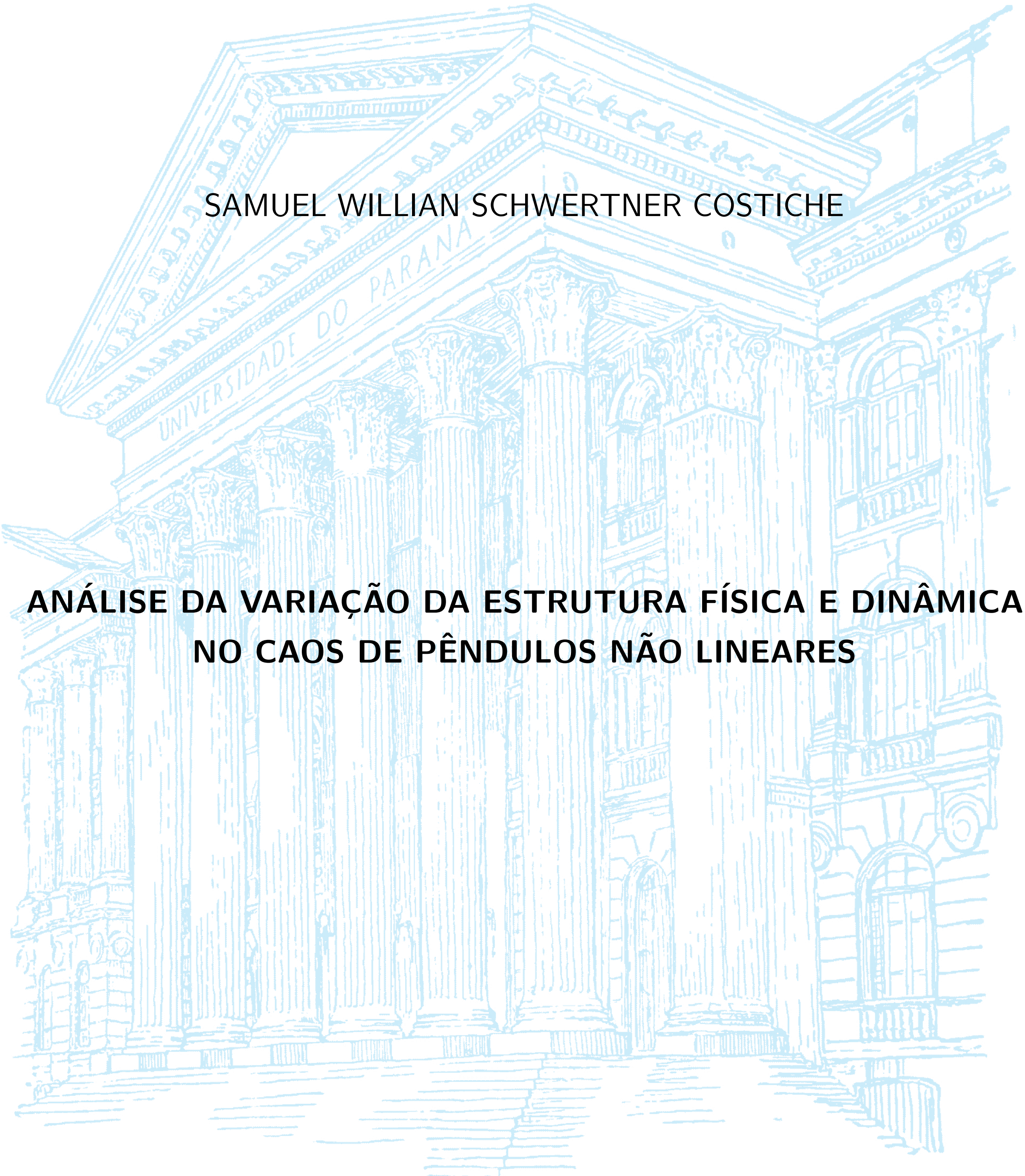
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ



SAMUEL WILLIAN SCHWERTNER COSTICHE

ANÁLISE DA VARIAÇÃO DA ESTRUTURA FÍSICA E DINÂMICA NO CAOS DE PÊNDULOS NÃO LINEARES

PALOTINA

2022

SAMUEL WILLIAN SCHWERTNER COSTICHE

ANÁLISE DA VARIAÇÃO DA ESTRUTURA FÍSICA E DINÂMICA NO CAOS DE PÊNDULOS NÃO LINEARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná como requisito para a obtenção do título Licenciado em Física

Orientador: Dr. Carlos Henrique Coimbra Araújo
Coorientador: Dr. Rodrigo André Schulz

PALOTINA
2022

TERMO DE APROVAÇÃO

SAMUEL WILLIAN SCHWERTNER COSTICHE

ANÁLISE DA VARIAÇÃO DA ESTRUTURA FÍSICA E DINÂMICA NO CAOS DE PÊNDULOS NÃO LINEARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná como requisito para a obtenção do título Licenciado em Física, e aprovado pela seguinte banca examinadora:

Dr. Carlos Henrique Coimbra Araújo
Orientador

Rodrigo André Schulz

Dr. Rodrigo André Schulz
Coorientador

Rita C. Anjos

Dra. Rita de Cássia dos Anjos
Membro da Banca escrita

Dr. Abraão Jessé Capistrano de Souza
Membro da Banca escrita

Palotina, 02 de abril de 2022

TERMO DE APROVAÇÃO

SAMUEL WILLIAN SCHWERTNER COSTICHE

ANÁLISE DA VARIAÇÃO DA ESTRUTURA FÍSICA E DINÂMICA NO CAOS DE PÊNDULOS NÃO LINEARES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná como requisito para a obtenção do título Licenciado em Física, e aprovado pela seguinte banca examinadora:

Dr. Carlos Henrique Coimbra Araújo
Orientador

Dr. Rodrigo André Schulz
Coorientador

Dra. Roberta Chiesa Bartelmebs
Membro da Banca oral

Me. Wander Mateus Branco Meier
Membro da Banca oral

Dra. Leidi Cecilia Friedrich
Membro da Banca oral

Palotina, 27 de abril de 2022

RESUMO

Sistemas que apresentam comportamento caótico são caracterizados especialmente pela sensibilidade às condições iniciais. Um sistema cujo comportamento caótico tem sido bastante explorado na literatura é o pêndulo duplo, que é usado tanto como laboratório teórico quanto como modelo para o estudo de fenômenos não lineares. Neste trabalho, exploramos alguns resultados da literatura recente acerca da variabilidade do caos no pêndulo duplo devido a seus parâmetros físicos, tais como a massa e o comprimento do pêndulo. Construímos um modelo de pêndulo generalizado para N pontos de massa, a fim de analisar as propriedades caóticas que distinguem ou aparecem em comum em pêndulos simples e duplos. Além disso, mostramos como variações de escala sobre as massas e comprimentos dos pêndulos implicam em variações dos expoentes de Lyapunov, de modo que o sistema analisado é sensível também a variações na sua estrutura física, independentemente das condições iniciais. Por fim, exploramos a dinâmica de acoplamento do pêndulo duplo comparando-a com a de um pêndulo simples.

Palavras-chave: Caos. Pêndulo Duplo. Expoentes de Lyapunov.

ABSTRACT

Systems that exhibit chaotic behavior are characterized especially by sensitivity to initial conditions. A system whose chaotic behavior has been widely explored in the literature is the double pendulum, which is used both a theoretical laboratory and a model for the study of nonlinear phenomena. In this work, we explore some results from the recent literature about the variability of chaos in the double pendulum due to its physical parameters, such as mass and length of the pendulum. We construct a generalized pendulum model for N mass points to analyze the chaotic properties that distinguish or appear in common in single and double pendulums. Furthermore, we show how scale variations on masses and lengths of the pendulums imply variations in the Lyapunov exponents, so that the analyzed system is also sensitive to variations in its physical structure, regardless of the initial conditions. Lastly, we explore the coupling dynamics of the double pendulum comparing him with a single pendulum.

Keywords: Chaos. Double Pendulum. Lyapunov exponents.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 EVOLUÇÃO DO ESTUDO DO CAOS

Em 1885, o anúncio de uma competição organizada pelo matemático sueco Mittag-Leffler (1846-1927) para o aniversário de 60 anos do rei Oscar II, que ocorreria em 21 de janeiro de 1889, movimentou a comunidade de matemáticos em torno dos quatro problemas propostos pelo torneio (PRAZERES, 2010). Dentre as questões, que envolviam o avanço no estudo de séries e na compreensão da teoria das equações diferenciais, um problema de mecânica celeste ligado ao estudo da estabilidade do sistema solar atraiu o interesse do matemático Henri Poincaré (1854-1912) (POINCARÉ, 1890).

Apesar de vencer o torneio, o fato que mais chamou a atenção da comunidade matemática é a existência de um erro no trabalho de Poincaré, que foi apontado por Lars Edvard Phragmén (1863-1937), revisor dos trabalhos do evento, e que, a partir de sua correção, deu origem a primeira evidência de alta complexidade no conjunto de trajetórias que surgem do problema dos 3 corpos, bem como forneceu a primeira descrição matemática do que é atualmente conhecido como sensibilidade às condições iniciais (PRAZERES, 2010).

Anos mais tarde, com o desenvolvimento da computação e sua aplicabilidade a problemas de simulação, um artigo intitulado *Deterministic Nonperiodic Flow* publicado por Edward Norton Lorenz (1917-2008) em 1963, forneceu evidências de como a sensibilidade às condições iniciais, bem como a existência de *atratores*, sugerida por Poincaré, eram propriedades intrínsecas de alguns sistemas dinâmicos não lineares e, além disso, que mesmo equações simples poderiam produzir trajetórias complexas (AUBIN; DALMEDICO, 2002).

Desde então, diversos estudos sobre estes tipos de sistemas surgiram em diferentes contextos de modelagem, tais como o mapa logístico (MAY, 1976) e os batimentos cardíacos (CALVÃO, 2014) na biologia, o próprio modelo de Lorenz para a meteorologia, que foi amplamente analisado e generalizado (LÜ; CHENG; CHENG, 2004), bem como modelos mecânicos tais como o pêndulo duplo (YU; BI, 1998) e triplo (AWREJCEWICZ; KUDRA; WASILEWSKI, 2007), que são úteis tanto para a modelagem de alguns sistemas vibratórios, quanto como "laboratório teórico" para o desenvolvimento de novas ferramentas de análise da dinâmica não linear (CALVÃO, 2014).

Recentemente, alguns trabalhos têm verificado que o comportamento caótico de um pêndulo duplo é afetado não só por suas características dinâmicas, tais como a não linearidade, mas também pelas características físicas que definem a estrutura do sistema. Gupta, Bansal e Singh (2014) estudaram numericamente um pêndulo duplo sujeito a variações de massa e comprimento, para uma mesma condição inicial, evidenciando a dependência dos expoentes de Lyapunov com a estrutura física do sistema e obtendo trajetórias periódicas, quase-periódicas ou caóticas. Em um trabalho semelhante, Safitri, Nusantara e Chandra (2020) mostraram a mesma dependência com relação às características físicas e, além disso, argumentaram que em todas as simulações analisadas, valores maiores para a razão entre as massas $\delta = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)$

estavam associados a órbitas que se afastavam mais rapidamente, dado duas condições iniciais próximas. Do ponto de vista numérico, é possível encontrar até mesmo uma dependência entre o padrão caótico e o passo de integração com precisão finita em simulações computacionais (WILD, 2019).

Estes trabalhos, no entanto, se baseiam em uma análise essencialmente computacional para verificar a presença deste tipo de influência das características físicas no comportamento caótico de pêndulos duplos, o que abre espaço para novas pesquisas que visem compreender, de maneira mais abrangente, as propriedades e possíveis generalizações deste tipo de fenômeno.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Estudar a origem física e dinâmica do comportamento caótico em pêndulos.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Construir uma conexão entre a dinâmica de um pêndulo duplo e um pêndulo simples, obtendo consequências desta conexão;
- Estudar o comportamento caótico de um pêndulo duplo e compará-lo com o comportamento de um pêndulo simples, com relação a suas características físicas e dinâmicas;
- Buscar generalizações para a dependência do comportamento caótico em pêndulos com relação as características físicas apresentada pela literatura.

1.3 JUSTIFICATIVA

A dinâmica não linear de pêndulos tem sido extensivamente explorada, de um lado como forma de introduzir o estudo da mecânica analítica (LEMOS, 2007; LANDAU; LIFCHITZ, 2002), devido a fácil interpretação das variáveis do sistema e a possibilidade de comparar facilmente a formulação newtoniana com a formulação lagrangiana da mecânica, e por outro lado com sua aplicação à modelagem de estruturas vibrantes, bem como, principalmente, seu comportamento caótico (CALVÃO, 2014; AWREJCEWICZ; KUDRA; WASILEWSKI, 2007).

No entanto, ainda que seja bem conhecido que as propriedades caóticas deste tipo de sistema estão ligadas a não linearidade, associada à alta sensibilidade às condições iniciais, ainda é difícil estabelecer exatamente os limites nos quais os sistemas evoluem para regimes caóticos, e como as propriedades físicas dos sistemas analisados contribuem para o aumento da complexidade.

Assim, o estabelecimento de novas abordagens ao problema é essencial para estender o ferramental teórico disponível para o estudo da dinâmica de sistemas não lineares, bem como compreender com maior clareza a natureza caótica destes sistemas e, a partir disto, ampliar o horizonte de aplicações deste tipo de sistema na modelagem de fenômenos vibratórios.

2 REVISÃO TEÓRICA

2.1 MECÂNICA LAGRANGIANA

Em uma grande quantidade de sistemas mecânicos, as posições e velocidades dependem de relações geométricas ou cinemáticas que restringem as possíveis configurações do sistema. Estas restrições podem ser entendidas como relações funcionais e, dado que são de ordem cinemática, antecedem a construção da dinâmica do sistema de tal modo que as equações de movimento precisam levar em conta os vínculos estabelecidos (LEMOS, 2007).

2.1.1 VÍNCULOS HOLÔNOMOS

Dado um sistema mecânico com N partículas e k vínculos da forma:

$$\begin{cases} f_1(r_1,...,r_N,t) = 0 \\ \vdots \\ f_k(r_1,...,r_N,t) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

onde $r_i = (x_i,y_i,z_i)$ define o vetor posição da i-ésima partícula, é possível introduzir um número n de coordenadas generalizadas[1] de modo que:

$$r_i = r_i(q_1,...,q_n,t),\ i = 1,...,N \tag{2}$$

onde $n = 3N - k$ define a quantidade de coordenadas que podem ser tomadas como independentes entre si, a partir dos vínculos entre as 3N coordenadas $(x_1,y_1,z_1)...(x_N,y_N,z_N)$. Assim, construir a dinâmica do sistema a partir da parametrização (2), modelando a evolução das coordenadas independentes $q_1,...,q_n$, permite evitar a necessidade de lidar diretamente com os vínculos de (1), ainda que os satisfaça. Vínculos que tem a forma de (1) são chamados holônomos, ao passo que se os vínculos do sistema não puderem ser escritos nesta forma, então são chamados de não-holônomos.

A formulação da mecânica capaz de modelar a evolução do sistema a partir das coordenadas independentes é chamada de mecânica lagrangiana que, em contraste com a formulação newtoniana, não lida com vínculos diretamente e é construída a partir de um formalismo escalar (LANDAU; LIFCHITZ, 2002; LEMOS, 2007).

2.1.2 EQUAÇÕES DE LAGRANGE

A formulação da mecânica a partir de um princípio variacional, a saber, o *Princípio de Hamilton*, é tal que constitui a fórmula mais geral da lei de movimento de sistemas mecânicos (LANDAU; LIFCHITZ, 2002). Dado um conjunto de coordenadas generalizadas $(q_1,q_2,...,q_n)$ e

---

[1] O conjunto $(q_1,q_2,...,q_n)$ é dito ser um conjunto de *coordenadas generalizadas* se o vetor posição de cada partícula do sistema é determinado univocamente por este conjunto em cada instante de tempo e, além disso, que os vínculos do sistema são identicamente satisfeitos se expressos em termos destas coordenadas (LEMOS, 2007).

suas respectivas velocidades generalizadas $(\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_n)$, o princípio de Hamilton afirma que a trajetória real do sistema entre os instantes t_1 e t_2 é aquela que minimiza a integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2,...,q_n,\dot{q}_n,t)dt$$

onde $\mathscr{L} = \mathscr{L}(q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2,...,q_n,\dot{q}_n,t)$ é chamada *função lagrangiana* associada ao sistema, e S é chamada integral de ação (LANDAU; LIFCHITZ, 2002). Para que $\mathscr{L}$ satisfaça o princípio de Hamilton, é necessário que:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0,\ i = 1,2,3,..,n \tag{3}$$

que são chamadas Equações de Lagrange, e fornecem as equações de movimento para cada uma das coordenadas q_i (LEMOS, 2007). Além disso, definindo[2]:

$$\mathscr{L} = T - U \tag{4}$$

onde $T = T(\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,\dot{q}_n)$ é a energia cinética e $U = U(q_1,q_2,...,q_n)$ a energia potencial do sistema, tem-se que:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

de modo que as equações de Lagrange reproduzem, em sentido análogo, a segunda lei de Newton, na medida em que identificam o gradiente de um potencial generalizado com uma quantidade análoga a taxa de variação do momento chamada, portanto, de momento generalizado (LANDAU; LIFCHITZ, 2002):

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}.$$

Assim, o problema de determinar as equações de movimento associadas ao conjunto de partículas de um sistema físico, na mecânica lagrangiana, se resume a escolher um conjunto de coordenadas generalizadas e, a partir dele, determinar as energias cinética e potencial do sistema para utilizar as equações dadas por (3) e (4) a fim de obter equações diferenciais de segunda ordem associadas a cada coordenada q_i.

2.2 SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS

2.2.1 CARACTERIZAÇÃO

Dada a equação diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = f\left(\mathbf{x},t\right), \tag{5}$$

[2] A motivação para esta definição da função lagrangiana está relacionada ao Princípio de d'Alembert. O leitor, interessado em um detalhamento desta construção, pode consultar LEMOS, p. 19-24, (2007).

tem-se que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ é chamado *vetor de estado*, e $f : \Sigma \to \mathbb{R}^N$, $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$, é um campo vetorial definido em Σ, denominado *campo de velocidades*.

O espaço formado por $E : x_1 \times ... \times x_N$ é chamado *espaço de fases*, e dado um vetor de estado $\mathbf{x}\,(t_0)$, a integração da equação (5) resulta em uma órbita em E que inicia em $t = t_0$, onde $\mathbf{x}\,(t_0)$ é chamado *condição inicial* do sistema. Esta órbita é, portanto, caracteristicamente determinada por $f\,(\mathbf{x}, t)$, de modo que se $f\,(\mathbf{x},t) = A(t)\mathbf{x}$, com $A(t) \in \mathbb{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$, então o sistema é chamado *linear*. Além disso, se A depender do vetor de estado, isto é, se $A = A\,(\mathbf{x},t)$, então o sistema é chamado *não linear* (AGUIRRE, 2021).

2.2.2 EXPOENTES DE LYAPUNOV

A propriedade de sensibilidade às condições iniciais, apesar de ser bastante evidente e produzir resultados notáveis no espaço de fases, necessita de uma formalização não ambígua que permita caracterizar quão caótico é o sistema analisado. Tendo isso em vista, os expoentes de Lyapunov são "grandezas que medem a divergência exponencial de trajetórias vizinhas ao longo de uma certa direção no espaço de estados do sistema" (DUARTE, 2009, p. 57), e constituem a principal ferramenta para determinar se um sistema apresenta ou não comportamento caótico (ABARBANEL, 1995).

Dadas duas condições iniciais próximas no espaço de fase $\mathbf{x}(t_0)$ e $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) + \delta(t_0)$, assumindo que a variação inicial evolua exponencialmente no tempo, tem-se que:

$$\|\delta(t)\| = \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| = \|\delta(t_0)\|\, e^{\lambda t},$$

onde $\|.\|$ é a norma euclidiana. Isto leva a definição do expoente de Lyapunov:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \lim_{\|\delta(t_0)\|\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\|\delta\,(t)\|}{\|\delta\,(t_0)\|}\right), \tag{6}$$

que permite analisar como duas órbitas arbitrariamente próximas, inicialmente, evoluem no tempo, de modo que:

- $\lambda > 0 \to$ Caótico;
- $\lambda = 0 \to$ Conservativo;
- $\lambda < 0 \to$ Dissipativo.

A partir desta definição, em geral, é difícil obter o valor do expoente de Lyapunov característico de um sistema. Por isso, se o interesse consiste somente em determinar se o sistema é ou não caótico, é conveniente calcular apenas o maior expoente de Lyapunov por métodos numéricos, para o qual a média:

$$\lambda_{max} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{t_i} \ln\left(\frac{\|\delta(t_i)\|}{\|\delta(t_0)\|}\right),\ t_i = t_0 + \frac{i(t-t_0)}{N}, \tag{7}$$

fornece uma estimativa para o maior dos expoentes de Lyapunov no intervalo $[t_0,t]$ discretizado em $N+1$ partes. (MONTEIRO, 2006).

2.3 FUNÇÕES HOMOGÊNEAS

O estudo de transformações de escala em modelos físicos pode ser feito avaliando o comportamento de uma função quando fazemos uma transformação de proporcionalidade nas variáveis independentes, de modo a obter informação a respeito de como, genericamente, o tamanho do sistema influencia na sua dinâmica.

Um conjunto de funções bem comportadas e com grande aplicação no estudo de transformações de escala são as funções homogêneas, que satisfazem a seguinte definição:

Definição 1. *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita homogênea de grau k se existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $\alpha > 0$:*

$$f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha^k f(\mathbf{x}),$$

com $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$.

Teorema 1 (Teorema de Euler)**.** *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e homogênea de grau k, então:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = k f(\mathbf{x}). \tag{8}$$

Demonstração. Se f é homogênea de grau k, então pela **Definição 1**:

$$f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha^k f(\mathbf{x}),$$

para algum $k \in \mathbb{R}$. Diferenciando ambos os lados em relação a α e definindo $u_1 = \alpha x_1,...,u_n = \alpha x_n$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} x_i = k\alpha^{k-1} f(\mathbf{x}),$$

que, quando avaliada em $\alpha = 1$, resulta em (8) (LEMOS, 2007). □

3 METODOLOGIA

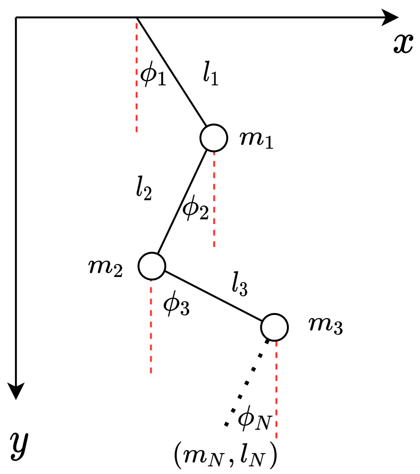
A metodologia do trabalho consiste em uma pesquisa teórica e computacional para a construção de um modelo de pêndulo generalizado, denominado pêndulo N-uplo, a partir do qual é possível analisar as semelhanças e diferenças entre alguns tipos de pêndulos, em especial, com relação ao pêndulo simples e duplo. O foco desta análise se baseia em obter as equações de movimento generalizadas e verificar como os parâmetros físicos do sistema (massa e comprimento de fio) influenciam na trajetória de cada tipo de pêndulo. Além disso, uma vez conectadas as equações de movimento para o pêndulo simples e duplo, a segunda parte do trabalho consiste em buscar as condições nas quais o movimento de um pêndulo duplo é redutível ou próximo ao movimento de um pêndulo simples.

Para obter a evolução das trajetórias, devido a impossibilidade do tratamento analítico das equações de movimento, uma abordagem numérica será empregada permitindo a visualização geométrica das séries temporais e expoentes de Lyapunov dos sistemas (Ver **Apêndice**).

3.1 CONECTANDO AS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Uma maneira de visualizar simultaneamente as propriedades dinâmicas de diferentes tipos de pêndulos, tais como o pêndulo simples e o pêndulo duplo, consiste em construir as equações de movimento para um pêndulo generalizado, isto é, construir um conjunto de equações dependentes de um parâmetro N de tal maneira que escolher $N = 1$ implica obter uma equação de movimento para um pêndulo simples e para $N = 2$ obtém-se as equações de movimento de um pêndulo duplo. De maneira geral, N indica a quantidade de massas pontuais do pêndulo analisado. A Figura (1) ilustra esse tipo de sistema:

FIGURA 1 – Estrutura de um pêndulo N-uplo.



Fonte: O autor (2022).

As coordenadas de cada massa pontual no referencial adotado são:

$$\begin{cases} x_i = \sum_{k=1}^{i} l_k \sin(\phi_k) \\ y_i = \sum_{k=1}^{i} l_k \cos(\phi_k) \end{cases} \tag{9}$$

onde l_k é o comprimento e ϕ_k o ângulo associado a cada massa pontual. Utilizando a equação (4), a lagrangiana do sistema é dada por:

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{N} T_i - U_i \tag{10}$$

onde:

$$\begin{cases} T_i = \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x_i}^2 + \dot{y_i}^2\right) \\ U_i = -m_i g y_i \end{cases}, \tag{11}$$

Logo:

$$\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{i} l_k \cos(\phi_k) \dot{\phi_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\sum_{k=1}^{i} l_k \sin(\phi_k) \dot{\phi_k} \right)^2 + g \sum_{k=1}^{i} l_k \cos(\phi_k) \right].$$

Obter a equação de movimento para alguma variável ϕ_j consiste em satisfazer a equação (3), onde:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_j} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial}{\partial \phi_j} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{i} l_k \cos(\phi_k) \dot{\phi_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\sum_{k=1}^{i} l_k \sin(\phi_k) \dot{\phi_k} \right)^2 + g \sum_{k=1}^{i} l_k \cos(\phi_k) \right]$$

em que, para $i < j$, vemos que a derivada com respeito a ϕ_j será nula, de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_j} &= \sum_{i=j}^{N} m_i \left[\sum_{k=1}^{i} -l_j l_k \sin(\phi_j) \cos(\phi_k) \dot{\phi_j} \dot{\phi_k} + l_j l_k \sin(\phi_k) \cos(\phi_j) \dot{\phi_j} \dot{\phi_k} - g l_j \sin(\phi_j) \right] \\ &= \sum_{i=j}^{N} m_i \left\{ \sum_{k=1}^{i} l_j l_k \dot{\phi_j} \dot{\phi_k} \sin(\phi_k - \phi_j) \right\} - m_i g l_j \sin(\phi_j) \end{aligned} \tag{12}$$

Agora, obtendo:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi_j}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial}{\partial \dot{\phi_j}} \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{i} l_k \cos(\phi_k) \dot{\phi_k} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\sum_{k=1}^{i} l_k \sin(\phi_k) \dot{\phi_k} \right)^2 + g \sum_{k=1}^{i} l_k \cos(\phi_k) \right]$$

que implica, com a mesma análise para $i < j$, em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi_j}} &= \sum_{i=j}^{N} m_i \left[\left(\sum_{k=1}^{i} l_k \cos(\phi_k) \dot{\phi_k} \right) l_j \cos(\phi_j) + \left(\sum_{k=1}^{i} l_k \sin(\phi_k) \dot{\phi_k} \right) l_j \sin(\phi_j) \right] \\ &= \sum_{i=j}^{N} m_i \sum_{k=1}^{i} l_j l_k \dot{\phi_k} \cos(\phi_j - \phi_k) \end{aligned}$$

Por fim, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}_j} &= \sum_{i=j}^{N} m_i \sum_{k=1}^{i} l_j l_k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\phi}_k \cos\left(\phi_j - \phi_k\right)\right) \\ &= \sum_{i=j}^{N} m_i \sum_{k=1}^{i} l_j l_k \left[\ddot{\phi}_k \cos\left(\phi_j - \phi_k\right) + \left(\dot{\phi}_k^{\,2} - \dot{\phi}_j \dot{\phi}_k\right) \sin\left(\phi_j - \phi_k\right)\right]. \qquad (13)\end{aligned}$$

Desta maneira, a equação de movimento para ϕ_j é obtida substituindo as equações (13) e (12) em (3), da qual resulta, agrupando os somatórios e simplificando:

$$\sum_{i=j}^{N} m_i \left\{\sum_{k=1}^{i} l_j l_k \left[\ddot{\phi}_k \cos\left(\phi_j - \phi_k\right) + \dot{\phi}_k^{\,2} \sin\left(\phi_j - \phi_k\right)\right] + g l_j \sin\left(\phi_j\right)\right\} = 0$$

onde, chamando:

$$P_{i,j} = \sum_{k=1}^{i} l_j l_k \left[\ddot{\phi}_k \cos\left(\phi_j - \phi_k\right) + \dot{\phi}_k^{\,2} \sin\left(\phi_j - \phi_k\right)\right],$$

pode-se escrever:

$$\sum_{i=j}^{N} m_i \left[P_{i,j} + g l_j \sin\left(\phi_j\right)\right] = 0, \qquad (14)$$

que fornece, para $j = 1, \ldots, N$, as equações de movimento do sistema.

3.2 VARIAÇÕES DE ESCALA

3.2.1 MASSA DOS PÊNDULOS

Uma propriedade bastante evidente da equação (14) é a linearidade com relação as massas m_i. Deste modo, considere um conjunto de N funções $\Gamma_j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1,...,N$, com $U \subset \mathbb{R}_+^{*\,(N-j+1)} \times \mathbb{R}_+$ tal que:

$$\Gamma_j\left(\mathbf{m}, t\right) = \sum_{i=j}^{N} m_i \left[P_{i,j} + g l_j \sin\left(\phi_j\right)\right] = 0, \qquad (15)$$

e $\mathbf{m} = (m_j,...,m_N)$.

Teorema 2. *Seja α um número real positivo. Assim:*

$$\Gamma_j\left(\alpha\mathbf{m}, t\right) = 0 \Leftrightarrow \Gamma_j\left(\mathbf{m}, t\right) = 0.$$

*Ou seja, as equações de movimento para o conjunto de massas α**m** e **m** são equivalentes.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Pela equação (15), tem-se que:

$$0 = \Gamma_j\left(\alpha\mathbf{m}, t\right) = \sum_{i=j}^{N} \left(\alpha m_i\right) \left[P_{i,j} + g l_j \sin\left(\phi_j\right)\right] = \alpha \sum_{i=j}^{N} m_i \left[P_{i,j} + g l_j \sin\left(\phi_j\right)\right] = \alpha \Gamma_j\left(\mathbf{m}, t\right)$$

Assim, como $\alpha > 0$, segue que $\Gamma_j(\mathbf{m},t) = 0$.

($\Leftarrow$) Novamente pela equação (15):

$$0 = \Gamma_j(\mathbf{m},t) = \sum_{i=j}^{N} m_i \left[P_{i,j} + gl_j \sin(\phi_j)\right]$$

que, multiplicando ambos os lados por α, resulta:

$$0 = \alpha\Gamma_j(\mathbf{m},t) = \alpha \sum_{i=j}^{N} m_i \left[P_{i,j} + gl_j \sin(\phi_j)\right] = \sum_{i=j}^{N} (\alpha m_i) \left[P_{i,j} + gl_j \sin(\phi_j)\right] = \Gamma_j(\alpha\mathbf{m},t)$$

$\square$

Isso significa que a órbita no espaço de fases $\mathbf{x}(t) = \left(\phi_1(t),...,\phi_N(t),\dot{\phi}_1(t),...,\dot{\phi}_N(t)\right)$ é invariante sob esta mudança de escala, levando a uma simetria também no cálculo dos expoentes de Lyapunov. Sendo assim, considerando o P.V.I (Problema de Valor Inicial):

$$\begin{cases} \Gamma_j(\mathbf{m},t) = 0,\ j = 1,...,N. \\ \mathbf{x}(t_0) = (\phi_1(t_0),...,\phi_N(t_0),\dot{\phi}_1(t_0),...,\dot{\phi}_N(t_0))\ , \\ \delta(\mathbf{m},t_0) = (\delta_0^1,...,\delta_0^{2N}) \end{cases} \tag{16}$$

e definindo $\lambda_{max} : \Omega \to \mathbb{R}$ com $\Omega \subseteq {\mathbb{R}_+^*}^N$, dada por:

$$\lambda_{max}(\mathbf{m}) = \lim_{t\to\infty} \lim_{\|\delta(\mathbf{m},t_0)\|\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\|\delta(\mathbf{m},t)\|}{\|\delta(\mathbf{m},t_0)\|}\right), \tag{17}$$

em que $\delta(\mathbf{m},t)$ calcula a diferença, no espaço de fases, entre as órbitas $\mathbf{x}(\mathbf{m},t)$ e $\mathbf{y}(\mathbf{m},t) = \mathbf{x}(\mathbf{m},t) + \delta(\mathbf{m},t)$[1], obtém-se uma generalização da equação (6) onde se pode avaliar como as órbitas e, consequentemente, os expoentes de Lyapunov, mudam com uma variação de escala nas massas a partir de uma mesma condição inicial.

Teorema 3. *$\lambda_{max}(\mathbf{m})$ é uma função homogênea de grau 0.*

Demonstração. Note que, como o **Teorema 2** implica a equivalência das equações de movimento para uma transformação de escala nas massas, então o P.V.I (16) obtém os mesmos vetores de estado para $\Gamma_j(\mathbf{m},t) = 0$ e $\Gamma_j(\alpha\mathbf{m},t) = 0$ em cada instante de tempo. Logo:

$$\delta(\mathbf{m},t) = \mathbf{y}(\mathbf{m},t) - \mathbf{x}(\mathbf{m},t) = \mathbf{y}(\alpha\mathbf{m},t) - \mathbf{x}(\alpha\mathbf{m},t) = \delta(\alpha\mathbf{m},t)$$

Então:

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(\mathbf{m}) &= \lim_{t\to\infty} \lim_{\|\delta(\mathbf{m},t_0)\|\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\|\delta(\mathbf{m},t)\|}{\|\delta(\mathbf{m},t_0)\|}\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} \lim_{\|\delta(\alpha\mathbf{m},t_0)\|\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\|\delta(\alpha\mathbf{m},t)\|}{\|\delta(\alpha\mathbf{m},t_0)\|}\right) \\ &= \lambda_{max}(\alpha\mathbf{m}). \end{aligned}$$

Portanto, basta escrever:

$$\lambda_{max}(\alpha\mathbf{m}) = \alpha^0 \lambda_{max}(\mathbf{m}).$$

$\square$

[1] Nesta notação, as dependências em **m** foram explicitadas devido a variação das funções $\phi_1,...,\phi_N$ com **m** a medida que escolhemos **m** em $\Gamma_j(\mathbf{m},t)$.

3.2.2 COMPRIMENTO DOS PÊNDULOS

Um estudo analítico do comportamento das soluções para variações nos comprimentos dos pêndulos é significativamente mais difícil, especialmente pelo produto $l_j l_k$ em $P_{i,j}$. A propriedade de homogeneidade, como verificada anteriormente, já não é mais aplicável. Apesar disso, é possível definir um conjunto de funções $\Psi_j : Q \to \mathbb{R}$, onde $Q \subset {\mathbb{R}_+^*}^N \times \mathbb{R}_+$, tal que:

$$\Psi_j(\mathbf{l},t) = \sum_{i=j}^{N} m_i \left[P_{i,j} + g l_j \sin(\phi_j)\right] = 0 \tag{18}$$

com $\mathbf{l} = (l_1,...,l_N)$. Assim, definindo $\lambda_{max} : \Lambda \to \mathbb{R}$, com $\Lambda \subset {\mathbb{R}_+^*}^N$, uma análise parecida com dada pela equação (17) pode ser feita considerando:

$$\lambda_{max}(\mathbf{l}) = \lim_{t\to\infty} \lim_{\|\delta(\mathbf{l},t_0)\|\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\|\delta(\mathbf{l},t)\|}{\|\delta(\mathbf{l},t_0)\|}\right) \tag{19}$$

onde $\delta(\mathbf{l},t)$ calcula a distância, no espaço de fases, para as órbitas obtidas a partir da evolução do P.V.I:

$$\begin{cases} \Psi_j(\mathbf{l},t) = 0,\ j = 1,...,N. \\ \mathbf{x}(t_0) = (\phi_1(t_0),...,\phi_N(t_0),\dot{\phi}_1(t_0),...,\dot{\phi}_N(t_0)) \\ \delta(\mathbf{l},t_0) = (\delta_0^1,...,\delta_0^{2N}) \end{cases}$$

Para facilitar a notação, as equações (17) e (19) serão denotadas por:

$$\lambda_{max}(\mathbf{m}) = \lambda_{max}^{\mathbf{m}}$$
$$\lambda_{max}(\mathbf{l}) = \lambda_{max}^{\mathbf{l}}$$

quando os domínios Ω e Λ não forem especificados.

3.3 FORMATO MATRICIAL

Para analisar as propriedades dinâmicas, especialmente relacionadas ao acoplamento das equações para cada ϕ_j, e facilitar a implementação computacional, é conveniente escrever o sistema formado por (14) em um formato matricial. Para fazê-lo, considere:

$$\sum_{i=j}^{N} m_i P_{i,j} = -\sum_{i=j}^{N} m_i g l_j \sin(\phi_j)$$

que desenvolvendo temos:

$$\sum_{i=j}^{N} m_i \sum_{k=1}^{i} \underbrace{l_j l_k \ddot{\phi}_k \cos(\phi_j - \phi_k)}_{\sigma_{kj}} = -\sum_{i=j}^{N}\left[\sum_{k=1}^{i} m_i l_j l_k \dot{\phi}_k^2 \sin(\phi_j - \phi_k)\right] + m_i g l_j \sin(\phi_j)\,. \tag{20}$$

Além disso:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=j}^{N} m_i \sum_{k=1}^{i} \sigma_{kj} &= m_j \sum_{k=1}^{j} \sigma_{kj} + m_{j+1} \sum_{k=1}^{j+1} \sigma_{kj} + ... + m_N \sum_{k=1}^{N} \sigma_{kj} \\
&= \left(\sum_{i=j}^{N} m_i \right) \left(\sum_{k=1}^{j} \sigma_{kj} \right) + \left(\sum_{i=j+1}^{N} m_i \right) \sigma_{j+1j} + ... + \sum_{i=N}^{N} m_i \sigma_{Nj}.
\end{aligned}
$$

Nomeando:

$$M_\alpha = \sum_{i=\alpha}^{N} m_i,$$

tem-se:

$$\sum_{i=j}^{N} m_i \sum_{k=1}^{i} \sigma_{kj} = M_j \sigma_{1j} + ... + M_j \sigma_{jj} + M_{j+1} \sigma_{j+1j} + M_{j+2} \sigma_{j+2j} + ... + M_N \sigma_{Nj},$$

onde, fazendo:

$$\sigma_{kj} = l_j l_k \ddot{\phi}_k \cos\left(\phi_j - \phi_k\right) = \rho_{kj} \ddot{\phi}_k,$$

pode-se, de forma compacta, escrever:

$$\sum_{i=j}^{N} m_i \sum_{k=1}^{i} \sigma_{kj} = \sum_{\mu=1}^{j} M_j \rho_{\mu j} \ddot{\phi}_\mu + \sum_{\nu=j+1}^{N} M_\nu \rho_{\nu j} \ddot{\phi}_\nu. \tag{21}$$

A partir das equações (20) e (21), o sistema (14) pode ser representado matricialmente sob a forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\Phi} = \mathcal{F} \tag{22}$$

em que $\ddot{\Phi} = \left(\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2, \ddot{\phi}_3, \ldots, \ddot{\phi}_N \right)^T$, e:

$$\mathbf{M}_{j\eta} = \begin{cases} M_j \rho_{\eta j},\ \eta \leq j \\ M_\eta \rho_{\eta j},\ \eta > j \end{cases},$$

$$\mathcal{F}_{j1} = -\sum_{i=j}^{N} \left[\sum_{k=1}^{i} m_i l_j l_k \dot{\phi}_k^{\,2} \sin\left(\phi_j - \phi_k\right) \right] + m_i g l_j \sin\left(\phi_j\right).$$

A implementação numérica, portanto, envolve integrar as equações de movimento fazendo:

$$\ddot{\Phi} = \mathbf{M}^{-1} \mathcal{F}.$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os primeiros resultados envolvem o cálculo dos expoentes de Lyapunov considerando as propriedades expostas no capítulo anterior. Uma vez que as equações de movimento foram formuladas de maneira generalizada, foram analisados os casos para o pêndulo simples e duplo em uma abordagem comparativa.

4.1 VARIAÇÕES DE MASSA

O primeiro fato curioso a respeito do **Teorema 3** é que o parâmetro variável que produz a homogeneidade nos expoentes de Lyapunov é a massa do pêndulo. No entanto, para o caso em que $N = 1$, a equação de movimento é a equação do pêndulo simples, que independe da massa. A independência das massas no pêndulo simples pode ser vista como um caso particular de uma lei de independência mais geral, uma vez que se $\mathbf{m} = (m_1,...,m_N)$ é tal que $m_1 = ... = m_N = m, m > 0$, então para qualquer $j = 1,...,N$:

$$\Gamma_j(\mathbf{m},t) = m \sum_{i=j}^{N} [P_{i,j} + gl_j \sin(\phi_j)] = 0 \Rightarrow \sum_{i=j}^{N} [P_{i,j} + gl_j \sin(\phi_j)] = 0.$$

Logo, como o pêndulo simples possui apenas uma massa m_1, sempre é o caso em que todas as massas do sistema são iguais, e a órbita independe da massa. Além disso, como a função $\lambda^{\mathbf{m}}_{max}$ é homogênea de grau zero, o **Teorema 8** implica (supondo que $\lambda^{\mathbf{m}}_{max}$ é diferenciável):

$$\frac{\partial \lambda^{\mathbf{m}}_{max}}{\partial m_1} m_1 = 0, \tag{23}$$

e, para satisfazer a equação (23) para todo m_1, tem-se que:

$$\lambda^{\mathbf{m}}_{max} = c,\ c \in \mathbb{R},$$

o que concorda com o fato de que, dada a independência da massa, o pêndulo simples não deve ter seu padrão caótico afetado por variações de escala neste parâmetro.

O caso $N = 2$, por outro lado, já é significativamente mais complexo. Neste caso, o **Teorema 8** implica:

$$\frac{\partial \lambda^{\mathbf{m}}_{max}}{\partial m_1} m_1 + \frac{\partial \lambda^{\mathbf{m}}_{max}}{\partial m_2} m_2 = 0,$$

para a qual a solução geral pode ser escrita como:

$$\lambda^{\mathbf{m}}_{max} = g\left(\frac{m_1}{m_2}\right), \tag{24}$$

em que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável arbitrária (LEMOS, 2007).

Como citado anteriormente (p. 10), Safitri, Nusantara e Chandra (2020) verificaram numericamente que, no caso por eles analisado, maiores valores da razão $\delta = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)$ estavam relacionados a órbitas mais rapidamente divergentes. Não é possível garantir que, para todo P.V.I, seja o caso que $g(\delta)$ seja crescente, dada a solução geral. No entanto, é possível expressar um fato mais geral a respeito do pêndulo duplo, a saber, de que órbitas caóticas podem ser obtidas igualmente para pares grandes ou pequenos de m_1 e m_2, dependendo apenas da razão entre as massas.

4.1.1 INFLUÊNCIA EM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

A variabilidade nos expoentes de Lyapunov obtida para o pêndulo duplo possui uma implicação importante também do ponto de vista experimental. De fato, como diferentes valores de massa estão associados a diferentes valores para os expoentes de Lyapunov, então dada uma medida experimental:

$$\begin{cases} \bar{m_1} = m_1 \pm \Delta m_1 \\ \bar{m_2} = m_2 \pm \Delta m_2 \end{cases},$$

existe um intervalo $[m_1 - \Delta m_1, m_1 + \Delta m_1] \times [m_2 - \Delta m_2, m_2 + \Delta m_2]$ no qual a função (24) pode variar.

Considere, por exemplo, o caso:

TABELA 1 – Parâmetros para simulação numérica do P.V.I com variação das massas.

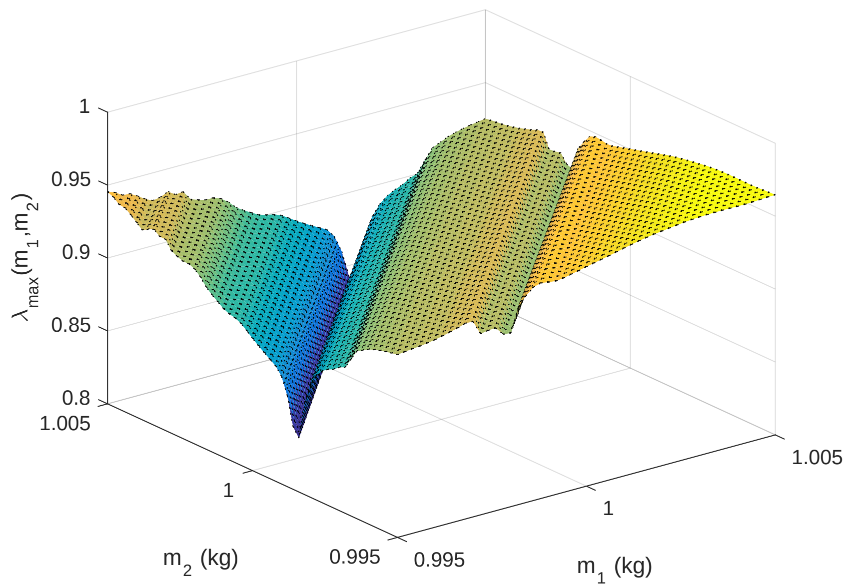
Parâmetro	Valor
$\bar{m_1}$	$1 \pm 0{,}005\ kg$
$\bar{m_2}$	$1 \pm 0{,}005\ kg$
l_1	1 m
l_2	1 m
$\phi_1(t_0)$	$\frac{\pi}{2}$ rad
$\phi_2(t_0)$	$\frac{2\pi}{3}$ rad
$\dot{\phi}_1(t_0)$	0 rad/s
$\dot{\phi}_2(t_0)$	0 rad/s
$\delta(t_0, m_1, m_2)$	$1\%(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2)$

Fonte: O autor (2022)

associado a $\Gamma_1(m_1, m_2, t) = 0$ e $\Gamma_2(m_1, m_2, t) = 0$, em um intervalo $[t_0, t] = [0\ s, 10\ s]$. A Figura (2) mostra a variação dos expoentes de Lyapunov com a massa[1], enquanto a Figura (3) compara a série temporal para $\phi_1(t)$ calculado para dois valores distintos de massa:

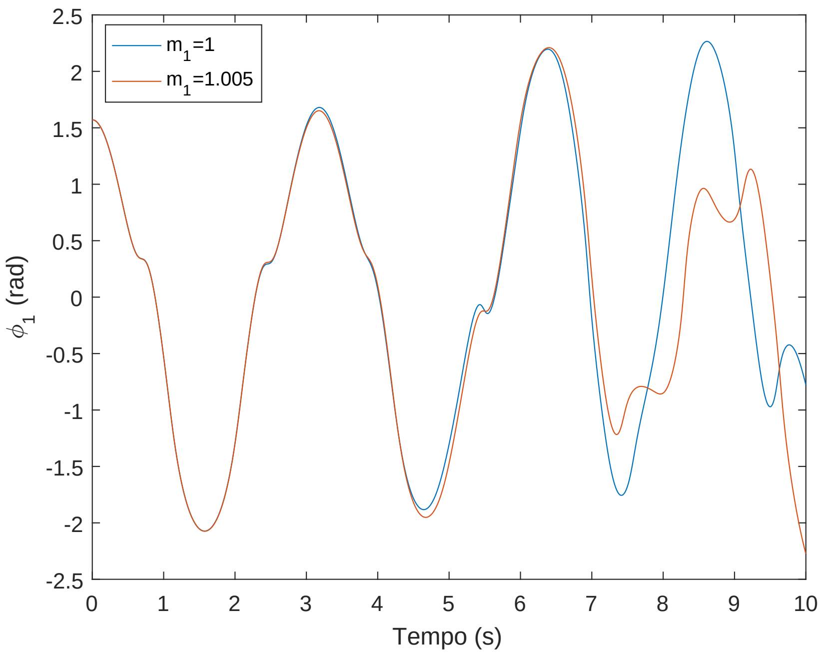
[1]O gráfico foi obtido calculando uma versão numérica da equação (17) a partir da equação (7).

FIGURA 2 – Gráfico da função $\lambda_{max}\,(m_1{,}m_2)$.



Fonte: O autor (2022)

FIGURA 3 – Série temporal de $\phi_1(t)$ calculado para $m_1 = 1$ kg e $m_1 = 1{,}005$ kg.



Fonte: O autor (2022)

Sendo assim, é possível concluir que, mesmo para condições experimentais idênticas, o erro experimental inerente a um aparelho de medida de massa é suficiente para originar divergências significativas nas trajetórias, devido as possíveis variações deste parâmetro no intervalo de incerteza. Além disso, como todos os expoentes de Lyapunov foram obtidos analisando as mesmas condições iniciais de posição e velocidade, segue-se que a sensibilidade evidenciada se deve unicamente a variação das massas do pêndulo, de modo que o sistema é sensível não somente as condições iniciais, mas também com relação as características que definem a estrutura do pêndulo.

Note que, como o pêndulo simples não está sujeito a este tipo de variabilidade de padrão caótico em função da massa, a dependência com relação ao conjunto de massas **m** no pêndulo duplo constitui uma fonte de divergência extra em comparação ao pêndulo simples. Esta divergência, assim como os expoentes de Lyapunov, cresce exponencialmente uma vez que dados $\lambda_{max}\left(\mathbf{m}\right),\lambda_{max}\left(\mathbf{m}^{*}\right)\in\Omega$, com $\mathbf{m}\neq\alpha\mathbf{m}^{*}$ e $\lambda_{max}\left(\mathbf{m}\right)>\lambda_{max}\left(\mathbf{m}^{*}\right)$, então as distâncias no espaço de fase evoluem de modo que:

$$\frac{\left\|\delta\left(\mathbf{m},t\right)\right\|}{\left\|\delta\left(\mathbf{m}^{*},t\right)\right\|}=\frac{\left\|\delta\left(\mathbf{m},t_0\right)\right\|e^{\lambda(\mathbf{m})t}}{\left\|\delta\left(\mathbf{m}^{*},t_0\right)\right\|e^{\lambda(\mathbf{m}^{*})t}},$$

onde $\left\|\delta\left(\mathbf{m},t_0\right)\right\|=\left\|\delta\left(\mathbf{m}^{*},t_0\right)\right\|$, pois todos os expoentes de Lyapunov foram obtidos a partir da mesma condição inicial. Logo:

$$\left\|\delta\left(\mathbf{m},t\right)\right\|=\left\|\delta\left(\mathbf{m}^{*},t\right)\right\|e^{[\lambda(\mathbf{m})-\lambda(\mathbf{m}^{*})]t}.$$

Este último resultado nos permite ter uma intuição a respeito do significado da variabilidade de um parâmetro físico, tal como a massa, e como ele se distingue da sensibilidade às condições iniciais. Enquanto a sensibilidade às condições iniciais nos fornece a magnitude da distância no espaço de fase de duas trajetórias inicialmente próximas, a variabilidade dos parâmetros físicos nos permite avaliar como as distâncias no espaço de fase evoluem, uma em relação a outra, a partir das mesmas condições iniciais.

4.2 VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO DO PÊNDULO

Com relação ao comprimento dos pêndulos, a análise de alguns casos limite permite obter alguma informação a respeito da evolução dos expoentes de Lyapunov a medida que $l_j\to 0$ ou $l_j\to\infty$.

Para o caso $N=1$, a função $\Psi_1(l_1,t)$ implica:

$$\dot{\omega_1}=-\frac{g}{l_1}\sin\left(\phi_1\right), \tag{25}$$

onde $\dot{\phi_1}=\omega_1$. Note que:

$$-\frac{g}{l_1}\leq-\frac{g}{l_1}\sin\left(\phi_1\right)\leq\frac{g}{l_1},$$

de modo que, tomando:

$$\lim_{l_1\to\infty}-\frac{g}{l_1}\leq\lim_{l_1\to\infty}-\frac{g}{l_1}\sin\left(\phi_1\right)\leq\lim_{l_1\to\infty}\frac{g}{l_1},$$

tem-se que $\lim_{l_1\to\infty}\dot{\omega_1}=\dot{\omega_1}^{\infty}=0$. Além disso, considere duas condições iniciais:

$$\begin{cases}(\phi_1(t_0),\omega_1(t_0))=(\phi_0,\omega_0)\\(\phi_1'(t_0),\omega_1'(t_0))=(\phi_0',\omega_0')\end{cases}. \tag{26}$$

O caso limite acima implica, para as condições iniciais de (26), que:

$$\begin{cases} \omega_1^{\infty}(t) = \omega_0; \;\; \phi_1^{\infty}(t) = \phi_0 + \omega_0 t \\ \omega_1'^{\infty}(t) = \omega_0'; \;\; \phi_1'^{\infty}(t) = \phi_0' + \omega_0' t \end{cases}.$$

A fim de simplificar a análise, as simulações serão feitas considerando o caso em que as velocidades iniciais são nulas, de modo que a medida que l_1 cresce, as funções $\phi_1(t)$ e $\phi_1'(t)$ tendem as constantes ϕ_0 e ϕ_0'. Neste caso particular, é interessante avaliar o que acontece com a equação (19), pois:

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(l_1 \to \infty) &= \lim_{t\to\infty} \lim_{\|\delta(t_0,l_1)\|\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\sqrt{\left(\phi_1^{\infty}(t) - \phi_1'^{\infty}(t)\right)^2 + \left(\omega_1^{\infty}(t) - \omega_1'^{\infty}(t)\right)^2}}{\sqrt{\left(\phi_0 - \phi_0'\right)^2 + \left(\omega_0 - \omega_0'\right)^2}} \right) \\ &= \lim_{t\to\infty} \lim_{\|\delta(t_0,l_1)\|\to 0} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\sqrt{\left(\phi_0 - \phi_0'\right)^2}}{\sqrt{\left(\phi_0 - \phi_0'\right)^2}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, para os parâmetros:

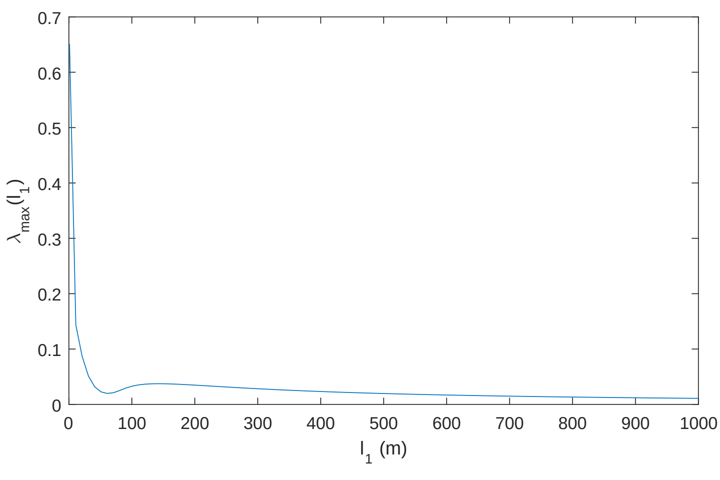
TABELA 2 – Parâmetros para simulação numérica de λ^{l}_{max} com $N = 1$.

Parâmetro	Valor
$\phi_1(t_0)$	$\frac{2\pi}{3}$ rad
$\dot{\phi}_1(t_0)$	0 rad/s
$\delta(t_0,l_1)$	$1\%(\phi_1,\dot{\phi}_1)$

Fonte: O autor (2022)

considerando a integração, a partir da função $\Psi(l_1,t) = m_1\left[P_{1,1} + gl_1 \sin(\phi_1)\right] = 0$, em um intervalo $[t_0,t] = [0\ s,10\ s]$, a Figura (4) mostra a evolução da função $\lambda_{max}(l_1)$:

FIGURA 4 – Gráfico da função $\lambda_{max}(l_1)$ para $N = 1$.



Fonte: O autor (2022)

Nesta simulação, l_1 varia no intervalo $[1\ m, 1000\ m]$, mas é possível intuir o que acontece para $l_1 \to 0$, onde uma divergência aparece fazendo os expoentes de Lyapunov crescerem rapidamente. Além disso, existe um rápido decaimento dos expoentes de Lyapunov a medida de l_1 cresce, exceto pela região em torno do ponto $100\ m$ para o qual a função cresce levemente, cuja origem não pode ser determinada a partir das ferramentas aqui analisadas.

Para $N = 2$, novamente, o caso é significativamente mais complexo. Mais do que isso, para a análise da variabilidade nos comprimentos dos pêndulos é difícil até mesmo identificar simetrias, tal como feito anteriormente para a variabilidade das massas. Por esta razão, apenas um estudo de caso será considerado de modo a comparar os valores de expoentes de Lyapunov do pêndulo duplo com o resultado anterior. Sendo assim, considerando os parâmetros:

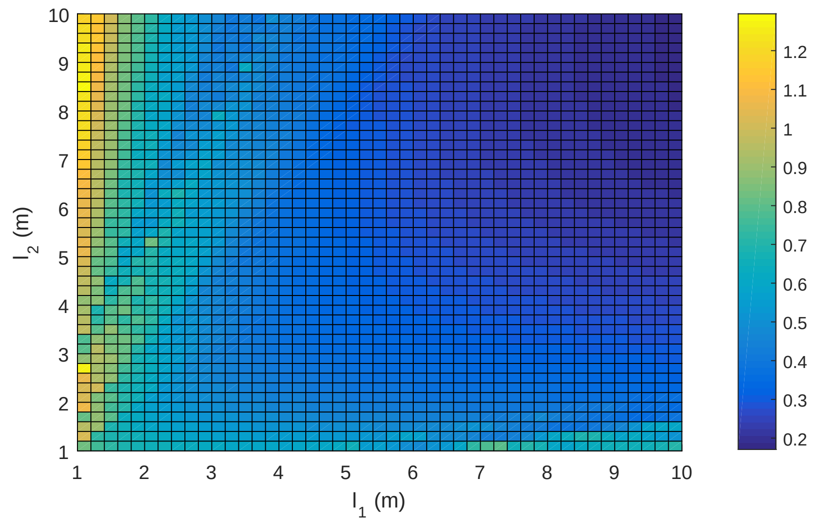
TABELA 3 – Parâmetros para simulação numérica de $\lambda^{\mathbf{l}}_{max}$ com $N = 2$.

Parâmetro	Valor
m_1	1 kg
m_2	1 kg
$\phi_1(t_0)$	$\frac{2\pi}{3}$ rad
$\phi_2(t_0)$	$\frac{\pi}{2}$ rad
$\dot{\phi}_1(t_0)$	0 rad/s
$\dot{\phi}_2(t_0)$	0 rad/s
$\delta(t_0, l_1, l_2)$	$1\%(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2)$

Fonte: O autor (2022)

A Figura (5) mostra o gráfico de $\lambda_{max}(l_1, l_2)$ para os parâmetros da Tabela (3):

FIGURA 5 – Gráfico da função $\lambda_{max}(l_1, l_2)$ para $N = 2$.



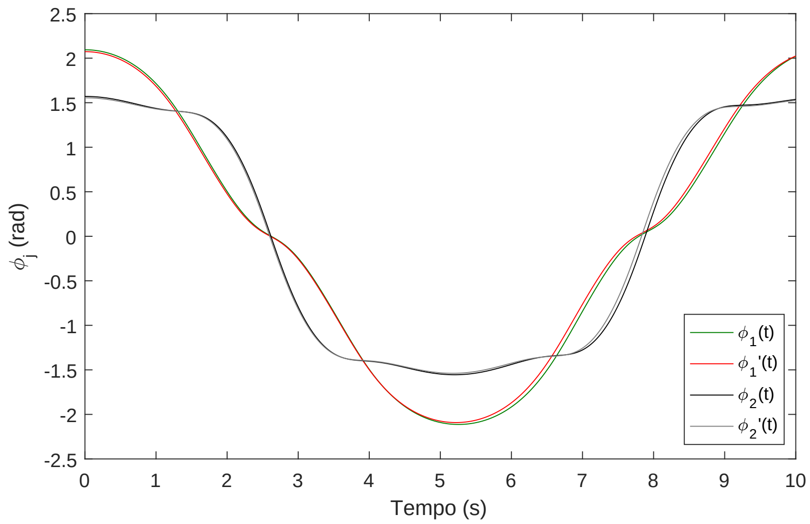
Fonte: O autor (2022)

Novamente, valores menores para o comprimento dos pêndulos implicam em expoentes de Lyapunov maiores, ao passo que valores maiores de l_1 e l_2, especialmente quando $l_1 = l_2$, apresentam os menores valores para os expoentes de Lyapunov. Para valores pequenos de l_1 e l_2, no entanto, o pêndulo duplo apresenta valores significativamente maiores para os expoentes de Lyapunov em comparação a um pêndulo simples com o mesmo comprimento l_1, o que pode estar associado a divergência que ocorre tanto para $\phi_1(t)$ quanto $\phi_2(t)$, neste caso.

Para o caso em que $l_2 > l_1$, quando l_1 é pequeno, os expoentes de Lyapunov aumentam a medida que l_2 aumenta. Este comportamento de crescimento dos expoentes de Lyapunov quando, sob as mesmas condições, fazemos l_2 crescer em comparação a algum l_1 pequeno também foi identificado nas simulações realizadas por Gupta, Bansal e Singh (2014), considerando outras condições iniciais.

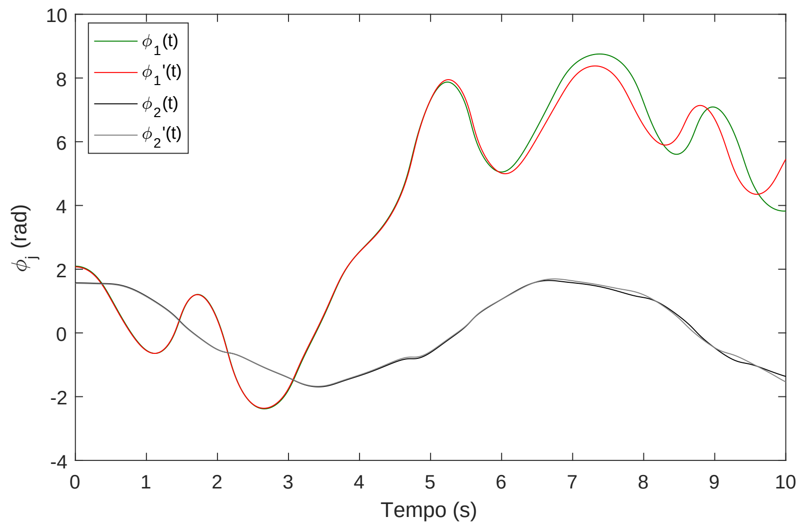
A Figura (6) apresenta as séries temporais para o caso $l_1 = l_2 = 10\ m$, e a Figura (7) as séries temporais para o caso onde $l_1 = 1\ m$ e $l_2 = 8{,}4\ m$, de modo a comparar as trajetórias associadas ao menor e maior expoente de Lyapunov, respectivamente.

FIGURA 6 – Gráfico das funções $\phi_j(t)$ e $\phi'_j(t)$ para $l_1 = l_2 = 10\ m$.



Fonte: O autor (2022)

FIGURA 7 – Gráfico das funções $\phi_j(t)$ e $\phi'_j(t)$ para $l_1 = 1\ m$ e $l_2 = 8{,}4\ m$.



Fonte: O autor (2022)

onde $\phi'_j(t)$, $j = 1{,}2$, são as funções evoluídas a partir da condição inicial perturbada em 1%.

Estes resultados mostram como os fatores físicos contribuem para a variabilidade do comportamento caótico, e abrem espaço para pesquisas que busquem explorar em que medida estes parâmetros podem tornar a divergência mínima no sistema. Este tipo de análise pode ser útil quando o interesse se concentra na uso do sistema para a modelagem de fenômenos vibratórios ou na comparação de resultados teóricos com medidas experimentais.

Além disso, para a dependência com relação a massa, por exemplo, as simetrias exploradas decorrem unicamente do fato de que os valores m_i aparecem linearmente nas equações de movimento. Assim, é fácil perceber que este mesmo tipo de simetria pode, futuramente, ser estendido para outros tipos de sistemas caóticos.

4.3 PROPRIEDADES DE ACOPLAMENTO

Além das motivações físicas para a distinção entre o comportamento caótico do pêndulo duplo em relação ao pêndulo simples, tais como a variabilidade em função da massa, que não a afeta o pêndulo simples, e a presença de expoentes de Lyapunov maiores para l_1 e l_2 pequenos, é possível analisar a equação (22) a fim de encontrar motivações dinâmicas para esta distinção.

Para $N = 2$, a equação (22) assume a forma:

$$\begin{pmatrix} M_1\rho_{11} & M_2\rho_{21} \\ M_2\rho_{12} & M_2\rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{11} \\ \mathcal{F}_{21} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

onde:

$$\begin{pmatrix} M_1\rho_{11} & M_2\rho_{21} \\ M_2\rho_{12} & M_2\rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1-\phi_2) \\ m_2 l_2 l_1 \cos(\phi_2-\phi_1) & m_2 l_2^2 \end{pmatrix},$$

e:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}_{11} \\ \mathcal{F}_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_2 l_1 l_2 \dot{\phi_2}^2 \sin(\phi_1-\phi_2) - (m_1+m_2) g l_1 \sin(\phi_1) \\ -m_2 l_1 l_2 \dot{\phi_1}^2 \sin(\phi_2-\phi_1) - m_2 g l_2 \sin(\phi_2) \end{pmatrix},$$

Assim, se $m_2 = 0$ ou $l_2 = 0$, o sistema se reduz ao caso $N = 1$ na variável $\phi_1(t)$, uma vez que os termos de acoplamento e o termo para a aceleração $\ddot{\phi_2}$ são anulados. Além disso, se $l_1 = 0$, a equação se reduz também ao caso $N = 1$, mas para a variável $\phi_2(t)$. Estes casos são naturais, uma vez que representam uma descaracterização física do pêndulo duplo de modo a torná-lo um o pêndulo simples comum para $m_2 = 0$, um pêndulo simples que oscila com massa $m_1 + m_2$ e de tamanho l_1 para $l_2 = 0$ e um pêndulo simples que oscila com tamanho $l_1 + l_2$ e massa m_2 para $m_1 = 0$.

Além de serem naturais, estes são, na verdade, os únicos casos em que a equação (22) pode reduzir-se para o caso $N = 1$. Isso porque, para anular os termos de acoplamento com todos os parâmetros físicos não nulos, seria necessário que, por exemplo, para ϕ_1:

$$m_2 l_1 l_2 \cos(\phi_1-\phi_2)\,\ddot{\phi_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\phi_2}^2 \sin(\phi_1-\phi_2) = 0,$$

o que só poderia ocorrer nos casos em que $\left(\ddot{\phi_2},\dot{\phi_2}\right) = (0{,}0)$, $\left(\ddot{\phi_2}, \sin(\phi_1-\phi_2)\right) = (0{,}0)$, $\left(\cos(\phi_1-\phi_2), \dot{\phi_2}\right) = (0{,}0)$ ou $(\cos(\phi_1-\phi_2), \sin(\phi_1-\phi_2)) = (0{,}0)$. As duas primeiras condições podem ser construídas em casos onde a posição inicial é um ponto de equilíbrio e as velocidades são nulas, enquanto as outras duas são impossíveis. De maneira geral e, especificamente, em condições dinâmicas, nenhuma das condições necessárias para a redução $N = 2 \to N = 1$ podem ser atendidas para qualquer instante, a não ser pela manipulação de características físicas, conforme citado anteriormente.

Neste sentido, a distinção entre o movimento do pêndulo duplo e o pêndulo simples pode ser vista também como resultado da perturbação causada sobre as componentes ϕ_1 e ϕ_2 por conta dos termos de acoplamento. Inversamente, o pêndulo simples pode ser visto como um pêndulo duplo para o qual os termos de acoplamento e, portanto, alguns termos não lineares das equações de movimento, são sempre nulos. Assim, uma vez que o comportamento caótico está diretamente ligado a não linearidade das equações de movimento, é natural que o movimento do pêndulo simples seja, como o nome indica, mais simples.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O pêndulo duplo, apesar de possuir uma estrutura simples, apresenta sensibilidade às condições inicias e uma dinâmica particularmente interessante, a qual muitos trabalhos se dedicaram a entender devido a sua natureza caótica. Alguns trabalhos têm mostrado recentemente que o comportamento caótico do pêndulo duplo não tem origem somente na sua dinâmica, mas também é afetado pela estrutura física que o compõe. Estes estudos, no geral, apresentam uma abordagem computacional, de modo que não é possível generalizar as conclusões obtidas e caracterizar como ou quanto este fatores interferem na dinâmica.

Neste trabalho, mostramos que a simetria em relação a escala para a variação das massas implica na homogeneidade das variações do expoentes de Lyapunov em relação a massa de pêndulos simples e duplos, explorando consequências desta simetria. Além disso, o comportamento de casos limites para o comprimento dos pêndulos foram estudados, de modo a verificar que, nos casos analisados, o comprimento dos pêndulos está inversamente relacionado com os expoentes de Lyapunov, tanto para o pêndulo simples quanto para o pêndulo duplo.

Por fim, apresentamos um estudo das características dinâmicas do pêndulo duplo, evidenciando que os termos de acoplamento tem um papel fundamental na diferenciação entre o comportamento de um pêndulo duplo em relação a um pêndulo simples, e analisamos quais as condições necessárias para o movimento de um pêndulo duplo se reduzir ao movimento de um pêndulo simples.

Especialmente com relação a variabilidade dos parâmetros físicos, a metodologia aqui apresentada pode ser utilizada para estudar outros sistemas físicos que apresentam comportamento caótico. Uma extensão natural deste trabalho, neste sentido, consiste em encontrar quais propriedades da lagrangiana reproduzem, em um contexto mais geral, as simetrias aqui analisadas, bem como o desenvolvimento de ferramentas que sejam capazes de lidar com relações não lineares entre os parâmetros físicos, tais como o produto $l_j l_k$ que aparece no termo $P_{i,j}$, para o qual a simetria de homogeneidade não é válida.

REFERÊNCIAS

ABARBANEL, H. D. **Analysis of observed chaotic data**. New York: Springer-Verlag, 1995. Citado na página 14.

AGUIRRE, L. A. **Sistemas Dinâmicos Não Lineares: Conceitos e Análise de dados**. 1. ed. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2021. Citado na página 14.

AUBIN, D.; DALMEDICO, A. D. Writing the history of dynamical systems and chaos: Longue dureé and revolution. **Historia Mathematica**, v. 29, n. 3, p. 273–339, 2002. Citado na página 10.

AWREJCEWICZ, J.; KUDRA, G.; WASILEWSKI, G. Experimental and numerical investigation of chaotic regions in the triple physical pendulum. **Nonlinear Dyn**, v. 50, p. 755–766, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

CALVÃO, A. M. **Estudos de Sistemas Dinâmicos Não Lineares: Pêndulo Duplo, Batimentos Cardíacos e Coletivos de Animais**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal Fluminense - UFF, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.

DUARTE, C. R. M. **Técnicas de Identificação Aplicadas à Modelagem de um Pêndulo Duplo Caótico**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2009. Citado na página 14.

GUPTA, M. K.; BANSAL, K.; SINGH, A. K. Mass and length dependent chaotic behavior of a double pendulum. **IFAC**, p. 5, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 28.

LANDAU, L.; LIFCHITZ, E. **Mecânica**. 1. ed. São Paulo: HEMUS, 2002. 235 p. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 13.

LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 386 p. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 13, 15 e 22.

LÜ, J.; CHENG, G.; CHENG, D. A new chaotic system and beyond: The generalized lorenz-like system. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 14, n. 5, p. 1507–1537, 2004. Citado na página 10.

MAY, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. **Nature**, v. 261, p. 459–467, 1976. Citado na página 10.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. São Paulo: Livraria da Física, 2006. Citado na página 14.

POINCARÉ, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. **Acta Mathematica**, v. 13, p. 1–270, 1890. Citado na página 10.

PRAZERES, R. F. dos. **Métodos Clássicos e Qualitativos no Estudo do Problema dos Três Corpos**. 113 pag. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) — PEMAT-UFRJ, Rio de Janeiro, 2010. Citado na página 10.

SAFITRI, A.; NUSANTARA, T.; CHANDRA, T. D. Factors of length ratio and mass at chaos of double pendulum system. **AIP Conference Proceedings**, p. 11, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 22.

WILD, R. The effects of finite precision on the simulation of the double pendulum. **Senior Honors Projects**, p. 25, 2019. Citado na página 11.

YU, P.; BI, Q. Analysis of non-linear dynamics and bifurcations of a double pendulum. **Journal of Sound and Vibration**, v. 217, p. 691–736, 1998. Citado na página 10.

Apêndice

Os algoritmos utilizados para o cálculo dos expoentes de Lyapunov foram formulados na linguagem MatLab. Para as variações de comprimento no pêndulo simples, a simulação foi feita a partir do código:

Algoritmo 1: Variação de comprimento: pêndulo simples

```
▷ Variáveis fixas
$T_i \leftarrow 0$
$T_f \leftarrow 10$
$n \leftarrow 500.000$
$\Delta t \leftarrow \frac{(T_f - T_i)}{n}$
$g \leftarrow 9.81$
$a \leftarrow 100$
▷ Condições iniciais
$\theta[1] \leftarrow \frac{2\pi}{3}$
$\omega[1] \leftarrow 0$
$\theta'[1] \leftarrow 0.99 * \theta[1]$
$\omega'[1] \leftarrow 0.99 * \omega[1]$
▷ Iteração
for $k \leftarrow 1 : a + 1$ do
    $l[k] \leftarrow 1 + (k - 1) * \left(\frac{1000}{a}\right)$
    for $i \leftarrow 1 : n$ do
        $\omega[i + 1] \leftarrow \omega[i] - \frac{g}{l[k]} * \sin(\theta[i]) * \Delta t$
        $\omega'[i + 1] \leftarrow \omega'[i] - \frac{g}{l[k]} * \sin(\theta'[i]) * \Delta t$
        $\theta[i + 1] \leftarrow \theta[i] + \omega[i] * \Delta t$
        $\theta'[i + 1] \leftarrow \theta'[i] + \omega'[i] * \Delta t$
    end
    ▷ Expoentes de Lyapunov
    $\delta[1,k] \leftarrow \sqrt{(\theta[1] - \theta'[1])^2 + (\omega[1] - \omega'[1])^2}$
    for $j \leftarrow 2 : n + 1$ do
        $\delta[j,k] \leftarrow \sqrt{(\theta[j] - \theta'[j])^2 + (\omega[j] - \omega'[j])^2}$
        $\lambda[j,k] \leftarrow \left(\frac{1}{T_i + (j-1)\Delta t}\right) * \ln\left(\frac{\delta[j,k]}{\delta[1,k]}\right)$
    end
    $\lambda_{max}[k] \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n+1} \lambda[j,k]$
end
```

Os gráficos para a variação das massas no pêndulo duplo foram obtidos pelo código:

Algoritmo 2: Variação de massa: pêndulo duplo

▷ Variáveis fixas
$T_i \leftarrow 0$
$T_f \leftarrow 10$
$n \leftarrow 5000$
$\Delta t \leftarrow \frac{(T_f - T_i)}{n}$
$g \leftarrow 9.81$
$a \leftarrow 50$
$l_1 \leftarrow 1$
$l_2 \leftarrow 1$
▷ Condições iniciais
$\theta_1[1] \leftarrow \frac{\pi}{2}$
$\theta_2[1] \leftarrow \frac{2\pi}{3}$
$\omega_1[1] \leftarrow 0$
$\omega_2[1] \leftarrow 0$
$\theta_1'[1] \leftarrow 0.99 * \theta_1[1]$
$\theta_2'[1] \leftarrow 0.99 * \theta_2[1]$
$\omega_1'[1] \leftarrow 0.99 * \omega_1[1]$
$\omega_2'[1] \leftarrow 0.99 * \omega_2[1]$
▷ Iteração da órbita real
for $k \leftarrow 1 : a + 1$ **do**
  $m_1[k] \leftarrow 0.995 + (k-1) * \left(\frac{0.01}{a}\right)$
  for $j \leftarrow 1 : a + 1$ **do**
    $m_2[j] \leftarrow 0.995 + (j-1) * \left(\frac{0.01}{a}\right)$
    for $i \leftarrow 1 : n$ **do**
      $M \leftarrow \begin{pmatrix} (m_1[k]+m_2[j])*l_1^2 & m_2[j]*l_1*l_2*\cos(\theta_1[i]-\theta_2[i]) \\ m_2[j]*l_1*l_2*\cos(\theta_2[i]-\theta_1[i]) & m_2[j]l_2^2 \end{pmatrix}$
      $F \leftarrow \begin{pmatrix} -m_2[j]*l_1*l_2*(\omega_2[i])^2*\sin(\theta_1[i]-\theta_2[i])-(m_1[k]+m_2[j])*g*l_1*\sin(\theta_1[i]) \\ -m_2[j]*l_1*l_2*(\omega_1[i])^2*\sin(\theta_2[i]-\theta_1[i])-m_2[j]*g*l_2*\sin(\theta_2[i]) \end{pmatrix}$
      $V \leftarrow M^{-1} * F$
      $\dot{\omega_1}[i] \leftarrow V[1,1]$
      $\dot{\omega_2}[i] \leftarrow V[2,1]$
      ▷ Avanço no tempo
      $\omega_1[i+1] \leftarrow \omega_1[i] + \dot{\omega_1}[i] * \Delta t$
      $\omega_2[i+1] \leftarrow \omega_2[i] + \dot{\omega_2}[i] * \Delta t$
      $\theta_1[i+1] \leftarrow \theta_1[i] + \omega_1[i] * \Delta t$
      $\theta_2[i+1] \leftarrow \theta_2[i] + \omega_2[i] * \Delta t$
    end
  end
end

```
▷ Iteração da órbita perturbada
for k ← 1 : a+1 do
    m_1[k] ← 0.995 + (k − 1) * (0.01/a)
    for j ← 1 : a+1 do
        m_2[k] ← 0.995 + (k − 1) * (0.01/a)
        for i ← 1 : n do
            M′ ← ( (m_1[k]+m_2[j])*l_1^2              m_2[j]*l_1*l_2*cos(θ′_1[i]−θ′_2[i]) ;
                   m_2[j]*l_1*l_2*cos(θ′_2[i]−θ′_1[i])   m_2[j]l_2^2 )
            F′ ← ( −m_2[j]*l_1*l_2*(ω′_2[i])^2*sin(θ′_1[i]−θ′_2[i])−(m_1[k]+m_2[j])*g*l_1*sin(θ′_1[i]) ;
                   −m_2[j]*l_1*l_2*(ω′_1[i])^2*sin(θ′_2[i]−θ′_1[i])−m_2[j]*g*l_2*sin(θ′_2[i]) )
            V′ ← M′^{−1} * F′
            ω̇′_1[i] ← V′[1,1]
            ω̇′_2[i] ← V′[2,1]
            ▷ Avanço no tempo
            ω′_1[i+1] ← ω′_1[i] + ω̇′_1[i] * Δt
            ω′_2[i+1] ← ω′_2[i] + ω̇′_2[i] * Δt
            θ′_1[i+1] ← θ′_1[i] + ω′_1[i] * Δt
            θ′_2[i+1] ← θ′_2[i] + ω′_2[i] * Δt
        end
    end
end
▷ Expoentes de Lyapunov
for k ← 1 : a+1 do
    for j ← 1 : a+1 do
        δ[1,k,j] ←
          sqrt((θ_1[1] − θ′_1[1])^2 + (θ_2[1] − θ′_2[1])^2 + (ω_1[1] − ω′_1[1])^2 + (ω_2[1] − ω′_2[1])^2)
        for i ← 2 : n+1 do
            δ[i,k,j] ←
              sqrt((θ_1[i] − θ′_1[i])^2 + (θ_2[i] − θ′_2[i])^2 + (ω_1[i] − ω′_1[i])^2 + (ω_2[i] − ω′_2[i])^2)
            λ[i,k,j] ← (1/(T_i+(j−1)Δt)) * ln(δ[i,k,j]/δ[1,k,j])
        end
        λ_max[k,j] ← (1/n) Σ_{i=2}^{n+1} λ[i,k,j]
    end
end
end
```

Por fim, a variação dos comprimentos de pêndulo foi obtida pelo código:

Algoritmo 3: Variação de comprimento: pêndulo duplo

▷ Variáveis fixas

$T_i \leftarrow 0$

$T_f \leftarrow 10$

$n \leftarrow 5000$

$\Delta t \leftarrow \frac{(T_f - T_i)}{n}$

$g \leftarrow 9.81$

$a \leftarrow 50$

$m_1 \leftarrow 1$

$m_2 \leftarrow 1$

▷ Condições iniciais

$\theta_1[1] \leftarrow \frac{2\pi}{3}$

$\theta_2[1] \leftarrow \frac{\pi}{2}$

$\omega_1[1] \leftarrow 0$

$\omega_2[1] \leftarrow 0$

$\theta_1'[1] \leftarrow 0.99 * \theta_1[1]$

$\theta_2'[1] \leftarrow 0.99 * \theta_2[1]$

$\omega_1'[1] \leftarrow 0.99 * \omega_1[1]$

$\omega_2'[1] \leftarrow 0.99 * \omega_2[1]$

▷ Iteração da órbita real

for $k \leftarrow 1 : a + 1$ **do**

  $l_1[k] \leftarrow 1 + (k - 1) * \left(\frac{9}{a}\right)$

  for $j \leftarrow 1 : a + 1$ **do**

    $l_2[j] \leftarrow 1 + (j - 1) * \left(\frac{9}{a}\right)$

    for $i \leftarrow 1 : n$ **do**

      $M \leftarrow \begin{pmatrix} (m_1+m_2)*l_1[k]^2 & m_2*l_1[k]*l_2[j]*\cos(\theta_1[i]-\theta_2[i]) \\ m_2*l_1[k]*l_2[j]*\cos(\theta_2[i]-\theta_1[i]) & m_2 l_2[j]^2 \end{pmatrix}$

      $F \leftarrow \begin{pmatrix} -m*l_1[k]*l_2[j]*(\omega_2[i])^2*\sin(\theta_1[i]-\theta_2[i])-(m_1+m_2)*g*l_1[k]*\sin(\theta_1[i]) \\ -m_2*l_1[k]*l_2[j]*(\omega_1[i])^2*\sin(\theta_2[i]-\theta_1[i])-m_2*g*l_2[j]*\sin(\theta_2[i]) \end{pmatrix}$

      $V \leftarrow M^{-1} * F$

      $\dot{\omega_1}[i] \leftarrow V[1,1]$

      $\dot{\omega_2}[i] \leftarrow V[2,1]$

      ▷ Avanço no tempo

      $\omega_1[i+1] \leftarrow \omega_1[i] + \dot{\omega_1}[i] * \Delta t$

      $\omega_2[i+1] \leftarrow \omega_2[i] + \dot{\omega_2}[i] * \Delta t$

      $\theta_1[i+1] \leftarrow \theta_1[i] + \omega_1[i] * \Delta t$

      $\theta_2[i+1] \leftarrow \theta_2[i] + \omega_2[i] * \Delta t$

    end

  end

end

▷ Iteração da órbita perturbada

for $k \leftarrow 1 : a+1$ **do**

  $l_1[k] \leftarrow 1 + (k-1) * \left(\frac{9}{a}\right)$

  for $j \leftarrow 1 : a+1$ **do**

    $l_2[j] \leftarrow 1 + (j-1) * \left(\frac{9}{a}\right)$

    for $i \leftarrow 1 : n$ **do**

      $M' \leftarrow \begin{pmatrix} (m_1+m_2)*l_1[k]^2 & m_2*l_1[k]*l_2[j]*\cos\left(\theta_1'[i]-\theta_2'[i]\right) \\ m_2*l_1[k]*l_2[j]*\cos\left(\theta_2'[i]-\theta_1'[i]\right) & m_2 l_2[j]^2 \end{pmatrix}$

      $F' \leftarrow \begin{pmatrix} -m_2*l_1[k]*l_2[j]*\left(\omega_2'[i]\right)^2*\sin\left(\theta_1'[i]-\theta_2'[i]\right)-(m_1+m_2)*g*l_1[k]*\sin\left(\theta_1'[i]\right) \\ -m_2*l_1[k]*l_2[j]*\left(\omega_1'[i]\right)^2*\sin\left(\theta_2'[i]-\theta_1'[i]\right)-m_2*g*l_2[j]*\sin\left(\theta_2'[i]\right) \end{pmatrix}$

      $V' \leftarrow M'^{-1} * F'$

      $\dot{\omega}_1'[i] \leftarrow V'[1,1]$

      $\dot{\omega}_2'[i] \leftarrow V'[2,1]$

      ▷ Avanço no tempo

      $\omega_1'[i+1] \leftarrow \omega_1'[i] + \dot{\omega}_1'[i] * \Delta t$

      $\omega_2'[i+1] \leftarrow \omega_2'[i] + \dot{\omega}_2'[i] * \Delta t$

      $\theta_1'[i+1] \leftarrow \theta_1'[i] + \omega_1'[i] * \Delta t$

      $\theta_2'[i+1] \leftarrow \theta_2'[i] + \omega_2'[i] * \Delta t$

    end

  end

end

▷ Expoentes de Lyapunov

for $k \leftarrow 1 : a+1$ **do**

  for $j \leftarrow 1 : a+1$ **do**

    $\delta[1,k,j] \leftarrow \sqrt{(\theta_1[1]-\theta_1'[1])^2 + (\theta_2[1]-\theta_2'[1])^2 + (\omega_1[1]-\omega_1'[1])^2 + (\omega_2[1]-\omega_2'[1])^2}$

    for $i \leftarrow 2 : n+1$ **do**

      $\delta[i,k,j] \leftarrow \sqrt{(\theta_1[i]-\theta_1'[i])^2 + (\theta_2[i]-\theta_2'[i])^2 + (\omega_1[i]-\omega_1'[i])^2 + (\omega_2[i]-\omega_2'[i])^2}$

      $\lambda[i,k,j] \leftarrow \left(\frac{1}{T_i+(j-1)\Delta t}\right) * \ln\left(\frac{\delta[i,k,j]}{\delta[1,k,j]}\right)$

    end

    $\lambda_{max}[k,j] \leftarrow \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n+1} \lambda[i,k,j]$

  end

end

end

Os valores escolhidos para o passo de integração e o integrador utilizado são arbitrários e não interferem nas propriedades aqui analisadas, uma vez que estas são características das próprias equações de movimento. Portanto, eles foram construídos de maneira a minimizar o custo computacional necessário para produzir dados consistentes com as análises expostas.