

ANGELA MARIA DOS SANTOS

CAOS ESPAÇO - TEMPORAL EM SISTEMAS DINÂMICOS ACOPLADOS

Tese apresentada ao Curso de Pós - Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Curitiba

2006

“Talvez não tenhamos conseguido fazer o melhor, mas lutamos para que o melhor fosse feito...Não somos o que iremos ser, mas graças a Deus, não somos o que éramos...”

(Martin Luther King)

RESUMO

Neste trabalho considera-se vários aspectos dinâmicos de sistemas não-lineares. São abordados três sistemas acoplados diferentes. Duas redes de mapas acoplados e um sistema de dois osciladores de Liénard acoplados, todos os três sistemas são estudados com o objetivo de reconhecer as suas dinâmicas, determinando novas relações entre eles que ainda não têm sido estudadas na literatura.

A primeira rede de mapas estudada tem algumas características de uma rede de pequeno mundo, sendo que a rede é analisada através de suas ligações de primeiros e segundos vizinhos e também de ligações aleatórias que são introduzidas na rede. Aqui determina-se estados sincronizados, a entropia do sistema e os resultados obtidos são comparados com os de outra rede com acoplamento do tipo lei de potência, que já foi analisada analiticamente.

A outra rede estudada possui acoplamento do tipo lei de potência e é também acoplada a sítios estocásticos, verificando o que ocorre no sistema na presença destes sítios. Nesta rede procura-se um valor mínimo de mapas que represente bem o limite termodinâmico e também estuda-se outros aspectos como sincronização e intermitência.

O sistema de dois osciladores acoplados é estudado através de diferentes formas de acoplamento e com diferentes valores de parâmetros. Neste sistema analisa-se o comportamento dos expoentes de Lyapunov, o que ocorre ao sistema na presença de uma perturbação aleatória e também estuda-se alguns estados sincronizados no sistema.

ABSTRACT

In this work some dynamics aspects about nonlinear systems are considered. Three different coupled systems are studied. Two coupled map lattices and one system with two Liénard oscillators.

The first coupled map lattice studied has some characteristics of a small world model. This lattice is analyzed by its couplings with first and second neighbors and with random couplings which are introduced in the lattice. Here also synchronization and entropy are studied. The lattice is compared with another lattice studied analitically.

The second lattice studied here has power-law coupling and it is also coupled to stochastic sites. In this lattce a minimum value os sites is verified to represent the thermodynamic limit. Besides, synchronization and intermittency are studied.

The coupled oscillators are studied through different couplings and for different parameters values. The behavior of Lyapunov exponents, the presence of noise and synchronization states are analyzed in this system too.

AGRADECIMENTOS

- Ao professor Dr. Ricardo Luiz Viana, pela orientação.
- Ao grande amigo e colaborador Dr. Sandro Ely de Souza Pinto, pela enorme ajuda e pelas longas e produtivas conversas.
- Ao professor Dr. Diógenes Borges Vasconcelos pela ajuda computacional e pela enorme paciência.
- Ao amigo, professor e colaborador Dr. Sergio Roberto Lopes, pelo apoio de sempre, pelas conversas, pelos esclarecimentos, pela paciência e principalmente por acreditar no que eu muitas vezes não acreditei.
- Ao professor Dr. Carlos de Carvalho pelo suporte computacional.
- Aos meus pais, pela confiança, pelo apoio nos momentos de fraqueza, e claro, pela ajuda incondicional.
- Aos meus irmãos (Mana, Có, Nane), sobrinhas (Mai, Jê, Dadá) e amigos (em especial Ciça, Cathi, Angela e Mença-minha madrinha e cunhada), que sempre estiveram presentes dando apoio, acreditando e torcendo, sendo minha “válvula de escape” em muitos momentos.
- Aos colegas do grupo, em especial, Dr. José Carlos Pereira Coninck e meu grande amigo Cristiano, por todo auxílio na parte de programação e por todas as conversas esclarecedoras ou mesmo fora de contexto.
- À CAPES pelo apoio financeiro.
- Aos companheiros da pós - graduação pelas conversas e importantes momentos de descontração.
- E por último, mas não menos importante, a Deus, pela vida, pela força, por estar ao meu lado nesta minha caminhada e por não ter me deixado desistir em muitos momentos.

Conteúdo

Agradecimentos	iv
1 Introdução	1
2 Conceitos fundamentais	6
2.1 Mapas e Fluxos	6
2.1.1 Fluxos	6
2.1.2 Rede de mapas	7
2.2 Formas de acoplamento	8
2.2.1 O acoplamento do tipo lei de potência	9
2.3 Algumas definições básicas	10
2.3.1 Variedades (“manifolds”)	10
2.3.2 Sincronização	11
2.3.3 Distância à variedade de sincronização e parâmetro de ordem	15
2.3.4 Expoentes de Lyapunov e expoentes de Lyapunov a tempo finito	19
2.3.5 Entropia de Kolmogorov-Sinai (KS)	20
2.3.6 Sistemas hiperbólicos e não-hiperbólicos	21
2.3.7 Pseudotrajetórias e sombreamento	22
3 Rede de mapas com acoplamento aleatório	25
3.1 Motivação	25
3.2 O sistema	27
3.3 Resultados e discussão	29
3.3.1 Identificação do tamanho da rede	29
3.3.2 A entropia KS do sistema	30
3.3.3 Caracterização dos estados sincronizados	32
3.3.4 Tempo de sincronização	37

3.3.5	Uma relação entre o sistema estudado e uma rede de mapas com acoplamento lei de potência	41
4	Osciladores acoplados	46
4.1	O modelo de Liênard	46
4.2	Sistema unidirecional	48
4.3	O sistema bidirecional	51
4.3.1	Rotas para o caos	51
4.3.2	Outros resultados	53
4.3.3	A presença de perturbação aleatória	59
4.4	Osciladores idênticos	60
4.4.1	Adicionando perturbação aleatória em um oscilador	68
4.4.2	A região biestável	70
5	Rede de mapas acoplados a uma fonte estocástica	73
5.1	Motivação	73
5.2	O sistema	74
5.2.1	O mapa logístico	74
5.2.2	A rede acoplada	75
5.2.3	Comportamento do reservatório	76
5.3	Variando a intensidade do acoplamento	77
5.3.1	Caso de acoplamento global (campo-médio)	78
5.3.2	Estudando um caso de parâmetro de alcance maior	84
5.4	Comportamento do sistema variando o alcance do acoplamento	86
5.4.1	Rede “pequena”	86
5.4.2	Uma comparação entre as redes com e sem reservatório, fazendo a variação do parâmetro de alcance.	88
6	Conclusões	94
A	Artigos publicados durante o doutoramento	98
A.1	Artigos submetidos durante o doutoramento	98
	Bibliografia	99

Capítulo 1

Introdução

Sistemas dinâmicos são muito estudados por serem de grande valia na modelagem e conseqüente estudo e compreensão em diferentes áreas científicas. Podem ser definidos como um conjunto de objetos agrupados que possuam alguma interdependência e que, com a variância do tempo, existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto [1]. São exemplos de sistemas dinâmicos um circuito elétrico, o sistema nervoso de um crustáceo, o ecossistema de uma floresta, o comportamento econômico da bolsa de valores, entre outros.

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados de várias formas, quanto à variável temporal podem ser de tempo contínuo, sendo representados por equações diferenciais, e de tempo discreto, sendo para este caso, representado por mapas. Podem também ser lineares ou não-lineares, com parâmetros fixos ou variáveis no tempo. Esta tese estuda dois tipos de sistemas dinâmicos, os de tempo contínuo e os de tempo discreto não-lineares, que serão melhor explicados no capítulo seguinte, onde aparecerá o que eles são, e como podem ser utilizados, de forma a modelar sistemas reais. De uma forma geral, esta tese aborda o estudo de sistemas dinâmicos não-lineares através de recursos computacionais. O interesse em analisar diferentes sistemas e seus comportamentos dinâmicos vem do fato de se saber que muitos eventos existentes na natureza, podem, de uma forma satisfatória, ser modelados por equações matemáticas e desta forma acabam sendo melhor e mais profundamente conhecidos.

Analisar sistemas dinâmicos, não significa, de fato, saber explicar diversos comportamentos naturais, mas pode significar, de certo modo, a aprendizagem de como tratar certos dados para poder estudá-los de forma correta e de modo a se fazer previsões favoráveis ao avanço da tecnologia.

Estudos com osciladores não-lineares têm trazido uma nova compreensão para estruturas dinâmicas da natureza. Eles podem levar ao entendimento de que um simples oscilador não-linear, de baixa dimensão, mostra ricas e complicadas dinâmicas que podem se transformar em comportamentos caóticos, com apenas a variação de um parâmetro de controle [2]. Eles podem tentar prever futuros acontecimentos cientificamente, reconhecendo as regras que governam as mudanças [1]. Um sistema dinâmico muito conhecido na literatura é o modelo de Malthus, onde $N(t)$ representa o número de indivíduos de uma determinada espécie, distribuídos uniformemente numa área geográfica, em um tempo t . Neste modelo estuda-se a variação da espécie considerando número de nascimentos, morte e aspectos migratórios. Após alguns estudos percebeu-se que este modelo não era bom para este tipo de situação. Outros modelos dinâmicos podem ser a representação de uma força atuando em um corpo, a representação de aspectos climáticos ou até mesmo a relação existente entre o comportamento de alguns órgãos do corpo humano.

Sabe-se hoje que a análise de modelos matemáticos pode, por exemplo, revelar, algumas vezes, aspectos importantes de problemas biológicos. E embora possam parecer simples, análises de modelos matemáticos podem requerer algumas técnicas um pouco mais sofisticadas para a interpretação e correta aplicação [3]. Estas análises podem levar em conta equações que são de fácil análise, ou até mesmo a utilização de super computadores que não são de fácil acesso.

Os trabalhos existentes em sistemas dinâmicos não-lineares vêm crescendo com o passar dos anos, mas tiveram seus primeiros achados em um trabalho de mecânica clássica, investigado por Henri Poincaré em 1892, o problema de três corpos [4]. Além disso, o conceito de atrator caótico surgiu de um trabalho meteorológico de Lorenz em 1963 [5], nesta época, enquanto Lorenz coletava dados climáticos e os analisava numericamente através de três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, descobriu, quase por acaso, que para determinados sistemas, condições iniciais muito próximas, podiam, com o passar do tempo, possuir comportamentos muito diversos, isto é, todas as soluções não periódicas encontradas eram instáveis, ou seja, sofriam flutuações irregulares sem quaisquer elementos de randomicidade serem introduzidos externamente [6]. Foi a partir de então que muitos trabalhos na área de caos começaram a surgir.

A existência de regimes caóticos em sistemas com poucos graus de liberdade tem sido um incentivo na caracterização de dinâmicas complexas. Sistemas como redes neurais, reações químicas, dinâmicas populacionais, entre outras, são sistemas

que possuem muitos graus de liberdade. Para estes tipos de sistemas poderem ser modelados, a extensão espacial é introduzida aos modelos matemáticos de forma a relacionar a geometria do problema com os seus graus de liberdade.

Caos em um sistema dinâmico é caracterizado pela presença de ao menos um expoente de Lyapunov positivo. Estes expoentes nada mais são do que os módulos dos logaritmos naturais dos autovalores do produto da Jacobiana do sistema em estudo [7], que quantificam a taxa de contração ou expansão do sistema dissipativo.

Uma característica importante do movimento caótico é que uma informação completa quanto à posição inicial aumenta rapidamente com a evolução da trajetória [8], ou seja, medidas aproximadas e sucessivas sobre o sistema fornecem um aumento de informação, caso o sistema seja caótico.

Aqui, além do estudo de sistemas caóticos, os diferentes sistemas serão analisados através de seus comportamentos via sincronização, variedades estáveis e instáveis, presença de ruído, entropia e outras variáveis dinâmicas que serão abordadas quando assim se fizerem necessárias. Conceitos importantes da área serão revisados em um capítulo a parte, de forma que a tese seja melhor compreendida.

Conceitos como os mencionados acima e outros, como por exemplo atratores estranhos, muito longe de serem não usuais, como poderia ser imaginado por leigos, podem ser mapas dinâmicos de flutuações saudáveis no coração, cérebro ou outro qualquer órgão observado sob muitas circunstâncias [9]. O estudo de sistemas dinâmicos pode, inclusive, ajudar em áreas como a medicina e a fisiologia, onde caos e estruturas fractais podem mudar radicalmente a visão entre saúde e doença [9].

Em cada capítulo o principal intuito é o de estudar modelos físicos que possam, de alguma forma, apresentar aspectos que ajudem na compreensão de situações reais presentes na natureza. Na medida do possível os modelos são caracterizados fisicamente de forma que não apenas o aspecto dinâmico seja importante.

O capítulo dois faz uma breve revisão sobre conceitos dinâmicos que são úteis para compreender alguns comportamentos estudados no decorrer do trabalho.

O capítulo três trata de um sistema de rede tipo pequeno mundo com mapas βx caóticos acoplados. Procurou-se um tamanho adequado da rede para realizar o estudo, e em seguida, partiu-se para o estudo de sincronização da rede e também foram feitas comparações deste sistema com outro tipo de rede βx com acoplamento tipo lei de potência, estudada analiticamente na literatura [10]. Neste capítulo o maior interesse foi o de buscar o comportamento do sistema diante das ligações aleatórias introduzidas nos sítios, estudando como estas influenciam a dinâmica da

rede.

No capítulo quatro é apresentado um sistema composto de dois osciladores do tipo Liênard acoplados, onde se estuda os tipos de rotas que levam a um comportamento caótico quando o sistema é estudado através de um acoplamento bidirecional. Estuda-se também a presença de uma perturbação aleatória no sistema e a perda de confiabilidade nos resultados numéricos em determinados valores de parâmetros para os quais o sistema apresenta variabilidade da dimensão instável, conceito este que será apresentado em maior detalhes no capítulo dois. Este sistema foi estudado de forma a dar continuidade ao que havia sido estudado na dissertação de mestrado, onde o sistema foi estudado modelando o comportamento dos nodos cardíacos e onde se estudou as possíveis sincronizações dos osciladores relacionando-as com possíveis arritmias cardíacas [11]. Neste capítulo deu-se principal ênfase no caso de osciladores idênticos e também com acoplamento bidirecional, ou seja, um acoplamento onde os osciladores se influenciam mutuamente.

O capítulo cinco volta a apresentar uma rede de mapas acoplados, aqui, mapas logísticos acoplados a um reservatório térmico. Busca-se um tamanho de rede que, com o reservatório, substitua uma rede de limite termodinâmico e faz-se análises sobre sincronização e similaridade entre os sistemas, com a mudança de certos parâmetros, buscando um melhor desempenho computacional, isto é, menor tempo gasto em cálculos e estudando a presença de sítios estocásticos na rede.

Finalmente, o capítulo seis traz as conclusões do trabalho juntamente com alguns comentários a respeito de trabalhos que ainda podem ser feitos futuramente, dando continuidade ao que aqui foi estudado.

O trabalho, de forma geral, foi feito através de métodos numéricos, usando C e FORTRAN como linguagens de programação. No capítulo quatro, que é estudado com equações diferenciais, o integrador utilizado é baseado no método de Adams de 12^a ordem [12]. As simulações foram feitas dentro de departamento de física da UFPR e também com a utilização do CLUSTER CT-INFRA. Os tempos de execução dos programas variaram de sistema para sistema e também variaram com relação ao tipo de quantidade que se está analisando. Em alguns casos os programas levaram apenas alguns segundos para serem executados, enquanto para outras situações levaram dias e até semanas.

De uma forma generalizada, esta tese apresenta três sistemas distintos, onde o caos espaço-temporal é estudado. Cada sistema é analisado através de seu comportamento dinâmico e quando possível, alguma relação com sistemas reais é feita.

Busca-se entender o comportamento caótico dos sistemas, principalmente com relação a aspectos sincronizados que são relevantes, por exemplo, no estudo da teoria de informação e comunicação segura.

Capítulo 2

Conceitos fundamentais

Neste capítulo serão abordados conceitos básicos de dinâmica não-linear que serão de grande importância para a compreensão dos próximos capítulos desta tese que incluem tanto sistemas de mapas, quanto sistemas de osciladores.

2.1 Mapas e Fluxos

2.1.1 Fluxos

Os osciladores, que podem ser representados por equações diferenciais, são sistemas dinâmicos onde a variável temporal evolui continuamente, sendo que também suas variáveis de espaço e estado são contínuas. Ao invés de expressar o estado corrente como uma função do estado anterior, como em um mapa, um fluxo expressa a taxa de mudança do estado atual como uma função do próprio estado atual [13], ou seja,

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.1}$$

com $x \in R^N$.

A maioria das leis físicas podem ser expressas na forma de equações diferenciais que podem ser autônomas, quando o tempo não aparece explicitamente e não-autônomas, quando o tempo aparece explicitamente na equação diferencial. As equações autônomas são as que mais demonstram o comportamento de um sistema determinístico, isto é, são as que relacionam leis de estados futuros escritas somente em termos do estado presente, no entanto, qualquer sistema não-autônomo pode ser escrito como autônomo, definindo-se uma nova variável dependente [13].

2.1.2 Rede de mapas

O estudo de rede de mapas acoplados foi introduzido por Kunihiro Kaneko em 1983, através de sua tese de doutoramento, como um simples modelo com características essenciais de caos espaço-temporal [14]. Estudos com redes deste tipo vêm crescendo nos campos de caos espaço-temporal e também em outras áreas como a biologia, matemática, engenharia e física [15], [16], [17], [18], [19].

Caos espaço-temporal é uma dinâmica irregular, em um sistema determinístico espacialmente extenso, que ocorre no espaço-tempo e cujo grau efetivo de liberdade diverge com o aumento do tamanho do sistema [14].

Redes de mapas são sistemas que apresentam um número finito de graus de liberdade espacial. A cada grau de liberdade espacial pode-se atribuir uma variável de estado que caracteriza alguma propriedade física do sistema que varia com o espaço e o tempo [20]. Redes de mapas acoplados têm espaço e tempo discretos, enquanto a variável de estado é contínua, elas nada mais são do que um processo sistemático de discretização espaço-temporal de uma equação diferencial. A relação entre osciladores acoplados e rede de mapas pode ser verificada através de uma equação do tipo reação-difusão [20], ou seja,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = D \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + G(t)R(x), \quad (2.2)$$

onde o termo de reação é uma perturbação periódica, y é a variável espacial, x é a variável de estado, D é o coeficiente de difusão, $R(x)$ é o termo não-linear da reação e $G(t)$ uma função periódica temporal do tipo $\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k\tau)$, onde τ é o período.

A equação de reação-difusão tem sido muito estudada em modelos biológicos e de dinâmica populacional [21]. Não apenas ela é de interesse, mas também baseada em resultados rigorosos para esta equação, diversos métodos têm sido aplicados para o estudo de formação de padrões [22], [23]. Nas aplicações o termo de reação obedece exigências adicionais dependendo do fenômeno a ser modelado [24].

Integrando a equação (2.2) e deixando apenas a parte linear de difusão $x_t = Dx_{yy}$, a derivada temporal pode ser discretizada da seguinte forma,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{(y,t=n\tau)} = \frac{x[y, t = (n+1)\tau - \varepsilon] - x[y, t = n\tau - \varepsilon]}{\delta t}, \quad (2.3)$$

enquanto a variável espacial é discretizada através da introdução de uma rede unidimensional $y = im$, sendo i qualquer inteiro positivo, incluindo o zero, e pode ser

definida da seguinte maneira,

$$x^i(t) = x(y = im, t) \Rightarrow x_n^{(i)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(y = im, t = n\tau - \varepsilon). \quad (2.4)$$

De onde obtém-se,

$$x_{n+1}^{(i)} - x_n^{(i)} - R(x_n^{(i)}) = \frac{D\tau}{m^2} [x_{n+1}^{(i)} + R(x_n^{(i+1)}) - 2x_n^{(i)} - 2R(x_n^{(i)}) + x_n^{(i-1)} + R(x_n^{(i-1)})], \quad (2.5)$$

sendo $\varepsilon = \frac{2D\tau}{m^2}$ a constante de acoplamento e assim, chega-se a uma rede de mapa com acoplamento laplaciano futuro [20], onde i representa os sítios e n o tempo discreto, no qual a variável dinâmica é registrada.

$$x_{n+1}^{(i)} = f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{2} [f(x_n^{(i-1)}) - 2f(x_n^{(i)}) + f(x_n^{(i+1)})]. \quad (2.6)$$

O conjunto de condições iniciais da rede pode ser escolhido de forma aleatória ou então através de uma distribuição espacial em forma de onda. As condições de contorno podem ser diversas, livres, fixas, periódicas, entre outras.

De acordo com a dinâmica local da rede de mapas, elas podem ser caracterizadas em redes homogêneas, onde todos os mapas são idênticos em cada sítio e não-homogêneas quando ocorrem algumas mudanças nos parâmetros dos mapas de cada sítio. As redes de mapas são mais amplamente utilizadas devido às suas características de fácil implementação computacional.

2.2 Formas de acoplamento

Existem formas diversas de se fazer acoplamentos em um sistema, entre elas podem ser citados acoplamentos locais e não-locais, lineares e futuros. Nos acoplamentos locais a dinâmica de cada sítio depende apenas dos vizinhos próximos, enquanto que acoplamentos não-locais possuem sítios que são influenciados por sítios distantes. Dentre os acoplamentos locais, os de maior interesse e mais encontrados na literatura são: acoplamento aditivo, acoplamento total ou bidirecional, acoplamento unidirecional e acoplamento Laplaciano ou difusivo, este último, sendo determinado no fim da subseção de rede de mapas. Estes tipos de acoplamento são determinados pelo termo de difusão, ou seja, para estes sistemas as derivadas segundas ocorrem em termos difusivos da equação de reação-difusão. Para o caso unidirecional o sistema possui difusão assimétrica, enquanto todos os outros possuem difusão simétrica. O acoplamento chamado global é um caso extremo de acoplamento não-local, onde

todos os sítios interagem entre si. Além disso, existem acoplamentos não-locais de alcance variado, isto é, o acoplamento leva em conta a distância de um sítio ao outro. Este é o caso do acoplamento tipo lei de potência, que será utilizado como comparação entre redes e também será o tipo de acoplamento estudado no capítulo cinco em uma rede de mapas acoplados a um reservatório térmico, sendo portanto de grande interesse e assim será discutido a seguir, com um pouco mais de detalhes.

Os acoplamentos lineares são representados através de uma igualdade entre a função que representa o acoplamento e a variável de estado correspondente à iteração anterior, já os acoplamentos futuros, ao invés da igualdade ser com a variável da iteração anterior, utiliza-se a variável de estado correspondente à iteração atual, ou seja, a dinâmica local da rede.

2.2.1 O acoplamento do tipo lei de potência

O acoplamento do tipo lei de potência é um acoplamento cuja intensidade decai com a distância ao longo da rede, ou seja, quanto mais longe os sítios estiverem, menor a sua ligação com o sítio considerado. Esta distância é determinada pela menor distância entre os sítios, isto é, um acoplamento pela direita pode ser mais distante que o acoplamento pela esquerda, desta forma, a distância considerada é a menor entre os sítios. Este tipo de acoplamento é de grande interesse porque leva em consideração os tipos de ligações mais prováveis de ocorrerem em sistemas reais como redes neurológicas [25] ou mesmo estudos de comportamentos ferromagnéticos [26], [27], [28].

Tanto as propriedades de sincronização do sistema quanto outros diferentes comportamentos estão vinculados ao parâmetro de acoplamento que gera a lei de potência.

O sistema a ser estudado nesta tese, considerando a presença de um mapa logístico em cada sítio e o tipo de acoplamento existente, será dado pela seguinte equação:

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{\eta(\alpha)} \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha} [f(x_n^{(i+j)}) + f(x_n^{(i-j)})], \quad (2.7)$$

onde $0 < \varepsilon < 1$ e $\alpha \geq 0$ são os parâmetros de acoplamento local e de lei de potência,

respectivamente, e

$$\eta(\alpha) = 2 \sum_{j=1}^{N'} \frac{1}{j^\alpha}, \quad (2.8)$$

o fator de normalização do sistema com $N' = \frac{(N-1)}{2}$, sendo que N é sempre ímpar.

O valor do alcance α representa o tipo de rede que se está analisando, assim, se $\alpha \rightarrow \infty$, somente termos com $j = 1$ contribuirão para o somatório presente no termo de acoplamento, e portanto, o acoplamento será apenas de primeiros vizinhos. No caso de $\alpha = 0$, se tem que $\eta = N - 1$, e o acoplamento se torna global, ou seja, cada sítio da rede se conecta com o valor médio de todos os sítios da rede, independentemente de suas posições relativas [29].

Redes de mapas acoplados têm sido utilizadas para modelar diversos fenômenos. Acoplamentos não locais, por exemplo, são importantes para o estudo e compreensão na arquitetura de redes neurais com produção local de informação [30], também podem ser estudados na discretização de algumas equações integro-diferenciais parciais modelando reações físico-químicas [18]. Além disso, modelos de redes de mapas acoplados de forma geral, têm servido para observar fenômenos ocorridos em fluidos e plasma, como por exemplo, propagação de sólitons, turbulência, entre outros [29].

2.3 Algumas definições básicas

2.3.1 Variedades (“manifolds”)

Variedade ou “manifold” é um conjunto que localmente tem a estrutura do espaço Euclidiano e é freqüentemente encontrada como uma superfície n -dimensional imersa no espaço real de ordem n [31]. Existem variedades tanto em sistemas lineares como em sistemas não-lineares.

Para melhor entender o conceito de variedade, é importante analisar primeiramente um caso linear. Supondo a matriz Jacobiana de um sistema, e seus autovalores associados, tem-se para cada autovalor, um autovetor correspondente. Se o autovalor tem parte real negativa, então o subespaço gerado pelo autovetor correspondente será estável, caso o autovalor tenha parte real positiva, o subespaço gerado pelo autovetor será instável e se o autovalor tiver parte real nula, então existirá um subespaço central associado a ele [31]. Considerando esta situação, e

supondo que a origem do sistema é um ponto estacionário, então define-se variedade estável (instável, central), ao subespaço invariante gerado pelos autovetores estáveis (instáveis, centrais) [11], [32], [33].

No caso de um sistema linear as variedades (“manifolds”) coincidem com as direções dos autovetores [13]. Estes autovetores geram subespaços correspondentes a sua estabilidade. Se existem n_e autovalores com parte real negativa, n_i autovalores com parte real positiva e n_c com parte real nula, então $n_e + n_i + n_c = n$, sendo n a dimensão do sistema. Soluções pertencentes ao subespaço estável apresentam decaimento exponencial, as soluções pertencentes ao subespaço instável exibem crescimento exponencial e as soluções do subespaço central têm estabilidade neutra [1]. Para o caso mais geral de um sistema não-linear, existe o teorema da variedade estável, provado por A. Kelley em 1967, que afirma que as variedades são tangentes à direção do seu autovetor correspondente e tão suaves quanto a função original [13]. Este teorema é ilustrado na figura 2.1.

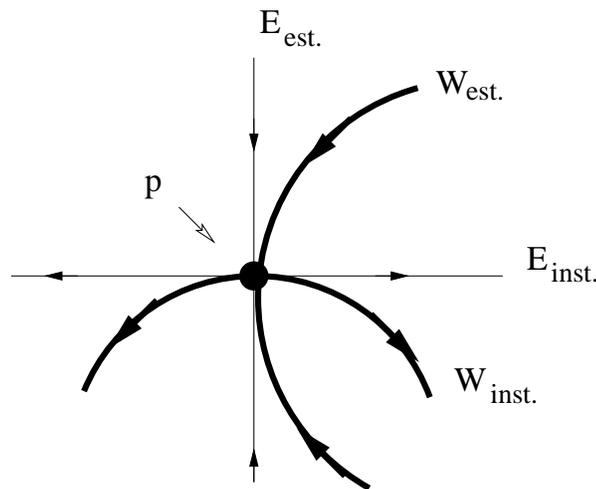


Figura 2.1: Ilustração de uma situação para um mapa bidimensional com um ponto fixo p , que possui uma direção estável e uma instável. $E_{est(inst)}$ são os subespaços estáveis e instáveis e $W_{est.(inst.)}$ são as variedades estáveis e instáveis.

2.3.2 Sincronização

No momento em que se trabalha com sistemas dissipativos, trabalha-se também com o conceito de atrator do sistema. Um sistema é dito ser dissipativo quando em uma evolução temporal existe uma diminuição do volume do seu espaço de fase.

O atrator do sistema é um conjunto deste espaço de fase para o qual as trajetórias, que evoluem através de condições iniciais, convergem à medida que o tempo tende ao infinito.

Existem atratores apenas em sistemas dissipativos. Os atratores de um sistema podem ser de vários tipos: pontos fixos, ciclos limites, toros e atratores caóticos. Os sistemas utilizados nesta tese possuem, em sua maioria, atratores caóticos cujas características são:

- Dependência sensitiva às condições iniciais,
- Auto-similaridade - possui estrutura hierárquica de invariância de escala,
- Contração em uma ou mais direções e expansão em outras, apresentando dobras, quando se tratar de um sistema de dimensão maior que 1 [33],[34] e,
- Dimensão fractal - dimensão não-inteira no espaço de fase, sendo que alguns atratores caóticos não apresentam esta característica.

Quando um atrator é um ponto fixo ele é caracterizado pela convergência de qualquer trajetória do sistema para uma solução estacionária. A presença de um ciclo limite é verificada quando existe uma solução periódica e qualquer trajetória converge, ao longo do tempo, para esta trajetória periódica. Para o oscilador harmônico forçado, por exemplo, existe apenas um ciclo limite, mas para sistemas não-lineares vários ciclos limites podem coexistir [35]. O toro como atrator aparece quando uma oscilação quase periódica é caracterizada por duas frequências. É possível, em um sistema, confundir um atrator com os transientes do sistema. Do ponto de vista prático, ou seja, numericamente, para que isso não ocorra se utiliza tempos longos de integração, que variam de sistema para sistema, e retira-se os primeiros tempos calculados.

A sincronização, que pode ocorrer em sistemas dinâmicos acoplados, é um fenômeno que acontece devido ao fato de se colocar uma das variáveis de um sistema como função de todos os demais sistemas associados [11]. Do ponto de vista usual, sincronização significa o ajuste de frequências de osciladores periódicos devido à interação fraca [36]. Com o estudo de oscilações caóticas, a noção de sincronização tornou-se mais generalizada [37] do que no conceito clássico.

A sincronização de caos se refere a processos de ajuste entre dois ou mais sistemas caóticos para um comportamento comum devido ao acoplamento entre eles ou a forçamentos externos [38]. O estudo de ritmos sincronizados é importante

devido a sua aplicabilidade em estudos fisiológicos, biológicos, tecnológicos, entre outros. Células nervosas, por exemplo, geram locomoções sincronizadas com fases definidas dependendo das relações entre suas espécies e seus deslocamentos [39]. Em geral, o estudo de oscilações sincronizadas é importante para analisar os efeitos dos estímulos em ritmos fisiopatológicos intrínsecos [39]. Além disso, outras áreas como laser, circuitos eletrônicos e comunicação segura, estão extensivamente estudando as aplicações do fenômeno de sincronização [40], [41].

Existem vários tipos de sincronização. Supondo dois osciladores acoplados, em que o primeiro é representado por duas funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$, e o segundo por $x_3(t)$ e $x_4(t)$, pode-se representar alguns tipos de sincronização como segue.

A sincronização completa, entre osciladores, ocorre quando existe a seguinte igualdade entre as variáveis:

$$x_1(t) = x_3(t), \quad x_2(t) = x_4(t), \quad (2.9)$$

enquanto a dinâmica no tempo permanece caótica. Este tipo de sincronização ocorre quando os osciladores são idênticos e com forte interação.

Quando o acoplamento entre os osciladores não é tão forte, isto é, quando o parâmetro de acoplamento não é grande o suficiente para levar a uma sincronização completa, por exemplo, e eles são não idênticos, também é possível observar um tipo de sincronização denominada sincronização com atraso (“lag synchronization”) que é definida com relação a uma variável atrasada no tempo, isto é,

$$x_1(t) \approx x_3(t - \tau), \quad x_2(t) \approx x_4(t - \tau). \quad (2.10)$$

Uma outra forma de sincronização entre osciladores idênticos é a sincronização de fase, ela ocorre quando as fases dos osciladores, que podem ser definidas pela relação

$$\phi(t) = \arctan\left[\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right], \quad (2.11)$$

são idênticas a menos de uma constante, enquanto nenhuma restrição é imposta com relação às amplitudes [42]. A fase dos osciladores é definida de acordo com o ângulo do atrator, esta definição é válida quando o atrator tem centro em zero. Esta definição pode ser vista na figura 2.2.

Dois osciladores que apresentem sincronização de fase podem não apresentar sincronização completa, mas o inverso é sempre verdadeiro [43]. Em geral, quando existe uma diferença essencial entre os osciladores acoplados, acredita-se não existir

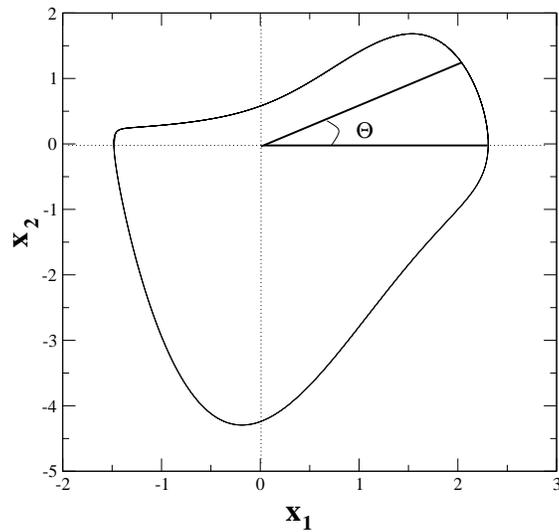


Figura 2.2: Determinação da fase dos osciladores. Aqui é representado um atrator periódico, mas a definição é a mesma para o caso caótico.

nenhuma variedade no espaço de fase atraindo as trajetórias do sistema, no entanto, observa-se que sistemas com esta característica podem sincronizar. A este tipo de comportamento dá-se o nome de sincronização generalizada. Kocarev e Parlitz [44] formularam uma necessária e suficiente condição para a ocorrência deste tipo de sincronização; um mapa do tipo $y = \Phi(x)$ existirá, sempre que a ação do oscilador que comanda o acoplamento (no caso unidirecional), resultar numa resposta do outro sistema, sem levar em consideração as condições iniciais, ou seja, mesmo com condições iniciais diferentes, o oscilador escravo responde a ação do oscilador mestre. Um último tipo de sincronização existente entre sistemas caóticos é a sincronização de frequências, ela ocorre quando as frequências em que os osciladores giram são iguais, isto é,

$$\Omega_1 = \Omega_2. \quad (2.12)$$

É importante lembrar que as formas de sincronização aqui mencionadas são relacionadas a sistemas que possuem comportamento caótico. Existe também sincronização entre osciladores periódicos, que é conhecida e bem discutida na literatura.

Para que um sistema possua sincronização completa, é fundamental a presença de uma variedade de sincronização. Esta variedade nada mais é do que um

hiperplano onde se determina a estabilidade do estado sincronizado caso ocorra um pequeno deslocamento transversal, decaindo com o tempo, para esta variedade [41]. Supondo dois sistemas acoplados cujas variáveis de estado sejam x_1 e x_2 , existindo sincronização entre eles, haverá uma variedade de sincronização que é representada por uma reta de 45° no plano x_1, x_2 , ou seja,

$$x_1 = x_2. \quad (2.13)$$

2.3.3 Distância à variedade de sincronização e parâmetro de ordem

Tanto a distância à variedade de sincronização quanto o parâmetro de ordem são conceitos utilizados para a determinação de estados completamente sincronizados.

A distância à variedade de sincronização é realmente o cálculo da distância entre a reta da variedade de sincronização e um ponto no espaço de fase, ou seja, a distância entre os pontos $(x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(N)})$ e a variedade de sincronização definida por $x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = \dots = x_n^{(N)}$, e é matematicamente dada por,

$$d_n^2 = \sum_{j=1}^N (x_n^{(j)})^2 - \left(\frac{\sum_{j=1}^N x_n^{(j)}}{\sqrt{N}} \right)^2. \quad (2.14)$$

Este conceito é ilustrado na figura 2.3.

Quando esta distância é zero, considera-se que os pontos estão na variedade de sincronização e portanto vale a relação de igualdade entre os sistemas, sendo assim, eles estão sincronizados completamente. Caso esta distância seja diferente de zero, então o sistema não possui estado completamente sincronizado, podendo, no entanto, possuir outras formas de sincronização.

Como será visto no próximo capítulo, nem sempre quanto mais próximo da variedade de sincronização um ponto esteja, mais rápido ele tenderá para esta variedade. Este fato decorre da condição que um ponto próximo pode estar em uma variedade instável ou próximo a ela e com a passagem do tempo, ser levado para uma região do espaço de fase ainda mais distante. Assim, a distância à variedade de sincronização não é diretamente dependente do tempo de sincronização.

A equação (2.14) pode também ser escrita como,

$$d_n^2 = N\sigma_n^2, \quad (2.15)$$

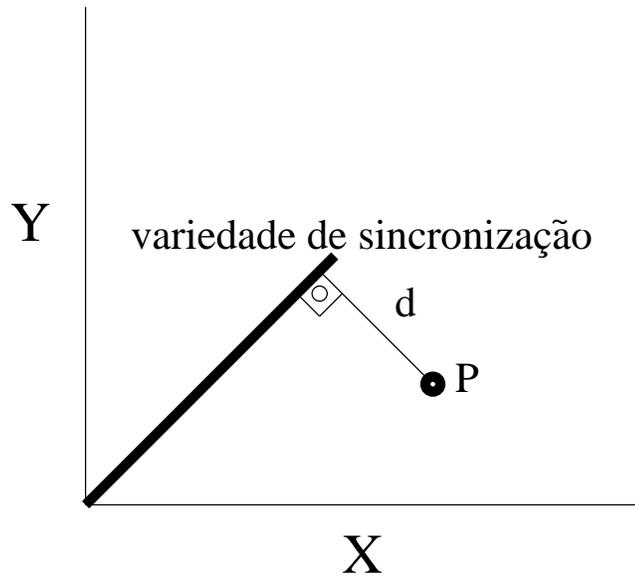


Figura 2.3: Definição da distância à variedade de sincronização. Aqui representa-se uma variedade de sincronização de um sistema bidimensional. P é um ponto de uma trajetória qualquer e d é a distância deste ponto à variedade.

onde,

$$\sigma_n^2 = \langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2, \quad (2.16)$$

é a variância das amplitudes dos mapas com relação a sua média na rede em um dado tempo, e N é o número de mapas da rede.

Uma forma de perceber como a distância mostra ou não um comportamento sincronizado, é através do gráfico que compara dois mapas ou dois osciladores acoplados. Supondo, por exemplo, dois mapas logísticos (que serão estudados com mais detalhes no capítulo cinco) acoplados difusivamente como segue:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) + \epsilon(y_n - x_n), \quad (2.17)$$

$$y_{n+1} = 4y_n(1 - y_n) + \epsilon(x_n - y_n). \quad (2.18)$$

Dependendo do valor do parâmetro ϵ de acoplamento, os dois mapas podem sincronizar completamente ou não. Caso não sincronizem, suas séries temporais não possuem relação alguma, como pode ser visto na figura 2.4, e também o gráfico do comportamento de um mapa pelo outro não é uma reta. Já, quando a distância é zero, as séries temporais são idênticas e a reta que representa $x = y$ aparece mostrando a sincronização completa entre os mapas, o que pode ser visto na figura 2.5.

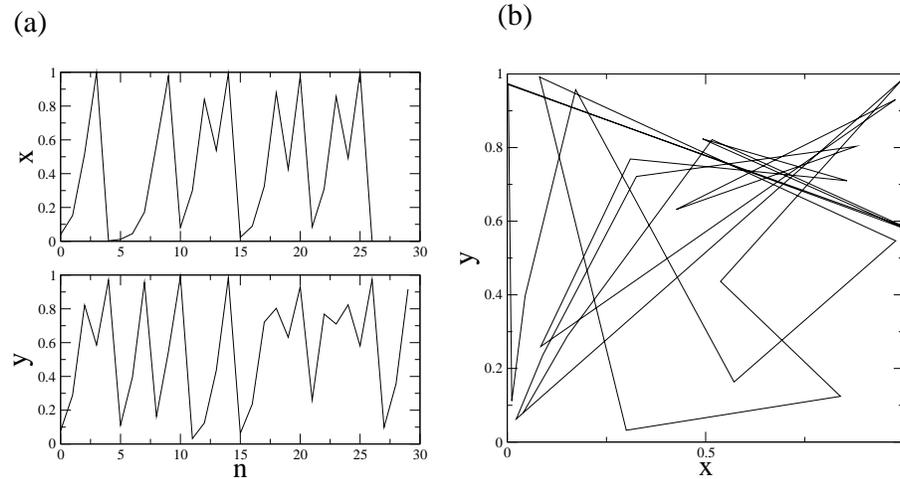


Figura 2.4: Em (a) séries temporais dos dois mapas não sincronizados. Em (b) gráfico de x versus y mostrando que existe uma variedade de sincronização. Aqui o parâmetro de acoplamento usado é $\epsilon = 0,02$.

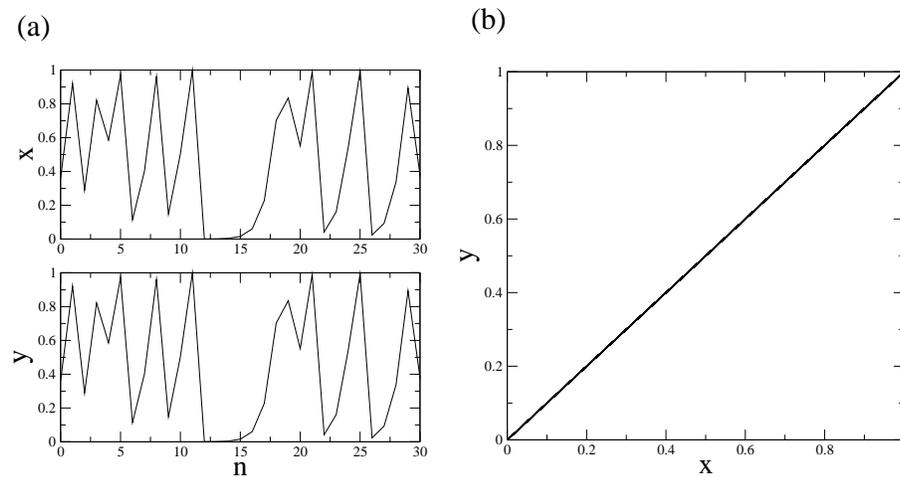


Figura 2.5: Em (a) séries temporais dos dois mapas não sincronizados. Em (b) gráfico de x versus y mostrando que não existe uma variedade de sincronização. Aqui o parâmetro de acoplamento usado é $\epsilon = 0,8$.

O parâmetro de ordem foi, pela primeira vez, introduzido em um trabalho de Kuramoto [45] em 1984 para osciladores, e aqui, da mesma forma que adaptado em [46], [47], utilizado para rede de mapas.

$$z_n = R_n \exp(2\pi i \Phi_n) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \exp[2\pi i x_n^{(j)}], \quad (2.19)$$

onde Φ_n e R_n são o ângulo e a amplitude, respectivamente, de um vetor de fase para uma rede unidimensional com condições de fronteiras periódicas e onde R_n é dado por:

$$R_n(t) = \frac{1}{N} \left[\sum_{j=1}^N \cos^2(2\pi x_n^{(j)}) + \sum_{j=1}^N \sin^2(2\pi x_n^{(j)}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

O parâmetro de ordem é importante para caracterizar estados completamente sincronizados. Isso ocorre quando todos os sítios possuem o mesmo valor de $x_n^{(j)}$ e para este caso a magnitude do parâmetro de ordem é igual a unidade para todo o tempo, com fase constante [47]. Para mapas desacoplados espera-se um padrão em que as amplitudes dos sítios sejam tão espacialmente não correlacionadas, que podem ser consideradas variáveis essencialmente randômicas. Para este caso o parâmetro de ordem $z_n = \langle e^{2\pi i x_n^{(j)}} \rangle_j$ desaparece para todo tempo. No entanto, quando não se está considerando apenas sincronização completa, não é necessário que todas as fases sejam iguais, assim, para um caso de sincronização de frequências, por exemplo, se espera que a magnitude do parâmetro de ordem tenha um valor constante próximo a unidade para redes infinitas, ou flutue em torno de um valor fixo para redes finitas.

Utiliza-se também a média temporal do parâmetro de ordem, devido às oscilações existentes na magnitude desta quantidade. Este valor médio é calculado da forma,

$$\langle R \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m - n} \sum_{i=m}^n R_i, \quad (2.21)$$

onde m é o número de iterações transientes. Como pode-se perceber pela equação (2.20) quando o parâmetro de ordem é igual a unidade, o sistema está completamente sincronizado.

2.3.4 Expoentes de Lyapunov e expoentes de Lyapunov a tempo finito

Como já comentado no capítulo de introdução, os expoentes de Lyapunov de um sistema são as taxas de contração e dilatação das trajetórias no espaço de fase. Para um sistema de equações diferenciais autônomas, um pouco diferente de sistemas acoplados com mapas, o sistema deve apresentar, necessariamente, um expoente de Lyapunov zero que indica o termo temporal do sistema, isto é, a derivada de um termo constante. Para o caso de fluxos, os expoentes de Lyapunov podem ser representados da seguinte maneira,

$$\lambda = \frac{\ln\left[\frac{d_j(t)}{d_j(t_0)}\right]}{t - t_0}, \quad (2.22)$$

onde considerando uma hiper-esfera de condições iniciais centrada em $\mathbf{x}(t_0)$, quando o tempo passa, o raio inicial $d_j(t_0)$ varia exponencialmente ao longo de cada uma das dimensões, sendo t o tempo e λ o expoente de Lyapunov. Numericamente estes expoentes são encontrados através da linearização e normalização das equações que representam o sistema em estudo. Um sistema qualquer possui tantos expoentes quantas forem as suas dimensões no espaço de fase.

Para o caso de mapas, considerando x_0 como uma condição inicial, o expoente de Lyapunov pode ser dado por,

$$h(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{|\mathbf{y}_n|}{|\mathbf{y}_0|}\right), \quad (2.23)$$

onde \mathbf{y}_0 é um vetor tangente que evolui da forma,

$$\mathbf{y}_{n+1} = DM(\mathbf{x}_n)\mathbf{y}_n \quad (2.24)$$

e determina a evolução da órbita não perturbada \mathbf{x}_n e sendo D a derivada do mapa $M(x_n)$. O expoente de Lyapunov é calculado também através da linearização e normalização dos mapas, sendo que para uma rede de mapas, existirá tantos expoentes de Lyapunov quanto forem as quantidades de mapas acoplados na rede.

O expoente de Lyapunov a tempo finito é estudado para caracterizar a presença de instabilidades no espaço de fase do sistema. Ele é calculado da mesma maneira que o expoente infinito, apenas fazendo com que um valor de tempo finito, previamente estabelecido, possa ser armazenado, ou seja,

$$\lambda(x, n) = \frac{1}{n} \ln\|Df(x)u\|, \quad (2.25)$$

onde u é o autovetor da matriz jacobiana de f calculada em x e D representa a sua derivada.

2.3.5 Entropia de Kolmogorov-Sinai (KS)

A entropia de Kolmogorov-Sinai, também conhecida como entropia métrica, é um conceito importante para quantificar o caos de um sistema. Ela mede a taxa de perda ou ganho de informação do sistema.

Como comentado anteriormente neste capítulo, uma rede com N mapas unidimensionais acoplados é um sistema dinâmico N -dimensional e o espectro de Lyapunov correspondente é formado por N expoentes, um para cada direção independente do espaço tangente. Se ao menos um destes expoentes for positivo, então a dinâmica do sistema é caótica e a soma de todos os expoentes produz a taxa de crescimento de um elemento de volume Euclidiano N -direcional [48]. Em um sistema de mapas caóticos acoplados, pode acontecer de que muitos expoentes sejam positivos e então uma quantidade importante a ser calculada é o valor médio de expoentes de Lyapunov positivos,

$$h = \langle \lambda_i \rangle_{i, \lambda_i > 0} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\lambda_i > 0} \lambda_i. \quad (2.26)$$

Se a dinâmica local é gerada por um difeomorfismo, isto é, uma relação entre uma função contínua, com primeira derivada contínua e inversível entre dois espaços distintos, este valor médio dos expoentes de Lyapunov é igual a densidade ou entropia métrica, que é uma taxa assintótica de criação de informação por sucessivas iterações da função. Para entender um pouco mais sobre o conceito de entropia métrica é importante saber o que é uma medida no sistema.

Supondo que a densidade de probabilidade num espaço Euclidiano R^n é $f(x)$ em cada ponto, então a medida de probabilidade numa região M é:

$$\mu(M) = \int_M d\mu = \int_M f(x) dx. \quad (2.27)$$

A densidade $f(x)$ não precisa ser contínua, e a medida de probabilidade só tem de especial o fato de ser normalizada. Uma medida invariante para uma aplicação T , é uma medida com a propriedade $\mu(T(A)) = \mu(A)$, para qualquer conjunto A .

O conceito de entropia métrica, introduzido por Kolmogorov, torna a noção de que sucessivas medidas aproximadas sobre o sistema fornecem maior aumento de

informação se o sistema for caótico do que se ele for regular. Assim, se for feita uma medida sobre o sistema, obtém-se informação e com isso elimina-se a incerteza [8]. A informação produzida pela medida consiste em remover a incerteza antes da medida; quanto maior a incerteza, maior a quantidade de informação obtida por sua remoção. Informação diz respeito ao que anteriormente era desconhecido, dessa forma, quanto menos provável for uma mensagem, mais informação ela transporta [1]. No caso de sistemas caóticos é possível obter informações especificando as condições iniciais, dessa maneira órbitas caóticas criam informação [33].

As propriedades para a entropia permitem considerá-la como a medida de incerteza e assim, pode-se definir a quantidade de informação obtida [8]. A entropia é sempre invariante com relação a uma transformação. Não é de fácil computação para um sistema dinâmico. A definição de entropia métrica é baseada, no que foi até agora considerado, e é a formulação de Shannon sobre informação, que sugeriu que se existem A símbolos disponíveis em cada seleção de símbolos, então a informação H associada a esta seleção é igual a $\log(A)$, ou seja,

$$H = -\log A. \quad (2.28)$$

Assim é possível perceber que a informação de um sistema depende exclusivamente da emissão de símbolos e que ela aumenta quando a probabilidade de existir a mensagem tende a zero.

Do que foi considerado anteriormente, tem-se que quanto maior a entropia, menor a informação que se tem sobre o sistema [33].

2.3.6 Sistemas hiperbólicos e não-hiperbólicos

Um sistema é dito ser hiperbólico se possui dinâmica estruturalmente estável, isto é, sua topologia não é modificada com a soma de uma perturbação e se o espaço tangente T_x associado a qualquer ponto x pertencente a este espaço pode ser dividido em uma soma direta $T_x = E_x^{inst.} \oplus E_x^{est.}$ [49], sendo $E_x^{inst.}$ e $E_x^{est.}$ respectivamente, os subespaços instáveis e estáveis.

Existem propriedades que são inerentes a um conjunto hiperbólico, e elas são [49]:

- a soma direta varia continuamente com x pertencendo ao conjunto hiperbólico e é invariante até que

$$Df(E_x^{inst.}) = E_{f(x)}^{inst.}$$

e

$$Df(E_x^{est.}) = E_{f(x)}^{est.}$$

- existem constantes $C > 0$ e $0 < \nu < 1$ tais que:

se $\eta \in E_x^{est.}$ então $|Df^n(x)\eta| \leq C\nu^n|\eta|$,

se $\eta \in E_x^{inst.}$ então $|Df^{-n}(x)\eta| \leq C\nu^n|\eta|$.

Além disso, variedades estáveis e instáveis podem ser definidas para cada \mathbf{x} pertencente ao espaço considerado.

Diferente de um sistema hiperbólico, um sistema não-hiperbólico não possui as propriedades acima mencionadas. No entanto, a maioria dos sistemas caóticos fisicamente interessantes são não-hiperbólicos naturalmente, possuindo tangências homoclínicas, ou seja, têm atratores que possuem algum ponto interior em que os subespaços estáveis e instáveis são tangentes.

A maioria dos estudos dinâmicos são feitos quando sistemas hiperbólicos são considerados, no entanto, como uma grande parte dos sistemas estudados são não-hiperbólicos, existem estudos mostrando que sistemas não-hiperbólicos, apesar de suas características, podem ser analisados de forma semelhante aos hiperbólicos, do ponto de vista da dinâmica não-linear [33], tanto com relação aos seus aspectos de sincronização quanto a aspectos de estabilidade e outros estudados em sistemas dinâmicos.

2.3.7 Pseudotrajetórias e sombreamento

A hiperbolicidade ou não-hiperbolicidade de um conjunto caótico tem profundas implicações para a dinâmica no conjunto. Alguns sistemas hiperbólicos podem perder sua hiperbolicidade através da existência de tangências das variedades estáveis e instáveis dos pontos do conjunto caótico [49]. Esta perda de hiperbolicidade pode acontecer devido a pequenas modificações que são introduzidas no sistema. Além disso, esta perda também pode acontecer através da chamada variabilidade da dimensão instável (VDI), que ocorre quando o número de direções instáveis não é constante ao longo da trajetória. Esta situação ocorre quando os pontos periódicos presentes no atrator caótico têm um número variado de direções instáveis.

Uma questão básica quando se obtém resultados numéricos é quão extensa é sua validade. Esta questão se torna especialmente significativa em sistemas caóticos, que são sensíveis, a pequenos erros [50]. A investigação numérica de modelos físicos

envolve freqüentemente milhares de iteradas em um processo. Desde que a relação entre a trajetória gerada pelo computador e a trajetória verdadeira, que é a trajetória sem erros de truncamento, não é muito clara, a análise dos sistemas físicos fica comprometida [51]. Assim, para sistemas físicos que envolvem caos, é importante saber quando, e de que forma, o estudo numérico reflete a dinâmica verdadeira de um sistema real. Para compreender este fato é importante, antes, saber um pouco a respeito do conceito de sombreamento.

Na geração de uma trajetória numérica ocorrem erros de truncamento quando da introdução das condições iniciais do sistema. Isto ocorre devido ao fato de as condições do sistema real não serem conhecidas com precisão infinita. Além disso, a cada iterada do sistema os cálculos em ponto flutuante realizados pelos computadores podem gerar pequenos erros a cada passo, de onde nasce uma trajetória ruidosa denominada *pseudo-trajetória*. Alguns trabalhos [52], [53] mostram que existe uma *pseudo-trajetória* muito próxima a trajetória verdadeira que sombreia esta. Estes trabalhos demonstraram esta propriedade para sistemas hiperbólicos, no entanto, outros autores [50], [51], [54] investigaram e perceberam que esta propriedade também é válida, considerando a abrangência de uma trajetória verdadeira e o refinamento de uma trajetória ruidosa, para sistemas não-hiperbólicos, sob certos aspectos. Com isso identificaram que uma trajetória caótica em um sistema não-hiperbólico não terá uma abrangência contínua eternamente, ou seja, a distância de sombreamento não valerá para determinados valores dos parâmetros do sistema.

Uma vez conhecido o conceito de sombreamento, passa-se agora a apresentação do que é a variabilidade da dimensão instável. Sistemas caóticos que possuem órbitas periódicas instáveis diferentes, podem possuir diferentes números de direções instáveis [55], a este comportamento dá-se o nome de VDI. Em um conjunto caótico o número de órbitas periódicas instáveis com diferentes números de direções instáveis é realmente grande. Assim, a ocorrência de VDI em um sistema de mapas ou fluxos caóticos acoplados, pode acontecer devido ao fato de que qualquer sistema individual desacoplado possui um atrator caótico, que é idêntico ao atrator da variedade de sincronização. Dessa maneira, o acoplamento faz com que algumas das órbitas periódicas instáveis da variedade de sincronização percam ou ganhem direções estáveis transversais.

No entanto, para caracterizar a presença destas órbitas instáveis utiliza-se o expoente de Lyapunov a tempo finito, já explicado na subseção anterior. Este estudo é feito verificando o comportamento do expoente de Lyapunov a tempo finito

mais próximo de zero. Quando este oscila em torno de zero, tem-se uma região altamente instável no sistema. Se a distribuição de probabilidade deste expoente é uma curva que se assemelha a uma gaussiana, existem contribuições tanto positivas quanto negativas deste expoente. Esta oscilação indica que existem pedaços das trajetórias caóticas que são atraídos e repelidos pelo atrator caótico. Dessa maneira estas trajetórias não são sombreadas por um tempo apreciável, fazendo com que a trajetória numérica não seja totalmente confiável quanto ao modelamento de um sistema real e pode, portanto, apresentar variabilidade da dimensão instável.

Este não sombreamento ocorre, por exemplo, quando um conjunto que possui dois pontos fixos, um com uma única direção expansiva e outros com duas direções expansivas, evoluem dinamicamente [56]. Neste caso uma bola de condições iniciais, próxima ao ponto fixo com uma única direção expansiva, será contraída em um plano que possui uma pequena espessura. Assim, uma trajetória gerada por computador com erro de truncamento δ , será deslocada uma distância δ do plano. Quando a região ao redor da trajetória numérica apresentar uma segunda direção expansiva, devido à proximidade do ponto fixo com duas direções expansivas, então irá exponencialmente para longe do plano das trajetórias verdadeiras, o que resultará em uma trajetória não sombreável.

Capítulo 3

Rede de mapas com acoplamento aleatório

Neste capítulo será abordado o estudo espaço-temporal de uma rede de mapas acoplados com ligações locais e não-locais, verificando as condições para a existência de um estado sincronizado através de seus parâmetros de acoplamento.

3.1 Motivação

As redes de pequeno mundo começaram a ser estudadas quando, na década de 60, Stanley Milgram resolveu fazer um experimento enviando cartas para um corretor de valores em Boston. Essas cartas foram distribuídas em Nebraska e caso a pessoa que recebesse a carta não conhecesse o corretor, deveria enviá-la para alguém que acreditasse conhecê-lo. Neste experimento Milgram percebeu que para chegar até o corretor, a carta passava, em média, por seis pessoas. Daí conjecturou que uma separação similar poderia caracterizar a relação de quaisquer duas pessoas no mundo [57].

A rede de pequeno mundo é de crucial importância para comunicação. A divulgação de notícias, piadas e até da moda, depende diretamente do contato entre as pessoas. No entanto, mais importante do que estes fatos, é o estudo da disseminação de doenças que se propagam pelo contato pessoal e nestes casos, conhecer as variações de contatos e quantos são os graus de separação, pode ser de grande utilidade no auxílio ao combate de uma epidemia, por exemplo.

A principal motivação ao estudar um modelo com características de rede de pequeno mundo, foi a de descobrir estados caóticos sincronizados, estudando um

número adequado de mapas que levasse a um comportamento que pudesse lembrar uma rede de pequeno mundo. Este tipo de rede é caracterizado, principalmente, pelo valor da probabilidade indicado. Esta probabilidade é dada pela razão entre o número de ligações aleatórias e o número total de sítios na rede. Quando $p \rightarrow 0$ tem-se uma rede randômica e quando $p \rightarrow 1$ tem-se uma rede regular. Além disso, uma rede de pequeno mundo é caracterizada estatisticamente pela distância média entre os sítios e pelo agrupamento. Para entender estas duas propriedades do sistema, é importante analisar um modelo simples de M vértices (mapas). Desenha-se $\frac{1}{2}Mz$ linhas escolhidas randomicamente para representar a conexão entre os vértices. Se cada vértice tem z vizinhos e cada vizinho do vértice tem z vizinhos, então este vértice terá z^2 segundos vizinhos e assim sucessivamente [57]. No entanto, pensando, por exemplo, em pessoas que se conhecem, não se pode analisar o sistema desta forma, pois um amigo de uma determinada pessoa pode também ser amigo da pessoa considerada [57], a esta propriedade dá-se o nome de agrupamento.

O modelo mais simples de rede de pequeno mundo é um gráfico randômico que não apresenta agrupamento. Em geral o número A de graus de separação (também chamado de diâmetro do gráfico) necessários para alcançar todos os sítios da rede é dado por,

$$z^A = N, \quad (3.1)$$

que implica que,

$$A = \frac{\log N}{\log z}. \quad (3.2)$$

Esta razão, mostrando que o diâmetro aumenta com o número de sítios da rede, é um efeito típico de redes de pequeno mundo e existe em um gráfico randômico [57]. Além do agrupamento, a distância média entre os sítios da rede também é uma característica de redes deste tipo e escala com o número de sítios da rede. Esta distância média é representada, analiticamente, da seguinte forma [58],

$$l(p) = \frac{N}{z} g[pN(N-4)], \quad (3.3)$$

com,

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}} \operatorname{tgh}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}\right). \quad (3.4)$$

Além do gráfico randômico, outros modelos de redes de pequeno mundo são conhecidos, entre eles pode-se citar Watts e Strogatz [39], Newman e Watts [59],

Barthélémy e Amaral [60], que em cada caso estudaram formas diversas da aplicação destas redes, desde a procura de soluções do modelo de Ising ferromagnético até o comportamento de redes neurais no modelo de Hodgkin-Huxley.

Modelos podem variar, mas a principal característica de redes de pequeno mundo é que elas possuem agrupamento grande e média da distância entre dois sítios, pequena. Na verdade, uma rede de pequeno mundo tem uma distância média entre sítios comparada com o valor de uma rede puramente randômica [61], enquanto apresenta um grau de agrupamento como em uma rede regular. Quando todos os vértices se conectam com todos os demais vértices, o grau de agrupamento é 1, o que é o caso de uma rede regular.

3.2 O sistema

A rede de mapas aqui estudada tem ligações de primeiros e segundos vizinhos locais, e ligações não-locais aleatórias. Cada sítio está ligado aos seus vizinhos da esquerda e da direita, bem como aos seus segundos vizinhos também da esquerda e da direita. Além disso, cada sítio possui, de acordo com a situação escolhida, números de ligações não-locais aleatórias, isto é, se o número de ligações escolhidas por sítio for 3, cada sítio terá mais três ligações aleatórias a quaisquer outros sítios da rede, desconsiderando as ligações locais aos seus primeiros e segundos vizinhos. Este tipo de acoplamento é um acoplamento difusivo de primeiros e segundos vizinhos, com acoplamentos futuros não-locais aleatórios.

A figura 3.1 mostra este comportamento, além disso, matematicamente, esta rede pode ser representada como segue,

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(x_n^{(i)}) + \frac{\varepsilon}{4 + \kappa} [f(x_n^{(i+1)}) + f(x_n^{(i+2)}) + f(x_n^{(i-1)}) + f(x_n^{(i-2)}) + \sum_{j=1}^{\kappa} f(x_n^{(j)})I_{ij}], \quad (3.5)$$

onde $\varepsilon > 0$ é o parâmetro de acoplamento local, κ é o número de ligações aleatórias não-locais e a matriz I é feita de linhas e colunas com valores 0 e 1, onde os termos “zeros” indicam que não há ligação aleatória no sítio, e “um” indica que o sítio está ligado aleatoriamente com o sítio i . O termo $\frac{\varepsilon}{4+\kappa}$ representa a normalização da rede. A matriz é construída de forma que se um sítio tenha três ligações aleatórias, todos os demais também terão as três ligações aleatórias com outros três sítios, no entanto,

os acoplamentos não são simétricos, ou seja, um sítio “a” estar acoplado com um sítio “b” não significa que o contrário seja verdadeiro.

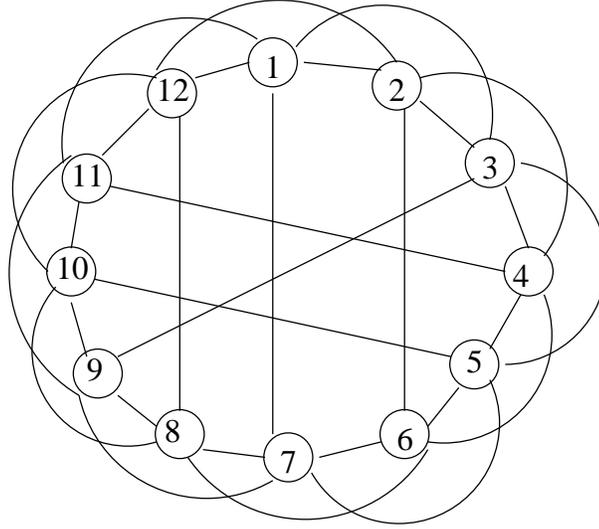


Figura 3.1: Exemplo da rede estudada, esta rede possui doze sítios e cada sítio tem apenas uma ligação aleatória.

A escolha do número de ligações aleatórias (κ) é feito segundo a probabilidade

$$p = \frac{\kappa}{N} \quad (3.6)$$

onde N é o número total de sítios da rede. Apesar do mapa utilizado ser unidimensional, trabalha-se com um sistema N -dimensional devido aos N mapas acoplados.

O sistema de redes aqui utilizado é formado por mapas do tipo

$$x_{n+1} = \beta x_n \pmod{1}. \quad (3.7)$$

Este mapa é um mapa caótico para qualquer valor de β maior que 1 (um) e para este estudo, usa-se sempre $\beta = 3$. O mapa ser caótico para qualquer valor de β maior que um se deve ao fato de que o conceito de caos é definido a partir da construção de órbitas para o sistema. Estas órbitas são obtidas através do estado inicial x_0 , ou seja, para o tempo discreto $n = 0$ e encontrando os outros valores de x para cada n .

Órbitas com condições iniciais muito próximas podem ter um comportamento muito semelhante, convergindo para algum ponto, ou então divergindo completamente. No tempo n , a separação entre as duas órbitas é dada por

$$\Delta(n) = x_2(n) - x_1(n). \quad (3.8)$$

Se no limite $|\Delta(0)| \rightarrow 0$ a diferença entre as soluções $|\Delta(n)|$ cresce exponencialmente, ou seja,

$$\frac{\Delta(n)}{\Delta(0)} \approx \exp(hn), \quad h > 0, \quad (3.9)$$

então diz-se que o sistema tem dependência sensitiva a condições iniciais e é caótico [33].

O módulo 1 na equação do mapa significa que a cada iterada do mapa, subtrai-se o valor obtido da unidade até que o próximo valor a ser iterado seja menor que 1.

O sistema aqui estudado não é verdadeiramente uma rede de pequeno mundo devido a forma como foi construído. Em uma rede de pequeno mundo, o grau de agrupamento e a distância entre os sítios devem ser bem determinados. No entanto, aqui, considerou-se a probabilidade para um valor em que o sistema não fosse totalmente randômico, nem tão pouco apenas regular, mas também não se estudou apenas características de redes de pequeno mundo, que levam em conta, principalmente, a relação entre agrupamento e distância entre sítios.

3.3 Resultados e discussão

3.3.1 Identificação do tamanho da rede

Neste capítulo investigou-se aspectos espaço-temporais exibidos pelo sistema de mapas acoplados. A primeira busca se deu através de um número de mapas que fosse adequado para a análise do sistema. Este primeiro estudo ocorreu numericamente verificando-se que, para alguns valores diferentes de números de mapas na rede, o sistema apresentava um comportamento não esperado com relação às dinâmicas que estavam sendo analisadas. Desta forma, um número razoável de mapas que começou a ter uma resposta mais de acordo com o esperado foi $N = 3000$ e foi para este valor que o estudo do sistema foi feito. Também houve o estudo de casos com uma rede maior, no entanto, o tempo computacional para a verificação de entropia ou mesmo dos expoentes de Lyapunov, não foi tão viável, isto é, o tempo era longo demais para o propósito do trabalho.

Esta investigação aconteceu através do histograma do tempo de sincronização. Este é calculado através da busca da distância à variedade de sincronização. Quando esta medida atinge pela primeira vez um valor de tolerância, valor este con-

siderado, para o caso do mapa βx , como sendo de 10^{-14} e mantém-se neste valor ou em um valor menor por um tempo estimado de aproximadamente cem iterações, considera-se que a rede sincronizou e pega-se o tempo que a rede gastou para atingir pela primeira vez este valor. É possível verificar que, para redes de tamanho menores, o sistema possui um pico no tempo de sincronização para tempos muito pequenos. Esta situação não é verificada quando outras quantidades dinâmicas para o estudo da sincronização são estudadas, ou seja, decidiu-se estudar uma rede com maior número de sítios porque redes menores apresentaram um comportamento não esperado quanto ao tempo de sincronização. Isto é, para determinadas trajetórias, a rede sincronizava mais facilmente do que para outras. Portanto, a partir de uma rede com $N = 3000$ é que as várias condições iniciais utilizadas passam a atuar de uma maneira mais coerente, assim, por isso decidiu-se estudar uma rede deste tamanho. Esta verificação pode ser vista na figura 3.2 que mostra os diferentes comportamentos do sistema para diferentes tamanhos de rede.

Pode-se ver, a partir da figura 3.2(e) e (f), que a maioria das condições iniciais tendem a um estado completamente sincronizado muito rapidamente, enquanto algumas condições levam a um grande tempo, indicando que na dinâmica transversal da variedade de sincronização devem existir estruturas invariantes que atuam como armadilhas para as trajetórias que levam a estados não-sincronizados [48].

Com o tamanho da rede definido, passou-se a estudar a dinâmica do sistema através de seus possíveis estados sincronizados e do grau de caoticidade do sistema variando com os parâmetros da rede.

3.3.2 A entropia KS do sistema

É importante dizer que o estudo da rede é feito com condições de contorno periódicas, isto é, $x_n^{(N)} = x_n^{(0)}$ e condições iniciais, $x_n^{(i)}$, randômicas. Pelo fato de a rede ser caótica, diferentes condições iniciais podem levar a um estado diferente. Desta forma, foram utilizadas 30 condições iniciais diferentes, fazendo com que os resultados obtidos não sejam muito dependentes das condições iniciais escolhidas.

A dependência da entropia métrica com a razão entre o número de ligações aleatórias e o número total de sítios, considerando um valor fixo de $\varepsilon = 1,0$ é mostrada na figura 3.3(a), onde o sistema foi deixado evoluir por quinhentas mil iterações para ter-se certeza que um possível transiente muito longo não influenciasse as respostas do sistema. Também nesta mesma figura, mas em (b), é possível ver o comportamento do sistema através da entropia métrica em função do termo de

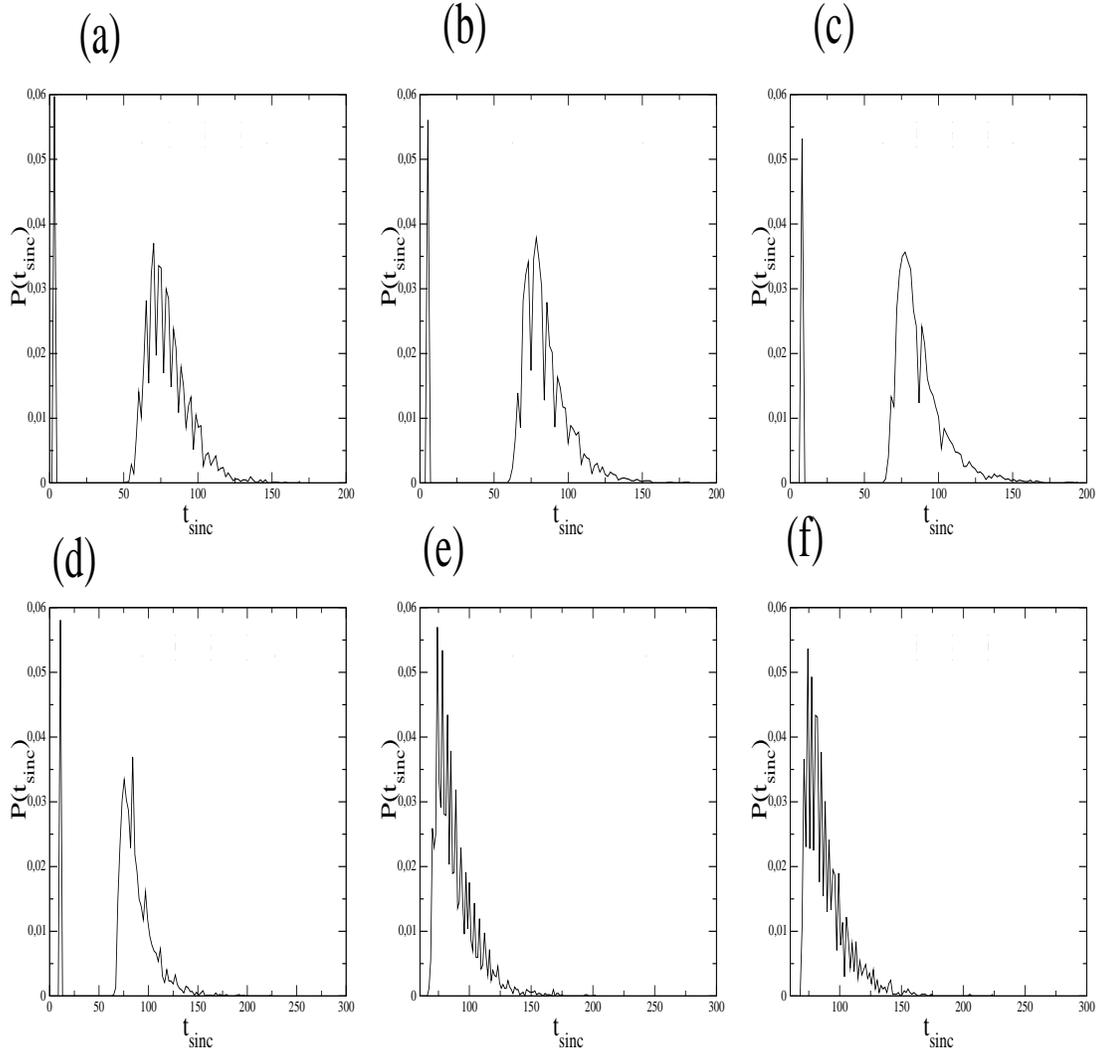


Figura 3.2: Histograma do tempo de sincronização em relação às condições iniciais para redes de diversos tamanhos com $\kappa = 30$ e $\varepsilon = 1,0$. a)50 mapas, b)200 mapas, c)500 mapas, d)1000 mapas, e)3000 mapas e f)5000 mapas. Em cada gráfico cinqüenta condições iniciais são utilizadas para que a distribuição $[P(t_{\text{sync}})]$, do tempo de sincronização, seja possível.

acoplamento ε , para um valor fixo da probabilidade igual a 1.

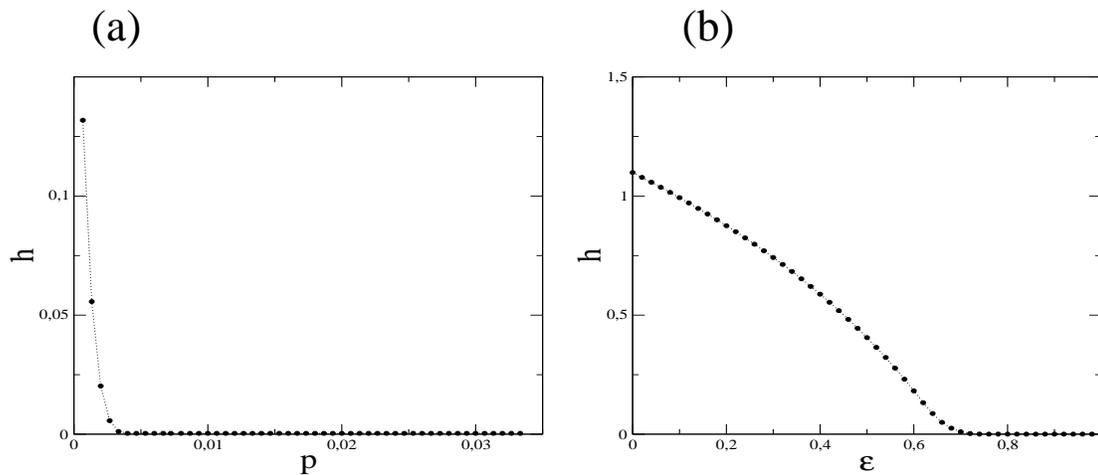


Figura 3.3: Densidade de entropia métrica (grau de caoticidade) para uma rede com acoplamentos regulares e randômicos. Em a) como função da probabilidade de ligações não-locais aleatórias com $\varepsilon = 1, 0$ e em b) como função do acoplamento local para $p = 1, 0$.

Quando os mapas estão fracamente acoplados, a densidade do grau de caoticidade é um pouco diferente do valor encontrado para um mapa, ou seja, $\ln\beta = 1,098$, quando $\beta = 3,0$, mas à medida que ligações não-locais são adicionadas no sistema, o valor desta grandeza diminui rapidamente, e após um valor crítico, ela se torna praticamente zero, tendendo para $\frac{\ln\beta}{N}$.

O fato da entropia métrica tender ao valor $\frac{\ln\beta}{N}$, normalmente, indica que a caoticidade dos mapas é diminuída pelo efeito dos acoplamentos, ou então, se está em uma situação onde existe sincronização completa entre os mapas da rede, e o sistema como um todo apresenta apenas um expoente de Lyapunov positivo.

3.3.3 Caracterização dos estados sincronizados

Além do uso da entropia métrica como um auxiliar, os estados sincronizados do sistema foram estudados através do comportamento do parâmetro de ordem, da distância à variedade de sincronização e pelo padrão espaço-temporal da rede.

O parâmetro de ordem indica que o sistema está completamente sincronizado quando seu valor é igual a um. A figura 3.4 mostra o comportamento do sistema,

através deste parâmetro, para dois diferentes valores de probabilidade p . É possível verificar que para um valor de p da ordem de 10^{-2} ; o sistema possui comportamento sincronizado, enquanto que para valores de p de ordem menor, a sincronização não ocorre. Em (b) é possível verificar o comportamento deste sistema através da variância do parâmetro de ordem. Esta figura mostra que para valores de p menores que aproximadamente 0,005, considerando $\varepsilon = 1,0$, o sistema não apresenta estados sincronizados. Isto se deve, provavelmente, devido a presença de ligações aleatórias que facilitam a ocorrência de estados sincronizados. Dessa forma, para valores menores de p , o sistema é mais influenciado apenas pelas ligações de primeiros vizinhos, fazendo com que a rede não apresente sincronização.

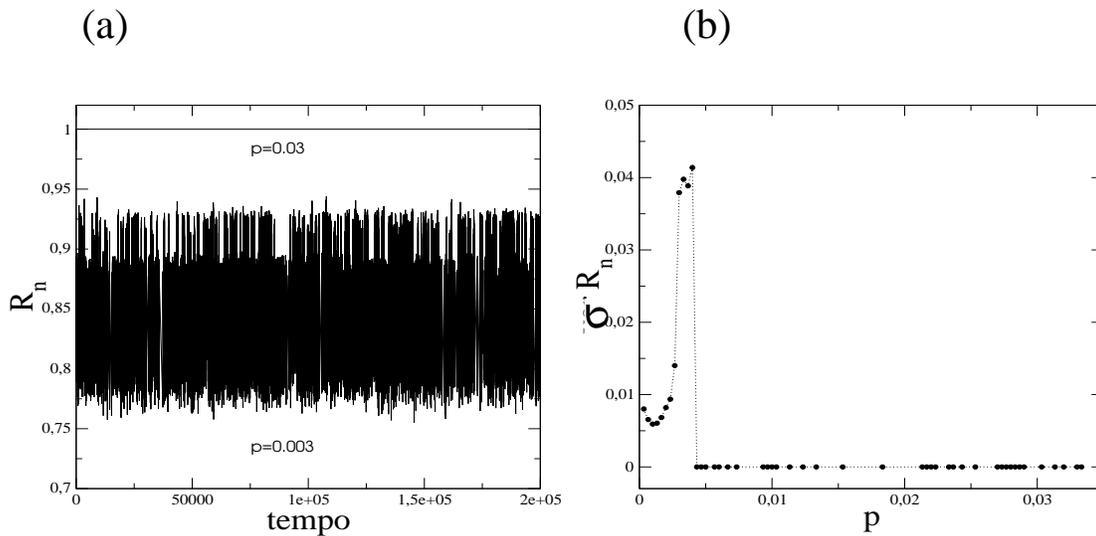


Figura 3.4: a) Comportamento do parâmetro de ordem com o tempo para dois diferentes valores da probabilidade, retirando o transiente, b) variância do parâmetro de ordem em função da probabilidade.

Um valor crítico para que ocorra a transição de um estado não sincronizado para um completamente sincronizado, depende do parâmetro de acoplamento ε . Através da figura 3.5 é possível verificar que, com o aumento de p , existe também um aumento geral da magnitude do parâmetro de ordem médio, mostrando a formação de um número relativamente grande de platôs de sincronização ao longo da rede. Estes platôs são estruturas que se mantêm constantes no tempo, isto é, com o passar do tempo o sistema continua com parâmetro de ordem igual a unidade, no entanto, em alguns momentos, o sistema sai desse estado apresentando estouros, ou seja, o

estado sincronizado é perdido durante um intervalo. Como o acoplamento torna-se maior, o aumento da magnitude do parâmetro de ordem médio não é estritamente monotônico e pode apresentar alguns “estouros” devido a estruturas localizadas que constituem a dinâmica da rede. Estas estruturas podem representar supressão de caos, isto é, para alguns valores dos parâmetros, devido aos acoplamentos existentes, o sistema pode perder estados caóticos, apresentando provavelmente, algumas regiões de comportamentos periódicos.

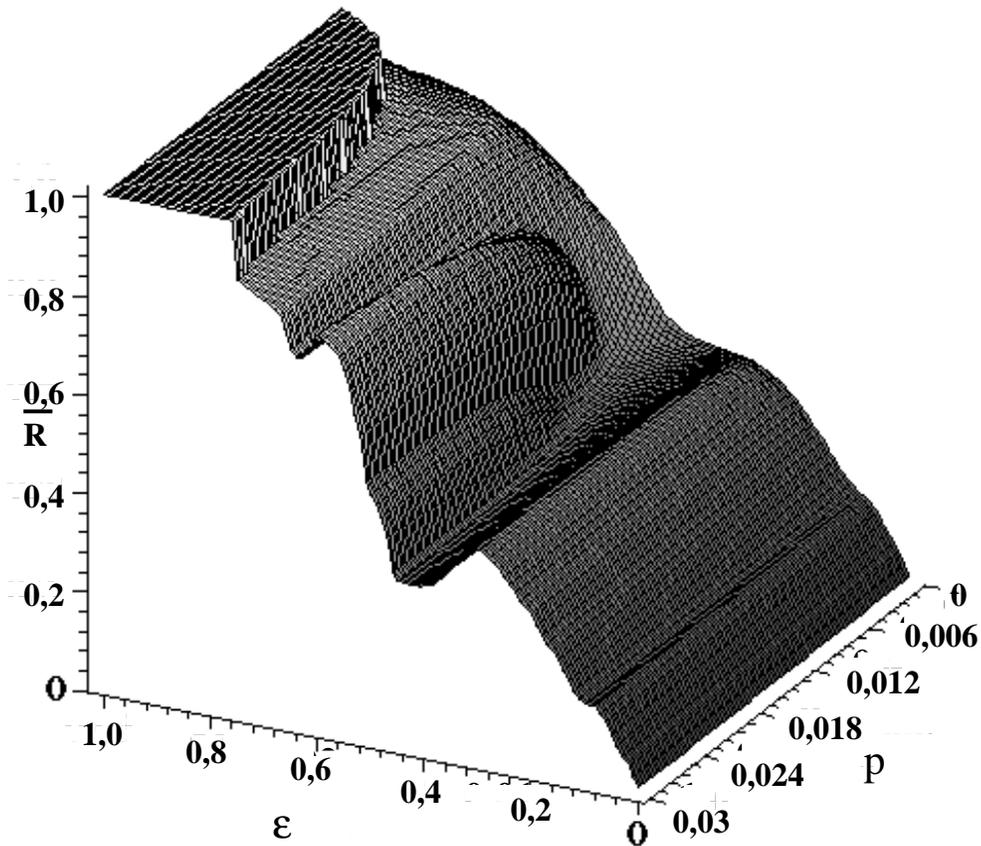


Figura 3.5: Parâmetro de ordem médio como função da probabilidade de ligações não-locais p e do acoplamento local ε .

Para p aproximadamente igual a 0,03, o parâmetro de ordem torna-se constante e próximo de um, o que, como já citado, caracteriza a presença de um estado

completamente sincronizado, isto é, todos os mapas da rede estão oscilando em uníssono caoticamente.

Uma outra forma de estudar o comportamento sincronizado do sistema é verificando o comportamento da distância à variedade de sincronização. Quando esta distância é zero, temos um estado sincronizado completamente, quando diferente deste valor, não há sincronização na rede. Comparando os dois diagnósticos de estados sincronizados, pode-se confirmar a presença de sincronização, neste sistema, para alguns valores de parâmetros, o que pode ser visto na figura 3.6(a). A variância da distância está representada na figura 3.6(b). Através dela, pode-se perceber uma clara transição do estado não sincronizado para o estado completamente sincronizado, para valores de $p \approx 0.005$, o que coincide com os valores encontrados para o parâmetro de ordem.

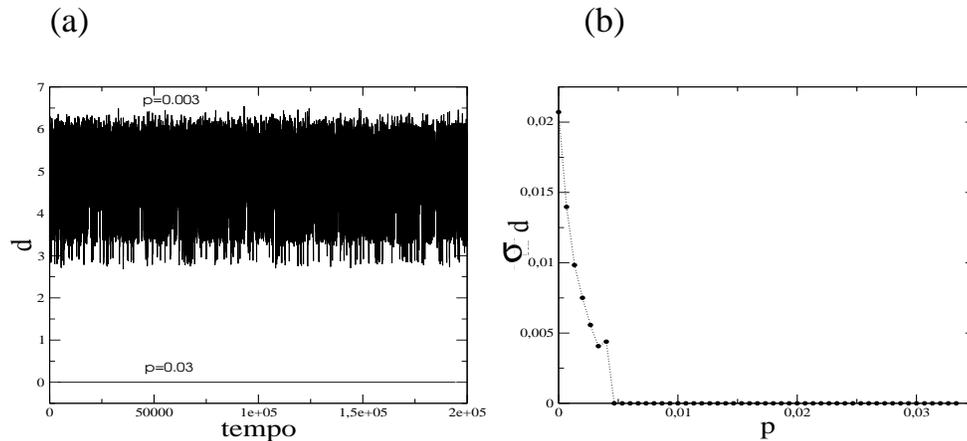


Figura 3.6: a) Distância à variedade de sincronização para 3000 mapas com $\varepsilon = 1, 0$ e em b) variância da distância como função de p .

Utilizando o parâmetro de ordem como referência, ou seja, pegando pontos quando o parâmetro de ordem era igual a um, analisa-se um perfil da rede na área de transição entre os estados não sincronizados e sincronizados, de acordo com os valores de p e ε . Este comportamento é visto na figura 3.7. Aqui, da mesma forma que verificado na figura 3.5, existe a região de fronteira entre estados sincronizados e não sincronizados, levando em consideração ambos os parâmetros de acoplamento. É possível verificar que para valores de p até 0,03 e valores de $\varepsilon < 0, 75$, não existem estados sincronizados, ou seja, mesmo as ligações aleatórias ajudando no processo de sincronização, as ligações locais afetam fortemente estes estados. Ou seja, quando o

número de ligações aleatórias é no máximo 90 por sítio, valores menores do parâmetro de acoplamento ε influenciam bastante a conexão entre os sítios, o que faz com que o sistema não atinja estados sincronizados.

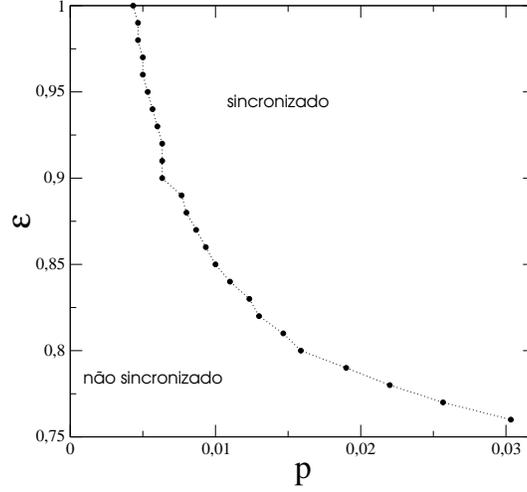


Figura 3.7: Regiões de estados da rede completamente sincronizada e não sincronizada.

Da condição de estado completamente sincronizado é possível chegar a uma igualdade, nesta rede em particular, para uma condição dos termos da matriz I_{ij} de acoplamento. Esta condição mostra que existirá apenas sincronização para um determinado valor de κ , isto é, para estados sincronizados ($x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = \dots = x_n^{(N)}$), tem-se, da equação 3.5,

$$\zeta = (1 - \varepsilon)f(\zeta) + \frac{\varepsilon}{4 + \kappa}[4f(\zeta) + \sum_{j=1}^{\kappa} f(\zeta)I_{ij}], \quad (3.10)$$

$$\zeta = (1 - \varepsilon)\zeta + \frac{\varepsilon}{4 + \kappa}[4\zeta + \zeta \sum_{j=1}^{\kappa} I_{ij}],$$

$$\sum_{j=1}^{\kappa} I_{ij} = \kappa = Np,$$

ou seja, o número total de números 1 em cada linha da matriz I_{ij} é igual ao número de ligações não-locais por sítio. Assim, de outra forma, não existe sincronização

neste sistema, o que quer dizer que se o número de ligações não-locais fosse diferente para cada sítio, estados sincronizados não seriam possíveis.

Da figura 3.7 utilizou-se a região de fronteira entre os estados sincronizados para mostrar o padrão espaço-temporal da rede. Desta forma é possível verificar como o aumento ou a diminuição das ligações aleatórias, no sistema, com ε fixo, altera seus estados sincronizados. Assim, a figura 3.8 através do espaço-tempo, mostra como o sistema varia seu comportamento frente a diferentes valores de p .

Para valores de p menores que o valor crítico da região de fronteira, pode-se perceber que não há muita coerência espacial entre os sítios, caracterizando desta forma uma rede não sincronizada, esta situação é verificada em 3.8(a) onde $\kappa = 15$. Com o aumento de κ para 27, é possível verificar em 3.8(b) que existe alternância entre estados sincronizados e não sincronizados caracterizando, nesta situação, um comportamento intermitente de ambos regimes; uma característica comum de redes complexas na transição para comportamento ordenado [62]. Com o aumento de apenas uma ligação aleatória, por sítio, isto é, $\kappa = 28$, o sistema está na região de transição, ou seja, ele está chegando à variedade de sincronização, passando de um comportamento não sincronizado para um estado sincronizado, e a região de intermitência, isto é, região onde existem estados sincronizados e estouros irregulares conjuntamente, passa a ter um comportamento laminar mais acentuado, o que pode ser visto em 3.8(c). Já, nesta mesma figura, em (d), onde $\kappa = 30$, percebe-se a dinâmica completamente sincronizada do sistema e com isso verifica-se que o efeito, ao adicionar uma ligação aleatória a mais, por sítio, é a modificação da estrutura do sistema.

Com isso, em uma seção posterior será analisada a relação entre este sistema e uma outra rede de mapas acoplados através de lei de potência, para saber o que de fato estas ligações aleatórias influenciam na rede aqui estudada.

3.3.4 Tempo de sincronização

O tempo de sincronização, que é o tempo gasto para o sistema atingir a variedade de sincronização, não está relacionado diretamente ao ponto onde se inicia a trajetória, isto é, não é porque a condição inicial está mais próxima a variedade de sincronização que o tempo de sincronização será menor. A figura 3.9 mostra que isto não é verdadeiro, ou seja, pontos escolhidos mais próximos à variedade de sincronização ($d=15,7591$), não sincronizam mais rapidamente do que pontos um pouco mais afastados ($d=15,9304$). Esta situação foi explicada no capítulo anterior.

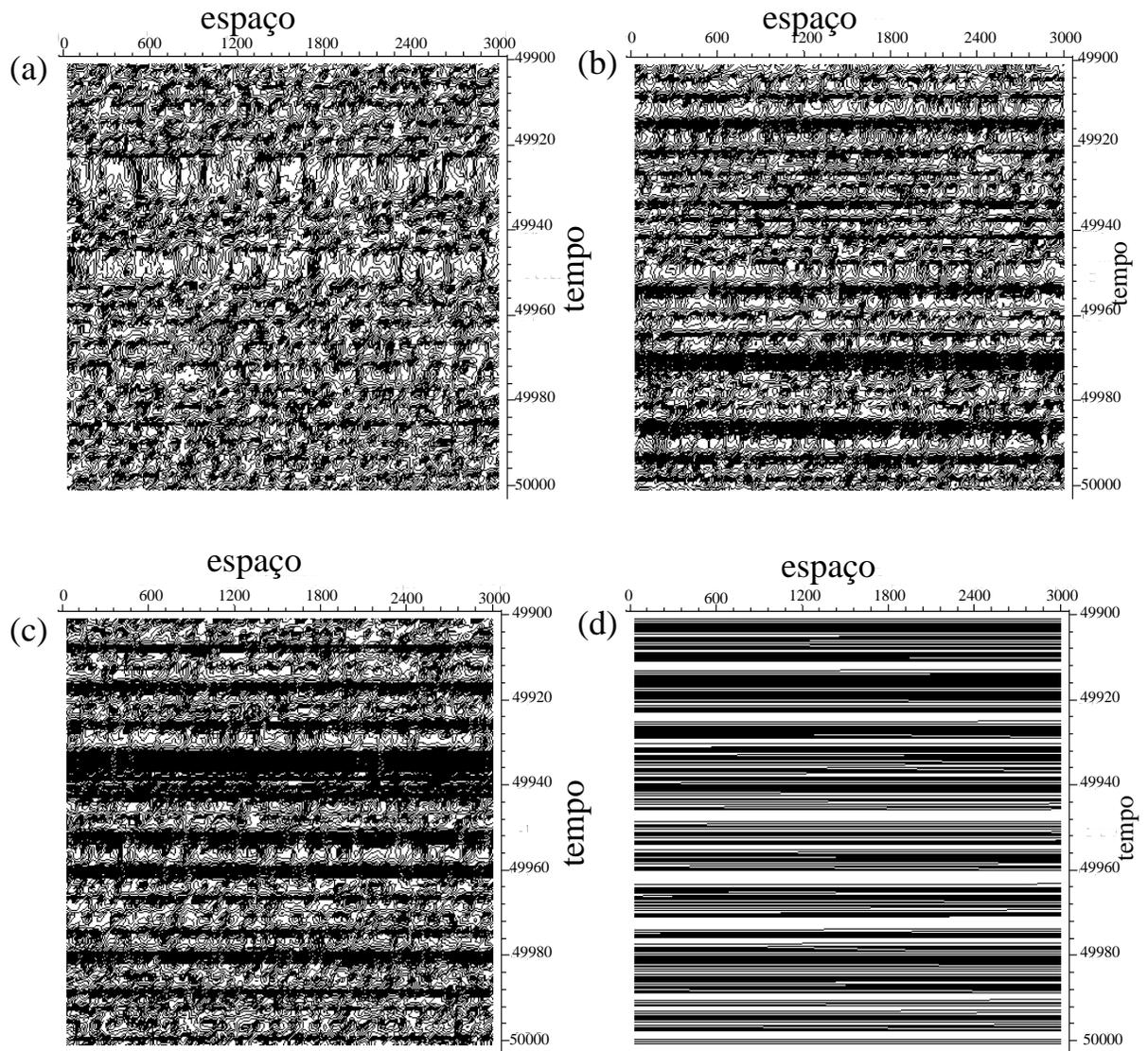


Figura 3.8: Comportamento espaço-temporal da rede para um valor fixo de $\varepsilon = 0,85$. Em (a) $\kappa = 15$, (b) $\kappa = 27$, (c) $\kappa = 28$ e (d) $\kappa = 30$. Linhas brancas e pretas retas indicam comportamento sincronizado. Quanto menor a existência de retas, menor a sincronização ou inexistência de estados sincronizados.

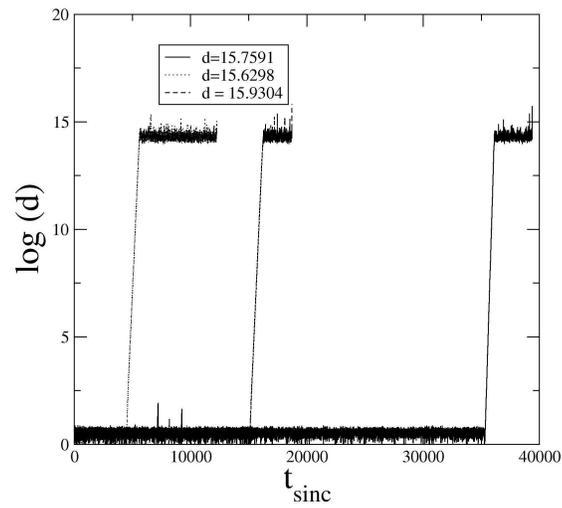


Figura 3.9: Cálculo da distância à variedade de sincronização ($-\log(d)$) *versus* tempo de sincronização para uma rede de 3000 mapas com 13 ligações não-locais aleatórias. Para trajetórias mais próximas da variedade da sincronização, o tempo para o sistema sincronizar pode ser maior.

Continuando com uma rede de três mil mapas, passa-se agora a verificar como o tempo de sincronização varia com o número de ligações aleatórias da rede para um ε fixo, para diferentes números de condições iniciais e também para um p fixo com ε variando. Este estudo é importante para determinar o tempo computacional gasto no cálculo de estados sincronizados da rede, e também para analisar os valores de parâmetros de acoplamento relacionados com os estados de sincronização completa.

Na figura 3.10 é plotado o tempo gasto para o sistema sincronizar (t_s) como função do acoplamento local ε para um valor fixo da probabilidade igual a 0,03. A variação mostrada na figura é muito grande com o decréscimo do termo de acoplamento local. Na realidade, esta é uma característica esperada do sistema, já que o aumento do parâmetro de acoplamento ε ajuda o sistema a sincronizar mais rapidamente. Entretanto, é importante salientar aqui que quando este termo (ε) é maior que 1, o tempo de sincronização volta a aumentar. Estudo este, que é comprovado analítica e numericamente, por trabalhos com redes que são acopladas através de leis de potência [10], [63], [64] e que mostram dois regimes de dessincronização.

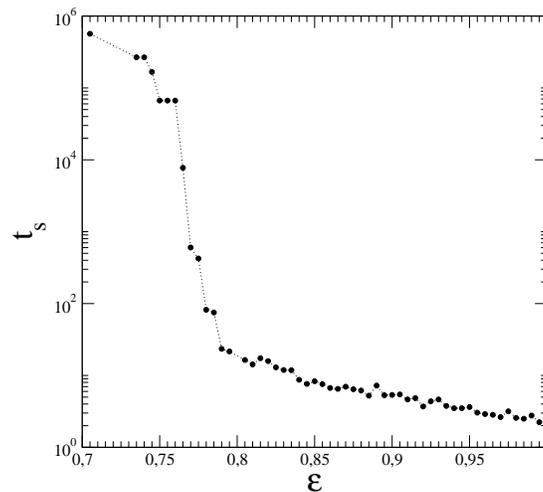


Figura 3.10: Tempo de sincronização como função do parâmetro de acoplamento ε , para $p = 0,03$. Aqui é possível perceber que para valores de $\varepsilon < 0,7$ o tempo gasto para a rede sincronizar é muito grande.

Além disso, é verificado também o tempo de sincronização da rede em função da distância para diferentes valores de κ . Através da figura 3.11 é possível verificar

que o valor mínimo de κ , para que exista sincronização, quando $\varepsilon = 1, 0$, é 12, para valores menores que este, a rede não sincroniza enquanto que para valores maiores, o tempo de sincronização tende a diminuir. Com este resultado é possível verificar que além do acoplamento local, o acoplamento aleatório também influencia o tempo de sincronização e os estados sincronizados do sistema. Isso vem do fato de que estas ligações fazem o sistema, de uma forma geral, encaminhar-se para um comportamento semelhante dos sítios ligados.

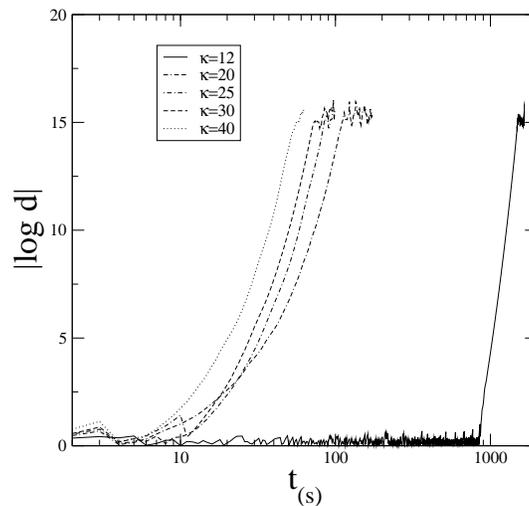


Figura 3.11: Módulo da distância *versus* o tempo de sincronização para diferentes valores do parâmetro de acoplamento não local para uma rede de 3000 mapas. Como se está considerando o logaritmo da distância à variedade de sincronização, a curva deixa de existir quando a precisão da máquina é atingida. A figura mostra que valores de $\kappa < 12$ fazem com que o sistema não atinja estados sincronizados.

3.3.5 Uma relação entre o sistema estudado e uma rede de mapas com acoplamento lei de potência

Nesta seção é feita uma simples comparação, através do comportamento da rede via entropia e um outro aspecto que será oportunamente definido, entre o sistema até agora estudado e uma rede com acoplamento lei de potência como em [29], [65], ou seja, como representado por 2.7 com a mesma condição de normalização,

mesmo valor de η , número ímpar de sítios e condição de contorno periódica.

Aqui é importante saber que este sistema é bem conhecido para uma rede com mapas $\beta x \pmod{1}$ sendo $\beta = 3$, possuindo condições de contorno periódicas e condições iniciais randômicas, estudado em [29], [65], [66]. Ele apresenta um comportamento que pode ser considerado como uma interpolação entre um acoplamento global (campo médio), onde todos os sítios interagem entre si, e um acoplamento local (primeiros vizinhos), onde apenas os primeiros vizinhos interagem no acoplamento da rede. Além disso, nos trabalhos citados acima, para este sistema, o espectro de Lyapunov é conhecido analiticamente. Dos trabalhos existentes na literatura, sabe-se que para este sistema, quando $\alpha \rightarrow \infty$ existe um comportamento de acoplamento local e quando $\alpha = 0$ o acoplamento é global, ou seja, todos os sítios interagem entre si.

Uma comparação entre os dois sistemas é de interesse porque o sistema com acoplamento lei de potência é bem conhecido na literatura [29], [66], [67], [68], sendo já estudado tanto numérica quanto analiticamente através da sua dinâmica de sincronização. Ainda existem algumas questões abertas sobre como as conexões não-locais de um sistema de pequeno mundo afetam a dinâmica espaço-temporal do sistema, em particular, como a caoticidade e a dimensão do atrator são afetadas quando do aumento das ligações aleatórias κ .

Para uma comparação entre este sistema de lei de potência e o até aqui estudado, usa-se uma rede de 201 mapas acoplados. Este valor foi escolhido para diminuir o tempo computacional gasto, que já para este valor é de alguns dias quando se calcula a entropia métrica do sistema, devido às multiplicações de matrizes utilizadas.

A figura 3.12 mostra o comportamento da entropia para ambos os sistemas. Através dela pode-se perceber que para o sistema até agora estudado 3.12(a), quando o termo de acoplamento ε , também conhecido como acoplamento resistente(ε) aumenta, a entropia do sistema tem uma queda monotônica, o mesmo acontecendo para o sistema com acoplamento lei de potência. No caso do sistema de rede semelhante a pequeno mundo, quando não existe acoplamento aleatório, ou seja, $p = 0$, a rede é puramente regular com acoplamento de primeiros e segundos vizinhos e para este caso a entropia aumenta com o aumento de ε . Com o aumento das ligações aleatórias κ , para um valor fixo de ε , a entropia diminui e com o aumento de ε a entropia volta a aumentar. É conhecido que redes acopladas localmente, com acoplamento forte, aumentam sua entropia [69], no entanto, a adição das ligações aleatórias

neste sistema reduzem este efeito. Não somente a diminuição da entropia torna-se monotônica com o aumento de p , mas também seu valor diminui rapidamente para próximo de zero [70]. Esta transição para um pequeno valor da entropia torna-se mais acentuada com o aumento das ligações aleatórias κ .

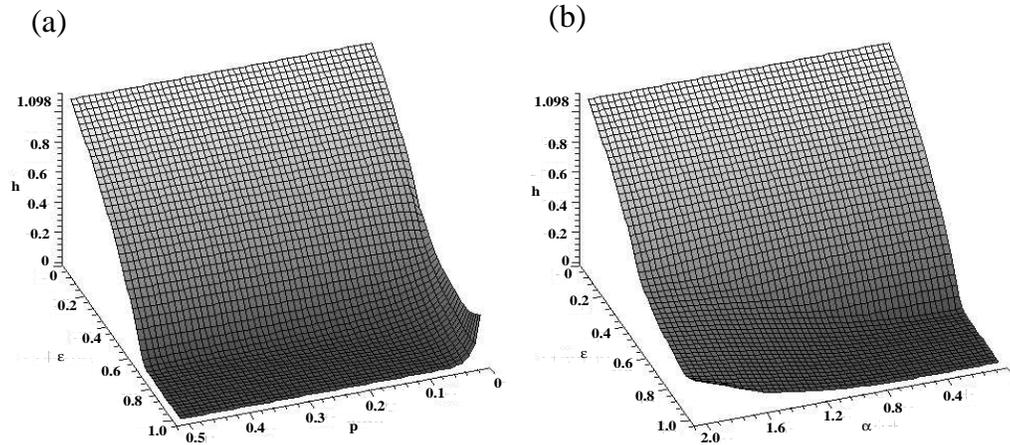


Figura 3.12: Comportamento da entropia para ambos os sistemas. Em (a) rede tipo pequeno mundo com h versus p e ε . Em (b) rede com acoplamento tipo de lei de potência com h versus α e ε . Para os dois casos a rede possui 201 sítios.

No caso da rede com acoplamento tipo lei de potência, a figura 3.12(b) mostra que quando $\alpha = 0$, ou seja, acoplamento global, o valor médio da densidade de entropia é próximo a zero quando ε é grande, e após um valor crítico de ε , aproximadamente igual a 0,6, cresce monotonicamente até atingir seu valor máximo. Este efeito é compreendido através do espectro de Lyapunov para o caso de acoplamento global [66], ou seja, o primeiro expoente é sempre positivo para $\beta > 1$, os outros $N - 1$ expoentes são positivos desde que $\varepsilon < \varepsilon_{critico} = 1 - \frac{1}{\beta}$, assim a entropia é pequena e tende a desaparecer quando $N \rightarrow \infty$, mostrando que para esta rede, 201 sítios têm um comportamento aproximado ao de um caso para limite termodinâmico.

Para um valor de ε grande, a entropia tem um valor positivo com o aumento de α . Para α grande o acoplamento é efetivamente de primeiros vizinhos e mesmo um valor de ε pronunciável não é suficiente para mudar a dinâmica caótica de cada mapa, embora a randomicidade seja menor para acoplamento forte do que para acoplamento fraco.

Uma outra forma de comparar os sistemas é através da dimensão de Lyapunov. Esta é uma análise de interesse porque a conjectura é de que a dimensão de Lyapunov

punov é a mesma que a dimensão de informação do atrator [33]. Seja $\lambda_j (j = 1, 2, \dots)$ a representação dos expoentes de Lyapunov do sistema e q o maior inteiro para o qual $\sum_{j=1}^q \lambda_j$ é positivo, então a dimensão de Lyapunov (D) é dada por:

$$D = \begin{cases} 0 & \text{se não existe } q \\ q + \frac{1}{|\lambda_{q+1}|} \sum_{i=1}^q \lambda_i & \text{se } q < N \\ N & \text{se } q = N \end{cases}$$

o que significa que a dimensão de Lyapunov é zero caso a soma dos expoentes seja negativa, possui o mesmo valor do tamanho da rede caso todos os expoentes, na sua soma, sejam positivos e, valores intermediários na situação em que o maior inteiro para o somatório positivo seja menor que o tamanho da rede. Enquanto a dimensão de informação é dada por:

$$D_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{a(\delta)} \frac{\mu_i \ln \mu_i}{\ln \delta}, \quad (3.11)$$

onde $a(\delta)$ é o número de cubos em uma grade de tamanho δ necessário para cobrir o atrator inteiro e μ_i é a medida natural do sistema dada por:

$$\mu_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\eta(C_i, \mathbf{x}_0, T)}{T}, \quad (3.12)$$

onde $\eta(C_i, \mathbf{x}_0, T)$ é a quantidade de tempo que a órbita, originada em \mathbf{x}_0 , gasta em C_i (um cubo) no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$.

A figura 3.13 mostra a comparação entre os sistemas através da dimensão de Lyapunov. Nela pode-se perceber que o comportamento dos sistemas é idêntico, diferenciado apenas pelos valores dos acoplamentos, isto é, $p = 0$ para a rede de pequeno mundo corresponde, na rede de lei de potência, a $\alpha \rightarrow \infty$. E $\alpha = 0$ na rede de lei de potência, corresponde a p grande no sistema em estudo neste capítulo. Um valor pequeno de D indica que o atrator do sistema torna-se de baixa dimensão. Essa diminuição na dimensão do atrator mostra que a medida natural do sistema fica mais restrita a uma pequena região do espaço de fase. As medidas de um sistema são importantes porque através delas é possível especificar qual a porção do atrator ou atratores do sistema, está em determinada região.

Através da comparação entre os sistemas, é possível concluir que apesar de não totalmente equivalentes, a rede de pequeno mundo aqui estudada no limite $p \rightarrow 1$, tem as mesmas propriedades do acoplamento global obtido no limite $\alpha \rightarrow 0$

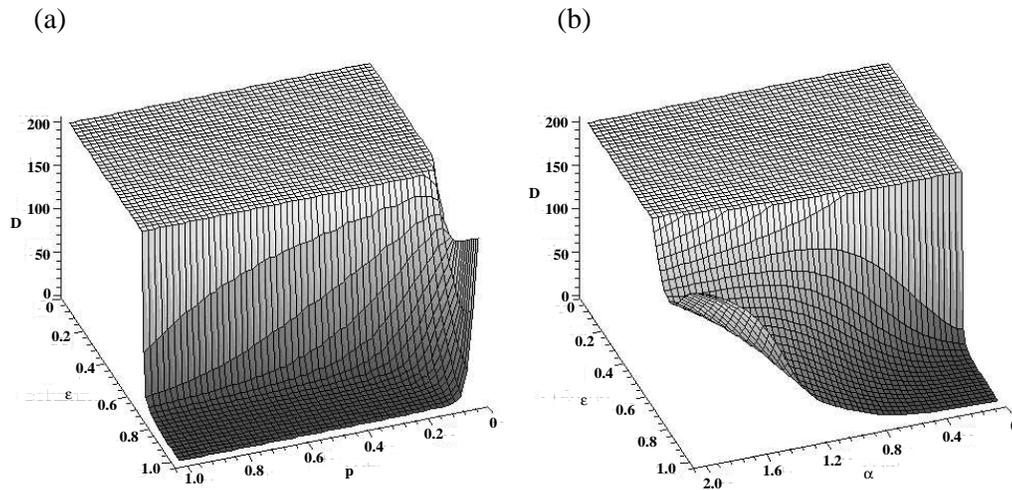


Figura 3.13: Comportamento da dimensão de Lyapunov para ambos os sistemas. Em (a) rede tipo pequeno mundo com D versus p e ε . Em (b) rede com acoplamento tipo de lei de potência com D versus α e ε . Para ambos os casos a rede possui 201 sítios.

do acoplamento em lei de potência. Desta forma, esta analogia leva a crer, que assim como no caso da rede de lei de potência [66], também para o caso do sistema aqui estudado, existe uma transição para caos de baixa dimensão. Esta transição ocorre para um valor crítico de ε aproximadamente igual a $\frac{2}{3}$, quando trata-se do caso de acoplamento global. No entanto, é importante salientar que esta analogia pode ser grandemente limitada, já que as interações são um tanto quanto distintas em cada um dos sistemas e que a forma de acoplamento, apesar de levar a um resultado final semelhante, pode ter outras implicações que aqui não foram estudadas.

Capítulo 4

Osciladores acoplados

O trabalho feito e discutido neste capítulo é sobre dois osciladores não-lineares acoplados. Aqui verifica-se o comportamento do sistema através do expoente de Lyapunov a tempo finito e também, na presença de um termo de perturbação aleatória, a sincronização do sistema e as diferentes rotas para o caos. Além disso, algumas relações com comportamento cardíaco são feitas, usando, em alguns momentos, este sistema como um modelo teórico para o coração.

4.1 O modelo de Liénard

O oscilador de van der Pol (VDP) foi primeiramente estudado em um trabalho de 1928 por van de Pol e van der Mark [71]. Este oscilador consistia de um circuito eletrônico composto de uma lâmpada de neon, que possui um comportamento não-linear, um capacitor, um resistor e uma bateria, e sua esquematização representava a dinâmica de um comportamento cardíaco. A partir deste trabalho, muitos outros estudos com este tipo de osciladores fizeram modelamentos cardíacos e estudaram seus comportamentos dinâmicos de diversas maneiras [43], [72], [73], [74]. Além disso, este mesmo oscilador tem aplicações também em tubos de vácuo em circuitos elétricos, e na presença de uma força externa pode apresentar aspectos dinâmicos variados, incluindo a presença de caos, intermitência, entre outros.

As equações de Liénard podem representar um circuito triodo de frequência natural w_0 , forçado por uma corrente alternada de amplitude ρ e frequência w . A curva característica do triodo pode ser tomada como um polinômio de terceiro grau na grade de voltagem, cuja forma normalizada é representada pela variável x .

O circuito triodo, na forma adimensional, tem a forma:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 + \tau x - 1)\dot{x} + w_0^2 x = \rho \text{sen}(wt), \quad (4.1)$$

onde os parâmetros μ e ρ dependem dos coeficientes da curva característica do triodo. O oscilador de van der Pol, que é um caso particular da equação de Liènard, é representado matematicamente, da seguinte forma:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (y^2 - n) \frac{dy}{dt} + w^2 y = F(t), \quad (4.2)$$

onde $\frac{d^2 y}{dt^2}$ é o termo inercial, w^2 freqüência do modo normal, $(y^2 - n) \frac{dy}{dt}$ injeção ou dissipação de energia, sendo $y^2 \frac{dy}{dt}$ o termo não-linear e $F(t)$ uma força externa que pode ser periódica ou não. Esta é uma equação diferencial ordinária de segundo grau que pode ser transformada em um sistema de duas ou mais equações diferenciais ordinárias de primeiro grau.

O sistema acoplado, aqui estudado, é uma variação do oscilador de van der Pol, já que no lugar do termo $(y^2 - n)$, existe uma função que possui duas raízes como resultado. Dessa maneira, o sistema apresenta uma forma mais idêntica à equação de Liènard e já foi trabalhado através dos seus tipos de sincronização tentando fazer um modelo fenomenológico do coração [11], ou seja, usando cada oscilador como um marcapasso do coração e acoplando-os para tentar modelar alguns tipos de arritmias. O estudo mostrado neste capítulo segue com as mesmas equações do estudo fenomenológico do coração, levando em consideração apenas aspectos dinâmicos do acoplamento. Os osciladores acoplados, trabalhados neste capítulo, são representados da seguinte maneira:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad (4.3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = G(x_1)x_2 - b_1 x_1 + c_1(x_3 - x_1) + a \text{sen}(ft),$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4,$$

$$\frac{dx_4}{dt} = G(x_3)x_4 - b_2 x_3 + c_2(x_1 - x_3),$$

sendo,

$$G(x_n) = \frac{4h}{(w_2 - w_1)}(x_n - w_1)(x_n - w_2), \quad (4.4)$$

onde h representa a ordenada máxima de uma parábola com raízes w_1 e w_2 e tendo seu valor sempre igual a $-1,6$, os valores de w_1 e w_2 também são sempre constantes e respectivamente iguais a $-0,2$ e $1,9$. Estes valores foram escolhidos de forma a se trabalhar sempre com o sistema forçado caótico. Do sistema, c_1 e c_2 representam os termos de acoplamento, b_1 e b_2 os modos normais e a o termo de forçamento da função periódica. Os valores numéricos destes parâmetros serão discutidos no decorrer do capítulo.

4.2 Sistema unidirecional

Relacionado aos conceitos anteriormente definidos, os resultados que serão apresentados a seguir, são estudados com dois osciladores acoplados unidirecionalmente, levando em consideração seu aspecto hipercaótico.

O estudo deste sistema foi feito considerando os seguintes valores de parâmetros: $b_1 = 1,0$; $b_2 = 0,66$; $c_1 = 0,0$; $a = 0,95$ e $f = 1,0$. O valor de a foi escolhido devido ao fato de se saber que para este valor o sistema mostrava comportamento caótico, os modos normais, b_1 e b_2 foram escolhidos de forma a modelar a frequência com que os nodos cardíacos oscilam, uma motivação usada para dois outros trabalhos [11], [43] e o termo de acoplamento nulo indica que o sistema apresenta acoplamento unidirecional.

Devido ao fato deste sistema possuir hipercaos, ou seja, para determinados valores de c_2 ele ter dois expoentes de Lyapunov a tempo infinito positivos, como pode ser visto em 4.1, resolveu-se analisar o comportamento do segundo maior expoente de Lyapunov a tempo finito do sistema e percebeu-se que este oscila em torno de zero.

A presença dessa oscilação no expoente de Lyapunov a tempo finito, como já discutido anteriormente, pode representar a perda de confiabilidade do sistema, já que este comportamento reflete a variação do número de dimensões instáveis ao longo da trajetória [50]. Aqui, quando os dois osciladores são acoplados, é introduzido no sistema um subespaço tangente adicional, que é transverso à variedade de sincronização. Quando este acoplamento é diferente de zero, algumas órbitas periódicas instáveis, dentro da variedade de sincronização, perdem ou ganham direções estáveis, assim, o acoplamento entre os osciladores pode gerar a perda de confiabilidade do sistema numérico.

Com este resultado em mãos pôde-se obter uma aproximação numérica para

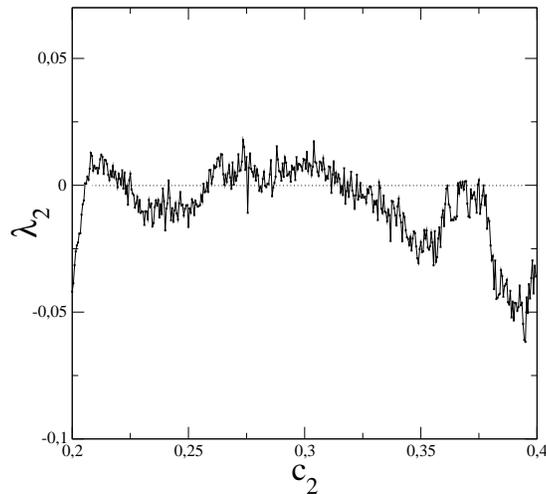


Figura 4.1: Segundo maior expoente de Lyapunov a tempo infinito.

a probabilidade $P(\lambda_2(50))$ que é a probabilidade em que os expoentes de Lyapunov de tempo 50 admitem valores entre λ_2 e $\lambda_2 + d\lambda_2$ para este dado tempo, sendo que para o atrator deste sistema é λ_2 quem flutua erratically pelo zero, considerando um grande número de trajetórias com comprimento finito. Na figura 4.2 existem três distribuições de tempo 50, obtidas para diferentes valores do parâmetro de bifurcação c_2 , que é o acoplamento constante.

A figura em questão é obtida considerando o expoente de Lyapunov a tempo finito. O valor a cada 50 tempos deste expoente é obtido, para uma iteração de 10^6 tempos, e a distribuição de probabilidade é mostrada na figura.

Para $c_2 = 0,3280$ vê-se que a distribuição é quase totalmente negativa e para $c_2 = 0,3260$ a distribuição é quase totalmente positiva, indicando que não há passagem do expoente finito, para estes valores, pelo zero, e portanto a trajetória numérica representa satisfatoriamente a trajetória do sistema verdadeiro. No entanto, para $c_2 = 0,3269$ a distribuição é próxima a uma gaussiana centrada em zero, para este caso percebe-se que existem, em média, valores positivos e negativos de direções na trajetória. Este valor de c_2 é o parâmetro crítico e caracterizado por c_2^* . Como o sistema já é não-hiperbólico, aqui, este acontecimento não demonstra a perda de hiperbolicidade do sistema, mas indica que para este valor de acoplamento, considerando-se um sistema real, o resultado numérico seria falho e não necessaria-

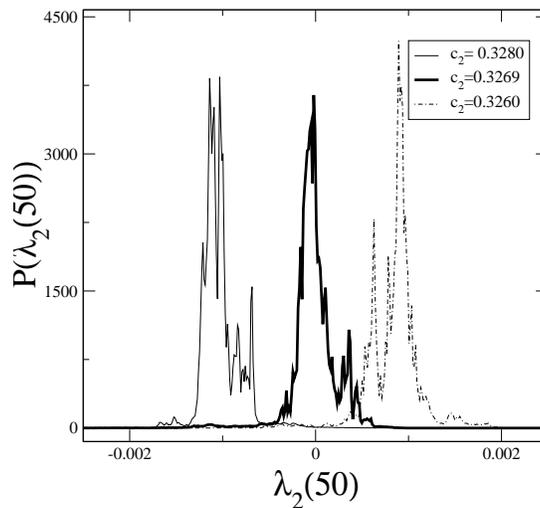


Figura 4.2: Distribuição de probabilidade para o expoente de Lyapunov a tempo finito, com tempo 50 para diferentes valores de c_2 .

mente mostraria um resultado exato.

Interessante também é considerar a fração de expoentes de Lyapunov a tempo finito positivos, isto é,

$$\phi(n) = \frac{\int_0^{\infty} P(\lambda_c(x_0, n), n) d\lambda_c}{\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda_c(x_0, n), n) d\lambda_c}, \quad (4.5)$$

o que é visto na figura 4.3. Nela é possível verificar que o início da perda de confiança no sistema numérico do sistema pode ser apontada a partir de onde esta fração positiva começa a aumentar partindo do zero, ou seja, quando a distribuição de $\lambda_2(50)$ inicia seu desenvolvimento em uma cauda positiva ou negativa, dependendo da direção que foi considerada.

Por exemplo, na figura 4.2, pode ser visto que para $c_2 \gtrsim c_2^*$ a distribuição $P(\lambda_2(50))$ não tem praticamente valores positivos. A figura 4.3 indica que a fração de valores positivos está próxima a zero e cresce subitamente para um valor próximo da unidade, em uma íngreme angulação, quando c_2 cruza c_2^* e este valor indica uma fração positiva de $\phi(50) = \frac{1}{2}$.

É importante salientar que estes resultados foram obtidos com acoplamento unidirecional, onde para alguns valores do parâmetro c_2 o sistema passava de caótico

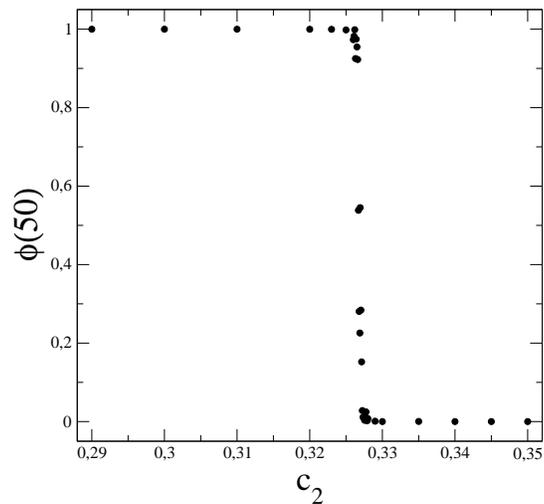


Figura 4.3: Fração dos expoentes de Lyapunov a tempo finito positivos na vizinhança de c_2^* .

para hipercaótico, onde acontecia a passagem do expoente de Lyapunov por zero para alguns valores do parâmetro de acoplamento.

4.3 O sistema bidirecional

A partir de agora o sistema passa a ser estudado do ponto de vista do atrator caótico, o que o difere do até agora trabalhado é a sua forma de acoplamento que passa a ser bidirecional, ou seja, tanto o primeiro oscilador é influenciado pelo segundo quanto este por aquele.

Num primeiro momento será mostrado o comportamento do sistema sem a presença de ruído, e após, será colocado ruído no sistema para verificar como ele se comporta, e quais as principais diferenças existentes no atrator.

4.3.1 Rotas para o caos

Sistemas dinâmicos caóticos possuem um comportamento, quando da variação de parâmetros, que podem variar entre janelas periódicas e caos. Este comportamento pode ser verificado através do diagrama de bifurcação do sistema e este

diagrama representa as mudanças do regime assintótico do sistema.

A ocorrência de caos, em um sistema, acontece, como já foi observado na literatura, através de três rotas distintas. Elas são conhecidas como rotas para o caos via intermitência, via duplicação de período e via crise, além disso, existe também o cenário de Ruelle-Takens para o caos.

Nesta seção buscou-se descobrir, quando do acoplamento bidirecional do sistema, de que forma o caos ocorreria e como estas rotas eram modificadas perante a presença de um termo aditivo de perturbação, no sistema, a cada passo de iteração.

Dependendo do valor do parâmetro de acoplamento estudado, estas rotas podem variar mesmo sem a presença de ruído, já que existem várias janelas periódicas no sistema e cada umas destas janelas pode perder estabilidade através de rotas distintas.

A seção de resultados (4.3.2) trará detalhadamente as diferentes rotas pelas quais o sistema passa. Nesta seção será tratado apenas como estas rotas ocorrem e quais suas principais diferenças.

A rota via intermitência ocorre através de trajetórias que se alternam entre períodos longos quase regulares e pequenas explosões irregulares. Esta rota foi primeiramente estudada por Pomeau e Manneville em 1979 [75] e descobriu-se a existência de três tipos distintos de rotas via intermitência. A intermitência do tipo I ocorre através de uma bifurcação do tipo sela-nó, isto é, dois pontos fixos, um estável e um instável, unem-se formando uma explosão caótica [76]. No tipo II uma órbita quase periódica dá origem a uma explosão caótica, sendo que para isto acontecer, pontos fixos complexos conjugados se desestabilizam [77]. A intermitência do tipo III ocorre juntamente com uma bifurcação de duplicação de período, uma amplitude subharmônica aparece enquanto a amplitude fundamental decresce, quando a amplitude subharmônica atinge um valor alto a regularidade é perdida e ocorre uma explosão turbulenta [76].

A rota por duplicação de período ocorre quando o ponto fixo estável se torna instável e neste ponto aparecem dois pontos fixos estáveis simétricos. É uma das rotas mais comuns em sistemas dinâmicos. O cenário de Ruelle e Takens foi proposto por estes autores em 1971 [78], onde foi demonstrada que após uma bifurcação de Hopf - dois autovalores complexos conjugados cruzam o eixo imaginário em direção ao lado direito do plano, desestabilizando o ponto fixo do sistema e dando origem a um ciclo limite - o sistema torna-se altamente instável em favor de um movimento caótico. Neste cenário o comportamento caótico possuirá frequências fundamentais do sistema

e frequências de banda larga, mas não terá frequências harmônicas das fundamentais. Finalmente, a rota via crise, assim como via intermitência, possui três formas bem distintas que foram primeiramente estudadas por Grebogi, Ott e Yorke em 1983 [79]. Na primeira, o atrator caótico é subitamente destruído quando o parâmetro passa através de seu valor crítico, esta é a chamada crise de fronteira; no segundo tipo o tamanho do atrator caótico no espaço de fase aumenta subitamente quando o atrator caótico colide com uma órbita periódica que está dentro da bacia, esta é a chamada crise interior, e no terceiro e último tipo de crise, dois ou mais atratores caóticos se unem para formar um outro atrator caótico diferente, esta denominada crise de intermitência [33].

4.3.2 Outros resultados

A rota via intermitência tipo I

A partir de agora os estudos serão feitos com relação ao comportamento dinâmico do sistema via bifurcações e rotas para o caos. Nesta seção se tem interesse em saber de que forma o sistema atinge seu comportamento caótico. Do ponto de vista prático, o maior interesse é encontrar uma maneira de análise que utilize apenas séries temporais e com isso, tentar demonstrar que estes estudos podem ser aplicados e bem utilizados para versões em experimentos que dependam de séries temporais como eletroencefalogramas ou eletrocardiogramas, por exemplo, de forma a examinar doenças ou quaisquer anomalias através de diagnósticos já conhecidos.

O estudo, aqui, é sempre baseado no sistema bidirecional, para isso, o termo de acoplamento c_1 , que indica o acoplamento bidirecional do sistema, será sempre constante e igual a 0,01. Os demais parâmetros continuam com seus valores até agora estudados ($b_1 = 1,0$, $b_2 = 0,66$, $f_1 = 1,0$ e $a = 0,95$). A figura 4.4 mostra o comportamento do sistema através do diagrama de bifurcação. Nela pode-se perceber que conforme o parâmetro c_2 muda, o sistema passa por comportamentos caóticos e janelas periódicas. O que se deseja, neste estudo, é descobrir por que tipo de rotas para o caos estas janelas periódicas perdem sua estabilidade.

Para encontrar as rotas que levam a um comportamento caótico é necessário encontrar um valor do parâmetro que é chamado de valor crítico (c_2^*). Este valor é encontrado na região de fronteira entre o estado periódico e o caótico. É importante notar que este c_2^* não tem nada a ver com o c_2^* analisado na seção anterior, quando do estudo do sistema com acoplamento unidirecional. Para a região onde a rota

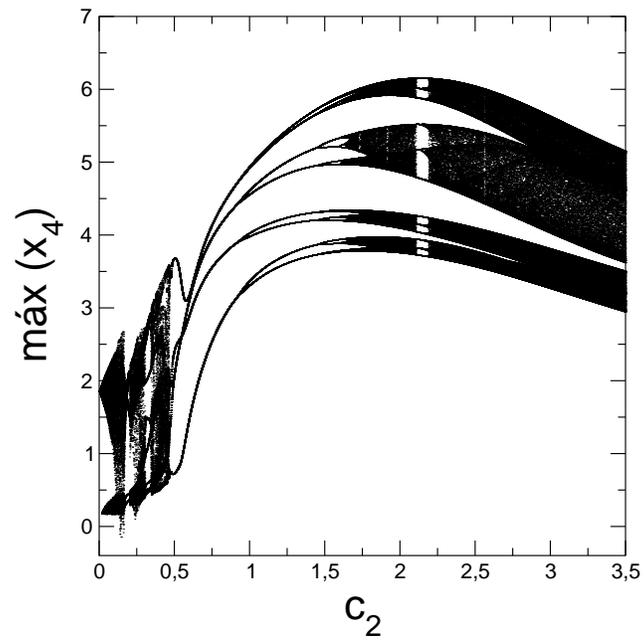


Figura 4.4: Diagrama de bifurcação para o sistema com acoplamento bidirecional. Esta figura é construída utilizando-se 30 condições iniciais e pegando-se o máximo da série temporal do segundo oscilador.

via intermitência tipo I ocorre, o valor crítico de c_2 é $c_2^* = 2,101504$, ou seja, este valor ainda faz o sistema possuir comportamento periódico. A partir dele, no sentido decrescente, a intermitência começa a acontecer. Este ponto está localizado na janela de período doze, encontrada no gráfico de bifurcação da figura 4.4. É fácil verificar este comportamento de valor crítico através do diagrama de retorno, ou mesmo do gráfico temporal dos máximos que podem ser vistos na figura 4.5.

Através da figura mencionada, pode-se perceber que para o valor crítico existem apenas os pontos fixos do mapa, já para um valor diretamente menor, regiões de estouros laminares começam a surgir, e para estes pontos serem melhor vistos num gráfico de retorno, muito tempo computacional é gasto. Este gráfico de retorno mostra o comportamento do sistema quando há intermitência. Isto é verificado quando o gráfico tangencia a reta onde $x = y$. Logo após a tangência, esta curva se afasta da reta formando um “túnel” pelo qual as órbitas passam e divergem, dando início ao comportamento caótico do sistema.

Na literatura conhecida, sabe-se que o tempo médio de cada estouro no comportamento intermitente é uma potência com valor $\frac{1}{2}$, isto é, $(c_2 - c_2^*)^{-\frac{1}{2}}$ para o caso de intermitência do tipo I. Nesta expressão, c_2 é o valor do parâmetro de acoplamento que é variado. Com isso, comprova-se pela figura 4.6 que aqui se tem realmente este tipo de rota para o caos.

A figura 4.6 é o gráfico do tempo médio de estouros intermitentes pela diferença do parâmetro de acoplamento pelo seu valor crítico. Através dela é possível verificar que quanto menor a diferença entre c_2 e seu valor crítico, maior o tamanho do platô, ou seja, maior o tempo que o sistema permanece com comportamento periódico, e quanto maior esta diferença se torna, mais o sistema tende ao atrator caótico.

O cenário de Ruelle-Takens

Antes de falar sobre este cenário, é importante salientar que a rota via duplicação de períodos também aparece neste sistema, e ela pode ser vista simplesmente pelo diagrama de bifurcação onde uma órbita periódica de período quatro dá lugar a outra de período oito e esta a uma de dezesseis e por fim um comportamento caótico surge em $c_2 \approx 1,55$.

O cenário de Ruelle e Takens para o caos ocorre na janela de período quatro, onde c_2^* tem o valor aproximado de 0,4547. Este comportamento pode ser visto na figura 4.4 do diagrama de bifurcação do sistema. Neste ponto o caos aparece devido

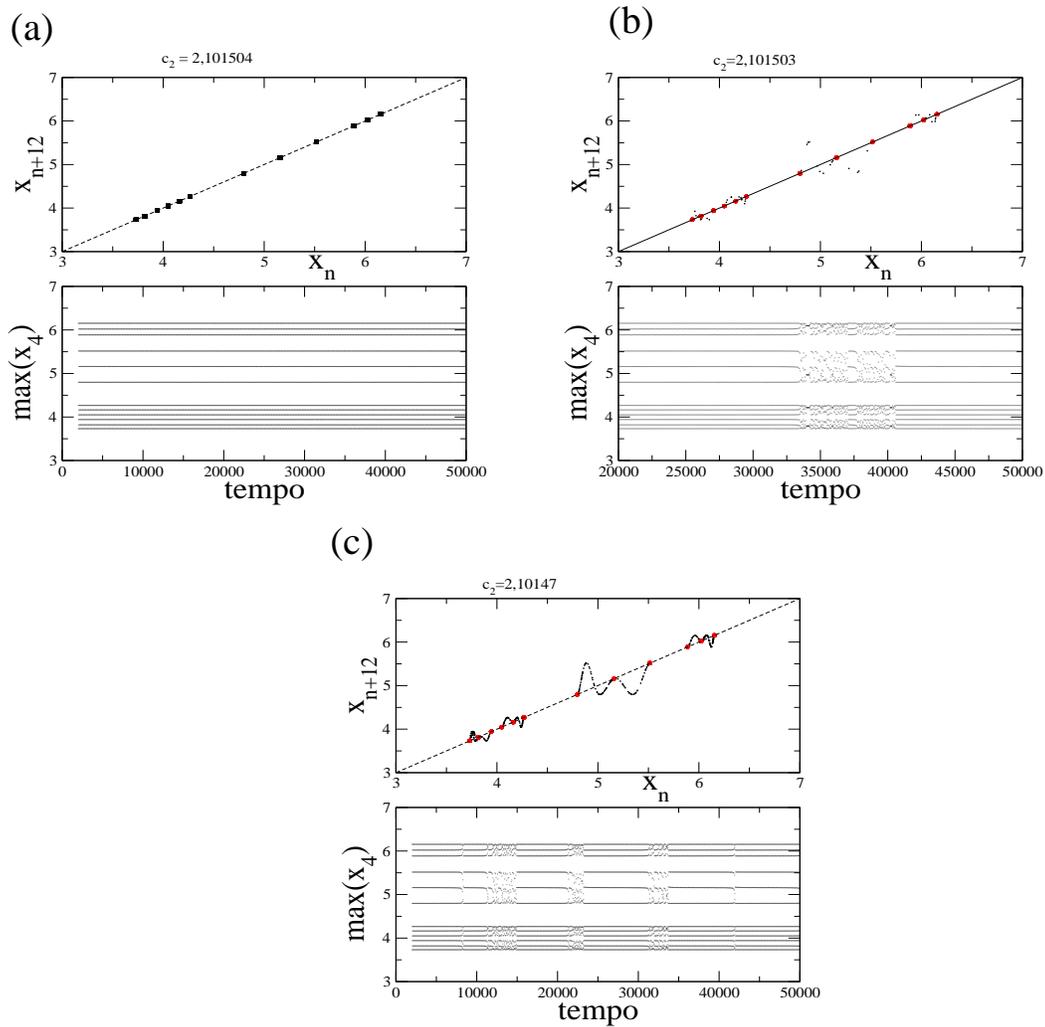


Figura 4.5: Mapa de retorno e série temporal dos máximos para (a) ponto crítico $c_2 = 2,101504$, para (b) próximo valor de parâmetro $c_2 = 2,101503$, onde a intermitência tem início e (c) para o valor de $c_2 = 2,10147$, onde a intermitência é mais pronunciada.

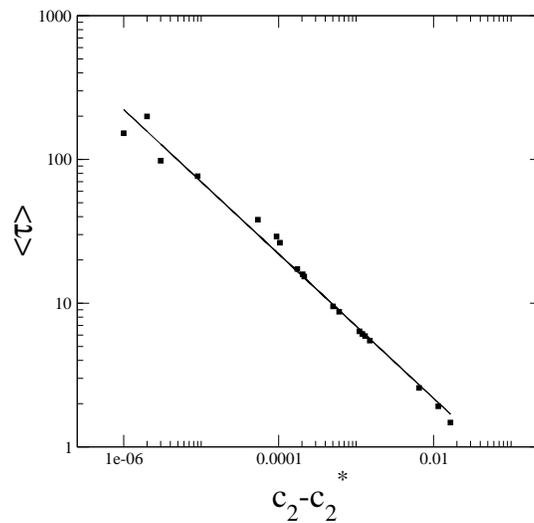


Figura 4.6: Gráfico do tempo médio de estouros *versus* $(c_2 - c_2^*)$. Aqui a linha representa a regressão linear cuja expressão é $y = 0,21588x^{(-0,50207 \pm 0,01382)}$, ou seja, $(c_2 - c_2^*)^{\frac{-1,0041}{2}}$.

ao fato de uma bifurcação de Hopf dar origem ao comportamento caótico, isto é, um ponto fixo é desestabilizado deixando o sistema instável. No diagrama de retorno, para este caso, o que se observa são as curvas de ciclo limite de Hopf destruindo-se com a variação do parâmetro, comportamento que pode ser visto na figura 4.7.

A partir desta figura é simples verificar, pela análise da série temporal, um comportamento que passa de quase periódico pra caótico ou vice-versa. Com esta situação espera-se que uma série temporal simples, como um eletrocardiograma ou mesmo um “holter”(aparelho utilizado para monitorar variabilidade cardíaca), seja suficiente para analisar dados de forma mais consistente e prática, fato que faz modelos numéricos serem de grande importância na pesquisa que visa aprimoramento da compreensão de dados reais.

Utilizando um simples diagrama de retorno é possível, por exemplo, reconhecer um tipo de anomalia cardíaca que está relacionada a um ciclo quase periódico do coração, como a parasístole, por exemplo, sem levar em conta dados mais dinâmicos como o expoente de Lyapunov.

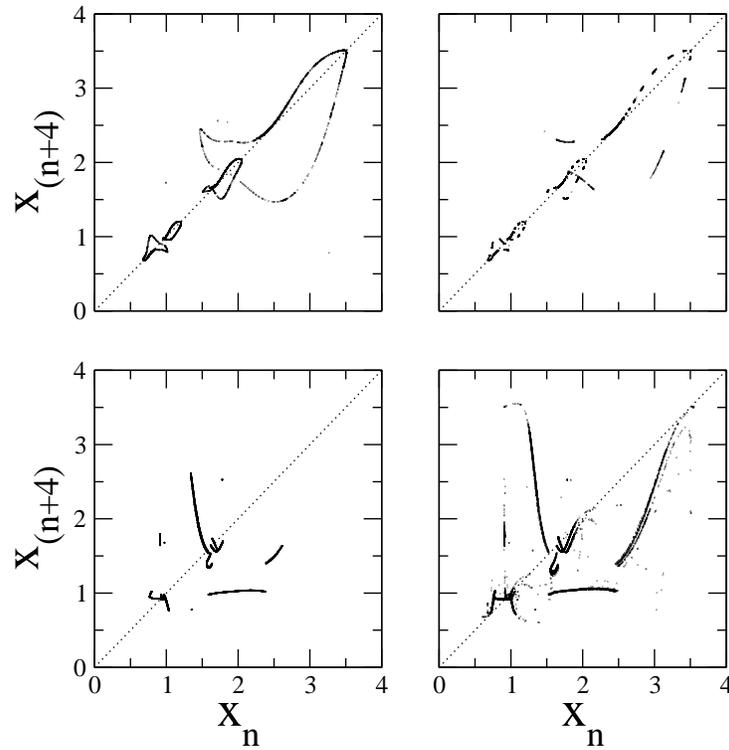


Figura 4.7: Diagrama de retorno para a janela de período quatro onde o caos aparece via quase periodicidade. A primeira figura representa o ciclo limite para $c_2 = 0,45475$. A segunda figura mostra a destabilização deste ciclo para $c_2 = 0,45472$, depois $c_2 = 0,45245$ e por último já o comportamento caótico para $c_2 = 0,45224$.

4.3.3 A presença de perturbação aleatória

Os vários efeitos de perturbação em sistemas dinâmicos determinísticos são um tópico de contínuo interesse e de fundamental importância em física estatística e sistemas não-lineares. Isto acontece porque sistemas físicos estão frequentemente sob influência de ruídos e assim, estudar estes sistemas, fornece um acesso maior aos fatores que afetam um sistema dinâmico caótico na presença de perturbação [80].

Os comportamentos vistos até o momento, do ponto de vista de rotas, são conhecidos na literatura, no entanto, não há conhecimento do estudo de um sistema como este que aqui se apresenta, além disso, o intuito maior deste trabalho é descobrir o que acontece nestes pontos quando da presença de uma perturbação estocástica no sistema.

Para ambos os casos a perturbação adicionada é gerada por números aleatórios e uniformes, introduzidos a cada passo de integração. Esta perturbação é pequena, da ordem de 0,05%, algumas vezes até menor, metade para um valor superior e metade para um valor inferior, sendo que a adição é feita no primeiro oscilador, isto é, no que possui o forçamento externo. A perturbação é aplicada para todo o tempo de integração, é aleatória com uma seqüência de variáveis pseudo-randômicas, com distribuição uniforme, e é apenas somada a segunda equação de 4.3.

O estudo do sistema é feito da mesma forma, através dos diagramas de retorno e encontrando-se leis de escalas que possam generalizar um comportamento perturbado aleatoriamente.

Num primeiro momento analisa-se o gráfico que mostra o comportamento intermitente do sistema. O primeiro ponto interessante neste estudo é que a presença da perturbação adicionada ao sistema muda a região de janelas periódicas transladando seus valores, isto é, a região onde anteriormente, sem a perturbação, o sistema possuía comportamento crítico de intermitência, passa a ter este mesmo comportamento para valores distintos do parâmetro c_2^* .

A figura 4.8 mostra a série temporal dos máximos do sistema juntamente com o gráfico de retorno mediante a presença de uma perturbação aleatória adicional. Nela é possível ver que, um pouco diferente do que visto na figura 4.5, a presença desta perturbação muda o valor dos parâmetros, isto é, a perturbação tira a trajetória dos osciladores da intermitência e leva para o atrator caótico, ou seja, a perturbação faz com que o sistema atinja mais rapidamente o comportamento caótico.

A primeira análise do sistema com adição de um termo perturbativo, é feita com o mesmo valor crítico de c_2 , para a rota via intermitência, sem a presença de

ruído, ou seja, $c_2 = 2,101504$. A figura 4.8 mostra que a adição de pequenas perturbações não afeta o comportamento do sistema, isto é, a rota para o caos via intermitência não é afetada. Este fato pode ser comprovado pela figura 4.9, onde o expoente que determina a presença desta rota praticamente não muda. A presença de perturbação aleatória começa a afetar o sistema quando a perturbação adicionada é da ordem de 10^{-9} . Para este caso, pode-se ver, pela figura 4.9(c), que para valores maiores na diferença entre o parâmetro c_2 e seu valor crítico, ainda existem algumas variações nos tamanhos dos platôs de intermitência, enquanto que ruídos maiores afetam bruscamente o sistema, fazendo com que não haja esta variação. Isso acontece porque uma perturbação um pouco mais pronunciada no sistema faz com que a estabilidade seja perdida e um ponto que antes era ponto crítico da rota via intermitência passe a ser um ponto já dentro do atrator caótico. Nesta parte do problema ainda não se está preocupado com o que vem a ser um termo ótimo de perturbação para o sistema, assunto esse que será abordado na próxima seção.

Além da perturbação na presença do parâmetro para rota via intermitência, estudou-se também a presença de uma perturbação frente ao parâmetro de acoplamento para o cenário de Ruelle-Takens. Para este cenário, o ruído passa a ser mais pronunciável a partir de $\approx 0,005$, sendo que valores menores não afetam o comportamento do sistema.

A figura 4.10 mostra o diagrama de retorno do oscilador na presença do termo de perturbação para os mesmos valores de c_2 vistos anteriormente, para a mesma rota, no caso sem ruído. Pode-se perceber, através da figura considerada, que o ruído apenas torna o toro da bifurcação de Hopf mais acumulado de pontos, mas o comportamento da passagem de estado quase periódico para caótico basicamente permanece o mesmo. Isso pode estar acontecendo devido ao fato de estes valores do parâmetro c_2 estarem relacionados a um estado mais estável do sistema, ou seja, a perturbação não afeta sobremaneira as rotas de bifurcação. Além disso, como em [81], [82] é dito, o efeito de perturbação estocástica aditiva, próximo a bifurcações, tende a ampliar a caoticidade local.

4.4 Osciladores idênticos

Nesta seção será utilizado o sistema um pouco diferente do que foi visto até aqui. A partir de agora os dois osciladores estudados são idênticos e caóticos. Os osciladores são os mesmos vistos até agora, o que muda são os parâmetros do

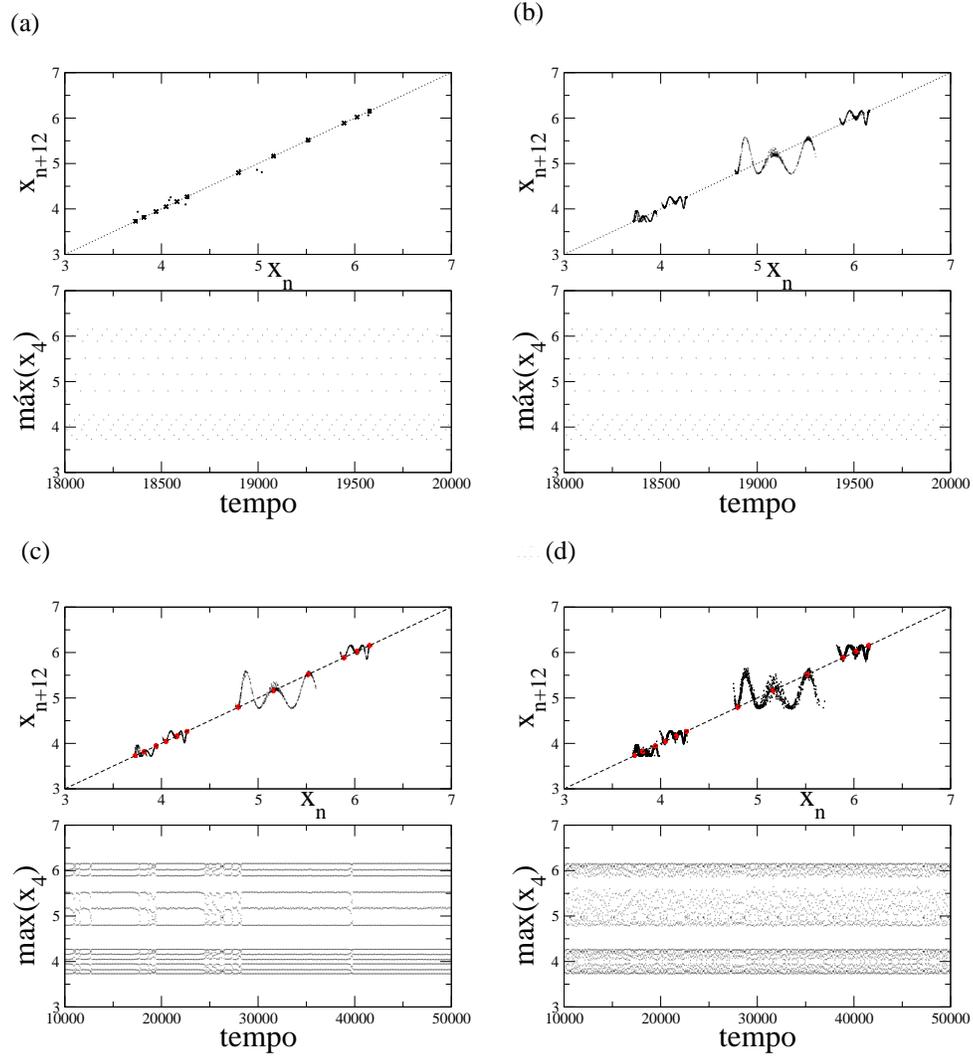


Figura 4.8: Gráficos de retorno (em cima) e dos valores dos máximos das séries temporais (embaixo). Em (a) perturbação aleatória adicional variando de $-2 \cdot 10^{-10}$ até $2 \cdot 10^{-10}$. Em (b) perturbação aleatória adicional variando de $-5 \cdot 10^{-4}$ até $5 \cdot 10^{-4}$. Em (c) perturbação aleatória adicional variando de $-5 \cdot 10^{-2}$ até $5 \cdot 10^{-2}$. Em (d) perturbação aleatória adicional variando de $-5 \cdot 10^{-1}$ até $5 \cdot 10^{-1}$.

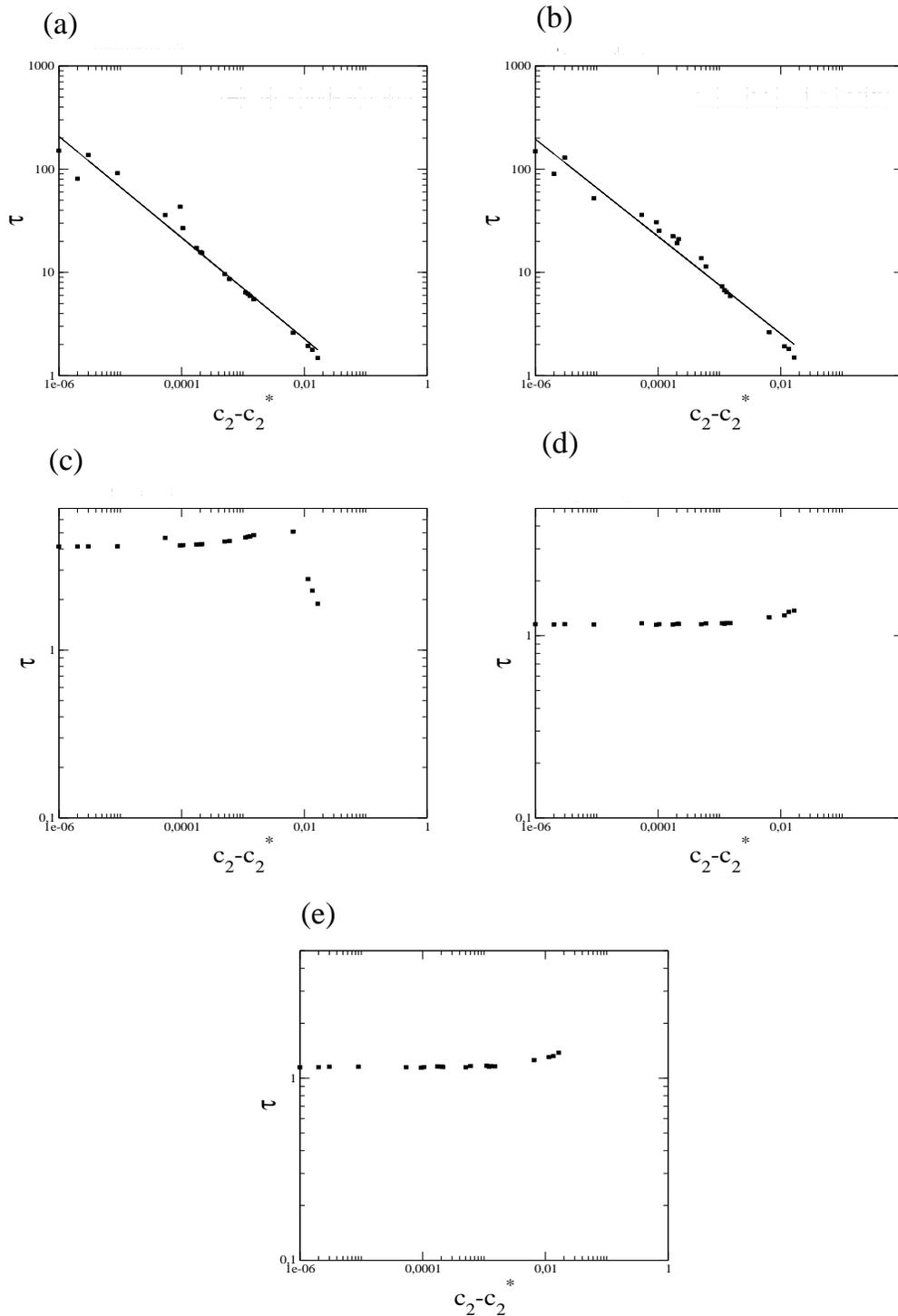


Figura 4.9: Gráficos dos valores dos máximos das séries temporais. Em (a) perturbação aleatória adicional variando de $-2 \cdot 10^{-12}$ até $2 \cdot 10^{-12}$, aqui a regressão linear tem a expressão $y = 0,23738x^{(-0,49022 \pm 0,02000)}$. Em (b) perturbação aleatória adicional variando de $-2 \cdot 10^{-10}$ até $2 \cdot 10^{-10}$, com regressão linear de $y = 0,29031x^{(-0,47119 \pm 0,01882)}$. Em (c) perturbação aleatória adicional variando de $-2 \cdot 10^{-9}$ até $2 \cdot 10^{-9}$. (d) perturbação aleatória adicional variando de $-1 \cdot 10^{-7}$ até $1 \cdot 10^{-7}$ e em (e) perturbação aleatória adicional variando de $-5 \cdot 10^{-3}$ até $5 \cdot 10^{-3}$

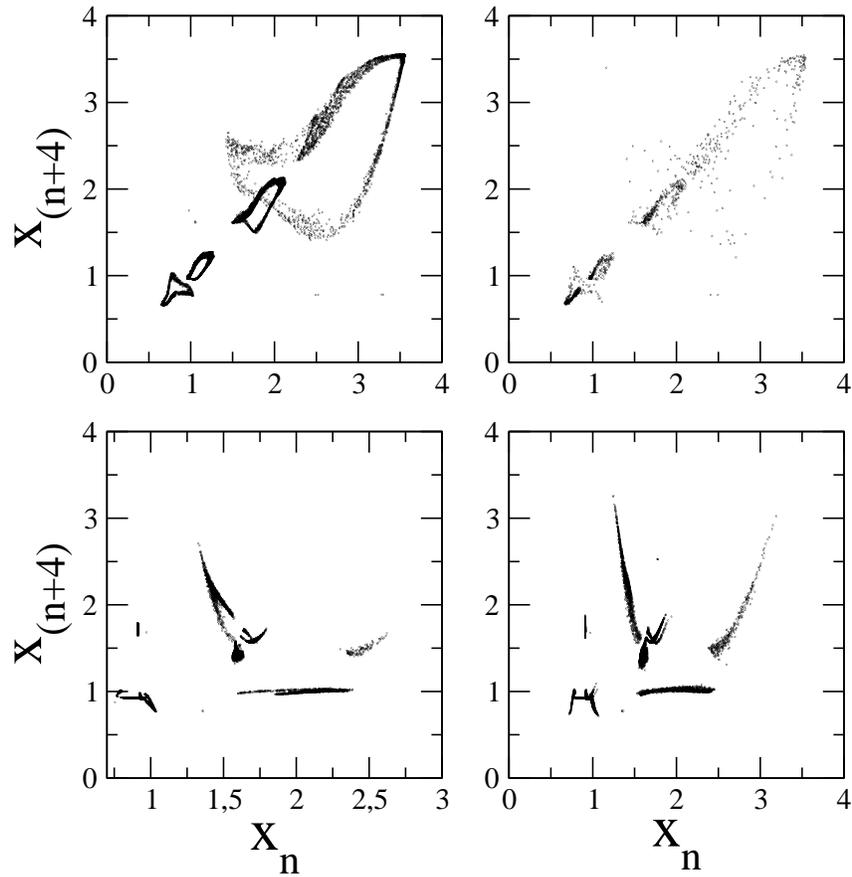


Figura 4.10: Gráficos de retorno para a janela de comportamento quase periódico com a presença de perturbação adicional, para os mesmos valores do comportamento sem perturbação, ou seja, na ordem da direita para a esquerda, 0,45474; 0,45472; 0,45245 e 0,45224, com perturbação aleatória adicional, variando entre $-5 \cdot 10^{-3}$ e $5 \cdot 10^{-3}$.

sistema. Assim, $b_1 = b_2 = 1, 0$, o termo de forçamento periódico, que antes era só colocado no primeiro oscilador, agora também será introduzido no segundo oscilador e assim $a_1 = a_2 = 0, 95$, $f_1 = f_2 = 1, 0$, e todos os demais parâmetros continuam no mesmo valor. Desta forma, diferente da seção anterior, agora o sistema volta a ter acoplamento unidirecional, isto é, $c_1 = 0, 0$.

Trabalhos com osciladores caóticos idênticos são extensivamente encontrados na literatura. Por este motivo é que aqui resolveu-se torná-los idênticos, já que apesar da extensividade do assunto, pouca coisa se encontra sobre osciladores como os aqui apresentados.

Em um primeiro momento busca-se valores do parâmetro de acoplamento c_2 para que o sistema tenha um comportamento sincronizado. A sincronização do sistema ocorre para diversos valores do parâmetro c_2 , como pode ser visto pela figura 4.11. Tanto através do parâmetro de ordem quanto através da variedade de sincronização, isto é, $x_2 = x_4$ e $x_1 = x_3$, são computados os valores de estados sincronizados. Caso o parâmetro de ordem seja igual a um ou estados sejam iguais, o valor da saída é 1 e o sistema tem um atrator sincronizado, de outra forma a saída recebe zero e o sistema apresenta um atrator não sincronizado. Esta figura é feita com duzentas e cinqüenta diferentes condições iniciais, e é através delas que os valores do parâmetro de ordem e da igualdade entre os osciladores são obtidos.

Através desta mesma figura é possível perceber a presença de um comportamento biestável do sistema, ou seja, para determinados valores do parâmetro de acoplamento c_2 , ocorre a presença conjunta de um atrator sincronizado e um não sincronizado. Além das figuras dos estados, é possível verificar, através do comportamento do expoente de Lyapunov condicional, a perda de estabilidade da variedade de sincronização. Este fato acontece quando o expoente condicional é positivo. A estabilidade do estado sincronizado é assegurada se um pequeno deslocamento transversal para a variedade de sincronização decai com o tempo, isto é, todo o movimento transversal da variedade de sincronização deve ser amortecido. Dessa forma, se o expoente de Lyapunov condicional é negativo, sabe-se que a variedade de sincronização é estável.

A figura 4.12 mostra o comportamento do expoente de Lyapunov condicional do sistema para algumas condições iniciais. Através dele, e do que foi comentado anteriormente, é fácil verificar quando o sistema possui uma variedade de sincronização estável e quando isso não acontece. Esta figura mostra que para diferentes condições iniciais é fácil perceber, pela estabilidade, quando se está no atrator sincronizado, ou

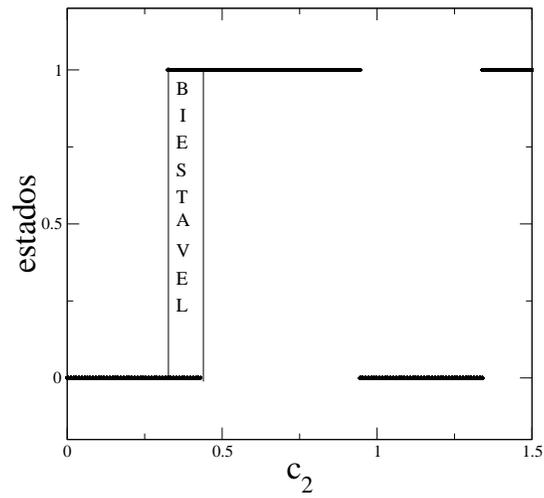


Figura 4.11: Demonstração de estados sincronizados (1) e não sincronizados (0), tanto para o parâmetro de ordem quanto para a igualdade na variedade de sincronização. Presença de região biestável com atrator sincronizado e não sincronizado coexistindo.

não.

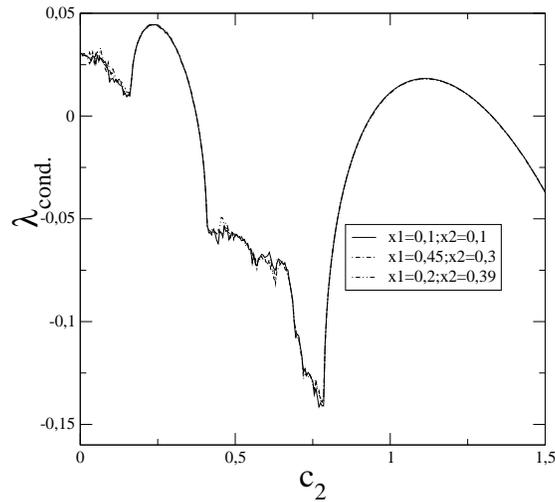


Figura 4.12: Expoentes de Lyapunov condicional, para alguns valores de condições iniciais diferentes, que levam para atrator sincronizado.

Como também comentado anteriormente, a não ocorrência de sincronização completa não significa que não possa existir outras formas de sincronização entre os osciladores. Isto pode ser visto pela figura 4.13 onde, sem a presença de ruído, o sistema possui sincronização de frequência para qualquer valor de c_2 . Aqui a frequência dos osciladores é calculada através da derivada das fases, ou seja,

$$\Omega_i = \dot{\phi}_i. \quad (4.6)$$

A figura 4.14 mostra que o sistema não apresenta sincronização de fase, já que para isso acontecer é necessário que o maior expoente de Lyapunov do sistema possua uma transição de positivo para negativo [38], [42], [83], o que neste sistema não ocorre.

Sabendo, pois, o tipo de sincronização presente no sistema e para quais valores do parâmetro de acoplamento c_2 ela acontece, passa-se então a analisar o comportamento do sistema perante a presença de ruído branco adicional.

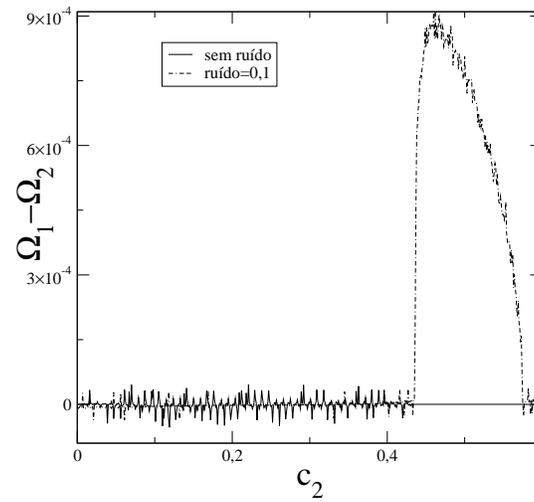


Figura 4.13: Diferença de frequência entre dois osciladores VDP idênticos acoplados com a variação do parâmetro de acoplamento c_2 .

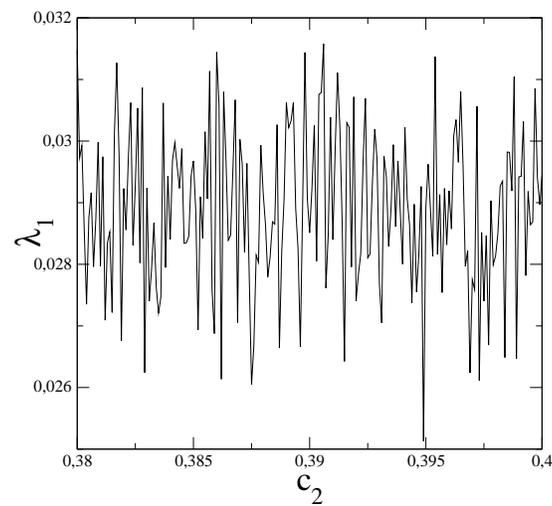


Figura 4.14: Variação do maior expoente de Lyapunov *versus* parâmetro de acoplamento c_2 . Esta figura mostra que o sistema possui comportamento caótico para qualquer valor de acoplamento.

4.4.1 Adicionando perturbação aleatória em um oscilador

As figuras 4.13 e 4.15 mostram como o sistema modifica seu comportamento perante a presença de uma perturbação. Pela figura 4.13 percebe-se que uma perturbação um pouco mais pronunciada acaba com a sincronização de frequências existente no sistema para qualquer valor de c_2 . Além disso, valores de perturbações aleatórias menores que 0,001 não afetam o comportamento do sistema observando o gráfico de diferença de frequências. Com isso, pode-se perceber que existe, quando de um valor fixo do parâmetro de acoplamento, um valor ótimo de perturbação, que torna o sistema mais próximo a um estado sincronizado. Isso pode estar ocorrendo porque as trajetórias próximas à variedade estável podem cruzá-la e se mover em fase quando estão recebendo uma perturbação comum [83].

É importante lembrar aqui que o sistema em estudo é não hiperbólico como a maioria dos sistemas caóticos e para estes casos, quando uma perturbação aleatória é somada ao sistema, uma medida invariante no atrator pode surgir [84], [85]. Assim, um sistema ruidoso, neste caso, pode depender, além da estatística da perturbação, também da intensidade dela [86], [87].

Como visto anteriormente na figura 4.11, para $c_2 = 0,3$ o sistema apenas possui sincronização de frequência, já que para este valor o atrator sincronizado não é atingido, ou seja, só existe a presença do atrator não sincronizado no sistema. Dessa forma, escolheu-se este valor para o parâmetro de acoplamento e começou-se a variar a quantidade do termo perturbativo adicionado ao sistema.

O efeito de termos de perturbação, têm sido, nos últimos tempos, de grande interesse no contexto de ressonância estocástica e ressonância coerente. Na ressonância estocástica, a presença de perturbação aleatória pode otimizar a resposta do sistema para um sinal externo, enquanto que na ressonância coerente a perturbação pode gerar um movimento mais coerente do sistema [38].

A figura 4.15 mostra o comportamento do sistema, através do parâmetro de ordem, para o valor de $c_2 = 0.3$ que quando sem ruído, apresenta apenas sincronização de frequência. Esta figura, no entanto, apresenta diferentes valores de ruído. É possível verificar, através dela, que realmente existe um ruído ótimo que torna o sistema mais próximo de um estado completamente sincronizado, isto é, existe um valor de ruído que torna o sistema mais próximo de um comportamento onde a informação a respeito dele é maior, ou seja, o sistema fica próximo de uma sincronização completa. No entanto, este estado não ocorre definitivamente, apenas margeado por pequenos estouros. A não ocorrência de um estado completamente sincronizado neste

sistema perturbado pode vir do fato de que para a ocorrência de sincronização, deve haver uma grande contração em alguma direção das trajetórias próximas à variedade de sincronização. Quando da presença de perturbação, as trajetórias do sistema podem explorar esta região de contração que varia entre contração e expansão, sendo que a contração deve dominar para que a sincronização ocorra [38]. Sendo assim, é possível que para este sistema a contração da trajetória não seja suficiente para gerar uma sincronização completa, apenas estados laminares.

De qualquer forma, percebe-se que de um estado onde apenas sincronização de frequência acontecia, sem a presença do termo perturbativo, com a adição de um sinal ruidoso o sistema passa a ter suas trajetórias mais próximas à variedade de sincronização, mostrando portanto, o fato de que ruído pode induzir sincronização completa em um sistema de osciladores acoplados não hiperbólicos.

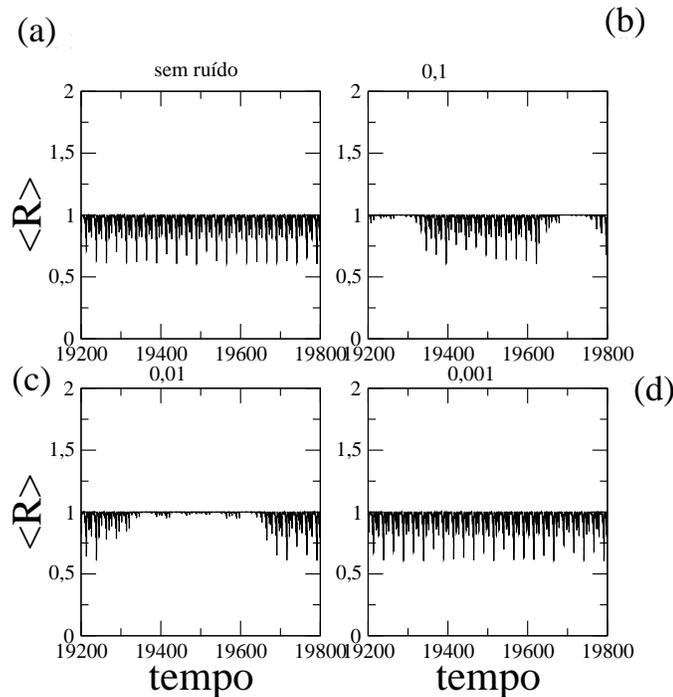


Figura 4.15: Parâmetro de ordem para valores de $c_2 = 0,3$, onde existe apenas sincronização de frequência no sistema. A presença de perturbação aleatória faz com que o sistema adquira um comportamento de sincronização completa em alguns momentos. Em (a) sistema sem perturbação, (b) perturbação da ordem de 0,1, (c) perturbação de 0,01 e em (d) perturbação de 0,001.

4.4.2 A região biestável

Percebendo-se a presença de uma região biestável no sistema, resolveu-se encontrar os atratores do sistema. Primeiramente um gráfico da bacia de atração do sistema foi feito, utilizando como forma de caracterizar estados sincronizados a igualdade entre as variáveis do sistema, isto é, $|(x_4 - x_2) + (x_3 - x_1)| = 0$. A figura 4.16 mostra duas regiões distintas, ou seja, algumas condições iniciais levam o sistema para um atrator sincronizado, enquanto outras condições fazem as trajetórias seguirem o atrator não sincronizado. A figura 4.17 mostra a projeção, no espaço bidimensional, dos dois atratores, onde o atrator superior é não sincronizado e o inferior é sincronizado.

O atrator caótico sincronizado é a representação do sistema quando os osciladores têm seu movimento idêntico, já quando cada oscilador se comporta de maneira diferente, o atrator do sistema é outro, mostrando a biestabilidade existente.

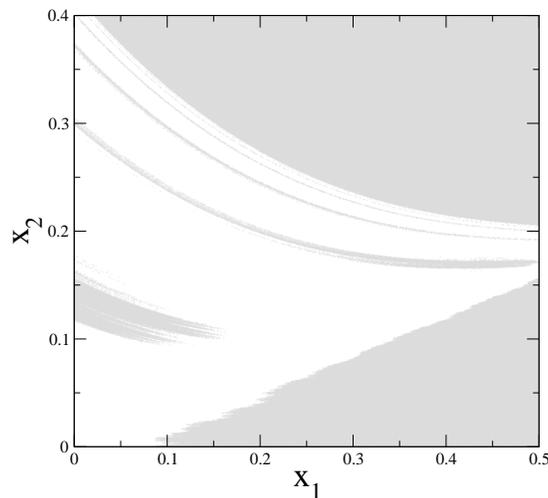


Figura 4.16: Bacia de atração do sistema para $c_2 = 0,385$. Cinza é a região do atrator não sincronizado e branca é a região do atrator sincronizado.

O tipo de sincronização aqui considerada é a sincronização completa, que para este sistema pode ser menos robusta do que a sincronização apenas de frequência vista com a presença de ruído, anteriormente.

Aqui, devido à biestabilidade, a presença da perturbação aleatória adicional faz com que as trajetórias do sistema mudem de um atrator para outro, resultando

na presença de estados intermitentes, isto é, ocorrem estouros de estados não sincronizados, devido ao atrator não sincronizado, intercalados com regiões laminares de estados sincronizados.

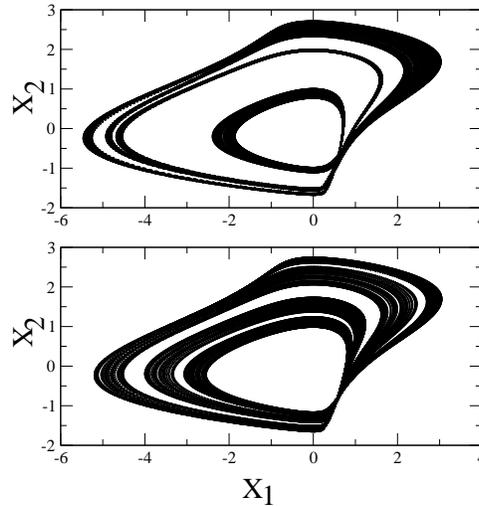


Figura 4.17: Atrator não sincronizado (superior) e atrator sincronizado (inferior) da região biestável do sistema para $c_2 = 0,385$.

Sem a presença da perturbação, este comportamento não aparece, portanto, aqui, a intermitência existente ocorre devido a biestabilidade que o sistema possui para alguns valores do parâmetro de acoplamento c_2 . A distribuição dos estados laminares, para uma quantidade de ruído de 0,01, somado a segunda equação de 4.3, pode ser verificada na figura 4.18, onde regiões laminares menores possuem uma distribuição que é lei de potência, e uma outra região para fases laminares maiores onde a distribuição é uma cauda exponencial. Esta característica pode levar a um caso particular de intermitência, denominado intermitência “on-off” (ligado-desligado), que é caracterizada por duas etapas principais. A primeira está relacionada com o sistema possuir estrutura de produto assimétrico, ou seja, na dinâmica de um mapa bidimensional, por exemplo, x depende de y , mas o inverso não ocorre. A segunda relaciona-se às regiões laminares já citadas. Este tipo de intermitência é um resultado da própria dinâmica do sistema e na presença de estados biestáveis, com um atrator caótico e outro não caótico, a bacia de atração do atrator caótico deveria ser crivada [88]. Esta última característica não é encontrada neste sistema, sendo que o

aspecto intermitente aparece quando ruído é adicionado.

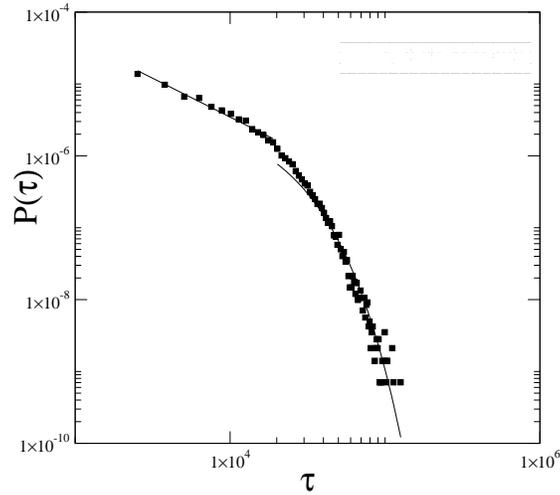


Figura 4.18: Distribuição de tempos laminares para $c_2 = 0,384$ e termo perturbativo da ordem de 0,01. Aqui a regressão linear tem a expressão: $y = 0,07314x^{(-1,0813 \pm 0,043)}$.

Assim, com a variação do parâmetro de acoplamento c_2 , é possível perceber a presença de dois atratores no sistema. Para alguns valores o atrator não sincronizado desaparece, dando lugar apenas ao atrator sincronizado. Para outras regiões, o oposto acontece, e para um pequeno intervalo deste parâmetro ocorre a biestabilidade. Desta forma, além da presença de sincronização, a perturbação aleatória adicional mostrou que para a região onde não existe sincronização completa, um ruído ótimo existe para que este estado seja atingido, já para o caso biestável foi possível verificar que o mesmo ruído apenas faz com que as trajetórias saltem de um atrator para outro, causando intermitência no sistema.

Capítulo 5

Rede de mapas acoplados a uma fonte estocástica

Neste capítulo é abordado o estudo de uma rede de mapas acoplados entre si e com um reservatório térmico (fonte estocástica), através de acoplamento do tipo lei de potência. A abordagem tem como principal interesse estudar o comportamento do sistema tendo em vista que ele é parte determinístico e parte estocástico. A dinâmica do sistema é caracterizada via sincronização, intermitência, assimetria entre outros aspectos.

5.1 Motivação

Num primeiro momento o principal intuito deste trabalho foi descobrir um valor mínimo do tamanho da rede acoplada a sítios estocásticos, para o qual o sistema representasse bem o limite termodinâmico de um sistema com vários mapas e com isso diminuir o tempo computacional gasto. No encaminhamento do estudo percebeu-se que o sistema, da forma que aqui se apresenta, fornecia um comportamento próximo ao da rede estudada, apenas para um determinado valor de parâmetro, e com isto passou-se a analisá-lo, dinamicamente, devido ao aspecto estocástico existente, relacionado a presença de sítios ruidosos. A parte estocástica do sistema é pensada, fisicamente, como um reservatório térmico atuando no restante da rede de forma acoplada.

A motivação surgiu de um trabalho de Carretero-González e co-autores [89], que usaram uma rede de mapas logísticos, com acoplamento de primeiros vizinhos, para mostrar que em alguns casos é difícil distinguir uma rede determinística, de

dimensão alta, de um sistema estocástico. Neste trabalho eles consideraram que uma rede de 100 mapas, com condição de contorno periódica, representava bem o limite termodinâmico. A rede estudada por eles, diferentemente da que aqui será analisada, possui apenas acoplamento local de primeiro vizinho, sem a presença do termo de longo alcance. Entretanto, o mapa utilizado na rede era também, como aqui, o mapa logístico. Para mostrar que o comportamento estocástico pode ser confundido com o determinístico de alta dimensão, eles colocaram ruído branco nos dois sítios das extremidades e estudaram o comportamento da rede, verificando, para este tipo de acoplamento, com 100 sítios, que realmente o comportamento dos sistemas é bastante semelhante.

Aqui, praticamente a mesma situação é estudada, no entanto, a forma de acoplamento entre os sítios é de lei de potência, e o limite termodinâmico da rede com condição de contorno periódica é conhecido e igual a 385 mapas [67].

5.2 O sistema

A rede aqui estudada é representada como em 2.7, uma rede de acoplamento tipo lei de potência onde cada sítio é governado por um mapa logístico. No entanto, diferente do que visto em 2.7, aqui uma parte da rede será substituída por um reservatório térmico como explicado mais adiante.

5.2.1 O mapa logístico

O mapa logístico é um mapa de tempo discreto análogo a equação de crescimento populacional, dado por:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (5.1)$$

onde r é o parâmetro variável do mapa.

Na literatura muito se conhece a respeito deste mapa [13], [33], e sabe-se que para um valor de parâmetro $r = 4$, o mapa apresenta comportamento completamente caótico. Para $r \neq 1$ o mapa logístico apresenta dois pontos fixos, um em zero e o outro dado por $1 - \frac{1}{r}$, sendo que o ponto zero é instável para $r > 1$. Para qualquer valor de $r < 3$, não existem órbitas periódicas com períodos maiores do que a unidade. Para o intervalo $3 > r > 1$, qualquer condição inicial que satisfaça $1 > x_0 > 0$ aproxima o atrator de $x = 1 - \frac{1}{r}$ [33], ou seja, o intervalo $[0, 1]$ é denominado bacia de atração do atrator $x = 1 - \frac{1}{r}$. A partir do valor $r = 3$ ocorre uma duplicação de períodos, ou seja,

aumentando o valor do parâmetro r surgem órbitas de período dois, quatro, oito e assim sucessivamente, até um período infinito por volta de $r \approx 3,56994$. Isto acontece devido ao fato de sua órbita tornar-se instável. No intervalo $3,56994 \leq r \leq 4$ o mapa tem um comportamento que varia entre caótico e janelas periódicas, sendo que existe um número infinito de janelas que possuem estados periódicos de períodos grandes.

Neste capítulo trabalha-se sempre com $r = 4$, onde o mapa isolado apresenta comportamento caótico, como já mencionado anteriormente.

5.2.2 A rede acoplada

A equação 2.7, representando o sistema em estudo, é mostrada através de um esquema gráfico na figura 5.1, onde uma rede de onze sítios está representada. Nesta rede cada sítio deve ter cinco ligações, tanto com os vizinhos da direita, quanto com os vizinhos da esquerda. Estas ligações somente foram representadas para um único sítio de forma que a figura não ficasse repleta de linhas. Cada ligação é de menor intensidade quanto mais distante os sítios se encontram.

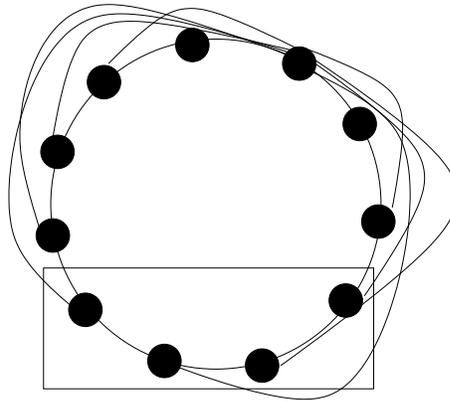


Figura 5.1: Figura esquemática representando a rede com condição de contorno periódica.

Aqui, o trabalho realizado, tem o intuito de diminuir esta rede e modificá-la utilizando um reservatório térmico, isto é, da rede do exemplo, com onze sítios, quatro sítios serão desprezados (os sítios do retângulo) e no lugar deles um reservatório é colocado. A nova rede assim, apresentará sete sítios como mostra a figura 5.2. Cada sítio deve apresentar as mesmas cinco conexões com seus vizinhos tanto da direita quanto da esquerda. Sendo que para o sistema em estudo, neste capítulo, a condição de contorno não é periódica, as ligações restantes são feitas diretamente no

reservatório, o sítio ligado diretamente ao reservatório terá de fazer todas as cinco ligações, de um lado, ao próprio reservatório e os demais sítios completarão as cinco ligações obrigatórias, também através da conexão com o reservatório.

Esta diminuição da rede tem a vantagem de diminuir o tempo computacional gasto, e aqui o principal interesse é verificar se esta rede menor, com sítios estocásticos, apresenta o mesmo comportamento da rede maior, com condição de contorno periódica.

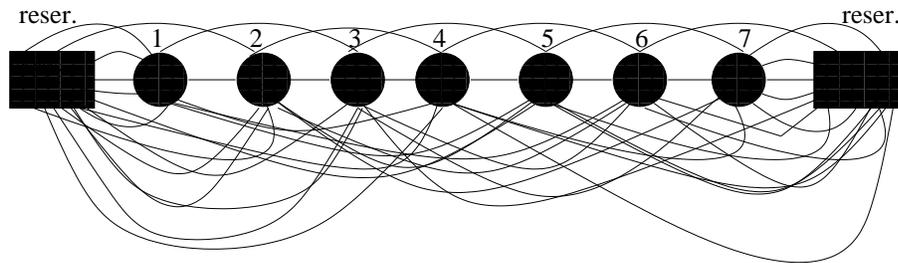


Figura 5.2: Modelo esquemático representando a rede a ser estudada.

O tipo de acoplamento utilizado neste capítulo, em particular, é um acoplamento difusivo de primeiros e segundos vizinhos, com acoplamentos futuros não-locais aleatórios.

5.2.3 Comportamento do reservatório

Devido ao fato de se considerar sempre redes com número ímpar de sítios, é importante aqui explicar que o reservatório é constituído, no programa numérico, como sítios que apresentam apenas uma dinâmica estocástica durante todo o tempo de iteração, isto é, os sítios recebem valores randômicos apenas, não tendo nenhum comportamento determinístico, ou seja, é um ruído colocado na rede que não sofre perturbação dos sítios determinísticos. Como foram tratados como sítios no programa computacional este ruído adicionado será sempre em número par para se trabalhar com redes de tamanho de sítios ímpares. No entanto, como têm dinâmica idêntica, funcionam, na prática, como se fossem apenas um único, assim, sendo o reservatório térmico acoplado ao sistema.

Para demonstrar a situação acima, ou seja, para se ter certeza de que a quantidade de sítios não afeta a dinâmica do sistema, estudou-se vários valores de sítios como sendo a dinâmica estocástica do sistema. Os outros parâmetros permaneceram fixos, considerando a distância à variedade de sincronização como a quantidade a

determinar esta situação. A figura 5.3 mostra o comportamento do sistema perante a variação dos mapas no reservatório.

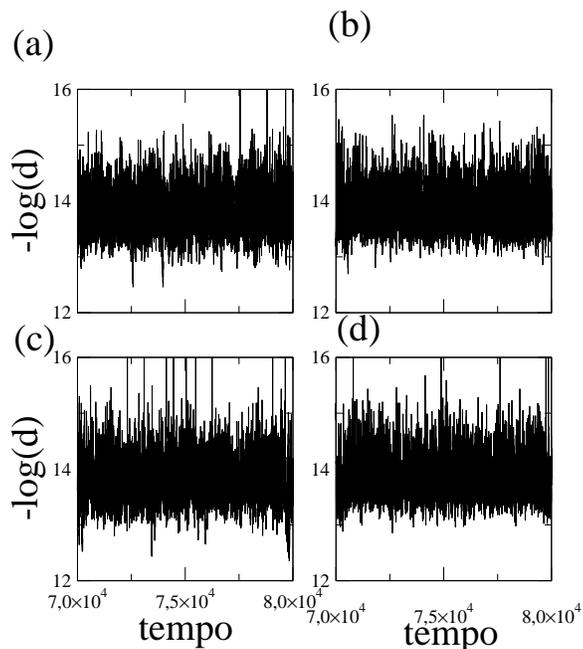


Figura 5.3: Comportamento do logaritmo da distância quando da mudança dos mapas considerados como reservatório. Aqui a rede determinística possui 101 mapas, sendo que $\varepsilon = 1,0$ e $\alpha = 0,47$. Em (a) dois sítios estocásticos representam o reservatório, em (b) doze sítios representam o reservatório, em (c) quarenta sítios e em (d) duzentos e quarenta sítios.

Através dela é possível verificar que grandes ou pequenas quantidades de sítios atuando como reservatório não afetam o comportamento da distância, sendo que esta só é afetada por mudanças nos sítios de mapas logísticos ou de outros parâmetros. Dessa forma, para uma maior agilidade computacional utilizou-se sempre, neste estudo, dois sítios estocásticos.

5.3 Variando a intensidade do acoplamento

Nesta seção será abordado o estudo do sistema para o caso da rede ter o parâmetro α fixo e ε variando. Um primeiro aspecto a ser descoberto, já reconhecida a quantidade de reservatórios, é um tamanho de rede para que a mesma tenha o

comportamento do sistema acoplado com maior número de sítios, caso esta rede exista.

Para buscar este tamanho, a medida de dispersão é utilizada, que tem a mesma forma da distância à variedade de sincronização. Primeiro analisa-se o comportamento da rede quando $\alpha = 0$ e depois estuda-se a rede para um valor de α diferente.

5.3.1 Caso de acoplamento global (campo-médio)

Para encontrar um valor de rede com reservatório que apresente o mesmo comportamento de uma rede com vários sítios, busca-se uma região de sincronização do sistema para vários tamanhos de rede. Fazendo isso, é possível verificar que para o caso de $\alpha = 0$, a rede com 385 sítios, sem reservatório, tem um comportamento similar de sincronização ao de uma rede com 81 sítios, com reservatório até um valor de $\varepsilon \approx 0,5$. Em outras palavras, o histograma da distância tem o mesmo aspecto, indicando que o caso de acoplamento global, isto é, $\alpha = 0$, possuiu um comportamento característico.

Para valores de ε menores que $\approx 0,5$ a rede com reservatório deixa de ter um comportamento semelhante ao de estados sincronizados de uma maneira suave, enquanto a rede com condição de contorno periódica sai da variedade de sincronização de uma forma abrupta. Isto pode ser visto nas figuras 5.4 e 5.5. Os gráficos apresentados nestas figuras mostram o comportamento da distribuição da distância à variedade de sincronização tanto para a rede com condição de contorno periódica, quanto para a rede acoplada ao reservatório. Os gráficos mostram que a passagem de comportamento sincronizado (distribuição com máximo em $-\log(d) = 15$) para não sincronizado, acontece de forma distinta, sendo que em ambos os casos essa transição acontece para $\varepsilon \approx 0,05$.

É importante salientar aqui que se está trabalhando com o logaritmo da medida de dispersão(distância), portanto, $y = -\log(d)$, onde d é a distância à variedade de sincronização para o caso determinístico. Esta quantidade já foi definida no capítulo dois como sendo $d = \sigma.(N)$, onde N é o número de sítios e σ é o desvio padrão da rede. Para o caso estocástico, esta quantidade é uma medida de dispersão das regiões de estados com comportamentos semelhantes àqueles de estados sincronizados, em sistemas determinísticos.

Quando fala-se em ruído, o termo variedade de sincronização já não é mais utilizado corretamente, desta forma, apesar do comportamento próximo entre as

curvas dos dois sistemas, o comportamento dinâmico é um tanto diferente.

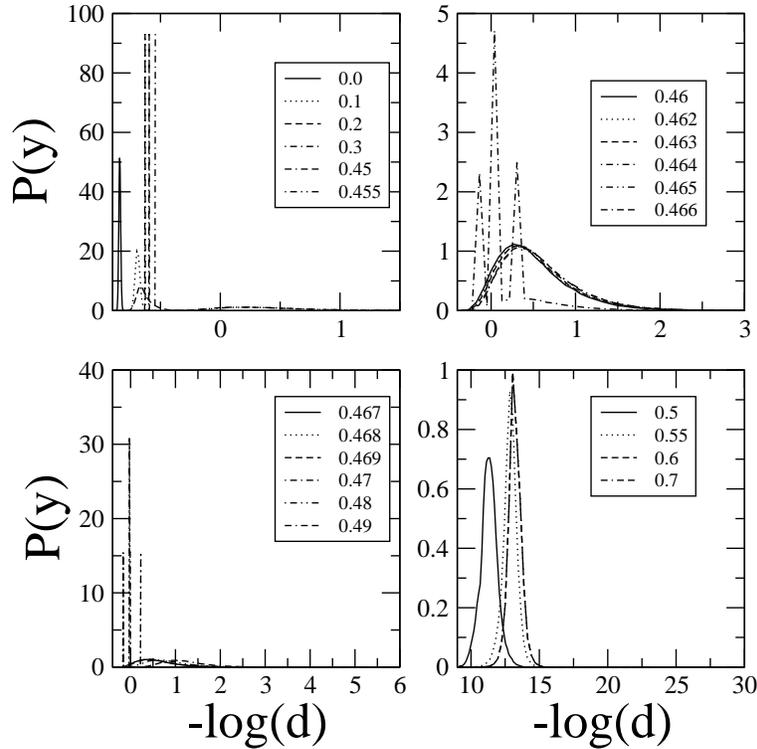


Figura 5.4: Distribuição do comportamento da distância à variedade de sincronização da rede sem reservatório, para 385 mapas, variando o parâmetro ε , com o parâmetro α constante e igual a 0. O estado sincronizado da rede é atingido para $\varepsilon \approx 0,5$.

A sincronização completa de um sistema é uma característica importante de ser estudada, porque é um exemplo de transição de fase de estados fora do equilíbrio [90]. É demonstrado, analiticamente [63], para esta situação de sincronização em sistemas determinísticos, com acoplamento do tipo lei de potência, que no limite termodinâmico a transição para estados sincronizados só é possível para iterações suficientemente grandes, ou $\alpha < \alpha_c - D$, onde α_c é o valor crítico do parâmetro α e D é a dimensão da rede. É verificado também que esta transição depende do tamanho da rede.

No sistema aqui estudado é possível observar, quando $\alpha = 0$, que o limite

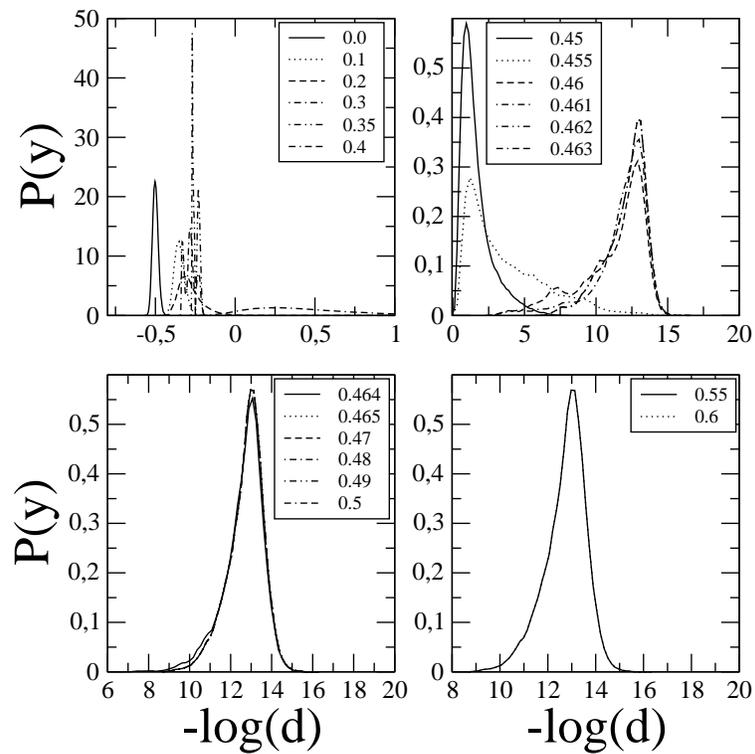


Figura 5.5: Distribuição do comportamento da distância à variedade de sincronização da rede com reservatório para 81 mapas variando o parâmetro ε , com o parâmetro α constante e igual a 0. O estado sincronizado da rede é atingido para $\varepsilon \approx 0,464$.

termodinâmico de uma rede determinística é aqui atingido quando a rede possui 81 sítios, isto é, para este tamanho de rede um valor crítico de epsilon próximo a 0,5 é encontrado quando $\alpha = 0$.

No entanto, este comportamento semelhante das redes só é válido para a região sincronizada. Fora desta região, a presença do reservatório destrói a supressão de caos existente na rede de 385 sítios, como pode ser observado na figura 5.6. Esta figura mostra o comportamento dinâmico da rede quando da variação do parâmetro de acoplamento ε . Nela é possível perceber que, fora da região de sincronização, a rede com condição de contorno periódica apresenta uma dinâmica mais rica. Isto é, além do comportamento caótico, para determinados valores do parâmetro de acoplamento, a rede apresenta perda de comportamento caótico. Esta situação é denominada supressão de caos e indica que, mesmo a rede sendo formada apenas por sítios caóticos, o acoplamento entre eles, de alguma forma, faz com que a rede apresente comportamento periódico ou quase periódico. Entretanto, quando a rede com o reservatório é analisada, esta região fora do estado sincronizado perde um pouco da dinâmica, fazendo com que a presença do ruído não permita relacionar a rede estocástica com a rede determinística de alta dimensionalidade. Assim, do ponto de vista apenas de sincronização, a presença do reservatório auxilia no tempo computacional, reduzindo os cálculos. Fora desta região, onde existe uma grande variedade dinâmica, a presença do reservatório modifica a rede, isto sempre levando em conta que o estudo é feito para o caso de acoplamento global, ou seja, $\alpha = 0$. Para outros valores, outros comportamentos serão verificados.

Mesmo não podendo falar sobre variedade de sincronização quando o sistema é estocástico, alguns aspectos de sistemas determinísticos de alta dimensão podem, em muitas circunstâncias, não ser distinguidos de sistemas estocásticos [89]. Este é o caso, aqui, quando da presença de estados intermitentes que o sistema se comporta como se estivesse na variedade de sincronização. Em um sistema determinístico é comum, para alguns valores de parâmetros, que exista um comportamento intermitente do sistema. Aqui, mesmo não existindo esta variedade propriamente dita, é possível verificar, pela medida de dispersão da rede, que a intermitência, comum em sistemas determinísticos, também ocorre.

Mas o que exatamente é um comportamento intermitente? Imaginando uma reta de valor constante e igual a zero, por exemplo, no comportamento da distância à variedade de sincronização de sistemas sincronizados, um sistema, sendo intermitente, não vai, ao longo do tempo, ter sempre este comportamento constante, sendo

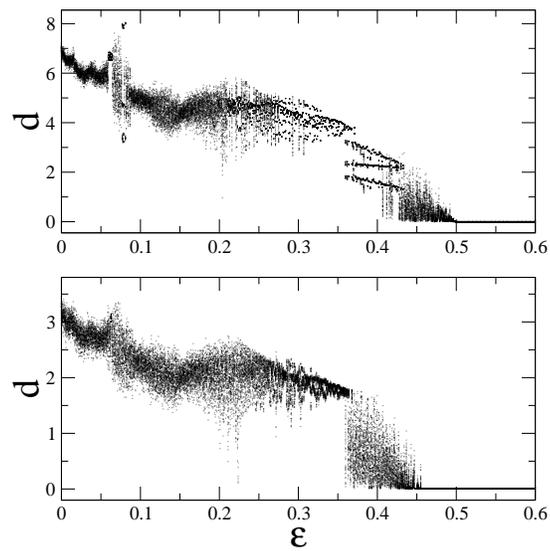


Figura 5.6: Diagrama de bifurcação das redes com 385 sítios e condições de contorno periódicas(em cima), e da rede de 81 sítios com o reservatório(embaixo), usando a distância à variedade de sincronização como parâmetro da bifurcação.

que em alguns intervalos de tempo ele passa a ter estouros. Estes estouros são uma das características de estados intermitentes, eles ocorrem entre comportamentos periódicos, também chamados laminares, de forma aleatória e acontecem quando um parâmetro do sistema é variado, chegando a um valor crítico. O tamanho das regiões laminares existentes em um comportamento intermitente é determinada pelo tempo τ em que o sistema permanece nesta região. Por exemplo, supondo um sistema onde o tempo é uma variável discreta, o menor comprimento de fase laminar é a unidade, assim, quando este valor é atingido, considera-se que não existe região intermitente, ou seja, o sistema está não sincronizado. Quando o tempo τ é o máximo utilizado para a iteração da rede, existe apenas uma grande região laminar, aqui, o sistema atinge seu estado sincronizado. Já na região onde a intermitência ocorre, essas fases laminares (ou tempo de iteração τ) variam entre a unidade e o valor máximo, sendo intercalados por regiões de estouros que indicam a saída do sistema da variedade de sincronização.

Quando aumenta a diferença entre o valor do parâmetro e seu valor crítico, a duração média dos estados laminares diminui e o comportamento do sistema fica menos periódico e os estouros ocorrem com mais frequência.

O termo intermitência foi usado em dinâmica dos fluidos para descrever sinais de investigação em fluidos que alternavam entre porções suaves e porções que possuíam explosões, interpretados como estados laminares e turbulentos no fluido [91]. Um modelo de intermitência em termos de sistemas dinâmicos foi dado por [75] e visto no capítulo anterior como forma de rota para o caos.

A intermitência que aqui acontece, além de surgir devido à alta dimensão do sistema, também pode ocorrer devido à parte estocástica da rede. Este comportamento intermitente pode ser analisado através da figura 5.7, onde os tamanhos das regiões fora dos estouros (regiões laminares) são contadas e relacionadas com os valores de ε . Através da figura 5.7 é fácil verificar que para valores de ε menores que 0,38 não existem estados sincronizados, nem que estejam próximos a ele. Entre este valor e 0,46 ocorrem estados intermitentes e quando $\varepsilon > 0,464$, atinge-se o estado sincronizado da rede, ou seja, encontra-se um valor crítico de ε para a rede estocástica de 81 sítios, que é próximo ao valor encontrado na rede determinística de 385 sítios [63], [67]. Nesta região de sincronização irá existir apenas um platô de tamanho idêntico ao tempo de iteração do sistema.

Assim, com o valor de $\alpha = 0$, para estados sincronizados, a motivação do trabalho foi obtida. Entretanto, para valores de α diferentes de zero, o reservatório

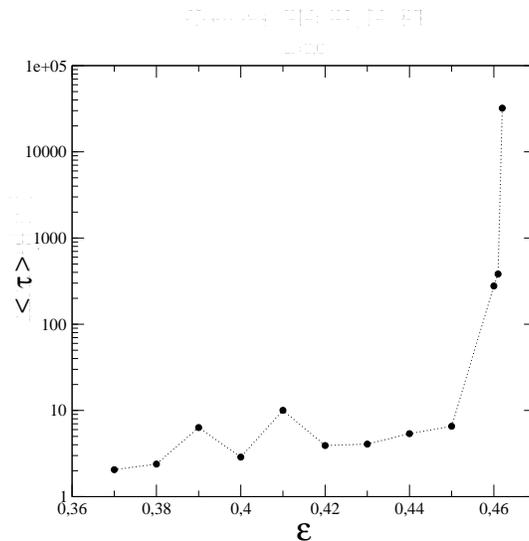


Figura 5.7: Tamanho das fases laminares *versus* o parâmetro ε . Rede estocástica com 81 sítios e $\alpha = 0$.

térmico não atua apenas de forma a diminuir o tamanho da rede, mas influi em toda a dinâmica do sistema. Este fato pode ser observado a seguir, quando estuda-se $\alpha = 0,5$ (um valor de parâmetro quando $\varepsilon = 1,0$, no sistema determinístico, de estado sincronizado).

5.3.2 Estudando um caso de parâmetro de alcance maior

Para a rede estocástica em estudo, um valor de $\alpha = 0,5$, independente do valor de ε , faz com que a rede jamais atinja um estado sincronizado, diferente do que acontecia para o caso anteriormente estudado. Além disso, para a rede determinística, existe um valor crítico de ε para o qual o sistema apresenta sincronização [67]. Ambas as situações podem ser verificadas pelo diagrama de bifurcação da figura 5.8.

Esta figura ajuda a perceber o comportamento da “variedade de sincronização” quando da presença de ruído no sistema. No gráfico superior, sem a presença de sítios estocásticos, a variedade de sincronização existe e é atingida para um valor crítico de ε , já no caso apresentado no gráfico de baixo, a região de sincronização não é atingida já que o comportamento da dispersão (distância à variedade de sincronização) tem um valor grande se comparado às tolerâncias até aqui utilizadas.

Assim, imagina-se que a presença do reservatório, nesta rede, para valores

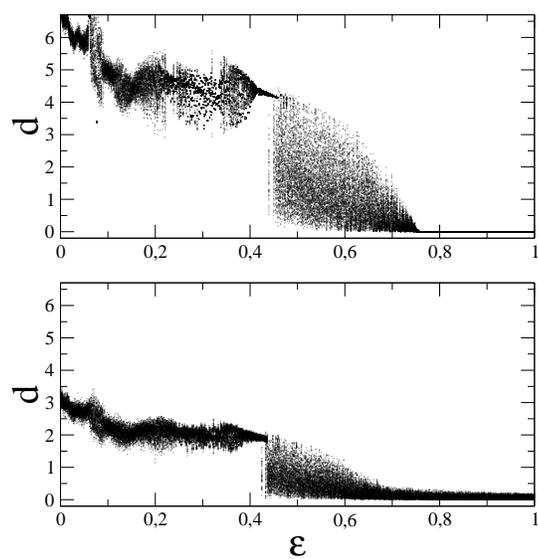


Figura 5.8: Diagramas de bifurcação para $\alpha = 0,5$ variando ε . Na figura de cima 385 sítios sem reservatório. Embaixo 81 sítios com reservatório.

maiores de α , contribua para que a região do espaço que no sistema determinístico é a variedade de sincronização, seja mais difícil de ser atingida, ou seja, a presença de ruído nos sítios vizinhos faz com que as trajetórias do sistema não se aproximem desta região, principalmente quando o acoplamento tende a ser local, já que quanto menos vizinhos a rede tiver, mais estocástico será seu comportamento. Esta situação é verificada para qualquer valor de α diferente de zero quando o parâmetro ε é variado.

5.4 Comportamento do sistema variando o alcance do acoplamento

Aqui o parâmetro ε é fixo e igual a um e varia-se o parâmetro α desde valores muito pequenos até valores consideravelmente altos, sendo que $\alpha = 0$ já foi tratado na seção anterior.

5.4.1 Rede “pequena”

Aqui novamente faz-se comparações entre a rede estocástica de 81 sítios e a rede determinística de 385 sítios. Sabe-se de [63], [67] que a região sincronizada é bem definida para os valores de parâmetros estudados, isto é, a passagem dos estados sincronizados para não sincronizados é bem abrupta, e pode-se considerar que o sistema está sincronizado até o valor de $\alpha \approx 0,8$, o que não é verificado no caso da rede estocástica como pode ser visto na figura 5.9. Novamente aqui utilizou-se o conceito de distância para analisar o sistema. Para esta situação em estudo deixa-se $\varepsilon = 1,0$ e varia-se o valor do parâmetro α desde valores muito próximos a zero até um número relativamente alto, igual a 100.

É possível verificar, através da figura 5.9, que as curvas, com o aumento do parâmetro α , não possuem uma mudança abrupta, isto é, elas se modificam lentamente. Isso mostra que quando se está trabalhando em um sistema não totalmente determinístico, a variedade de sincronização pode não existir. Entretanto, existe uma região no espaço de fase que tem o mesmo papel desta variedade, sendo maior quanto maior o valor do parâmetro α .

Do ponto de vista de sistemas dinâmicos não-lineares, não se pode falar em variedade de sincronização para o sistema acoplado a um reservatório térmico. No entanto, a rede aqui estudada comporta-se como se estivesse em uma região em que

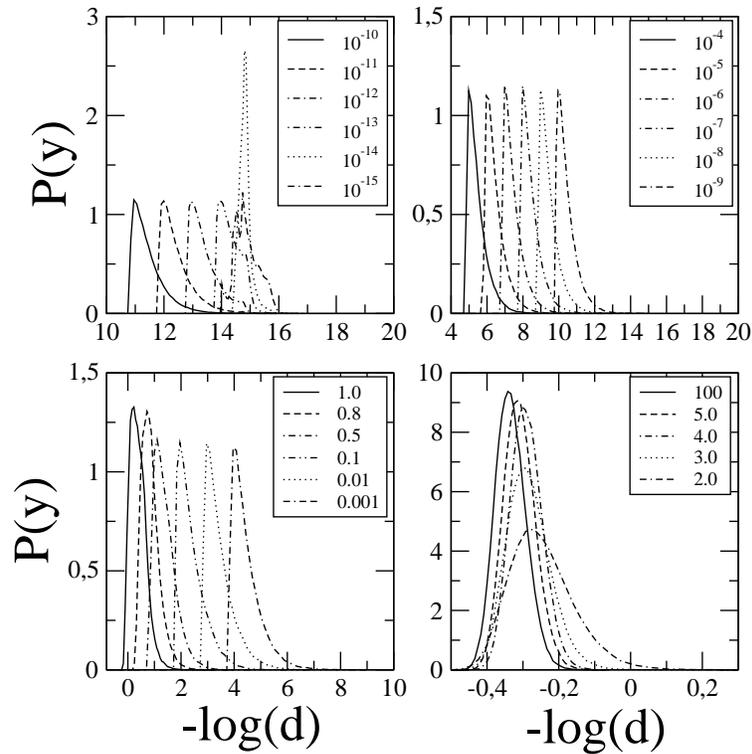


Figura 5.9: Distribuição do comportamento da distribuição à variedade de sincronização da rede com reservatório para 81 mapas, sendo mais dois randômicos, variando o parâmetro α , com o parâmetro ε constante e igual a 1.

suas trajetórias são continuamente levadas a esta região, para que o sistema de vários sítios esteja dinamicamente comportando-se como se fosse apenas um único mapa.

5.4.2 Uma comparação entre as redes com e sem reservatório, fazendo a variação do parâmetro de alcance.

Através do estudo aqui feito, é possível verificar que a mudança lenta entre as curvas da medida de dispersão do sistema está diretamente relacionada ao comportamento do sistema perante o reservatório térmico. O ruído constante, presente na rede, pode fazer com que esta região do espaço que possui uma característica semelhante à variedade de sincronização, seja maior ou menor, conforme o parâmetro é modificado. Dessa forma, mudanças contínuas no parâmetro α levam também a mudanças contínuas nesta região do espaço, fazendo com que as curvas não tenham uma mudança repentina. Este comportamento pode ser visto na figura 5.10, onde os sistemas com e sem reservatório são plotados tanto para uma rede de 81 sítios, como para uma rede de 385 sítios. Nestes gráficos utiliza-se a distribuição da distância à variedade de sincronização e considera-se o menor valor desta distribuição, ou seja, para cada valor do parâmetro de alcance α considerado, o valor mínimo da distribuição é avaliado de forma a verificar como a variedade de sincronização se comporta perante a presença de ruído. Esse valor mínimo da distribuição é C na figura 5.10. É possível perceber, através do gráfico mencionado, que a variedade de sincronização existente no sistema determinístico tende a variar sua dimensão quando algum ruído é adicionado no sistema. Os tamanhos de rede utilizados para estudar os sistemas foram escolhidos porque uma rede sem reservatório, com 385 mapas, está no limite termodinâmico [67] e para 81 sítios, com reservatório, e $\alpha = 0$, o comportamento de ambos os sistemas é idêntico. Portanto, para o que se era esperado no início da pesquisa, estes foram os valores considerados e depois continuaram sendo empregados para os estudos aqui realizados.

Assim, é verificado através da figura 5.10, que independentemente do tamanho da rede, a transição de estados das redes permanece idêntica, ou seja, quando o sistema é determinístico(sem reservatório), a variedade de sincronização é bem determinada e os estados sincronizados perdem sua estabilidade de maneira abrupta, enquanto na rede não determinística(com reservatório) como a variedade de sincronização não pode ser realmente definida, o comportamento é suave na transição entre as regiões.

Para verificar este comportamento semelhante da região de sincronização

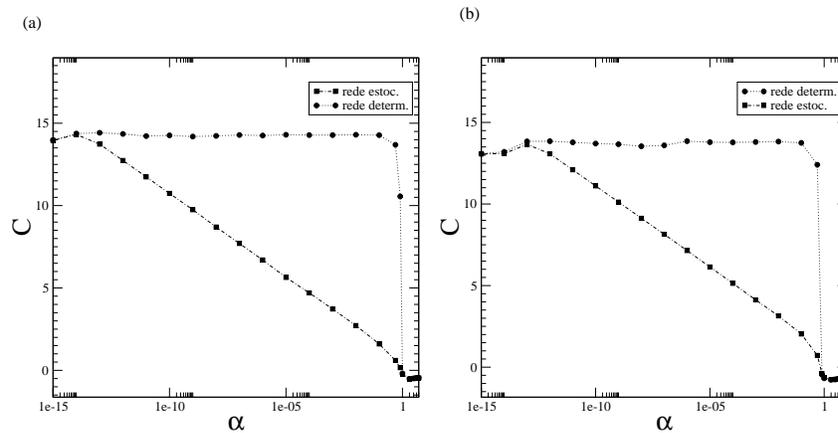


Figura 5.10: Comparação do comportamento do valor mínimo da distribuição da distância à variedade de sincronização dos sistemas com e sem reservatório para dois tamanhos de rede. Em (a) $N=81$ e em (b) $N=385$.

entre os sistemas com e sem reservatório, é também importante analisar os gráficos de campo médio e da variância do campo médio dos sistemas. O campo médio é representado por,

$$\langle X \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

onde x_i é um observável do i -ésimo sítio. A presença de sincronização no sistema, através do campo médio, se dá quando, para um valor crítico do acoplamento, as oscilações do campo médio são grandes; já quando as oscilações de campo médio são pequenas e desaparecem no limite termodinâmico, considera-se uma passagem para estados não sincronizados [92]. A transição de estado não sincronizado para sincronizado é freqüentemente analisada através de analogias com transições de fase, sendo que a variância do campo médio pode também mostrar essa transição.

Assim, através do campo médio e da variância, que são analisados nas figuras 5.11 e 5.12, é fácil verificar que mudando o valor do parâmetro α , os dois sistemas comportam-se muito semelhantemente, ou seja, o campo médio para o sistema sincronizado varia entre 0 e 1, ocorrendo o mesmo para o sistema que está acoplado ao reservatório térmico. Da mesma forma, para valores de α em que o sistema sem reservatório não apresenta sincronização entre os sítios, o campo médio oscila muito pouco, ocorrendo o mesmo para o sistema que não é totalmente determinístico. Com

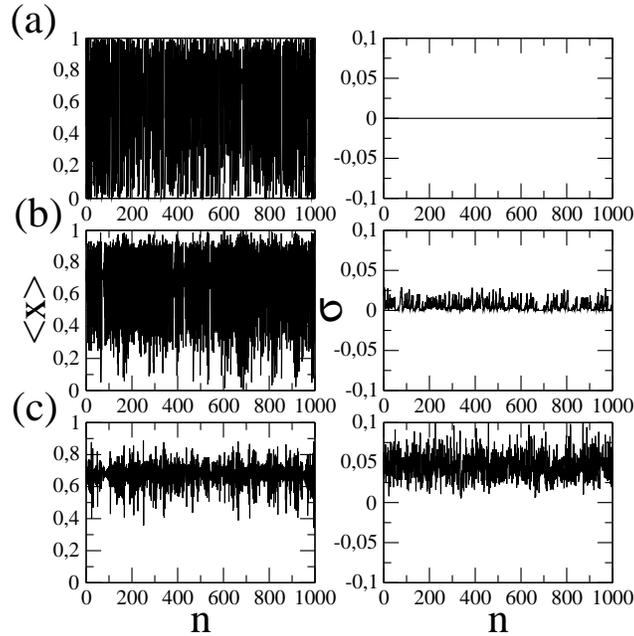


Figura 5.11: Campo médio e variância da rede sem reservatório para 81 sítios com diferentes valores de α . Em (a) $\alpha = 10^{-7}$, em (b) $\alpha = 1$ e em (c) $\alpha = 2$.

este resultado pode-se perceber que, mesmo não sendo possível falar em variedade de sincronização na presença de ruído, mais uma vez verifica-se que quando existe ruído, uma região do espaço, neste sistema, tem o comportamento dinamicamente semelhante a esta variedade no sistema determinístico.

As figuras 5.13 e 5.14 mostram a média, a variância e a assimetria (que é o terceiro momento da distribuição) da série da distância *versus* o parâmetro α . Através delas é também possível verificar a mudança abrupta entre os estados sincronizados e não sincronizados da rede sem reservatório e a mudança contínua destes estados na rede acoplada ao reservatório. Além disso, através da variância e da assimetria este comportamento é confirmado, mostrando inclusive que para o caso da rede sem reservatório são poucos os valores em que a curva é simétrica, ocorrendo o mesmo na rede com reservatório. Este comportamento acontece provavelmente devido ao fato, no caso com reservatório, pela presença do ruído e do valor do parâmetro α que influenciam diretamente o comportamento da região do espaço onde o sistema possui um comportamento semelhante a um estado sincronizado. No sistema

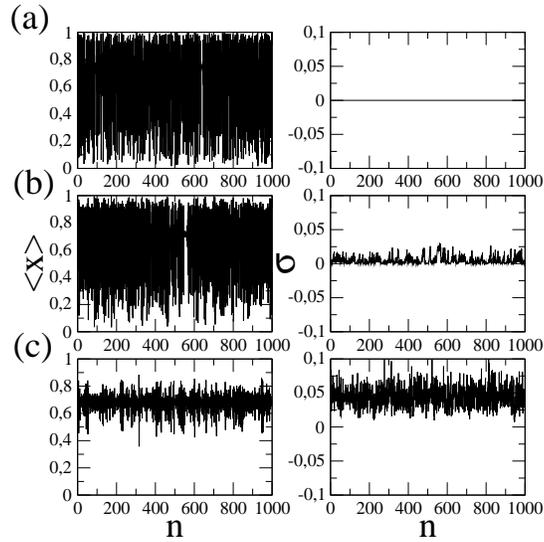


Figura 5.12: Campo médio e variância da rede acoplada ao reservatório térmico com 81 sítios e diferentes valores de α . Em (a) $\alpha = 10^{-7}$, em (b) $\alpha = 1$ e em (c) $\alpha = 2$.

sem o reservatório isso acontece porque a distribuição da distância à variedade de sincronização não é simétrica devido ao seu próprio comportamento relacionado às trajetórias, ou seja, quando uma condição inicial está próxima a esta região, mais rapidamente ela converge para esta variedade.

Uma outra forma de verificar este comportamento intermitente é através do tamanho das fases laminares, figura 5.15, onde não se tem, com a variação de α , em um determinado intervalo, um comportamento constante. Este gráfico mostra que para valores de α maiores que $\approx 1,0$, o sistema está não sincronizado, já para valores de $\alpha \approx 0,05$, o sistema atinge a sincronização. Entre estes valores do parâmetro de alcance α , quando $\varepsilon = 1,0$, o sistema possui comportamento intermitente.

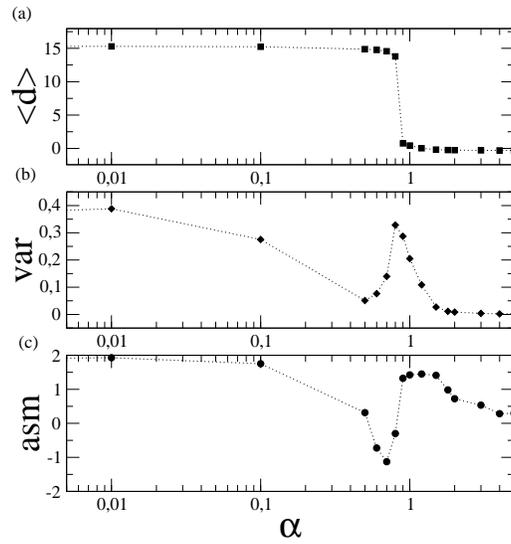


Figura 5.13: Média da distância em (a), variância em (b) e assimetria em (c), variando com α para a rede sem reservatório.

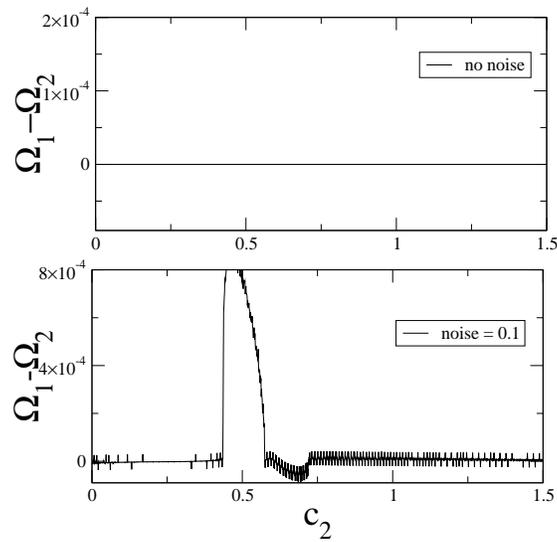


Figura 5.14: Rede com reservatório e 81 sítios. Média em (a), variância em (b) e assimetria em (c), variando com α .

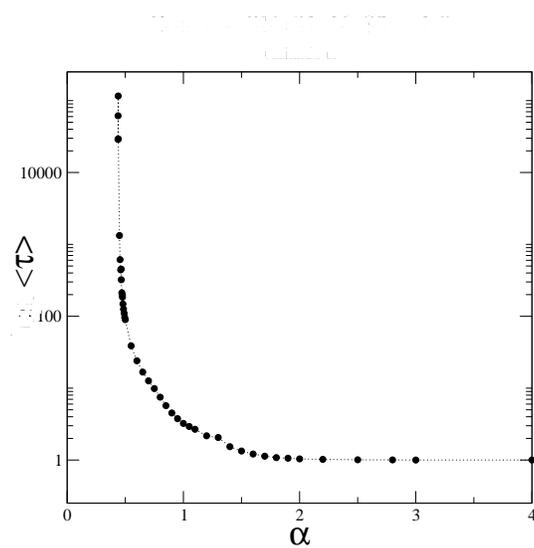


Figura 5.15: Tamanho das fases laminares *versus* o parâmetro de alcance α . Rede estocástica com 81 sítios e $\varepsilon = 1, 0$.

Capítulo 6

Conclusões

A elaboração desta tese foi feita através de três sistemas distintos. Dois sistemas de mapas acoplados e uma rede de dois osciladores de Liênard acoplados.

No capítulo três estudou-se o comportamento de uma rede acoplada a sítios aleatórios com três mil mapas caóticos acoplados e condições de contorno periódicas. Através deste estudo foi possível verificar que uma rede com poucos mapas produzia um comportamento distinto no que diz respeito a estados sincronizados, isto é, algumas condições iniciais sincronizavam antes, o que para o intuito do estudo não era viável. Desta forma, apesar de um tempo computacional mais longo ser despendido, preferiu-se trabalhar com uma rede maior, fazendo com que o estudo da rede fosse o mais perto possível de um modelo que representasse bem um sistema real.

Através do estudo da rede de mapas acoplados foi possível perceber que a probabilidade, isto é, $\frac{k}{N}$, que depende das ligações aleatórias na rede, tem um comportamento muito semelhante ao do parâmetro de alcance α em uma rede que apresenta acoplamento do tipo lei de potência. Essa semelhança diz respeito ao comportamento sincronizado da rede, isto é, um número de ligações aleatórias grande faz com que o sistema tenha uma grande semelhança com o sistema de lei de potência quando $\alpha = 0$. A entropia do sistema diminui com o aumento do parâmetro ε para um tamanho fixo de rede e também para um número fixo de ligações aleatórias. O mesmo ocorre para um valor fixo do parâmetro ε e aumentando o número de ligações aleatórias entre os sítios. Este fato indica que, para as condições citadas, uma sincronização entre os mapas está ocorrendo, levando a um estado mais bem comportado. Além disso, foi possível observar valores de parâmetros que mostram estados não sincronizados e sincronizados da rede, sendo verificado que valores do parâmetro ε menores que 0,75 (o valor crítico) não levam o sistema a sincronização

do tipo completa dependendo do valor de p . Também foi percebido que o aumento de apenas uma ligação aleatória por sítio pode mudar completamente o comportamento da rede.

O capítulo quatro abordou um acoplamento entre dois osciladores de Liènard. Neste capítulo foram estudados vários aspectos do acoplamento. Situações de acoplamento unidirecional e bidirecional sendo que os osciladores eram diferentes e também comportamento do sistema para osciladores idênticos, com acoplamento unidirecional, na presença de ruído. Os primeiros resultados mostraram um comportamento, quando do acoplamento unidirecional forçado de osciladores diferentes, onde o sistema numérico perde o sombreamento de sua trajetória real devido à presença da variabilidade da dimensão instável. Para o sistema em questão, a passagem do segundo expoente de Lyapunov por zero traz uma característica de região altamente instável, fazendo com que o sistema passe a apresentar perda de confiabilidade na trajetória numérica. Quanto mais próxima a uma distribuição gaussiana estes expoentes forem, mais forte a característica da presença de variabilidade da dimensão instável (VDI), ou seja, número variado de dimensões instáveis. Para sistemas hiperbólicos, a presença de VDI causa a perda da hiperbolicidade. No entanto, no sistema abordado já não-hiperbólico, a presença de VDI faz com que, para certos valores do acoplamento, o sistema físico-matemático não seja realmente confiável para descrever um sistema real.

Além disso, sabendo-se algumas características de rotas para o caos do oscilador desacoplado, fez-se também o estudo destas rotas para o sistema acoplado bidirecionalmente, e também o comportamento deste sistema perante a presença de um ruído branco. Foi verificado que para certos valores do parâmetro c_2 de acoplamento, o sistema atingia o caos através de rota de intermitência tipo I. Nesta situação, um ponto fixo instável e um estável se uniam formando uma explosão caótica. Este acontecimento foi verificado através dos mapas de retorno da série temporal do sistema, e também através do expoente do tempo médio de estouros, que para este caso de intermitência tem o valor de $\frac{1}{2}$. O estudo do cenário de Ruelle-Takens também foi estudado e percebeu-se que para certos valores do parâmetro de acoplamento c_2 , a rota via duplicação de período também ocorre, não sendo, no entanto, estudada mais minuciosamente. Depois disso, introduziu-se uma perturbação no sistema dos dois osciladores, e passou-se a analisar o comportamento destas rotas quando da presença desta perturbação. O ruído, no caso intermitente, só começa a modificar o sistema quando seu valor é da ordem de 10^{-9} . Antes disso, o sistema, sendo caótico, não

sente a presença do ruído branco adicionado ao sistema. Quando o ruído aumenta, a caoticidade local cresce e na passagem para estado caótico, o sistema passa a não ter mais rota de intermitência tipo I.

Os osciladores idênticos também foram analisados. Através deles percebeu-se a presença de um ruído ótimo, por volta de 0,01, para o sistema atingir um estado de sincronização completa. Percebeu-se que para um determinado valor de ruído, o sistema atingia a variedade de sincronização mais facilmente, ou seja, nesta situação um típico caso de estado mais coerente com a presença de ruído. Além disso, estudou-se também a região biestável do sistema, percebendo que a presença de ruído nesta região produzia estados intermitentes.

O capítulo cinco trouxe o estudo de mapas logísticos caóticos acoplados entre si a sítios estocásticos, através de um acoplamento tipo lei de potência. Devido a forma como a estocasticidade foi introduzida no sistema, estes sítios ruidosos foram denominados reservatório térmico, já que influenciavam a rede como um todo de forma não determinística. Aqui foi percebido que a presença de sítios estocásticos na rede faziam com que a transição entre estados sincronizados e não sincronizados acontecesse de maneira contínua, enquanto para um caso de rede com condição de contorno periódica esta transição acontecia de maneira mais abrupta. Percebeu-se também que para o valor do parâmetro $\alpha = 0$, uma rede com poucos sítios acoplada ao reservatório, possui um epsilon crítico muito próximo ao da rede com muitos sítios sem o reservatório e com condição de contorno periódica. Nesta situação a presença do reservatório não modificou o comportamento do sistema e fez com que os sítios estocásticos funcionassem como uma fonte para chegar a um comportamento de limite termodinâmico com uma rede de menor tamanho. Outra situação observada é que, mesmo não existindo uma variedade de sincronização quando o sistema apresenta comportamento estocástico, o comportamento de estados sincronizados acontece de forma muito semelhante entre sistemas determinísticos e não determinísticos, fato que foi possível verificar através da variância, do parâmetro de ordem, e também do campo médio da rede.

Um outro aspecto estudado neste sistema foi a presença de estados intermitentes que mostraram a presença de regiões laminares entre estados sincronizados e não sincronizados, ou seja, regiões de instabilidade presentes na região que possuem comportamento semelhante a da variedade de sincronização. Foi verificado também que para valores do parâmetro $\alpha = 0,5$, nenhum comportamento sincronizado aparece na rede, independentemente do valor do parâmetro ε . Isto pode significar que

os sítios estocásticos, mesmo com o parâmetro tendendo a um comportamento mais local, se comportam como sítios que tiram o sistema de um comportamento mais regular, o que de certa forma é o que se imagina.

Através do que foi aqui analisado percebeu-se o quanto os sistemas dinâmicos não lineares estão cada vez mais presentes em situações biológicas e realmente cotidianas. Pode-se verificar que tanto os mapas, quanto os osciladores, são modelos bem razoáveis para ajudar na compreensão de vários comportamentos existentes na natureza, tanto do ponto de vista físico como também biológico e de outras áreas. O caos espaço-temporal pôde ser estudado e analisado nos três sistemas apresentados nesta tese.

Em trabalhos futuros, do ponto de vista dinâmico, pode-se considerar o estudo de estados sincronizados para outros valores de parâmetros, no estudo dos osciladores e uma análise mais apurada do atrator caótico. No caso das redes de mapas, muitas situações ainda podem ser analisadas, por exemplo, calcular os expoente de Lyapunov para o caso não determinístico e avaliar, através dele, com mais clareza, o que acontece na região que apresenta comportamento característico ao da variedade de sincronização. Além disso, pode-se tentar entender como a entropia e a dimensão de Lyapunov se relacionam neste sistema, trabalhar com uma rede maior para diferentes valores do parâmetro ε e descobrir como o sistema se comporta.

Continuando neste intento, mas pensando em uma situação mais aplicada, pode-se analisar, no caso de osciladores, outros modelos de equações diferenciais que tenham comportamento mais semelhante ao comportamento cardíaco, para comparações entre dados clínicos reais, que possam ajudar na descoberta de algumas características específicas de determinadas anomalias. Este estudo pode ser feito através de séries temporais, buscando comportamentos semelhantes entre dados do modelo dinâmico e dados obtidos de pacientes. Pode-se analisar este mesmo sistema de osciladores para outros valores de modos normais e verificar como ele se comporta perante esta mudança, trazendo ou não, maiores semelhanças com diagnósticos clínicos.

Apêndice A

Artigos publicados durante o doutoramento

- A.M. dos Santos, S.R. Lopes e R.L. Viana, *Rhythm synchronization and chaotic modulation of coupled van der Pol oscillators in a model for the heartbeat*, Physica A **338**, 335, 2004.
- A.M. dos Santos, R.L. Viana, S.R. Lopes, S.E.de S. Pinto e A.M. Batista, *Chaos synchronization in a lattice of piecewise linear maps with regular and random couplings*, Physica A, **367**, 145, 2006.
- A.M. dos Santos, C.F. Woellner, A.M. Batista, S.R. Lopes e R.L. Viana, *Lyapunov spectrum of a lattice of chaotic systems with local and non-local couplings*, Chaos, Solitons and Fractals, in press.
- A.M. dos Santos, S.R. Lopes e R.L. Viana, *Synchronization regimes in two coupled noisy Liénard-type driven oscillators*. Chaos, Solitons and Fractals, in press.

A.1 Artigos submetidos durante o doutoramento

- A.M. dos Santos, S.R. Lopes e R.L. Viana, *Intermittent behavior and synchronization of two coupled noisy Liénard-type oscillators* .

Bibliografia

- [1] L.H.A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. Livraria da Física Editora, 2002.
- [2] J.Y. Huang e J.J. Kim. Type-II intermittency in a coupled nonlinear oscillator: Experimental observation. *Physical Review A*, 36:1495, 1987.
- [3] L.A. Segel. *Modeling dynamic phenomena in molecular and cellular biology*. Cambridge University Press, 1989.
- [4] C. Beck e F. Schlögl. *Thermodynamics of chaotic systems - an introduction*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal Atmos. Sci.*, 20:130, 1963.
- [6] H. Bai-Lin. *Chaos*. World Scientific, 1984.
- [7] J. Guckenheimer e P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, 1983.
- [8] A.M.O. de Almeida. *Sistemas Hamiltonianos - Caos e Quantização*. Editora da Unicamp, 1991.
- [9] B.J. West. *Fractal Physiology and Chaos in Medicine*. World Scientific, 1990.
- [10] C. Anteneodo, S.E. de S. Pinto, A.M. Batista e R.L. Viana. Analytical results for coupled-map lattices with long-range interactions. *Physical Review E*, 68:45202, 2003.
- [11] A.M. dos Santos. *Sincronização entre dois osciladores de van der Pol acoplados*. Dissertação de mestrado, 2002.
- [12] A.C. Hindmarsh. *Odepack, a Systematized Collection of O.D.E. Solvers*. North-Holland, 1983.

- [13] K.T. Alligood, T.D. Sauer e J.A. Yorke. *Chaos - An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag, 1997.
- [14] Kunihiko Kaneko. *Theory and applications of coupled map lattices*. John Wiley and Sons, 1993.
- [15] D.B. Vasconcelos. *Correlação espacial em redes de mapas acoplados*. Tese de doutorado, 2005.
- [16] D.B. Vasconcelos, S.R. Lopes, R.L. Viana e J. Kurths. Spatial correlation and synchronization in coupled map lattices with long-range interactions. *Physica A*, 343:201, 2004.
- [17] G. Bub e L. Glass. Bifurcation in a discontinuous circle map: A theory for a chaotic cardiac arrhythmia. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5:359, 1995.
- [18] P.M. Gade e C.K. Hu. Synchronization and coherence in thermodynamic coupled map lattices with intermediate-range coupling. *Physical Review E*, 60:4966, 1999.
- [19] M. Hasler e Y.L. Maistrenko. An introduction to the synchronization of chaotic systems: coupled skew tent maps. *IEEE Transaction on circuits and systems-I: Fundamental theory and applications*, 44:856, 1997.
- [20] R.L. Viana. *Introdução às redes de mapas acoplados - modelos para o estudo de caos espaço-temporal*. Notas de aula - mini-curso pós graduação IFUSP, 2000.
- [21] A.P. Munuzuri e L.O. Chua. Stationary structures in a discrete bistable reaction-diffusion system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 7:2807, 1997.
- [22] P. Hoffmann, S. Wehner, D. Schmeisser, H.R. Brand e J. Kuppers. Noise-induced spatiotemporal patterns in a bistable reaction-diffusion system: Photoelectron emission microscopy experiments and modeling of the CO oxidation reaction on Ir(111). *Physical Review E*, 73:056123, 2006.
- [23] A.L. Kawczynski e M. Leda. Periodic spatiotemporal patterns in a two-variable reaction-diffusion model. *Physical Review E*, 73:056208, 2006.
- [24] R.D. Benguria e M.C. Depassier. Speed of fronts of the reaction-diffusion equation. *Physical Review Letters*, 77:1171, 1996.

- [25] S. Raghavachari e J.A. Glaizer. Spatially coherent states in fractally coupled map lattices. *Physical Review Letters*, 74:3297, 1995.
- [26] E. Bayong e H. Diep. Effect of long-range interaction on the critical behavior on the continuous Ising model. *Physical Review B*, 59:11919, 1999.
- [27] F. Tamarit e C. Anteneodo. Rotators with long-range interactions: connection with the mean-field approximation. *Physical Review Letters*, 84:208, 2000.
- [28] E. Bayong, H.T. Diep e V. Dotsenko. Potts model with long-range interactions in one dimension. *Physical Review Letters*, 83:14, 1999.
- [29] A.M. Batista e R.L. Viana. Lyapunov exponent of a lattice of chaotic maps with a power-law coupling. *Physics Letters A*, 286:134, 2001.
- [30] S. Ishii e M. Sato. Associative memory based on parametrically coupled chaotic elements. *Physica D*, 121:344, 1998.
- [31] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, 1990.
- [32] S.H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. ABP Perseus Books, 1994.
- [33] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1994.
- [34] T.F. Nonnenmacher, G.A. Losa e E.R. Weibel. *Fractals in Biology and Medicine*. Birkhäuser Verlag, 1993.
- [35] H.J. Korsch e H.J. Jodl. *Chaos - A program collection for the PC*. Springer, 1999.
- [36] C. Hayashi. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. McGraw-Hill, 1964.
- [37] A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, G.V. Osipov e J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving. *Physica D*, 104:219, 1997.
- [38] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares e C.S. Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 366:1, 2002.
- [39] L. Glass. Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature*, 410:277, 2001.

- [40] Z. Zheng e G. Hu. Generalized synchronization versus phase synchronization. *Physical Review E*, 62:7882, 2000.
- [41] J.F. Heagy, T.L. Carroll e L.M. Pecora. Synchronous chaos in coupled oscillator systems. *Physical Review E*, 50:1874, 1994.
- [42] M.G. Rsenblum, A.S. Pikovski e J. Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 78:4193, 1997.
- [43] A.M. dos Santos, S.R. Lopes e R.L. Viana. Rhythm synchronization and chaotic modulation of coupled van der Pol oscillators in a model for the heartbeat. *Physica A*, 338:335, 2004.
- [44] L. Kocarev e U. Parlitz. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. *Physical Review Letters*, 76:1816, 1996.
- [45] Y. Kuramoto. *Chemical oscillations, waves and turbulence*. Springer-Verlag, 1984.
- [46] R.L. Viana e A.M. Batista. Synchronization of Coupled Kicked Limit Cycle Systems. *Chaos, Solitons and Fractals*, 9:1931, 1998.
- [47] S.E.de S. Pinto e R.L. Viana. Synchronization plateaus in a lattice of coupled sine-circle maps. *Physical Review E*, 61:5154, 2000.
- [48] A.M. dos Santos, R.L. Viana, S.R. Lopes, S.E.de S. Pinto e A.M. Batista. Chaos synchronization in a lattice of piecewise linear maps with regular and random couplings. *Physica A*, 367:145, 2006.
- [49] E.J. Kostelich, I. Kan, C. Grebogi, E. Ott e J.A. Yorke. Unstable dimension variability: A source of nonhyperbolicity in chaotic system. *Physica D*, 109:81, 1997.
- [50] T. Sauer, C. Grebogi e J.A. Yorke. How long do numerical chaotic solutions remain valid? *Physical Review Letters*, 79:59, 1997.
- [51] C. Grebogi, S.M. Hammel, J.A. Yorke e T. Sauer. Shadowing if physical trajectories in chaotic dynamics: containment and refinement. *Physical Review Letters*, 65:1527, 1990.

- [52] D.V. Anosov. Geodesic flows on a compact Riemann manifold of negative geodesic curvature. *Sovietic Physics Dokl.*, 22:253, 1967.
- [53] M. Bowen. Markov partitions for axiom a diffeomorphism. *American Journal of Mathematical*, 92:725, 1970.
- [54] B. Fiedler. *Handbook of dynamical systems*. Elsevier Science B.V., 2002.
- [55] Y.C. Lai, D. Lerner, K. Williams e C. Grebogi. Unstable dimension variability in coupled chaotic system. *Physical Review E*, 60:5445, 1999.
- [56] R. Abraham e S. Smale. *Proc. of symposium of pure mathematic*. AMS, 1970.
- [57] M.E.J. Newman. Models of the small world. *Journal of Statistical Physics*, 101:819, 2000.
- [58] M.E.J. Newman, C. Moore e D.J. Watts. Mean-Field solution of the small-world network model. *Physical Review Letters*, 84:3201, 2000.
- [59] M.E.J. Newman e D.J. Watts. Scaling and percolation in the small-world network model. *Physical Review E*, 60:7332, 1999.
- [60] M. Barthélemy e L.A.N. Amaral. Small-world networks: Evidence for a crossover picture. *Physical Review Letters*, 82:3180, 1999.
- [61] A.M. Batista, S.E. de S. Pinto, R.L. Viana e S.R. Lopes. Mode locking in small-world networks of coupled circle maps. *Physica A*, 322:118, 2003.
- [62] H. Chaté e P. Manneville. Transition to turbulence via spatiotemporal intermittency. *Physical Review Letters*, 58:112, 1987.
- [63] C. Anteneodo, S.E.S. Pinto, A.M. Batista e R.L. Viana. Analytical results for coupled map lattices with long-range interactions (ERRATA). *Physical Review E*, 69:29904, 2004.
- [64] R.L Viana, C. Grebogi, S.E de S. Pinto, S.R. Lopes, A.M. Batista e J. Kurths. Validity of numerical trajectories in the synchronization transtion of complex systems. *Physical Review E*, 68:67204, 2003.
- [65] A.M. Batista e R.L. Viana. Kolmogorov-Sinai entropy for locally coupled piecewise linear maps. *Physica A*, 308:125, 2002.

- [66] A.M. Batista, S.E.S. Pinto, R.L. Viana e S.R. Lopes. Lyapunov spectrum and synchronization of piecewise linear map lattices with power-law coupling. *Physical Review E*, 65:56209, 2002.
- [67] S.E de Souza Pinto, J.T. Lunardi, A.M. Saleh e A.M. Batista. Some aspects of the synchronization in coupled maps. *Physical Review E*, 72:37206, 2005.
- [68] R.L. Viana, C. Grebogi, S.E. de S. Pinto, S.R. Lopes, A.M. Batista e J. Kurths. Validity of numerical trajectories in the synchronization transition of complex system. *Physical Review E*, 68:67204, 2003.
- [69] C. Boldrighini, L.A. Bunimovich, G. Cosini, S. Frigio e A. Pellegrinotti. Ising-type and other transitions in one-dimensional coupled map lattices with sign symmetry. *Journal States Physics*, 102:1271, 2001.
- [70] A.M. dos Santos, C.F. Woellner, S.R. Lopes, A.M. Batista e R.L. Viana. Lyapunov spectrum of a lattice of chaotic systems with local and non-local couplings. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006.
- [71] B.van der Pol e J.van der Mark. The heart beat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. *Phil. Mag.*, 6:763, 1928.
- [72] Y.J. Han. Dynamics of coupled nonlinear oscillators of different attractors; van der Pol and damped Duffing oscillator. *Journal of the Korean Physical Society*, 37:3, 2000.
- [73] B.J. West, A.L. Goldberger, G. Rovner e V. Bhargava. Nonlinear dynamics of the heartbeat. *Physica D*, 17:198, 1985.
- [74] D.D. Bernardo, M.G. Signorini e S. Cerutti. A model of two nonlinear coupled oscillators for the study of heartbeat dynamics. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8:1975, 1998.
- [75] P. Manneville e Y. Pomeau. Intermittency and the Lorenz model. *Physics Letters*, 75:1, 1979.
- [76] H.G. Schuster. *Deterministic Chaos - An Introduction*. VCH Verlagsgesellschaft mbH, 1995.
- [77] N.F. Ferrara e C.P.C. do Prado. *Caos - Uma Introdução*. Edgard Blücher Ltda., 1994.

- [78] D. Ruelle e F. Takens. On the nature of turbulence. *Commun. Math. Physics*, 20:167, 1971.
- [79] C. Grebogi, E. Ott e J.A. York. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D*, 7:181, 1983.
- [80] Y.C. Lai e Z. Liu. Effect of noise on the neutral direction of chaotic attractor. *Chaos*, 14:189, 2004.
- [81] H. Herzel e J. Freund. Chaos, noise, and synchronization reconsidered. *Physical Review E*, 52:3238, 1995.
- [82] J.P. Eckmann. Roads to turbulence in dissipative dynamical-systems. *Reviews of Modern Physics*, 53:3238, 1981.
- [83] C. Zhou e J. Kürths. Noise-induced phase synchronization and synchronization transitions in chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 88:230602, 2002.
- [84] V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, A.S. Kopeikin, J. Kurths e G.I. Strelkova. Effect of noise on the relaxation to an invariant probability measure of nonhyperbolic chaotic attractors. *Physical Review Letters*, 87:54101, 2001.
- [85] R. Graham, A. Hamm e T. Tel. Nonequilibrium potentials for dynamic systems with fractal attractors or repellers. *Physical Review Letters*, 66:3089, 1991.
- [86] V.S. Anishchenko, A.S. Kopeikin, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova e J. Kurths. Influence of noise on statistical properties of nonhyperbolic attractors. *Physical Review E*, 62:7886, 2000.
- [87] C.G. Schroer, E. Ott e J.A. Yorke. Effect of noise on nonhyperbolic chaotic attractors. *Physical Review Letters*, 81:1397, 1998.
- [88] Y.C. Lai e C. Grebogi. Intermingled basins and two-state on-off intermittency. *Physical Review E*, 52:3313, 1995.
- [89] R. Carretero-González, S. Orstavik, J. Huke, D.S. Broomhead e J. Stark. Thermodynamic limit from small lattices of coupled maps. *Physical Review Letters*, 83:3633, 1999.
- [90] V. Ahlers e A. Pikovski. Critical properties of the synchronization transition in space-time chaos. *Physical Review Letters*, 88:254101, 2002.

-
- [91] N. Platt, E.A. Spiegel e C. Tresser. On-off intermittency: A mechanism for bursting. *Physical Review Letters*, 70:279, 1993.
- [92] M.G. Rosenblum e A.S. Pikovsky. Controlling synchronization in an ensemble of globally coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 92:114102, 2004.