

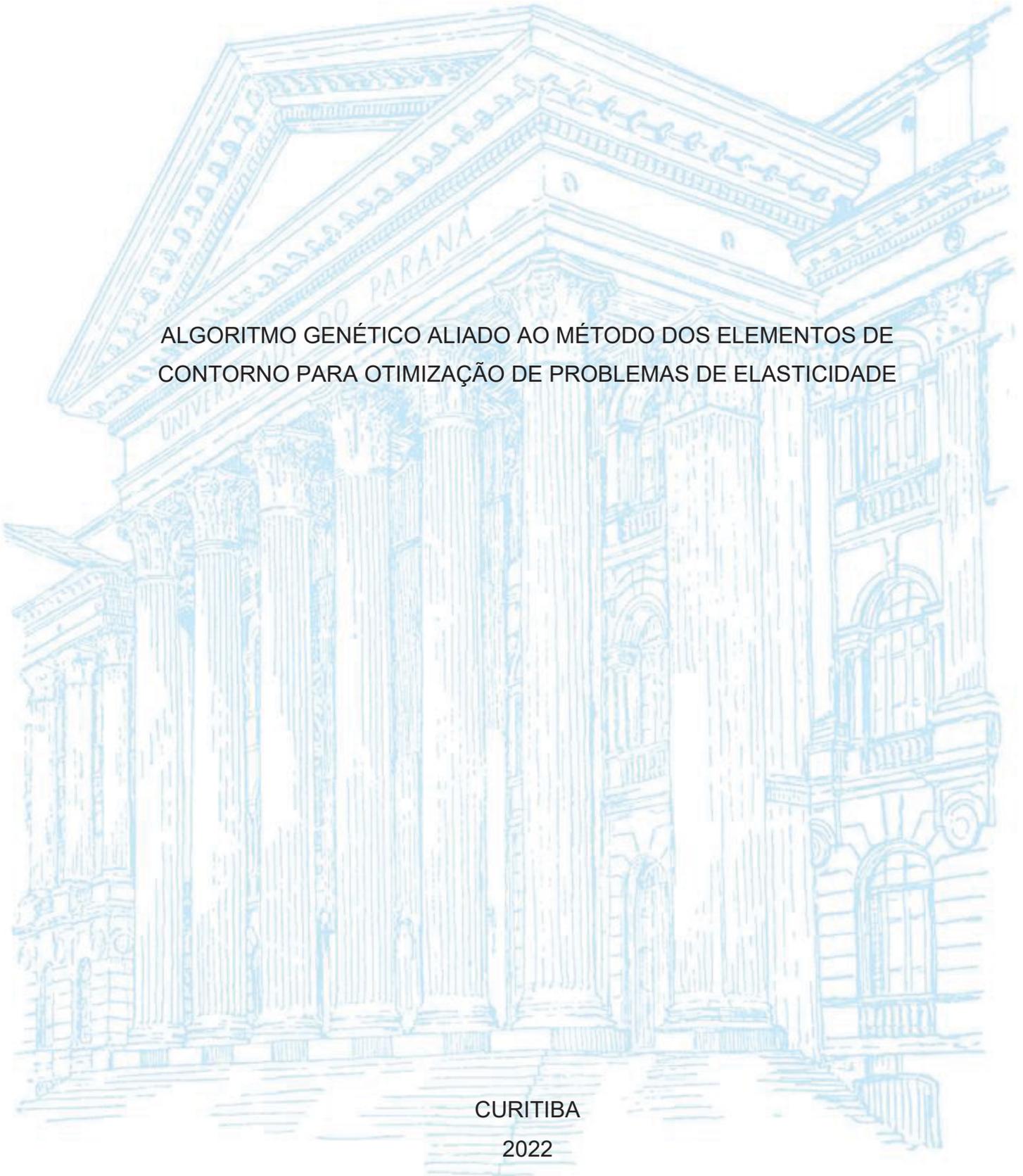
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALEXANDRE TACHIBANA DOS SANTOS

ALGORITMO GENÉTICO ALIADO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO PARA OTIMIZAÇÃO DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

CURITIBA

2022



ALEXANDRE TACHIBANA DOS SANTOS

ALGORITMO GENÉTICO ALIADO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO PARA OTIMIZAÇÃO DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Marques Carrer

CURITIBA

2022

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S237a Santos, Alexandre Tachibana dos
Algoritmo genético aliado ao método dos elementos de contorno
para otimização de problemas de elasticidade [recurso eletrônico] /
Alexandre Tachibana dos Santos – Curitiba, 2022.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor
de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos
em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Marques Carrer

1. Algoritmos genéticos. 2. Métodos de elementos de contorno.
3. Otimização matemática. I. Universidade Federal do Paraná. II.
Carrer, José Antonio Marques. III. Título.

CDD: 518.1

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ALEXANDRE TACHIBANA DOS SANTOS** intitulada: **Algoritmo Genético Aliado ao Método dos Elementos de Contorno para Otimização de Problemas de Elasticidade**, sob orientação do Prof. Dr. JOSÉ ANTONIO MARQUES CARRER, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 04 de Março de 2022.

Assinatura Eletrônica

11/03/2022 11:28:13.0

JOSÉ ANTONIO MARQUES CARRER

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

11/03/2022 12:17:12.0

AMANDA JAREK

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

11/03/2022 11:08:40.0

LUIZ ALKIMIN DE LACERDA

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

11/03/2022 12:02:43.0

WEBE JOÃO MANSUR

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)

Dedico esse trabalho às pessoas que amo.

AGRADECIMENTOS

À minha companheira Le, que está sempre ao meu lado nas horas difíceis, nas horas boas, nas tristes e felizes. Juntos compartilhamos as experiências da vida. Obrigado por aturar minhas chatices intermitentes.

Aos meus pais e ao meu irmão, por sempre me apoiarem até mesmo nas decisões mais difíceis. Pelos churrascos e momentos de alívio.

À minha família, pelas boas experiências, que garantem que os períodos difíceis passam. Aos que já se foram e na forma de memórias me influenciam e inspiram.

Ao meu orientador Prof. Carrer, que foi muito paciente e flexível em todo o período da orientação, tirando minhas dúvidas, sugerindo melhorias e compartilhando conhecimento. Garantiu que meu período de pesquisa fosse uma ótima experiência com muita aprendizagem.

Aos amigos e colegas do Lactec, que me permitiram experiências fantásticas e me fizeram sentir como parte de algo especial.

Ao PPGMNE e às pessoas que o compõem, por compartilhar e expandir o conhecimento. Em especial à Jully, que inúmeras vezes me ajudou.

Aos membros da banca por dedicar seu valioso tempo e conhecimento para melhoria deste trabalho.

À CAPES e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro proporcionado por meio do PDPG-FAP durante um difícil e enriquecedor período de transição.

“A chicken was a flightless bird [...] The idea was to kill it and pull out its feathers, and cut off its head and feet and scoop out its internal organs – and then chop it into pieces and fry the pieces, and put the pieces in a waxed paper bucket with a lid on it, [...]”.

(Kurt Vonnegut, *Breakfast of Champions*, Capítulo 15, 1973)

RESUMO

O equilíbrio entre economia e segurança em estruturas é essencial para garantir sua viabilidade econômica e para permitir que materiais com disponibilidade limitada sejam utilizados de maneira consciente. A forma da estrutura é outro fator de grande importância, afinal, sua complexidade é diretamente proporcional à dificuldade executiva. A obtenção de estruturas econômicas, seguras e com formas que permitam boa construtibilidade pode ser atingida com a utilização de técnicas meta heurísticas de otimização. Este trabalho tem como principal objetivo desenvolver um código computacional capaz de realizar a otimização da geometria, com alterações topológicas sendo aplicadas para obtenção de estruturas mais eficientes. Para tanto, um Algoritmo Genético (AG) associado ao Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi desenvolvido. Para combater a tendência dos Algoritmos Genéticos de produzir formas altamente complexas, que impactam negativamente a executabilidade do projeto, foi introduzida e avaliada a aplicação de um ajuste polinomial no contorno formado pelas variáveis do problema. Esse ajuste garantiu a simplificação das formas obtidas e a redução do grau de dificuldade executiva das estruturas resultantes. O código computacional desenvolvido foi aplicado em problemas encontrados na literatura, de modo a permitir comparação direta dos resultados obtidos, e foi também aplicado em problemas comumente encontrados para verificar sua capacidade de garantir que as restrições fossem respeitadas e avaliar a convergência do problema para formas otimizadas de acordo com o objetivo imposto.

Palavras-chave: Algoritmo Genético. Otimização. Redução da variabilidade. Método dos Elementos de Contorno.

ABSTRACT

A balance between economy and safety in structures is essential to guarantee their economic feasibility while allowing for a conscious use of materials with limited availability. The shape of the structure is another factor of great importance to take into account, after all, the complexity of the form is directly related to how difficult it will be to build it. Obtaining economic and safe structures while guaranteeing that the shape will allow for good constructability may be achieved with the use of metaheuristic optimization techniques. This work has as its main objective the development of a computational code capable of optimizing the geometry by applying topological modifications aiming for more efficient structures. For this purpose, a Genetic Algorithm associated with the Boundary Element Method was developed. In order to avoid the tendencies Genetic Algorithms have to produce highly complex shapes, that negatively impact the structure's buildability, a polynomial fit was introduced and assessed. This polynomial fit allowed for obtaining shape simplifications that reduce the difficulty in the execution of the resulting structures. The computational code was applied in optimization problems brought from scientific literature, which allowed for result comparisons. It was also applied in more commonly found problems to assess its capacity of guaranteeing that restrictions would be complied and that convergence to optimized shapes, taking into account the optimization objectives, would be achieved.

Keywords: Genetic Algorithm. Optimization. Variability Reduction. Boundary Element Method.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – ESQUEMA GRÁFICO DO PROCEDIMENTO UTILIZADO EM ALGORÍTMOS GENÉTICOS.....	28
FIGURA 2 – TENSÕES ATUANTES EM CUBO INFINITESIMAL	30
FIGURA 3 – COMPONENTES DO VETOR r	37
FIGURA 4 – PONTO SINGULAR ξ REMOVIDO DO CONTORNO	38
FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO VISUAL DE CASOS PENALIZADOS POR TRANSLAÇÃO EXCESSIVA.....	49
FIGURA 6 – SEGMENTOS E CONDIÇÕES DE CONTORNO DO FILETE NA CONFIGURAÇÃO ORIGINAL.....	51
FIGURA 7 – DISCRETIZAÇÃO DO FILETE EM ELEMENTOS DE CONTORNO	52
FIGURA 8 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NORMAIS NA DIREÇÃO HORIZONTAL	52
FIGURA 9 – APTIDÃO HISTÓRICA AO LONGO DAS GERAÇÕES	53
FIGURA 10 – VARIAÇÃO OBSERVADA NOS INDIVÍDUOS AO LONGO DAS GERAÇÕES.....	54
FIGURA 11 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NO FILETE OTIMIZADO	54
FIGURA 12 – COMPARAÇÃO DE RESULTADOS FILETE.....	55
FIGURA 13 -GEOMETRIA UTILIZADA NA CONEXÃO DE ANCORAGEM.....	56
FIGURA 14 – ESQUEMA GRÁFICO REPRESENTANDO APLICAÇÃO DE CARGA	57
FIGURA 15 – DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA DA CONEXÃO DE ANCORAGEM	57
FIGURA 16 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NA CONEXÃO DE ANCORAGEM ...	57
FIGURA 17 – APTIDÃO HISTÓRICA DA CONEXÃO DE ANCORAGEM; (a) VARIAÇÃO DA APTIDÃO AO LONGO DAS GERAÇÕES E (b) AJUSTE REPRESENTANDO TAXAS DE GANHO DE APTIDÃO.....	58
FIGURA 18 – FORMA OTIMIZADA APRESENTANDO ONDULAÇÕES NOS SEGMENTOS F e G	59
FIGURA 19 – COMPARAÇÃO ENTRE CONEXÃO DE ANCORAGEM OTIMIZADA COM (EM VERDE) E SEM (EM AZUL) O AJUSTE POLINOMIAL	59

FIGURA 20 – DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES EQUIVALENTES DE VON-MISES NA CONEXÃO DE ANCORAGEM; (a) OTIMIZAÇÃO SEM AJUSTE E (b) OTIMIZAÇÃO COM AJUSTE	60
FIGURA 21 – TENSÕES DISTRIBUÍDAS NA CONEXÃO DE ANCORAGEM OBTIDAS POR SUN et al. (2018) NA OTIMIZAÇÃO PSO	60
FIGURA 22 – COMPARAÇÃO DAS TENSÕES OBSERVADAS NO SEGMENTO F ENTRE CONFIGURAÇÃO ORIGINAL, OTIMIZAÇÃO PSO E OTIMIZAÇÃO AG AJUSTADA.	61
FIGURA 23 – SEGMENTOS E CONDIÇÕES DE CONTORNO DA VIGA.....	62
FIGURA 24 – DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES OBTIDAS NA CONFIGURAÇÃO INICIAL DA ESTRUTURA.....	63
FIGURA 25 – DISCRETIZAÇÃO DA VIGA EM ELEMENTOS DE CONTORNO	64
FIGURA 26 – APTIDÃO HISTÓRICA AO LONGO DAS GERAÇÕES	65
FIGURA 27 – COMPARAÇÃO ENTRE ESTRUTURA ORIGINAL E ESTRUTURA OTIMIZADA ANTES DA APLICAÇÃO DO AJUSTE	66
FIGURA 28 – COMPARAÇÃO ENTRE A CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA COM E SEM A APLICAÇÃO DE AJUSTE POLINOMIAL	66
FIGURA 29 – DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES NORMAIS NO SENTIDO HORIZONTAL PARA CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA APÓS O AJUSTE POLINOMIAL	67
FIGURA 30 – SEGMENTOS DA VIGA BI ENGASTADA.....	68
FIGURA 31 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES PARA A CONFIGURAÇÃO ORIGINAL DA VIGA BI ENGNASTADA.....	69
FIGURA 32 – DISCRETIZAÇÃO UTILIZADA PARA O PROBLEMA DA VIGA BI ENGASTADA.....	70
FIGURA 33 – APTIDÃO HISTÓRICA AO LONGO DAS GERAÇÕES PARA A VIGA BI ENGASTADA.....	71
FIGURA 34 – CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA DA VIGA BI ENGASTADA ANTES DA APLICAÇÃO DE AJUSTE POLINOMIAL	71
FIGURA 35 – CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA AJUSTADA DA VIGA BI ENGASTADA	72
FIGURA 36 – TENSÕES OBTIDAS PARA CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA DA VIGA BI ENGASTADA APÓS APLICAÇÃO DO AJUSTE POLINOMIAL	72

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – CARACTERÍSTICAS DE ALGORITMOS GENÉTICOS	26
TABELA 2 – PSEUDOCÓDIGO DE ALGORITMO GENÉTICO CLÁSSICO	27
TABELA 3 – SUB-ROTINAS IMPLEMENTADAS PARA APLICAÇÃO DE ALGORITMO GENÉTICO	45
TABELA 4 – COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS FILETE	55

LISTA DE SIGLAS

ACO	Otimização Colônia de Formigas (<i>Ant Colony Optimization</i>)
AG	Algoritmos Genéticos
CS	Busca Cuco (<i>Cuckoo Search</i>)
FA	Algoritmo Libélula (<i>Firefly Algorithm</i>)
HJPS	Busca de Padrão Hooke-Jeeves (<i>Hooke-Jeeves Pattern Search</i>)
IA	Inteligência Artificial
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
NMDS	Busca por declínio Nelder-Mead (<i>Nelder-Mead Downhill Search</i>)
PSO	Otimização por Enxame de Partículas (<i>Particle Swarm Optimization</i>)
SA	Recozimento Simulado (<i>Simulated Annealing</i>)

LISTA DE SÍMBOLOS

CARACTERES ROMANOS

A - matriz dos coeficientes de deslocamentos e forças de superfície incógnitos do problema

b_i - força de corpo

b - vetor de forças de corpo

$c_{ik}(\xi)$ - coeficiente que representa o limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ik}^* d\Gamma_\varepsilon \right]$

E - módulo de elasticidade

$f_i(x)$ - funções objetivo

F - vetor de condições de contorno

$g_k(x)$ - desigualdades de restrição

G - módulo de elasticidade transversal

H e **G** - matrizes dos coeficientes de influência da estrutura

$h_j(x)$ - igualdades de restrição

h - altura da viga

I - momento de inércia

I^q - vetor de deslocamento unitário

L - comprimento da viga

M - número de objetivos

n_j - cossenos diretores

N - número de nós

NE - número de elementos

p_k - forças de superfície

P_k - cargas unitárias

q - carga distribuída

Q - número de nós por elemento

r - vetor distância entre ponto fonte e ponto campo

r_i - taxas de projeção de r

\mathfrak{R}^d - espaço de decisão

u_k - deslocamento

u_{ik}^* e p_{ik}^* - soluções fundamentais

\bar{u}_k e \bar{p}_k - valores conhecidos de deslocamento e força de superfície

\mathbf{u} e \mathbf{p} - deslocamentos e forças de superfície

\mathbf{u}^j e \mathbf{p}^j - deslocamentos e forças de superfície nodais

\mathbf{u}^* e \mathbf{p}^* - matrizes de coeficientes das soluções fundamentais

x_i - variáveis de decisão

x - ponto campo

\mathbf{X} - vetor de incógnitas

CARACTERES GREGOS

Γ - contorno

δ_{ij} - delta de Kronecker

Δ - delta de Dirac

ε - deformação

λ e μ - constantes de Lamé

ν - coeficiente de Poisson

ξ - ponto fonte

σ - tensão

Φ - matriz de interpolação

ϕ_i - funções de forma

Ω - domínio

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 OBJETIVOS	17
1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO	17
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	19
3 MATERIAIS E MÉTODOS	23
3.1 OTIMIZAÇÃO	23
3.2 ALGORITMOS GENÉTICOS	25
3.2.1 Procedimento	26
3.3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	29
3.3.1 Elasticidade Linear	29
3.3.1.1 Estado de Tensões	29
3.3.1.2 Relações deformação e deslocamento	31
3.3.1.3 Relações constitutivas	32
3.3.2 Formulação integral do contorno	33
3.3.2.1 Soluções fundamentais	36
3.3.2.2 Equação integral no contorno	37
3.3.2.3 Formulação de elementos de contorno	39
3.3.2.4 Sistema de equações	41
3.3.2.5 Movimento de corpo rígido	43
4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	45
4.1 FUNÇÃO APTIDÃO	48
4.2 RESTRIÇÕES	48
5 APLICAÇÃO	50
5.1 FILETE	50
5.2 CONEXÃO DE ANCORAGEM	55
5.3 VIGA ENGASTADA	62
5.4 VIGA BIENGASTADA	67
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
6.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	74
REFERÊNCIAS	75
APÊNDICE 1 – PSEUDOCÓDIGOS	78

1 INTRODUÇÃO

O alcance de um balanço entre economia e segurança em estruturas é essencial para garantir a viabilidade econômica e para permitir que materiais com disponibilidade limitada sejam utilizados de maneira consciente. A forma da estrutura é outro fator de grande importância, afinal, sua complexidade é diretamente proporcional à dificuldade executiva. A solução desse problema pode ser dada com a utilização de técnicas de otimização.

A garantia da segurança é muitas vezes relacionada às orientações e definições normativas. Estas devem ser respeitadas para que uma estrutura seja considerada segura. Para tanto, torna-se necessário o estabelecimento de limites de deslocamentos e tensões, que, em problemas de otimização são traduzidos em restrições e objetivos, acarretando o aumento da complexidade para obtenção da solução desses problemas (YANG et al., 2016). Dessa forma, é comum a aplicação de algoritmos meta-heurísticos que permitem obter soluções para problemas de otimização de alta complexidade, com número elevado de restrições e objetivos.

Dentro do grupo de algoritmos meta-heurísticos encontram-se os Algoritmos Genéticos (AG), inspirados na teoria Darwiniana de evolução de sistemas biológicos. Esses algoritmos são baseados em populações e buscam selecionar os indivíduos mais aptos que as compõem, para que suas características sejam transmitidas às gerações futuras. Essas características podem ser representadas pelas propriedades físicas do material e pela forma geométrica do domínio que representa a estrutura.

Este trabalho tem como foco principal a otimização da geometria, com alterações topológicas sendo aplicadas para obtenção de formas estruturais mais eficientes. Com isso, a escolha do método de solução dos problemas de elasticidade é importante, já que influencia diretamente o custo computacional e o tamanho dos vetores de variáveis, que representam as características dos indivíduos. Posto isso, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi escolhido, já que permite a discretização do problema somente no contorno, reduzindo significativamente o número necessário de variáveis enquanto mantém uma alta representatividade nos resultados obtidos.

Em se tratando da forma e da complexidade executiva das estruturas, Algoritmos Genéticos podem ser problemáticos, já que tendem a resultar em estruturas altamente complexas (SUN et al., 2018). Isso se deve à variabilidade das

formas otimizadas obtidas, oriundas da combinação das características entre indivíduos. Para combater esse problema foi introduzida a aplicação de um ajuste polinomial no contorno formado pelas variáveis do problema. Esse ajuste garantiu a simplificação das formas obtidas e a redução da dificuldade executiva.

1.1 OBJETIVOS

O principal objetivo desse trabalho é desenvolver um código computacional que permita realizar otimização topológica de problemas bidimensionais de elasticidade com base em Algoritmos Genéticos e no Métodos dos Elementos de Contorno.

Como objetivo secundário busca-se demonstrar a capacidade desse código de obter bons resultados de otimização. Dessa forma, como métricas de atingimento, os objetivos secundários podem ser descritos como:

- Comparar os resultados obtidos pelo código desenvolvido com resultados apresentados na literatura;
- Verificar a capacidade do código desenvolvido de manter os resultados dentro das restrições definidas;
- Verificar a capacidade do código desenvolvido de reduzir a quantidade de material necessária; e
- Verificar a capacidade do ajuste polinomial em manter a simplicidade das formas obtidas após otimização topológica.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está dividido em 6 capítulos. O primeiro é referente à introdução do estudo, apresentando uma breve contextualização do problema e justificativa, além dos objetivos e descrição da estrutura utilizada para apresentação dos tópicos.

No segundo capítulo é feita uma revisão da bibliografia e é apresentado um breve histórico sobre os problemas de otimização, com exemplos de aplicação em diversas áreas e com enfoque na otimização de problemas de elasticidade.

O terceiro capítulo discorre sobre as técnicas utilizadas para atingir o objetivo do trabalho. Passa pela discussão sobre otimização, tratando sobre diferentes técnicas, são comentados os conceitos de heurística e meta-heurística e Algoritmos

Genéticos são exemplificados. Na sequência são tratados conceitos da teoria da elasticidade e da aplicação do MEC para solução de problemas de elasticidade.

O quarto capítulo consiste na descrição da implementação do código computacional desenvolvido nesse trabalho. São descritas as tecnologias utilizadas para implementação computacional, as sub-rotinas utilizadas para solução do problema de elasticidade por meio do MEC e as sub-rotinas desenvolvidas para possibilitar a otimização por meio de AG.

No quinto capítulo são apresentados os exemplos de aplicação, que foram desenvolvidos com o intuito de atingir os objetivos secundários descritos no item 1.1. Os resultados obtidos pelo código desenvolvido são comparados com aqueles apresentados na literatura. A capacidade de redução de material e a capacidade de manter os limites impostos para deslocamentos e tensões são avaliadas e discutidas.

Por fim, no capítulo 6, são apresentadas as considerações finais e apontados possíveis desenvolvimentos para trabalhos futuros. Na sequência são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas e, nos apêndices, os pseudocódigos para as sub-rotinas desenvolvidas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Desde crianças estamos acostumados a aprender sobre o mundo ao nosso redor com a utilização de heurística, ou seja, tentativa e erro. Ao longo de nossas vidas continuamos aplicando esse método com frequência na solução de problemas. Uma das primeiras utilizações de heurística em forma de algoritmos pode ser atribuída à Alan Turing, ao utilizar essa técnica para quebrar o código alemão da máquina Enigma, responsável por manter as comunicações entre as tropas nazistas em sigilo (YANG, 2018). Assim, em uma de suas primeiras aplicações, algoritmos heurísticos foram utilizados para quebrar códigos, o que permitiu salvar vidas e encurtar a duração da segunda guerra mundial. Desde então os mesmos princípios vem sendo utilizados na solução de uma infinidade de problemas.

Na década de 1960 técnicas de busca para solução de problemas de engenharia aeroespacial foram desenvolvidas por Rechenberg (1965) e Schwefel (1965). Pouco tempo depois, a ideia de mutação foi introduzida por Biernat nos algoritmos de busca de Rechenberg e Schwefel para produção de novas gerações, objetivando a busca de indivíduos mais aptos (SCHWEFEL, 2008). Inspirado pelo processo evolutivo biológico, Fogel (1966) desenvolve técnicas de simulação evolucionárias aplicadas no estudo de inteligência artificial (IA) como processos de aprendizagem.

Em 1975 John Holland publica a descrição de Algoritmos Genéticos (HOLLAND, 1975), que vinham sendo estudados por ele desde a década de 60. No mesmo ano Jong (1975) explora o potencial de Algoritmos Genéticos aplicados em funções objetivo¹ com diferentes características.

Kirkpatrick, Gellat e Vecchi (1983) desenvolvem o método SA (*simulated annealing*), inspirados pelo processo de resfriamento observado no recozimento de metais. O algoritmo é baseado em trajetórias e busca uma solução ótima global a partir de uma suposição inicial, sendo que em cada iteração a solução é avaliada e aceita de acordo com critérios pré-estabelecidos. Caso a solução encontrada seja melhor do que a observada no passo anterior ela é aceita; porém, ressalve-se que

¹ Funções objetivos são critérios utilizados para encontrar o melhor conjunto de variáveis que representa a solução do problema de otimização, em geral seus valores devem ser minimizados ou maximizados (JAMIL et al., 2013).

soluções piores também podem ser aceitas, com critério baseado em probabilidade. Assim, torna-se possível evitar ótimos locais, permitindo que a convergência tenda para um ótimo global, dadas suficientes iterações e passos suficientemente pequenos.

Dorigo (1992), em sua tese de doutorado, estuda diferentes técnicas de otimização com algoritmos baseados na natureza, introduzindo o método ACO (*ant colony optimization*). Essa técnica se inspira nas trajetórias traçadas por carreiras de formigas, que utilizam feromônios para garantir um comportamento coletivo. Koza (1992) introduz a ideia de utilização de princípios genéticos em algoritmos, que por meio da combinação de genes de diferentes indivíduos permite alcançar aptidões maiores a cada geração.

Kennedy e Eberhart (1995) desenvolvem o método PSO (*particle swarm optimization*), tomando como inspiração o comportamento de enxames e bandos. O algoritmo se baseia em uma população com indivíduos alocados ao longo do espaço de busca, comunicando-se uns com os outros para indicar a melhor direção em que cada um deve se deslocar, fazendo com que o bando tenda a convergir para um ótimo global.

Beasley et. al. (1993) destacam a aplicação de Algoritmos Genéticos para solução assertiva de diversos problemas, incluindo problemas nos quais outras técnicas de otimização apresentam dificuldades. Os autores destacam que, apesar de tender para ótimos globais, muitas vezes Algoritmos Genéticos podem resultar em soluções boas com menor tempo de processamento, sendo aplicáveis a problemas onde buscam-se boas soluções com custo computacional reduzido, quando comparado com os custos devidos à utilização de outras técnicas de otimização. Isso faz com que a utilização de Algoritmos Genéticos em problemas de otimização estrutural seja bastante difundida.

Oliveira et al. (2020) aplicaram Algoritmos Genéticos na otimização de pórticos de concreto armado, utilizando como variáveis as dimensões e o posicionamento dos pilares. A função objetivo associada ao problema de otimização envolvia a minimização de custos com materiais, sendo o problema limitado pelos deslocamentos máximos permissíveis.

Cicconi et al. (2019) aplicaram Algoritmos Genéticos associados ao Método dos Elementos Finitos (MEF) na otimização de torres cilíndricas de aço. No seu trabalho, os autores tomaram como objetivo a redução de custos a partir da minimização da quantidade de material utilizada. Para tanto, o problema foi dividido

em três níveis: primeiramente foram analisadas simplificações das estruturas representadas por elementos de viga, de modo a obter subsídios para que análises mais complexas fossem realizadas. Nessa fase a categoria do material a ser utilizada era definida, assim como comprimentos e faixas de espessura para cada seção da torre. Na segunda etapa a espessura dos elementos de chapa foi definida por meio da aplicação de Algoritmos Genéticos. Finalmente a estrutura foi modelada tridimensionalmente como um todo para que então fosse avaliada. Reduções da ordem de 25% foram obtidas nos quesitos peso da estrutura, custo de instalação e custo de materiais.

Feng et al. (2020) aplicaram Algoritmos Genéticos na otimização da *Ponte della Costituzione*, uma estrutura metálica localizada no Grande Canal de Veneza. Os autores utilizaram Algoritmos Genéticos combinados ao Método dos Elementos Finitos (MEF) com o objetivo de reduzir as altas cargas horizontais observadas na estrutura e devidas à sua configuração topológica. Elementos de chapa foram utilizados para a solução do problema e obtenção das tensões atuantes na estrutura. As variáveis levadas em conta envolviam a espessura das chapas de aço assim como as dimensões de cilindros em aço que compõem a estrutura. Como restrições foram especificadas as tensões e os deslocamentos máximos permissíveis. O método de otimização baseado em Algoritmos Genéticos foi comparado pelos autores com resultados obtidos por meio do software comercial ANSYS, que utiliza métodos de otimização baseados em gradientes. A estrutura otimizada com AG obteve reduções de 20% nas cargas horizontais enquanto o método baseado em gradientes resultou em reduções na ordem de 18%.

Khodzhaiev e Reuter (2021) aplicaram Algoritmos Genéticos na otimização de torres de transmissão. Como objetivo os autores consideraram a minimização de custo do material utilizado, o que permite tomar como variáveis tanto as seções transversais dos membros da torre quanto a categoria de aço utilizada e o posicionamento das barras. As restrições aplicadas pelos autores têm origem nos códigos de projeto europeus, limitando as tensões e deslocamentos observados na estrutura. Segundo os autores, a utilização de AG é justificada uma vez que problemas de otimização não lineares, discretos e com alto número de restrições, como é o caso de otimizações estruturais, fazem com que métodos determinísticos de otimização sejam ineficientes. Como resultado, foram observadas reduções de 9% no custo total da torre de transmissão analisada.

No caso de otimização estrutural, para a solução dos problemas de elasticidade e obtenção de valores de tensões e deslocamentos, que são utilizados para determinar a aptidão de cada indivíduo², o Método dos Elementos de Contorno pode ser utilizado, já que é um método eficiente e apresenta resultados muito bons (SANTIAGO, 1987). A característica trazida pelo MEC de discretização somente do contorno reduz em uma dimensão as malhas dos problemas, permitindo representar o domínio com menor número de dados. Isso é uma grande vantagem em se tratando de utilizar as coordenadas da malha do problema como genes no caso de Algoritmos Genéticos.

² O indivíduo representa um conjunto de variáveis (genes) que sofre alterações ao longo de processos iterativos de modo a tender para a melhor solução da função objetivo.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo são discutidas as técnicas utilizadas para implementação de um código computacional capaz de realizar otimização topológica em problemas bidimensionais de elasticidade. Inicialmente são discutidas técnicas de otimização, na sequência enfoque é dado para Algoritmos Genéticos e, por fim, são discutidos conceitos da teoria da elasticidade e do Métodos dos Elementos de Contorno para solução de problemas de elasticidade.

3.1 OTIMIZAÇÃO

A otimização é aplicada em diversos campos, de problemas de engenharia a melhoria de processos industriais e maximização de lucros empresariais. O objetivo atribuído à otimização pode envolver a minimização do consumo de energia, a maximização de lucros, ou a obtenção de formas estruturais mais eficientes, entre muitas outras aplicações. Em geral, problemas de otimização aplicados procuram definir a melhor maneira para utilização de recursos limitados. Yang (2018) descreve problemas de otimização como a busca de resultados máximos ou mínimos para uma função objetivo, com a utilização de variáveis de decisão sujeitas a restrições. Em geral problemas de otimização podem ser descritos da seguinte maneira.

$$\text{Min./máx.} \quad f_i(\mathbf{x}) = (i = 1, 2, \dots, M) \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^d \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a} \quad h_j(\mathbf{x}) = (j = 1, 2, \dots, J) \quad (2)$$
$$g_k(\mathbf{x}) \leq (j = 1, 2, \dots, K)$$

onde $f_i(\mathbf{x})$, $h_j(\mathbf{x})$ e $g_k(\mathbf{x})$ são funções do vetor de decisão.

As funções $f_i(\mathbf{x})$ são chamadas de funções objetivo ou funções de custo, tendo M objetivos. \mathfrak{R}^d é o espaço constituído pelas variáveis de decisão x_i , que podem ser contínuas ou discretas. As restrições são dadas pelas igualdades e desigualdades de $h_j(\mathbf{x})$ e $g_k(\mathbf{x})$.

Yang (2018) identifica dois grandes grupos de algoritmos de otimização: os *algoritmos determinísticos* e os *algoritmos estocásticos*. O autor divide cada grupo em dois subgrupos. Os algoritmos determinísticos são divididos em algoritmos baseados em gradientes, como o algoritmo Newton-Raphson, que utiliza a função objetivo e

suas derivadas, e algoritmos que não exigem gradientes, utilizando somente os valores da função objetivo, como os algoritmos HJPS (Hooke-Jeeves *pattern search*) e NMDs (Nelder-Mead *downhill search*).

Os algoritmos estocásticos são divididos em algoritmos heurísticos e meta-heurísticos. Heurístico remete à descoberta ou investigação de fatos (HEURÍSTICO, 2021), representando a busca de boas soluções para a função objetivo por tentativa e erro. No caso de algoritmos heurísticos uma boa solução pode ser obtida em tempo aceitável com relativamente pouco processamento; porém, não há garantia de que a solução ótima será obtida. Assim, algoritmos heurísticos são apropriados para os casos nos quais é necessário obter uma boa resposta em pouco tempo, sem a necessidade de garantir que a solução ótima seja encontrada. O prefixo meta remete a uma posição posterior, exprimindo uma noção de transcendência (META, 2021), ou seja, no caso de algoritmos meta-heurísticos, o prefixo indica que esses vão além de algoritmos heurísticos. Para tanto, nesses casos, é utilizada uma conjunção da busca por ótimos locais e da aleatoriedade, garantindo melhores resultados quando comparados com aqueles obtidos por algoritmos heurísticos. Tendo isso dito, é comum que na literatura esses termos sejam utilizados como sinônimos.

Em algoritmos meta-heurísticos a conjunção entre busca por ótimos locais e aleatoriedade consiste na intensificação e na diversificação. A intensificação foca na busca do ótimo na região local, onde sabe-se que uma boa solução existe. Para tanto, as variáveis com melhores resultados são selecionadas e, a partir de sua combinação, novos resultados são obtidos. Já a diversificação trás aleatoriedade para o processo, garantindo que o espaço do problema compreenda uma busca global. Uma boa combinação entre intensificação e diversificação garante que o problema tenha convergência para um ótimo global, sendo dadas suficientes iterações, evitando ótimos locais graças à aleatoriedade introduzida pela diversificação.

O subgrupo de algoritmos meta-heurísticos pode ser novamente dividido em algoritmos baseados em populações e em algoritmos baseados em trajetória. Os primeiros utilizam diversos indivíduos com diferentes aptidões, enquanto os segundos utilizam um único agente que tende a apresentar melhores resultados ao longo das iterações. Alguns dos algoritmos baseados em populações são: Algoritmos Genéticos (AG), PSO (*particle swarm optimization*), FA (*firefly algorithm*) e CS (*cuckoo search*).

O algoritmo SA (*simulated annealing*) é um exemplo de algoritmo meta-heurístico baseado em trajetória.

3.2 ALGORITMOS GENÉTICOS

Algoritmos Genéticos foram desenvolvidos por John Holland (1975), sendo baseados na teoria Darwiniana de evolução de sistemas biológicos. A seleção privilegia os indivíduos mais aptos, que serão aqueles com maior número de descendentes. Ao gerar descendentes os genes dos indivíduos mais aptos são transmitidos para as próximas gerações, o que permite que a aptidão dos indivíduos cresça de geração em geração (PORTELA, 2017). Esses princípios dão base ao desenvolvimento de Algoritmos Genéticos, envolvendo três principais ideias: a reprodução, a mutação e a seleção (YANG, 2018).

- A reprodução envolve a combinação de características de dois indivíduos com objetivo de formar um terceiro indivíduo. Essas características são comumente chamadas de genes ou cromossomos.
- A mutação é responsável por alterações nos genes dos indivíduos gerados por meio da reprodução. Essas alterações permitem que dois indivíduos gerem um terceiro com novas características, que podem ser favorecidas durante a seleção, trazendo aleatoriedade ao processo.
- A seleção consiste em escolher aqueles indivíduos que desempenharam um melhor papel. Esses indivíduos são os mais aptos e terão maiores chances de transmitir seus genes às próximas populações.

O funcionamento desses algoritmos envolve em geral uma população composta por indivíduos com características diversas. Cada indivíduo é composto por uma série de características e cada uma dessas características corresponde à um gene. Os genes representam variáveis do problema ligadas a propriedades de interesse, sendo elas, por exemplo, as características físicas de um material, opções de caminho a ser percorrido em um labirinto, seções transversais de uma estrutura treliçada, a altura de uma estrutura sujeita a cargas laterais etc. Esses exemplos podem ser divididos em duas categorias, aqueles onde as variáveis são discretas e aqueles onde as variáveis são contínuas. Genes discretos são utilizados para representar uma série de variáveis com possíveis valores definidos, ou seja, podem

assumir valores fixos em um espaço discreto. É comum utilizar representações binárias para esse tipo de genes ou então um grupo de categorias que está diretamente ligada às variáveis discretas da propriedade do problema representada pelo respectivo gene. Já no caso de genes contínuos o valor que pode ser assumido não está ligado diretamente a valores pré-estabelecidos, podendo então representar de maneira direta uma propriedade física do problema ou então uma taxa dessa propriedade. Um indivíduo é então um conjunto de genes (características), indivíduos são também comumente chamados de cromossomos, criaturas ou fenótipos. Dentre esses indivíduos existem diferentes aptidões, que devem ser avaliadas para permitir o procedimento de solução.

A evolução ocorre seguindo equações que avaliam a aptidão dos indivíduos. O critério de convergência pode ser estabelecido quando um número suficiente de indivíduos em determinada geração apresenta características semelhantes (GREENHALGH et. al., 2000). A randomização é essencial para grande parte dos algoritmos baseados na natureza. É por meio dela que se torna possível ampliar o domínio da busca, ou seja, torna-se possível a obtenção de uma característica favorável que não compunha o domínio de soluções iniciais. É necessário um balanço entre as buscas locais e globais, uma vez que buscas locais permitem maior convergência em detrimento da localização de ótimos globais. Já buscas globais permitem evitar que ótimos locais sejam determinantes; porém, podem diminuir significativamente a convergência do problema. Na TABELA 1 são listadas as características de Algoritmos Genéticos.

TABELA 1 – CARACTERÍSTICAS DE ALGORITMOS GENÉTICOS

Componente	Função
População	Prover diversidade de características
Randomização	Evitar ótimos locais
Seleção e elitismo	Obter convergência

3.2.1 Procedimento

A implementação dos Algoritmos Genéticos envolve a definição de algumas funções utilizadas de forma recorrente em um processo iterativo que permite a evolução ao longo das gerações (SUZUKI, 1995). KATOCH (2020) resume as etapas

realizadas por um Algoritmo Genético clássico em um pseudocódigo, que pode ser observado na TABELA 2.

TABELA 2 – PSEUDOCÓDIGO DE ALGORITMO GENÉTICO CLÁSSICO

Input:	Tamanho da população, n Máximo número de iterações, MAX
Output:	Melhor solução

início	Geração da população inicial com n indivíduos. Definir contador de gerações $t = 0$ Computar a aptidão de cada indivíduo
enquanto ($t < MAX$)	Selecionar par de indivíduos baseado em aptidão Aplicar reprodução selecionando pares de forma probabilística Aplicar mutação aleatória de forma probabilística Substituir população com nova população Incrementar contador, $t = t + 1$
fim enquanto	retornar melhor solução
fim	

FONTE: KATOCH (2020), adaptado.

Para que seja dado início ao processo é necessário que exista uma população inicial composta por uma série de indivíduos com características distintas. A partir dessa população inicial são realizados os procedimentos de seleção, reprodução e mutação de maneira iterativa.

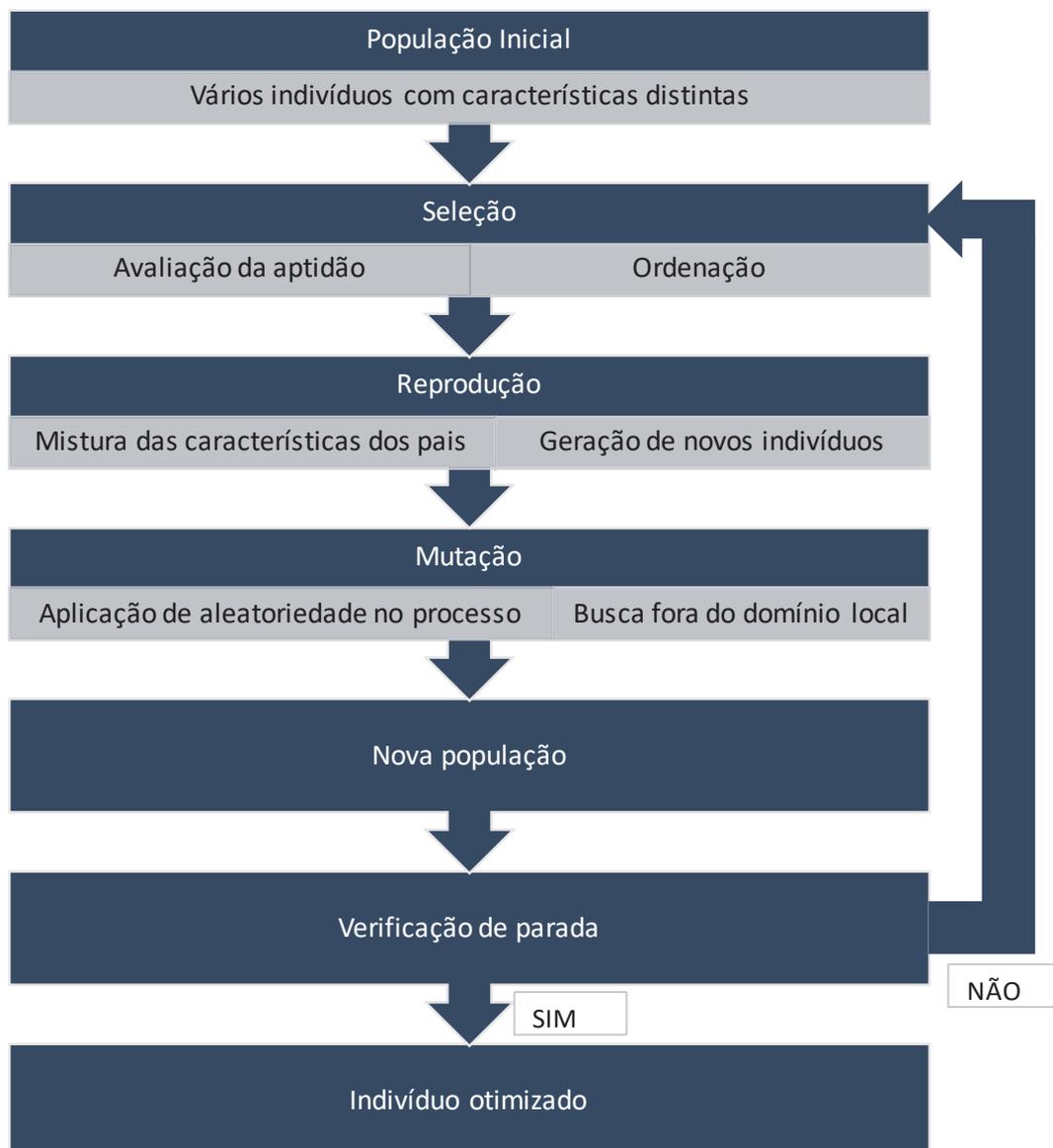
A seleção consiste na avaliação dos indivíduos por meio da aplicação de uma função de aptidão, que define o quão adaptado ao problema em questão está cada indivíduo. Após listadas as aptidões, os integrantes da população passam por um processo de ordenação. Aqueles com maiores aptidões são escolhidos para transmissão de genes às gerações seguintes. A transmissão de genes ocorre pelo processo de reprodução, que consiste em gerar novos indivíduos a partir dos mais aptos. Os novos indivíduos serão compostos por uma mistura de características, que pode ocorrer de diferentes formas de acordo com o problema. Uma forma seria selecionar aleatoriamente quais genes dos progenitores comporão o descendente. A mutação ocorre após o processo de reprodução. Alterações aleatórias são geradas

sobre os genes de uma parcela (selecionada probabilisticamente) dos novos indivíduos, de modo a gerar perturbações no fundo genético.

Após realizados os procedimentos de seleção, reprodução e mutação nos indivíduos da população inicial, uma nova população é gerada. O mesmo procedimento é repetido de maneira iterativa gerando populações que representam as diferentes gerações.

Um esquema gráfico representativo dos procedimentos realizados por Algoritmos Genéticos pode ser observado na FIGURA 1.

FIGURA 1 – ESQUEMA GRÁFICO DO PROCEDIMENTO UTILIZADO EM ALGORÍTMOS GENÉTICOS.



3.3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Nesta seção é apresentada a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para problemas de elasticidade. Para tanto, primeiramente são apresentados alguns conceitos básicos da teoria de elasticidade. Esses são posteriormente utilizados na formulação das equações integrais de contorno, que teve como base Brebbia e Dominguez (1998) e Santiago (1987), que trazem deduções didáticas e amplamente comentadas de modo a facilitar a compreensão dos leitores.

3.3.1 Elasticidade Linear

São admitidas as hipóteses de pequenos deslocamentos e materiais isotrópicos, sendo válida a lei de Hooke generalizada (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1998).

3.3.1.1 Estado de Tensões

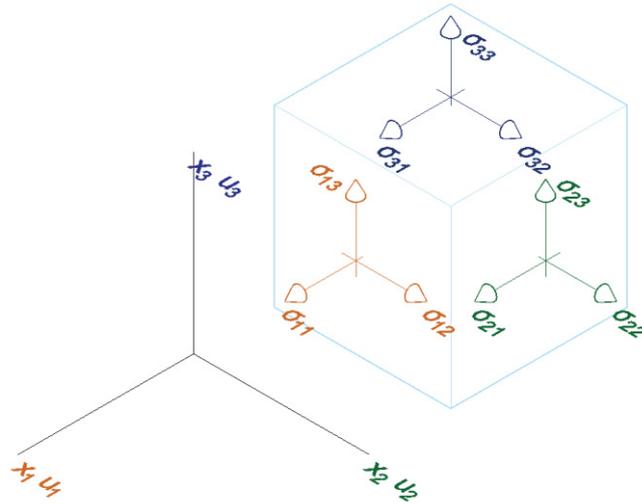
O estado de tensão pode ser definido, em um ponto, em termos de suas componentes de tensão, que podem ser agrupadas em um tensor de tensões e relacionadas por meio de equações de equilíbrio. O tensor de tensões está representado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Para cada componente σ_{ij} , o índice i representa a direção da normal ao plano no qual atua a tensão e j representa a direção na qual essa tensão de fato atua.

Uma representação do estado de tensões é apresentada na FIGURA 2, onde é possível observar tensões atuantes em um cubo infinitesimal.

FIGURA 2 – TENSÕES ATUANTES EM CUBO INFINITESIMAL



O equilíbrio das forças agindo nas direções x_1 , x_2 e x_3 é representado em notação indicial por:

$$\sigma_{ij,j} + b_j = 0 \quad (4)$$

onde b_i representa as forças de corpo. Ao expandir a expressão obtêm-se as equações clássicas de equilíbrios das forças:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0 \quad (7)$$

Considerando o equilíbrio dos momentos em relação a um ponto do cubo infinitesimal, obtêm-se as relações complementares de tensões, garantindo a simetria do tensor de tensões. Em notação indicial:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (8)$$

Expandindo:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (9)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \quad (10)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (11)$$

As componentes de tensões, ao serem projetadas no contorno Γ , produzem as forças de superfície p_i :

$$p_i = \sigma_{ij}n_j \quad (12)$$

onde n_j são os cossenos diretores.

$$n_j = \cos(n, x_j) \quad (13)$$

3.3.1.2 Relações deformação e deslocamento

As deformações estão relacionadas com os deslocamentos da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (15)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (16)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (17)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \quad (18)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \quad (19)$$

Para simplificar podemos utilizar a notação indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (20)$$

As componentes da deformação podem ser representadas pelo tensor de deformações, escrito como:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ e $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$.

3.3.1.3 Relações constitutivas

A relação entre o estado de tensões e o estado de deformações é feita pelas relações constitutivas. No caso de problemas envolvendo elasticidade linear são utilizadas as constantes de Lamé, λ e μ . A relação entre tensão e deformação é expressa por:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (22)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, igual a 1 quando $i = j$ e igual a 0 quando $i \neq j$. As constantes de Lamé são expressas em termos do módulo de elasticidade, E , e do coeficiente de Poisson, ν , da seguinte maneira:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (23)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (24)$$

A relação entre tensão e deformação pode também ser expressa de maneira inversa:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (25)$$

Substituindo (23) e (24) em (22) e (25) as tensões e deformações, em função do módulo de elasticidade longitudinal e do coeficiente de Poisson, são dadas respectivamente por:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1 + \nu)} \left[\frac{\nu}{(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right] \quad (26)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} \quad (27)$$

O módulo de elasticidade longitudinal pode ser escrito em termos do módulo de elasticidade transversal G e do coeficiente de Poisson como segue:

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (28)$$

Podemos então reescrever as tensões em termos do coeficiente de elasticidade transversal:

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \quad (29)$$

Substituindo (20) em (29) e aplicando (4) obtemos a equação de equilíbrio de Navier:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)}u_{k,kj} + b_j = 0 \text{ em } \Omega \quad (30)$$

3.3.2 Formulação integral do contorno

As equações integrais para elasticidade podem ser deduzidas por meio da aplicação do Método dos Resíduos Ponderados. O objetivo é minimizar os erros envolvidos na aproximação das equações governantes do problema de elasticidade. Para facilitar a leitura, a equação (4) é reescrita abaixo:

$$\sigma_{kj,j} + b_k = 0 \text{ em } \Omega \quad (31)$$

As seguintes condições de contorno devem ser satisfeitas:

Condições essenciais (deslocamento):

$$u_k = \bar{u}_k \text{ em } \Gamma_1 \quad (32)$$

Condições naturais (forças de superfície):

$$p_k = \sigma_{kj}n_k = \bar{p}_k \text{ em } \Gamma_2 \quad (33)$$

Para minimizar a equação (31) em Ω pode-se ponderar cada termo por uma função de deslocamento u_k^* e ortogonalizar o produto:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k)u_k^* d\Omega = 0 \quad (34)$$

Por meio da aplicação de integração por partes no primeiro termo da equação e agrupamento dos termos correspondentes, é possível obter:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (35)$$

Novamente integrando por partes, tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma \quad (36)$$

A equação (36) corresponde ao teorema de reciprocidade de Betti ($\sigma_{kj,j}^* = -b_k^*$), que pode ser utilizado como o ponto inicial para formulação integral do contorno. Nota-se que, no lado direito da equação, as integrais estão em termos de Γ .

Considerando o contorno dividido em Γ_1 e Γ_2 , onde são aplicadas as condições de contorno essenciais e naturais obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \\ = - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (37)$$

onde os termos \bar{u}_k e \bar{p}_k representam valores conhecidos de deslocamento e de forças de superfície.

É possível, então, aplicar integração por partes novamente, retornando para uma equação similar à equação (34), agora com a aplicação das condições de contorno em Γ_1 e Γ_2 . Integrando por parte duas vezes obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \quad (38)$$

A equação (38) pode ser utilizada para obtenção das equações integrais de contorno. Integrando por partes o primeiro termo de (38) e substituindo (33):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \\ = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (39)$$

O princípio da reciprocidade, devido à simetria dos tensores envolvidos, pode ser escrito como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{kj}^* \varepsilon_{kj} d\Omega \quad (40)$$

Tomando o princípio da reciprocidade e aplicando a relação deformação/deslocamento apresentada em (20) temos:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^* d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{kj}^* (u_{j,k} + u_{k,j}) d\Omega \quad (41)$$

Podemos então reescrever a equação (39) como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{kj}^* (u_{j,k} + u_{k,j}) d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \\ = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (42)$$

Integrando por partes o segundo termo de (42) temos:

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{kj}^* (u_{j,k} + u_{k,j}) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega - \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma \quad (43)$$

Reescrevemos então a equação (42) como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega - \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \\ = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (44)$$

Levando em conta (32) e (33) e lembrando que o contorno Γ é composto por Γ_1 e Γ_2 , temos:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (45)$$

Utilizando as propriedades da função delta de Dirac,

$$\Delta(\xi, x) = 0 \text{ para } \xi \neq x \quad (46)$$

$$\int_{\Omega} g(x) \Delta(\xi, x) d\Omega(x) = g(\xi) \text{ dado } \xi \in \Omega \quad (47)$$

onde ξ é o ponto fonte e x o ponto campo, podemos somar e subtrair

$$\int_{\Omega} \Delta(\xi, x) P_k u_k d\Omega \quad (48),$$

com P_k unitário, na equação (45) para obter:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\sigma_{kj,j}^* + \Delta(\xi, x) P_k] u_k d\Omega - \int_{\Omega} \Delta(\xi, x) P_k u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \\ = \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad (49).$$

Sabemos que as forças de volume são conhecidas, não introduzindo novas incógnitas no problema. Com o intuito de eliminar as incógnitas no domínio observadas no primeiro termo da equação (49) precisamos garantir que essa integral seja nula. Como u_k representa o campo de deslocamento, que pode ser diferente de 0, temos então:

$$\sigma_{kj,j}^* + \Delta(\xi, x) P_k = 0 \quad (50)$$

A equação (50) representa a equação de equilíbrio, onde as forças de volume são unitárias e concentradas em cada direção ortogonal. Podemos reescrever essa equação na forma da equação de equilíbrio de Navier (30), como segue:

$$G u_{j,kk}^* + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{k,kj}^* + \Delta(\xi, x) P_k = 0 \quad (51)$$

A solução da equação (51) é chamada de solução fundamental e é atribuída a Kelvin (LOVE, 1892). A solução fundamental é apresentada no item 3.3.2.1.

Utilizando a segunda propriedade da função delta de Dirac (47) podemos reescrever (49) da seguinte forma:

$$u_k(\xi)P_k = \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \text{ para } \xi \in \Omega \quad (52)$$

Na equação (52) são consideradas duas cargas unitárias sendo aplicadas de forma simultânea. Para cargas unitárias atuando de maneira independente podemos escrever os deslocamentos e forças de superfície como:

$$u_k^* = u_{jk}^*(\xi, x)P_j \quad (53)$$

$$p_k^* = p_{jk}^*(\xi, x)P_j \quad (54)$$

onde u_{jk}^* e p_{jk}^* são respectivamente o deslocamento e a força de superfície na direção k no ponto campo x , devido a uma carga unitária concentrada no ponto fonte ξ agindo na direção j .

Cada componente do deslocamento é dada por:

$$u_j(\xi) = \int_{\Gamma} p_k(x) u_{jk}^*(\xi, x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_k(x) p_{jk}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} b_k(x) u_{jk}^*(\xi, x) d\Omega(x) \text{ para } \xi \in \Omega \quad (55)$$

3.3.2.1 Soluções fundamentais

Segundo Santiago (1987) a formulação das equações integrais de contorno necessita da solução fundamental de problemas de elasticidade com as mesmas propriedades do corpo em análise, porém, considerando um domínio infinito Ω^* carregado com uma carga pontual. Essa solução fundamental, como mencionado acima, é atribuída a Kelvin, (LOVE, 1892). Brebbia e Dominguez (1998) apresentam as soluções fundamentais para casos tridimensionais e bidimensionais. Para problemas tridimensionais temos:

$$u_{ik}^* = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ik} + r_i r_{,k}] \quad (56)$$

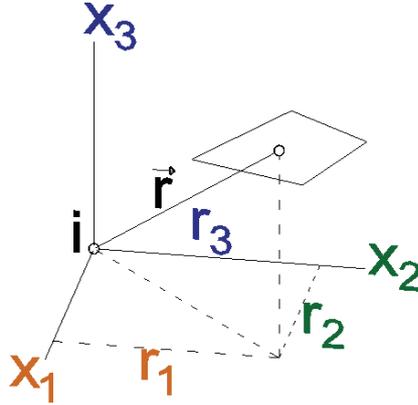
onde

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad (57)$$

$$r_{,k} = \frac{\partial r}{\partial x_k} \quad (58)$$

são as taxas das projeções de r nas direções x_1 , x_2 e x_3 , que podemos chamar de r_1 , r_2 e r_3 , como pode ser observado na FIGURA 3.

FIGURA 3 – COMPONENTES DO VETOR r



Para o caso bidimensional temos:

$$u_{ik}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ik} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad (59)$$

As componentes das forças de superfície para o caso tridimensional são dadas por:

$$p_{ik}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ik} + 3r_{,i} r_{,k}] + (1-2\nu)(n_i r_{,k} - n_k r_{,i}) \right] \quad (60)$$

onde n_i e n_k são os cossenos diretores da normal em relação a x_i e x_k e $\frac{\partial r}{\partial n}$ é a derivada normal do vetor r .

No caso bidimensional temos:

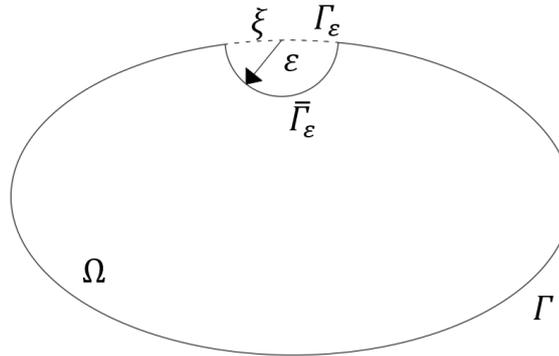
$$p_{ik}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] + (1-2\nu)(n_i r_{,k} - n_k r_{,i}) \right] \quad (61)$$

3.3.2.2 Equação integral no contorno

A identidade de Somigliana, equação (55), é válida para qualquer ponto no domínio Ω . Para a solução do problema, torna-se necessário aplicar essa expressão em diferentes pontos do contorno para produzir um sistema de equações que, ao ser solucionado, permite obter os valores no contorno. Para tanto é necessário lidar com

singularidades que surgem nas equações integrais, uma vez que ξ é levado ao contorno. Considerando um contorno regular em ξ podemos retirar dele uma semiesfera com raio ε que será levado a 0, conforme pode ser observado na FIGURA 4.

FIGURA 4 – PONTO SINGULAR ξ REMOVIDO DO CONTORNO



FONTE: SANTIAGO (1987) adaptado.

A primeira integral à direita na equação (55), em função do novo contorno, é calculada como:

$$\int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} u_{ik}^* p_k d\Gamma \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_{\varepsilon}} u_{ik}^* p_k d\bar{\Gamma}_{\varepsilon} \right] \quad (62)$$

A primeira integral se torna simplesmente uma integral no contorno Γ quando ε tende a 0. A segunda integral pode ser escrita como:

$$p_k(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_{\varepsilon}} u_{ik}^* d\bar{\Gamma}_{\varepsilon} \right] \quad (63)$$

e também tende a 0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim, a primeira integral do lado direito da equação não é afetada pela singularidade em ξ .

Já o comportamento da segunda integral à direita na equação (55), porém, é diferente. Neste caso, temos:

$$\int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} p_{ik}^* u_k d\Gamma \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_{\varepsilon}} p_{ik}^* u_k d\bar{\Gamma}_{\varepsilon} \right] \quad (64)$$

A primeira integral no lado direito da equação (64) deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy. O limite da segunda integral no lado direito da equação (64) pode ser escrito como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^* u_k d\bar{\Gamma}_\varepsilon \right] = u_k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ik}^* d\bar{\Gamma}_\varepsilon \right] = c_{ik} u_k \quad (65)$$

Assim, para os pontos no contorno a equação integral é escrita como:

$$\begin{aligned} c_{ik}(\xi) u_k(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ik}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega \end{aligned} \quad (66)$$

Conforme apresentado na equação (65) o coeficiente $c_{ik}(\xi)$ é dado pela seguinte expressão:

$$c_{ik}(\xi) u_k(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{jk}^*(\xi, x) d\bar{\Gamma}_\varepsilon \quad (67)$$

Conforme demonstrado por Brebbia e Dominguez (1998) ao substituirmos o termo p_{jk}^* , em casos de contorno suave temos:

$$c_{ik}(\xi) = \frac{1}{2} \delta_{ik} \quad (68)$$

Quando o contorno não é suave, o coeficiente $c_{ik}(\xi)$ pode ser calculado conforme apresentado por Riccardella (1973), Hatmann (1980) e Mantic (1993). Porém, em aplicações práticas, o coeficiente $c_{ik}(\xi)$ pode ser obtido indiretamente, utilizando a técnica do deslocamento de corpo rígido (SANTIAGO, 1987), no item 3.3.2.5 essa técnica é brevemente discutida.

A equação (66) permite resolver problemas de elasticidade fornecendo uma relação entre as forças de superfície e os deslocamentos, permitindo que as incógnitas sejam determinadas no contorno após a introdução das condições de contorno.

3.3.2.3 Formulação de elementos de contorno

Para possibilitar a solução numérica da equação integral (66), é necessário discretizar o contorno em uma série de elementos. Cada elemento é composto por nós, nos quais deslocamentos e forças de superfície podem ser conhecidos ou

calculados de acordo com as condições de contorno aplicadas. Ao discretizar o contorno, um sistema de equações algébricas é obtido; esse sistema pode ser resolvido uma vez aplicadas as condições de contorno, resultando em uma solução aproximada para os valores desconhecidos no contorno. Tomando as variáveis \mathbf{u} e \mathbf{p} em um elemento j , pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \Phi \mathbf{u}^j \\ \mathbf{p} &= \Phi \mathbf{p}^j\end{aligned}\tag{69}$$

onde \mathbf{u}^j e \mathbf{p}^j são os deslocamentos e forças de superfície nodais, com dimensões $3Q$ e $2Q$ nos casos tri e bidimensionais, respectivamente, onde Q é o número de nós por elemento e \mathbf{u} e \mathbf{p} são deslocamentos e forças de superfície em qualquer ponto do elemento (Γ_e). Para o caso tridimensional, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{p} &= \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}\end{aligned}\tag{70}$$

A matriz de interpolação Φ tem tamanho $3 \times 3Q$ para problemas tridimensionais e $2 \times 2Q$ para problemas bidimensionais, sendo composta pelas funções de forma ϕ_i .

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_Q & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_Q & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_Q \end{bmatrix} = [\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_Q]\tag{71}$$

As forças de corpo, em qualquer ponto do domínio, também podem ser expressas em forma vetorial em função das três componentes, sendo representadas como segue:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}\tag{72}$$

Os coeficientes da solução fundamental são expressos em forma matricial por:

$$\mathbf{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \quad (73)$$

Assim como para \mathbf{u}^* , \mathbf{p}^* também pode ser representado em forma matricial, o que resulta em:

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} \quad (74)$$

Podemos, então, reescrever a equação (66) como:

$$c(\xi)\mathbf{u}(\xi) + \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \mathbf{u} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^* \mathbf{p} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \mathbf{b} \, d\Omega \quad (75)$$

Substituindo (70) na equação (75) e discretizando o contorno obtemos para um nó a equação:

$$c(\xi)\mathbf{u}(\xi) + \sum_{j=1}^{NE} \left[\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi \, d\Gamma \right] \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left[\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi \, d\Gamma \right] \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \left[\int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* \mathbf{b} \, d\Omega \right] \quad (76)$$

As somatórias indicam a soma de $j = 1$ até NE , que representa a quantidade de elementos, sendo Γ_j a superfície do elemento j . Os vetores \mathbf{u}^j e \mathbf{p}^j contêm os deslocamentos e trações nodais no elemento j . Na equação (76) o domínio é discretizado em M células internas, nas quais as integrais de forças de corpo são computadas. Essas células podem ser evitadas caso as integrais de força de corpo sejam levadas ao contorno (BREBBIA E DOMINGUEZ, 1998).

3.3.2.4 Sistema de equações

A equação (76), após as integrais terem sido calculadas, corresponde a um nó i e pode ser reescrita como:

$$c(\xi_i)\mathbf{u}(\xi_i) + \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \mathbf{B}^{is} \quad (77)$$

onde N representa o número total de nós, \mathbf{u}^j e \mathbf{p}^j são os deslocamentos e forças de superfície no nó j .

As matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} tem dimensões 3×3 em problemas tridimensionais e 2×2 em casos bidimensionais, sendo equivalentes a:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}}^{ij} &= \sum_t \int_{\Gamma_t} \mathbf{p}^* \Phi_q d\Gamma \\ \mathbf{G}^{ij} &= \sum_t \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^* \Phi_q d\Gamma\end{aligned}\tag{78}$$

onde a somatória é estendida para todos os elementos que compartilham o nó j e q corresponde à ordem do nó j pertencente ao elemento t , ou seja, em caso de elementos constantes a soma se estende somente a 1 elemento, fazendo com que $t \equiv j$ e Φ_q seja a matriz identidade. A matriz \mathbf{B}^{is} é dada por:

$$\mathbf{B}^{is} = \int_{\Omega_s} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega\tag{79}$$

Relativamente ao cálculo da matriz \mathbf{H} , dois casos podem ser identificados (ou definidos):

Primeiro caso: $i \neq j$. Neste caso, que corresponde à situação em que o ponto fonte não pertence ao elemento que está sendo integrado, tem-se simplesmente que:

$$\mathbf{H}^{ij} = \hat{\mathbf{H}}^{ij}\tag{80}$$

Segundo caso: $i = j$. Neste caso, o ponto fonte pertence ao elemento que está sendo integrado e, no cálculo dos elementos correspondentes da matriz \mathbf{H} , deve-se levar em conta a contribuição do coeficiente $c(\xi_i)$, o que resulta na seguinte expressão:

$$\mathbf{H}^{ij} = \hat{\mathbf{H}}^{ij} + c(\xi_i)\tag{81}$$

Para um nó i a equação é reescrita como:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j + \sum_{s=1}^M \mathbf{B}^{is}\tag{82}$$

A contribuição de todos os nós gera um sistema de equações matriciais que pode ser escrito como:

$$\mathbf{H}\mathbf{U} = \mathbf{G}\mathbf{P} + \mathbf{B}\tag{83}$$

O cálculo dos termos das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} quando $i \neq j$ pode ser realizado numericamente por quadratura Gaussiana (BEER et al., 2008).

Os vetores \mathbf{U} e \mathbf{P} representam todos os valores nodais de deslocamento e forças de superfície antes da aplicação das condições de contorno. Essas condições são introduzidas ao se rearranjar as colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} , transferindo todas as incógnitas do contorno para um vetor \mathbf{X} , no lado esquerdo da equação, e as condições de contorno para um vetor \mathbf{F} , resultando no sistema final de equações:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{F} \quad (84)$$

Após a resolução do sistema de equações (84), todos os valores de deslocamento e de força de superfície ficam determinados para o contorno. Para os pontos internos ao domínio os valores dos deslocamentos são obtidos com a utilização da Equação (76), com o coeficiente $c(\xi) = 1$ (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1998). Os deslocamentos nos pontos internos em função dos deslocamentos dos nós que compõem o contorno é dado por:

$$\mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j - \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{u}^j + \sum_{s=1}^M \mathbf{B}^{is} \quad (85)$$

Brebbia e Dominguez (1998) descrevem ainda a obtenção de tensões nos pontos internos do domínio, por meio das derivadas dos deslocamentos nos pontos internos e da utilização das relações de deformação e deslocamento.

Conforme descrito por Santiago (1987) as tensões no contorno são obtidas com a utilização dos deslocamentos e forças de superfície obtidos no contorno e com a utilização das relações constitutivas, o procedimento para obtenção das tensões no contorno é apresentado de maneira didática pelo autor.

3.3.2.5 Movimento de corpo rígido

Conforme discutido no item 3.3.2.2 é possível obter o coeficiente $c_{ik}(\xi)$ utilizando a técnica do movimento de corpo rígido. Brebbia e Dominguez (1998) apontam que em casos de movimento de corpo rígido as forças de superfície devem ser nulas, então:

$$\mathbf{H} \mathbf{I}^q = 0 \quad (86)$$

onde \mathbf{I}^q é um vetor com deslocamento unitário na direção q e nulo nas outras direções.

Escrevendo a submatriz \mathbf{H}^{ii} em função dos termos da matriz \mathbf{H} obtemos:

$$\mathbf{H}^{ii} = - \sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \quad p/j \neq i \quad (87)$$

O que permite obter os valores da diagonal a partir dos demais valores da matriz \mathbf{H} , eliminando a necessidade de se calcular $\hat{\mathbf{H}}^{ii}$ e $c(\xi)$.

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

A implementação computacional para otimização dos problemas de elasticidade foi realizada em FORTRAN 90. Para tanto foram utilizadas as sub-rotinas disponibilizadas por Brebbia e Dominguez (1998) para solução de problemas bidimensionais de elasticidade por meio do Método dos Elementos de Contorno, com aplicação de elementos quadráticos. O código ELQUABE, originalmente escrito para FORTRAN 70, foi adaptado para a linguagem FORTRAN 90. Aliadas às sub-rotinas já existentes foram implementadas novas sub-rotinas responsáveis pelas etapas das iterações do Algoritmo Genético, utilizado para otimização.

As sub-rotinas implementadas, assim como suas funcionalidades, podem ser observadas na TABELA 3.

TABELA 3 – SUB-ROTINAS IMPLEMENTADAS PARA APLICAÇÃO DE ALGORITMO GENÉTICO

Sub-rotina	Variáveis	Função
escolhe_pais	<ol style="list-style-type: none"> 1. fit (IN) 2. num_ind (IN) 3. num_parents (IN) 4. pop (IN) 5. pais (OUT) 	Recebe <i>array</i> com aptidões, ordena indivíduos e separa os pais.
rargsort	<ol style="list-style-type: none"> 1. a (IN) 2. b (OUT) 3. n (IN) 	Recebe <i>array</i> a com dimensão n e retorna <i>array</i> de índices ordenados b.
flip_int	<ol style="list-style-type: none"> 1. arr (INOUT) 2. n (IN) 	Inverte <i>array</i> unidimensional
procria	<ol style="list-style-type: none"> 1. pais (IN) 2. num_ind (IN) 3. num_pais (IN) 4. pop (INOUT) 5. num_fixed (IN) 6. fixed_nodes (IN) 	Recebe <i>array</i> pais e faz mistura de genes entre esses indivíduos, criando novos indivíduos e modifica <i>array</i> pop para receber os pais e os novos indivíduos.
random_int	<ol style="list-style-type: none"> 1. limit (IN) 2. a (OUT) 	Retorna inteiro randômico de 0 até limite
fitness	<ol style="list-style-type: none"> 1. lim_desloc (IN) 2. lim_stress (IN) 3. coord (IN) 4. FI (IN) 5. DFI (IN) 6. aux_nodes (IN) 7. num_geom_nodes (IN) 8. fit (OUT) 	Calcula a aptidão de um indivíduo.
gerar_pop	<ol style="list-style-type: none"> 1. N (IN) 2. fixed_nodes (IN) 3. num_fixed (IN) 4. ind_ini (IN) 5. num_ind (IN) 6. pop (OUT) 	Gera população inicial por meio de alterações randômicas em um indivíduo mestre.

Para a otimização dos problemas de elasticidade optou-se por utilizar de maneira direta as coordenadas dos nós utilizados para discretizar o contorno como genes do Algoritmo Genético. Dessa forma cada indivíduo foi descrito de acordo com a discretização de seu domínio, fazendo com que as variáveis que compunham os indivíduos pudessem variar de forma contínua no plano.

As etapas utilizadas na implementação do Algoritmo Genético, com objetivo de minimizar a quantidade de material utilizada, sujeita a critérios limite de tensão e deslocamento, envolvem primeiramente a leitura do arquivo de entrada. Nesse arquivo são armazenadas, para o indivíduo mestre, os valores das coordenadas de seus nós, as condições de contorno e propriedades físicas estabelecidas no problema. Na sequência são definidos quais os nós da geometria que serão utilizados como variáveis do problema de otimização, o número de indivíduos que comporá cada geração e, desses, quantos serão responsáveis por passar seus genes adiante, durante o processo iterativo.

O próximo passo envolve a geração da população inicial. Para tanto, a sub-rotina `gerar_pop` é utilizada. Essa sub-rotina cria N indivíduos baseados nos genes do indivíduo mestre, e o processo envolve a cópia dos genes originais com modificações randômicas aplicada sobre eles. Assim é criada uma população inicial com características ligeiramente diferentes daquelas apresentadas pelo indivíduo mestre. As variações aplicadas sobre os genes se deram na forma de translações verticais randômicas, garantindo que a malha utilizada para discretização do problema mantivesse a mesma ordem de nós definidas no problema inicial. Além disso, foram definidos nós que permaneceriam constantes, ou seja, não estariam sujeitos às translações aplicadas sobre as variáveis do problema. Isso foi estabelecido uma vez que é importante garantir que as condições de contorno sejam constantes, ou seja, por exemplo, que as cargas distribuídas aplicadas sobre parte do contorno não fossem aplicadas sobre diferentes comprimentos ou que as restrições de deslocamento fossem mantidas de acordo com o problema inicial.

Na sequência é estabelecido o número de gerações que serão criadas por meio do processo iterativo do Algoritmo Genético. O processo iterativo é, então, iniciado respeitando o número máximo de populações e um critério de parada que avalia a variação entre as aptidões de diferentes gerações subsequentes. Um laço é utilizado para solucionar o problema de elasticidade para cada indivíduo que compõe a população; com isso é possível chamar a sub-rotina `fitness` para avaliar a aptidão de

cada indivíduo. A avaliação da aptidão dos indivíduos se dá baseada no objetivo de minimizar a quantidade de material utilizada sem ultrapassar limites de deslocamento e tensão. Na sub-rotina é primeiramente definida a área da geometria do indivíduo em análise por meio das coordenadas de seus nós, na sequência os deslocamentos e tensões observados na estrutura são utilizados para penalizar indivíduos que ultrapassaram os critérios limite e para beneficiar aqueles que permaneceram dentro dos limites desejáveis.

Com as aptidões de cada indivíduo da população definidas o algoritmo segue então para a próxima etapa, que envolve escolher os indivíduos mais aptos para transmissão de seus genes para as próximas gerações. Para tanto, é utilizada a sub-rotina *escolhe_pais*, que ordena os indivíduos de acordo com suas aptidões (com utilização das sub-rotinas *rargsort* e *flip_int*) e retorna a variável *pais*, onde estão definidas as características dos indivíduos mais aptos da geração.

Finalmente a sub-rotina *procria* é chamada para, a partir dos genes dos indivíduos pais, definir uma nova geração composta por indivíduos com características oriundas da mistura dos genes dos indivíduos pais. Essa sub-rotina primeiro transmite os indivíduos mais aptos da geração atual para a geração futura e, na sequência, cria novos indivíduos a partir da seleção randômica dos indivíduos pais. Além de misturar os genes dos pais são aplicadas variações randômicas sobre alguns genes dos indivíduos resultantes, de modo a permitir que o algoritmo fuja de ótimos locais. É importante ressaltar que, para garantir que as condições de contorno do problema sejam respeitadas, alguns nós são fixados, tendo suas coordenadas compartilhadas de maneira idêntica por todos os indivíduos dentro do processo iterativo. Os pseudocódigos das sub-rotinas *gerar_pop*, *fitness*, *escolhe_pais*, *rargsort*, *flip_int* e *procria* podem ser observados no APÊNDICE 1 – PSEUDOCÓDIGOS.

O processo iterativo é então repetido, sendo avaliados em cada iteração seus critérios de parada. Os indivíduos, ao longo das gerações, sofrem modificações em seus genes e aqueles que apresentam maiores aptidões se destacam, levando à convergência do problema para indivíduos cada vez mais aptos.

4.1 FUNÇÃO APTIDÃO

A função aptidão foi definida utilizando como critérios a área longitudinal da estrutura, a média das tensões em pontos de interesse e o deslocamento vertical obtido em pontos de interesse. Para permitir que fossem definidos critérios distintos para os diferentes problemas de otimização foram introduzidas taxas que permitiam controlar qual desses resultados teria maior influência na aptidão dos indivíduos. A aptidão foi calculada da seguinte maneira:

$$\text{Aptidão} = \alpha \frac{1}{A} + \beta \frac{1}{\sigma_{méd}} + \gamma \frac{1}{u} \quad (88)$$

onde α , β e γ são as taxas para controle de peso, A representa a área longitudinal da estrutura, $\sigma_{méd}$ a média da tensão obtida nos pontos de interesse e u o deslocamento obtido no ponto de interesse.

A obtenção das tensões e do deslocamento foi dada com a utilização do Método dos Elementos de Contorno. A obtenção da área da estrutura foi dada por:

$$A = \left| \frac{(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + \dots + (x_ny_1 - y_nx_1)}{2} \right| \quad (89)$$

onde x e y representam as coordenadas dos vértices e o subíndice representa o número dos vértices.

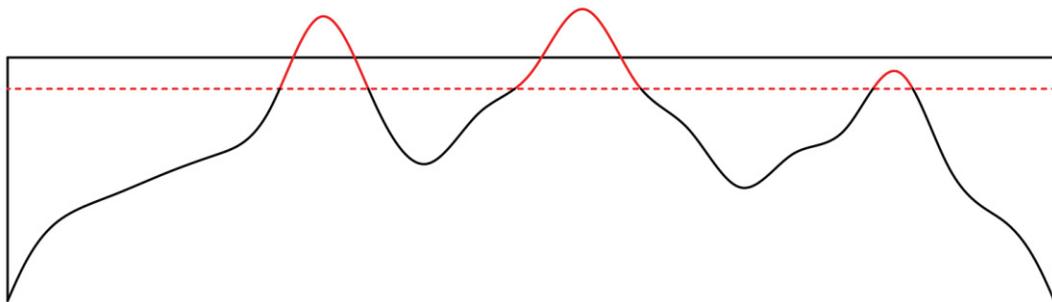
4.2 RESTRIÇÕES

Para garantir que as restrições aplicadas ao problema fossem obedecidas foi necessário aplicar penalizações sobre os indivíduos que ultrapassassem os limites estabelecidos para deslocamentos e tensões. Como as restrições foram aplicadas de forma direta sobre deslocamentos e tensões, optou-se por severamente penalizar os indivíduos que ultrapassassem os limites estabelecidos, uma vez que essas restrições são normativas e inviabilizam indivíduos fora dos limites. Assim, foi aplicado um valor baixo de aptidão para os indivíduos que ultrapassaram os limites estabelecidos de tensão e deslocamento, garantindo que esses não fossem capazes de transmitir seus genes às próximas gerações. Isso se deu com a utilização de uma verificação condicional das tensões e deslocamentos nos pontos de interesse. Em casos onde os

limites fossem ultrapassados à aptidão definida de acordo com a equação (92) foi substituída por um valor significativamente menor.

Foram ainda aplicadas penalizações em casos onde as variações aplicadas sobre as coordenadas da malha ultrapassassem certos limites. Isso foi considerado por dois principais motivos. O primeiro deles sendo evitar que impossibilidades geométricas ocorressem, conforme pode ser observado no exemplo trazido na FIGURA 5. O segundo motivo foi garantir a representatividade dos resultados, em casos onde a tensão dos pontos internos é calculada em regiões muito próximas ao contorno pode haver perda de representatividade numérica, uma vez que um número constante de pontos foi utilizado na integração numérica por quadratura de Gauss.

FIGURA 5 – REPRESENTAÇÃO VISUAL DE CASOS PENALIZADOS POR TRANSLAÇÃO EXCESSIVA



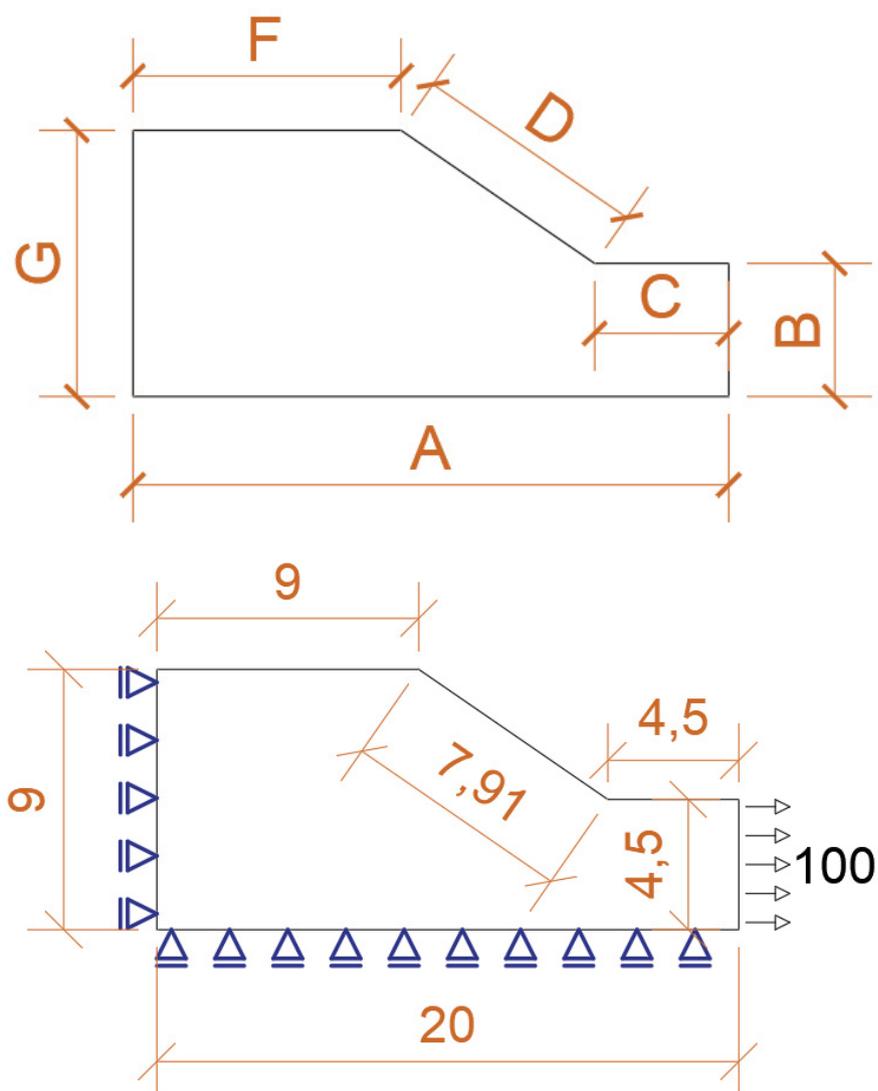
5 APLICAÇÃO

Para testar a capacidade de otimização do Algoritmo Genético implementado foram replicadas as otimizações desenvolvidas por Sun et al. (2018) em problemas de elasticidade bidimensionais. No trabalho citado, os autores utilizam o Método dos Elementos de Contorno associado à otimização por meio do método PSO (*Particle Swarm Optimization*). Dois problemas de otimização trazidos pelos autores foram replicados e dois novos problemas foram propostos, de modo a verificar a capacidade de otimização do algoritmo desenvolvido nesse trabalho. Nesse capítulo são apresentados os resultados obtidos para problemas de otimização, nos quais as coordenadas finais das variáveis podem levar a estruturas com geometrias complexas. Para superar esse problema, é apresentado então um método de simplificação dessas estruturas por meio de ajustes de curvas a serem utilizadas nos nós de interesse. Na sequência são apresentados os resultados obtidos e sua comparação com os resultados disponíveis na literatura.

5.1 FILETE

Foi considerada uma estrutura sujeita a tração uniforme aplicada em uma extremidade. O objetivo da otimização envolve reduzir a quantidade de material e as tensões observadas por meio da alteração das coordenadas dos nós do segmento **D**, apresentado na FIGURA 6. Conforme descrita por Sun et al. (2018), que utilizou um sistema coerente de unidades sem as especificar, a estrutura tem dimensões de 20 unidades no segmento **A**, 4,5 unidades nos segmentos **B** e **C**, 7,91 unidades no segmento **D** e 9 unidades nos segmentos **F** e **G**. O material utilizado apresenta módulo de elasticidade de 10.000 unidades e coeficiente de Poisson 0,3.

FIGURA 6 – SEGMENTOS E CONDIÇÕES DE CONTORNO DO FILETE NA CONFIGURAÇÃO ORIGINAL

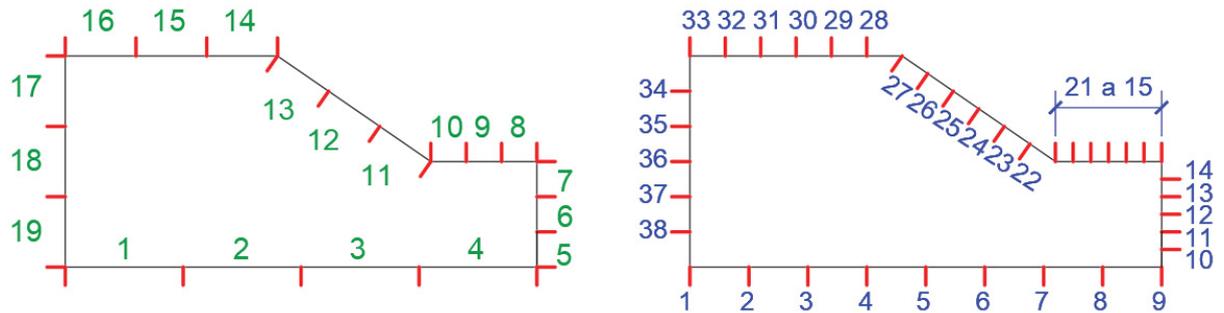


Na FIGURA 6 é possível observar a configuração original do filete. A estrutura tem seus deslocamentos restringidos na direção horizontal no segmento **G** e na direção vertical no segmento **A**. No segmento **B** é aplicada uma tração uniformemente distribuída de 100 unidades por unidade de comprimento.

A discretização do problema foi feita com a utilização de 19 elementos de contorno e 38 nós, conforme pode ser observado na FIGURA 7. O segmento **D** é composto por 7 nós, dos quais os 5 nós intermediários tiveram suas coordenadas consideradas como variáveis no problema de otimização. Assim, com a variação dos nós 22 a 26 foi possível gerar os indivíduos da população inicial. Aqui cabe ressaltar que o MEC permite representar os indivíduos com a utilização de genes menores quando comparado ao MEF, que requer discretização do domínio. Com isso um

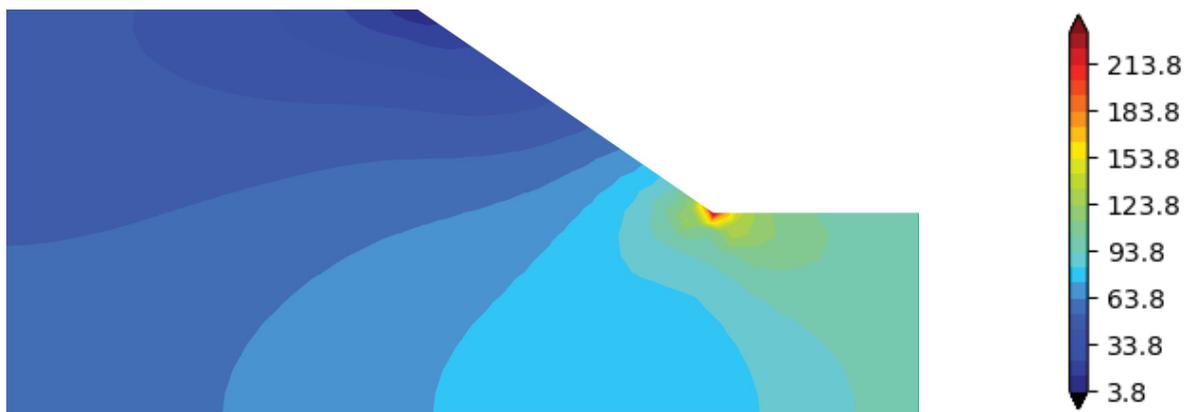
número significativamente menor de operações deve ser feito no processo iterativo para definir os novos indivíduos.

FIGURA 7 – DISCRETIZAÇÃO DO FILETE EM ELEMENTOS DE CONTORNO



Na configuração original do problema existe uma concentração de tensões entre os segmentos **C** e **D**, a distribuição de tensões equivalentes de Von-Mises (utilizadas por Sun et al., 2018) pode ser observada na FIGURA 8. O pós-processamento foi realizado com a utilização da linguagem Python, as tensões no domínio obtidas de acordo com o procedimento descrito no item 3.3.2.5 e as tensões no contorno foram obtidas de acordo com o descrito por Santiago (1987).

FIGURA 8 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NORMAIS NA DIREÇÃO HORIZONTAL



O Algoritmo Genético foi aplicado no filete em questão com a utilização de 50 indivíduos por geração, com 40% sendo selecionados para transmitir seus genes às gerações futuras. A transmissão dos genes se deu por meio da combinação das coordenadas de nós equivalentes dos pais, com a utilização de média aritmética. Para cada nó combinado do segmento variável uma probabilidade de 50% existia para

mutação, que consistiu em transladar o nó no sentido vertical dentro de uma faixa de 0,5 unidades.

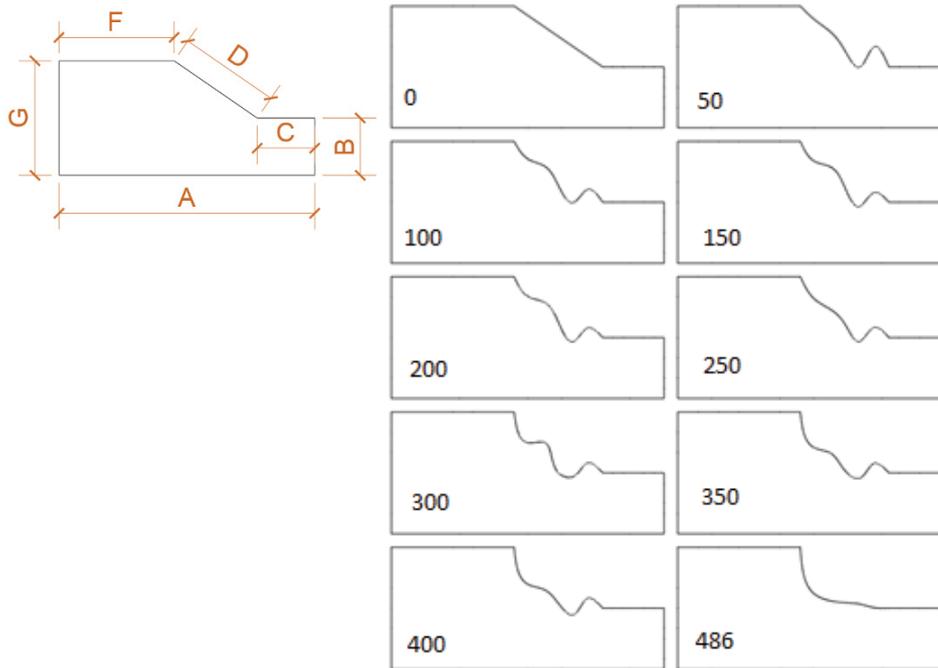
O processo iterativo foi realizado 486 vezes, sendo interrompido pelo critério de parada aplicado sobre a variação da aptidão. Na FIGURA 9 é possível observar a evolução da aptidão ao longo das gerações. Nota-se que grandes ganhos são obtidos nas 10 primeiras gerações e que, nas gerações 11 a 300, a taxa de ganho na aptidão é consideravelmente menor. A partir desse ponto a taxa de ganho da aptidão se torna muito pequena, atingindo praticamente um patamar. A normalização da aptidão foi realizada a partir do resultado final, sendo esse tomado como 1 e o restante normalizado a partir do valor máximo de aptidão.

FIGURA 9 – APTIDÃO HISTÓRICA AO LONGO DAS GERAÇÕES



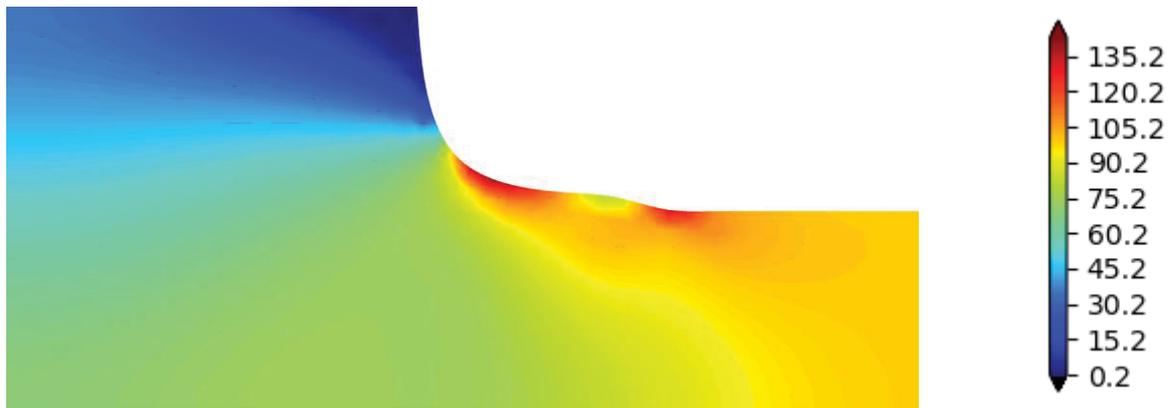
Na FIGURA 10 são apresentados alguns indivíduos selecionados durante as iterações. Em ordem de gerações os indivíduos são apresentados de cima para baixo da esquerda para direita. É possível notar uma tendência, ao longo das gerações, a uma forma mais suave para o segmento **D**. Nota-se ainda que, entre os segmentos **C** e **D**, onde na configuração inicial existia uma concentração de tensões, o nó 22 apresenta translações para cima na direção vertical. Isso ocorre uma vez que a tensão foi um dos critérios utilizados para avaliar a aptidão dos indivíduos e, logo nas primeiras gerações, grandes ganhos foram obtidos com a eliminação da concentração de tensões nessa região.

FIGURA 10 – VARIAÇÃO OBSERVADA NOS INDIVÍDUOS AO LONGO DAS GERAÇÕES



A distribuição de tensões para a forma final obtida após o processo iterativo pode ser observada na FIGURA 11.

FIGURA 11 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NO FILETE OTIMIZADO



Na FIGURA 12 é apresentada uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho com os resultados obtidos por Sun et al. (2018).

É possível notar algumas diferenças, embora, de maneira geral, os resultados são similares. No resultado obtido nesse trabalho, com a utilização do AG, nota-se uma declividade mais acentuada na união dos segmentos **D** e **F**. Isso ocorre uma vez que funções objetivo com diferentes restrições foram utilizadas no presente trabalho

e por Sun et al. (2018). A função objetivo aqui utilizada favorece a redução da quantidade de material como um fator mais relevante, sem impor um limite máximo à tensão observada (indivíduos que apresentam menores tensões são beneficiados em detrimento de punir indivíduos com altas tensões), enquanto o trabalho de Sun et al. (2018) tem a redução da área como objetivo, mas define um limite de tensões, com critério de punição. Como consequência dessas diferenças os resultados obtidos por Sun et al. (2018) representam uma estrutura com maior quantidade de material e menores tensões, enquanto o contrário ocorre na estrutura otimizada com a utilização do Algoritmo Genético, conforme pode ser observado na TABELA 4.

FIGURA 12 – COMPARAÇÃO DE RESULTADOS FILETE



FONTE: Sun et al. (2018) ADAPTADO.

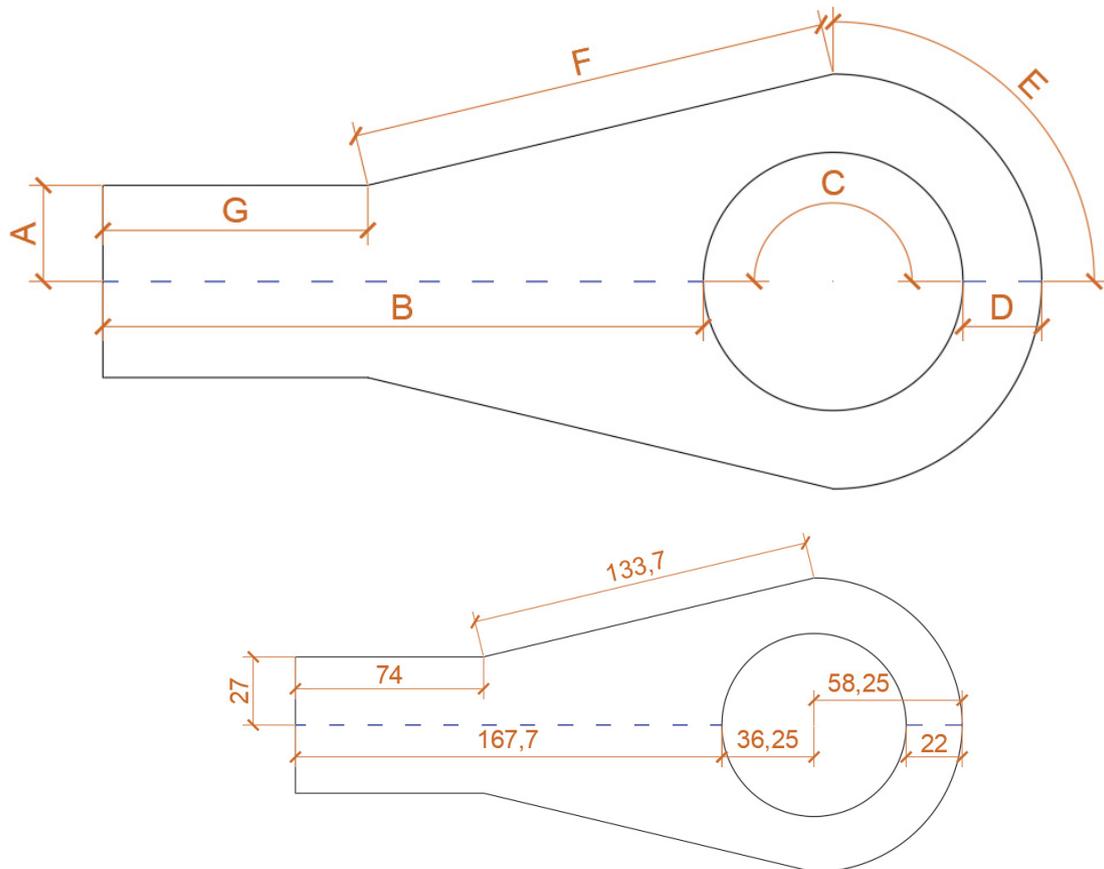
TABELA 4 – COMPARAÇÃO ENTRE RESULTADOS FILETE

	Inicial	Sun et al. (2018)	Redução	Algoritmo Genético	Redução
Área	145,13	138,8	4,4%	134,5	7,3%
Tensão máxima	236	125	47,0%	143,5	39,2%

5.2 CONEXÃO DE ANCORAGEM

Nesse problema foi considerada uma estrutura de conexão para cabos de ancoragem. A simetria da geometria foi utilizada de modo a reduzir a demanda computacional, com redução da quantidade de elementos: na FIGURA 13 a linha tracejada em azul representa o eixo de simetria utilizado.

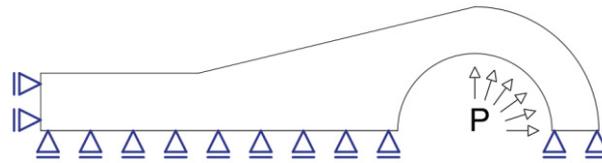
FIGURA 13 -GEOMETRIA UTILIZADA NA CONEXÃO DE ANCORAGEM



Esse problema de otimização tem como objetivo reduzir as tensões observadas ao longo do segmento **F**. Para tanto as coordenadas dos nós localizados nos segmentos **F** e **G** foram utilizadas como variáveis do problema, sendo translações aleatórias na direção vertical aplicadas para geração da população inicial.

Conforme descrito por Sun et al. (2018) a estrutura tem dimensões de 27 unidades no segmento **A**, 167,7 unidades no segmento **B**, raio do arco **C** com 36,25 unidades, segmento **D** com 22 unidades, raio do arco **E** com 58,25 unidades, segmento **F** com 133,7 unidades e segmento **G** com 74 unidades. Os deslocamentos do segmento **A** foram restringidos na direção horizontal enquanto os deslocamentos dos segmentos **B** e **D** foram restringidos na direção vertical. Essa estrutura foi submetida a uma carga **P** uniformemente distribuída, de 100 unidades, aplicada em sua parte interior, como pode ser observado na FIGURA 14.

FIGURA 14 – ESQUEMA GRÁFICO REPRESENTANDO APLICAÇÃO DE CARGA



A discretização do problema foi feita com a utilização de 23 elementos e 46 nós, e a malha utilizada pode ser observada na FIGURA 15. Para garantir maior representatividade dos resultados na região acima do arco **C**, onde existe uma concentração de tensões (ver FIGURA 16, onde é apresentada a distribuição de tensões equivalentes de Von-Mises), uma maior quantidade de elementos foi ali utilizada.

FIGURA 15 – DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA DA CONEXÃO DE ANCORAGEM

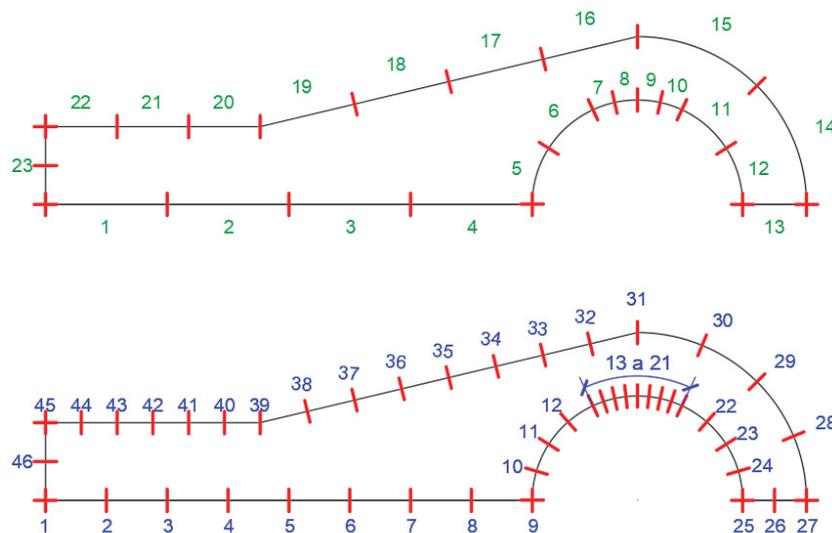
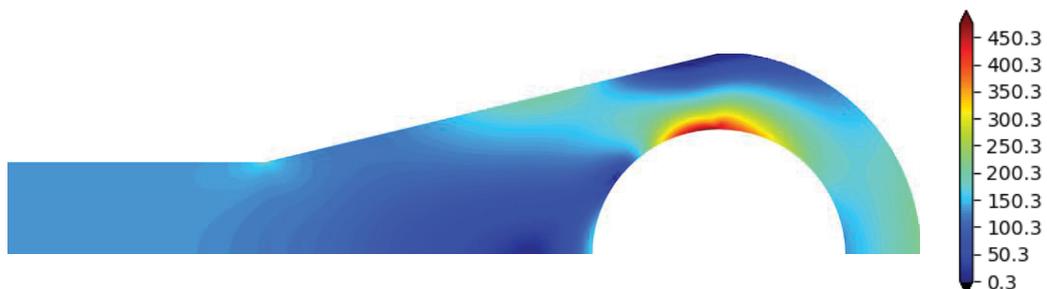


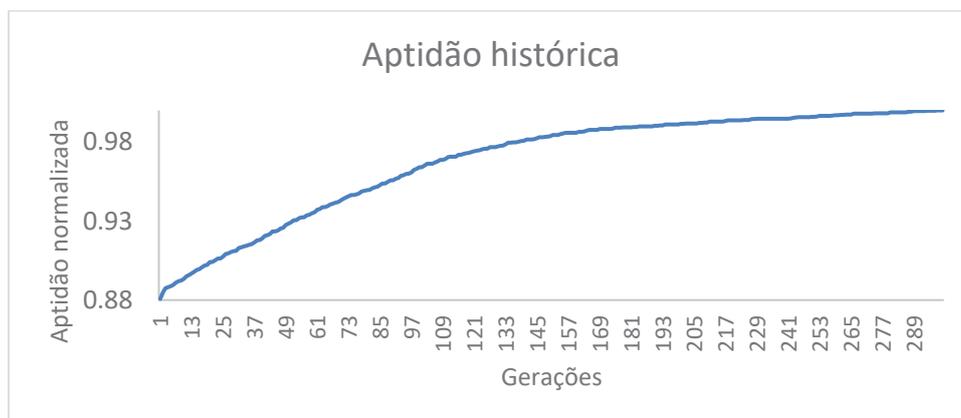
FIGURA 16 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NA CONEXÃO DE ANCORAGEM



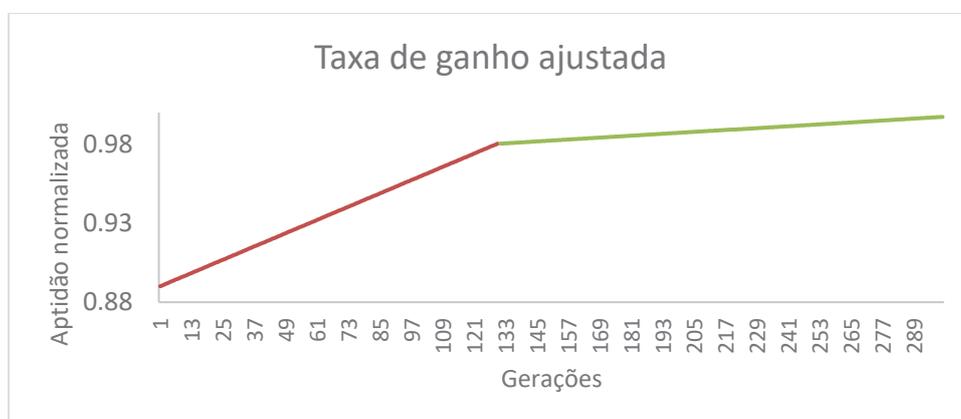
Assim como no problema do filete, o Algoritmo Genético para otimização da conexão de ancoragem foi construído com a utilização de 50 indivíduos por geração, sendo 40% deles selecionados para procriação. A combinação de coordenadas dos

indivíduos foi novamente aplicada para geração de novos indivíduos, sendo considerada uma mutação na forma de translação vertical de 0,5 unidades, com probabilidade de 50% por variável. O processo iterativo foi realizado 300 vezes. No item (a) da FIGURA 17 é possível notar que, diferentemente do problema de otimização do filete, o ganho de aptidão nesse caso ocorreu incrementalmente ao longo das gerações. Foi possível ajustar o incremento de aptidão com dois segmentos de reta, que representam a taxa de ganho de aptidão. O primeiro segmento foi ajustado com as aptidões até a geração 130 e o segundo entre as gerações 131 e 300. Nota-se, observando o item (b) da FIGURA 17, que a taxa de ganho de aptidão foi maior até a geração 130, sendo isso evidenciado pela inclinação da reta ajustada. Já entre as gerações 131 e 300 a taxa de ganho de aptidão é menor, porém ainda significativa. O processo foi interrompido uma vez que a variação da aptidão verificada entre as gerações atingiu o critério de parada.

FIGURA 17 – APTIDÃO HISTÓRICA DA CONEXÃO DE ANCORAGEM; (a) VARIAÇÃO DA APTIDÃO AO LONGO DAS GERAÇÕES E (b) AJUSTE REPRESENTANDO TAXAS DE GANHO DE APTIDÃO



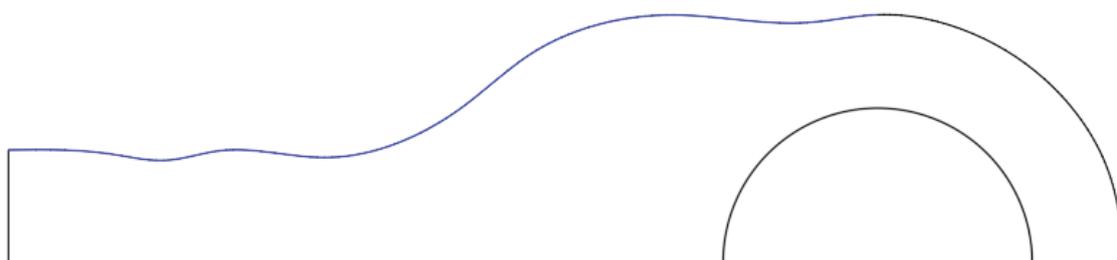
(a)



(b)

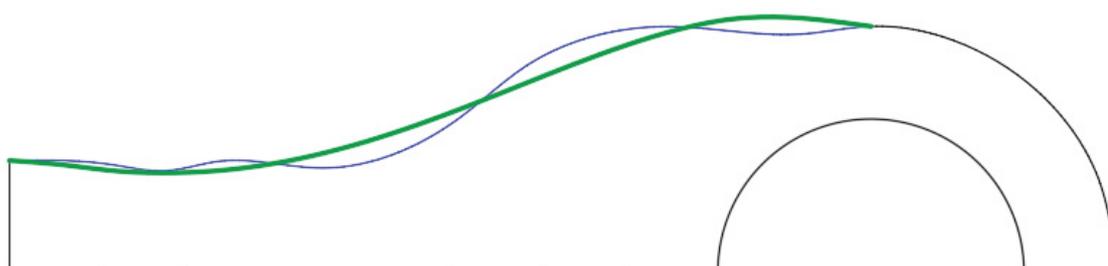
Nesse problema foram notadas, nos indivíduos resultantes, ondulações ao longo dos segmentos **F** e **G**, como pode ser visualizado na FIGURA 18. Essas ondulações têm origem devido à variabilidade aleatória, característica dos procedimentos aplicados ao longo das iterações pelo Algoritmo Genético, e foram apontadas por Sun et al. (2018) como uma desvantagem dos AGs.

FIGURA 18 – FORMA OTIMIZADA APRESENTANDO ONDULAÇÕES NOS SEGMENTOS **F** e **G**



Para evitar essas ondulações e permitir que os indivíduos resultantes apresentassem características geométricas mais suaves e, conseqüentemente, resultassem em estruturas de fácil execução, foi implementado um ajuste polinomial, por meio do método de mínimos quadrados. Note-se que esse ajuste é uma das contribuições deste trabalho. Nesse caso, considerando os nós 31 a 45, foi realizado um ajuste polinomial de grau 4 ($y = -1e - 7x^4 + 2e - 5x^3 + 2.2e - 3x^2 - 2.1e - 1x + 27.67$). Os nós 31 e 45 foram mantidos em sua configuração original e os nós intermediários seguiram a curva ajustada. Com isso o indivíduo resultante apresentou características mais suaves, sendo as ondulações eliminadas, conforme pode ser observado na FIGURA 19.

FIGURA 19 – COMPARAÇÃO ENTRE CONEXÃO DE ANCORAGEM OTIMIZADA COM (EM VERDE) E SEM (EM AZUL) O AJUSTE POLINOMIAL



A aplicação do ajuste polinomial aliado ao código do Algoritmo Genético permitiu reduzir significativamente um dos problemas da otimização com a utilização de AG apontado por Sun et al. (2018), que seria a alta variabilidade das coordenadas utilizadas como genes, e que poderia levar a estruturas de difícil execução e com bordas não suaves.

Na FIGURA 20 e na FIGURA 21 estão apresentadas as distribuições de tensões equivalentes de Von-Mises, obtidas nas configurações otimizadas da conexão de ancoragem obtidas nesse trabalho e por Sun et al. (2018), respectivamente. É importante ressaltar que não houve alteração significativa nas tensões ou área da estrutura após a aplicação do ajuste. Assim, a aptidão obtida para o indivíduo otimizado não foi impactada de maneira significativa.

FIGURA 20 – DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES EQUIVALENTES DE VON-MISES NA CONEXÃO DE ANCORAGEM; (a) OTIMIZAÇÃO SEM AJUSTE E (b) OTIMIZAÇÃO COM AJUSTE

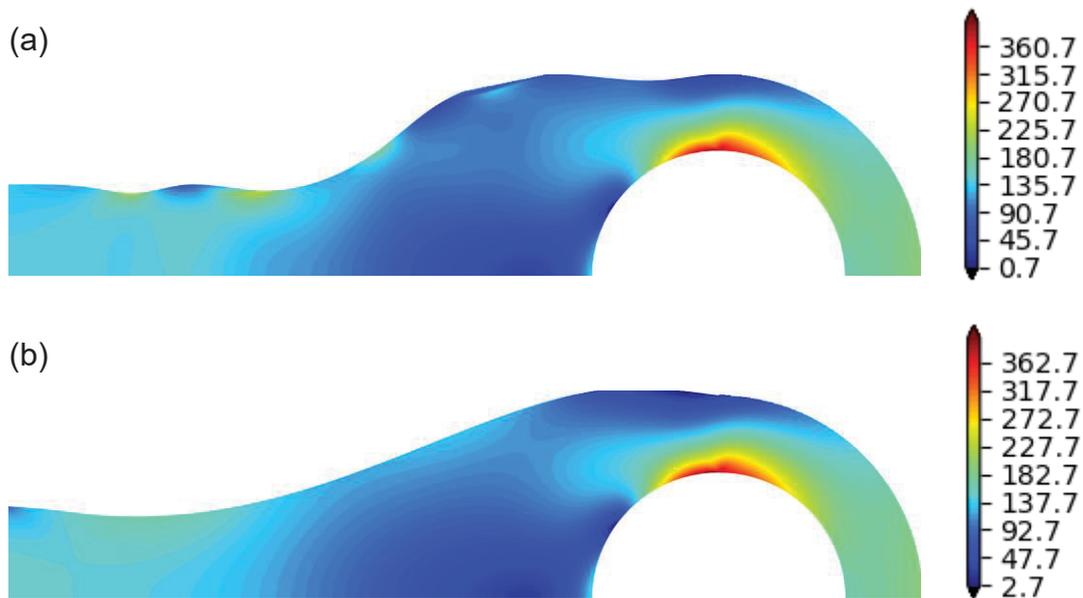
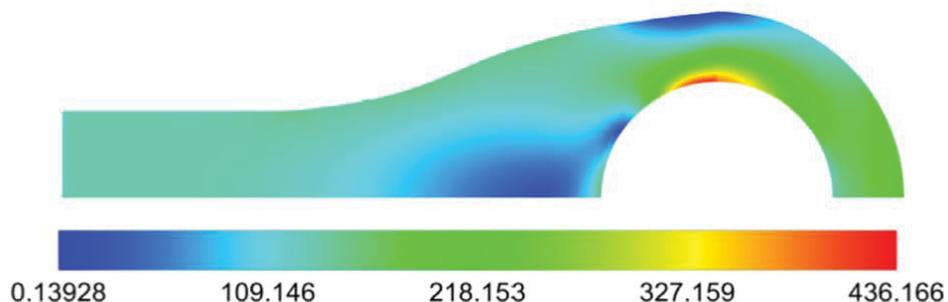


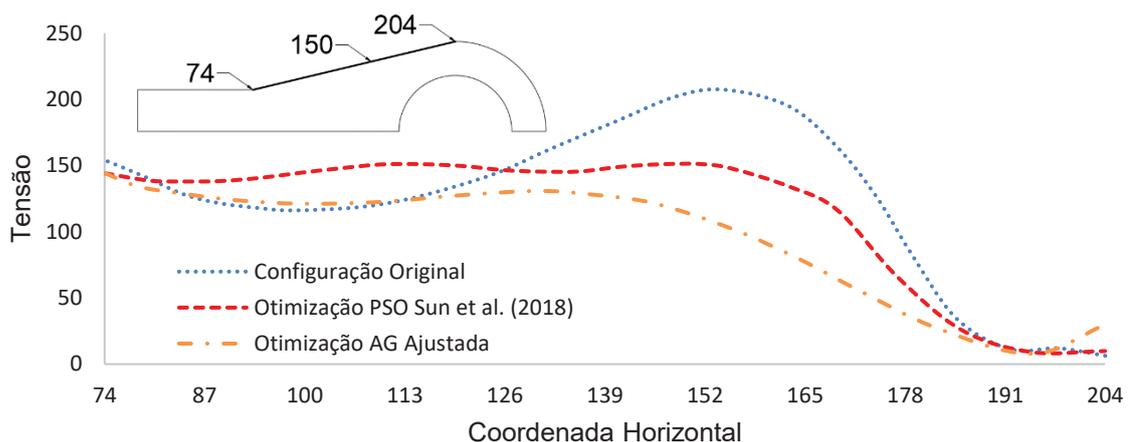
FIGURA 21 – TENSÕES DISTRIBUÍDAS NA CONEXÃO DE ANCORAGEM OBTIDAS POR SUN et al. (2018) NA OTIMIZAÇÃO PSO



FONTE: Sun et al. (2018).

Como o principal objetivo do problema envolvia a redução das tensões ao longo do segmento **F**, que varia entre as abcissas 74 e 204, foram avaliadas as tensões observadas ao longo desse segmento. A FIGURA 22 apresenta as tensões equivalentes de Von-Mises ao longo do segmento **F** para a configuração original da conexão, após a aplicação de procedimentos de otimização por PSO, desenvolvida por Sun et al. (2018), e por aplicação de AG com ajuste polinomial de grau 4, desenvolvida nesse trabalho. Nota-se, na linha pontilhada em azul, que a distribuição das tensões na configuração original da estrutura apresenta tensões mais elevadas próximas à abcissa 150.

FIGURA 22 – COMPARAÇÃO DAS TENSÕES OBSERVADAS NO SEGMENTO F ENTRE CONFIGURAÇÃO ORIGINAL, OTIMIZAÇÃO PSO E OTIMIZAÇÃO AG AJUSTADA.



Os resultados obtidos por Sun et al. (2018), com utilização de PSO aliado ao MEC, são representados, na FIGURA 22, pela linha tracejada em vermelho. É possível notar que entre as abcissas 74 e 126 as tensões são em geral maiores do que aquelas observadas na configuração original; porém, a partir da abcissa 126 em diante as tensões são consideravelmente menores, levando a uma média de 122,17 unidades de tensão, que representa uma redução média de 6,9% quando comparada à média das tensões ao longo do segmento **F** da configuração original, que é igual a 131,2 unidades de tensão.

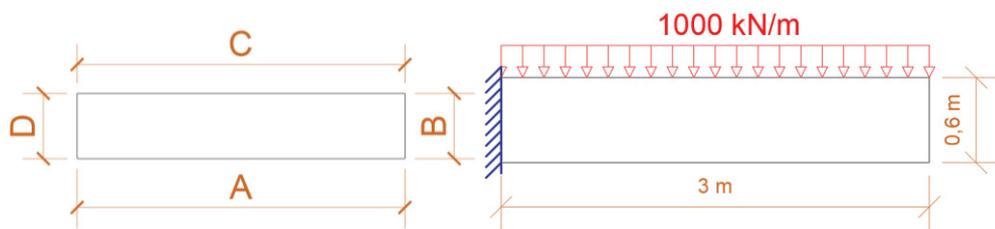
Já no caso da otimização realizada por meio da aplicação do MEC em conjunto com Algoritmo Genético com implementação de ajuste polinomial de grau 4 nas variáveis, representada pela linha traço ponto em verde da FIGURA 22, é possível

notar que as tensões entre as abcissas 74 e 126 são bastante semelhantes às aquelas observadas na configuração original e que, a partir desse ponto, são consideravelmente menores, levando a uma média de 100,5 unidades de tensão, uma redução de 23,4% quando comparada à média das tensões do segmento **F** da configuração original.

5.3 VIGA ENGASTADA

Nesse problema foi considerada uma viga originalmente com 3 m de comprimento e 0,6 m de altura. Na FIGURA 23 são apresentados os segmentos que representam o contorno do domínio da viga. Uma carga uniformemente distribuída de 1.000 kN/m foi aplicada no segmento **C**. O segmento **D** teve seus deslocamentos restringidos nas direções horizontal e vertical. Para as propriedades do material foram considerados módulo de elasticidade de 200.000 MPa e coeficiente de Poisson de 0,25.

FIGURA 23 – SEGMENTOS E CONDIÇÕES DE CONTORNO DA VIGA



Em sua configuração inicial, com a aplicação das condições de contorno, a estrutura apresentou deslocamento de 2,79 mm na intersecção dos segmentos **A** e **B**. Esse valor, comparado com o resultado analítico que é igual a 2,82 mm e que foi obtido por meio da Equação (90), representa uma variação, ou erro, de apenas 0,95%. O deslocamento máximo na extremidade livre de uma viga engastada, de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli, é calculado como:

$$u = \frac{qL^4}{8EI} \quad (90)$$

onde u representa o deslocamento, q a carga distribuída, L o comprimento da viga, E o módulo de elasticidade e I o momento de inércia.

A tensão máxima observada foi de cerca de 102 MPa, ocorrendo na extremidade engastada da viga (segmento **D**). Na FIGURA 24 é possível observar a distribuição de tensões na configuração original.

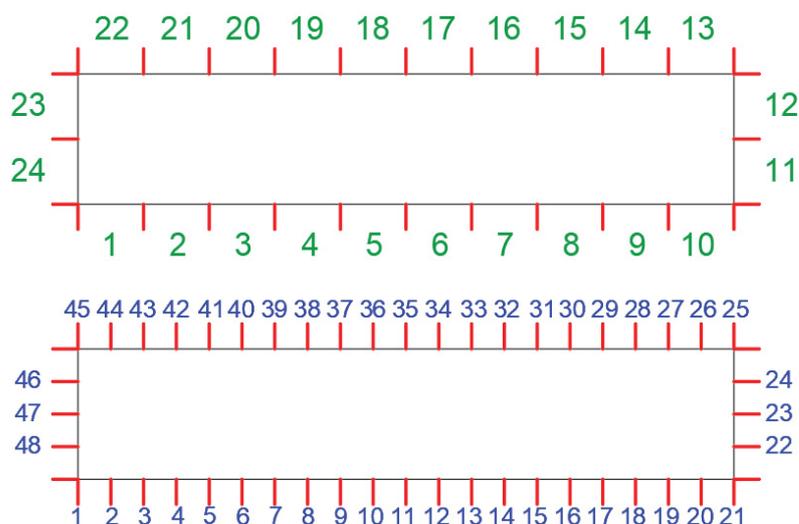
FIGURA 24 – DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES OBTIDAS NA CONFIGURAÇÃO INICIAL DA ESTRUTURA



O objetivo do problema de otimização envolveu a redução da área da estrutura sujeita a valores máximos de deslocamento e tensão. As restrições foram aplicadas no Algoritmo Genético na forma de penalizações aos indivíduos que ultrapassassem os limites impostos. Para os deslocamentos foi estabelecido um limite de 12 mm, baseado nos limites apontados pela norma NBR 6118 (2014) para varandas, que equivale ao comprimento da viga dividido por 250, e para as tensões foi estabelecido um limite de 115 MPa. Nos casos em que indivíduos ultrapassaram esses limites, penalizações foram aplicadas sobre sua aptidão, reduzindo drasticamente suas chances de transmissão de genes às próximas gerações. Como genes, foram utilizadas as coordenadas dos segmentos **A**, **B** e **D**, as quais foram aleatoriamente transladadas na direção vertical para criação dos indivíduos da população inicial.

O problema foi discretizado com a utilização de 24 elementos e 48 nós, como pode ser observado na FIGURA 25.

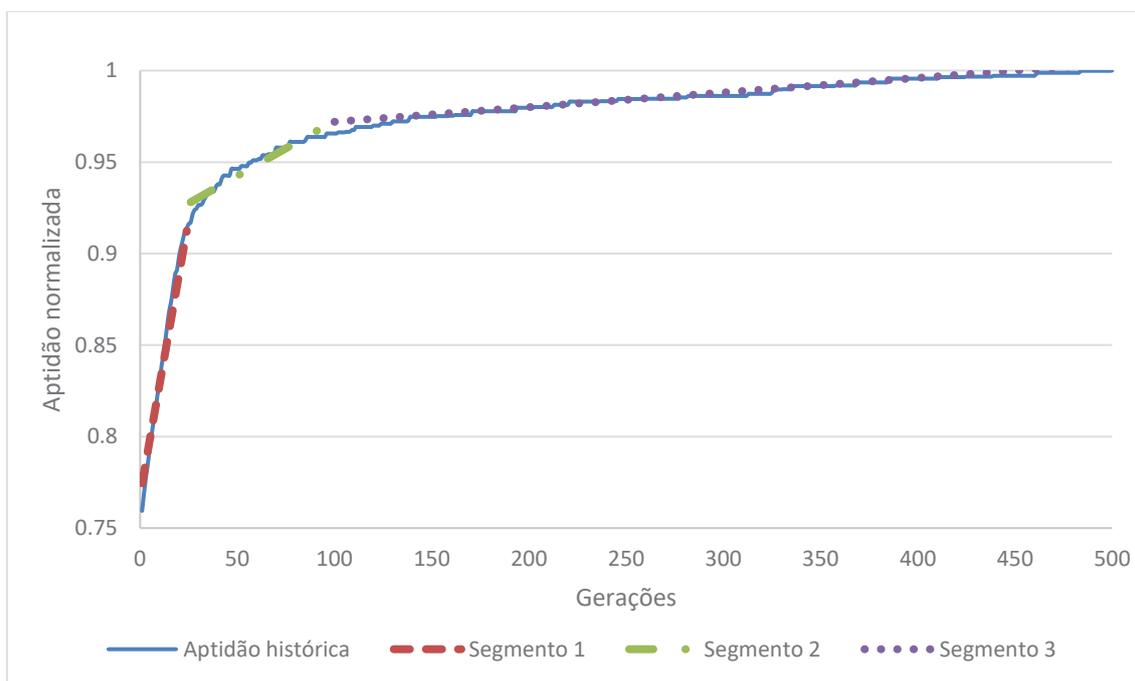
FIGURA 25 – DISCRETIZAÇÃO DA VIGA EM ELEMENTOS DE CONTORNO



O Algoritmo Genético foi aplicado na viga engastada e livre em questão com a utilização de 1000 indivíduos por geração, com 30% sendo selecionados para transmitir seus genes às gerações futuras. A transmissão dos genes se deu por meio da combinação das coordenadas de nós equivalentes dos pais, com a utilização de média aritmética. Para cada nó combinado do segmento variável, uma probabilidade de 50% foi adotada para mutação, que consistiu em transladar o nó no sentido vertical dentro de uma faixa de 0,5 unidades.

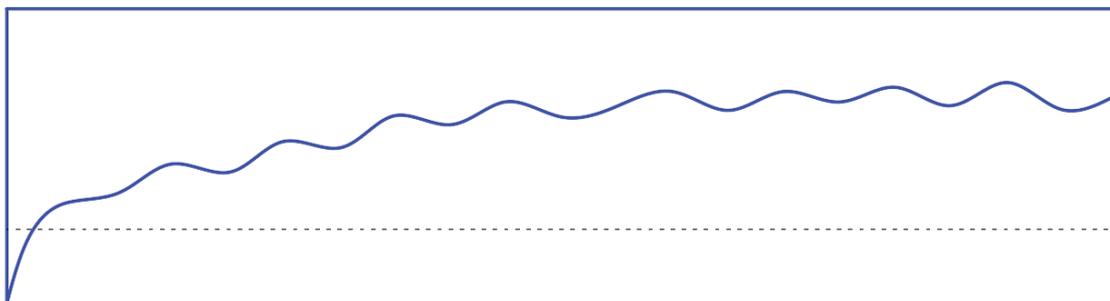
Na FIGURA 26 é possível observar a evolução da aptidão dos indivíduos ao longo de 500 gerações. Nota-se que a taxa de ganho de aptidão pode ser dividida em 3 segmentos ajustados de reta. No primeiro, que ocorre até a geração 30, representado em vermelho, a taxa de ganho foi mais abrupta, com grandes ganhos de aptidão sendo observados. Já no segundo segmento de reta ajustado, entre as gerações 31 e 100, representado em verde, podemos observar ainda ganhos significativos em um intervalo curto de gerações. No último segmento de reta ajustado, entre as gerações 101 e 500, representado em roxo, ganhos ainda podem ser observados na aptidão dos indivíduos, porém, as taxas de variação são menores, como pode ser observado na FIGURA 26 onde a reta amarela tracejada apresenta menor inclinação, ou seja, menor taxa de ganho de aptidão.

FIGURA 26 – APTIDÃO HISTÓRICA AO LONGO DAS GERAÇÕES



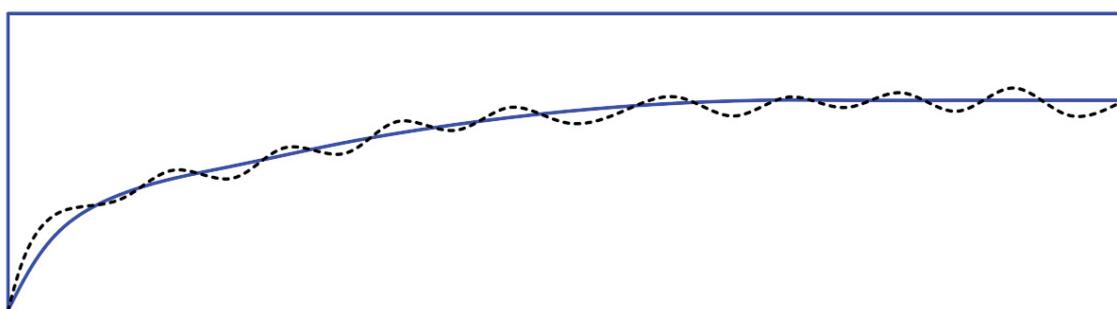
Na FIGURA 27 é possível observar o indivíduo resultante do processo de otimização sem a aplicação do ajuste no segmento no qual as coordenadas dos nós foram utilizadas como genes. Em linhas tracejadas é apresentada a configuração original da estrutura. É possível notar que o segmento **D** é maior na configuração otimizada quando comparado com a configuração original. Isso se dá uma vez que uma das restrições aplicadas no problema envolvia a redução das tensões. A solução encontrada pelo Algoritmo Genético envolveu aumentar o comprimento do segmento engastado da estrutura, o que reflete diretamente nas tensões observadas. As tensões dependem diretamente de fatores como a distribuição dos momentos fletores ao longo da viga, do módulo de elasticidade e do momento de inércia. Como o módulo de elasticidade e a distribuição dos momentos foram mantidos constantes, já que foi considerada somente a carga uniformemente distribuída no segmento **C** (não sendo levado em conta o peso-próprio da estrutura), o único fator com alteração permissível passou a ser o momento de inércia, que aumenta cubicamente com a altura.

FIGURA 27 – COMPARAÇÃO ENTRE ESTRUTURA ORIGINAL E ESTRUTURA OTIMIZADA ANTES DA APLICAÇÃO DO AJUSTE



Ainda na FIGURA 27 é possível notar as ondulações características da livre translação das coordenadas do segmento **A**, tomadas como variáveis no problema de otimização por meio da aplicação do Algoritmo Genético. Com a utilização de um ajuste polinomial de grau 2 ($y = -2,3e - 3x^2 + 6,85e - 2x + 7,61e - 2$), aplicado entre os nós 1 e 21, foi possível suavizar o segmento ondulado, obtendo a configuração geométrica apresentada na FIGURA 28. Da mesma forma que ocorreu no problema anterior o ajuste não acarretou em modificações significativas nas tensões e deslocamento, sendo isso também refletido na aptidão, que não sofreu alterações significativas.

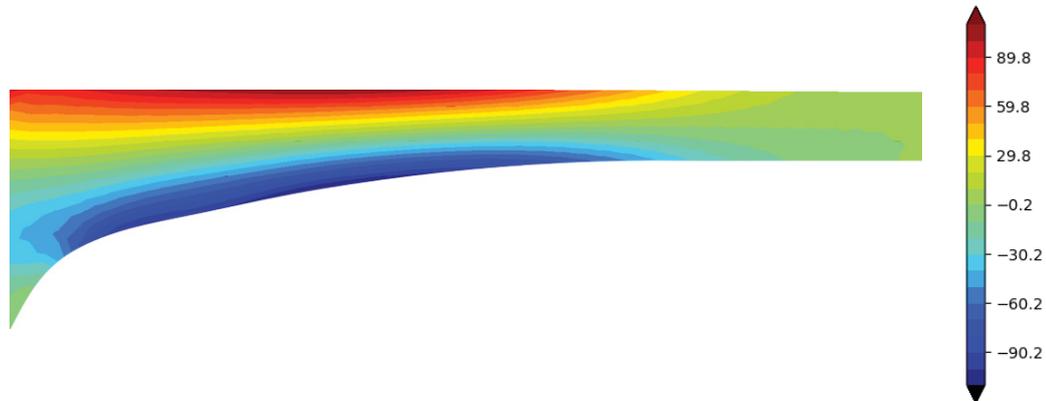
FIGURA 28 – COMPARAÇÃO ENTRE A CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA COM E SEM A APLICAÇÃO DE AJUSTE POLINOMIAL



Na FIGURA 29 é possível observar as tensões obtidas para a configuração otimizada após a aplicação de ajuste polinomial. O deslocamento máximo foi de 11,6 mm para baixo na direção vertical, dentro dos limites estabelecidos. Já para as tensões a compressão máxima observada foi de cerca de 110 MPa enquanto que, para a tração, foi de cerca de 114 MPa. É importante ressaltar que tanto os deslocamentos quanto as trações ficaram dentro dos limites estabelecidos, o que já

era esperado, uma vez que indivíduos que ultrapassaram esses limites foram penalizados.

FIGURA 29 – DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES NORMAIS NO SENTIDO HORIZONTAL PARA CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA APÓS O AJUSTE POLINOMIAL

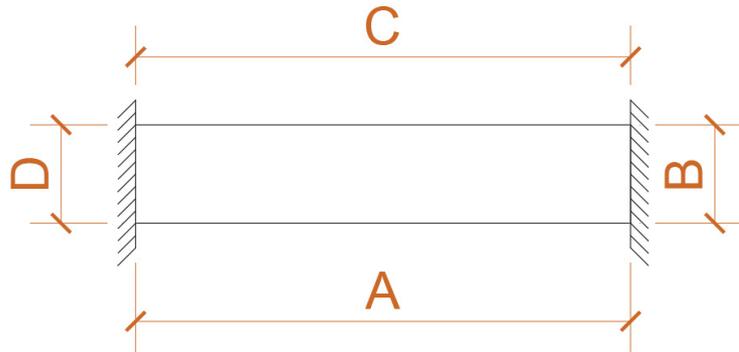


Foi possível reduzir a área em 53,6% ao comparar a configuração original com a configuração geométrica otimizada, obtida após a aplicação do ajuste polinomial. A área da estrutura passou de 1,8 m² para 0,97 m². Com a redução significativa da área da estrutura os valores máximos para tração e compressão aumentaram. A compressão máxima passou de cerca de 99 MPa para 110 MPa e a tração passou de 101 MPa para 114 MPa, aumentos de 11,1% e 12,9% respectivamente. Já os deslocamentos obtidos, como esperado, foram maiores para a configuração otimizada, com o valor máximo passando de cerca de 3 mm para 11,6 mm, mas mantendo-se dentro do limite imposto.

5.4 VIGA BIENGASTADA

Nesse problema foi considerada uma viga com as mesmas dimensões do problema anterior, 3 m de comprimento e 0,3 m de altura. Uma carga uniformemente distribuída de 5.000 kN/m foi aplicada no segmento **C**. Nesse exemplo, em adição ao segmento **D** o segmento **B** também teve seus deslocamentos restringidos nas direções horizontal e vertical, como pode ser observado na FIGURA 30. As mesmas propriedades foram consideradas para o material, isto é, módulo de elasticidade igual a 200.000 MPa e coeficiente de Poisson 0,25.

FIGURA 30 – SEGMENTOS DA VIGA BI ENGASTADA



Em sua configuração inicial, com a aplicação das condições de contorno, a estrutura apresentou deslocamento máximo de 2,53 mm no centro do segmento **A**. Comparado com o obtido por meio da solução analítica da teoria de Euler-Bernoulli, apresentada na Equação (91), e que é igual a 2,34 mm, observa-se uma diferença de cerca de 8% entre eles. O máximo deslocamento fornecido pela teoria de Euler-Bernoulli, e que ocorre no meio do vão, é dado por:

$$u = \frac{qL^4}{384EI} \quad (91)$$

onde u representa o deslocamento, q a carga distribuída, L o comprimento da viga, E o módulo de elasticidade e I o momento de inércia.

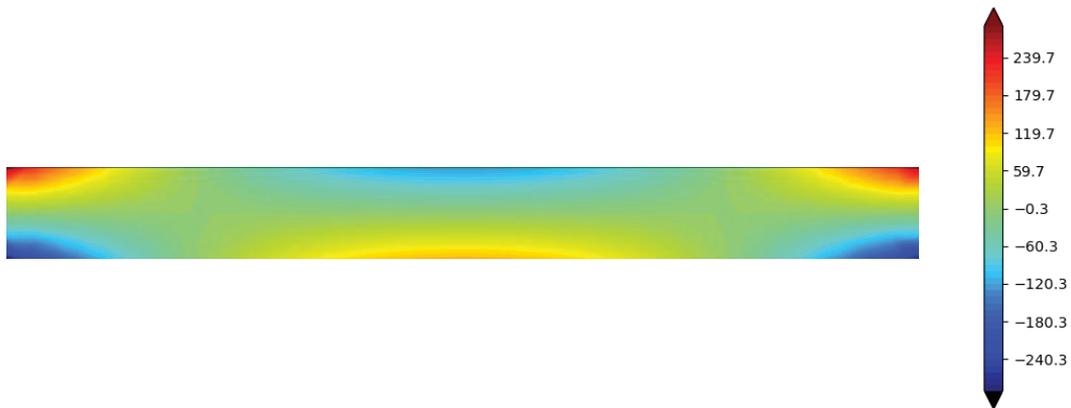
Se levarmos em conta os efeitos do cisalhamento, utilizando a Equação (92) apresentada por Ghugal et al. (2010):

$$u = \frac{qL^4}{8EI} \left[1 + 7(1 + \nu) \frac{h^2}{L^2} \right] \quad (92)$$

onde h é a altura da viga, obtemos um deslocamento igual a 2,54 mm, fazendo com que o erro passe a ser de 0,42%. É importante mencionar que diferenças entre os resultados obtidos com a utilização da teoria clássica de vigas, ou de Euler-Bernoulli, e os obtidos através de uma formulação para estado plano, tal como a formulação do MEC utilizada neste trabalho, são esperadas. Um aperfeiçoamento da solução analítica, tal como a apresentada na equação (92), apenas reforça a afirmação anterior.

As tensões máximas observadas para tração e compressão foram de 293,4 MPa e -290,3 MPa, respectivamente, ocorrendo nas extremidades engastadas da viga (segmentos **B** e **D**). Na FIGURA 31 é possível observar a distribuição de tensões na configuração original.

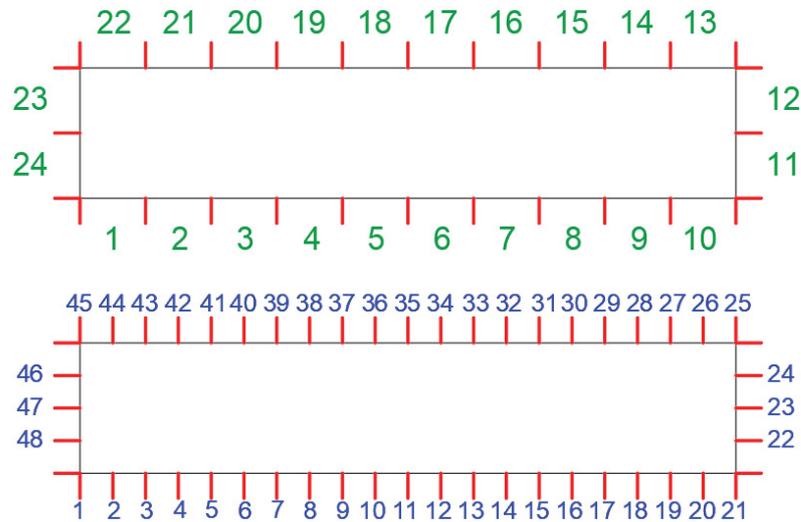
FIGURA 31 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES PARA A CONFIGURAÇÃO ORIGINAL DA VIGA BI ENGNASTADA



Assim como no problema anterior, o objetivo da otimização envolveu a redução da área da estrutura sujeita a valores máximos de deslocamento e tensão. As restrições foram aplicadas no Algoritmo Genético na forma de penalizações aos indivíduos que ultrapassassem os limites impostos. Nesse caso os limites estabelecidos foram baseados nas tensões e deslocamentos resultantes do problema original. Dessa forma o objetivo do problema se tornou reduzir a área da estrutura enquanto mantendo os valores máximos de deslocamento, tração e compressão observados no problema original. Assim, para os deslocamentos foi estabelecido um limite de 2,6 mm e para as tensões foram considerados limites de 293 MPa para tração e 290 MPa para compressão. Penalizações foram aplicadas sobre a aptidão de indivíduos que ultrapassaram os limites estabelecidos. As coordenadas dos segmentos **A**, **B** e **D** foram novamente utilizadas como genes para o Algoritmo Genético.

A discretização utilizada foi a mesma criada para o problema anterior, com a utilização de 24 elementos e 48 nós, como pode ser observado na FIGURA 32.

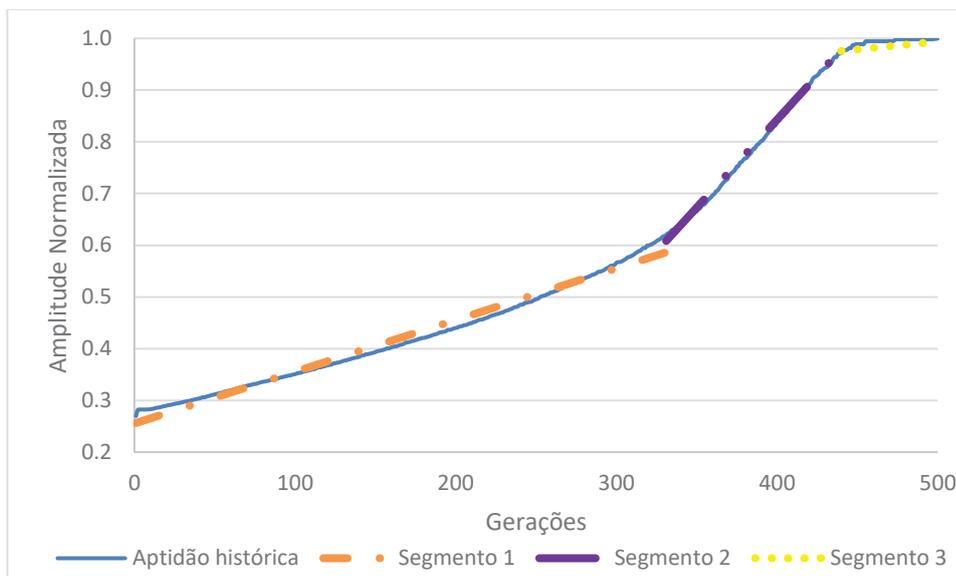
FIGURA 32 – DISCRETIZAÇÃO UTILIZADA PARA O PROBLEMA DA VIGA BI ENGASTADA



O Algoritmo Genético foi aplicado na viga bi engastada com a utilização de 500 indivíduos por geração, sendo 20% deles selecionados para transmitir seus genes às gerações futuras. A combinação das coordenadas dos nós equivalentes dos pais foi utilizada como mecanismo de combinação. A variabilidade foi introduzida por meio de uma probabilidade de 50% para mutação, que consistiu em transladar o nó no sentido vertical dentro de uma faixa de 0,5 unidades.

Na FIGURA 33 é possível observar a evolução da aptidão dos indivíduos ao longo de 500 gerações. Novamente foi possível separar três segmentos com diferentes taxas de ganho de aptidão. No primeiro segmento, representado pela curva ajustada com linha pontilhada em laranja, é possível notar que a taxa de ganho manteve valores muito próximos entre as gerações 0 e 330. No segundo segmento, representado pela linha pontilhada em roxo, houve um incremento significativo na taxa de ganho de aptidão que durou entre as gerações 331 e 440. A partir desse ponto a taxa de ganho apresentou reduções, com ganhos pouco expressivos de aptidão, como pode ser observado na FIGURA 33 pelo segmento representado com a linha pontilhada em amarelo.

FIGURA 33 – APTIDÃO HISTÓRICA AO LONGO DAS GERAÇÕES PARA A VIGA BI ENGASTADA



Na FIGURA 34 é possível observar o indivíduo resultante do processo de otimização sem a aplicação do ajuste no segmento no qual as coordenadas dos nós foram utilizadas como genes. Em linhas tracejadas é apresentada a configuração original da estrutura. Nota-se, novamente, a presença de ondulações, que foram suavizadas pela aplicação de um ajuste polinomial de grau 4 ($y = 1.04e - 2x^4 - 6,31e - 2x^3 - 6,87e - 2x^2 + 4,918e - 1x + 1,626e - 1$) e de um espelhamento aplicado no centro da viga, resultando na configuração otimizada ajustada da estrutura, apresentada na FIGURA 35. Esse espelhamento se deu necessário uma vez que ao longo das iterações, com a livre variação da posição dos nós, ocorre perda de simetria na estrutura otimizada (ver FIGURA 34), dessa forma, o espelhamento foi utilizado para garantir simetria à viga.

FIGURA 34 – CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA DA VIGA BI ENGASTADA ANTES DA APLICAÇÃO DE AJUSTE POLINOMIAL

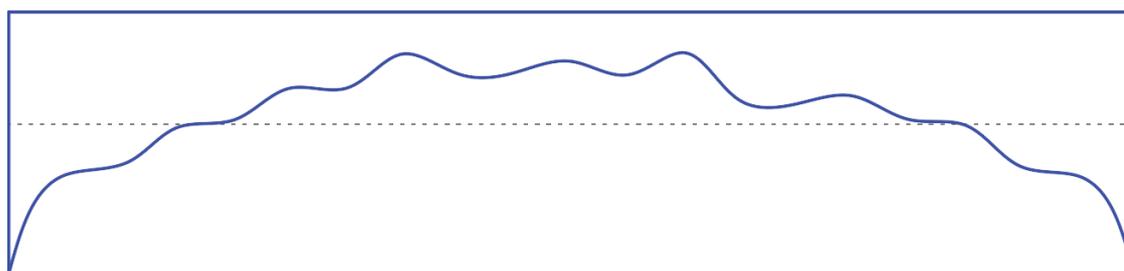
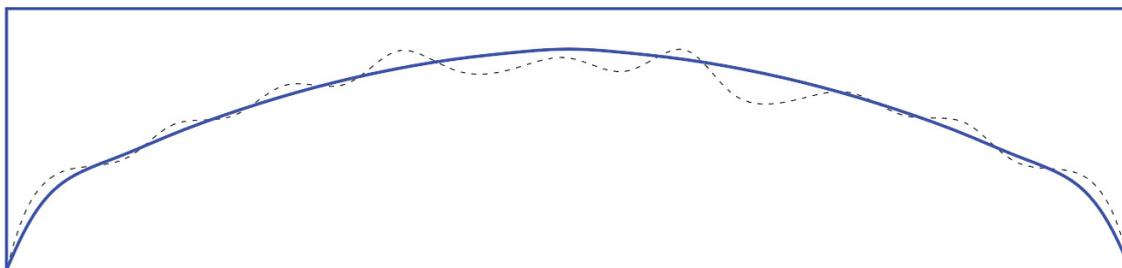
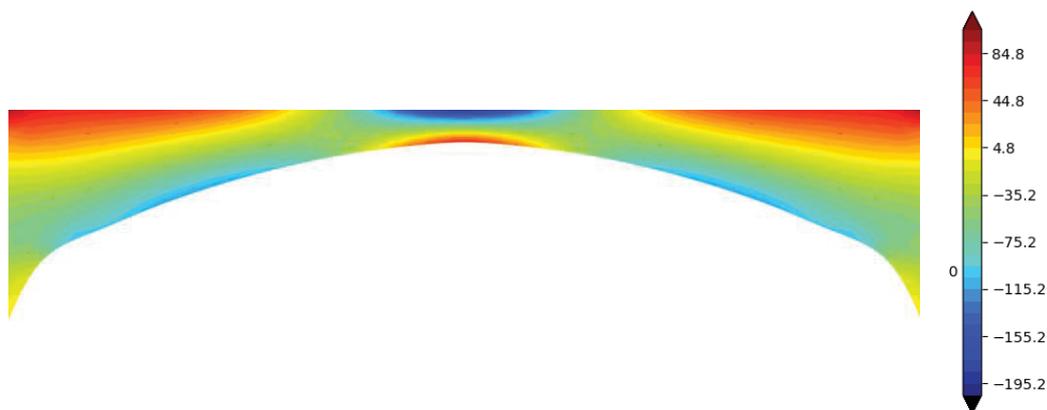


FIGURA 35 – CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA AJUSTADA DA VIGA BI ENGASTADA



Na FIGURA 36 é possível observar as tensões obtidas para a configuração otimizada após a aplicação de ajuste polinomial. O deslocamento máximo resultante foi de cerca de 2,5 mm. Já para as tensões, a compressão máxima observada foi de cerca de -205 MPa e a tração máxima foi de cerca de 108 MPa. É importante ressaltar que tanto os deslocamentos quanto as trações ficaram dentro dos limites estabelecidos, o que já era esperado, uma vez que indivíduos que ultrapassaram esses limites foram penalizados.

FIGURA 36 – TENSÕES OBTIDAS PARA CONFIGURAÇÃO OTIMIZADA DA VIGA BI ENGASTADA APÓS APLICAÇÃO DO AJUSTE POLINOMIAL



Foi possível reduzir a área em 9,1% ao comparar a configuração original com a configuração geométrica otimizada, obtida após a aplicação do ajuste polinomial. A área da estrutura passou de 0,9 m² para cerca de 0,82 m². Os deslocamentos e tensões, como esperado, ficaram abaixo dos limites estabelecidos. No caso dos deslocamentos foi obtido o valor máximo de 2,5 mm no meio do vão e para as tensões de compressão e tração foram obtidos valores de cerca de 205 MPa e 108 MPa, correspondentes a reduções de 29,3% e 63,1%, respectivamente.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho consistiu na implementação de um código computacional utilizando um Algoritmo Genético aliado ao Método dos Elementos de Contorno para otimização de problemas de elasticidade. Para tanto foram utilizadas as sub-rotinas disponibilizadas por Brebbia e Dominguez (1998) para solucionar os problemas de elasticidade e permitir o cálculo da aptidão de cada indivíduo que compunha as populações. Foram ainda definidas sub-rotinas em FORTRAN 90 que permitiram a realização do processo iterativo de otimização. O código foi desenvolvido de modo a permitir adaptações nas funções objetivo na forma de uma constante multiplicadora dos valores de tensões e deslocamentos de modo a permitir equilíbrio entre área e tensões e deslocamentos de interesse. O código computacional desenvolvido foi então aplicado em 4 exemplos, sendo 2 deles obtidos na literatura e outros 2 propostos no trabalho.

O objetivo principal do trabalho, de criar um código computacional capaz de otimizar problemas bidimensionais de elasticidade com a utilização de um Algoritmo Genético aliado ao Método dos Elementos de Contorno, foi atingido. Nas quatro aplicações estudadas foi possível testar diferentes objetivos e restrições e observar o comportamento da aptidão dos indivíduos ao longo das gerações.

O código se mostrou capaz de atender às restrições impostas e mostrou resultados convergentes para o aumento da aptidão das gerações nos quatro exemplos analisados. O incremento de aptidão se deu de forma distinta em cada um dos exemplos estudados; porém, uma característica comum para todos os exemplos foi a distinção clara entre diferentes taxas de ganho de aptidão ao longo do processo iterativo, exemplificadas pelas retas ajustadas nas curvas de aptidão histórica.

A comparação entre os resultados obtidos neste trabalho com os resultados trazidos pela literatura demonstrou a capacidade do código desenvolvido pelo autor de obter formas otimizadas similares às obtidas por outras técnicas de otimização.

A introdução da aplicação de um ajuste polinomial sugerida neste trabalho teve sucesso em reduzir a alta variabilidade característica de otimizações topológicas com utilização de Algoritmos Genéticos. As geometrias obtidas após a aplicação do ajuste apresentaram contornos suaves e a complexidade executiva foi consideravelmente reduzida se comparada com a forma resultante obtida antes da aplicação do ajuste. Cabe ressaltar que o ajuste teve como objetivo suavizar o

contorno das formas otimizadas obtidas, que não tiveram como limitação em seu objetivo principal a forma topológica obtida, ou seja, mesmo com a suavização as formas otimizadas poderiam ainda apresentar dificuldades executivas.

6.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como recomendações para trabalhos futuros podemos citar:

- A utilização de diferentes funções de cálculo de aptidão com o objetivo de verificar a influência no número necessário de iterações para convergência do problema;
- Estudar as taxas de aptidão e comparar sua variação ao longo do processo iterativo de modo a determinar critérios de parada mais eficientes, que proporcionem bom balanço entre tempo de processamento e atingimento de objetivos e restrições;
- Testar a aplicação do ajuste polinomial em problemas tridimensionais de modo a verificar sua capacidade de suavizar o contorno e resultar em geometrias de baixa complexidade executiva;
- Ter como objetivo estruturas otimizadas composta somente por segmentos retos, favorecendo a facilidade de execução das formas otimizadas.

REFERÊNCIAS

- BEASLEY, D. BULL, D. R. MARTIN, R. R. ***An Overview of Genetic Algorithms: Part 1, Fundamentals***. University Computing, 1993.
- BEER, G. IAN, S. DUENSER, C. ***The Boundary Element Method with Programming***. Springer Wien New York, 2008.
- BREBBIA, C.A. TELLES, J.C.F. WROBEL, L.C. ***Boundary Element Techniques***. Springer-Verlag, 1983.
- BREBBIA, C. A. DOMINGUEZ, J. ***Boundary Elements an Introductory Course***. WIT PRESS, Computational Mechanics Publications, segunda edição, 1998.
- CICCONI, P. CASTORANI, V. GERMANI, M. MANDOLINI, M. VITA, A. ***A Multi-Objective Sequential Method for Manufacturing Cost and Structural Optimization of Modular Steel Towers***. Engineering with Computers, 2019.
- DORIGO, M. ***Optimization, Learning and Natural Algorithms***. Tese de doutorado, Politecnico di Milano, 1992.
- FENG, Y. WANG, C. BRISEGHELLA, B. FENU, L. ZORDAN, T. ***Structural Optimization of a Steel Arch Bridge with Genetic Algorithm***. Structural Engineering International, 2020.
- FOGEL, L. J., OWENS, A. J., WALSH, M. J. ***Artificial Intelligence through simulated evolution***. Wiley-IEEE Press, 1966.
- GHUGAI, Y. M. SHARMA, G. ***A Refined Shear Deformation Theory for Flexure of Thick Beams***. Latin American Journal of Solids and Structures, 2010.
- GREENHALGH, D. MARSHALL, S. ***Convergence Criteria for Genetic Algorithms***. SIAM Journal for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- HARTMANN, F. ***Computing the C-matrix in Non-smooth Boundary Points***. New Developments in Boundary Element Methods, 1980.
- HEURÍSTICO. In: DICIO, ***Dicionário Online de Português***. Porto: 7Graus, 2021. Disponível em: < <https://www.dicio.com.br/heuristico/>>. Acesso em: 16/10/2021.
- HOLLAND, J. H. ***Adaptation in Natural and artificial Systems***. The University of Michigan Press, 1975.
- JAMIL, M. YANG, X. ***A Literature Survey of Benchmark Functions for Global Optimization Problems***. Mathematical Modelling and Numerical Optimization, Vol. 4, No. 2, 2013.
- JONG, K. D. ***An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems***. Tese de doutorado, University of Michigan, 1975.

- KATOCH, S. CHAUHAN, S. S. KUMAR, V. ***A review on genetic algorithm: past, present, and future.*** Multimedia Tools and Applications. Springer Nature, 2020.
- KENNEDY, J. EBERHART, R. ***Particle Swarm optimization.*** Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, 1995.
- KHODZHAIEV, M. REUTER, U. ***Structural Optimization of Transmission Towers Using a Novel Genetic Algorithm Approach with a Variable Length Genome.*** Engineering Structures, 2021.
- KIRKPATRICK, S. GELLAT, C.D. VECHHI, M. P. ***Optimization by Simulated Annealing.*** Science, 1983.
- KOZA, J. R. ***Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection.*** MIT Press, 1992.
- LACHAT, J.A. ***A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatic.*** Tese de doutorado, University of Southampton, 1975.
- LOVE, A. E. H. ***A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.*** Cambridge, The University Press, 1892.
- MANTIC, V. ***A New Formula for the C-matrix in the Somigliana Identity.*** Journal of Elasticity, vol. 33, 1993.
- META. *In*: DICIO, ***Dicionário Online de Português.*** Porto: 7Graus, 2021. Disponível em: < <https://www.dicio.com.br/meta/>>. Acesso em: 16/10/2021.
- MIKHLIN, S.G. ***Integral Equations and their Application to Certain Problems in Mechanics, mathematical Physics and Technology.*** Pergamon Press, 1957.
- MOREIRA, M.S.S. ***Análise de problemas de elasticidade bidimensional com o método dos elementos de contorno.*** Dissertação de mestrado, UFRJ, 1983.
- MUSKHELISHVILI, N.I. ***Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity,*** 1953.
- OLIVEIRA, J. I. F. MIRANDA, A. C. O. ***Structural Optmization Using Multi-Objective Genetic Algorithm.*** Chiranjevulu Journal of Engineering Research and Application, 2020.
- PORTELA, C. C. J. ***Associação do método dos elementos de contorno a um algoritmo híbrido para análise inversa de elasticidade em dutos.*** Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, 2017.
- PORTELA, C. C. J., JAREK, A. de LACERDA, L. A. ***Acoplamento de um algoritmo genético ao Método dos Elementos de Contorno para análise inversa em estruturas.*** CILAMCE, 2016.

RECHENBERG, I. ***Cybernetic Solution Path of an Experimental Problem***. Royal Aircraft Establishment Library, 1965.

RIZZO, F.J. ***An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elasticity***. Quarterly of Applied Mathematics, 1967.

RICARDELLA, P.C. ***An Implementation of the Boundary Integral Technique for Planar Problems in Elasticity and Elastoplasticity***. Carnegie Mellon University, ProQuest Dissertations Publishing, 1973.

SANTIAGO, J. A. F. ***Implementação do Método dos Elementos de Contorno para Elasticidade Bidimensional com o uso de Microcomputadores***. Tese de mestrado, UFRJ, COPPE, 1987.

SCHWEFEL, H.P. ***Kybernetische Evolution als Strategie der Experimentellen Forschung in der Strömungstechnik***. Tese de doutorado, Technische Universität Berlin, 1965.

SCHWEFEL, H.P. ***An Interviews with Hans-Paul Schwefel: with an introduction by Günter Rudolph***. ACM SIGEVolution 3, 2008.

SUN, S. H. YU, T. T. NGUYEN, T. T. ATROSHCHENKO, E. BUI, T. Q. ***Structural shape optimization by IGABEM and particle swarm optimization algorithm***. Engineering Analysis with Boundary Elements, Elsevier, 2018.

TELLES, J.C.F. ***The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems***. Lecture Notes in Engineering, vol. 1, Springer-Verlag, 1983.

SUZUKI, J. ***A Markov Chain Analysis on Simple Genetic Algorithms***. IEEE Transaction on Systems, Man. And Cybernetics, vol. 25, 1995.

YANG, X. ***Nature Inspired Algorithms***. Studies in Computational Intelligence 744. Springer, 2018.

YANG, X. BEKDAS ,G. NIGDELI, S. M. ***Review and Applications of Metaheuristic Algorithms in Civil Engineering***. Modeling and optimization in Science and Technologies 7. Springer International Publishing, 2016.

APÊNDICE 1 – PSEUDOCÓDIGOS

Sub-rotina gerar_pop

!=====

!Descrição: Gera população inicial por meio de alterações randomicas

! em um indivíduo mestre

!=====

Input:

Tamanho dos indivíduos (número de nós), N

Nós fixos, $nós_fixos$

Quantidade de nós fixos, num_fixos

Coordenadas indivíduo inicial, ind_ini

Número de indivíduos, num_ind

Output:

População, pop

início

Declaração de variáveis para INPUT e OUTPUT

Declaração de variáveis internas

Criação de lista de tamanho n_ind

Alocação do indivíduo inicial na primeira posição da lista

Laço 1 - ente posição 2 e num_ind

Laço 2 - entre posições de alocação das coordenadas x e y

Laço 3 - correndo número de nós N

se nó é fixo

 coordenada do nó é igual a respectiva em ind_ini

se nó é variável

 aplicação de variação aleatória e probabilística

fim se

fim Laço 3

fim Laço 2

fim Laço 1

retorna população pop

fim sub-rotina

Sub-rotina fitness

!=====

!Descrição: Calcula a aptidão de um indivíduo

!=====

Input:

Limites deslocamento e tensões, *lim_desloc lim_tens*
Deslocamentos e Tensões de interesse, *desloc tens*
Número de nós utilizados no cálculo da área, *num_geom_nodes*
Coordenadas, *coord*

Output:

Aptidão, *fit*

início

Declaração de variáveis para INPUT e OUTPUT
Declaração de variáveis internas
Determinação da área
Aptidão *fit* recebe valor proporcional à área
se *desloc > lim_desloc* **ou** *tens > lim_tens*
 Penalização sobre aptidão *fit*

fim se

retorna aptidão *fit*

fim sub-rotina

Sub-rotina escolhe_pais

!=====

!Descrição: Recebe lista com aptidões, ordena indivíduos e separa os

! pais.

!=====

Input:

Aptidões, *fit*
Número de indivíduos, *num_ind*
Número de pais, *num_pais*
Pouplação, *pop*

Output:

Pais, *pais*

início

Declaração de variáveis para INPUT e OUTPUT
Declaração de variáveis internas
Ordenação crescente de aptidão **chama** sub-rotina *rargsort*
Inversão da lista ordenada **chama** sub-rotina *flip_int*
retorna pais *pais*

fim sub-rotina

Sub-rotina rargsort

!=====

!Descrição: Recebe lista fit com dimensão n e retorna lista de índices

! ordenados fit_ord.

!=====

Input:

Lista de aptidões, *fit*
Dimensão da lista, *n*

Output:

Lista ordenada, *fit_ord*

início

Declaração de variáveis para INPUT e OUTPUT

Declaração de variáveis internas

Alocação de valores de *fit* em *fit_ord*

Laço correndo *i* de 1 a *n-1*

 Localização do índice para menor valor em *fit* a partir da posição *i*
 se índice do menor valor **for diferente de i**

 Substituição dos valores das posições *i* e índice de menor valor

fim se

fim Laço

retorna Lista ordenada *fit_ord*

fim sub-rotina

Sub-rotina flip_int

!=====

!Descrição: Inverte lista unidimensional

!=====

Input:

Lista, *lista*
Dimensão da lista, *n*

Output:

Lista invertida, *lista_inv*

início

Declaração de variáveis para INPUT e OUTPUT

Declaração de variáveis internas

Laço correndo *i* de 1 até *n*

 Posição *i* de *lista_inv* recebe posição *n+1-i* de *lista*

fim Laço

retorna Lista invertida *lista_inv*

fim sub-rotina

Sub-rotina procria

!=====

!Descrição: Recebe array pais e faz mistura de genes entre esses

! indivíduos, criando num_ind-num_pais novos indivíduos

! e modificada a array pop para receber os pais e os novos

! indivíduos

!=====

Input:

Pais, *pais*

Número de indivíduos, *num_ind*

Número de pais, *num_pais*

Número de nós fixos, *num_fixos*

Lista de nós fixos, *nós_fixos*

Probabilidade de mutação, *prob_mut*

Mutação, *mut*

InOut:

População, *pop*

início

Declaração de variáveis para INPUT e OUTPUT

Declaração de variáveis internas

Laço correndo *num_pais*

População *pop* recebe em suas primeiras posições *pais*

fim Laço

Laço 1 - correndo *j* de 1 até *num_ind - num_pais*

Escolha randômica de dois indivíduos na lista de pais *pais*

Laço 2 - correndo nós dos indivíduos

se nó é fixo

coordenada permanece igual

se nó é variável

nó recebe média aritmética das coordenadas dos pais

#Mutação probabilística

se número randômico entre 0 e 1 é menor do que *prob_mut*

coordenada acrescida de valor entre $-mut/2$ e $mut/2$

fim se

fim se

fim Laço 2

fim Laço 1

retorna População *pop*

fim sub-rotina
