

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS**

**CURVA DE APRENDIZADO E RETORNOS DE ESCALA:  
UM ESTUDO DE CASO**

**CURITIBA  
2004**

**VANESSA REGINA CARARO**

**CURVA DE APRENDIZADO E RETORNOS DE ESCALA:  
UM ESTUDO DE CASO**

**Monografia apresentada como  
requisito parcial à conclusão do curso  
de Ciências Econômicas, Setor de  
Ciências Sociais Aplicadas,  
Universidade Federal do Paraná.**

**Orientador: Prof. Armando Sampaio**

**Curitiba  
2004**

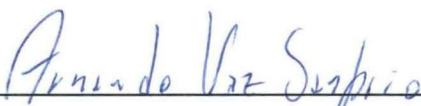
**VANESSA REGINA CARARO**

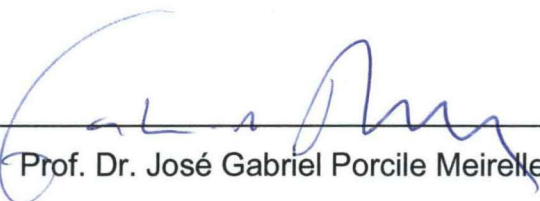
**CURVA DE APRENDIZADO E RETORNOS DE ESCALA:  
UM ESTUDO DE CASO**


**TERMO DE APROVAÇÃO**

Monografia defendida e aprovada como requisito parcial a conclusão do curso de Ciências Economicas, Setor de Ciências Sociais Aplicadas, Universidade Federal do Parana, em 23 de novembro de 2004 pela banca examinadora constituída por:

Orientador:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Armando Vaz Sampaio

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José Gabriel Porcile Meirelles

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Walter Tadahiro Shima

Meu eterno agradecimento a Deus.  
Agradeço aos meus pais, pelo carinho e apoio sempre dispensado e pela força na conquista desta importante etapa da minha vida. Um agradecimento especial ao Professor Armando, que com dedicação e paciência compartilhou seus conhecimentos na orientação deste trabalho.

"Para ser grande, sê inteiro: nada teu  
exagera ou exclui.  
Sê todo em cada coisa.  
Põe quanto és no mínimo que fazes.  
Assim em cada lago a lua toda brilha,  
porque alta vive."

Fernando Pessoa

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| LISTA DE ILUSTRAÇÕES .....  | v  |
| RESUMO.....   | vi |
| 1 INTRODUÇÃO .....  | 1  |
| 2 REVISÃO DA LITERATURA .....   | 3  |
| 2.1 TEORIA DE CUSTOS E PRODUÇÃO.....  | 3  |
| 2.1.1 Custos a Longo Prazo.....   | 6  |
| 2.1.2 Custo a Curto Prazo.....  | 8  |
| 2.1.3 Economias e deseconomias de escala .....  | 9  |
| 2.1.3.1 Retornos de escala X Economias de escala.....   | 11 |
| 2.1.4 Economias de Experiência: A Curva de aprendizado .....  | 11 |
| 2.1.4.1 Economias de escala X Economias de experiência .....  | 14 |
| 2.1.5 Economias de escopo .....   | 15 |
| 2.1.6 Minimização de Custo – Produto Marginal do Trabalho e Produto Marginal do Capital.....  | 16 |
| 2.1.7 Taxa Marginal de Substituição Técnica.....  | 18 |
| 2.1.8 Dualidade .....   | 19 |
| 2.1.9 Função Cobb-Douglas .....   | 20 |
| 3 MÉTODO E MATERIAL .....   | 23 |
| 3.1 O PRINCÍPIO DOS MÍNIMOS QUADRADOS .....   | 24 |
| 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....   | 26 |
| 4.1 Estimativa de modelo de regressão para obtenção da curva de aprendizado com dados obtidos do livro Econometria dos autores Hill, Griffiths e Judge..... | 26 |
| 4.2 Estimativa de modelo de regressão para obtenção de retornos de escala com dados obtidos do livro Econometric Analysis do autor Willian H. Greene.....   | 29 |
| 4.3 Estimativa de modelo de regressão para obtenção da curva de aprendizado com dados da empresa X.....   | 34 |
| 5 CONCLUSÃO.....  | 38 |
| REFERÊNCIAS .....   | 40 |

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

|   |    |
|---|----|
| GRÁFICO 1 – ISOQUANTA .....                   | 4  |
| GRÁFICO 2 – ISOCUSTO .....                    | 6  |
| GRÁFICO 3 – MINIMIZAÇÃO DE CUSTO .....        | 7  |
| GRÁFICO 4 – CUSTO TOTAL DE CURTO PRAZO .....  | 8  |
| GRÁFICO 5 – CURVA DE CUSTO MÉDIO .....        | 10 |
| GRÁFICO 6 – CURVA DE APRENDIZADO .....        | 13 |
| TABELA 1 – CUSTOS E PRODUÇÃO .....            | 27 |
| GRÁFICO 7 – CURVA DE APRENDIZADO .....        | 29 |
| TABELA 2 – PRODUÇÃO, TRABALHO E CAPITAL ..... | 31 |
| GRÁFICO 8 – RETORNO DE ESCALA .....           | 34 |
| TABELA 3 – CUSTOS E PRODUÇÃO .....            | 35 |

## RESUMO

Uma das grandes preocupações das empresas é conhecer como os custos de produção reagem com o aumento ou redução do volume de produção. O objetivo aqui é realizar um estudo de caso, baseado em informações de uma determinada empresa, visando estimar uma função custo para a verificação de retornos de escala e curva de aprendizado. É importante, por este motivo, conhecer as relações, observadas nas curvas de custos, entre os custos e o nível de produção. O problema da minimização dos custos apresenta as curvas de custo marginal, custo médio e custo total. O custo marginal mostra a variação do custo total com a quantidade produzida, o custo médio é igual ao custo unitário de cada unidade produzida pela empresa, enquanto que o custo total é a soma dos custos de produção (custo fixo e variável). Quando uma empresa reduz seu custo médio no longo prazo com o volume produzido, esta empresa apresenta economia de escala, no entanto, se o inverso ocorre e seu custo médio aumenta com a quantidade produzida, ela está em uma situação de deseconomia de escala. Existem economias de aprendizados quando as empresas conseguem diminuir seus custos variáveis médios com o nível de produção, dada a experiência adquirida na realização das tarefas. Pode-se observar na curva de aprendizado os impactos nos custos variáveis médios dados por variações na quantidade na produção acumulada. A empresa estudada não apresentou resultados satisfatórios com relação à curva de aprendizado e aos retornos de escala, sendo necessário um aprimoramento dos dados para aprofundar o estudo.



## 1 INTRODUÇÃO

Será iniciado definindo como o custo é medido e elaborado, depois mostrando como os custos são afetados pela tecnologia na produção, tanto no curto como no longo prazo, e ainda demonstrando os fatores que possibilitam a queda nos custos e o fim de tornar o processo produtivo mais eficiente.

As economias de escala são as propriedades pelas quais obtemos uma redução nos custos com aumentos de produção. Pode-se explorá-la buscando reduzir o custo unitário ou aumentando o nível de produção por um dado período de tempo. Quando disponíveis podem ser adequadas para buscar maximizar lucros, minimizar custos, reduzir preços para se conseguir níveis mais altos de produção e custos mais baixos.

A existência de economias de escala pode ter importantes implicações na estrutura do mercado, pois podem criar barreiras à entrada, protegendo seus participantes do mercado competitivo.

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo de caso para estimar uma função custo para analisar a curva de aprendizado e retornos de escala, tendo como base dados do livro *Econometria* dos autores R. Carter Hill, William E. Griffiths e George G. Judge, dados do livro *Econometric Analysis* do autor William H. Greene e comparados com os resultados obtidos com os dados da empresa X.

Espera-se pela teoria econômica que a determinação da escala ótima de produção levará a minimização dos custos médios da empresa. Este fato será analisado através do histórico da empresa X.

No capítulo seguinte será apresentado brevemente o método dos mínimos quadrados, método este que será utilizado na busca dos resultados. Este princípio procura encontrar entre todos os valores possíveis das variáveis ( $\beta_1$  e  $\beta_2$ ), o par em que a função soma de quadrados seja mínima.

E por fim serão demonstrados os resultados obtidos com as regressões

realizadas com os dados disponíveis, apresentando resposta para a existência ou não de retornos de escala e economia de aprendizado na empresa analisada.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 TEORIA DE CUSTOS E PRODUÇÃO

A relação entre insumos ( $x$ ) e produto ( $y$  - volume de produção) é indicada por uma função de produção. Uma função de produção mostra a quantidade produzida de um produto com uma determinada combinação de insumos, ou seja, a quantidade máxima possível de produto dada uma certa combinação de insumos.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Durante o processo produtivo, as empresas transformam insumos em produtos. Neste estudo, será adotado como insumos a mão de obra, material e capital. A mão de obra abrange tanto trabalhadores especializados como não especializados e os esforços dos administradores da empresa. Os materiais incluem plástico, aço e tudo que a empresa adquira para transformar em produto final.

Com esta equação podemos dizer que a quantidade de produto depende da quantidade dos insumos utilizados, sendo que a função permite que os insumos sejam combinados de maneiras diferentes de modo a permitir várias formas de produção de um certo volume produzido.

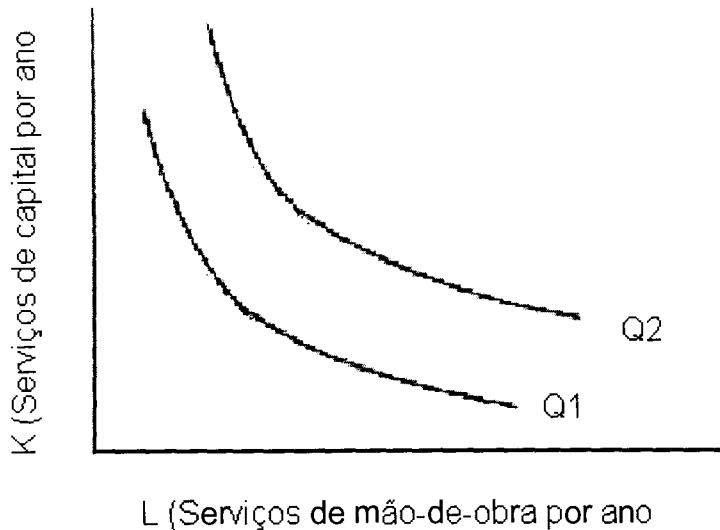
Porém, análises empíricas ressaltam a necessidade de incluir mais uma variável nesta equação referente às melhoras no conhecimento tecnológico. Quando medida que há um avanço da tecnologia, ocorre uma mudança na função de produção pois a empresa pode passar a obter um maior volume de produção com uma combinação de insumos.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n; A)$$

Todas as combinações de insumos possíveis que resultam no mesmo volume de produção, são representadas na curva de isoquanta. Ou seja, uma isoquanta de produção mostra as diversas combinações de insumos necessárias para que a empresa obtenha um determinado volume de produção. Um conjunto de isoquantas

descreve a função de produção de uma empresa. À medida que a empresa aumenta sua produção a curva de isoquanta se desloca à nordeste.

GRÁFICO 1 - ISOQUANTA



As isoquantas demonstram a flexibilidade das empresas com relação à tomada de decisão, pois as empresas podem verificar as diversas combinações de insumos que ela pode utilizar para obter um dado volume de produção.

É necessário fazermos aqui uma distinção entre curto e longo prazo no que se refere à produção. Curto prazo é o período de tempo em que não ocorre modificação de um ou mais fatores de produção, fatores estes denominados de insumos fixos de produção. Longo prazo é o período de tempo necessário para que todos os insumos de produção se tomem variáveis. Sendo assim, no curto prazo as empresas podem variar a intensidade de utilização dos fatores, já no longo prazo as empresas podem modificar a capacidade das fábricas.

Uma característica importante da função de produção é a noção de retornos de escala. Para a compreensão do longo prazo no processo produtivo é fundamental medir os aumentos de produção associados aos aumentos em cada insumo utilizado. Os retornos de escala nos mostram de que maneira a produção varia com aumentos proporcionais dos insumos. Podemos observar três situações:

- Retornos crescentes de escala – quando ocorre à duplicação dos insumos o nível de produção da empresa aumenta mais que o dobro;
- Retornos decrescentes de escala – quando ocorre à duplicação dos insumos o nível de produção da empresa aumenta menos que o dobro;
- Retornos constantes de escala - quando ocorre à duplicação dos insumos o nível de produção da empresa aumenta o dobro.

Como um exemplo, se todos os insumos aumentassem 100% e a produção aumentasse 115%, 100% ou 85%, teríamos então retornos de escala crescentes (1,15), constantes (1,00) ou decrescentes (0,85), respectivamente.

Os retornos de escala crescentes poderiam ocorrer em empresas onde operações de maiores escalas permitam que os trabalhadores se especializem em suas tarefas, um bom exemplo destes retornos de escala são as linhas de montagem das empresas automobilísticas. Neste caso, seria mais vantajoso economicamente ter uma única grande empresa com custos mais baixos, do que várias empresas pequenas com custos relativamente mais altos.

A situação de retornos decrescentes de escala geralmente relaciona-se com problemas de coordenação de tarefas, dificuldades administrativas, em empresas de grande escala onde a complexidade de gerenciamento pode ocasionar uma menor produtividade.

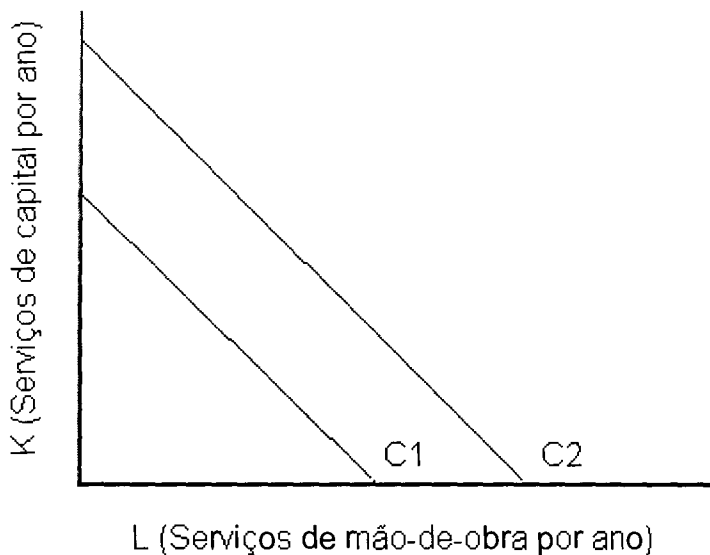
Quando ocorrem retornos de escala constantes não há influência do tamanho da empresa na produtividade dos fatores de produção. Havendo rendimentos constantes de escala, uma empresa pode ser copiada de outra que utiliza um determinado processo produtivo, e produzir o mesmo que a outra empresa de modo que as duas juntas produzam o dobro.

### 2.1.1 Custos a Longo Prazo

Em longo prazo, a empresa tem a possibilidade de variar todos os seus insumos, buscando sempre combiná-los de forma a minimizar seus custos de produção. Porém como isso pode ser obtido?

Será trabalhado aqui com dois insumos variáveis, mão de obra e capital. Sabe-se que a combinação desses insumos que minimiza os custos de produção depende da quantidade produzida ( $Q$ ) e dos preços de mão de obra ( $w$ ) e capital ( $r$ ). Se a empresa decidir não produzir, a combinação de insumos que minimiza custos não terá nem capital e nem mão de obra, portanto a análise do problema de minimização dos custos implica que a curva de custos total no longo prazo deve ser crescente e deve ser igual a zero quando  $Q = 0$ . A variação destas combinações pode ser observada através da curva de isocusto.

GRÁFICO 2 - ISOCUSTO



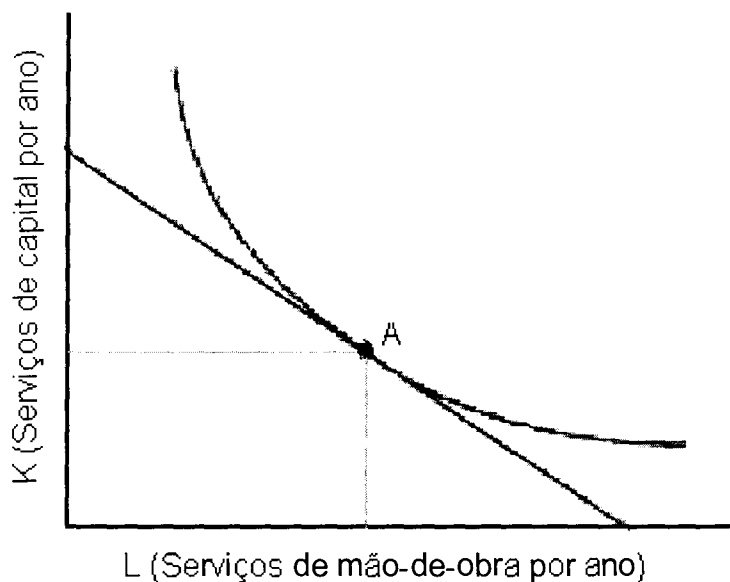
A linha de isocusto inclui todas as combinações possíveis dos insumos de produção, capital e mão de obra, que podem ser adquiridas a um determinado custo total, sendo que o custo total de produção de um produto qualquer é dado pela soma dos custos de mão de obra  $wL$  e de capital  $rK$ .

$$CT = wL + rK$$

Ou seja, o custo total de produção, é o custo mínimo para a empresa quando ela produz uma determinada quantidade de produto. Conforme a empresa aumenta sua produção de 1 mil para 2 mil unidades, sua curva de isocusto se desloca a nordeste, com L unidades de mão de obra e K unidades de capital, portanto seu custo total aumenta. Sendo assim, é determinada uma linha de isocusto diferente para cada nível diferente de custo total. Com isso, podemos dizer que a razão entre a taxa de remuneração da mão de obra e o custo da locação de capital determina a inclinação da linha de isocusto. Essa inclinação nos demonstra que se uma empresa substituísse uma unidade de mão de obra por  $w/r$  unidades de capital a um custo  $r$ , seu custo total não seria alterado.

Há de se verificar, portanto, qual o nível de produção desejada pela empresa, através da curva de isoquanta, sendo o ponto de tangência entre a isoquanta e a isocuto o ponto que minimiza os custos dos insumos. Ou seja, o ponto de tangencia da curva de isocusto e isoquanta, demonstra à empresa qual é o nível de produção obtido com um custo mínimo através da utilização de K unidades de capital e de L unidades de mão de obra, sendo que outras combinações destes insumos poderiam atingir o mesmo nível de produção, porém a custos maiores.

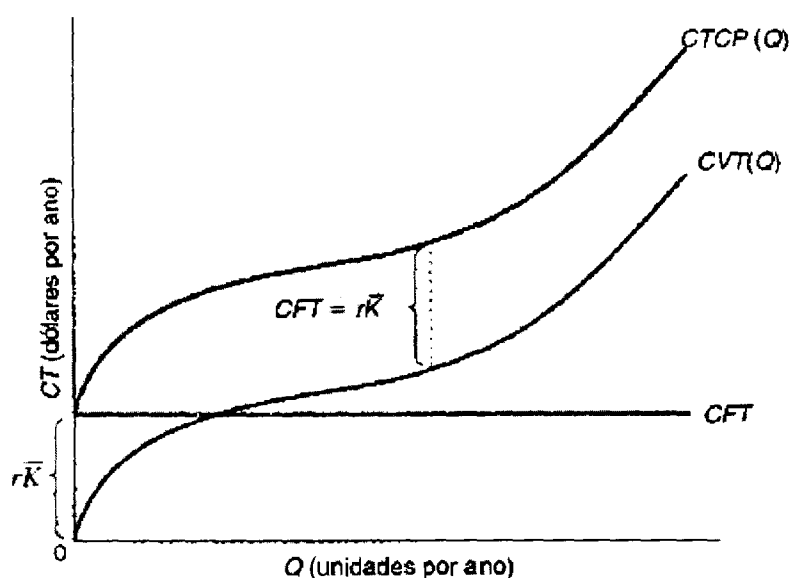
GRÁFICO 3 - MINIMIZAÇÃO DE CUSTO



## 2.1.2 Custo a Curto Prazo

No curto prazo, uma empresa pode ter insumos de produção permanentes e variáveis, o que possibilita mudanças na taxa de produção da empresa. Algumas medidas de custos de produção podem ser divididas em custo total, custo marginal e custo médio. A curva de custo total de curto prazo nos mostra o custo total mínimo de produção da empresa quando a quantidade utilizada de pelo menos um insumo é constante.

GRÁFICO 4 - CUSTO TOTAL DE CURTO PRAZO



NOTA – Esta figura apresenta a curva de custo total de curto prazo ( $CTCP(Q)$ ), a curva de custo variável total ( $CVT(Q)$ ), e a curva de custo fixo total ( $CFT$ ). A distância vertical entre a curva de custo variável total e a curva de custo total de curto prazo é igual ao custo fixo total.

O custo total de produção é composto pelo custo fixo e pelo custo variável, sendo que o primeiro independe do nível de produção obtido pela empresa, ou seja, são custos relacionados aos meios de produção que permanecem inalterados, independente do volume produzido, enquanto que o segundo varia conforme o nível de produção da empresa, podem ser custos que incluem a mão de obra, salários e matéria prima, e estes custos aumentam com o aumento do volume produzido pela empresa.

Os custos fixos são parte integrante do processo de tomada de decisão da



empresa, pois eles são pagos mesmo que não haja produção. Eles podem ser controlados no longo prazo, porém, no curto prazo, os custos fixos não variam com o nível de produção. Os administradores das empresas também precisam saber, para decidir a quantidade que deve ser produzida, de que modo seus custos variáveis aumentam com o crescimento do nível de produção.

O custo marginal de uma empresa é o aumento do custo que ocorre quando se aumenta a produção em uma unidade. Através dele a empresa pode saber em quanto aumentará seu custo caso ela incremente sua produção em uma unidade. Como o custo fixo não varia quando ocorrem mudanças no nível de produção podemos dizer que o custo marginal é o aumento em custo variável ocasionado por uma unidade adicional de produto.

O custo médio é dado pela divisão do custo total pelo nível de produção, ou seja, o custo por unidade de produto. Existem três tipos de custo médio: o custo fixo médio, o custo variável médio, e o custo total médio. O custo fixo médio é o custo fixo dividido pelo nível de produção, como o custo fixo é constante, o custo fixo médio declina à medida que aumenta o nível de produção. O custo variável médio é o custo variável dividido pelo nível de produção. E finalmente, o custo total médio, ou simplesmente, custo médio, é o custo total dividido pela quantidade produzida. Através de comparações entre o custo total médio e o preço do produto, pode-se determinar se uma produção é lucrativa ou não.

### 2.1.3 Economias e deseconomias de escala

A situação em que o custo médio de uma empresa diminui à medida em que ela aumenta o produto, caracteriza economia de escala, e as deseconomias de escala são caracterizadas exatamente pelo oposto, o custo médio aumenta à medida em que o produto aumenta.

Quando a empresa altera as proporções entre a quantidade de insumos e a medida em que o nível de produção se modifica, pode-se dizer que há economias

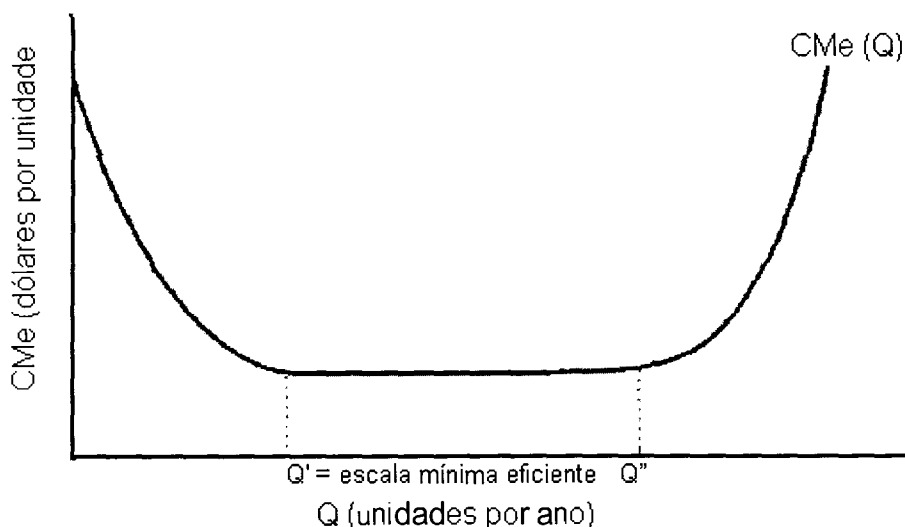
escala, visto que ela é capaz de duplicar sua produção com menos que o dobro dos custos.

Da mesma forma, deseconomias de escala ocorrem quando o aumento dos custos é maior com o aumento no nível de produção, ou seja, com a duplicação da produção, os custos aumentam mais que o dobro.

Geralmente economias de escala são medidas em termos de elasticidade de custo do produto, que nada mais é do que a variação percentual no custo de produção dado um aumento de um por cento no nível de produção.

Pode-se dizer que se têm economias de escala quando o custo marginal é menor que o custo médio de produção, e deseconomias de escala quando o custo marginal é maior que o custo médio, e ainda quando os custos marginal e médio são iguais, então o custo e o produto aumentam proporcionalmente, ou seja, não ha nem economias nem deseconomias de escala.

GRÁFICO 5 - CURVA DE CUSTO MÉDIO



NOTA – Esta curva demonstra que existem economias de escala para níveis de produção inferiores a  $Q'$ , deseconomias de escala para níveis de produção superiores a  $Q''$ , e os custos médios são constantes entre  $Q'$  e  $Q''$ .

As economias de escala podem ocorrer por vários fatores, como, por exemplo, a especialização do trabalho, acarretando em maior produtividade dos trabalhadores uma vez que com o aumento da produção o trabalhador pode se

especializar em certas tarefas.

As deseconomias de escala geralmente estão relacionadas a deseconomias administrativas que surgem quando um aumento da produção leva a um aumento em maior proporção nos gastos com serviços administrativos.

### 2.1.3.1 Retornos de escala X Economias de escala

O conceito de economias de escala está muito próximo do conceito de retornos de escala. Os retornos de escala determinam a existência ou não de economias de escala, pois são os retornos de escala da função de produção que determinam como os custos médios irão variar com a produção.

Podem-se resumir esses conceitos em somente três relações:

- a) Quando a função de produção exibe retornos crescentes de escala, a curva de custo médio de longo prazo exibe economias de escala, ou seja, o custo médio deve diminuir com o aumento da quantidade produzida.
- b) Quando a função de produção exibe retornos decrescentes de escala, a curva de custo médio de longo prazo exibe deseconomias de escala, ou seja, o custo médio deve aumentar com o aumento da quantidade produzida.
- c) Quando a função de produção exibe retornos constantes de escala, a curva de custo médio de longo prazo é plana, ou seja, o custo médio não aumenta e nem diminui a quantidade produzida.

### 2.1.4 Economias de Experiência: A Curva de aprendizado

As economias de experiência se referem às vantagens de custo que resultam

da experiência acumulada em um longo período de tempo, ou do chamado aprendizado com a prática.

À medida que realizam tarefas repetitivas, trabalhadores e administradores adquirem maior prática para a produção, deste modo as tarefas são realizadas mais rápida e eficientemente. Com isso, a empresa obtém consideráveis reduções em seu custo médio e em seu custo marginal para determinados níveis de produção.

É importante enfatizar que não somente os trabalhadores de linhas de montagem podem explorar suas experiências, mas também os administradores de fábricas. Os administradores podem, por exemplo, utilizar suas experiências para melhorar a operação administrativa de uma fábrica e para reduzir os desperdícios.

A redução nos custos ocasionada pela maior prática dos trabalhadores na realização das tarefas é dada por quatro razões:

- 1) Os trabalhadores, nas primeiras vezes que executam a atividade são mais lentos do que quando adquirem prática, ou seja, com a experiência tornam-se mais produtivos, pois conseguem produzir mais em menos tempo.
- 2) Os administradores tornam-se mais eficientes na programação dos processos de fabricação.
- 3) Os engenheiros, adquirindo maior experiência, inovam nos projetos reduzindo os custos sem aumentar os defeitos.
- 4) Os fornecedores aprendem a processar com maior eficácia os materiais da empresa, podendo repassar parte da vantagem em forma de custos mais baixos.

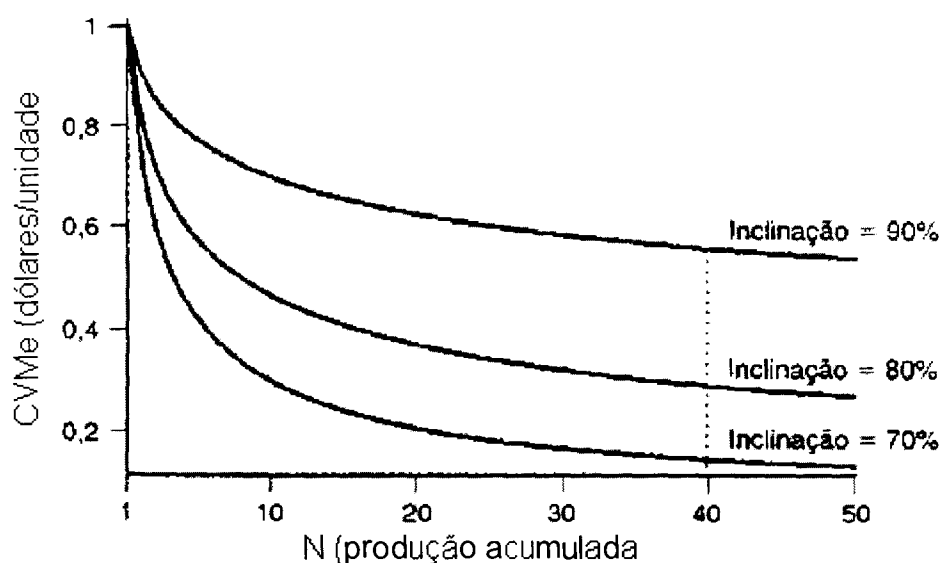
Isso significa dizer, que os custos no início de um processo produtivo são maiores devido a pouca experiência, e que com o aumento da produção acumulada a empresa “aprende”, e tanto trabalhadores quanto administradores adquirem maior prática e se tornam mais eficazes na utilização da fábrica e dos equipamentos, fazendo com que os custos sejam reduzidos.

Os principais benefícios do aprendizado são, como já foi possível observar, a

maior produtividade, ou seja, mais produção por unidade de insumo de trabalho, redução dos defeitos no processo produtivo, e maior retorno sobre a utilização dos materiais (mais produção por unidade de matéria-prima utilizada).

As economias de experiência são descritas por curvas de aprendizagem. A curva de aprendizado demonstra a relação entre a produção acumulada da empresa e a quantidade de insumos necessários à produção de uma unidade de produto, ou seja, é a relação entre o custo variável médio e o volume acumulado de produção. A curva de aprendizado mostra que com o aumento da produção acumulada há uma queda das horas de trabalho necessárias para se produzir uma unidade de produto.

GRÁFICO 6 - CURVA DE APRENDIZADO



A curva de aprendizado tem sido formulada de várias maneiras, a mais simples e comum delas é a seguinte:

$$c_t = c_1 n_1^{\alpha_c} e^{\eta}$$

onde,

$c_t$  = custo unitário real ou custo médio da produção em um período de tempo  $t$ ;

$c_1$  = custo unitário real ou custo médio da produção no período inicial de produção;

$n_1$  = numero acumulado de unidades produzidas;

$\alpha_c$  = elasticidade dos custos unitários;

$u_t$  = termo de discrepância estatística.

Tipicamente, é assumido que  $u_t$  é independente e normalmente distribuído com significado igual a zero e covariância constante.

A equação da curva de aprendizado pode ser escrita na forma logarítmica:

$$\ln c_t = \ln c_1 + \alpha_c \cdot \ln n_1 + u_t$$

A elasticidade da curva de aprendizado ( $\alpha_c$ ) pode ser estimada pelo método dos mínimos quadrados, desde que os dados apropriados de custos e produção sejam invariáveis.

A magnitude das reduções de custo que são atingidas por meio da experiência é expressa pela inclinação da curva de experiência. A inclinação da curva de experiência representa quanto o custo variável diminui como porcentagem de um nível inicial, quando a produção acumulada duplica.

A inclinação e a elasticidade de experiência estão sistematicamente relacionadas. Quanto menor for a inclinação, menos inclinada será a curva de experiência, ou seja, os custos variáveis reduzirão mais rapidamente à medida que a empresa acumular experiência.

#### 2.1.4.1 Economias de escala X Economias de experiência

Muitas vezes as economias de experiência são confundidas com economias de escala, porém elas são diferentes. As economias de escala demonstram a redução no custo unitário na produção em maior escala num determinado ponto do tempo. Já as economias de experiência se referem à redução no custo unitário em função da experiência acumulada ao longo do tempo.

Pode-se dizer que existem economias de escala substanciais mesmo quan

as economias de aprendizado são mínimas, como pode ocorrer no caso de processos de produção que utilizam intensivamente o capital. Da mesma forma pode-se ter economias de experiência substanciais, mesmo quando as economias de escala são mínimas, como por exemplo, nos casos de atividades complexas intensivas em trabalho.

Os conceitos claros destas economias, e a capacidade de diferenciar as economias de escala das economias de experiência podem ajudar as empresas a tirar conclusões corretas sobre os benefícios do tamanho num mercado.

### 2.1.5 Economias de escopo

Muitas empresas produzem, na realidade, mais de um produto. As eficiências obtidas na produção de dois ou mais produtos são chamadas de economias de escopo.

Em uma empresa que produz dois produtos os custos totais dependem da quantidade produzida dos dois produtos ( $Q_1$  e  $Q_2$ ). O custo total desta empresa será então, o custo total mínimo de produção de uma quantidade dos dois produtos da empresa. É muito provável que a empresa obtenha vantagens de produção ou o custo ao produzir dois ou mais produtos, do que se ela produzir apenas um, uma vez que ao produzir mais de um produto a empresa pode ser capaz de fabricar e vender seus produtos a um custo menor do que duas empresas produzindo cada uma seu produto. Essas vantagens podem advir, por exemplo, do uso de insumos e instalações de produção, ou de economias com administração.

Sendo assim, as economias de escopo existem quando for mais vantajoso, ou seja, quando os custos totais de produção forem menores, de se produzir uma certa quantidade de dois produtos na mesma empresa do que produzir a mesma quantidade em duas empresas que produzem cada uma um produto apenas. Portanto, a economia de escopo existirá apenas se for mais barato para uma empresa acrescentar um produto em sua linha de produção, dado que ela já prod

outro produto.

A principal razão para a existência de economias de escopo é a capacidade da empresa de utilizar um mesmo insumo na fabricação de mais de um produto, pois em geral, a produção conjunta de uma empresa é maior do que as produções individuais. Intuitivamente, a existência de economias de escopo nos diz que a variedade é mais eficiente do que a especialização.

### 2.1.6 Minimização de Custo – Produto Marginal do Trabalho e Produto Marginal do Capital

A teoria de minimização dos custos é baseada na suposição de que as empresas podem escolher os insumos que minimizam os custos em seus processos produtivos, sendo estes insumos capital ( $K$ ) e trabalho ( $L$ ). Portanto a função produção  $F(K, L)$  descreve a melhor combinação destes insumos para se obter uma maior produção. Além disso, supõe-se que cada um dos insumos utilizados no processo produtivo apresenta produtos marginais positivos, porém declinantes.

Produto marginal do capital:

$$PMg_k(K, L) = \delta F(K, L) / \delta K$$

Com isso supomos que:

$$PMg_k(K, L) > 0$$

$$\delta PMg_k(K, L) / \delta K < 0$$

Da mesma forma descrevemos o produto marginal da mão de obra:

$$PMg_L(K, L) = \delta F(K, L) / \delta L$$

Supondo que:



$$PMg_L(K, L) > 0$$

$$\delta PMg_L(K, L) / \delta L < 0$$

Uma empresa competitiva aceita os preços estipulados para a mão de obra,  $w$ , e para o capital,  $r$ , sendo que o problema da minimização dos custos de produção está restrito a uma quantidade de produção  $Q_0$ .

$$F(K, L) = Q_0$$

Para resolvermos o problema de minimizar os custos obedecendo a uma restrição é utilizado o método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\phi = wL + rK - \lambda[F(K, L) - Q_0]$$

Onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange.

$$\phi = wL + rK - \lambda(AKL^\alpha L^\beta - Q_0)$$

Efetuando os diferenciais em relação a  $K$ ,  $L$  e  $\lambda$  e igualando suas derivadas a zero, temos:

$$\delta\phi / \Delta K = r - \lambda PMg_k(K, L) = 0$$

$$\delta\phi / \Delta L = w - \lambda PMg_L(K, L) = 0$$

$$\delta\phi / \Delta\lambda = F(K, L) - Q_0 = 0$$

Combinando as duas primeiras equações acima temos:

$$PMg_k(K, L) / r = PMg_L(K, L) / w$$

Com isso, pode-se dizer que a empresa estará minimizando seus custos, escolhendo seus fatores de produção de modo a poder equacionar a razão do produto marginal de cada fator dividindo pelo seu preço.

Combinando as duas primeiras equações de outra forma, podemos determinar

o multiplicador de Lagrange:

$$\lambda = r / PMg_k(K, L) = w / PMg_L(K, L)$$

Onde:

$r / PMg_k(K, L)$  mede o custo do insumo adicional para a produção de uma unidade adicional de produto, através de um acréscimo de capital,

e da mesma forma,

$w / PMg_L(K, L)$  mede o custo adicional para a produção de uma unidade adicional de produto, através de um acréscimo de mão de obra.

Nos dois casos o multiplicador de Lagrange é igual ao custo marginal de produção, pois demonstra o aumento do custo de produção dado um aumento no nível de produção.

### 2.1.7 Taxa Marginal de Substituição Técnica

Considerando que as combinações de insumos que possibilitam a empresa produzir uma quantidade de produção ( $Q$ ) são representadas por uma curva de isoquanta, à medida que estas combinações variam ao longo da curva da isoquanta, a variação de produção, expressa pela derivada total de  $F(K, L)$  iguala-se a zero, portanto:

$$PMg_k(K, L)dK + PMg_L(K, L)dL = dQ = 0$$

Reescrevendo a equação acima temos:

$$-dK / dL = TMST_{Lk} = PMg_L(K, L) / PMg_k(K, L)$$

Onde  $TMST_{Lk}$  é a taxa marginal de substituição técnica entre mão de obra e

capital para a empresa.

Reescrevendo mais uma vez a equação:

$$PMg_L(K, L) / PMg_K(K, L) = w / r$$

Podemos observar com mais clareza que a taxa marginal de substituição técnica da empresa é igual à razão entre os preços dos insumos utilizados.

É possível visualizar o resultado de outra forma, reescrevendo a equação:

$$PMg_L(K, L) / w = PMg_K(K, L) / r$$

Observamos que os produtos marginais de todos os insumos da produção devem ser iguais quando os produtos marginais são ajustados conforme o custo unitário de cada insumo.

### 2.1.8 Dualidade

A decisão da empresa com relação aos insumos apresenta uma natureza dual, assim como na teoria do consumidor. A escolha da melhor combinação entre os insumos  $K$  e  $L$ , pode ser analisada como um problema de escolha da mais alta isoquanta de produção, que seja tangente a uma determinada linha de isocusto também como um problema de escolha da linha de isocusto mais baixa, que se tangente a uma determinada linha de isoquanta de produção.

Consideraremos o seguinte problema dual do produtor como exemplo para melhor entendermos:

$$\text{Maximizar } F(K, L)$$

Obedecendo a seguinte restrição:

$$wL + rK = C_0$$

Ou seja, maximizar a produção com o mínimo de custos.

O correspondente Lagrangiano é observado por:

$$\phi = F(K, L) - \mu(wL + rK - C_0)$$

Sendo que as condições necessárias para a obtenção da produção máxima:

$$PMg_K(K, L) - \mu r = 0$$

$$PMg_L(K, L) - \mu w = 0$$

$$wL + rK - C_0 = 0$$

Resolvendo as duas primeiras equações temos a condição necessária para a minimização dos custos.

$$PMg_K(K, L) / r = PMg_L(K, L) / w$$

### 2.1.9 Função Cobb-Douglas

Para uma determinada função de produção, as condições do exemplo anterior podem ser utilizadas para se obter uma função de custo. Será trabalhado com o exemplo de uma função Cobb-Douglas de produção para melhor entendermos este fato:

$$F(K, L) = AK^\alpha L^\beta$$

Esta equação pode ser escrita na forma logarítmica:

$$\log[F(K, L)] = \log A + \alpha \log K + \beta \log L$$

Esta equação supõe que  $\alpha < 1$  e que  $\beta < 1$ , de tal forma que a empresa tenha produtos marginais decrescentes para mão de obra e capital. Se  $\alpha + \beta = 1$  a

empresa apresenta rendimentos constantes de escala, pois  $F$  duplica ao duplicar  $K$  e  $L$ . Se  $\alpha + \beta > 1$  a empresa apresenta rendimentos crescentes de escala, e se  $\alpha + \beta < 1$  a empresa apresenta rendimentos decrescentes de escala.

Para determinar a quantidade de capital e mão de obra que a empresa deve utilizar para minimizar seu custo de produção de determinada quantidade devemos partir do Lagrangiano:

$$\phi = wL + rK - \lambda(AKL^\alpha L^\beta - Q_0)$$

Efetuando os diferenciais em relação a  $L$ ,  $K$  e  $\lambda$  e igualando suas derivadas a zero, temos:

$$\delta\phi / \Delta L = w - \lambda(\beta AK^\alpha L^{\beta-1}) = 0$$

$$\delta\phi / \Delta K = r - \lambda(\alpha AK^{\alpha-1} L^\beta) = 0$$

$$\delta\phi / \Delta \lambda = AK^\alpha L^\beta - Q_0 = 0$$

A partir do primeiro diferencial temos:

$$\lambda = w / \beta AK^\alpha L^{\beta-1}$$

Fazendo esta substituição nas outras duas equações temos então que:

$$K^{\alpha+\beta} = (\alpha w / \beta r)^\beta Q_0 / A$$

ou então:

$$K = [(\alpha w / \beta r)^{\beta / (\alpha+\beta)}] (Q_0 / A)^{1 / (\alpha+\beta)}$$

Desta forma obtemos a determinação da quantidade de capital capaz de minimizar os custos. Para a determinação da quantidade de mão de obra que minimiza os custos temos:

$$L = [(\beta r / \alpha w)^{\alpha / (\alpha+\beta)}] (Q_0 / A)^{1 / (\alpha+\beta)}$$

Pode-se observar que à medida que a remuneração da mão de obra ( $w$ ) aumenta em relação ao preço do capital ( $r$ ), a empresa está propensa a utilizar mais capital e menos mão de obra. Contudo se o conhecimento tecnológico  $A$  aumenta de forma que leve a empresa a conseguir aumentos na produção com a mesma quantidade de insumos, teremos redução tanto em  $K$  como em  $L$ .

Determinando a função custo da empresa, o custo total de produção de qualquer nível de produção ( $Q$ ) pode ser obtido através da equação abaixo:

$$C = w^{\beta/(\alpha+\beta)} y^{\alpha/(\alpha+\beta)} [(\alpha/\beta)^{\beta/(\alpha+\beta)} + (\alpha/\beta)^{-\alpha/(\alpha+\beta)}](Q_0/A)^{1/(\alpha+\beta)}$$

Esta função custo informa que o custo total de produção aumenta à medida que o nível de produção aumenta, e também informa a forma de variação do custo quando variam os preços dos insumos. Sendo assim, quando  $\alpha + \beta$  for igual a 1, o custo aumenta proporcionalmente a produção, com isso concluímos que o processo produtivo apresenta rendimentos constantes de escala. Da mesma forma se  $\alpha + \beta$  for maior que 1, o custo aumenta mais que proporcionalmente a produção e o processo produtivo apresenta rendimentos decrescentes de escala, e se  $\alpha + \beta$  for menor que 1, o custo aumenta menos que proporcionalmente a produção e o processo produtivo apresenta rendimentos crescentes de escala.

### 3 MÉTODO E MATERIAL

Para se obter informações referentes ao relacionamento entre as variáveis econômicas nível de produção e custo de produção será utilizado um modelo de regressão para uma análise econométrica, buscando com isto responder a algumas questões importantes às empresas, como: A empresa esta obtendo um menor custo com o aumento do nível da produção, devido ao aprendizado? O tamanho da empresa esta adequado? É compensador para a empresa aumentar seus níveis de produção? As respostas para estas perguntas podem apresentar grande importância para a tomada de decisão. O modelo econômico deste estudo baseia-se pela idéia de se utilizar menos tempo e menos custo para se chegar ao produto final, relacionando as variáveis: custo de produção com a produção acumulada de um bem em um período.

Pressupostos do modelo de regressão linear simples:

1. O valor médio de  $y$  para cada valor de  $x$  é dado pela regressão linear

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + e$$

2. O valor médio do erro aleatório é

$$E(e) = 0$$

pois admite-se que

$$E(y) = \beta_1 + \beta_2 x$$

3. Para cada valor de  $x$ , os valores de  $y$  se distribuem em torno de seu valor médio, segundo distribuições de probabilidade que têm todas as mesmas variâncias,

$$\text{var}(y) = \sigma^2 = \text{var}(e)$$

admite-se que a variância do erro aleatório é a mesma, pois  $y$  e  $e$  diferem apenas

por uma constante, o que não altera a variância.

- Os valores de  $y$  são todos não correlacionados e possuem covariância zero, portanto não há associação linear entre eles. Se os valores de  $y$  são estaticamente independentes, também o são os erros aleatórios, e vice e versa.

$$\text{cov}(y_i, y_j) = 0 = \text{cov}(e_i, e_j)$$

- A variável  $x$  deve tomar ao menos dois valores diferentes, isto é,  $x \neq c$ , onde  $c$  é uma constante.
- Para cada valor de  $x$ , os valores de  $y$  se distribuem normalmente em torno de sua média (*este pressuposto é opcional*).

A variável dependente, neste caso  $y$ , é explicada por um componente que varia com a variável independente, aqui apresentada como  $x$ , e pelo erro aleatório,  $e$ . O erro  $e$  e a variável  $y$ , são variáveis aleatórias, porém a principal diferença entre elas é que  $y$  é uma variável “observável” enquanto que  $e$  não.

Os dados que verificam se a condição de que a variância é constante chamam-se homocedásticos, se essa condição não é respeitada, os dados dizem-se heterocedásticos.

### 3.1 O PRINCÍPIO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Para estimar  $\beta_1$  e  $\beta_2$  é necessário uma regra que mostre como devem ser utilizadas as observações amostrais. Neste estudo será utilizada a regra que se baseia no princípio dos mínimos quadrados. Esse princípio demonstra que para ajustar uma reta aos valores dos dados, deve-se buscar a reta tal que a soma dos quadrados das distâncias verticais de cada ponto à reta seja a menor possível. São utilizados os quadrados das distâncias para que grandes distâncias positivas sejam



canceladas pelas negativas.

Busca-se com este princípio, encontrar entre todos os valores possíveis de  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , o ponto em que a função soma de quadrados seja mínima.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Primeiramente serão apresentados os resultados da regressão realizada a partir dos dados anuais referentes as variáveis: custo unitário real e produção acumulada, obtidos do livro **Econometria** dos autores Hill, Griffiths e Judge, a fim de verificar a curva de aprendizado. Depois serão verificados os resultados da regressão realizada a partir dos dados do livro **Econometric Analysis** do autor William H. Greene, cujas variáveis são: produção acumulada, trabalho e capital, visando verificar a existência ou não de retornos de escala, e então serão apresentados e comparados os resultados referentes as variáveis custo unitário real e produção acumulada obtidas da empresa X.

### 4.1 Estimativa de modelo de regressão para obtenção da curva de aprendizado com dados obtidos do livro **Econometria** dos autores Hill, Griffiths e Judge

1) Definição das variáveis:

Variável dependente = Custo unitário real ( $C$ )

Variável explicativa = Produção acumulada ( $Q$ )

2) Definição do relacionamento entre as variáveis

$$C = f(Q)$$

Forma funcional de relacionamento:

$$\text{Forma matemática: } C = \beta_1 + \beta_2 Q$$

$$\text{Forma probabilística: } C = \beta_1 + \beta_2 Q + e$$

## 3) Expectativa teórica:

$$\beta_1 > 0$$

$$\beta_2 < 0$$

## 4) Estimação do modelo

Definição operacional das variáveis:

- A variável dependente Custo unitário real (C) é medida em unidade monetária.
- A variável explicativa Produção acumulada (Q) é medida em unidades.

Apresentação dos dados disponíveis na amostra:

**TABELA 1 - CUSTOS E PRODUÇÃO**

| Ano  | Custo Real | Produção Acumulada |
|------|------------|--------------------|
| 1955 | 24,96350   | 1.127              |
| 1956 | 25,49296   | 1.239              |
| 1957 | 25,27027   | 1.363              |
| 1958 | 25,44460   | 1.479              |
| 1959 | 25,03401   | 1.580              |
| 1960 | 24,73404   | 1.705              |
| 1961 | 23,12746   | 1.839              |
| 1962 | 21,71053   | 1.988              |
| 1963 | 21,49410   | 2.156              |
| 1964 | 21,24352   | 2.333              |
| 1965 | 20,15113   | 2.511              |
| 1966 | 20,14652   | 2.700              |
| 1967 | 20,35928   | 2.892              |
| 1968 | 18,59649   | 3.078              |
| 1969 | 16,72316   | 3.280              |
| 1970 | 16,41631   | 3.488              |

FONTE: Hill, Griffiths e Judge, pag 71

Obtenção dos resultados:

Dependent Variable: LOG(CUNIT)

Method: Least Squares

Date: 09/29/04 Time: 03:31

Sample: 1955 1970

Included observations: 16

| Variable           | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.  |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|--------|
| C                  | 5.964773    | 0.270102              | 22.08344    | 0.0000 |
| LOG(PRODAC)        | -0.378901   | 0.035387              | -10.70739   | 0.0000 |
| R-squared          | 0.891176    | Mean dependent var    | 3.075674    |        |
| Adjusted R-squared | 0.883403    | S.D. dependent var    | 0.143689    |        |
| S.E. of regression | 0.049064    | Akaike info criterion | -3.074900   |        |
| Sum squared resid  | 0.033702    | Schwarz criterion     | -2.978326   |        |
| Log likelihood     | 26.59920    | F-statistic           | 114.6481    |        |
| Durbin-Watson stat | 0.711532    | Prob(F-statistic)     | 0.000000    |        |

### 5) Resultado padrão do modelo de Regressão Linear

$$C = 5,964773 - 0,378901Q$$

$$(22,08344) \quad (-10,70739) \quad (t)$$

$$n = 16$$

$$R\text{-squared} = 0,891176$$

$$F = 114,6481$$

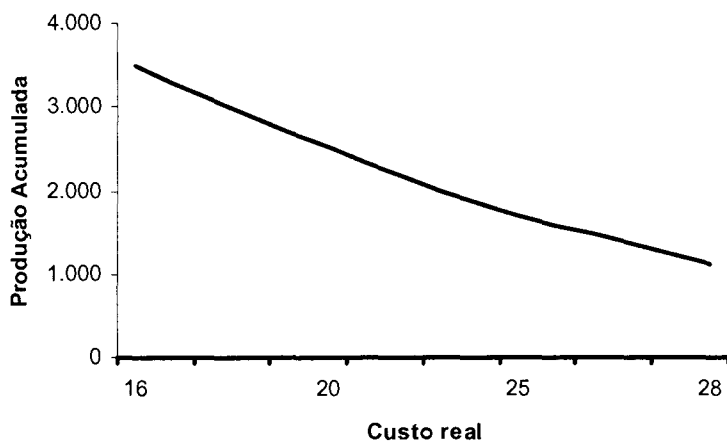
### 6) Avaliação do modelo

- os sinais encontrados dos coeficientes corresponderam às expectativas;
- o coeficiente da produção acumulada é significativo a 1%;
- o teste de Durbin-Watson é baixo ( $d \cong 0$ ), o que indica a presença de autocorrelação do resíduo (0,7115);
- quando  $d \cong 2$  indica que os erros do modelo não são correlacionados;
- o R-squared é alto, o que significa que 89,11% da variação do custo é explicada pela variação da produção, com isso, pode-se dizer que apenas 10,89% da variação

do custo permanece sem explicação;

A empresa considerada no exemplo dos autores Hill, Griffiths e Judge possui uma curva de aprendizado que pode ser verificada neste estudo. Nota-se que é obtida uma certa vantagem nos custos com o aumento do nível de produção no período, ou seja, com o aumento da produção a empresa adquiriu maior produtividade com a prática e com isso reduziu seus custos, conforme mostra o gráfico abaixo:

GRÁFICO 7 - CURVA DE APRENDIZADO



#### 4.2 Estimativa de modelo de regressão para obtenção de retornos de escala com dados obtidos do livro *Econometric Analysis* do autor Willian H. Greene.

1) Definição das variáveis:

Variável dependente = Produção acumulada ( $Q$ )

Variável explicativa = Trabalho ( $L$ ), Capital( $K$ )

2) Definição do relacionamento entre as variáveis

$$Q = f(K, L)$$

Forma funcional de relacionamento:

$$\text{Forma matemática: } Q = \beta_1 + \beta_2 L + \beta_3 K$$

$$\text{Forma probabilística: } Q = \beta_1 + \beta_2 L + \beta_3 K + e$$

3) Expectativa teórica:

$$\beta_1 > 0$$

$$\beta_2 > 0$$

$$\beta_3 > 0$$

4) Estimação do modelo

Definição operacional das variáveis:

- A variável dependente Produção acumulada ( $Q$ ) é medida em unidades.
- A variável explicativa trabalho ( $L$ ) é medida em unidades monetárias.
- A variável explicativa capital ( $K$ ) é medida em unidades monetárias.

Apresentação dos dados disponíveis na amostra:

TABELA 2 - PRODUÇÃO, TRABALHO E CAPITAL

|    | Produção | Trabalho | Capital   |
|----|----------|----------|-----------|
| 1  | 657,29   | 162,31   | 279,99    |
| 2  | 935,93   | 214,43   | 542,50    |
| 3  | 1.110,65 | 186,44   | 721,51    |
| 4  | 1.200,89 | 245,83   | 1.167,68  |
| 5  | 1.052,68 | 211,40   | 811,77    |
| 6  | 3.406,02 | 690,61   | 4.558,02  |
| 7  | 2.427,89 | 452,79   | 3.069,91  |
| 8  | 4.257,46 | 714,20   | 5.585,01  |
| 9  | 1.625,19 | 320,54   | 1.618,75  |
| 10 | 1.272,05 | 253,17   | 1.562,08  |
| 11 | 1.004,45 | 236,44   | 662,04    |
| 12 | 598,87   | 140,73   | 875,37    |
| 13 | 853,10   | 145,04   | 1.696,98  |
| 14 | 1.165,63 | 240,27   | 1.078,79  |
| 15 | 1.917,55 | 536,73   | 2.109,34  |
| 16 | 9.849,17 | 1.564,83 | 13.989,55 |
| 17 | 1.088,27 | 214,62   | 884,24    |
| 18 | 8.095,63 | 1.083,10 | 9.119,70  |
| 19 | 3.175,39 | 521,74   | 5.686,99  |
| 20 | 1.653,38 | 304,85   | 1.701,06  |
| 21 | 5.159,31 | 835,69   | 5.206,36  |
| 22 | 3.378,40 | 284,00   | 3.288,72  |
| 23 | 592,85   | 150,77   | 357,32    |
| 24 | 1.601,98 | 259,91   | 2.031,93  |
| 25 | 2.065,85 | 497,60   | 2.492,98  |
| 26 | 2.293,87 | 275,20   | 1.711,74  |
| 27 | 745,67   | 137,00   | 768,59    |

Fonte: Greene, 2a ed. pag; 207

### Obtenção dos resultados:

Dependent Variable: LOG(PROD)

Method: Least Squares

Date: 10/13/04 Time: 05:09

Sample: 1901 1927

Included observations: 27

| Variable           | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.     |
|--------------------|-------------|-----------------------|-------------|-----------|
| C                  | 1.170644    | 0.326782              | 3.582339    | 0.0015    |
| LOG(TRAB)          | 0.602999    | 0.125954              | 4.787457    | 0.0001    |
| LOG(CAP)           | 0.375710    | 0.085346              | 4.402204    | 0.0002    |
| R-squared          | 0.943463    | Mean dependent var    |             | 7.443631  |
| Adjusted R-squared | 0.938751    | S.D. dependent var    |             | 0.761153  |
| S.E. of regression | 0.188374    | Akaike info criterion |             | -0.396336 |
| Sum squared resid  | 0.851634    | Schwarz criterion     |             | -0.252355 |
| Log likelihood     | 8.350541    | F-statistic           |             | 200.2489  |
| Durbin-Watson stat | 1.885989    | Prob(F-statistic)     |             | 0.000000  |

**Estimativa da matriz de covariância**

|           | <b>Constante</b>  | <b>Trabalho</b>   | <b>Capital</b>    |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Constante | 0,10678649664100  | -0,01983539803770 | 0,00118885010129  |
| Trabalho  | -0,01983539803770 | 0,01586439998020  | -0,00961620060126 |
| Capital   | 0,00118885010129  | -0,00961620060126 | 0,00728393089378  |

## 5) Resultado padrão do modelo de Regressão Linear

$$Q = 1,170644 + 0,602999L + 0,375710K$$

$$(3,582339) \quad (4,787457) \quad (4,402204) \quad (t)$$

$$n = 27$$

$$R\text{-squared} = 0,943463$$

$$F = 200,2489$$

## 6) Avaliação do modelo

- os sinais encontrados dos coeficientes corresponderam às expectativas e são significativos;
- o teste de Durbin-Watson é alto  $d \cong 2$ , o que indica que os erros do modelo não são correlacionados (1,885989);
- o R-squared é alto, o que significa que 94,34% da variação da produção é explicada pela variação do trabalho e do capital, com isso, pode-se dizer que apenas 5,66% da variação da produção permanece sem explicação;

## 7) Teste de significância

$$H_0 : \beta_2 = 1$$



$$F_{(1,n-k)} = (\beta_2 - q)^2 / (\text{var } \beta_2)$$

$$F_{(1,24)} = (0,602999 - 1)^2 / 0,01586 = 9,937$$

$$F_{\text{critico}} = 4,26 = 5\%$$

ou seja:

$$F_{\text{calculado}} > F_{\text{critico}}$$

Com isso a hipótese  $H_0$  é rejeitada.

Retorno de escala:

$$H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$$

$$F_{(1,n-k)} = (\beta_2 + \beta_3 - 1)^2 / \text{var}(\beta_2 + \beta_3)$$

$$F_{(1,24)} = (0,602999 + 0,375710 - 1)^2 / (0,01586 + 0,00728 - 2(0,00961)) = 0,1157$$

$$F_{\text{critico}} = 4,26 = 5\%$$

ou seja:

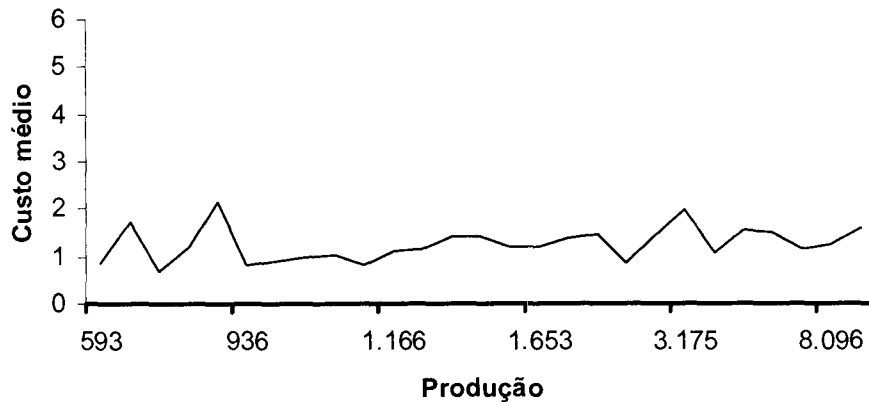
$$F_{\text{calculado}} < F_{\text{critico}}$$

Com isso a hipótese  $H_0$  não é rejeitada.

Após o teste de significância, pode-se observar que a empresa considerada no exemplo do autor William H. Greene possui retornos de escala constantes, e com isso economia de escala constante, pois, conforme a função produção Cobb-Douglas, quando o somatório dos insumos de produção são iguais a 1, têm-se rendimentos constantes de escala. Isto significa que o custo médio da empresa não apresenta grandes variações com o aumento ou redução da quantidade produzida,

nota-se, conforme gráfico ilustrado abaixo, que a curva de custo médio com retornos de escala constante tende a ser uma linha horizontal:

**GRÁFICO 8 - RETORNO DE ESCALA**



#### 4.3 Estimativa de modelo de regressão para obtenção da curva de aprendizado com dados da empresa X

1) Definição das variáveis:

Variável dependente = Custo unitário real ( $O$ )

Variável explicativa = Produção acumulada ( $Q$ )

2) Definição do relacionamento entre as variáveis

$$C = f(Q)$$

Forma funcional de relacionamento:

$$\text{Forma matemática: } C = \beta_1 + \beta_2 Q$$

Forma probabilística:  $C = \beta_1 + \beta_2 Q + e$

3) Expectativa teórica:

$$\beta_1 > 0$$

$$\beta_2 < 0$$

4) Estimação do modelo

Definição operacional das variáveis:

- A variável dependente Custo unitário real ( $O$ ) é medida em unidade monetária.
- A variável explicativa Produção acumulada ( $Q$ ) é medida em unidades.

Apresentação dos dados disponíveis na amostra:

**TABELA 3 - CUSTOS E PRODUÇÃO**

| Ano  | Custo Real (R\$) | Produção Acumulada (pçs) |
|------|------------------|--------------------------|
| 1998 | 9,957489807      | 39.429.884               |
| 1999 | 2,513049756      | 81.580.564               |
| 2000 | 5,105831187      | 119.626.859              |
| 2001 | 4,423580496      | 161.758.927              |
| 2002 | 2,703475698      | 213.623.249              |
| 2003 | 4,171993050      | 259.639.682              |

Obtenção dos resultados:

Dependent Variable: LOG(CUSTOUNISTÁRIO)

Method: Least Squares

Date: 10/25/04 Time: 05:33

Sample: 1901 1906

Included observations: 6

| Variable                | Coefficient | Std. Error            | t-Statistic | Prob.    |
|-------------------------|-------------|-----------------------|-------------|----------|
| C                       | 9.298018    | 5.428623              | 1.712777    | 0.1619   |
| LOG(PRODUÇÃO ACUMULADA) | -0.420783   | 0.291267              | -1.444662   | 0.2221   |
| R-squared               | 0.342867    | Mean dependent var    |             | 1.460014 |
| Adjusted R-squared      | 0.178584    | S.D. dependent var    |             | 0.498033 |
| S.E. of regression      | 0.451377    | Akaike info criterion |             | 1.508176 |
| Sum squared resid       | 0.814966    | Schwarz criterion     |             | 1.438762 |
| Log likelihood          | -2.524527   | F-statistic           |             | 2.087048 |
| Durbin-Watson stat      | 2.835718    | Prob(F-statistic)     |             | 0.222060 |

## 5) Resultado padrão do modelo de Regressão Linear

$$C = 9,298018 - 0,420783Q$$

$$(1,712777) \quad (-1,444662) \quad (t)$$

$$n = 6$$

$$R\text{-squared} = 0,342867$$

$$F = 2,087048$$

## 6) Avaliação do modelo

- os sinais encontrados dos coeficientes corresponderam às expectativas;
- o teste de Durbin-Watson é alto,  $d \cong 2$ , o que indica que os erros do modelo não são correlacionados (2,835718);
- o R-squared é baixo, o que significa que apenas 34,28% da variação do custo é explicada pela variação da produção, com isso, pode-se dizer que 65,72% da variação do custo permanece sem explicação, ou seja, é explicada por variáveis aleatórias;

Com estes resultados não é possível afirmar a existência de economia de aprendizado. Deve-se levar em consideração, no entanto, que a empresa X possui vendas sazonais, ou seja, em determinados períodos do ano ela vende muito mais do que outros, e com isso sua produção também é sazonal.

Outro fator relevante é a utilização de mão de obra temporária por esta empresa, também ocasionada pela sazonalidade das vendas. Em períodos em que a produção tem um grande aumento, o que acontecem em datas comemorativas, principalmente no final do ano, a procura por mão de obra temporária aumenta sensivelmente, contudo não se realiza uma efetiva queda nos custos uma vez que esta mão de obra não possui experiência suficiente.

Foram analisados também os resultados das regressões realizadas com dados semestrais desta empresa e resultados da regressão da função produção para a verificação de retornos de escala, porém os resultados não foram satisfatórios e tão pouco conclusivos. Faz-se necessário, portanto, uma maior massa de dados, bem como um aprimoramento dos dados para realizar um análise mais efetiva sobre esta empresa.

## 5 CONCLUSÃO

Os estudos de retornos de escala e de economia de aprendizados e experiência demonstram que são muito importantes na formulação das estratégias de uma empresa.

No caso da empresa utilizada neste estudo de caso, devido à restrição de dados disponibilizados, e talvez pelas particularidades do negócio, os resultados não foram muito satisfatórios.

Com a realização da regressão apresentada não foi possível afirmar existência de economia de aprendizado. Foram analisados também os resultados das regressões realizadas com dados semestrais da empresa e resultados da regressão da função produção para a verificação de retornos de escala, porém os resultados não foram satisfatórios e tão pouco conclusivos.

Porém alguns pontos relevantes referente à empresa devem ser levados em consideração: 1) A sazonalidade das vendas da empresa: esta empresa não possui vendas regulares ao longo do ano e tão pouco um nível de produção constante, ou seja, em determinados períodos do ano ela vende muito mais do que outros, e com isso sua produção também é sazonal. 2) Utilização de mão de obra temporária: esta situação é proporcionada pela sazonalidade das vendas. Em períodos em que a produção tem um grande aumento, o que acontece principalmente no segundo semestre com o aumento das vendas visando as datas comemorativas de final de ano, a procura por mão de obra temporária aumenta sensivelmente, com isso não há a possibilidade de realizar uma efetiva queda nos custos uma vez que esta mão de obra não possui experiência suficiente. Essa mão de obra, em alguns casos é contratada pela empresa e permanece trabalhando sem interrupção, e em outros muitos casos ela é dispensada ao fim do contrato temporário de trabalho e pode vir a ser recontratada em outro período, porém seu aprendizado do período anterior ao trabalho é perdido, tendo estes trabalhadores que “reaprender” a tarefa novamente.

Faz-se necessário, portanto, uma maior massa de dados, bem como um aprimoramento desses dados para a realização de uma análise mais efetiva sobre esta empresa.

## REFERÊNCIAS

- GRENEE, W. H.; *Econometrics Analysis*. 2ª edição. 1993. p. 207. Ed. Prentice Hall
- BESANKO, D., BRAEUTIGAM, R.R.; *Microeconomia: uma abordagem completa*. Ed. LTC. 2004.
- BERNDT, E.R; *The Practice of Econometrics: Classic and Contemporary*. Ed. Addison Wesley. 1990
- HILL, C., GRIFFITHS, W.E, JUDGE, G.G.; *Econometria*. São Paulo. Ed. Saraiva. 1999
- PINDYCK, R.S., RUBINFELD, D.L.; *Microeconomia*. São Paulo. Ed. Makron. 1994
- HOFFMAN, R., VIEIRA, S.; *Análise de Regressão: Uma Introdução à Econometria*. São Paulo. Ed. Hucitec. 2ª edição. 1987