

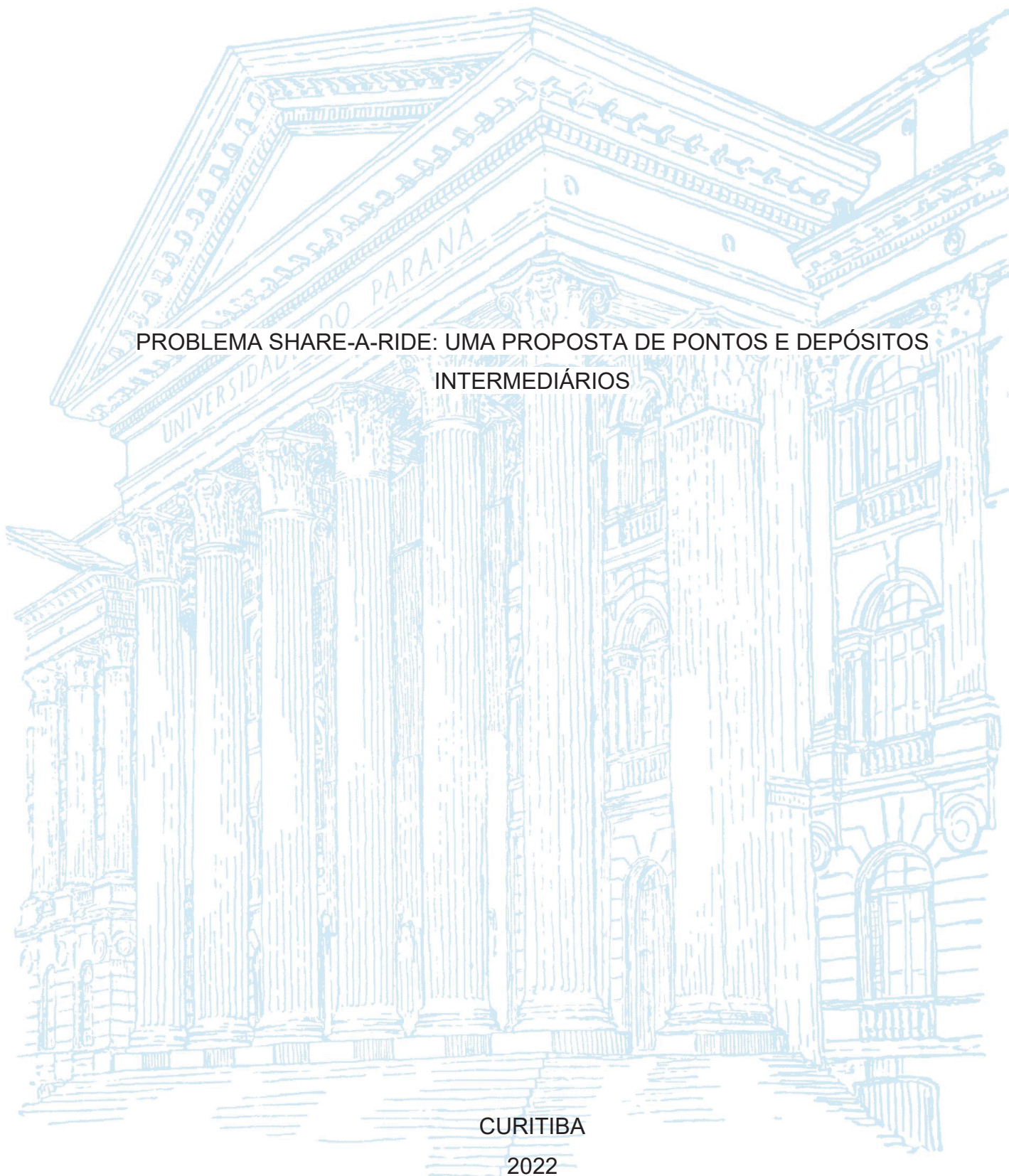
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

HELLEN CRISTINA SPENGLER

PROBLEMA SHARE-A-RIDE: UMA PROPOSTA DE PONTOS E DEPÓSITOS  
INTERMEDIÁRIOS

CURITIBA

2022



HELLEN CRISTINA SPENGLER

PROBLEMA SHARE-A-RIDE: UMA PROPOSTA DE PONTOS E DEPÓSITOS  
INTERMEDIÁRIOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Métodos Numéricos em Engenharia.

Área de concentração: Programação Matemática.

Orientador: Gustavo Valentim Loch.

Coorientador: Cassius Tadeu Scarpin.

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Spengler, Helen Cristina

Problema Share-a-Ride: uma proposta de pontos e depósitos intermediários / Helen Cristina Spengler – Curitiba, 2022.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Gustavo Valentim Loch

Coorientador: Cassius Tadeu Scarpin

1. Transporte urbano. 2. Veículos compartilhados (Share-a-Ride Problem). I. Loch, Gustavo Valentim. II. Scarpin, Cassius Tadeu. III. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. IV. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **HELLEN CRISTINA SPENGLER** intitulada: **PROBLEMA SHARE-A-RIDE: UMA PROPOSTA DE PONTOS E DEPÓSITOS INTERMEDIÁRIOS**, sob orientação do Prof. Dr. GUSTAVO VALENTIM LOCH, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutora está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 25 de Março de 2022.

Assinatura Eletrônica

30/03/2022 14:58:41.0

GUSTAVO VALENTIM LOCH

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

30/03/2022 14:55:02.0

EDUARDO ALVES PORTELA SANTOS

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

31/03/2022 22:38:02.0

FABIO ANTONIO DORINI

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

01/04/2022 13:54:01.0

JOSÉ EDUARDO PÉCORA JUNIOR

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

30/03/2022 14:33:04.0

CLAUDIMAR PEREIRA DA VEIGA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - PPGOLD)

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, meu agradecimento, pois sem ele nada seria possível.

Ao meu companheiro Roy, que me apoiou e incentivou com todo amor e dedicação.

Aos Familiares que participaram durante essa jornada, em especial aos meus pais Sandra e Marcos, a meu irmão Alan, a meus primos Letícia e Elton.

Aos orientadores Prof<sup>ª</sup>. Dr. Gustavo Valentim Loch e Prof<sup>ª</sup>. Dr. Cassius Tadeu Scarpin, pela orientação, competência e paciência.

Aos membros da banca, por aceitarem o convite e pelas valiosas contribuições, nas pessoas Eduardo Alves Portela Santos, Fabio Antonio Dorini, José Eduardo Pécora Junior e Claudimar Pereira da Veiga.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram nessa trajetória.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

## RESUMO

O transporte urbano vem sendo modificado por novas tecnologias, permitindo aplicações que atendam necessidades específicas e aumentem a taxa de ocupação dos veículos. O transporte por aplicativo sob demanda é uma aplicação das tecnologia no meio urbano, oferecendo viagens individuais e compartilhadas, inclusive para fretes. Uma abordagem que trata disso na literatura é o Share-a-Ride Problem (SARP), que busca o planejamento a mínimo custo de viagens entre origens e destinos especificados, para serem atendidos por uma frota também especificada, em que é permitido o compartilhamento de veículos entre os clientes. Cada viagem pode ser diferenciada entre bens ou pessoas. Este cenário é uma aplicação atual das tecnologias de Mobility as a Service (MaaS), conhecidas como viagens por aplicativos ofertadas por grandes empresas, que buscam menores despesas para os clientes, maior ocupação dos veículos e, por consequência, menores emissões de gases poluentes. Usualmente, as frotas responsáveis pelos atendimentos nestes ambientes é composta por motoristas sem vínculo direto com a empresa. Estes motoristas são chamados de motoristas ocasionais, por combinarem seus trajetos pessoais com entregas ocasionais. No intuito de construir um ambiente mais colaborativo e adaptado às necessidades dos motoristas, a presente tese propõe a inserção do conceito de paradas planejadas. Desse modo, neste trabalho foram propostas quatro variações do SARP, sendo que duas contemplam o conceito de paradas planejadas para o motoristas, os Depósitos Intermediários, e duas contemplam o conceito de paradas intermediárias para os clientes, chamadas de Pontos Intermediários e baseadas no Multi-Drop Pickup and Delivery Problem. Além disso, o SARP apresenta limitações em tempo de processamento na resolução exata para instâncias de médio e grande porte. Portanto, foram adaptadas a matheurísticas Fix & Optimize e a metaheurística ALNS para resolver o problema. Comparando os resultados com a resolução exata, as estratégias propostas alcançaram soluções factíveis para todas as instâncias, de até 55 clientes e 5 veículos. Além disso, chegaram ao ótimo em 35% dos casos.

Palavras-chave: Transporte urbano. Share-a-Ride Problem. Compartilhamento. Depósitos intermediários.

## ABSTRACT

Urban transport has been modified by new technologies, allowing applications that answer specific needs and increase the occupancy rate of vehicles. Transport by on-demand application is an application of technology in urban areas, offering individual and shared trips, including freight. An approach that deals with this in the literature is called the Share-a-Ride Problem (SARP), which seeks to plan trips at a minimum cost between specified origin and destination points to be served by a specified fleet, allowing the sharing of vehicles between customers. Each trip can be assigned between goods or people. This scenario is a current application of Mobility as a Service (MaaS) technologies, known as travel by applications offered by large companies, which provides lower expenses for customers, higher vehicle occupancy, and, consequently, lower-emission greenhouse gases. Usually, the fleets responsible for services in these environments are composed of drivers with no direct relationship with the company. These drivers are called occasional drivers, as they combine their personal journeys with occasional deliveries. In order to build a more collaborative environment adapted to the needs of drivers, this thesis proposes the insertion of the concept of planned stops. Thus, four variations of the SARP were proposed in this work, two of which contemplate the planned stops for the drivers, the Intermediate Deposits, and two the concept of intermediate stops for the customers, called Intermediate Points and based on the Multi-Drop Pickup and Delivery Problem. In addition, SARP has processing time limitations on an exact resolution for medium and large instances. Therefore, the Fix & Optimize metaheuristics and the ALNS metaheuristics were adapted to solve the problem. Comparing the results with the exact resolution, the proposed strategies achieved feasible solutions for all instances, up to 55 customers and 5 vehicles. In addition, they reached the optimum in 35% of cases.

Keywords: Urban transport. Share-a-Ride Problem. Ridesharing. Middle Depots.

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Publicações sobre o SARP por ano.. . . . .	16
2.2	Publicações sobre o DARP por ano. . . . .	16
2.3	Exemplo DARP.. . . . .	20
2.4	Solução exemplo DARP. . . . .	21
2.5	Exemplo SARP . . . . .	25
2.6	Solução exemplo SARP. . . . .	26
3.1	Exemplo SARP-DIM . . . . .	32
3.2	Solução exemplo SARP-DIM. . . . .	33
3.3	Exemplo SARP-DIP. . . . .	37
3.4	Solução Exemplo SARP-DIP.. . . . .	38
3.5	Exemplo SARP-PIM. . . . .	43
3.6	Solução exemplo SARP-PIM.. . . . .	44
3.7	Exemplo SARP-PIS. . . . .	48
3.8	Solução exemplo SARP-PIS. . . . .	49
4.1	Exemplo do Operador de Troca. . . . .	57
4.2	Exemplo do Operador de Deslocamento.. . . . .	60

## LISTA DE TABELAS

2.1	Trabalhos da literatura sobre o transporte com compartilhamento. . . . .	14
2.2	Distribuição numérica no DARP . . . . .	20
2.3	Distribuição numérica no SARP . . . . .	25
3.1	Distribuição numérica no SARP-DIM . . . . .	33
3.2	Distribuição numérica no SARP-DIS. . . . .	38
3.3	Distribuição numérica do SARP-PIM. . . . .	44
3.4	Distribuição numérica do SARP-PIS.. . . .	49
4.1	Distribuição numérica do Exemplo de Troca. . . . .	58
4.2	Distribuição numérica do Exemplo de Deslocamento. . . . .	61
5.1	Parâmetros gerais dos conjuntos de instâncias A e B. . . . .	62
5.2	Resultados numéricos para os conjuntos A e B do problema SARP-DIM.. . . .	64
5.3	Resultados numéricos para os conjuntos A e B do problema SARP-DIS. . . . .	65
5.4	Resultados numéricos para os conjuntos A e B do problema SARP-PIM. . . . .	66
5.5	Resultados numéricos para os conjuntos A e B do problema SARP-PIS. . . . .	67
5.6	Comparação entre as instâncias. . . . .	68

## LISTA DE ACRÔNIMOS

ANLS	Adaptative Large Neighborhood Search
DAR	Dial-a-Ride
DARP	Dial-a-Ride Problem
DARPMI	Dial-a-Ride with Money as an Incentive
DARPSRP	Dial-a-Ride Problem with Split Requests and Profits
e-ADARP	Electric Autonomous Dial-a-Ride Problem
FRT	Freight Rapid Transit
F&O	Fixed and Optimize
GRASP	Greedy Randomized Adaptative Search Procedure
MD-MT-HDARP	Depot Multi-Trip Heterogeneous Dial-a-Ride Problem
MaaS	Mobility as a Service
PDPTW-SL	Pickup and Delivery Problem with Scheduled Lines
PPSARP	People-Parcel Share-a-Ride Problem
PRT	Personal Rapid Transit
SA	Simulated Annealing
SARP	Share-a-Ride Problem
SARP-DIM	Share-a-Ride com Depósito Intermediários Misto
SARP-DIS	Share-a-Ride com Depósitos Intermediários Simples
SARP-PIM	Share-a-Ride com Pontos Intermediários Misto
SARP-PIS	Share-a-Ride com Pontos Intermediários Simples
TS	Tabu Search
VNS	Variable Neighborhood Search

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
1.1	OBJETIVOS	9
1.1.1	Objetivo Geral.	9
1.1.2	Objetivos Específicos	9
1.2	MOTIVAÇÃO.	10
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	11
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b>	<b>12</b>
2.1	TRABALHOS RELACIONADOS	12
2.2	PROBLEMAS DE TRANSPORTE COM COMPARTILHAMENTO.	16
2.3	MODELOS CLÁSSICOS	17
2.3.1	Formulação Dial-a-Ride: Cordeau (2006)	17
2.3.2	Formulação Share-a-Ride: Li (2014).	21
<b>3</b>	<b>MODELOS PROPOSTOS</b>	<b>27</b>
3.1	DEPÓSITOS INTERMEDIÁRIOS.	27
3.1.1	Formulação SARP com Depósitos Intermediários Misto (SARP-DIM)	27
3.1.2	Formulação SARP com Depósitos Intermediários Simples (SARP-DIS)	33
3.2	PONTOS INTERMEDIÁRIOS.	38
3.2.1	Formulação SARP com Pontos Intermediários Misto (SARP-PIM)	39
3.2.2	Formulação SARP com Pontos Intermediários Simples (SARP-PIS)	44
<b>4</b>	<b>MÉTODOS DE SOLUÇÕES</b>	<b>50</b>
4.1	HEURÍSTICA DE FIX & OPTIMIZE	50
4.2	HEURÍSTICA DE SOLUÇÃO INICIAL.	51
4.3	METAHEURÍSTICA ADAPTATIVE LARGE NEIGHBORHOOD SEARCH - ALNS	54
4.3.1	Operador de troca de usuários entre veículos.	55
4.3.2	Operador de Deslocamento de origem/destino de um usuário	58
<b>5</b>	<b>EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS</b>	<b>62</b>
5.1	TIPOS DE INSTÂNCIAS	62
5.2	RESULTADOS	63
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>69</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>70</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A mobilidade urbana tem sido modificada pela integração com tecnologias inovadoras, trazendo soluções flexíveis às necessidades individuais dos clientes. Empresas, como Uber e Lyft, possuem estrutura de Mobility as a Service (MaaS), do inglês Mobilidade como Serviço, que são capazes de fornecer viagens sob demanda individuais e compartilhadas e, mais recentemente, o transporte exclusivo de pequenos fretes (bens).

O conceito de transporte compartilhado entre bens e pessoas é tratado na literatura por problemas de ridesharing e crowdsharing (Mourad et al., 2019). Porém, somente com a evolução tecnológica dos últimos anos foi possível ter aplicações bem-sucedidas em maiores escalas. O problema de ridesharing aborda os diferentes tipos de compartilhamento de veículos, enquanto o problema de crowdsharing busca formas eficientes de transportar pacotes utilizando o excesso de capacidade existente no tráfego urbano. As resoluções desses problemas são capazes de influenciar positivamente na redução das emissões de gases poluentes e no congestionamento, pois aumentam a taxa de ocupação por veículo (Cai et al., 2019). Além disso, suas abordagens permitem que políticas de gestão sejam tratadas ainda no estágio de planejamento e, assim, viabilizam aplicações diversas (Le et al., 2019).

Uma abordagem que trata do transporte compartilhado de pessoas é o Dial-a-Ride Problem (DARP), que busca o planejamento a mínimo custo de viagens com pontos de origem e destino especificados previamente, sendo atendidos por uma frota de veículos, em que é possível haver o compartilhamento de veículos pelos pedidos de viagens. Já o Share-a-Ride Problem (SARP), é uma extensão do DARP que permite o compartilhamento apenas entre bens e pessoas. O objetivo do SARP é buscar o transporte de mínimo custo de viagens agendadas entre pontos de origem e destino previamente estabelecidos, tendo a disponibilidade de uma frota de veículos conhecidos e permitindo que haja o compartilhamento de viagens entre os clientes (bens ou pessoas) em um mesmo veículo. Ainda, sua formulação considera restrições de tempo máximo de viagem para o usuário, tempo máximo de viagem para o motorista e janela de tempo para cada ponto de origem/destino. O primeiro trabalho a apresentar o SARP foi por (Li et al., 2014), porém a modelagem proposta possuía limitações para o compartilhamento, não permitindo que mais de dois usuários ou um usuário e outros bens compartilhassem viagens entre si. Na literatura outros trabalhos já trataram destas limitações, como em (Yu et al., 2018), que faz a generalização do SARP, permitindo o compartilhamento livre entre bens e pessoas, ainda considerando um frota heterogênea com veículos adaptados para pessoas usuárias de cadeiras de rodas e macas. Em (Do et al., 2018) são incluídas janelas dinâmicas de velocidade, permitindo maior detalhamento da duração das rotas a serem escolhidas. O trabalho de (Hosny, 2016) propõe paradas para os motoristas, fazendo planejamento de janelas de tempo para estas paradas.

Embora o trabalho de (Hosny, 2016) já considere o conceito de planejar paradas para os motoristas, ainda assim não implementa uma localização específica para esta parada. Assim, nesta tese, são apresentadas formulações matemáticas do SARP que consideram paradas para os motoristas, tendo o planejamento simultâneo de uma janela de tempo e uma localização para estas paradas, que são chamadas de depósitos intermediários.

Além disso, são apresentadas formulações do SARP com pontos intermediários. Os pontos intermediários são paradas intermediárias para os clientes, de modo que entre uma origem e um destino de uma viagem, possa ser planejado mais um ponto de parada que sirva para embarque/desembarque de parte dos clientes. Este conceito já foi tratado em trabalhos de Multi-Drop Pickup and Delivery Problem, assim sendo uma adaptação para o SARP.

Em todas essas formulações é aplicado o conceito de motoristas ocasionais (Dahle et al., 2019), que permite que os motoristas tenham depósitos próprios e sem relação com outros motoristas, aproximando a formulação aos cenários de transporte por aplicativo.

Dado que o transporte por aplicativo possui uma demanda em tempo real e o SARP é uma variação do Pickup and Delivery Problem with Time Windows (PDPTW), que é um problema *NP – Hard*, buscou-se resoluções com foco também na agilidade para determinar soluções factíveis. Assim, foram utilizadas a matheurística Fix & Optimize e a metaheurística ALNS, conjuntamente. Também, foi proposta uma heurística construtiva para solução inicial.

Para realizar os testes dos problemas propostos, foram criadas instâncias de pequeno e médio porte, considerando até 50 clientes e 5 veículos. O resultados computacionais dos testes conseguiram soluções factíveis para todas as instâncias abordadas.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral do presente trabalho é propor formulações, métodos e soluções para o Share-a-Ride Problem que envolvam o conceito de depósitos intermediários e pontos intermediários.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

A fim de atingir o objetivo geral, os objetivos específicos são:

- estudar as características do problema SARP;
- estudar as diferentes formulações propostas na literatura para o SARP;
- identificar problemas de transporte similares ao problema SARP;
- identificar e estudar os diferentes métodos de resolução aplicados ao problema SARP;
- propor novos conceitos para a formulação do problema SARP;

- propor diferentes cenários de aplicação para o SARP;
- propor métodos para a resolução do SARP;
- realizar testes computacionais nas rotinas implementadas para o SARP;
- comparar os resultados computacionais obtidos e avaliar sua efetiva aplicação em diferentes cenários propostos.

## 1.2 MOTIVAÇÃO

A chegada de novas tecnologias proporcionou grandes transformações no cotidiano humano, sendo o transporte uma parte disso. A facilidade de conexão entre empresas, prestadores e usuários viabilizou as atuais viagens por aplicativo sob demanda, trazendo opções com maior atenção as necessidades do cliente, além de auxiliar no aumento da taxa de ocupação dos veículos.

Dentre as opções de viagens por aplicativo, já é possível haver o compartilhamento de veículos entre usuários de diferentes pedidos, inclusive sendo estes usuários bens ou pessoas. O problema que trata deste ambiente chama-se Share-a-Ride Problem (SARP), sendo que busca o atendimento a mínimo custo dos pedidos de viagens atendidos por uma frota específica, podendo haver o compartilhamento destes veículos entre as viagens.

Diversos trabalhos trataram de variações dos problemas de compartilhamento, afim de atender diferentes necessidades dos clientes e dos motoristas: frota heterogênea com adaptação para transporte de pessoas usuárias de cadeiras de rodas e macas (Yu et al., 2018); diferentes tamanhos de ocupações dos fretes (Beirigo et al., 2018); possibilidade de clientes trocarem de veículos durante a viagem (Chen et al., 2018); planejamento de janelas de tempo para paradas dos motoristas (Hosny, 2016).

Em especial, o trabalho de (Hosny, 2016) propõe o planejamento de janelas de tempo para paradas dos motoristas, permitindo que os motoristas programem um intervalo de tempo, seja para lanchar, descansar, etc. Entretanto, o planejamento proposto em (Hosny, 2016) apenas incluiu a janela de tempo, sem considerar uma localidade para este intervalo do motorista.

Se observa que ao atender as necessidades dos motoristas, varia-se a regra de negócio para este grupo, tornando o ambiente de trabalho mais atrativo. Estratégias que tratam as necessidades dos principais grupos do problema (clientes e motoristas), trazem a possibilidade de maiores participações, facilitando a fluidez do serviço (Hosny, 2016).

Desse modo, na presente tese, são propostos dois modelos SARP com paradas para os motoristas, considerando janela de tempo e localidade. Estas paradas foram chamadas de depósitos intermediários. Além disso, todos os motoristas foram tratados como motoristas ocasionais, conforme o trabalho de (Dahle et al., 2019), em que cada motorista tem seu próprio depósito inicial, depósito final e instante de início de serviço. Assim, os depósitos intermediários também foram especificados para cada motorista.

Outros dois modelos são propostos na tese, permitindo haver paradas intermediárias para as viagens dos clientes, assim chamados de SARP com paradas intermediárias. O conceito de paradas intermediárias já conhecido e tratado pelos modelos de Multi-Drop Pickup and Delivery Problem, sendo assim a proposta uma adaptação do conceito para o SARP.

O SARP é uma variação do Delivery Problem with Time Windows (PDPTW) que é NP-Hard (Ho et al., 2018), tendo limitações para resolução de instâncias de médio e grande porte. Logo, buscou-se o uso de heurísticas que auxiliem a diminuir o tempo de resolução.

A matheurística Fix & Optimize (F&O) possui a estratégia de particionar o problema em subproblemas, o que se adapta ao SARP, pois possui rápida resolução para pequenas instâncias. Em vista disso, foi proposta uma heurística construtiva de solução inicial para os problemas, de modo a ser utilizada para a obtenção da solução inicial da F&O. Além do mais, buscou-se a combinação da metaheurística ALNS com a matheurística F&O, usando os operadores adaptados para o SARP.

A metaheurística ALNS possui a característica de conseguir gerar uma grande diversidade de soluções factíveis em curtos intervalos de tempo, quando comparada com resoluções exatas. Desse modo, adotou-se o uso da ALNS em buscas locais das vizinhanças. Mais especificamente em situações que a matheurística F&O não tivesse retorno dentro do tempo estimado, substituindo por soluções obtidas pela ALNS.

### 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está organizado conforme descrito a seguir. O segundo capítulo trata da revisão bibliográfica, abordando os principais trabalhos da literatura sobre o SARP. Também, são descritos os tipos de problemas que envolvem o compartilhamento de veículos, com destaque para os problemas DARP e SARP. O terceiro capítulo descreve as formulações dos problemas SARP com pontos intermediários e depósitos intermediários, propostos nessa tese. O quarto capítulo traz os métodos de solução aplicados aos problemas propostos, tendo a descrição das heurísticas de solução inicial, Fix & Optimize e ALNS, além de suas iterações propostas nos métodos para a resolução dos modelos formulados. Finalmente, no quinto capítulo são apresentados os resultados computacionais, provindos da aplicação dos métodos de resolução para as formulações propostas na tese.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Nesse capítulo, é apresentada uma breve revisão dos trabalhos relacionados com o Share-a-Ride Problem.

### 2.1 TRABALHOS RELACIONADOS

No ano de 1970, em Mansfield, Ohio (USA), aconteceu o primeiro teste de atendimento de transporte público sob demanda, onde os pedidos eram efetivados por telefone. Este serviço, chamado de Dial-a-Ride (DAR), se popularizou rapidamente por ofertar viagens para demandas que não eram atendidas pelo transporte público tradicional, como os idosos e os cadeirantes (Ho et al., 2018).

Já em 1971, foram elaboradas as primeiras abordagens de solução para o DAR (Wilson et al., 1971). A primeira formulação para planejamento e programação para serviços do DAR, ou seja, para o Dial-a-Ride Problem (DARP) foi proposta no trabalho de (Stein, 1978).

Embora estes trabalhos já tratassem da precedência no atendimento do DARP, o conceito de janela de tempo foi abordado primeiramente no trabalho de (Psaraftis, 1983), em que foi apresentado um algoritmo exato de programação dinâmica para o DARP com um único veículo.

Atualmente, uma das modelagens mais utilizada foi formulada pelo trabalho de (Cordeau, 2006), no qual se propõe uma formulação 3-índices para o DARP, tendo a adição das restrições de máxima duração de viagem dos clientes e máxima duração da rota.

Embora o DARP não seja recente, ainda hoje se faz atual entre as aplicações de transporte e mobilidade. Diversos trabalhos apresentam aplicações e variações do DARP. Em (Parragh et al., 2014) foi desenvolvido o Dial-a-Ride Problem with Split Requests and Profits (DARPSRP), que adiciona o conceito de troca de usuários entre motoristas e otimiza a receita ao invés dos custos. O algoritmo exato branch-and-price proposto resolve instâncias de até 40 usuários e para instâncias maiores aplica-se o algoritmo Variable Neighborhood Search (VNS).

O trabalho de (Santos e Xavier, 2015) trouxe o Dial-a-Ride with Money as an Incentive (DARPMI), que estabelece uma nova forma de otimizar o problema buscando uma divisão do valor da viagem mais justa entre os usuários. Ao comparar com o DARP tradicional, o DARPMI apresentou até 30% de economia para os usuários. Além disso, a aplicação de sua proposta para instâncias de grande porte utiliza o algoritmo Greedy Randomized Adaptive Search Procedure (GRASP).

No trabalho de (Bongiovanni et al., 2019), apresentou-se uma versão do DARP que considera o uso de veículos autônomos elétricos (e-ADARP). Além das restrições tradicionais do DARP, há o planejamento dos pontos de recarga, capacidade de autossuficiência do veículo e gerenciamento de baterias. O problema minimiza o total de tempo de viagem dos motoristas

e usuários. Ainda a proposta do e-ADARP é aplicada em dados reais utilizando o algoritmo branch-and-cut, chegando a resolver instâncias de até 5 veículos e 40 clientes.

Uma das variações do problema DARP foi proposta por (Li et al., 2014), chamada Share-a-Ride Problem (SARP), em que se estende o conceito de compartilhamento de viagens para bens e pessoas. O SARP não foi o primeiro problema trazendo esta temática. O trabalho de (Nash, 1982) já havia apresentado os conceitos preliminares do transporte compartilhado entre bens e pessoas, com a estratégia de utilizar o excedente do transporte público para transportar cargas. Atualmente, as abordagens mais usuais, como o crowdsourcing e o combined delivery, utilizam variações desta estratégias propostas em (Nash, 1982). Outras abordagens lidam com a decisão do transporte de bens e pessoas por uma frota especializada, como por exemplo SARP.

A formulação do SARP foi baseada no trabalho de (Cordeau, 2006), do qual trata do problema de dial-a-ride. Porém, o SARP possuía limitações por buscar priorizar o atendimento de pessoas, de modo a não permitir que dois ou mais usuários compartilhassem o mesmo táxi enquanto fossem transportados bens conjuntamente. Em (Li et al., 2016b) foi apresentada a versão do SARP com tempo de viagem e localizações estocásticas, os quais são abordados em duas fases. Primeiramente, decidindo os compartilhamentos e depois validando as janelas de tempo. Já em (Li et al., 2016a) foi proposto para o SARP uma metaheurística ANLS (Adaptative large neighborhood search), combinada com a metaheurística Simulated Annealing (SA). Além disso, o objetivo do problema foi adaptado para calcular os lucros provindos do transporte de passageiros e bens, descontando o custo de transporte e de tempo extra de viagem. O trabalho de (Nguyen et al., 2015) também trouxe uma formulação simplificada, compartilhando um único usuário e um bem. Em seus trabalhos seguintes, (Do et al., 2016) consideraram janelas de velocidades dos veículos e aplicaram à dados recolhidos de um mês dos serviços de táxi em Tóquio. Em (Son et al., 2017) foram adicionados pontos de paradas, ou seja, estacionamentos para os táxis esperarem por novas chamadas. Esta versão é chamada de People-Parcel Share-a-Ride Problem (PPSARP). No mesmo trabalho também foi apresentado um algoritmo de predição das futuras melhores localizações para estacionar cada veículo. Mais recentemente, em (Do et al., 2018), o conceito de janelas de velocidades foi adaptado para diferentes zonas da área urbana, gerando um modelo gráfico dinâmico. Para sua resolução foram implementadas técnicas de busca local, permitindo que os testes, com os dados reais de Tóquio, chegassem a resolver instâncias de grande porte, com 20.000 pedidos de viagens e 4.500 táxis em atividade. Já trabalho de (Yu et al., 2018) formulou o General Share-a-Ride (G-SARP), que considera o compartilhamento de mais de um usuário por veículo, enquanto transporta bens. Sua resolução comparou a aplicação da metaheurística Simulated Annealing (SA), proposta pelos autores, com a versão tradicional do SA e com o Tabu Search (TS).

Também o Share-a-Ride with parcels lockers é uma extensão do SARP apresentada por (Beirigo et al., 2018), em que foram consideradas diferentes proporções de ocupação para os pedidos de pessoas e bens. Ademais, a aplicação conta com o uso de veículos autônomos. Em (Chen et al., 2018) foi abordada outra extensão, chamada Multi-Driver Multi-Parcel Matching

Problem (MDMPMP), em que os bens podem ser unitários ou múltiplos (sequencialmente ou simultaneamente) e permitiu a transferência de pedidos de bens entre motoristas (múltiplos motoristas). Entretanto, os bens considerados para o transporte possuem de pequeno a médio porte. No trabalho de (Fatnassi et al., 2015) aplicou-se o SARP para o transporte de bens utilizando ambientes de transporte público, mais especificamente os modelos Personal Rapid Transit (PRT) e Freight Rapid Transit (FRT). Estes meios se assemelham a metrô para condução de pessoas e bens.

Outras modalidades, como o crowdsourcing, podem possuir equivalências com o SARP. Por exemplo, no trabalho de (Pimentel e Alvelos, 2015) a decisão de transporte propõe uma parada intermediária entre o ponto de embarque e o ponto de desembarque, que no caso é o terminal de ônibus. Assim, a viagem com o veículo da frota iria do ponto de embarque para um terminal de ônibus, e continuando com um ônibus que chegasse mais perto do ponto de destino. Em (Ghilas et al., 2016) foi formulado o Pickup and Delivery Problem with Scheduled Lines (PDPTW-SL), no qual os pedidos de transporte provêm apenas de bens, mas considera a integração com linhas regulares (ônibus, táxis). Ainda, em (Dahle et al., 2019), o transporte de cargas excedentes foi terceirizado para motoristas ocasionais que recebem compensações específicas e não são limitados aos depósitos ou horários comuns da frota. A Tabela 2.1 traz um resumo dos trabalhos da literatura citados anteriormente.

Tabela 2.1: Trabalhos da literatura sobre o transporte com compartilhamento.

<b>Referência</b>	<b>Abordagem</b>	<b>Instâncias</b>
(Wilson et al., 1971)	Primeiras abordagens do DAR.	–
(Stein, 1978)	Primeira formulação para o DARP.	–
(Nash, 1982)	Tratou sobre conceitos de compartilhamento entre bens e pessoas, usando tráfego ocioso.	–
(Psaraftis, 1983)	Primeiro a incluir o conceito de janela de tempo para o DARP.	–
(Cordeau, 2006)	Formulação da modelagem atualmente usual do DARP.	14 – 48 clientes.
(Parragh et al., 2014)	Variante Dial-a-ride problem with split requests and profits (DARPSRP).	16 – 48 clientes.
(Li et al., 2014)	Primeira proposta do SARP, sendo uma extensão do DARP.	4 – 12 clientes.
(Santos e Xavier, 2015)	Variante Dial-a-Ride with Money as an Incentive (DARPMI).	500 – 750 clientes.
(Fatnassi et al., 2015)	SARP utilizando ociosidade do transporte público.	12 – 75 clientes.
Continua na próxima página		

Tabela 2.1 – (Continuação)

<b>Referência</b>	<b>Abordagem</b>	<b>Instâncias</b>
(Pimentel e Alvelos, 2015)	Crowdsourcing utilizando terminal de ônibus como parada intermediária.	50 – 100 clientes.
(Nguyen et al., 2015)	Formulação simplificada para o SARP.	~ 6000 clientes.
(Do et al., 2016)	SARP com janelas de velocidades.	~ 10000 clientes.
(Ghilas et al., 2016)	Pickup and delivery problem with scheduled lines (PDPTW-SL). Transporte de fretes por frota exclusiva e por transporte público.	6 – 12 clientes.
(Li et al., 2016b)	SARP com tempo de viagens e localizações estocásticas.	30 – 75 clientes
(Li et al., 2016a)	Proposta de heurística ANLS e SA para o SARP.	15 – 300 clientes.
(Son et al., 2017)	SARP com previsão de pontos de estacionamento, People-Parcel Share-a-Ride Problem (PPSARP).	~ 6000 clientes.
(Do et al., 2018)	SARP com janelas de velocidades dinâmicas, adaptadas para diferentes áreas urbanas.	~ 10000 clientes.
(Yu et al., 2018)	Generaliza o SARP, permitindo o compartilhamento livre. Frota heterogênea.	48 – 288 clientes.
(Beirigo et al., 2018)	Share-a-ride with parcel lockers, considera veículos autônomos de diferentes proporções.	8 – 32 clientes.
(Chen et al., 2018)	Multi-Driver Multi-Parcel Matching problem, transferência de pedidos entre motoristas	30 – 50 clientes.
(Bongiovanni et al., 2019)	Variante e-DARP, com veículos elétricos.	12 – 70 clientes.
(Dahle et al., 2019)	PDPTW com Motoristas Ocasionais.	15 – 50 clientes.

A Figura 2.1 apresenta os trabalhos publicados sobre o SARP durante os anos de 2014-2022. A pesquisa foi realizada na data de dezesseis de março de 2022, pela plataforma Web of Science.

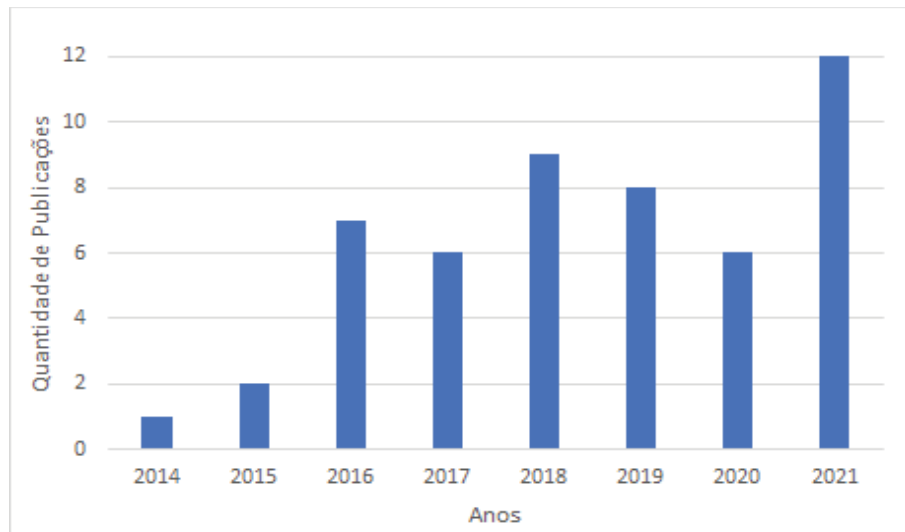


Figura 2.1: Publicações sobre o SARP por ano.

Fonte: Autoria própria.

A Figura 2.2 apresenta os trabalhos publicados sobre o DARP entre os anos de 1973-2022. A pesquisa seguiu os mesmos parâmetros que para o problema SARP.

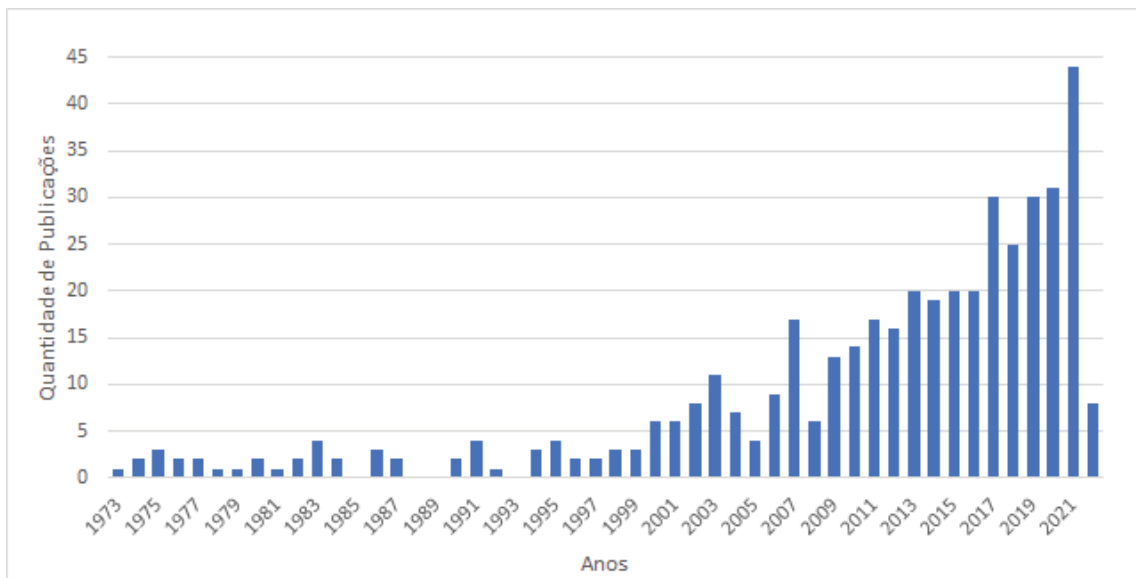


Figura 2.2: Publicações sobre o DARP por ano.

Fonte: Autoria própria.

## 2.2 PROBLEMAS DE TRANSPORTE COM COMPARTILHAMENTO

Esta sessão é baseada no trabalho de (Ho et al., 2018). Os problemas de transporte, com compartilhamento de veículos entre os clientes, possuem algumas variações e se dividem em duas principais classes:

- compartilhamento entre pessoas.

- compartilhamento entre bens e pessoas.

Dentre os principais problemas com compartilhamento entre pessoas, destacam-se os problemas de Ride-Sharing que tratam de cenários onde pessoas com itinerários e horários similares compartilham viagens para diminuir seus custos. O Carpooling lida com cenários onde são ofertadas caronas para pessoas com caminhos parecidos para o serviço. Já o DARP atende um conjunto de viagens, com origem e destino especificados e uma frota especializada, podendo compartilhar viagens para diminuir custos.

Já dentre os problemas com compartilhamento entre bens e pessoas, no problema de Carsharing as pessoas alugam veículos, podendo compartilhar entre si, porém são calculados os melhores locais de depósitos para os veículos. O Combined Delivery consiste em um sistema de viagens de pessoas que podem levar cargas quando estão ociosas. Já os problemas de Crowd-sourcing buscam ocupar as capacidades excedentes em viagens já em percurso, de diferentes gamas de transporte, buscando associações entre grupos diversos para criação de novas soluções de transporte. Já o SARP é uma variante do DARP e lida com ambientes com um grupo de pedidos de viagens entre origens e destinos especificados, para serem atendidos por uma frota também especificada, em que é permitido o compartilhamento de veículos entre os clientes. Existe uma proximidade do conceito de ambientes de transporte por aplicativo com a estrutura do SARP.

## 2.3 MODELOS CLÁSSICOS

Nesta seção são apresentadas as formulações dos dois principais problemas que baseiam as propostas deste trabalho: o DARP e o SARP.

### 2.3.1 Formulação Dial-a-Ride: Cordeau (2006)

Uma formulação 3-índices para o Dial-a-Ride Problem (DARP) é proposta pelo trabalho de (Cordeau, 2006). Nela, o problema DARP consiste de um conjunto de  $n$  usuários que solicitam viagens entre pontos de embarque e desembarque específicos, em que é possível o compartilhamento de viagem em um mesmo veículo entre os usuários. Ainda, há uma frota de  $k$  veículos que devem atender tais pedidos, de modo que cada veículo inicia sua rota no depósito inicial 0 e termina sua rota no depósito final  $2n + 1$ . Assim, todos os veículos iniciam (terminam) em um mesmo depósito inicial (final).

A frota de veículos é constituída por  $k \in K$  veículos, em que cada um possui uma capacidade  $Q^k$  e um tempo máximo de duração da rota  $T_k$ .

Os  $n$  pedidos de viagem são associados ao índice  $i \in I$ , com  $I = \{1, \dots, n\}$ , em que  $i$  é o nó de origem e  $i + n$  o nó de destino. O conjunto  $V^o = \{1, \dots, n\}$  é o conjunto de origens e  $V^d = \{n + 1, \dots, 2n\}$  o conjunto de destinos. O grafo  $G = (V, E)$  define o problema, sendo  $V = V^o \cup V^d \cup \{0, 2n + 1\}$  o conjunto de nós e  $E = \{(i, j) ; i, j \in V, i \neq j\}$  o conjunto de arcos. Ainda, cada arco  $(i, j)$  é associado à uma distância  $d_{ij}$  e à um tempo de viagem  $t_{ij}$ .

Para cada ponto de parada  $i \in V$  há uma janela de tempo  $[e_i, l_i]$  para iniciar o atendimento, uma duração de serviço  $s_i$  e uma carga  $q_i$  para carregar. Além disso,  $q_i = -q_{n+i}$ ,  $q_0 = q_{2n+1} = 0$  e  $d_0 = d_{2n+1} = 0$ .

Parâmetros e definições iniciais:

$G$	Grafo direcionado que define o problema
$K$	conjunto de veículos de tamanho $ K $
$n$	Número de pedidos de viagens
$V^o$	Conjunto dos nós de origem, em que $V^o = \{1, \dots, n\}$
$V^d$	Conjunto dos nós de destino, em que $V^d = \{n+1, \dots, 2n\}$
$V$	Conjunto de todas as paradas, incluindo embarques, desembarques e depósitos
$T_k$	Instante máximo de serviço para o veículo $k$
$Q_k$	Capacidade de carga do veículo $k$
$q_i$	Quantidade de carga no nó $i$
$t_{ij}^k$	Tempo de viagem do veículo $k$ entre os nós $i$ e $j$
$d_{ij}$	Distância entre os nós $i$ e $j$
$c_{ij}$	Custo por unidade de distância entre os nós $i$ e $j$
$s_i$	duração do serviço no nó $i$
$[e_i, l_i]$	Janela de tempo do nó $i$
$L$	Tempo máximo de viagem dos usuários

Variáveis de decisão:

$x_{ij}^k$	1 se o veículo $k$ passa por $(i, j)$ ; 0 caso contrário
$u_i^k$	Instante de chegada do veículo $k$ no nó $i$
$w_i^{kc}$	Montante da demanda presente no veículo $k$ quando sai do nó $i$
$r_i^k$	Tempo de viagem do usuário $i$ no veículo $k$

Assim, a formulação do DARP é descrita por:

$$\text{Max} \sum_{k \in K} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij}^k \quad (2.1)$$

$$\text{s.à} \sum_{k \in K} \sum_{j \in V} x_{ij}^k = 1, \quad \forall i \in V^o \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{0j}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (2.3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i,2n+1}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (2.4)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij}^k = \sum_{i \in V} x_{i,j+n}^k, \quad \forall j \in V^o, k \in K \quad (2.5)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k = \sum_{j \in V} x_{ji}^k, \quad \forall i \in V^o \cup V^d, k \in K \quad (2.6)$$

$$u_j^k - u_i^k \geq s_i + t_{ij}^k - M_{ij}^k (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, i, j \in V \quad (2.7)$$

$$w_j^k - w_i^k \geq q_i - W_{ij}^k (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, i, j \in V \quad (2.8)$$

$$r_i^k = u_{i+n}^k - u_i^k, \quad \forall k \in K, i \in V^o \quad (2.9)$$

$$u_{2n+1}^k - u_0^k \leq T_k, \quad \forall k \in K \quad (2.10)$$

$$e_i \leq u_i^k \leq l_i, \quad \forall i \in V, k \in K \quad (2.11)$$

$$t_{i,n+i}^k \leq r_i^k \leq L, \quad \forall i \in V^o \quad (2.12)$$

$$\max\{0, q_i\} \leq Q_i^k \leq \min\{Q^k, Q^k + q_i\}, \quad \forall i \in V, k \in K \quad (2.13)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}; u_i^k, r_i^k, w_i^k \in \mathbb{R}_+; \quad \forall i \in V, k \in K \quad (2.14)$$

Os parâmetros para linearização das restrições  $M_{ij}^k \geq \max\{0, l_i + d_i + t_{ij} - e_j\}$  e  $W_{ij}^k = \min\{Q^k, Q^k + q_i\}$ .

A formulação do DARP se baseia na definição de um grafo completo  $G$ , porém alguns arcos desse grafo não fazem sentido para a modelagem do problema, seja por restrições de janela de tempo ou de estrutura de entrega. Desse modo, são delineados os arcos inactiváveis em  $G$ :

- Os arcos  $(i, 0)$ ,  $(2n + 1, i)$ ,  $(i, i)$  par todo  $i \in V$ ;
- Os arcos  $(0, n + i)$ ,  $(i, 2n + 1)$ ,  $(n + i, i)$  para todo  $i \in V^o$ ;
- Os arcos  $(i, j)$  com  $i, j \in V$ , se  $e_i + s_i + t_{ij} \geq l_j$ ;
- Os arcos  $(i, j)$  e  $(j, n + i)$  com  $i \in V^o$  e  $j \in V$ , se  $t_{ij} + s_j + t_{j,n+i} \geq L$ .

*Exemplo.* A Figura 2.3 apresenta um exemplo de plano de atendimento para o DARP. Inicialmente, note-se que há uma sequência de atribuição de números a cada ponto de embarque, desembarque e depósito. Assim, o depósito inicial é atribuído à 0, o depósito final à  $2n + 1$  e para cada pedido de viagem é atribuído um par  $(i, n + i)$  que representa o ponto de embarque e o ponto de desembarque.

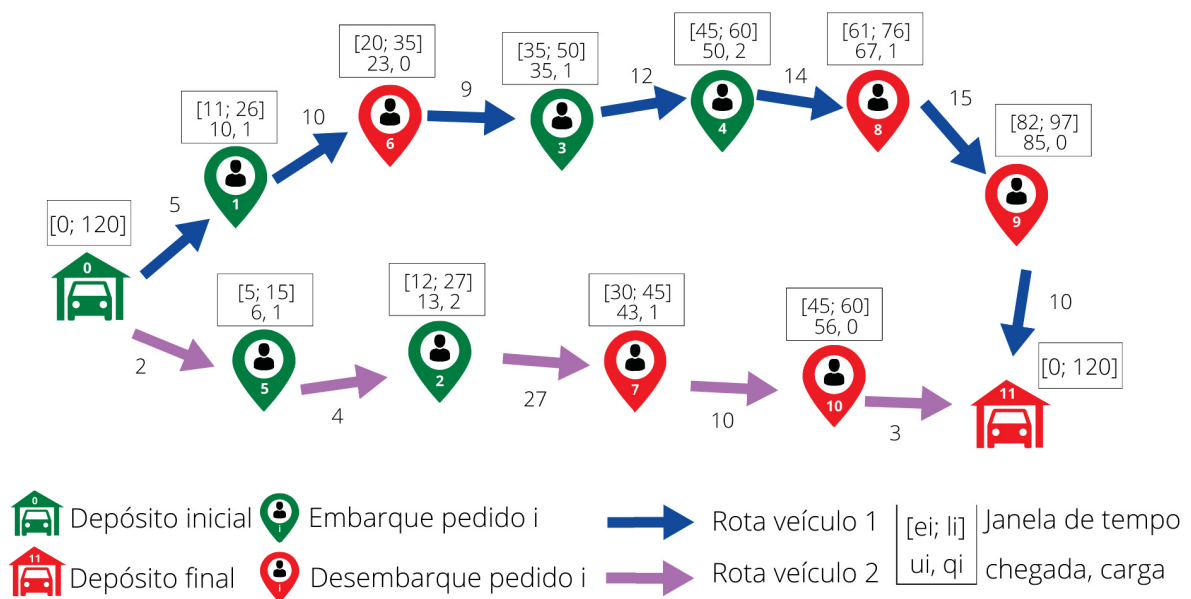


Figura 2.3: Exemplo DARP.

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 2.2 traz a distribuição numérica, em que há  $n = 5$  pedidos de viagens, sendo de  $\{1, 2, \dots, 5\}$  os pontos de embarque e  $\{6, 7, \dots, 10\}$  os pontos de desembarque.

pedido	embarque	desembarque
1	1	6
2	2	7
3	3	8
4	4	9
5	5	10

Tabela 2.2: Distribuição numérica no DARP

Deste modo, há 5 pedidos de viagens distribuídos entre uma frota de 2 veículos. Cada veículo define uma rota que inicia no depósito inicial 0 e termina no depósito final 11. Em cada rota são distribuídos os pedidos de viagens de modo que seja o mais econômico possível. Conforme o critério abordado pela função objetivo, haverá mudanças na escolha, porém no caso é observado a menor distância total percorrida por ambos os veículos.

Na Figura 2.3, a cor verde denota os embarques e a cor vermelha denota os desembarques. Ainda, conforme a Figura 2.4 que apresenta a solução em forma de grade, note-se que o pedido 1 não compartilha a sua viagem, pois entre seu embarque 1 e desembarque 6 não há outro ponto de embarque/desembarque sinalizado. Entretanto, os pedidos 3 e 4 compartilham em parte suas viagens, assim como para os pedidos 5 e 2. Observe também, que o tempo de chegada em um ponto está delimitado pela janela de tempo  $[e_i, l_i]$ , e que a carga também não ultrapassa uma capacidade estabelecida, que no caso seriam 3 assentos.

<b>0</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>11</b>
[0;120] 5, 0	[11;26] 10, 1	[20;35] 23, 0	[35;50] 35, 1	[45;60] 50, 2	[61;76] 67, 1	[82;97] 85, 0	[0;120] 98, 0

<b>0</b>	<b>5</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
[0;120] 4, 0	[5;15] 6, 1	[12;27] 13, 2	[30;45] 43, 1	[45;60] 56, 0	[0;120] 62, 0

Figura 2.4: Solução exemplo DARP.

Fonte: Autoria própria.

### 2.3.2 Formulação Share-a-Ride: Li (2014)

O trabalho de (Li et al., 2014) propõe pela primeira vez na literatura o Share-a-Ride Problem (SARP), que inclui a noção de usuário como pessoas ou bens, permitindo o transporte compartilhado entre eles.

Neste problema, os pedidos de viagens provêm de  $n$  pessoas e  $m$  fretes, tal que tem-se  $\sigma = n + m$  clientes. O grafo completo e não direcionado que define o problema é  $G = (V, E)$ , em que  $V = V^p \cup V^f \cup \{0, 2\sigma + 1\}$ . Os conjuntos  $V^p$  e  $V^f$  correspondem às requisições das pessoas e dos fretes, enquanto 0 e  $2\sigma + 1$  são os depósitos inicial e final.

Semelhante ao DARP, para cada parada  $i$  é associada uma janela de tempo  $[e_i, l_i]$ , uma duração de serviço  $s_i$  e uma carga  $q_i$ , tal que  $q_0 = q_{2\sigma+1} = 0$ ,  $q_{i+\sigma} = -q_i$  e  $s_0 = s_{2\sigma+1} = 0$ , para  $i = \{1, 2, \dots, \sigma\}$ .

Da mesma forma, seja  $K$  o conjunto de veículos, em que cada veículo  $k \in K$  tem capacidade  $Q^k$  e sua rota não pode ultrapassar o limite de tempo  $T_k$ .

Parâmetros e definições iniciais:

$G$	Grafo completo e não direcionado que define o problema
$K$	Conjunto dos veículos
$n$	Número de pedidos de viagens de passageiros
$m$	Número de pedidos de viagens de fretes
$V^p$	Conjunto das requisições dos passageiros
$V^f$	Conjunto das requisições dos fretes
$V$	$= V^p \cup V^f \cup \{0, 2\sigma + 1\}$ , em que 0 e $2\sigma + 1$ são os depósitos inicial e final
$V^{p,o}$	Conjunto das origens dos passageiros, em que $V^{p,o} = \{1, \dots, n\}$
$V^{f,o}$	Conjunto das origens dos fretes, em que $V^o = \{n + 1, \dots, \sigma\}$
$V^{p,d}$	Conjunto dos destinos dos passageiros $V^d = \{\sigma + 1, \dots, \sigma + n\}$
$V^{f,d}$	Conjunto dos destinos dos fretes $V^d = \{\sigma + n + 1, \dots, 2\sigma\}$

$q_i$	Quantidade de carga no nó $i$
$s_i$	duração do serviço no nó $i$
$[e_i, l_i]$	Janela de tempo do nó $i$
$Q_k$	Capacidade de carga do veículo $k$
$T_k$	Instante máximo de serviço para o veículo $k$
$C$	Conjunto dos pares $(i, j)$ , em que $i$ e $j$ definem um par de pedidos servidos sequencialmente
$\eta$	Número máximo de pedidos atendidos entre o serviço de um passageiro
$d_{ij}$	Distância entre os nós $i$ e $j$
$t_{ij}$	Instante de viagem do veículo $k$ entre os nós $i$ e $j$
$\Delta d_{ij}^k$	Distância extra de viagem do veículo $k$ se o frete $j$ é inserido entre os passageiros $i$ e $i + 1$
$\Delta t_{ij}^k$	Tempo extra de viagem do veículo $k$ se o frete $j$ é inserido entre os passageiros $i$ e $i + 1$ : $\Delta t_{ij}^k = \Delta d_{ij}^k / (\text{média de velocidade})$
$L_i$	Tempo máximo de viagem do passageiro $i$
$\alpha$	Taxa inicial cobrada por entregar um passageiro
$\beta$	Taxa inicial cobrada por entregar um frete
$\gamma_1$	Taxa cobrada por carregar um passageiro por quilômetro
$\gamma_2$	Taxa cobrada por carregar um frete por quilômetro
$\gamma_3$	Custo médio por quilômetro por atendimento
$\gamma_4$	Fator de desconto por exceder o tempo de entrega direto do passageiro

Variáveis de decisão:

$x_{ij}^k$	1 se o veículo $k$ passa por $(i, j)$ ; 0 caso contrário
$u_i^k$	Instante de chegada do veículo $k$ no nó $i$
$w_i^{kc}$	Montante da demanda no veículo $k$ quando sai do nó $i$
$r_i^k$	Tempo de viagem do usuário $i$ no veículo $k$
$h_k$	Quantidade de passageiros servidos pelo veículo $k$
$H_k$	Conjunto dos passageiros servidos pelo veículo $k$ , $H_k = \{1, 2, \dots, h_k\}$
$P_i$	Índice de solicitação $i$ em uma sequência de serviço de um veículo

Funções objetivo do problema:

- Receita total obtida pelo atendimento dos passageiros:

$$f_1 = \sum_{i \in V^{po}} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} (\alpha + \gamma_1 d_{i,i+\sigma}) x_{ij}^k. \quad (2.15)$$

- Receita total obtida pelo atendimento dos fretes:

$$f_2 = \sum_{i \in V^{fo}} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} (\beta + \gamma_2 d_{i,i+\sigma}) x_{ij}^k. \quad (2.16)$$

- Custo por quilômetro de atendimento:

$$f_3 = \gamma_3 \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} d_{ij} x_{ij}^k. \quad (2.17)$$

- Fator de desconto por exceder o tempo da viagem direta do passageiro:

$$f_4 = \gamma_4 \sum_{i \in V^{po}} (r_i^k / t_{i,i+\sigma} - 1). \quad (2.18)$$

Assim, os benefícios totais são expressos na função objetivo a seguir:

$$f = f_1 + f_2 - f_3 - f_4. \quad (2.19)$$

A formulação como modelo de programação linear inteira-mista do problema DARP segue as expressões (2.20) - (2.37):

$$\text{Max } f \quad (2.20)$$

$$\text{s.à } \sum_{k \in K} \sum_{j \in V} x_{ij}^k \geq 1, \quad \forall i \in V^{p,o} \cup V^{f,o} \quad (2.21)$$

$$\sum_{i \in V} x_{0i}^k = \sum_{i \in V} x_{i,2\sigma+1}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (2.22)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i,0}^k = \sum_{i \in V} x_{2\sigma+1,i}^k = 0, \quad \forall k \in K \quad (2.23)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij}^k = \sum_{i \in V} x_{i,j+\sigma}^k, \quad \forall j \in V^{p,o} \cup V^{f,o}, k \in K \quad (2.24)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k = \sum_{j \in V} x_{ji}^k, \quad \forall i \in V^p \cup V^f, k \in K \quad (2.25)$$

$$u_j^k - u_i^k \geq t_{ij} M_{ij}^k (x_{ij}^k - 1), \quad \forall k \in K, i, j \in V^p \cup V^f \quad (2.26)$$

$$w_j^k - w_i^k \geq q_i + W_{ij}^k (x_{ij}^k - 1), \quad \forall k \in K, i, j \in V^p \cup V^f \quad (2.27)$$

$$r_i^k = u_{i+\sigma}^k - u_i^k, \quad \forall k \in K, i \in V^{p,o} \cup V^{f,o} \quad (2.28)$$

$$u_{2\sigma+1}^k - u_0^k \leq T_k, \quad \forall k \in K \quad (2.29)$$

$$e_i \leq u_i^k \leq l_i, \quad \forall i \in V, k \in K \quad (2.30)$$

$$t_{i,\sigma+i} \leq r_i^k \leq L_i, \quad \forall i \in V^{p,o}, k \in K \quad (2.31)$$

$$\max\{0, q_i\} \leq Q_i^k \leq \min\{Q^k, Q^k + q_i\}, \forall i \in V, k \in K \quad (2.32)$$

$$M \left( \sum_{k \in K} x_{ij}^k - 1 \right) + P_j - 1 \leq P_i, \quad \forall ij \in V^p \cup V^f \quad (2.33)$$

$$M \left( 1 - \sum_{k \in K} x_{ij}^k \right) + P_j - 1 \geq P_i, \quad \forall ij \in V^p \cup V^f \quad (2.34)$$

$$P_{j+\sigma} - P_j - 1 \leq \eta, \quad \forall j \in V^{p,o} \quad (2.35)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}; u_i^k, r_i^k, w_i^k \in \mathbb{R}_+, \quad (2.36)$$

$$P_i \in [0, 2(m+n)]. \quad (2.37)$$

Os parâmetros para linearização das restrições são  $M_{ij}^k \geq \max\{0, l_i + t_{ij} - e_j\}$ ,  $W_{ij}^k = \min\{2Q^k, 2Q^k + q_i\}$  e  $M = 2(m+n+1)$ .

*Exemplo.* A Figura 2.5 apresenta um exemplo de plano de atendimento para o SARP. Assim como no DARP, cada pedido de viagem possui um par  $(i, \sigma+i)$  que representam o ponto de embarque e desembarque, um depósito inicial 0 e um depósito final  $2\sigma+1$ .

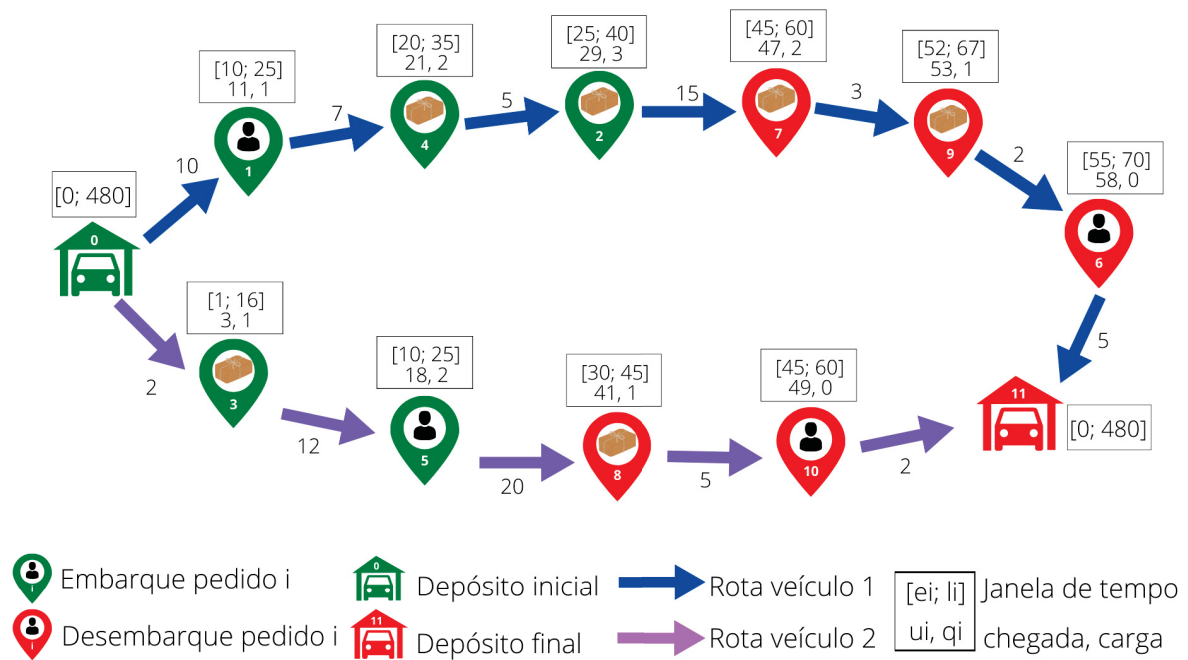


Figura 2.5: Exemplo SARP

Fonte: Autoria própria.

Conforme a Tabela 2.3 tem-se a distribuição numérica do SARP, em que há  $\sigma = 5$  pedidos de viagens, sendo de  $\{1, 2, \dots, 5\}$  os pontos de embarque e  $\{6, 7, \dots, 10\}$  os pontos de desembarque, 0 o depósito inicial e 11 o depósito final. Note que só é possível diferenciar um pedido por pessoa ou bem pela informação de carga do pedido.

pedido	tipo de carga	embarque	desembarque
1	pessoa	1	6
2	bem	2	7
3	bem	3	8
4	bem	4	9
5	pessoa	5	10

Tabela 2.3: Distribuição numérica no SARP

Os 5 pedidos de viagens são distribuídos entre uma frota de 2 veículos. Cada veículo define uma rota que inicia no depósito inicial 0 e termina no depósito final 11. A rota busca a distribuição dos pedidos de forma mais econômica possível, conforme a função objetivo (menor distância).

Conforme a Figura 2.6 que apresenta a solução em forma de grade, note que os pedidos 1, 4 e 2 compartilham suas viagens, sendo que os pedidos 4 e 2 tem suas viagens inteiramente compartilhadas. Da mesma forma, os pedidos 3 e 5 compartilham em parte suas viagens em uma

segunda rota. Ambos os veículos fizeram suas rotas, saindo do depósito inicial 0 e chegando no depósito final 11.

<b>0</b>	<b>1</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>9</b>	<b>6</b>	<b>11</b>
[0;480]	[10;25]	[21;35]	[25;40]	[45;60]	[52;67]	[55;70]	[0;480]
1, 0	11, 1	21, 2	29, 3	47, 2	53, 1	58, 0	66, 0

<b>0</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
[0;120]	[1;16]	[10;25]	[30;45]	[45;60]	[0;480]
1, 0	3, 1	18, 2	41, 1	49, 0	54, 0

Figura 2.6: Solução exemplo SARP.

Fonte: Autoria própria.

### 3 MODELOS PROPOSTOS

Neste capítulo são abordados os conceitos de paradas intermediárias para os motoristas, chamadas de depósitos intermediários, e de paradas adicionais para os clientes, chamadas de pontos intermediários. Assim, são propostos modelos SARP envolvendo tais conceitos.

#### 3.1 DEPÓSITOS INTERMEDIÁRIOS

A proposta dos depósitos intermediários é uma adição ao conceito de depósitos do SARP, uma vez que no SARP são apenas reconhecidos depósitos iniciais e finais para os veículos. Assim o depósito intermediário entra como um depósito adicional entre estes dois depósitos já definidos. O trabalho de (Hosny, 2016), com o Multi-depot Multi-trip Heterogeneous DARP, propõem também uma parada intermediária para o motorista, porém apenas é planejada uma janela de tempo de parada, sem levar em consideração uma localização específica.

Ainda, seguindo a adição do conceito de motoristas ocasionais (Dahle et al., 2019), para cada motorista é atribuído um depósito inicial, um depósito intermediário e um depósito final. Assim, os motoristas não compartilhariam os mesmos depósitos.

O conceito de depósitos intermediários traz maior atenção e inclusão às necessidades dos motoristas, uma vez que ao atenderem viagens por aplicativo podem trabalhar por longos períodos sem que possam planejar uma parada estratégica, seja para fazer uma refeição ou buscar uma encomenda de interesse próprio. Tais motoristas se obrigam a se desconectar de suas bases online de atendimento quando se encontram perto de um destino de interesse e estão sem clientes. Portanto, com os depósitos intermediários é possível planejar uma parada estratégica em algum lugar e em um período de tempo de interesse do motorista.

Atender as necessidades do grupo de motoristas pode tornar o ambiente mais atrativo para a inclusão de novos motoristas ocasionais e facilitar a fluidez do ambiente, permitindo haver mais opções de transporte.

Na presente tese são descritas duas propostas de ambientes com depósitos intermediários:

- SARP com Depósitos Intermediários Simples (SARP-DIS), com todos os veículos possuindo depósitos intermediários.
- SARP com Depósitos Intermediários Misto (SARP-DIM), com parte da frota possuindo depósitos intermediários.

##### 3.1.1 Formulação SARP com Depósitos Intermediários Misto (SARP-DIM)

O SARP com Depósitos Intermediários Misto (SARP-DIM) aborda o conceito de paradas planejadas para os motoristas, chamadas de depósitos intermediários. Desse modo,

no SARP-DIM existem  $n$  pedidos de viagens, com pontos de origem e destino especificados previamente, que são atendidos por uma frota de  $k$  veículos, com  $k'$  veículos com depósitos intermediários e  $k''$  veículos sem depósitos intermediários. A semelhança do SARP, os pedidos podem ser classificados como bens ou pessoas, podendo compartilhar viagens entre si em um mesmo veículo. Além do mais, todos os motoristas são tratados como motoristas ocasionais, ou seja, não compartilham seus depósitos com outros motoristas. Por fim, todo veículo deve iniciar o atendimento em seu depósito inicial, passar pelo seu depósito intermediário (se existir) e terminar seu atendimento no depósito final.

O SARP-DIM é definido por um grafo  $G = (V, E)$ , tal que  $V$  é o conjunto dos vértices e  $E$  o conjunto dos arcos. O conjunto dos vértices  $V = V^o \cup V^d \cup A_1 \cup A_2 \cup I \cup B_2 \cup B_1$ , em que  $V^o = \{1, 2, \dots, n\}$  é o conjunto de pontos de origem,  $V^d = \{n + 1, \dots, 2n\}$  é o conjunto dos pontos de destino,  $A_1 = \{2n + 1, \dots, 2n + k'\}$  o conjunto dos depósitos iniciais dos motoristas intermediários,  $A_2 = \{2n + k' + 1, \dots, 2n + k' + k'' = 2n + k\}$  é o conjunto dos depósitos iniciais dos motoristas tradicionais,  $I = \{2n + k + 1, \dots, 2n + k + k'\}$  é o conjunto dos depósitos intermediários,  $B_2 = \{2n + k + k' + 1, \dots, 2n + 2k\}$  é o conjunto dos depósitos finais dos motoristas tradicionais e  $B_1 = \{2n + 2k + 1, \dots, 2n + 2k + k'\}$  é o conjunto dos depósitos finais para os motorista intermediários, para  $k \in K$ .

Para cada veículo  $k \in K$ , há um tempo máximo de serviço  $T_k$ , uma capacidade  $Q^{kc}$  para demanda  $c$ , o depósito inicial  $a_k$ , o depósito intermediário  $I_k$  e o depósito final  $b_k$ .

Ainda, para cada  $i \in V$ , tem-se uma janela de tempo  $[e_i, l_i]$ , uma duração de serviço  $s_i$  e uma carga  $q_i^c$  da demanda  $c$ , tal que  $q_{a_k}^c = q_{b_k}^c = 0$  e  $d_{a_k} = d_{b_k} = 0$ . Para cada usuário  $i \in V^o$  define-se a dupla de localizações de sua viagem  $(i, n + i)$ , tal que  $q_i^c + q_{n+i}^c + q_{2n+i}^c = 0$ .

Parâmetros e definições iniciais:

$G$	Grafo direcionado do problema
$K$	Conjunto de veículos, tal que $K = k_1 + k_2$
$k'$	Número de veículos com depósitos intermediários
$k''$	Número de veículos sem depósitos intermediários
$n$	Número de pedidos de viagens
$C$	Conjunto dos tipos de demanda, sendo $c \in C = \{P, F\}$ passageiros e fretes
$a_k$	Depósito inicial do veículo $k$
$I_k$	Depósito intermediário do veículo $k$
$b_k$	Depósito final do veículo $k$
$V$	Conjunto de todas as paradas, incluindo origens, destinos e depósitos, em que $V = V^o \cup V^d \cup A_1 \cup A_2 \cup I \cup B_2 \cup B_1$ .
$V^o$	Conjunto dos pontos de origem dos pedidos de viagem, em que $V^o = \{1, \dots, n\}$
$V^d$	Conjunto dos pontos de destino dos pedidos de viagem, em que $V^d = \{n + 1, \dots, 2n\}$

$A_1$	Conjunto dos depósitos iniciais dos motoristas intermediários, em que $A_1 = \{2n + 1, \dots, 2n + k'\}$
$A_2$	Conjunto dos depósitos iniciais dos motoristas tradicionais, em que $A_2 = \{2n + k' + 1, \dots, 2n + k' + k'' = 2n + k\}$
$I$	Conjunto dos depósitos intermediários, em que $I = \{2n + k + 1, \dots, 2n + k + k'\}$
$B_2$	Conjunto dos depósitos finais dos motoristas tradicionais, em que $B_2 = \{2n + k + k' + 1, \dots, 2n + k + k' + k'' = 2n + 2k\}$
$B_1$	Conjunto dos depósitos finais dos motoristas intermediários, em que $B_1 = \{2n + 2k + 1, \dots, 2n + 2k + k'\}$
$T_{a_k}$	Instante em que o veículo $k$ está disponível para iniciar o atendimento do depósito $a_k$
$T_{b_k}$	Instante em que o veículo $k$ está disponível para terminar o atendimento do depósito $b_k$
$q_i^c$	Quantidade da demanda do tipo $c$ na parada $i$ , em que $C = \{P, F\}$
$t_{ij}^k$	Tempo de viagem do veículo $k$ entre as paradas $i$ e $j$
$d_{ij}$	Distância entre as paradas $i$ e $j$
$s_i$	Duração do serviço do pedido na parada $i$
$[e_i, l_i]$	Janela de tempo de $i$
$Q^{kc}$	Capacidade do veículo $k$ para demanda $c$ , $k \in K$ e $c \in C$
$\alpha$	Taxa inicial cobrada por entregar um passageiro
$\beta$	Taxa inicial cobrada por entregar um frete
$\gamma_1$	Taxa cobrada por carregar um passageiro por quilômetro
$\gamma_2$	Taxa cobrada por carregar um frete por quilômetro
$\gamma_3$	Custo médio por quilômetro por atendimento
$\gamma_4$	Fator de desconto por exceder o tempo de entrega direto do passageiro
$\gamma_5$	Fator de desconto por exceder o tempo que o veículo $k$ deveria finalizar sua rota

Variáveis de decisão:

$x_{ij}^k$	1 se o veículo $k$ passa por $(i, j)$ ; 0 caso contrário
$u_i^k$	Instante de tempo de chegada do veículo $k$ no nó $i$
$w_i^{kc}$	Montante da demanda $c$ no veículo $k$ quando sai do nó $i$
$r_i^k$	Tempo de viagem do usuário $i$ no veículo $k$
$p_i$	Razão entre o tempo de viagem atual e o tempo de viagem direto do usuário $i$ .
$h^k$	Tempo de atraso para o veículo $k$ finalizar sua rota

Funções objetivo:

- O lucro total obtido com os atendimentos dos passageiros:

$$F_1 = \sum_{i \in V^o} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} (\alpha + \gamma_1 d_{i,i+n}) x_{ij}^k. \quad (3.1)$$

- O lucro total obtido com os atendimentos dos fretes:

$$F_2 = \sum_{i \in V^o} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} (\beta + \gamma_2 d_{i,i+n}) x_{ij}^k. \quad (3.2)$$

- Custo por quilômetro percorrido em atendimento:

$$F_3 = \gamma_3 \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} d_{ij} x_{ij}^k. \quad (3.3)$$

- Fator de desconto por exceder o tempo de atendimento direto dos passageiros:

$$F_4 = \gamma_4 \sum_{i \in V^o} (1 - p_i). \quad (3.4)$$

- Fator de desconto por exceder o instante de tempo que o veículo  $k$  deveria finalizar sua rota:

$$F_5 = \gamma_5 \sum_{k \in K} h^k. \quad (3.5)$$

Assim, a função  $F$  expressa os benefícios totais:

$$F = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 - F_5. \quad (3.6)$$

Portanto, o modelo SARP-DIM é descrito por:

$$\text{Max } F \quad (3.7)$$

$$\text{s.à } \sum_{j \in V^o \cup V^d} \sum_{k \in K} x_{ij}^k = 1, \quad \forall i \in V^o \quad (3.8)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ak,i}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} x_{ak,i}^{k'} = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.10)$$

$$\sum_{i \in V} x_{I_k,i}^k = 1, \quad \forall k \in K' \quad (3.11)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} x_{I_k,i}^{k'} = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.12)$$

$$\sum_{i \in V} x_{bk,i}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (3.13)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} x_{bk,i}^{k'} = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.14)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i,a_k}^k = \sum_{i \in V} x_{b_k,i}^k = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.15)$$

$$\sum_{i \in V} x_{a_k,b_k}^k = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.16)$$

$$\sum_{i \in V} x_{I_k,a_k}^k = \sum_{i \in V} x_{b_k,I_k}^k = 0, \quad \forall k \in K' \quad (3.17)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij}^k = \sum_{i \in V} x_{i,j+n}^k, \quad \forall j \in V^o, k \in K \quad (3.18)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k = \sum_{j \in V} x_{ji}^k, \quad \forall i \in V^o \cup V^d, k \in K \quad (3.19)$$

$$u_j^k - u_i^k \geq s_i + t_{ij} - M_{ij}^k (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, i \in V, j \in V \quad (3.20)$$

$$w_j^{kc} - w_i^{kc} \geq q_i^c - W_{ij}^k (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, i \in V, j \in V, c \in C \quad (3.21)$$

$$r_i^k = u_{i+n}^k - u_i^k, \quad \forall k \in K, i \in V^o \quad (3.22)$$

$$\sum_{c \in C} w_{jc}^k \geq Q^k, \quad \forall k \in K, j \in V \quad (3.23)$$

$$\max\{0, q_i^c\} \leq w_i^{kc} \leq \min\{Q^{kc}, Q^{kc} + q_i^c\}, \quad \forall k \in K, i \in V, c \in C \quad (3.24)$$

$$p_i \leq 1, \quad \forall i \in V^o \quad (3.25)$$

$$p_i \geq \sum_{k \in K} \frac{r_i^k}{(t_{i,i+n}^k + s_i)}, \quad \forall i \in V^o \quad (3.26)$$

$$u_{b_k}^k - u_{a_k}^k - h^k \geq T_{b_k}, \quad \forall k \in K \quad (3.27)$$

$$e_i \leq u_i^k \leq l_i, \quad \forall k \in K, i \in V^o \quad (3.28)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}; u_i^k, r_i^k, w_i^{kc}, h_i^k \in \mathbb{R}_+; p_i^k \in [0, 1] \quad \forall i, j \in V, k \in K \quad (3.29)$$

O conjunto de restrições (3.8) determina que toda origem deve ser atendida por um único veículo. Os conjuntos de restrições (3.9) e (3.10) estabelecem que todo veículo deve iniciar sua rota no depósito inicial e não passar por depósitos de outros veículos, respectivamente. Da mesma forma os conjuntos de restrições (3.11) e (3.12) limitam os depósitos intermediários, e os conjuntos (3.13) e (3.14) limitam os depósitos finais. Os conjuntos de restrições (3.15) – (3.18) estabelecem os arcos impossíveis para o cenário. O conjunto de restrições (3.19) determina que um cliente seja atendido por um mesmo veículo em todos os seus pontos de paradas, enquanto o conjunto de restrições (3.20) evita subciclos. Os conjuntos de restrições (3.21) e (3.22) estabelecem o sequenciamento das janelas de atendimento e capacidade para as rotas. O conjunto de restrições (3.23) delimita a capacidade para cada ponto da rota. O conjunto de restrições (3.24) define o tempo de permanência do usuário no veículo. Os conjuntos de restrições (3.25) e (3.26) limitam a razão  $p_i$  de um cliente  $i$ . O conjunto de restrições (3.27) restringe o tempo total de um rota. O conjunto de restrições (3.28) delimita as janelas de tempo para cada ponto do grafo. O conjunto de restrições (3.29) define as variáveis do modelo.

Os parâmetros para linearização das restrições são  $M_{ij}^k \geq \max\{0, l_i + d_i + t_{ij} - e_j\}$ ,  $W_{ij}^k = \min\{Q^k, Q^k + \sum_c q_i^c\}$ .

*Exemplo.* A Figura 3.1 apresenta um exemplo de plano de atendimento para o SARP-DIM.

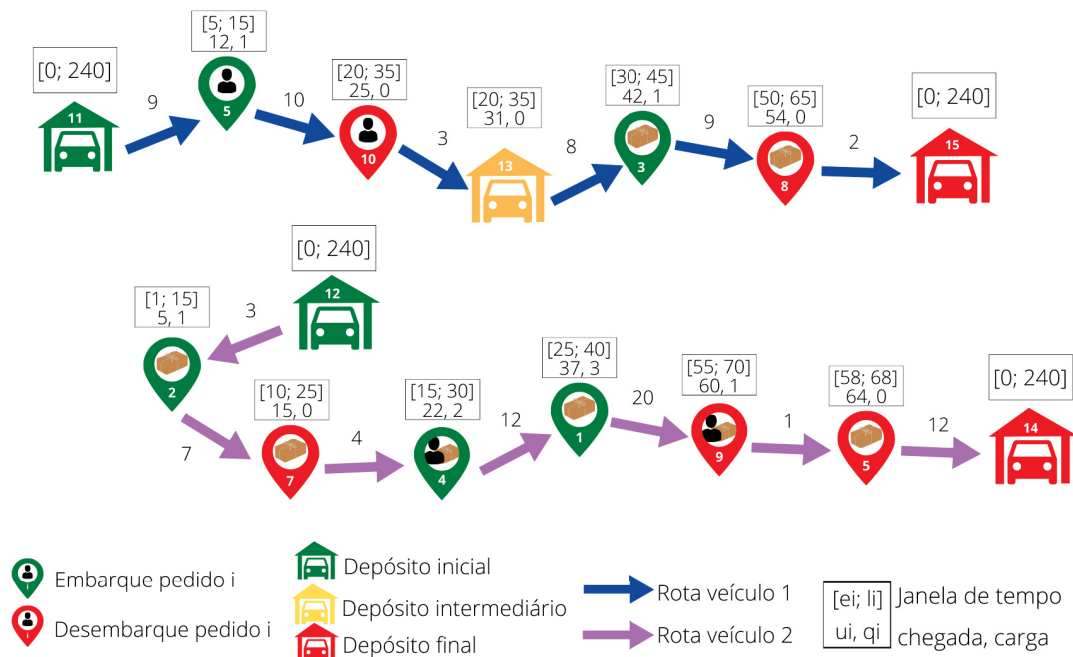


Figura 3.1: Exemplo SARP-DIM

Fonte: Autoria própria.

Note que há 2 veículos que compõem a frota e 5 pedidos de viagens, sendo que três são fretes, um de pessoa e um de frete e pessoa. Assim, seguindo a distribuição da sequência numérica do SARP-DIM, como se observa pela Tabela 3.1, tem-se que  $V^o = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  é o conjunto

de pontos de origem das viagens,  $V^d = \{6, 7, 8, 9, 10\}$  é o conjunto de pontos de destino das viagens,  $A_1 = \{11\}$  é o conjunto dos depósitos iniciais dos motoristas intermediários,  $A_2 = \{12\}$  é o conjunto dos depósitos iniciais dos motoristas tradicionais,  $I = \{13\}$  é o conjunto dos depósitos intermediários,  $B_2 = \{14\}$  é o conjunto dos depósitos finais dos motoristas tradicionais e  $B_1 = \{15\}$  é o conjunto dos depósitos finais dos motoristas intermediários.

pedido	tipo	carga	embarque	desembarque
1	frete	1	1	6
2	frete	1	2	7
3	frete	1	3	8
4	bens e pessoa	2	4	9
5	pessoa	1	5	10

Tabela 3.1: Distribuição numérica no SARP-DIM

Conforme a Figura 3.2 que apresenta a solução em forma de grade, apenas os pedidos 1 e 4 compartilham suas viagens, alcançando uma ocupação máxima de 2 assentos por veículo. Ainda nota-se que o veículo intermediário iniciou sua rota no depósito 11, passou pelo depósito intermediário 13 já sem clientes a bordo, e terminou sua rota no depósito 15. Todos os veículos passaram por seus devidos depósitos, sendo que não iniciaram o atendimento necessariamente no primeiro instante do cenário.

<b>11</b>	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>13</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	<b>15</b>
[0;240]	[5;15]	[20;35]	[20;35]	[30;45]	[50;65]	[0;240]
3, 0	12, 1	25, 0	31, 0	42, 1	54, 0	59, 0

<b>12</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>4</b>	<b>1</b>	<b>9</b>	<b>5</b>	<b>14</b>
[0;240]	[1;15]	[10;25]	[15;30]	[25;40]	[55;70]	[58;68]	[0;240]
2, 0	5, 1	15, 0	22, 2	37, 3	60, 1	64, 0	79, 0

Figura 3.2: Solução exemplo SARP-DIM.

Fonte: Autoria própria.

### 3.1.2 Formulação SARP com Depósitos Intermediários Simples (SARP-DIS)

No SARP-DIS existem  $n$  pedidos de viagens, com pontos de origem e destino especificados previamente, para serem atendidos por uma frota de  $k$  veículos, em que todos os veículos possuem depósitos intermediários. Ainda, os clientes são classificados entre pessoas e fretes, podendo compartilhar uma viagem com mais de um cliente por veículo.

Note que o SARP-DIS é um caso especial do SARP-DIM. Usando a notação da formulação do SARP-DIM e fazendo  $A_2 = \emptyset$  e  $B_2 = \emptyset$ , temos o cenário do SARP-DIS.

O grafo  $G = (V, E)$  define o problema SARP-DIS, tal que  $V$  é o conjunto dos vértices e  $E$  é o conjunto dos arcos. O conjunto de vértices é tal que  $V = V^o \cup V^d \cup A \cup I \cup B$ , em que  $V^o = \{1, 2, \dots, n\}$  é o conjunto de pontos de origem,  $V^d = \{n+1, \dots, 2n\}$  o conjunto dos pontos de destino,  $A = \{2n+1, \dots, 2n+k\}$  o conjunto dos depósitos iniciais,  $I = \{2n+k+1, \dots, 2n+2k\}$  o conjunto dos depósitos intermediários e  $B = \{2n+2k+1, \dots, 2n+3k\}$  o conjunto dos depósitos finais, para  $k \in K$ .

Para cada veículo  $k \in K$ , há um tempo máximo de serviço  $T_k$ , uma capacidade  $Q^{kc}$  para demanda  $c$ , o depósito inicial  $a_k$ , o depósito intermediário  $i_k$  e o depósito final  $b_k$ .

Ainda, para cada  $i \in V$ , tem-se uma janela de tempo  $[e_i, l_i]$ , uma duração de serviço  $s_i$  e uma carga  $q_i^c$  da demanda  $c$ , tal que  $q_{a_k}^c = q_{b_k}^c = 0$  e  $d_{a_k} = d_{b_k} = 0$ . E para cada usuário  $i \in V^o = \{1, \dots, n\}$  define-se a dupla de localizações de sua viagem  $(i, n+i)$ , tal que  $q_i^c + q_{n+i}^c = 0$ .

Parâmetros e definições iniciais:

$K$	Conjunto de veículos $K$
$n$	Número de pedidos de viagens
$C$	Conjunto dos tipos de demanda, sendo $c \in C = \{P, F\}$ passageiros e fretes
$a_k$	Depósito inicial do veículo $k$
$b_k$	Depósito final do veículo $k$
$V^o$	Conjunto dos pontos de origem dos pedidos de viagem, em que $V^o = \{1, \dots, n\}$
$V^d$	Conjunto dos pontos de destino dos pedidos de viagem, em que $V^d = \{n+1, \dots, 2n\}$
$A$	Conjunto dos depósitos iniciais, em que $ A  =  K $ e $A = \{2n+1, \dots, 2n+k\}$
$I$	Conjunto dos depósitos intermediários, em que $ I  =  K $ e $A = \{2n+k+1, \dots, 2n+2k\}$
$B$	Conjunto dos depósitos finais, em que $ B  =  K $ e $B = \{2n+2k+1, \dots, 2n+3k\}$
$T_{a_k}$	Instante em que o veículo $k$ está disponível para iniciar o atendimento do depósito $a_k$
$T_{b_k}$	Instante em que o veículo $k$ está disponível para iniciar o atendimento do depósito $b_k$
$q_i^c$	Quantidade da demanda do tipo $c$ na parada $i$ , em que $C = \{P, F\}$
$t_{ij}^k$	Tempo de viagem do veículo $k$ entre as paradas $i$ e $j$
$d_{ij}$	Distância entre as paradas $i$ e $j$
$s_i$	Duração do serviço do pedido na parada $i$
$[e_i, l_i]$	Janela de tempo de $i$
$Q^{kc}$	Capacidade do veículo $k$ para demanda $c$ , $k \in K$ e $c \in C$
$\alpha$	Taxa inicial cobrada por entregar um passageiro
$\beta$	Taxa inicial cobrada por entregar um frete
$\gamma_1$	Taxa cobrada por carregar um passageiro por quilômetro

$\gamma_2$	Taxa cobrada por carregar um frete por quilômetro
$\gamma_3$	Custo médio por quilômetro por atendimento
$\gamma_4$	Fator de desconto por exceder o tempo de entrega direto do passageiro
$\gamma_5$	Fator de desconto por exceder o tempo que o veículo $k$ deveria finalizar sua rota

Variáveis de decisão:

$x_{ij}^k$	1 se o veículo $k$ passa por $(i, j)$ ; 0 caso contrário
$u_i^k$	Instante de tempo de chegada do veículo $k$ no nó $i$
$w_i^{kc}$	Montante da demanda $c$ no veículo $k$ quando sai do nó $i$
$r_i^k$	Tempo de viagem do usuário $i$ no veículo $k$
$p_i$	Razão entre o tempo de viagem atual e o tempo de viagem direto do usuário $i$ .
$h^k$	Tempo de atraso para o veículo $k$ finalizar sua rota

Funções objetivo:

- O lucro total obtido com os atendimentos dos passageiros:

$$F_1 = \sum_{i \in V^o} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} (\alpha + \gamma_1 d_{i,i+n}) x_{ij}^k. \quad (3.30)$$

- O lucro total obtido com os atendimentos dos fretes:

$$F_2 = \sum_{i \in V^o} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} (\beta + \gamma_2 d_{i,i+n}) x_{ij}^k. \quad (3.31)$$

- Custo por quilômetro percorrido em atendimento:

$$F_3 = \gamma_3 \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} d_{ij} x_{ij}^k. \quad (3.32)$$

- Fator de desconto por exceder o tempo de atendimento direto dos passageiros:

$$F_4 = \gamma_4 \sum_{i \in V^o} (1 - p_i). \quad (3.33)$$

- Fator de desconto por exceder o instante de tempo que o veículo  $k$  deveria finalizar sua rota:

$$F_5 = \gamma_5 \sum_{k \in K} h^k. \quad (3.34)$$

Assim, a função  $F$  expressa os benefícios totais:  $F = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 - F_5$ .

Portanto, o modelo SARP-DIS é descrito por:

$$\text{Max } F \quad (3.35)$$

$$\text{s.à } \sum_{j \in V^o \cup V^d} \sum_{k \in K} x_{ij}^k = 1, \quad \forall i \in V^o \quad (3.36)$$

$$\sum_{i \in V} x_{a_k, i}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (3.37)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} x_{a_k, i}^{k'} = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.38)$$

$$\sum_{i \in V} x_{I_k, i}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (3.39)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} x_{I_k, i}^{k'} = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.40)$$

$$\sum_{i \in V} x_{b_k, i}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (3.41)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} x_{b_k, i}^{k'} = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.42)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i, a_k}^k = \sum_{i \in V} x_{b_k, i}^k = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.43)$$

$$\sum_{i \in V} x_{a_k, b_k}^k = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.44)$$

$$\sum_{i \in V^o} x_{i+n, i}^k = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.45)$$

$$\sum_{i \in V^o} x_{i, b_k}^k = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.46)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij}^k = \sum_{i \in V} x_{i, j+n}^k, \quad \forall j \in V^o, k \in K \quad (3.47)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k = \sum_{j \in V} x_{ji}^k, \quad \forall i \in V^o \cup V^d, k \in K \quad (3.48)$$

$$u_j^k - u_i^k \geq s_i + t_{ij} - M_{ij}^k (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, i \in V, j \in V \quad (3.49)$$

$$w_j^{kc} - w_i^{kc} \geq q_i^c - W_{ij}^k (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, i \in V, j \in V, c \in C \quad (3.50)$$

$$\max\{0, q_i^c\} \leq w_i^{kc} \leq \min\{Q^{kc}, Q^{kc} + q_i^c\}, \quad \forall k \in K, i \in V, c \in C \quad (3.51)$$

$$r_i^k = u_{i+n}^k - u_i^k, \quad \forall k \in K, i \in V^o \quad (3.52)$$

$$p_i \leq 1, \quad \forall i \in V^{p, o} \quad (3.53)$$

$$p_i \geq \sum_{k \in K} \frac{r_i^k}{(t_{i, i+n}^k + s_i)}, \quad \forall i \in V^{p, o} \quad (3.54)$$

$$u_{b_k}^k - u_{a_k}^k - h^k \leq T_{b_k}, \quad \forall k \in K \quad (3.55)$$

$$e_i \leq u_i^k \leq l_i, \quad \forall k \in K, i \in V^o \quad (3.56)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}; u_i^k, r_i^k, w_i^{kc}, h_i^k \in \mathbb{R}_+; p_i^k \in [0, 1] \quad \forall i, j \in V, k \in K \quad (3.57)$$

O conjunto de restrições (3.36) determina que toda origem deve ser atendida por um único veículo. Os conjuntos de restrições (3.37) e (3.38) estabelecem que todo veículo deve iniciar sua rota no depósito inicial e não passar por depósitos de outros veículos, respectivamente. Da mesma forma os conjuntos de restrições (3.39) e (3.40) limitam os depósitos intermediários, e os conjuntos (3.41) e (3.42) limitam os depósitos finais. Os conjuntos de restrições (3.43) – (3.46) estabelecem os arcos impossíveis para o cenário. O conjunto de restrições (3.47) determina que um cliente seja atendido por um mesmo veículo em todos os seus pontos de paradas, enquanto o conjunto de restrições (3.48) evita subciclos. Os conjuntos de restrições (3.49) e (3.50) estabelecem o sequenciamento das janelas de atendimento e capacidade para as rotas. O conjunto de restrições (3.51) delimita a capacidade para cada ponto da rota. O conjunto de restrições (3.52) define o tempo de permanência do usuário no veículo. Os conjuntos de restrições (3.53) e (3.54) limitam a razão  $p_i$  de um cliente  $i$ . Os conjuntos de restrições (3.55) restringe o tempo total de um rota. O conjuntos de restrições (3.56) e delimita as janelas de tempo para cada ponto do grafo. O conjunto de restrições (3.57) define as variáveis do modelo.

Os parâmetros para linearização das restrições são  $M_{ij}^k \geq \max\{0, l_i + d_i + t_{ij} - e_j\}$ ,  $W_{ij}^k = \min\{Q^k, Q^k + \sum_c q_i^c\}$ .

*Exemplo.* Um exemplo do SARP-DIS é apresentado pela Figura 3.4, em que há 2 veículos e 6 pedidos de viagens.

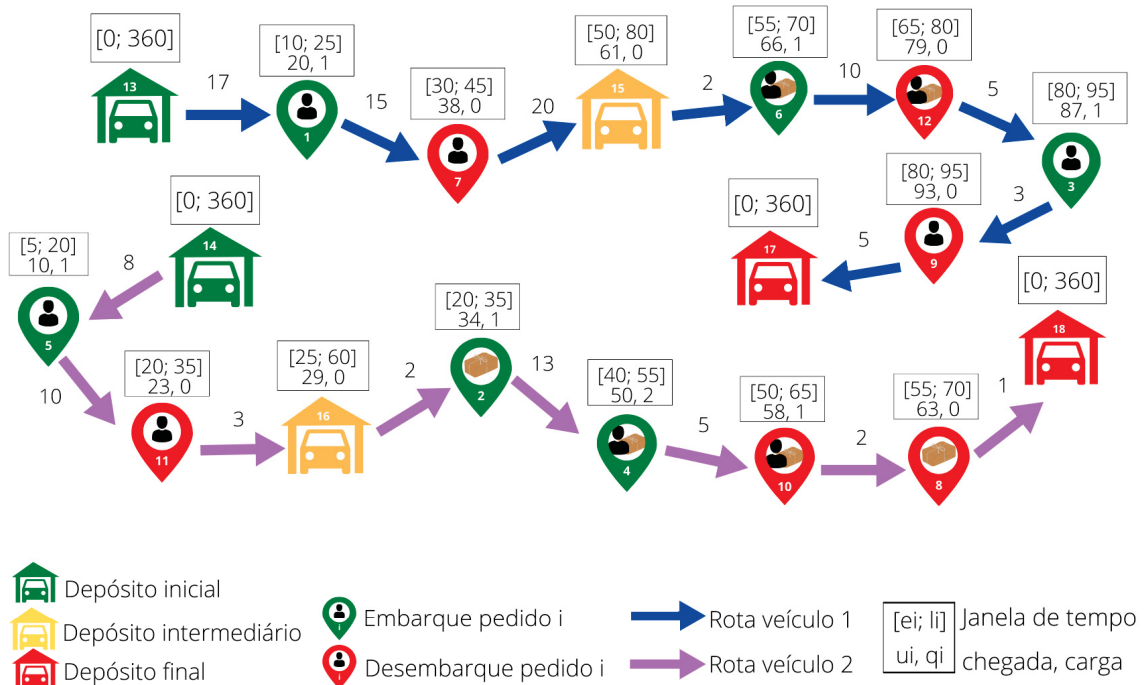


Figura 3.3: Exemplo SARP-DIP.

Fonte: Autoria própria.

Conforme a Tabela 3.2, o conjunto de pontos de origem é  $V^o = \{1, \dots, 6\}$ , o conjunto de pontos de destino é  $V^d = \{7, \dots, 12\}$ , o conjunto de depósitos de origem  $A = \{13, 14\}$ ,

o conjunto de depósitos de destino  $B = \{17, 18\}$  e o conjunto de depósitos intermediários  $I = \{15, 16\}$ .

pedido	tipo	carga	embarque	desembarque
1	pessoa	1	1	7
2	frete	1	2	8
3	pessoa	1	3	9
4	bens e pessoa	2	4	10
5	pessoa	1	5	11
5	bens e pessoa	2	6	12

Tabela 3.2: Distribuição numérica no SARP-DIS.

Neste exemplo, todos os pedidos compartilharam parte ou toda a viagem com outros clientes, alcançando uma ocupação máxima de 3 assentos por veículo. Ainda, nota-se que cada veículo iniciou e finalizou em seus devidos depósitos, passando pelos seus depósitos intermediários.

<b>13</b>	<b>1</b>	<b>7</b>	<b>15</b>	<b>6</b>	<b>12</b>	<b>3</b>	<b>9</b>	<b>17</b>
[0;360]	[10;25]	[30;45]	[50;80]	[55;70]	[65;80]	[80;95]	[80;95]	[0;360]
3, 0	20, 1	38, 0	61, 0	66, 1	79, 0	87, 1	93, 0	101, 0

<b>14</b>	<b>5</b>	<b>11</b>	<b>16</b>	<b>2</b>	<b>4</b>	<b>10</b>	<b>8</b>	<b>18</b>
[0;360]	[5;20]	[20;35]	[25;60]	[20;35]	[40;55]	[50;65]	[55;70]	[0;360]
2, 0	10, 1	23, 0	29, 0	34, 1	50, 2	58, 1	63, 0	67, 0

Figura 3.4: Solução Exemplo SARP-DIP.

Fonte: Autoria própria.

### 3.2 PONTOS INTERMEDIÁRIOS

O SARP se baseia em um ambiente com uma frota de veículos que deve atender a pedidos de viagens especificados previamente, com pontos de origem e destino cada. Ainda é possível haver o compartilhamento de um veículo por mais de um cliente. Além disso, cada pedido de viagem pode ser definido como frete ou pessoa.

Um variação proposta na presente tese e baseada no Multi-Drop Pickup and Delivery Problem, é o SARP com pontos intermediários, em que um pedido de viagem pode ter um terceiro ponto de parada. Ou seja, para um pedido de viagem, tem-se um ponto de origem, um ponto intermediário e um ponto de destino. Além do mais, é incluso o conceito de motoristas ocasionais, proposto por (Dahle et al., 2019), que permite que os motoristas tenham depósitos próprios e não relacionados com outros motoristas.

Assim, são propostos os seguintes modelos:

- todos os pedidos de viagem possuem um ponto intermediário (viagem intermediária), chamado de SARP com Pontos Intermediários Simples (SARP-PIS).
- os pedidos de viagem se segmentam entre não ter um ponto intermediário (viagem tradicional), ou ter um ponto de viagem intermediário (viagem intermediária), sendo chamado de SARP com Pontos Intermediários Misto (SARP-PIM).

### 3.2.1 Formulação SARP com Pontos Intermediários Misto (SARP-PIM)

O SARP com Pontos Intermediários Misto (SARP-PIM) possui  $n$  pedidos de viagens intermediárias e  $m$  pedidos de viagens tradicionais, em que um pedido de viagem tradicional possui um ponto de origem e um ponto de destino, enquanto um pedido de viagem intermediária possui um ponto de origem, um ponto intermediário e um ponto de destino. Os pedidos de viagem são atendidos por um frota de  $k$  veículos, de modo que é possível haver compartilhamento de um veículo por mais de um usuário. Além disso, cada veículo  $k$  tem um depósito inicial  $a_k$  e um depósito final  $b_k$ .

O problema é definido por um grafo  $G = (V, E)$ , tal que  $V$  é o conjunto dos vértices e  $E$  o conjunto dos arcos. Seja o conjunto de vértices  $V = V^{o1} \cup V^{o2} \cup V^i \cup V^{d2} \cup V^{d1} \cup A \cup B$ , em que  $V^{o1} = \{1, 2, \dots, n\}$  é o conjunto das origens dos pedidos de viagens intermediárias,  $V^{o2} = \{n + 1, \dots, \sigma = n + m\}$  o conjunto das origens dos pedidos de viagens tradicionais,  $V^i = \{\sigma + 1, \dots, \sigma + n\}$  o conjunto de paradas intermediárias,  $V^{d2} = \{\sigma + n + 1, \dots, 2\sigma\}$  o conjunto dos destinos dos pedidos de viagens tradicionais,  $V^{d1} = \{2\sigma + 1, \dots, 2\sigma + n\}$  o conjunto dos destinos dos pedidos de viagens intermediárias,  $A$  o conjunto dos depósitos de origem e  $B$  o conjunto dos depósitos de destino.

Note que os pontos de paradas dos pedidos tradicionais compõem os conjuntos  $V^{o2}$  e  $V^{d2}$ , enquanto os pontos de paradas dos pedidos de viagens intermediárias compõem os conjuntos  $V^{o1}$ ,  $V^i$  e  $V^{d1}$ . Assim, para cada pedido de viagem intermediária  $i$ , em que  $i \in V^{o1} = \{1, \dots, n\}$ , tem-se o trio de paradas  $(i, \sigma + i, 2\sigma + i)$ . Também, para cada pedido de viagem tradicional  $i \in V^{o2} = \{n + 1, \dots, \sigma = n + m\}$ , tem-se o par de paradas  $(i, \sigma + i)$ , que pode ser reescrito como  $(n + i, \sigma + n + i)$ , considerando  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Ainda, para cada  $i \in V$ , tem-se uma janela de tempo  $[e_i, l_i]$ , uma duração de serviço  $s_i$  e uma carga  $q_i^c$  da demanda  $c$ , tal que  $q_{a_k}^c = q_{b_k}^c = 0$  e  $d_{a_k} = d_{b_k} = 0$ , em que  $k \in K$ . Além disso, para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , tem-se  $q_i^c + q_{\sigma+i}^c + q_{2\sigma+i}^c = 0$  e para  $i \in \{1, \dots, m\}$  tem-se que  $q_{n+i}^c + q_{\sigma+n+i}^c = 0$ . Também, para cada veículo  $k \in K$ , há um tempo máximo de serviço  $T_k$ , uma capacidade  $Q^{kc}$  para demanda  $c$ , um depósito inicial  $a_k$  e um depósito  $b_k$ .

Observa-se também que para  $i \in \{1, \dots, n\}$  tem-se  $q_i^c + q_{\sigma+i}^c = -q_{2\sigma+i}^c$ . Além disso, a carga  $q_{\sigma+i}^c$  pode assumir valores negativos ou positivos, dependendo se representar desembarque ou embarque, respectivamente.

Parâmetros e definições iniciais:

$G$	Grafo direcionado do problema
$K$	Conjunto de veículos $K$
$n$	Número de pedidos de viagens intermediárias
$m$	Número de pedidos de viagens tradicionais
$\sigma$	Conjunto dos pedidos de viagens, em que $\sigma = n + m$
$C$	Conjunto dos tipos de demanda, sendo $c \in C = \{P, F\}$ passageiros e fretes
$a_k$	Depósito inicial do veículo $k$
$b_k$	Depósito final do veículo $k$
$V$	Conjunto de todas as paradas, incluindo origens, destinos e depósitos, em que $V = V^{o1} \cup V^{o2} \cup V^i \cup V^{d2} \cup V^{d1} \cup A \cup B$ .
$V^{o1}$	Conjunto dos pontos de origem dos pedidos de viagens intermediárias, em que $V^{o1} = \{1, \dots, n\}$
$V^{o2}$	Conjunto dos pontos de origem dos pedidos de viagens tradicionais, em que $V^{o2} = \{n + 1, \dots, \sigma = n + m\}$
$V^i$	Conjunto dos pontos intermediários dos pedidos de viagens intermediárias, em que $V^i = \{\sigma + 1, \dots, \sigma = \sigma + n\}$
$V^{d1}$	Conjunto dos pontos de destino dos pedidos de viagens intermediárias, em que $V^{d1} = \{\sigma + m + 1, \dots, 2\sigma\}$
$V^{d2}$	Conjunto dos pontos de destino dos pedidos de viagens tradicionais, em que $V^{d2} = \{2\sigma + 1, \dots, 2\sigma + n\}$
$A$	Conjunto dos depósitos iniciais, em que $ A  =  K $ e $A = \{2\sigma + n + 1, \dots, 2\sigma + n + k\}$
$B$	Conjunto dos depósitos finais, em que $ B  =  K $ e $B = \{2\sigma + n + k + 1, \dots, 2\sigma + n + 2k\}$
$T_{a_k}$	Instante em que o veículo $k$ está disponível para iniciar o atendimento do depósito $a_k$
$T_{b_k}$	Instante em que o veículo $k$ está disponível para iniciar o atendimento do depósito $b_k$
$q_i^c$	Quantidade da demanda do tipo $c$ na parada $i$ , em que $C = \{P, F\}$
$t_{ij}^k$	Tempo de viagem do veículo $k$ entre as paradas $i$ e $j$
$d_{ij}$	Distância entre as paradas $i$ e $j$
$s_i$	Duração do serviço do pedido na parada $i$
$[e_i, l_i]$	Janela de tempo de $i$
$Q^{kc}$	Capacidade do veículo $k$ para demanda $c$ , $k \in K$ e $c \in C$
$\alpha$	Taxa inicial cobrada por entregar um passageiro
$\beta$	Taxa inicial cobrada por entregar um frete
$\gamma_1$	Taxa cobrada por carregar um passageiro por quilômetro
$\gamma_2$	Taxa cobrada por carregar um frete por quilômetro
$\gamma_3$	Custo médio por quilômetro por atendimento
$\gamma_4$	Fator de desconto por exceder o tempo de entrega direto do passageiro
$\gamma_5$	Fator de desconto por exceder o tempo que o veículo $k$ deveria finalizar sua rota

Variáveis de decisão:

$x_{ij}^k$	1 se o veículo $k$ passa por $(i, j)$ ; 0 caso contrário
$u_i^k$	Instante de tempo de chegada do veículo $k$ no nó $i$
$w_i^{kc}$	Montante da demanda $c$ no veículo $k$ quando sai do nó $i$
$r_i^k$	Tempo de viagem do usuário $i$ no veículo $k$
$p_i$	Razão entre o tempo de viagem atual e o tempo de viagem direto do usuário $i$ .
$h^k$	Tempo de atraso para o veículo $k$ finalizar sua rota

Funções objetivo:

- O lucro total obtido com os atendimentos dos passageiros:

$$F_1 = \sum_{i \in V^o} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} (\alpha + \gamma_1 (d_{i,i+\sigma} + d_{i+\sigma,i+2\sigma} + d_{i+n,i+n+\sigma})) x_{ij}^k. \quad (3.58)$$

- O lucro total obtido com os atendimentos dos fretes:

$$F_2 = \sum_{i \in V^o} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} (\beta + \gamma_2 (d_{i,i+\sigma} + d_{i+\sigma,i+2\sigma} + d_{i+n,i+n+\sigma})) x_{ij}^k. \quad (3.59)$$

- Custo por quilômetro percorrido em atendimento:

$$F_3 = \gamma_3 \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} d_{ij} x_{ij}^k. \quad (3.60)$$

- Fator de desconto por exceder o tempo de atendimento direto dos passageiros:

$$F_4 = \gamma_4 \sum_{i \in V^o} (1 - p_i). \quad (3.61)$$

- Fator de desconto por exceder o instante de tempo que o veículo  $k$  deveria finalizar sua rota:

$$F_5 = \gamma_5 \sum_{k \in K} h^k. \quad (3.62)$$

Assim, a função  $F$  expressa os benefícios totais:

$$F = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 - F_5. \quad (3.63)$$

Portanto, o modelo SARP-PIM é descrito por:

$$\text{Max } F \quad (3.64)$$

$$\text{s.à } \sum_{j \in V \setminus \{B\}} \sum_{k \in K} x_{ij}^k = 1, \quad \forall i \in V^{o1} \cup V^{o2} \quad (3.65)$$

$$\sum_{i \in V} x_{a_k, i}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (3.66)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i, b_k}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (3.67)$$

$$\sum_{k \in K} x_{i, i+2\sigma}^k = \sum_{k \in K} x_{i+\sigma, i}^k = \sum_{k \in K} x_{i+2\sigma, i}^k = 0, \quad \forall i \in V^{o1} \quad (3.68)$$

$$\sum_{k \in K} x_{i+\sigma, b_k}^k = 0, \quad \forall i \in V^{o1} \quad (3.69)$$

$$\sum_{k \in K} x_{i+\sigma, i}^k = 0, \quad \forall i \in V^{o2} \quad (3.70)$$

$$\sum_{k \in K} x_{i, b_k}^k = 0, \quad \forall i \in V^{o1} \cup V^{o2} \quad (3.71)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij}^k = \sum_{i \in V} x_{i, j+\sigma}^k = \sum_{i \in V} x_{i, 2\sigma+j}^k, \quad \forall j \in V^{o1}, k \in K \quad (3.72)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij}^k = \sum_{i \in V} x_{i, j+\sigma}^k, \quad \forall j \in V^{o2}, k \in K \quad (3.73)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k = \sum_{j \in V} x_{ji}^k, \quad \forall i \in V \setminus \{A \cup B\}, k \in K \quad (3.74)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} x_{a_k, i}^{k'} = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.75)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{k' \in K \setminus \{k\}} x_{i, b_k}^{k'} = 0, \quad \forall k \in K \quad (3.76)$$

$$u_j^k - u_i^k \geq s_i + t_{ij} - M_{ij}^k (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, i, j \in V \quad (3.77)$$

$$w_j^{kc} - w_i^{kc} \geq q_i^c - W_{ij}^k (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, i, j \in V, c \in C \quad (3.78)$$

$$r_i^k = u_{2\sigma+i}^k - u_i^k, \quad \forall k \in K, i \in V^{o1} \quad (3.79)$$

$$r_i^k = u_{\sigma+n+i}^k - u_i^k, \quad \forall k \in K, i \in V^{o2} \quad (3.80)$$

$$u_{b_k}^k - u_{a_k}^k \leq T_k, \quad \forall k \in K \quad (3.81)$$

$$e_i \leq u_i^k \leq l_i, \quad \forall k \in K, i \in V \quad (3.82)$$

$$\max\{0, q_i^c\} \leq w_i^{kc} \leq \min\{Q^{kc}, Q^{kc} + q_i^c\}, \quad \forall k \in K, i \in V, c \in C \quad (3.83)$$

$$p_i \leq 1, \quad \forall i \in V^{o1} \cup V^{o2} \quad (3.84)$$

$$p_i \geq \sum_{k \in K} \frac{r_i^k}{\left(t_{i, i+\sigma}^k + t_{i+\sigma, 2\sigma+i}^k + s_i\right)}, \quad \forall i \in V^{o1} \quad (3.85)$$

$$p_i \geq \sum_{k \in K} \frac{r_i^k}{\left(t_{i+n, \sigma+n+i}^k + s_i\right)}, \quad \forall i \in V^{o2} \quad (3.86)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}; u_i^k, r_i^k, w_i^{kc}, h_i^k \in \mathbb{R}_+; p_i^k \in [0, 1] \quad \forall i, j \in V, k \in K \quad (3.87)$$

O conjunto de restrições (3.65) determina que toda origem deve ser atendida por um único veículo. Os conjuntos de restrições (3.66) e (3.67) estabelecem que todo veículo deve iniciar sua rota no seu depósito inicial e finalizar sua rota no seu depósito final, respectivamente. Os conjuntos de restrições (3.75) e (3.76) proíbem que os veículos não passem por depósitos a que não sejam associados. Os conjuntos de restrições (3.68) – (3.71) estabelecem os arcos impossíveis para o cenário. O conjunto de restrições (3.72) e (3.73) determina que um cliente seja atendido por um mesmo veículo em todos os seus pontos de paradas. O conjunto de restrições (3.74) evita que tenham subciclo e os conjuntos de restrições (3.77) e (3.78) estabelecem o sequenciamento das janelas de atendimento e capacidade para as rotas. Os conjuntos de restrições (3.82) e (3.83) delimitam as janelas de atendimento e capacidade para cada ponto da rota, respectivamente. Os conjuntos de restrições (3.79) e (3.80) define o tempo de permanência de um usuário em um veículo e o conjunto de restrições (3.81) limita o tempo total das rotas. Os conjuntos de restrições (3.84) – (3.86) limitam a razão  $p_i$  de um cliente  $i$  e finalmente, o conjunto de restrições (3.87) define as variáveis do modelo.

Os parâmetros para linearização das restrições são  $M_{ij}^k \geq \max\{0, l_i + d_i + t_{ij} - e_j\}$ ,  $W_{ij}^k = \min\{Q^k, Q^k + \sum_c q_i^c\}$ .

*Exemplo.* A Figura 3.5 apresenta um exemplo de plano de atendimento para o SARP-PIM. Note que há 2 veículos que compõem a frota e 4 pedidos de viagens, que dentre eles dois são de viagens intermediárias.

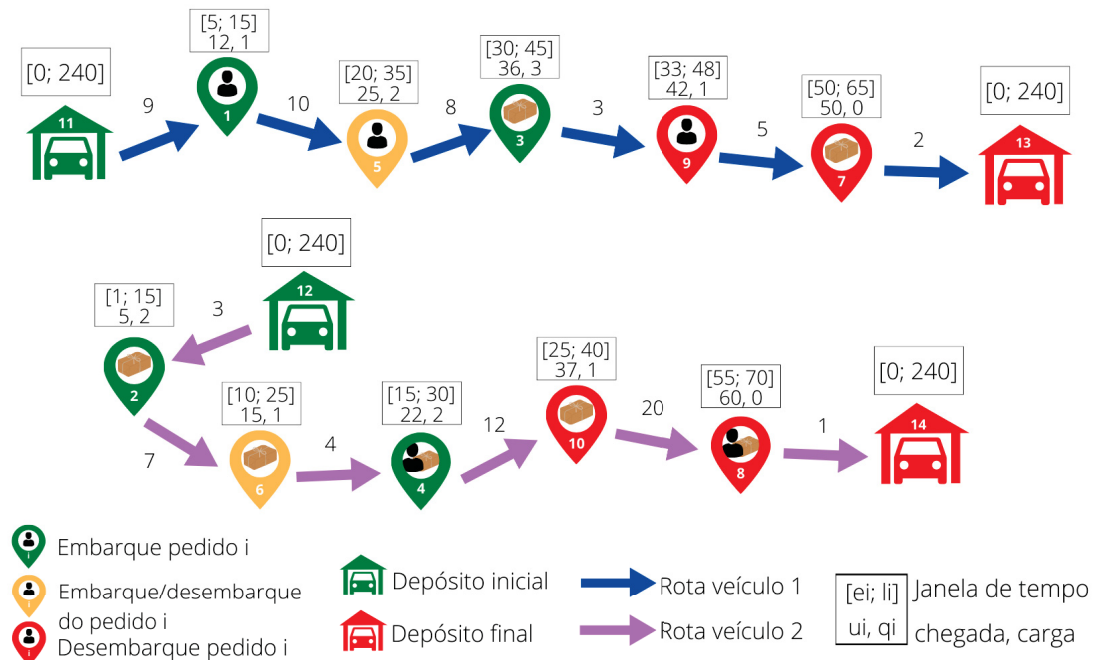


Figura 3.5: Exemplo SARP-PIM.

Fonte: Autoria própria.

Ao seguir a distribuição da sequência numérica do SARP-PIM, como se observa pela Tabela 3.3, é tal que  $V^{o1} = \{1, 2\}$  é o conjunto de pontos de origem das viagens intermediárias,  $V^{o2} = \{3, 4\}$  é o conjunto de pontos de origem das viagens tradicionais,  $V^i = \{5, 6\}$  é o conjunto de pontos intermediários,  $V^{d2} = \{7, 8\}$  é o conjunto de pontos de destino das viagens tradicionais,  $V^{d1} = \{9, 10\}$  é o conjunto de pontos de destino das viagens intermediárias,  $A = \{11, 12\}$  é o conjunto de pontos dos depósitos iniciais  $B = \{13, 14\}$  é o conjunto de pontos dos depósitos de finais.

pedido	tipo	carga	embarque	intermediário	desembarque
1	pessoa	2	1	5	9
2	bem	2	2	6	10
3	bem	1	3	-	7
4	bens e pessoa	2	4	-	8

Tabela 3.3: Distribuição numérica do SARP-PIM.

Conforme a Figura 3.6 que apresenta a solução em grade, todos os pedidos compartilharam parte ou toda a viagem com outros clientes, alcançando uma ocupação máxima de 3 assentos por veículo. Ainda nota-se que cada veículo iniciou e finalizou em seus devidos depósitos, sendo que não iniciaram o atendimento necessariamente no primeiro instante do cenário.

<b>11</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>9</b>	<b>7</b>	<b>13</b>
[0;240]	[5;15]	[20;35]	[30;45]	[33;48]	[50;65]	[0;240]
3, 0	12, 1	25, 2	36, 3	42, 1	50, 2	57, 0

<b>12</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>4</b>	<b>10</b>	<b>8</b>	<b>14</b>
[0;240]	[1;15]	[10;25]	[15;30]	[25;40]	[50;70]	[0;240]
2, 0	5, 2	15, 1	22, 2	37, 1	60, 0	64, 0

Figura 3.6: Solução exemplo SARP-PIM.

Fonte: Autoria própria.

### 3.2.2 Formulação SARP com Pontos Intermediários Simples (SARP-PIS)

O SARP com Pontos Intermediários Simples (SARP-PIS) possui  $n$  pedidos de viagem com pontos de origem, pontos intermediários e pontos de destino especificados previamente. Os pedidos de viagem são atendidos por um frota de  $k$  veículos, de modo que é possível haver compartilhamento de um veículo por mais de um usuário. Cada veículo  $k$  inicia sua rota no depósito de origem  $a_k$  e termina sua rota no depósito de destino  $b_k$ .

Observe-se que, usando a notação do SARP-PIM e tomando  $V^{o2} = V^{d2} = \emptyset$  tem-se que o SARP-PIS é um caso especial do SARP-PIM.

O problema é definido por um grafo  $G = (V, E)$ , em que  $V$  é o conjunto dos vértices e  $E$  o conjunto dos arcos. Seja o conjunto de vértices  $V = V^o \cup V^i \cup V^d \cup A \cup B$ , em que  $V^o = \{1, 2, \dots, n\}$  é o conjunto de pontos de origem,  $V^i = \{n + 1, \dots, 2n\}$  o conjunto de pontos intermediários,  $V^d = \{2n + 1, \dots, 3n\}$  o conjunto de pontos de destino,  $A = \{3n + 1, \dots, 3n + k\}$  o conjunto dos depósitos de origem e  $B = \{3n + k + 1, \dots, 3n + 2k\}$  o conjunto dos depósitos de destino. Ainda, para cada usuário  $i \in V^o$  define-se a tripla de localizações de sua viagem  $(i, n + i, 2n + i)$ .

Para cada  $i \in V$ , tem-se uma janela de tempo  $[e_i, l_i]$ , uma duração de serviço  $s_i$  e uma carga  $q_i^c$  da demanda  $c$ , tal que  $q_{a_k}^c = q_{b_k}^c = 0$  e  $d_{a_k} = d_{b_k} = 0$ . E, para  $i \in \{1, \dots, n\}$  tem-se que  $q_i^c + q_{n+i}^c + q_{2n+i}^c = 0$ .

Para cada veículo  $k \in K$  há um tempo máximo de serviço  $T_k$ , uma capacidade  $Q^{kc}$  para demanda  $c$ , um depósito de origem  $a_k$  e um depósito de destino  $b_k$ .

Parâmetros e definições iniciais:

$G$	Grafo direcionado do problema
$K$	Conjunto de veículos $K$
$n$	Número de pedidos de viagens
$C$	Conjunto dos tipos de demanda, sendo $c \in C = \{P, F\}$ passageiros e fretes
$a_k$	Depósito inicial do veículo $k$
$b_k$	Depósito final do veículo $k$
$V$	Conjunto de todas as paradas, incluindo origens, destinos e depósitos, em que $V = V^o \cup V^i \cup V^d \cup A \cup B$ .
$V^o$	Conjunto dos pontos de origem dos pedidos de viagens, em que $V^o = \{1, \dots, n\}$
$V^i$	Conjunto dos pontos intermediários dos pedidos de viagens, em que $V^i = \{n + 1, \dots, 2n\}$
$V^d$	Conjunto dos pontos de destino dos pedidos de viagens, em que $V^d = \{2n + 1, \dots, 3n\}$
$A$	Conjunto dos depósitos iniciais, em que $ A  =  K $ e $A = \{3n + 1, \dots, 3n + k\}$
$B$	Conjunto dos depósitos finais, em que $ B  =  K $ e $B = \{3n + k + 1, \dots, 3n + 2k\}$
$T_{a_k}$	Instante em que o veículo $k$ está disponível para iniciar o atendimento do depósito $a_k$
$T_{b_k}$	Instante em que o veículo $k$ está disponível para finalizar o atendimento do depósito $b_k$
$q_i^c$	Quantidade da demanda do tipo $c$ na parada $i$ , em que $C = \{P, F\}$
$t_{ij}^k$	Tempo de viagem do veículo $k$ entre as paradas $i$ e $j$
$d_{ij}$	Distância entre as paradas $i$ e $j$
$s_i$	Duração do serviço do pedido na parada $i$
$[e_i, l_i]$	Janela de tempo de $i$
$Q^{kc}$	Capacidade do veículo $k$ para demanda $c$ , $k \in K$ e $c \in C$

$\alpha$	Taxa inicial cobrada por entregar um passageiro
$\beta$	Taxa inicial cobrada por entregar um frete
$\gamma_1$	Taxa cobrada por carregar um passageiro por quilômetro
$\gamma_2$	Taxa cobrada por carregar um frete por quilômetro
$\gamma_3$	Custo médio por quilômetro por atendimento
$\gamma_4$	Fator de desconto por exceder o tempo de entrega direto do passageiro
$\gamma_5$	Fator de desconto por exceder o tempo que o veículo $k$ deveria finalizar sua rota

Variáveis de decisão:

$x_{ij}^k$	1 se o veículo $k$ passa por $(i, j)$ ; 0 caso contrário
$u_i^k$	Instante de tempo de chegada do veículo $k$ no nó $i$
$w_i^{kc}$	Montante da demanda $c$ no veículo $k$ quando sai do nó $i$
$r_i^k$	Tempo de viagem do usuário $i$ no veículo $k$
$p_i$	Razão entre o tempo de viagem atual e o tempo de viagem direto do usuário $i$
$h^k$	Tempo de atraso para o veículo $k$ finalizar sua rota

Termos da função objetivo:

- O lucro total obtido com os atendimentos dos passageiros:

$$F_1 = \sum_{i \in V^o} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} (\alpha + \gamma_1 (d_{i,i+n} + d_{i+n,i+2n})) x_{ij}^k. \quad (3.88)$$

- O lucro total obtido com os atendimentos dos fretes:

$$F_2 = \sum_{i \in V^o} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} (\beta + \gamma_2 (d_{i,i+n} + d_{i+n,i+2n})) x_{ij}^k. \quad (3.89)$$

- Custo por quilômetro percorrido em atendimento:

$$F_3 = \gamma_3 \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} d_{ij} x_{ij}^k. \quad (3.90)$$

- Fator de desconto por exceder o tempo de atendimento direto dos passageiros:

$$F_4 = \gamma_4 \sum_{i \in V^o} (1 - p_i). \quad (3.91)$$

- Fator de desconto por exceder o instante de tempo que o veículo  $k$  deveria finalizar sua rota:

$$F_5 = \gamma_5 \sum_{k \in K} h^k. \quad (3.92)$$

Assim, a função  $F$  expressa os benefícios totais:

$$F = F_1 + F_2 - F_3 - F_4 - F_5. \quad (3.93)$$

Portanto, o modelo SARP-PIS é descrito por:

$$\text{Max } F \quad (3.94)$$

$$\text{s.à } \sum_{j \in V} \sum_{k \in K} x_{ij}^k = 1, \quad \forall i \in V^o \quad (3.95)$$

$$\sum_{i \in V} x_{a_k, i}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (3.96)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i, b_k}^k = 1, \quad \forall k \in K \quad (3.97)$$

$$\sum_{k' \in K \setminus \{k\}} x_{a_k, i}^{k'} = 0, \quad \forall i \in V \quad (3.98)$$

$$\sum_{k' \in K \setminus \{k\}} x_{i, b_k}^{k'} = 0, \quad \forall i \in V \quad (3.99)$$

$$\sum_{k \in K} x_{i, a_k}^k = \sum_{k \in K} x_{b_k, i}^k = 0, \quad \forall i \in V \quad (3.100)$$

$$\sum_{k \in K} x_{i, i+2n}^k = \sum_{k \in K} x_{i+n, i}^k = 0, \quad \forall i \in V^o \quad (3.101)$$

$$\sum_{k \in K} x_{i+2n, i}^k = \sum_{k \in K} x_{i+2n, i+n}^k = 0, \quad \forall i \in V^o \quad (3.102)$$

$$\sum_{k \in K} x_{i, b_k}^k = \sum_{k \in K} x_{i+n, b_k}^k = 0, \quad \forall i \in V^o \quad (3.103)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij}^k = \sum_{i \in V} x_{i, j+n}^k = \sum_{i \in V} x_{i, 2n+j}^k, \quad \forall j \in V^o, k \in K \quad (3.104)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^k = \sum_{j \in V} x_{ji}^k, \quad \forall i \in V, k \in K \quad (3.105)$$

$$u_j^k - u_i^k \geq s_i + t_{ij} - M_{ij}^k (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, i, j \in V \quad (3.106)$$

$$w_j^{kc} - w_i^{kc} \geq q_i^c - W_{ij}^k (1 - x_{ij}^k), \quad \forall k \in K, i, j \in V, c \in C \quad (3.107)$$

$$r_i^k = u_{2n+i}^k - u_i^k, \quad \forall k \in K, i \in V^o \quad (3.108)$$

$$u_{b_k}^k - u_{a_k}^k \leq T_k, \quad \forall k \in K \quad (3.109)$$

$$e_i \leq u_i^k \leq l_i, \quad \forall k \in K, i \in V \quad (3.110)$$

$$\max\{0, q_i^c\} \leq w_i^{kc} \leq \min\{Q^{kc}, Q^{kc} + q_i^c\}, \quad \forall k \in K, i \in V, c \in C \quad (3.111)$$

$$p_i \leq 1, \quad \forall i \in V^o \quad (3.112)$$

$$p_i \geq \sum_{k \in K} \frac{r_i^k}{\left(t_{i, i+n}^k + t_{i+n, 2n+i}^k + s_i\right)}, \quad \forall i \in V^o \quad (3.113)$$

$$x_{ij}^k \in \{0, 1\}; u_i^k, r_i^k, w_i^{kc}, h_i^k \in \mathbb{R}_+; p_i^k \in [0, 1] \quad \forall i, j \in V, k \in K \quad (3.114)$$

O conjunto de restrições (3.95) estabelece que toda origem deve ser atendida por um único veículo. Os conjuntos de restrições (3.96) e (3.97) determinam que todo veículo deve iniciar sua rota no depósito inicial e finalizar sua rota no seu depósito final, respectivamente. Os conjuntos de restrições (3.98) e (3.99) delimitam que os veículos não passem por depósitos a que não sejam associados. Os conjuntos de restrições (3.100) – (3.103) estabelecem os arcos impossíveis para o cenário. O conjunto de restrições (3.104) limita que um cliente seja atendido por um mesmo veículo em todos os seus pontos de paradas. O conjunto de restrições (3.105) evita que tenham subciclo, e os conjuntos de restrições (3.106) e (3.107) estabelecem o sequenciamento das janelas de atendimento e capacidade para as rotas. Os conjuntos de restrições (3.110) e (3.111) delimitam as janelas de atendimento e capacidade para cada ponto da rota, respectivamente. O conjunto de restrições (3.108) define o tempo de permanência de um usuário em um veículo e o conjunto de restrições (3.109) limita o tempo total das rotas. Os conjuntos de restrições (3.112) e (3.113) limitam a razão  $p_i$  de um cliente  $i$  e finalmente, o conjunto de restrições (3.114) define as variáveis do modelo.

Os parâmetros para linearização das restrições são  $M_{ij}^k \geq \max\{0, l_i + d_i + t_{ij} - e_j\}$ ,  $W_{ij}^k = \min\{Q^k, Q^k + \sum_c q_i^c\}$ .

*Exemplo.* A Figura 3.7 apresenta um exemplo para o problema SARP-PIS, em que observam-se 2 veículos da frota para o atendimento de 4 clientes.

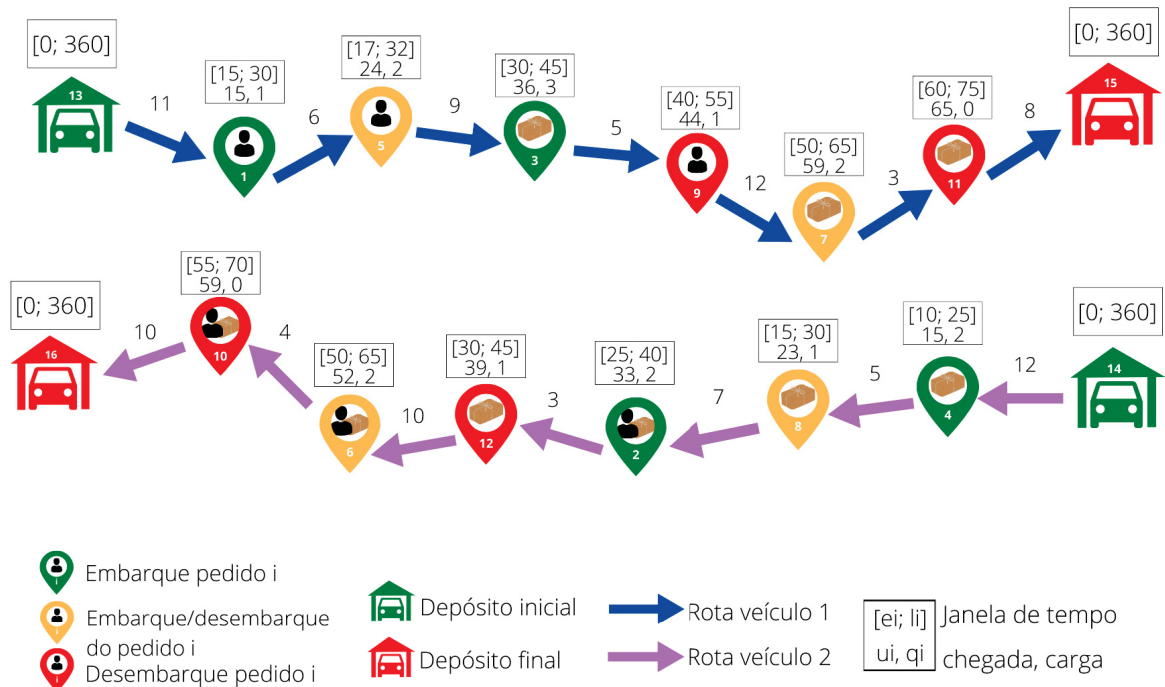


Figura 3.7: Exemplo SARP-PIS.

Fonte: Autoria própria.

A Tabela 3.4 traz as informações do problema, tal que  $V^o = \{1, 2, 3, 4\}$  é o conjunto de pontos de origem das viagens intermediárias,  $V^i = \{5, 6, 7, 8\}$  é o conjunto de pontos

intermediários,  $V^d = \{9, 10, 11, 12\}$  é o conjunto de pontos de destino das viagens intermediárias,  $A = \{13, 14\}$  é o conjunto dos depósitos iniciais e  $B = \{15, 16\}$  é o conjunto dos depósitos de finais.

pedido	tipo	carga	embarque	intermediário	desembarque
1	peessoas	2	1	5	9
2	bens e pessoas	2	2	6	10
3	bens	2	3	7	11
4	bens	2	4	8	12

Tabela 3.4: Distribuição numérica do SARP-PIS.

Conforme 3.8 que apresenta a solução em forma de grade, nota-se que há o compartilhamento de viagens, como por exemplo para os clientes 4 e 2. Neste caso, também nota-se que não houve a necessidade de um compartilhamento da viagem inteira, apenas o arco que foi mais vantajoso para o incremento da função objetivo.

<b>13</b>	<b>1</b>	<b>5</b>	<b>3</b>	<b>9</b>	<b>7</b>	<b>11</b>	<b>15</b>
[0;360]	[15;30]	[17;32]	[30;45]	[40;55]	[50;65]	[60;75]	[0;360]
4, 0	15, 1	24, 2	36, 3	44, 1	59, 2	65, 0	86, 0

<b>14</b>	<b>4</b>	<b>8</b>	<b>2</b>	<b>12</b>	<b>6</b>	<b>10</b>	<b>16</b>
[0;360]	[10;25]	[15;30]	[25;40]	[30;45]	[50;65]	[55;70]	[0;360]
3, 0	15, 2	23, 1	33, 2	39, 1	52, 2	59, 0	72, 0

Figura 3.8: Solução exemplo SARP-PIS.

Fonte: Autoria própria.

## 4 MÉTODOS DE SOLUÇÕES

Neste capítulo são apresentados os algoritmos de resolução utilizados nos experimentos computacionais.

### 4.1 HEURÍSTICA DE FIX & OPTIMIZE

O SARP é uma variação do DARP e, por isto, pode ser considerado NP-Hard, uma vez que o próprio DARP também é uma generalização do Pickup and Delivery Problem with Time Windows (PDPTW) que é NP-Hard (Ho et al., 2018). Por consequência existem limitações nas resoluções de instâncias de médio e grande porte, em especial pelo tempo requerido. Dado que o SARP oferece uma aplicação muito próxima aos cenários de transporte por aplicativo, a necessidade de soluções ágeis se faz importante.

No intuito de gerar soluções factíveis com melhores valores para a função objetivo e em menores tempos se comparado com a resolução exata da formulação do problema, a utilização da matheurística Fix & Optimize torna-se uma opção. A matheurística possui a estratégia de repartir o problema em subproblemas menores, por meio da fixação das variáveis, dispondo da ágil resolução de menores instâncias do SARP. No caso, a variável fixada é a  $x_{ij}^k$ , dado que todas as outras variáveis estão associadas a ela. Ainda, é considerado  $k$  como parâmetro de cardinalidade para gerar a vizinhança  $\tau$ .

Para iniciar a matheurística Fix & Optimize, como descrito no Algoritmo 1, é necessária uma solução inicial factível para o problema. No caso, é utilizada a heurística de solução inicial proposta no trabalho, conforme o Algoritmo 3. Também é pré-estabelecida a vizinhança a ser percorrida, que segue sequencialmente o bloqueio dos veículos, indo de  $k - 1$  até 1. Cada subproblema é limitado ao tempo de resolução de 5 minutos. Se a nova solução obtida tiver o valor da função objetivo melhor do que a solução corrente, então esta nova solução é aceita como corrente. Neste caso, a variável  $SM$  é zerada e caso contrário seria incrementada. A variável  $SM$  é responsável por controlar se o algoritmo percorreu uma vizinhança sem melhorias, pois o algoritmo só pode iniciar a busca em uma nova vizinhança após ter completado uma busca sem melhorias na vizinhança atual. Note-se que a matheurística não garante que uma solução ótima será encontrada.

**Algoritmo 1: Fix&Optimize**

```

Entrada:  $\tau, k, tempo, TL$ 
Saída:  $x$ 
1  $x^* \leftarrow SolucaoInicial$ 
2 para  $i \in (\tau, k)$  faça
3    $count \leftarrow QtdSubproblemas(\tau, k)$ 
4    $SM \leftarrow 0$ 
5   repita
6      $x \leftarrow Resolver(x^*, \tau, k, tempo)$ 
7     se  $x$  é melhor do que  $x^*$  então
8        $x^* \leftarrow x$ 
9        $SM \leftarrow 0$ 
10    fim
11    senão
12       $SM+ = 1$ 
13    fim
14    se  $TL$  for atingido então
15      Retornar  $x$ 
16    fim
17  até  $SM \neq count$ ;
18 fim

```

## 4.2 HEURÍSTICA DE SOLUÇÃO INICIAL

A heurística de solução inicial descrita no Algoritmo 3, tem como base a ordenação dos pontos do grafo que entraram no planejamento da rota. Para o SARP com pontos intermediários são incluídos os pontos de origem, pontos intermediários e pontos de destino, enquanto para o SARP com depósitos intermediários, são incluídos os pontos de origem, os pontos de destino e os depósitos intermediários.

Assim, dependendo da formulação adotada, é construído um conjunto  $C$  com os pontos de interesse e ordenado crescentemente a partir do instante de chegada  $e_i$  da janela de cada ponto, conforme Algoritmo 2. A partir disso, é iniciada a construção do conjunto de rotas, adicionando os depósitos iniciais de cada veículo em sua devida rota.

Então para cada ponto de  $C$ , em ordem crescente, e para cada veículo da frota são analisados as possíveis rotas para este ponto em  $C$  ser inserido definitivamente na solução. Se este ponto é uma origem, um ponto intermediário ou um depósito intermediário, são avaliadas em sequência as seguintes requisições:

- Se a partir da posição já ocupada na rota até o ponto avaliado haverá tempo o suficiente de chegar após o início da janela do ponto avaliado.
- Se considerando a capacidade da posição já ocupada mais a capacidade adicional do ponto avaliado, não ultrapassa a capacidade do veículo em questão.
- Se a inserção deste ponto avaliado na rota não ultrapassa o tempo total da rota.
- Se a inserção deste ponto avaliado não ultrapassa o tempo total do usuário.

Assim, concluindo a busca em todos os veículos e recolhida a informação dos possíveis veículos para atender o ponto avaliado, segue a decisão de em qual rota inserir o ponto. Por uma decisão randômica, escolhe-se o veículo e faz-se a inserção deste ponto avaliado e atualização a posição atual e capacidade desta rota.

Ao final desta avaliação, ponto a ponto de  $C$ , finaliza-se com a inserção dos depósitos finais de cada veículo.

**Algoritmo 2:** OrdenarCrescente

**Entrada:**  $P, D, I$   
**Saída:**  $NovoC$

- 1 Criar conjunto  $C = P \cup D \cup I$
- 2 **para**  $i \in C$  **faça**
- 3     Escolher um número grande  $M$
- 4     **para**  $j \in C$  **faça**
- 5         **se**  $e_i < M$  **então**
- 6              $M = e_i$
- 7              $NovoI = i$
- 8         **fim**
- 9     **fim**
- 10      $NovoC(i - 1) = NovoI$
- 11     Retirar ponto  $i$  de  $C$
- 12 **fim**

**Algoritmo 3: Solução Inicial**

**Entrada:**  $P, D, I$   
**Saída:** *Rota*

- 1 Criar conjunto  $C = P \cup D \cup I$
- 2 *OrdenarCrescente*( $C, e_i$ )
- 3 **para**  $k \in K$  **faça**
- 4 |  $Rota(k, 0) = DepositoInicial$  (Apropriado a cada tipo)
- 5 **fim**
- 6 **para**  $i \in C$  **faça**
- 7 |  $PossivelCarro \leftarrow 0$
- 8 | **para**  $k \in K$  **faça**
- 9 | | **se**  $i \in P \vee i \in I$  **então**
- 10 | | | **se**  $e_{Posi(k)} + d_{Posi(k)} + Dist(Posi(k), i) < e_i$  **então**
- 11 | | | | **se**  $Capaci(k) + q_i < Q^k$  **então**
- 12 | | | | | **se**  $e_{Posi(k)} + d_{Posi(k)} + Dist(Posi(k), i) < r_k$  **então**
- 13 | | | | | | **se**  $e_{Posi(k)} + d_{Posi(k)} + Dist(Posi(k), i) < T_k$  **então**
- 14 | | | | | | |  $PossivelCarro(k) \leftarrow 1$
- 15 | | | | | | **fim**
- 16 | | | | | **fim**
- 17 | | | | **fim**
- 18 | | | **fim**
- 19 | | **fim**
- 20 | | **se**  $i \in D$  **então**
- 21 | | | **se**  $k = EmqueCarro(i)$  **então**
- 22 | | | |  $PossivelCarro(k) \leftarrow 1$
- 23 | | | **fim**
- 24 | | **fim**
- 25 | **fim**
- 26 |  $EscolhaCarro = Random(PossivelCarro)$
- 27 |  $Rota(EscolhaCarro, Posicao(Escolha))$
- 28 |  $EmqueCarro(i) = EscolhaCarro$
- 29 |  $Capaci(k) += 1$
- 30 |  $Posicao(k) += 1$
- 31 **fim**
- 32 **para**  $k \in K$  **faça**
- 33 |  $Rota(k, Posicao(k) + 1) = DepositoFinal$  (Apropriado a cada tipo)
- 34 **fim**

### 4.3 METAHEURÍSTICA ADAPTATIVE LARGE NEIGHBORHOOD SEARCH - ALNS

Outra proposta de resolução para o SARP é a combinação da metaheurística Fix & Optimize e da metaheurística Adaptive Large Neighborhood Search (ALNS), para a melhoria da busca de vizinhanças, uma vez que mesmo os subproblemas podem ultrapassar o tempo limite de resolução. Assim, quando um subproblema ultrapassa o tempo limite de resolução da F&O, aciona-se a ALNS para gerar soluções factíveis em curtos intervalos de tempo, conforme o Algoritmo 4.

A cada iteração da metaheurística ALNS a solução corrente  $s$  é destruída e reparada por métodos operadores estabelecidos, gerando uma nova solução  $s'$ . Logo, esta nova solução  $s'$  é aceita conforme o critério de aceitação da metaheurística Simulated Annealing (SA), sendo que se  $s'$  é melhor que  $s$ , então  $s'$  é aceita como solução corrente, caso contrário  $s'$  pode ser aceita com uma certa probabilidade. Na proposta dessa tese, a solução  $s'$  não pode ser aceita se tiver solução menor do que  $s$ , visto que a ALNS está sendo tratada em conjunto com a F&O, e causaria retrocesso na busca principal.

#### Algoritmo 4: Fix&Optimize + ALNS

```

Entrada:  $\tau, k$ 
Saída:  $x$ 
1  $x^* \leftarrow SolucaoInicial$ 
2 para  $i \in (\tau, k)$  faça
3    $count \leftarrow QtdSubproblemas(\tau, k)$ 
4    $SM \leftarrow 0$ 
5   repita
6      $x \leftarrow Resolver(x^*, \tau, k, tempo)$ 
7     se  $x = \emptyset$  então
8        $x \leftarrow ALNS(x^*, \tau, k, tempo)$ 
9     fim
10    se  $x$  é melhor do que  $x^*$  então
11       $x^* \leftarrow x$ 
12       $SM \leftarrow 0$ 
13    fim
14    senão
15       $SM+ = 1$ 
16    fim
17    se  $TL$  for atingido então
18      Retornar  $x$ 
19    fim
20  até  $SM \neq count$ ;
21 fim

```

Além do mais, a diferença da ALNS em comparação à LNS (Large Neighborhood Search) é que os métodos operadores são selecionados por meio de uma análise adaptativa, variando suas probabilidades conforme seus desempenhos a cada iteração. Os operadores propostos são de troca de usuários entre veículos e troca de deslocamento de origem/destino de um usuário.

#### 4.3.1 Operador de troca de usuários entre veículos

Inicialmente, escolhe-se um cliente de uma das rotas e em seguida são analisados os possíveis clientes de outra rota que possam realizar a troca. Assim, na nova rota é feita a busca de possíveis clientes que tenham a janela de tempo próxima a janela do cliente escolhido, utilizando um intervalo de tempo máximo de diferença já definido inicialmente.

Logo, com o cliente escolhido e para cada par possível da nova rota, é feita a retirada de ambos os clientes. A princípio a inserção dos clientes em suas novas rotas, é feita por uma inserção direta, em que o destino está adjacente a origem. Com o intuito de haver diversificação, é escolhido entre os dois clientes para fazer o deslocamento do destino, explorando a melhor solução obtida. Esta busca com o deslocamento do destino finaliza quando a janela do próximo cliente da rota ultrapassar o instante de saída do destino deslocado. Por fim, verifica-se se a solução obtida é factível quanto ao tempo de viagem dos usuários e ao tempo de viagem dos motoristas.

**Algoritmo 5:** Operador troca de usuários entre veículos

**Entrada:** *Espaco*  
**Saída:** *NovaSolucao*

- 1 *Cliente* = *Rand* (*P*)
- 2 *NovoCarro* = *Rand* ( $K \setminus \{CarroAtual\}$ )
- 3 **para**  $i \in Rota(k)$  **faça**
- 4     **se**  $e_{Rota(i)} - e_{cliente} \leq Espaco$  **então**
- 5          $PossivelTroca[j] = Rota[i]$
- 6          $j = j + 1$
- 7     **fim**
- 8 **fim**
- 9 **para**  $j \in PossivelTroca$  **faça**
- 10      $s \leftarrow RetirarDaRota(Cliente)$
- 11      $s \leftarrow RetirarDaRota(i)$
- 12      $s \leftarrow InserirNaRota(Cliente, NovoCarro)$
- 13      $s \leftarrow InserirNaRota(i, Carro)$
- 14      $NovoCusto \leftarrow Custo(s)$
- 15     **repita**
- 16          $qualCliente = Rand(Cliente, i)$
- 17          $s^* \leftarrow DeslocarDestino(qualCliente, s)$
- 18          $Custo \leftarrow Custo(s^*)$
- 19         **se**  $NovoCusto \leq Custo$  **então**
- 20              $NovaSolucao \leftarrow s^*$
- 21              $Novocusto = Custo$
- 22         **fim**
- 23         **se**  $l_{destino-i-1} \geq l_{origem}$  **então**
- 24              $JanelaPossivel = false$
- 25         **fim**
- 26     **até**  $JanelaPossivel = true$ ;
- 27 **fim**

*Exemplo.* O operador de troca de usuários entre veículos é representado na Figura 4.1. Os quadros em vermelho representam os clientes escolhidos para fazer a troca, enquanto o quadro azul representa a posição avaliada para fazer o deslocamento. Os pedidos de viagem são descritos pela Tabela 4.1.

<b>Carro 1</b>	<b>6</b>	<b>16</b>	7	1	11	17	4	14				
	[5;20] 12, 1	[15;25] 17, 0	[20;35] 22, 1	[25;35] 30, 2	[36;45] 36, 1	[40;55] 50, 0	[50;55] 53, 1	[60;65] 62, 0				
<b>Carro 2</b>	8	<b>3</b>	<b>13</b>	18	5	9	19	15	10	2	12	20
	[3;15] 5, 1	[10;20] 15, 2	[20;30] 25, 1	[27;32] 30, 0	[35;45] 40, 1	[42;50] 48, 2	[55;65] 56, 1	[60;70] 63, 0	[65;70] 68, 1	[70;75] 74, 2	[75;85] 80, 1	[80;95] 90, 0
<b>Carro 1</b>	<b>3</b>	<b>13</b>	<b>7</b>	1	11	17	4	14				
	[10;20] 10, 1	[20;30] 20, 0	[20;35] 23, 1	[25;35] 30, 2	[36;45] 36, 1	[40;55] 50, 0	[50;55] 53, 1	[60;65] 62, 0				
<b>Carro 2</b>	8	<b>6</b>	<b>16</b>	18	5	9	19	15	10	2	12	20
	[3;15] 5, 1	[5;20] 10, 2	[15;25] 15, 1	[27;32] 27, 0	[35;45] 40, 1	[42;50] 48, 2	[55;65] 56, 1	[60;70] 63, 0	[65;70] 68, 1	[70;75] 74, 2	[75;85] 80, 1	[80;95] 90, 0
<b>Carro 1</b>	<b>3</b>	7	<b>13</b>	1	11	17	4	14				
	[10;20] 10, 1	[20;30] 20, 0	[20;35] 23, 1	[25;35] 30, 2	[36;45] 36, 1	[40;55] 50, 0	[50;55] 53, 1	[60;65] 62, 0				
<b>Carro 2</b>	8	<b>6</b>	<b>16</b>	18	5	9	19	15	10	2	12	20
	[3;15] 5, 1	[5;20] 10, 2	[15;25] 15, 1	[27;32] 27, 0	[35;45] 40, 1	[42;50] 48, 2	[55;65] 56, 1	[60;70] 63, 0	[65;70] 68, 1	[70;75] 74, 2	[75;85] 80, 1	[80;95] 90, 0

Figura 4.1: Exemplo do Operador de Troca.

Fonte: Autoria própria.

O cliente (6, 16) foi escolhido para fazer a operação de troca, e a Figura 4.1 apresenta uma possível troca com o cliente (3, 13). Ambos os clientes possuem janelas parecidas, diferenciando-se em 10 segundos no total. Após efetuar a troca, ainda analisa-se o possível deslocamento do destino do cliente (3, 13). Assim, o único deslocamento possível é entre os pontos 13 e 7, gerando uma solução ainda factível e com melhor valor de função objetivo.

pedido	carga	embarque	desembarque
1	1	1	11
2	1	2	12
3	1	3	13
4	1	4	14
5	1	5	15
6	1	6	16
7	1	7	17
8	1	8	18
9	1	9	19
10	1	10	20

Tabela 4.1: Distribuição numérica do Exemplo de Troca.

#### 4.3.2 Operador de Deslocamento de origem/destino de um usuário

Primeiramente é feita a escolha do cliente a ser modificado, seguido pela escolha entre sua origem ou destino. Caso seja escolhida a origem, desloca-se a origem uma posição para frente e analisa-se não ultrapassa a janela de destino. É mantida a solução com melhor valor de função objetivo. Esta operação de deslocamento é realizada até que a janela do destino seja alcançada pela janela da origem. Ao final observa-se se é factível.

Da mesma forma, se for escolhido o destino, desloca-se o destino uma posição para trás, enquanto não ultrapasse a janela de origem. A cada deslocamento, se analisa seu valor de função objetivo e factibilidade.

**Algoritmo 6:** Operador Desloca origem/destino

**Entrada:**  $P$   
**Saída:**  $NovaSolucao$

- 1  $Cliente = Rand(P)$
- 2  $PontoMudanca = Rand(\{origem, destino\})$
- 3 **se**  $PontoMudanca = Origem$  **então**
- 4     **repita**
- 5          $s^* = Inserir(origem + i, origem + i + 1, destino)$
- 6          $Custo = CalcularCusto(s^*)$
- 7         **se**  $NovoCusto \leq Custo$  **então**
- 8              $NovaSolucao \leftarrow s^*$
- 9              $NovoCusto = Custo$
- 10         **fim**
- 11         **se**  $l_{origem+i+1} \geq l_{destino}$  **então**
- 12              $JanelaPossivel = false$
- 13         **fim**
- 14          $i = i + 1$
- 15     **até**  $JanelaPossivel = True;$
- 16 **fim**
- 17 **se**  $PontoMudanca = Destino$  **então**
- 18     **repita**
- 19          $s^* = Inserir(destino - i, destino - i - 1, origem)$
- 20          $Custo = CalcularCusto(s^*)$
- 21         **se**  $NovoCusto \leq Custo$  **então**
- 22              $NovaSolucao \leftarrow s^*$
- 23              $NovoCusto = Custo$
- 24         **fim**
- 25         **se**  $l_{destino-i-1} \leq l_{origem}$  **então**
- 26              $JanelaPossivel = false$
- 27         **fim**
- 28          $i = i + 1$
- 29     **até**  $JanelaPossivel = True;$
- 30 **fim**

*Exemplo.* Na Figura 4.2 é representado a operação de deslocamento sobre uma solução factível. Note-se que os quadros em vermelho representam a origem e destino do cliente escolhido para o deslocamento, enquanto o quadro azul representa a posição avaliada para efetuar o deslocamento. Os pedidos de viagem são descritos pela Tabela 4.2.

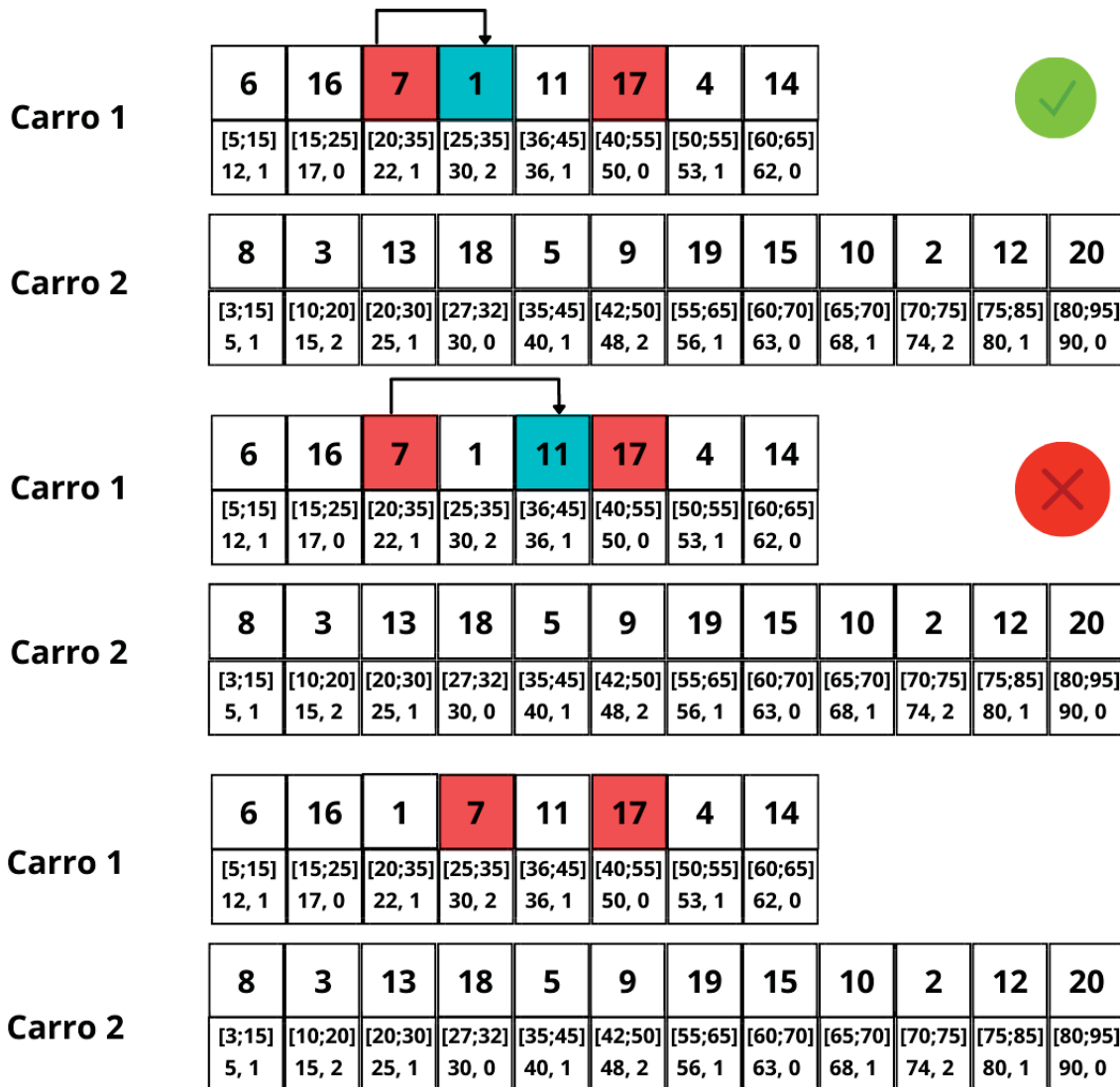


Figura 4.2: Exemplo do Operador de Deslocamento.

Fonte: Autoria própria.

Além do cliente (7, 17) escolhido para o deslocamento, também escolhe-se a origem, dentre a origem e o destino, para efetuar a busca. Assim, na primeira tentativa, analisa-se a direta troca de posições entre os pontos 7 e 1. No caso, é uma troca que traz melhora na função objetivo e é possível, sem alterar a factibilidade quanto a janela de tempo, tempos máximos, capacidade e estrutura dos clientes. A busca segue para uma segunda opção, analisando o deslocamento do ponto 7 para a posição do ponto 11, assim também deslocando os pontos 1 e 11 uma posição a

menos na rota. Esta segunda opção analisada não é factível, pois a janela de tempo do ponto 7 não estaria numa ordem que permitisse o atendimento.

pedido	carga	embarque	desembarque
1	1	1	11
2	1	2	12
3	1	3	13
4	1	4	14
5	1	5	15
6	1	6	16
7	1	7	17
8	1	8	18
9	1	9	19
10	1	10	20

Tabela 4.2: Distribuição numérica do Exemplo de Deslocamento.

## 5 EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo serão apresentados os resultados dos experimentos computacionais envolvendo os modelos propostos neste trabalho.

### 5.1 TIPOS DE INSTÂNCIAS

Os testes foram executados utilizando um computador com AMD Ryzen 5 3500U, 2.1GHz e 8Gb de RAM. A implementação utilizou a linguagem C# e o software Gurobi versão 9.0.2.

Todos os conjuntos de instâncias foram adaptados do trabalho de (Cordeau, 2006). As coordenadas dos pedidos foram geradas randomicamente dentro do quadrado  $[-10, 10] \times [-10, 10]$ . Além disso, tem-se que  $c_{ij} = t_{ij} = d_{ij}$ , sendo  $d$  a distância euclidiana para o arco  $(i, j) \in A$ . Para cada problema proposto, foram criados dois conjuntos de instâncias chamados de A e B. Os conjuntos de instâncias com cargas dos pedidos unitárias é chamado de A, enquanto se houver variações nas cargas dos pedidos é chamado de B.

Conforme a Tabela 5.1, todos os conjuntos de instâncias possuem um número de veículos da frota  $K = \{2, 3, 4, 5\}$ , um número de pedidos de viagens  $n = \{8, 12, 16, 18, 20, 22, 24, 30, 34, 38, 40, 42, 48, 50, 55\}$ , uma duração total da rota  $T = 600$  e um tempo máximo de viagem  $L = 60$  para os usuários. Todos os veículos têm capacidade de carregamento de  $Q_k = 6$ , além da carga por pedido de viagem para  $i \in \{P, F\}$  sendo  $q_i \in \{1, 2, 3\}$  para o conjunto de instâncias B e  $q_i \in \{1\}$  para o conjunto de instâncias A.

Instâncias	K	n	T	Q	L
$a2_{08}$ e $b2_{08}$	2	08	600	6	30
$a2_{12}$ e $b2_{12}$	2	12	600	6	30
$a2_{16}$ e $b2_{16}$	2	16	600	6	30
$a3_{18}$ e $b3_{18}$	3	18	600	6	30
$a2_{20}$ e $b2_{20}$	2	20	600	6	30
$a3_{22}$ e $b3_{22}$	3	22	600	6	30
$a3_{24}$ e $b3_{24}$	3	24	600	6	30
$a3_{30}$ e $b3_{30}$	3	30	600	6	30
$a3_{34}$ e $b3_{34}$	3	34	600	6	30
$a4_{38}$ e $b4_{38}$	4	38	600	6	30
$a4_{40}$ e $b4_{40}$	4	40	600	6	30
$a4_{42}$ e $b4_{42}$	4	42	600	6	30
$a4_{48}$ e $b4_{48}$	4	48	600	6	30
$a5_{50}$ e $b5_{50}$	5	50	600	6	30
$a5_{55}$ e $b5_{55}$	5	55	600	6	30

Tabela 5.1: Parâmetros gerais dos conjuntos de instâncias A e B.

Nos problemas SARP-DIS e SARP-PIS não há variação do tipo de clientes, enquanto que no problema SARP-DIM metade dos motoristas possuem depósitos intermediários e no problema SARP-PIM metade dos pedidos possuem pontos intermediários. Caso o número de clientes seja ímpar (instâncias  $a5_{55}$  e  $b5_{55}$ ), os valores são arredondados para baixo, favorecendo a estrutura tradicional.

Os conjuntos de parâmetros para as funções objetivo adotados são  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 0,5$ ,  $\lambda_4 = 5$  e  $\lambda_5 = 2$ .

## 5.2 RESULTADOS

A estratégia da matheurística Fix & Optimize, para percorrer as vizinhanças, considerou a fixação gradual e decrescente dos veículos, permitindo que inicialmente sejam explorados os subproblemas menos livres. Cada subproblema do Fix & Optimize foi limitado pelo tempo de 5 minutos. Para os problemas resolvidos com o auxílio do software Gurobi, foram limitados pelo tempo de 3 horas, incluindo com e sem a solução inicial.

Para a combinação da matheurística Fix & Optimize e metaheurística ALNS, o tempo limite para a busca exata (F&O) foi de 1 minuto e para resolução heurística (ALNS) também de 1 minuto. Tais tempos limites, para todas as estratégias empregadas, foram estabelecidos por testes prévios.

Na Tabela 5.2 observa-se que a heurística de solução inicial proposta retornou soluções factíveis para todas as instâncias propostas e em intervalos de tempos praticáveis para aplicações reais, embora não tenha alcançado solução ótima em nenhuma das instâncias. A heurística F&O aplicada a partir dos resultados da solução inicial, chegou ao ótimo em 6 das 30 instâncias, sendo que determinou solução factível para 5 instâncias de médio porte em que a resolução exata não conseguiu no tempo limite estipulado. Ainda para 5 instâncias obteve solução factível superior e em menor tempo do que na resolução pelo software Gurobi. Ressalta-se que para o conjunto B-DIM houve um maior média do tempo de resolução (1541s), se comparado com o conjunto A-DIM (1298s).

Já para a resolução exata do Gurobi com o auxílio da heurística de solução inicial, observou-se que foram provados mais 4 ótimos se comparado com a resolução exata do Gurobi sem a solução inicial. A combinação das heurísticas F&O e ALNS comparada com a F&O chegou em mais 5 ótimos no conjunto de instâncias A-DIM e em mais 4 ótimos no conjunto de instâncias B-DIM. Além disso, conseguiu as melhores soluções encontradas para 12 instâncias. Observa-se que para as instâncias  $a3_{34}$  e  $b3_{34}$  a melhor solução factível encontrada foi pelo uso do Gurobi conjuntamente com a solução inicial.

Instâncias	Gurobi		Gurobi + SI		Sol. Inicial (SI)		F&O		F&O + ALNS	
	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)
<i>a2_08</i>	128	15	128	8	253	2	128*	55	128*	22
<i>a2_12</i>	209	74	209	41	468	2	252	47	209*	38
<i>a2_16</i>	363	249	363	162	691	3	363*	120	363*	95
<i>a3_18</i>	417	107	417	73	830	3	557	308	417*	80
<i>a2_20</i>	430	301	430	220	719	4	486	296	430*	201
<i>a3_22</i>	685	835	685	579	1066	5	719	553	685*	337
<i>a3_24</i>	746	1048	764	531	857	4	746*	482	764*	359
<i>a3_30</i>	891	3932	891	2583	1432	5	1035	795	891*	516
<i>a3_34</i>	1572	4360	1572	2502	2284	6	1670	1861	1742	1072
<i>a4_38</i>	1640	5400	1528	2841	1947	5	1528*	1164	1628	1374
<i>a4_40</i>	1308	5400	1288	3076	2061	6	1453	1950	<b>1255</b>	1591
<i>a4_42</i>	1746	5400	1692	3725	3173	6	2036	2592	<b>1461</b>	1983
<i>a4_48</i>	-	5400	4630	5400	5520	6	4029	2673	<b>3997</b>	2167
<i>a5_50</i>	3799	5400	3819	5400	5119	5	3661	3165	<b>3428</b>	2641
<i>a5_55</i>	-	5400	5926	5400	6212	6	5309	3419	<b>4690</b>	2927
<i>b2_08</i>	359	24	359	21	718	3	359*	64	359*	27
<i>b2_12</i>	441	59	441	38	600	2	441*	91	441*	34
<i>b2_16</i>	682	407	682	355	1194	4	837	223	628*	273
<i>b3_18</i>	807	712	807	240	973	3	807*	579	807*	339
<i>b2_20</i>	1013	1528	1013	1291	1952	3	1394	485	1013*	462
<i>b3_22</i>	1474	3065	1474	2680	2588	4	1728	737	1474*	551
<i>b3_24</i>	2186	3741	2186	2953	2961	5	2365	1008	2186*	1125
<i>b3_30</i>	2495	5400	2265	3716	3405	6	2106	1252	<b>2095</b>	1308
<i>b3_34</i>	3068	5400	2820	5400	3638	6	3328	1923	2944	1753
<i>b4_38</i>	3491	5400	3816	5400	4247	6	3753	1714	<b>3273</b>	1546
<i>b4_40</i>	3109	5400	2940	5400	3890	7	3005	2516	<b>2815</b>	2019
<i>b4_42</i>	3625	5400	3452	5400	4266	6	3342	2850	<b>3237</b>	2470
<i>b4_48</i>	-	5400	4637	5400	4898	6	4163	3008	<b>4119</b>	2605
<i>b5_50</i>	-	5400	5326	5400	6007	7	4975	3417	<b>4628</b>	2992
<i>b5_55</i>	-	5400	6024	5400	6315	7	5246	3255	<b>5033</b>	3305

Tabela 5.2: Resultados numéricos para os conjuntos A e B do problema SARP-DIM.

Para o problema SARP-DIS, a Tabela 5.3 traz os resultados das implementações. Assim como para o SARP-DIM, a solução inicial determinou soluções factíveis para todas as instâncias propostas e em intervalos de tempo de no máximo 7 segundos. A heurística F&O conseguiu chegar na otimalidade em 5 instâncias das 30 propostas e propor em mais outras 6 instâncias uma solução factível que a resolução exata não cumpriu. A combinação das heurísticas F&O e ALNS chegou na otimalidade 18 instancias das 30 propostas, sendo 13 a mais que se comparada apenas com a F&O. A resolução do software Gurobi com a solução inicial provou a otimalidade de mais 2 instâncias. Para as instâncias  $a3_{34}$  e  $b3_{22}$  a melhor solução factível encontrada foi pelo uso do Gurobi conjuntamente com a solução inicial.

Instâncias	Gurobi		Gurobi+SI		Sol. Inicial(SI)		F&O		F&O + ALNS	
	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)
$a2_{08}$	201	9	201	10	384	1	230	49	201*	33
$a2_{12}$	285	115	285	68	563	2	285*	184	285*	49
$a2_{16}$	360	272	360	147	428	3	375	323	360*	110
$a3_{18}$	394	326	394	263	517	3	444	368	394*	274
$a2_{20}$	477	518	477	485	880	2	477*	472	477*	336
$a3_{22}$	829	954	829	659	1556	4	1027	643	829*	518
$a3_{24}$	931	1280	931	880	1273	4	1086	709	931*	592
$a3_{30}$	1618	2729	1618	1602	2210	5	1792	915	1618*	764
$a3_{34}$	1923	3124	1923	2248	2741	6	2150	1007	1972	859
$a4_{38}$	2619	4721	2619	3976	3539	7	2619*	1760	2619*	1050
$a4_{40}$	3042	5400	2938	4461	4152	6	3403	2586	2938*	1318
$a4_{42}$	-	5400	4032	5400	4875	7	3976	2725	<b>3561</b>	1675
$a4_{48}$	-	5400	4837	5400	5134	6	4629	3120	<b>4390</b>	1596
$a5_{50}$	-	5400	5194	5400	5686	7	4964	3259	<b>4458</b>	1883
$a5_{55}$	-	5400	5687	5400	6013	7	5315	3436	<b>5170</b>	2074
$b2_{08}$	392	427	392	240	746	3	415	60	392*	45
$b2_{12}$	507	683	507	309	729	3	507*	201	507*	137
$b2_{16}$	748	915	748	577	1063	4	889	409	748*	220
$b3_{18}$	910	1792	910	824	1485	4	1064	582	910*	309
$b2_{20}$	1264	2450	1264	1659	1955	4	1264*	735	1264*	438
$b3_{22}$	1623	3096	1623	2243	2418	5	1953	840	1755	815
$b3_{24}$	2215	4638	2215	3910	2931	6	2356	1163	2215*	982
$b3_{30}$	2649	5371	2649	4761	3270	5	2941	1578	2649*	1370
$b3_{34}$	2971	5400	2887	5038	3964	6	3438	1614	2887*	1426
$b4_{38}$	-	5400	4603	5400	4827	7	4072	2057	<b>3961</b>	1608
$b4_{40}$	-	5400	4429	5400	4642	7	4159	2699	<b>4063</b>	1921
$b4_{42}$	3986	5400	4635	5400	5056	6	4467	2926	<b>3284</b>	2147
$b4_{48}$	-	5400	5060	5400	5449	7	5015	3271	<b>4870</b>	2384
$b5_{50}$	-	5400	5521	5400	5726	7	5322	3482	<b>5039</b>	2522
$b5_{55}$	-	5400	6306	5400	6634	7	5984	3950	<b>5345</b>	2649

Tabela 5.3: Resultados numéricos para os conjuntos A e B do problema SARP-DIS.

Já para o problema SARP-PIM (Tabela 5.4) nota-se que o software Gurobi provou otimalidade para 3 instâncias das 30 propostas, enquanto as heurísticas aplicadas obtiveram soluções factíveis para todo o conjunto de instâncias. A matheurística F&O não alcançou solução ótima em qualquer das instâncias e obteve tempos de pelo menos 1000 segundos, para as menores instâncias. Destaca-se a heurística de solução inicial, que desempenhou em até 16 segundos para as maiores instâncias. A heurística combinada da F&O e ALNS conseguiu chegar na otimalidade em 5 instâncias, das 30 propostas, além de obter as melhores soluções factíveis para outras 25 instâncias. Percebe-se que o problema SARP com pontos intermediários adiciona um maior grau de dificuldade para resolução, uma vez que os pontos intermediários incrementam um maior número de pontos no grafo.

Instâncias	Gurobi		Gurobi+SI		Sol. Inicial(SI)		F&O		F&O + ALNS	
	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)
<i>b2_08</i>	2840	3911	2840	3305	3527	6	3152	1184	2840*	1587
<i>b2_12</i>	3513	5400	3439	4356	5931	7	4696	2269	3439*	1826
<i>b2_16</i>	-	5400	4815	4825	6604	7	5708	2970	4815*	2045
<i>b3_18</i>	-	5400	6391	5400	6992	9	6203	3516	<b>5704</b>	2320
<i>b2_20</i>	-	5400	7388	5400	7516	8	6984	3902	<b>6648</b>	2571
<i>b3_22</i>	-	5400	7754	5400	8138	10	7350	4358	<b>7139</b>	2963
<i>b3_24</i>	-	5400	8916	5400	9056	10	8615	4993	<b>8605</b>	3015
<i>b3_30</i>	-	5400	9352	5400	9823	11	9342	5681	<b>9163</b>	3324
<i>b3_34</i>	-	5400	10907	5400	11594	13	10380	6347	<b>9640</b>	3719
<i>b4_38</i>	-	5400	11539	5400	12027	12	11101	6709	<b>10997</b>	3926
<i>b4_40</i>	-	5400	14804	5400	15950	14	13675	6864	<b>13462</b>	4480
<i>b4_42</i>	-	5400	19266	5400	20811	15	18253	5016	<b>17854</b>	4659
<i>b4_48</i>	-	5400	19001	5400	19739	13	18467	6805	<b>17611</b>	5070
<i>b5_50</i>	-	5400	24934	5400	25582	15	23030	10452	<b>22978</b>	6947
<i>b5_55</i>	-	5400	26120	5400	27610	16	24079	11803	<b>23942</b>	7328
<i>a2_08</i>	2639	3750	2639	3211	3824	6	3301	1250	2639*	1057
<i>a2_12</i>	3247	5349	3247	4873	4661	7	3816	2082	3247*	1344
<i>a2_16</i>	4015	5400	3908	4710	5739	8	5247	2794	5061	1760
<i>a3_18</i>	-	5400	5943	5400	6920	9	5852	3617	<b>5628</b>	1934
<i>a2_20</i>	-	5400	6627	5400	7158	9	6439	4015	<b>6075</b>	2029
<i>a3_22</i>	-	5400	6840	5400	7462	11	6291	4468	<b>6012</b>	2366
<i>a3_24</i>	-	5400	7512	5400	8311	10	6703	5103	<b>6540</b>	2875
<i>a3_30</i>	-	5400	8941	5400	9045	10	8841	5729	<b>8397</b>	2997
<i>a3_34</i>	-	5400	9357	5400	9983	12	9126	6302	<b>9010</b>	3103
<i>a4_38</i>	-	5400	10412	5400	10704	13	10279	7001	<b>10128</b>	3562
<i>a4_40</i>	-	5400	13059	5400	13572	13	12523	6926	<b>12240</b>	3790
<i>a4_42</i>	-	5400	15054	5400	16481	15	14855	6605	<b>14463</b>	3744
<i>a4_48</i>	-	5400	17675	5400	18097	14	17601	6742	<b>17239</b>	4026
<i>a5_50</i>	-	5400	21069	5400	21605	14	20937	9750	<b>20186</b>	4285
<i>a5_55</i>	-	5400	24008	5400	24886	14	23716	11948	<b>23405</b>	4616

Tabela 5.4: Resultados numéricos para os conjuntos A e B do problema SARP-PIM.

Assim como no seu problema similar SARP-PIM, o SARP-PIS (Tabela 5.5) também apresentou maior dificuldade para os métodos determinarem soluções, mesmo que factíveis. Neste âmbito, a solução inicial trouxe soluções factíveis em tempos de resolução abaixo de 16 segundos. A aplicação da heurística F&O ainda alcançou solução ótima para 1 instância do grupo, que destaca-se por ser baseada na solução inicial mais próxima do ótimo provado. Entretanto, as instâncias com 4 veículos chegaram no limite de tempo para o F&O, em torno de 6600 segundos, tendo ultrapassado este tempo para instâncias de 5 veículos e que possuem maior número de combinações para vizinhança. Já para heurística combinada da F&O e ALNS chegou-se na otimalidade de 5 instâncias, e obtendo as melhores soluções factíveis para outras 24 instâncias.

Instâncias	Gurobi		Gurobi+SI		Sol. Inicial (SI)		F&O		F&O + ALNS	
	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)	FO	(s)
<i>b2_08</i>	2601	3847	2601	3006	3412	6	2995	1215	2601*	994
<i>b2_12</i>	3365	4428	3365	3579	3736	6	3365*	2360	3365*	1075
<i>b2_16</i>	-	5400	4527	4818	6584	7	5271	3017	4527*	1552
<i>b3_18</i>	-	5400	6319	5400	6870	7	5926	3428	<b>5831</b>	2358
<i>b2_20</i>	-	5400	7031	5400	7241	8	<b>6640</b>	4001	6742	2890
<i>b3_22</i>	-	5400	7352	5400	7965	9	7013	4539	<b>6483</b>	3282
<i>b3_24</i>	-	5400	8493	5400	8663	8	8254	4772	<b>8069</b>	3359
<i>b3_30</i>	-	5400	9136	5400	9357	10	8987	5593	<b>8547</b>	3970
<i>b3_34</i>	-	5400	9952	5400	10409	12	9419	4840	<b>9375</b>	4058
<i>b4_38</i>	-	5400	10960	5400	11726	11	10882	6815	<b>10052</b>	4161
<i>b4_40</i>	-	5400	13107	5400	13840	13	12746	6629	<b>12329</b>	4472
<i>b4_42</i>	-	5400	18524	5400	18681	15	17959	6718	<b>17581</b>	5037
<i>b4_48</i>	-	5400	19605	5400	20107	14	19804	6755	<b>19172</b>	5341
<i>b5_50</i>	-	5400	22746	5400	23194	15	20829	8264	<b>20640</b>	5775
<i>b5_55</i>	-	5400	24903	5400	25728	16	21905	11565	<b>21880</b>	6094
<i>a2_08</i>	2547	3640	2547	3370	3326	6	2790	1351	2574*	1208
<i>a2_12</i>	-	5400	2809	4051	4958	6	3714	2276	2809*	1340
<i>a2_16</i>	-	5400	4115	5400	4401	6	3688	2953	<b>3275</b>	1958
<i>a3_18</i>	-	5400	4861	5400	5132	7	4677	3828	<b>4218</b>	2264
<i>a2_20</i>	-	5400	5536	5400	5974	9	5238	4389	<b>5024</b>	2830
<i>a3_22</i>	-	5400	6310	5400	6743	10	6542	4760	<b>6132</b>	3076
<i>a3_24</i>	-	5400	6994	5400	7229	9	6801	5416	<b>6426</b>	3625
<i>a3_30</i>	-	5400	7737	5400	8057	10	7453	5932	<b>7320</b>	4061
<i>a3_34</i>	-	5400	8459	5400	8910	11	8139	7704	<b>7985</b>	4213
<i>a4_38</i>	-	5400	9152	5400	9534	13	9266	6651	<b>9031</b>	4858
<i>a4_40</i>	-	5400	10053	5400	10105	12	9794	6743	<b>9548</b>	5069
<i>a4_42</i>	-	5400	10974	5400	11278	14	10420	6885	<b>9962</b>	5671
<i>a4_48</i>	-	5400	15058	5400	15493	14	14798	6704	<b>14255</b>	5915
<i>a5_50</i>	-	5400	17241	5400	18084	15	15057	11259	<b>14871</b>	6704
<i>a5_55</i>	-	5400	20856	5400	21135	15	19216	10724	<b>19057</b>	8402

Tabela 5.5: Resultados numéricos para os conjuntos A e B do problema SARP-PIS.

Também foi calculada a taxa de ocupação média dos veículos, que conforme a Tabela 5.6, observa-se que as versões SARP-DIS e SARP-PIS possuem maior taxa de ocupação que as versões SARP-DIS e SARP-DIM. Além do mais, o tempo médio de viagem compartilhada foi próximo entre as versões, não ultrapassando de 475 segundos, visto que o tempo total em viagem para o passageiro é estipulado em 1800 segundos (30 minutos). O desconto por exceder o tempo limite dos passageiros teve maior média para o SARP-PIS, o que pode ser associado a seu maior número de variáveis se comparado aos outros problemas. Por fim, em todas as versões o desconto por tempo limite de motoristas foi de pequeno impacto na função objetivo.

	SARP			
	DIS	DIM	PIS	PIM
Taxa de ocupação dos veículos (%)	62	40	67	65
Tempo médio de viagem compartilhada (s)	430	381	475	405
Desconto por tempo limite do passageiro (s)	110	89	352	226
Desconto por tempo limite do motoristas (s)	13	0	5	1

Tabela 5.6: Comparação entre as instâncias

Por fim, observa-se que para cenários em tempo real, a resolução por meio da heurística construtiva de solução inicial se torna uma opção viável, uma vez que obteve soluções factíveis em até 20 segundos para as instâncias testadas. Entretanto, a matheurística F&O e a metaheurística F&O+ALNS determinam as melhores soluções factíveis para instâncias de médio porte se comparadas com as resoluções exatas. Assim, se tornando uma opção para a busca de soluções com melhores valores de função objetivo, mesmo que não praticável em tempo real.

## 6 CONCLUSÃO

Nesse trabalho foram apresentadas variações do problema Share-a-Ride, com o propósito de adicionar o conceito de paradas intermediárias. No Capítulo 3 fez-se as propostas das versões SARP-DIM e SARP-DIS, que abrangem o conceito de depósitos intermediários, a qual é introduzida paradas planejadas para os motoristas. Outras duas variações, chamadas de SARP-PIM e SARP-PIS, incluem a noção de pontos intermediários, que adicionam uma parada planejada intermediária para viagem dos clientes.

No Capítulo 4, são descritas as heurísticas propostas para a resolução do problema. Uma heurística construtiva de solução inicial com foco na rápida resposta foi elaborada, de modo que se adapta para as quatro variações. Introduce-se o uso da matheurística Fix & Optimize que se baseia na quebra do problema em subproblemas, uma vez que o SARP é *NP – Hard* e possui dificuldade de resolução de instâncias de médio e grande porte. Também é proposta uma segunda heurística, combinando a matheurística Fix& Optimize e a metaheurística Adaptive Large Neighborhood Search (ALNS), com o intuito de melhorar a busca das vizinhanças e em menor tempo.

Logo, no Capítulo 5, são apresentadas as instâncias geradas para os problemas, sendo baseadas na estrutura das instâncias do trabalho de (Cordeau, 2006). Os dois principais conjuntos se diferenciam pela variação da quantidade de carga dos clientes. Portanto, são aplicadas as heurísticas de solução inicial isoladamente e em conjunto com a heurística Fix & Optimize e com a heurística conjunta da Fix & Optimize e ALNS. Além da resolução exata com o uso do software Gurobi, com e sem solução inicial.

Os resultados das heurísticas de solução inicial, Fix & Optimize e Fix & Optimize conjunta com ALNS apresentaram soluções factíveis para todas as instâncias testadas, sendo que a resolução exata não alcançou soluções para instâncias de médio porte. Ainda, em torno de 35% das instâncias chegou-se ao ótimo comprovado, embora ainda em tempos muito superiores do que os obtidos pelas soluções iniciais. Destaca-se que a heurística de solução inicial obteve soluções factíveis em até 16 segundos, um tempo ainda praticável para aplicações em tempo real.

Destaca-se ainda que é possível haver aplicações para viagens de longa distância e em ambientes com maior tempo de planejamento, por exemplo adotando entregas entre filiais de empresas. Em ambos ambientes, de curta e longa distância, observa-se que há o aumento da taxa de ocupação dos veículos, tendo impacto direto na diminuição de emissões de gases poluentes e de melhor aproveitamento da frota em uso.

Como trabalhos futuros seria possível a formulação da composição de ambos os conceitos, paradas intermediárias e depósitos intermediários para o SARP. Além de buscar a aplicação em instâncias de grande porte, com o possível auxílio de heurísticas aprimoradas em tempo e melhores soluções para o problema.

## REFERÊNCIAS

- Beirigo, B. A., Schulte, F. e Negenborn, R. R. (2018). Integrating people and freight transportation using shared autonomous vehicles with compartments. IFAC PapersOnline, 51:392–397.
- Bongiovanni, C., Kaspi, M. e Geroliminis, N. (2019). The electric autonomous dial-a-ride problem. Transportation Research Part B, 122(C):436–456.
- Cai, H., Wang, X., Adriaens, P. e Xu, M. (2019). Environmental benefits of taxi ride sharing in beijing. Energy, 174:503–508.
- Chen, W., Mes, M. e Schutten, M. (2018). Multi-hop driver-parcel matching problem with time windows. Flexible Services and Manufacturing Journal, 30:517–553.
- Cordeau, J.-F. (2006). A branch-and-cut algorithm for the dial-a-ride problem. Operations Research, 54:573–586.
- Dahle, L., Andersson, H., Christiansen, M. e Speranza, M. G. (2019). The pickup and delivery problem with time windows and occasional drivers. Computers and Operations Research, 109:122–133.
- Do, P.-T., Nghiem, N.-V.-D., Nguyen, N. e Pham, Q.-D. (2018). A time-dependent model with speed windows for share-a-ride problems: A case study for tokyo transportation. Data & Knowledge Engineering, 114:67–85.
- Do, P.-T., Nghiem, N.-V.-D., Nguyen, N.-Q. e Nguyen, D.-N. (2016). A practical dynamic share-a-ride problem with speed windows for tokyo city. Eighth International Conference on Knowledge and Systems Engineering (KSE), 8:55–60.
- Fatnassi, E., Chaouachi, J. e Klibi, W. (2015). Planning and operating a shared goods and passengers on-demand rapid transit system for sustainable city-logistics. Transportation Research Part B, 81(4):440–460.
- Ghilas, V., Demir, E. e Woensel, T. V. (2016). The pickup and delivery problem with time windows and scheduled lines. Information Systems and Operational Research, 54(2):1–21.
- Ho, S. C., Szeto, W. Y., Yong-Hong Kuo, Y.-H., Leung, J. M. Y., Petering, M. e Tou, T. W. H. (2018). A survey of dial-a-ride problems: Literature review and recent developments. Transportation Research Part B, 111:395–421.
- Hosny, M. I. (2016). Three effective metaheuristics to solve the multi-depot multi-trip heterogeneous dial-a-ride problem. Transportation Research Part E, 96:60–80.

- Le, V. T., Stathopoulos, A., Woensel, T. V. e Ukkusuri, V. S. (2019). Supply, demand, operations, and management of crowd-shipping services: A review and empirical evidence. Transportation Research Part C, 103:83–103.
- Li, B., Krushinsky, D., Reijers, H. A. e Woensel, T. V. (2014). The share-a-ride problem: People and parcels sharing taxis. European Journal of Operational Research, 238:31–40.
- Li, B., Krushinsky, D., Woensel, T. V. e Reijers, H. A. (2016a). An adaptive large neighborhood search heuristic for the share-a-ride problem. Computers and Operations Research, 66:170–180.
- Li, B., Krushinsky, D., Woensel, T. V. e Reijers, H. A. (2016b). The share-a-ride problem with stochastic travel times and stochastic delivery locations. Transportation Research Part C, 67:95–108.
- Mourad, A., Puchinger, J. e Chu, C. (2019). A survey of models and algorithms for optimizing shared mobility. Transportation Research Part B, 123:323–346.
- Nash, C. (1982). Economics of public transport. Longman Group UK Limited.
- Nguyen, N.-Q., Nghiem, N.-V.-D., Do, P.-T., Le, K.-T., Nguyen, M.-S. e Mukai, N. (2015). People and parcels sharing a taxi for tokyo city. Sixth International Symposium on Information and Communication Technology, 6:90–97.
- Parragh, S. N., de Souza, J. P. e Almada-Lobo, B. (2014). The dial-a-ride problem with split requests and profits. Transportation science, 17:1–46.
- Pimentel, C. e Alvelos, F. P. (2015). Integrated urban freight logistics combining passenger and freight flows – mathematical model proposal. Transportation Research Procedia, 30:80–89.
- Psaraftis, H. N. (1983). An exact algorithm for the single vehicle many-to-many dial-a-ride problem with time windows. Transportation science, 17(3):351–357.
- Santos, D. O. e Xavier, E. C. (2015). Taxi and ride sharing: A dynamic dial-a-ride problem with money as an incentive. Expert Systems with Applications, 42:6728–6737.
- Son, N. V., Babaki, B., Dries, A., Dung, P. Q. e Hoai, N. X. (2017). Prediction-based optimization for online people and parcels share a ride taxis. 9th International Conference on Knowledge and Systems Engineering(KSE), páginas 42–47.
- Stein, D. M. (1978). Scheduling dial-a-ride transportation systems. Transp. Sci, 12(3):232–249.
- Wilson, N., Sussman, J., Wong, H. e Higonnet, T. (1971). Scheduling algorithms for a dial-a-ride system. Technical Report.

Yu, v. F., Purwanti, S. S., Redi, A. A. N. P., Lu, C.-C., Suprayogi, S. e Jewpanyaa, P. (2018). Simulated annealing heuristic for the general share-a-ride problem. Engineering Optimization, 50:1178–1197.