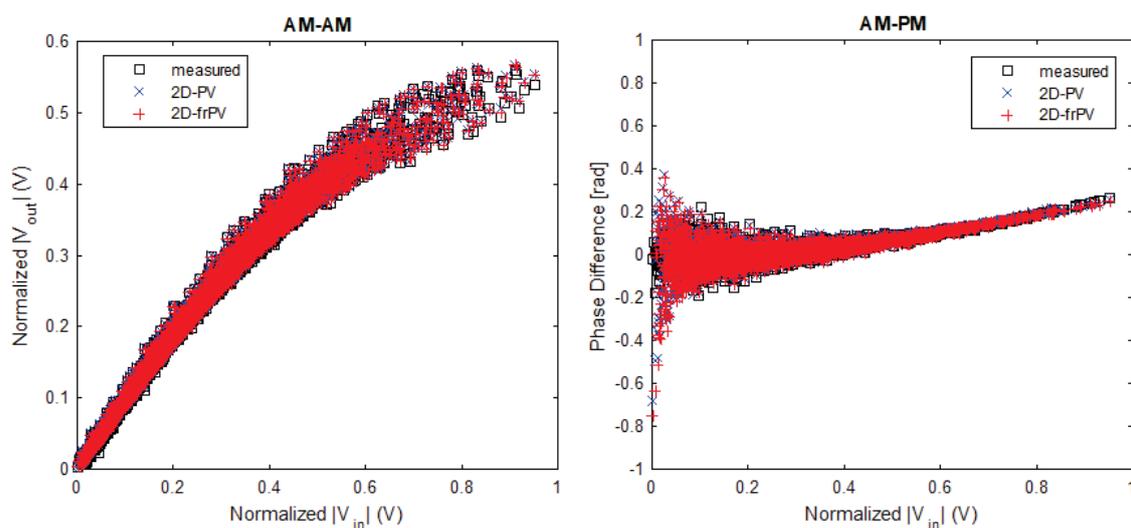


Figura 5.14: Conversão AM-AM e AM-PM da modelagem direta usando  $DUT_2$

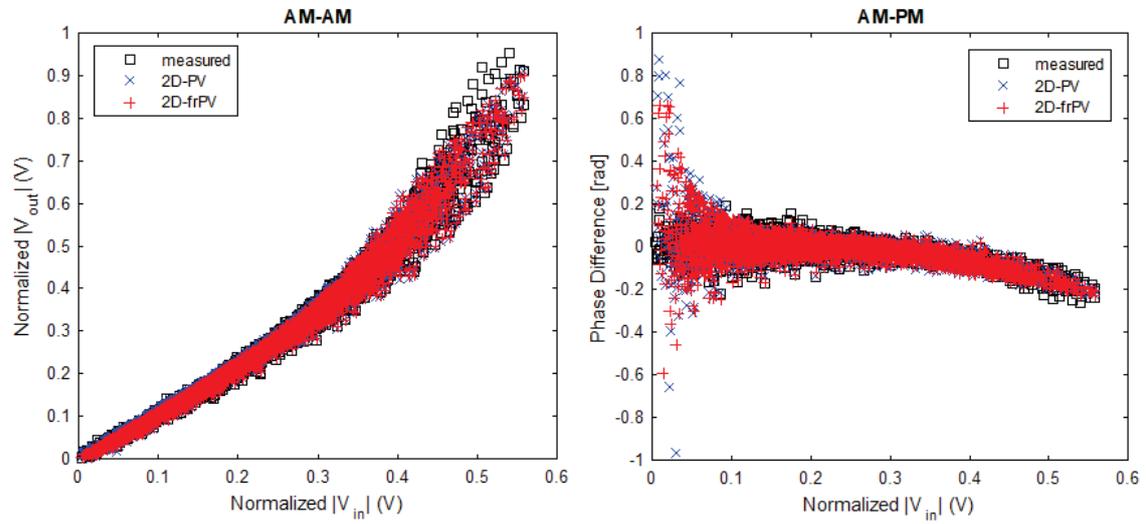


Figura 5.15: Conversão AM-AM e AM-PM da modelagem inversa usando  $DUT_2$

Tabela 5.15: Comparação dos NMSEs da modelagem direta de  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  usando  $DUT_2$

	$2D - PV$		$2D - frPV$
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
42	-37,1712	42	-38,4371
21	-37,1887	21	-39,7994
19	-38,2112	19	-40,8475
16	-36,6556	16	-39,2720
13	-37,9018	13	-39,0316
12	-35,5933	12	-39,9959
10	-27,0967	10	-31,5250
6	-28,4355	6	-31,0661

Tabela 5.16: Comparação dos NMSEs da modelagem inversa de  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  usando  $DUT_2$

$2D - PV$		$2D - frPV$	
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
45	-32,4163	45	-35,7879
24	-31,2374	24	-34,4862
20	-31,0780	20	-34,1940
19	-31,4803	19	-35,1469
16	-31,3956	16	-34,0367
13	-33,6864	13	-35,0979
6	-30,3772	6	-31,7745

A Tabela 5.13, Tabela 5.14 e Figura 5.13 mostram os resultados obtidos do  $NMSE$  em função do Número de Parâmetros para modelagem direta e inversa, onde os sinais de entrada e saída usados nos modelos  $PV$ ,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  são aqueles medidos experimentalmente na saída do  $DUT_2$ . Tanto na modelagem direta assim como na inversa, os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  também alcançam boa precisão para um número muito menor de parâmetros do que o número de parâmetros do modelo  $PV$ . Na modelagem direta, os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  proporcionaram uma redução do número de coeficientes gerados na ordem de 60,9%, correspondendo à segunda linha da Tabela 5.13, onde o modelo  $PV$  gerou 46 coeficientes e os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  geraram 19 coeficientes, respectivamente. Na modelagem inversa, a redução do número de coeficientes gerados foi de cerca de 62,5%, correspondendo à oitava linha da Tabela 5.14, onde o modelo  $PV$  alcançou 16 coeficientes enquanto ambos os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  geraram apenas 6 coeficientes cada um. Na Tabela 5.13 e Tabela 5.14, na parte destacada que possui o mesmo número de parâmetros gerados, uma análise mais aprofundada pode ser realizada a partir dos valores de  $NMSE$  para os três modelos contendo 4 parâmetros na Tabela 5.13 e contendo 9 parâmetros na Tabela 5.14, onde é possível observar ainda melhor os valores de  $NMSE$ s agregados pelos dois modelos,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ , do que o  $NMSE$  do  $PV$ . A diferença de  $NMSE$ s é da ordem de 9,75 dB na Tabela 5.13 e de 6,58 dB na Tabela 5.14. Na Tabela B.3 e na Tabela B.4, âmbas do Apêndice B, encontram-se as frações e os NMSEs (dB) das modelagens direta e inversa do modelo  $2D - frPV$ .

A Figura 5.14 e a Figura 5.15 apresentam as curvas de conversão AM-AM e AM-PM para as modelagens direta e inversa, obtidas a partir dos dados experimentais medidos no  $DUT_2$  e calculadas pelos modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ . Em ambas as figuras que apresentam muita distorção de não linearidade, memória e distorções de fase, mesmo assim não há diferenças tão perceptíveis entre os dados estimados nos modelos, o que significa que as não linearidades no RF PA e no DPD são muito bem estimadas.

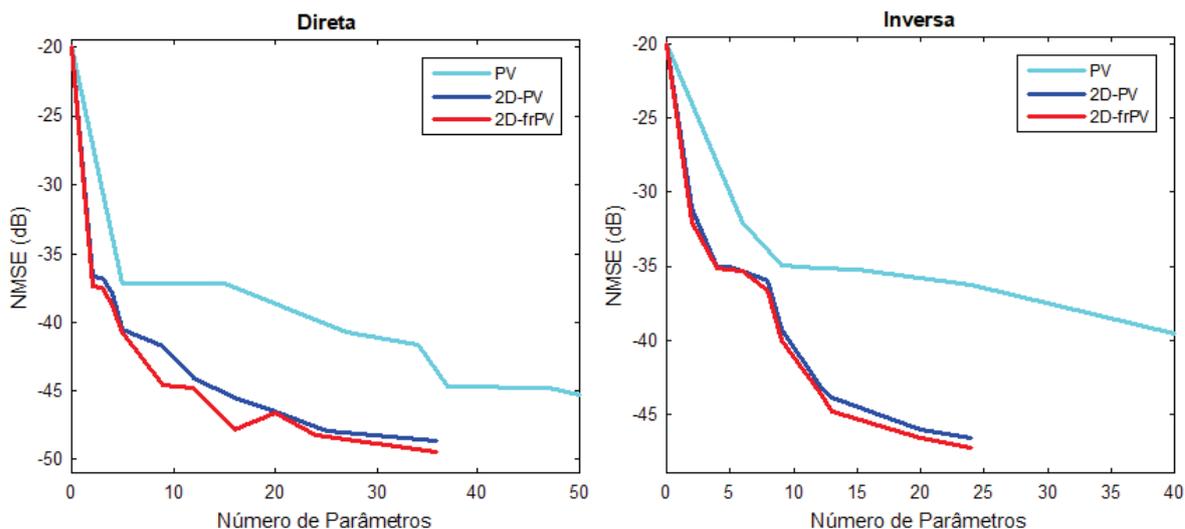


Figura 5.16:  $NMSE$ /Número de Parâmetros das modelagens direta (RF PA) e inversa (DPD) usando  $DUT_3$

Em outra comparação das diferenças de  $NMSEs$  entre os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ , Tabela 5.15 e Tabela 5.16 ilustram em detalhes essas diferenças de  $NMSEs$ , onde o maior valor alcançado na modelagem direta foi de até 4,43 dB que corresponde à linha destacada da Tabela 5.15 contendo cerca de 10 parâmetros e, na modelagem inversa foi de até 3,67 dB correspondente à parte destacada da Tabela 5.16 com 19 parâmetros, o que torna válido que o modelo de Volterra polar fracionário bidimensional  $2D - frPV$  tenha um  $NMSE$  melhor do que o modelo  $2D - PV$ .

### 5.2.3 Amplificador de Potência GaN classe AB

O terceiro DUT analisado é um GaN classe AB RF PA, estimulado por uma onda portadora de 900 MHz modulada através de um sinal de envoltória 3GPP WCDMA de uma portadora com largura de banda de 3,84 MHz. Os dados de entrada e saída foram medidos usando um VSA Rohde & Schwarz FSQ, com uma frequência de amostragem de 61,44 MHz. O conjunto de 29550 amostras de estimativa e outras 8699 amostras de validação medidas experimentalmente foi utilizado para a modelagem de identificação e validação dos três modelos, denominados  $PV$ ,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ .

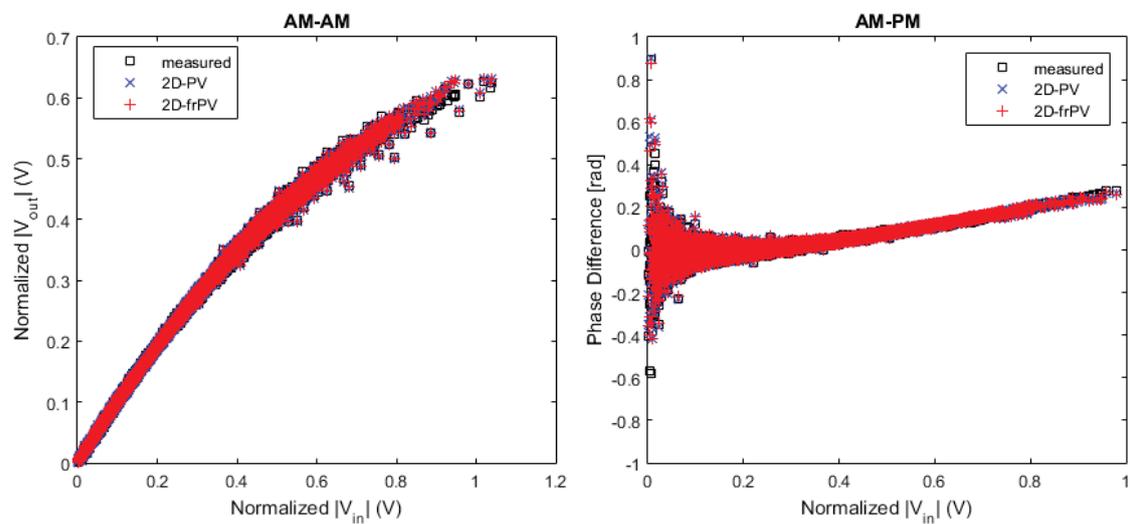
Os resultados de  $NMSE$  em função do Número de Parâmetros para modelagem RF PA e DPD mostrados na Tabela 5.17, Tabela 5.18 e Figura 5.16, foram obtidos dos modelos  $PV$ ,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ , usando o sinal de entrada medido experimentalmente na saída do  $DUT_3$ . Na modelagem RF PA e DPD, os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  proporcionaram uma redução do número de coeficientes gerados acima de 81,5% na modelagem RF PA, correspondendo à sétima linha da Tabela 5.17, onde o modelo  $PV$  gerou 27 coeficientes e os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  geraram 5 coeficientes, respectivamente,

Tabela 5.17: NMSE/Número de Parâmetros da modelagem direta usando  $DUT_3$ 

	$PV$		$2D - PV$		$2D - frPV$
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
105	-48,4883	36	-48,6852	36	-48,6852
64	-47,0457	25	-47,9934	25	-48,2177
57	-46,6864	20	-46,5944	20	-46,6894
47	-44,8215	16	-45,5498	16	-47,8997
37	-44,7141	12	-44,1087	12	-44,8546
34	-41,5690	9	-41,6903	9	-44,6099
27	-40,6599	5	-40,4985	5	-40,6928
15	-37,1657	4	-37,8876	4	-38,8168
10	-37,1599	3	-36,7514	3	-37,4387
5	-37,1560	2	-36,7076	2	-37,3814

Tabela 5.18: NMSE/Número de Parâmetros da modelagem inversa usando  $DUT_3$ 

	$PV$		$2D - PV$		$2D - frPV$
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
101	-46,0632	24	-46,6038	24	-46,9859
64	-45,2153	20	-46,0555	20	-46,6031
57	-44,7326	13	-43,9000	13	-44,8742
47	-43,1884	12	-43,0705	12	-43,5261
42	-40,0206	9	-39,2536	9	-40,0182
24	-36,2760	8	-36,0034	8	-36,6178
15	-35,2584	6	-35,3170	6	-35,3611
12	-35,0961	5	-35,0269	5	-35,2710
9	-34,9576	4	-35,0062	4	-35,1203
6	-32,0010	2	-31,9536	2	-31,9846

Figura 5.17: Conversão AM-AM e AM-PM da modelagem direta usando  $DUT_3$

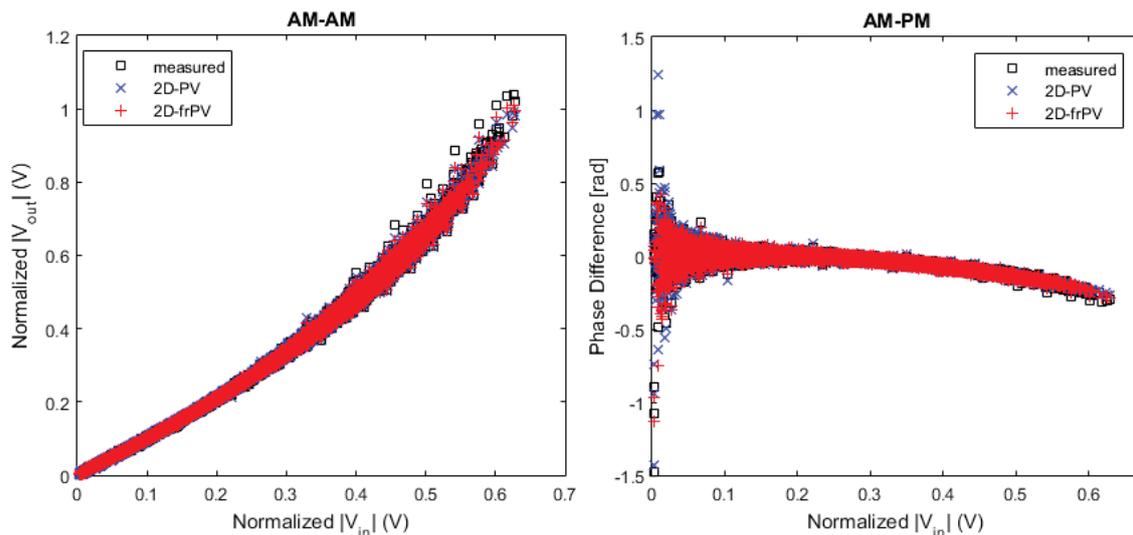


Figura 5.18: Conversão AM-AM e AM-PM da modelagem inversa usando  $DUT_3$

Tabela 5.19: Comparação dos NMSEs da modelagem direta de  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  usando  $DUT_3$

	$2D - PV$		$2D - frPV$
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
56	-47,0640	56	-50,2298
45	-42,2150	45	-49,5460
39	-42,0328	39	-45,8290
11	-39,2786	11	-41,7716
9	-41,6903	9	-44,6099
7	-37,2342	7	-40,7974
6	-37,9297	6	-40,6009

enquanto na modelagem DPD, os dois modelos reduziram cerca de 78,6%, correspondendo à quinta linha da Tabela 5.18, onde o modelo  $PV$  gerou 42 coeficientes enquanto os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  geraram apenas 9 coeficientes. Na Tabela 5.17 e Tabela 5.18, na parte destacada que tem o mesmo número de parâmetros gerados, os valores  $NMSE$  para os três modelos contendo 5 parâmetros na Tabela 5.17 e contendo 9 parâmetros na Tabela 5.18, é possível observar que os dois modelos,  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ , têm um desempenho muito bom, caracterizado por valores de  $NMSE$  significativamente melhores do que  $NMSE$  da abordagem  $PV$ . As diferenças de  $NMSEs$  são da ordem de 3,54 dB na Tabela 5.17 e de 5,06 dB na Tabela 5.18, respectivamente. Na Tabela B.5 e na Tabela B.6, ambas do Apêndice B, encontram-se as frações e os NMSEs (dB) das modelagens direta e inversa do modelo  $2D - frPV$ .

A Figura 5.17 e Figura 5.18 mostram as características de transferência, descritas pelas conversões AM-AM e AM-PM da modelagem direta e inversa contendo 51 coeficientes cada, obtidas a partir dos dados experimentais medidos no  $DUT_3$  e calculadas pelos

Tabela 5.20: Comparação dos NMSEs da modelagem inversa de  $2D - PV$  e  $2D - frPV$  usando  $DUT_3$

$2D - PV$		$2D - frPV$	
$N_P$	NMSE (dB)	$N_P$	NMSE (dB)
59	-40,9558	59	-49,6751
39	-40,9025	39	-45,3848
28	-41,0013	28	-46,0661
18	-40,5022	18	-45,7576
16	-40,8712	16	-45,7331
10	-36,5216	10	-43,3250

modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ . Em ambas as figuras que têm pouca memória de amplitude, muita distorção de não linearidade e distorção de fase, não há diferenças perceptíveis entre os dados estimados nos modelos, o que significa que a abordagem  $2D - frPV$  proposta é fiel na reprodução dos dados medidos e que as não linearidades no RF PA e no DPD são muito bem estimadas.

Na última comparação das diferenças de  $NMSEs$  entre os modelos  $2D - PV$  e  $2D - frPV$ , Tabela 5.19 e Tabela 5.20 ilustram em detalhes essas diferenças de  $NMSE$ , onde o maior valor alcançado para o  $DUT_3$  foi de até 7,33 dB que corresponde à linha destacada da Tabela 5.19 contendo cerca de 45 parâmetros e, foi de até 8,72 dB correspondente à parte destacada da Tabela 5.20 com 59 parâmetros, o que torna válido que o modelo Volterra polar fracionário bidimensional  $2D - frPV$  tem um  $NMSE$  melhor do que o modelo  $2D - PV$ .

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Nesta tese, três abordagens diferentes baseadas na expansão da série de Volterra Polar através de funções de base ortogonal, de Laguerre e fracionária, denominadas modelo de Laguerre-Volterra Polar, modelo de Laguerre-Volterra Polar Modificado e modelo de Volterra Polar Fracionário Bidimensional, foram desenvolvidas e estudadas.

A primeira abordagem denominada modelo de Laguerre-Volterra Polar (*LPV*) foi obtida a partir da expansão da série Volterra Polar por um conjunto de funções de base de Laguerre. A segunda abordagem é o modelo de Laguerre-Volterra Polar Modificado (*LPVmdf*) resultante da expansão da série de Volterra Polar Modificada de truncamentos independentes por meio de vários conjuntos de funções de base de Laguerre. Os dois modelos resultantes, *LPV* e *LPVmdf*, reproduzem com precisão as distorções não lineares de um RF PA com fortes efeitos de memória. A comparação entre os modelos *PV*, *PVmdf* e *LPVmdf*, em que estes dois últimos contêm uma quantidade maior de fatores de truncamento, proporcionou uma redução superior a 50% no número de coeficientes gerados, podendo alcançar um máximo de 84% se não houver restrições no fator tempo de simulação sobretudo no modelo *LPVmdf*. O modelo *LPVmdf* contendo vários conjuntos independentes de funções de base de Laguerre melhorou significativamente a precisão da modelagem, sendo as máximas diferenças alcançadas em termos de *NMSE* de até 6,51 dB e *ACEPR* de 7,29 dB, do que os restantes modelos.

A terceira abordagem denominada modelo de Volterra Polar fracionário bidimensional ( $2D - frPV$ ) foi obtida da expansão da série de Volterra Polar de termos bidimensionais ( $2D - PV$ ) através de um conjunto de funções geradoras ortogonais fracionárias. Além de reduzir significativamente o número de parâmetros a serem estimados e melhorar substancialmente a precisão do modelo, ele consegue reproduzir com precisão as distorções não lineares de um RF PA e DPD com efeitos de memória de longo prazo. A extração do modelo  $2D - frPV$  proposto é simples e foi realizada usando três dispositivos diferentes em teste. Em comparação com o modelo da série de Volterra Polar (*PV*), o modelo  $2D - frPV$  proposto em combinação com o modelo  $2D - PV$  proporcionam uma redução do número de parâmetros gerados em mais de 81,5%. Em outra comparação com os modelos *PV* e  $2D - PV$ , o modelo  $2D - frPV$  proposto melhorou significativamente a precisão da modelagem, quantificada por melhorias de *NMSE* de até 8,72 dB.

Em termos de trabalhos futuros, estas abordagens aqui introduzidas:

- Podem ser exploradas para a modelagem de RF PA e DPD usando expansão de outras funções de base ortogonal que possibilitem a introdução de mais de 1 polo

para cada ordem de não linearidade;

- Em um cenário de expansão dos fatores de truncamento para 16 ou 32, pode-se estudar a possibilidade de um método combinado entre Laguerre e fracionário onde, todas as componentes pares de amplitude podem ser modeladas em base de Laguerre e as componentes ímpares de fase (frequência) podem ser modeladas em fracionário;
- Podem ser exploradas para a modelagem de RF PA de bandas múltiplas concorrentes, contudo, evitando sua operação em extrapolação devido à sua natureza polinomial.

## BIBLIOGRAFIA

- AGIWAL, M.; ROY, A.; SAXENA, N. Next generation 5g wireless networks: A comprehensive survey. **IEEE Communications Surveys & Tutorials**, IEEE, v. 18, n. 3, p. 1617–1655, 2016.
- ÁLVAREZ-LÓPEZ, L. *et al.* Determining a digital predistorter model structure for wideband power amplifiers through random forest. In: IEEE. **2020 IEEE Topical Conference on RF/Microwave Power Amplifiers for Radio and Wireless Applications (PAWR)**. [S.l.], 2020. p. 50–52.
- AOUN, M. *et al.* Synthesis of fractional laguerre basis for system approximation. **Automatica**, Elsevier, v. 43, n. 9, p. 1640–1648, 2007.
- BENEDETTO, S.; BIGLIERI, E. **Principles of digital transmission: with wireless applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1999.
- BENEDETTO, S.; BIGLIERI, E.; DAFFARA, R. Modeling and performance evaluation of nonlinear satellite links—a volterra series approach. **IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems**, IEEE, AES-15, n. 4, p. 494–507, 1979.
- BENOÎT-MARAND, F. *et al.* Identification of non linear fractional systems using continuous time neural networks. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 39, n. 11, p. 402–407, 2006.
- BENVENUTO, N.; PIAZZA, F.; UNCINI, A. A neural network approach to data predistortion with memory in digital radio systems. In: IEEE. **Proceedings of ICC'93-IEEE International Conference on Communications**. [S.l.], 1993. v. 1, p. 232–236.
- BONFIM, E. J. Modelagem comportamental de amplificadores de potência de radiofrequência usando termos unidimensionais e bidimensionais de séries de volterra. 2016.
- BONFIM, E. J.; LIMA, E. G. de. A modified two dimensional volterra-based series for the low-pass equivalent behavioral modeling of rf power amplifiers. **Progress In Electromagnetics Research M**, EMW Publishing, v. 47, p. 27–35, 2016.
- BROOME, P. W. Discrete orthonormal sequences. **Journal of the ACM (JACM)**, ACM, v. 12, n. 2, p. 151–168, 1965.
- CAMARGO, R.; OLIVEIRA, E. Cálculo fracionário. **Livraria da Física**, Livraria da Física, v. 1, n. 1, 2015.
- CAMARGO, R. d. F. *et al.* Cálculo fracionário e aplicações. [sn], 2009.
- CAMARGO, R. F.; CHIACCHIO, A. O.; OLIVEIRA, E. Capelas de. Differentiation to fractional orders and the fractional telegraph equation. **Journal of Mathematical Physics**, AIP, v. 49, n. 3, p. 033505, 2008.

- CAPONETTO, R. **Fractional order systems: modeling and control applications**. [S.l.]: World Scientific, 2010.
- CAPUTO, M. Vibrations of an infinite viscoelastic layer with a dissipative memory. **The Journal of the Acoustical Society of America**, ASA, v. 56, n. 3, p. 897–904, 1974.
- CAPUTO, M. Vibrations of an infinite plate with a frequency independent  $q$ . **The Journal of the Acoustical Society of America**, ASA, v. 60, n. 3, p. 634–639, 1976.
- CAPUTO, M.; MAINARDI, F. Linear models of dissipation in anelastic solids. **La Rivista del Nuovo Cimento (1971-1977)**, Springer, v. 1, n. 2, p. 161–198, 1971.
- CAVALHEIRO, R. A. d. S. Séries de volterra com truncamentos independentes para dinâmicas e não linearidades em amplificadores de potência. 2018.
- CHEN, J.; ZENG, Z.; JIANG, P. Global mittag-leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks. **Neural Networks**, Elsevier, v. 51, p. 1–8, 2014.
- CHENG, Q.-F.; ZHU, S.-K.; WU, H.-F. Investigating the global trend of rf power amplifiers with the arrival of 5g. In: IEEE. **2015 IEEE International Wireless Symposium (IWS 2015)**. [S.l.], 2015. p. 1–4.
- CHO, Y. *et al.* A 16-element phased-array cmos transmitter with variable gain controlled linear power amplifier for 5g new radio. In: IEEE. **2019 IEEE Radio Frequency Integrated Circuits Symposium (RFIC)**. [S.l.], 2019. p. 247–250.
- CHONG, E. K.; ZAK, S. H. **An introduction to optimization**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- CLOWES, G. Choice of the time-scaling factor for linear system approximations using orthonormal laguerre functions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 10, n. 4, p. 487–489, 1965.
- COUCH, L. W.; KULKARNI, M.; ACHARYA, U. S. **Digital and analog communication systems**. [S.l.]: Citeseer, 1997.
- CRIPPS, S. C. **RF power amplifiers for wireless communications**. [S.l.]: Artech house Norwood, MA, 2006.
- CUNHA, T. R.; LIMA, E. G.; PEDRO, J. C. A polar-oriented volterra model for power amplifier characterization. In: IEEE. **2010 IEEE MTT-S International Microwave Symposium**. [S.l.], 2010. p. 556–559.
- CUNHA, T. R.; LIMA, E. G.; PEDRO, J. C. Validation and physical interpretation of the power-amplifier polar volterra model. **IEEE transactions on microwave theory and techniques**, IEEE, v. 58, n. 12, p. 4012–4021, 2010.
- DAS, S.; PAN, I. **Fractional order signal processing: introductory concepts and applications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011.
- DESGREYS, P. *et al.* Wideband power amplifier predistortion: Trends, challenges and solutions. In: IEEE. **2017 IEEE 12th international conference on ASIC (ASICON)**. [S.l.], 2017. p. 100–103.

DIETHELM, K. **The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.

DUMONT, G. A.; FU, Y. Non-linear adaptive control via laguerre expansion of volterra kernels. **International Journal of Adaptive Control and Signal Processing**, Wiley Online Library, v. 7, n. 5, p. 367–382, 1993.

ELMALA, M.; PARAMESH, J.; SOUMYANATH, K. A 90-nm cmos doherty power amplifier with minimum am-pm distortion. **IEEE Journal of Solid-State Circuits**, IEEE, v. 41, n. 6, p. 1323–1332, 2006.

EROGLU, A. **Introduction to RF power amplifier design and simulation.** [S.l.]: CRC press, 2018.

FAGER, C. *et al.* Linearity and efficiency in 5g transmitters: New techniques for analyzing efficiency, linearity, and linearization in a 5g active antenna transmitter context. **IEEE Microwave Magazine**, IEEE, v. 20, n. 5, p. 35–49, 2019.

FREIRE, L. B. C. *et al.* Behavioral modeling of a multimode power amplifier using perceptrons with am-am and am-pm complex-valued activation function. **Journal of Integrated Circuits and Systems**, v. 16, n. 1, p. 1–11, 2021.

GEORGIIOU, G. M.; KOUTSOUGERAS, C. Complex domain backpropagation. **IEEE transactions on Circuits and systems II: analog and digital signal processing**, IEEE, v. 39, n. 5, p. 330–334, 1992.

GHANNOUCHI, F. M.; HAMMI, O.; HELAOUI, M. **Behavioral modeling and predistortion of wideband wireless transmitters.** [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.

GILABERT, P.; MONTORO, G.; BERTRAN, E. On the wiener and hammerstein models for power amplifier predistortion. In: IEEE. **2005 Asia-Pacific Microwave Conference Proceedings.** [S.l.], 2005. v. 2, p. 4–pp.

GUAN, L.; ZHU, A. Low-cost fpga implementation of volterra series-based digital predistorter for rf power amplifiers. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, IEEE, v. 58, n. 4, p. 866–872, 2010.

GUAN, L.; ZHU, A. Green communications: Digital predistortion for wideband rf power amplifiers. **IEEE Microwave Magazine**, IEEE, v. 15, n. 7, p. 84–99, 2014.

GUIDE, F. T. U. The mathworks, inc. mail 3 apple hill drive natick, ma 01760-2098. Citeseer, 1995.

HAYKIN, S. **Neural networks and learning machines.** Hamilton, ON, Canada: Pearson Education, McMaster Univ, 2009.

HORNIK, K.; STINCHCOMBE, M.; WHITE, H. Multilayer feedforward networks are universal approximators. **Neural networks**, Elsevier, v. 2, n. 5, p. 359–366, 1989.

HUI, M. *et al.* A novel digital pre-distortion technique for linearizing subcarrier polymerization dual-band dual-mode power amplifiers. In: IEEE. **2015 Asia-Pacific Microwave Conference (APMC).** [S.l.], 2015. v. 3, p. 1–3.

- ISAKSSON, M.; WISELL, D.; RONNOW, D. Wide-band dynamic modeling of power amplifiers using radial-basis function neural networks. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, IEEE, v. 53, n. 11, p. 3422–3428, 2005.
- ISAKSSON, M.; WISELL, D.; RONNOW, D. A comparative analysis of behavioral models for rf power amplifiers. **IEEE transactions on microwave theory and techniques**, IEEE, v. 54, n. 1, p. 348–359, 2006.
- JARDÓN-AGUILAR, H. *et al.* The am-pm conversion model as a phase statement of compression and desensitization in highly linear multicarrier power amplifiers. **International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering: Co-sponsored by the Center for Advanced Manufacturing and Packaging of Microwave, Optical, and Digital Electronics (CAMPmode) at the University of Colorado at Boulder**, Wiley Online Library, v. 16, n. 6, p. 588–595, 2006.
- JIANG, H.; WILFORD, P. A. Digital predistortion for power amplifiers using separable functions. **IEEE Transactions on signal processing**, IEEE, v. 58, n. 8, p. 4121–4130, 2010.
- KACZOREK, T.; ROGOWSKI, K. **Fractional linear systems and electrical circuits**. [S.l.]: Springer, 2015.
- KIM, J.; KONSTANTINOU, K. Digital predistortion of wideband signals based on power amplifier model with memory. **Electronics Letters**, IET, v. 37, n. 23, p. 1417–1418, 2001.
- KWAN, A. K. *et al.* Selective intermodulation compensation in a multi-stage digital predistorter for nonlinear multi-band power amplifiers. **IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems**, IEEE, v. 7, n. 4, p. 534–546, 2017.
- LATAWIEC, K. J. *et al.* Grünwald-letnikov-laguerre modeling of discrete-time noncommensurate fractional-order state space lti mimo systems. In: SPRINGER. **Conference on Non-integer Order Calculus and Its Applications**. [S.l.], 2017. p. 74–83.
- LEE, W. C. **Mobile communications engineering: theory and applications**. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 1998.
- LEE, Y. W. Statistical theory of communication. **American Journal of Physics**, AAPT, v. 29, n. 4, p. 276–278, 1961.
- LIEN, S.-Y. *et al.* 5g new radio: Waveform, frame structure, multiple access, and initial access. **IEEE communications magazine**, IEEE, v. 55, n. 6, p. 64–71, 2017.
- LIMA, E. G.; CUNHA, T. R.; PEDRO, J. C. A physically meaningful neural network behavioral model for wireless transmitters exhibiting pm-am/pm-pm distortions. **IEEE transactions on microwave theory and techniques**, IEEE, v. 59, n. 12, p. 3512–3521, 2011.
- LIMA, E. G. de. **Behavioral modeling and digital base band predistortion of RF power amplifiers**. Tese (Doutorado) — Master's thesis, Politecnico de Torino, 2009.

LIU, T.; BOUMAIZA, S.; GHANNOUCHI, F. M. Dynamic behavioral modeling of 3g power amplifiers using real-valued time-delay neural networks. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, IEEE, v. 52, n. 3, p. 1025–1033, 2004.

LIU, Y.-J. *et al.* A robust augmented complexity-reduced generalized memory polynomial for wideband rf power amplifiers. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, IEEE, v. 61, n. 5, p. 2389–2401, 2013.

LOPEZ-BUENO, D. *et al.* Amping up, saving power: Digital predistortion linearization strategies for power amplifiers under wideband 4g\5g burst-like waveform operation. **IEEE Microwave Magazine**, IEEE, v. 17, n. 1, p. 79–87, 2015.

LORENZO, C. F.; HARTLEY, T. T. Initialization, conceptualization, and application in the generalized (fractional) calculus. **Critical Reviews™ in Biomedical Engineering**, Begel House Inc., v. 35, n. 6, 2007.

LUPUPA, M.; HADJILOUCAS, S. Fractional-order system identification and equalization in massive mimo systems. **IEEE Access**, IEEE, v. 8, p. 86481–86494, 2020.

MAACHOU, A. *et al.* Nonlinear thermal system identification using fractional volterra series. **Control Engineering Practice**, Elsevier, v. 29, p. 50–60, 2014.

MAIONE, B.; TURCHIANO, B. Laguerre z-transfer function representation of linear discrete-time systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 41, n. 1, p. 245–257, 1985.

MALTI, R. *et al.* Fractional differentiation and its applications. **Vol. 1–Mathematical tools, geometrical and physical aspects**, p. 87–102, 2005.

MALTI, R. *et al.* **Unified construction of fractional generalized orthogonal bases**. 2005.

MARMARELIS, V. Z. Identification of nonlinear biological systems using laguerre expansions of kernels. **Annals of biomedical engineering**, Springer, v. 21, n. 6, p. 573–589, 1993.

MARWALA, T. **Economic modeling using artificial intelligence methods**. [S.l.]: Springer, 2013.

MATHEWS, V. J.; SICURANZA, G. **Polynomial signal processing**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2000.

MATIGNON, D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In: CITESEER. **Computational engineering in systems applications**. [S.l.], 1996. v. 2, p. 963–968.

MATIGNON, D. Stability properties for generalized fractional differential systems. In: EDP SCIENCES. **ESAIM: proceedings**. [S.l.], 1998. v. 5, p. 145–158.

MKADEM, F.; BOUMAIZA, S. Physically inspired neural network model for rf power amplifier behavioral modeling and digital predistortion. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, IEEE, v. 59, n. 4, p. 913–923, 2011.

MOHAMED, A. *et al.* System identification using fractional hammerstein models. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 35, n. 1, p. 265–269, 2002.

MORGAN, D. R.; MA, Z.; DING, L. Reducing measurement noise effects in digital predistortion of rf power amplifiers. In: IEEE. **IEEE International Conference on Communications, 2003. ICC'03.** [S.l.], 2003. v. 4, p. 2436–2439.

MORGAN, D. R. *et al.* A generalized memory polynomial model for digital predistortion of rf power amplifiers. **IEEE Transactions on signal processing**, IEEE, v. 54, n. 10, p. 3852–3860, 2006.

MUHA, M. *et al.* Validation of power amplifier nonlinear block models. In: IEEE. **1999 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest (Cat. No. 99CH36282).** [S.l.], 1999. v. 2, p. 759–762.

NAZARI, N.; HAERI, M.; TAVAZOEI, M. S. Estimating the fractional order of orthogonal rational functions used in the identification. In: IEEE. **2008 International Conference on Control, Automation and Systems.** [S.l.], 2008. p. 1130–1134.

OLDHAM, K.; SPANIER, J. **The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.** [S.l.]: Elsevier, 1974.

OLIVEIRA, D. d. S. d. *et al.* Derivada fracionária e as funções de mittag-leffler. [sn], 2014.

OLIVEIRA, G. H.; AMARAL, W.; LATAWIEC, K. Crhpc using volterra models and orthonormal basis functions: an application to cstr plants. In: IEEE. **Proceedings of 2003 IEEE Conference on Control Applications, 2003. CCA 2003.** [S.l.], 2003. v. 1, p. 718–723.

OLIVEIRA, G. H. *et al.* An introduction to models based on laguerre, kautz and other related orthonormal functions—part i: linear and uncertain models. **International Journal of Modelling, Identification and Control**, Inderscience Publishers, v. 14, n. 1-2, p. 121–132, 2011.

OLIVEIRA, G. H. *et al.* An introduction to models based on laguerre, kautz and other related orthonormal functions—part ii: non-linear models. **International Journal of Modelling, Identification and Control**, Inderscience Publishers, v. 16, n. 1, p. 1–14, 2012.

ONIZUKA, K. *et al.* A 1.9 ghz cmos power amplifier with embedded linearizer to compensate am-pm distortion. **IEEE Journal of Solid-State Circuits**, IEEE, v. 47, n. 8, p. 1820–1827, 2012.

ÖZGÜL, B. *et al.* Software-programmable digital pre-distortion on new generation fpgas. **Analog Integrated Circuits and Signal Processing**, Springer, v. 78, n. 3, p. 573–587, 2014.

PALASKAS, Y. *et al.* A 5-ghz 20-dbm power amplifier with digitally assisted am-pm correction in a 90-nm cmos process. **IEEE journal of solid-state circuits**, IEEE, v. 41, n. 8, p. 1757–1763, 2006.

PARKS, T. Choice of time scale in laguerre approximations using signal measurements. **IEEE Transactions on automatic control**, IEEE, v. 16, n. 5, p. 511–513, 1971.

PEDRO, J. C.; MAAS, S. A. A comparative overview of microwave and wireless power-amplifier behavioral modeling approaches. **IEEE transactions on microwave theory and techniques**, IEEE, v. 53, n. 4, p. 1150–1163, 2005.

PEDRO, J. C.; NUNES, L. C. A single-ended power amplifier behavioral model for am/am and am/pm predictions. In: IEEE. **2014 IEEE Topical Conference on Power Amplifiers for Wireless and Radio Applications (PAWR)**. [S.l.], 2014. p. 79–81.

PODLUBNY, I. **Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications**. [S.l.]: Elsevier, 1998.

POST, E. L. Generalized differentiation. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 32, n. 4, p. 723–781, 1930.

PRATAP, A. *et al.* Mittag-leffler stability and adaptive impulsive synchronization of fractional order neural networks in quaternion field. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, Wiley Online Library, v. 43, n. 10, p. 6223–6253, 2020.

QI, T.; HE, S. Power up potential power amplifier technologies for 5g applications. **IEEE Microwave Magazine**, IEEE, v. 20, n. 6, p. 89–101, 2019.

RAZ, G. M.; VEEN, B. D. V. Baseband volterra filters for implementing carrier based nonlinearities. **IEEE Transactions on Signal Processing**, IEEE, v. 46, n. 1, p. 103–114, 1998.

REYNAERT, P.; STEYAERT, M. **RF power amplifiers for mobile communications**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.

RUIZ, H. S.; PÉREZ, R. B. **Linear CMOS RF power amplifiers**. [S.l.]: Springer, 2013.

SCHETZEN, M. Synthesis of a class of non-linear systems. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 1, n. 5, p. 401–414, 1965.

SCHETZEN, M. Nonlinear system modeling based on the wiener theory. **Proceedings of the IEEE**, IEEE, v. 69, n. 12, p. 1557–1573, 1981.

SCHUARTZ, L. *et al.* Reduced-complexity polynomials with memory applied to the linearization of power amplifiers with real-time discrete gain control. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, Springer, v. 38, n. 9, p. 3901–3930, 2019.

SCHUARTZ, L. *et al.* Concurrent tri-band cmos power amplifier linearized by 3d improved memory polynomial digital predistorter. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, Springer, v. 40, n. 5, p. 2176–2208, 2021.

SCHUMACHER, R.; LIMA, E. G.; OLIVEIRA, G. H. Rf power amplifier behavioral modeling based on takenaka–malmquist–volterra series. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, Springer, v. 35, n. 7, p. 2298–2316, 2016.

- SILVA, I. N. D.; SPATTI, D. H.; FLAUZINO, R. A. Redes neurais artificiais para engenharia e ciências aplicadas-curso prático. **São Paulo: Artliber**, 2010.
- SILVA, T. O. e. On the determination of the optimal pole position of laguerre filters. **IEEE Transactions on Signal Processing**, IEEE, v. 43, n. 9, p. 2079–2087, 1995.
- STANISŁAWSKI, R. *et al.* Laguerre-based modeling of fractional-order lti siso systems. In: IEEE. **2013 18th International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR)**. [S.l.], 2013. p. 610–615.
- STODDARD, J. G.; WELSH, J. S. Volterra kernel identification using regularized orthonormal basis functions. **arXiv preprint arXiv:1804.07429**, 2018.
- SUN, G. *et al.* An accurate complexity-reduced simplified volterra series for rf power amplifiers. **Progress In Electromagnetics Research C**, EMW Publishing, v. 47, p. 157–166, 2014.
- TEODORO, G. S. *et al.* Cálculo fracionário e as funções de mittag-leffler. [sn], 2014.
- TEPLJAKOV, A. **Fractional-order modeling and control of dynamic systems**. [S.l.]: Springer, 2017.
- WAHLBERG, B. System identification using laguerre models. **IEEE Transactions on Automatic Control**, IEEE, v. 36, n. 5, p. 551–562, 1991.
- WANG, F.; WANG, H. A high-power broadband multi-primary dat-based doherty power amplifier for mm-wave 5g applications. **IEEE Journal of Solid-State Circuits**, IEEE, v. 56, n. 6, p. 1668–1681, 2021.
- WANG, L. **Model predictive control system design and implementation using MATLAB®**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009.
- WANG, X.; NGUYEN, T.; SCHUTT-AINÉ, J. E. Laguerre–volterra feed-forward neural network for modeling pam-4 high-speed links. **IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology**, IEEE, v. 10, n. 12, p. 2061–2071, 2020.
- WOOD, J. **Behavioral modeling and linearization of RF power amplifiers**. [S.l.]: Artech House, 2014.
- WYLIE, C. R. **Advanced engineering mathematics**. McGraw-Hill, 1960.
- XU, G.; LI, M.; XI, Y. Radial basis function neural network models for power-amplifier design. In: IEEE. **2004 International Conference on Communications, Circuits and Systems (IEEE Cat. No. 04EX914)**. [S.l.], 2004. v. 2, p. 1066–1070.
- YOUNES, M. *et al.* Three-dimensional digital predistorter for concurrent tri-band power amplifier linearization. In: IEEE. **2013 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest (MTT)**. [S.l.], 2013. p. 1–4.
- YU, X.; JIANG, H. Digital predistortion using adaptive basis functions. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, IEEE, v. 60, n. 12, p. 3317–3327, 2013.

ZHENG, Q.; ZAFIRIOU, E. Nonlinear system identification for control using volterra-laguerre expansion. In: IEEE. **Proceedings of 1995 American Control Conference-ACC'95**. [S.l.], 1995. v. 3, p. 2195–2199.

ZHENG, Q.; ZAFIRIOU, E. Volterra- laguerre models for nonlinear process identification with application to a fluid catalytic cracking unit. **Industrial & engineering chemistry research**, ACS Publications, v. 43, n. 2, p. 340–348, 2004.

ZHU, A.; BRAZIL, T. J. Behavioral modeling of rf power amplifiers based on pruned volterra series. **IEEE Microwave and Wireless components letters**, IEEE, v. 14, n. 12, p. 563–565, 2004.

ZHU, A.; BRAZIL, T. J. Rf power amplifier behavioral modeling using volterra expansion with laguerre functions. In: IEEE. **IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest, 2005**. [S.l.], 2005. p. 4–pp.

**APÊNDICE A**

**MODELO DE LAGUERRE VOLTERRA POLAR**

**MODIFICADO**

Tabela A.1: Polos e NMSEs (dB) da modelagem direta do modelo  $LPVmdf$ 

$N_P$	6	7	8	12	16	27	32
Polos	0,3500	0,1426	0,1332	0,1614	0,2697	0,2249	0,2418
	-0,0919	-0,2760	-0,2899	0,1792	0,2455	0,0903	0,1725
	0,5891	0,7389	0,1770	0,0923	0,3353	0,1709	0,1698
	0,2641	0,1424	0,3925	-0,0750	0,1637	0,2006	0,3469
	0,3795	0,1671	0,1840	-0,0147	0,2612	0,1764	0,2801
	0,3795			0,6319	0,1920	0,4612	0,3037
				0,4434	0,4308	0,2495	0,3197
				0,1636	0,2572	0,0170	0,5375
						0,1715	0,1713
							0,2964
NMSE	-31,3705	-31,9331	-37,3581	-41,8609	-41,6466	-43,3658	-43,7631

Tabela A.2: Polos e NMSEs (dB) da modelagem inversa do modelo  $LPVmdf$ 

$N_P$	7	8	9	11	16	31	32
Polos	0,2341	0,2045	0,2063	0,1180	0,0256	0,3419	0,2659
	-0,6572	-0,5415	0,2063	0,4217	-0,0168	0,2323	0,2340
	-0,6843	0,2091	-0,152	-0,6466	0,2946	0,3340	0,2041
	0,2341	0,7220	0,3854	0,1079	-0,0154	0,1947	0,0043
	0,2341	0,2567	-0,6854	-0,4316	0,2025	0,2048	0,6007
			0,2063	0,5553	0,5094	0,4544	0,2477
			0,2063	0,1463	-0,0273	-0,1476	-0,0615
					-0,0127	0,6402	0,0124
						0,1923	0,2644
							0,2725
NMSE	-27,0891	-29,4397	-30,0344	-33,7130	-36,0765	-36,7328	-36,8368

**APÊNDICE B**

**MODELO DE VOLTERRA POLAR FRACIONÁRIO**

**BIDIMENSIONAL**

Tabela B.1: Fração e NMSE da modelagem direta do modelo  $2D - frPV$  usando  $DUT_1$

$N_P$	NMSE (dB)	Fração ( $\alpha$ )
37	-36,6973	0,628294
29	-32,8751	0,869021
18	-34,1708	0,696872
16	-32,6610	0,652867
14	-31,3428	0,822571
6	-32,4202	0,584549
5	-30,3064	0,791423
3	-26,2464	0,689073

Tabela B.2: Fração e NMSE da modelagem inversa o modelo  $2D - frPV$  usando  $DUT_1$

$N_P$	NMSE (dB)	Fração ( $\alpha$ )
51	-29,0629	0,791283
40	-27,4824	0,823708
16	-28,0060	0,754533
13	-27,0794	0,762930
12	-27,6928	0,716587
8	-26,7693	0,848808
6	-26,1203	0,768368
3	-24,7596	0,678845

Tabela B.3: Fração e NMSE da modelagem direta do modelo  $2D - frPV$  usando  $DUT_2$

$N_P$	NMSE (dB)	Fração ( $\alpha$ )
51	-41,8919	0,546165
19	-40,8475	0,709408
16	-39,2720	0,640244
13	-39,0316	0,640016
8	-31,4394	0,384469
6	-31,0661	0,336708
4	-30,2151	0,590974
2	-21,8970	0,999899

Tabela B.4: Fração e NMSE da modelagem inversa do modelo  $2D - frPV$  usando  $DUT_2$ 

$N_P$	NMSE (dB)	Fração ( $\alpha$ )
88	-35,9606	0,514554
56	-34,6491	0,398887
24	-34,4862	0,346118
20	-34,1940	0,309612
11	-31,5773	0,574676
9	-31,5444	0,585434
6	-31,7745	0,294256
4	-25,3573	0,001092

Tabela B.5: Fração e NMSE da modelagem direta do modelo  $2D - frPV$  usando  $DUT_3$ 

$N_P$	NMSE (dB)	Fração ( $\alpha$ )
36	-48,6852	0,999775
25	-48,2177	0,243787
20	-46,6894	0,150201
16	-47,8997	0,164827
12	-44,8546	0,382593
9	-44,6099	0,366351
5	-40,6928	0,393737
4	-38,8168	0,292203
3	-37,4387	0,294775
2	-37,3814	0,293759

Tabela B.6: Fração e NMSE da modelagem inversa do modelo  $2D - frPV$  usando  $DUT_3$ 

$N_P$	NMSE (dB)	Fração ( $\alpha$ )
24	-46,9859	0,027969
20	-46,6031	0,008160
13	-44,8742	0,010122
12	-43,5261	0,057758
9	-40,0182	0,026922
8	-36,6178	0,001094
6	-35,3611	0,001092
5	-35,2710	0,001094
4	-35,1203	0,001092
2	-31,9846	0,001092