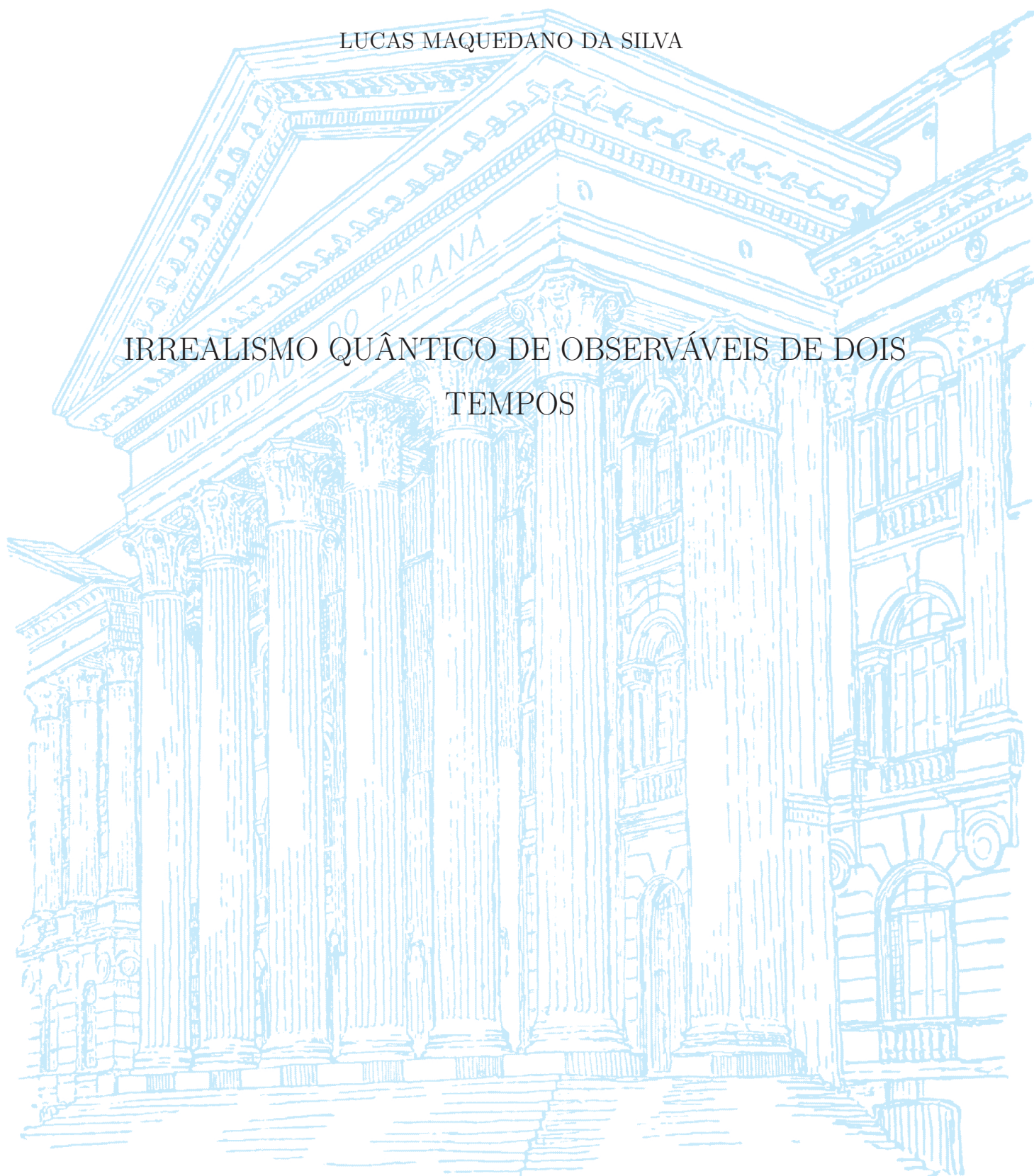


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LUCAS MAQUEDANO DA SILVA

IRREALISMO QUÂNTICO DE OBSERVÁVEIS DE DOIS
TEMPOS

Curitiba, 2022



LUCAS MAQUEDANO DA SILVA

IRREALISMO QUÂNTICO DE OBSERVÁVEIS DE DOIS
TEMPOS

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Renato Moreira Angelo

Curitiba, 2022

S586i

Silva, Lucas Maquedano da

Irrealismo quântico de observáveis de dois tempos [recurso eletrônico] /
Lucas Maquedano da Silva -- Curitiba, 2022.

Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Física, Setor
de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Renato Moreira Angelo

1. Física. 2. Mecânica quântica. 3. Teoria da informação em
matemática. I. Universidade Federal do Paraná. II. Angelo, Renato
Moreira. III. Título.

CDD 530.12

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LUCAS MAQUEDANO DA SILVA** intitulada: "**Irrealismo quântico de observáveis de dois tempos**", sob orientação do Prof. Dr. RENATO MOREIRA ANGELO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 25 de Fevereiro de 2022.

Assinatura Eletrônica

25/02/2022 14:02:18.0

RENATO MOREIRA ANGELO

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

01/03/2022 10:47:04.0

EDUARDO INACIO DUZZIONI

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

Assinatura Eletrônica

25/02/2022 14:43:35.0

ANA CRISTINA SPROTTE COSTA

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por tornarem tudo possível e por serem meu alento nas mudanças da vida.

À Catarine, meu conforto e compreensão, por confiar neste tempo nas certezas que virão.

Aos meus amigos, João pelas distraídas e reconfortantes conversas e Pedro pelo companheirismo nesta nova jornada.

Ao prof. Renato, pela orientação e por motivar um espírito crítico científico, com quem tive o prazer de compartilhar a paixão pelo saber.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À Alexandra Elbakyan, criadora do Sci-Hub, por proporcionar o livre acesso ao conhecimento.

Ao grupo de pesquisa, pelo acolhimento e instigantes discussões.

“... e mais uma vez estremeceu com a comprovação de que o tempo não passava, como ela acabava de admitir, mas girava em círculo.”
(Márquez, G. G. Cem anos de solidão)

RESUMO

A Mecânica Quântica veio a romper com muitas das concepções tidas como fundamentais pela física clássica. Dentre outros aspectos, ela coloca em debate a realidade das grandezas físicas, tais como posição e momentum, e o papel desempenhado pelo observador para a existência dessas quantidades. Einstein, Podolski e Rosen (EPR) contribuíram de forma significativa para a definição de um critério para um elemento de realidade. Posteriormente, Leggett e Garg deduziram uma desigualdade obedecida por qualquer grandeza tida como real. A partir de uma nova premissa, Bilobran e Angelo (BA) propuseram um quantificador para o (ir)realismo dos observáveis quânticos, correspondendo a uma generalização do critério de EPR. De forma geral, estes critérios foram construídos para quantidades físicas definidas em um único instante. Por outro lado, é comum existirem grandezas tais como o deslocamento e o trabalho, atrelados a medidas de posição e energia em tempos sucessivos, de modo a possuírem uma realidade definida a partir de dois instantes. Apresentaremos um estudo sobre os observáveis associados a estas grandezas definidas em dois tempos, primeiro revisando quais os métodos propostos pela literatura para sua construção, seguido dos problemas conceituais atrelados a cada um. Iremos propor um método para a construção destes observáveis de dois tempos e também as interpretações plausíveis para tais objetos. Estenderemos o critério de BA para estudarmos a realidade de tais quantidades, analisando como exemplos o problema dos correlatores temporais e o torque decorrente da variação do momentum angular de spin. Por fim, demonstraremos a particularidade para os elementos de realidade dos observáveis concebidos em dois instantes, até mesmo para situações onde estão definidos em intervalos infinitesimais de tempo.

Palavras chave: Realismo; observáveis não-locais no tempo; desigualdade de Leggett-Garg; correlatores temporais.

ABSTRACT

Quantum Mechanics came to break with many of the concepts considered fundamental by classical physics. Among other aspects, it debates the reality of physical quantities, such as position and momentum, and the role played by the observer for the reality of these physical quantities, raising problems such as the wave-particle duality. Einstein, Podolski and Rosen (EPR) contributed significantly to the definition of a criterion for an element of reality. Later, Leggett and Garg deduced an inequality obeyed by any quantity taken as real. From a new premise, Bilobran and Angelo (BA) proposed a quantifier for the (ir)realism of quantum observables, corresponding to a generalization of the EPR criterion. In general, these criteria were built for physical quantities defined in a single time. On the other hand, we have quantities such as displacement and work, linked to measurements of position and energy at successive instants, so that they have a reality defined from two times. We will present a study on these observables, first reviewing the methods proposed by the literature for their construction, as well as the conceptual problems linked to each one. We will propose a method for the construction of the observables associated with these quantities defined in two times as well as the plausible interpretations for such objects. Furthermore, the BA criterion will be extended to study the reality of such quantities, analyzing as examples the problem of temporal correlators and the torque resulting from the variation of the spin angular momentum. Finally, we will demonstrate the particularity for the elements of reality of the observables conceived in two instants, even for situations where they are defined in infinitesimal intervals of time.

Keywords: Realism; non-local observables in time; Leggett-Garg inequality; temporal correlators.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Esfera de Bloch. Nela o estado do ensemble é representado por um vetor no interior da esfera (ensemble misto) e sobre sua casca (ensemble puro). Nos eixos ortogonais \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} encontramos os autoestados dos observáveis $S(\hat{x})$: $ +\rangle, -\rangle$, $S(\hat{y})$: $ \uparrow\rangle, \downarrow\rangle$ e $S(\hat{z})$: $ 0\rangle, 1\rangle$. Fonte: Wikipedia ¹ | 34 |
| 3.1 | Protocolo para verificar a realidade de uma grandeza física \mathcal{A} no intervalo $[t_0, t_2]$. Em (a) no instante t_1 , Alice faz uma medição não-seletiva do observável A sobre o ensemble preparado em t_0 . Posteriormente em t_2 , o estado colapsado é tomografado por Bob resultando no estado $\Phi_A(\rho)$. Já em (b) no tempo t_2 , o observador Charlie realiza uma tomografia sobre o ensemble preparado em t_0 (o mesmo que de Alice), obtendo seu estado correspondente ρ | 47 |
| 3.2 | Experimento com partículas trocando seu momento com uma fenda simples e leve, a qual quando subir indica que a partícula caminhará para a abertura inferior da fenda dupla (a), e ao passo que descer sinaliza que a partícula seguirá para a abertura superior da dupla fenda (b). Inferiormente é descrito o estado relacionado à cada situação. | 50 |
| 4.1 | Representação dos vetores associados aos observáveis $S(\vec{u}, t_1)$ e $S(\vec{v}, t_2)$ e à preparação ρ_0 | 64 |
| 4.2 | Irrealidade para o observável de dois tempos $C(S(\hat{u}, 0), S^2(\hat{v}, 2\pi))$ com os parâmetros μ (vinculado à direção de $S(\hat{u})$) e ν (associado à $S(\hat{v})$) variando entre 0 e $\pi/2$ e limitada superiormente pelo plano $\ln(2)$ | 65 |
| 4.3 | Irrealidade dos observáveis $S(\vec{u}, 0)$ (a) e $S(\vec{v}, 2\pi)$ (b) para o estado $\rho_0 = 1/2[\mathbb{I}_2(\sin \pi/4 \hat{x} + \cos \pi/4 \hat{z}) \cdot \vec{\sigma}]$, variando seus vetores entre 0 e $\pi/2$ correspondendo às direções \hat{x} e \hat{z} respectivamente. | 65 |
| 4.4 | Soma das irrealidades de $S(\vec{u}, 0)$ e $S(\vec{v}, 2\pi)$. Ambos serão reais (soma nula) quando $\mu = \nu = \pi/4$ | 65 |
| 4.5 | As curvas representam configurações de μ e ν nas quais as irrealidade para o ODT $C(S(\hat{u}, 0), S^2(\hat{v}, 2\pi))$ (azul) e para os seus OCs $S(\hat{u}, 0)$ (ciano) e $S(\hat{v}, 2\pi)$ (magenta) se anulam dado o estado ρ_0 . As grandezas em questão não são todas reais simultaneamente. | 66 |

| | | |
|-----|---|----|
| 4.6 | Comparação entre $\mathfrak{I}_{\sigma_x}(\rho_0)$ e $\mathfrak{I}_{T(\hat{x})}(\rho_0)$ a partir de 10^5 escolhas para os parâmetros $\{r, \theta, \varphi, \theta_h, \varphi_h\}$. Em vermelho são considerados os estados maximamente mistos, $\rho_0 = \frac{\mathbb{I}}{d}$, ($r = 0$); mistos genéricos ($r \in [0, 1]$) em azul e puros ($r = 1$) em roxo. | 67 |
| 4.7 | Comparação entre $\mathfrak{I}_{\sigma_x}(\rho_0)$ e $\mathfrak{I}_{T(\hat{x})}(\rho_0)$ a partir de 10^5 escolhas para os parâmetros $\{r, \theta, \varphi, \theta_h, \varphi_h\}$ para os estados mistos com $r \in \{0.3, 0.5, 0.9\}$. . . | 68 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Ângulos θ e ϕ associados aos autoestados dos observáveis spin nas direções canônicas, utilizando $\{ 0\rangle, 1\rangle, \}$ como kets de base. | 32 |
| 3.1 | Comparação da realidade de algumas grandezas para um mesmo estado segundo o critério de realismo de EPR e BA. Os estados correspondem respectivamente a um exemplo de superposição (base σ_x), máxima mistura, autoestado (base σ_z) e emaranhado. | 49 |
| 4.1 | Exemplo de grandezas definidas em dois tempos. | 51 |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 11 |
| 2 | Conceitos Preliminares | 15 |
| 2.1 | Fundamentos da Mecânica Quântica | 15 |
| 2.2 | Pré-medição e POVMs | 24 |
| 2.3 | Teoria da Informação | 29 |
| 2.4 | Representação de Bloch | 31 |
| 3 | Critérios de Realismo | 37 |
| 3.1 | Realismo de EPR | 37 |
| 3.1.1 | Teorema de Bell | 42 |
| 3.2 | Macro-realismo | 44 |
| 3.3 | Realismo Bilobran-Angelo | 46 |
| 4 | Correladores Temporais | 51 |
| 4.1 | Dinâmica unitária e TPM | 52 |
| 4.2 | Observáveis de dois tempos | 59 |
| | Conclusão | 69 |
| | Referências | 71 |

1 Introdução

O mundo macroscópico com o qual estamos familiarizados tem como paradigma que a posição e o momentum das partículas assim como a energia para os campos estão bem definidos em todo o tempo. A esta concepção de que as grandezas físicas possuem valores bem estabelecidos, independentemente de qualquer intervenção ou conhecimento de um observador consciente, é dado o nome de *realismo*. Estes sistemas são regidos por leis *causais*, correspondendo às leis de Newton para descreverem a dinâmica das massas e às equações de Maxwell para a evolução dos campos, formuladas a partir das leis de conservação [1]. Nesta escala, o mundo apresenta um comportamento *determinístico*, o qual assegura por premissa que em cada instante os sistemas assumam propriedades bem definidas e que evoluirão de forma causal de modo que haja realismo em todo o tempo futuro (e também no passado).

Neste cenário, segundo Popper [2]: “qualquer acontecimento pode ser racionalmente previsto, com qualquer grau de precisão que se deseje, se nos for dada uma descrição suficientemente precisa de acontecimentos passados, juntamente com todas as leis da Natureza”. Neste ponto iremos distinguir o *determinismo epistemológico*, associado à compreensão e a previsibilidade dos fenômenos físicos, do *determinismo ontológico* que diz respeito à essência dos fenômenos, ainda que não sejam cognoscíveis por um agente consciente [3]. Assim, destacam as palavras de Popper quanto aos acontecimentos estarem passíveis de compreensão, e não que esta seja necessária para que as grandezas estejam bem definidas. Deste modo, as propriedades de um sistema são indiferentes à qualquer participação de um observador, assumindo uma *realidade objetiva*, e o agente investigador assumirá neste cenário o papel de mero coadjuvante atualizando suas percepções sobre o mundo.

Ao passo que analisemos sistemas cada vez menores ou que aumentemos a precisão de nossos equipamentos de medição, a previsibilidade ora assegurada pelas teorias físicas é posta em debate, dada a emergência de fenômenos fundamentalmente aleatórios. Neste contexto, a Natureza mostra-se sensível às interações de um observador com o objeto de estudo, o qual passa a desempenhar uma importância fundamental em estabelecer a realidade para as quantidades físicas. A Mecânica Quântica (MQ), a fim de explicar os fenômenos, usa de um caráter essencialmente probabilístico, que garantirá previsões estatísticas para uma grandeza dados seus resultados experimentais aferidos sobre uma

coleção de sistemas idênticos. Neste contexto, visto a aleatoriedade e irreversibilidade dos processos físicos, a teoria evidencia um comportamento onticamente indeterminista¹ da Natureza.

Este caráter probabilístico, assim como a perda de uma realidade objetiva para a Natureza, foram alvos de críticas pela comunidade acadêmica. Dentre os principais trabalhos se encontra o artigo seminal de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) intitulado “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?” [4]. Nele os autores colocam em questão se a Mecânica Quântica é a teoria mais completa para explicar tais fenômenos físicos. A proposta de um exemplo que falseie tal completeza foi fundamentada na noção de que se conseguíssemos prever as propriedades de um sistema sem perturbá-lo, fato ao qual deram o nome de elemento de realidade, então uma teoria completa também deveria ser capaz de prever esses elementos. Outra hipótese foi a de que uma medição aferida por um observador não pode influenciar nas medições feitas por um outro observador se ambos estiverem separados de forma que nenhuma troca de informações seja possível entre eles, ou seja, não havendo conexão causal entre seus respectivos experimentos. A esta hipótese damos o nome de *localidade*. O experimento mental formulado por EPR concluía que existem elementos de realidade que não são preditos pela teoria quântica, e assim ela se tratava de uma teoria incompleta.

Em resposta à EPR, Niels Bohr publica um artigo também intitulado “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?” [5], em que argumenta sobre um princípio de complementaridade, no qual são as medições que determinam a realidade de uma grandeza física, de modo que antes do procedimento experimental estas quantidades não estão completamente definidas. Já o caráter de incompletude demonstrado por EPR, advém do fato de se escolher medir, em um mesmo experimento, uma grandeza em detrimento de outra, dita sua complementar, tal como a posição e momentum.

Os argumentos apresentados por EPR e Bohr deram origem a um longo debate acerca da capacidade de uma teoria física em descrever a realidade. Dentre estes trabalhos, surgiram modelos baseados em *variáveis ocultas* [6] com o intuito de completar a teoria quântica e recuperar seu determinismo.

Décadas depois, John Bell demonstrou [7] que qualquer teoria local de variáveis ocultas não seria consistente com as previsões asseguradas pela MQ, correspondendo esta a uma teoria completa e onde o critério de localidade seria violado. Experimentos posteriores [8,9] constataram este fenômeno de não-localidade na Natureza, evidenciando correlações (emaranhamento) entre sistemas quânticos separados de forma causal.

Tal qual o elemento de realidade proposto por EPR, outros trabalhos surgiram a fim de caracterizar a realidade para as grandezas físicas. Dentre eles, Leggett e Garg [10]

¹Há um importante debate sobre a causalidade ser mantida, ainda que em um mundo quântico. Para uma discussão sobre o assunto remetemos o leitor a [1,3].

propuseram uma desigualdade obedecida, dentre outras premissas, por qualquer sistema macroscópico com propriedades bem estabelecidas em todo o tempo. Ao passo que se esta desigualdade fosse violada, então o objeto de estudo evidenciaria um caráter essencialmente quântico, de uma grandeza não definida, ou dita sem realidade, para certo instante no tempo. Outro critério, proposto por Bilobran e Angelo (BA) [11], incorpora em seu formalismo não apenas os sistemas de interesse, mas também o papel relativo dos observadores e suas medições em descreverem a realidade para estas quantidades físicas.

Em geral, estes critérios são utilizados para descrever a realidade de grandezas definidas a partir em um único instante no tempo, tais como a posição $q(t)$, momentum $p(t)$ e energia $E(t)$. Além destas, é comum nos depararmos com quantidades determinadas a partir de dois instantes, tendo como alguns exemplos o deslocamento escalar $q(t_2) - q(t_1)$ e suas associadas velocidade e aceleração médias, o trabalho mecânico $W_{\text{mec}} = F(q(t_2) - q(t_1))$ exercido sobre uma partícula por uma força constante, e o trabalho termodinâmico sob pressão constante $W_{\text{ter}} = p(V(t_2) - V(t_1))$, sendo p e $V(t)$ a pressão e o volume respectivamente.

As grandezas físicas concebidas de forma *não-local* no tempo, ou seja, definidas a partir de dois instantes t_1 e t_2 , ao serem analisadas para sistemas quânticos apresentam dificuldades tais como a construção de seus operadores algébricos. Tendo como exemplo o trabalho, esta quantidade não é representada na literatura por um operador hermitiano, logo não constitui um *observável* usual da MQ, sendo a própria medição desta grandeza atípica experimentalmente [12]. É amplamente aceito na literatura que o trabalho só pode ser medido realizando-se medições de energia em dois tempos [13], cujo protocolo pode ser estendido para outras grandezas definidas de forma semelhante. Como veremos mais detalhadamente, este procedimento é insatisfatório ao passo que destrói em seu curso recursos quânticos do sistema estudado [14]. Neste trabalho, estaremos interessados em propor uma nova formulação para construir os observáveis associados às grandezas definidas em dois tempos, e também estudar as implicações conceituais advindas desta nova abordagem.

Fomentados pelo critério de BA também investigaremos a realidade de tais quantidades, interpretando-as de maneira distinta da entendida usualmente pela literatura. Para isso, organizamos esta dissertação da seguinte maneira. No capítulo 2 faremos uma introdução sobre os conceitos fundamentais que serão utilizados ao longo do trabalho, apresentando o escopo algébrico da MQ, processos de medição generalizados, tópicos sobre teoria da informação clássica e quântica e o formalismo de Bloch para descrever quantidades duplamente valoradas. O capítulo 3 será reservado para um estudo detalhado sobre os critérios de realismo de EPR, Leggett-Garg e de Bilobran e Angelo.

No capítulo 4, revisaremos quais os formalismos encontrados na literatura para calcular os operadores algébricos associados a estas grandezas de dois tempos, assim como suas respectivas probabilidades e valores médios. Veremos quais as dificuldades em adotar

cada método e apresentaremos uma nova interpretação para realizar estes cálculos. A partir do critério de BA, demonstraremos os resultados obtidos para a realidade destas grandezas comparando-as com a realidade das quantidades individuais que as compõem em cada tempo específico.

Por último, no capítulo 5 iremos discorrer sobre as conclusões adquiridas a partir dos exemplos estudados e métodos utilizados.

2 Conceitos Preliminares

Apresentaremos neste capítulo um panorama sobre a Mecânica Quântica, introduzindo conceitos e notações que serão utilizados ao longo do trabalho. Na primeira seção, trataremos de seu escopo algébrico a partir das noções de espaço vetorial, vetores de estado e operadores lineares, traçando um paralelo com seus correspondentes físicos. Já na segunda seção, veremos como estes elementos teóricos são incorporados nos processos experimentais e uma generalização para descrever medições nestes sistemas. Na sequência estudaremos alguns conceitos sobre a teoria da informação clássica e quântica e, por último, abordaremos uma representação útil para descrever grandezas físicas de valores dicotômicos.

2.1 Fundamentos da Mecânica Quântica

De maneira didática, ao estudarmos uma teoria física convém dividi-la em seus níveis de abstração. Assim podemos compreender o que tange seus aspectos físicos, relativos aos fenômenos naturais e às nossas experiências, e aspectos teóricos, correspondendo à nossa capacidade matemática em descrever tais fenômenos. Uma maneira de agruparmos estes elementos, segundo Prugovecki [15, 16], seria no que diz respeito ao seu:

- *Formalismo*, que é a estrutura lógica e matemática na qual são postulados os conceitos fundamentais e a partir do qual se axiomatiza¹ a teoria;
- *Regras de dedução*, as quais nos permitem deduzir os teoremas a partir da manipulação dos símbolos e axiomas apresentados no formalismo;
- *Lei dinâmica*, que irá restringir os possíveis valores assumidos pelos elementos do formalismo atribuindo o caráter preditivo à teoria;
- *Regras de correspondência*, as quais irão estabelecer a conexão entre os elementos teóricos com os procedimentos experimentais, a partir dos quais somos capazes de acessar a realidade física.

¹Um axioma, ou postulado, é uma proposição tida como verdadeira embora não seja demonstrada, sendo um consenso inicial necessário para a construção de uma teoria.

Embora apresentadas de forma linear, estas estruturas são construídas de maneira interdependente. Em uma visão geral, a Mecânica Quântica terá em seu formalismo os conceitos de *estados* e *observáveis*; suas regras de dedução serão construídas a partir da álgebra de operadores sobre o espaço de Hilbert; sua dinâmica será regida pela equação de Schrödinger (dentro de um contexto não-relativístico) e suas regras de correspondência, por sua vez, dependerão de cada interpretação adotada no que diz respeito aos fundamentos da teoria. Dentre as interpretações destaca-se a de Copenhague, tida como a mais amplamente aceita, dentre outras tais como as teorias de variáveis ocultas não locais e a interpretação de muitos mundos, as quais merecem destaque por apresentarem outras visões e questionamentos sobre os fundamentos da teoria.

A começar pelos espaços de Hilbert denotados por \mathcal{H} , eles serão em primeiro momento uma generalização dos espaços vetoriais euclidianos (finitos e reais) para dimensões infinitas, cujo domínio passa a incorporar os números complexos. Como definição formal teremos qualquer espaço vetorial com as seguintes propriedades:

(a) **Soma e multiplicação por escalar:** para os elementos (vetores) \vec{u} e \vec{v} deste espaço e os escalares complexos a e b , estão definidas as operações de soma $\vec{u} + \vec{v}$ e multiplicação por escalar $a\vec{u}$ na forma

- Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- Distributiva: $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$, $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$;
- Associativa: $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$, $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$;
- Elemento unitário: $\mathbb{I}\vec{u} = \vec{u}$, sendo \mathbb{I} o elemento identidade do conjunto complexo \mathbb{C} .

(b) **Produto interno:** dado \vec{u} e \vec{v} o produto interno entre eles será denotado por (\vec{u}, \vec{v}) correspondendo a uma função com domínio em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ e imagem no corpo escalar \mathbb{C} . Sendo a^* o complexo conjugado de a , teremos as propriedades de

- Conjugação hermitiana: $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})^*$;
- Linearidade: $(\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}) = a(\vec{u}, \vec{v}) + b(\vec{u}, \vec{w})$;
- Antilinearidade: $(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = a^*(\vec{u}, \vec{w}) + b^*(\vec{v}, \vec{w})$;
- Norma: $\|\vec{u}\| := \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})} \geq 0$, ocorrendo a igualdade se e somente se $\vec{u} = 0$.

(c) **Separabilidade:** o espaço \mathcal{H} contém um subconjunto enumerável e denso.

(d) **Completeza:** como definição preliminar [17], uma sequência em um conjunto M é uma aplicação $f : \mathbb{N} \rightarrow M$, definida no conjunto dos números naturais \mathbb{N} . O valor que a sequência f assume para o número $n \in \mathbb{N}$ será denotado como f_n . Uma sequência f em um espaço métrico M será uma sequência de Cauchy quando, para todo $\epsilon > 0$ dado

arbitrariamente, existe $n_0, m \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow d(f_m, f_n) < \epsilon$, com $d(f_m, f_n) := \|f_m - f_n\|$.

- Diz-se que o espaço de Hilbert é completo quando toda sequência de Cauchy aplicada sobre \mathcal{H} converge para algum ponto neste espaço.

Um espaço de Hilbert pode ser composto por outros subespaços semelhantes. Seja \mathcal{A} um espaço vetorial de dimensão n e dotado das propriedades acima, tal como \mathcal{B} de dimensão m , podemos construir um espaço estendido a partir do produto tensorial $\mathcal{H} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, o qual terá dimensão $n \times m$. Dado que encontremos um conjunto de vetores linearmente independentes para formarem uma base ortonormal para cada um destes espaços, digamos que $\{\vec{n}_i\}$ seja o conjunto de \mathcal{A} , e $\{\vec{m}_j\}$ de \mathcal{B} , o espaço estendido terá como base os vetores $\{\vec{n}_i \otimes \vec{m}_j\}$.

Outro elemento fundamental são os *operadores lineares*, responsáveis pelas transformações dos vetores. Representados genericamente por A , serão dotados da propriedade de linearidade, $A(a\vec{u} + b\vec{v}) = aA(\vec{u}) + bA(\vec{v})$, e atuarão de modo que $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Quando um operador A é aplicado sobre um vetor \vec{u} preservando sua direção e tendo como efeito apenas a variação de sua magnitude, $A(\vec{u}) = a\vec{u}$, dizemos que este vetor é um *autovetor* do operador A e o escalar a seu *autovalor*.

Alguns operadores são de particular interesse para a Mecânica Quântica. Dentre eles, temos os operadores *hermitianos* para os quais é válida a relação $A = A^\dagger$, sendo A^\dagger o operador adjunto de A . Esta classe de operadores terá como propriedade autovalores reais e autovetores ortogonais.

Seja A^{-1} o operador inverso definido a partir da relação $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$, quando $A^{-1} = A^\dagger$ o operador será denominado *unitário*, de forma que $A^\dagger A = AA^\dagger = \mathbb{I}$. Um operador unitário, que passaremos a representar por U , preserva o produto interno no espaço de Hilbert, ou seja, para \vec{u} e \vec{v} teremos a relação $(U\vec{u}, U\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$. Em outras palavras, o operador unitário preserva o módulo e o ângulo entre os vetores, podendo ser considerado como um operador de rotação.

Os espaços de Hilbert serão responsáveis por representarem os sistemas físicos experimentais e seus vetores por descreverem completamente os estados destes sistemas. Esta regra de correspondência é de especial importância para a interpretação de Copenhague, ganhando o status de postulado. Dado este escopo, faremos uso, a partir de agora, das notações de Dirac, onde estes *vetores estado* serão representados pelo *ket* $|\psi\rangle$, uma forma análoga e com todas as propriedades vistas para vetor \vec{u} ².

A notação de Dirac também faz uso dos *funcionais lineares*, os quais atuarão sobre os vetores de estado resultando em um escalar. Eles são representados pelo símbolo *bra* $\langle \cdot |$ e

²Além da forma vetorial, as componentes do estado $|\psi\rangle$, quando representado no espaço de configurações e cuja notação veremos a diante, também podem ser entendidas como uma função, a chamada função de onda do sistema.

compõem um espaço vetorial próprio, chamado de espaço dual \mathcal{H}^* . A partir do teorema da representação de Riesz³ é possível demonstrar que o produto interno entre dois vetores estado será dado por $(|\phi\rangle, |\psi\rangle) = \langle\phi|\psi\rangle$, havendo uma relação de correspondência de cada *ket* de estado para com um funcional *bra* associado, já o inverso não é verdadeiro.

O vetor estado $|\psi\rangle$ pertencente ao espaço \mathcal{A} , pode ser decomposto em termos dos vetores $\{|n_i\rangle\}$ que constituem uma base. Esta combinação linear será escrita como $|\psi\rangle = \sum_i c_i |n_i\rangle$, com o escalar complexo $c_i = \langle n_i|\psi\rangle$.

Essa decomposição do vetor estado nos vetores de base pode ser representada por uma matriz coluna cujos elementos serão as constantes c_i . No caso de uma base infinita e contínua, como por exemplo para o conjunto de vetores posição $\{|x\rangle\}$, o vetor estado será decomposto na forma $|\psi\rangle = \int dx c_x |x\rangle$, com os números $c_x = \langle x|\psi\rangle \doteq \psi(x)$ podendo ser entendidos como uma função $\psi(x)$, a chamada *função de onda* do sistema.

$$\text{(Base discreta) } |\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle n_1|\psi\rangle \\ \langle n_2|\psi\rangle \\ \vdots \\ \langle n_i|\psi\rangle \end{pmatrix}, \quad \text{(Base contínua) } |\psi\rangle \doteq \begin{pmatrix} \vdots \\ \langle x|\psi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Tanto para as bases discretas quanto para as contínuas, os vetores $\{|n_i\rangle\}$ e $\{|x\rangle\}$ possuirão as propriedades de ortonormalização: $\langle n_i|n_j\rangle = \delta_{i,j}$, $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$; e completeza: $\sum_i |n_i\rangle\langle n_i| = \mathbb{I}$, $\int dx |x\rangle\langle x| = \mathbb{I}$. Como cada vetor *ket* de base terá seu funcional *bra* associado, estes corresponderão a uma matriz linha com elementos $c_i^* = \langle\psi|n_i\rangle$ e $c_x^* = \langle\psi|x\rangle$.

Um estado também pode ser descrito por um vetor *multipartido*, o que significa que ele é composto pelo produto tensorial de vetores de base pertencentes a espaços de Hilbert distintos. Deste modo, é pertinente apresentarmos os conceitos de estados *separáveis* e *emaranhados*. Como exemplo, consideremos os vetores $|\psi\rangle = \sum_i c_i |n_i\rangle \in \mathcal{A}$ e $|\varphi\rangle = \sum_j c_j |m_j\rangle \in \mathcal{B}$, o estado puro *bipartido* $|\Psi\rangle$ mais geral é descrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |n_i\rangle \otimes |m_j\rangle. \quad (2.1)$$

Ele será separável se puder ser escrito na forma $|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_i c_j |n_i\rangle \otimes |m_j\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$. Por outro lado, se $|\Psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |n_i\rangle \otimes |m_j\rangle$ com $c_{ij} \neq c_i c_j$, então o estado será denominado emaranhado, uma vez que $|\Psi\rangle \neq |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$.

Visto o papel dos espaços vetoriais e de seus vetores para descreverem sistemas físicos, atribuiremos agora as regras de correspondência para os operadores. Toda grandeza física \mathcal{A} estará associada a um operador A o qual corresponde ao procedimento experimental específico para medir esta quantidade. Uma vez que as medidas realizadas em laboratório

³Teorema de Riesz: [18] cada funcional linear limitado F em um espaço de Hilbert \mathcal{H} pode ser representado em termos de produto interno $F(\vec{u}) = (\vec{u}, \vec{v})$, $\forall \vec{u} \in \mathcal{H}$, onde $\vec{v} \in \mathcal{H}$ é unicamente determinado por F e sua norma satisfaz $\|\vec{v}\| = \|F\|$.

nos retornam resultados reais referentes a estados distintos do sistema, ou seja, estados que se excluam mutuamente, então estes operadores – os quais chamaremos de *observáveis* – deverão ser hermitianos para garantir tais propriedades. Além da hermiticidade, os autovalores destes operadores fornecem uma base completa para o espaço, de modo que qualquer vetor possa ser expandido em termos desta autobase.

O único resultado possível de uma medição é um dos autovalores do operador correspondente, obtendo-se após a medição o seu autoestado associado. Esta última declaração é o chamado *postulado do colapso*.

Para que um operador A pertencente ao espaço de Hilbert \mathcal{A} atue, por exemplo, sobre um estado bipartido $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ com $|\psi\rangle \in \mathcal{A}$ e $|\varphi\rangle \in \mathcal{B}$, devemos primeiro tomar sua extensão $\tilde{A} = A \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}}$, a qual passa a operar no espaço $\mathcal{H} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Deste modo, o estado $|\Psi\rangle$ compartilhará do mesmo espaço estendido no qual \tilde{A} atuará, resultando na relação de autovalores $\tilde{A}|\Psi\rangle = A|\psi\rangle \otimes \mathbb{I}|\varphi\rangle$. De forma análoga, havendo um operador $B \in \mathcal{B}$ e sua extensão $\tilde{B} = B \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{A}}$ define-se a operação bilinear $\tilde{A}\tilde{B}|\Psi\rangle = (A \otimes B)|\Psi\rangle = A|\psi\rangle \otimes B|\varphi\rangle$.

Assim como os vetores estado, os operadores também podem ser decompostos nos vetores de base. Até agora utilizamos o conjunto $\{|n_i\rangle\}$ como base de \mathcal{A} , mas convém redefinirmos esta notação para que ela esteja diretamente ligada com os autovalores do observável que queremos medir. Deste modo, cada possível resultado a_i de um operador A corresponderá a um vetor $|a_i\rangle$ e o seu conjunto $\{|a_i\rangle\}$ passará a formar uma base para \mathcal{A} . A partir da relação de autovalores,

$$A|a_j\rangle = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|a_j\rangle = \sum_i a_i |a_i\rangle \delta_{i,j} = a_j |a_j\rangle, \quad (2.2)$$

decorre que os observáveis poderão ser representados na forma

$$A = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i| = \sum_i a_i A_i. \quad (2.3)$$

Denominamos os elementos $A_i \equiv |a_i\rangle\langle a_i|$ de *projetores*, uma vez que ao atuarem sobre um vetor de estado genérico $|\phi\rangle$ irão projetá-lo na direção $|a_i\rangle$ como podemos observar: $A_i|\phi\rangle = \langle a_i|\phi\rangle |a_i\rangle$. Um projetor possui as propriedades de hermiticidade, $A_i^\dagger = A_i$, e idempotência, $A_i^2 = A_i$.

Na forma matricial, os operadores irão corresponder a uma matriz quadrada com elementos $c_{pq} = \langle a_p|A|a_q\rangle$, garantindo seu caráter de uma transformação linear sobre os vetores estado (matrizes colunas) e seus *bras* associados (matrizes linhas),

$$A \doteq \begin{matrix} & |a_1\rangle & |a_2\rangle & \dots & |a_q\rangle \\ \langle a_1| & \left(\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1q} \end{matrix} \right) \\ \langle a_2| & \left(\begin{matrix} c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2q} \end{matrix} \right) \\ \vdots & \left(\begin{matrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{matrix} \right) \\ \langle a_p| & \left(\begin{matrix} c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pq} \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

e de modo análogo para as bases contínuas, onde cada elemento $c_{x,x'} = \langle x|A|x'\rangle$ corresponderá a um par ordenado entre os eixos x e x' .

Esta representação matricial torna evidente também o caráter não-comutativo de transformações sucessivas, onde em geral $AB|\psi\rangle \neq BA|\psi\rangle$. Definiremos então a transformação $[A, B] := AB - BA$, denominada de *comutador*, o qual quando for nulo indicará que A e B comutam entre si, sendo chamados de *observáveis compatíveis*. Quando A e B comutarem, poderemos construir uma base ortonormal mútua com autovetores comuns entre estes operadores. Para os operadores estendidos \tilde{A} e \tilde{B} é sempre válida a comutação $[\tilde{A}, \tilde{B}] = 0$.

Já para A e B incompatíveis, suas respectivas bases $\{|a_i\rangle\}$ e $\{|b_j\rangle\}$ serão ditas *bases mutuamente neutras* (do inglês *mutually unbiased bases* - MUB) se $|\langle a_i|b_j\rangle|^2 = \frac{1}{d}$, com d a dimensão do espaço vetorial $d = \dim\mathcal{A} = \dim\mathcal{B}$, representando que a medição do observável A não revela nenhuma informação sobre os possíveis resultados da medição do observável B e vice-versa [19]. Schwinger [20] constatou que não é possível adquirir informação sobre o estado de um sistema quântico - a qual trataremos com mais detalhes na seção 1.3 - por meio de medições em uma base mutuamente neutra com a base na qual este estado foi preparado.

Havendo um sistema físico descrito pelo vetor $|\psi\rangle$, o valor médio de uma quantidade física \mathcal{A} , representada pelo observável A , será $\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi|A|\psi\rangle$. Utilizando da operação traço, definida como $\text{Tr} A = \sum_k \langle a_k|A|a_k\rangle$ e a qual será invariante sob mudança de base, podemos reescrever o valor médio na forma $\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \text{Tr}(A|\psi\rangle\langle\psi|)$, retornando à expressão anterior quando aplicamos sua definição:

$$\text{Tr}(A|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_k \langle a_k|A|\psi\rangle \langle\psi|a_k\rangle = \sum_k \langle\psi|a_k\rangle \langle a_k|A|\psi\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \langle A \rangle_{|\psi\rangle}, \quad (2.4)$$

na qual utilizamos da comutação pelo escalar $\langle\psi|a_k\rangle$ e da completeza $\sum_k |a_k\rangle\langle a_k| = \mathbb{I}$.

Ao realizar uma medição da quantidade \mathcal{A} sobre um sistema descrito pelo estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade de se obter o resultado a_i correspondente ao autovalor do respectivo autovetor $|a_i\rangle$ de A será

$$p(a_i) = |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = \langle a_i|\psi\rangle \langle\psi|a_i\rangle = \text{Tr}(|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle\langle\psi|) = \text{Tr}(A_i|\psi\rangle\langle\psi|). \quad (2.5)$$

Estas são as previsões teóricas que a Mecânica Quântica nos fornece. Dado seu caráter

probabilístico intrínseco, a forma de verificarmos experimentalmente estes valores é a partir de medições efetuadas sobre um conjunto de sistemas igualmente preparados, o chamado *ensemble*. Ao efetuarmos uma primeira medição sobre um sistema físico este assumirá um dos possíveis estados previstos pela teoria, ocorrendo este colapso de forma aleatória, instantânea e irreversível. Ao passo que uma segunda medição desta quantidade física seja realizada em sequência, esta não desempenharia outro papel além de reproduzir o mesmo resultado já obtido.

Até agora tratamos de ensembles formados por estados identicamente preparados, representados por um único ket $|\psi\rangle$, sendo chamados de *ensembles puros*. No entanto, uma maneira mais geral para descrever um ensemble é considerando que seja composto por uma mistura estatística de estados diferentes. Imaginemos um ensemble formado metade pelo estado $|\psi_1\rangle$ e a outra pelo estado $|\psi_2\rangle$. Supostamente, poderíamos representar o vetor estado do conjunto como a soma “ $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|\psi_1\rangle + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle$ ”. Contudo, ao calcularmos a média de uma grandeza genérica \mathcal{A} para este ensemble puro, formado por $|\Psi\rangle$, teríamos $\langle A \rangle_{|\Psi\rangle} = \text{Tr}(A|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ com $|\Psi\rangle\langle\Psi| \neq \frac{1}{2}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$. Dessa forma, introduziremos aqui uma representação necessária, a do *operador densidade* ρ , visto que o ensemble composto por $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ não pode ser descrito por um estado puro $|\Psi\rangle$. Ele será construído na forma

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| \quad (2.6)$$

em que $|\psi_n\rangle$ serão os n diferentes estados que irão compor o ensemble e p_n suas respectivas probabilidades de serem encontrados no conjunto, as quais satisfazem $0 \leq p_n \leq 1$ e $\sum_n p_n = 1$. O operador densidade possuirá as propriedades **(i)** hermitiana, $\rho^\dagger = \rho$; **(ii)** traço unitário, $\text{Tr}(\rho) = \sum_n p_n \langle\psi_n|\psi_n\rangle = 1$ e **(iii)** positividade semidefinida, $\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \sum_n p_n |\langle\phi|\psi_n\rangle|^2 \geq 0$.

Notemos que a probabilidade p_n é relativa à nossa ignorância operacional sobre a composição do ensemble, assemelhando-se à encontrada nas teorias estatísticas clássicas, sendo portanto diferente da probabilidade intrínseca da Mecânica Quântica. No caso de ensembles puros, por serem constituídos de um único estado $|\psi\rangle$, a probabilidade p_n será igual a um, contando com a relação de *pureza* $\text{Tr}(\rho^2) = 1$. O valor médio (2.4) e as probabilidades (2.5) poderão então ser reescritas na forma geral:

$$p(a_i) = \text{Tr}(|a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle\langle\psi|) = \text{Tr}(A_i\rho) \quad (2.7)$$

e

$$\langle A \rangle_\rho = \text{Tr}(A\rho) = \sum_i a_i \text{Tr}(A_i\rho) = \sum_i a_i p(a_i). \quad (2.8)$$

Para uma interação física descrita pelo *operador hamiltoniano*⁴ $H(t)$, a dinâmica do

⁴Os operadores hamiltonianos estão relacionados com a energia total do sistema.

estado $|\psi\rangle$ será regida pela equação de Schrödinger dentro de um cenário não-relativístico. Ela corresponderá a

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle. \quad (2.9)$$

A evolução temporal também pode ser representada por um operador unitário $U(t, t_0)$ na forma $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$. Este operador será determinado a partir da equação

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0). \quad (2.10)$$

Para estudarmos as funções de operadores assumiremos que A^n corresponda à n sucessivas aplicações do operador A e, em analogia com a expansão em séries de Taylor de uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n$ centrada em 0, teremos $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} A^n$. Seguindo a relação de autovalores

$$f(A) |\psi_i\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} A^n |\psi_i\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} a_i^n |\psi_i\rangle = f(a_i) |\psi_i\rangle. \quad (2.11)$$

Podemos então resolver a equação (2.10) obtendo como solução, se H não depender explicitamente do tempo, $U(t, t_0) = \exp\left[-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}\right]$.

Já para um *ensemble* misto ρ a evolução ocorrerá sobre cada estado constituinte,

$$\rho(t) = \sum_n p_n U(t) |\psi_n\rangle\langle\psi_n| U^\dagger(t) \equiv U \rho_0 U^\dagger, \quad (2.12)$$

com o estado inicial $\rho_0 = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$. Derivando em relação ao tempo e utilizando da equação de Schrödinger obtemos a equação de Liouville-von Neumann

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{[H, \rho]}{i\hbar}, \quad (2.13)$$

com $[H, \rho]$ sendo o comutador entre H e ρ . Sua estrutura assemelha-se à da equação de Liouville para a mecânica estatística clássica $\partial_t \rho = \{H, \rho\}$, na qual ρ é a função densidade $\rho(p, q, t)$ do espaço de fase e $\{H, \rho\}$ o parênteses de Poisson⁵, com H correspondendo agora à hamiltoniana do sistema.

Nesse cenário, a evolução temporal ocorre sobre o estado do sistema e os observáveis são mantidos constantes no tempo. Esta é uma noção familiar das nossas experiências no mundo macroscópico onde, por exemplo, para medir a velocidade dos automóveis em uma estrada, os radares são mantidos fixos enquanto os automóveis se aproximam com suas respectivas velocidades a serem medidas. Agora, por uma outra perspectiva, na visão do motorista que se encontra em repouso em relação ao automóvel, a dinâmica ocorre sobre o mundo exterior, ou seja, a estrada, as árvores e o próprio radar se aproximam de seu referencial. Em analogia, poderíamos imprimir a dinâmica de um estado quântico sobre

⁵ $\{H, \rho\} := \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial \rho}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p}$.

o observável que queremos medir, mantendo o primeiro estático e aplicando a evolução unitária sobre o operador. Esta é a chamada representação de Heisenberg na qual os operadores serão definidos como

$$A^{\text{H}}(t) = U^\dagger(t, t_0)A^{\text{S}}(t_0)U(t, t_0) \equiv U^\dagger A^{\text{S}} U, \quad (2.14)$$

com os superíndices H e S denotando os operadores nas representações de Heisenberg e Schrödinger respectivamente. Notemos que os operadores em um cenário de Schrödinger podem ser função de um tempo específico t_0 , o que não ocorrerá nesta representação será a evolução desta variável, mantendo-se fixa ao longo de todo o processo experimental. A partir de (2.10) e (2.14) podemos derivar a equação de movimento para os operadores

$$\frac{dA^{\text{H}}}{dt} = \frac{[A^{\text{H}}, H^{\text{H}}]}{i\hbar} + \left(\frac{\partial A^{\text{S}}}{\partial t} \right)^{\text{H}}. \quad (2.15)$$

Embora as representações sejam construídas de forma algébrica e conceitual distintas, ambas ainda devem concordar e prever os mesmos valores para as quantidades passíveis de serem verificadas experimentalmente, sendo elas os valores médios das grandezas físicas e as probabilidades de seus autovalores, correspondendo estas aos elementos fundamentais da teoria. Deste modo, segue a correspondência

$$\text{(Schrödinger)} \quad \diamond \langle A^{\text{S}} \rangle_{\rho(t)} = \text{Tr} [A^{\text{S}} \rho(t)] = \sum_i a_i p(a_i, t); \quad (2.16a)$$

$$\circ p(a_i, t) = \text{Tr} [A_i^{\text{S}} \rho(t)]. \quad (2.16b)$$

$$\text{(Heisenberg)} \quad \diamond \langle A^{\text{H}}(t) \rangle_{\rho} = \text{Tr} [A^{\text{H}} \rho_0] = \text{Tr} [A^{\text{S}} U \rho_0 U^\dagger] = \text{Tr} [A^{\text{S}} \rho(t)] = \sum_i a_i p(a_i, t); \quad (2.16c)$$

$$\circ p(a_i, t) = \text{Tr} [A_i^{\text{H}} \rho_0] = \text{Tr} [A_i^{\text{S}} U \rho_0 U^\dagger] = \text{Tr} [A_i^{\text{S}} \rho(t)]. \quad (2.16d)$$

onde utilizamos da propriedade cíclica do traço⁶ e da evolução dos projetores $A_i^{\text{H}} = U^\dagger A_i^{\text{S}} U$. Iremos denotar daqui por diante os operadores de Heisenberg a partir de uma dependência explícita do tempo $A^{\text{H}} \equiv A(t)$, assim como seus projetores $A_i^{\text{H}} \equiv A_i(t)$. Já os operadores de Schrödinger e seus projetores serão escritos sem a dependência temporal, $A^{\text{S}} \equiv A$ e $A_i^{\text{S}} \equiv A_i$, respectivamente.

A medição de uma grandeza física \mathcal{A} sobre um sistema, representada algebricamente pelo observável A e pelo operador densidade $\rho \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, tem como resultado um dos possíveis autovalores a_i de A , projetando o estado do sistema para o autovetor associado de a_i na forma

⁶ $\text{Tr}(ABCD) = \text{Tr}(DABC)$.

$$\rho_{|i} := \frac{(A_i \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}})\rho(A_i \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}})^\dagger}{\text{Tr}[(A_i \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}})\rho(A_i \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}})^\dagger]} = A_i \otimes \rho_{\mathcal{B}|i} \quad (2.17)$$

sendo $\rho_{\mathcal{B}|i} = \langle a_i | \rho | a_i \rangle / p(a_i)$ e $p(a_i) = \text{Tr}[(A_i \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}})\rho]$. Este é o chamado *estado colapsado* e reparamos que sua estrutura é construída a fim de resultar em um estado normalizado correspondente à saída obtida experimentalmente. Para o caso de autoestados degenerados a relação se mantém, ao passo que sendo d_i o grau de degenerescência de $|a_i\rangle$, teremos para o projetor $A_i = \sum_g^{d_i} |a_i^g\rangle\langle a_i^g|$.

Essa é a descrição para medições denominadas projetivas - uma vez que utilizam de operadores construídos a partir de projetores - e seletivas, as quais envolvem a leitura do valor obtido no processo. Existem outros tipos de medições no que tange tanto ao conhecimento do observador sobre o estado do sistema após o colapso, quanto ao uso de uma classe mais geral de operadores, as chamadas *medições com operador positivo valorado* (POVMs).

2.2 Pré-medição e POVMs

Antes de estudarmos a generalização para descrever os processos de medição, é pertinente apresentarmos um protocolo fundamental para adaptar grande parte dos sistemas e medições elaborados em teoria para seus processos físicos experimentais correspondentes. Na prática, quando queremos aferir uma grandeza física recorreremos muitas vezes à aquisição da informação sobre uma quantidade correlacionada. É o caso na Mecânica Clássica ao investigarmos, por exemplo, a *velocidade* de um objeto, onde o que realizamos são medições de sua *posição* em instantes sucessivos e logo então somos capazes de aferir a grandeza de interesse. Ou na Mecânica Quântica se pretendemos descobrir o *spin* de uma partícula observamos após esta interagir com um aparato Stern-Gerlach em qual *posição* cintilará em um anteparo medidor. De forma ainda mais específica, não acessamos durante uma medição as propriedades de um sistema de interesse diretamente, mas o estado do aparato que utilizamos para a observação. Os sistemas quânticos tornam ainda mais evidente este caráter, no qual nós observadores não acessamos diretamente o objeto de estudo, tal como o estado de uma partícula, mas as propriedades do aparelho medidor após interagir com este objeto, ou seja, a posição de um ponteiro ou o cintilar de um sensor.

Assim, não se mede o estado de uma partícula, mas uma grandeza física (ou um grau de liberdade físico). Este grau de liberdade pode ser externo (como posição ou momentum) ou interno (como spin). O ponto central em um processo de medição é gerar uma correlação deste grau de liberdade microscópico com um “ponteiro” macroscópico (que já traz em sua estrutura interna um processo de amplificação do sinal microscópico). Quando medimos corrente elétrica através de um amperímetro, temos um aparato que correlaciona

a quantidade de elétrons por segundo que passa por um fio com a posição angular de um ponteiro (para um amperímetro analógico) ou com os números que aparecem num display (amperímetro digital). Para que o amperímetro funcione adequadamente ele precisa de um processo de amplificação interno (ele usa uma bateria que fornece a energia necessária para mover o ponteiro em escala macroscópica, mesmo quando a corrente é em escala microscópica). De todo modo, o ponto central é o estabelecimento de correlações.

Em um modelo proposto por von Neumann a teoria incorpora não apenas o estado ρ do sistema de interesse, mas também o estado Λ do aparato medidor da grandeza \mathcal{A} em questão. Para isto, assumimos as seguintes premissas [21, 22]:

1. É possível obter informações sobre o estado de um sistema estudando sua interação com um aparato medidor.
2. Antes de iniciar o experimento, não há correlação entre o sistema e o aparato.
3. Depois que ocorre a interação entre sistema e aparato, de forma reprodutível e confiável, haverá um estado correlacionado comum entre eles.
4. É sempre possível, a princípio, que haja um aparato que meça uma quantidade física sem que a altere ao longo do experimento.

A primeira premissa permite descrever a evolução do aparato a partir de um sistema quântico, embora não explique como a medição conduz a um resultado em específico.

Consideremos o estado bipartido $\rho \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, a partir de 2 poderemos descrevê-lo no instante inicial t_0 na base $\{|a_i\rangle\}$ do observável $A = \sum_i a_i |a_i\rangle\langle a_i|$. Utilizando da relação de completeza $\sum_i |a_i\rangle\langle a_i| = \mathbb{I}_{\mathcal{A}}$, e do operador identidade estendido $\tilde{\mathbb{I}} = \mathbb{I}_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}}$, teremos

$$\tilde{\mathbb{I}} \rho(t_0) \tilde{\mathbb{I}} = \sum_{i,k} |a_i\rangle\langle a_k| \otimes \langle a_i|\rho|a_k\rangle = \sum_{i,k} |a_i\rangle\langle a_k| \otimes \rho_{\mathcal{B}|ik}. \quad (2.18)$$

Assumimos que o aparato é inicializado no estado puro $\Lambda(t_0) = |\lambda\rangle\langle\lambda| \in \mathcal{C}$, de maneira a construirmos o estado composto e separável

$$\Omega(t_0) = \rho(t_0) \otimes \Lambda(t_0) = \sum_{i,k} |a_i\rangle\langle a_k| \otimes \rho_{\mathcal{B}|ik} \otimes |\lambda\rangle\langle\lambda|. \quad (2.19)$$

A partir de 3 somos capazes de emaranhar o estado do aparato com o do sistema. Uma evolução unitária generalizada é composta pelos termos

$$U = U_{\mathcal{A}} \otimes U_{\mathcal{B}} \otimes U_{\mathcal{C}} \otimes U_{ABC}, \quad (2.20)$$

com os subíndices correspondendo aos espaços vetoriais pertencentes e sobre os quais as evoluções irão atuar. Durante um intervalo de tempo curto, admitimos que a interação entre os subsistemas é mais significativa, de modo que podemos desprezar evoluções livres

individuais, e a evolução predominante será dada por $U_{\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}}$. Propondo uma hamiltoniana de interação na forma

$$H(t) = \varepsilon g(t) A_{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{B}} \otimes C_{\mathcal{C}}, \quad (2.21)$$

com $\varepsilon \in (0, 1)$ um parâmetro que descreva a intensidade da interação entre o sistema e o aparato, e $g(t)$ uma função temporal definida a partir de $\int_0^t dt' g(t') = 1$, teremos o operador de evolução temporal $U(t) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' H(t')\right]$. O operador $C_{\mathcal{C}}$ será responsável por transferir a informação da medição \mathcal{A} sobre o sistema de interesse para o estado do aparato a partir da evolução do estado $\Omega(t_0)$,

$$\Omega(t) = U(t)\Omega(t_0)U^\dagger(t) = \sum_{i,k} |a_i\rangle\langle a_k| \otimes \rho_{\mathcal{B}|ik} \otimes |\lambda + \varepsilon a_i\rangle\langle \lambda + \varepsilon a_k| \quad (2.22a)$$

$$= \sum_{i,k} |a_i\rangle\langle a_k| \otimes \rho_{\mathcal{B}|ik} \otimes |\lambda_i\rangle\langle \lambda_k|, \quad (2.22b)$$

tendo $|\lambda_i\rangle := |\lambda + \varepsilon a_i\rangle$ e de forma análoga para $\langle \lambda_k|$.

Notemos que agora o estado $\Omega(t)$ está emaranhado, sendo denominado de *estado de pré-medição de von Neumann*, uma vez que ainda não houve colapso. Um exemplo para o observável $C_{\mathcal{C}}$ é o operador momentum linear, o qual, dado o estado $\Lambda = |x_0\rangle\langle x_0|$ do aparato, será responsável pela translação de sua posição em $|x_0 + \varepsilon a_i\rangle\langle x_0 + \varepsilon a_k|$. Veremos no próximo capítulo como esta dinâmica é utilizada para implementar o critério de macro-realismo.

O estado $\Omega(t)$ está no cerne do chamado *problema da medição*, uma vez que por *aparato* entendemos um mecanismo macroscópico descrito por um estado bem definido, enquanto que (2.22a) indica que o ponteiro está numa superposição no espaço estendido. Um ponto importante a ser notado, porém, é que no processo de medição o grau de liberdade de interesse é inacessível (afinal, é por isso que usamos a correlação com o ponteiro) e pode ser traçado. Após a aplicação do traço parcial sobre o sistema \mathcal{A} , teremos uma mistura estatística para o estado do ponteiro, o que indica um estado probabilístico típico da física clássica estatística.

Agora estamos aptos para estudar medições não-projetivas. Apresentada por Jauch e Piron [23], as *medições com operador positivo valorado* (POVM em inglês) nos permitem obter as probabilidades (2.7) ainda que não utilizemos dos projetores.

Seja M um POVM que possa assumir um conjunto de valores referentes às saídas possíveis de um processo de medição. Visto que dentre estes valores se encontra m , e que a medição desta saída seja descrita pelo operador Π_m sobre um estado ρ_0 , a probabilidade de ocorrer o resultado m será

$$p(m) = \text{Tr}\left(\Pi_m^\dagger \Pi_m \rho_0\right) = \text{Tr}(E_m \rho_0), \quad (2.23)$$

da qual definiremos o $E_m = \Pi_m^\dagger \Pi_m$, de modo que $M := \{E_m\}$. Estes efeitos terão as propriedades de completeza $\sum_m E_m = \mathbb{I}$ e positividade, de maneira que o conjunto $\{E_m\}$ será suficiente para determinar as probabilidades para diferentes valores do POVM M , de modo que $\sum_m p(m) = \sum_m \text{Tr}(E_m \rho) = 1$.

Dada a leitura do valor m , o estado do sistema irá colapsar para

$$\rho_{|m} = \frac{\Pi_m \rho_0 \Pi_m^\dagger}{p(m)}. \quad (2.24)$$

Os operadores Π_m distinguem-se dos projetores uma vez que não é exigido sua ortogonalidade e hermiticidade. Uma vez que estas propriedades garantem respectivamente discernir estados distintos e autovalores reais, podemos nos perguntar o que fisicamente um POVM nos retorna e, ademais, quais suas vantagens experimentais.

Vejamos um exemplo no qual os POVMs oferecerem uma melhor capacidade de desempenhar determinadas tarefas, tais como a distinção de estados não ortogonais [24], quando comparados com as medições projetivas. Consideremos os estados $|\psi_1\rangle = |0\rangle\langle 0|$ como autoestado do observável spin na direção \hat{z} e $|\psi_2\rangle = |+\rangle\langle +|$ como autoestado do observável spin na direção \hat{x} , o qual reescrito na base de \hat{z} será $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.

Construindo um *ensemble* destes estados com iguais probabilidades $\rho = \frac{1}{2}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle\langle\psi_2|$, estamos interessados em distinguir com apenas uma medição qual estado foi medido. Fazendo uso de medições projetivas teríamos $p(1) = \text{Tr}(|1\rangle\langle 1| \rho) = 25\%$ de chances de obtermos o vetor $|1\rangle$, logo saberíamos que o estado medido foi $|\psi_2\rangle$, e $p(0) = \text{Tr}(|0\rangle\langle 0| \rho) = 75\%$ de chances de obtermos o vetor $|0\rangle$, embora agora não conseguíssemos inferir qual dos estados foram sondados. Se construirmos agora os operadores [25, 26]

$$E_\alpha = \alpha |1\rangle\langle 1| \quad (2.25a)$$

$$E_\beta = \beta(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|) \quad (2.25b)$$

$$E_\gamma = \mathbb{I} - E_\alpha - E_\beta \quad (2.25c)$$

com $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ e $\beta = \frac{\alpha}{2}$, teremos $p(\alpha) = \text{Tr}(E_\alpha \rho) = 14,6\%$ de chances de obtermos o autovalor α correspondente ao estado $|\psi_2\rangle$ - uma vez que $\text{Tr}(E_\alpha |\psi_1\rangle\langle\psi_1|) = 0$ - e $p(\beta) = \text{Tr}(E_\beta \rho) = 14,6\%$ de chances de obtermos o autovalor β , indicando que o estado medido foi $|\psi_1\rangle$ visto que $\text{Tr}(E_\beta |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) = 0$. Contudo, o restante da probabilidade reside sobre o efeito E_γ com uma taxa de $p(\gamma) = \text{Tr}(E_\gamma \rho) = 70,8\%$ de ocorrência. Ainda assim possuímos uma chance maior (29,2%) de distinguirmos ambos os estados em comparação com a probabilidade de 25% ao aplicar os projetores.

Estaremos interessados agora em responder como os efeitos de um POVM podem ser reproduzidos experimentalmente. Para isso, consideremos o estado inicial separável $\Omega(t_0) = \rho(t_0) \otimes \Lambda(t_0)$ e sua evolução unitária $\Omega(t) = U(t, t_0)\Omega(t_0)U(t, t_0)^\dagger$. Dado o pro-

jetor estendido $\tilde{C}_n = \mathbb{I}_{\mathcal{H}} \otimes |c_n\rangle\langle c_n|$, com $\mathcal{H} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ o espaço vetorial de $\rho(t_0) \equiv \rho_0$, a probabilidade de observarmos a saída c_n associada ao estado $|c_n\rangle$ do aparato será

$$p(c_n) = \text{Tr}[\tilde{C}_n \Omega(t)] = \text{Tr}[\tilde{C}_n U(\rho_0 \otimes |\lambda\rangle\langle\lambda|)U^\dagger] \quad (2.26a)$$

$$= \text{Tr}_{\mathcal{H}}(\langle c_n|U|\lambda\rangle\rho_0\langle\lambda|U^\dagger|c_n\rangle) = \text{Tr}_{\mathcal{H}}(\Pi_n^\dagger \Pi_n \rho_0), \quad (2.26b)$$

na qual $\Pi_n := \langle c_n|U|\lambda\rangle$ e $\Pi_n^\dagger := \langle\lambda|U^\dagger|c_n\rangle$.

Após a leitura de uma medida projetiva com resultado c_n o sistema emaranhado irá colapsar para

$$\Omega_{|n}(t) = \frac{\tilde{C}_n \Omega(t) \tilde{C}_n}{\text{Tr}(\tilde{C}_n \Omega(t) \tilde{C}_n)} = \frac{\Pi_n \rho_0 \Pi_n^\dagger}{p(c_n)} \otimes |c_n\rangle\langle c_n|. \quad (2.27)$$

Tomando o traço deste estado colapsado com relação ao espaço \mathcal{C} do aparato obtemos

$$\frac{\Pi_n \rho_0 \Pi_n^\dagger}{p(c_n)} = \rho_{|n}, \quad (2.28)$$

o qual é exatamente o estado pós-medição de um elemento POVM (2.24), onde agora os operadores Π_n contém informação acerca da evolução temporal. Portanto, uma medição POVM é feita através da correlação entre o sistema de interesse com um aparato seguido de uma medição projetiva sobre este aparato. O efeito resultante sobre o sistema (não medido) é equivalente ao de um POVM.

Todas as medições que estudamos até agora foram reveladas ou ditas seletivas, nas quais houve a aquisição (leitura) da informação do valor da medição. Para o caso de, após o colapso, não lermos seu resultado, a melhor descrição para o estado pós-medição será uma mistura de todos os possíveis estados colapsados na forma

$$\rho_n = \sum_n \Pi_n \rho \Pi_n^\dagger. \quad (2.29)$$

Este é o caso geral descrito por um POVM. Para o caso de medidas projetivas teríamos $E_n = \Pi_n^\dagger \Pi_n = \Pi_n \equiv N_n$, com N_n o projetor associado ao observável N . Veremos no próximo capítulo como as medições não-seletivas podem ser uma importante ferramenta para o cálculo do realismo de uma grandeza física.

2.3 Teoria da Informação

Estaremos agora interessados em responder a seguinte questão: qual função matemática devemos adotar se quisermos associar uma medida de informação à ocorrência de um determinado evento? [27]. Por *evento*, nos referimos a um dos possíveis valores assumidos por uma variável. Então, por exemplo, supondo a face de uma moeda como uma variável, ao lançá-la teremos uma probabilidade de 50% de obtermos o evento *cara*, e a mesma chance para o evento *coroa*. Uma primeira intuição para responder essa pergunta é a de que eventos que ocorrem frequentemente (muito prováveis) não nos fornecem muita informação. Neste sentido o nascer do sol, embora sempre dotado de uma beleza única, é um evento com o qual estamos familiarizados, logo sua ocorrência não nos causa surpresa. Por outro lado, se viajássemos para um lugar com fuso horário diferente sem ajustarmos o relógio, nos chamaria atenção não nos depararmos com o nascer do sol no horário de costume. Visto que este evento é pouco frequente (pouco provável), sua ocorrência nos provoca surpresa. Somos levados então a quantificar a informação I como sendo a recíproca da probabilidade p de um evento ocorrer, $I = \frac{1}{p}$.

É natural exigirmos desta função que ela seja aditiva para eventos independentes. Tendo o conhecimento de dois destes eventos x e y , relacionados às respectivas variáveis X e Y , a informação conjunta obtida será $I(x, y) = I(x) + I(y)$. Considerando agora X e Y como variáveis aleatórias, a teoria de probabilidades nos fornece que a probabilidade conjunta de eventos independentes é o produto de suas probabilidades individuais, $p(x, y) = p(x)p(y)$. Mas isso implica na não-aditividade da informação conjunta $I(x, y) = \frac{1}{p(x,y)} = \frac{1}{p(x)p(y)} \neq \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p(y)} = I(x) + I(y)$. Esta propriedade pode ser restaurada aplicando a função logaritmo à recíproca da probabilidade

$$I := \log_2 \left(\frac{1}{p} \right) = \log_2(p)^{-1} = -\log_2(p), \quad (2.30)$$

de forma que $\log_2 p(x)p(y) = \log_2 p(x) + \log_2 p(y)$. A base para o logaritmo pode ser escolhida da forma que convier, dessa forma utilizamos a base dois pois estamos interessados em medir a informação em *bits*, ao passo que tomando conhecimento de um evento que tem a probabilidade $p = \frac{1}{2}$ de ocorrer, ganhamos 1 bit de informação, $I = -\log_2(1/2) = 1$.

Considerando X uma variável aleatória que possa assumir um conjunto discreto e finito de valores $\{x_p\}$ com respectivas probabilidades $p(x_p)$, podemos medir a incerteza média dessa variável utilizando a média da informação sobre os seus valores individuais e suas probabilidades associadas como sendo

$$H(X) = \sum_p p(x_p) I(x_p) = - \sum_p p(x_p) \log_2 p(x_p). \quad (2.31)$$

Esta função é denominada de *entropia de Shannon* e constituiu a base para a teoria clássica

da informação. Na teoria de informação clássica, a *entropia conjunta* para duas variáveis X e Y responsável por medir a ignorância total sobre este par é definida como $H(X, Y) = -\sum_{p,q} p(x_p, y_q) \ln p(x_p, y_q)$, a qual tem a propriedade de subaditividade, $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$.

Uma vez que saibamos os valores y_q e suas probabilidades, conhecemos a quantidade $H(Y)$, e assim podemos inferir sobre a ignorância, em média, que temos sobre o ensemble X dado o conhecimento de Y . Esta é a *entropia condicional* $H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y)$, que será nula quando Y for uma função de X . A partir destes conceitos conseguimos calcular a *informação mútua*, a qual mede o quanto de informação X e Y tem em comum, sendo $I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$, ou na forma $J(X : Y) = H(X) - H(X|Y)$.

No âmbito da Mecânica Quântica, a incerteza (ignorância) sobre o estado ρ de um sistema pode ser calculada a partir de uma função semelhante à entropia de Shannon. Utilizando a função traço, a qual independe de uma base característica, essa função será definida como

$$\mathbf{S}(\rho) := -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho), \quad (2.32)$$

sendo denominada de *entropia de von Neumann*. Ao longo deste trabalho utilizaremos a base natural para o logaritmo implicando em $\mathbf{S}(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$, cuja unidade é *nat*.

Esta entropia terá as propriedades de **(i)** não-negatividade; **(ii)** invariância sob transformações unitárias do sistema; **(iii)** valor máximo igual a $\ln d$, sendo d a dimensão do espaço de Hilbert em questão, ocorrendo quando o estado for maximamente misturado, $\rho = \frac{\mathbb{I}}{d}$; **(iv)** a entropia de uma mistura será maior do que a média das entropias sobre cada estado individual, $\mathbf{S}(\sum_n p_n \rho_n) \geq \sum_n p_n \mathbf{S}(\rho_n)$; **(v)** para um estado bipartido ρ_{AB} ⁷ teremos a subaditividade $\mathbf{S}(\rho_{AB}) \leq \mathbf{S}(\rho_A) + \mathbf{S}(\rho_B)$, ocorrendo a igualdade para estados separáveis e **(vi)** a subaditividade forte para estados tripartidos $\mathbf{S}(\rho_{ABC}) + \mathbf{S}(\rho_B) \geq \mathbf{S}(\rho_{AB}) + \mathbf{S}(\rho_{BC})$.

A informação será uma grandeza complementar da entropia. Como um espaço de Hilbert pode ter como entropia máxima $\ln d$, teremos como *informação disponível* a quantidade $I(\rho) = \ln d - \mathbf{S}(\rho)$. Quando for maximamente misturado, $\rho = \frac{\mathbb{I}}{d}$, sua entropia será máxima e a informação disponível nula, $I(\rho) = 0$. Os ensembles puros $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ possuem entropia zero, uma vez que temos o conhecimento total de sua preparação⁸, dessa forma a informação disponível para estes conjuntos será máxima, $I(\rho) = \ln d$.

No âmbito da informação quântica, a noção de *informação mútua* $J_{\mathcal{A}:\mathcal{B}}(\rho)$ para dado estado bipartido $\rho \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, exige que realizemos medições sobre o subsistema $\rho_{\mathcal{B}}$, para assim inferirmos sobre a *entropia condicional* $\mathbf{S}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$. Estas medições serão correspondentes à um observável na forma $B = \sum_j b_j B_j$ atuando sobre o espaço \mathcal{B} , o qual após a saída b_j colapsará o estado para

⁷Deixaremos subentendido a notação de produto tensorial $\rho_{AB} \equiv \rho_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$

⁸ $\mathbf{S}(|\psi\rangle\langle\psi|) = -\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \ln(|\psi\rangle\langle\psi|)) = 0$.

$$\rho_{\mathcal{A}|j} = \frac{\langle b_j | \rho | b_j \rangle}{\text{Tr}(B_j \rho)}. \quad (2.33)$$

Decorrem então as relações $J_{\mathcal{A}:\mathcal{B}}(\rho) = \mathbf{S}(\rho_{\mathcal{A}}) - \mathbf{S}(\rho_{\mathcal{A}|\mathcal{B}})$ e $I_{\mathcal{A}:\mathcal{B}}(\rho) = \mathbf{S}(\rho_{\mathcal{A}}) + \mathbf{S}(\rho_{\mathcal{B}}) - \mathbf{S}(\rho)$, sendo que a primeira quantifica a informação mútua usando as medições em \mathcal{B} , enquanto a segunda não exige qualquer tipo de medição. Como classicamente não há diferença entre ambas as quantidades, visto que a informação não é alterada pelas medições de $Y - I(X : Y) = J(X : Y) -$, teremos que essa diferença entre as representações da informação mútua para sistemas quânticos servirá como um quantificador da correlação quântica entre os mesmos, a qual deve ser destruída após o colapso (resultando na igualdade clássica). A esta diferença damos o nome de *discórdia*,

$$D_B(\rho) = I_{\mathcal{A}:\mathcal{B}}(\rho) - J_{\mathcal{A}:\mathcal{B}}(\rho) \quad (2.34a)$$

$$= \mathbf{S}(\rho_{\mathcal{B}}) - \mathbf{S}(\rho) + \mathbf{S}(\rho_{\mathcal{A}|\mathcal{B}}), \quad (2.34b)$$

a qual irá indicar correlações genuinamente quânticas, fruto da sensibilidade do estado global ρ com relação às medidas locais de \mathcal{B} . Veremos no próximo capítulo como estas quantidades podem nos fornecer uma métrica para calcularmos a irrealidade de uma grandeza física.

2.4 Representação de Bloch

Os *qubits* são sistemas de dois níveis expressos na forma $|\psi\rangle = c_0 |0\rangle + c_1 |1\rangle$, em que $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ e $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$. Reescrevendo os coeficientes na forma complexa polar, $|\psi\rangle = r_0 e^{i\phi_0} |0\rangle + r_1 e^{i\phi_1} |1\rangle$, com $r_0, \phi_0, r_1, \phi_1 \in \mathbb{R}$ e multiplicando por uma fase global ⁹ $e^{-i\phi_0}$, teremos o estado

$$|\psi\rangle = r_0 |0\rangle + r_1 e^{i\phi} |1\rangle, \quad (2.35)$$

para o qual $\phi = (\phi_1 - \phi_0)$. Uma vez que este estado é normalizado, o que implica que $|r_0|^2 + |r_1|^2 = 1$, podemos parametrizar os coeficientes na forma

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (2.36)$$

⁹Fases globais não distinguem estados, uma vez que as probabilidades serão preservadas; e. g., no caso dos estados $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle = e^{i\phi} |\psi\rangle$. Dado o observável $A = \sum_i a_i A_i$, a probabilidade de obtenção do valor a_i para os respectivos estados será:

$$p(a_i | |\psi\rangle) = \langle \psi | A_i | \psi \rangle \quad \text{e} \quad p(a_i | |\psi'\rangle) = \langle \psi | e^{-i\phi} A_i e^{i\phi} | \psi \rangle = \langle \psi | A_i | \psi \rangle.$$

| θ | ϕ | $ \psi\rangle$ | \hat{r} |
|-----------------|------------------|---|------------|
| 0 | 0 | $ 0\rangle$ | $+\hat{z}$ |
| π | 0 | $ 1\rangle$ | $-\hat{z}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 0 | $\frac{ 0\rangle+ 1\rangle}{\sqrt{2}}$ | $+\hat{x}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{ 0\rangle- 1\rangle}{\sqrt{2}}$ | $-\hat{x}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{ 0\rangle+i 1\rangle}{\sqrt{2}}$ | $+\hat{y}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{ 0\rangle-i 1\rangle}{\sqrt{2}}$ | $-\hat{y}$ |

Tabela 2.1: Ângulos θ e ϕ associados aos autoestados dos observáveis spin nas direções canônicas, utilizando $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ como kets de base.

com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

É possível representar estes estados como sendo os pontos que constituirão uma esfera no espaço \mathbb{R}^3 , a chamada esfera de Bloch. Cada ponto pode ser localizado a partir de um vetor

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta). \quad (2.37)$$

Os estados $|\psi\rangle$ possuirão seus respectivos vetores com norma unitária $\hat{r} = \vec{r}/|r|$, formando deste modo a casca da esfera. Admitindo $|0\rangle$ e $|1\rangle$ como os vetores de base, teremos alguns pontos importantes correspondentes aos autoestados de cada observável de spin nas direções canônicas, apresentados na tabela 2.1.

Utilizando do vetor de Pauli $\vec{\sigma} := \sigma_x \hat{x} + \sigma_y \hat{y} + \sigma_z \hat{z}$, cujas componentes são representadas pelas matrizes

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e da matriz identidade de ordem dois \mathbb{I}_2 , o operador densidade correspondente ao ensemble puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ pode ser escrito como

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.38a)$$

$$\doteq \begin{pmatrix} \cos^2(\frac{\theta}{2}) & e^{-i\phi} \cos(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\theta}{2}) \\ e^{i\phi} \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2}) & \sin^2(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad (2.38b)$$

$$\doteq \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{e^{-i\phi} \sin\theta}{2} \\ \frac{e^{i\phi} \sin\theta}{2} & \frac{1-\cos\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (2.38c)$$

$$\doteq \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \cos\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \sin\phi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \quad (2.38d)$$

$$\doteq \frac{1}{2} (\mathbb{I}_2 + \hat{r} \cdot \vec{\sigma}). \quad (2.38e)$$

Agora para uma representação geral de ensembles mistos $\rho = \sum_n p_n \rho_n$, o qual escrito

em sua própria autobase terá ρ_n descrevendo estados puros ortogonais, usaremos das propriedades de hermiticidade e do traço unitário da matriz densidade para construir uma representação semelhante ao caso dos ensembles puros. Uma matriz genérica que respeite ambas as propriedades assumirá a forma

$$\begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & 1 - a \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Os vetores \hat{r}_n associados aos estados ρ_n serão expressos de forma análoga ao caso puro,

$$\rho_n \doteq \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + \hat{r}_n \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.40a)$$

$$\Rightarrow \rho = \sum_n p_n \rho_n \doteq \frac{1}{2} \left[\mathbb{I}_2 + \sum_n p_n \vec{r}_n \cdot \vec{\sigma} \right] \quad (2.40b)$$

$$\doteq \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.40c)$$

$$\doteq \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - i r_y \\ r_x + i r_y & 1 - r_z \end{pmatrix}, \quad (2.40d)$$

Esta matriz, como vimos, será capaz de representar qualquer operador densidade, seja ele puro ou misto¹⁰, contando com os autovalores

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \right). \quad (2.41)$$

Uma vez que o operador densidade deve ser positivo semidefinido, segue que seus autovalores serão não-negativos, $\lambda_{\pm} \geq 0$, o que implica que $0 \leq r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \leq 1$, ou seja, todo operador densidade misto estará representado por um ponto no interior de uma esfera de raio unitário (figura 2.1).

Os operadores de spin também podem compartilhar dessa representação de Bloch, mas agora com algumas sutilezas. Seja $S(\hat{v})$ o operador de spin na direção $\hat{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\sin \nu \cos \varphi, \sin \nu \sin \varphi, \cos \nu)$, podemos representá-lo em termos das matrizes de Pauli na forma

$$S(\hat{v}) \doteq \frac{\hbar}{2} \hat{v} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.42a)$$

$$\doteq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} v_z & v_x - i v_y \\ v_x + i v_y & -v_z \end{pmatrix} \quad (2.42b)$$

$$\doteq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \nu & \sin \nu e^{-i\varphi} \\ \sin \nu e^{+i\varphi} & -\cos \nu \end{pmatrix}, \quad (2.42c)$$

¹⁰Reescrevendo $a = \frac{1}{2}(1 + r_z)$, $1 - a = \frac{1}{2}(1 - r_z)$, $b = r_x$ e $c = r_y$ retornamos a matriz (2.40) na forma (2.39).

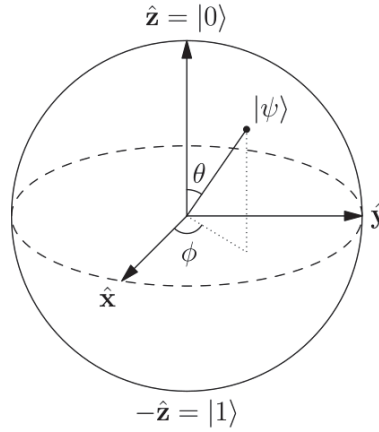


Figura 2.1: Esfera de Bloch. Nela o estado do ensemble é representado por um vetor no interior da esfera (ensemble misto) e sobre sua casca (ensemble puro). Nos eixos ortogonais \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} encontramos os autoestados dos observáveis $S(\hat{x})$: $|+\rangle$, $|-\rangle$, $S(\hat{y})$: $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ e $S(\hat{z})$: $|0\rangle$, $|1\rangle$. Fonte: Wikipedia¹¹.

cujos autovalores serão $\pm \frac{\hbar}{2}$ e autovetores

$$|\hat{v}; 0\rangle = \cos\left(\frac{\nu}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\nu}{2}\right) e^{i\varphi} |1\rangle, \quad (2.43a)$$

$$|\hat{v}; 1\rangle = -\sin\left(\frac{\nu}{2}\right) e^{-i\varphi} |0\rangle + \cos\left(\frac{\nu}{2}\right) |1\rangle. \quad (2.43b)$$

A partir dos autovalores podemos construir os projetores de $S(\hat{v}) = \frac{\hbar}{2}S_0(\hat{v}) + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)S_1(\hat{v})$,

$$S_0(\hat{v}) = |\hat{v}; 0\rangle\langle\hat{v}; 0| \quad (2.44a)$$

$$\doteq \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + \hat{v} \cdot \vec{\sigma}); \quad (2.44b)$$

$$S_1(\hat{v}) = |\hat{v}; 1\rangle\langle\hat{v}; 1| \quad (2.44c)$$

$$\doteq \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 - \hat{v} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.44d)$$

ou denotados simultaneamente por $S_v \doteq \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + v\hat{v} \cdot \vec{\sigma})$ e $S(\hat{v}) = \sum_v v \frac{\hbar}{2} S_v$, com $v \in \{-1, 1\}$.

A dinâmica do operador $S(\hat{v})$ para uma interação descrita pela hamiltoniana $H = \omega S(\hat{h})$, com ω correspondendo à frequência de precessão de Larmor, se dará na forma

$$S(\hat{v}, t) = U_t^\dagger S(\hat{v}) U_t \quad (2.45a)$$

$$= e^{\frac{iHt}{\hbar}} S(\hat{v}) e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \quad (2.45b)$$

$$\doteq \frac{\hbar}{2} e^{\frac{i\hbar \cdot \vec{\sigma} \tau}{2}} \hat{v} \cdot \vec{\sigma} e^{-\frac{i\hbar \cdot \vec{\sigma} \tau}{2}}, \quad (2.45c)$$

¹¹Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Bloch_sphere>. Acesso: 18 de fevereiro de 2022.

com $\tau = \omega t$. Podemos escrever a exponencial como [28]

$$e^{i\alpha(\hat{h}\cdot\vec{\sigma})} = \mathbb{I}_2 \cos \alpha + i(\hat{h} \cdot \vec{\sigma}) \sin \alpha, \quad (2.46)$$

e fazendo uso do produto interno

$$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\mathbb{I}_2 + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}, \quad (2.47)$$

teremos

$$S(\hat{v}, t) \doteq \frac{\hbar}{2} \left\{ \left[\mathbb{I}_2 \cos \left(\frac{\tau}{2} \right) + i(\hat{h} \cdot \vec{\sigma}) \sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \right] \hat{v} \cdot \vec{\sigma} \left[\mathbb{I}_2 \cos \left(\frac{\tau}{2} \right) - i(\hat{h} \cdot \vec{\sigma}) \sin \left(\frac{\tau}{2} \right) \right] \right\} \quad (2.48a)$$

$$\doteq \frac{\hbar}{2} \{ \cos \tau \hat{v} + \sin \tau (\hat{v} \times \hat{h}) + [1 - \cos \tau](\hat{h} \cdot \hat{v})\hat{h} \} \cdot \vec{\sigma} \quad (2.48b)$$

$$\doteq \frac{\hbar}{2} \vec{v}(\tau) \cdot \vec{\sigma}, \quad (2.48c)$$

em que $\vec{v}(\tau) \equiv \{ \cos \tau \hat{v} + \sin \tau (\hat{v} \times \hat{h}) + [1 - \cos \tau](\hat{h} \cdot \hat{v})\hat{h} \}$.

De posse de uma preparação sobre a qual não temos informação sobre seu estado ρ , podemos realizar uma sondagem experimental de modo a construirmos sua matriz densidade, num processo chamado de *tomografia*. Para o caso do spin, esta reconstrução é obtida adquirindo-se informação sobre os operadores $S(\hat{x})$, $S(\hat{y})$ e $S(\hat{z})$ a partir dos dados experimentais obtidos com suas respectivas medições. A probabilidade de obtermos o autovalor u para o operador $S(\hat{u})$ será $p(u) = \text{Tr}(S_u \rho)$ e o seu valor médio

$$\langle S(\hat{u}) \rangle = \sum_u u \frac{\hbar}{2} p(u) = \sum_u u \frac{\hbar}{2} \text{Tr}(S_u \rho) = \text{Tr} \left(\sum_u u \frac{\hbar}{2} S_u \rho \right) = \text{Tr} (S(\hat{u}) \rho). \quad (2.49)$$

No caso das matrizes de Pauli, temos que

$$\langle S(\hat{x}) \rangle = \text{Tr} (S(\hat{x}) \rho) \doteq \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - i r_y \\ r_x + i r_y & 1 - r_z \end{pmatrix} \right] = r_x, \quad (2.50a)$$

$$\langle S(\hat{y}) \rangle = \text{Tr} (S(\hat{y}) \rho) \doteq \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - i r_y \\ r_x + i r_y & 1 - r_z \end{pmatrix} \right] = r_y, \quad (2.50b)$$

$$\langle S(\hat{z}) \rangle = \text{Tr} (S(\hat{z}) \rho) \doteq \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - i r_y \\ r_x + i r_y & 1 - r_z \end{pmatrix} \right] = r_z. \quad (2.50c)$$

Após uma série de medições experimentais é tomado o valor médio dessas saídas e construído as componentes teóricas associadas, r_x , r_y e r_z , a partir das quais caracterizamos, em média, a matriz densidade ρ associada. Dessa forma, quanto maior o número de medições maior será a precisão ao apurar ρ .

Utilizaremos este conceito de tomografia no próximo capítulo quando propusermos um protocolo como critério de realismo. A representação de Bloch também nos será útil quando tratarmos de observáveis dicotômicos, ou seja, grandezas que possam assumir dois valores.

3 Critérios de Realismo

3.1 Realismo de EPR

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen [4] publicaram um trabalho no qual propunham as condições necessárias para que uma teoria fosse dita *correta e completa*, definindo-as como

- Correta: referente ao quanto das previsões propostas pela teoria podem ser confirmadas pelas observações experimentais.
- Completa: na qual cada elemento da realidade física deve possuir uma contraparte na teoria física.

Concordando com o sucesso da Mecânica Quântica (MQ) em descrever os fenômenos experimentais, os autores colocaram em debate sua completeza. Para mostrar que a MQ é incompleta, a ideia de EPR foi simplesmente mostrar que um elemento de realidade não possui uma contraparte na teoria. Os autores seguiram introduzindo uma condição suficiente para identificar um elemento de realidade física.

- Elemento de realidade - EPR: se, sem perturbar o sistema, pudermos prever com certeza (probabilidade igual a um) o valor de uma quantidade física, então existe um elemento de realidade associado a essa quantidade.

Inspirado neste critério, Redhead [29] propôs uma formulação explicitando o caráter temporal:

- Elemento de realidade - Redhead: se pudermos prever com certeza o resultado da medição de uma quantidade física no tempo t , então, neste instante, existe um elemento de realidade correspondente a esta quantidade física e com valor igual ao resultado previsto para a medição.

Segundo EPR, pelo simples fato de prever (probabilidade unitária) um resultado experimental de uma grandeza física, a realidade desta quantidade já é concretizada, ao passo que se efetuarmos sua observação, obtendo o resultado previsto, a realidade se manterá. Neste sentido os autores afirmam não que cada elemento de realidade possua um valor

predizível - tese do determinismo - mas que, se for predizível, então existirá um elemento de realidade associado.

Imaginemos como exemplo que certa noite olhemos para o céu e que consigamos observar a Lua. Se fecharmos nossos olhos no tempo t_0 e, assumindo que nada irá interferir em nossa visão, voltarmos a abrí-los no instante t olhando para o mesmo ponto, a previsibilidade no tempo t_0 de enxergarmos a Lua novamente no momento t nos permite inferir de acordo com o critério de EPR que existe um elemento de realidade para a posição do astro. Esse elemento de realidade existe tanto em t_0 , quando a predição foi formulada, quanto em t , momento no qual voltamos a observar a Lua e concretizamos nossa assertiva.

Como outro exemplo, suponha que em um tempo t_0 possamos prever que em um instante posterior t o vapor de água poderá ser visto saindo de uma chaleira, e que em um momento ainda posterior t' , se colocarmos nossa mão em contato com a chaleira iremos senti-la mais quente. A partir do critério de realismo de EPR, podemos inferir que de fato haverá uma troca de calor no momento t' , mas essa grandeza ganhou realidade no instante t quando o vapor foi observado emergindo, e não no tempo t_0 , quando a predição original foi proposta.

Comparando os dois exemplos, temos que no primeiro partimos de uma conjuntura onde já existe um elemento de causa, nele partimos de uma situação onde a Lua já é vista no céu no instante inicial, ao passo que no segundo exemplo, a previsibilidade é condicionada ao vermos ou não o vapor de água em um momento futuro. Mas este elemento de causa também ocorreria para o exemplo da Lua, visto que sem antes a observarmos no horizonte não podemos inferir que se fecharmos os olhos e o abrirmos novamente iremos enxergá-la, podendo ser uma situação onde o astro ainda não tenha nascido. Portanto, é certo que a posição da Lua e o calor trocado pela chaleira são reais a partir do momento que conseguimos prevê-los, mas nada podemos concluir antes disso.

Seguindo na argumentação de EPR, utilizaremos uma versão do problema apresentado por Bohm [21] para demonstrar, na visão dos autores, a incompletude da teoria quântica. Suponha que tenhamos uma molécula constituída por dois átomos em um estado no qual seu spin total seja zero, de modo que o spin de cada átomo aponte para uma direção arbitrária exatamente oposta uma da outra. Agora imaginando que a molécula seja desintegrada por algum processo que não mude o seu momentum total, ou seja, que nenhum torque seja realizado sobre os sistemas, então os dois átomos começam a se separar ao ponto de deixarem de interagir um com o outro.

Se o spin fosse uma variável de momentum angular clássica, a interpretação desse processo seria a seguinte: enquanto os dois átomos estavam juntos na forma de molécula, a componente do momentum angular de cada átomo teria um valor definido sendo sempre oposta uma da outra, isso faria o momentum angular total igual a zero. Quando os átomos são separados, cada um continuaria com sua respectiva componente e visto que se medirmos uma partícula 'para cima', saberíamos sem interferir com o segundo átomo

que seu estado é ‘para baixo’. Essa correlação foi produzida originalmente quando os átomos interagiram formando a molécula de spin total zero e mantidas pelo determinismo das equações de movimento de cada estado de spin separadamente, o que garantiria a conservação de cada componente do vetor spin.

Considerar agora a descrição pela teoria quântica, no momento da separação, dada a imprevisibilidade das partículas em assumirem os valores $\frac{\hbar}{2}$ ou $-\frac{\hbar}{2}$ para o spin (havendo uma igual probabilidade para ambos), o estado de cada átomo será descrito como uma superposição dos estados associados a estes valores. Um observador poderá medir cada uma das componentes $S(\hat{x})$, $S(\hat{y})$ ou $S(\hat{z})$ do spin da partícula 1, mas não mais que uma dessas componentes, em cada experimento. Ocorre que independentemente da direção medida os resultados serão correlacionados, de modo que se a mesma componente do spin do átomo 2 for observada, ela sempre terá seu valor oposto ao de sua partícula irmã. Isso significa que a medição em qualquer componente de spin do átomo 1 fornece uma informação sobre a componente de spin do átomo 2. Uma vez que, por hipótese, os dois átomos não interajam mais, nós obtivemos um meio de medir uma componente arbitrária de spin da partícula 2 sem de forma alguma provocar um distúrbio nessa partícula.

Se aceitarmos a definição de elemento de realidade proposta por EPR, fica claro que depois que tivermos medido $\mathcal{S}(\hat{z})$ da partícula 1, por exemplo, então $\mathcal{S}(\hat{z})$ da segunda partícula pode ser considerada como um elemento de realidade.

Mas agora vamos relembrar que, nesse caso, o observador está sempre livre para reorientar o aparato em uma direção arbitrária, e então obter um valor definido (mas imprevisível) da componente do spin em qualquer direção que ele escolher. Uma vez que essa mudança de direção da medida possa ser feita sem de forma alguma perturbar o segundo átomo, concluímos que se o critério de realidade de EPR é aplicável, então existe um elemento de realidade para as três componentes de spin do segundo átomo simultaneamente.

Uma vez que a função de onda pode especificar, no máximo, apenas uma dessas componentes de spin em cada experimento, somos levados a concluir que ela não fornece uma descrição completa do elemento de realidade existente no segundo ensemble.

Essas duas partículas, uma pertencente ao espaço de Hilbert \mathcal{A} e outra a \mathcal{B} , podem ser descritas pelo estado emaranhado chamado *singlete*

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |1\rangle_{\mathcal{B}} - |1\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |0\rangle_{\mathcal{B}}). \quad (3.1)$$

Realizada uma medição de *spin* na direção \hat{z} em uma das partículas, digamos que na pertencente ao espaço \mathcal{A} , no tempo t_1 e obtendo como resultado $|0\rangle_{\mathcal{A}}$, por exemplo, então sabemos que o estado *global* $|\psi\rangle$ colapsa para o primeiro ramo. A probabilidade de obtermos o resultado $|1\rangle_{\mathcal{B}}$ em uma medição semelhante realizada em um instante posterior t_2 sobre a outra partícula será igual a 1, uma vez que seu valor já está definido segundo o postulado do colapso para todo o tempo $t_2 > t_1$. Podemos nos perguntar então da

existência de $|1\rangle_B$ para um tempo anterior $t_0 < t_1$.

Para isso invoquemos o princípio da *localidade*. Nele os elementos de realidade pertencentes a um sistema não podem ocorrer por uma medição feita ‘à distância em outro sistema’ [29].

A expressão ‘à distância’ pode ser entendida em dois sentidos, e podemos distingui-los em *localidade de Bell* e *localidade de Einstein*. Pela localidade de Bell, ‘à distância’ significa uma ausência de influências causais reconhecidas pelas teorias físicas atuais. Para Einstein, ‘à distância’ significa uma separação espacial entre o lugar (espaço-temporal) onde existe um elemento de realidade para uma grandeza física, dado certo sistema, e o lugar (espaço-temporal) onde é realizada uma medição sobre outro sistema.

Se aceitarmos que a relatividade especial implica na localidade de Einstein, então estaremos assumindo que nenhuma influência causal consistente com as restrições da relatividade especial poderá induzir a uma mudança no elemento de realidade em outro sistema.

Aplicando o princípio da localidade ao elemento de realidade $|1\rangle_B$ no tempo t_1 , isso mostra que nenhuma mudança no elemento de realidade pode ser afetado pelo resultado de uma medição de $|0\rangle_A$; em outras palavras, o princípio da localidade nos permite projetar a existência de $|1\rangle_B$ para trás no tempo $t_0 < t_1$ [29].

Por outro lado, em um cenário onde a medição da primeira partícula seja realizada por uma observadora (Alice) de maneira ‘à distância’ do sistema da segunda partícula - o que significa que não há conexão causal entre um sistema e outro (localidade de Bell) ou também que ambos os sistemas estão separados espacialmente de forma que, assumindo as restrições da Relatividade Restrita, não haja possibilidade de um induzir uma mudança no elemento de realidade do outro (localidade de Einstein) - a medição de $S(\hat{z})$ por Alice no instante t_1 colapsa a função de onda do estado singleto, resultando em um autoestado deste observável para a primeira partícula. Já no segundo sistema, a função de onda permanece para seu observador (Bob) como uma superposição, uma vez que por construção a leitura da primeira partícula não afeta o estado da segunda, até que em um momento t_2 seja realizada a medição de $S(\hat{z})$ colapsando o estado singleto para o outro autoestado de $S(\hat{z})$. Ainda que não haja comunicação entre os sistemas, sempre permanece uma correlação entre os resultados, ou seja, embora a primeira partícula não “diga” qual estado ela colapsou para que a outra assuma em t' o autoestado oposto, a segunda partícula sempre “saberá” qual estado deve assumir, de forma que o momentum angular total permaneça nulo.

Esse pensamento nos leva a crer que não é necessário a comunicação entre os sistemas para haver correlação entre os mesmos, mas que ela venha da interação entre as partículas no passado tal qual estudamos em uma abordagem clássica, ou seja, dada a preparação do singleto em t_0 , está “gravado no DNA” de cada partícula qual estado ela deve assumir. Por isso, segue do princípio da localidade que a realidade do observável $S(\hat{z})$ está definida

desde o instante anterior t_0 à medição e a incerteza, ou superposição dos autoestados, é apenas fruto da nossa ignorância em *descodificar* essa mensagem “gravada” em cada partícula no momento t_0 em que elas interagiram. Dessa forma, assumindo o princípio da localidade como verdadeiro, a Mecânica Quântica estaria incompleta, uma vez que sua teoria não contempla uma explicação para a realidade da grandeza $S(\hat{z})$ no tempo t_0 .

Uma proposta afim de tornar a MQ completa foi apresentada por David Bohm [30] com a chamada teoria das *variáveis ocultas*, sistematizada posteriormente por John Bell [7] e tendo como principal resultado a desigualdade que se segue.

3.1.1 Teorema de Bell

Um experimento composto por dois observadores separados espacialmente, Alice e Bob, os quais irão medir as quantidades \mathcal{A} e \mathcal{B} associadas aos observáveis A e B obtendo como possíveis resultados a e b respectivamente. Para um sistema preparado em um estado emaranhado tal qual o estado singleto, por exemplo, as probabilidades relativas a cada observador de obterem os autovalores correspondentes não são independentes entre si, ou seja, haverá uma probabilidade conjunta não fatorizável para o estado global, $p(a, b|A, B) \neq p(a|A)p(b|B)$. Esta correlação entre eventos distantes e não interagentes poderia ser interpretada como uma incompletude da teoria quântica, ao passo que se introduzíssemos uma variável λ capaz de descrever o vínculo entre cada subsistema (no caso entre as partículas), recuperaríamos a independência estatística entre as medições. A probabilidade passaria a ser definida em função desta variável na forma $p(a, b|A, B) := \int d\lambda p_\lambda p(a, b|A, B, \lambda)$ com $p_\lambda \geq 0$ e $\int d\lambda p_\lambda = 1$, com o termo

$$p(a, b|A, B, \lambda) = p(a|b, A, B, \lambda)p(b|A, B, \lambda). \quad (3.2)$$

Esta suposição decorre da condição de Alice realizar sua medição de \mathcal{A} em um instante posterior a Bob medir \mathcal{B} obtendo como saída b , dessa forma embora suprimamos as dependências temporais entende-se $A \equiv A(t_2)$ e $B \equiv B(t_1)$ com $t_2 > t_1$.

Assumiremos como prerrogativa a hipótese do *determinismo* [31], a qual requer que cada autovalor e sua respectiva probabilidade sejam completamente descritos pelos parâmetros que definem as medições (A e B), assim como a interação λ intrínseca a cada subsistema, sendo então matematizados na forma $p(a, b|A, B, \lambda) \in \{0, 1\}$, $a \equiv a(A, B, \lambda)$ e $b \equiv b(A, B, \lambda)$. Como implicação teremos que a probabilidade $p(a|b, A, B, \lambda)$ não depende do resultado b , $p(a|b, A, B, \lambda) = p(a|A, B, \lambda)$, não se fazendo necessária a ordem das medições A e B .

Outra condição exigida é a da *localidade*, hipótese na qual os subsistemas não trocam informações entre si e suas probabilidades dependam apenas dos parâmetros locais de cada subespaço, $p(a|A, B, \lambda) = p(a|A, \lambda)$ e $p(b|A, B, \lambda) = p(b|B, \lambda)$.

Com essas prerrogativas a probabilidade condicional passa a forma fatorável $p(a, b|A, B, \lambda) = p(a|A, \lambda)p(b|B, \lambda)$, de modo que

$$p(a, b|A, B) = \int d\lambda p_\lambda p(a|A, \lambda)p(b|B, \lambda). \quad (3.3)$$

Construiremos uma desigualdade semelhante à proposta por Bell [7], conhecida como desigualdade Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) [32]. Para isso consideremos o valor

médio

$$\langle A \otimes B \rangle \equiv \int_b \int_a da db p(a, b|A, B, \lambda) ab \quad (3.4a)$$

$$= \int_\lambda d\lambda p_\lambda \int_a da p(a|A, \lambda) \int_b db p(b|B, \lambda) \quad (3.4b)$$

$$= \int_\lambda d\lambda p_\lambda \langle A \rangle_\lambda \langle B \rangle_\lambda \quad (3.4c)$$

Supondo que Alice e Bob também meçam outros observáveis $A' \in \mathcal{A}$ e $B' \in \mathcal{B}$ podendo ser, por exemplo, outras direções de spin, definiremos uma quantidade

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &:= |\langle A \otimes B \rangle + \langle A' \otimes B \rangle + \langle A \otimes B' \rangle - \langle A' \otimes B' \rangle| \\ &= \left| \left(\int_\lambda d\lambda p_\lambda \langle A \rangle_\lambda \langle B \rangle_\lambda \right) + \left(\int_\lambda d\lambda p_\lambda \langle A' \rangle_\lambda \langle B \rangle_\lambda \right) + \left(\int_\lambda d\lambda p_\lambda \langle A \rangle_\lambda \langle B' \rangle_\lambda \right) - \left(\int_\lambda d\lambda p_\lambda \langle A' \rangle_\lambda \langle B' \rangle_\lambda \right) \right| \\ &= \left| \int_\lambda d\lambda p_\lambda [\langle A \rangle_\lambda (\langle B \rangle_\lambda + \langle B' \rangle_\lambda) + \langle A' \rangle_\lambda (\langle B \rangle_\lambda - \langle B' \rangle_\lambda)] \right| \\ &= \left| \int d\lambda p_\lambda \mathfrak{B}_\lambda \right|. \end{aligned}$$

A partir da desigualdade triangular em sua forma geral $|x + y| \leq |x| + |y|$, sendo $x, y \in \mathbb{R}$, teremos

$$|\langle A \rangle_\lambda (\langle B \rangle_\lambda + \langle B' \rangle_\lambda) + \langle A' \rangle_\lambda (\langle B \rangle_\lambda - \langle B' \rangle_\lambda)| \leq |\langle A \rangle_\lambda| |\langle B \rangle_\lambda + \langle B' \rangle_\lambda| + |\langle A' \rangle_\lambda| |\langle B \rangle_\lambda - \langle B' \rangle_\lambda|,$$

logo $\mathfrak{B} \leq \int p_\lambda |\mathfrak{B}_\lambda|$. Para as possíveis saídas a, a', b e b' variando entre seus respectivos valores máximos e mínimos, e. g., $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$ de forma que

$$a_{\min} \leq \langle A \rangle_\lambda \leq a_{\max} \quad (3.5a)$$

$$\int da p(a|A, \lambda) a_{\min} \leq \langle A \rangle_\lambda \leq \int da p(a|A, \lambda) a_{\max} \quad (3.5b)$$

$$\Rightarrow |\langle A \rangle_\lambda| \leq \bar{a}, \quad (3.5c)$$

com $\bar{a} := \max\{|a_{\min}|, |a_{\max}|\}$. Podemos então demonstrar [33] a desigualdade

$$|\mathfrak{B}_\lambda| \leq \max\{\bar{a}, \bar{a}'\} (|\langle B \rangle_\lambda + \langle B' \rangle_\lambda| + |\langle B \rangle_\lambda - \langle B' \rangle_\lambda|) \quad (3.6a)$$

$$\leq 2 \max\{\bar{a}, \bar{a}'\} \max\{\bar{b}, \bar{b}'\} \quad (3.6b)$$

$$\mathfrak{B} \leq 2 \max\{\bar{a}, \bar{a}'\} \max\{\bar{b}, \bar{b}'\}, \quad (3.6c)$$

e na forma explícita

$$|\langle A \otimes B \rangle + \langle A' \otimes B \rangle + \langle A \otimes B' \rangle - \langle A' \otimes B' \rangle| \leq 2 \max\{\bar{a}, \bar{a}'\} \max\{\bar{b}, \bar{b}'\}. \quad (3.7)$$

Esta desigualdade é a desigualdade CHSH, a qual será obedecida por toda teoria *completa*, *determinista* e *local*. Voltando ao exemplo do spin, tratando de um sistema de dois níveis com possíveis valores ± 1 , a desigualdade CHSH terá a forma

$$|\langle \hat{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes \hat{b} \cdot \vec{\sigma} \rangle + \langle \hat{a}' \cdot \vec{\sigma} \otimes \hat{b} \cdot \vec{\sigma} \rangle + \langle \hat{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes \hat{b}' \cdot \vec{\sigma} \rangle - \langle \hat{a}' \cdot \vec{\sigma} \otimes \hat{b}' \cdot \vec{\sigma} \rangle| \leq 2. \quad (3.8)$$

Para algumas configurações dos vetores \hat{a} , \hat{a}' , \hat{b} e \hat{b}' e dependendo do estado analisado, esta relação será violada [34], o que coloca em debate as propriedades apresentadas acima.

Resultados experimentais realizados em 1982 por A. Aspect [8] (os quais apresentaram certas “brechas”, os chamados *loopholes*), e em 2015 com testes sem *loopholes* [9], constataram pela violação da desigualdade de Bell. Assumindo o *determinismo* como verdadeiro, resta para a MQ se tratar de uma teoria completa *ou* local. Este resultado contrasta com a iniciativa de EPR na qual a MQ seria uma teoria local e passível de ser completa.

3.2 Macro-realismo

Em 1985, Leggett e Garg [10] deduziram uma desigualdade com uma estrutura semelhante a da desigualdade de Bell como sendo um critério de realismo para observáveis medidos em instantes sucessivos. Em contraponto ao cenário construído para Alice e Bob, agora teremos um único observador que realizará uma sequência de experimentos com relação a uma mesma grandeza física.

Seja \mathcal{Q} a grandeza física de interesse associada ao operador $Q(t)$, o protocolo construído assume três postulados:

- *Macro-realismo*: hipótese segundo a qual um sistema macroscópico com dois ou mais estados disponíveis macroscopicamente distintos, se encontrará em todo momento em um destes estados.

Nesse sentido, \mathcal{Q} terá sua realidade pré-determinada antes mesmo de sua medição, e a mesma servirá como uma *atualização* da informação sobre o estado do sistema pelo observador. As probabilidades de predição de \mathcal{Q} são meramente fruto da ignorância do observador, mesmo em casos onde envolva imprevisibilidade operacional (e. g., no caos clássico), ainda é assumido que exista um valor bem definido em todo o tempo [35].

- *Medições não-invasivas*: premissa na qual uma medição $Q(t)$ ao revelar o estado de um sistema, irá perturbá-lo de forma arbitrariamente pequena, de modo a não alterar as propriedades ou a dinâmica posterior deste sistema;
- *Indução*: hipótese na qual as propriedades de um sistema são determinadas exclusivamente pelas condições iniciais (e não pelas condições finais assumidas após uma medição).

Consideremos que a medição $Q(t_i)$ possa assumir como resultados $q_i = \pm 1$, e que a probabilidade conjunta de obtermos respectivamente as saídas q_1 e q_2 nas realizações $Q(t_1)$ e $Q(t_2)$, com $t_1 < t_2$, seja definida por $p(q_1, q_2 | Q(t_1), Q(t_2), \xi)$. A variável ξ representará um catálogo de todas as propriedades do objeto macroscópico [36] e supõe-se que sua evolução temporal não seja influenciada pelas medições ocorridas.

A partir da definição de probabilidade conjunta,

$$p(q_1, q_2 | Q(t_1), Q(t_2), \xi) = p(q_1 | Q(t_1), Q(t_2), \xi) p(q_2 | q_1, Q(t_1), Q(t_2), \xi), \quad (3.9)$$

a hipótese do *Macro-realismo* garantirá que o resultado q_2 esteja definido independente da saída q_1 , implicando em

$$p(q_1, q_2 | Q(t_1), Q(t_2), \xi) = p(q_1 | Q(t_1), Q(t_2), \xi) p(q_2 | Q(t_1), Q(t_2), \xi). \quad (3.10)$$

Sendo $Q(t_1)$ uma *medição não-invasiva*, a mesma não influenciará na medição futura $Q(t_2)$, logo a probabilidade $p(q_2 | Q(t_1), Q(t_2), \xi)$ não será função de $Q(t_1)$. Por último, pela hipótese da *indução*, a escolha da medida $Q(t_2)$ não terá efeito sobre o resultado de $Q(t_1)$, de forma que probabilidade $p(q_1 | Q(t_1), Q(t_2), \xi)$ não terá $Q(t_2)$ como parâmetro. A partir destas duas considerações obtemos

$$p(q_1, q_2 | Q(t_1), Q(t_2), \xi) = p(q_1 | Q(t_1), \xi) p(q_2 | Q(t_2), \xi). \quad (3.11)$$

Ao passo que $p(q_1, q_2 | Q(t_1), Q(t_2)) = \int d\xi p_\xi p(q_1, q_2 | Q(t_1), Q(t_2), \xi)$, com o valor médio $\langle Q(t_i)Q(t_j) \rangle$ definido como

$$\langle Q(t_i)Q(t_j) \rangle = \int dq_i dq_j p(q_i, q_j | Q(t_i), Q(t_j)) q_i q_j, \quad (3.12)$$

iremos propor a quantidade $\mathfrak{K} := |\langle Q(t_1)Q(t_2) \rangle + \langle Q(t_2)Q(t_3) \rangle + \langle Q(t_1)Q(t_4) \rangle - \langle Q(t_3)Q(t_4) \rangle|$, e segue de forma algébrica análoga à vista para a desigualdade de Bell que

$$|\langle Q(t_1)Q(t_2) \rangle + \langle Q(t_2)Q(t_3) \rangle + \langle Q(t_1)Q(t_4) \rangle - \langle Q(t_3)Q(t_4) \rangle| \leq 2. \quad (3.13)$$

Esta é a desigualdade de Leggett-Garg (LG), respeitada por toda grandeza aferida sobre um sistema macroscópico.

Como visto para a desigualdade de Bell, ao passo que sua violação evidencia uma não-localidade para sistemas quânticos correlacionados (emaranhados), a desigualdade de LG quando violada será um indicador de que uma quantidade física não possui um macro-realismo. Ao passo que esta grandeza física não assumirá um valor bem definido no intervalo de tempo analisado – visto que asseguremos medições não-invasivas ao longo do processo experimental¹–, o sistema estudado não poderá ser entendido como um ob-

¹Em geral, os protocolos que asseguram medições não-invasivas são elaborados especialmente para

jeto macroscópico (o qual por premissa sempre possuirá propriedades bem distinguíveis) evidenciando o caráter quântico deste sistema.

3.3 Realismo Bilobran-Angelo

Começaremos apresentando dois conceitos estudados pela filosofia da ciência que diferenciam a realidade do conhecimento, sendo denominados respectivamente por *ôntico* e *epistêmico*. Ôntico se refere a uma natureza inata ou própria de determinado objeto de estudo, enquanto epistêmico está relacionado ao saber ou ao conhecimento tido sobre este objeto.

Imaginemos dois observadores, Alice e Bob, e que seja dado uma moeda a Alice e pedido para que ela a esconda em uma de suas mãos sem que seu amigo Bob veja em quais das duas se encontra o objeto. Ao perguntar a Bob em qual das mãos de Alice está a moeda, ele não conseguirá responder com certeza (probabilidade igual a um) onde o objeto se encontra, ao passo que sua melhor previsão será uma estatística de 50% para cada opção (direita e esquerda). Aplicando o critério de realismo de EPR, os observadores concluirão realidades diferentes para a posição, visto que Alice consegue prever onde a moeda está (real) enquanto Bob possui apenas uma estimativa. É evidente que a irrealidade vista por Bob (segundo o critério de EPR) é meramente subjetiva à sua ignorância, condicionada ao fato de que ele não teve acesso a toda a informação do processo realizado por Alice. Tendo em vista este caráter epistêmico para a descrição da realidade, Bilobran e Angelo (BA) [11] propuseram um critério para investigar estes elementos com base em um protocolo que consiste de dois cenários, esquematizados na Figura 3.1. No primeiro, é fornecido à Alice um ensemble para que ela realize sobre cada um de seus elementos a medição de uma grandeza física \mathcal{A} no tempo t_1 , representada pelo observável $A = \sum_i a_i A_i$ atuando sobre \mathcal{A} , obtendo como saída o conjunto dos respectivos autovalores a_i e seus correspondentes autoestados colapsados $|a_i\rangle\langle a_i|$. No tempo t_2 , Bob é incumbido de realizar uma tomografia sobre este ensemble colapsado por Alice, embora não lhe seja revelado quais as respectivas saídas obtidas por ela. Bob descreverá então o seguinte estado:

$$\Phi_A(\rho) = \sum_i A_i \rho A_i = \sum_i p(a_i) A_i \otimes \frac{\text{Tr}_{\mathcal{A}}[A_i \rho A_i]}{p(a_i)} \quad (3.14)$$

visto $\rho \in \mathcal{H} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \dots \mathcal{N}$. Esta descrição será epistêmica com relação à \mathcal{A} , evidenciada pelos termos $\sum_i p(a_i) A_i$ que representam uma *mistura* estatística de todos os possíveis estados colapsados por Alice em t_1 .

Em um segundo cenário, um outro observador, Charlie, recebe no tempo t_2 a mesma preparação que Alice, mas agora sem passar por nenhuma medição anterior. Ele realizará uma tomografia sobre o ensemble obtendo o estado ρ .

cada experimento em particular. Referenciamos aqui alguns destes exemplos [37] e [38].

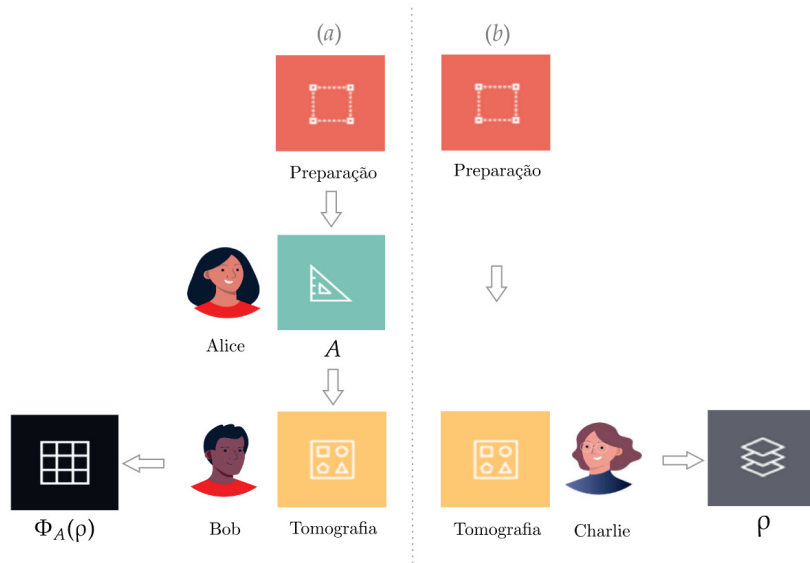


Figura 3.1: Protocolo para verificar a realidade de uma grandeza física \mathcal{A} no intervalo $[t_0, t_2]$. Em (a) no instante t_1 , Alice faz uma medição não-seletiva do observável A sobre o ensemble preparado em t_0 . Posteriormente em t_2 , o estado colapsado é tomografado por Bob resultando no estado $\Phi_A(\rho)$. Já em (b) no tempo t_2 , o observador Charlie realiza uma tomografia sobre o ensemble preparado em t_0 (o mesmo que de Alice), obtendo seu estado correspondente ρ .

Tal como no exemplo da moeda, empregando o critério de realidade de EPR podemos nos perguntar qual a descrição de cada observador, em um instante posterior à t_2 , sobre a realidade da grandeza \mathcal{A} . Para Alice, a qual conhece o estado projetado de cada elemento do ensemble, e visto que uma nova medição semelhante apenas reproduziria os resultados obtidos em t_1 , \mathcal{A} é real; já para Bob o estado $\Phi_A(\rho)$ representa uma descrição estatística, de modo que \mathcal{A} será irreal, embora seja fruto de sua ignorância operacional sobre um estado que foi bem definido em t_1 por Alice; por último Charlie, após caracterizar o estado ρ do ensemble em t_2 e obter uma preparação em superposição dos autoestados $|a_i\rangle$, descreverá uma não-realidade intrínseca para \mathcal{A} .

A fim de descrever onticamente a realidade de \mathcal{A} , de forma a não depender da perspectiva de cada observador, o critério de BA consiste em compararmos os estados tomografados por Bob e Charlie, os quais por construção seriam diferentes, dado que $\Phi_A(\rho)$ representa um estado colapsado (mas não revelado), enquanto ρ não. A igualdade só seria válida se a medição de Alice não exercesse qualquer papel de projeção sobre o estado do ensemble, sendo inócua sua realização para *definir* as propriedades do sistema. Isso significaria que a realidade da grandeza \mathcal{A} estaria definida mesmo antes de t_1 , e o efeito das operações A seria apenas de *revelar* os valores já estabelecidos. Segue de maneira formal a definição de BA:

- Elemento de realidade - BA: Um observável $A = \sum_i a_i A_i$, com projetores $A_i =$

$|a_i\rangle\langle a_i|$ agindo sobre \mathcal{A} , é real para uma dada preparação $\rho \in \mathcal{H} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \dots \mathcal{N}$ se e somente se

$$\Phi_A(\rho) = \rho. \quad (3.15)$$

Os autores também definem uma quantidade para a irrealidade de \mathcal{A} a partir de uma relação entrópica,

$$\mathfrak{I}_A(\rho) := \mathfrak{S}(\Phi_A(\rho)) - \mathfrak{S}(\rho). \quad (3.16)$$

Como o mapa $\Phi_A(\rho)$ não diminui a entropia do estado ρ , ocorre que $\mathfrak{I}_A(\rho) \geq 0$, havendo a igualdade quando \mathcal{A} tiver elemento de realidade, condição na qual $\Phi_A(\rho) = \rho$.

Considerando um processo envolvendo uma evolução temporal unitária, estenderemos esta definição de forma a reescrever o critério como: um observável de Heisenberg $A(t_1) = \sum_i a_i A_i(t_1)$ com projetores $A_i(t_1) = U^\dagger(t_1) |a_i\rangle\langle a_i| U(t_1)$, correspondendo $U(t_1)$ a uma evolução unitária, agindo sobre \mathcal{A} é real em todo o intervalo $[t_0, t]$, com $t_0 \leq t_1 \leq t$, e para uma dada preparação $\rho \in \mathcal{H} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \dots \mathcal{N}$ se e somente se $\Phi_{A(t_1)}(\rho) = \rho$. Já a irrealidade será dada por $\mathfrak{I}_{A(t)}(\rho) := \mathfrak{S}(\Phi_{A(t)}(\rho)) - \mathfrak{S}(\rho)$.

Embora apresentada na perspectiva de Heisenberg $\mathfrak{I}_{A(t)}(\rho)$, a irrealidade também pode ser formulada a partir da representação de Schrödinger $\mathfrak{I}_A(\rho(t_1))$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{A(t_1)}(\rho) &= \mathfrak{S}(\Phi_{A(t_1)}(\rho)) - \mathfrak{S}(\rho) \\ &= -\text{Tr} \sum_i U^\dagger(t_1) A_i U(t_1) \rho U^\dagger(t_1) A_i U(t_1) \\ &\quad \ln \left(U^\dagger(t_1) A_i U(t_1) \rho U^\dagger(t_1) A_i U(t_1) \right) + \text{Tr} \rho \ln(\rho) \\ &= -\text{Tr} \sum_i A_i U(t_1) \rho U^\dagger(t_1) A_i \\ &\quad \ln \left(A_i U(t_1) \rho U^\dagger(t_1) A_i \right) + \text{Tr} \rho \ln(\rho) \\ &= \mathfrak{S}[\Phi_A(\rho(t_1))] - \mathfrak{S}[\rho(t_1)] \\ &\equiv \mathfrak{I}_A(\rho(t_1)), \end{aligned}$$

na qual $\mathfrak{S}(\rho) = \text{Tr} \rho \ln(\rho) = \text{Tr} U(t_1) \rho U^\dagger(t_1) \ln(U(t_1) \rho U^\dagger(t_1)) = \mathfrak{S}[\rho(t_1)]$.

Uma vez que observáveis incompatíveis possuem bases próprias, a depender da base que utilizemos para expressar $|\psi\rangle$, este será um autoestado ou uma superposição. Assim, uma mesma preparação pode sinalizar realidades diferentes para cada observável em questão. Como exemplo temos o estado $|\psi\rangle = |0\rangle$ como um autoestado do observável $S(\hat{z})$. Escrito na base de $S(\hat{x})$, passará a ser um estado de superposição, $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$. Segue que as irrealidades em $t = 0$ para uma mesma preparação $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ serão respectivamente $\mathfrak{I}_{S(\hat{z},0)}(\rho) = 0$ e $\mathfrak{I}_{S(\hat{x},0)}(\rho) = \ln(2)$.

Na tabela 3.1 trataremos de alguns exemplos nos quais investigaremos a realidade para o spin a partir do critério de BA em comparação com o de EPR, mas destacamos um

| Estado | EPR | BA |
|--|--|---|
| $ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(+\rangle + -\rangle)$ | $S(\hat{z})$ real, $S(\hat{x})$ irreal | $S(\hat{z})$ real, $S(\hat{x})$ irreal |
| $\rho = \frac{\mathbb{I}}{d}$ | $S(\hat{x}), S(\hat{y})$ e $S(\hat{z})$ irrealis | $S(\hat{x}), S(\hat{y})$ e $S(\hat{z})$ reais |
| $\rho = \alpha 0\rangle\langle 0 + \beta 1\rangle\langle 1 $ | $S(\hat{z})$ irreal | $S(\hat{z})$ real |
| $ \Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes 1\rangle_{\mathcal{B}} - 1\rangle_{\mathcal{A}} \otimes 0\rangle_{\mathcal{B}})$ | $S_{\mathcal{B}}(\hat{z})$ real | $S_{\mathcal{B}}(\hat{z})$ irreal |

Tabela 3.1: Comparação da realidade de algumas grandezas para um mesmo estado segundo o critério de realismo de EPR e BA. Os estados correspondem respectivamente a um exemplo de superposição (base σ_x), máxima mistura, autoestado (base σ_z) e emaranhado.

importante ponto: no trabalho de EPR os autores não fazem referência a estados mistos, isto é, pode ser que o critério de elemento de realidade que os autores propuseram fosse específico para estados puros.

Dado um estado bipartido $\rho \equiv \rho_{AB}$ e notando-se que $\rho_{\mathcal{B}} = \Phi_{A(t_1)}(\rho_{\mathcal{B}})$, a irrealidade (3.16) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{I}_{A(t_1)}(\rho) &= S(\Phi_A(\rho)) - S(\rho) + S(\Phi_A(\rho_{\mathcal{A}})) - S(\Phi_A(\rho_{\mathcal{A}})) + S(\rho_{\mathcal{A}}) - S(\rho_{\mathcal{A}}) + S(\rho_{\mathcal{B}}) - S(\Phi_A(\rho_{\mathcal{B}})) \\
 &= [S(\Phi_A(\rho_{\mathcal{A}})) - S(\rho_{\mathcal{A}})] + [S(\rho_{\mathcal{A}}) + S(\rho_{\mathcal{B}}) - S(\rho)] - [S(\Phi_A(\rho_{\mathcal{A}})) + S(\Phi_A(\rho_{\mathcal{B}})) - S(\Phi_A(\rho))] \\
 &= \mathfrak{I}_{\mathcal{A}}(\rho_{\mathcal{A}}) + I_{\mathcal{A}:\mathcal{B}}(\rho) - I_{\mathcal{A}:\mathcal{B}}(\Phi_A(\rho)) \\
 &= \mathfrak{I}_{A(t_1)}(\rho_{\mathcal{A}}) + \mathcal{D}_{A(t_1)}(\rho)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

com $\mathcal{D}_{A(t_1)}(\rho) = I_{\mathcal{A}:\mathcal{B}}(\rho) - I_{\mathcal{A}:\mathcal{B}}(\Phi_{A(t_1)}(\rho))$ a qual, a menos de uma minimização [39], é uma medida de discórdia escrita em termos da informação mútua. O termo $\mathfrak{I}_{A(t_1)}(\rho_{\mathcal{A}})$ será interpretado como uma medida da irrealidade de \mathcal{A} para o estado *local* $\rho_{\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{B}}(\rho)$. Na literatura este termo é uma medida de coerência [40, 41].

Como exemplo para esta interpretação, analisaremos o problema da dupla fenda de Bohr. O experimento consiste de uma fenda simples de massa M situada a frente de uma dupla fenda como esquematizado na figura 3.2. Uma partícula de massa m ao passar pela fenda simples, supondo que esta seja em primeiro momento suficientemente leve com uma massa próxima à da partícula, a partir da conservação do momento resultaria em duas possíveis situações. Na primeira (a) a fenda se deslocaria para cima guiando a partícula para a abertura inferior da dupla fenda, e na segunda (b) a circunstância oposta na qual a fenda simples se deslocaria para baixo indicando que a partícula caminharia na direção da abertura superior da fenda dupla. Descrevemos esta correlação partícula-fenda como o estado emaranhado

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| -v_p \rangle \otimes \left| \frac{m}{M} v_f \right\rangle + | v_p \rangle \otimes \left| -\frac{m}{M} v_f \right\rangle \right), \tag{3.18}$$

com v_p e $\frac{m}{M}v_f$ sendo o módulo da velocidade da partícula e da fenda respectivamente, as quais por simplicidade assumiremos como quantidades discretas.

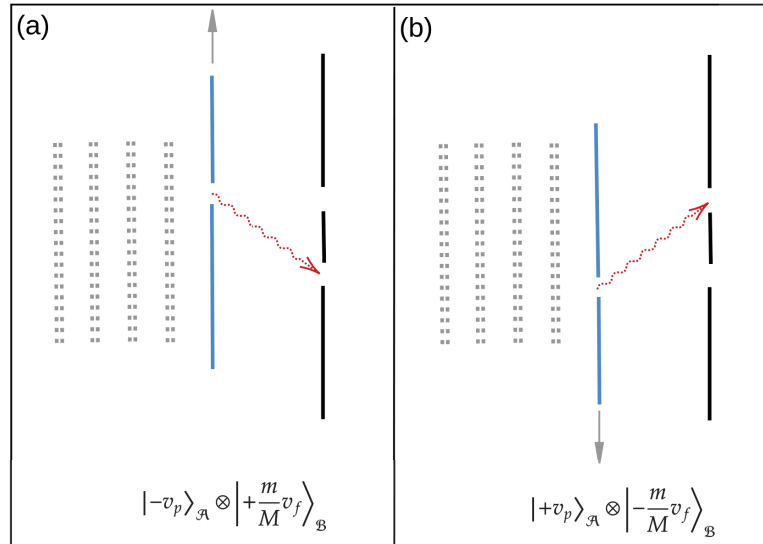


Figura 3.2: Experimento com partículas trocando seu momento com uma fenda simples e leve, a qual quando subir indica que a partícula caminhará para a abertura inferior da fenda dupla (a), e ao passo que descer sinaliza que a partícula seguirá para a abertura superior da dupla fenda (b). Inferiormente é descrito o estado relacionado à cada situação.

Obtendo o estado reduzido para a partícula,

$$\begin{aligned} \rho_A &= \text{Tr}_B(\rho) \\ &= \frac{1}{2}(|v_p\rangle\langle v_p| + |-v_p\rangle\langle -v_p|) + \frac{x}{2}(|v_p\rangle\langle -v_p| + |-v_p\rangle\langle v_p|), \end{aligned} \quad (3.19)$$

com $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ e $x = \left| \left\langle \frac{m}{M}v_f \left| -\frac{m}{M}v_f \right\rangle \right|$, a irrealidade *local* da velocidade, a qual representaremos pelo operador $V(t)$ com $t = 0$, será nula $\mathfrak{I}_{V(0)}(\rho_A) = 0$ somente se $x = 0$. Esta condição ocorrerá quando os vetores de estado da fenda simples forem ortogonais, sinalizando que seu deslocamento poderá ser distinto inequivocamente, funcionando como um informante do estado da velocidade da partícula. Decorre que ao sabermos por qual orifício a partícula passará pela fenda dupla, então nenhum padrão de interferência será observado em um anteparo posterior.

Por outro lado, se a fenda simples tiver $M \gg m$, estando quase fixa, seus estados serão indistinguíveis, logo não poderemos inferir sobre a velocidade da partícula acarretando em um padrão de interferência no anteparo.

Para o caso anterior onde a fenda simples é leve e revela a velocidade da partícula, a irrealidade *global* $\mathfrak{I}_{V(0)}(\rho)$ será não nula,

$$\mathfrak{I}_{V(0)}(\rho) = D_{V(0)}(\rho) = \ln 2. \quad (3.20)$$

Como esta irrealidade provém de uma quantidade de discórdia, ela será decorrente do emaranhamento entre a fenda simples e a partícula. Deste modo, a realidade de uma grandeza depende das conjecturas, ou do chamado *contexto*, nas quais ela é acessada.

4 Correlatores Temporais

Neste capítulo veremos como grandezas definidas em dois tempos são abordadas na literatura. Analisaremos quais os seus contrapontos teóricos e experimentais e então apresentaremos uma nova interpretação para o estudo destas quantidades.

É comum encontrarmos na Física grandezas construídas a partir de valores sucessivos assumidos por um sistema dinâmico. Listemos a seguir alguns exemplos¹:

| Grandezas | Definições |
|--------------------------|---|
| Deslocamento escalar | $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ |
| Deslocamento angular | $\Delta\theta = \frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{r}$ |
| Velocidade média | $v_m = \frac{\Delta x}{t_2 - t_1}$ |
| Aceleração média | $\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$ |
| Trabalho mecânico* | $W = F\Delta x; W = K(t_2) - K(t_1)$ |
| Trabalho termodinâmico** | $W = p[V(t_2) - V(t_1)]$ |

Tabela 4.1: Exemplo de grandezas definidas em dois tempos.

Embora, em geral, trabalhemos com a diferença entre as quantidades aferidas em instantes sucessivos, em problemas envolvendo sistemas quânticos é recorrente nos depararmos com a média do produto destas quantidades, os chamados correlatores temporais

$$\mathfrak{C}(A(t_1), B(t_2)) := \langle A(t_1)B(t_2) \rangle. \quad (4.1)$$

Essas funções de correlação temporal são utilizadas para indicar por quanto tempo uma propriedade é mantida no sistema, para descrever processos químicos ao longo do tempo, interações entre o sistema e o ambiente, dentre outras finalidades [42]. Usamos também estas médias para construir a desigualdade de Legget-Garg. Veremos a seguir como essa estrutura pode ser construída algebricamente e, sobretudo, quais são as interpretações plausíveis para tais objetos.

¹*Trabalho mecânico de uma força constante.

²**Trabalho termodinâmico sob pressão constante.

4.1 Dinâmica unitária e TPM

Como visto no Capítulo 2, uma grandeza física \mathcal{A} está associada a um observável $A = \sum_i a_i A_i$ e seu valor médio, dada uma preparação ρ , será $\langle A \rangle = \text{Tr}(A\rho) = \sum_i a_i \text{Tr}(A_i\rho) = \sum_i a_i p(a_i)$, sendo $p(a_i) = \text{Tr}(A_i\rho)$ a probabilidade de obtermos os respectivos valores a_i em uma medição.

Para sistemas dinâmicos, o ensemble ρ irá evoluir a partir de uma interação física descrita pelo operador unitário $U(t)$. Utilizaremos a notação de mapas lineares para representar essa dinâmica. Seja o mapa de evolução temporal ϕ_t . Teremos para a representação de Schrödinger que o estado inicial $\rho \equiv \rho_0$ evoluirá unitariamente até o instante t na forma

$$\rho(t) = U(t)\rho_0 U^\dagger(t) \equiv \phi_t(\rho_0). \quad (4.2)$$

Já a probabilidade de obtermos o resultado a_i no tempo t será

$$p(a_i, t) = \text{Tr}[A_i \phi_t(\rho_0)] \quad (4.3)$$

Pela representação de Heisenberg, os observáveis terão como dinâmica

$$A^H(t) = U(t)^\dagger A^S(t_0) U(t) \equiv \phi_t^*(A), \quad (4.4)$$

e as probabilidades para cada autovalor em t serão

$$p(a_i, t) = \text{Tr}[\phi_t^*(A_i)\rho_0], \quad (4.5)$$

as mesmas preditas via versão de Schrödinger. Visto que o valor médio $\langle A \rangle$ é uma função das probabilidades, o mesmo também independará da representação adotada. Podemos concluir que estas quantidades serão fundamentais para a MQ ao passo que serão invariantes em relação à descrição algébrica assumida.

Após uma medição de A sobre o estado evoluído $\rho(t)$, obtendo como saída a_k , seu colapso será descrito pelo mapa

$$\rho(t) \mapsto \Theta_{A_k}(\rho(t)) := \frac{A_k \rho(t) A_k}{\text{Tr}[A_k \rho(t) A_k]} = A_k \quad (4.6)$$

e as probabilidades depois da medição seletiva serão atualizadas para

$$p(a_i, t) = \text{Tr}[A_i \phi_t(\rho_0)] \mapsto \text{Tr}[A_i \Theta_{A_k}(\rho(t))] = \delta_{ik}, \quad (4.7)$$

ou seja, saberemos com certeza (probabilidade igual a um) que o resultado de uma nova medição de \mathcal{A} sobre o estado colapsado será a_k .

A entropia também se atualizará de modo que $\mathbf{S}(\rho(t)) \geq 0 \mapsto \mathbf{S}[\Theta_{A_k}(\rho(t))] = 0$, uma

vez que o estado colapsado é puro e retratando que a ignorância sobre o resultado de uma futura medição de \mathcal{A} é nula (temos máximo previsibilidade da saída a_k).

Sob a hipótese de que a MQ se trata também de uma teoria da informação, não apenas mecânica, ainda que na versão de Heisenberg o processo de medição e sua decorrente obtenção de informação requerem que consideremos a atualização do estado ρ_0 . Notemos que embora os autoestados do observável A evoluam no tempo, seus correspondentes autovalores serão mantidos constantes,

$$A^H(t) = \sum_i a_i U(t)^\dagger |a_i\rangle\langle a_i| U(t) := \sum_i a_i |a_i^H(t)\rangle\langle a_i^H(t)| = \sum_i a_i A_i^H(t) \quad (4.8)$$

e pela relação de autovalores $A^H(t) |a_k^H(t)\rangle = \sum_i a_i U(t)^\dagger |a_i\rangle\langle a_i| U(t) U(t)^\dagger |a_k\rangle = a_k |a_k^H(t)\rangle$. Deste modo, após uma medição seletiva com resultado a_k teremos para o estado

$$\rho_0 \mapsto \Theta_{\phi_t^*(A_k)}(\rho_0) := \frac{\phi_t^*(A_k)\rho_0\phi_t^*(A_k)}{\text{Tr}[\phi_t^*(A_k)\rho_0\phi_t^*(A_k)]} = |a_k^H(t)\rangle\langle a_k^H(t)| = \phi_t^*(A_k), \quad (4.9)$$

representando que o estado em repouso ρ_0 assumirá um dos possíveis autoestados do operador A evoluídos até o instante t . Esta fórmula foi proposta justamente para garantir a consistência com a representação de Schrödinger quando ocorrer a medição.

Decorrem as mesmas atualizações para os valores assumidos pós medição seletiva pelas probabilidades $p(a_i, t) = \text{Tr}[\phi_t^*(A_i)\rho_0] \mapsto \text{Tr}[\phi_t^*(A_i)\Theta_{\phi_t^*(A_k)}(\rho_0)] = \delta_{ik}$ e pela entropia $\mathcal{S}(\rho_0) \geq 0 \mapsto \mathcal{S}(\phi_t^*(A_k)) = 0$, sendo estas quantidades invariantes mediante as representações adotadas.

Fica evidente que, embora as representações utilizem construções algébricas diferentes, o processo físico no laboratório, os resultados experimentais (autovalores) e previsões estatísticas (valor médio e probabilidades) se manterão os mesmos. A partir dessa construção, testaremos a invariância dos valores médios para os correladores temporais. Seja \mathcal{C} uma grandeza produto entre \mathcal{A} e \mathcal{B} , inferidas respectivamente nos tempos t_1 e t_2 , seu observável correspondente será

$$C(t_1, t_2) = A(t_1)B(t_2) = \sum_{i,j} a_i b_j \phi_{t_1}^*(A_i)\phi_{t_2}^*(B_j), \quad (4.10)$$

e seu valor médio para uma dada preparação ρ_0 , em analogia à 2.8 e 4.5,

$$\langle C(t_1, t_2) \rangle_{\rho_0} = \langle A(t_1)B(t_2) \rangle_{\rho_0} = \sum_{i,j} a_i b_j \text{Tr}[\phi_{t_1}^*(A_i)\phi_{t_2}^*(B_j)\rho_0]. \quad (4.11)$$

Embora $A(t_1)$ e $B(t_2)$ possuam autovalores reais, seu produto não necessariamente o será. Seja o estado inicial $|\psi_0\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e o operador $S(\hat{x}) = \frac{\hbar}{2}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$

evoluído sob a hamiltoniana $H = \omega S(\hat{z})$,

$$S(\hat{x}, t) = S(\hat{x}) \cos \tau - S(\hat{y}) \sin \tau, \quad (4.12)$$

com $S(\hat{y}) = \frac{\hbar}{2}(-|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$, seu valor médio será

$$\begin{aligned} \langle S(\hat{x}, t) \rangle &= \langle \psi_0 | S(\hat{x}, t) | \psi_0 \rangle \\ &= (\alpha^* \langle 0| + \beta^* \langle 1|) [S(\hat{x}) \cos \tau - S(\hat{y}) \sin \tau] (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \\ &= (\alpha^* \langle 0| + \beta^* \langle 1|) \left[\frac{\hbar}{2} (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \cos \tau - \frac{i\hbar}{2} (-|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \sin \tau \right] (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \\ &= \frac{\hbar}{2} (\alpha^* \beta + \beta^* \alpha) \cos \tau + \frac{\hbar}{2} i (\alpha^* \beta - \beta^* \alpha) \sin \tau. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como visto na seção 1.4, para $\alpha = r_0$ e $\beta = r_1 e^{i\phi}$ teremos $(\alpha^* \beta + \beta^* \alpha) = 2r_0 r_1 \cos \phi$ e $i(\alpha^* \beta - \beta^* \alpha) = 2r_0 r_1 \sin \phi$, de modo que a média será real. Para o correlator, no entanto, permanecemos com o termo imaginário

$$\langle S(\hat{x}, t_1) S(\hat{x}, t_2) \rangle = \langle \psi_0 | S(\hat{x}, t_1) S(\hat{x}, t_2) | \psi_0 \rangle \quad (4.14a)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} [\cos(\tau_2 - \tau_1) + i(|\beta|^2 - |\alpha|^2) \sin(\tau_2 - \tau_1)]. \quad (4.14b)$$

Temos que ambos os operadores $S(\hat{x}, t_1)$ e $S(\hat{x}, t_2)$ são hermitianos, de forma que suas médias individuais são valores reais. Contudo, seu produto em geral não será hermitiano, visto que $[S(\hat{x}, t_1), S(\hat{x}, t_2)] \neq 0$. Assim $[S(\hat{x}, t_1) S(\hat{x}, t_2)]^\dagger = S(\hat{x}, t_2)^\dagger S(\hat{x}, t_1)^\dagger = S(\hat{x}, t_2) S(\hat{x}, t_1) \neq S(\hat{x}, t_1) S(\hat{x}, t_2)$ e, por consequência, aparecerão os termos imaginários no cálculo de sua média.

Para que o valor médio de \mathcal{C} seja exclusivamente real (como é de se esperar) iremos simetrizar o produto de forma que

$$C(t_1, t_2) := \frac{1}{2} \left(A(t_1) B(t_2) + B(t_2) A(t_1) \right) = \frac{1}{2} \{A(t_1), B(t_2)\}, \quad (4.15)$$

Segue que seu valor médio $\langle C(t_1, t_2) \rangle = \text{Tr}[C(t_1, t_2) \rho_0]$ terá a forma

$$\langle C(t_1, t_2) \rangle_{\rho_0} = \sum_{i,j} a_i b_j \text{Tr}[A_i(t_1) B_j(t_2) \rho_0 + B_j(t_2) A_i(t_1) \rho_0] \quad (4.16a)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j \text{Tr}[B_j A_i(t_1) \rho_0] + \text{Tr}[B_j A_i(t_1) \rho_0] \quad (4.16b)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j \text{Tr}[B_j \{A_i(t_1), \rho_0\}] \quad (4.16c)$$

com o anti-comutador $\{A_i(t_1), \rho_0\} = A_i(t_1) \rho_0 + \rho_0 A_i(t_1)$. Para o exemplo do spin a partir

da simetrização obtemos

$$\frac{1}{2}\langle S_x(t_1)S_x(t_2) + S_x(t_2)S_x(t_1) \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \cos(\tau_2 - \tau_1), \quad (4.17)$$

cujos valores independem do estado ρ_0 preparado.

Utilizamos a representação de Heisenberg para calcular o valor médio de \mathcal{C} , logo poderíamos nos perguntar como seria sua estrutura a partir de um cenário de Schrödinger. A forma mais direta de a construirmos é associando os operadores de evolução ao estado ρ_0 , tornando os observáveis fixos no tempo. Dessa maneira,

$$\langle C \rangle_{\rho(t)} = \langle AB \rangle_{\rho(t)} = \sum_{a,b} ab \operatorname{Tr} [A_i U(t_1) U^\dagger(t_2) B_j U(t_2) \rho_0 U^\dagger(t_1)], \quad (4.18)$$

cujos valores, com o estado ρ_0 sendo transformado por operadores unitários distintos e o operador temporal $U_{t_1} U_{t_2}^\dagger$ desconexo deste estado, não está sistematizada na teoria. A dificuldade em construirmos uma representação de Schrödinger para uma grandeza definida em dois tempos é de que o estado ρ deveria caracterizar um sistema nos tempos t_1 e t_2 concomitantemente, algo que não é concebido tanto na MQ quanto na própria Mecânica Clássica, ao passo que os estados que expressam os objetos macroscópicos são estritamente definidos a partir de um único instante, ou seja, de forma local no tempo. Deste modo, ainda que a representação de Schrödinger pareça mais intuitiva, e até mesmo mais usual para definir os postulados da MQ, ao tratarmos dos observáveis de tempo duplo faz-se necessário o uso da representação de Heisenberg.

Uma outra forma de interpretar os correladores quânticos é a partir do processo experimental utilizado para se medir tal operador. Começaremos com o procedimento conhecido como protocolo de medições em dois tempos (*two-point measurements* - TPM) ele é descrito pela seguinte sequência de operações: [43]

1. Preparado um sistema arbitrário representado pelo estado ρ_0 , no instante t_0 realiza-se a medição de uma grandeza \mathcal{A} sobre o sistema obtendo a saída a_i . O estado após a medição será um autoestado do observável A :

$$\frac{A_i \rho_0 A_i}{\operatorname{Tr}(A_i \rho_0)} = A_i, \quad (4.19)$$

2. O sistema medido interage com o ambiente (um campo magnético induzido, por exemplo) até o instante t_1 . Seu estado colapsado evolui unitariamente até o tempo t_1 , a partir do mapa

$$\phi_{t_1}(A_i) = U(t_1) \frac{A_i \rho_0 A_i}{\operatorname{Tr}(A_i \rho_0)} U^\dagger(t_1). \quad (4.20)$$

3. Por último, em t_2 realiza-se uma medição da grandeza \mathcal{B} obtendo-se a saída b_j . O

estado evoluído colapsará, após a medição, para:

$$\frac{B_j \phi_{t_1}(A_i) B_j}{\text{Tr}[B_j \phi_{t_1}(A_i)]} = B_j. \quad (4.21)$$

A probabilidade conjunta de obtermos os resultados a_i em t_1 e b_j em t_2 , para o estado de preparação ρ_0 será

$$p(a_i, b_j | A, B) = p(a_i | A) p(b_j | a_i, A, B) \quad (4.22a)$$

$$= \text{Tr}[A_i \rho_0] \text{Tr}[B_j \phi_{t_2-t_1}(A_i)]. \quad (4.22b)$$

Considerando novamente a grandeza \mathcal{C} , se as medições de \mathcal{A} e \mathcal{B} forem tomadas a partir de um protocolo TPM, teremos para seu valor médio:

$$\langle C \rangle^{\text{TPM}} = \langle AB \rangle^{\text{TPM}} = \sum_{i,j} a_i b_j p(a_i, b_j | A, B) \quad (4.23a)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j \text{Tr}[A_i \rho_0] \text{Tr}[B_j \phi_{t_2-t_1}(A_i)]. \quad (4.23b)$$

O correlator calculado via protocolo TPM não carece de simetrização tal qual pela evolução unitária (4.15), tido que os colapsos envolvidos no processo garantem autovalores reais.

Imaginemos uma configuração na qual uma preparação $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ passa por uma medição em $t_1 = 0$ de $S(\hat{y})$ assumindo um dos possíveis autoestados $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + is_j |1\rangle)$ com $s_j = \pm 1$. Evoluído sob o hamiltoniano $H = \omega S(\hat{z})$ até o instante $t_2 = \frac{\pi}{2\omega}$, este estado resulta em $|\psi(\frac{\pi}{2\omega})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - s_j |1\rangle)$. É realizada uma medição de $S(\hat{x})$ obtendo-se o valor médio

$$\langle S(\hat{y}) S(\hat{x}) \rangle^{\text{TPM}} = \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{4} s_i s_j \text{Tr}[S_i \phi_t(S_j)] \text{Tr}[S_j \rho_0] \quad (4.24a)$$

$$\doteq \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{4} s_i s_j \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & s_i \\ s_i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -s_j \\ -s_j & 1 \end{pmatrix} \right] \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -is_j \\ is_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (4.24b)$$

$$= \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{16} (s_i s_j - 1) \quad (4.24c)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}. \quad (4.24d)$$

Já pela evolução unitária 4.11, denotada pelo superíndice U,

$$\langle S(\hat{y}, t_1)S(\hat{x}, t_2) \rangle^U = \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{4} s_i s_j \operatorname{Tr} \left[S_i \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \{S_j, \rho_0\} \right] \quad (4.25a)$$

$$\doteq \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{4} s_i s_j \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i s_i \\ -i s_i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (4.25b)$$

$$= \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{16} s_i s_j \quad (4.25c)$$

$$= 0. \quad (4.25d)$$

Concluimos que há situações em que o valor dos correladores calculados a partir de um protocolo TPM e via evolução unitária divergem. Podemos comparar ambas as propostas para dois observáveis quaisquer reescrevendo 4.16c como

$$\langle C(t_1, t_2) \rangle^U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i b_j \operatorname{Tr}[B_j(t_2)\{A_i(t_1), \rho_0\}] \frac{\operatorname{Tr}[A_i(t_1)\rho_0]}{\operatorname{Tr}[A_i(t_1)\rho_0]} \quad (4.26a)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j \operatorname{Tr}[A_i(t_1)\rho_0] \operatorname{Tr}[B_j(t_2)\Gamma_i(t_1)] \quad (4.26b)$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j \operatorname{Tr}[A_i(t_1)\rho_0] \operatorname{Tr}[B_j\Gamma_i(t_1)], \quad (4.26c)$$

em que $\Gamma_i(t_1) := \frac{\{A_i(t_1), \rho_0\}}{2\operatorname{Tr}[A_i(t_1)\rho_0]}$. O protocolo TPM presume que no instante t_1 o estado ρ_0 medido seja o mesmo de quando houve a preparação, isso é análogo à assumirmos que $A(t_1)$ ocorra em um instante inicial, sem dinâmica, com projetores $A_i(0) \equiv A_i$. Deste modo, a igualdade entre (4.23) e (4.26) se dará, tomando $t_1 = 0$, quando os termos

$$\langle C(t_1, t_2) \rangle^U = \langle C \rangle^{\text{TPM}} \quad (4.27a)$$

$$\sum_{i,j} a_i b_j \operatorname{Tr}[A_i \rho_0] \operatorname{Tr}[\phi_{t_2}^*(B_j)\Gamma_i] = \sum_{i,j} a_i b_j \operatorname{Tr}[A_i \rho_0] \operatorname{Tr}[B_j \phi_{t_2}(A_i)] \quad (4.27b)$$

$$\operatorname{Tr}[B_j \phi_{t_2}(\Gamma_i)] = \operatorname{Tr}[B_j \phi_{t_2}(A_i)] \quad (4.27c)$$

$$\Gamma_i = A_i \quad (4.27d)$$

$$\frac{\{A_i, \rho_0\}}{2\operatorname{Tr}[A_i \rho_0]} = A_i. \quad (4.27e)$$

Embora em alguns casos haja a igualdade, de forma geral (4.27) será violada tal como visto no exemplo dos spins, ao passo que os correladores calculados a partir de evoluções unitárias e via TPM irão prever valores diferentes. Uma condição *suficiente* para que a igualdade seja válida será, de acordo com o critério de BA, quando houver realidade para

a grandeza \mathcal{A} , de modo que $\rho_0 = \sum_j A_j \rho_0 A_j$ e assim

$$\frac{\{A_i, (\sum_j A_j \rho_0 A_j)\}}{2 \operatorname{Tr}[A_i (\sum_j A_j \rho_0 A_j)]} = \frac{\sum_j \delta_{ij} A_j \rho_0 A_j + \sum_j A_j \rho_0 \delta_{ij} A_j}{2 \operatorname{Tr}[\sum_j \delta_{ij} A_j \rho_0 A_j]} \quad (4.28a)$$

$$\frac{2A_i \rho_0 A_i}{2 \operatorname{Tr}[\rho_0 A_i]} = A_i \quad (4.28b)$$

No exemplo anterior, para uma preparação como autoestado de $S(\hat{y})$, $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$, ambas as médias serão iguais:

$$\langle S(\hat{y})S(\hat{x}) \rangle^{\text{TPM}} = \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{4} s_i s_j \operatorname{Tr}[S_i \phi_t(S_j)] \operatorname{Tr}[S_j \rho_0] \quad (4.29a)$$

$$\doteq \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{4} s_i s_j \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & s_i \\ s_i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -s_j \\ -s_j & 1 \end{pmatrix} \right] \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -is_j \\ is_j & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (4.29b)$$

$$= \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{16} s_i s_j (1 - s_i s_j)(1 + s_j) \quad (4.29c)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}; \quad (4.29d)$$

$$\langle S(\hat{y})S(\hat{x}) \rangle^{\text{U}} = \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{4} s_i s_j \operatorname{Tr} \left[S_i \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \{S_j, \rho_0\} \right] \quad (4.30a)$$

$$\doteq \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{4} s_i s_j \operatorname{Tr} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & is_i \\ -is_i & 1 \end{pmatrix} \frac{1+s_j}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (4.30b)$$

$$= \sum_{i,j} \frac{\hbar^2}{16} s_i s_j (1 + s_j)(1 - s_i) \quad (4.30c)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}. \quad (4.30d)$$

Um resultado semelhante também ocorre quando tratamos da diferença entre dois observáveis [14]. Dada uma preparação $|\psi_0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, estamos interessados no valor médio de $\langle S(\hat{y}, t_2) - S(\hat{y}, t_1) \rangle$ o qual, descrito a partir de uma evolução unitária

com $H = \omega S(\hat{z})$ e para os tempos $t_1 = 0$ e $t_2 = \frac{\pi}{2\omega}$, será

$$\langle S(\hat{y}, \pi/2\omega) - S(\hat{y}, 0) \rangle^U = \langle S(\hat{x}) - S(\hat{y}) \rangle^U \quad (4.31a)$$

$$\doteq \sum_{i,j} \frac{\hbar}{2} (s_i - s_j) \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & s_i \\ s_i & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -is_j \\ is_j & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (4.31b)$$

$$= \sum_{i,j} \frac{\hbar}{2} (s_i - s_j) \left(\frac{s_i}{2} \right) \quad (4.31c)$$

$$= \frac{\hbar}{2}. \quad (4.31d)$$

Já para uma descrição via TPM, $|\psi_0\rangle$ colapsa em $t_1 = 0$ para um dos possíveis autoestados de $S(\hat{y})$ na forma geral $|s_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + is_j|1\rangle)$. Submetendo este estado à uma interação do tipo $H = \omega S(\hat{z})$ até o instante $t_2 = \frac{\pi}{2\omega}$, de forma que $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\omega t/2}|0\rangle + is_j e^{i\omega t/2}|1\rangle)$ e $|\psi(\pi/2\omega)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - s_j|1\rangle)$, teremos para o valor médio [14]:

$$\langle S(\hat{y}, t_1) S(\hat{y}, t_2) \rangle^{\text{TPM}} = \sum_{j',j} \frac{\hbar}{2} (s_{j'} - s_j) \text{Tr} [S_{j'} \phi_t(S_j)] \text{Tr} [S_j \rho_0] \quad (4.32a)$$

$$\doteq \sum_{j',j} \frac{\hbar}{2} (s_{j'} - s_j) \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -is_{j'} \\ is_{j'} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -s_j \\ -s_j & 1 \end{pmatrix} \right] \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -is_j \\ is_j & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (4.32b)$$

$$= \sum_{j',j} \frac{\hbar}{2} (s_{j'} - s_j) \left(\frac{1}{4} \right) \quad (4.32c)$$

$$= 0. \quad (4.32d)$$

onde utilizamos j e j' como índices para os observáveis $S(\hat{y}, t_1)$ e $S(\hat{y}, t_2)$ respectivamente. Veremos na próxima seção como se dá o irrealismo para os observáveis definidos em dois instantes.

4.2 Observáveis de dois tempos

A partir da Mecânica Clássica e Estatística nos é familiar a ideia de um Universo descrito a partir de grandezas locais no tempo, tais como a posição e o momentum de uma partícula, correspondendo a um elemento de realidade em cada instante de tempo. Por outro lado, grandezas tais como o deslocamento $q(t_2) - q(t_1)$ não possuiriam realidade em um instante único, uma vez que por construção seus constituintes $q(t_{1,2})$ estariam definidos em instantes distintos. Essa visão, contudo, é um tanto restritiva. Não seria

um problema, a princípio, interpretarmos a quantidade $q(t_2) - q(t_1)$ com um elemento de realidade definido a partir de dois tempos nos quais, quando houver elemento de realidade para cada $q(t)$, então por premissa haveria um realismo associado ao deslocamento.

Outro conceito que revisaremos é a concepção de estado. A Mecânica Clássica, Estatística e Termodinâmica estão arraigadas na ideia de que os sistemas físicos estão definidos por estados, os quais fundamentam a noção de uma realidade associada a eles em cada instante. Então, por exemplo, a energia de um gás acaba sendo pensada como um elemento da realidade física porque acredita-se que cada partícula deste gás possui uma energia bem definida (um elemento de realidade), mesmo quando seu valor é desconhecido pelo observador. Ao passo que falamos de observáveis de dois tempos, perdemos a noção de um único estado destes objetos.

Estamos interessados em um estudo mais profundo destes observáveis de dois tempos (ODT), entendendo-os como grandezas com uma realidade própria e não apenas uma correlação entre as realidades de seus observáveis constituintes (OC). Em outras palavras, queremos investigar se os ODT podem ser pensados como elementos de realidade dados dois instantes fixos. Deste modo, a realidade do deslocamento, por exemplo, deve ser entendida além de uma função das realidades das posições em seus respectivos tempos. Desde que fixemos t_1 e t_2 , o deslocamento pode ser interpretado como uma “quantidade indivisível” (uma grandeza *per se*).

De forma ilustrativa, contamos com a noção de trabalho descrito como $W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \vec{v} \cdot \vec{F}$. É evidente que não podemos conceber um valor para o trabalho dado apenas um instante de tempo, de modo que não pode ser entendido como uma grandeza *local no tempo*. Por definição, o trabalho envolve um processo, logo só pode ser concebido como uma variável física significativa se fixarmos dois instantes de tempo.

Em MQ, faremos uma proposição fundamentada na representação de Heisenberg. Estabelecendo os tempos t_1 e t_2 , um ODT $C(t_2, t_1)$ será resultado da operação entre os observáveis de Heisenberg $A(t_1)$ e $B(t_2)$ de interesse e, a partir de sua diagonalização para estes instantes específicos de tempo, obteremos seus autovalores e respectivos autovetores. Estes autovalores serão distintos da simples combinação dos autovalores de $A(t_1)$ e $B(t_2)$, possuindo um significado próprio associado à *preparação* do sistema físico e aos tempos t_1 e t_2 determinados.

A ideia fundamental consiste em procurar os autovalores do observável resultante das operações entre $A(t_1)$ e $B(t_2)$ (sendo geralmente o produto, $\{A(t_1), B(t_2)\}/2$, ou a subtração, $B(t_2) - A(t_1)$), e indicar sob quais circunstâncias experimentais tais autovalores são obtidos. Deste modo, é respeitado o postulado da MQ segundo o qual medições de grandezas físicas retornam um dos autovalores de seu observável correspondente.

Seguindo esta proposta, voltaremos ao exemplo da diferença entre os observáveis de spin $S(\hat{y}, t_2) - S(\hat{y}, t_1)$, analisado nos tempos $t_1 = 0$ e $t_2 = \pi/2\omega$, para formular o ODT $O(t_1, t_2)$:

$$O(0, \pi/2\omega) := S(\hat{y}, \pi/2\omega) - S(\hat{y}, 0) = S(\hat{x}) - S(\hat{y}) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

cujos autovalores serão $\varepsilon \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$ e autovetores $|o_\varepsilon\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + \varepsilon e^{-i\pi/4}|1\rangle)$ com $\varepsilon = \pm 1$. A diferença entre os autovalores de $S(\hat{y}, \pi/2\omega)$ e $S(\hat{y}, 0)$ poderá assumir os valores $\{-\hbar, 0, \hbar\}$. Como este conjunto é distinto dos autovalores de $O(0, \pi/2\omega)$, então $\varepsilon \frac{\hbar}{\sqrt{2}}$ não devem ser interpretados como a combinação dos possíveis resultados das medições de $S(\hat{y}, t)$ nos instantes $t_{1,2}$.

Notemos que a diagonalização (4.33) se trata apenas de um artifício algébrico, de modo que o valor médio de $\langle S(\hat{y}, \pi/2\omega) - S(\hat{y}, 0) \rangle$, dado estado $|\psi_0\rangle = |+\rangle$, se mantém o mesmo da interpretação padrão (4.31d):

$$\langle O(0, \pi/2\omega) \rangle = \sum_\varepsilon \varepsilon \frac{\hbar}{\sqrt{2}} p(\varepsilon) = \sum_\varepsilon \varepsilon \frac{\hbar}{\sqrt{2}} |\langle s_\varepsilon | \psi_0 \rangle|^2 = \frac{\hbar}{2}. \quad (4.34)$$

Para exemplificar a interpretação para os autovalores de um ODT, temos a grandeza deslocamento definida a partir das quantidades posição em um intervalo de tempo. Considerando o operador posição evoluído a partir da representação de Heisenberg

$$X(t) := U^\dagger(t) X U(t) = e^{\frac{it}{\hbar} H} X e^{-\frac{it}{\hbar} H}, \quad (4.35)$$

e, por simplicidade, uma partícula livre de massa m associada ao operador hamiltoniano $H = \frac{P^2}{2m}$ de modo que

$$X(t) = X + \frac{P t}{m}, \quad (4.36)$$

teremos o operador deslocamento definido como

$$D(t_1, t_2) := X(t_2) - X(t_1) = \frac{P(t_2 - t_1)}{m}. \quad (4.37)$$

Preparando esta partícula como um autovalor do operador momentum $|p_0\rangle$, a partir da relação de autovalores obtemos

$$D(t_1, t_2) |p_0\rangle = \frac{p_0(t_2 - t_1)}{m} |p_0\rangle. \quad (4.38)$$

As grandezas posição e momentum são complementares, de modo que uma partícula que tenha seu momentum bem definido p_0 , correspondente a um elemento de realidade para P , terá máxima flutuação para a sua posição X . Ainda que a posição não tenha elemento de realidade, o deslocamento $D(t_1, t_2)$, por depender apenas do operador de momentum, estará bem definido para a preparação $|p_0\rangle$. Assim, a realidade de $D(t_1, t_2)$ está dissociada dos elementos de realidade de $X(t_1)$ e $X(t_2)$. Já os autovalores do desloca-

mento estarão associados com um sistema preparado como autoestado de $D(t_1, t_2)$, dado os tempos $t_{1,2}$, neste caso correspondendo à uma partícula preparada com um momentum bem definido o qual será conservado nos instantes $t_{1,2}$.

Estudaremos agora, de forma mais detalhada, a realidade de um operador de dois tempos construído a partir do produto entre observáveis de spin. De forma geral, tomaremos as grandezas spin nas direções \hat{u} e \hat{v} nos respectivos instantes t_1 e t_2 . Utilizando da representação de Heisenberg para uma interação descrita pelo hamiltoniano $H = \omega S(\hat{h})$, teremos para a evolução dos operadores com $\tau = \omega t$:

$$S(\hat{v}, t) = \{\cos \tau \hat{v} + \sin \tau (\hat{v} \times \hat{h}) + [1 - \cos \tau](\hat{h} \cdot \hat{v})\hat{h}\} \cdot \vec{\sigma} \quad (4.39a)$$

$$= \vec{v}(\tau) \cdot \vec{\sigma}. \quad (4.39b)$$

em que $\vec{v}(\tau) \equiv \{\cos \tau \hat{v} + \sin \tau (\hat{v} \times \hat{h}) + [1 - \cos \tau](\hat{h} \cdot \hat{v})\hat{h}\}$.

Visto que os valores médios são os objetos fundamentais da MQ, estudaremos o correlator $\langle C(t_2, t_1) \rangle = \langle S(\hat{u}, t_1)S(\hat{v}, t_2) \rangle$. O observável de dois tempos será construído a partir da diagonalização do produto simetrizado dos operadores

$$C(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \left[S(\hat{u}, t_1)S(\hat{v}, t_2) + S(\hat{v}, t_2)S(\hat{u}, t_1) \right] \quad (4.40a)$$

$$= \frac{\hbar^2}{8} \left[\left(\vec{u}(t_1) \cdot \vec{\sigma} \right) \left(\vec{v}(t_2) \cdot \vec{\sigma} \right) + \left(\vec{v}(t_2) \cdot \vec{\sigma} \right) \left(\vec{u}(t_1) \cdot \vec{\sigma} \right) \right] \quad (4.40b)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \left(\vec{u}(t_1) \cdot \vec{v}(t_2) \right) \mathbb{I}_2. \quad (4.40c)$$

Como obtivemos a matriz identidade, qualquer base servirá de autobase para este operador. Visto que o critério de BA é construído a partir de observáveis com bases próprias, o cálculo da irrealidade de $C(t_1, t_2)$ não está sistematizado. Contudo, este é um resultado particular. Podemos formular o correlator das funções de observáveis, $f(A(t_1))$ e $g(B(t_2))$, tais como potências ou a soma destes operadores, de modo que se construirmos, por exemplo, um correlator segundo $S(\hat{u}, t_1)$ e $S^2(\hat{v}, t_2) := S(\hat{v}, t_2)S(\hat{v}, t_2)$ a diagonalização será diferente. Neste exemplo, como estaremos tratando de três operadores, a princípio teríamos duas maneiras de definir o correlator. A primeira como a simetrização do produto:

$$C\left(S(\hat{u}, t_1), S^2(\hat{v}, t_2)\right) = \frac{1}{2} \left\{ S(\hat{u}, t_1)[S(\hat{v}, t_2)S(\hat{v}, t_2)] + [S(\hat{v}, t_2)S(\hat{v}, t_2)]S(\hat{u}, t_1) \right\}. \quad (4.41)$$

Usando a identidade

$$\left[(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) \right] (\vec{c} \cdot \vec{\sigma}) = \left[i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \right] \mathbb{I}_2 + \left[(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \right] \cdot \vec{\sigma}, \quad (4.42)$$

obtemos

$$C\left(S(\hat{u}, t_1), S^2(\hat{v}, t_2)\right) = \frac{\hbar^3}{8} \vec{u}(t_1) \cdot \vec{\sigma}, \quad (4.43)$$

o qual pode ser escrito em termos de seus projetores

$$C\left(S(\hat{u}, t_1), S^2(\hat{v}, t_2)\right) = \frac{\hbar^3}{8} C_0(\vec{u}, t_1) + \left(-\frac{\hbar^3}{8}\right) C_1(\vec{u}, t_1) \quad (4.44)$$

sendo $C_0(\vec{u}, t_1) \doteq \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + \vec{u}(t_1) \cdot \vec{\sigma})$ e $C_1(\vec{u}, t_1) \doteq \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 - \vec{u}(t_1) \cdot \vec{\sigma})$.

Contudo, esta expressão não traz informação sobre o observável $S(\hat{v}, t_2)$, então construiremos o correlator de uma segunda forma, a partir das combinações possíveis entre os operadores:

$$\begin{aligned} C\left(S(\hat{u}, t_1), S^2(\hat{v}, t_2)\right) &= \frac{1}{3} \left\{ [S(\hat{u}, t_1)S(\hat{v}, t_2)]S(\hat{v}, t_2) + [S(\hat{v}, t_2)S(\hat{v}, t_2)]S(\hat{u}, t_1) + [S(\hat{v}, t_2)S(\hat{u}, t_1)]S(\hat{v}, t_2) \right\} \\ &= \frac{\hbar^3}{24} \left[\vec{u}(t_1) + 2\left(\vec{u}(t_1) \cdot \vec{v}(t_2)\right)\vec{v}(t_2) \right] \cdot \vec{\sigma} \\ &= \frac{\hbar^3}{24} \vec{c}(t_1, t_2) \cdot \vec{\sigma}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

denotando $\vec{c}(t_1, t_2) \equiv \left[\vec{u}(t_1) + 2\left(\vec{u}(t_1) \cdot \vec{v}(t_2)\right)\vec{v}(t_2) \right]$. As duas formas pretendem ser, a princípio, versões quânticas possíveis para um observável composto do produto de três operadores de spin.

Com estes resultados, estamos aptos para calcular a irrealidade do ODT $C\left(S(\hat{u}, t_1), S^2(\hat{v}, t_2)\right)$ e dos observáveis $S(\hat{u}, t_1)$ e $S(\hat{v}, t_2)$ individualmente, a fim de constatarmos se há uma relação direta entre elas.

Fixando, por simplicidade, $t_1 = 0$ e $t_2 = 2\pi$ e restringindo os vetores no quadrante $\hat{x} \times \hat{z}$ através das parametrizações $\vec{u}(0) = \sin \mu \hat{x} + \cos \mu \hat{z}$ e $\vec{v}(2\pi) = \sin \nu \hat{x} + \cos \nu \hat{z}$ tal como mostrado na Figura 4.1 obtém-se

$$\begin{aligned} C\left(S(\hat{u}, 0), S^2(\hat{v}, 2\pi)\right) &= \frac{\hbar^3}{24} \left[\vec{u}(0) + 2\left(\vec{u}(0) \cdot \vec{v}(2\pi)\right)\vec{v}(2\pi) \right] \cdot \vec{\sigma} \\ &= \frac{\hbar^3}{24} \left[\left((2 - \cos 2\nu) \sin \mu + \cos \mu \sin 2\nu\right)\hat{x} + \left((2 + \cos 2\nu) \cos \mu + \sin \mu \sin 2\nu\right)\hat{z} \right] \\ &\equiv \frac{\hbar^3}{24} \vec{c}(0, 2\pi) \cdot \vec{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

De forma análoga à estudada em (2.43), podemos construir os projetores de $C\left(S(\hat{u}, 0), S^2(\hat{v}, 2\pi)\right)$. Dado que o vetor $\vec{c}(0, 2\pi)$ irá variar dentro do quadrante $\hat{x} \times \hat{z}$, iremos parametrizá-lo a

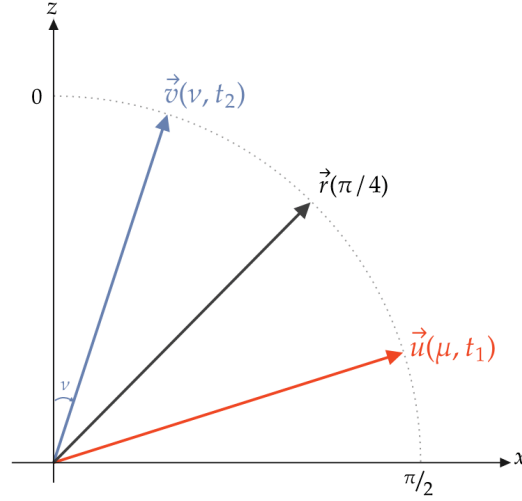


Figura 4.1: Representação dos vetores associados aos observáveis $S(\vec{u}, t_1)$ e $S(\vec{v}, t_2)$ e à preparação ρ_0 .

partir de um ângulo γ na forma $\vec{c}(0, 2\pi) = \sin \gamma \hat{x} + \cos \gamma \hat{z}$, assim decorrem os projetores

$$|\vec{c}, 0\rangle\langle\vec{c}, 0| \doteq \begin{pmatrix} \cos^2(\gamma/2) & \cos(\gamma/2) \sin(\gamma/2) \\ \sin(\gamma/2) \cos(\gamma/2) & \sin^2(\gamma/2) \end{pmatrix}, \quad (4.47a)$$

$$|\vec{c}, 1\rangle\langle\vec{c}, 1| \doteq \begin{pmatrix} \sin^2(\gamma/2) & -\sin(\gamma/2) \cos(\gamma/2) \\ -\cos(\gamma/2) \sin(\gamma/2) & \cos^2(\gamma/2) \end{pmatrix}. \quad (4.47b)$$

Calculando o mapa de uma medição não seletiva de $C(S(\hat{u}, 0), S^2(\hat{v}, 2\pi)) \equiv C$ para o estado puro

$$\rho_0 = \frac{1}{2} [\mathbb{I}_2 + (\sin \pi/4 \hat{x} + \cos \pi/4 \hat{z}) \cdot \vec{\sigma}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

$$\Phi_C(\rho) = |\vec{c}, 0\rangle\langle\vec{c}, 0| \rho |\vec{c}, 0\rangle\langle\vec{c}, 0| + |\vec{c}, 1\rangle\langle\vec{c}, 1| \rho |\vec{c}, 1\rangle\langle\vec{c}, 1|, \quad (4.49)$$

obtemos a partir de sua diagonalização a entropia correspondente e, como $\mathbf{S}(\rho_0) = 0$, a irrealidade para $C(S(\hat{u}, 0), S^2(\hat{v}, 2\pi))$. Variando $\mu, \nu \in [0, \pi/2]$ a irrealidade assumirá os valores mostrados na figura 4.2.

De forma análoga, podemos calcular separadamente a irrealidade para os observáveis $S(\hat{u}, 0)$ e $S(\hat{v}, 2\pi)$ dada a mesma preparação ρ_0 . A ideia é verificarmos se a realidade de $C(S(\hat{u}, 0), S^2(\hat{v}, 2\pi))$ presume também a existência de $S(\hat{u}, 0)$ e $S(\hat{v}, 2\pi)$. Uma maneira de investigarmos esta relação é comparando as situações onde há elemento de realidade para o ODT, $\mathfrak{I}_C(\rho_0) = 0$, e realismo para $S(\hat{u}, 0)$ e $S(\hat{v}, 2\pi)$ simultaneamente, condição na qual $\mathfrak{I}_{S(\hat{u}, 0)}(\rho_0) + \mathfrak{I}_{S(\hat{v}, 2\pi)}(\rho_0) = 0$. Teremos então para a irrealidade de cada OC e para a soma $\mathfrak{I}_{S(\hat{u}, 0)}(\rho_0) + \mathfrak{I}_{S(\hat{v}, 2\pi)}(\rho_0)$ os valores representados nas figuras 4.3 e 4.4 respectivamente.

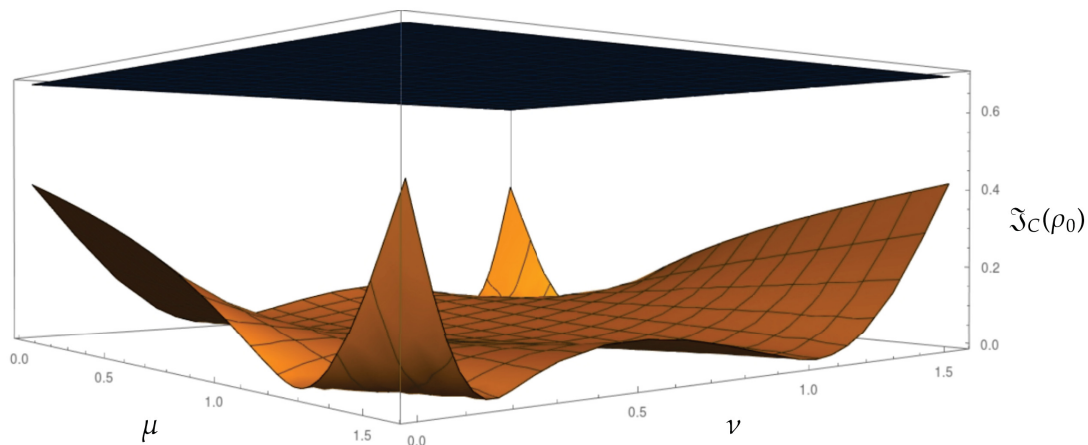


Figura 4.2: Irrealidade para o observável de dois tempos $C(S(\hat{u}, 0), S^2(\hat{v}, 2\pi))$ com os parâmetros μ (vinculado à direção de $S(\hat{u})$) e ν (associado à $S(\hat{v})$) variando entre 0 e $\pi/2$ e limitada superiormente pelo plano $\ln(2)$.

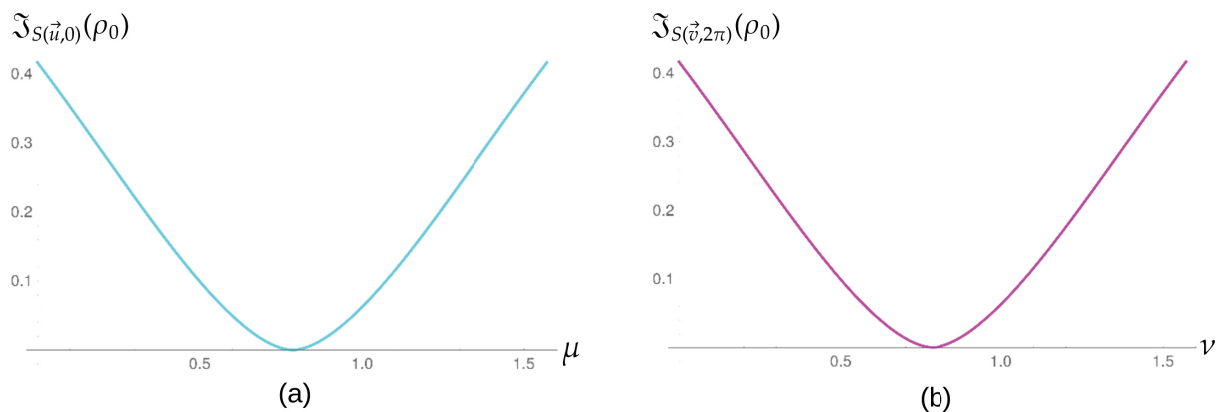


Figura 4.3: Irrealidade dos observáveis $S(\vec{u}, 0)$ (a) e $S(\vec{v}, 2\pi)$ (b) para o estado $\rho_0 = 1/2[\mathbb{I}_2(\sin \pi/4 \hat{x} + \cos \pi/4 \hat{z}) \cdot \vec{\sigma}]$, variando seus vetores entre 0 e $\pi/2$ correspondendo às direções \hat{x} e \hat{z} respectivamente.

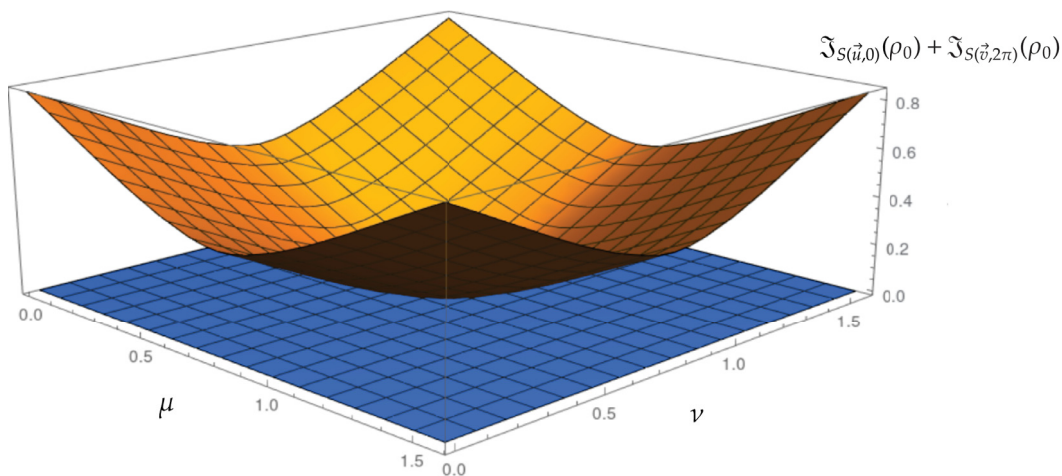


Figura 4.4: Soma das irrealidades de $S(\vec{u}, 0)$ e $S(\vec{v}, 2\pi)$. Ambos serão reais (soma nula) quando $\mu = \nu = \pi/4$.

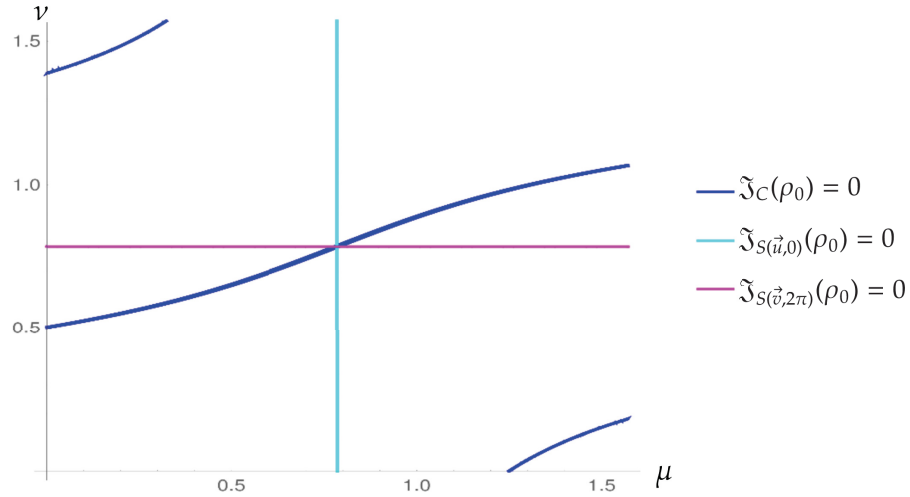


Figura 4.5: As curvas representam configurações de μ e ν nas quais as irrealidades para o ODT $C(S(\hat{u}, 0), S^2(\hat{v}, 2\pi))$ (azul) e para os seus OCs $S(\hat{u}, 0)$ (ciano) e $S(\hat{v}, 2\pi)$ (magenta) se anulam dado o estado ρ_0 . As grandezas em questão não são todas reais simultaneamente.

Plotando as regiões em que as irrealidades de $C(S(\hat{u}, 0), S^2(\hat{v}, 2\pi))$, $S(\hat{u}, 0)$ e $S(\hat{v}, 2\pi)$ se anulam simultaneamente, obtemos as curvas demonstradas na figura 4.5. Os observáveis $S(\hat{u}, 0)$ e $S(\hat{v}, 2\pi)$ serão reais quando estiverem paralelos à direção $\sin(\pi/4)\hat{x} + \cos(\pi/4)\hat{z}$, na qual o estado ρ_0 corresponderá a um autoestado de ambos. Podemos concluir também que o ODT será real mesmo quando seus OCs forem irrealis. Portanto, este é mais um exemplo que demonstra que os observáveis concebidos em dois tempos possuem elementos de realidade próprios.

Estudaremos, por último, um ODT com um significado físico mais direto. Para isso, consideremos o operador $S(\hat{v}) = \hat{v} \cdot \vec{S}$ em uma direção arbitrária \hat{v} a partir do momentum angular de spin generalizado $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$. Iremos nos ater, por simplicidade, às componentes $\vec{\sigma}$ para construir o exemplo que se segue. Tendo a evolução

$$e^{i\tau\hat{h}\cdot\vec{\sigma}/2}\vec{\sigma}e^{-i\tau\hat{h}\cdot\vec{\sigma}/2} = \cos\tau\vec{\sigma} + \sin\tau(\hat{h}\times\vec{\sigma}) + [1 - \cos\tau](\hat{h}\cdot\vec{\sigma})\hat{h}, \quad (4.50)$$

com $\tau = \omega t$, podemos escrever a diferença

$$\vec{\sigma}(t_2) - \vec{\sigma}(t_1) = [\vec{\sigma} - (\hat{h}\cdot\vec{\sigma})\hat{h}](\cos\tau_2 - \cos\tau_1) + (\hat{h}\times\vec{\sigma})(\sin\tau_2 - \sin\tau_1) \quad (4.51)$$

e, denotando $\Delta\theta = \omega\Delta t$, definiremos o *torque médio* na forma

$$\vec{T}_{\text{med}}(t_1, t_2) := \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \frac{\hbar\Delta\vec{\sigma}}{2\Delta t} = \frac{\hbar\omega\Delta\vec{\sigma}}{2\Delta\theta}, \quad (4.52)$$

com $\Delta t = t_2 - t_1$. Sendo $t_1 = t$ e $t_2 = t + \Delta t$, tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$ obtemos o *torque*

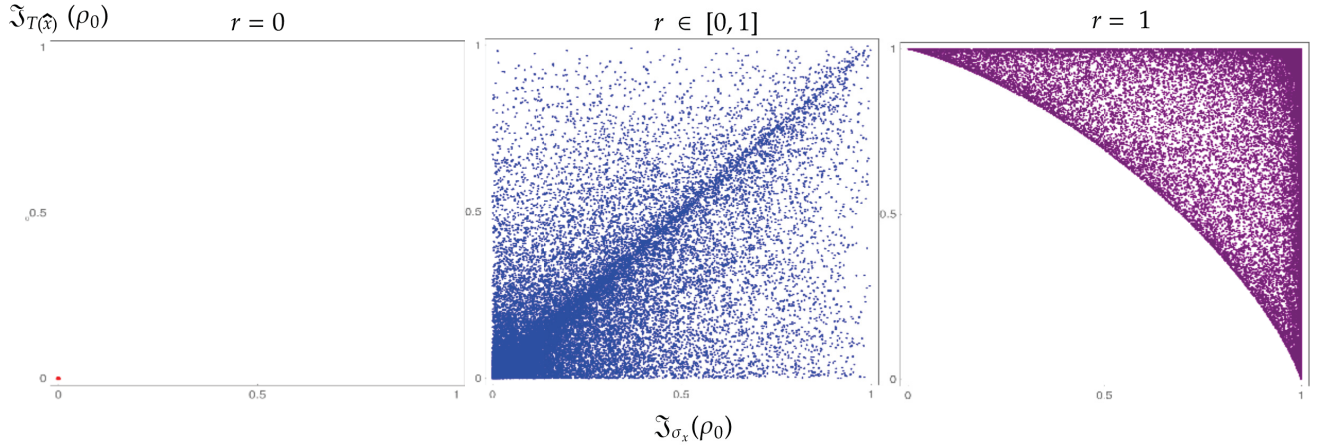


Figura 4.6: Comparação entre $\mathfrak{J}_{\sigma_x}(\rho_0)$ e $\mathfrak{J}_{T(\hat{x})}(\rho_0)$ a partir de 10^5 escolhas para os parâmetros $\{r, \theta, \varphi, \theta_h, \varphi_h\}$. Em vermelho são considerados os estados maximamente mistos, $\rho_0 = \frac{\mathbb{I}}{d}$, ($r = 0$); mistos genéricos ($r \in [0, 1]$) em azul e puros ($r = 1$) em roxo.

instantâneo

$$\vec{T}(t) := \frac{d\vec{\sigma}(t)}{d\theta} = \left[(\hat{h} \cdot \vec{\sigma}) \hat{h} - \vec{\sigma} \right] \sin \tau + (\hat{h} \times \vec{\sigma}) \cos \tau = \hat{h} \times \vec{\sigma}(t). \quad (4.53)$$

Considerando um instante $\tau = 2\pi$, de modo que $\vec{\sigma}(t) = \vec{\sigma}$, e sendo $\hat{h} = \{h_x, h_y, h_z\}$ e $\vec{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$, as componentes x desses objetos terão como operadores correspondentes

$$[\vec{\sigma}(t)]_x = \hat{x} \cdot \vec{\sigma}(t) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\vec{T}(t)]_x = \hat{x} \cdot (\hat{h} \times \vec{\sigma}) = h_y \sigma_z - h_z \sigma_y \doteq \begin{pmatrix} h_y & i h_z \\ -i h_y & -h_z \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Iremos então comparar a realidade de $\vec{T}_{\text{med}}(t, t + \Delta t)$ com a de $\vec{\sigma}(t)$ e $\vec{\sigma}(t + \Delta t)$. Ao passo que tomamos o limite $\Delta t \rightarrow 0$ e estamos considerando, por exemplo, suas componentes na direção \hat{x} no tempo $\tau = 2\pi$, basta compararmos os elementos de realidade para $[\vec{T}(t)]_x \equiv T(\hat{x})$ e $[\vec{\sigma}(t)]_x \equiv \sigma_x$.

Para um estado geral $\rho_0 = \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$ e as parametrizações $\vec{r} = \{r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta\}$, $n_y = \sin \theta_h \sin \varphi_h$ e $n_z = \cos \theta_h$, os resultados para o cálculo das irrealidades $\mathfrak{J}_{\sigma_x}(\rho_0)$ e $\mathfrak{J}_{T(\hat{x})}(\rho_0)$ são demonstrados na figura 4.6, considerando os estados maximamente mistos ($r = 0$), mistos genéricos ($r \in [0, 1]$) e estados puros ($r = 1$), a partir do sorteio de 10^5 pontos $\{r, \theta, \varphi, \theta_h, \varphi_h\}$.

Para os estados maximamente mistos, ambas as realidades se anulam, ou seja, $T(\hat{x})$ e σ_x são reais simultaneamente. Ao passo que consideramos estados cada vez mais puros ($r \rightarrow 1$), como mostrado na figura 4.7, a irrealidade entre os observáveis $\vec{T}(\hat{x})$ e σ_x assumem uma relação $\mathfrak{J}_{\sigma_x}(\rho_0) + \mathfrak{J}_{T(\hat{x})}(\rho_0) \geq \gamma(r)$, sendo $\gamma(r)$ uma cota não trivial, o que demonstra que para estes estados não é possível a realidade simultânea de ambos os observáveis.

Este é mais um exemplo que demonstra a particularidade dos elementos de realidade

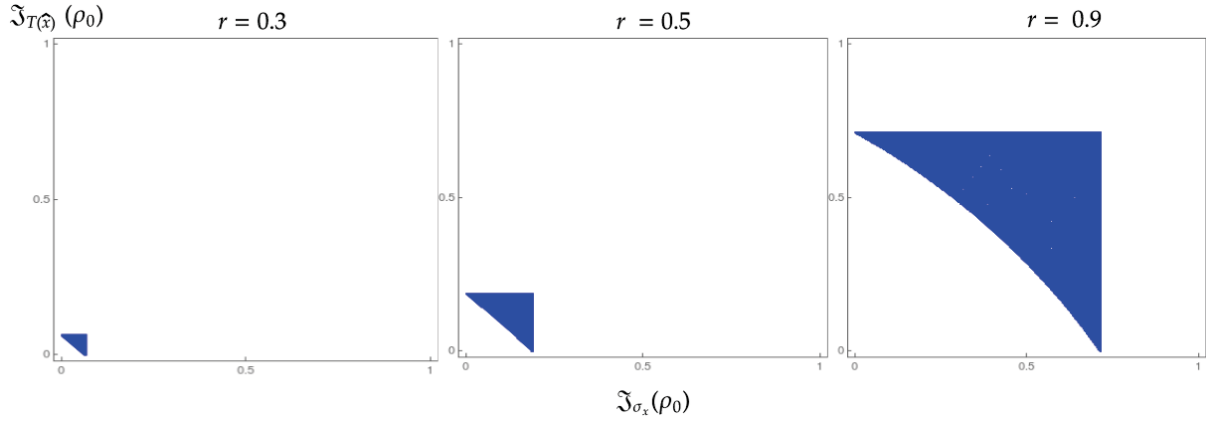


Figura 4.7: Comparação entre $\mathfrak{J}_{\sigma_x}(\rho_0)$ e $\mathfrak{J}_{T(\hat{x})}(\rho_0)$ a partir de 10^5 escolhas para os parâmetros $\{r, \theta, \varphi, \theta_h, \varphi_h\}$ para os estados mistos com $r \in \{0.3, 0.5, 0.9\}$.

dos observáveis concebidos em dois instantes, até mesmo para situações onde estão definidos em intervalos infinitesimais de tempo. Deste modo, os postulados da MQ que garantem (i) que toda grandeza física seja representada por um observável ($\mathcal{A} \rightarrow A$, $\mathcal{B} \rightarrow B$), e (ii) que os resultados experimentais (medições) destas quantidades correspondam aos autovalores dos operadores ($A = \sum_i a_i A_i$, $B = \sum_j b_j B_j$), tratando de grandezas de dois tempos demonstram – segundo a proposta apresentada e resultados obtidos – uma nova interpretação. Nela, (i) toda grandeza física definida em dois instantes será representada por um observável de Heisenberg, $\mathcal{C} \rightarrow C(A(t_1), B(t_2))$, e (ii) os autovalores deste observável de dois tempos corresponderão à preparação de um sistema como sendo um autoestado do ODT, tendo fixo os tempos t_1 e t_2 , $C(t_1, t_2) = \sum_k c_k C_k$ com c_k distinto da composição entre a_i e b_j .

Conclusão

A Mecânica Quântica trouxe novas perspectivas para muitos dos paradigmas tidos pela Mecânica Clássica e Estatística, tais como os sistemas físicos possuírem propriedades bem definidas (elementos de realidade) como posição e momentum em todo o tempo. A emergência de um critério para caracterizar e quantificar a realidade para as grandezas físicas tem sido palco para inúmeros trabalhos, a começar pelo artigo pioneiro de EPR. De forma geral, estes critérios foram propostos para analisar grandezas definidas a partir de um único instante.

A motivação para este trabalho foi estudar a realidade de quantidades dependentes de dois instantes no tempo, tais como o deslocamento e o trabalho. Para isso, revisamos como seus observáveis correspondentes seriam descritos a partir da literatura, assim como suas decorrentes probabilidades e valores médios. Uma abordagem segundo evoluções unitárias mostrou-se de difícil compreensão, tendo em vista a representação de Schrödinger, uma vez que o estado ρ deveria caracterizar um sistema em dois instantes concomitantemente, o que não é concebido tanto na MQ quanto pela física clássica. Já o uso de um modelo TPM é emblemático, visto se tratar de um processo que envolve o colapso do estado em um tempo intermediário, fornecendo a ele um caráter de classicalidade, removendo suas coerências quânticas e atribuindo um elemento de realidade para a quantidade medida. Além de problemas teóricos e experimentais, há situações onde os modelos divergem suas previsões. Para o caso dos correlatores temporais, vimos que este desacordo decorre, de maneira suficiente, da irrealidade associada ao observável inferido em um primeiro momento.

Propomos então uma maneira para construirmos os observáveis relacionados as grandezas de tempo duplo. Constatamos que seus autovalores dizem respeito não a um processo de medição (o qual está fundamentado em um tempo único), mas à preparação de um sistema físico como sendo um autoestado deste ODT, tendo estabelecido $t_{1,2}$. Ao passo que estes instantes variem, deve-se construir um novo observável para quantificar os novos possíveis valores para a mesma grandeza física em questão. Como exemplo, estudamos o ODT $O(t_1, t_2)$ como sendo a diferença entre os observáveis de spin $S(\hat{y}, t_2) - S(\hat{y}, t_1)$. Fixando os instantes $t_1 = 0$ e $t_2 = \pi/2\omega$ e considerando a interação $H = \omega S(\hat{z})$, obtivemos $S(\hat{y}, 0) = S(\hat{y})$ e $S(\hat{y}, \pi/2\omega) = S(\hat{x})$, e os autovalores e autoestados de $O(0, \pi/2\omega)$ seguiram da diagonalização do operador resultante $S(\hat{x}) - S(\hat{y})$. Notemos que para tempos

diferentes, em geral $S(\hat{y}, t_1) \neq S(\hat{y})$ e $S(\hat{y}, t_2) \neq S(\hat{x})$, conseqüentemente $O(t_1, t_2)$ terá um outro conjunto de autovalores e projetores.

Outro importante aspecto demonstrado é o de que os ODT podem ser reais ainda que os observáveis que os constituem não sejam. Sendo assim, a posição de uma partícula pode não estar definida em dois instantes, com respectivos observáveis $X(t_1)$ e $X(t_2)$, embora seu deslocamento $D(t_2, t_1) := X(t_2) - X(t_1)$ esteja bem estipulado. Este é o caso, por exemplo, para uma partícula livre de massa m na qual resolvendo as equações de Heisenberg para a evolução dos operadores teremos $D(t_2, t_1) = P(t_2 - t_1)/m$, de modo que se a partícula tenha inicialmente um momentum bem estabelecido $|p_0\rangle$, sendo um autoestado de P , então o deslocamento $D(t_2, t_1)$ possuirá um elemento de realidade.

Fomentados pelo critério de realismo de BA, também analisamos detalhadamente a realidade para outros dois estudos de caso. No primeiro, compomos um correlator a partir de três operadores de spin, visto a importância destes observáveis para exemplificar grandezas duplamente valoradas, assim como o uso destas médias para descrever processos físico-químicos. No segundo propomos um torque médio a partir da variação temporal do momentum angular de spin, estendendo para o caso de uma variação temporal infinitesimal. Novamente demonstrou-se que os elementos de realidade para os ODT são distintos ao dos observáveis que o constituem.

Dessa forma, foi possível propor uma nova interpretação para a realidade das grandezas definidas em dois tempos, como também sistematizar a construção de seus observáveis associados. Este estudo mostrou-se como uma generalização do critério de BA empregado para quantidades evoluídas em um instante único ou definidas em tempo duplo. Estes resultados compreenderam uma abordagem algébrica e conceitual original à estabelecida na literatura, abrindo margem para a discussão de uma realidade definida de forma não-local no tempo.

Além de investigar outros observáveis não-locais no tempo (podendo contar até mesmo com mais de dois instantes), este estudo fomentará trabalhos futuros com a perspectiva de generalizar o critério de realismo de BA para teorias probabilísticas genéricas estendidas no tempo. Visto a discordância entre os modelos TPM e evolução unitária, pode-se investigar quais as condições necessárias para tal divergência, assim como sua relação com a irrealidade dos observáveis que compõem um ODT. O tema também pode ter implicações no estudo da indefinição de ordem causal, na qual pode-se verificar se há irrealismo para alguma figura de mérito que faça referência a um determinado ordenamento (por exemplo, o vetor velocidade indica uma determinada ordem de eventos, tal qual uma trajetória ou percurso de eventos), de modo que se não houver realismo, então a ordem estará indeterminada.

Referências

- [1] J. B. Bastos Filho, “Os problemas epistemológicos da realidade, da compreensibilidade e da causalidade na teoria quântica,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 25, p. 125, 2003.
- [2] S. K. R. Popper, *A lógica da investigação científica; Três concepções acerca do conhecimento humano; A sociedade aberta e seus inimigos*. Abril Cultural, 1980.
- [3] J. B. Bastos Filho, “Causalidade, (in)determinismo e (im)previsibilidade: por que o conceito de causa é tão importante?,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 30, p. 1, 2008.
- [4] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Physical Review*, vol. 47, no. 10, p. 777, 1935.
- [5] N. Bohr, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Physical Review*, vol. 48, no. 8, p. 696, 1935.
- [6] D. Bohm, “A suggested interpretation of the quantum theory in terms of ‘hidden’ variables, i and ii,” *Physical Review*, vol. 85, p. 93, 1952.
- [7] J. S. Bell, “On the einstein podolsky rosen paradox,” *Physics Physique Fizika*, vol. 1, no. 3, p. 195, 1964.
- [8] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, “Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers,” *Physical Review Letters*, vol. 49, no. 25, p. 1804, 1982.
- [9] B. Hensen, H. Bernien, A. E. Dréau, A. Reiserer, N. Kalb, M. S. Blok, J. Ruitenber, R. F. Vermeulen, R. N. Schouten, C. Abellán, *et al.*, “Loophole-free bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres,” *Nature*, vol. 526, no. 7575, p. 682, 2015.
- [10] A. J. Leggett and A. Garg, “Quantum mechanics versus macroscopic realism: Is the flux there when nobody looks?,” *Physical Review Letters*, vol. 54, no. 9, p. 857, 1985.

- [11] A. Bilobran and R. Angelo, “A measure of physical reality,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 112, no. 4, p. 40005, 2015.
- [12] P. Talkner, E. Lutz, and P. Hänggi, “Fluctuation theorems: Work is not an observable,” *Physical Review E*, vol. 75, no. 5, p. 050102, 2007.
- [13] A. J. Roncaglia, F. Cerisola, and J. P. Paz, “Work measurement as a generalized quantum measurement,” *Physical Review Letters*, vol. 113, no. 25, p. 250601, 2014.
- [14] T. P. Silva and R. M. Angelo, “Quantum mechanical work,” *Physical Review A*, vol. 104, no. 4, p. 042215, 2021.
- [15] E. Prugovečki, “On a theory of measurement of incompatible observables in quantum mechanics,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 45, no. 6, p. 2173, 1967.
- [16] R. H. d. A. Farias *et al.*, “Uma introdução aos fundamentos da mecânica quântica,” 1987.
- [17] F. D. S. MELO, “Espaços métricos completos e teorema de banach-steinhaus,”
- [18] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, vol. 17. John Wiley & Sons, 1991.
- [19] S. Designolle, P. Skrzypczyk, F. Fröwis, and N. Brunner, “Quantifying measurement incompatibility of mutually unbiased bases,” *Physical Review Letters*, vol. 122, no. 5, p. 050402, 2019.
- [20] J. Schwinger, “Unitary operator bases,” *Proceedings of the national academy of sciences of the United States Of America*, vol. 46, no. 4, p. 570, 1960.
- [21] D. Bohm, “Quantum theory,” Dover Publications Inc, New York, 1989.
- [22] L. A. de Castro, O. P. d. S. Neto, and C. A. Brasil, “An introduction to quantum measurements with a historical motivation,” *arXiv preprint: 1908.03949*, 2019.
- [23] J. Jauch and C. Piron, “Generalized localizability,” tech. rep., Univ. of Geneva, 1967.
- [24] J. A. Bergou, “Quantum state discrimination and selected applications,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 84, p. 012001, IOP Publishing, 2007.
- [25] M. A. Nielsen and I. Chuang, “Quantum computation and quantum information,” 2002.
- [26] R. J. d. Assis *et al.*, “Povm no contexto de eletrodinâmica quântica de cavidades,” 2017.
- [27] J. Maziero, “Entendendo a entropia de von neumann,” *Revista Brasileira de Ensino*

- de Física*, vol. 37, 2015.
- [28] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2018.
- [29] M. Redhead, “Incompleteness, nonlocality, and realism. a prolegomenon to the philosophy of quantum,” *Mechanics, Oxford, Clarendon Press*, 1987.
- [30] O. PESSOA JUNIOR, “Conceitos de física quântica. v. ii,” *São Paulo: Editora Livraria da Física*, 2006.
- [31] E. G. Cavalcanti and H. M. Wiseman, “Bell nonlocality, signal locality and unpredictability (or what bohr could have told einstein at solvay had he known about bell experiments),” *Foundations of Physics*, vol. 42, no. 10, p. 1329, 2012.
- [32] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, “Proposed experiment to test local hidden-variable theories,” *Physical Review Letters*, vol. 23, no. 15, p. 880, 1969.
- [33] L. Silveira and R. Angelo, “Classical-hidden-variable description for entanglement dynamics of two-qubit pure states,” *Physical Review A*, vol. 95, no. 6, p. 062105, 2017.
- [34] D. J. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*. Pearson International Edition (Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, 2005), 1960.
- [35] L. Clemente and J. Kofler, “Necessary and sufficient conditions for macroscopic realism from quantum mechanics,” *Physical Review A*, vol. 91, no. 6, p. 062103, 2015.
- [36] J. Halliwell, “Leggett-garg inequalities and no-signaling in time: A quasiprobability approach,” *Physical Review A*, vol. 93, no. 2, p. 022123, 2016.
- [37] T. Mahesh, A. Shukla, S. S. Hegde, C. Kumar, H. Katiyar, S. Joshi, and K. Rao, “Ancilla assisted measurements on quantum ensembles: General protocols and applications in nmr quantum information processing,” *arXiv preprint: 1509.04506*, 2015.
- [38] C. Robens, W. Alt, D. Meschede, C. Emary, and A. Alberti, “Ideal negative measurements in quantum walks disprove theories based on classical trajectories,” *Physical Review X*, vol. 5, no. 1, p. 011003, 2015.
- [39] C. Rulli and M. Sarandy, “Global quantum discord in multipartite systems,” *Physical Review A*, vol. 84, no. 4, p. 042109, 2011.
- [40] R. Angelo and A. Ribeiro, “Complementarity as corollary,” *arXiv preprint: 1304.2286*, 2013.
- [41] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio, “Quantifying coherence,” *Physical*

- Review Letters*, vol. 113, no. 14, p. 140401, 2014.
- [42] A. Tokmakoff, “5.74 introductory quantum mechanics ii, spring 2005,” 2005.
- [43] M. H. Mohammady, “Self-consistency of the two-point energy measurement protocol,” *Physical Review A*, vol. 103, no. 4, p. 042214, 2021.
- [44] A. C. S. Costa, “Correlações quânticas em sistemas abertos,” 2016.
- [45] L. Vaidman, “Weak-measurement elements of reality,” *Foundations of Physics*, vol. 26, no. 7, p. 895, 1996.
- [46] A. Shukla, S. S. Hegde, T. MAHESH, S. Joshi, C. Kumar, H. Katiyar, and K. Rao, “Ancilla-assisted measurements on quantum ensembles: general protocols and applications in nmr quantum information processing,” Indian Academy of Sciences, 2015.