

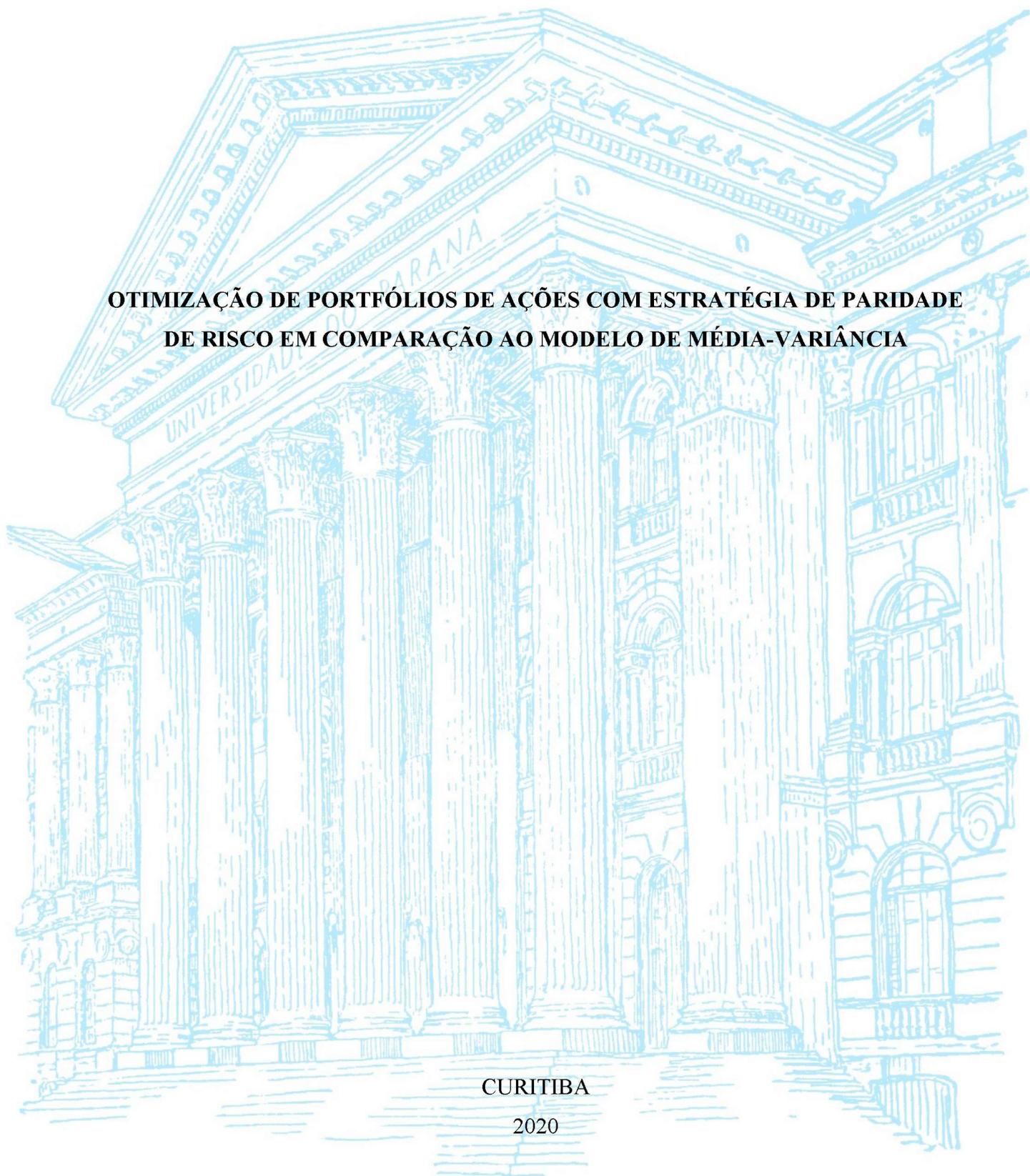
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LUIZ FELIPE MEIER PEREIRA

**OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS DE AÇÕES COM ESTRATÉGIA DE PARIDADE
DE RISCO EM COMPARAÇÃO AO MODELO DE MÉDIA-VARIÂNCIA**

CURITIBA

2020



LUIZ FELIPE MEIER PEREIRA

**OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS DE AÇÕES COM ESTRATÉGIA DE PARIDADE
DE RISCO EM COMPARAÇÃO AO MODELO DE MÉDIA-VARIÂNCIA**

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de bacharel no Curso de Ciências Econômicas, Setor de Ciências Sociais Aplicadas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. José Guilherme Silva Vieira

CURITIBA

2020

TERMO DE APROVAÇÃO

RESUMO

O presente trabalho compara os modelos de otimização de Paridade de Risco e de Média-Variância em carteiras de ações. Com objetivo de constatar se há superioridade entre um destes modelos de otimização de ações, foram analisados oito casos a partir das combinações possíveis de variação, nos seguintes parâmetros: o número de ativos que compõem uma carteira, a periodicidade dos balanceamentos e o horizonte de tempo. Para cada caso foi otimizado uma carteira com modelo de Paridade de Risco e outra com Média-Variância, totalizando 16 carteiras. As carteiras propostas neste trabalho são compostas por ações do Índice Ibovespa no período de outubro de 2017 a setembro de 2020. Os cálculos e análises foram realizados no RStudio 4.0.2, com auxílio das bibliotecas riskParityPortfolio 0.2.1 e fPortfolio 3042.83.1. As comparações dos casos foram realizadas com base em performance, índices de risco e relação risco, e retorno para cada carteira. Dentre os principais índices empregados estão: Beta, Sharpe, Treynor e Drawdown. Restrições importantes foram as desconsiderações de custos transacionais e tributários na compra e venda de ações, e a não observação dos retornos dos dividendos. Os resultados confirmam nos 8 casos maior performance do modelo de Otimização de Paridade de Risco, contendo melhor relação de risco e retorno, também contendo carteiras com maior diversificação.

Palavras-chave: Paridade de Risco. Média-Variância. Markowitz. Otimização.

ABSTRACT

The present work compares the Risk Parity and Mean-Variance optimization models in stock portfolios. To verify whether there is superiority between one of these models of stock optimization, eight cases were analyzed based on the possible combinations of variation, in the following parameters: the number of assets that make up a portfolio, the periodicity of the balances, and the time horizon. For each case, one portfolio with the Parity Risk model and another with Mean-Variance were optimized, totaling 16 portfolios. The portfolios proposed in this work are composed of shares of the Ibovespa Index from October 2017 to September 2020. The calculations and analyses were performed in RStudio 4.0.2, with the help of the libraries riskParityPortfolio 0.2.1 and fPortfolio 3042.83.1. Case visits were based on performances, risk indexes, and risk ratios, and returns for each portfolios. Among the main indexes employed are **Beta**, Sharpe, Treynor, and Drawdown. Important restrictions were the considerations of transactional and tax costs in the purchase and sale of shares and the non-observation of dividend returns. The results confirm in the 8 cases the higher performance of the Parity Risk Optimization model, containing better risk and return ratio, also containing portfolios with greater diversification.

Keywords: Parity Risk, Mean-Variance, Markowitz, Optimization.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – ILUSTRAÇÃO DO PONTO DO PORTFÓLIO TANGENTE.....	16
FIGURA 2 – FLUXO DO TRABALHO.....	21

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – PARAMETROS DO PORTFÓLIOS.....	20
QUADRO 2 – LISTA DE AÇÕES.....	21
QUADRO 3 – TAXA LIVRE DE RISCO (CDI).....	22

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 01.....	23
GRÁFICO 2 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 02.....	24
GRÁFICO 3 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 03.....	24
GRÁFICO 4 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 04.....	25
GRÁFICO 5 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 05.....	25
GRÁFICO 6 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 06.....	26
GRÁFICO 7 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 08.....	26
GRÁFICO 8 – PESOS PPR: CASO 8.....	27
GRÁFICO 9 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 01.....	28
GRÁFICO 10 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 02.....	28
GRÁFICO 11 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 03.....	29
GRÁFICO 12 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 04.....	29
GRÁFICO 13 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 05.....	30
GRÁFICO 14 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 06.....	30
GRÁFICO 15 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 07.....	31
GRÁFICO 16 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 07.....	31
GRÁFICO 17 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 1.....	32
GRÁFICO 18 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 2.....	33

GRÁFICO 19 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 3.....	33
GRÁFICO 20 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 4.....	34
GRÁFICO 21 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 5.....	34
GRÁFICO 22 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 6.....	35
GRÁFICO 23 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 7.....	35
GRÁFICO 24 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 7.....	36
GRÁFICO 25 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 1.....	37
GRÁFICO 26 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 2.....	38
GRÁFICO 27 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 3.....	38
GRÁFICO 28 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 4.....	39
GRÁFICO 29 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 5.....	39
GRÁFICO 30 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 6.....	40
GRÁFICO 31 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 7.....	40
GRÁFICO 32 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 8.....	41
GRÁFICO 33 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 1.....	42
GRÁFICO 34 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 2.....	42
GRÁFICO 35 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 3.....	43
GRÁFICO 36 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 4.....	43
GRÁFICO 37 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 5.....	44
GRÁFICO 38 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 6.....	44
GRÁFICO 39 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 7.....	45
GRÁFICO 40 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 8.....	45
GRÁFICO 41 – BOXPLOT RETORNOS DIÁRIOS DE 2019.10.01 À 2020.10.01.....	46
GRÁFICO 42 – BOXPLOT RETORNOS DIÁRIOS DE 2017.10.01 À 2020.10.01.....	47
GRÁFICO 43 – RISCO E RETORNO ANUALIZADOS: 2019.10.01 À 2020.10.01.....	47
GRÁFICO 44 – RISCO E RETORNO ANUALIZADOS: 2017.10.01 À 2020.10.01.....	48

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – ÍNDICES BETA, TREYNOR, SHARPE E MÁXIMO DRAWDOWN.....	49
---	----

LISTA DE SIGLAS

B3 – Brasil, Bolsa, Balcão.

CDI – Certificado de Depósito Interbancário.

PMV – Portfólio de Média-Variância.

PPR – Portifólio(s) de Paridade de Risco.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	12
2.1.	OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRA DE AÇÕES.....	12
2.1.1.	Ação.....	12
2.1.2.	Carteira de ações.....	13
2.1.3.	Diversificação.....	13
2.1.4.	Hipótese do Mercado Eficiente.....	14
2.2.	PORTFÓLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA.....	14
2.2.1.	Linha do mercado de capitais.....	15
2.3.	PORTFÓLIO COM ESTRATÉGIA RISCO DE PARIDADE.....	16
2.3.1.	Otimização de portfólios com risco de paridade.....	17
2.4.	ÍNDICES PARA ANÁLISES.....	18
2.4.1.	Índice Beta.....	18
2.4.2.	Índice de Sharpe e Treynor.....	19
2.4.3.	Índice de rebaixamento.....	19
3	METODOLOGIA.....	20
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	23
4.1.	PESOS DAS AÇÕES NOS PORTFÓLIOS DE PARIDADE DE RISCO.....	23
4.2.	PESOS DAS AÇÕES NOS PORTFÓLIOS DE MÉDIA-VARIÂNCIA.....	27
4.3.	DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS POR CASO.....	32
4.4.	RETORNOS DIÁRIOS ACUMULADOS E DRAWDOWN.....	36
4.5.	ÍNDICES DE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS.....	41
4.6.	COMPARANDO CASOS.....	46
5	CONCLUSÃO.....	50
	REFERÊNCIAS.....	51

1 INTRODUÇÃO

O relatório Uma Análise da Evolução dos Investidores Pessoas Físicas na B3 (2020) demonstra com a compilação de dados dos participantes na bolsa de valores brasileiras uma robusta evolução nos últimos anos. Com recordes no número de pessoas físicas a cada mês, possuindo grande ênfase o crescimento do pequeno investidor e a ampliação do grau de diversificação com aumento nos últimos anos na proporção de investidores que possuem mais de cinco ativos.

Houve um salto de aproximadamente 800 mil contas participantes na B3 em 2018 para 2,4 milhões em abril de 2020. No ano de 2016 apenas 21% dos participantes possuíam mais de 5 ativos, em 2020 este número passou para 48%, com saldo médio caindo de 14 mil para 6 mil respectivamente. O choque na B3 ocorrido em março de 2020, levou a posição total das pessoas físicas na bolsa perder 84 bilhões de reais entre janeiro de março.

A diversificação de uma carteira de ações é um dos processos sensíveis nas escolhas dos investidores, sendo a proporção dos ativos que gere carteira mais diversificada à ser preferida, onde a escolha dos pesos dos ativos é gerada a partir das expectativas de determinado retorno (Markowitz, 1952).

O processo de otimização de carteira de ações de Markowitz (1952) levou a expansão dos estudos de otimização de portfólios. Dentre estes estudos está o modelo de Paridade de Risco. Este novo processo de otimização busca solucionar o problema dos investidores no tocante ao controle de risco, ao propiciar ao investidor uma melhor diversificação (QUIAN, 2005).

A Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA) é uma importante instituição que organiza certificações voltadas para profissionais de investimentos no mercado brasileiro. O modelo de Média-Variância, aqui chamado de Markowitz, compõem o Programa Detalhado da Certificação de Especialista em Investimentos Anbima (2020).

Na perspectiva de uma nova demanda dos investidores na B3, a sensibilidade da diversificação na carteira de ações, os riscos que imputam prejuízos como os verificados entre janeiro de março de 2020 e o emprego do modelo de Média-Variância aos profissionais de

investimentos no Brasil, percebe-se a necessidade de comparar o modelo consagrado de Média-Variância elaborado por Markowitz (1952) e o modelo de Paridade de Risco.

O estudo será gerado através do método comparativo entre os resultados de performance, índices de riscos, qualidade da diversificação e índices da relação risco e retorno, calculados para carteiras de ações construídas com base nos modelos supracitados.

Na construção de uma carteira de ações tem-se como três importantes parâmetros: Número de ativos que irão compor a carteira, o período analisado e quantos balanceamentos na participação de cada ativo ao longo do tempo. Sendo contribuição deste trabalho não apenas montar uma carteira e analisar, mas sim da combinação destes três parâmetros na construção de portfólios.

Da escolha de quais ativos, existem estudos como da análise fundamentalista que propiciam está tomada de decisão, não fazendo parte do escopo deste trabalho. Foram escolhidos ativos que compõem Índice Ibovespa com a finalidade de propiciar boa comparação entre os processos de otimização e o principal índice do mercado brasileiro de ações. O horizonte temporal foi de 01/10/2017 a 01/10/2020, compreendendo assim mercado de alta até o choque nos preços em março de 2020 e sua posterior recuperação parcial. A base de dados para os preços diários foi Yahoo Finance. Os dados foram coletados e analisados com auxílio da linguagem de programação R, por intermédio do RStudio 4.0.2.

Tem-se como hipótese que a otimização com Paridade de Risco performa melhor em momentos de instabilidade, dado sua característica de diversificação e controle da contribuição dos riscos.

Este trabalho está dividido com capítulo 2 abordando principal referencial teórico das estratégias e índices de risco e retorno; capítulo 3 com a metodologia onde é definido construção de casos dada a combinação do número de ativos, número de balanceamentos e horizonte de tempo, trata da linguagem de programação R e pacotes utilizados, ativos selecionados e taxa livre de risco; ademais no capítulo 4 temos apresentação de resultados de cada caso, da combinação dos casos e apresentação dos índices de riscos dos casos, pôr fim a conclusão onde é verificada como satisfeita hipótese inicial no tocante a performance superior do Modelo de Paridade de Risco ocasionado com melhor relação risco e retorno, maior grau de diversificação na alocação dos ativos disponíveis.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo está organizado de forma a dispor sobre otimização de carteira de ações, referencial teórico da Paridade de Risco, a Teoria do Portfólio de Média-Variância e ferramentas analíticas para discussão dos modelos propostos.

2.1. OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRA DE AÇÕES

Otimização é processo no qual o agente emprega ferramentas técnicas e matemáticas para definir a solução ótima de um problema de minimização ou maximização de uma função objetiva, podendo essa ter ou não conjunto de funções restritivas.

Dentro deste processo decisório ao qual o investidor irá escolher sua cesta de ativos de forma a maximizar sua utilidade (VARIAN, 2016). A utilidade do investidor pode ser interpretada por inúmeras perspectivas, sendo comumente analisado sua expectativa de retorno e controle de risco. O consumidor deve decidir, além de quais valores mobiliários adquirir, os pesos de cada um em sua cesta, definindo padrão de distribuição dentre as possibilidades de consumo. O valor mobiliário estudado serão as ações de empresas brasileiras.

2.1.1. Ação

De acordo com inciso I, do artigo segundo, da Lei 6385/76, ação é um valor mobiliário que representa a menor parcela do capital social de uma companhia ou sociedade anônima, sendo assim um título patrimonial, conferindo ao titular, ou acionista, todos os direitos e deveres de um sócio.

Neste trabalho iremos dispor sobre ações negociadas publicamente em mercado de valores mobiliários, emitidas por companhias de sociedade anônima registradas na Comissão de Valores Mobiliários e negociadas na **B3**.

2.1.2. Carteira de ações

Entendida como conjunto de ações de propriedade de um agente, sendo sua escolha realizada de forma a maximizar a utilidade esperada sob condições de incerteza. A escolha ótima do consumidor, com perspectiva de incertezas, tem forma particularmente conveniente a função tradicional de Cobb-Douglas, que pode ser descrita inserindo as condições de incerteza e é conhecida como a função de utilidade esperada: (VARIAN, 2016, p. 219).

$$U(i) = \sum_{i=0}^n (\pi_i * v(c_i)) \quad (2.1)$$

Onde i é o número de ativos da carteira de ações, π_i é o consumo – peso – do ativo i na carteira de ações e $v(c_i)$ é função utilidade do retorno esperado do ativo i . Adicionalmente temos que o somatório de todos os pesos é igual a 1. Adicionalmente podemos entender também utilidade esperada como o somatório das utilidades vinculadas aos possíveis resultados ponderada pela probabilidade de sua ocorrência. (PINDYK; RUBINFELD, 2014, p. 158).

Dado que a composição dos i ativos possuem probabilidades de retornos diferentes, ou seja, riscos diferentes, devemos abordar através da diversificação a escolha ótima do agente.

2.1.3. Diversificação

Pode ser entendida como estratégia de alocar capital em ações de empresas pertencentes a setores diferentes da economia, com finalidade de reduzir os riscos não sistemáticos específicos de cada setor ao contrabalancear os riscos inerentes de cada setor. (DEBASTIANI; RUSSO, 2008, p. 133).

Uma forma de mensurar o grau de diversificação está no estudo da correlação dos preços, para isso devemos entender a eficiência dos preços e o comportamento da correlação ao longo do tempo.

2.1.4. Hipótese do Mercado Eficiente

O estudo iniciado por Fama (1970) discorre sobre a forma que as informações refletem nos preços, este trabalho assume a pressuposição da forma forte, onde os preços refletem todas as informações, públicas e privadas, instantaneamente, de forma a não existir a possibilidade de distorções nos preços devido a utilização de informação privilegiada. Justifica-se esta escolha, mesmo que em algum grau ela não corresponda exatamente com a realidade, pois tais distorções inicializariam qualquer análise.

2.2. PORTFÓLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA

No processo de seleção de portfólio não se deve procurar apenas em maximizar o retorno esperado, assim seriam construídos portfólios pouco diversificados e dotados de maior variância, ou seja, risco. A seleção tem como premissa encontrar o maior retorno esperado e a menor variância correspondente, entretanto existe intercorrelação entre os ativos e deve-se adotar o princípio da diversificação para tal efeito. (MARKOWITZ, 1952).

Markowitz comentada que buscou realizar uma apresentação de fácil interpretação, evitando realizações de provas matemáticas complicadas, indicando fragilidade de rigor matemático e limitações no tocante a não generalidade dos argumentos ao crer na probabilidade estatística apresentada.

Temos que o retorno esperado é construído com o argumento que o valor esperado de uma soma ponderada é a soma ponderada dos valores esperados, assim o retorno esperado do portfólio é a soma ponderada dos retornos esperados dos ativos:

$$E = \sum_{i=1}^n X_i \mu_j \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1 \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

$$X_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n$$

Assim temos o retorno esperado (E), X_i é a participação do ativo no portfólio e μ_i é o retorno esperado do ativo. Adicionalmente a soma as participações deve ser igual a um. Já a variância possui outro grau de complexidade, necessitando definir inicialmente a matriz de covariância entre os retornos dos ativos, segue:

$$V = X_{(1 \times n)} \text{cov}(\mu)_{(n \times n)} X_{(1 \times n)}^t \quad (2.5)$$

A variância do portfólio é V, o $X_{(1 \times n)}$ é matriz dos pesos no n ativos, cov (n x n) é matriz simétrica de covariância dos retornos esperados dos n ativos, onde usaremos o preços dos retornos históricos dos ativos.

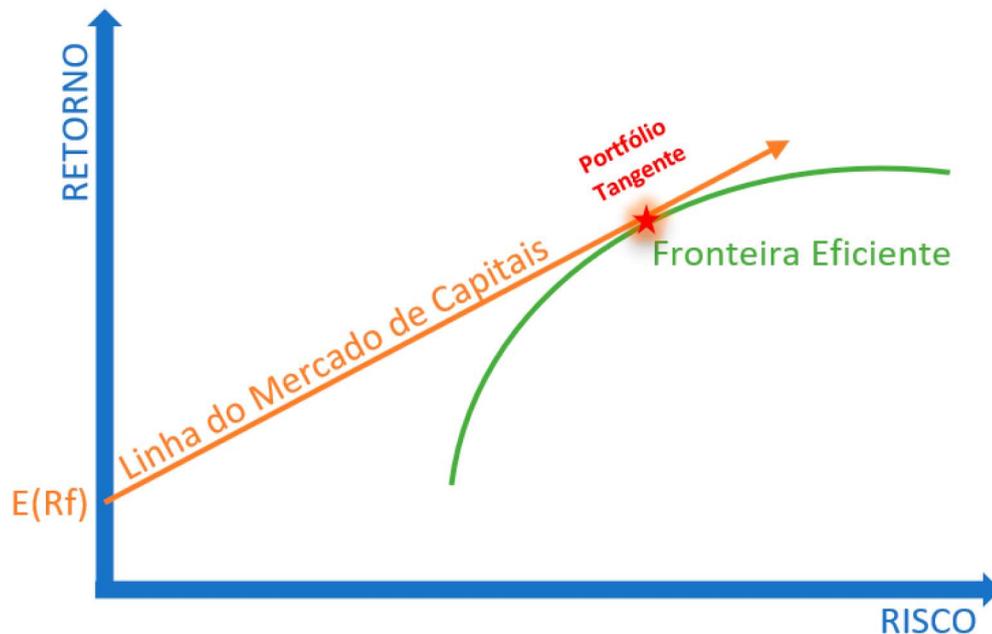
O investidor possui várias combinações possíveis de retorno esperado e variância, devendo selecionar as combinações dos ativos que propiciem o maior retorno esperado para um dado nível de variância. Com as combinações dos maiores retornos esperados para cada nível de variância é possível construir fronteira de combinações eficientes.

O processo de otimização por este método pode ter como função objetivo maximizar o retorno esperado ou minimizar a variância, as duas abordagens são corretas. Os resultados são sensíveis aos dados de entrada e ao tamanho da amostragem.

2.2.1. Linha do mercado de capitais

A Linha de mercado de capitais, *Capital Market Line*, realiza a representação de diferentes combinações de portfólios que detenham em sua composição o ativo livre de risco, representados por uma linha reta com origem no retorno esperado do ativo livre de risco. No ponto onde a Linha de mercado de capitais tangência a fronteira eficiente do portfolio de Média-Variância corresponde ao portfólio com risco ideal, este ponto é o Portfolio Tangente. Neste ponto, matematicamente, se têm expressado o portfólio que maximiza relação entre risco e retorno de todas as combinações de pesos de ativos. (WÜRTZ, 2009, p. 225)

FIGURA 1 – ILUSTRAÇÃO DO PONTO DO PORTFÓLIO TANGENTE



FONTE: O autor (2020)

2.3. PORTFÓLIO COM ESTRATÉGIA RISCO DE PARIDADE

Estratégia que consiste em alocar igualmente entre todas as classes de ativos mobiliários a mesma quantidade de risco, sendo estratégia da família de beta eficiente. Sua abordagem está direcionada para diversificação, no intuito de limitar o impacto das perdas individuais, diferindo assim da abordagem tradicional. (QIAN, 2005).

A performance deste processo de otimização tem como premissa que o retorno esperado é proporcional ao risco esperado da carteira dado um mesmo nível de Índice de Sharpe para uma mesma classe de ativo, desta forma ao ter um nível de risco alvo também teríamos considerações sobre o retorno esperado. (QIAN, 2005).

2.3.1. Otimização de portfólios com risco de paridade

A otimização possui diversas contribuições na literatura, sendo a de Maillard, Roncalli e Teiletche (2010) será utilizada, pois vai ao encontro da ferramenta que será utilizada e especificada no capítulo Metodologia.

Consideraremos para um portfólio $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ onde são representados os pesos dos n ativos, onde σ_i^2 é a variância dos i ativos, σ_{ij} a covariância entre os ativos i e j , e Σx é a matriz de covariância e x^t é a matriz transposta dos pesos dos n ativos. O risco total do portfólio será a somatório de todas as contribuições de risco dos n ativos e pode ser obtido da seguinte forma:

$$\sigma(x) = \sqrt{x^t \Sigma x} = \sum_i x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{i \neq j} x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \sigma_i(x) \quad (2.6)$$

O risco de contribuição marginal, ou seja, a quantificação de variação de risco dada uma unidade de variação do peso do ativo, é obtido com a derivação da volatilidade por x_i , tal que:

$$\partial_{x_i} \sigma(x) = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{x_i \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} x_j \sigma_{ij}}{\sigma(x)} \quad (2.7)$$

Ao encontro da proposta de compararmos com modelo proposto por Markowitz, a especificação do modelo de paridade de risco aqui descrita possui restrição de não utilizar da estratégia de venda a descoberto, sendo a soma dos pesos dos ativos igual a um. Matematicamente temos os pesos como:

$$x^k = \{x \in [0,1]^n : \sum x_i = 1, x_i * \partial_{x_i} \sigma(x) = x_j * \partial_{x_j} \sigma(x) \forall i, j\} \quad (2.8)$$

Conforme Maillard et al (2010) descreve a generalização dos casos com dois e para mais de dois ativos, temos no último caso um crescimento significativo no número de parâmetros. Podemos perceber na construção do problema que a quantidade alocada em um

ativo será a razão do inverso da volatilidade com o inverso da média harmônica das respectivas volatilidades.

A solução do numérica do processo de otimização construída pelos autores é realizada usando algoritmo de Programação Quadrática Sequencial, segue argumento de minimização e suas respectivas restrições:

$$\begin{aligned} x^{\hat{c}} &= \operatorname{argmin} f(x) \\ \text{sujeito a } 1^T x &= 1 \text{ e } 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \hat{c}_{ij}$$

A existência de um portfólio onde os ativos contribuem com mesma quantidade de risco só é alcançada com a verificação da condição que $f(x^{\hat{c}}) = 0$, denotando que $x_i \hat{c}_{ij}$, desta forma basicamente a programação irá minimizar a variância das contribuições de risco dos ativos.

2.4. ÍNDICES PARA ANÁLISES

2.4.1. Índice Beta

Fundamental para analisar o risco sistemático, sua interpretação denota o desenvolvimento ou sensibilidade de um ativo ou portfólio frente a um parâmetro escolhido, geralmente indicador como Ibovespa. Sua representação matemática é dada como coeficiente angular e pode ser obtida da seguinte forma: (SCHOLLES et al, 1977).

$$\beta_n^t \equiv \frac{\operatorname{cov}(r_{nt}^t, r_{Mt}^t)}{\operatorname{var}(r_{Mt}^t)} \quad (2.10)$$

Onde r_{nt}^s é o retorno do ativo a ser avaliado no período s e r_{Mt}^s o retorno do ativo escolhido como comparação no período (t).

2.4.2. Índice de Sharpe e Treynor

Desenvolvido a partir do Índice de Treynor, mensura a performance do investimento em comparação a outro ativo, sendo geralmente comparado com ativo livre de risco. Matematicamente temos: (SHARPE, 1966).

$$T = \frac{E[r_t - F_t]}{\beta_{r_t}} \quad (2.11)$$

$$S = \frac{E[r_t - F_t]}{\sigma_{r_t}} \quad (2.12)$$

A diferença entre os índices Treynor (T) e Sharpe (S) está no denominador, onde Treynor utiliza como medida o beta β_{r_t} , enquanto Sharpe o desvio padrão do retornos do ativo σ_{r_t} , sendo analisados no período (t), $E[r_s - F_s]$ é a expectativa da diferença entre o ativo analisado (r_s) e o ativo livre de risco (F_s).

2.4.3. Índice de rebaixamento

Conhecido como *drawdown*, mensura as quedas nos preços em relação ao valor máximo do preço histórico corrente, sendo utilizado para mensurar risco da carteira com interpretações quanto a proporção de rebaixamentos em relação ao período total e o rebaixamento máximo conhecido. Formalmente temos: (GOLDBER; MAHMOUD, 2016).

$$R(T) = \max (X(t)) - X(T), t \in (0, T) \quad (2.13)$$

$$AvR(T) = \frac{1}{T} \int_0^T R(t) dt \quad (2.14)$$

$$MR(T) = \max D(\mu), \mu \in (0, T) \quad (2.5)$$

O índice de rebaixamento $R(T)$ é dado com (t) maior ou igual a zero em um processo estocástico onde $X(0) = 0$ e (T) é o período analisado. AvR será a média corrente de rebaixamentos no período (T) e $MR(T)$ é o máximo rebaixamento dentro do período.

3 METODOLOGIA

Comparação das duas abordagens heurísticas, portfólio paridade de risco (PPV) e portfólio média-variância (PMV), foram construídas de forma observar se há melhor desenvolvimento quando analisados diferentes números de ativos, períodos e número de balanceamentos ao longo do tempo. Foram elaborados um total de 16 portfólios, comparando 8 casos diferentes para cada heurística, diferenciando-se conforme as características supracitadas, conforme (QUADRO 1).

QUADRO 1 – PARAMETROS DO PORTFÓLIOS

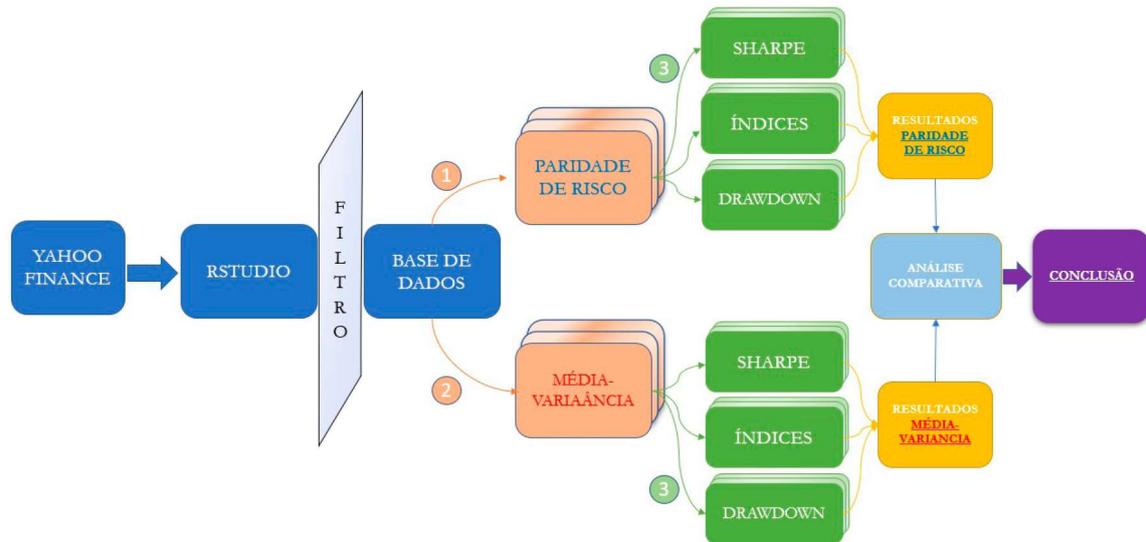
CASOS	Nº DE ATIVOS		BALANCEAMENTOS		PERÍODO ANALISADO	
	10	20	Mensal	Trimestral	2019.10.01 - 2020.10.01 (12 meses)	2017.10.01 - 2020.10.01 (36 meses)
1	x		x		x	
2	x		x			x
3	x			x	x	
4	x			x		x
5		x	x		x	
6		x	x			x
7		x		x	x	
8		x		x		x

FONTE: O autor (2020)

O fluxo do trabalho está descrito conforme a (FIGURA 1). Os dados foram obtidos através do *Yahoo Finance*, importados para o RStudio 4.0.2 *software* gratuito, por meio da biblioteca *quantmod* 0.4.17, com preços de fechamento ajustado ao qual ajusta as distribuições de proventos realizados antes da abertura do mercado de forma a mitigar distorções. Os dados coletados foram tratados e filtrados apenas para as datas nos quais todos possuíam seus respectivos preços. No RStudio 4.0.2, com auxílio das bibliotecas *riskParityPortfolio* 0.2.1 e *fPortfolio* 3042.83.1 foram realizados os cálculos dos portfólios de risco de paridade e de Markowitz respectivamente, conforme os itens (1) e (2) na, e a biblioteca *PerformanceAnalytics* 2.0.4 (3) foi empregada na construção dos indicadores

(FIGURA 1). Dentre os múltiplos portfólios de Média-Variância possíveis, será utilizado neste trabalho o portfólio com melhor relação risco-retorno, localizado no ponto de encontro da semirreta com origem no ponto do retorno do ativo livre de risco, que tangencia a curva de indiferença dos portfólios de Média Variância, ponto do Portfolio Tangente.

FIGURA 2 – FLUXO DO TRBALHO



FON

TE: O autor (2020)

Para propiciar comparação na qualidade das heurísticas entre si e com o mercado, optou-se por formar a carteira de ações com maior participação no Índice Ibovespa na data da captura dos dados, sendo realizada no dia 11/10/2020 no *site* da B3, além desta premissa soma-se a necessidade de a empresa estar ao menos desde 01/10/2016 listada na bolsa de valores B3 e não ter trocado seu código de negociação, sendo resultado a empresas listadas no (QUADRO 2).

QUADRO 2 – LISTA DE AÇÕES

Nº	CÓDIGO DE NEGOCIAÇÃO	EMPRESA	Nº	CÓDIGO DE NEGOCIAÇÃO	EMPRESA
1	ITUB4	ITAUNIBANCO	11	BBDC3	BRABESCO
2	B3SA3	B3	12	RENT3	LOCALIZA
3	PETR4	PETROBRAS	13	VALE3	VALE
4	BBDC4	BRABESCO	14	GGBR4	GERDAU
5	PETR3	PETROBRAS	15	LAME4	L. AMERICANAS
6	MGLU3	MAGAZ LUIZA	16	LREN3	LOJAS RENNER
7	ABEV3	AMBEV S/A	17	JBSS3	JBS
8	WEGE3	WEG	18	VVAR3	VIAVAREJO

9	ITSA4	ITAUSA	19	RADL3	RAIADROGASIL
10	BBAS3	BRASIL	20	RAIL3	RUMO S.A.

FONTE: *site* da B3 (2020)

O Banco Central do Brasil disponibiliza por meio da Calculadora Cidadão o valor equivalente entre períodos da taxa CDI, o qual por seu amplo emprego no mercado financeiro será utilizado no cálculo do Índice de Sharpe dos portfólios. Os valores da taxa CDI para os períodos estão expostos no (QUADRO 3).

QUADRO 3 – TAXA LIVRE DE RISCO (CDI)

PERIODO	CDI (%)
2019.10.01 - 2020.10.01 (12 meses)	3,550786
2017.10.01 - 2020.10.01 (36 meses)	17,357797

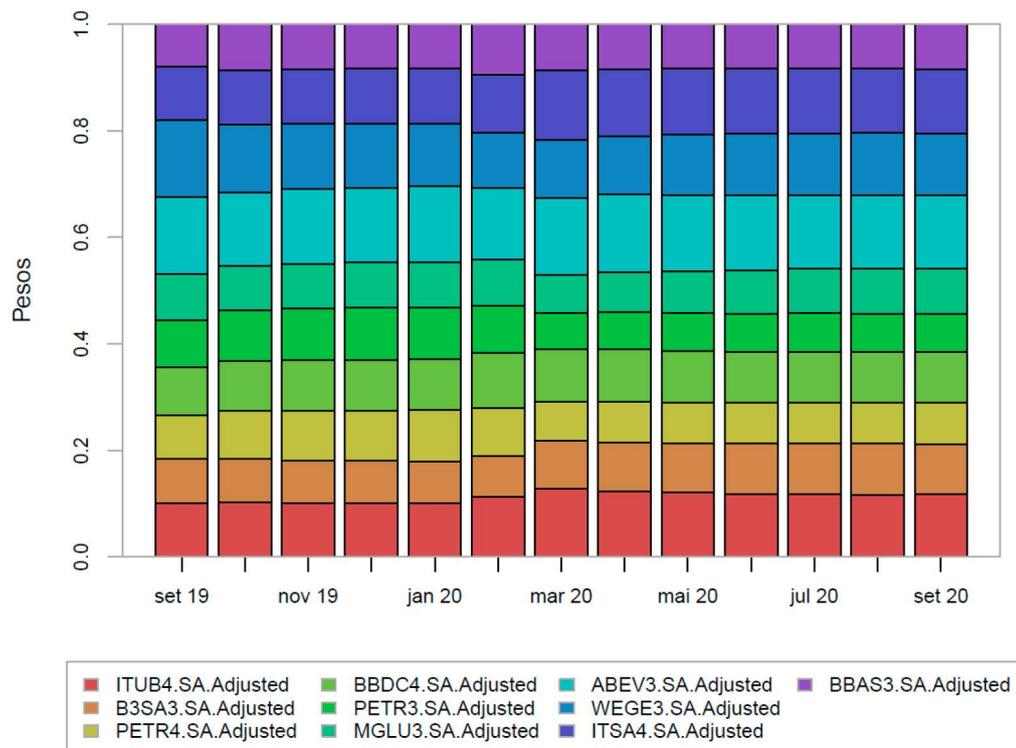
FONTE: Banco Central do Brasil (2020)

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1. PESOS DAS AÇÕES NOS PORTFOLIOS DE PARIDADE DE RISCO

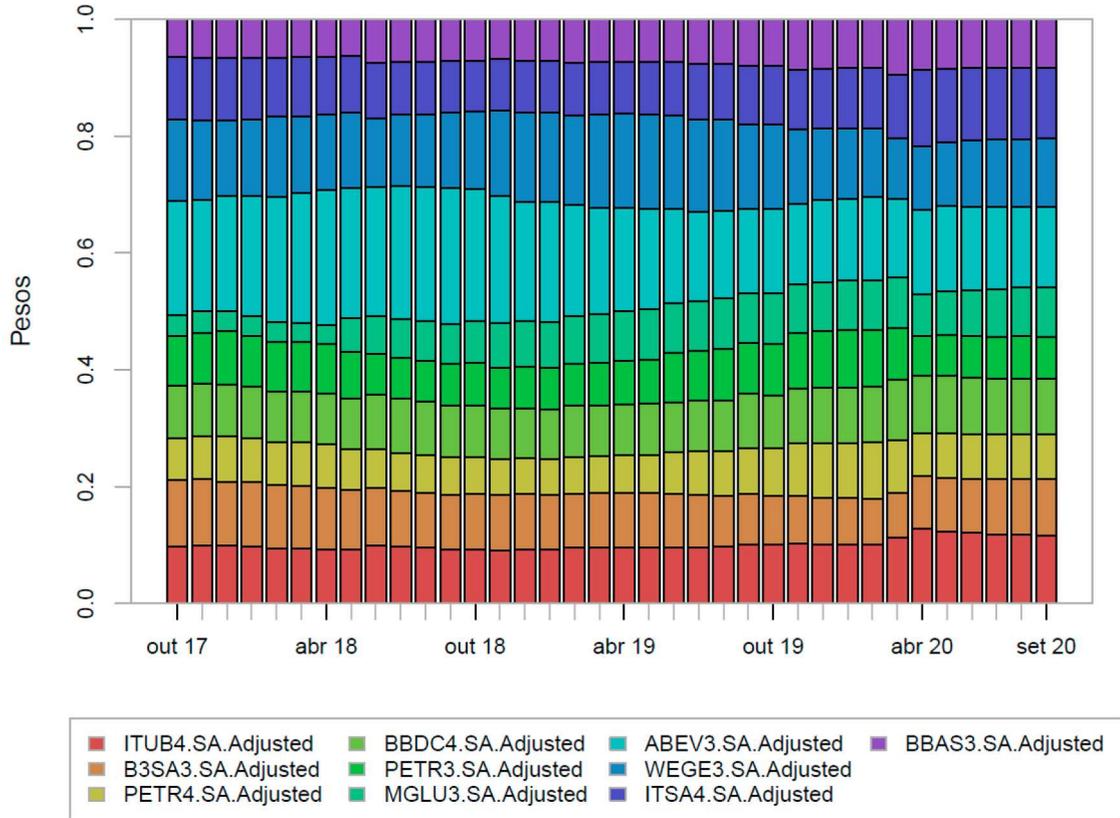
Estes portfólios têm como característica a diversificação em todos os ativos disponíveis para seu caso. São alocados os ativos de forma a contribuírem com mesmo grau de risco para conjunto da carteira. A participação de cada ação no portfólio sofre alteração ao longo dos balanceamentos de acordo com sua exposição ao risco, podendo atribuir maior peso em caso da diminuição do risco ou menor exposição se houver aumento do risco. Todos os casos apresentaram uniformidade na distribuição dos pesos ao longo do tempo.

GRÁFICO 1 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 01



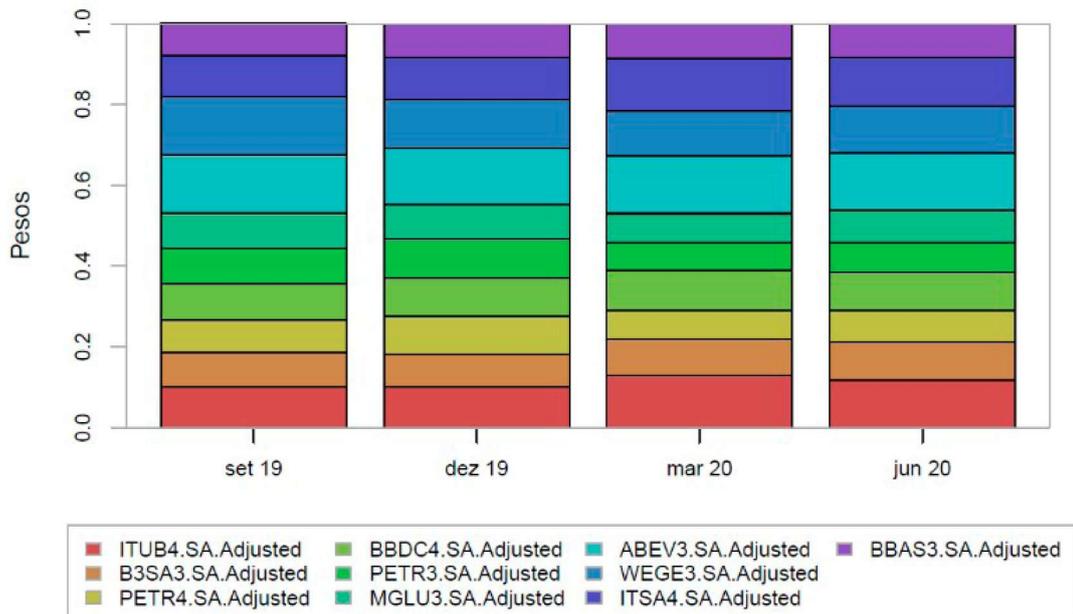
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 2 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 02



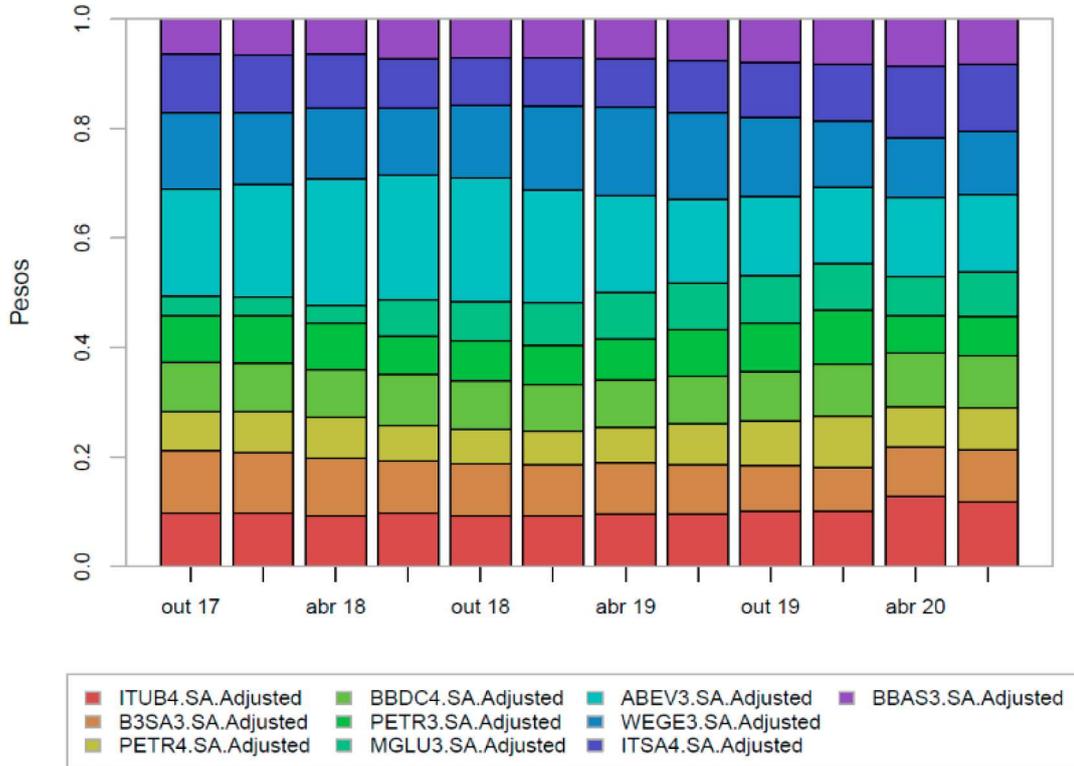
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 3 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 03



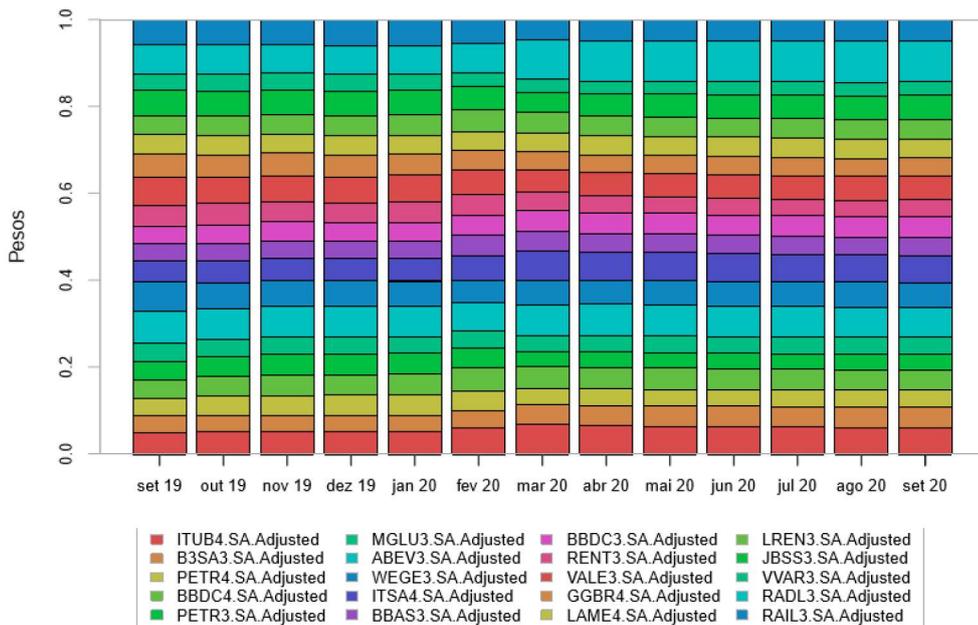
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 4 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 04



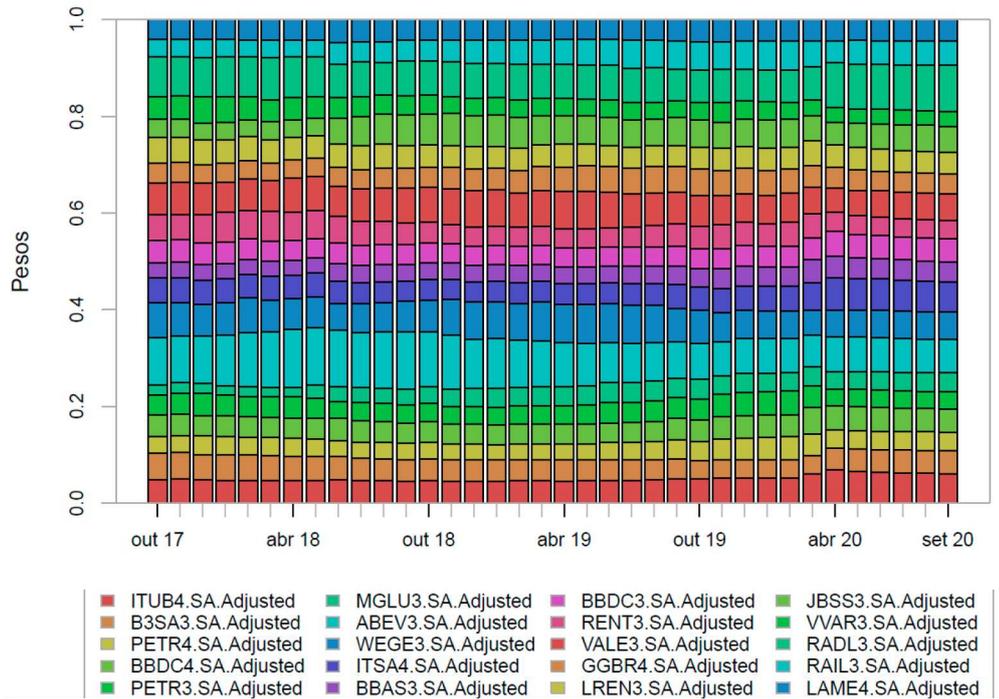
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 5 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 05



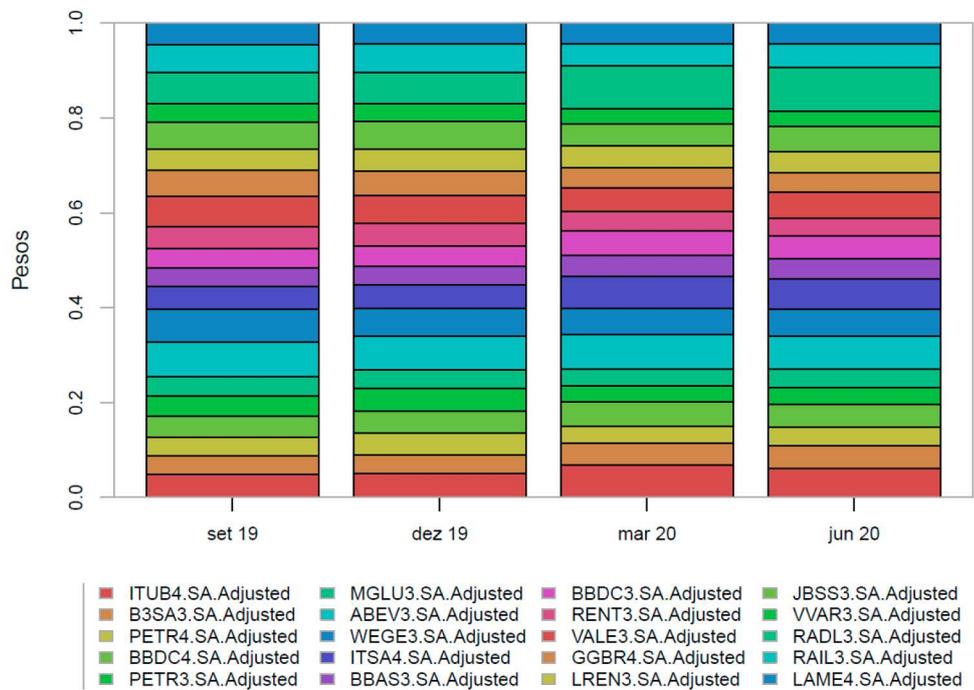
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 6 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 06



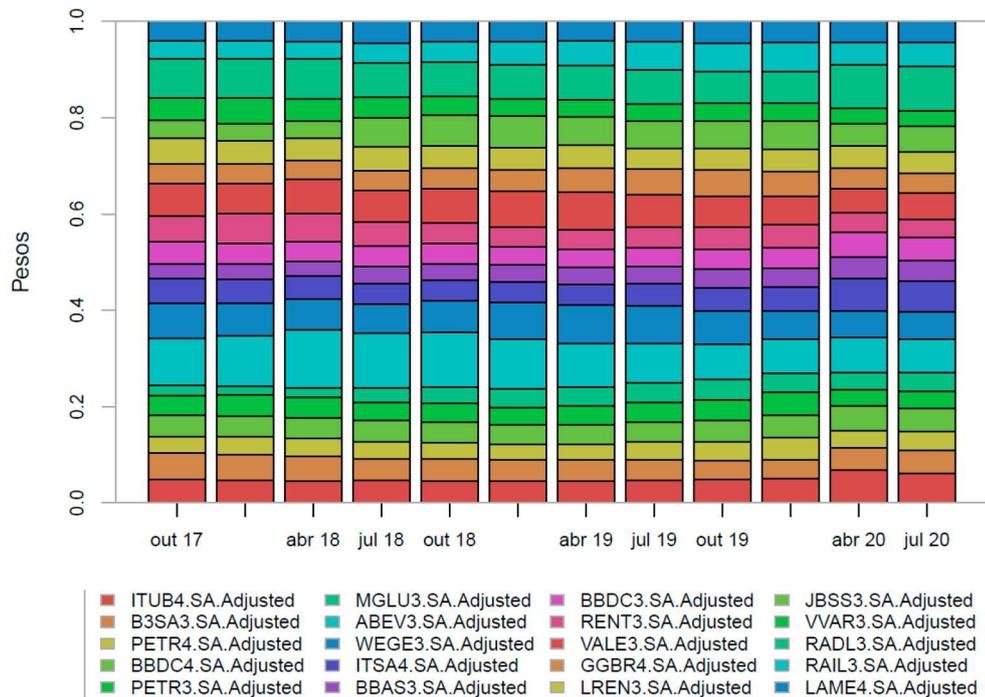
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 7 – PESOS DE PARIDADE DE RISCO: CASO 08



FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 8 – PESOS PPR: CASO 8

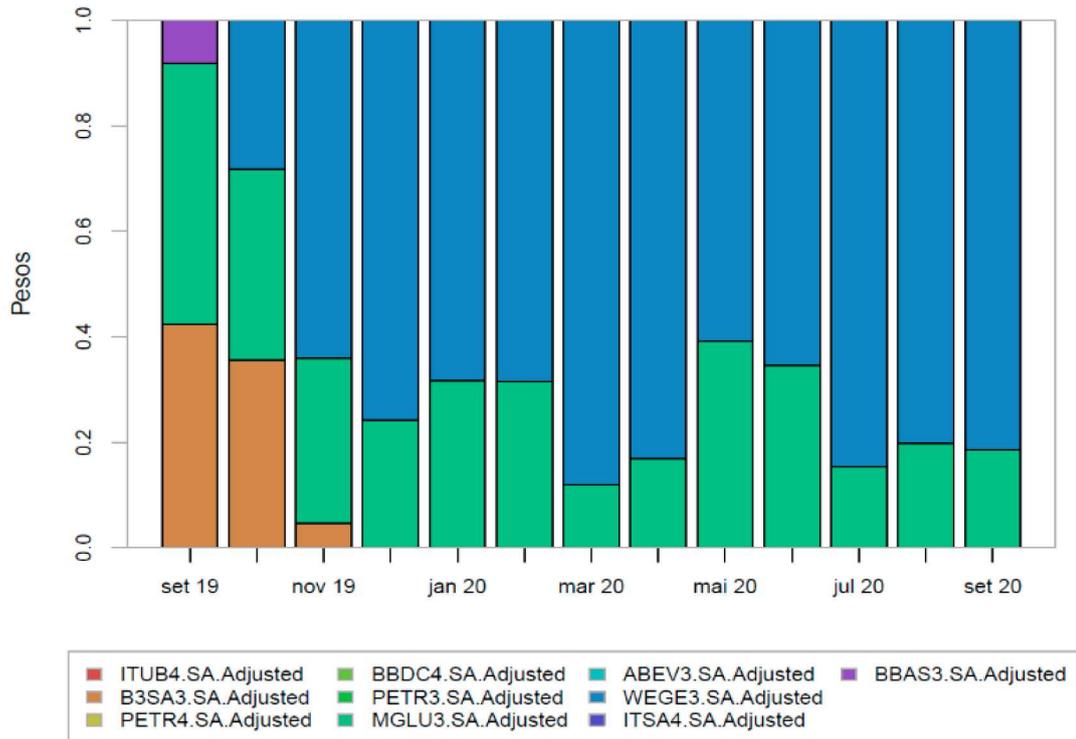


FONTE: O autor (2020)

4.2. PESOS DAS AÇÕES NOS PORTFÓLIOS DE MÉDIA-VARIÂNCIA

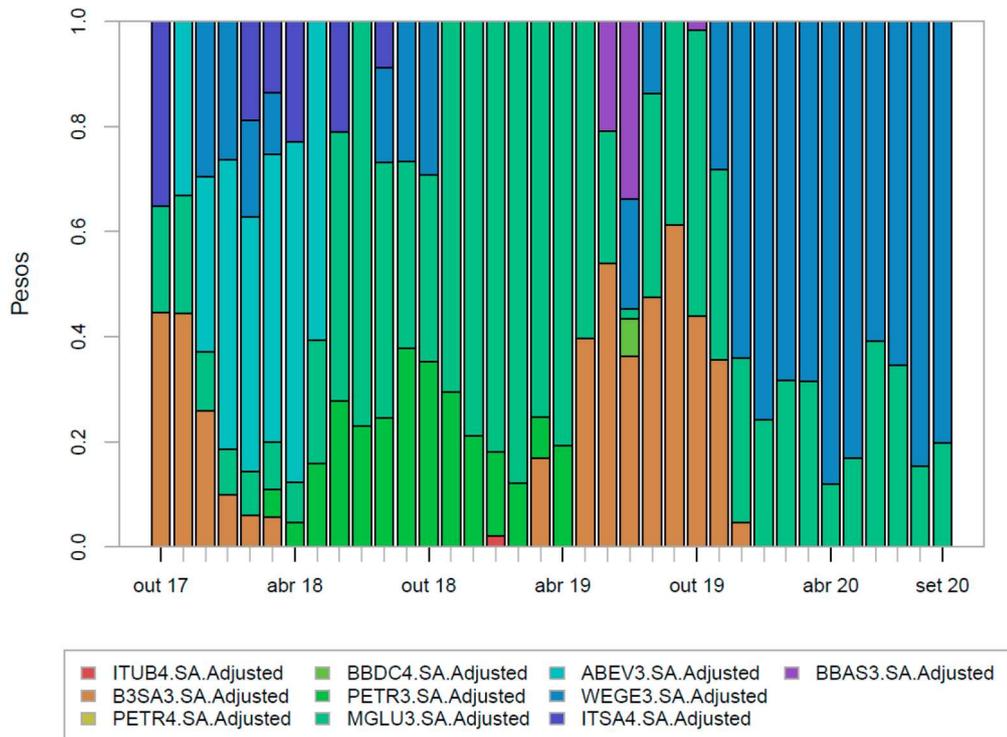
Muito diferente dos resultados dos Portfólios de Paridade de Risco quanto uniformidade da distribuição dos pesos das ações ao longo do tempo, estes portfólios têm como característica uma pobre diversificação. São alocados os recursos em poucos ativos, sendo amplamente concentrados em todos os casos construídos. Os casos com período de 36 meses (gráficos 10, 12, 14 e 16) possuem maior diversificação em relação aos casos analisados com período de 12 meses (gráficos 9, 11, 13 e 15), entretanto, inferiores a todos os casos de Paridade de Risco.

GRÁFICO 9 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 01



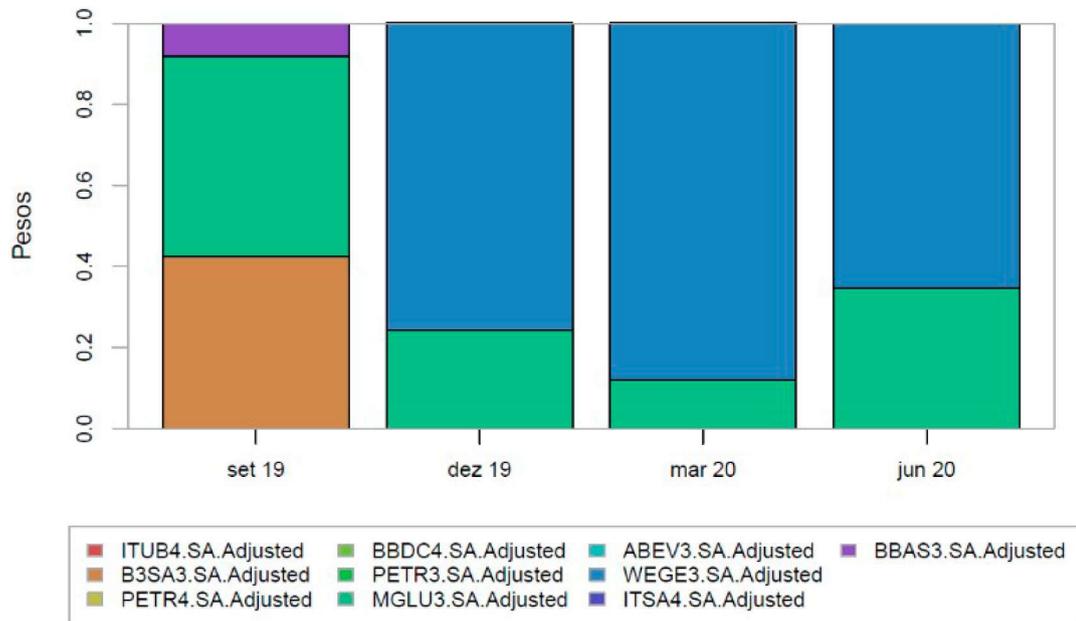
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 10 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 02



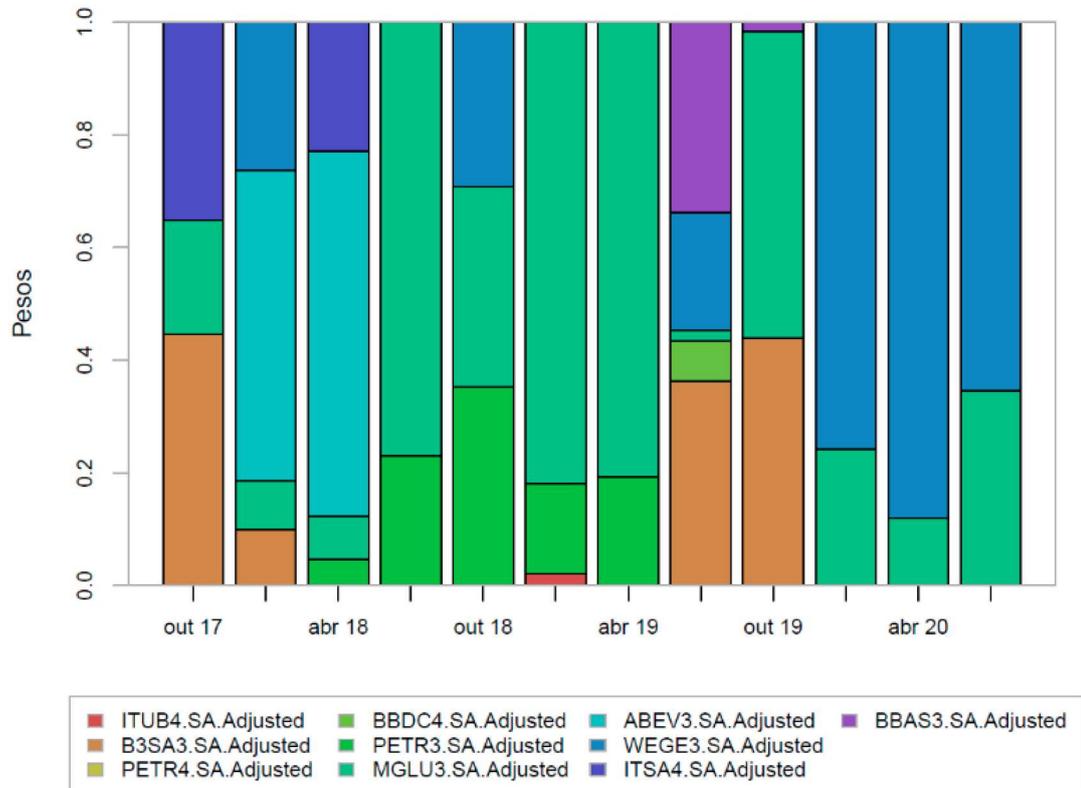
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 11 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 03



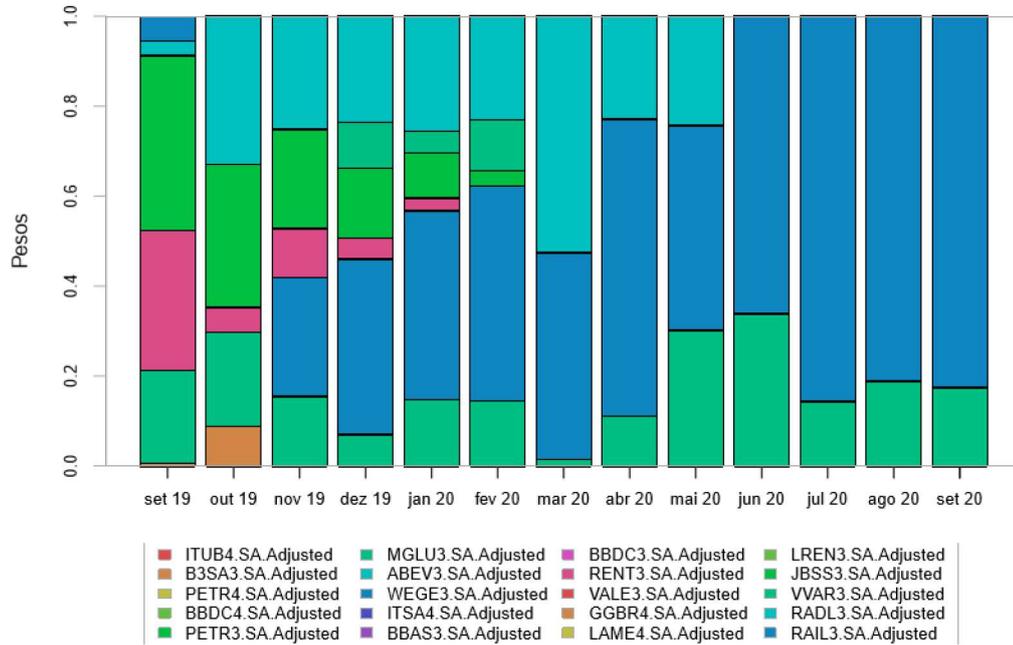
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 12 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 04



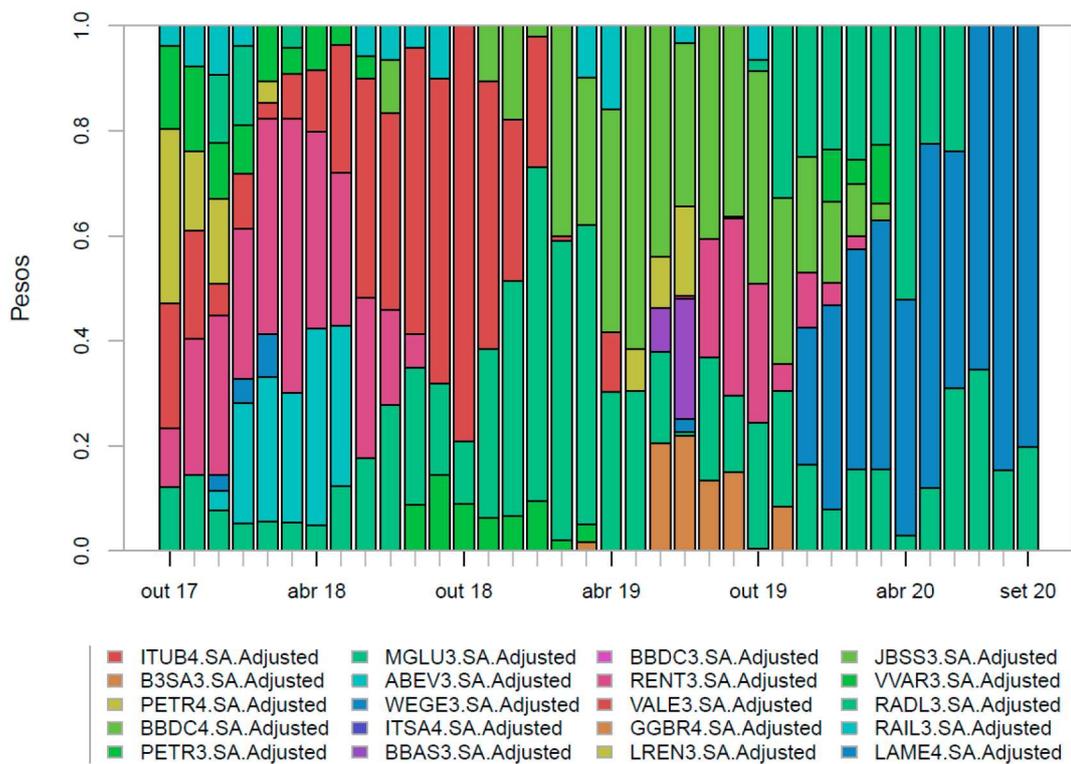
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 13 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 05



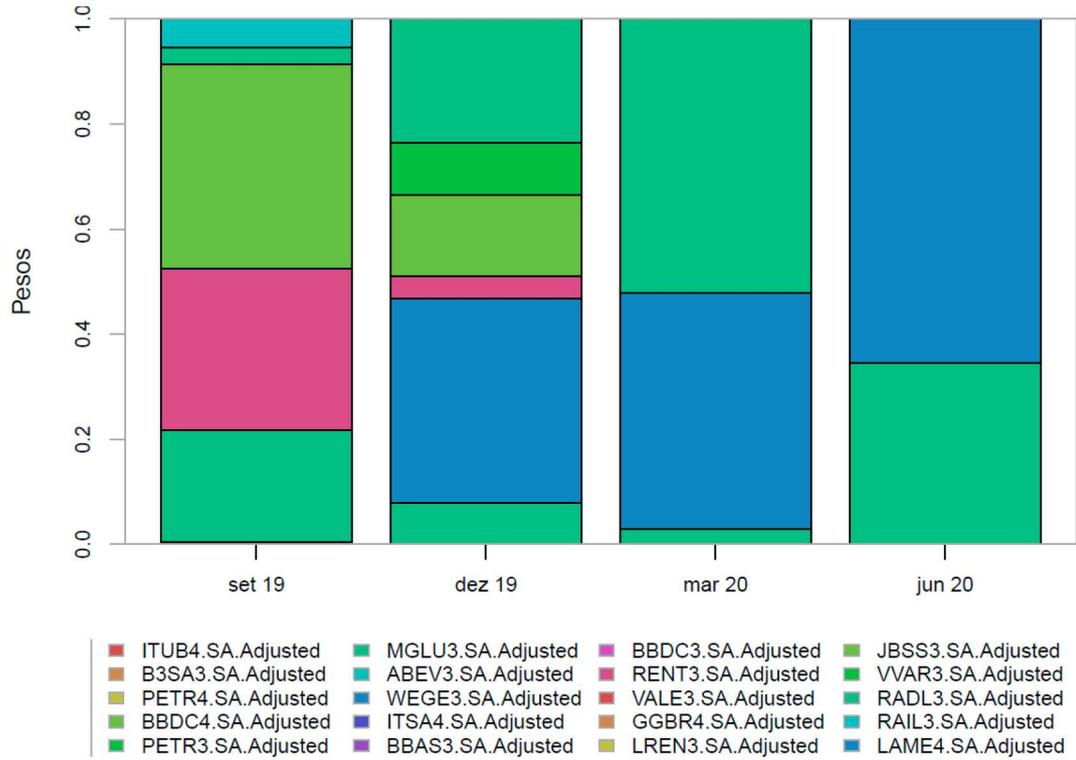
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 14 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 06



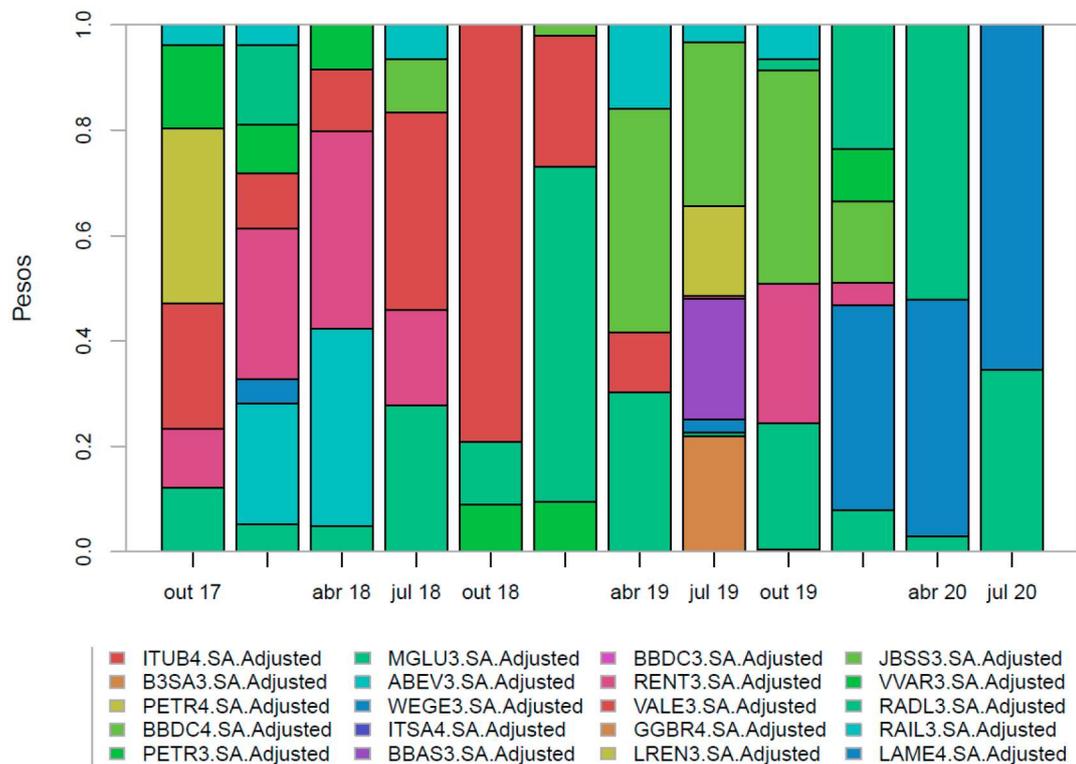
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 15 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 07



FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 16 – PORTFOLIO DE MÉDIA-VARIÂNCIA: CASO 07

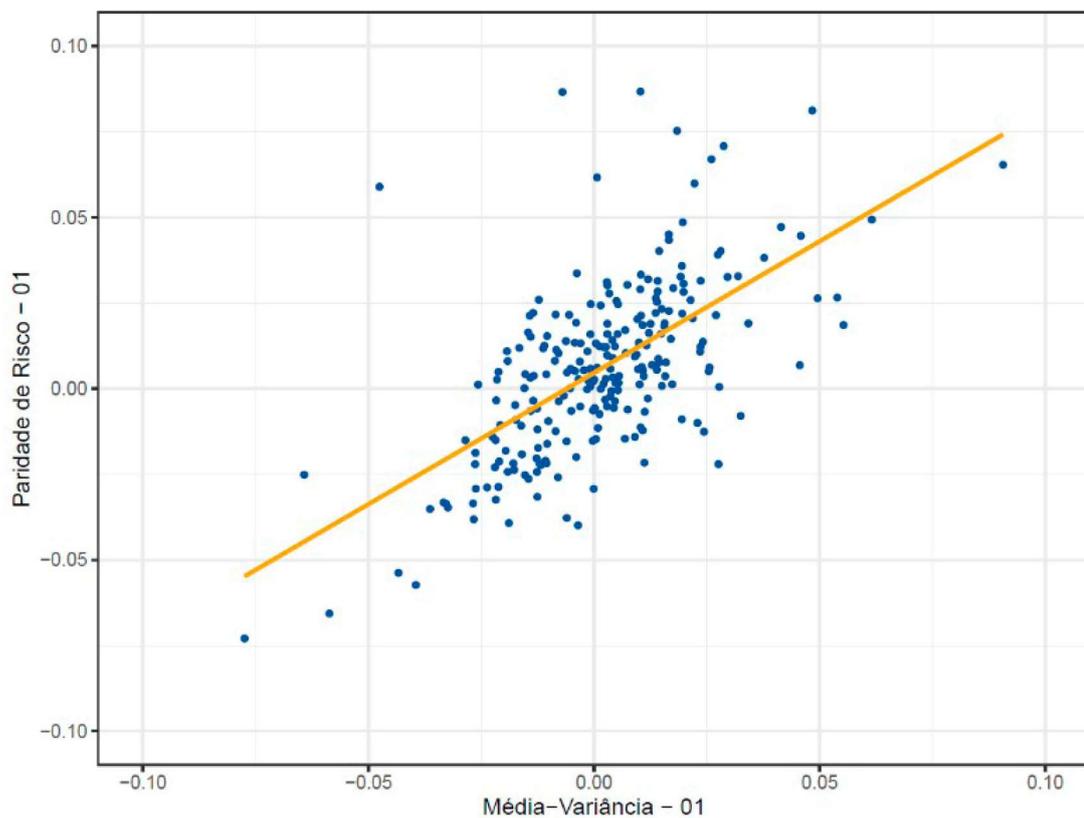


FONTE: O autor (2020)

4.3. DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS POR CASO

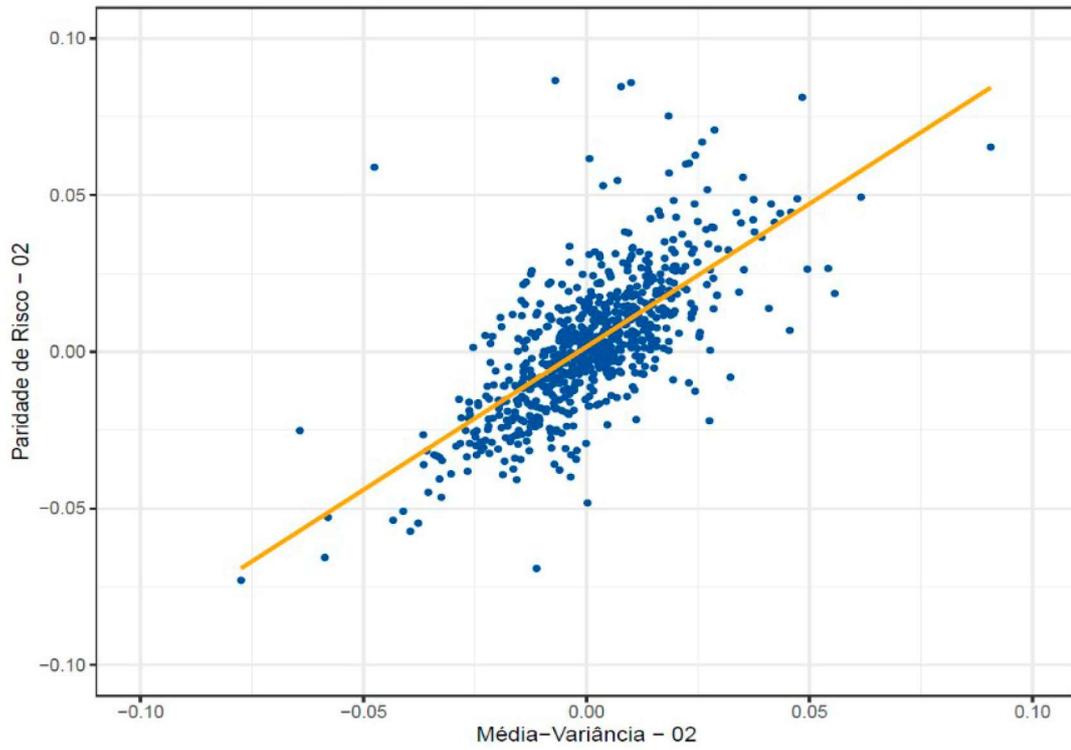
Os retornos diários dos portfólios de Média-Variância possuem correlação positiva com os retornos diários dos portfólios de Paridade de Risco em todos os casos, conforme apresentado nos próximos oito gráficos. As correlações positivas em todos os casos eram esperadas, ao considerarmos que os portfólios são construídos com os mesmos ativos e demais parâmetros. O diferencial entre as performances de cada processo de otimização será dado com diferença de magnitude destes retornos, os quais serão apresentados posteriormente.

GRÁFICO 17 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 1



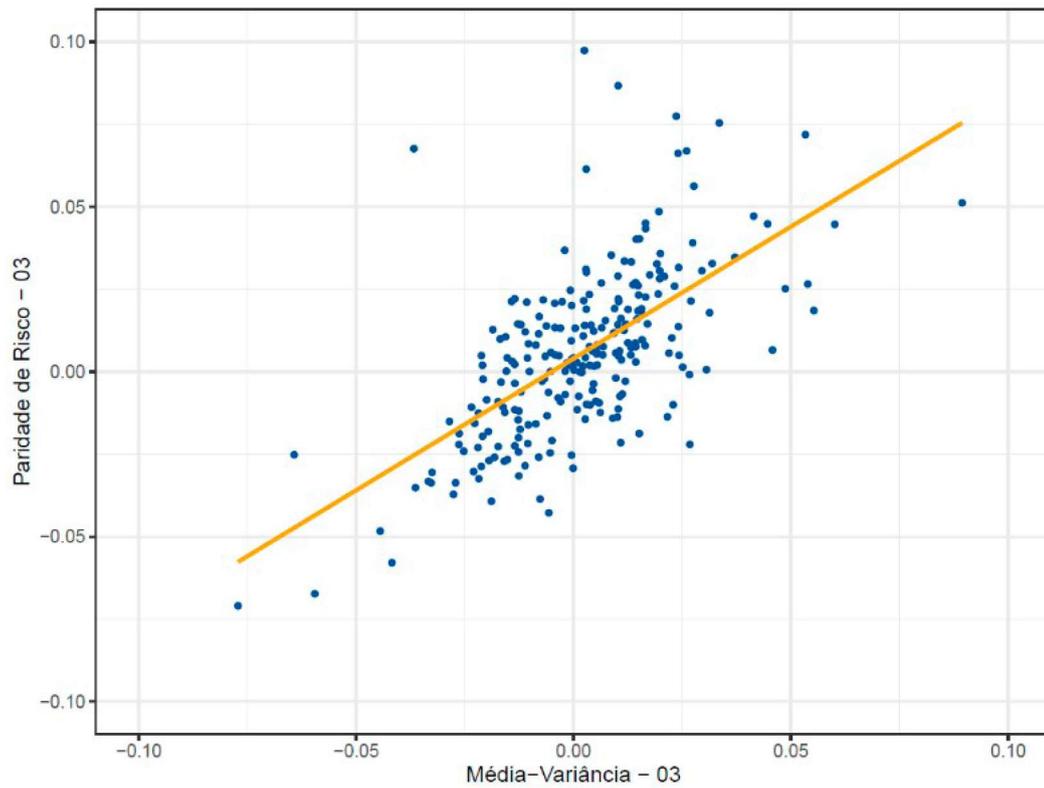
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 18 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 2



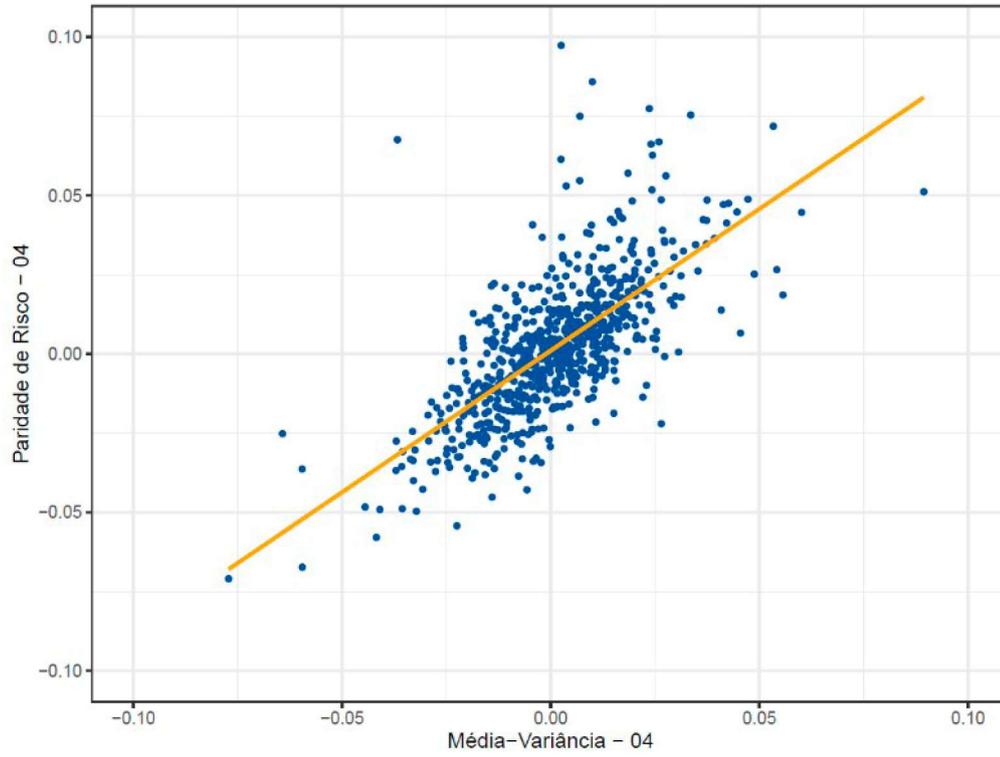
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 19 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 3



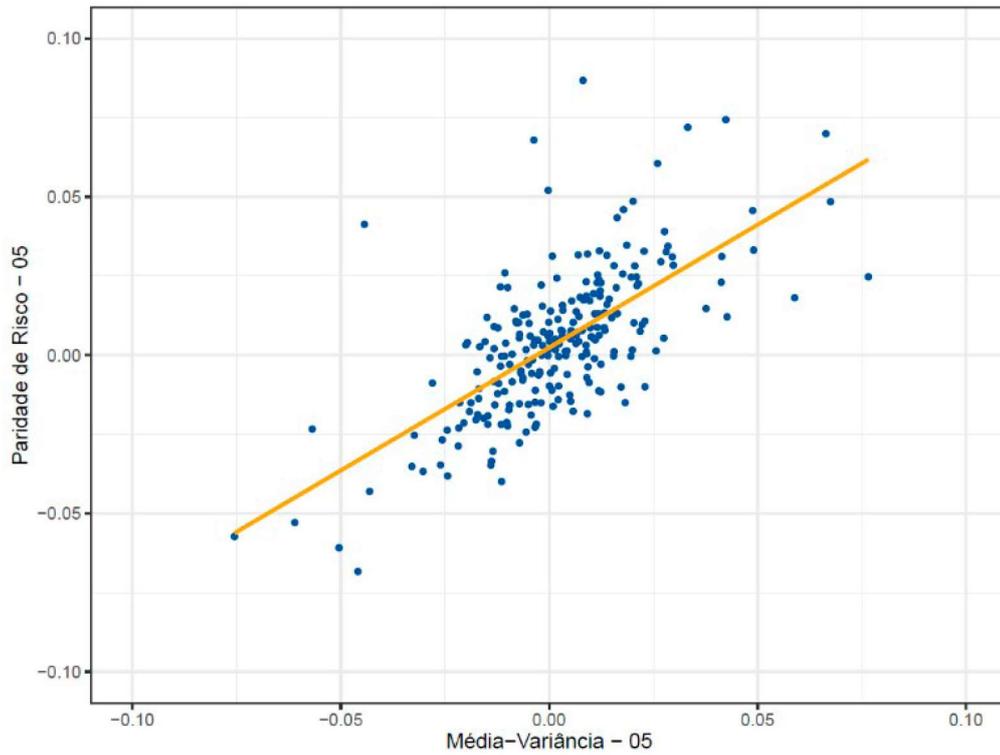
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 20 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 4



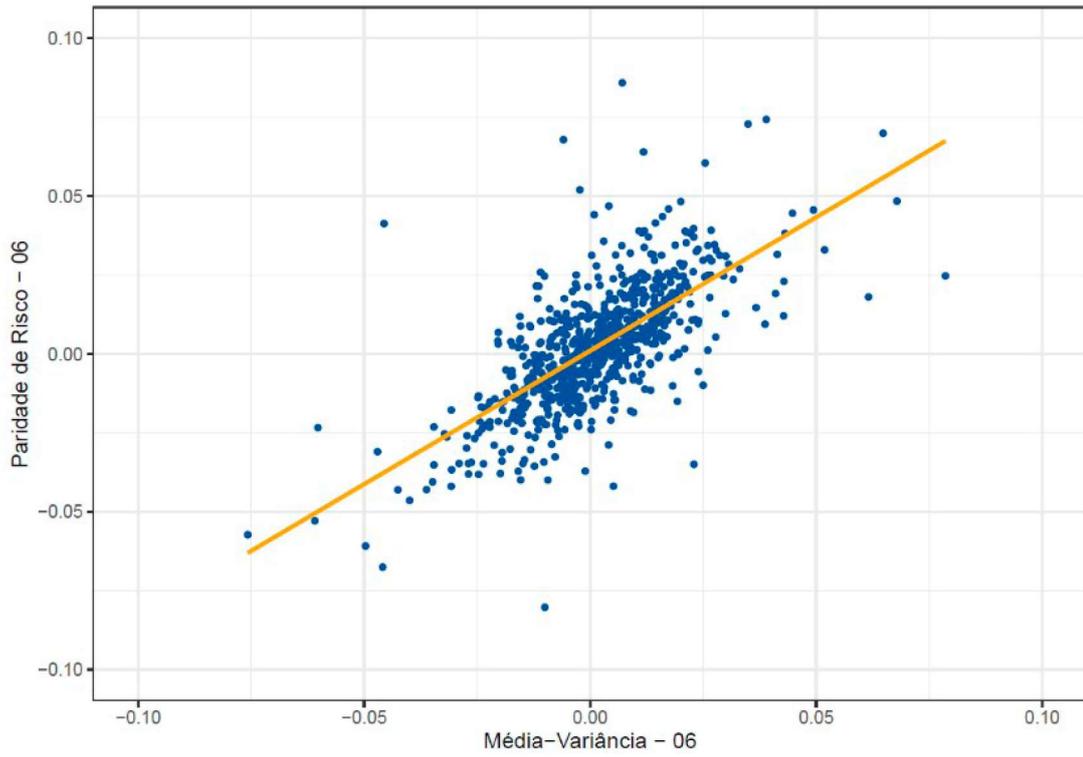
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 21 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 5



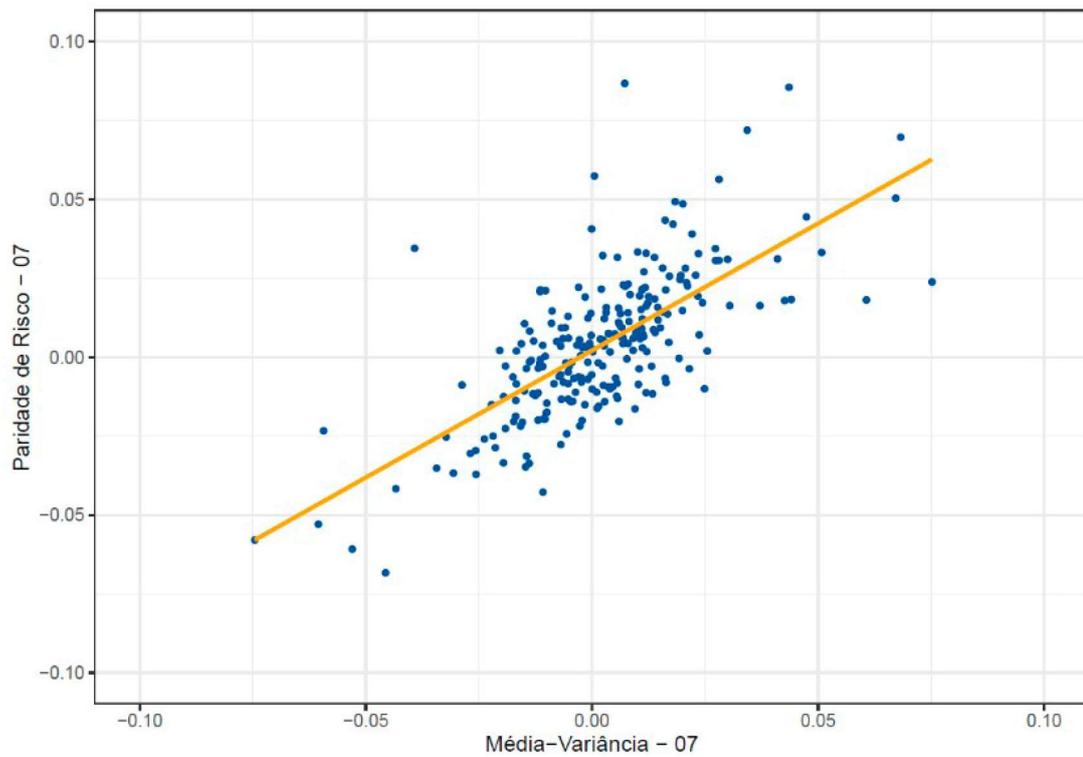
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 22 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 6



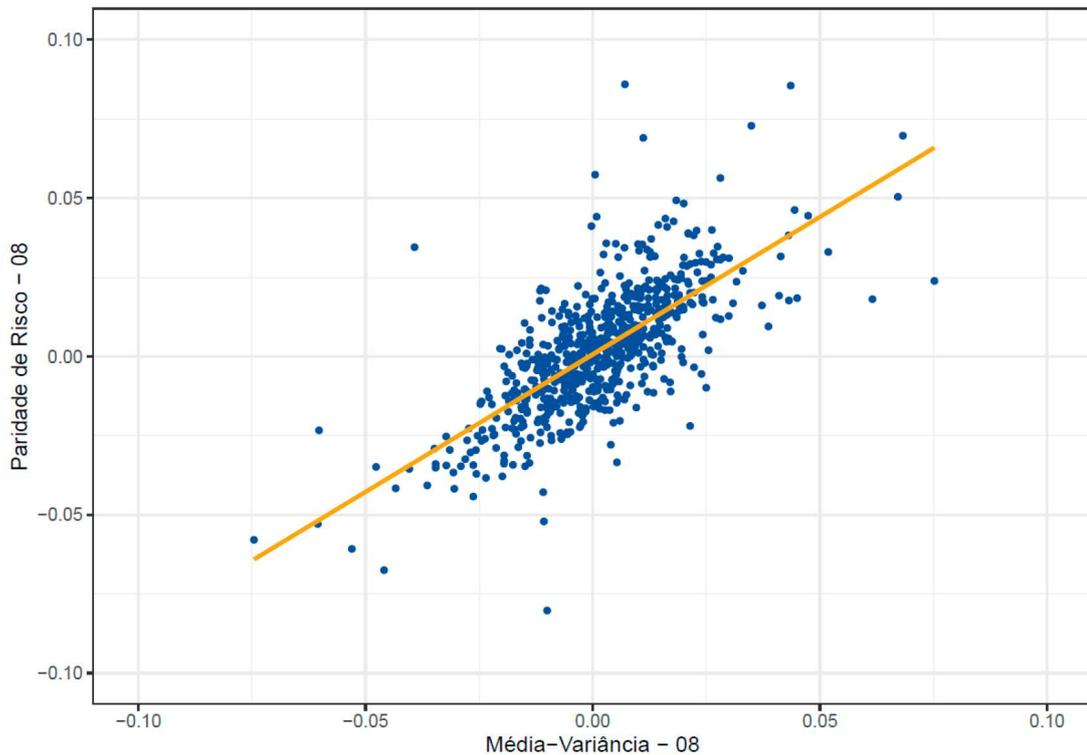
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 23 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 7



FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 24 – DISPERSÃO DOS RETORNOS DIÁRIOS: CASO 7



FONTE: O autor (2020)

4.4. RETORNOS DIÁRIOS ACUMULADOS E DRAWDOWN

Os retornos acumulados demonstram dentro de cada caso qual estratégia auferiu melhor performance, sendo em todos os casos estudados a estratégia de paridade de risco com melhor desempenho. Curiosamente em todos os casos apresentados os PMV possuem grande aderência ao Índice Ibovespa. Os pontos de mínimo dos retornos acumulados, ocorridos após o choque na bolsa em março de 2020, são observados melhores índices dos PPR em todos os casos.

Dos casos com 10 ativos, apresentados nos gráficos 25 ao 28, tem-se um grande descolamento entre as curvas dos retornos diários dos PPR e PMV no período posterior ao choque do COVID-19 em março de 2020. Isto se deve a capacidade de recuperação dos PPR com maior grau de diversificação. Os PPR mitigam o risco ao diminuir as posições dos ativos com maior variância nos retornos diários e possibilita boa retomada ao não concentrar em apenas poucos ativos, como ocorre nos PMV.

Dos casos com 20 ativos, apresentados nos gráficos 29 ao 32, os retornos acumulados tanto do PPR quanto do PMV fitam com maior aderência o Índice Ibovespa. Antes do choque na bolsa ocorrido em março, não é possível observar superioridade entre os dois modelos.

Os *Drawdowns* ao longo do tempo, em todos os casos, são observados melhores índices de risco para os Portfólios de Paridade de Risco. Os rebaixamentos dos Portfólios de Média-Variância são superiores tanto na observação no ponto de mínimo histórico, quanto nos rebaixamentos correntes.

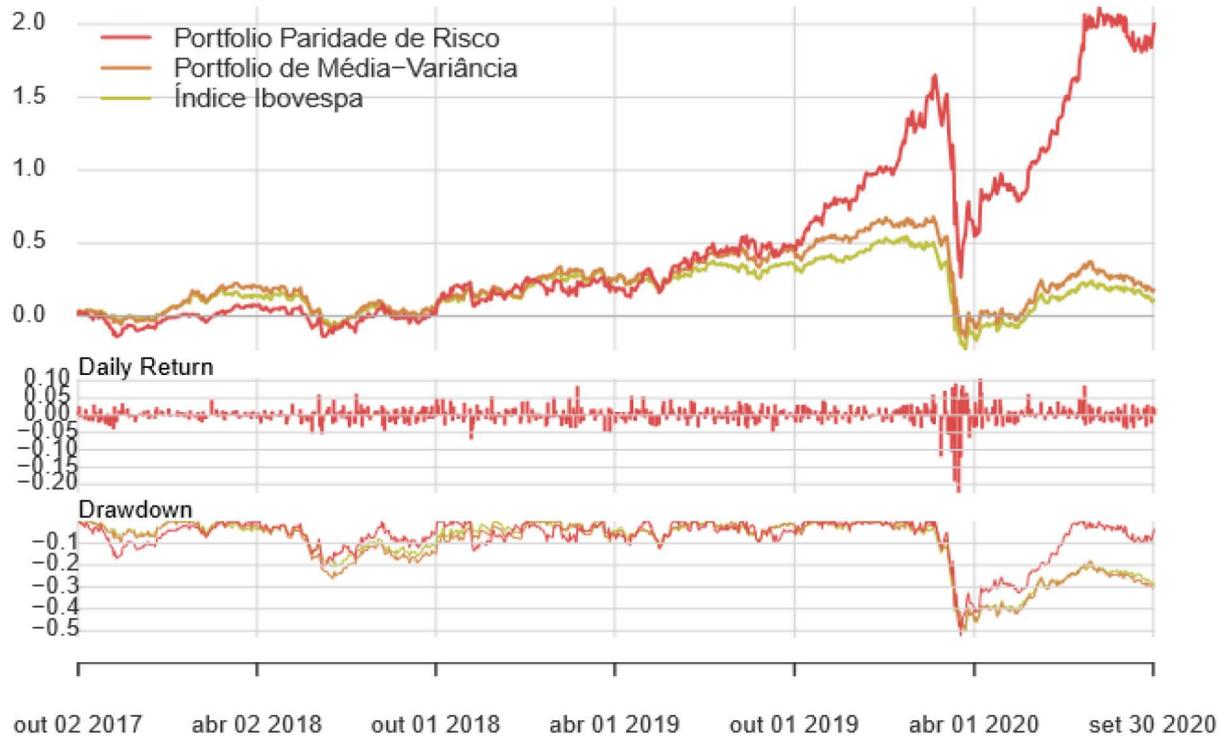
Adicionalmente a comparação entre os dois processos de otimização é possível inferir que portfólios com 10 ativos são preferíveis em relação aos de 20 ativos e que balanceamento mensal em relação ao trimestral.

GRÁFICO 25 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 1



FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 26 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 2



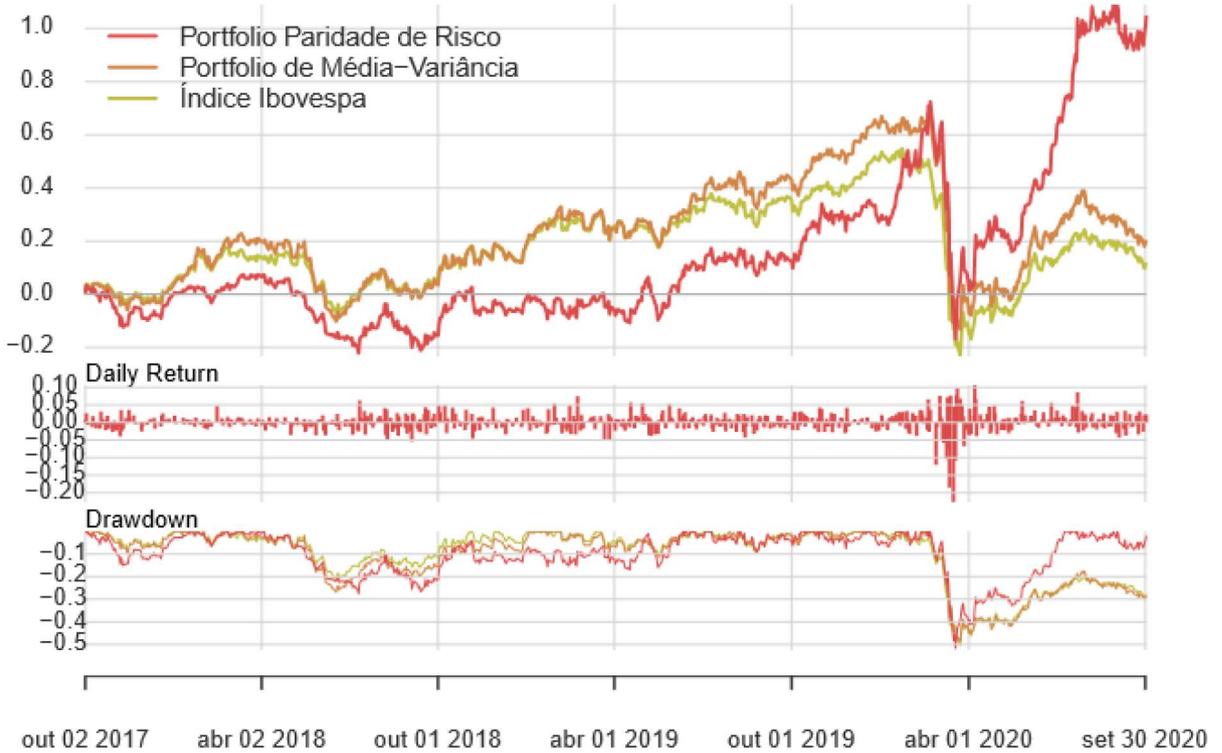
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 27 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 3



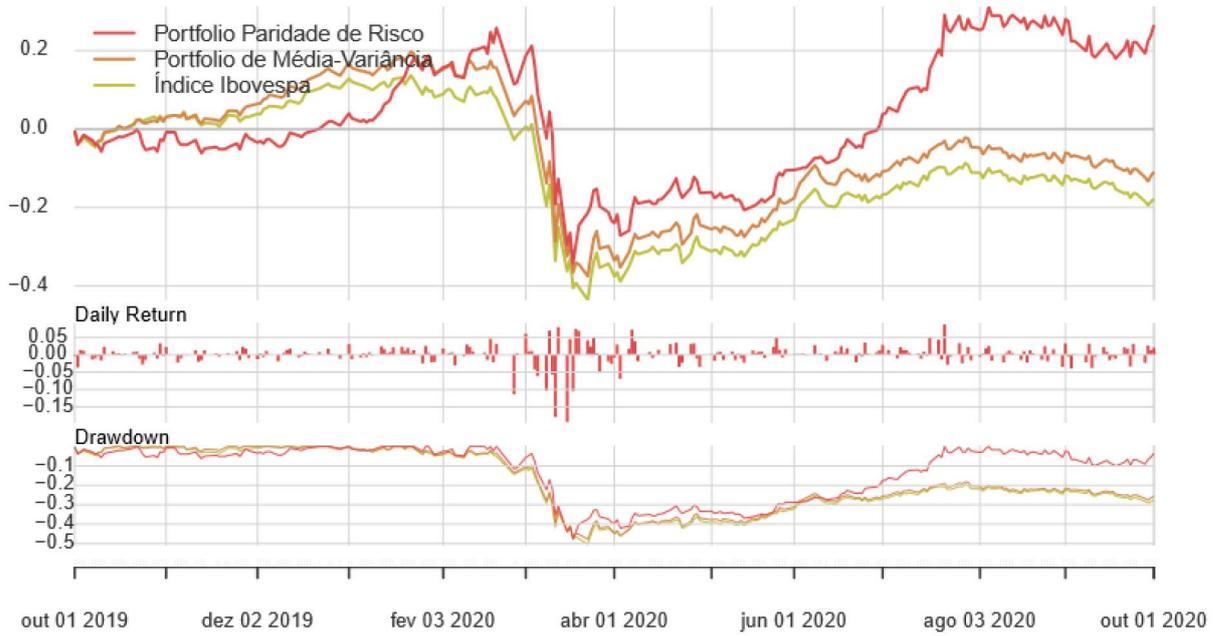
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 28 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 4



FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 29 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 5



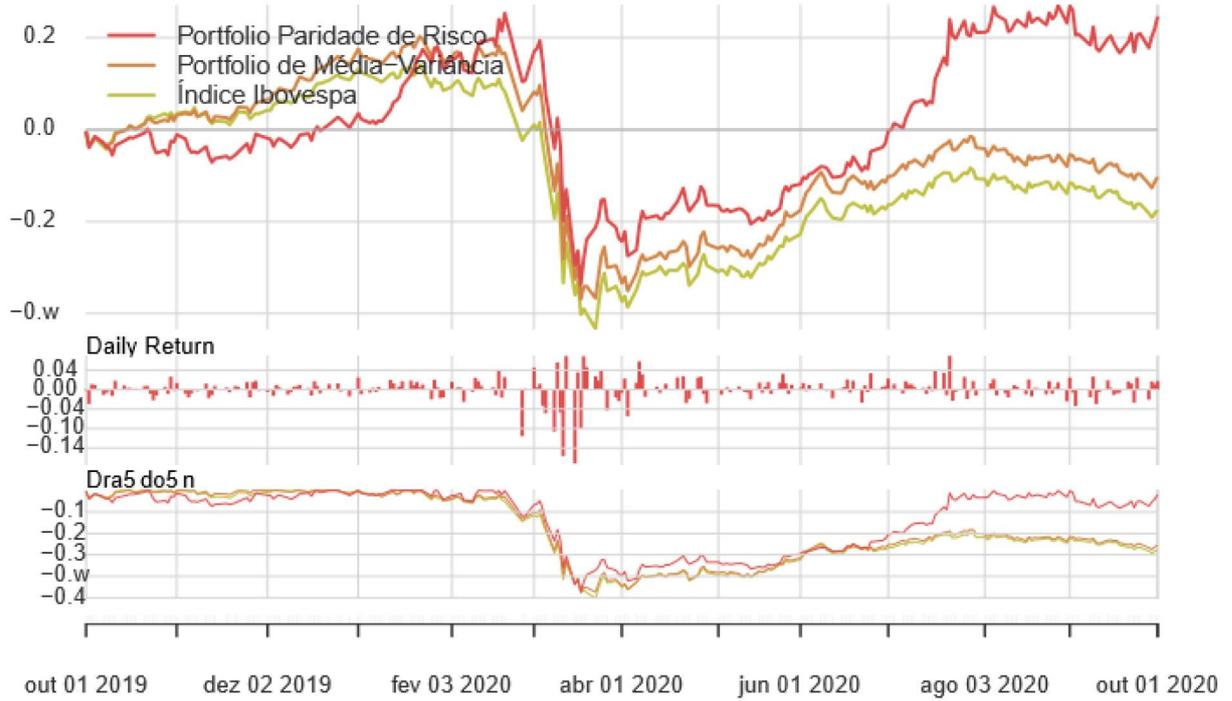
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 30 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 6



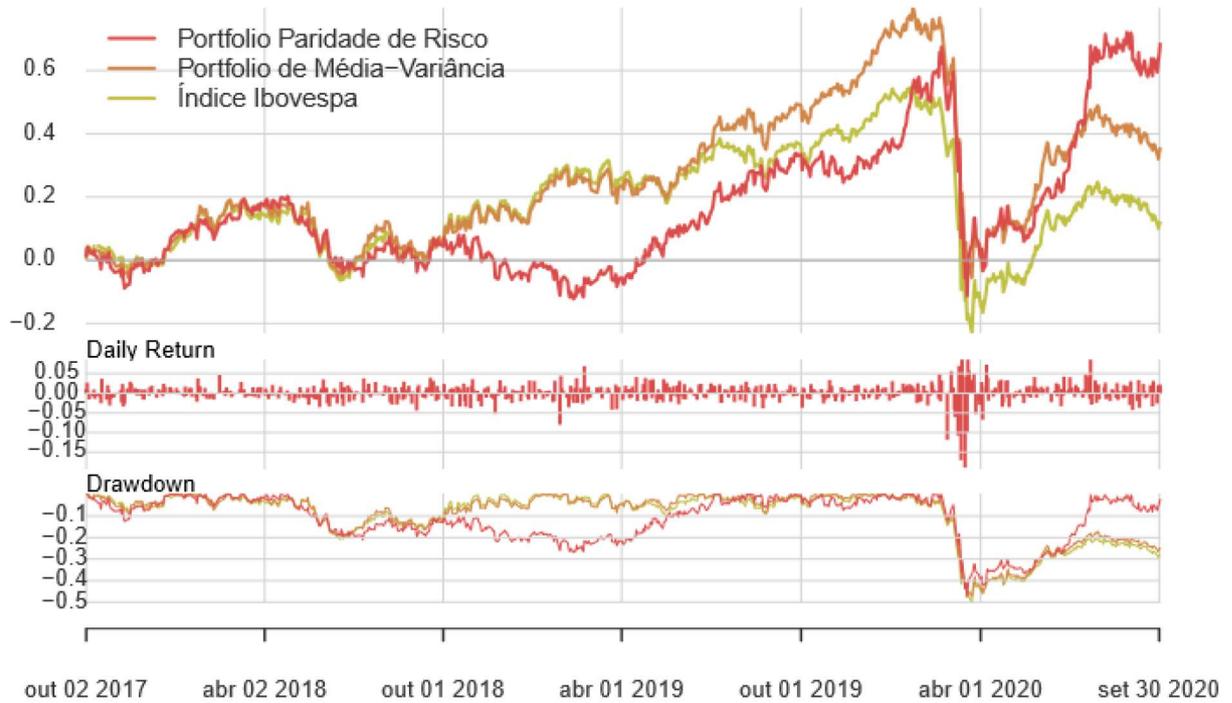
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 31 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 7



FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 32 – RETORNOS DIÁRIOS E DRAWDOWN ACUMULADO: CASO 8



FONTE: O autor (2020)

4.5. ÍNDICES DE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS

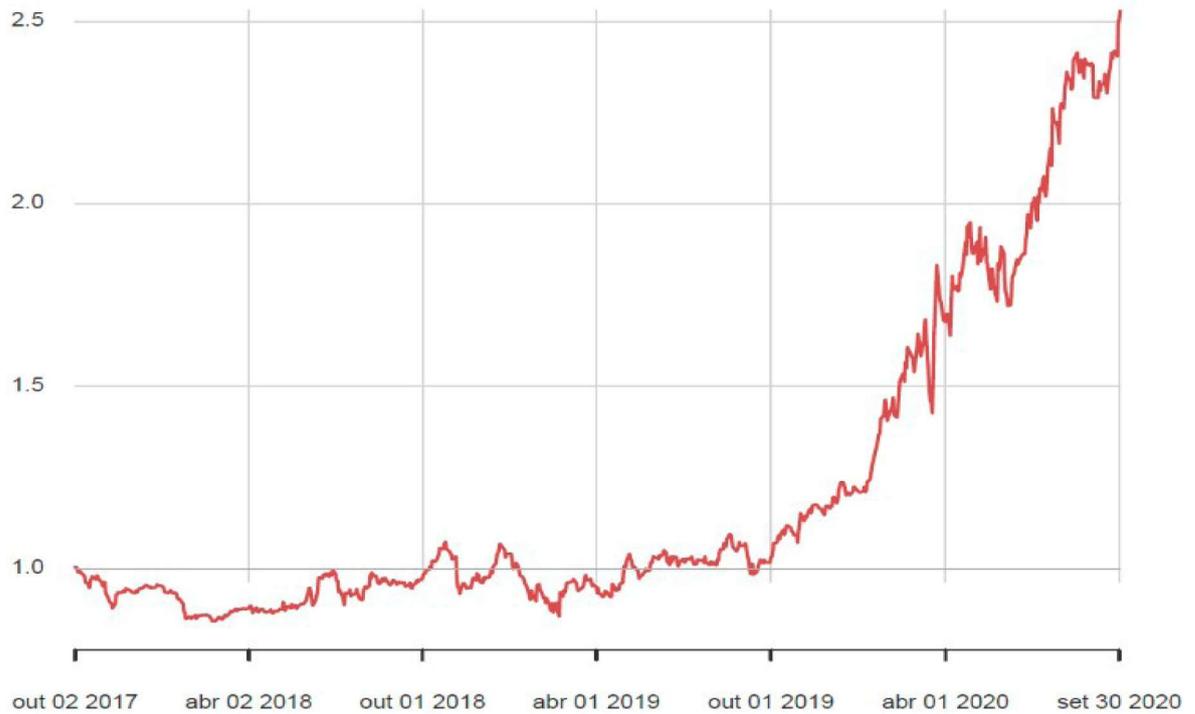
Índices elaborados com auxílio da função `chart.RelativePerformance` da biblioteca `PerformanceAnalytics 2.0.4`. Calculados com a divisão dos retornos diários acumulados, onde PPR é numerador e PMV denominador. Foi observado tendência de inclinação positiva em todos os casos, representando melhor performance dos PPR em relação aos PMV. Os casos com balanceamentos mensais, apresentados nos gráficos (33, 35, 37 e 39), possuem desempenho constantemente superior dos PPR em relação aos PMV. Já os casos com balanceamentos trimestrais, apresentados nos gráficos (34, 36, 38 e 40), apesar do desempenho relativo não ser constantemente superior do PPR comparado ao PMV, tem-se ao final do período analisado uma superioridade do PPR.

GRÁFICO 33 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 1



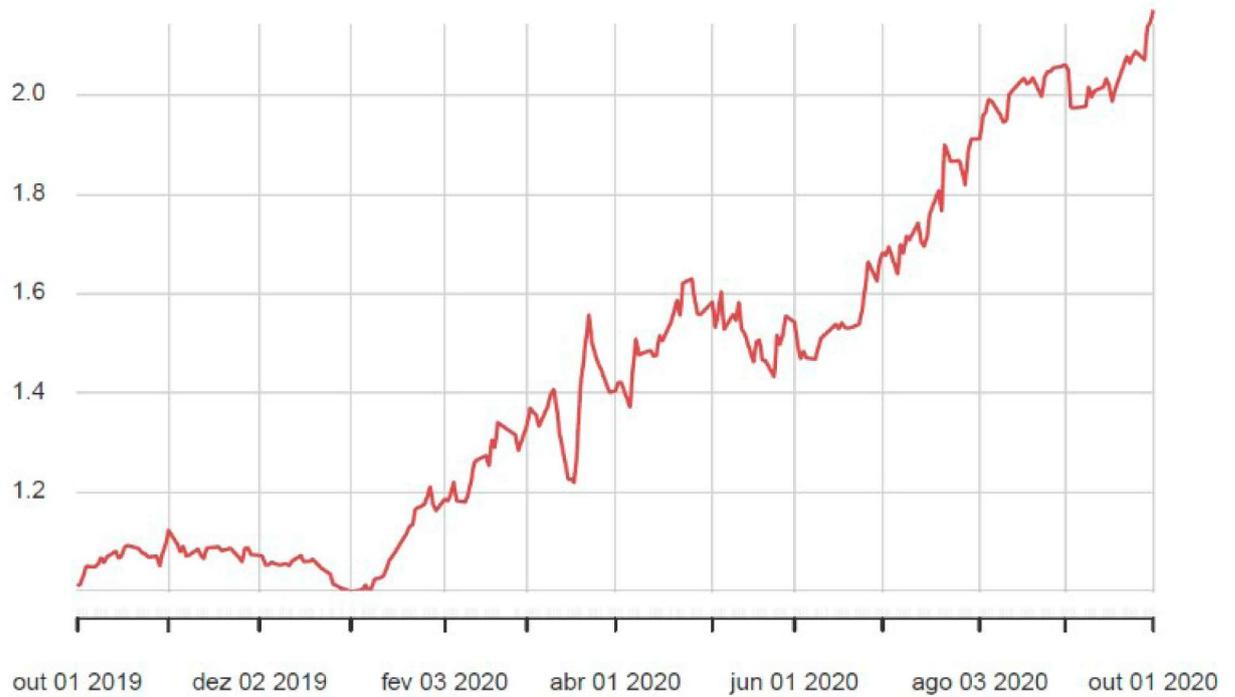
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 34 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 2



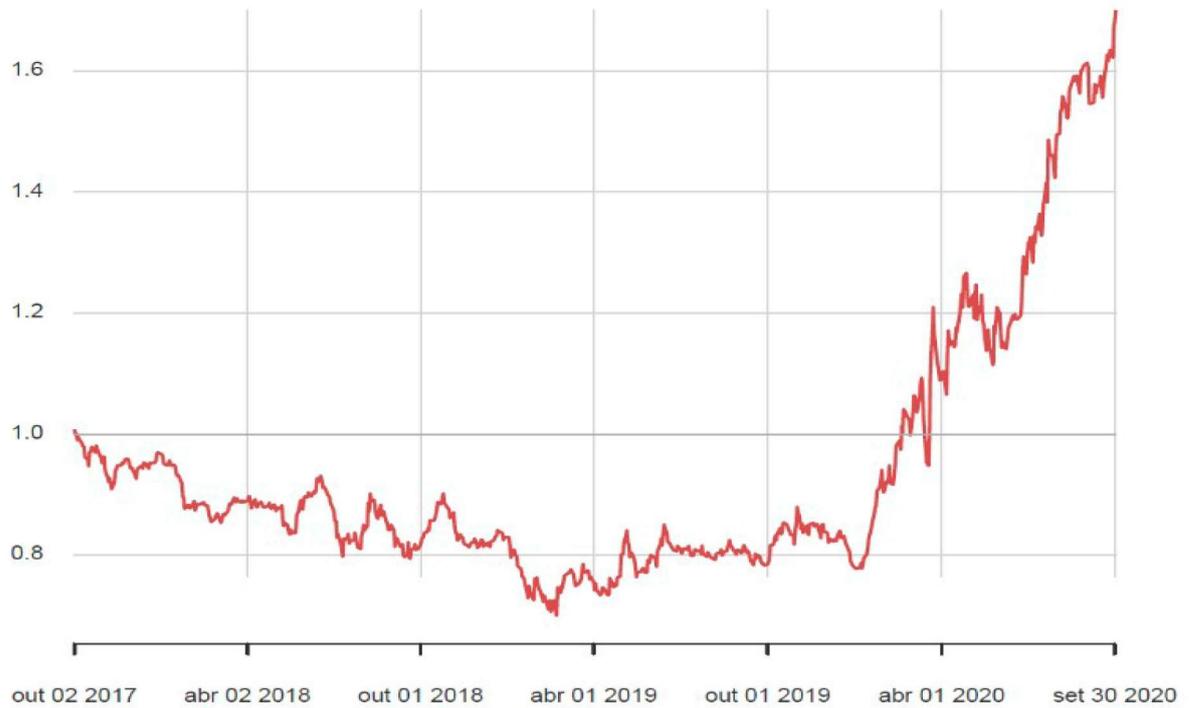
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 35 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 3



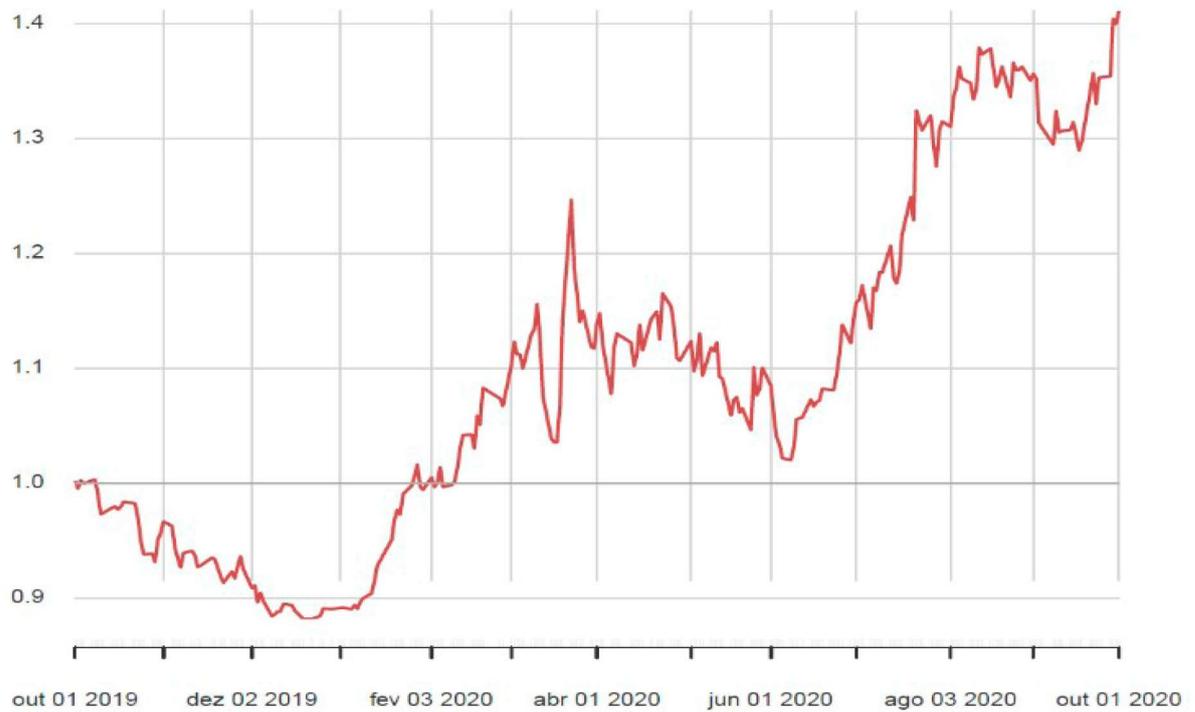
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 36 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 4



FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 37 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 5



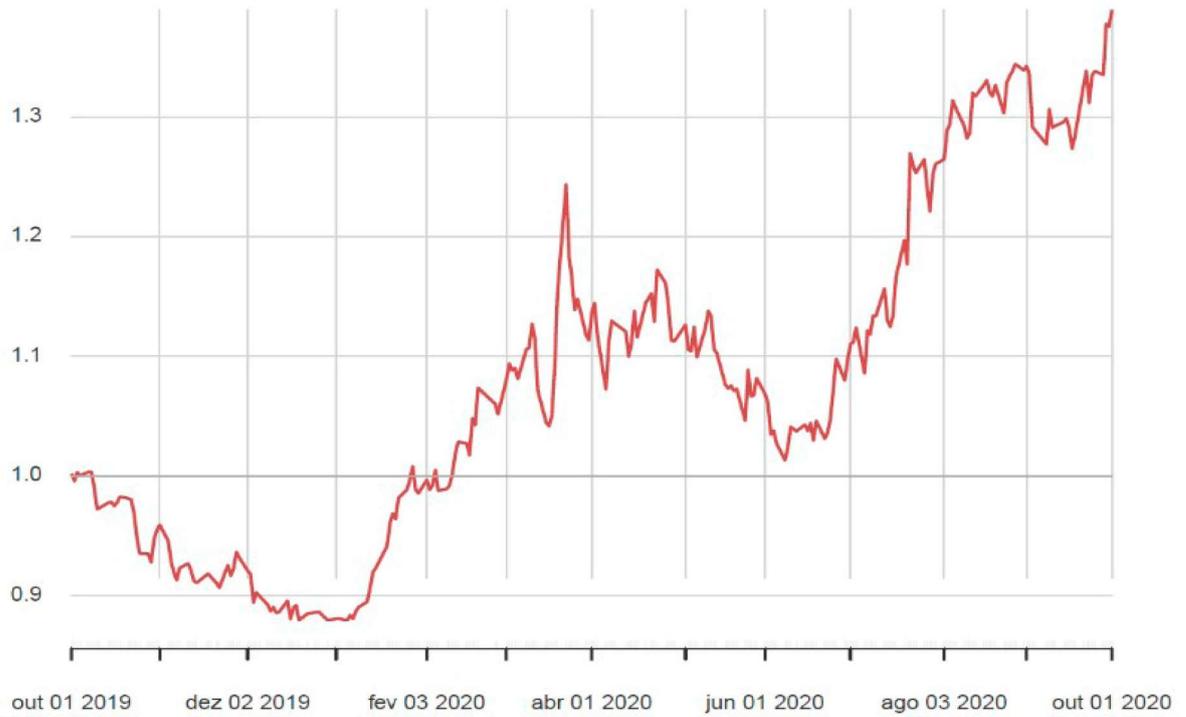
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 38 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 6



FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 39 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 7



FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 40 – ÍNDICE RETORNOS RELATIVOS ACUMULADOS: CASO 8



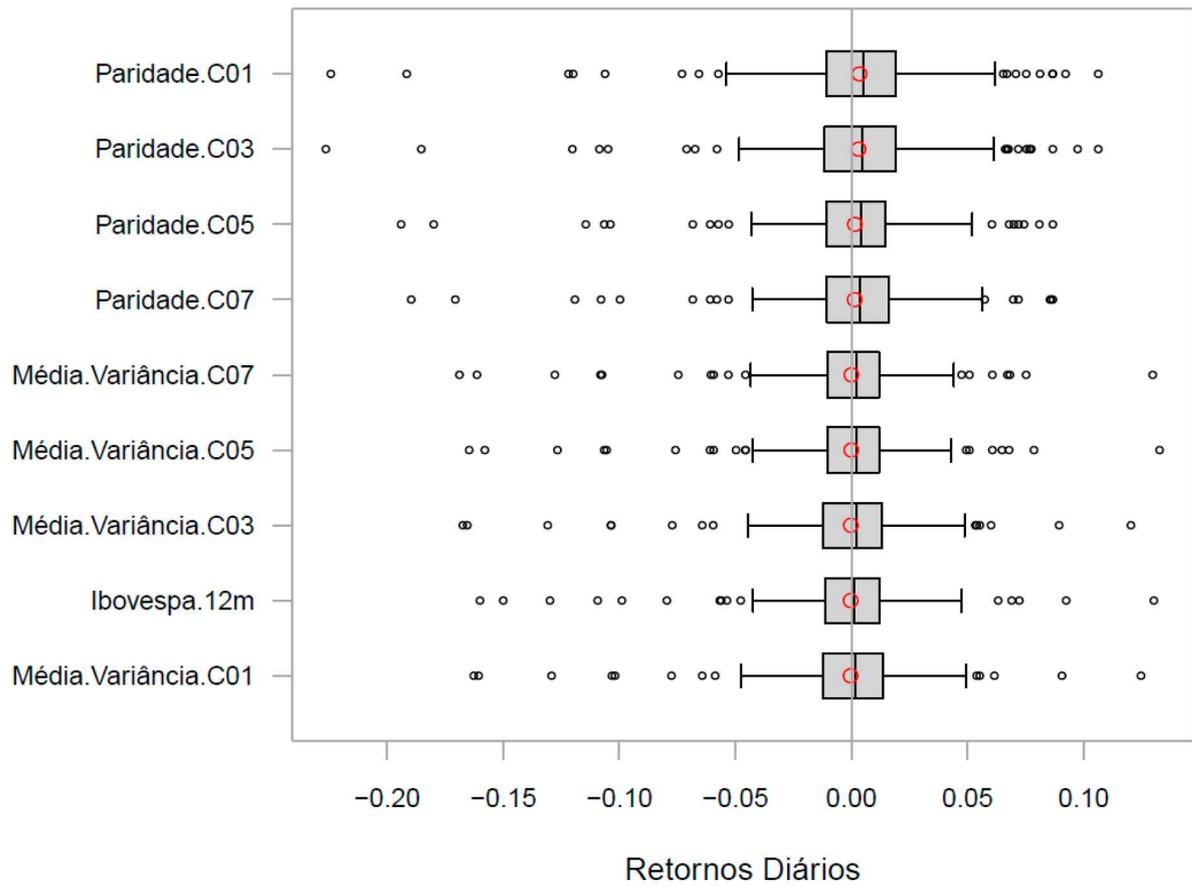
FONTE: O autor (2020)

4.6. COMPARANDO CASOS

A variação do número de ativos, periodicidade de balanceamentos e prazo teve como objetivo entender se há ou não superioridade entre um dos processos de otimização, independentemente da combinação destes três parâmetros. Com base nos oito casos apresentados, podemos identificar superioridade na performance na otimização com paridade de risco em todos os casos.

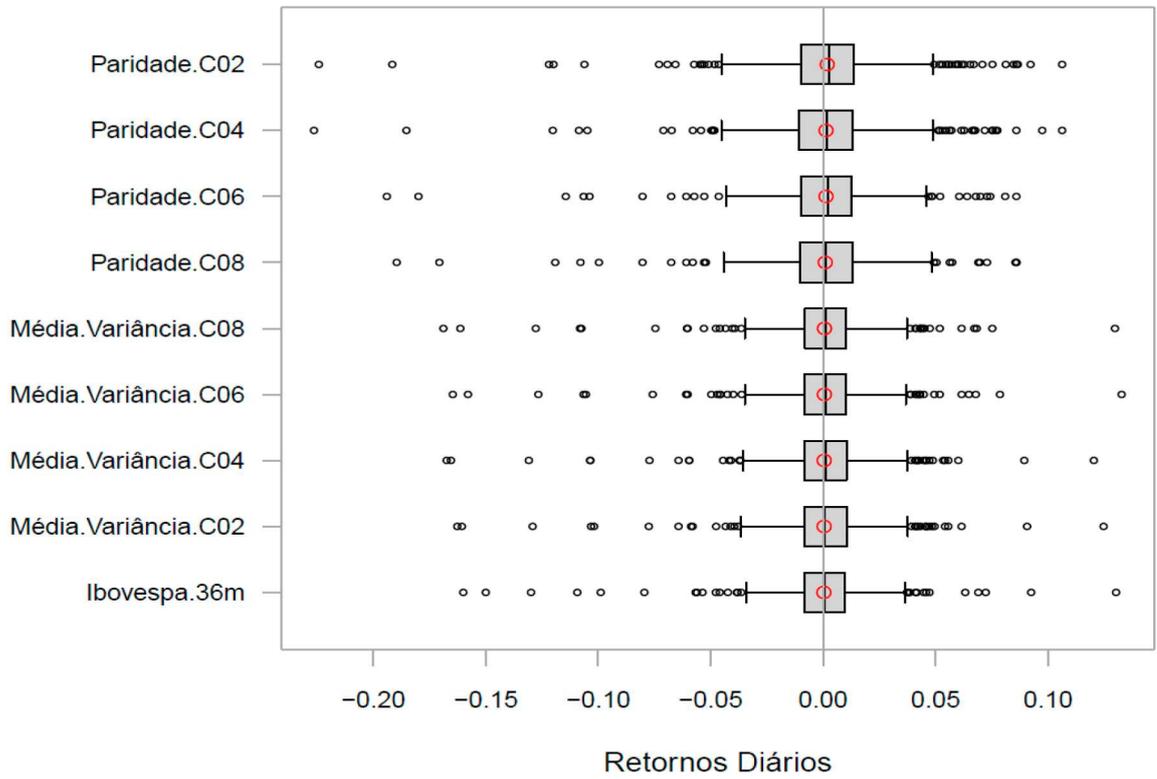
Quanto aos retornos diários, temos no (GRÁFICO 41) no eixo das ordenadas a disposição em ordem ascendente os retornos diários de todos os casos dos períodos entre 2019.10.01 e 2020.10.01, analogamente temos no (GRÁFICO 42) entre o período de 2019.10.01 à 2020.10.01. Em ambos os gráficos se identifica que a dispersão dos retornos diários de todos os casos dos PPR são melhores aos PMV.

GRÁFICO 41 – BOXPLOT RETORNOS DIÁRIOS DE 2019.10.01 à 2020.10.01



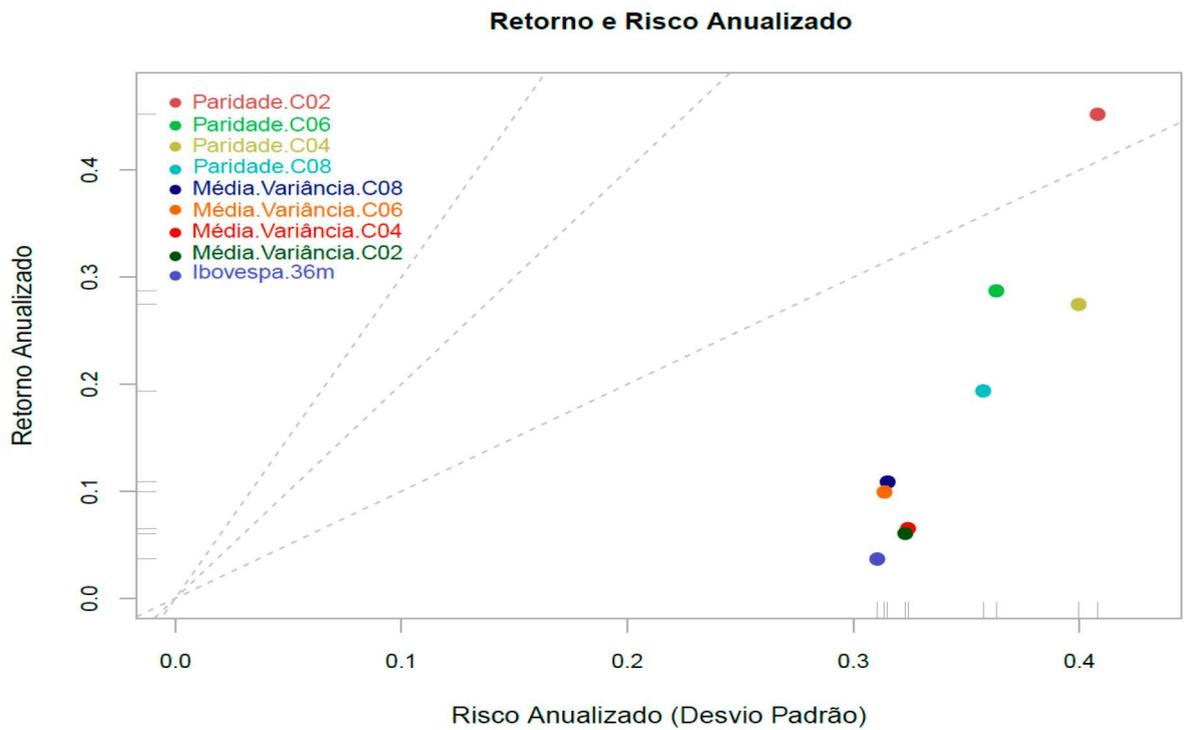
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 42 – BOXPLOT RETORNOS DIÁRIOS DE 2017.10.01 à 2020.10.01



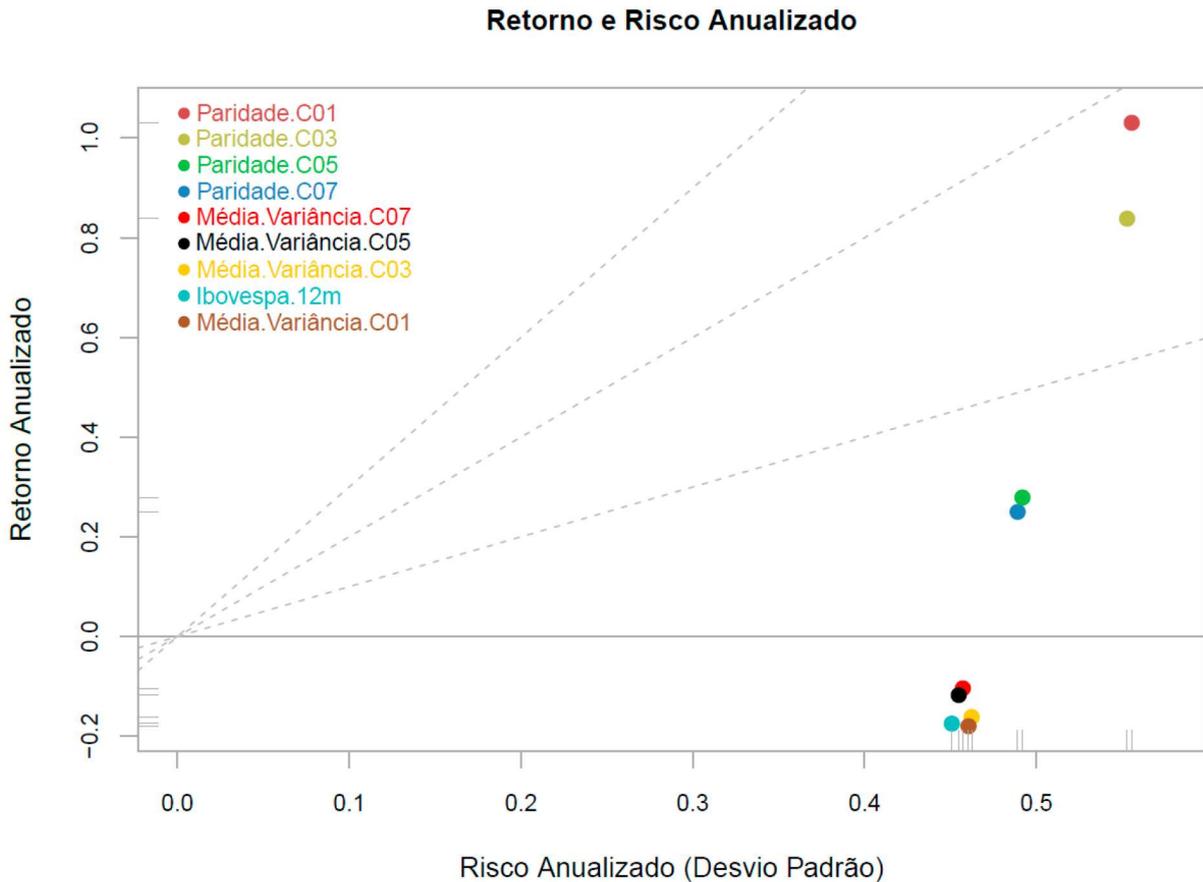
FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 43 – RISCO E RETORNO ANUALIZADOS: 2019.10.01 à 2020.10.01



FONTE: O autor (2020)

GRÁFICO 44 – RISCO E RETORNO ANUALIZADOS: 2017.10.01 à 2020.10.01



FONTE: O autor (2020)

Comparativamente os portfólios com mesmo período, identificamos que os PMV com mesmo número de ativos e período possuem risco e retorno próximos, não sendo significante, nestes casos, os impactos dos balanceamentos (GRÁFICO 43 e 44). Ademais também se nota que o risco e retorno dos PMV com o Índice Ibovespa é condizente com apresentado em todos os casos desenvolvidos, os quais possuem performance similares, e ainda que os PPR possuam maior risco anualizado, se verifica maior retorno anualizado aos PMV em todos os casos.

Utilizando Índice Ibovespa como parâmetro de mercado e taxa livre de risco disposta no (QUADRO 3), foram construídos índices Beta, Treynor, Sharpe e Máximo *Drawdown* apresentados na (TABELA 1). Analisando o índice Beta temos que em módulo os PPR possuem retornos com magnitude maiores aos retornos observados do mercado, sendo em todos os casos superiores à 1, já PMV também segue o mercado, porém em menor escala. Separadamente isto indicaria que o risco do PPR é superior os riscos do PMV. Com valores

negativos de Sharpe e Treynor denota que a rentabilidade com a taxa livre de risco foram superiores no período observado e que valores mais próximos de 0 nos casos de índices negativos indicam melhor risco-retorno entre as duas estratégias, assim temos melhor desempenho do PPR devido a sua melhor performance.

TABELA 1 – ÍNDICES BETA, TREYNOR, SHARPE E MÁXIMO DRAWDOWN

PORTFÓLIOS	Índices			
	Beta	Treynor	Sharpe	Máximo Drawdown
Caso 1				
PPR C01	1,006984	1,051447	0,09744898	0,4914757
PMV C01	0,9584019	-0,1746199	-0,0113919	0,522573
Caso 2				
PPR C02	1,016389	0,2477228	0,04667432	0,4900432
PMV C02	0,9971437	-0,1003361	-0,0101859	0,5219504
Caso 3				
PPR C03	1,009776	0,8820461	0,08613934	0,4843904
PMV C03	0,9239343	-0,156928	-0,0083285	0,5170119
Caso 4				
PPR C04	1,011304	0,1063689	0,02813699	0,4843904
PMV C04	0,9823094	-0,0972855	-0,0097656	0,5170199
Caso 5				
PPR C05	1,00362	0,3108218	0,04621831	0,4742396
PMV C05	0,849814	-0,1126826	-0,0017672	0,4775163
Caso 6				
PPR C06	1,00013	0,112644	0,27867529	0,4776788
PMV C06	0,8674004	-0,710297	-0,0043731	0,475163
Caso 7				
PPR C07	1,006643	0,2708737	0,04293292	0,4754702
PMV C07	0,8574852	-0,0995475	-0,00043708	0,4708232
Caso 8				
PPR C08	0,9933301	0,2090403	0,03992245 2	0,4754702
PMV C08	0,8594585	-0,0558858	-0,00066244	0,4708232

FONTE: O autor (2020)

Ademais o máximo *drawdown* não demonstrou grande disparidade entre as duas estratégias, sendo ocasionado pelo período de grande volatilidade observado com o impacto do Corona Vírus na B3 (TABELA 1).

5 CONCLUSÃO

O problema de quanto e como alocar de recursos em cada ação ou ativo mobiliário é uma dúvida que permeia todos os investidores. Os processos de otimização de carteira auxiliam os investidores na tomada de decisão de forma a mitigar riscos e aumentar os retornos. O recente modelo de otimização baseado na paridade de riscos tem ganhado notoriedade e sua comparação aos modelos consagrados proposto do Markowitz (1952) tem como propósito promover evolução da eficiência no processo de alocação de recursos.

A análise comparativa entre os dois processos de otimização foi realizada comparando indicadores de risco e retornos de oito casos. Os casos foram elaborados com a combinação da variação entre número de ativos, periodicidade de balanceamentos e horizonte de investimento. Os portfólios foram compostos com ações brasileiras listadas na B3, dados extraídos do YahooFinance, Taxa Livre de Risco proposta foi CDI e a construção dos portfólios e indicadores no âmbito do RStudio 4.0.2. Em todos os casos a performance do modelo de otimização de paridade de risco foi superior. Quanto análise de risco, o modelo de Média-Variância possui alto risco ao concentrar capital em poucos ativos, enquanto paridade de risco apresenta boa diversificação.

Marginalmente ao objetivo de central do trabalho, temos da observação da alternância dos parâmetros de número de ativos no portfólio, periodicidade dos balanceamentos e horizonte de investimento, que portfólios com 10 ativos obtiveram melhores índices e performance, balanceamentos mensais são preferidos aos trimestrais e do horizonte de tempo não houve observação conclusiva.

A hipótese do trabalho era de que carteiras de ações construídas com a otimização de paridade de risco são melhores às elaboradas com modelo de média-variância. Possuem melhor performance e melhor controle de risco ao diversificar os ativos. Com base nos resultados apresentados, é confirmada a hipótese da proposta.

Das observações marginais supracitadas e das restrições metodológicas deste estudo -referente a não contabilização de dividendos e custos transacionais e tributários – emerge recomendações para futuros estudos quanto ao número ótimo de ativos e ótimo de periodicidade dos balanceamentos, levando em consideração os custos incorridos das operações, e estudos da rentabilidade dos dividendos de cada estratégia.

REFERÊNCIAS

- ANBIMA. Programa Detalhado da Certificação para Especialista de Investimentos. Disponível em: <https://www.anbima.com.br/pt_br/educar/certificacoes/cea.htm>. Acesso em: 17/11/2020.
- B3. Uma Análise da Evolução dos Investidores Pessoas Físicas na B3. Disponível em: <http://www.b3.com.br/pt_br/noticias/pessoa-fisica.htm>. Acesso em: 18/10/2020.
- BCB Calculadora do cidadão Calculadora do cidadão Acesso público Resultado da Correção pela Poupança Disponível em: <<https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADA0/publico/corrigerPeloCDI.do?method=corrigerPeloCDI>>. Acesso em: 17/10/2020.
- Composição da carteira do Índice Ibovespa. Disponível em: <http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-ibovespa-composicao-da-carreira.htm>. Acesso em: 11/10/2020.
- DEBASTIANI, C. A.; RUSSO, F. A. **Avaliando empresas investindo em ações**. 1ª ed. São Paulo: NOVATEC, 2008.
- FAMA, E. F. EFFICIENT CAPITAL MARKETS: A REVIEW OF THEORY AND EMPIRICAL WORK*. **The Journal of Finance**, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970.
- GOLDBERG, L. R.; MAHMOUD, O. Drawdown: from practice to theory and back again. **Mathematics and Financial Economics**, v. 11, n. 3, p. 275–297, 2017. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11579-016-0181-9>>. .
- MAILLARD, S.; RONCALLI, T.; TEILETCHE, J. On the Properties of Equally-Weighted Risk Contributions Portfolios. **SSRN Electronic Journal**, p. 1–23, 2008. Disponível em: <<http://www.ssrn.com/abstract=1271972>>. .
- MARKOWITZ, H. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77, 1952. Disponível em: <<http://doi.wiley.com/10.1111/jofi.12742>>. .
- PINDYCK, R.; RUBINFELD, D. **Microeconomia**. 8º ed. São Paulo: Pearson, 2013.
- QIAN, E. Risk Parity Portfolios. **Panagora Asset Management**, , n. September 2005, 2005.
- SCHOLES, M.; WILLIAMS, J. Estimating betas from nonsynchronous data. **Journal of Financial Economics**, v. 5, n. 3, p. 309–327, 1977. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0304405X77900411>>. .
- SHARPE, W. F. Mutual Fund Performance, Part 2: Supplement on Security Prices. **The Journal of Business**, **The University of Chicago**, v. 39, n. 1, p. 119–138, 1966.
- VARIAN, H. R. **Microeconomia**. 9ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2016.
- WÜRTZ, Diethelm et al. **Portfolio Optimization with R / Rmetrics**. 1st. ed. Zurich: Finance Online GmbH, 2009. E-book.

