

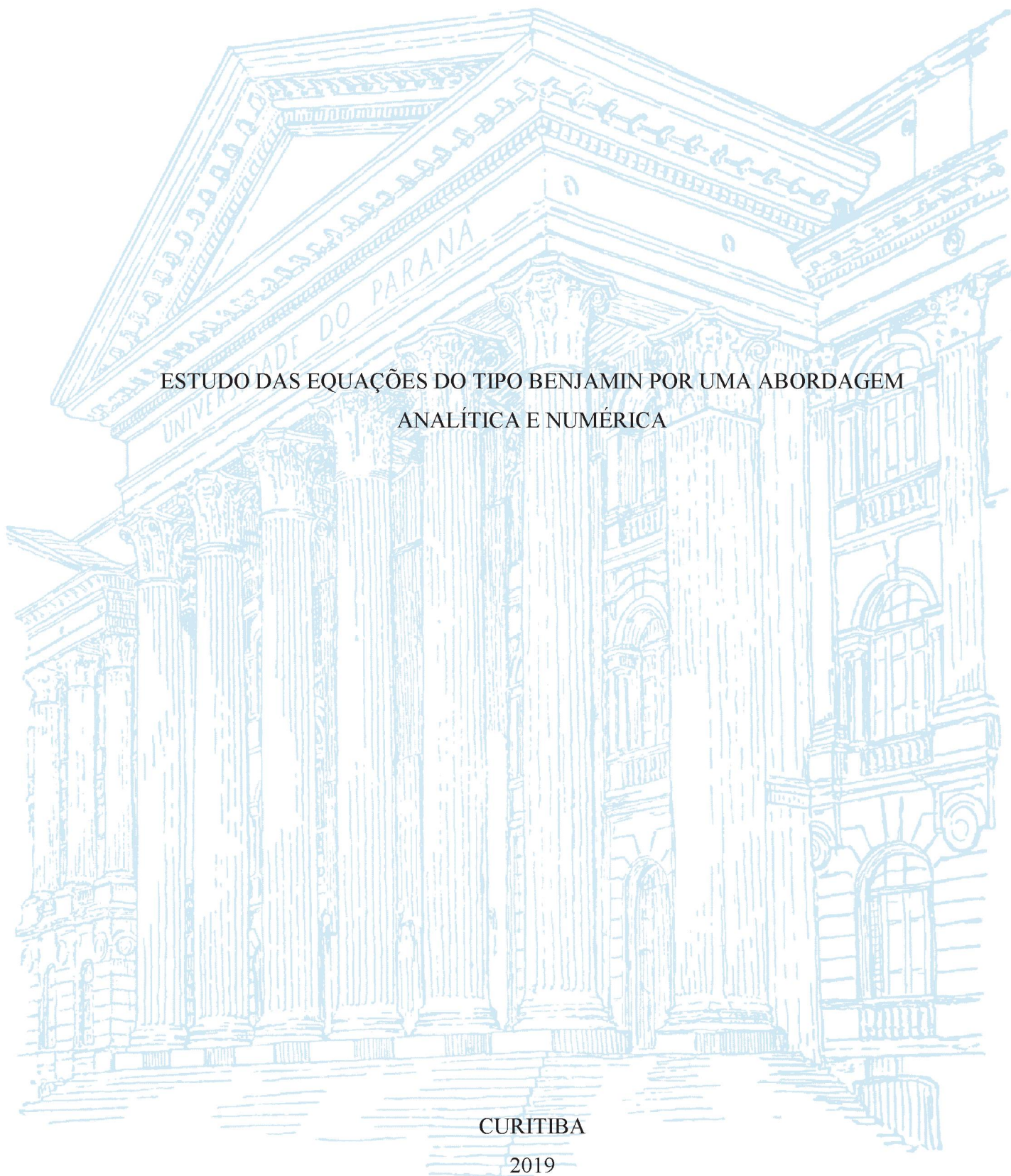
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

IZABELA PATRÍCIO BASTOS

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TIPO BENJAMIN POR UMA ABORDAGEM
ANALÍTICA E NUMÉRICA

CURITIBA

2019



IZABELA PATRICIO BASTOS

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TIPO BENJAMIN POR UMA
ABORDAGEM ANALÍTICA E NUMÉRICA

Projeto de tese apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Ailín Ruiz de Zárate Fábregas

CURITIBA
2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

B327e Bastos, Izabela Patricio
Estudo das equações do tipo Benjamin por uma abordagem analítica e numérica [recurso eletrônico] / Izabela Patricio Bastos. – Curitiba, 2019.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

Orientadora: Ailín Ruiz de Zárate Fábregas.

1. Equações. 2. Análise de Fourier. 3. Operadores lineares. 4. Algoritmos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Fábregas, Ailín Ruiz de Zárate. III. Título.

CDD: 510

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **IZABELA PATRÍCIO BASTOS** intitulada: **ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TIPO BENJAMIN POR UMA ABORDAGEM ANALÍTICA E NUMÉRICA**, sob orientação da Profa. Dra. AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 29 de Novembro de 2019.



AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS
Presidente da Banca Examinadora



ROBERTO RIBEIRO SANTOS JUNIOR
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



MAURÍCIO FELGA GOBBI
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



DANIEL GREGÓRIO ALFARO VIGO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)



CÉSAR JAVIER NICHE MAZZEO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)



LILIANA MADALENA GRAMANI
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

No dia vinte e nove de novembro de dois mil e dezenove às 14:00 horas, na sala Anfiteatro A - Bloco PCs, Centro Politécnico da UFPR, Edifício da Administração, 3º Andar Rua Cel. Francisco H. dos Santos, 100, Jardim das Américas, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de tese da doutoranda **IZABELA PATRÍCIO BASTOS**, intitulada: **ESTUDO DAS EQUAÇÕES DO TIPO BENJAMIN POR UMA ABORDAGEM ANALÍTICA E NUMÉRICA**, sob orientação da Profa. Dra. **AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal do Paraná em MATEMÁTICA, foi constituída pelos seguintes Membros: **AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS** (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), **ROBERTO RIBEIRO SANTOS JUNIOR** (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), **MAURÍCIO FELGA GOBBI** (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), **DANIEL GREGÓRIO ALFARO VIGO** (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO), **CÉSAR JAVIER NICHE MAZZEO** (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO), **LILIANA MADALENA GRAMANI** (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela aprovação. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de doutor está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, **AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS**, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

CURITIBA, 29 de Novembro de 2019.



AILIN RUIZ DE ZARATE FABREGAS
Presidente da Banca Examinadora



ROBERTO RIBEIRO SANTOS JUNIOR
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)




MAURÍCIO FELGA GOBBI
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



DANIEL GREGÓRIO ALFARO VIGO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)



CÉSAR JAVIER NICHE MAZZEO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)



LILIANA MADALENA GRAMANI
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela minha vida, família e amigos.

À minha orientadora professora Doutora Ailín Ruiz de Zárate Fábregas, por aceitar o convite para me orientar, pela paciência e orientação durante todo o processo.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPR, pela oportunidade de cursar o doutorado.

À PUCPR por me apoiar e incentivar a sempre estar crescendo e me aprimorando como professora.

À todos os professores com os que tive oportunidade de ter aula, por me proporcionarem não só o conhecimento racional, mas a manifestação do caráter e afetividade.

Ao meu marido, Túlio, por todo apoio, paciência, companherismo e cumplicidade nessa trajetória.

Aos meus pais, por serem os responsáveis por toda a minha base e me apoiarem em todos os momentos.

À minha família, em especial aos meus irmãos por estarem sempre ao meu lado.

Aos meus amigos, pelas conversas.

RESUMO

Neste trabalho estudou-se a família de equações de Benjamin pelas abordagens analítica e numérica. Na abordagem analítica a boa colocação foi garantida para a família de equações de Benjamin regularizada utilizando a teoria de semigrupos. Na abordagem numérica, foram estudados os operadores que aparecem na família de equações de Benjamin tanto no domínio da frequência, quanto no domínio físico, distinguindo-se tanto o caso não periódico quanto o caso periódico. Um desses operadores é a Transformada de Hilbert na faixa. No caso periódico, a expressão do núcleo desse operador é dada por funções especiais, cujo cálculo é comparado com o caso não periódico no mesmo intervalo. Ainda no caso periódico foi analisada a sua representação por Série de Fourier. Por fim, foi feita a implementação numérica da solução da família de equações de Benjamin. Na discretização espacial utilizou-se o método dos cinco pontos e o método espectral. Na discretização temporal, a partir do método das linhas, foram comparados dois métodos: *leapfrog* e Runge-Kutta de quarta ordem.

Palavras-chave: Ondas internas; modelos dispersivos; sistema do tipo Boussinesq; equação de Ondas Longas Intermediárias; equações de Benjamin; boa colocação para EDPs; operador pseudodiferencial; funções especiais; *leapfrog*; Runge-Kutta.

ABSTRACT

In this work we study a Benjamin equations family by an analytical and numerical approach. In the analytical approach the well-posedness was proved for the regularized Benjamin equations family using semigroup theory. In the numerical approach, we studied the operators that appear in the Benjamin's family of equations, both in the frequency domain and in the physical domain, distinguishing both the non-periodic and the periodic cases. One of these operators is a Hilbert transform in the strip. In the periodic case, an expression for the operator's kernel is given by special functions, whose calculation is compared with a non-periodic case in the same range. Also in the periodic case its representation by Fourier Series is analyzed. Finally, the solutions of the Benjamin equations family was numerically implemented. For the spatial discretization, the five-point method and the spectral method were used. For the temporal discretization, from the method of lines, two methods were compared: *leapfrog* and fourth order Runge-Kutta.

Key words: Internal waves; dispersive models; Boussinesq type system; Intermediate Long Waves equation; Benjamin equations; well-posedness for PDEs; pseudodifferential operator; special functions; *leapfrog* ; Runge-Kutta.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Manifestação superficial de ondas internas na atmosfera. Fonte: [1].	15
1.2	Manifestação superficial de ondas internas oceânicas. Fonte: [1].	16
1.3	Ilustração do fenômeno água morta. Fonte: [1].	16
1.4	Configuração de duas camadas de fluidos limitados por uma tampa rígida e um fundo plano. Fonte: modificada a partir de [8].	18
3.1	Comportamento da função $\phi_1^2(k)$	33
3.2	Comportamento das funções $\overline{A}(k)$ e $\overline{\overline{A}}(k)$	41
5.1	Configuração de duas camadas de fluidos limitados por uma tampa rígida e um fundo plano. Fonte: modificada a partir de [8].	73
5.2	Problema do potencial na faixa com condição de Neumann para extrair a derivada tangencial na fronteira superior. Fonte: modificada a partir de [23].	74
5.3	Núcleo do operador: o núcleo no caso periódico plotado a partir das funções especiais $(-)$; o núcleo no caso não periódico plotado no intervalo $[-\pi, \pi]$ $(-\cdot-)$	83
5.4	Núcleo do operador no caso periódico dado pela Série de Fourier truncada para malhas encaixadas.	87
5.5	Núcleo do operador no caso periódico dado pela Série de Fourier truncada para malha encaixadas, detalhe da figura anterior.	88
5.6	Núcleo do operador no caso periódico dado pela Série de Fourier truncada para malha encaixadas.	88
5.7	Núcleo do operador no caso periódico dado pela Série de Fourier truncada para malha encaixadas.	89
5.8	Comparação do operador \mathcal{H} com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = e^{-x^2/2}$	91

5.9	Comparação da frequência do operador \mathcal{H} com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = e^{-x^2/2}$	91
5.10	Comparação do operador \mathcal{T} com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = e^{-x^2/2}$	95
5.11	Comparação da frequência do operador \mathcal{T} com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = e^{-x^2/2}$	96
5.12	Comparação do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$	100
5.13	Comparação da frequência do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$	100
5.14	Comparação do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$	102
5.15	Comparação da frequência do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$	103
5.16	Comparação do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -8xe^{-x^2/2}$	105
5.17	Comparação da frequência do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -8xe^{-x^2/2}$	105
5.18	Comparação do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -8xe^{-x^2/2}$	106
5.19	Comparação da frequência do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -8xe^{-x^2/2}$	106
5.20	Comparação do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -8xe^{-4x^2}$	107
5.21	Comparação da frequência do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -8xe^{-4x^2}$	108
5.22	Comparação do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -8xe^{-4x^2}$	109
5.23	Comparação da frequência do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -8xe^{-4x^2}$	109
6.1	Fluxograma mostrando os passos do Método <i>leapfrog</i>	121
6.2	Fluxograma mostrando os passos do Método Runge-Kutta de quarta ordem.	123
6.3	Solução analítica da Equação Unidirecional.	131
6.4	Solução da Equação Unidirecional dada pelo método de <i>leapfrog</i>	131
6.5	Solução da Equação Unidirecional dada pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem.	132
6.6	Solução da Equação Unidirecional.	132
6.7	Erro relativo das soluções numéricas da Equação Unidirecional.	133

6.8	Solução analítica da Equação BBM linear.	134
6.9	Solução da Equação BBM linear dada pelo método <i>leapfrog</i> . . .	134
6.10	Solução da Equação BBM linear dada pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.	135
6.11	Solução da Equação BBM linear.	135
6.12	Erro relativo das soluções numéricas da Equação BBM linear. . .	139
6.13	Erro relativo das soluções numéricas pelo método <i>leapfrog</i> da Equação BBM linear para diferentes valores de Δt	140
6.14	Erro relativo das soluções numéricas pelo método Runge-Kutta de quarta ordem da Equação BBM linear para diferentes valores de Δt	141
6.15	Solução analítica da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert.	142
6.16	Solução da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert dada pelo método <i>leapfrog</i>	142
6.17	Solução da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert dada pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.	143
6.18	Solução da Equação Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert.	143
6.19	Erro relativo das soluções numéricas da Equação do tipo Benjamin com operador da Transformada de Hilbert.	148
6.20	Erro relativo das soluções numéricas pelo método <i>leapfrog</i> da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert para diferentes valores de Δt	149
6.21	Erro relativo das soluções numéricas pelo método Runge-Kutta de quarta ordem da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert para diferentes valores de Δt	150
6.22	Solução analítica da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa.	151
6.23	Solução da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa dada pelo método <i>leapfrog</i> . . .	151
6.24	Solução da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa dada pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.	152
6.25	Solução da Equação Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa.	152
6.26	Erro relativo das soluções numéricas pelo método <i>leapfrog</i> da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa.	157

6.27	Erro relativo das soluções numéricas pelo método <i>leapfrog</i> da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa para diferentes valores de Δt	158
6.28	Erro relativo das soluções numéricas pelo método Runge-Kutta de quarta ordem da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa para diferentes valores de Δt	159
6.29	Solução da Equação BBM adaptada dada pelo método <i>leapfrog</i> .	160
6.30	Solução da Equação BBM adaptada dada pelo método Runge-Kutta de ordem quatro.	161
6.31	Solução da Equação BBM adaptada.	161
6.32	Solução da Equação BBM adaptada.	162
6.33	Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert dada pelo método <i>leapfrog</i>	163
6.34	Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert dada pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.	163
6.35	Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert.	164
6.36	Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert.	165
6.37	Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa dada pelo método <i>leapfrog</i> .	166
6.38	Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa dada pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.	166
6.39	Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa.	167
6.40	Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa.	168

SUMÁRIO

1	Introdução	15
2	Teoria Preliminar	24
2.1	Transformada de Fourier e Espaço de Sobolev	24
2.2	Semigrupos de Operadores Lineares	27
3	Família de Equações de Benjamin Linearizada	29
3.1	Equação Linear de Benjamin não Regularizada	29
3.2	Equação Linear de Benjamin Regularizada	37
4	Boa colocação da família de Equações de Benjamin regularizada	44
4.1	Boa colocação local	45
4.2	Boa colocação global	58
5	O operador da Transformada que aparece na família de equações de Benjamin	72
5.1	Derivação no domínio da frequência do operador da Transformada de Hilbert na faixa - caso periódico	73
5.1.1	Funções Especiais	78
5.2	Implementação: Conhecendo o Núcleo do Operador	81
5.3	Implementação dos Operadores	89
6	Solução Numérica da família de Equações de Benjamin	111
6.1	Método numérico para a implementação da solução da família de equações de Benjamin regularizada	111
6.1.1	Discretização espacial	112
6.1.2	Discretização temporal	116
6.1.3	Algoritmo para encontrar a solução da família de equações de Benjamin	117

6.2	Implementação da solução da família de equações de Benjamin linearizada	124
6.2.1	Condição de estabilidade	124
6.2.2	Considerações gerais para a implementação da solução das equações lineares	130
6.2.3	Equação da onda unidirecional	130
6.2.4	BBM adaptada linear	133
6.2.5	Equação de Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert	141
6.2.6	Equação de Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na Faixa	150
6.3	Implementação da solução da família de equações de Benjamin não linear	159
6.3.1	BBM adaptada	160
6.3.2	Equação de Benjamin com o operador da Transformada de Hilbert	162
6.3.3	Equação de Benjamin com o operador da Transformada de Hilbert na faixa	165
7	Conclusões e trabalhos futuros	170
	Referências	175
A	Boa colocação local da parcela da solução correspondente à w_0	178
B	Implementação	190
B.1	Algoritmo para o núcleo do operador da Transformada de Hilbert na faixa	190
B.1.1	Comparativo dos núcleos	190
B.1.2	Cálculo do parâmetro m	191
B.2	Comparativo dos dois operadores por RTA e FFT	191
B.3	Algoritmo da solução da família de equações de Benjamin . . .	194
B.3.1	Equação de Benjamin com o operador de Hilbert . . .	194
B.3.2	Equação de Benjamin com o operador de Hilbert na faixa	197
B.4	Algoritmo matriz derivação espacial	199
B.4.1	Discretização espacial de cinco pontos	199
B.4.2	Discretização espectral para o operador de Hilbert . . .	199
B.4.3	Discretização espectral para o operador de Hilbert na faixa	200

Capítulo 1

Introdução

O desenvolvimento de onda não é apenas um fenômeno superficial devido à interação entre o ar e a superfície do mar ou outra massa de água, o mesmo mecanismo acontece sempre que há estratificação do fluido por densidade. Isso aparece frequentemente na atmosfera quando o ar quente cobre o ar frio, em que as ondas podem se manifestar por ondulações de nuvens, que as vezes podem ser periódicas, como na Figura 1.1. Também pode ocorrer quando a água de baixa densidade se sobrepõe a água de alta densidade no oceano, as ondas internas se propagam ao longo do limite da interface, como na Figura 1.2.



Figura 1.1: Manifestação superficial de ondas internas na atmosfera. Fonte: [1].

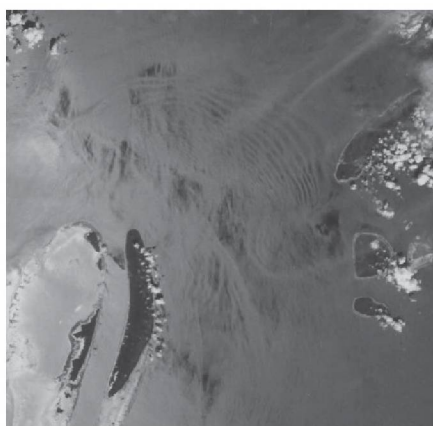


Figura 1.2: Manifestação superficial de ondas internas oceânicas. Fonte: [1].

As ondas internas dão origem a um fenômeno chamado de água morta, [1], relatado pela primeira vez em 1893 pelo norueguês oceanógrafo Fridtjof Nansen. Quando um navio enfrenta forte resistência ao movimento para a frente em condições normais de navegação, tal fenômeno é explicado devido a uma camada de água mais doce, cuja profundidade é maior que o calado da embarcação e faz com que ondas internas na interface entre as duas camadas gerem resistência ao movimento do navio, como na Figura 1.3.

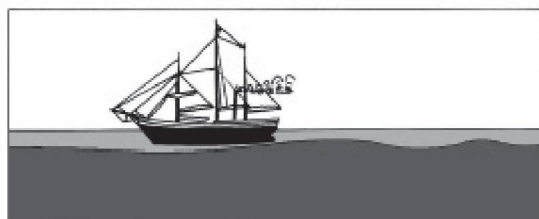


Figura 1.3: Ilustração do fenômeno água morta. Fonte: [1].

Para modelar matematicamente tais ondas é comum utilizar-se modelos simplificados obtidos a partir das equações de Euler em duas dimensões espaciais, que por sua vez reduzem a dinâmica a uma única dimensão espacial, onde descrevem o comportamento da interface entre as camadas, [2, 3].

Com o objetivo de modelar esse fenômeno, considera-se uma onda interna desenvolvida na interface entre duas camadas de fluidos invíscidos, imiscíveis, irrotacionais e incompressíveis de densidades diferentes, confinados em uma faixa plana com escalas que configuram um regime de profundidades denominado de intermediário, [3–5]. Entende-se por fluidos invíscidos aqueles

fluidos ideais os quais não possuem viscosidade, imiscíveis aqueles que não se misturam entre si, irrotacionais aqueles cujas partículas, numa certa região, não apresentam rotação em torno do seu próprio eixo e incompressíveis, segundo [6], aqueles nos quais a densidade de massa é constante ao longo das trajetórias das partículas do fluido.

Na redução das equações de Euler que descrevem a evolução dessas ondas internas, sob as hipóteses descritas anteriormente, aparece um operador pseudodiferencial, muitas vezes denominado de Transformada de Hilbert na faixa. No processo de redução das equações de Euler se faz necessário transformar a informação sobre a derivada normal na interface para derivada tangencial, e é o operador da Transformada de Hilbert na faixa que faz a troca na geometria mencionada acima. Como resultado da redução são obtidos sistemas do tipo Boussinesq, especificamente tem-se o seguinte sistema bidirecional fracamente dispersivo e não linear, [3, 4, 7]:

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}[u_{xx}], \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $\eta(x, t)$ está relacionada à perturbação adimensionalizada na interface e $u(x, t)$ à componente horizontal da velocidade da camada superior, como na Figura 1.4. Ambas as incógnitas são funções das variáveis temporal e espacial (na direção horizontal), t e x , respectivamente. As derivadas parciais são denotadas por subíndices; α e β são os parâmetros adimensionais positivos de não linearidade e dispersão, respectivamente. As densidades originais $\rho_1 < \rho_2$ das camadas superior e inferior foram mantidas no termo que envolve o operador não local de interesse \mathcal{T} cujo símbolo no domínio da frequência é:

$$\widehat{\mathcal{T}}(k) = i \coth(hk), \quad (1.2)$$

para $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, no caso não periódico ($x \in \mathbb{R}$), ou $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, no caso periódico. A constante $h > 0$ é a espessura da camada inferior em repouso após escalamento, isto é, a espessura que o fluido mais denso em repouso ocupa e i é a unidade imaginária.

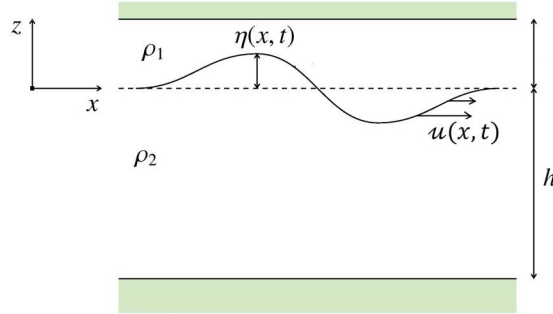


Figura 1.4: Configuração de duas camadas de fluidos limitadas por uma tampa rígida e um fundo plano. Fonte: modificada a partir de [8].

Entende-se por sistema fracamente não-linear aquele cujo termo não linear tem parâmetro α pequeno, enquanto que o sistema fortemente não linear não tem o parâmetro α multiplicando o termo não linear, como em [4]. Já o sistema fracamente dispersivo é obtido por uma expansão assintótica no parâmetro β pequeno, essa expansão assintótica é semelhante a uma expansão de Taylor no parâmetro β , detalhes podem ser encontrados em [4].

A partir deste tipo de sistema ainda é possível fazer uma redução unidirecional cujo resultado é a equação de ondas longas intermediária (ILW) descrita aqui seguindo a notação de [9],

$$\eta_t + \frac{1}{h}\eta_x + 2\eta\eta_x + \mathcal{T}[\eta_{xx}] = 0. \quad (1.3)$$

No caso não periódico, tem-se um par de Fourier, segundo [4],

$$-\frac{\sqrt{2\pi}}{2h} \coth\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \text{ e } i \coth(hk), \quad (1.4)$$

por essa razão, o operador \mathcal{T} é dado por uma convolução da função cotangente hiperbólica com a função que aparece no argumento do operador:

$$\mathcal{T}[u](x) = -\frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \coth\left[\frac{\pi}{2h}(x-y)\right] u(y) dy, \quad (1.5)$$

onde a integral deve ser interpretada como valor principal de Cauchy. Por valor principal de Cauchy entende-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^a f(x) dx + \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Caso a profundidade da camada inferior seja muito grande, considera-se como se a camada fosse infinita. Nesse caso o operador envolvido é conhecido como Transformada de Hilbert, e denotado por \mathcal{H} , cujo símbolo no domínio da frequência é:

$$\widehat{\mathcal{H}}(k) = i \operatorname{sgn}(k),$$

para $k \in \mathbb{R}$, onde

$$\mathcal{H}[u](x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-y} u(y) dy, \quad (1.6)$$

no domínio real. Pela escolha da Transformada de Fourier, o par de Fourier é:

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x} \text{ e } i \operatorname{sgn}(k). \quad (1.7)$$

No domínio $2L$ -periódico, $L > 0$, o operador é dado por:

$$\mathcal{H}[u](x) = -\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \cot\left(\frac{\pi}{2L}(x-y)\right) u(y) dy.$$

Dessa forma, considera-se tanto o operador $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ como $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ e estendendo o sistema (1.1) tem-se segundo [4, 7], o sistema regularizado dado por

$$\begin{cases} \eta_t = [(1 - \alpha\eta)u]_x, \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = b\mathcal{L}[u]_{xt} + au_{xxt}, \end{cases} \quad (1.8)$$

onde $\eta(t, x)$ está relacionada à perturbação adimensionalizada da interface e $u(t, x)$ à componente horizontal da velocidade da camada superior. Segundo [10, 11], a relação de dispersão no sistema linear é tal que

$$\omega(k) = \pm \frac{|k|}{\sqrt{1 + b|k| + ak^2}},$$

se $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ e

$$\omega(k) = \pm \frac{|k|}{\sqrt{1 + bk \coth(hk) + ak^2}},$$

se $\mathcal{L} = \mathcal{T}$.

Agora, considera-se a família de equações de Benjamin regularizada dada por

$$\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0, \quad (1.9)$$

onde os parâmetros α, a, b são positivos e a relação entre os parâmetros que é α é da ordem de a enquanto b é da ordem de \sqrt{a} , com $b < 2\sqrt{a}$. Essa condição será necessária para garantir que o problema dado por:

$$\begin{cases} \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0 \text{ em } H^s \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \in H^s, \end{cases}$$

é bem posto. O operador pseudodiferencial \mathcal{L} pode ser a Transformada de Hilbert, $\mathcal{L} = \mathcal{H}$, onde a camada inferior tem profundidade infinita ou a Transformada de Hilbert na faixa, $\mathcal{L} = \mathcal{T}$, onde a camada inferior tem profundidade $h > 0$. Segundo [10, 11], a relação de dispersão da equação linearizada é dada por:

$$\omega(k) = \frac{k}{1 + b|k| + ak^2},$$

se $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ e

$$\omega(k) = \frac{k}{1 + bk \coth(hk) + ak^2},$$

se $\mathcal{L} = \mathcal{T}$.

Em 1992, Benjamin, [12], estudou a equação da forma

$$\eta_t + \eta_x + 2\eta\eta_x - \alpha\mathcal{H}[\eta]_{xx} - \beta\eta_{xxx} = 0$$

para encontrar soluções do tipo ondas solitárias. Em 1999, Linares, [13], garantiu a boa colocação global no espaço L^2 para problemas de valor inicial associados a equação de Benjamin dada por

$$\eta_t - l\mathcal{H}[\eta]_{xx} - \eta_{xxx} + (\eta^2)_x = 0,$$

onde l é uma constante positiva. Em 2005, Linares e Scialom, [14], garantiram a boa colocação global em H^s , se $s > s_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$ para a equação de Benjamin generalizada dada por

$$\eta_t + \mathcal{H}[\eta]_{xx} + \eta^k u_x = 0,$$

para $k \geq 2$. Em 2009, Bona e Tzvetkov, [15], estudaram a boa colocação da equação Benjamin-Bona-Mahony (BBM)

$$\eta_t + \eta_x + \eta\eta_x - \eta_{xxt} = 0,$$

para H^s com $s \geq 0$ utilizando a teoria de semigrupos. Em 2018, Schoeffel et

al, [10], garantiram a boa colocação global de

$$\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - \sqrt{\beta}\frac{\rho_2}{\rho_2}\mathcal{T}(\eta_{xt}) = 0$$

para $s > \frac{1}{2}$.

Além disso, em 2011, Alfaro Vigo et al, [8], estudaram o sistema (5.1) por uma abordagem numérica enfatizando o operador da Transformada de Hilbert na faixa, \mathcal{T} .

Dessa forma o objetivo do presente trabalho é estudar a família de equações de Benjamin regularizada dada pela equação (1.9), fazendo uma abordagem analítica e numérica. Nota-se que será estudada a equação com ambos os operadores, isto é, $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ ou $\mathcal{L} = \mathcal{T}$, diferentemente do que já foi feito nas referências mencionadas acima. De modo geral, no que se refere a abordagem analítica será garantida boa colocação local da família de equações de Benjamin, mas para isso considera-se a definição dada em [16], a saber,

Definição 1.0.1. Sejam X, Y dois espaços de Banach e $F : Y \rightarrow X$ uma função contínua. O problema de Cauchy

$$\begin{cases} \eta_t(t) = F(\eta(t)) \text{ em } X, \\ \eta(0) = \phi \in Y, \end{cases} \quad (1.10)$$

é localmente bem posto em Y se e somente se

(i) Existe $T > 0$ e $\eta \in C([-T, T], Y)$ tal que $\eta(0) = \phi$ e a equação diferencial é satisfeita no sentido

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} - F(\eta(t)) \right\|_X = 0. \quad (1.11)$$

(ii) O problema (4.2) tem no máximo uma solução em $C([-T, T], Y)$.

(iii) A aplicação $\phi \mapsto \eta$ é contínua, isto é, dado $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ tal que $\phi_n \xrightarrow{Y} \phi^*$ e $\eta^* \in C([-T^*, T^*], Y)$, onde η^* é a solução com a condição inicial ϕ^* , então, para n suficientemente grande, cada solução η_n correspondente ao dado ϕ_n pode ser definida no intervalo $[-T^*, T^*]$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[-T^*, T^*]} \|\eta_n(t) - \eta^*(t)\|_Y = 0.$$

Já para a boa colocação global, um problema de Cauchy é globalmente bem posto se a Definição 4.1.1 é satisfeita para todo $T > 0$. Para garantir

existência global, é suficiente combinar o Princípio da Extensão com algumas estimativas globais a priori para a solução.

Sendo assim, neste trabalho será estudado inicialmente o caso linear por uma abordagem analítica utilizando a teoria de semigrupos e no caso não linear será garantida a boa colocação global para $s \geq 0$, com $s \neq \frac{1}{2}$, utilizando a mesma estratégia apresentada por [15], porém estendendo para a família de equações de Benjamin regularizada. Já na abordagem numérica, primeiro serão estudados os operadores que aparecem na equação (1.9) para depois estudar a solução numérica da família de equações de Benjamin a partir do método de linhas. Diferentemente de [4] que fez também uma abordagem numérica semelhante, porém para fundo variável. Além disso, a implementação da solução numérica bem como o estudo da estabilidade do método foi inspirada por [8]. Portanto, este trabalho, além de garantir a boa colocação global para a família de equações de Benjamin para $s \geq 0$, com $s \neq \frac{1}{2}$, traz também uma solução numérica para essas equações, com um estudo cuidadoso dos operadores que nelas aparecem.

O Capítulo 2 é dedicado a estabelecer notações e resumir definições e resultados da teoria dos espaços de Sobolev e da teoria de semigrupos que serão utilizados neste trabalho. A boa colocação da família de equações de Benjamin linearizada é garantida tanto para a equação regularizada quanto não regularizada ($\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xx} - a\eta_{xxx} = 0$) utilizando a teoria de semigrupos, como descrito no Capítulo 3.

Já a boa colocação da família de equações de Benjamin regularizada não linear é garantida, utilizando a teoria de semigrupos, para $s > 1$ baseada em [7, 10] e para $0 \leq s \leq 1$, com $s \neq \frac{1}{2}$ baseada em [15], como descrito no Capítulo 4.

No Capítulo 5, apresenta-se a dedução do operador da Transformada de Hilbert na faixa no caso periódico, obtem-se o núcleo desse operador do caso periódico a partir das funções especiais Elípticas de Jacobi, Zeta de Jacobi e Integrais Elípticas completas do Primeiro Tipo, representadas por sua expansão em q -séries. Compara-se o núcleo periódico da Transformada de Hilbert na faixa com o núcleo não periódico no domínio limitado $[-L, L]$ e analisa-se o operador da Transformada de Hilbert na faixa a respeito da Série de Fourier truncada do caso periódico. Ainda nesse capítulo, implementa-se o operador tanto da Transformada de Hilbert na faixa quanto da Transformada de Hilbert.

No Capítulo 6 faz-se a abordagem numérica da solução da família de equações de Benjamin a partir do método de linhas comparando o método *leapfrog* com o método de Runge-Kutta de quarta ordem na discretização temporal. No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões e trabalhos futuros. No apêndice A encontra-se um teorema da boa colocação local da solução w

que será utilizado para garantir a boa colocação global da família de equações de Benjamin em H^s para $0 \leq s \leq 1$, com $s \neq \frac{1}{2}$, usando a teoria de semi-grupos. No apêndice B encontram-se os algoritmos desenvolvidos para este trabalho tanto da implementação dos operadores e seus respectivos núcleos, quanto da solução numérica da família de equações de Benjamin.

Capítulo 2

Teoria Preliminar

Neste capítulo serão colocados as notações e definições além de algumas propriedades e teoremas que serão utilizados no trabalho.

2.1 Transformada de Fourier e Espaço de Sobolev

A teoria apresentada é baseada em [16]. Neste trabalho, o símbolo $\hat{\cdot}$ indica a Transformada de Fourier tanto no caso periódico quanto no caso não periódico com respeito à variável x . Segundo [16], a definição da Transformada de Fourier de uma função não periódica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ é

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx, \forall k \in \mathbb{R},$$

e de uma função 2π -periódica absolutamente integrável é

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Definição 2.1.1. A convolução de duas funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, desde que a integral do lado direito exista.

Além disso, a seguir serão enunciados alguns resultados importantes que serão utilizados nos próximos capítulos. Segundo [16] tem-se os seguintes teoremas:

Teorema 2.1.2. *Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, então*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Teorema 2.1.3. *Desigualdade de Young: se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, então $f * g \in L^\infty$ e ainda,*

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Teorema 2.1.4. *Sejam $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, então*

$$\widehat{(f * g)}(k) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k),$$

$k \in \mathbb{R}$.

Também, define-se em $H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \int_{-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 dk < +\infty \right\}$, onde $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as distribuições temperadas. Entende-se por uma distribuição temperada um funcional linear contínuo sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, desde que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ suaves e rapidamente decrescentes, isto é,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}); \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| < \infty, \forall m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

O produto interno é definido por

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^s \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} dk,$$

e a norma por

$$\|f\|_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 dk.$$

Já em $H^s(\Pi) = \left\{ f \in \mathcal{P}'; \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + k^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < +\infty \right\}$, onde \mathcal{P}' é o conjunto de todas as distribuições periódicas. Define-se como uma distribuição periódica um funcional linear $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que existe uma sequência $\{\Psi_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{P}$ satisfazendo

$$T(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{P},$$

desde que \mathcal{P} é o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis

e 2π -periódicas. Define-se o produto interno e a norma por:

$$\langle f, g \rangle_s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)},$$

$$\|f\|_s^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\widehat{f}(k)|^2,$$

respectivamente. Neste trabalho, as demonstrações presentes serão feitas no espaço $H^s(\mathbb{R})$, mas também podem ser mostradas em $H^s(\Pi)$ de maneira análoga.

Teorema 2.1.5. *Se $s, r \in \mathbb{R}$, $s \leq r$, então $H^r(\mathbb{R})$ está continuamente e densamente imerso em $H^s(\mathbb{R})$, $H^r(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R})$ e*

$$\|f\|_s \leq \|f\|_r, \quad \forall f \in H^r(\mathbb{R}).$$

Teorema 2.1.6. *Se $s > \frac{n}{2}$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra de Banach. Em particular, existe uma contante $C_s \geq 0$ tal que*

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|_s, \quad \forall f, g \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Lema 2.1.7. *Se $s > \frac{n}{2}$, então $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_\infty$ e existe uma constante $C > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq C \|f\|_s, \forall f \in H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Esse lema é conhecido como Lema de Sobolev.

Definição 2.1.8. Se $f \in H^s(\mathbb{R})$ e $g \in H^{-s}(\mathbb{R})$, para $s \geq 0$, então o parêntese de dualidade é definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} dk.$$

Teorema 2.1.9. *Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, desde que as integrais façam sentido, tem-se que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f g_x dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f_x g dx.$$

Teorema 2.1.10. *Desigualdade de Gronwall, forma diferencial: Seja $g \in C([0, a], \mathbb{R})$, $a > 0$, tal que $g(t) \geq 0, \forall t \in [0, a]$, diferenciável em $(0, a)$ e*

$$\frac{d}{dt} g(t) \leq \alpha + \beta g(t),$$

$\forall t \in [0, a]$, para certas constantes positivas α, β . Então

$$g(t) \leq g(0)e^{\beta t} + \alpha \int_0^t e^{\beta(t-s)} ds,$$

$\forall t \in [0, a]$.

Observação 2.1.11. Para simplificar a notação, no decorrer do texto $H^s(\mathbb{R})$ será denotado por H^s .

2.2 Semigrupos de Operadores Lineares

A teoria de semigrupos apresentada aqui é baseada em [17–19]. No que segue X denotará um espaço de Banach real ou complexo e

$$L(X) = \{T : X \rightarrow X; T \text{ é linear e limitado}\}$$

o espaço de Banach dos operadores lineares em X .

Definição 2.2.1. Um semigrupo de operadores lineares limitados de X é uma função $S : [0, \infty) \rightarrow L(X)$ tal que

1. $S(0) = I$, I operador identidade.
2. $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$.

Definição 2.2.2. O semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é fortemente contínuo ou de classe C_0 se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\| = 0,$$

para cada $x \in X$.

Teorema 2.2.3. Seja $S(\cdot)$ um semigrupo de classe C_0 . Para cada $x \in X$, a função $t \mapsto S(t)x$ é contínua.

Definição 2.2.4. Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 , para $h > 0$ considera-se o operador

$$A_h = \frac{S(h) - I}{h}.$$

Assim, define-se o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, como sendo

$$D(A) = \left\{ x \in X; \exists \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x \right\},$$

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x.$$

Nota-se que

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} = A_h S(t) = S(t) A_h, \forall t \geq 0, h > 0.$$

Teorema 2.2.5. *Seja A o operador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 .*

1. *Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

2. *Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ e*

$$A \left(\int_0^t S(\tau)x d\tau \right) = S(t)x - x.$$

Observação 2.2.6. A mesma teoria vale para $t \in \mathbb{R}$, nesse caso $S(t)$ é chamado de grupo.

Definição 2.2.7. Um grupo $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ num espaço de Hilbert H é dito unitário se

$$S(t)^* = S(t)^{-1}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.2.8. *Teorema de Stone: Um operador A num espaço de Hilbert H é gerador de um grupo unitário de classe C_0 se, e somente se, A é densamente definido e $A^* = -A$.*

Agora, considera-se o problema de Cauchy dado por

$$\begin{cases} \eta_t(x, t) = A\eta(x, t) \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x). \end{cases} \quad (2.1)$$

Teorema 2.2.9. *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de classe C_0 , então o problema de Cauchy (2.1), para cada $\eta_0 \in D(A)$, tem uma única solução η , a saber, $\eta(x, t) = S(t)\eta_0(x)$.*

Observação 2.2.10. O mesmo teorema vale para um grupo de classe C_0 .

Capítulo 3

Família de Equações de Benjamin Linearizada

Neste capítulo será mostrada a boa colocação da família de equações de Benjamin linearizada, tanto não regularizada quanto regularizada, utilizando a teoria de semigrupos, [17–19], seguindo o mesmo roteiro da demonstração feita em [7]. Além disso, será possível encontrar uma expressão para a solução analítica dessas equações que posteriormente serão implementadas com o objetivo de comparar com as soluções aproximadas.

3.1 Equação Linear de Benjamin não Regularizada

Segundo [12], a equação de Benjamin não regularizada linearizada em torno de $\eta \equiv 0$ é dada por:

$$\eta_t + \eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xx} - a\eta_{xxx} = 0, \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ com $\widehat{\mathcal{H}}(k) = i \operatorname{sgn}(k)$, para todo $k \in \mathbb{R}$ no caso não periódico (ou $k \in \mathbb{Z}$, no caso periódico), $k \neq 0$. Neste trabalho também será estudado o caso $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ com $\widehat{\mathcal{T}}(k) = i \operatorname{coth}(hk)$, $h > 0$, para todo $k \in \mathbb{R}$ no caso não periódico (ou $k \in \mathbb{Z}$, no caso periódico), $k \neq 0$. Os parâmetros a, b são parâmetros positivos, tais que b é da ordem de \sqrt{a} .

Dado o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \eta_t(x, t) = A\eta(x, t), \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

determina-se o operador A . Para tal suponha-se que $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ e da equação (3.1) segue que

$$\eta_t = (-1 + b\mathcal{H}[\partial_x] + a\partial_{xx})\eta_x.$$

Aplicando a Transformada de Fourier em relação a variável x segue que

$$\hat{\eta}_t = (-1 + b(\mathbf{i}k)(\mathbf{i}\operatorname{sgn}(k)) + a(\mathbf{i}k)^2)(\mathbf{i}k)\hat{\eta},$$

como $\operatorname{sgn}(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k > 0 \\ -1, & \text{se } k < 0 \end{cases}$, então

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_t &= (-1 - b|k| - ak^2)(\mathbf{i}k)\hat{\eta}, \\ \hat{\eta}_t &= -\mathbf{i}(k + bk|k| + ak^3)\hat{\eta}. \end{aligned}$$

De maneira análoga, se $\mathcal{L} = \mathcal{T}$, então

$$\eta_t = (-1 + b\mathcal{T}[\partial_x] + a\partial_{xx})\eta_x$$

e aplicando a Transformada de Fourier em relação a variável x segue que

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_t &= (-1 + b\mathbf{i}\coth(hk)(\mathbf{i}k) + a(\mathbf{i}k)^2)(\mathbf{i}k)\hat{\eta}, \\ \hat{\eta}_t &= -\mathbf{i}(k + bk^2\coth(hk) + ak^3)\hat{\eta}. \end{aligned}$$

Dessa forma, define-se $\phi_j(k) = \begin{cases} k + bk|k| + ak^3, & \text{se } j = 1 \\ k + bk^2\coth(hk) + ak^3, & \text{se } j = 2 \end{cases}$ donde

$$\hat{\eta}_t(k, t) = -\mathbf{i}\phi_j(k)\hat{\eta}(k, t), \quad (3.3)$$

em que $j = 1$ é o caso em que $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ e $j = 2$ é o caso em que $\mathcal{L} = \mathcal{T}$. Portanto, o operador A do problema de Cauchy (3.2) é tal que

$$\widehat{A\eta}(k, t) = -\mathbf{i}\phi_j(k)\hat{\eta}(k, t),$$

$\forall k \in \mathbb{R}$, no caso não periódico (ou $\forall k \in \mathbb{Z}$, no caso periódico), $j = 1, 2$, onde $A : D(A) \subset H^s \rightarrow H^s$.

Nota-se que A é linear no seu domínio. De fato, sejam $f, g \in D(A) \subset H^s$, $\gamma \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} (A(\gamma f + g))^\wedge(k) &= -\mathbf{i}\phi_j(k)(\gamma f + g)^\wedge(k) \\ &= -\gamma\mathbf{i}\phi_j(k)\hat{f}(k) - \mathbf{i}\phi_j(k)\hat{g}(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma \widehat{A}f(k) + \widehat{A}g(k) \\
&= (\gamma Af + Ag)^\wedge(k),
\end{aligned}$$

para $j = 1, 2$. Aplicando a transformada inversa, conclui-se que

$$A(\gamma f + g) = \gamma Af + Ag,$$

e portanto, A é linear.

Observa-se que, a partir do sistema (3.3) obtém-se uma família de equações diferenciais ordinárias (EDO) no domínio da frequência, cujas soluções são:

$$\widehat{\eta}(k, t) = \widehat{\eta}_0(k) e^{-i\phi_j(k)t},$$

para $j = 1, 2$, então, $|\widehat{\eta}(k, t)| = |\widehat{\eta}_0(k)|$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ ou $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\|\eta(\cdot, t)\|_s = \|\eta_0\|_s, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Como a solução do problema de Cauchy é dada por

$$\eta(x, t) = S(t)\eta_0(x),$$

então a igualdade (3.4) indica que $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ deve ser um grupo unitário. Para mostrar que de fato A é gerador de um grupo unitário usa-se o Teorema de Stone 2.2.8.

1. A é densamente definido:

$$D(A) = \{f \in H^s; Af \in H^s\}$$

Nota-se inicialmente que $D(A) = H^{s+3}$. De fato, tem-se as seguintes inclusões:

(\supseteq): Se $f \in H^{s+3}$, então $f \in H^s$ uma vez que H^{s+3} está continuamente e densamente imerso em H^s , isto é, $H^{s+3} \hookrightarrow H^s$.

Suponha-se $\mathcal{L} = \mathcal{H}$, assim,

$$\begin{aligned}
\|Af\|_s^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\widehat{A}f(k)|^2 dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\phi_1(k)|^2 |\widehat{f}(k)|^2 dk \\
&\leq C \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+3} |\widehat{f}(k)|^2 dk \\
&= C \|f\|_{s+3}^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

pois como $\phi_1(k) = k + bk|k| + ak^3$, então $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{(\phi_1(k))^2}{(1+k^2)^3} = a^2$ e se $k \in [-\delta, \delta]$, $\delta > 0$, $\frac{(\phi_1(k))^2}{(1+k^2)^3}$ é limitado por ser contínua no intervalo fechado. Portanto, existe uma constante $C > 0$ tal que $\frac{(\phi_1(k))^2}{(1+k^2)^3} < C$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Agora, se $\mathcal{L} = \mathcal{T}$, então $\phi_2(k) = k + bk^2 \coth(hk) + ak^3$, como vale a desigualdade, [7]:

$$|x| \leq x \coth(x) \leq |x| + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

segue que

$$\begin{aligned} \|Af\|_s^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{Af}(k) \right|^2 dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s (\phi_2(k))^2 \left| \widehat{f}(k) \right|^2 dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left[\frac{k}{h} (h + bhk \coth(hk) + ahk^2) \right]^2 \left| \widehat{f}(k) \right|^2 dk \\ &\stackrel{(3.5)}{\leq} \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s k^2 (h + b|kh| + b + ahk^2)^2 \left| \widehat{f}(k) \right|^2 dk \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s (hk + bk|k|h + bk + ahk^3)^2 \left| \widehat{f}(k) \right|^2 dk \\ &\leq \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+3} \frac{(hk + bk|k|h + bk + ahk^3)^2}{(1+k^2)^3} \left| \widehat{f}(k) \right|^2 dk \\ &\leq \frac{C}{h^2} \|f\|_{s+3}^2 < +\infty, \end{aligned}$$

pois $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{(hk + bk|k|h + bk + ahk^3)^2}{(1+k^2)^3} = (ah)^2$, logo existe $C > 0$ tal que $(hk + bk|k|h + bk + ahk^3)^2 \leq C(1+k^2)^3$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Portanto, $A : H^{s+3} \rightarrow H^s$ é linear e limitado.

(\subseteq): Se $f \in D(A)$, então $f \in H^s$ e $Af \in H^s$. Suponha-se $\mathcal{L} = \mathcal{H}$, logo $\phi_1(k) = k + bk|k| + ak^3$, nota-se que,

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{(1+k^2)^3}{(\phi_1(k))^2} = \frac{1}{a^2},$$

então existe $R > 0$ e $c > 0$ tais que $(1+k^2)^3 \leq c \phi_1^2(k)$, para todo k , $|k| > R > 0$. E se, $|k| < R$, como $\phi_1(0) = 0$, existe $M > 1$ tal que

$(1+k^2)^3 \leq c \phi_1^2(k) + M$, pois $\frac{(1+k^2)^3}{\phi_1^2(k)+1}$ é contínua num intervalo fechado. Isso pode ser verificado na Figura 3.1, onde $a = 0,25$, $b = \sqrt{a}$.

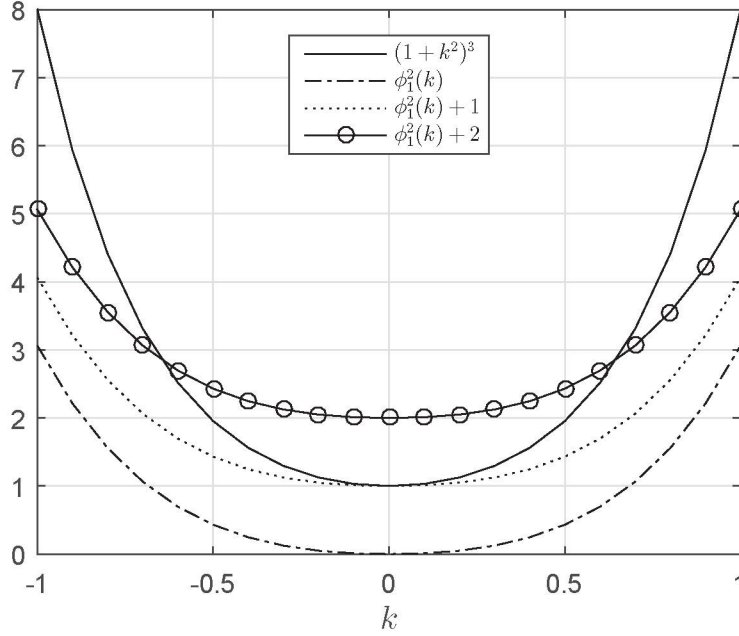


Figura 3.1: Comportamento da função $\phi_1^2(k)$.

Portanto, segue que $\forall k \in \mathbb{R}$, $(1+k^2)^3 \leq c \phi_1^2(k) + M$. Assim,

$$\begin{aligned} \|f\|_{s+3}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+3} |\widehat{f}(k)|^2 dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s (1+k^2)^3 |\widehat{f}(k)|^2 dk \\ &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s (\phi_1(k))^2 |\widehat{f}(k)|^2 dk + M \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 dk \\ &= c \|Af\|_s^2 + M \|f\|_s^2 < +\infty. \end{aligned}$$

Isto é, $f \in H^{s+3}$.

Caso $\mathcal{L} = \mathcal{T}$, então $\phi_2(k) = k + bk^2 \coth(hk) + ak^3$. Observa-se que

para todo $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} |hk| &\leq hk \coth(hk) \leq |hk| + 1, \\ bk |hk| &\leq bhk^2 \coth(hk) \leq bk |hk| + bk, \\ (hk + bk |hk| + ahk^3)^2 &\leq (h\phi_2(k))^2 \leq (hk + bk |hk| + bk + ahk^3)^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{(1+k^2)^3}{(hk + bk |hk| + ahk^3)^2} = \frac{1}{(ah)^2}$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{(1+k^2)^3}{(hk + bk |hk| + bk + ahk^3)^2} = \frac{1}{(ah)^2},$$

segue que $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{(1+k^2)^3}{(h\phi_2(k))^2} = \frac{1}{(ah)^2}$. Isto significa que dado $\epsilon > 0$, existe $C > 0$ tal que

$$(1+k^2)^3 \leq Ch^2\phi_2^2(k), \forall k \in \mathbb{R} \text{ tal que } |k| \geq \epsilon. \quad (3.7)$$

Além disso, da desigualdade (3.6), dado $M > 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{(1+k^2)^3}{(hk + bk |hk| + bk + ahk^3)^2 + M} &\leq \frac{(1+k^2)^3}{(h\phi_2(k))^2 + M} \\ &\leq \frac{(1+k^2)^3}{(hk + bk |hk| + ahk^3)^2 + M}, \end{aligned}$$

$\forall k \geq 0$. Assim, $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{(1+k^2)^3}{(h\phi_2(k))^2 + M} = \frac{1}{M}$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$(1+k^2)^3 \leq C_1 h^2 \phi_2^2(k) + C_1 M, \forall k \in \mathbb{R} \text{ tal que } |k| \leq \epsilon. \quad (3.8)$$

Portanto, considera-se $\bar{C} = \min\{C, C_1\}$ e das desigualdades (3.7) e (3.8) tem-se que

$$(1+k^2)^3 \leq \bar{C} h^2 \phi_2^2(k) + \bar{C} M, \forall k \in \mathbb{R}. \quad (3.9)$$

Dessa forma, segue que

$$\|f\|_{s+3}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+3} |\hat{f}(k)|^2 dk$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s (1+k^2)^3 |\widehat{f}(k)|^2 dk \\
&\leq \bar{C}h^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s (\phi_2(k))^2 |\widehat{f}(k)|^2 dk + \bar{C}M \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 dk \\
&= \bar{C}h^2 \|Af\|_s^2 + \bar{C}M \|f\|_s^2 < +\infty.
\end{aligned}$$

Conclui-se que $f \in H^{s+3}$.

Sendo assim, em ambos os casos, $D(A) = H^{s+3} \subset H^s$, e como, $H^{s+3} \hookrightarrow H^s$, então A é densamente definido.

2. $A^* = -A$:

Para mostrar essa igualdade é necessário verificar que A é anti-simétrico e que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(\pm\lambda - A)D(A) = H^s$, isto é, a imagem de $(\pm\lambda - A)$ aplicado em $D(A)$ é H^s . De fato, sejam $f, g \in D(A) = H^{s+3}$, então

$$\begin{aligned}
\langle Af, g \rangle_s &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \widehat{A}f(k) \overline{\widehat{g}(k)} dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s (-\mathbf{i}\phi_j(k)) \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} dk \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \widehat{f}(k) \overline{(-\mathbf{i}\phi_j(k)) \widehat{g}(k)} dk \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \widehat{f}(k) \overline{\widehat{A}g(k)} dk \\
&= -\langle f, Ag \rangle_s \\
&= \langle f, -Ag \rangle_s,
\end{aligned}$$

para $j = 1, 2$. Logo, A é anti-simétrico.

Além disso, sejam $g \in H^s$ e $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ e escolhe-se $f \in H^s$ tal que

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\pm\lambda + \mathbf{i}\phi_j(k)} \widehat{g}(k). \quad (3.10)$$

Como $\phi_j(k) \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, para $j = 1, 2$. Então, $\pm\lambda + \mathbf{i}\phi_j(k) \neq 0$, para $j = 1, 2$.

Nota-se que $f \in D(A) = H^{s+3}$. De fato, se $\mathcal{L} = \mathcal{H}$, então:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{s+3}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+3} |\widehat{f}(k)|^2 dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+3} \frac{1}{|\pm\lambda + \mathbf{i}\phi_1(k)|^2} |\widehat{g}(k)|^2 dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \frac{(1+k^2)^3}{\lambda^2 + \phi_1^2(k)} |\widehat{g}(k)|^2 dk \\
&\leq C \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\widehat{g}(k)|^2 dk \\
&= C \|g\|_s^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

onde $(1+k^2)^3 \leq C(\lambda^2 + \phi_1^2(k))$, com $C > 0$.

Caso $\mathcal{L} = \mathcal{T}$, então:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{s+3}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+3} |\widehat{f}(k)|^2 dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+3} \frac{1}{|\pm\lambda + \mathbf{i}\phi_2(k)|^2} |\widehat{g}(k)|^2 dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \frac{(1+k^2)^3}{\lambda^2 + \phi_2^2(k)} |\widehat{g}(k)|^2 dk \\
&= h^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \frac{(1+k^2)^3}{\lambda^2 h^2 + h^2 \phi_2^2(k)} |\widehat{g}(k)|^2 dk \\
&\leq h^2 \bar{C} \|g\|_s^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

onde da desigualdade (3.9), tem-se que $(1+k^2)^3 \leq \bar{C}(\lambda^2 h^2 + h^2 \phi_2^2(k))$, com $M = \lambda^2 h^2$.

Além disso, da expressão (3.10), tem-se que

$$\begin{aligned}
(\pm\lambda + \mathbf{i}\phi_j(k))\widehat{f}(k) &= \widehat{g}(k), \\
((\pm\lambda - A)f)^\wedge(k) &= \widehat{g}(k),
\end{aligned}$$

para $j = 1, 2$, aplicando a transformada inversa, segue que $(\pm\lambda - A)f = g$, isto é, $(\pm\lambda - A)D(A) = H^s$.

Nessas condições, pelo teorema de Stone, A é gerador de um grupo de classe C_0 unitário. Portanto, do Teorema 2.2.9 segue que:

Teorema 3.1.1. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $\eta_0 \in H^s$, então o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s), \\ \eta_t + \eta_x - b\mathcal{L}[\eta_{xx}] - a\eta_{xxx} = 0 \text{ em } H^s, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \in H^s, \end{cases}$$

tem uma única solução η e ainda, $\eta \in C^1(\mathbb{R}, H^s)$, onde a solução é da forma $\eta(x, t) = S(t)\eta_0(x)$.

Além disso, como $\hat{\eta}_t(k, t) = -i\phi_j(k)\hat{\eta}(k, t)$, então $\hat{\eta}(k, t) = \hat{\eta}_0(k)e^{-i\phi_j(k)t}$, logo

$$\eta(x, t) = (\hat{\eta}_0(k)e^{-i\phi_j(k)t})^\vee = \eta_0(x) * (e^{-i\phi_j(k)t})^\vee.$$

Assim, $S(t)\eta_0(x) = \eta_0(x) * (e^{-i\phi_j(k)t})^\vee$, isto é, $\widehat{S(t)}(k) = e^{-i\phi_j(k)t}$, onde $\phi_j(k) = \begin{cases} k + bk|k| + ak^3, \text{ se } j = 1 \\ k + bk^2 \coth(hk) + ak^3, \text{ se } j = 2 \end{cases}, \forall k \in \mathbb{R}$.

3.2 Equação Linear de Benjamin Regularizada

Agora, considera-se a família de equações de Benjamin linear regularizada dada por:

$$\eta_t + \eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0, \quad (3.11)$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ com $\widehat{\mathcal{H}}(k) = i \operatorname{sgn}(k)$ ou $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ com $\widehat{\mathcal{T}}(k) = i \coth(hk)$, $h > 0$, para todo $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ no caso não periódico (ou $k \in \mathbb{Z}$, no caso periódico). Os parâmetros a, b são positivos, onde b é da mesma ordem de \sqrt{a} , com $b < 2\sqrt{a}$.

Dado o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \eta_t(x, t) = A_1\eta(x, t), \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x), \end{cases} \quad (3.12)$$

para determinar o operador A_1 , suponha-se $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ e escreve-se a equação (3.11) na forma

$$(1 - b\mathcal{H}[\partial_x] - a\partial_{xx})\eta_t = \eta_x.$$

Aplicando a Transformada de Fourier em relação a variável x obtêm-se

$$\begin{aligned} (1 - b(i\mathbf{k})(i \operatorname{sgn}(k)) - a(i\mathbf{k})^2)\hat{\eta}_t &= -(i\mathbf{k})\hat{\eta}, \\ (1 + b|k| + ak^2)\hat{\eta}_t &= -i\mathbf{k}\hat{\eta}. \end{aligned}$$

Dessa forma, define-se $\bar{A}(k) = 1 + b|k| + ak^2$, então $\bar{A}(k) > 0$, para todo k . Pois, como $a > 0$ e b é da mesma ordem de \sqrt{a} , segue que b^2 é da ordem de

a com $b < 2\sqrt{a}$, logo $\Delta = b^2 - 4a < 0$.

Caso $\mathcal{L} = \mathcal{T}$, então

$$(1 - b\mathcal{T}[\partial_x] - a\partial_{xx})\eta_t = \eta_x,$$

aplicando a Transformada de Fourier em relação a variável x segue que

$$\begin{aligned} (1 - b\mathbf{i} \coth(hk)(\mathbf{i}k) - a(\mathbf{i}k)^2) \hat{\eta}_t &= (-\mathbf{i}k) \hat{\eta} \\ (1 + bk \coth(hk) + ak^2) \hat{\eta}_t &= -\mathbf{i}k \hat{\eta} \end{aligned}$$

Define-se $\overline{\overline{A}}(k) = 1 + bk \coth(hk) + ak^2$, $h > 0$, como $a > 0$ e a função cotangente hiperbólico é ímpar, tem-se $\overline{\overline{A}}(k) > 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$. Além disso, segundo [7], $|x| \leq x \coth(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, logo:

$$1 + b|k| + ak^2 \leq 1 + bk \coth(hk) + ak^2,$$

isto é, $\overline{\overline{A}}(k) \geq \overline{A}(k)$, para todo $k \in \mathbb{R}$. Isso implica que $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ será um caso particular do caso $\mathcal{L} = \mathcal{H}$.

Sendo assim, define-se para todo $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$,

$$\varphi_j(k) = \begin{cases} \frac{k}{\overline{A}(k)} = \frac{k}{1+b|k|+ak^2}, & \text{se } j = 1 \\ \frac{k}{\overline{\overline{A}}(k)} = \frac{k}{1+bk \coth(hk)+ak^2}, & \text{se } j = 2, \end{cases} \quad (3.13)$$

estendida por continuidade para $k = 0$. Donde,

$$\hat{\eta}_t(k, t) = -\mathbf{i}\varphi_j(k) \hat{\eta}(k, t), \quad (3.14)$$

sendo que $j = 1$ é o caso em que $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ e $j = 2$ é o caso em que $\mathcal{L} = \mathcal{T}$.

Dessa forma o operador A_1 do problema de Cauchy é tal que

$$A_1\eta(x, t) = -\mathbf{i}\varphi_j(D_x)\eta(x, t), \quad (3.15)$$

onde $\widehat{\varphi_j(D_x)\eta}(k, t) \equiv \varphi_j(k) \hat{\eta}(k, t)$, para $j = 1, 2$, logo, $\widehat{A_1\eta}(k, t) = -\mathbf{i}\varphi_j(k) \hat{\eta}(k, t)$, $\forall k \in \mathbb{R}$, no caso não periódico (ou $\forall k \in \mathbb{Z}$, no caso periódico), e $\forall t \in \mathbb{R}$, para $j = 1, 2$, $A_1 : D(A_1) \subset H^s \rightarrow H^s$.

Nota-se que A_1 é linear no seu domínio. De fato, sejam $f, g \in D(A_1) \subset H^s$, $\gamma \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned} (A_1(\gamma f + g)) \hat{}(k) &= -\mathbf{i}\varphi_j(k)(\gamma f + g) \hat{}(k) \\ &= -\gamma \mathbf{i}\varphi_j(k) \hat{f}(k) - \mathbf{i}\varphi_j(k) \hat{g}(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma \widehat{A_1 f}(k) + \widehat{A_1 g}(k) \\
&= (\gamma A_1 f + A_1 g)^\wedge(k),
\end{aligned}$$

para $j = 1, 2$. Aplicando a transformada inversa, conclui-se que

$$A_1(\gamma f + g) = \gamma A_1 f + A_1 g,$$

e portanto, A_1 é linear.

Do sistema (3.14) obtem-se uma família de equações diferenciais ordinárias (EDO) no domínio da frequência, cujas soluções são:

$$\widehat{\eta}(k, t) = \widehat{\eta}_0(k) e^{-i\varphi_j(k)t},$$

para $j = 1, 2$, assim, $|\widehat{\eta}(k, t)| = |\widehat{\eta}_0(k)|$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ ou $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\|\eta(\cdot, t)\|_s = \|\eta_0\|_s, \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Como a solução do problema de Cauchy é dada por

$$\eta(x, t) = S(t)\eta_0(x),$$

então a igualdade (3.16) indica que $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ deve ser um grupo unitário. Dessa forma, para mostrar que A_1 é gerador de um grupo unitário usa-se o Teorema de Stone 2.2.8.

Para garantir isso, primeiramente, mostra-se no próximo lema uma limitação inferior para $\overline{A}(k)$.

Lema 3.2.1. $\overline{\overline{A}}(k) \geq \overline{A}(k) \geq (b + 2\sqrt{a})|k| \geq b|k|$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Para demonstrar a desigualdade $\overline{A}(k) \geq (b + 2\sqrt{a})|k|$, encontra-se a reta tangente a $\overline{A}(k)$ e que passa pela origem. Dessa forma, considera-se o ponto $(k_0, \overline{A}(k_0))$ que pertence à reta que passa pela origem e tem inclinação $\overline{A}'(k_0)$. Se $k > 0$, então $\overline{A}'(k) = b + 2ak$ e a reta tangente r é:

$$r : y(k) = \overline{A}'(k_0)k,$$

$$r : y(k) = (b + 2ak_0)k,$$

como $(k_0, \bar{A}(k_0)) \in r$, então

$$\begin{aligned} 1 + bk_0 + ak_0^2 &= bk_0 + 2ak_0^2 \\ ak_0^2 &= 1 \\ k_0 &= \pm \frac{1}{\sqrt{a}}, \end{aligned}$$

mas como $k_0 > 0$, então $k_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$. Portanto,

$$r : y(k) = (b + 2\sqrt{a})k, \forall k > 0.$$

Agora se $k < 0$, então $\bar{A}'(k) = (-b + 2ak)$ e a reta tangente é:

$$r : y(k) = \bar{A}'(k_0)k,$$

$$r : y(k) = (-b + 2ak_0)k,$$

como $(k_0, \bar{A}(k_0)) \in r$, então

$$\begin{aligned} 1 - bk_0 + ak_0^2 &= -bk_0 + 2ak_0^2 \\ ak_0^2 &= 1 \\ k_0 &= \pm \frac{1}{\sqrt{a}}, \end{aligned}$$

e sendo $k_0 < 0$, temos $k_0 = -\frac{1}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{a}}{a}$. Portanto,

$$r : y(k) = (-b - 2\sqrt{a})k, \forall k < 0,$$

isto é,

$$r : y(k) = (b + 2\sqrt{a})(-k), \forall k < 0.$$

Assim,

$$r : y(k) = (b + 2\sqrt{a})|k|, \forall k \in \mathbb{R}.$$

Além disso, como $\bar{A}''(k) = 2a > 0$, então $\bar{A}(k)$ tem concavidade para cima para todo k , e portanto, a reta tangente está abaixo da curva. Dessa forma, segue que:

$$\bar{\bar{A}}(k) \geq \bar{A}(k) = 1 + b|k| + ak^2 \geq (b + 2\sqrt{a})|k|, \forall k \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, como $(b + 2\sqrt{a})|k| \geq b|k|$, $\forall k \in \mathbb{R}$, conclui-se que:

$$\overline{\overline{A}}(k) \geq \overline{A}(k) = 1 + b|k| + ak^2 \geq (b + 2\sqrt{a})|k| \geq b|k|, \forall k \in \mathbb{R}.$$

■

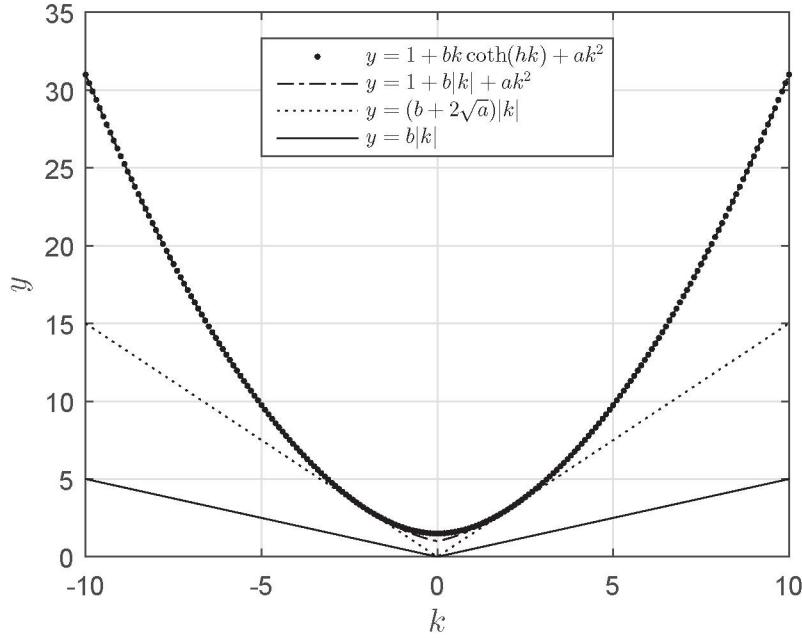


Figura 3.2: Comportamento das funções $\overline{A}(k)$ e $\overline{\overline{A}}(k)$.

Nota-se que o Lema 3.2.1 pode ser aplicado tanto para o caso não periódico ($k \in \mathbb{R}$) quanto para o caso periódico ($k \in \mathbb{Z}$). A Figura 3.2 ilustra a desigualdade do Lema 3.2.1, para $a = 0,25$, $b = \sqrt{a}$ e $h = 1$. Além disso, do Lema 3.2.1 segue que

$$|\varphi_2(k)| \leq |\varphi_1(k)| \leq \frac{1}{b + 2\sqrt{a}}. \quad (3.17)$$

Agora, mostra-se as hipóteses do Teorema de Stone.

1. A_1 é densamente definido:

$$D(A_1) = \{f \in H^s; A_1 f \in H^s\}.$$

Nota-se inicialmente que $D(A_1) = H^s$. De fato, se $f \in H^s$, da desigual-

dade (3.17) segue que:

$$\begin{aligned}
\|A_1 f\|_s^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{A_1 f}(k) \right|^2 dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |\varphi_j(k)|^2 \left| \widehat{f}(k) \right|^2 dk \\
&\leq \frac{1}{(b+2\sqrt{a})^2} \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{f}(k) \right|^2 dk \\
&= \frac{1}{(b+2\sqrt{a})^2} \|f\|_s^2 < +\infty,
\end{aligned}$$

para $j = 1, 2$.

Portanto, em ambos os casos, A_1 é limitado e contínua. Dessa forma, se $f \in H^s$, então $f \in D(A_1)$. Portanto, $D(A_1) = H^s$, em particular, A_1 é densamente definido e é um operador contínuo.

2. $A_1^* = -A_1$:

Para mostrar essa igualdade é necessário verificar apenas que A_1 é anti-simétrico. De fato, sejam $f, g \in D(A_1) = H^s$, então

$$\begin{aligned}
\langle A_1 f, g \rangle_s &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \widehat{A_1 f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s (-i\varphi_j(k)) \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} dk \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \widehat{f}(k) \overline{(-i\varphi_j(k)) \widehat{g}(k)} dk \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \widehat{f}(k) \overline{\widehat{A_1 g}(k)} dk \\
&= - \langle f, A_1 g \rangle_s,
\end{aligned}$$

para $j = 1, 2$. Assim, A_1 é anti-simétrico.

Nessas condições, pelo Teorema de Stone, 2.2.8, A_1 é gerador de um grupo de classe C_0 unitário. Portanto, do Teorema 2.2.9 segue que:

Teorema 3.2.2. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $\eta_0 \in H^s$, então o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s), \\ \eta_t + \eta_x - b\mathcal{L}[\eta_{xt}] - a\eta_{xxt} = 0 \text{ em } H^s, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \in H^s, \end{cases}$$

tem uma única solução η e ainda, $\eta \in C^1(\mathbb{R}, H^s)$, onde a solução é da forma $\eta(x, t) = S(t)\eta_0(x)$.

Além disso, como $\hat{\eta}_t(k, t) = -i\varphi_j(k)\hat{\eta}(k, t)$, tem-se $\hat{\eta}(k, t) = \hat{\eta}_0(k)e^{-i\varphi_j(k)t}$, logo

$$\eta(x, t) = (\hat{\eta}_0(k)e^{-i\varphi_j(k)t})^\vee = \eta_0(x) * (e^{-i\varphi_j(k)t})^\vee.$$

Assim, $S(t)\eta_0(x) = \eta_0(x) * (e^{-i\varphi_j(k)t})^\vee$, portanto, $\widehat{S(t)}(k) = e^{-i\varphi_j(k)t}$.

Equação	Expressão da solução	Expressão do multiplicador
$\eta_t + \eta_x - b\mathcal{H}[\eta]_{xx} - a\eta_{xxx} = 0$	$\eta(x, t) = \eta_0(x) * (e^{-i\phi_1(k)t})^\vee$	$\phi_1(k) = k + bk k + ak^3, k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$
$\eta_t + \eta_x - b\mathcal{T}[\eta]_{xx} - a\eta_{xxx} = 0$	$\eta(x, t) = \eta_0(x) * (e^{-i\phi_2(k)t})^\vee$	$\phi_2(k) = k + bk^2 \coth(hk) + ak^3, k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$
$\eta_t + \eta_x - b\mathcal{H}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0$	$\eta(x, t) = \eta_0(x) * (e^{-i\varphi_1(k)t})^\vee$	$\varphi_1(k) = \frac{k}{1+b k +ak^2}, k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$
$\eta_t + \eta_x - b\mathcal{T}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0$	$\eta(x, t) = \eta_0(x) * (e^{-i\varphi_2(k)t})^\vee$	$\varphi_2(k) = \frac{k}{1+bk \coth(hk)+ak^2}, k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$

Tabela 3.1: Resumo da família de equações de Benjamin linearizada com suas respectivas soluções.

Na Tabela 3.1 verifica-se o resumo das equações apresentadas neste Capítulo com a expressão da sua solução. Essa solução analítica será utilizada no Capítulo 6 para validar o método numérico utilizado para encontrar a solução numérica.

Capítulo 4

Boa colocação da família de Equações de Benjamin regularizada

A família de equações de Benjamin regularizada (RILW-Benjamin) é dada por:

$$\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0, \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ com $\hat{\mathcal{H}}(k) = \mathbf{i} \operatorname{sgn}(k)$ (Transformada de Hilbert) ou $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ com $\hat{\mathcal{T}}(k) = \mathbf{i} \coth(hk)$, $h > 0$ (Transformada de Hilbert na faixa), para todo $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ no caso não periódico (ou $k \in \mathbb{Z}$, no caso periódico). Os parâmetros α, a, b são positivos, a relação entre os parâmetros é: α é da mesma ordem de a enquanto b é da ordem de \sqrt{a} , com $b < 2\sqrt{a}$.

Neste capítulo será estudada a boa colocação da família de equações de Benjamin numa versão regularizada pela teoria de semigrupos baseada em [7, 10, 15, 17–19]. Em [7, 10] há uma demonstração para o caso em que $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ por uma abordagem direta, onde a boa colocação local é garantida em [7] para $s > \frac{1}{2}$. Já neste trabalho será mostrada que vale para $s \geq 0$ para ambos os casos do operador \mathcal{L} . Além disso, baseado em [10] será possível mostrar que o problema é globalmente bem posto para $s > 1$, por outro lado, será possível mostrar a boa colocação global para $0 \leq s \leq 1$, com $s \neq \frac{1}{2}$ utilizando uma estratégia de demonstração diferente, utilizando a teoria de semigrupos, baseado em [15].

4.1 Boa colocação local

Nesta seção será feito o estudo da boa colocação local a partir da teoria de semigrupos baseado em [10, 15, 17–19]. Para garantir a boa colocação local do problema de Cauchy considera-se a definição dada em [16], a saber,

Definição 4.1.1. Sejam X, Y dois espaços de Banach e $F : Y \rightarrow X$ uma função contínua. O problema de Cauchy

$$\begin{cases} \eta_t(t) = F(\eta(t)) \text{ em } X, \\ \eta(0) = \phi \in Y, \end{cases} \quad (4.2)$$

é localmente bem posto em Y se e somente se

(i) Existe $T > 0$ e $\eta \in C([-T, T], Y)$ tal que $\eta(0) = \phi$ e a equação diferencial é satisfeita no sentido

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} - F(\eta(t)) \right\|_X = 0. \quad (4.3)$$

(ii) O problema (4.2) tem no máximo uma solução em $C([-T, T], Y)$.

(iii) A aplicação $\phi \mapsto \eta$ é contínua, isto é, dado $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ tal que $\phi_n \xrightarrow{Y} \phi^*$ e $\eta^* \in C([-T^*, T^*], Y)$, onde η^* é a solução com a condição inicial ϕ^* , então, para n suficientemente grande, cada solução η_n correspondente ao dado ϕ_n pode ser definida no intervalo $[-T^*, T^*]$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{[-T^*, T^*]} \|\eta_n(t) - \eta^*(t)\|_Y = 0.$$

Sendo assim, considera-se a equação dada em (4.1),

$$(1 - \mathcal{L}[\partial_x] - a\partial_{xx})\eta_t = \frac{3}{4}\alpha(\eta^2)_x - \eta_x. \quad (4.4)$$

Caso $\mathcal{L} = \mathcal{H}$, como $\widehat{\mathcal{H}} = \mathbf{i} \operatorname{sgn}(k)$, calculando a Transformada de Fourier na variável x da expressão (4.4) segue que

$$(1 - b(\mathbf{i}k)\mathbf{i} \operatorname{sgn}(k) - a(\mathbf{i}k)^2)\widehat{\eta}_t = \mathbf{i}k \left(\frac{3}{4}\alpha\widehat{\eta}^2 - \widehat{\eta} \right),$$

logo

$$\widehat{\eta}_t = -\frac{\mathbf{i}k}{1 + b|k| + ak^2} \left(\widehat{\eta} - \frac{3}{4}\alpha\widehat{\eta}^2 \right).$$

Da definição 3.13 segue que $\varphi_1(k) = \frac{k}{A(k)} = \frac{k}{1+b|k|+ak^2}$, logo

$$\hat{\eta}_t(k, t) = -\mathbf{i}\varphi_1(k) \left(\hat{\eta} - \frac{3}{4}\alpha\hat{\eta}^2 \right) (k, t). \quad (4.5)$$

Caso $\mathcal{L} = \mathcal{T}$, como $\hat{\mathcal{T}} = \mathbf{i} \coth(hk)$, $h > 0$, calculando a Transformada de Fourier na variável x da expressão (4.4), segue que

$$(1 - b(\mathbf{i}k)\mathbf{i} \coth(hk) - a(\mathbf{i}k)^2) \hat{\eta}_t = \mathbf{i}k \left(\frac{3}{4}\alpha\hat{\eta}^2 - \hat{\eta} \right),$$

logo

$$\hat{\eta}_t = -\frac{\mathbf{i}k}{1 + bk \coth(hk) + ak^2} \left(\hat{\eta} - \frac{3}{4}\alpha\hat{\eta}^2 \right).$$

De acordo com a definição 3.13, $\varphi_2(k) = \frac{k}{A(k)} = \frac{k}{1+bk \coth(hk)+ak^2}$, logo

$$\hat{\eta}_t(k, t) = -\mathbf{i}\varphi_2(k) \left(\hat{\eta} - \frac{3}{4}\alpha\hat{\eta}^2 \right) (k, t). \quad (4.6)$$

Portanto, em ambos os casos segue das equações (4.5) e (4.6) que:

$$\eta_t(x, t) = -\mathbf{i}\varphi_j(D_x) \left(\eta - \frac{3}{4}\alpha\eta^2 \right) (x, t), \quad (4.7)$$

onde $\widehat{\varphi_j(D_x)\eta}(k, t) \equiv \varphi_j(k)\hat{\eta}(k, t)$, para $j = 1, 2$.

Nos dois lemas a seguir são provadas duas desigualdades necessárias para obter a boa colocação local.

Lema 4.1.2. *Para $s \geq 0$, existe $\overline{C}_s > 0$ tal que*

$$(1 + k^2)^{s/2} \leq \overline{C}_s(1 + k_1^2)^{s/2}(1 + (k - k_1)^2)^{s/2}, \quad (4.8)$$

$\forall k, k_1 \in \mathbb{R}$.

Demonstração: De fato, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ logo $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e como $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, então $2ab \leq a^2 + b^2$. Portanto, $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ e ainda,

$$\begin{aligned} 1 + (a+b)^2 &\leq 1 + 2a^2 + 2b^2 < 2 + 2a^2 + 2b^2 \\ &< 2 + 2a^2 + 2b^2 + 2a^2b^2 = 2(1 + a^2 + b^2 + a^2b^2) \\ &= 2(1 + a^2)(1 + b^2). \end{aligned}$$

Portanto, se $a = k - k_1$ e $b = k_1$, segue que

$$1 + k^2 = 1 + [(k - k_1) + k_1]^2 \leq 2(1 + (k - k_1)^2)(1 + k_1^2).$$

Como $s \geq 0$, então

$$(1 + k^2)^{s/2} \leq 2^{s/2} (1 + k_1^2)^{s/2} (1 + (k - k_1)^2)^{s/2},$$

isto é, a desigualdade (4.8) é verdadeira para $\overline{C}_s = 2^{s/2}$. \blacksquare

Lema 4.1.3. *Sejam $u(\cdot, t), v(\cdot, t) \in H^s$, $s \geq 0$, $t \in I$, intervalo não vazio. Então existe uma constante $C_s = C(s) > 0$ tal que*

$$\|\varphi_j(D_x)(uv)(\cdot, t)\|_s \leq C_s \|u(\cdot, t)\|_s \|v(\cdot, t)\|_s,$$

$\forall t \in I$ e $j = 1, 2$.

Demonstração: Nota-se que

$$\varphi_j(\widehat{D_x}(uv))(k) = \varphi_j(k)(\widehat{uv})(k) = \sqrt{2\pi}\varphi_j(k) \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(k_1)\widehat{v}(k - k_1)dk_1,$$

para $j = 1, 2$.

Define-se $\widehat{u}_1(k) = (1 + k^2)^{s/2}\widehat{u}(k) \in L^2(\mathbb{R})$ e $\widehat{v}_1(k) = (1 + k^2)^{s/2}\widehat{v}(k) \in L^2(\mathbb{R})$, pois $u, v \in H^s$. Logo, $\|\widehat{u}_1\|_{L^2} = \|u_1\|_{L^2} = \|u\|_s$ e $\|\widehat{v}_1\|_{L^2} = \|v_1\|_{L^2} = \|v\|_s$. Assim, da desigualdade de Young, Teorema 2.1.3, tem-se que $\widehat{u}_1 * \widehat{v}_1 \in L^\infty$ e ainda,

$$\|\widehat{u}_1 * \widehat{v}_1\|_\infty \leq \|\widehat{u}_1\|_{L^2} \|\widehat{v}_1\|_{L^2}. \quad (4.9)$$

Nota-se também que $\varphi_j \in L^2(\mathbb{R})$, para $j = 1, 2$, pois se $j = 1$, então

$$\begin{aligned} \|\varphi_1\|_{L^2}^2 &= \left\| \frac{k}{1 + b|k| + ak^2} \right\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ak^2}{1 + b|k| + ak^2} \frac{1}{1 + b|k| + ak^2} dk \\ &\leq \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + b|k| + ak^2} dk \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{a}|k| + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(1 - \frac{b^2}{4a}\right)} dk < \infty, \end{aligned}$$

pois $1 - \frac{b^2}{4a} > 0$, isto é, $\frac{b}{2\sqrt{a}} < 1$ uma vez que b é da mesma ordem de \sqrt{a} , com

$b < 2\sqrt{a}$. Caso $j = 2$, como $|\varphi_2(k)| \leq |\varphi_1(k)|$ segue que $\|\varphi_2\|_{L^2} \leq \|\varphi_1\|_{L^2} < \infty$.

Dessa forma se $u, v \in H^s$, então:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_j(D_x)(uv)\|_s^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \varphi_j(\widehat{D_x}(uv))(k) \right|^2 dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |(1+k^2)^{s/2} \varphi_j(k)(\widehat{uv})(k)|^2 dk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_j(k)|^2 |(1+k^2)^{s/2}(\widehat{uv})(k)|^2 dk \\
&\stackrel{(4.8)}{\leq} \sqrt{2\pi C_s} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_j(k)|^2 \dots \\
&\left| \int_{-\infty}^{\infty} (1+k_1^2)^{s/2} (1+(k-k_1)^2)^{s/2} \widehat{u}(k_1) \widehat{v}(k-k_1) dk_1 \right|^2 dk \\
&= \sqrt{2\pi C_s} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_j(k)|^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_1(k_1) \widehat{v}_1(k-k_1) dk_1 \right|^2 dk \\
&= \sqrt{2\pi C_s} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_j(k)|^2 |\widehat{u}_1 * \widehat{v}_1(k)|^2 dk \\
&\leq \sqrt{2\pi C_s} \|\widehat{u}_1 * \widehat{v}_1\|_{\infty}^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_j(k)|^2 dk \\
&\stackrel{(4.9)}{\leq} \sqrt{2\pi C_s} \|\widehat{u}_1\|_{L^2}^2 \|\widehat{v}_1\|_{L^2}^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_j(k)|^2 dk \\
&= \sqrt{2\pi C_s} \|\widehat{u}_1\|_{L^2}^2 \|\widehat{v}_1\|_{L^2}^2 \|\varphi_j\|_{L^2}^2 \\
&= K_s \|u\|_s^2 \|v\|_s^2,
\end{aligned}$$

onde $K_s = \sqrt{2\pi C_s} \|\varphi_j\|_{L^2}^2$.

Sendo assim, existe uma constante $C_s > 0$ tal que

$$\|\varphi_j(D_x)(uv)(\cdot, t)\|_s \leq C_s \|u(\cdot, t)\|_s \|v(\cdot, t)\|_s.$$

■

Observação 4.1.4. Nota-se que na demonstração desse lema foi necessária a condição de que $b < 2\sqrt{a}$.

Agora, considera-se o problema de valor inicial dado por:

$$\begin{cases} \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x), \end{cases}$$

ele pode ser escrito como

$$\begin{cases} \eta_t(x, t) = -\mathbf{i}\varphi_j(D_x) \left(\eta - \frac{3}{4}\alpha\eta^2 \right) (x, t), \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x), \end{cases} \quad (4.10)$$

onde $\widehat{\varphi_j(D_x)\eta}(k, t) = \varphi_j(k)\widehat{\eta}(k, t)$, para $j = 1, 2$.

Do Lema 4.1.3 tem-se que se $\eta(\cdot, t) \in H^s$ para $t \in I$, um intervalo tal que $0 \in I$, então $\varphi_j(D_x)\eta^2 \in H^s$, além disso, da expressão (3.15) tem-se que se $\eta(\cdot, t) \in H^s$ para $t \in I$, como descrito acima, então $A_1\eta(\cdot, t) = -\mathbf{i}\varphi_j(D_x)\eta(\cdot, t) \in H^s$, pois $A_1 : H^s \rightarrow H^s$. Portanto,

$$\eta_t(\cdot, t) = -\mathbf{i}\varphi_j(D_x) \left(\eta - \frac{3}{4}\alpha\eta^2 \right) (\cdot, t) \in H^s,$$

desde que $\eta(\cdot, t) \in H^s, \forall t \in I$.

Além disso, do Capítulo 3, tem-se que $S(t) = e^{-\mathbf{i}t\varphi_j(D_x)}$ é um grupo unitário com $\widehat{S(t)}(k) = e^{-\mathbf{i}t\varphi_j(k)}$ e $\phi(x, t) = S(t)\eta_0(x)$ é solução do problema linear associado ao problema (4.10), a saber,

$$\begin{cases} \phi_t(x, t) = -\mathbf{i}\varphi_j(D_x)\phi(x, t), \\ \phi(x, 0) = \eta_0(x). \end{cases} \quad (4.11)$$

Dessa forma, via teoria de semigrupos, [17–19], o problema (4.10) pode ser reescrito como a equação integral:

$$\eta(x, t) = S(t)\eta_0(x) + \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)\eta^2(x, t')dt', \quad (4.12)$$

para $j = 1, 2$. A equação integral (4.12) pode ser resolvida localmente pelo argumento do ponto fixo no espaço X_T^s das funções contínuas definidas em $[-T, T]$ com valores em H^s , com a norma definida por

$$\|\eta\|_{X_T^s} = \sup_{t \in [-T, T]} \|\eta(\cdot, t)\|_s,$$

ou seja, $X_T^s = \{f : [-T, T] \rightarrow H^s; f \text{ é uma função contínua}\}$.

Do Capítulo 3 tem-se que $\phi(x, t) = S(t)\eta_0(x)$ é solução do problema (4.11) e assim é contínua definida em $[-T, T]$ com valores em H^s . Portanto, $S(\cdot)\eta_0 \in X_T^s$ e ainda, como $S(t)$ é um grupo unitário, $\|S(t)\eta_0\|_s = \|\eta_0\|_s$. Logo, para todo $T > 0$ segue que

$$\|S(\cdot)\eta_0\|_{X_T^s} = \sup_{t \in [-T, T]} \|S(t)\eta_0\|_s = \|\eta_0\|_s.$$

Para mostrar a boa colocação local é necessário mostrar duas desigualdades. Nota-se que o segundo termo da equação (4.12) é limitado, pois:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' \right\|_s &\leq \frac{3\alpha}{4} \left| \int_0^t \|S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t')\|_s dt' \right| \\ &\leq \frac{3\alpha}{4} \left| \int_0^t \|\varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t')\|_s dt' \right|. \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.1.3 existe uma constante $C_s > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' \right\|_s &\leq \frac{3\alpha}{4} C_s \left| \int_0^t \|\eta(\cdot, t')\|_s^2 dt' \right| \\ &\leq \frac{3\alpha}{4} C_s \left| \int_0^t \|\eta\|_{X_T^s}^2 dt' \right| \\ &= \frac{3\alpha}{4} C_s \|\eta\|_{X_T^s}^2 \left| \int_0^t dt' \right| \\ &= \frac{3\alpha}{4} C_s \|\eta\|_{X_T^s}^2 |t|, \end{aligned}$$

logo

$$\sup_{t \in [-T, T]} \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' \right\|_s \leq \frac{3\alpha}{4} C_s \|\eta\|_{X_T^s}^2 T. \quad (4.13)$$

Analogamente, como $\eta^2 - \nu^2 = (\eta + \nu)(\eta - \nu)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [-T, T]} \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) (\eta^2(\cdot, t') - \nu^2(\cdot, t')) dt' \right\|_s &\leq \\ &\leq \frac{3\alpha}{4} C_s \|\eta - \nu\|_{X_T^s} \|\eta + \nu\|_{X_T^s} T. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Teorema 4.1.5. *Sejam $s \geq 0$, $\eta_0 \in H^s$, então existe $T = T(s, \|\eta_0\|_s) > 0$ tal que o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} \eta \in C([-T, T], H^s) \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0 \text{ em } H^s \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \in H^s, \end{cases}$$

é localmente bem posto no sentido da Definição 4.1.1.

Demonstração: Considera-se a equação integral dada por (4.12), a saber,

$$\eta(x, t) = S(t)\eta_0(x) + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)\eta^2(x, t')dt'.$$

Para aplicar o teorema do ponto fixo, define-se

$$\Lambda = \Lambda(T, M) = \{v \in C([-T, T], H^s); d(v, 0) \leq M\},$$

onde $d(v, 0) = \|v\|_{X_T^s} = \sup_{t \in [-T, T]} \|v(\cdot, t)\|_s$. Como Λ é um subconjunto fechado de $C([-T, T], H^s)$ que é um espaço completo, [10], então Λ é espaço métrico completo para todo $M > 0$ e $T > 0$.

Agora, considera-se $M = 2\|\eta_0\|_s$ e

$$\begin{aligned} J: \Lambda &\rightarrow \Lambda \\ v &\mapsto Jv: [-T, T] \rightarrow H^s, \end{aligned}$$

definida por

$$Jv(x, t) = S(t)\eta_0(x) + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)v^2(x, t')dt'. \quad (4.15)$$

Inicialmente, mostra-se o item (i) da Definição 4.1.1. Para tal, existe $T_1 > 0$ tal que $T \leq T_1$ o operador J está bem definido. De fato, se $v \in \Lambda$, então

$$\|Jv(\cdot, t) - 0\|_s \leq \|S(t)\eta_0\|_s + \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)v^2(\cdot, t')dt' \right\|_s,$$

logo da desigualdade (4.13), existe uma constante $C_s > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|Jv\|_{X_T^s} &\leq \|S(\cdot)\eta_0\|_{X_T^s} + \sup_{t \in [-T, T]} \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)v^2(\cdot, t')dt' \right\|_s \\ &= \|\eta_0\|_s + \sup_{t \in [-T, T]} \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)v^2(\cdot, t')dt' \right\|_s \\ &\stackrel{(4.13)}{\leq} \|\eta_0\|_s + \frac{3\alpha}{4}C_s \|v\|_{X_T^s}^2 T = \frac{M}{2} + \frac{3\alpha}{4}C_s \|v\|_{X_T^s}^2 T \\ &\leq \frac{M}{2} + \frac{3\alpha}{4}C_s M^2 T = \frac{M}{2} \left(1 + \frac{3\alpha}{2}C_s MT \right). \end{aligned}$$

Fixado $T_1 = \frac{2}{3\alpha C_s M}$, então para todo $T \leq T_1$ tem-se que

$$\|Jv\|_{X_T^s} \leq \frac{M}{2}(1+1) = M.$$

Além disso, Jv é contínua, pois se $t, \tilde{t} \in [-T, T]$, $f(\cdot, t) = \varphi_j(D_x)v^2(\cdot, t)$ e $Tf(\cdot, t) = S(t)\eta_0(x) + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')f(\cdot, t')dt'$, então

$$\begin{aligned} Tf(\cdot, t) - Tf(\cdot, \tilde{t}) &= \\ &= S(t)\eta_0 - S(\tilde{t})\eta_0 + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')f(\cdot, t')dt' \\ &\quad - \frac{3i\alpha}{4} \int_0^{\tilde{t}} S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \\ &= (S(t) - S(\tilde{t}))\eta_0 + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t [S(t-t') - S(\tilde{t}-t')]f(\cdot, t')dt' \\ &\quad - \frac{3i\alpha}{4} \int_t^{\tilde{t}} S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \\ &= (S(t) - S(\tilde{t}))\eta_0 + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t [S(t-\tilde{t}) - I]S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \\ &\quad - \frac{3i\alpha}{4} \int_t^{\tilde{t}} S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \\ &= (S(t) - S(\tilde{t}))\eta_0 + \frac{3i\alpha}{4} [S(t-\tilde{t}) - I] \int_0^t S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \\ &\quad - \frac{3i\alpha}{4} \int_t^{\tilde{t}} S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt'. \end{aligned}$$

Nota-se que os integrandos não dependem de t , como $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um grupo unitário e portanto fortemente contínuo, Definição 2.2.2, então

$$(S(t) - S(\tilde{t}))\eta_0 \rightarrow 0 \in H^s \text{ e } [S(t-\tilde{t}) - I] \int_0^t S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \rightarrow 0 \in H^s,$$

quando $t \rightarrow \tilde{t}$. Dessa forma, segue que no limite para $t \rightarrow \tilde{t}$ tem-se que

$$Tf(\cdot, t) - Tf(\cdot, \tilde{t}) = Jv(\cdot, t) - Jv(\cdot, \tilde{t}) \rightarrow 0 \in H^s.$$

Conclui-se então que $Jv \in C([-T, T], H^s)$ e $Jv \in \Lambda$, se $v \in \Lambda$.

Além disso, existe $T_2 > 0$ tal que para todo $T < T_2$, $J : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é uma

contração. De fato, se $u, v \in \Lambda$, então da desigualdade (4.14), existe uma constante $C_s > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|Ju - Jv\|_{X_T^s} &= \sup_{t \in [-T, T]} \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) (u^2(\cdot, t') - v^2(\cdot, t')) dt' \right\|_s \\ &\stackrel{(4.14)}{\leq} \frac{3\alpha}{4} C_s \|u - v\|_{X_T^s} \|u + v\|_{X_T^s} T \\ &\leq \frac{3\alpha}{4} C_s \|u - v\|_{X_T^s} (\|u\|_{X_T^s} + \|v\|_{X_T^s}) T \\ &\leq \frac{3\alpha}{4} C_s 2M \|u - v\|_{X_T^s} T = \frac{3\alpha}{2} C_s M \|u - v\|_{X_T^s} T. \end{aligned}$$

Fixado $T_2 = \frac{2}{3\alpha C_s M}$, então para todo $T < T_2$, tem-se que

$$\|Ju - Jv\|_{X_T^s} \leq \frac{3\alpha}{2} C_s M \frac{T}{T_2} \|u - v\|_{X_T^s} = q_T \|u - v\|_{X_T^s},$$

onde $q_T = \frac{T}{T_2} \in [0, 1)$.

Portanto, considera-se $0 < T < \min\{T_1, T_2\} = \frac{2}{3\alpha C_s M} = \frac{1}{3\alpha C_s \|\eta_0\|_s}$, logo escolhe-se $T = \frac{1}{6\alpha C_s \|\eta_0\|_s}$. Assim, $J : \Lambda \rightarrow \Lambda$ está bem definida e é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma única função $\eta \in \Lambda$ e portanto, $\eta \in C([-T, T], H^s)$, com $s \geq 0$, solução do problema integral (4.12) e conseqüentemente, uma solução forte do problema original, segundo [20], página 125. Observa-se que a unicidade fornecida pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach só é válida em Λ .

Para finalizar a demonstração do item (i) da Definição 4.1.1, desde que $F(\eta(\cdot, t)) = -i\varphi_j(D_x)\eta(\cdot, t) + \frac{3i\alpha}{4}\varphi_j(D_x)\eta^2(\cdot, t)$ tem-se que

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\eta(\cdot, t+h) - \eta(\cdot, t)}{h} - F(\eta(\cdot, t)) \right\|_s = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(t+h)\eta_0 - S(t)\eta_0}{h} + \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t+h-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' \right. \\ &\quad \left. - \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' + i\varphi_j(D_x)\eta(\cdot, t) - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x)\eta^2(\cdot, t) \right\|_s \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(t+h)\eta_0 - S(t)\eta_0}{h} + \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(h)S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h} \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' + i\varphi_j(D_x)\eta(\cdot, t) - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x)\eta^2(\cdot, t) \right\|_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(t+h)\eta_0 - S(t)\eta_0}{h} + \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_0^t (S(h) - I) S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' \right. \\
&+ \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h) S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' + \mathbf{i} \varphi_j(D_x) \eta(\cdot, t) \\
&\left. - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t) \right\|_s \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(h) - I}{h} S(t)\eta_0 + \frac{3i\alpha}{4} \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' \right. \\
&+ \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h) S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' + \mathbf{i} \varphi_j(D_x) \eta(\cdot, t) \\
&\left. - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t) \right\|_s \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(h) - I}{h} \left(S(t)\eta_0 + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' \right) \right. \\
&+ \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h+t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' + \mathbf{i} \varphi_j(D_x) \eta(\cdot, t) \\
&\left. - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t) \right\|_s \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(h) - I}{h} \eta(\cdot, t) + \mathbf{i} \varphi_j(D_x) \eta(\cdot, t) \right. \\
&\left. + \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h+t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t) \right\|_s.
\end{aligned}$$

Nota-se, pela teoria de semigrupos, pela Definição 2.2.4 e pelo Teorema 2.2.5, que

$$\frac{S(h) - I}{h} \eta(\cdot, t) \xrightarrow{h \rightarrow 0} A_1 \eta(\cdot, t) = -\mathbf{i} \varphi_j(D_x) \eta(\cdot, t),$$

onde A_1 é o gerador do grupo $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Além disso, pelo Teorema do Valor Médio, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h+t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t) \right\|_s \\
&= \left\| \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [S(h+t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') - \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t)] dt' \right\|_s \\
&\leq \frac{3\alpha}{4} \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|S(h+t-t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') - \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t)\|_s dt' \right|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{3\alpha}{4} \left| \frac{h}{h} \left\| S(h - \theta_h h) \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t + \theta_h h) - \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t) \right\|_s \right|,$$

onde $\theta_h \in [0, 1]$. Logo,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h + t - t') \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t') dt' - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t) \right\|_s \\ & \leq \frac{3\alpha}{4} \left\| S(h - \theta_h h) \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t + \theta_h h) - \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t) \right\|_s \\ & \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{3\alpha}{4} \left\| S(0) \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t) - \varphi_j(D_x) \eta^2(\cdot, t) \right\|_s = 0, \end{aligned}$$

pois $S(0) = I$. Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\eta(t+h) - \eta(t)}{h} - F(\eta(t)) \right\|_s = 0,$$

para $s \geq 0$.

Agora será mostrado o item (ii) da Definição 4.1.1, isto é, que o problema (4.10) tem no máximo uma solução no intervalo $[-T, T]$. Para isso, consideram-se $\eta_i \in C([-T_i, T_i], H^s)$, para $s \geq 0$, com seus respectivos dados iniciais η_0^i , $i = 1, 2$. Logo,

$$\eta_i(x, t) = S(t) \eta_0^i + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) \eta_i^2(x, t') dt'.$$

Assim, pela desigualdade (4.14), no intervalo $[-\tilde{T}, \tilde{T}]$, onde $\tilde{T} = \min\{T_1, T_2\}$, existe uma constante $C_s > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \|\eta_1(\cdot, t) - \eta_2(\cdot, t)\|_s \leq \\ & \leq \|S(t) (\eta_0^1 - \eta_0^2)\|_s + \frac{3\alpha}{4} \left\| \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) (\eta_1^2(\cdot, t') - \eta_2^2(\cdot, t')) dt' \right\|_s \\ & \leq \|\eta_0^1 - \eta_0^2\|_s + \frac{3\alpha}{4} C_s \left| \int_0^t \|\eta_1(\cdot, t') - \eta_2(\cdot, t')\|_s \|\eta_1(\cdot, t') + \eta_2(\cdot, t')\|_s dt' \right| \\ & \leq \|\eta_0^1 - \eta_0^2\|_s + \frac{3\alpha}{4} C_s \left| \int_0^t \|\eta_1(\cdot, t') - \eta_2(\cdot, t')\|_s \left(2\tilde{M} + \|\eta_0^1\|_s + \|\eta_0^2\|_s \right) dt' \right|, \end{aligned}$$

onde $\tilde{M} = \max \left\{ \|\eta_1(\cdot, t) - \eta_0^1\|_{X_s^{\tilde{T}}}, \|\eta_2(\cdot, t) - \eta_0^2\|_{X_s^{\tilde{T}}} \right\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} & \|\eta_1(\cdot, t) - \eta_2(\cdot, t)\|_s \leq \\ & \leq \|\eta_0^1 - \eta_0^2\|_s + \beta \left| \int_0^t \|\eta_1(\cdot, t') - \eta_2(\cdot, t')\|_s dt' \right|, \end{aligned}$$

onde $\beta = \frac{3\alpha}{4}C_s \left(2\tilde{M} + \|\eta_0^1\|_s + \|\eta_0^2\|_s \right)$. Pela desigualdade de Gronwall, Teorema 2.1.10, segue que

$$\begin{aligned} \|\eta_1(\cdot, t) - \eta_2(\cdot, t)\|_s & \leq \|\eta_0^1 - \eta_0^2\|_s \exp \left(\beta \left| \int_0^t dt' \right| \right) \\ & = \|\eta_0^1 - \eta_0^2\|_s \exp(\beta |t|). \end{aligned}$$

Em particular, se $\eta_0^1 = \eta_0^2$ e ambas as soluções estão definidas em $[-T, T]$, então $\eta_1 = \eta_2$. Portanto, a solução do problema (4.10) é única em $C([-T, T], H^s)$, para $s \geq 0$.

Finalmente, para mostrar o item (iii) da Definição 4.1.1, considera-se $(\eta_n^0)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^s$ tal que $\eta_n^0 \rightarrow \eta_0^*$ em H^s e $\eta^* \in C([-T^*, T^*], H^s)$ é solução com a condição inicial η_0^* , onde $T^* > 0$. Seja $\eta_n \in C((-T_n, T_n), H^s)$ a solução com condição inicial η_0^n e $\overline{T}_n = \min \{T_n, T^*\}$, $n \in \mathbb{N}$, onde $T_n > 0$ é tal que $(-T_n, T_n)$ é o maior intervalo simétrico onde a solução η_n está definida.

Então para $t \in (-\overline{T}_n, \overline{T}_n)$ segue que da desigualdade (4.14) que existe uma constante $C_s > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \|\eta_n(\cdot, t) - \eta^*(\cdot, t)\|_s \leq \|S(t)\eta_0^n - S(t)\eta_0^*\|_s + \\ & + \frac{3\alpha}{4}C_s \left| \int_0^t \|\eta_n(\cdot, t') - \eta^*(\cdot, t')\|_s \|\eta_n(\cdot, t') + \eta^*(\cdot, t')\|_s dt' \right| \\ & \leq \|S(t)(\eta_0^n - \eta_0^*)\|_s + \\ & + \frac{3\alpha}{4}C_s \left| \int_0^t \|\eta_n(\cdot, t') - \eta^*(\cdot, t')\|_s (\|\eta_n(\cdot, t') - \eta^*(\cdot, t')\|_s + 2\|\eta^*(\cdot, t')\|_s) dt' \right|. \end{aligned}$$

Como $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um grupo unitário e considerando $M^* = \sup_{t \in [-T^*, T^*]} \|\eta^*(\cdot, t)\|_s$,

$C_0 = \frac{3\alpha}{2}C_s M^*$ e $C_1 = \frac{3\alpha}{4}C_s$ então,

$$\begin{aligned} & \|\eta_n(\cdot, t) - \eta^*(\cdot, t)\|_s \leq \\ & \leq \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s + \left| \int_0^t \left(C_0 \|\eta_n(\cdot, t') - \eta^*(\cdot, t')\|_s + C_1 \|\eta_n(\cdot, t') - \eta^*(\cdot, t')\|_s^2 \right) dt' \right|. \end{aligned}$$

Define-se

$$\psi_n(t) = \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s + \left| \int_0^t \left(C_0 \|\eta_n(\cdot, t') - \eta^*(\cdot, t')\|_s + C_1 \|\eta_n(\cdot, t') - \eta^*(\cdot, t')\|_s^2 \right) dt' \right|.$$

Derivando $\psi_n(t)$ em relação a t segue que para $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} \psi_n'(t) &= C_0 \|\eta_n(\cdot, t) - \eta^*(\cdot, t)\|_s + C_1 \|\eta_n(\cdot, t) - \eta^*(\cdot, t)\|_s^2 \\ &\leq C_0 \psi_n(t) + C_1 \psi_n^2(t) \end{aligned}$$

e $\psi_n(0) = \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s$, logo $\frac{C_0 |\psi_n'(t)|}{C_0 \psi_n(t) + C_1 \psi_n^2(t)} \leq C_0$. Integrando de zero a t obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{C_0 \psi_n'(\tau)}{C_0 \psi_n(\tau) + C_1 \psi_n^2(\tau)} d\tau &\leq C_0 |t| \\ \int_0^t \frac{C_0 + C_1 \psi_n(\tau)}{C_0 \psi_n(\tau)} \frac{C_0^2 \psi_n'(\tau)}{(C_0 + C_1 \psi_n(\tau))^2} d\tau &\leq C_0 |t| \\ \int_0^t \frac{1}{\frac{C_0 \psi_n(\tau)}{C_0 + C_1 \psi_n(\tau)}} \frac{C_0^2 \psi_n'(\tau)}{(C_0 + C_1 \psi_n(\tau))^2} d\tau &\leq C_0 |t| \\ \ln \left(\frac{C_0 \psi_n(t)}{C_0 + C_1 \psi_n(t)} \right) - \ln \left(\frac{C_0 \psi_n(0)}{C_0 + C_1 \psi_n(0)} \right) &\leq C_0 |t| \\ \ln \left(\frac{C_0 \psi_n(t)}{C_0 + C_1 \psi_n(t)} \frac{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}{C_0 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s} \right) &\leq C_0 |t| \\ \psi_n(t) \frac{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}{(C_0 + C_1 \psi_n(t)) \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s} &\leq e^{C_0 |t|} \\ \psi_n(t) &\leq (C_0 + C_1 \psi_n(t)) \frac{\|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s} e^{C_0 |t|} \\ \psi_n(t) \left[1 - \frac{C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s e^{C_0 |t|}}{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s} \right] &\leq \frac{C_0 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s} e^{C_0 |t|} \\ \psi_n(t) \left[\frac{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s (1 - e^{C_0 |t|})}{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s} \right] &\leq \frac{C_0 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s e^{C_0 |t|}}{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}. \end{aligned}$$

Disto segue que,

$$\|\eta_n(\cdot, t) - \eta^*(\cdot, t)\|_s \leq \psi_n(t) \leq \frac{C_0 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s e^{C_0 |t|}}{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s (1 - e^{C_0 |t|})}. \quad (4.16)$$

Para que a desigualdade (4.16) seja válida deve-se ter

$$C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s (1 - e^{C_0|t|}) > 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} 1 - e^{C_0|t|} &> -\frac{C_0}{C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}, \\ 1 + \frac{C_0}{C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s} &> e^{C_0|t|}, \\ \ln\left(\frac{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}{C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}\right) &> C_0 |t|, \\ |t| &< \frac{1}{C_0} \ln\left(\frac{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}{C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}\right). \end{aligned}$$

Assim, a desigualdade (4.16) vale para todo $t \in (-\overline{T_n}, \overline{T_n}) \cap (-T_n^*, T_n^*)$, onde

$$T_n^* = \frac{1}{C_0} \ln\left(\frac{C_0 + C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}{C_1 \|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s}\right).$$

Desde que $\|\eta_0^n - \eta_0^*\|_s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e escolhe-se n suficientemente grande, então $T_n^* > T^*$, e assim, a desigualdade (4.16) vale para todo $t \in (-\overline{T_n}, \overline{T_n})$. Além disso, se $T_n \leq T^*$, logo $\overline{T_n} = T_n$, e

$$\|\eta_n(\cdot, t)\|_s \leq \|\eta_n(\cdot, t) - \eta^*(\cdot, t)\|_s + \|\eta^*(\cdot, t)\|_s, \forall t \in (-T_n, T_n).$$

Portanto, $\|\eta_n(\cdot, t)\|_s$ é limitado em $(-T_n, T_n)$, o que contradiz a maximalidade de T_n . Logo, $T_n > T^*$ para n suficientemente grande e a estimativa (4.16) é válida $\forall t \in [-T^*, T^*]$ e ainda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\eta_n - \eta^*\|_{X_{T^*}^s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [-T^*, T^*]} \|\eta_n(\cdot, t) - \eta^*(\cdot, t)\|_s = 0.$$

Portanto, a aplicação $\eta_0 \mapsto \eta$ é contínua. Da Definição 4.1.1, segue que o problema (4.10) é localmente bem posto para $s \geq 0$. ■

4.2 Boa colocação global

Um problema de Cauchy é globalmente bem posto se a Definição 4.1.1 é satisfeita para todo $T > 0$. Para garantir existência global, é suficiente combinar o Princípio da Extensão com algumas estimativas globais a priori para a solução na norma H^s . Entende-se por Princípio da Extensão o fato de que a solução da equação permaneça limitada para todo $T > 0$.

Para garantir a boa colocação global será necessário primeiro, demonstrar alguns resultados. Para isso, considera-se o problema de valor inicial dado por:

$$\begin{cases} \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x), \end{cases}$$

ele pode ser escrito como

$$\begin{cases} \eta_t(x, t) = -i\varphi_j(D_x) \left(\eta - \frac{3}{4}\alpha\eta^2\right)(x, t) = G\eta(x, t), \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x), \end{cases} \quad (4.17)$$

onde $\widehat{\varphi_j(D_x)\eta}(k, t) \equiv \varphi_j(k)\widehat{\eta}(k, t)$, para $j = 1, 2$, com $\varphi_j(k)$ definido na expressão (3.13).

Lema 4.2.1. *Considera-se a norma $\|f\|_1 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} A(k) |\widehat{f}(k)|^2 dk \right]^{\frac{1}{2}}$ em que $A(k) = \overline{A}(k)$ se $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ e $A(k) = \overline{\overline{A}}(k)$ se $\mathcal{L} = \mathcal{T}$. Então $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_1$ são normas equivalentes.*

Demonstração: De fato, se $A(k) = \overline{A}(k) = 1 + b|k| + ak^2$, escolhe-se C_2 tal que $0 < C_2 \leq \min\{1, a\}$, então

$$\begin{aligned} C_2(1 + k^2) &= C_2 + C_2k^2 \leq 1 + ak^2 \\ &\leq 1 + b|k| + ak^2 = \overline{A}(k). \end{aligned}$$

Logo $C_2\|f\|_1 \leq \|f\|_1$.

Agora, considera-se C_1 tal que $C_1 > \max\{a + b, 1 + b\}$, de tal forma que $b^2 \leq 4(C_1 - a)(C_1 - 1)$. Assim,

$$\begin{aligned} C_1(1 + k^2) - \overline{A}(k) &= (C_1 - a)k^2 - b|k| + C_1 - 1 \\ &= \left(\sqrt{C_1 - a}|k| - \frac{b}{2\sqrt{C_1 - a}} \right)^2 - \frac{b^2}{4(C_1 - a)} + C_1 - 1 \geq 0, \end{aligned}$$

pois $\left(\sqrt{C_1 - a}|k| - \frac{b}{2\sqrt{C_1 - a}} \right)^2 \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$ e como $b^2 \leq 4(C_1 - a)(C_1 - 1)$, segue que $-\frac{b^2}{4(C_1 - a)} + C_1 - 1 \geq 0$. Logo, $\overline{A}(k) \leq C_1(1 + k^2)$ e portanto, $\|f\|_1 \leq C_1\|f\|_1$.

De maneira análoga, se $A(k) = \overline{\overline{A}}(k) = 1 + bk \coth(hk) + ak^2$, como $|x| \leq x \coth(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, então $\overline{A}(k) \leq \overline{\overline{A}}(k)$, assim basta tomar as mesmas condições para C_2 e conclui-se que

$$C_2(1 + k^2) \leq \overline{A}(k) \leq \overline{\overline{A}}(k).$$

Portanto, $C_2 \|f\|_1 \leq \|f\|_1$.

Além disso,

$$\begin{aligned}\bar{A}(k) &= 1 + \frac{b}{h} hk \coth hk + ak^2 \\ &\geq 1 + \frac{b}{h} |hk| + ak^2 \\ &= 1 + b|k| + ak^2.\end{aligned}$$

Considera-se C_1 tal que $C_1 > \max\{a+b, 1+b\}$ de tal forma que $b^2 \leq 4(C_1 - a)(C_1 - 1)$. Portanto,

$$\begin{aligned}C_1(1+k^2) - \bar{A}(k) &\leq (C_1 - a)k^2 - b|k| + C_1 - 1 \\ &= \left(\sqrt{C_1 - a}|k| - \frac{b}{2\sqrt{C_1 - a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4(C_1 - a)} + C_1 - 1.\end{aligned}$$

Nota-se que $\left(\sqrt{C_1 - a}|k| - \frac{b}{2\sqrt{C_1 - a}}\right)^2 \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$ e como $b^2 \leq 4(C_1 - a)(C_1 - 1)$, então $-\frac{b^2}{4(C_1 - a)} + C_1 - 1 \geq 0$. Logo, $C_1(1+k^2) - \bar{A}(k) \geq 0$, isto é, $\bar{A}(k) \leq C_1(1+k^2)$ e portanto, $\|f\|_1 \leq C_1 \|f\|_1$. ■

Observação 4.2.2. Observe que pela demonstração, não é necessário a condição que $b < 2\sqrt{a}$ no lema acima.

Lema 4.2.3. *Se η satisfaz o problema de Cauchy (4.17) no sentido das distribuições e $\eta \in C([-T, T], H^s)$ com $s > 1$, então para todo $t \in [-T, T]$ tem-se que*

$$\|\eta(\cdot, t)\|_1 = \|\eta_0\|_1.$$

Demonstração: Pela teoria de semigrupos, como η satisfaz o problema de Cauchy (4.17) no sentido das distribuições e $\eta \in C([-T, T], H^s)$, pelo lema 4.1.3 e do fato que $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um grupo unitário, segue que

$$\eta_t = -\mathbf{i}\varphi_j(D_x) \left(\eta - \frac{3}{4}\alpha\eta^2 \right) \in C([-T, T], H^s).$$

Portanto, tem-se que $\eta \in C^1([-T, T], H^s)$. Considera-se a sequência

$$(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^1([-T, T], H^\infty),$$

convergindo para a solução $\eta \in C^1([-T, T], H^s)$. Define-se

$$F : C^1([-T, T], H^s) \rightarrow C([-T, T], H^{s-2})$$

tal que $F(v) = v_t + v_x - \frac{3}{2}\alpha v v_x - b\mathcal{L}[v]_{xt} - av_{xxt}$. A função F é contínua, pois é uma soma de funções contínuas, logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\eta_n) = F(\eta) = 0, \quad (4.18)$$

em $C([-T, T], H^{s-2})$.

Se $s > 1$, então $s - 2 > -1$, logo $H^s \hookrightarrow H^1$ e $H^{s-2} \hookrightarrow H^{-1}$, portanto, $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_s$ e $\|\cdot\|_{-1} \leq \|\cdot\|_{s-2}$. Usando o parêntese de dualidade definido em 2.1.8, e do limite (4.18), tem-se que

$$|\langle \eta_n, F(\eta_n) \rangle| \leq \|\eta_n\|_1 \|F(\eta_n)\|_{-1} \leq \|\eta_n\|_s \|F(\eta_n)\|_{s-2} \rightarrow 0, \quad (4.19)$$

quando $n \rightarrow \infty$ em $C([-T, T], H^{s-2})$.

Já que todo η_n é suave com relação a x e usando a identidade de Parseval, segue que

$$\begin{aligned} \langle \eta_n, \partial_x \eta_n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\eta}_n(k) \overline{\widehat{\partial_x \eta_n}(k)} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta_n(x) \partial_x \eta_n(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_x (\eta_n^2(x))}{2} dx = 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga, $\langle \eta_n, \partial_x (\eta_n)^2 \rangle = 0$. Assim, calculando a parte real, denotada por \Re , de $\langle \eta_n, F(\eta_n) \rangle$, tem-se que

$$\begin{aligned} 2\Re \langle \eta_n, F(\eta_n) \rangle &= 2\Re \langle \eta_n, \partial_t \eta_n - b\mathcal{L}[\partial_{xt} \eta_n] - a\partial_{xxt} \eta_n \rangle \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \Re \left(\widehat{\eta}_n(k) A(k) \overline{\widehat{\partial_t \eta_n}(k)} \right) dk \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \Re \left(\widehat{\eta}_n(k) \overline{\widehat{\partial_t \eta_n}(k)} \right) dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \partial_t |\widehat{\eta}_n(k)|^2 dk \\ &= \frac{d}{dt} \|\eta_n\|_1^2. \end{aligned}$$

Integrando de zero a t ,

$$2\Re \left| \int_0^t \langle \eta_n(t'), F(\eta_n(t')) \rangle dt' \right| = \|\eta_n(\cdot, t)\|_1^2 - \|\eta_n(\cdot, 0)\|_1^2, \quad (4.20)$$

para cada $t \in [-T, T]$ e fazendo o limite para $n \rightarrow \infty$, do limite (4.19) e da igualdade (4.20), segue que

$$\|\eta_n(\cdot, t)\|_1^2 - \|\eta_n(\cdot, 0)\|_1^2 \rightarrow \|\eta(\cdot, t)\|_1^2 - \|\eta_0\|_1^2 = 0.$$

Isto é,

$$\|\eta(\cdot, t)\|_1 = \|\eta_0\|_1.$$

■

Lema 4.2.4. *Se $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ ou $\mathcal{L} = \mathcal{T}$, então $\int_{-\infty}^{\infty} f_x \mathcal{L}[f]_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_x \mathcal{L}[f] dx$, desde que as integrais façam sentido.*

Demonstração: Segundo [7] esse lema é válido para $\mathcal{L} = \mathcal{T}$, nesse caso será provado também para $\mathcal{L} = \mathcal{H}$. Inicialmente, tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[f] g dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[g] f dx. \quad (4.21)$$

De fato, se $\mathcal{L} = \mathcal{H}$, então $\mathcal{H}[f](x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-y} f(y) dy$, disso segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}[f] g dx &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-y} f(y) g(x) dy dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y-x} g(x) f(y) dx dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}[g] f dx. \end{aligned}$$

Se $\mathcal{L} = \mathcal{T}$, então $\mathcal{T}[f](x) = -\frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi(x-y)}{2h}\right) f(y) dy$, logo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}[f] g dx &= -\frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi(x-y)}{2h}\right) f(y) g(x) dy dx \\ &= \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2h} \coth\left(\frac{\pi(y-x)}{2h}\right) g(x) f(y) dx dy, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}[f]g dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{T}[g]f dx.$$

Dessa forma, da igualdade (4.21) e pelo Teorema 2.1.9 segue que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_x \mathcal{L}[f]_t dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}[f]_x f_t dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{tx} \mathcal{L}[f] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{xt} \mathcal{L}[f] dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_x \mathcal{L}[f] dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{xt} \mathcal{L}[f] dx + \int_{-\infty}^{\infty} f_x \mathcal{L}[f]_t dx \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} f_x \mathcal{L}[f]_t dx. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x \mathcal{L}[f]_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_x \mathcal{L}[f] dx. \quad \blacksquare$$

Agora, seguem os teoremas da boa colocação global, inicialmente, será provado para $s > 1$.

Teorema 4.2.5. *Sejam $s > 1$ e $\eta_0 \in H^s$, então o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s), \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0 \text{ em } H^s, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \in H^s, \end{cases}$$

é globalmente bem posto.

Em [10] encontra-se a demonstração para a equação das ondas longas intermediárias (ILW) que aparece o operador $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ por uma abordagem direta. É possível fazer uma demonstração análoga para a família de equações de Benjamin. Entretanto, a seguir será feita a demonstração pela teoria de semigrupos.

Demonstração: Para a demonstração pela teoria de semigrupos, a solução

local é dada por

$$\eta(x, t) = S(t)\eta_0(x) + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)\eta^2(x, t')dt',$$

para $t \in [-T, T]$, logo

$$\begin{aligned} \|\eta(\cdot, t)\|_s &\leq \|S(t)\eta_0\|_s + \frac{3\alpha}{4} \left| \int_0^t \|S(t-t')\varphi_j(D_x)\eta^2(\cdot, t')\|_s dt' \right| \\ &= \|\eta_0\|_s + \frac{3\alpha}{4} \left| \int_0^t \|\varphi_j(D_x)\eta^2(\cdot, t')\|_s dt' \right|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade (3.17), segue que

$$\begin{aligned} \|\varphi_j(D_x)\eta^2(\cdot, t)\|_s^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{\varphi_j(D_x)\eta^2}(k, t) \right|^2 dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \varphi_j(k)\widehat{\eta^2}(k, t) \right|^2 dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_j(k)|^2 (1+k^2)^s \left| \widehat{\eta^2}(k, t) \right|^2 dk \\ &\leq \frac{1}{(b+2\sqrt{a})^2} \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{\eta^2}(k, t) \right|^2 dk \\ &= \frac{1}{(b+2\sqrt{a})^2} \|\eta^2(\cdot, t)\|_s^2. \end{aligned}$$

Além disso, de [21], como $s > 1$, então existe uma constante $C_s > 0$ tal que $\|\eta^2(\cdot, t)\|_s \leq 2C_s \|\eta(\cdot, t)\|_s \|\eta(\cdot, t)\|_\infty$. Portanto,

$$\|\eta(\cdot, t)\|_s \leq \|\eta_0\|_s + \frac{3\alpha C_s}{2(b+2\sqrt{a})} \left| \int_0^t \|\eta(\cdot, t')\|_s \|\eta(\cdot, t')\|_\infty dt' \right|.$$

Pelo Lema 2.1.7, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|\eta(\cdot, t)\|_\infty \leq C \|\eta(\cdot, t)\|_1$, $\forall t \in I$, onde I é um intervalo não vazio. Como $s > 1$, então do Lema 4.2.3 e já que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_s$ são equivalentes, existe $D > 0$ tal que $\|\eta(\cdot, t)\|_1 \leq D \|\eta_0\|_1$, logo

$$\begin{aligned} \|\eta(\cdot, t)\|_s &\leq \\ &\leq \|\eta_0\|_s + \frac{3\alpha C_s}{2(b+2\sqrt{a})} \left| \int_0^t \|\eta(\cdot, t')\|_s \|\eta(\cdot, t')\|_\infty dt' \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\eta_0\|_s + \frac{3\alpha C_s C}{2(b+2\sqrt{a})} \left| \int_0^t \|\eta(\cdot, t')\|_s \|\eta(\cdot, t')\|_1 dt' \right| \\
&\leq \|\eta_0\|_s + \frac{3\alpha C_s C D \|\eta_0\|_1}{2(b+2\sqrt{a})} \left| \int_0^t \|\eta(\cdot, t')\|_s dt' \right| \\
&\leq \|\eta_0\|_s + C_0 \left| \int_0^t \|\eta(\cdot, t')\|_s dt' \right|,
\end{aligned}$$

onde $C_0 = \frac{3\alpha C_s C D \|\eta_0\|_1}{2(b+2\sqrt{a})}$.

Define-se

$$\Phi(t) = \|\eta_0\|_s + C_0 \left| \int_0^t \|\eta(\cdot, t')\|_s dt' \right|, \quad (4.22)$$

para todo $t \in [-T, T]$. Logo, $\|\eta(\cdot, t)\|_s \leq \Phi(t)$ e $\Phi(0) = \|\eta_0\|_s$. Derivando (4.22), pelo Teorema Fundamental do Cálculo, se $t \geq 0$, então

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= C_0 \|\eta(\cdot, t)\|_s \\
&\leq C_0 \Phi(t).
\end{aligned}$$

Se $t < 0$ então

$$\Phi'(t) = -C_0 \|\eta(\cdot, t)\|_s,$$

portanto,

$$\begin{aligned}
|\Phi'(t)| &= C_0 \|\eta(\cdot, t)\|_s \\
&\leq C_0 \Phi(t).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left| \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \right| = \left| \frac{d}{dt} \ln(\Phi(t)) \right| \leq C_0.$$

Integrando de zero a t segue que

$$\begin{aligned}
\ln(\Phi(t)) - \ln(\Phi(0)) &\leq C_0 |t|, \\
\ln\left(\frac{\Phi(t)}{\|\eta_0\|_s}\right) &\leq C_0 |t|, \\
\Phi(t) &\leq \|\eta_0\|_s e^{C_0 |t|}.
\end{aligned}$$

Como C_0 não depende de $t \in [-T, T]$, isto prova que $\|\eta(\cdot, t)\|_s$ é limitado para todo intervalo da forma $[-T, T]$, assim, pelo Princípio da Extensão de [16], a solução pode ser estendida em \mathbb{R} . ■

Pelo teorema anterior, a boa colocação global é garantida para $s > 1$. No entanto, é possível demonstrar que a boa colocação do problema de Cauchy também vale para $0 \leq s \leq 1$, com $s \neq \frac{1}{2}$ pela teoria de semigrupos, como

segue no próximo teorema.

Teorema 4.2.6. *Sejam $0 \leq s \leq 1$, com $s \neq \frac{1}{2}$ e $\eta_0 \in H^s$, então o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s), \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0 \text{ em } H^s, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \in H^s, \end{cases}$$

é globalmente bem posto.

Demonstração: Seja $\eta_0 \in H^s$. Fixe $T > 0$, então existe $N > 0$ tal que é possível definir v_0 por:

$$v_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|k| \geq N} e^{ikx} \hat{\eta}_0(k) dk,$$

tal que

$$\int_{|k| \geq N} (1 + |k|^2)^s |\hat{\eta}_0(k)|^2 dk \leq \frac{C^2}{T^2},$$

com $C = \frac{1}{6\alpha C_s}$, este C_s é a constante da demonstração do Teorema 4.1.5. Nota-se que existe $N > 0$ uma vez que $(1 + |k|^2)^{s/2} |\hat{\eta}_0(k)| \in L^2(\mathbb{R})$. Além disso, seja $w_0 = \eta_0 - v_0$, donde

$$w_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^N e^{ikx} \hat{\eta}_0(k) dk.$$

Seja $v \in C([- \tau_v, \tau_v], H^s)$ a solução local da equação

$$v_t + v_x - \frac{3}{2}\alpha vv_x - b\mathcal{L}[v]_{xt} - av_{xxt} = 0,$$

com dado inicial v_0 . Do Teorema 4.1.5, sabe-se que $\tau_v = \frac{1}{6\alpha C_s \|v_0\|_s}$, como

$$\|v_0\|_s^2 = \int_{|k| \geq N} (1 + |k|^2)^s |\hat{\eta}_0(k)|^2 dk \leq \frac{C^2}{T^2}, \text{ então}$$

$$\tau_v = \frac{1}{6\alpha C_s} \frac{1}{\|v_0\|_s} \geq \frac{1}{6\alpha C_s} \frac{T}{C} = T.$$

Portanto, v é a solução do PVI

$$\begin{cases} v_t + v_x - \frac{3}{2}\alpha vv_x - b\mathcal{L}[v]_{xt} - av_{xxt} = 0 \text{ em } H^s, \\ v(x, 0) = v_0(x) \in H^s \end{cases} \quad (4.23)$$

no intervalo $[-T, T]$, para $s \geq 0$.

Além disso, pelo Teorema 4.1.5, e supondo que $\eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0 \in H^s$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0 \text{ em } H^s, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \in H^s. \end{cases} \quad (4.24)$$

tem uma única solução $\eta \in C([- \tau_\eta, \tau_\eta], H^s)$. Portanto, segue que $w(x, t) \in C([-R, R], H^s)$, com $w = \eta - v$ e $R = \min\{T, \tau_\eta\}$, é solução do problema de valor inicial dado por:

$$\begin{cases} w_t - aw_{xxt} - b\mathcal{L}[w]_{xt} + w_x - \frac{3}{2}\alpha w w_x - \frac{3}{2}\alpha(vw)_x = 0 \text{ em } H^s, \\ w(x, 0) = w_0(x). \end{cases} \quad (4.25)$$

De fato,

$$\begin{aligned} & w_t - aw_{xxt} - b\mathcal{L}[w]_{xt} + w_x - \frac{3}{2}\alpha w w_x - \frac{3}{2}\alpha(vw)_x = \\ & \eta_t - v_t - a\eta_{xxt} + av_{xxt} - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} + b\mathcal{L}[v]_{xt} + \eta_x \\ & - v_x - \frac{3}{2}\alpha(\eta - v)(\eta - v)_x - \frac{3}{2}\alpha(\eta v - v^2)_x = \\ & \eta_t + \eta_x - a\eta_{xxt} - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - v_t - v_x + av_{xxt} \\ & + b\mathcal{L}[v]_{xt} - \frac{3}{2}\alpha(vv_x - \eta v_x - v\eta_x + \eta_x v + \eta v_x - 2vv_x) = \\ & \eta_t + \eta_x - a\eta_{xxt} - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - v_t - v_x + av_{xxt} + b\mathcal{L}[v]_{xt} + \frac{3}{2}\alpha vv_x = 0. \end{aligned}$$

Nota-se que $w_0 \in H^r$, para todo $r \in \mathbb{R}$, pois

$$\begin{aligned} \|w_0\|_r^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |k|^2)^r |\widehat{w_0}(k)|^2 dk \\ &= \int_{-N}^N (1 + |k|^2)^r |\widehat{\eta_0}(k)|^2 dk \\ &= \int_{-N}^N (1 + |k|^2)^{r-s} (1 + |k|^2)^s |\widehat{\eta_0}(k)|^2 dk. \end{aligned}$$

No entanto, $1 \leq 1 + |k|^2 \leq 1 + N^2$, logo se $r - s \geq 0$, então $1 \leq (1 + |k|^2)^{r-s} \leq (1 + N^2)^{r-s}$ e se $r - s \leq 0$, então $(1 + N^2)^{r-s} \leq (1 + |k|^2)^{r-s} \leq 1$, para todo k tal que $|k| \leq N$. Portanto, considera-se

$C_N = \max \left\{ 1, (1 + N^2)^{r-s} \right\}$, logo

$$\begin{aligned} \|w_0\|_r^2 &\leq C_N \int_{-N}^N (1 + |k|^2)^s |\widehat{\eta}_0(k)|^2 dk \\ &\leq C_N \|\eta_0\|_s^2 < \infty. \end{aligned}$$

Nesse caso, escolhe-se $w_0 \in H^1$.

Além disso, se no lema A.0.1 considera-se $\rho = 1$, então $0 \leq s \leq 1$, com $s \neq \frac{1}{2}$ e a equação:

$$w_t - aw_{xxt} - b\mathcal{L}[w]_{xt} + w_x - \frac{3}{2}\alpha ww_x - \frac{3}{2}\alpha(vw)_x = 0$$

tem uma única solução w tal que $w(\cdot, t)$ está em H^1 para $t \in [-\bar{R}, \bar{R}]$, para $\bar{R} = \min \{R, A\}$, uma vez que $\|v(\cdot, t)\|_s$ é limitada no intervalo $[-T, T]$ e $R = \min \{T, \tau_\eta\}$.

Para mostrar a boa colocação global, será garantida uma limitação para $w(\cdot, t)$ na norma em H^1 para $t \in [-T, T]$. Observa-se que $v(\cdot, t) \in H^s$, para $s \geq 0$, logo $v(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R})$ e assim, $\|v(\cdot, t)\|_{L^2}$ é finita para $t \in [-T, T]$.

Como o problema (4.25) está definido em $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq 0$, então está definido em $L^2(\mathbb{R})$, dessa forma é possível utilizar a identidade de Parseval, Teorema 2.1.9 e ainda, do Lema 4.2.4 tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x \mathcal{L}[f]_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_x \mathcal{L}[f] dx.$$

Agora, multiplica-se a equação do problema (4.25) por w :

$$ww_t - aww_{xxt} - bw\mathcal{L}[w]_{xt} + ww_x - \frac{3}{2}\alpha w^2 w_x - \frac{3}{2}\alpha w(vw)_x = 0, \quad (4.26)$$

$\forall t \in [-\bar{R}, \bar{R}]$. Integrando a equação (4.26) em x e aplicando a identidade de Parseval:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (w^2)_t dx - a \int_{-\infty}^{\infty} ww_{txx} dx - b \int_{-\infty}^{\infty} w\mathcal{L}[w]_{tx} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (w^2)_x dx \\ &- \frac{1}{2}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} (w^3)_x dx - \frac{3}{2}\alpha \int_{-\infty}^{\infty} w(vw)_x dx = 0. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx + a \int_{-\infty}^{\infty} w_x w_{xt} dx + b \int_{-\infty}^{\infty} w_x \mathcal{L}[w]_t dx + \frac{3}{2} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} v w w_x dx &= 0, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx + \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (w_x)^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w_x \mathcal{L}[w] + \frac{3}{2} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} v w w_x dx &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} (w^2 + a w_x^2 + b w_x \mathcal{L}[w]) dx + \frac{3}{2} \alpha \int_{-\infty}^{\infty} v w w_x dx = 0, \quad (4.27)$$

$\forall t \in [-\bar{R}, \bar{R}]$. Como $w(\cdot, t) \in H^1$, $\forall t \in [-\bar{R}, \bar{R}]$, então $\frac{w^2(\cdot, t)}{2} \in H^1$ e $\left\| \left(\frac{w^2(\cdot, t)}{2} \right)_x \right\|_{L^2} \leq \left\| \frac{w^2(\cdot, t)}{2} \right\|_1$ e utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, Teorema 2.1.2, tem-se que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} v w w_x(\cdot, t) dx \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} v(\cdot, t) \left(\frac{w^2(\cdot, t)}{2} \right)_x dx \right| \\ &\leq \|v(\cdot, t)\|_{L^2} \left\| \left(\frac{w^2(\cdot, t)}{2} \right)_x \right\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|v(\cdot, t)\|_{L^2} \|w^2(\cdot, t)\|_1 \\ &\leq \frac{C_2}{2} \|v(\cdot, t)\|_{L^2} \|w(\cdot, t)\|_1^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

com $C_2 > 0$, $\forall t \in [-\bar{R}, \bar{R}]$. Por outro lado,

$$\|w(\cdot, t)\|_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (w^2(x, t) + a w_x^2(x, t) + b w_x(x, t) \mathcal{L}[w(x, t)]) dx,$$

$\forall t \in [-\bar{R}, \bar{R}]$. De fato, utilizando a identidade de Parseval:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} (w^2(x, t) + a w_x^2(x, t) + b w_x(x, t) \mathcal{L}[w(x, t)]) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t) dx + a \int_{-\infty}^{\infty} w_x^2(x, t) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} w_x(x, t) \mathcal{L}[w(x, t)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{w}(k, t)|^2 dk + a \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{w}_x(k, t)|^2 dk + b \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{w}_x(k, t) \mathcal{L}[\widehat{w(k, t)}] dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{w}(k, t)|^2 dk + a \int_{-\infty}^{\infty} k^2 |\widehat{w}(k, t)|^2 dk + b \int_{-\infty}^{\infty} ik \widehat{w}(k, t) \mathcal{L}[\widehat{w(k, t)}] dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + b|k| + ak^2) |\hat{w}(k, t)|^2 dk, \text{ se } \mathcal{L} = \mathcal{H} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (1 + bk \coth(hk) + ak^2) |\hat{w}(k, t)|^2 dk, \text{ se } \mathcal{L} = \mathcal{T} \end{cases} \\
&= \|w(\cdot, t)\|_1^2, \tag{4.29}
\end{aligned}$$

$\forall t \in [-\bar{R}, \bar{R}]$. Das equações (4.27), (4.28) e (4.29) conclui-se que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (\|w(\cdot, t)\|_1^2) &= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (w^2(x, t) + aw_x^2(x, t) + bw_x(x, t)\mathcal{L}[w(x, t)]) dx \right) \\
&= -3\alpha \int_{-\infty}^{\infty} vw w_x(x, t) dx \\
&\leq 3\alpha K \|v(\cdot, t)\|_{L^2} \|w(\cdot, t)\|_1^2,
\end{aligned}$$

$\forall t \in [-\bar{R}, \bar{R}]$. Pelo lema 4.2.1 as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\|\cdot\|_1$ são equivalentes, então existe uma constante K_1 tal que

$$\frac{d}{dt} (\|\|w(\cdot, t)\|_1^2) \leq K_1 \|v(\cdot, t)\|_{L^2} \|\|w(\cdot, t)\|_1^2,$$

$\forall t \in [-\bar{R}, \bar{R}]$. Da desigualdade de Gronwall segue que

$$\|\|w(\cdot, t)\|_1^2 \leq K_1 \|w_0\|_1^2 \exp \left(\int_0^t \|v(\cdot, t')\|_{L^2} dt' \right),$$

$\forall t \in [-\bar{R}, \bar{R}]$. Novamente, como as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\|\cdot\|_1$ são equivalentes, existe $\bar{C} > 0$ tal que

$$\|w(\cdot, t)\|_1 \leq \bar{C} \|w_0\|_1 \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^t \|v(\cdot, t')\|_{L^2} dt' \right). \tag{4.30}$$

Nota-se que o lado direito da desigualdade (4.30) é finito $\forall t \in [-T, T]$, pois $\|v(\cdot, t')\|_{L^2}$ é finita $\forall t' \in [-T, T]$ e \bar{C} não depende de t . Além disso, a desigualdade (4.30) é válida para qualquer intervalo contido em $[-T, T]$ onde a solução local para o dado $w_0 \in H^s$ esteja bem definida, assim como é válida com a mesma constante \bar{C} para qualquer outro dado inicial em H^s e sua respectiva solução. Pelo Princípio da Extensão, [16] página 269, a solução w pode ser estendida a todo $[-T, T]$.

Por fim, como $\eta = v + w$ e para qualquer $T > 0$, tanto w quanto v estão bem definidas em todo $[-T, T]$, a solução η do problema localmente bem posto (4.24), está bem definida em $[-T, T]$, para todo $T > 0$. Conclui-se que

a solução η pode ser estendida em \mathbb{R} , desde que $0 \leq s \leq 1$, com $s \neq \frac{1}{2}$. ■

Dessa forma, dos Teoremas 4.2.5 e 4.2.6 tem-se o próximo teorema.

Teorema 4.2.7. *Sejam $s \geq 0$, com $s \neq \frac{1}{2}$ e $\eta_0 \in H^s$, então o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s), \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0 \text{ em } H^s, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \in H^s, \end{cases}$$

é globalmente bem posto.

Capítulo 5

O operador da Transformada que aparece na família de equações de Benjamin

Como visto nas seções anteriores, na família de equações de Benjamin existe um termo com uma transformada \mathcal{L} , onde $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ com $\widehat{\mathcal{H}}(k) = i \operatorname{sgn}(k)$ (Transformada de Hilbert) quando a profundidade da camada inferior é infinita ou $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ com $\widehat{\mathcal{T}}(k) = i \coth(hk)$, $h > 0$ (Transformada de Hilbert na faixa) quando a profundidade da camada inferior é finita, com profundidade $h > 0$. Neste capítulo será feita a dedução do operador da Transformada de Hilbert na faixa no caso periódico. Esse operador aparece na redução das equações de Euler que descrevem a evolução de uma onda interna numa interface entre duas camadas de fluidos invíscidos, imiscíveis, irrotacionais e incompressíveis de densidades diferentes. Como o operador será dado por uma convolução com a cotangente hiperbólica e no domínio periódico o núcleo será representado por uma série que não converge pontualmente, então computacionalmente se faz necessário obter o núcleo desse operador do caso periódico a partir das funções especiais Elípticas de Jacobi, Zeta de Jacobi e Integrais Elípticas completas do Primeiro Tipo, representadas por sua expansão em q -séries.

Além disso, será feita uma comparação entre o núcleo periódico da Transformada de Hilbert na faixa com o núcleo não periódico no domínio limitado $[-L, L]$, além de analisar esse operador a respeito da Série de Fourier truncada do caso periódico. Também, será implementado o operador tanto da Transformada de Hilbert na faixa quanto da Transformada de Hilbert.

5.1 Derivação no domínio da frequência do operador da Transformada de Hilbert na faixa - caso periódico

Na redução das equações de Euler para o problema de duas camadas de fluidos invíscidos, imiscíveis, irrotacionais e incompressíveis de densidades diferentes a informação da camada inferior é embutida nas equações da camada superior através do termo da derivada da pressão em x , já que a pressão é a mesma na interface do fluido.

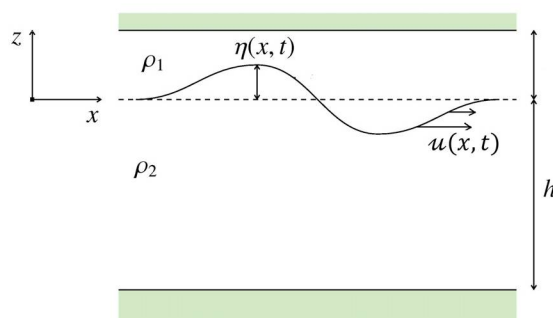


Figura 5.1: Configuração de duas camadas de fluidos limitados por uma tampa rígida e um fundo plano. Fonte: modificada a partir de [8].

Como resultado da redução são obtidos sistemas do tipo Boussinesq, especificamente tem-se o seguinte sistema bidirecional fracamente dispersivo e não linear, [3, 4, 7]:

$$\begin{cases} \eta_t - [(1 - \alpha\eta)u]_x = 0 \\ u_t + \alpha u u_x - \eta_x = \sqrt{\beta} \frac{\rho_2}{\rho_1} \mathcal{T}[u_{xx}], \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $\eta(t, x)$ está relacionada à perturbação adimensionalizada na interface e $u(t, x)$ à componente horizontal da velocidade da camada superior, como na Figura 5.1. Ambas as incógnitas são funções das variáveis temporal e espacial (na direção horizontal), t e x , respectivamente. As derivadas parciais são denotadas por subíndices; α e β são os parâmetros adimensionais positivos de não linearidade e dispersão, respectivamente. As densidades originais $\rho_1 < \rho_2$ das camadas superior e inferior foram mantidas no termo que envolve o operador não local de interesse \mathcal{T} .

Para encontrar o operador da Transformada de Hilbert na faixa, \mathcal{T} , pela

Lei de Bernoulli na interface, o cálculo da derivada da pressão envolve o potencial de velocidade da camada inferior. De tal forma que basta resolver um problema de Neumann na camada inferior em repouso, com profundidade h , para um potencial de velocidade ϕ nessa região fixada e com velocidade normal $g(x)$ que é uma aproximação da condição cinemática na interface original, respeitando a ordem da expansão assintótica em α e β que aparecem no sistema (5.1). Detalhes podem ser encontrados em [4, 22].

Dessa forma, considera-se a equação de Laplace com condição de Neumann dada por:

$$\begin{cases} \phi_{xx} + \phi_{zz} = 0, & -h < z < 0, \quad x \in \Pi[-L, L], \\ \phi(-L, z) = \phi(L, z), & \forall z \in [-h, 0], \\ \phi_z(x, 0) = g(x), & g \in C^1, \\ \phi_z(x, -h) = 0, \end{cases}$$

onde $\Pi[-L, L]$ indica que ϕ é $2L$ -periódica no argumento x .

O objetivo é encontrar uma expressão para $\phi_x(x, 0)$, veja Figura 5.2.

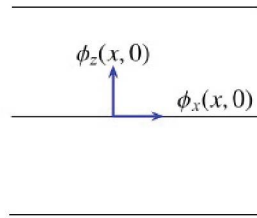


Figura 5.2: Problema do potencial na faixa com condição de Neumann para extrair a derivada tangencial na fronteira superior. Fonte: modificada a partir de [23].

Como o problema é linear, pode-se utilizar a Série de Fourier periódica. Para simplificar a notação, considera-se:

$$\bar{x} = \frac{\pi x}{L}, \quad \bar{x} \in \Pi[-\pi, \pi].$$

Assim, $x = \frac{L}{\pi}\bar{x}$, $\Phi(\bar{x}, z) = \phi(x, z)$ e o problema descrito acima fica:

$$\begin{cases} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \Phi_{\bar{x}\bar{x}} + \Phi_{zz} = 0, & -h < z < 0, \quad \bar{x} \in \Pi[-\pi, \pi], \\ \Phi(-\pi, z) = \Phi(\pi, z), & -h < z < 0, \\ \Phi_z(\bar{x}, 0) = G(\bar{x}) = g(x), & G \in C^1, \\ \Phi_z(\bar{x}, -h) = 0. \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Fourier na variável \bar{x} , segue que

$$\begin{cases} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 (\mathbf{i}k)^2 \hat{\Phi}(k, z) + \hat{\Phi}''(k, z) = 0 & k \in \mathbb{Z}, \\ \hat{\Phi}_z(k, 0) = \hat{G}(k), \\ \hat{\Phi}_z(k, -h) = 0, \end{cases}$$

logo

$$\begin{cases} \hat{\Phi}'' - k^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \hat{\Phi} = 0, & -h < z < 0, \\ \hat{\Phi}'(0) = \hat{G}, \\ \hat{\Phi}'(-h) = 0. \end{cases}$$

Para cada k tem-se um problema de valor de contorno, cuja equação característica é dada por $r^2 - \frac{k^2 \pi^2}{L^2} = 0$ com raízes $r_1 = \frac{k\pi}{L}$ e $r_2 = -\frac{k\pi}{L}$. Portanto, a solução geral da EDO tem a forma:

$$\hat{\Phi}(k, z) = c_1 \exp\left(\frac{k\pi}{L}z\right) + c_2 \exp\left(-\frac{k\pi}{L}z\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Derivando a expressão (5.2) em relação a z , tem-se

$$\hat{\Phi}_z(k, z) = c_1 \frac{k\pi}{L} \exp\left(\frac{k\pi}{L}z\right) + c_2 \left(-\frac{k\pi}{L}\right) \exp\left(-\frac{k\pi}{L}z\right),$$

logo,

$$\hat{\Phi}_z(k, 0) = (c_1 - c_2) \frac{k\pi}{L} = \hat{G}(k) \quad (5.3)$$

$$\hat{\Phi}_z(k, -h) = c_1 \frac{k\pi}{L} \exp\left(-\frac{k\pi h}{L}\right) + c_2 \left(-\frac{k\pi}{L}\right) \exp\left(\frac{k\pi h}{L}\right) = 0 \quad (5.4)$$

Da expressão (5.4), segue que $c_1 = c_2 \exp\left(\frac{2k\pi h}{L}\right)$ e substituindo na expressão (5.3), tem-se que $c_2 \left[\exp\left(\frac{2k\pi h}{L}\right) - 1\right] \frac{k\pi}{L} = \hat{G}(k)$.

Se $k \neq 0$, tem-se

$$c_2 = \frac{L}{k\pi} \frac{1}{\exp\left(\frac{2k\pi h}{L}\right) - 1} \hat{G}(k)$$

e

$$c_1 = \frac{L}{k\pi} \frac{\exp\left(\frac{2k\pi h}{L}\right)}{\exp\left(\frac{2k\pi h}{L}\right) - 1} \hat{G}(k).$$

Portanto,

$$\hat{\Phi}(k, z) = \left[\frac{L \exp\left(\frac{2k\pi h}{L}\right) \exp\left(\frac{k\pi z}{L}\right)}{k\pi \exp\left(\frac{2k\pi h}{L}\right) - 1} + \frac{L \exp\left(\frac{-k\pi z}{L}\right)}{k\pi \exp\left(\frac{2k\pi h}{L}\right) - 1} \right] \hat{G}(k).$$

Multiplicando e dividindo por $\exp\left(-\frac{k\pi h}{L}\right)$, tem-se a seguinte expressão para $\hat{\Phi}(k, z)$:

$$\left[\frac{\exp\left(\frac{k\pi h}{L} + \frac{k\pi z}{L}\right)}{\exp\left(\frac{k\pi h}{L}\right) - \exp\left(-\frac{k\pi h}{L}\right)} + \frac{\exp\left(-\frac{k\pi h}{L} - \frac{k\pi z}{L}\right)}{\exp\left(\frac{k\pi h}{L}\right) - \exp\left(-\frac{k\pi h}{L}\right)} \right] \frac{L}{k\pi} \hat{G}(k).$$

Utilizando as funções hiperbólicas $\sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$ e $\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$ segue que

$$\hat{\Phi}(k, z) = \frac{\cosh\left(\frac{k\pi(h+z)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi h}{L}\right)} \frac{L}{k\pi} \hat{G}(k).$$

Por outro lado, representando a Série de Fourier da função $\Phi(\bar{x}, z)$ por:

$$\Phi(\bar{x}, z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \hat{\Phi}(k, z) e^{\mathbf{i}k\bar{x}} + c$$

onde c é a constante referente a frequência nula, tem-se que

$$\Phi(\bar{x}, z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{L}{k\pi} \frac{\cosh\left(\frac{k\pi(h+z)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi h}{L}\right)} \hat{G}(k) e^{\mathbf{i}k\bar{x}} + c.$$

Além disso, representando $g(x) = G(\bar{x})$ por sua Série de Fourier no caso periódico com $x \in [-L, L]$ segue que

$$G(\bar{x}) = g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) \exp(\mathbf{i}k\bar{x}),$$

logo,

$$\hat{G}(k) = \hat{g}(k). \quad (5.5)$$

Conclui-se então que

$$\phi(x, z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{L}{k\pi} \frac{\cosh\left(\frac{k\pi(h+z)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi h}{L}\right)} \hat{g}(k) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right) + c$$

e a derivada em relação a x é dada por

$$\begin{aligned} \phi_x(x, z) &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{L}{k\pi} \frac{\cosh\left(\frac{k\pi(h+z)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi h}{L}\right)} \hat{g}(k) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right) \frac{\mathbf{i}k\pi}{L} \\ &= \mathbf{i} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\cosh\left(\frac{k\pi(h+z)}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi h}{L}\right)} \hat{g}(k) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Por fim, em $z = 0$, tem-se que

$$\phi_x(x, 0) = \mathbf{i} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \hat{g}(k) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right).$$

A derivação termo a termo pode ser feita porque a série dada por (5.6) é uniformemente convergente $\forall(x, z) \in [-L, L] \times [-h, 0]$. De fato: como $\cosh(x)$ é crescente para $x > 0$ e decrescente para $x < 0$ segue que:

$$\left| \frac{\cosh\left(\frac{k\pi}{L}(h+z)\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi h}{L}\right)} \right| \leq \left| \frac{\cosh\left(\frac{k\pi h}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{k\pi h}{L}\right)} \right| = \left| \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \right| \leq M,$$

para certo $M > 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Além disso, como g é de classe C^1 e $\left| e^{\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}} \right| = 1$, $\forall x \in [-L, L]$, segue, pelo teste M de Weierstrass, que a série converge uniformemente e absolutamente $\forall(x, z) \in [-L, L] \times [-h, 0]$.

Portanto, $\mathcal{T}[g](x) = \phi_x(x, 0)$ resulta em

$$\mathcal{T}[g](x) = \mathbf{i} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \hat{g}(k) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right).$$

Logo o operador no domínio físico é descrito pela convolução:

$$\mathcal{T}[u] = -\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \tilde{T}(x - \xi; h, L) u(\xi) d\xi, \quad (5.7)$$

com o núcleo \tilde{T} dado por

$$\tilde{T}(x; h, L) = \mathbf{i} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right), \quad (5.8)$$

onde a série deve ser interpretada no sentido das distribuições.

Observa-se que das expressões (5.7) e (5.8) o operador é dado por uma convolução com a cotangente hiperbólica e a série dada pela expressão (5.8) não converge pontualmente, portanto, computacionalmente se faz necessário obter o núcleo desse operador do caso periódico a partir das funções especiais Elípticas de Jacobi, Zeta de Jacobi e Integrais Elípticas completas do Primeiro Tipo, representadas por sua expansão em q -séries, isso porque a série dada em (5.8) deve ser interpretada no sentido das distribuições. Na próxima seção será trabalhado tais funções para reescrever o núcleo (5.8) a partir das mesmas.

5.1.1 Funções Especiais

É possível escrever o núcleo (5.8) usando funções elípticas segundo [9]. Para isso, define-se tais funções conforme [24, 25].

Define-se, inicialmente, o parâmetro m tal que $m = \text{sen}^2 \alpha = \mathbf{k}^2$, onde \mathbf{k} é o módulo e α é o ângulo modular. Nota-se que esse \mathbf{k} não é o mesmo que o k de frequência da equação (5.8).

Segundo [24] as funções Elípticas de Jacobi são dadas por:

$$\begin{aligned} x &= \text{sen } \phi = \text{sn } \nu, \\ \cos \phi &= \text{cn } \nu, \\ \sqrt{1 - m \text{sen}^2 \phi} &= \text{dn } \nu, \text{ o delta amplitude} \\ \phi &= \text{arcsen}(\text{sn } \nu) = \text{am } \nu, \text{ a amplitude} \\ \cot \phi &= \frac{\text{cn } \nu}{\text{sn } \nu} = \text{cs } \nu, \end{aligned}$$

As Integrais Elípticas do Primeiro Tipo são dadas por:

$$F(\phi \backslash m) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - m \text{sen}^2 \theta}} d\theta \\ \stackrel{t = \text{sen } \theta}{=} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - mt^2)}} dt$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{t=\text{sn } w}{=} \int_0^\nu dw \\ & = \nu, \end{aligned}$$

onde, se $t = \text{sn } w$, então $dt = \text{cn } w \text{ dn } w dw$, isto é, $dw = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-mt^2}}$. Já as Integrais Elípticas do Segundo Tipo são dadas por:

$$E(\phi \setminus m) = \int_0^\phi \sqrt{1 - m \text{sen}^2 \theta} d\theta \stackrel{t=\text{sen } \theta}{=} \int_0^x \frac{\sqrt{1 - mt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt.$$

Para as Integrais Elípticas completas, basta considerar $\phi = \frac{\pi}{2}$, isto é, $x = 1$, assim:

$$\begin{aligned} K(m) &= K = F\left(\frac{\pi}{2} \setminus m\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - m \text{sen}^2 \theta}} d\theta, \\ K'(m) &= K(1 - m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - m) \text{sen}^2 \theta}} d\theta, \\ E(m) &= E\left(\frac{\pi}{2} \setminus m\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m \text{sen}^2 \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Além disso, a Função Zeta de Jacobi é definida por:

$$\mathbb{Z}(\phi \setminus m) = E(\phi \setminus m) - \frac{E(m)F(\phi \setminus m)}{K(m)}.$$

Segundo [25], essas funções podem ser escritas por q -séries que são séries que dependem de q definido por $q = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right)$. Nesse caso, determina-se o parâmetro m de tal forma que $\frac{K'(m)}{K(m)} = \frac{h}{L}$ e $q = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right) = \exp\left(-\frac{\pi h}{L}\right)$, assim obtém-se que:

$$\mathbb{Z}(\phi) = \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n}} \text{sen}\left(\frac{n\pi\phi}{K}\right), \quad (5.9)$$

$$\text{dn}(\phi) \text{cs}(\phi) = \frac{\pi}{2K} \cot\left(\frac{\pi\phi}{2K}\right) - \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^n} \text{sen}\left(\frac{n\pi\phi}{K}\right). \quad (5.10)$$

Dessa forma, obtém-se que:

$$\tilde{T}(x; h, L) = -\frac{2K}{\pi} \left[\mathbb{Z}\left(\frac{Kx}{L}\right) + \text{dn}\left(\frac{Kx}{L}\right) \text{cs}\left(\frac{Kx}{L}\right) \right].$$

De fato, note que:

$$\coth(x) = \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{cossech}(x), \quad (5.11)$$

$$\operatorname{cossech}\left(\frac{n\pi h}{L}\right) = \frac{2q^n}{1 - q^{2n}}, \quad (5.12)$$

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{2e^x}{e^x + 1} - 1.$$

Portanto,

$$-\tanh\left(\frac{1}{2} \frac{n\pi h}{L}\right) = \tanh\left(\frac{1 - n\pi h}{2} \frac{1}{L}\right) = \frac{2q^n}{1 + q^n} - 1. \quad (5.13)$$

Além disso, a Série de Fourier da cotangente é dada por

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(nx), \quad (5.14)$$

no sentido das distribuições.

Combinando esses resultados, segue que:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x; h, L) &= \mathbf{i} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right) \\ &= \mathbf{i} \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right) + \mathbf{i} \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(-\frac{k\pi h}{L}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right) \\ &= \mathbf{i} \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right) + \mathbf{i} \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \exp\left(-\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right) \\ &= \mathbf{i} \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \left[\exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right) + \exp\left(-\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right) \right] \\ &= \mathbf{i} \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) 2\mathbf{i} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &= -2 \sum_{k=1}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \\ &\stackrel{(5.11)}{=} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\tanh\left(\frac{k\pi h}{2L}\right) - \operatorname{cossech}\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(5.12)e(5.13)}{=} 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1+q^k} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \\
& - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^{2k}} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \\
& = -\frac{2K}{\pi} \left[\frac{2\pi}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^{2k}} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi(Kx/L)}{K} \right) \right] \\
& - \frac{2K}{\pi} \left[\frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) - \frac{2\pi}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1+q^k} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi x}{L} \right) \right] \\
& \stackrel{(5.14)}{=} -\frac{2K}{\pi} \left[\frac{2\pi}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1-q^{2k}} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi(Kx/L)}{K} \right) \right] - \frac{2K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2K} \cot \left(\frac{k\pi(Kx/L)}{2K} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2\pi}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1+q^k} \operatorname{sen} \left(\frac{k\pi(Kx/L)}{K} \right) \right] \\
& \stackrel{(5.9)e(5.10)}{=} -\frac{2K}{\pi} \left[\mathbb{Z} \left(\frac{Kx}{L} \right) + \operatorname{dn} \left(\frac{Kx}{L} \right) \operatorname{cs} \left(\frac{Kx}{L} \right) \right].
\end{aligned}$$

Essa expressão encontrada para o núcleo do caso periódico será utilizada na implementação, uma vez que a série dada pela cotangente hiperbólica, (5.8), deve ser interpretada no sentido das distribuições, isto é, não converge uniformemente.

5.2 Implementação: Conhecendo o Núcleo do Operador

Resumindo, o operador \mathcal{T} no caso não periódico tem como núcleo:

$$\tilde{T}(x; h) = -\frac{1}{2h} \coth \left(\frac{\pi x}{2h} \right), \text{ se } x \neq 0. \quad (5.15)$$

Já no domínio da frequência, o núcleo periódico é representado por uma Série de Fourier:

$$\tilde{T}(x; h, L) = \frac{\mathbf{i}}{2L} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth \left(\frac{k\pi h}{L} \right) \exp \left(\frac{ik\pi x}{L} \right), \quad (5.16)$$

no sentido das distribuições. Ainda no caso periódico, esse núcleo pode ser calculado utilizando funções especiais:

$$\tilde{T}(x; h, L) = -\frac{1}{2L} \frac{2K}{\pi} \left[Z\left(\frac{Kx}{L}\right) + \operatorname{dn}\left(\frac{Kx}{L}\right) \operatorname{cs}\left(\frac{Kx}{L}\right) \right], \quad (5.17)$$

onde

$$\begin{aligned} Z(a) &= \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi a}{K}\right) \\ \operatorname{dn}(a) \operatorname{cs}(a) &= \frac{\pi}{2K} \cot\left(\frac{\pi a}{2K}\right) - \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1 + q^m} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi a}{K}\right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

com $q = \exp\left(-\frac{\pi h}{L}\right)$.

A Figura 5.3 mostra a diferença entre o núcleo periódico dado por (5.17) e o núcleo do caso não periódico dado por (5.15) no intervalo de $[-\pi, \pi]$. No domínio real, a cotangente hiperbólica foi calculada com a função `coth` do Matlab avaliada nos valores da malha, enquanto que no domínio periódico com as funções especiais, foi utilizada a função `ellipj` do Matlab para encontrar os valores de `dn` e `cs`. Já a função Zeta foi calculada truncando sua q -série dada em (5.18). Os dados utilizados foram:

- $L = \pi$;
- $h = \frac{\pi}{2}$;
- $N = 128$;
- $x_k = -\pi + \frac{2\pi}{N}k$, onde $k = 1, \dots, N$.

Os dados L e h foram escolhidos com o objetivo de facilitar a visualização do operador e N foi escolhido com o objetivo de ter uma malha com uma quantidade par de pontos. Vide apêndice B.1.1. O parâmetro m , que é requerido na função `ellipj` do Matlab, foi encontrado impondo a condição $\frac{K'(m)}{K(m)} = \frac{h}{L}$. Para tal, foi utilizada a função `ellipke` do Matlab, colocando diversos valores de m ($m = 0.001 : 0.001 : 1 - 0.001$) para calcular os valores de K e K' e interpolando, encontrou-se o valor de m de forma que $\frac{K'(m)}{K(m)} = \frac{h}{L}$. Vide apêndice B.1.2.

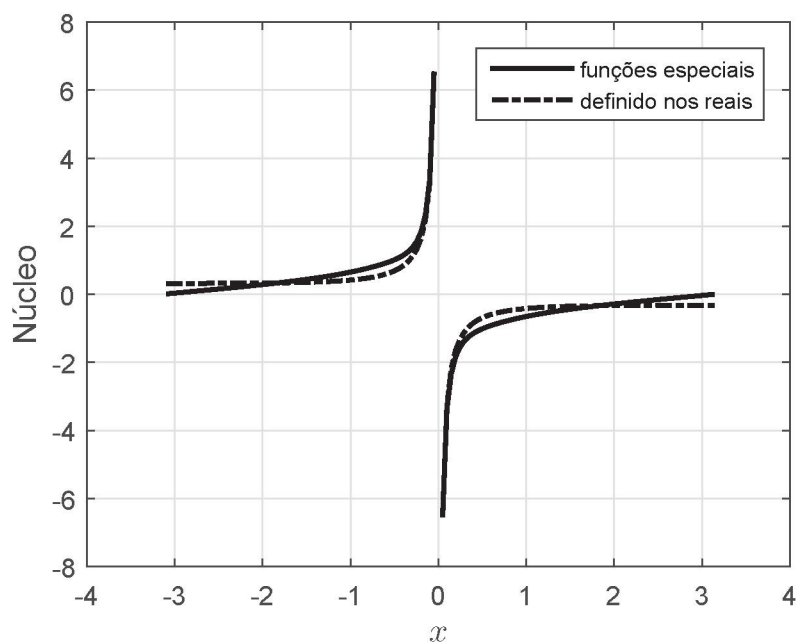


Figura 5.3: Núcleo do operador: o núcleo no caso periódico plotado a partir das funções especiais (—); o núcleo no caso não periódico plotado no intervalo $[-\pi, \pi]$ (- · -).

<i>Pontos da malha (k)</i>	<i>Valores do núcleo no domínio real</i>	<i>Valores do núcleo no domínio periódico dado pelas funções especiais</i>
1	0.3196	0.0117
2	0.3198	0.0235
3	0.3199	0.0352
4	0.3201	0.0470
5	0.3203	0.0588
6	0.3205	0.0706
7	0.3207	0.0824
8	0.3209	0.0943
9	0.3212	0.1062
10	0.3215	0.1182
11	0.3218	0.1302
12	0.3222	0.1422
13	0.3226	0.1544
14	0.3230	0.1666
15	0.3235	0.1789
16	0.3241	0.1912

17	0.3247	0.2037
18	0.3253	0.2163
19	0.3261	0.2291
20	0.3269	0.2419
21	0.3278	0.2550
22	0.3288	0.2682
23	0.3299	0.2816
24	0.3311	0.2952
25	0.3325	0.3090
26	0.3339	0.3231
27	0.3356	0.3375
28	0.3374	0.3521
29	0.3395	0.3672
30	0.3417	0.3825
31	0.3443	0.3983
32	0.3471	0.4145
33	0.3502	0.4312
34	0.3536	0.4485
35	0.3575	0.4663
36	0.3618	0.4847
37	0.3667	0.5038
38	0.3721	0.5236
39	0.3781	0.5442
40	0.3850	0.5657
41	0.3926	0.5881
42	0.4013	0.6115
43	0.4111	0.6359
44	0.4223	0.6616
45	0.4349	0.6884
46	0.4495	0.7166
47	0.4661	0.7464
48	0.4854	0.7777
49	0.5077	0.8110
50	0.5339	0.8463
51	0.5648	0.8844
52	0.6015	0.9257
53	0.6457	0.9713
54	0.6997	1.0228
55	0.7668	1.0829
56	0.8518	1.1558
57	0.9625	1.2487

58	1.1118	1.3738
59	1.3228	1.5543
60	1.6419	1.8365
61	2.1771	2.3289
62	3.2527	3.3569
63	6.4898	6.5428
64	-Inf	-Inf
65	-6.4898	-6.5428
66	-3.2527	-3.3569
67	-2.1771	-2.3289
68	-1.6419	-1.8365
69	-1.3228	-1.5543
70	-1.1118	-1.3738
71	-0.9625	-1.2487
72	-0.8518	-1.1558
73	-0.7668	-1.0829
74	-0.6997	-1.0228
75	-0.6457	-0.9713
76	-0.6015	-0.9257
77	-0.5648	-0.8844
78	-0.5339	-0.8463
79	-0.5077	-0.8110
80	-0.4854	-0.7777
81	-0.4661	-0.7464
82	-0.4495	-0.7166
83	-0.4349	-0.6884
84	-0.4223	-0.6616
85	-0.4111	-0.6359
86	-0.4013	-0.6115
87	-0.3926	-0.5881
88	-0.3850	-0.5657
89	-0.3781	-0.5442
90	-0.3721	-0.5236
91	-0.3667	-0.5038
92	-0.3618	-0.4847
93	-0.3575	-0.4663
94	-0.3536	-0.4485
95	-0.3502	-0.4312
96	-0.3471	-0.4145
97	-0.3443	-0.3983
98	-0.3417	-0.3825

99	-0.3395	-0.3672
100	-0.3374	-0.3521
101	-0.3356	-0.3375
102	-0.3339	-0.3231
103	-0.3325	-0.3090
104	-0.3311	-0.2952
105	-0.3299	-0.2816
106	-0.3288	-0.2682
107	-0.3278	-0.2550
108	-0.3269	-0.2419
109	-0.3261	-0.2291
110	-0.3253	-0.2163
111	-0.3247	-0.2037
112	-0.3241	-0.1912
113	-0.3235	-0.1789
114	-0.3230	-0.1666
115	-0.3226	-0.1544
116	-0.3222	-0.1422
117	-0.3218	-0.1302
118	-0.3215	-0.1182
119	-0.3212	-0.1062
120	-0.3209	-0.0943
121	-0.3207	-0.0824
122	-0.3205	-0.0706
123	-0.3203	-0.0588
124	-0.3201	-0.0470
125	-0.3199	-0.0352
126	-0.3198	-0.0235
127	-0.3196	-0.0117
128	-0.3195	-0.0000

Tabela 5.1: Valores do Núcleo na malha.

Observa-se, pelo Gráfico 5.3 que \tilde{T} dada em (5.17) zera para $L = \pi$, diferente da função cotangente hiperbólica. Na Tabela 5.1 encontra-se todos os valores para os pontos da malha com $N = 128$ pontos. Observa-se a diferença entre os valores de acordo com o núcleo e ainda, em $k = 64$ o valor correspondente à menos infinito refere-se ao valor do limite lateral do núcleo

em zero. Além disso, considerando o erro relativo dado por:

$$E_r = \frac{\max_{i=1,\dots,N} |\gamma_i - \beta_i|}{\max_{i=1,\dots,N} |\gamma_i|}. \quad (5.19)$$

Nesse caso, γ é o núcleo especial e β é o núcleo real, então $E_r = 0,3759 \approx 38\%$. Nota-se que o erro relativo é alto, confirmando a necessidade de uma abordagem sistemática para calcular o núcleo periódico.

Além disso, no caso periódico, tem-se a expressão do núcleo dada pela Série de Fourier, (5.16). No entanto, esta série não converge pontualmente, apenas no sentido das distribuições. Por esse motivo não foram utilizadas aproximações por truncamento da série que exibem valores que alternativamente são quase nulos ou não em um mesmo ponto como ilustrado nas Figuras 5.4 e 5.5.

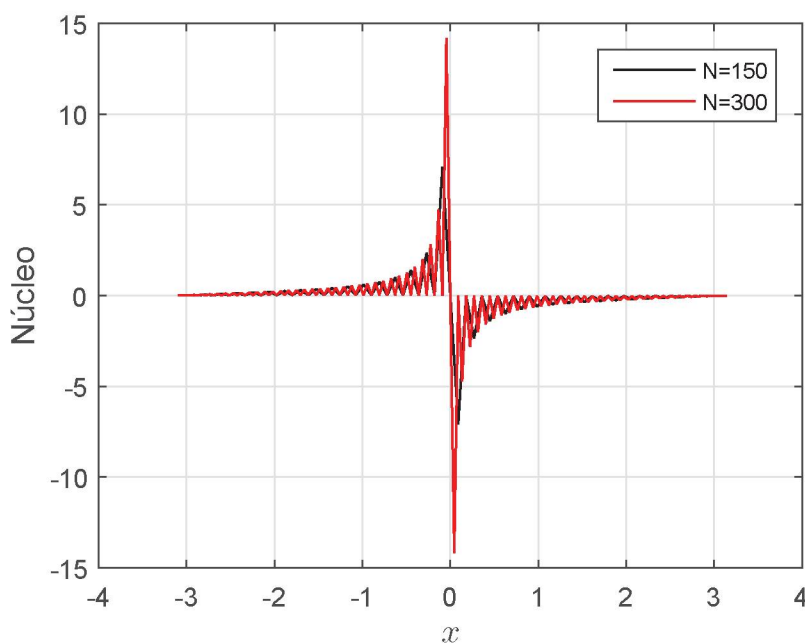


Figura 5.4: Núcleo do operador no caso periódico dado pela Série de Fourier truncada para malhas encaixadas.

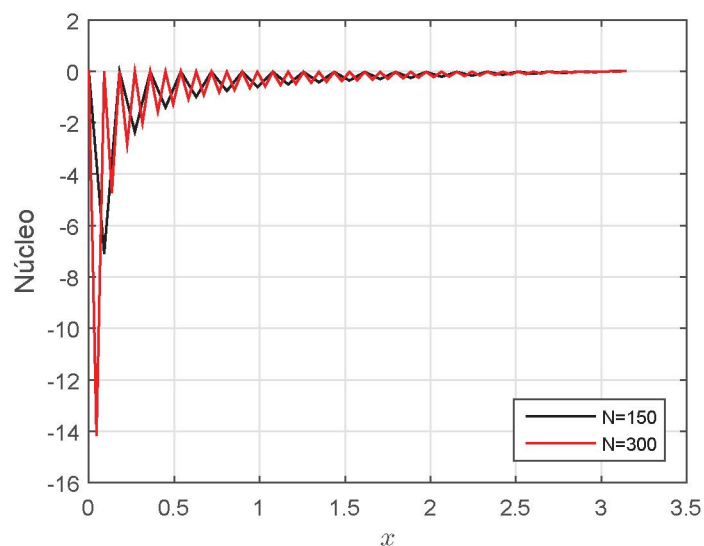


Figura 5.5: Núcleo do operador no caso periódico dado pela Série de Fourier truncada para malha encaixadas, detalhe da figura anterior.

Na implementação foram usados os mesmos parâmetros L , h e x_k utilizados para a implementação da Figura 5.3. Foi feito também a implementação para valores diferentes de N . Tem-se as seguintes figuras. Para N múltiplos de 70:

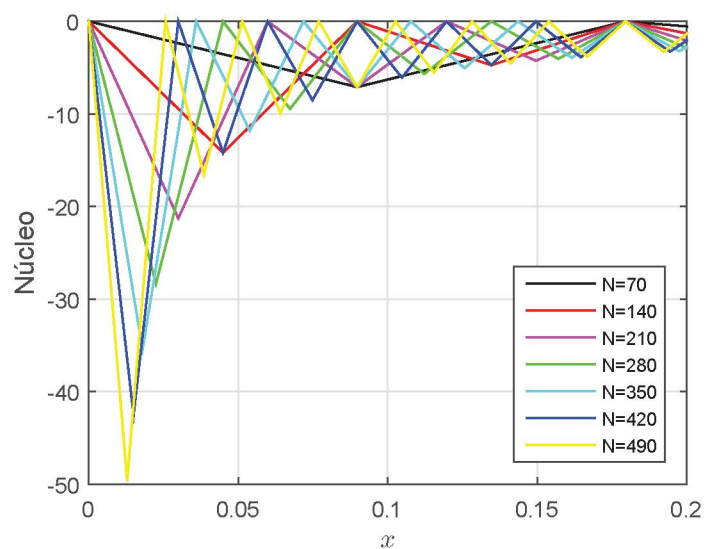


Figura 5.6: Núcleo do operador no caso periódico dado pela Série de Fourier truncada para malha encaixadas.

Para N na base 2:

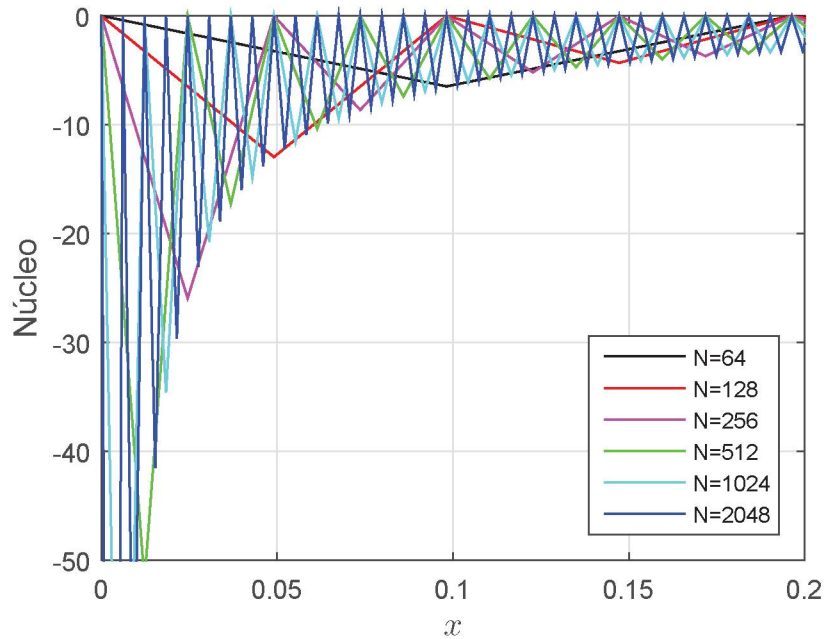


Figura 5.7: Núcleo do operador no caso periódico dado pela Série de Fourier truncada para malha encaixadas.

Observa-se o mesmo fenômeno acontecendo para diferentes valores de N devido ao fato da série só convergir no sentido das distribuições. Além disso, para valores diferentes de N alguns valores do núcleo se repetem.

5.3 Implementação dos Operadores

Para implementar o cálculo numérico do operador da Transformada de Hilbert na faixa:

$$\mathcal{T}[u] = \mathbf{i} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \hat{u}(k) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right),$$

descrito no domínio físico pela convolução:

$$\mathcal{T}[u] = -\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \hat{T}(x - \xi; h, L) u(\xi) d\xi,$$

com o núcleo \tilde{T} dado por

$$\tilde{T}(x; h, L) = \mathbf{i} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right) \exp\left(\frac{\mathbf{i}k\pi x}{L}\right), \quad (5.20)$$

$$\tilde{T}(x; h, L) = -\frac{1}{2L} \frac{2K}{\pi} \left[Z\left(\frac{Kx}{L}\right) + \operatorname{dn}\left(\frac{Kx}{L}\right) \operatorname{cs}\left(\frac{Kx}{L}\right) \right], \quad (5.21)$$

onde a série deve ser interpretada no sentido das distribuições, foram utilizadas duas abordagens. Na primeira, foi implementada a Regra do Trapézio Alternada (RTA), como descrito em [26], utilizando a expressão (5.21), isto é, o cálculo foi realizado no domínio físico. E a segunda abordagem, a espectral, baseou-se na implementação da Transformada Rápida de Fourier (FFT), como descrita em [27], e sua inversa a partir do símbolo $i \coth\left(\frac{k\pi h}{L}\right)$ que aparece em (5.20). Na sequência os resultados foram comparados utilizando a função gaussiana como argumento.

Tabém foi feita a implementação do operador da Transformada de Hilbert, \mathcal{H} , seguindo ambas abordagens, onde o núcleo $2L$ -periódico é dado por $T(x) = -\cot\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$.

Na implementação foi feita a comparação entre os dois métodos descritos com o núcleo periódico \tilde{T} do operador da Transformada de Hilbert na faixa, \mathcal{T} , e também com o núcleo T do operador da Transformada de Hilbert, \mathcal{H} . Analisou-se esses operadores convoluídos com diferentes funções. A primeira escolhida foi $u(x) = e^{-x^2/2}$, como mostram as Figuras 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11. No apêndice B.2 está o código em Matlab.

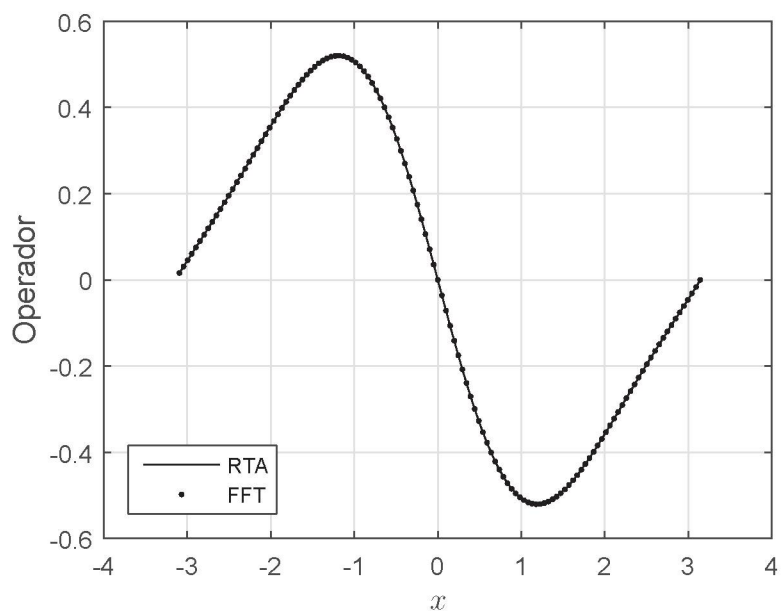


Figura 5.8: Comparação do operador \mathcal{H} com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = e^{-x^2/2}$.

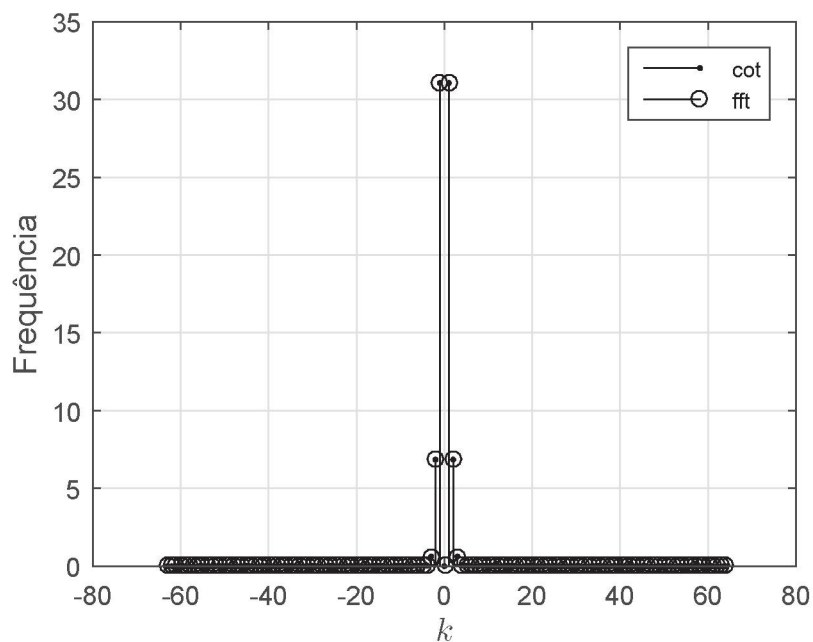


Figura 5.9: Comparação da frequência do operador \mathcal{H} com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = e^{-x^2/2}$.

k	<i>Frequência pela Transformada de Fourier</i>	<i>Frequência pela Regra do Trapézio Alternada</i>
0	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
1	1.5237 + 31.0151i	1.5237 - 31.0151i
2	-0.6709 - 6.8115i	-0.6709 + 6.8115i
3	0.0907 + 0.6114i	0.0907 - 0.6114i
4	0.0040 + 0.0202i	0.0040 - 0.0202i
5	0.0069 + 0.0274i	0.0069 - 0.0274i
6	0.0062 + 0.0203i	0.0062 - 0.0203i
7	0.0055 + 0.0155i	0.0055 - 0.0155i
8	0.0050 + 0.0121i	0.0050 - 0.0121i
9	0.0045 + 0.0096i	0.0045 - 0.0096i
10	0.0041 + 0.0077i	0.0041 - 0.0077i
11	0.0038 + 0.0063i	0.0038 - 0.0063i
12	0.0035 + 0.0052i	0.0035 - 0.0052i
13	0.0032 + 0.0044i	0.0032 - 0.0044i
14	0.0030 + 0.0037i	0.0030 - 0.0037i
15	0.0028 + 0.0031i	0.0028 - 0.0031i
16	0.0026 + 0.0026i	0.0026 - 0.0026i
17	0.0024 + 0.0022i	0.0024 - 0.0022i
18	0.0023 + 0.0019i	0.0023 - 0.0019i
19	0.0022 + 0.0016i	0.0022 - 0.0016i
20	0.0020 + 0.0014i	0.0020 - 0.0014i
21	0.0019 + 0.0012i	0.0019 - 0.0012i
22	0.0018 + 0.0010i	0.0018 - 0.0010i
23	0.0017 + 0.0008i	0.0017 - 0.0008i
24	0.0016 + 0.0007i	0.0016 - 0.0007i
25	0.0016 + 0.0006i	0.0016 - 0.0006i
26	0.0015 + 0.0004i	0.0015 - 0.0004i
27	0.0014 + 0.0004i	0.0014 - 0.0004i
28	0.0013 + 0.0003i	0.0013 - 0.0003i
29	0.0013 + 0.0002i	0.0013 - 0.0002i
30	0.0012 + 0.0001i	0.0012 - 0.0001i
31	0.0012 + 0.0001i	0.0012 - 0.0001i
32	0.0011 + 0.0000i	0.0011 + 0.0000i
33	0.0011 - 0.0001i	0.0011 + 0.0001i
34	0.0010 - 0.0001i	0.0010 + 0.0001i
35	0.0010 - 0.0001i	0.0010 + 0.0001i
36	0.0009 - 0.0002i	0.0009 + 0.0002i
37	0.0009 - 0.0002i	0.0009 + 0.0002i

38	0.0008 - 0.0002i	0.0008 + 0.0002i
39	0.0008 - 0.0003i	0.0008 + 0.0003i
40	0.0007 - 0.0003i	0.0007 + 0.0003i
41	0.0007 - 0.0003i	0.0007 + 0.0003i
42	0.0007 - 0.0004i	0.0007 + 0.0004i
43	0.0006 - 0.0004i	0.0006 + 0.0004i
44	0.0006 - 0.0004i	0.0006 + 0.0004i
45	0.0006 - 0.0004i	0.0006 + 0.0004i
46	0.0005 - 0.0004i	0.0005 + 0.0004i
47	0.0005 - 0.0004i	0.0005 + 0.0004i
48	0.0005 - 0.0005i	0.0005 + 0.0005i
49	0.0004 - 0.0005i	0.0004 + 0.0005i
50	0.0004 - 0.0005i	0.0004 + 0.0005i
51	0.0004 - 0.0005i	0.0004 + 0.0005i
52	0.0003 - 0.0005i	0.0003 + 0.0005i
53	0.0003 - 0.0005i	0.0003 + 0.0005i
54	0.0003 - 0.0005i	0.0003 + 0.0005i
55	0.0002 - 0.0005i	0.0002 + 0.0005i
56	0.0002 - 0.0005i	0.0002 + 0.0005i
57	0.0002 - 0.0005i	0.0002 + 0.0005i
58	0.0002 - 0.0005i	0.0002 + 0.0005i
59	0.0001 - 0.0005i	0.0001 + 0.0005i
60	0.0001 - 0.0005i	0.0001 + 0.0005i
61	0.0001 - 0.0006i	0.0001 + 0.0006i
62	0.0001 - 0.0006i	0.0001 + 0.0006i
63	0.0000 - 0.0006i	0.0000 + 0.0006i
64	0.0000 - 0.0006i	0.0000 + 0.0000i
-63	0.0000 + 0.0006i	0.0000 - 0.0006i
-62	0.0001 + 0.0006i	0.0001 - 0.0006i
-61	0.0001 + 0.0006i	0.0001 - 0.0006i
-60	0.0001 + 0.0005i	0.0001 - 0.0005i
-59	0.0001 + 0.0005i	0.0001 - 0.0005i
-58	0.0002 + 0.0005i	0.0002 - 0.0005i
-57	0.0002 + 0.0005i	0.0002 - 0.0005i
-56	0.0002 + 0.0005i	0.0002 - 0.0005i
-55	0.0002 + 0.0005i	0.0002 - 0.0005i
-54	0.0003 + 0.0005i	0.0003 - 0.0005i
-53	0.0003 + 0.0005i	0.0003 - 0.0005i
-52	0.0003 + 0.0005i	0.0003 - 0.0005i
-51	0.0004 + 0.0005i	0.0004 - 0.0005i
-50	0.0004 + 0.0005i	0.0004 - 0.0005i

-49	$0.0004 + 0.0005i$	$0.0004 - 0.0005i$
-48	$0.0005 + 0.0005i$	$0.0005 - 0.0005i$
-47	$0.0005 + 0.0004i$	$0.0005 - 0.0004i$
-46	$0.0005 + 0.0004i$	$0.0005 - 0.0004i$
-45	$0.0006 + 0.0004i$	$0.0006 - 0.0004i$
-44	$0.0006 + 0.0004i$	$0.0006 - 0.0004i$
-43	$0.0006 + 0.0004i$	$0.0006 - 0.0004i$
-42	$0.0007 + 0.0004i$	$0.0007 - 0.0004i$
-41	$0.0007 + 0.0003i$	$0.0007 - 0.0003i$
-40	$0.0007 + 0.0003i$	$0.0007 - 0.0003i$
-39	$0.0008 + 0.0003i$	$0.0008 - 0.0003i$
-38	$0.0008 + 0.0002i$	$0.0008 - 0.0002i$
-37	$0.0009 + 0.0002i$	$0.0009 - 0.0002i$
-36	$0.0009 + 0.0002i$	$0.0009 - 0.0002i$
-35	$0.0010 + 0.0001i$	$0.0010 - 0.0001i$
-34	$0.0010 + 0.0001i$	$0.0010 - 0.0001i$
-33	$0.0011 + 0.0001i$	$0.0011 - 0.0001i$
-32	$0.0011 + 0.0000i$	$0.0011 - 0.0000i$
-31	$0.0012 - 0.0001i$	$0.0012 + 0.0001i$
-30	$0.0012 - 0.0001i$	$0.0012 + 0.0001i$
-29	$0.0013 - 0.0002i$	$0.0013 + 0.0002i$
-28	$0.0013 - 0.0003i$	$0.0013 + 0.0003i$
-27	$0.0014 - 0.0004i$	$0.0014 + 0.0004i$
-26	$0.0015 - 0.0004i$	$0.0015 + 0.0004i$
-25	$0.0016 - 0.0006i$	$0.0016 + 0.0006i$
-24	$0.0016 - 0.0007i$	$0.0016 + 0.0007i$
-23	$0.0017 - 0.0008i$	$0.0017 + 0.0008i$
-22	$0.0018 - 0.0010i$	$0.0018 + 0.0010i$
-21	$0.0019 - 0.0012i$	$0.0019 + 0.0012i$
-20	$0.0020 - 0.0014i$	$0.0020 + 0.0014i$
-19	$0.0022 - 0.0016i$	$0.0022 + 0.0016i$
-18	$0.0023 - 0.0019i$	$0.0023 + 0.0019i$
-17	$0.0024 - 0.0022i$	$0.0024 + 0.0022i$
-16	$0.0026 - 0.0026i$	$0.0026 + 0.0026i$
-15	$0.0028 - 0.0031i$	$0.0028 + 0.0031i$
-14	$0.0030 - 0.0037i$	$0.0030 + 0.0037i$
-13	$0.0032 - 0.0044i$	$0.0032 + 0.0044i$
-12	$0.0035 - 0.0052i$	$0.0035 + 0.0052i$
-11	$0.0038 - 0.0063i$	$0.0038 + 0.0063i$
-10	$0.0041 - 0.0077i$	$0.0041 + 0.0077i$
-9	$0.0045 - 0.0096i$	$0.0045 + 0.0096i$

-8	0.0050 - 0.0121i	0.0050 + 0.0121i
-7	0.0055 - 0.0155i	0.0055 + 0.0155i
-6	0.0062 - 0.0203i	0.0062 + 0.0203i
-5	0.0069 - 0.0274i	0.0069 + 0.0274i
-4	0.0040 - 0.0202i	0.0040 + 0.0202i
-3	0.0907 - 0.6114i	0.0907 + 0.6114i
-2	-0.6709 + 6.8115i	-0.6709 - 6.8115i
-1	1.5237 - 31.0151i	1.5237 + 31.0151i

Tabela 5.2: Frequências do operador \mathcal{H} , com função argumento $u(x) = e^{-x^2/2}$.

A Tabela 5.2 mostra as frequências do operador \mathcal{H} convoluído com a função Gaussiana, $u(x) = e^{-x^2/2}$, pelas duas implementações, isto é, pela Transformada Rápida de Fourier e pela Regra do Trapézio Alternada. Mesmo que os gráficos contidos nas Figuras 5.8 e 5.9 não mostrem, na Tabela 5.2 observa-se que tanto pela Transformada de Fourier como pela Regra do Trapézio Alternada a parte real das frequências tem sempre o mesmo sinal enquanto que na parte imaginária o sinal fica alternando.

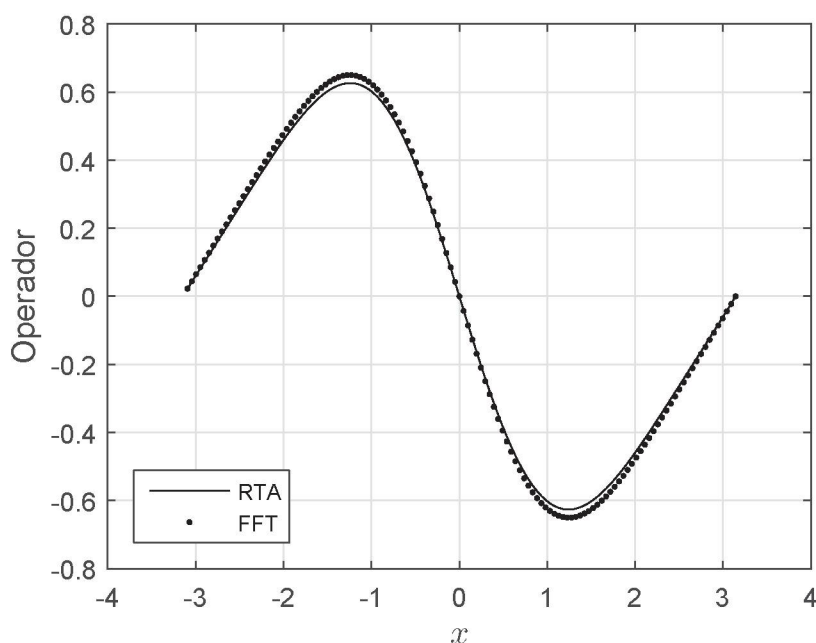


Figura 5.10: Comparação do operador \mathcal{T} com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = e^{-x^2/2}$.

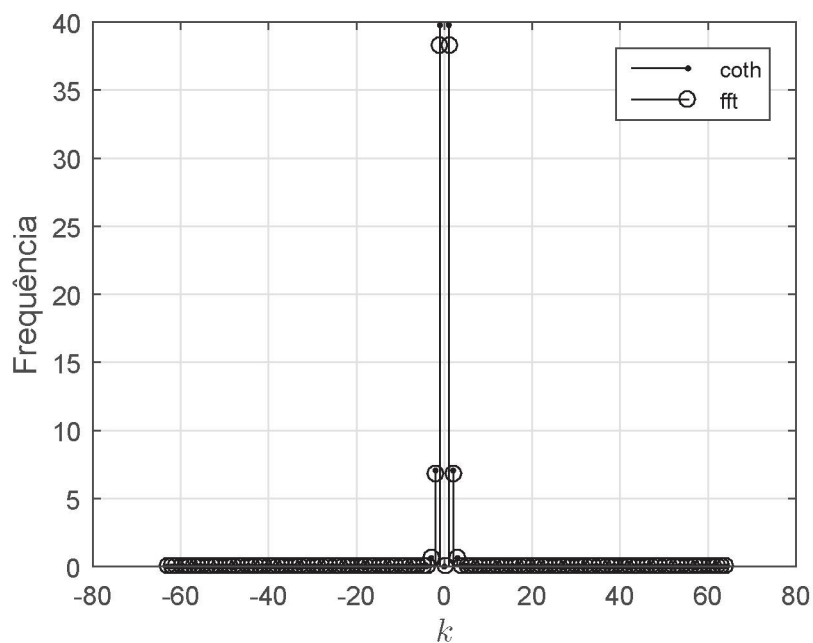


Figura 5.11: Comparação da frequência do operador \mathcal{T} com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = e^{-x^2/2}$.

k	Frequência pela Transformada de Fourier	Frequência pela Regra do Trapézio Alternada
0	0.0000 + 0.0000i	0.0000 + 0.0000i
1	1.9516 + 39.7266i	1.8778 - 38.2240i
2	-0.6915 - 7.0212i	-0.6760 + 6.8639i
3	0.0910 + 0.6137i	0.0900 - 0.6069i
4	0.0040 + 0.0202i	0.0040 - 0.0201i
5	0.0069 + 0.0274i	0.0068 - 0.0273i
6	0.0062 + 0.0203i	0.0062 - 0.0203i
7	0.0055 + 0.0155i	0.0055 - 0.0155i
8	0.0050 + 0.0121i	0.0050 - 0.0121i
9	0.0045 + 0.0096i	0.0045 - 0.0096i
10	0.0041 + 0.0077i	0.0041 - 0.0077i
11	0.0038 + 0.0063i	0.0038 - 0.0063i
12	0.0035 + 0.0052i	0.0035 - 0.0052i
13	0.0032 + 0.0044i	0.0032 - 0.0044i
14	0.0030 + 0.0037i	0.0030 - 0.0037i
15	0.0028 + 0.0031i	0.0028 - 0.0031i
16	0.0026 + 0.0026i	0.0026 - 0.0026i
17	0.0024 + 0.0022i	0.0024 - 0.0022i

18	$0.0023 + 0.0019i$	$0.0023 - 0.0019i$
19	$0.0022 + 0.0016i$	$0.0022 - 0.0016i$
20	$0.0020 + 0.0014i$	$0.0020 - 0.0014i$
21	$0.0019 + 0.0012i$	$0.0019 - 0.0012i$
22	$0.0018 + 0.0010i$	$0.0018 - 0.0010i$
23	$0.0017 + 0.0008i$	$0.0017 - 0.0008i$
24	$0.0016 + 0.0007i$	$0.0016 - 0.0007i$
25	$0.0016 + 0.0006i$	$0.0016 - 0.0006i$
26	$0.0015 + 0.0004i$	$0.0015 - 0.0004i$
27	$0.0014 + 0.0004i$	$0.0014 - 0.0004i$
28	$0.0013 + 0.0003i$	$0.0013 - 0.0003i$
29	$0.0013 + 0.0002i$	$0.0013 - 0.0002i$
30	$0.0012 + 0.0001i$	$0.0012 - 0.0001i$
31	$0.0012 + 0.0001i$	$0.0012 - 0.0001i$
32	$0.0011 + 0.0000i$	$0.0011 + 0.0000i$
33	$0.0011 - 0.0001i$	$0.0011 + 0.0001i$
34	$0.0010 - 0.0001i$	$0.0010 + 0.0001i$
35	$0.0010 - 0.0001i$	$0.0010 + 0.0001i$
36	$0.0009 - 0.0002i$	$0.0009 + 0.0002i$
37	$0.0009 - 0.0002i$	$0.0009 + 0.0002i$
38	$0.0008 - 0.0002i$	$0.0008 + 0.0002i$
39	$0.0008 - 0.0003i$	$0.0008 + 0.0003i$
40	$0.0007 - 0.0003i$	$0.0007 + 0.0003i$
41	$0.0007 - 0.0003i$	$0.0007 + 0.0003i$
42	$0.0007 - 0.0004i$	$0.0007 + 0.0004i$
43	$0.0006 - 0.0004i$	$0.0006 + 0.0004i$
44	$0.0006 - 0.0004i$	$0.0006 + 0.0004i$
45	$0.0006 - 0.0004i$	$0.0006 + 0.0004i$
46	$0.0005 - 0.0004i$	$0.0005 + 0.0004i$
47	$0.0005 - 0.0004i$	$0.0005 + 0.0004i$
48	$0.0005 - 0.0005i$	$0.0005 + 0.0005i$
49	$0.0004 - 0.0005i$	$0.0004 + 0.0005i$
50	$0.0004 - 0.0005i$	$0.0004 + 0.0005i$
51	$0.0004 - 0.0005i$	$0.0004 + 0.0005i$
52	$0.0003 - 0.0005i$	$0.0003 + 0.0005i$
53	$0.0003 - 0.0005i$	$0.0003 + 0.0005i$
54	$0.0003 - 0.0005i$	$0.0003 + 0.0005i$
55	$0.0002 - 0.0005i$	$0.0002 + 0.0005i$
56	$0.0002 - 0.0005i$	$0.0002 + 0.0005i$
57	$0.0002 - 0.0005i$	$0.0002 + 0.0005i$
58	$0.0002 - 0.0005i$	$0.0002 + 0.0005i$

59	$0.0001 - 0.0005i$	$0.0001 + 0.0005i$
60	$0.0001 - 0.0005i$	$0.0001 + 0.0005i$
61	$0.0001 - 0.0006i$	$0.0001 + 0.0005i$
62	$0.0001 - 0.0006i$	$0.0001 + 0.0006i$
63	$0.0000 - 0.0006i$	$0.0000 + 0.0007i$
64	$0.0000 - 0.0006i$	$0.0000 + 0.0000i$
-63	$0.0000 + 0.0006i$	$0.0000 - 0.0007i$
-62	$0.0001 + 0.0006i$	$0.0001 - 0.0006i$
-61	$0.0001 + 0.0006i$	$0.0001 - 0.0005i$
-60	$0.0001 + 0.0005i$	$0.0001 - 0.0005i$
-59	$0.0001 + 0.0005i$	$0.0001 - 0.0005i$
-58	$0.0002 + 0.0005i$	$0.0002 - 0.0005i$
-57	$0.0002 + 0.0005i$	$0.0002 - 0.0005i$
-56	$0.0002 + 0.0005i$	$0.0002 - 0.0005i$
-55	$0.0002 + 0.0005i$	$0.0002 - 0.0005i$
-54	$0.0003 + 0.0005i$	$0.0003 - 0.0005i$
-53	$0.0003 + 0.0005i$	$0.0003 - 0.0005i$
-52	$0.0003 + 0.0005i$	$0.0003 - 0.0005i$
-51	$0.0004 + 0.0005i$	$0.0004 - 0.0005i$
-50	$0.0004 + 0.0005i$	$0.0004 - 0.0005i$
-49	$0.0004 + 0.0005i$	$0.0004 - 0.0005i$
-48	$0.0005 + 0.0005i$	$0.0005 - 0.0005i$
-47	$0.0005 + 0.0004i$	$0.0005 - 0.0004i$
-46	$0.0005 + 0.0004i$	$0.0005 - 0.0004i$
-45	$0.0006 + 0.0004i$	$0.0006 - 0.0004i$
-44	$0.0006 + 0.0004i$	$0.0006 - 0.0004i$
-43	$0.0006 + 0.0004i$	$0.0006 - 0.0004i$
-42	$0.0007 + 0.0004i$	$0.0007 - 0.0004i$
-41	$0.0007 + 0.0003i$	$0.0007 - 0.0003i$
-40	$0.0007 + 0.0003i$	$0.0007 - 0.0003i$
-39	$0.0008 + 0.0003i$	$0.0008 - 0.0003i$
-38	$0.0008 + 0.0002i$	$0.0008 - 0.0002i$
-37	$0.0009 + 0.0002i$	$0.0009 - 0.0002i$
-36	$0.0009 + 0.0002i$	$0.0009 - 0.0002i$
-35	$0.0010 + 0.0001i$	$0.0010 - 0.0001i$
-34	$0.0010 + 0.0001i$	$0.0010 - 0.0001i$
-33	$0.0011 + 0.0001i$	$0.0011 - 0.0001i$
-32	$0.0011 + 0.0000i$	$0.0011 - 0.0000i$
-31	$0.0012 - 0.0001i$	$0.0012 + 0.0001i$
-30	$0.0012 - 0.0001i$	$0.0012 + 0.0001i$
-29	$0.0013 - 0.0002i$	$0.0013 + 0.0002i$

-28	0.0013 - 0.0003i	0.0013 + 0.0003i
-27	0.0014 - 0.0004i	0.0014 + 0.0004i
-26	0.0015 - 0.0004i	0.0015 + 0.0004i
-25	0.0016 - 0.0006i	0.0016 + 0.0006i
-24	0.0016 - 0.0007i	0.0016 + 0.0007i
-23	0.0017 - 0.0008i	0.0017 + 0.0008i
-22	0.0018 - 0.0010i	0.0018 + 0.0010i
-21	0.0019 - 0.0012i	0.0019 + 0.0012i
-20	0.0020 - 0.0014i	0.0020 + 0.0014i
-19	0.0022 - 0.0016i	0.0022 + 0.0016i
-18	0.0023 - 0.0019i	0.0023 + 0.0019i
-17	0.0024 - 0.0022i	0.0024 + 0.0022i
-16	0.0026 - 0.0026i	0.0026 + 0.0026i
-15	0.0028 - 0.0031i	0.0028 + 0.0031i
-14	0.0030 - 0.0037i	0.0030 + 0.0037i
-13	0.0032 - 0.0044i	0.0032 + 0.0044i
-12	0.0035 - 0.0052i	0.0035 + 0.0052i
-11	0.0038 - 0.0063i	0.0038 + 0.0063i
-10	0.0041 - 0.0077i	0.0041 + 0.0077i
-9	0.0045 - 0.0096i	0.0045 + 0.0096i
-8	0.0050 - 0.0121i	0.0050 + 0.0121i
-7	0.0055 - 0.0155i	0.0055 + 0.0155i
-6	0.0062 - 0.0203i	0.0062 + 0.0203i
-5	0.0069 - 0.0274i	0.0068 + 0.0273i
-4	0.0040 - 0.0202i	0.0040 + 0.0201i
-3	0.0910 - 0.6137i	0.0900 + 0.6069i
-2	-0.6915 + 7.0212i	-0.6760 - 6.8639i
-1	1.9516 -39.7266i	1.8778 +38.2240i

Tabela 5.3: Frequências do operador \mathcal{T} , com função argumento $u(x) = e^{-x^2/2}$.

A Tabela 5.3 mostra as frequências do operador \mathcal{T} pelas duas implementações, isto é, pela Transformada Rápida de Fourier e pela Regra do Trapézio Alternada. Nota-se que a parte imaginária fica alternando de sinal assim como no caso do operador \mathcal{H} . Além disso, há uma pequena diferença principalmente nas frequências altas, isso pode ser verificado também pelo erro relativo. Nesse caso, considera-se o erro relativo dado por (5.19), com γ a frequência pela implementação espectral e β a frequência pela implementação da Regra do Trapézio Alternada, tem-se que o erro relativo é de 1,9598 e o erro relativo real é de 0,0378, observa-se esse erro nas Figuras 5.10 e 5.11.

Além disso, também foi realizada a implementação com a derivada da gaussiana como argumento, isto é, com $u(x) = -xe^{-x^2/2}$.

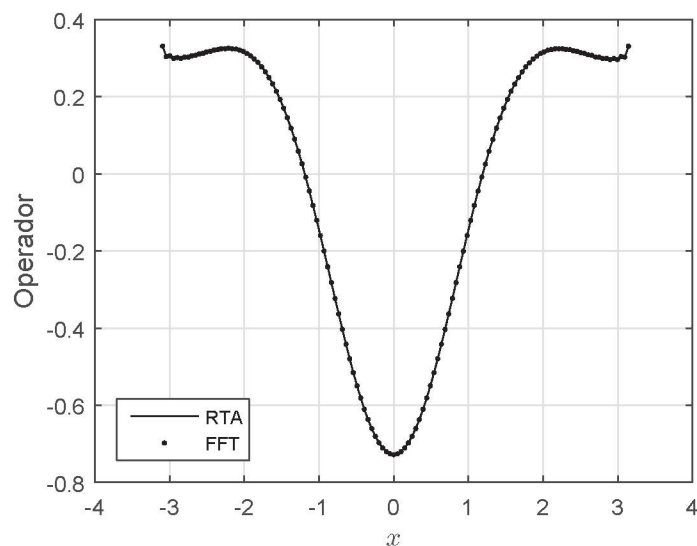


Figura 5.12: Comparação do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$.

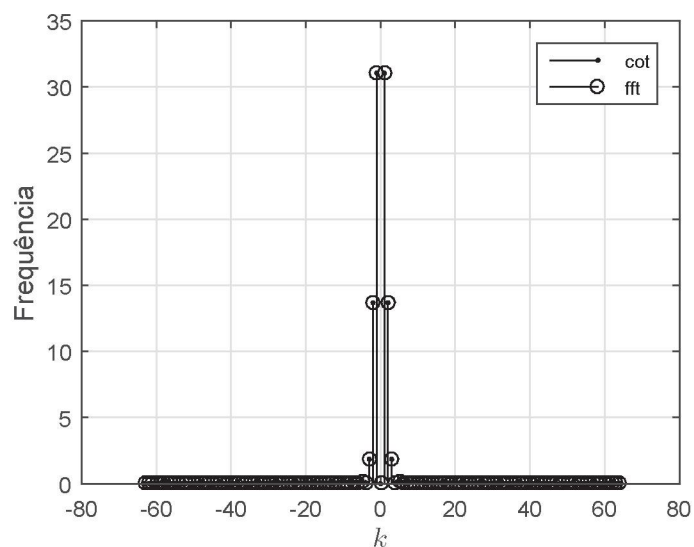


Figura 5.13: Comparação da frequência do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$.

k	<i>Frequência pela Transformada de Fourier</i>	<i>Frequência pela Regra do Trapézio Alternada</i>
44	0.0121 - 0.0225i	0.0121 + 0.0225i
45	0.0114 - 0.0225i	0.0114 + 0.0225i
46	0.0107 - 0.0226i	0.0107 + 0.0226i
47	0.0100 - 0.0226i	0.0100 + 0.0226i
48	0.0094 - 0.0226i	0.0094 + 0.0226i
49	0.0087 - 0.0226i	0.0087 + 0.0226i
50	0.0081 - 0.0226i	0.0081 + 0.0226i
51	0.0075 - 0.0226i	0.0075 + 0.0226i
52	0.0069 - 0.0226i	0.0069 + 0.0226i
53	0.0063 - 0.0226i	0.0063 + 0.0226i
54	0.0057 - 0.0226i	0.0057 + 0.0226i
55	0.0051 - 0.0226i	0.0051 + 0.0226i
56	0.0045 - 0.0226i	0.0045 + 0.0226i
57	0.0039 - 0.0226i	0.0039 + 0.0226i
58	0.0034 - 0.0226i	0.0034 + 0.0226i
59	0.0028 - 0.0226i	0.0028 + 0.0226i
60	0.0022 - 0.0226i	0.0022 + 0.0226i
61	0.0017 - 0.0226i	0.0017 + 0.0226i
62	0.0011 - 0.0226i	0.0011 + 0.0226i
63	0.0006 - 0.0226i	0.0006 + 0.0226i
64	0.0000 - 0.0226i	0.0000 + 0.0000i
-63	0.0006 + 0.0226i	0.0006 - 0.0226i
-62	0.0011 + 0.0226i	0.0011 - 0.0226i
-61	0.0017 + 0.0226i	0.0017 - 0.0226i
-60	0.0022 + 0.0226i	0.0022 - 0.0226i
-59	0.0028 + 0.0226i	0.0028 - 0.0226i
-58	0.0034 + 0.0226i	0.0034 - 0.0226i
-57	0.0039 + 0.0226i	0.0039 - 0.0226i
-56	0.0045 + 0.0226i	0.0045 - 0.0226i
-55	0.0051 + 0.0226i	0.0051 - 0.0226i
-54	0.0057 + 0.0226i	0.0057 - 0.0226i
-53	0.0063 + 0.0226i	0.0063 - 0.0226i
-52	0.0069 + 0.0226i	0.0069 - 0.0226i
-51	0.0075 + 0.0226i	0.0075 - 0.0226i
-50	0.0081 + 0.0226i	0.0081 - 0.0226i
-49	0.0087 + 0.0226i	0.0087 - 0.0226i
-48	0.0094 + 0.0226i	0.0094 - 0.0226i
-47	0.0100 + 0.0226i	0.0100 - 0.0226i

-46	$0.0107 + 0.0226i$	$0.0107 - 0.0226i$
-45	$0.0114 + 0.0225i$	$0.0114 - 0.0225i$
-44	$0.0121 + 0.0225i$	$0.0121 - 0.0225i$

Tabela 5.4: Frequências do operador \mathcal{H} , com função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$.

A Tabela 5.4 mostra algumas frequências do operador \mathcal{H} convoluido com a função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$ pelas duas implementações, isto é, pela Transformada Rápida de Fourier e pela Regra do Trapézio Alternada. Nota-se o mesmo efeito que no caso da função argumento $u(x) = e^{-x^2/2}$, onde a parte real da frequência tem sempre o mesmo sinal e na parte imaginária o sinal fica alternando, mesmo que isso não seja visível nos gráficos contidos nas Figuras 5.12 e 5.13.

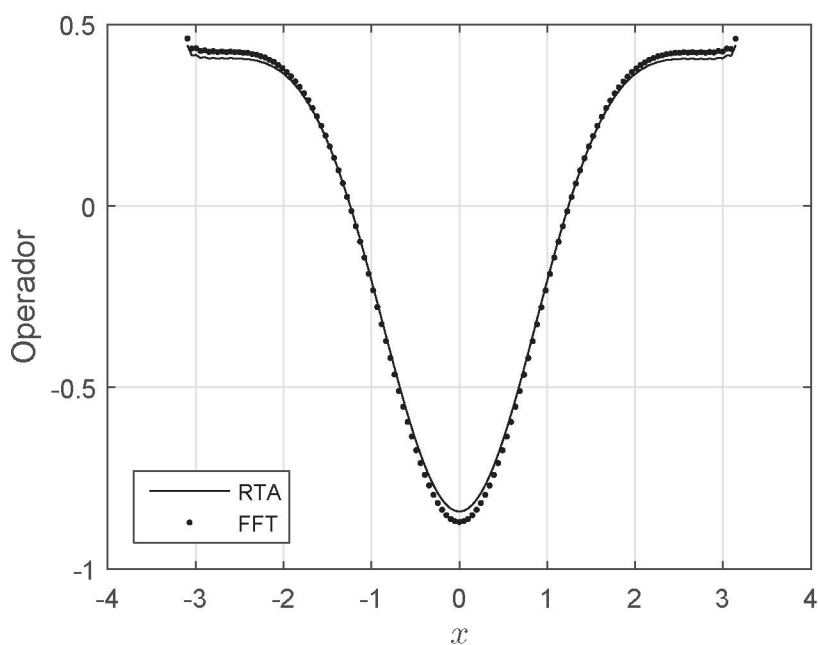


Figura 5.14: Comparação do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$.

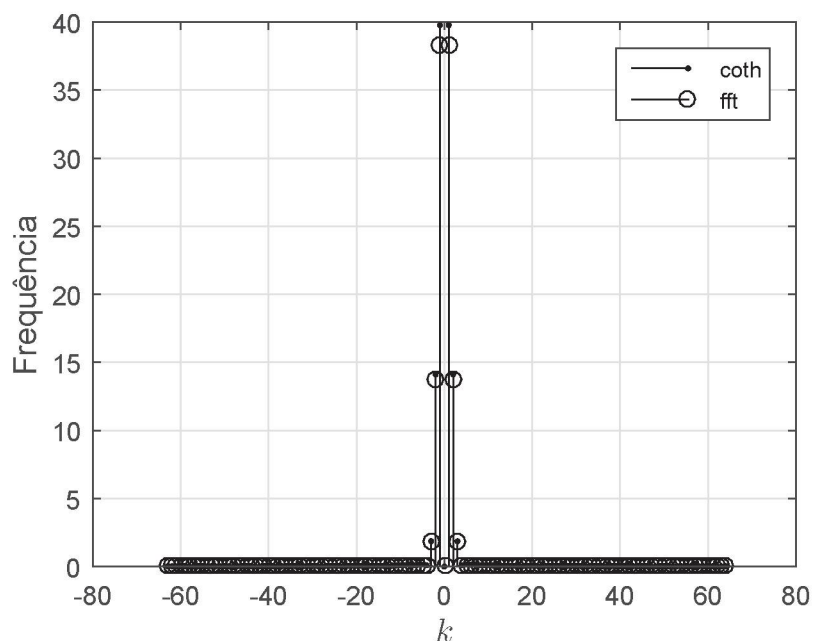


Figura 5.15: Comparação da frequência do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$.

k	<i>Frequência pela Transformada de Fourier</i>	<i>Frequência pela Regra do Trapézio Alternada</i>
0	0.0000 + 0.0000i	-0.0000 + 0.0000i
1	39.7275 - 1.9227i	38.2249 + 1.8500i
2	-14.0409 + 1.4063i	-13.7263 - 1.3748i
3	1.8433 - 0.2505i	1.8228 + 0.2477i
4	0.0837 + 0.0064i	0.0833 - 0.0064i
5	0.1405 - 0.0119i	0.1402 + 0.0119i
6	0.1263 - 0.0147i	0.1262 + 0.0147i
7	0.1137 - 0.0167i	0.1137 + 0.0167i
8	0.1026 - 0.0180i	0.1026 + 0.0180i
9	0.0930 - 0.0190i	0.0930 + 0.0190i
10	0.0847 - 0.0197i	0.0847 + 0.0197i
60	0.0022 - 0.0226i	0.0022 + 0.0225i
61	0.0017 - 0.0226i	0.0017 + 0.0224i
62	0.0011 - 0.0226i	0.0011 + 0.0228i
63	0.0006 - 0.0226i	0.0007 + 0.0278i
64	0.0000 - 0.0226i	0.0000 + 0.0000i
-63	0.0006 + 0.0226i	0.0007 - 0.0278i
-62	0.0011 + 0.0226i	0.0011 - 0.0228i

-61	$0.0017 + 0.0226i$	$0.0017 - 0.0224i$
-60	$0.0022 + 0.0226i$	$0.0022 - 0.0225i$
-10	$0.0847 + 0.0197i$	$0.0847 - 0.0197i$
-9	$0.0930 + 0.0190i$	$0.0930 - 0.0190i$
-8	$0.1026 + 0.0180i$	$0.1026 - 0.0180i$
-7	$0.1137 + 0.0167i$	$0.1137 - 0.0167i$
-6	$0.1263 + 0.0147i$	$0.1262 - 0.0147i$
-5	$0.1405 + 0.0119i$	$0.1402 - 0.0119i$
-4	$0.0837 - 0.0064i$	$0.0833 + 0.0064i$
-3	$1.8433 + 0.2505i$	$1.8228 - 0.2477i$
-2	$-14.0409 - 1.4063i$	$-13.7263 + 1.3748i$
-1	$39.7275 + 1.9227i$	$38.2249 - 1.8500i$

Tabela 5.5: Frequências do operador \mathcal{T} , com função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$.

A Tabela 5.5 mostra algumas frequências do operador \mathcal{T} convoluído com a função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$ pelas duas implementações, isto é, pela Transformada Rápida de Fourier e pela Regra do Trapézio Alternada. Nota-se que a parte imaginária fica alternando de sinal assim como no caso do operador \mathcal{H} . Além disso, há uma pequena diferença principalmente nas frequências altas, isso pode ser verificado também pelo erro relativo. Nesse caso, considera-se o erro relativo dado por (5.19), com γ a frequência obtida pela implementação espectral e β a frequência pela implementação da Regra do Trapézio Alternada, tem-se que o erro relativo é de 0,1021 e o erro relativo real é de 0,0378, observa-se isso nas Figuras 5.14 e 5.15. Além disso, a parte imaginária oscila menos quando comparada com a função argumento sendo a gaussiana, $u(x) = e^{-x^2/2}$, isso porque o erro relativo nesse caso foi de 1,9598.

Também foi feita a implementação com a derivada dessa gaussiana como argumento, isto é, $u(x) = -8xe^{-x^2/2}$.

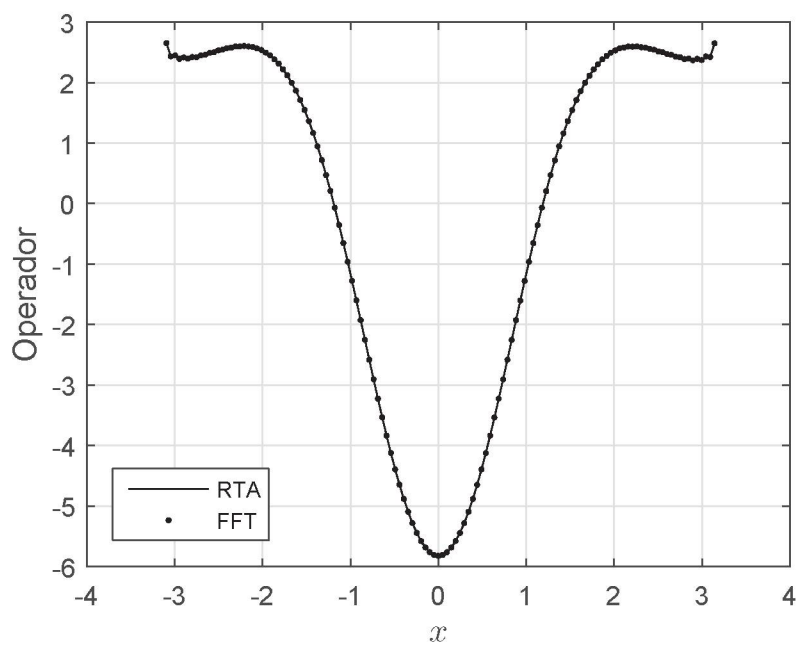


Figura 5.16: Comparação do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -8xe^{-x^2/2}$.

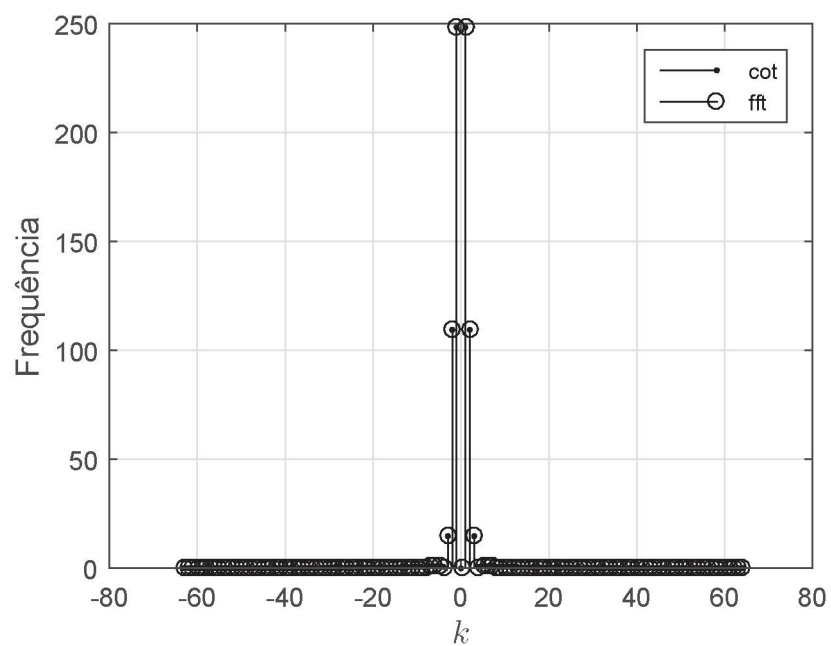


Figura 5.17: Comparação da frequência do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -8xe^{-x^2/2}$.

As Figuras 5.16 e 5.17 mostram que o operador \mathcal{H} teve um comportamento muito parecido nesse caso com os demais. Não foi apresentada a tabela com os valores das frequências, mas o erro relativo nesse caso foi de 0,0967 e o erro relativo real foi de $1,1455 \cdot 10^{-16}$, confirmando que também para essa função argumento, a parte imaginária das frequências fica trocando de sinal e a parte real tem sempre o mesmo sinal.

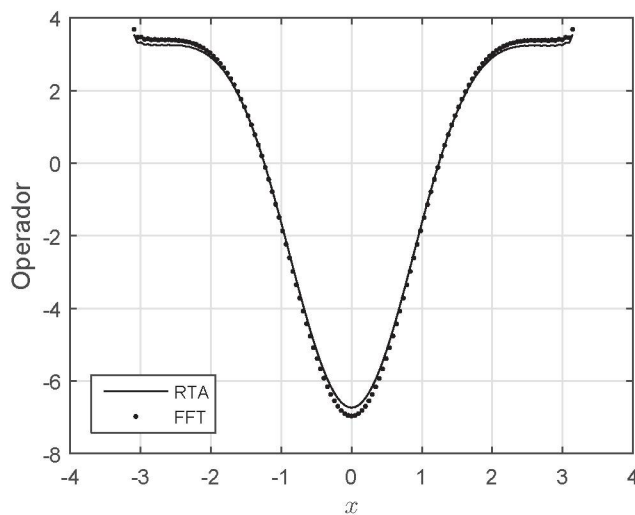


Figura 5.18: Comparação do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -8xe^{-x^2/2}$.

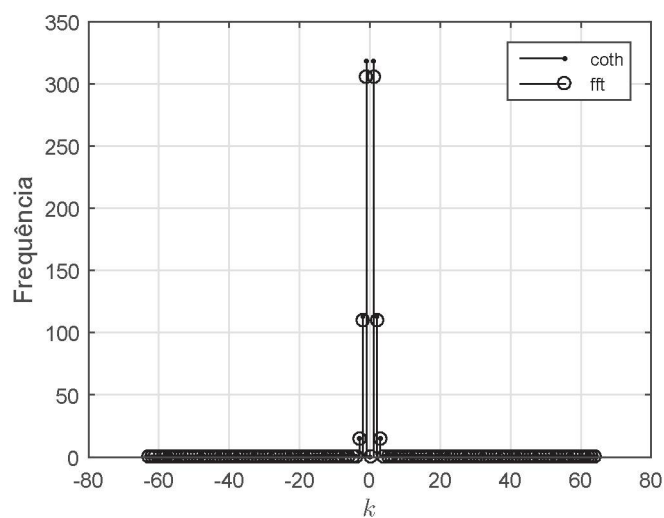


Figura 5.19: Comparação da frequência do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -8xe^{-x^2/2}$.

Nas Figuras 5.18 e 5.19 nota-se que o operador \mathcal{T} teve um comportamento muito parecido nesse caso com os demais. Não foi apresentada a tabela com os valores das frequências, mas o erro relativo nesse caso foi de 0,1021 e o erro relativo real foi de 0,0378, o mesmo erro com a função argumento $u(x) = -xe^{-x^2/2}$.

Por fim, foi feita a implementação com a gaussiana como argumento dada por $u(x) = -8xe^{-4x^2}$.

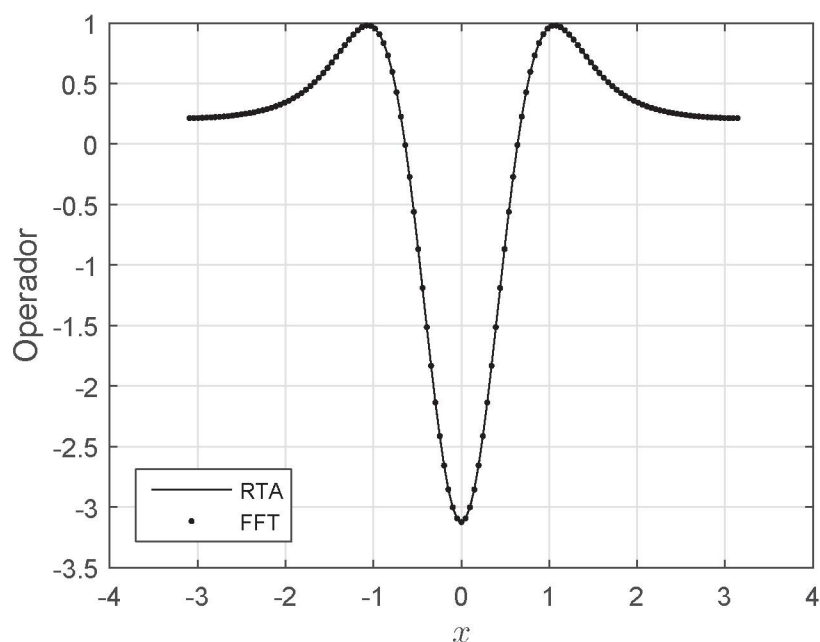


Figura 5.20: Comparação do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -8xe^{-4x^2}$.

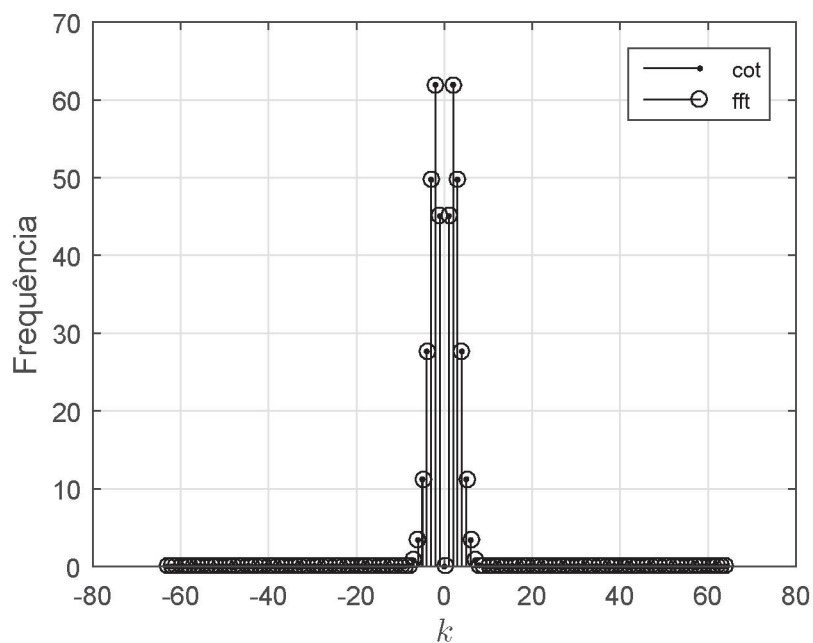


Figura 5.21: Comparação da frequência do operador com o núcleo cotangente, com função argumento $u(x) = -8xe^{-4x^2}$.

Com as Figuras 5.20 e 5.21 observa-se que o operador \mathcal{H} teve um comportamento muito parecido nesse caso com os demais. Não foi apresentado a tabela com os valores das frequências, mas o erro relativo nesse caso foi de 0,2356 e o erro relativo real foi de $2,3052 \cdot 10^{-16}$, confirmando que também para essa função argumento, a parte imaginária das frequências fica trocando de sinal e a parte real é sempre positiva.

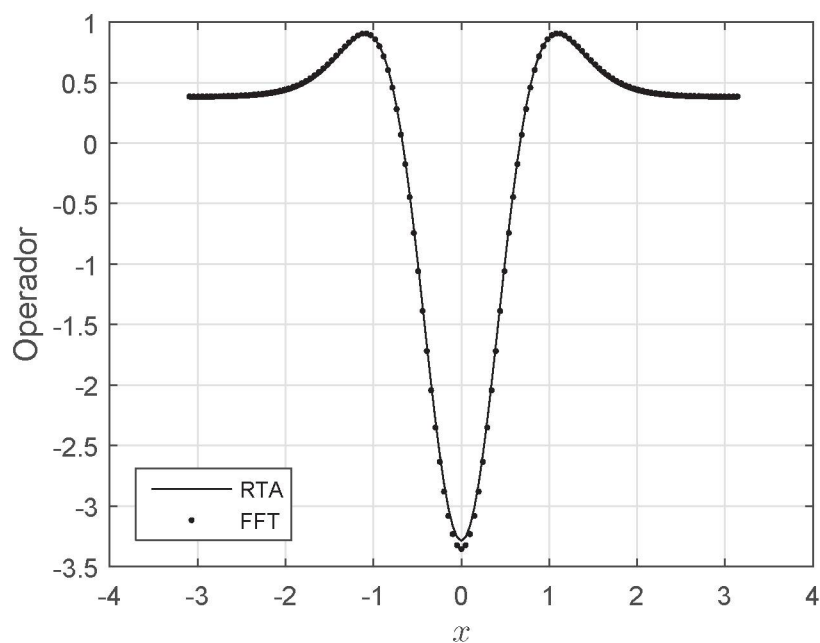


Figura 5.22: Comparação do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -8xe^{-4x^2}$.

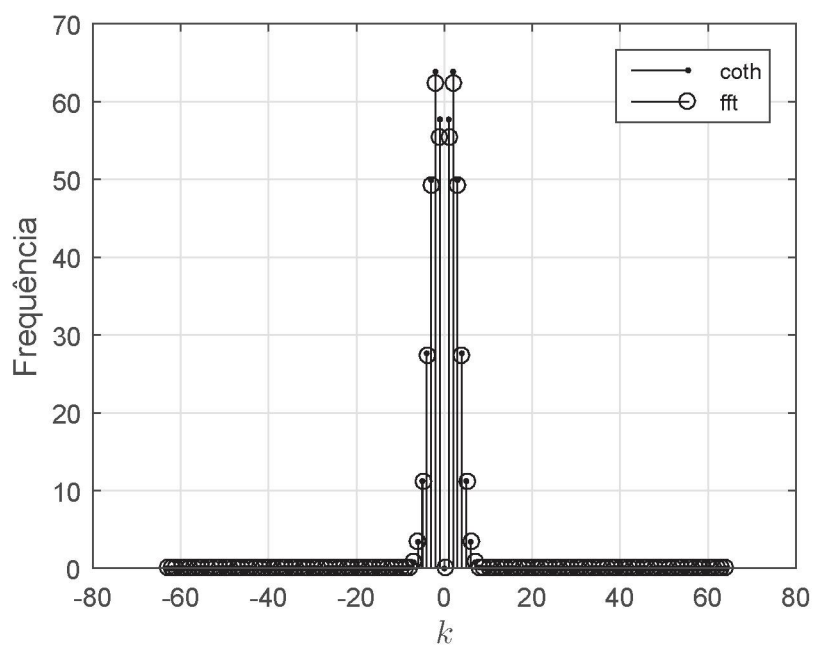


Figura 5.23: Comparação da frequência do operador com o núcleo \tilde{T} , com função argumento $u(x) = -8xe^{-4x^2}$.

O operador \mathcal{T} , a partir das Figuras 5.22 e 5.23, teve um comportamento muito parecido nesse caso com os demais. Não foi apresentado a tabela com os valores das frequências, mas o erro relativo nesse caso foi de 0,2283 e o erro relativo real foi de 0,0343.

Sendo assim, nesse capítulo foi possível fazer um estudo cuidadoso dos operadores que aparecem na família de equações de Benjamin. A partir da implementação numérica dos mesmos será possível então fazer a implementação numérica das soluções da família de equações de Benjamin.

Capítulo 6

Solução Numérica da família de Equações de Benjamin

6.1 Método numérico para a implementação da solução da família de equações de Benjamin regularizada

Considera-se o problema de valor inicial para a família de equações de Benjamin

$$\begin{cases} u_t + u_x - \frac{3}{2}\alpha uu_x - b\mathcal{L}[u]_{xt} - au_{xxt} = 0 & (x, t) \in (-L, L) \times (0, T), \\ u(-L, t) = T_1, u(L, t) = T_2 & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in [0, L], \end{cases} \quad (6.1)$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ com $\hat{\mathcal{H}} = i \operatorname{sgn}(k)$ ou $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ com $\hat{\mathcal{T}} = i \coth(kh)$, $h > 0$, para todo $k \in \mathbb{R}$ no caso não periódico (ou $k \in \mathbb{Z}$, no caso periódico), $k \neq 0$. Os parâmetros α, a, b são positivos, onde b da mesma ordem de \sqrt{a} , com $b < 2\sqrt{a}$ e α da mesma ordem de a .

Para a solução numérica considera-se uma malha uniforme que divide o intervalo $[-L, L]$ em N subintervalos de mesmo comprimento $\Delta x = \frac{2L}{N}$. Os pontos pertencentes à malha são $x_0 = -L$, $x_1 = -L + \Delta x$, $x_2 = -L + 2\Delta x$, \dots , $x_{N-1} = -L + (N-1)\Delta x$, $x_N = L$. Por outro lado, o intervalo $[0, T]$ é subdividido em m subintervalos de mesmo comprimento $\Delta t = \frac{T}{m}$, escolhendo os pontos $t_0 = 0$, $t_1 = \Delta t$, $t_2 = 2\Delta t$, \dots , $t_{m-1} = (m-1)\Delta t$, $t_m = T$. Denota-se a solução discreta por

$$u_k^j = u(-L + k\Delta x, j\Delta t),$$

para $k = 0, \dots, N$ e $j = 0, \dots, m$.

Baseado em [27, 28], a construção do método numérico utilizado para resolver a equação diferencial parcial (EDP) consiste em discretizar o espaço e manter a variável tempo contínua, assim, o resultado é um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) cuja solução foi encontrada a partir de dois métodos: *leapfrog* com o primeiro passo do método das diferenças finitas progressiva e Runge-Kutta de quarta ordem. Este método é chamado de método das linhas. Na discretização espacial, foi utilizado o método das diferenças finitas dos cinco pontos para a derivada de primeira ordem e para a derivada de segunda ordem foi utilizado o método espectral assim como para o termo envolvendo o operador não local, \mathcal{L} . Não foi utilizada a discretização espectral para a derivada primeira pois o estudo da condição de estabilidade se torna inviável nesse caso, justamente pela Transformada de Fourier da primeira derivada.

6.1.1 Discretização espacial

Na sequência serão detalhados os métodos para aproximar as derivadas espaciais, sendo eles: diferenças finitas dos cinco pontos e discretização espectral. O método de diferenças finitas dos cinco pontos será utilizado para a discretização da primeira derivada enquanto que a discretização espectral será utilizada para a segunda derivada, uma vez que para garantir a estabilidade do método, como será visto posteriormente, a aproximação por diferenças finitas dos cinco pontos para a derivada segunda não se mostrou adequada, uma vez que para garantir a estabilidade do método de linhas é necessário encontrar os autovalores da matriz após discretização espacial e isso não foi possível com o método das diferenças finitas dos cinco pontos para a derivada segunda.

Diferenças finitas dos cinco pontos

Baseado em [4], para descrever o método das diferenças finitas dos cinco pontos, considera-se $\Delta x > 0$ e as seguintes expansões de Taylor de uma função u em torno de um ponto x_0 , respectivamente à direita e à esquerda de x_0 :

$$u(x_0 + \Delta x) = u + u' \Delta x + \frac{1}{2!} u'' \Delta x^2 + \frac{1}{3!} u''' \Delta x^3 + \frac{1}{4!} u^{(4)} \Delta x^4 + O(\Delta x^5), \quad (6.2)$$

$$u(x_0 + 2\Delta x) = u + 2u' \Delta x + \frac{4}{2!} u''(x_0) \Delta x^2 + \frac{8}{3!} u''' \Delta x^3 + \frac{16}{4!} u^{(4)} \Delta x^4 + O(\Delta x^5), \quad (6.3)$$

$$u(x_0 - \Delta x) = u - u'\Delta x + \frac{1}{2!}u''\Delta x^2 - \frac{1}{3!}u'''(2\Delta x)^3 + \frac{1}{4!}u^{(4)}(2\Delta x)^4 + O(\Delta x^5), \quad (6.4)$$

$$u(x_0 - 2\Delta x) = u - 2u'\Delta x + \frac{4}{2!}u''\Delta x^2 - \frac{8}{3!}u'''\Delta x^3 + \frac{16}{4!}u^{(4)}\Delta x^4 + O(\Delta x^5), \quad (6.5)$$

onde u e as derivadas que aparecem do lado direito estão avaliadas em x_0 . Dessas igualdades segue que:

$$\begin{aligned} 8(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0 - \Delta x)) + u(x_0 - 2\Delta x) - u(x_0 + 2\Delta x) &= \\ &= 12\frac{du}{dx}(x_0)\Delta x + O(\Delta x^5), \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}(x_0) &= \frac{8(u(x_0 + \Delta x) - u(x_0 - \Delta x)) + u(x_0 - 2\Delta x) - u(x_0 + 2\Delta x)}{12\Delta x} \\ &\quad + O(\Delta x^4). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}(x_0) &= \frac{-u(x_0 + 2\Delta x) + 8u(x_0 + \Delta x) - 8u(x_0 - \Delta x) + u(x_0 - 2\Delta x)}{12\Delta x} \\ &\quad + O(\Delta x^4). \end{aligned}$$

Dessa forma, o esquema das diferenças finitas explícito para aproximar u_x com um erro de quarta ordem é dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_k, t_j) \approx \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{1}{12}u_{k+2}^j + \frac{2}{3}u_{k+1}^j - \frac{2}{3}u_{k-1}^j + \frac{1}{12}u_{k-2}^j \right).$$

Se $v^{(j)}$ é o vetor no passo do tempo j que se aproxima de $u(x_k, j\Delta t)$, então na grade de pontos x_k , a derivada espacial é $(Dv^{(j)})_k$, onde D é uma matriz

circulante e simétrica dada por:

$$D = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & -1/12 & 0 & \cdots & 0 & 1/12 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & 2/3 & -1/12 & & & \ddots & 1/12 \\ 1/12 & -2/3 & 0 & 2/3 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 1/12 & -2/3 & 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 0 & 2/3 & -1/12 \\ -1/12 & \ddots & & & \ddots & -2/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & -1/12 & 0 & & & 1/12 & -2/3 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Analogamente, para aproximar a derivada espacial de segunda ordem pelo método das diferenças finitas dos cinco pontos, considera-se as igualdades (6.2), (6.3), (6.4) e (6.5), acrescentando os termos $\frac{1}{5!}u^{(5)}\Delta x^5 + O(\Delta x^6)$, $\frac{32}{5!}u^{(5)}\Delta x^5 + O(\Delta x^6)$, $-\frac{1}{5!}u^{(5)}\Delta x^5 + O(\Delta x^6)$ e $-\frac{32}{5!}u^{(5)}\Delta x^5 + O(\Delta x^6)$, respectivamente. Assim:

$$\begin{aligned} -u(x_0 + 2\Delta x) + 16u(x_0 + \Delta x) + 16u(x_0 - \Delta x) - u(x_0 - 2\Delta x) &= \\ &= 30u(x_0) + 12\frac{d^2u}{dx^2}(x_0)\Delta x^2 + O(\Delta x^6). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2}(x_0) &= \\ &= \frac{-u(x_0 + 2\Delta x) + 16u(x_0 + \Delta x) - 30u(x_0) + 16u(x_0 - \Delta x) - u(x_0 - 2\Delta x)}{12\Delta x^2} \\ &+ O(\Delta x^4). \end{aligned}$$

Portanto, o esquema das diferenças finitas explícito para aproximar u_{xx} com um erro de quarta ordem é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_k, t_j) \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left(-\frac{1}{12}u_{k+2}^j + \frac{4}{3}u_{k+1}^j - \frac{5}{2}u_k^j + \frac{4}{3}u_{k-1}^j - \frac{1}{12}u_{k-2}^j \right).$$

A matriz da derivada espacial, pelo método das diferenças finitas dos cinco

pontos, de segunda ordem $D2$ é dada por:

$$D2 = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -5/2 & 4/3 & -1/12 & 0 & \cdots & 0 & -1/12 & 4/3 \\ 4/3 & -5/2 & 4/3 & -1/12 & & & \ddots & -1/12 \\ -1/12 & 4/3 & -5/2 & 4/3 & \ddots & & & 0 \\ 0 & -1/12 & 4/3 & -5/2 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -5/2 & 4/3 & -1/12 \\ -1/12 & \ddots & & & \ddots & 4/3 & -5/2 & 2/3 \\ 4/3 & -1/12 & 0 & & & -1/12 & 4/3 & -5/2 \end{bmatrix}.$$

Discretização espectral

Considera-se a equação (6.1), dela segue que:

$$u_t - b\mathcal{L}[u]_{xt} - au_{xxt} = -u_x + \frac{3}{4}\alpha(u^2)_x.$$

Se $\psi = u - b\mathcal{L}[u]_x - au_{xx}$, então

$$\hat{\psi}(k) = \hat{u}(k) - b\mathcal{L}[\hat{u}]_x(k) - a\hat{u}_{xx}(k).$$

Caso $\mathcal{L} = \mathcal{H}$ vale que $\hat{\mathcal{H}} = \mathbf{i} \operatorname{sgn}(k)$, para todo $k \in \mathbb{R}$ e portanto:

$$\hat{\psi}(k) = \left(1 + b\frac{|k|\pi}{L} + a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \right) \hat{u}(k) = v_1(k)\hat{u}(k).$$

Caso $\mathcal{L} = \mathcal{T}$ vale que $\hat{\mathcal{T}} = \mathbf{i} \coth(kh)$, $h > 0$, para todo $k \in \mathbb{R}$ e portanto:

$$\hat{\psi}(k) = \left(1 + b\frac{k \coth(kh)\pi}{L} + a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \right) \hat{u}(k) = v_2(k)\hat{u}(k).$$

Escrevendo na forma matricial,

$$\hat{\psi} = \hat{P}\hat{u}, \quad (6.7)$$

onde $\hat{P} = \operatorname{diag}(v_i(k))$, com

$$v_i(k) = \begin{cases} 1 + b\frac{|k|\pi}{L} + a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, & \text{se } i = 1(\mathcal{L} = \mathcal{H}) \\ 1 + b\frac{k \coth(kh)\pi}{L} + a\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, & \text{se } i = 2(\mathcal{L} = \mathcal{T}) \end{cases}$$

Logo, P é a matriz da discretização espectral para o termo $\psi = u - b\mathcal{L}[u]_x - au_{xx}$ da família de equações de Benjamin.

6.1.2 Discretização temporal

Neste trabalho será feita uma comparação entre dois métodos para a discretização temporal, são eles: o método de *leapfrog* e o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Esses métodos são completamente distintos uma vez que o método de *leapfrog* usa diferenças finitas avaliando a função em dois passos da malha para obter maior precisão. Enquanto que os métodos de Runge-Kutta simplificam os métodos de Taylor eliminando o cálculo dos termos com derivadas, mantendo o mesmo erro.

Método de *leapfrog*

Segundo [28, 29], o método de *leapfrog* aproxima u_t , a derivada de primeira ordem no tempo, por diferenças finitas centradas:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_k, t_j) = \frac{u_k^{j+1} - u_k^{j-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2). \quad (6.8)$$

O método das diferenças finitas progressiva aproxima u_t , a derivada de primeira ordem no tempo por:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_k, t_j) = \frac{u_k^{j+1} - u_k^j}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (6.9)$$

O método das diferenças finitas progressiva será utilizado no primeiro passo do método de *leapfrog*. A convergência do método de *leapfrog* não é alterada pelo primeiro passo, porque o erro da aproximação de Taylor envolvida em (6.9) é de ordem dois para u^1 , único vetor calculado. Isto é, a expressão dada por (6.9) não é utilizada para iterar, por isso o que é necessário da expressão (6.9) é apenas a aproximação de Taylor de ordem dois e não a ordem de convergência.

Método de Runge-Kutta

De acordo com [28], o método de Runge-Kutta consiste em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, fazendo-se várias avaliações da função a cada passo. O método de Runge-Kutta pode ser entendido como um aperfeiçoamento do método de Euler. No método de Euler a estimativa do valor de y_{k+1} é realizado com o valor de y_k e com

a derivada no ponto x_k . No método de Runge-Kutta, busca-se uma melhor estimativa da derivada com a avaliação da função em mais pontos no intervalo $[x_k, x_{k+1}]$. Um método de Runge-Kutta de ordem n possui um erro da ordem de $O(\Delta t^{n+1})$.

Depois da discretização espacial, considera-se o sistema de EDO's

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_k, t) = f(x_k, t, u(x_k, t)),$$

onde f é a expressão obtida da EDP semidiscretizada.

Dessa forma, o método de Runge-Kutta de quarta ordem é dado por:

$$u(x_k, t_j + \Delta t) \approx u(x_k, t_j) + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

onde

$$K_1 = \Delta t f(x_k, t_j, u(x_k, t_j)), \quad (6.10)$$

$$K_2 = \Delta t f\left(x_k, t_j + \frac{\Delta t}{2}, u(x_k, t_j) + \frac{K_1}{2}\right), \quad (6.11)$$

$$K_3 = \Delta t f\left(x_k, t_j + \frac{\Delta t}{2}, u(x_k, t_j) + \frac{K_2}{2}\right), \quad (6.12)$$

$$K_4 = \Delta t f(x_k, t_j + \Delta t, u(x_k, t_j) + K_3). \quad (6.13)$$

Na próxima seção será explicitado o algoritmo para encontrar a solução da família de equações de Benjamin descritas em (6.1).

6.1.3 Algoritmo para encontrar a solução da família de equações de Benjamin

Para encontrar a solução da família de equações de Benjamin dada por (6.1), será utilizado o método das linhas na discretização temporal, após discretização espacial. Segundo [27], página 101, quando a EDP depende do tempo, ou seja, é uma EDP de evolução no tempo, ela é resolvida numericamente de forma eficiente por métodos espectrais. O padrão é geralmente o mesmo: discretização espectral no espaço e diferenças finitas no tempo. Por exemplo, pode-se utilizar para a discretização temporal o método de Euler, o método de *leapfrog*, métodos de Adams ou o método de Runge-Kutta. A princípio, sacrifica-se a precisão espectral ao fazê-lo, mas na prática, pequenos passos no tempo com fórmulas de ordem 2 ou superior geralmente deixam a precisão global bastante satisfatória. Passos pequenos no tempo são muito mais vantajosos do que intervalos de discretização pequenos no espaço, pois afetam o

tempo de execução, mas não o armazenamento, e somente linearmente. Por outro lado, reduzir pela metade o passo da discretização espacial geralmente multiplica o armazenamento por 2^d onde d é a dimensão do espaço, e pode multiplicar o tempo de execução de cada passo de 2^d até 2^{3d} , dependendo da álgebra linear envolvida.

Na discretização espacial será utilizado o método das diferenças finitas dos cinco pontos para a derivada espacial de primeira ordem e a discretização espectral para a derivada espacial de segunda ordem, com isso obtem-se uma EDP semidiscretizada. Depois disso, na discretização temporal serão utilizados os métodos de *leapfrog* com o primeiro passo pelo método das diferenças finitas progressiva e de Runge-Kutta de quarta ordem.

Como a família de equações de Benjamin regularizadas são da forma

$$u_t + u_x - \frac{3}{2}\alpha uu_x - b\mathcal{L}[u]_{xt} - au_{xxt} = 0,$$

então,

$$(1 - b\mathcal{L}[\partial_x] - a\partial_{xx}) u_t = - \left(u - \frac{3}{4}\alpha u^2 \right)_x. \quad (6.14)$$

Fazendo inicialmente a discretização espacial, do lado direito da equação (6.14) aparece a matriz P dada pela equação (6.7) e do lado esquerdo da equação (6.14) aparece a matriz D dada pela equação (6.6). Assim, considera-se $B = P^{-1}D$, da equação (6.14) segue que

$$u_t = -B \left(u - \frac{3}{4}\alpha u^2 \right), \quad (6.15)$$

obtendo assim a EDP semidiscretizada.

Agora, pelo método de linhas, seja $v^{(j)}$ o vetor no passo do tempo j que se aproxima de $u(x_k, j\Delta t)$. Considera-se, inicialmente, o método de *leapfrog* para a aproximação temporal, da expressão (6.8) e da equação (6.15) segue que

$$\frac{v_k^{j+1} - v_k^{j-1}}{2\Delta t} = - \left(B \left(v^{(j)} - \frac{3}{4}\alpha (v^{(j)})^2 \right) \right)_k,$$

isto é,

$$v_k^{j+1} = v_k^{j-1} - 2\Delta t \left(B \left(v^{(j)} - \frac{3}{4}\alpha (v^{(j)})^2 \right) \right)_k. \quad (6.16)$$

Observa-se que no primeiro passo, isto é, $j = 0$ na equação (6.16), é necessário encontrar v_k^{-1} no lado direito da igualdade desta equação, o que não faz sentido. Sendo assim, para calcular v_k^1 será utilizado o método das diferenças finitas progressiva dado pela equação (6.9). Fazendo $j = 0$ na equação (6.9),

tem-se que:

$$\frac{v_k^1 - v_k^0}{\Delta t} = - \left(B \left(v^{(0)} - \frac{3}{4} \alpha (v^{(0)})^2 \right) \right)_k ,$$

assim para o primeiro passo do método considera-se:

$$v_k^1 = v_k^0 - \Delta t \left(B \left(v^{(0)} - \frac{3}{4} \alpha (v^{(0)})^2 \right) \right)_k .$$

De maneira análoga, considera-se no método de linhas a discretização temporal dada pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, (6.13), então para a grade de pontos x_k tem-se que

$$v_k^{j+1} = v_k^j + \frac{1}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)_k ,$$

onde

$$\begin{aligned} K_1 &= -\Delta t B \left(v^j - \frac{3}{4} \alpha (v^j)^2 \right) , \\ K_2 &= -\Delta t B \left(v^j + \frac{K_1}{2} - \frac{3}{4} \alpha \left(v^j + \frac{K_1}{2} \right)^2 \right) , \\ K_3 &= -\Delta t B \left(v^j + \frac{K_2}{2} - \frac{3}{4} \alpha \left(v^j + \frac{K_2}{2} \right)^2 \right) , \\ K_4 &= -\Delta t B \left(v^j + K_3 - \frac{3}{4} \alpha (v^j + K_3)^2 \right) . \end{aligned}$$

Dessa forma, o pseudocódigo do algoritmo da implementação com o método *leapfrog* é descrito da seguinte forma:

Algoritmo 6.1.1. Solução pelo método *leapfrog*

Dados: N, L, a, b, α

$$\Delta x = \frac{2L}{N}$$

$$x = -L + \Delta x : \Delta x : L$$

$t = 0$ (define-se o tempo inicial)

Δt (escolhe-se o tamanho do Δt)

D (matriz da discretização espacial de primeira ordem pelo método das diferenças finitas dos cinco pontos)

P (matriz da discretização espacial de segunda ordem pela discretização espectral)

$$B = P^{-1}D$$

u_0 (define-se a solução inicial)

Repita para cada instante de tempo $t + \Delta t$

$$u_1 = u_0 - \Delta t B(u_0 - 0,75\alpha u^2)$$

(passo 1 dado pelo método das diferenças finitas progressiva)

Chame: $uold = u_0$ e $u = u_1$

$$\text{Faça: } unew = uold - 2\Delta t B(u - 0,75\alpha u^2)$$

(passo m do *leapfrog*)

Plot $unew$

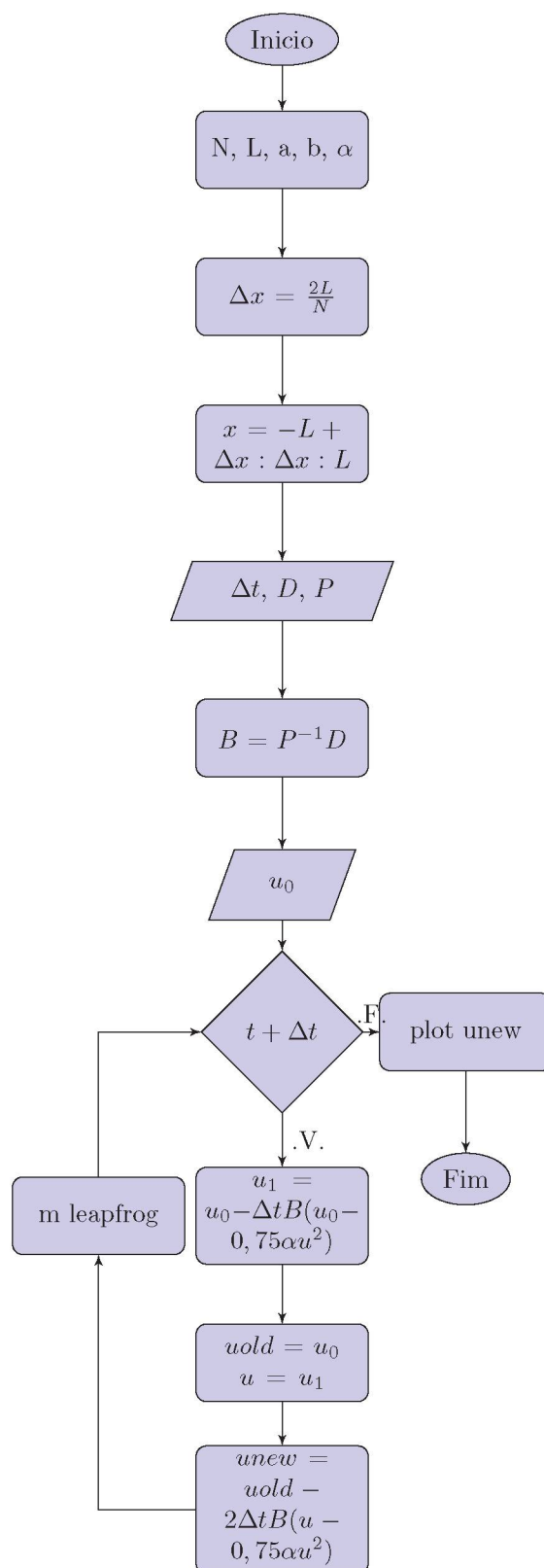


Figura 6.1: Fluxograma mostrando os passos do Método *leapfrog*.

O fluxograma 6.1 ilustra o algoritmo 6.1.1 da implementação com o método *leapfrog*. Analogamente, o código do algoritmo da implementação com o método Runge-Kutta de quarta ordem é descrito da seguinte forma:

Algoritmo 6.1.2. Solução pelo método Runge-Kutta de quarta ordem

Dados: N, L, a, b, α

$$\Delta x = \frac{2L}{N}$$

$$x = -L + \Delta x : \Delta x : L$$

$t = 0$ (define-se o tempo inicial)

Δt (escolhe-se o tamanho do Δt)

D (matriz da discretização espacial de primeira ordem pelo método das diferenças finitas dos cinco pontos)

P (matriz da discretização espacial de segunda ordem pela discretização espectral)

$$B = P^{-1}D$$

u_0 (define-se a solução inicial)

Repita para cada instante de tempo $t + \Delta t$

Chame: $u = u_0$ ou $u = unew$

$$K1 = -\Delta t B(u - 0, 75\alpha u^2)$$

$$K2 = -\Delta t B\left(u + \frac{K1}{2} - 0, 75\alpha \left(u + \frac{K1}{2}\right)^2\right)$$

$$K3 = -\Delta t B\left(u + \frac{K2}{2} - 0, 75\alpha \left(u + \frac{K2}{2}\right)^2\right)$$

$$K4 = -\Delta t B\left(u + K3 - 0, 75\alpha \left(u + K3\right)^2\right)$$

$$unew = u + \frac{1}{6}(K1 + 2K2 + 2K3 + K4)$$

Plot $unew$

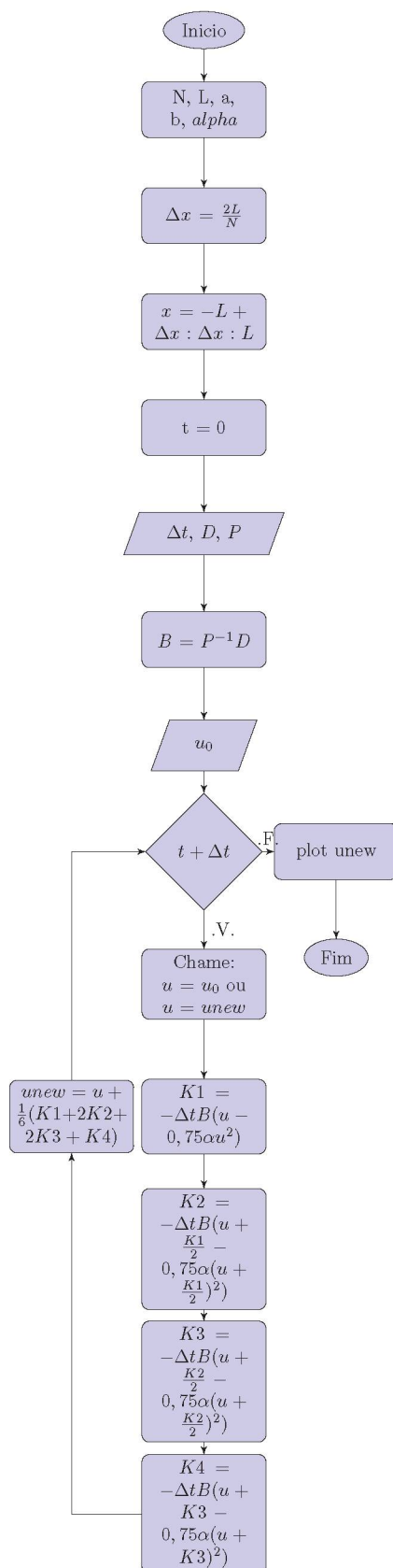


Figura 6.2: Fluxograma mostrando os passos do Método Runge-Kutta de quarta ordem.

O fluxograma 6.2 ilustra o algoritmo 6.1.2 da implementação com o método Runge-Kutta de quarta ordem.

6.2 Implementação da solução da família de equações de Benjamin linearizada

Nesta seção, inicialmente, será feito o estudo da condição de estabilidade, segundo [27, 30], do método descrito na seção anterior apenas para o caso da equação Benjamin-Bona-Mahony (BBM) linear adaptada com as constantes de acordo com a família de equações de Benjamin dada por:

$$u_t + u_x - au_{xxt} = 0,$$

isto é, $\alpha = 0$ e $b = 0$. A condição de estabilidade irá fornecer o valor de Δt para garantir a estabilidade do método.

Depois, será feita a implementação da solução para a equação da onda unidirecional ($u_t + u_x = 0$), da BBM adaptada linear e do tipo Benjamin no caso linear a partir do método descrito na seção anterior. A solução aproximada será comparada com a solução analítica (com expressão dada na Tabela 3.1 do Capítulo 3).

Também será feita a implementação do método como descrito na seção anterior para a família de equações de Benjamin no caso não linear. Nesse caso, não tem solução analítica, mas será possível analisar a diferença do método de linhas quando utilizado o método *leapfrog* e quando utilizado o método de Runge Kutta de quarta ordem.

6.2.1 Condição de estabilidade

Considera-se a equação BBM linear adaptada da equação de Benjamin: $u_t + u_x - au_{xxt} = 0$ (a equação sem o operador). Como já foi descrito, a EDP semidiscretizada é dada por

$$u_t \approx -P^{-1}Du,$$

onde as matrizes D e P são obtidas da discretização espacial, isto é, D é dada por:

$$D = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & -1/12 & 0 & \cdots & 0 & 1/12 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & 2/3 & -1/12 & & & \ddots & 1/12 \\ 1/12 & -2/3 & 0 & 2/3 & \ddots & & & 0 \\ 0 & 1/12 & -2/3 & 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 0 & 2/3 & -1/12 \\ -1/12 & \ddots & & & \ddots & -2/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & -1/12 & 0 & & & 1/12 & -2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

e a matriz P tem como símbolo $\hat{P} = \text{diag}(v(k))$, onde $v(k) = 1 + a \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \neq 0$, $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$.

Dessa forma, segue que D é real, anti-simétrica e Toeplitz circulante. Portanto, D é diagonalizada pela matriz de Fourier e seus autovalores têm a forma:

$$\lambda_k(D) = \sum_{m=1}^N d_m e^{i(m-1)\theta_k},$$

onde d_m são os elementos da primeira coluna da matriz D , $\theta_k = \frac{2\pi k}{N}$, $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \lambda_k(D) &= \sum_{m=0}^{N-1} d_{m+1} [\cos(m\theta_k) + i \text{sen}(m\theta_k)] \\ &= -\frac{1}{\Delta x} \frac{2}{3} [\cos(\theta_k) + i \text{sen}(\theta_k) - \cos((N-1)\theta_k) - i \text{sen}((N-1)\theta_k)] \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{12} [\cos(2\theta_k) + i \text{sen}(2\theta_k) - \cos((N-2)\theta_k) - i \text{sen}((N-2)\theta_k)], \end{aligned}$$

como $\theta_k = \frac{2\pi k}{N}$, cosseno é uma função par e seno uma função ímpar, segue que $\cos(p(N-1)\theta_k) = \cos(p\theta_k)$ e $\text{sen}(p(N-1)\theta_k) = -\text{sen}(p\theta_k)$, para todo p real. E disso segue que

$$\begin{aligned} \lambda_k(D) &= -\frac{2}{3\Delta x} 2i \text{sen}(\theta_k) + \frac{1}{12\Delta x} 2i \text{sen}(2\theta_k) \\ &= \frac{i}{\Delta x} \left[\frac{1}{6} \text{sen}(2\theta_k) - \frac{4}{3} \text{sen}(\theta_k) \right]. \end{aligned}$$

Se $\gamma(\theta_k) = \frac{1}{6} \sin(2\theta_k) - \frac{4}{3} \sin(\theta_k)$, então $\lambda_k(D) = \frac{i}{\Delta x} \gamma(\theta_k)$, $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$.

Além disso, como a matriz P tem como símbolo $\hat{P} = \text{diag}(v(k))$, onde $v(k) = 1 + a \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \neq 0$, $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$, segue que seus autovalores são

$$\lambda_k(P) = v(k),$$

$-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$. Nota-se que P é inversível, pois seus autovalores são não nulos.

Conclui-se que se $P^{-1}D = B$, então os autovalores da matriz B são:

$$\lambda_k(B) = \frac{\lambda_k(D)}{\lambda_k(P)},$$

$$-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}.$$

Agora na discretização temporal considera-se a malha $t_n = n\Delta t$, onde $0 = t_0 < t_1 < \dots < T$. Segundo [27], o método de linhas é estável se os autovalores do sistema semidiscretizado linear, escalado por Δt , estão na região de estabilidade R do método usado na discretização temporal, isto é, $\lambda_k(B)\Delta t \in R$.

Segundo [27, 30], para garantir a estabilidade, inicialmente, denota-se por u_m^n a solução no passo do tempo n que se aproxima de $u(x_m, n\Delta t)$ e posteriormente, substitui-se u_m^n por $g^n e^{im\theta}$ no método, onde m e n são potências, obtendo assim, a equação característica do método. A condição para estabilidade é que ambas as raízes desta equação devem estar no disco unitário fechado.

No método de *leapfrog* considera-se o passo $n+1$ dado pelo método como:

$$u_m^{n+1} = u_m^{n-1} - 2\Delta t (Bu^n)_m,$$

substituindo u_m^n por $g^n e^{im\theta}$, segue que

$$\begin{aligned} g^{n+1} e^{im\theta} &= g^{n-1} e^{im\theta} - 2\Delta t \lambda_m(B) g^n e^{im\theta} \\ \frac{g^{n+1}}{g^{n-1}} &= 1 - 2\Delta t \lambda_m(B) \frac{g^n}{g^{n-1}}. \end{aligned}$$

Nota-se que $g = \frac{g^{n+1}}{g^n} = \frac{g^n}{g^{n-1}}$, logo $g^2 = \frac{g^{n+1}}{g^{n-1}}$ e então

$$\begin{aligned} g^2 + 2\Delta t \lambda_m(B) g - 1 &= 0 \\ g^2 + 2i \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\gamma(\theta)}{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} g - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$g = \frac{-2i \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\gamma(\theta)}{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} \pm \sqrt{-4 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\gamma(\theta)^2}{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)^2} + 4}}{2}$$

$$g_{\pm}(\theta, \Delta x) = -i \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\gamma(\theta)}{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} \pm \sqrt{1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\gamma(\theta)^2}{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)^2}}, \quad (6.17)$$

considera-se $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \sigma$ constante.

Disso segue que

$$\begin{aligned} \hat{u}^n(k) &= A_+(k)g_+^n(\theta, \Delta x) + A_-(k)g_-^n(\theta, \Delta x) \\ &= A(k)g_+^n(\theta, \Delta x) + B(k) \left[\frac{g_-^n(\theta, \Delta x) - g_+^n(\theta, \Delta x)}{g_-(\theta, \Delta x) - g_+(\theta, \Delta x)} \right]. \end{aligned}$$

E se $g_+ = g_-$, então

$$\hat{u}^n(k) = A(k)g^n(\theta, \Delta x) + B(k)ng^{n-1}(\theta, \Delta x), \quad (6.18)$$

onde $A(k)$ e $B(k)$ dependem das condições iniciais do problema.

As condições de estabilidade serão analisadas pelo discriminante da equação (6.17). Lembrando que $\gamma(\theta) = \frac{1}{6} \sin(2\theta) - \frac{4}{3} \sin(\theta)$ e $v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right) = 1 + a\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)^2$, logo $0 \leq |\gamma(\theta)| \leq \frac{3}{2}$ e $1 \leq v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)$, para todo $|\theta| \leq \pi$ e $\Delta x > 0$.

CASO 01: Se $1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\gamma^2(\theta)}{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} = 0$, então $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)}{|\gamma(\theta)|}$. Nesse caso, tem-se que

$$\begin{aligned} g &= g_+ = g_- \\ &= -i \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\gamma(\theta)}{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} \\ &= -i \frac{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)}{|\gamma(\theta)|} \frac{\gamma(\theta)}{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} \\ &= \pm i, \end{aligned}$$

o sinal é o oposto do sinal da $\gamma(\theta)$. Mas na equação (6.18) tem-se que para um θ e k fixo

$$\hat{u}^n(k) = A(k)(\pm i)^n + B(k)n(\pm i)^{n-1}$$

e quando os valores de B não são nulos, \hat{u}^n cresce quase linearmente em n . Já que \hat{u}^n para θ e k fixos se comportam assim, existem soluções para o esquema das diferenças finitas cuja norma cresce quase linearmente em n . Portanto, nesse caso o método *leapfrog* é instável.

CASO 02: Se $1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\gamma^2(\theta)}{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} > 0$, então $\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} < \frac{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)}{\gamma^2(\theta)}$ e de (6.17) segue que

$$|g_{\pm}|^2 = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\gamma^2(\theta)}{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} + \left[1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\gamma^2(\theta)}{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} \right] = 1.$$

Portanto, $|g_{\pm}| = 1$ se $\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x} < \left| \frac{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)}{\gamma(\theta)} \right|$, logo

$$\sigma < \frac{\inf_{|\theta| \leq \pi, \Delta x > 0} \left(v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right) \right)}{\sup_{|\theta| \leq \pi} (\gamma(\theta))} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Reciprocamente, se $\sigma < \frac{2}{3}$, então $\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} < \frac{4}{9}$. Como $v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right) \geq 1$ e $|\gamma(\theta)| \leq \frac{3}{2}$, então $0 \leq \frac{|\gamma(\theta)|^2}{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} \leq \frac{9}{4}$, assim

$$\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{|\gamma(\theta)|^2}{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} < \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4},$$

$$1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{|\gamma(\theta)|^2}{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} > 0.$$

Disso segue, que o método é estável se, e somente se, $\sigma < \frac{2}{3}$.

CASO 03: Se $1 - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\gamma^2(\theta)}{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} < 0$, então $\frac{\Delta t}{\Delta x} > \left| \frac{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)}{\gamma(\theta)} \right|$. Da equação (6.17) segue que

$$g_{\pm} = \mathbf{i} \left[-\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\gamma(\theta)}{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} \pm \sqrt{\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\gamma^2(\theta)}{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} - 1} \right],$$

e então,

$$|g_{-}| = \left| \frac{\gamma(\theta)}{v\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} \right| \frac{\Delta t}{\Delta x} + \sqrt{\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\gamma^2(\theta)}{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} - 1} > 1 + \sqrt{\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{\gamma^2(\theta)}{v^2\left(\frac{\theta}{\Delta x}\right)} - 1} > 1.$$

Assim, o método é instável.

Conclui-se então que $|g_{\pm}| \leq 1$ se, e somente se, $\sigma < \frac{2}{3}$. Isto é, o método *leapfrog* é estável se, e somente se, $\sigma < \frac{2}{3}$.

Analogamente, se o método da discretização temporal for pelo método

Runge-Kutta de quarta ordem, segue-se que

$$u^{n+1} = \left(1 - \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2!} B^2 - \frac{\Delta t^3}{3!} B^3 + \frac{\Delta t^4}{4!} B^4 \right) u^n,$$

como $B = P^{-1}D$, e além disso, P e D tem os mesmos autovetores, então elas comutam e portanto, $B^2 = P^{-2}D^2$, $B^3 = P^{-3}D^3$ e $B^4 = P^{-4}D^4$.

Para estudar a estabilidade do método substitui-se u_m^n por $g^n e^{im\theta}$. Logo,

$$g^{n+1} e^{im\theta} = \left[1 - \Delta t \lambda_m(B) + \frac{\Delta t^2}{2!} \lambda_m^2(B) - \frac{\Delta t^3}{3!} \lambda_m^3(B) + \frac{\Delta t^4}{4!} \lambda_m^4(B) \right] g^n e^{im\theta},$$

$$\begin{aligned} g &= 1 - \Delta t \lambda_m(B) + \frac{\Delta t^2}{2} \lambda_m^2(B) - \frac{\Delta t^3}{6} \lambda_m^3(B) + \frac{\Delta t^4}{24} \lambda_m^4(B) \\ &= 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{i} \frac{\gamma(\theta)}{v \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)} - \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \frac{1}{2} \frac{\gamma^2(\theta)}{v^2 \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)} + \frac{\Delta t^3}{\Delta x^3} \frac{\mathbf{i}}{6} \frac{\gamma^3(\theta)}{v^3 \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)} + \frac{\Delta t^4}{\Delta x^4} \frac{1}{24} \frac{\gamma^4(\theta)}{v^4 \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\gamma^2(\theta)}{v^2 \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)} + \frac{1}{24} \sigma^4 \frac{\gamma^4(\theta)}{v^4 \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)} + \mathbf{i} \left[-\sigma \frac{\gamma(\theta)}{v \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)} + \frac{1}{6} \sigma^3 \frac{\gamma^3(\theta)}{v^3 \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Se $y = \sigma \frac{\gamma(\theta)}{v \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)}$, então $g = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \mathbf{i} \left(-y + \frac{y^3}{6} \right)$, assim,

$$|g|^2 = \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} \right)^2 + \left(-y + \frac{y^3}{6} \right)^2 = 1 + \frac{y^6(y^2 - 8)}{576}.$$

Logo, $|g|^2 = 1 + p(y)$, onde $p(y) = \frac{y^6(y^2 - 8)}{576}$ e $y = \sigma \frac{\gamma(\theta)}{v \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)}$. Se $p(y) \leq 0$, então $|g|^2 \leq 1$ e portanto, $|g| \leq 1$. No entanto, nota-se que $p(y) \leq 0$ se, e somente se, $|y| \leq 2\sqrt{2}$. Isto é, $|g| \leq 1$ se, e somente se, $\left| \sigma \frac{\gamma(\theta)}{v \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)} \right| \leq 2\sqrt{2}$. Mas,

$$\left| \frac{\gamma(\theta)}{v \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)} \right| \leq \frac{\sup_{|\theta| \leq \pi} (|\gamma(\theta)|)}{\inf_{|\theta| \leq \pi, \Delta x > 0} \left(\left| v \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right) \right| \right)} = \frac{3}{2}. \text{ Logo, } \sigma \left| \frac{\gamma(\theta)}{v \left(\frac{\theta}{\Delta x} \right)} \right| \leq \sigma \frac{3}{2} \leq 2\sqrt{2}, \text{ assim,}$$

$$\sigma \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Conclui-se, então que o método Runge-Kutta de quarta ordem é estável apenas se $\sigma \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Nota-se que o método *leapfrog* é estável se, e somente se, $\sigma < \frac{2}{3}$ enquanto que o método Runge-Kutta de quarta ordem é estável apenas se $\sigma \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$, dessa forma, o método Runge-Kutta de quarta ordem é o método que garante

a estabilidade para um Δt maior comparado com o método *leapfrog*.

6.2.2 Considerações gerais para a implementação da solução das equações lineares

Nas subseções seguintes será feita a implementação descrita na seção anterior para cada uma das equações, a saber, equação da onda unidirecional, BBM adaptada linear, tipo Benjamin linear. Os dados iniciais considerados são adotados neste trabalho em todas as implementações com o objetivo de comparar as soluções para as diferentes equações. Os dados iniciais são:

- $N = 2^8 = 256$;
- $L = 100$;
- $a = \frac{1}{5} = 0,2$;
- $b = \sqrt{a} = 0,4472$;
- $h = 10L = 1000$;
- $\Delta t = 0,6 \Delta x = 0,4688$ para o método de linhas que utiliza o método de *leapfrog* na discretização temporal;
- $\Delta t = 1,8 \Delta x = 1,4063$ para o método de linhas que utiliza o método de Runge-Kutta de quarta ordem na discretização temporal.

Os valores de Δt para cada um dos métodos da discretização temporal foram determinados a partir da condição de estabilidade demonstrada na subseção 6.2.1. A solução inicial é dada por $u_0 = \exp\left(-\frac{(x+50)^2}{50}\right)$, a solução inicial foi escolhida deslocada da origem para uma melhor visualização do deslocamento da onda.

6.2.3 Equação da onda unidirecional

Dada a equação da onda unidirecional: $u_t + u_x = 0$, seguem a solução analítica dada por: $u(x, t) = u_0(x) * (e^{-i\varphi(k)t})^\vee$, onde $\varphi(k) = k$ e as soluções dadas a partir dos métodos descritos na subseção anterior.

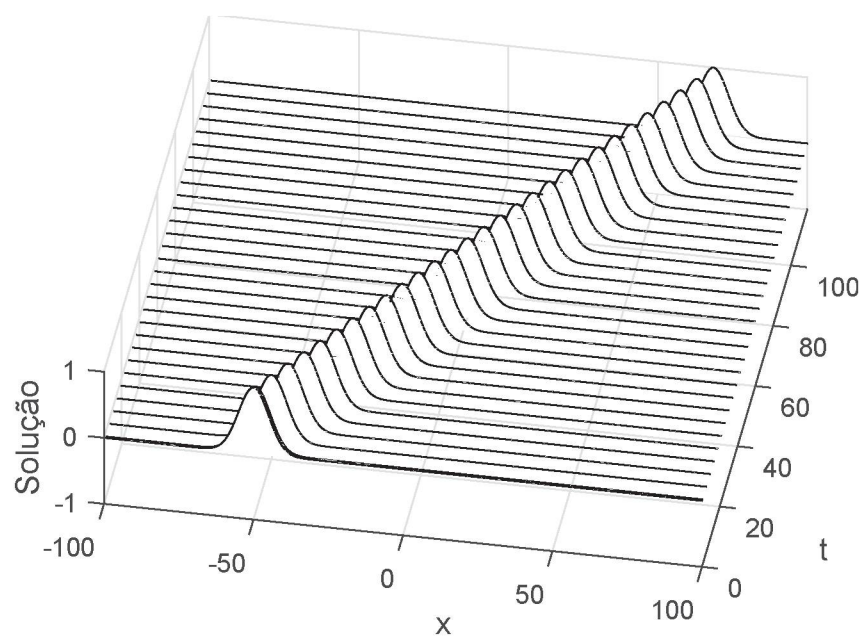


Figura 6.3: Solução analítica da Equação Unidirecional.

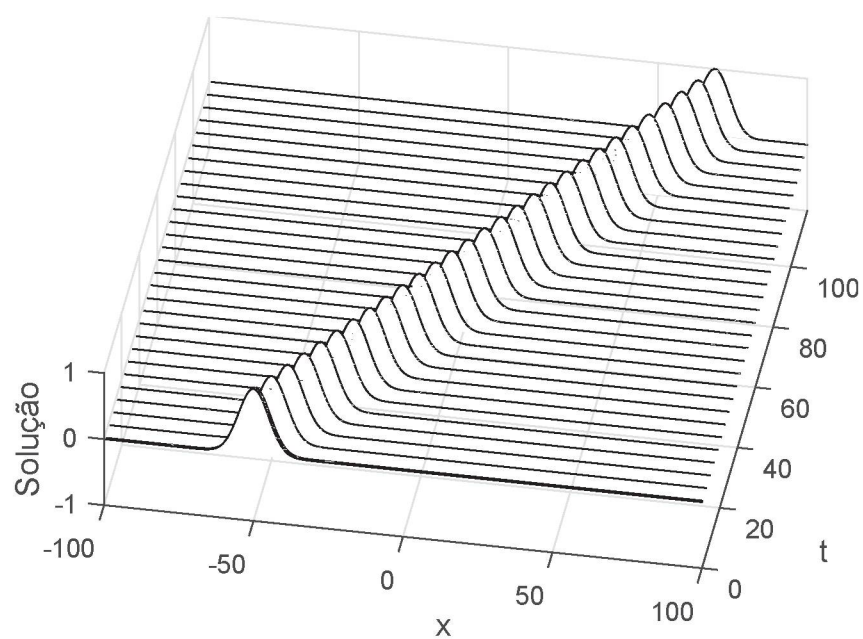


Figura 6.4: Solução da Equação Unidirecional dada pelo método de *leapfrog*.

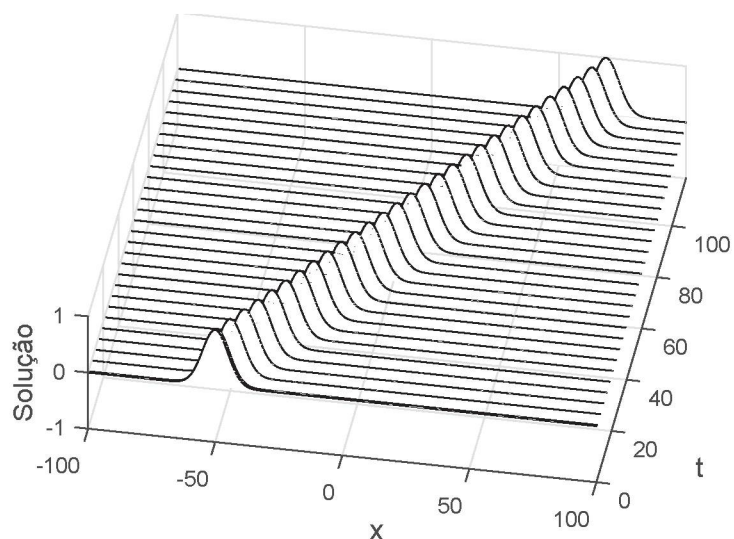


Figura 6.5: Solução da Equação Unidirecional dada pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Para verificar o erro entre as soluções encontradas, seguem os gráficos das mesmas em vários instantes de tempo.

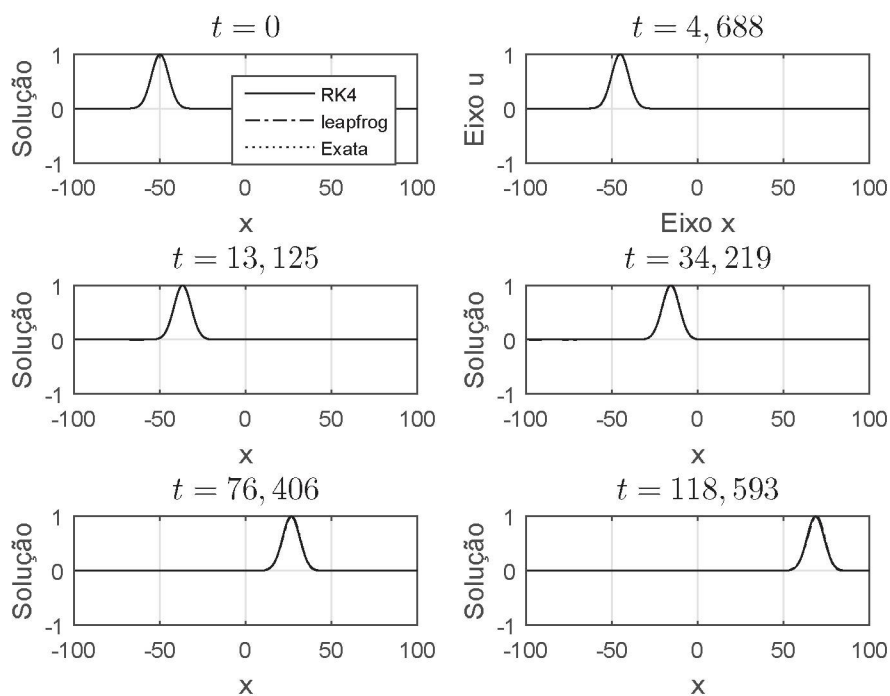


Figura 6.6: Solução da Equação Unidirecional.

Agora, considera-se o erro relativo dado por:

$$E(t) = \frac{\|u_{analitica}(t) - u_{num}(t)\|_{\infty}}{\|u_{analitica}(t)\|_{\infty}}, \quad (6.19)$$

então na Figura 6.7 nota-se o erro dado pela equação (6.19) obtido em cada um dos tempos dos gráficos da Figura 6.6.

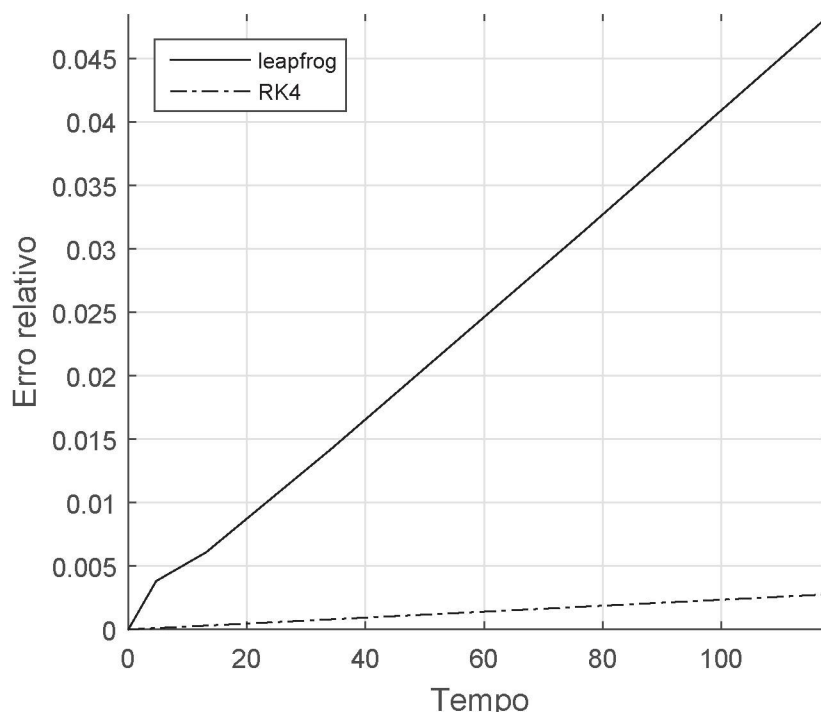


Figura 6.7: Erro relativo das soluções numéricas da Equação Unidirecional.

Nota-se com o gráfico da Figura 6.7 que o erro relativo do método de Runge-Kutta de quarta ordem é na ordem de 10^{-3} enquanto que o erro relativo do método *leapfrog* é na ordem de 10^{-2} .

6.2.4 BBM adaptada linear

Considera-se a equação BBM adaptada da equação do tipo Benjamin no caso linear, a saber $u_t + u_x - au_{xxt} = 0$ (a equação sem o operador). Analogamente, seguem a solução analítica dada por: $u(x, t) = u_0(x) * (e^{-i\varphi(k)t})^\vee$, onde $\varphi(k) = \frac{k}{1+ak^2}$ e as soluções dadas a partir dos métodos descritos na subseção anterior.

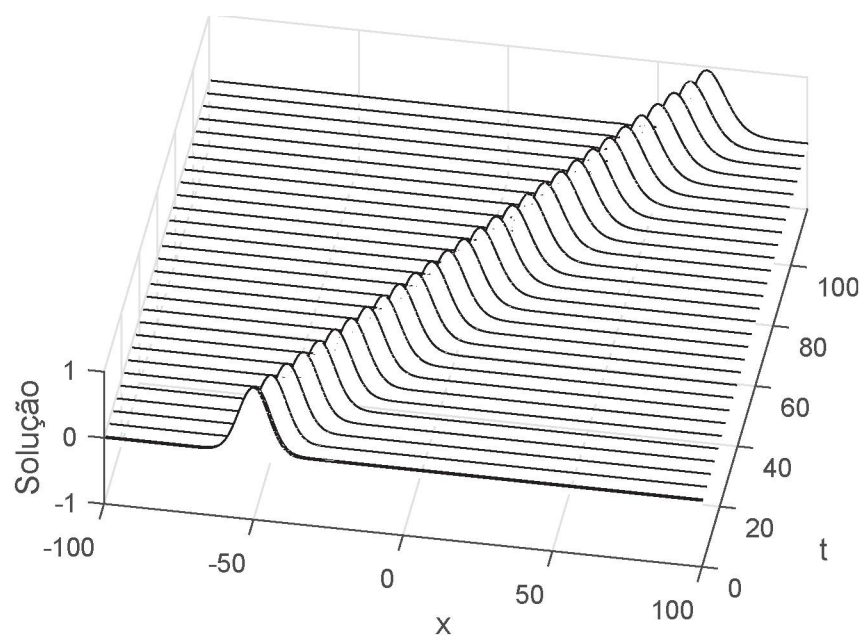


Figura 6.8: Solução analítica da Equação BBM linear.

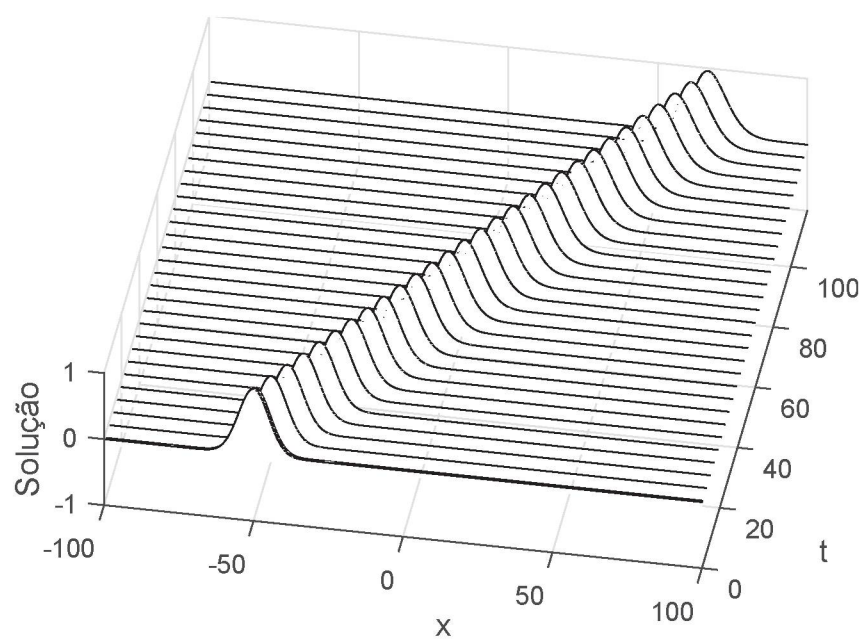


Figura 6.9: Solução da Equação BBM linear dada pelo método *leapfrog*.

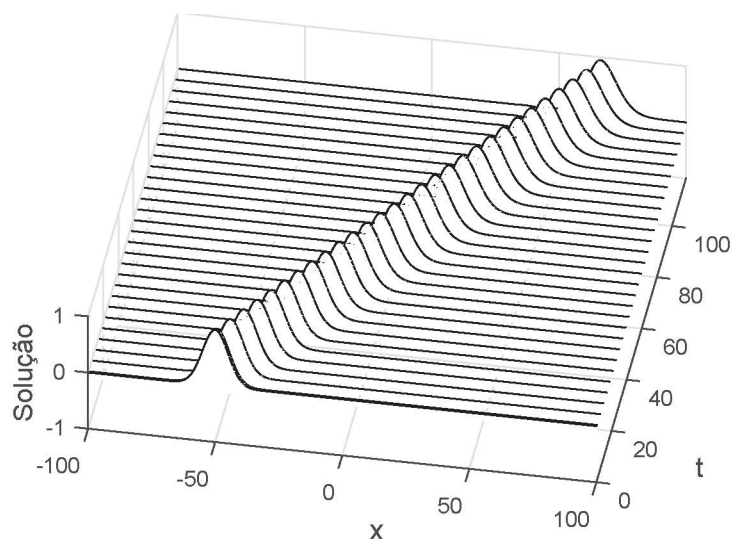


Figura 6.10: Solução da Equação BBM linear dada pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.

Na Figura 6.11 é possível verificar a dispersão na solução da equação da BBM pelos métodos estudados.

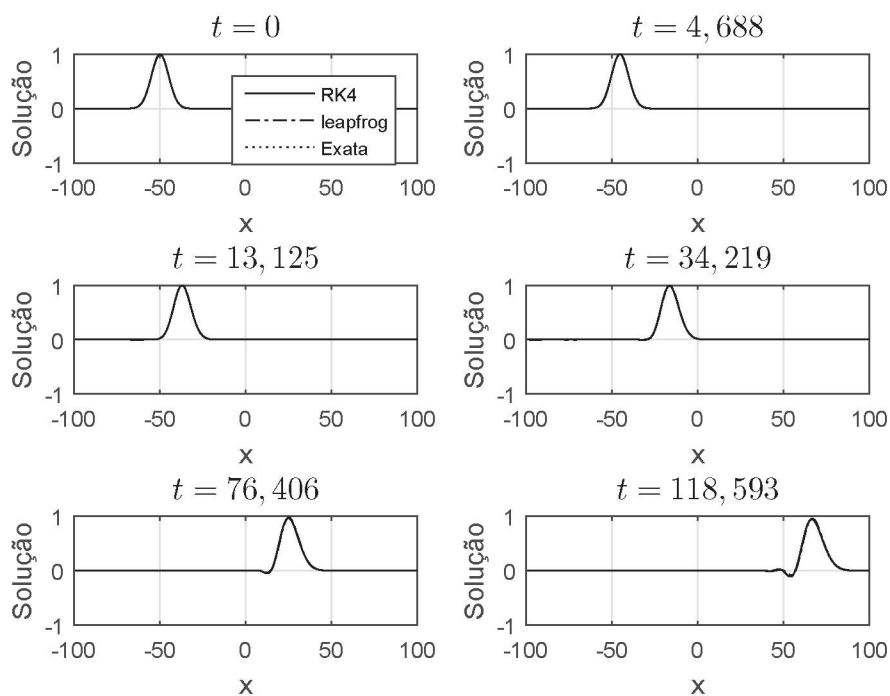


Figura 6.11: Solução da Equação BBM linear.

x	<i>Solução analítica</i>	<i>Solução Numérica pelo método Runge-Kutta de quarta ordem</i>	<i>Solução Numérica pelo método leapfrog</i>
11.7188	0.0000	0.0000	-0.0001
12.5000	0.0000	0.0000	-0.0001
13.2813	0.0000	0.0000	-0.0001
14.0625	0.0000	0.0000	-0.0001
14.8438	-0.0000	-0.0000	-0.0001
15.6250	-0.0000	-0.0000	-0.0002
16.4063	-0.0000	-0.0000	-0.0002
17.1875	-0.0000	-0.0000	-0.0003
17.9688	-0.0000	0.0000	-0.0003
18.7500	0.0000	0.0000	-0.0004
19.5313	0.0000	0.0001	-0.0004
20.3125	0.0000	0.0001	-0.0004
21.0938	0.0000	0.0000	-0.0005
21.8750	-0.0000	-0.0000	-0.0005
22.6563	-0.0001	-0.0001	-0.0005
23.4375	-0.0001	-0.0002	-0.0005
24.2188	-0.0001	-0.0002	-0.0005
25.0000	-0.0001	-0.0001	-0.0005
25.7813	0.0000	0.0001	-0.0005
26.5625	0.0002	0.0003	-0.0003
27.3438	0.0003	0.0004	-0.0001
28.1250	0.0003	0.0004	0.0002
28.9063	0.0002	0.0002	0.0006
29.6875	-0.0001	-0.0001	0.0009
30.4688	-0.0004	-0.0006	0.0010
31.2500	-0.0007	-0.0010	0.0011
32.0313	-0.0009	-0.0012	0.0011
32.8125	-0.0007	-0.0009	0.0011
33.5938	-0.0002	-0.0002	0.0011
34.3750	0.0006	0.0009	0.0013
35.1563	0.0015	0.0020	0.0017
35.9375	0.0023	0.0029	0.0022
36.7188	0.0026	0.0031	0.0026
37.5000	0.0020	0.0023	0.0027
38.2813	0.0006	0.0005	0.0022
39.0625	-0.0017	-0.0021	0.0011

39.8438	-0.0043	-0.0051	-0.0007
40.6250	-0.0066	-0.0077	-0.0029
41.4063	-0.0079	-0.0089	-0.0051
42.1875	-0.0073	-0.0080	-0.0066
42.9688	-0.0044	-0.0047	-0.0068
43.7500	0.0009	0.0012	-0.0051
44.5313	0.0079	0.0089	-0.0016
45.3125	0.0156	0.0171	0.0036
46.0938	0.0223	0.0241	0.0096
46.8750	0.0263	0.0280	0.0150
47.6563	0.0257	0.0271	0.0183
48.4375	0.0191	0.0200	0.0178
49.2188	0.0062	0.0062	0.0126
50.0000	-0.0127	-0.0135	0.0019
50.7813	-0.0359	-0.0375	-0.0137
51.5625	-0.0608	-0.0629	-0.0327
52.3438	-0.0837	-0.0861	-0.0526
53.1250	-0.1006	-0.1030	-0.0699
53.9063	-0.1075	-0.1095	-0.0807
54.6875	-0.1005	-0.1019	-0.0810
55.4688	-0.0770	-0.0776	-0.0674
56.2500	-0.0352	-0.0351	-0.0371
57.0313	0.0250	0.0259	0.0113
57.8125	0.1023	0.1038	0.0776
58.5938	0.1940	0.1959	0.1603
59.3750	0.2963	0.2984	0.2563
60.1563	0.4044	0.4065	0.3615
60.9375	0.5133	0.5151	0.4708
61.7188	0.6179	0.6193	0.5790
62.5000	0.7133	0.7142	0.6806
63.2813	0.7956	0.7960	0.7711
64.0625	0.8616	0.8616	0.8464
64.8438	0.9094	0.9089	0.9036
65.6250	0.9379	0.9371	0.9412
66.4063	0.9472	0.9463	0.9584
67.1875	0.9385	0.9374	0.9561
67.9688	0.9134	0.9124	0.9356
68.7500	0.8744	0.8735	0.8992
69.5313	0.8241	0.8233	0.8499
70.3125	0.7654	0.7647	0.7905
71.0938	0.7010	0.7005	0.7242

71.8750	0.6335	0.6332	0.6540
72.6563	0.5653	0.5652	0.5824
73.4375	0.4983	0.4984	0.5118
74.2188	0.4342	0.4343	0.4441
75.0000	0.3741	0.3743	0.3806
75.7813	0.3188	0.3191	0.3223
76.5625	0.2689	0.2691	0.2698
77.3438	0.2244	0.2247	0.2233
78.1250	0.1855	0.1858	0.1828
78.9063	0.1519	0.1521	0.1481
79.6875	0.1232	0.1234	0.1188
80.4688	0.0991	0.0992	0.0943
81.2500	0.0789	0.0790	0.0741
82.0313	0.0624	0.0624	0.0577
82.8125	0.0488	0.0489	0.0445
83.5938	0.0380	0.0380	0.0340
84.3750	0.0293	0.0293	0.0258
85.1563	0.0224	0.0224	0.0193
85.9375	0.0170	0.0170	0.0144
86.7188	0.0128	0.0128	0.0106
87.5000	0.0096	0.0095	0.0078
88.2813	0.0071	0.0071	0.0056
89.0625	0.0052	0.0052	0.0041
89.8438	0.0038	0.0038	0.0029
90.6250	0.0028	0.0028	0.0021
91.4063	0.0020	0.0020	0.0014
92.1875	0.0014	0.0014	0.0010
92.9688	0.0010	0.0010	0.0007
93.7500	0.0007	0.0007	0.0005
94.5313	0.0005	0.0005	0.0003
95.3125	0.0004	0.0004	0.0002
96.0938	0.0003	0.0002	0.0001
96.8750	0.0002	0.0002	0.0001
97.6563	0.0001	0.0001	0.0001
98.4375	0.0001	0.0001	0.0000
99.2188	0.0001	0.0001	0.0000
100.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 6.1: Solução da Equação BBM linear no tempo $t = 118,593$.

Os valores das soluções são iguais a menos de quatro casas decimais para valores de x que não estão presentes na Tabela 6.1. Nos gráficos da Figura 6.12 e na Tabela 6.1 nota-se o erro relativo dado pela equação (6.19) obtido em cada um dos tempos dos gráficos da Figura 6.11.

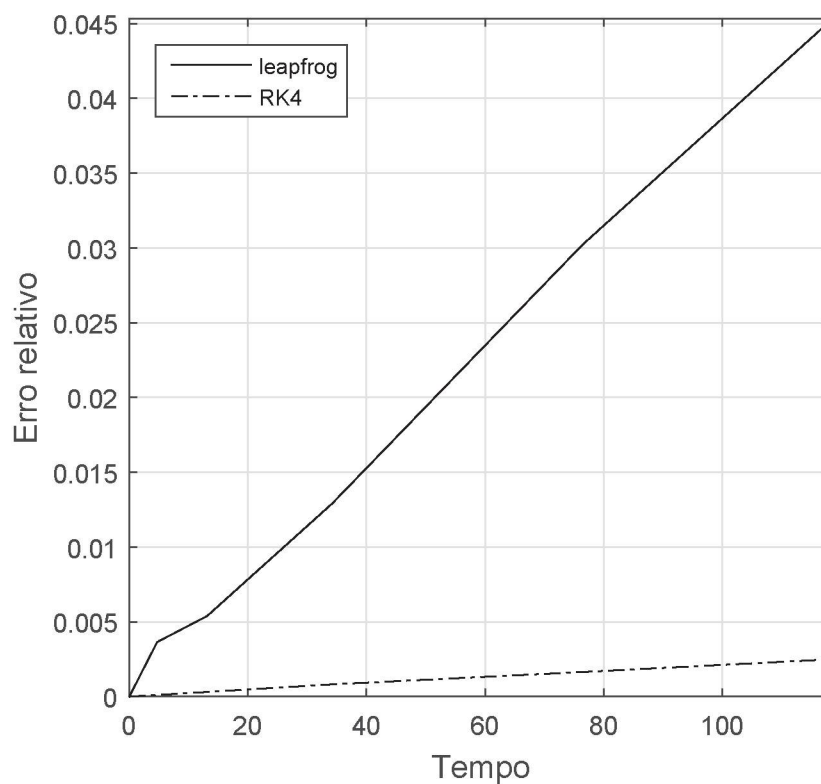


Figura 6.12: Erro relativo das soluções numéricas da Equação BBM linear.

Nota-se com os gráficos da Figura 6.12 e a Tabela 6.1 que o erro relativo do método de Runge-Kutta de quarta ordem é na ordem de 10^{-3} enquanto que o erro relativo do método *leapfrog* é na ordem de 10^{-2} .

Além disso, analisou-se o erro relativo dado pela equação (6.19) para cada um dos métodos com valores de Δt diferentes. Para o método *leapfrog* os valores de Δt são: $\Delta t = 0,469$, $\Delta t = 0,234$ e $\Delta t = 0,625$, nos gráficos da Figura 6.20 é possível observar esse erro.

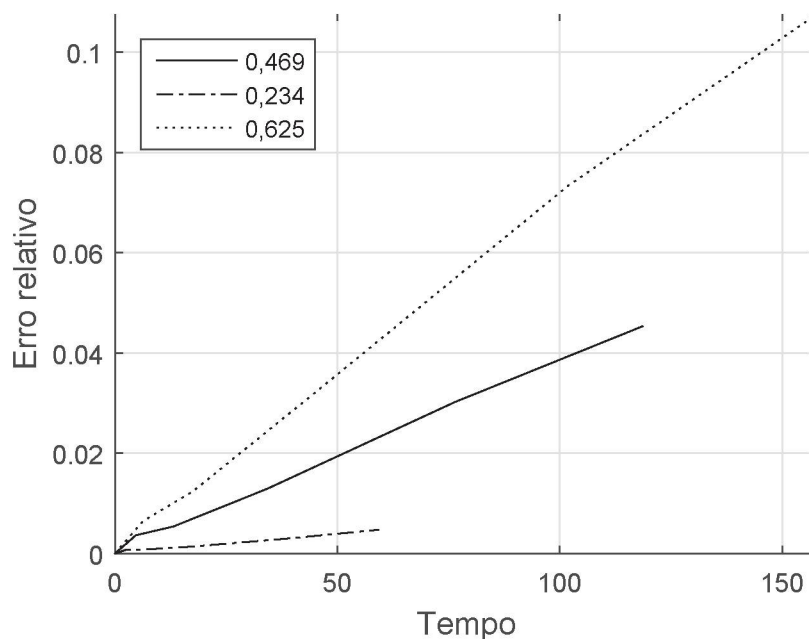


Figura 6.13: Erro relativo das soluções numéricas pelo método *leapfrog* da Equação BBM linear para diferentes valores de Δt .

Observa-se no gráfico da Figura 6.13 que o erro relativo é crescente no decorrer do tempo e proporcional ao fator que multiplica Δx . Além disso, o erro relativo é na ordem de 10^{-2} quando $\Delta t = 0,469$ e $\Delta t = 0,234$. No caso em que $\Delta t = 0,625$, tem-se que $\sigma = 0,8 > \frac{2}{3}$, isto é, σ , nesse caso, não satisfaz a condição de estabilidade estudada na subseção 6.2.1 e o erro fica na ordem de 10^{-1} .

Para o método Runge-Kutta de quarta ordem os valores de Δt são: $\Delta t = 0,469$, $\Delta t = 1,406$ e $\Delta t = 1,875$. Nos gráficos na Figura 6.14 é possível observar o erro relativo para cada um dos valores de Δt .

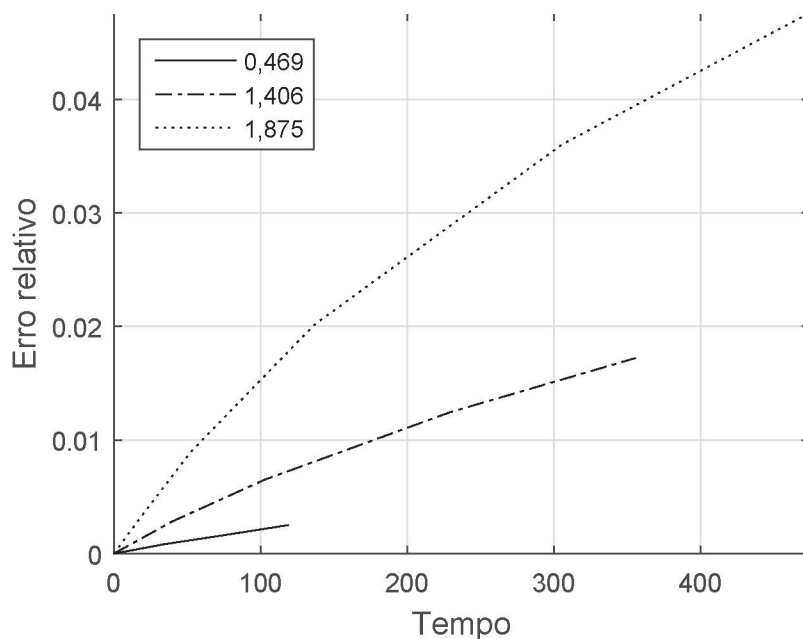


Figura 6.14: Erro relativo das soluções numéricas pelo método Runge-Kutta de quarta ordem da Equação BBM linear para diferentes valores de Δt .

Observa-se no gráfico da Figura 6.14 que o erro relativo é crescente no decorrer do tempo e proporcional ao fator que multiplica Δx . Além disso, o erro relativo é na ordem de 10^{-3} para $\Delta t = 0,469$, 10^{-2} para $\Delta t = 1,406$. No caso em que $\Delta t = 1,875$, tem-se que $\sigma = 2,4 > \frac{4\sqrt{2}}{3}$, isto é, σ , nesse caso, não satisfaz a condição de estabilidade estudada na subseção 6.2.1 e o erro relativo fica na ordem de 10^{-2} .

6.2.5 Equação de Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert

Considera-se agora a equação com o operador da **transformada de Hilbert**, isto é, $u_t + u_x - b\mathcal{H}[u]_{xt} - au_{xxt} = 0$. Assim, seguem a solução analítica dada por: $u(x, t) = u_0(x) * (e^{-i\varphi(k)t})^\vee$, onde $\varphi(k) = \frac{k}{1+b|k|+ak^2}$ e as soluções dadas a partir dos métodos descritos na seção anterior.

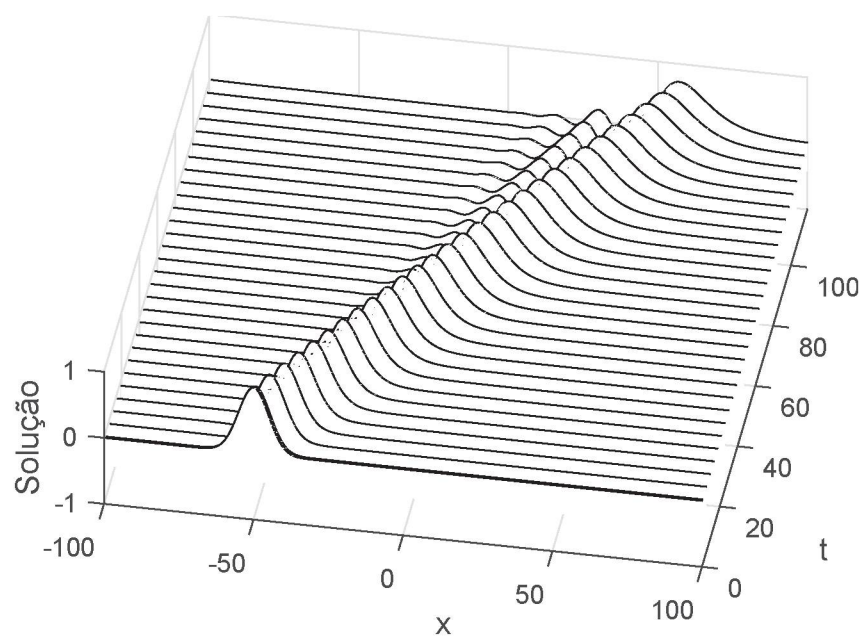


Figura 6.15: Solução analítica da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert.

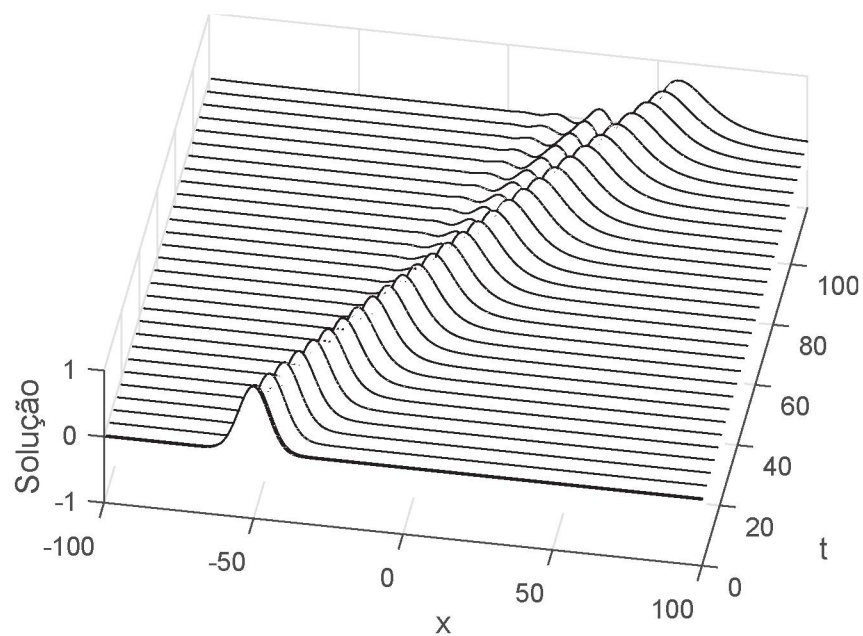


Figura 6.16: Solução da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert dada pelo método *leapfrog*.

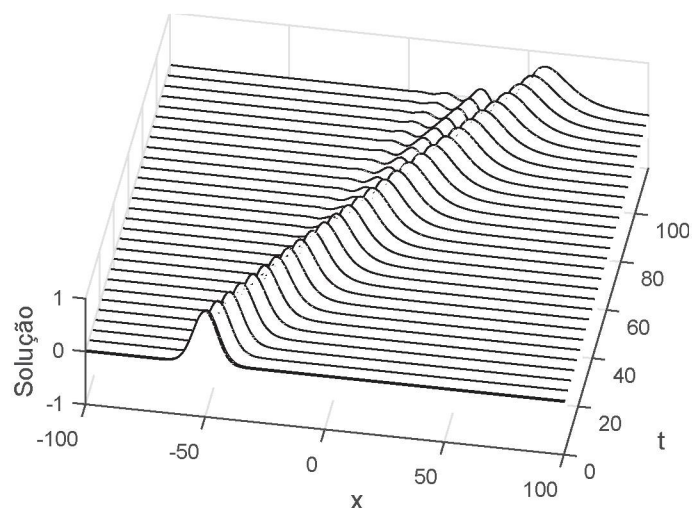


Figura 6.17: Solução da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert dada pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.

Nos gráficos da Figura 6.18 é possível verificar a dispersão das soluções encontradas pelos métodos estudados.

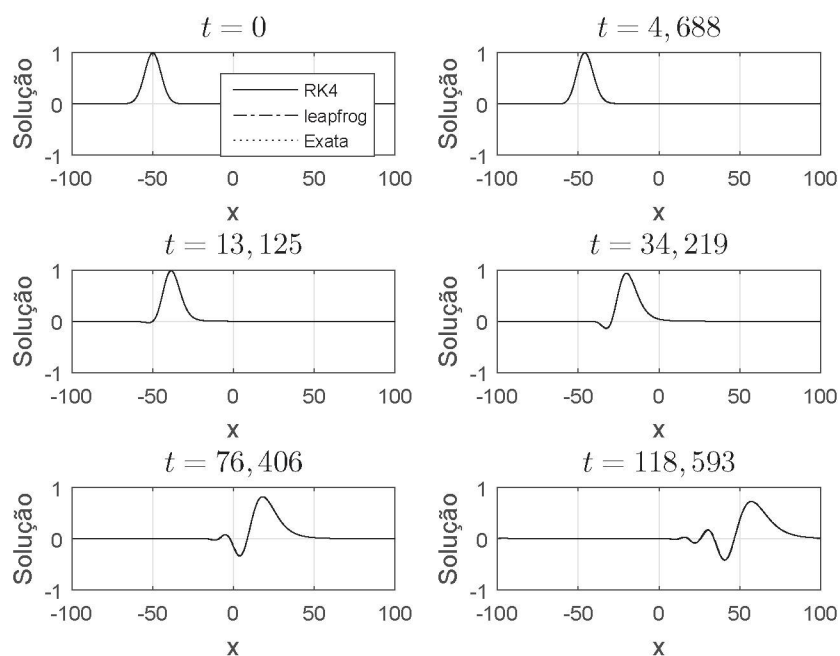


Figura 6.18: Solução da Equação Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert.

x	<i>Solução analítica</i>	<i>Solução Numérica pelo método Runge-Kutta de quarta ordem</i>	<i>Solução Numérica pelo método leapfrog</i>
-99.2188	0.0126	0.0126	0.0125
-98.4375	0.0118	0.0118	0.0117
-92.9688	0.0076	0.0076	0.0075
-89.0625	0.0057	0.0057	0.0056
-88.2813	0.0054	0.0054	0.0053
-85.9375	0.0046	0.0046	0.0045
-67.9688	0.0016	0.0016	0.0015
-64.0625	0.0013	0.0013	0.0012
-50.0000	0.0006	0.0006	0.0005
-25.7813	-0.0002	-0.0002	-0.0001
-16.4063	-0.0004	-0.0004	-0.0005
-15.6250	-0.0004	-0.0004	-0.0005
-14.8438	-0.0004	-0.0004	-0.0005
-14.0625	-0.0004	-0.0004	-0.0005
-13.2813	-0.0005	-0.0004	-0.0005
-11.7188	-0.0006	-0.0006	-0.0005
-10.9375	-0.0007	-0.0008	-0.0006
-10.1563	-0.0008	-0.0009	-0.0008
-9.3750	-0.0009	-0.0010	-0.0009
-8.5938	-0.0009	-0.0009	-0.0010
-7.8125	-0.0008	-0.0007	-0.0009
-7.0313	-0.0006	-0.0005	-0.0008
-6.2500	-0.0004	-0.0002	-0.0006
-5.4688	-0.0002	-0.0001	-0.0003
-4.6875	-0.0003	-0.0002	-0.0002
-3.9063	-0.0006	-0.0006	-0.0004
-3.1250	-0.0012	-0.0013	-0.0007
-2.3438	-0.0019	-0.0022	-0.0014
-1.5625	-0.0026	-0.0029	-0.0021
-0.7813	-0.0030	-0.0032	-0.0027
0	-0.0028	-0.0030	-0.0030
0.7813	-0.0021	-0.0020	-0.0027
1.5625	-0.0007	-0.0005	-0.0019
2.3438	0.0009	0.0014	-0.0004
3.1250	0.0025	0.0031	0.0012
3.9063	0.0035	0.0040	0.0027

4.6875	0.0034	0.0037	0.0033
5.4688	0.0018	0.0019	0.0028
6.2500	-0.0011	-0.0014	0.0009
7.0313	-0.0051	-0.0058	-0.0023
7.8125	-0.0095	-0.0103	-0.0063
8.5938	-0.0132	-0.0141	-0.0104
9.3750	-0.0152	-0.0160	-0.0135
10.1563	-0.0147	-0.0151	-0.0147
10.9375	-0.0111	-0.0111	-0.0132
11.7188	-0.0046	-0.0041	-0.0087
12.5000	0.0042	0.0051	-0.0016
13.2813	0.0138	0.0151	0.0072
14.0625	0.0226	0.0240	0.0163
14.8438	0.0288	0.0300	0.0239
15.6250	0.0305	0.0313	0.0282
16.4063	0.0267	0.0270	0.0277
17.1875	0.0169	0.0166	0.0216
17.9688	0.0016	0.0007	0.0097
18.7500	-0.0176	-0.0190	-0.0069
19.5313	-0.0386	-0.0402	-0.0265
20.3125	-0.0584	-0.0601	-0.0466
21.0938	-0.0742	-0.0756	-0.0642
21.8750	-0.0831	-0.0842	-0.0765
22.6563	-0.0830	-0.0836	-0.0811
23.4375	-0.0728	-0.0727	-0.0761
24.2188	-0.0523	-0.0516	-0.0609
25.0000	-0.0227	-0.0215	-0.0360
25.7813	0.0137	0.0152	-0.0032
26.5625	0.0537	0.0554	0.0347
27.3438	0.0935	0.0952	0.0742
28.1250	0.1291	0.1306	0.1114
28.9063	0.1566	0.1577	0.1422
29.6875	0.1726	0.1733	0.1629
30.4688	0.1748	0.1751	0.1708
31.2500	0.1618	0.1616	0.1640
32.0313	0.1334	0.1328	0.1416
32.8125	0.0906	0.0897	0.1043
33.5938	0.0356	0.0344	0.0538
34.3750	-0.0286	-0.0299	-0.0073
35.1563	-0.0984	-0.0996	-0.0754
35.9375	-0.1696	-0.1707	-0.1465

36.7188	-0.2381	-0.2390	-0.2163
37.5000	-0.2999	-0.3007	-0.2808
38.2813	-0.3516	-0.3521	-0.3361
39.0625	-0.3902	-0.3904	-0.3790
39.8438	-0.4136	-0.4135	-0.4071
40.6250	-0.4205	-0.4202	-0.4188
41.4063	-0.4104	-0.4100	-0.4133
42.1875	-0.3837	-0.3832	-0.3907
42.9688	-0.3415	-0.3408	-0.3519
43.7500	-0.2853	-0.2847	-0.2985
44.5313	-0.2174	-0.2168	-0.2324
45.3125	-0.1402	-0.1396	-0.1562
46.0938	-0.0562	-0.0557	-0.0725
46.8750	0.0317	0.0321	0.0159
47.6563	0.1211	0.1214	0.1063
48.4375	0.2095	0.2097	0.1962
49.2188	0.2947	0.2948	0.2833
50.0000	0.3748	0.3749	0.3655
50.7813	0.4485	0.4484	0.4412
51.5625	0.5143	0.5143	0.5092
52.3438	0.5717	0.5716	0.5685
53.1250	0.6200	0.6198	0.6186
53.9063	0.6591	0.6589	0.6592
54.6875	0.6890	0.6888	0.6905
55.4688	0.7100	0.7098	0.7126
56.2500	0.7227	0.7225	0.7261
57.0313	0.7276	0.7275	0.7316
57.8125	0.7255	0.7254	0.7298
58.5938	0.7171	0.7170	0.7217
59.3750	0.7033	0.7032	0.7080
60.1563	0.6849	0.6849	0.6895
60.9375	0.6627	0.6627	0.6672
61.7188	0.6375	0.6374	0.6418
62.5000	0.6099	0.6099	0.6141
63.2813	0.5806	0.5806	0.5846
64.0625	0.5503	0.5503	0.5541
64.8438	0.5194	0.5194	0.5230
65.6250	0.4884	0.4884	0.4917
66.4063	0.4576	0.4576	0.4607
67.1875	0.4274	0.4274	0.4303
67.9688	0.3981	0.3981	0.4007

68.7500	0.3698	0.3698	0.3720
69.5313	0.3426	0.3427	0.3445
70.3125	0.3168	0.3169	0.3183
71.0938	0.2924	0.2924	0.2935
71.8750	0.2694	0.2694	0.2700
72.6563	0.2478	0.2478	0.2480
73.4375	0.2277	0.2277	0.2275
74.2188	0.2089	0.2089	0.2084
75.0000	0.1915	0.1915	0.1907
75.7813	0.1754	0.1754	0.1744
76.5625	0.1606	0.1606	0.1595
77.3438	0.1469	0.1469	0.1458
78.1250	0.1343	0.1344	0.1333
78.9063	0.1228	0.1228	0.1219
79.6875	0.1123	0.1123	0.1116
80.4688	0.1027	0.1027	0.1021
81.2500	0.0939	0.0939	0.0935
82.0313	0.0858	0.0858	0.0856
82.8125	0.0785	0.0785	0.0783
83.5938	0.0718	0.0718	0.0717
84.3750	0.0658	0.0658	0.0656
85.1563	0.0603	0.0603	0.0601
85.9375	0.0552	0.0552	0.0550
86.7188	0.0507	0.0507	0.0503
87.5000	0.0465	0.0465	0.0461
88.2813	0.0427	0.0427	0.0423
89.0625	0.0393	0.0393	0.0389
89.8438	0.0362	0.0362	0.0358
90.6250	0.0333	0.0333	0.0330
91.4063	0.0307	0.0307	0.0304
92.1875	0.0284	0.0284	0.0281
92.9688	0.0262	0.0262	0.0260
93.7500	0.0242	0.0242	0.0241
94.5313	0.0224	0.0224	0.0224
95.3125	0.0208	0.0208	0.0207
96.0938	0.0193	0.0193	0.0192
96.8750	0.0179	0.0179	0.0178
97.6563	0.0167	0.0167	0.0166
98.4375	0.0155	0.0155	0.0154
99.2188	0.0145	0.0145	0.0143

100.0000	0.0135	0.0135	0.0134
----------	--------	--------	--------

Tabela 6.2: Solução da Equação Equação do tipo Benjamin com operador da Transformada de Hilbert no tempo $t = 118,593$.

Os valores das soluções que são iguais a menos de quatro casas decimais para valores de x não estão presentes na Tabela 6.2. Nos gráficos da Figura 6.19 e na Tabela 6.2 nota-se o erro relativo dado pela equação (6.19) obtido em cada um dos tempos dos gráficos da Figura 6.18.

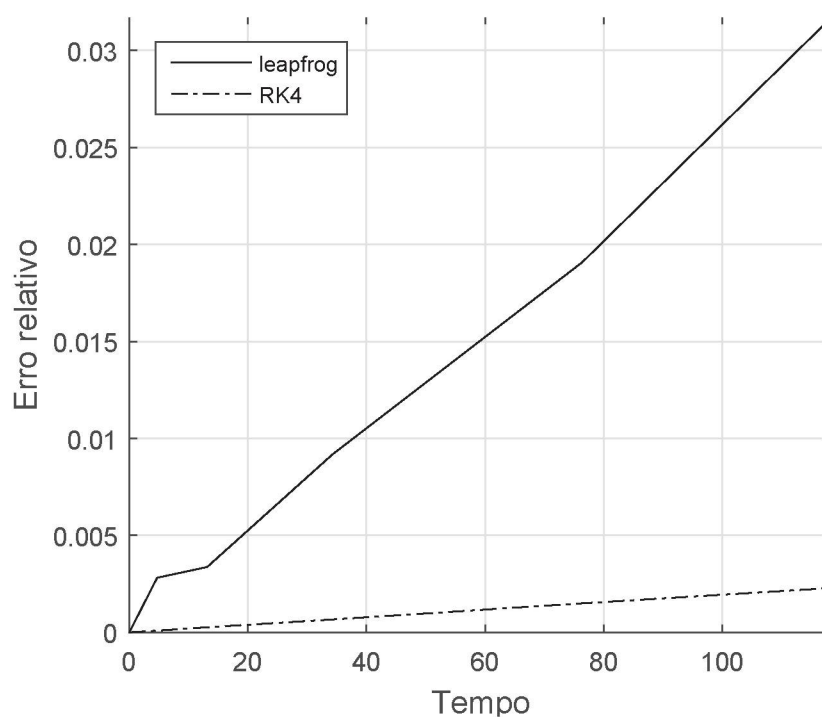


Figura 6.19: Erro relativo das soluções numéricas da Equação do tipo Benjamin com operador da Transformada de Hilbert.

Nota-se com os gráficos da Figura 6.19 e a Tabela 6.2 que o erro relativo do método de Runge-Kutta de quarta ordem é na ordem de 10^{-3} enquanto que o erro relativo do método *leapfrog* é na ordem de 10^{-2} .

Além disso, analisou-se o erro relativo dado pela equação (6.19) para cada um dos métodos com valores de Δt diferentes. Para o método *leapfrog* os valores de Δt são: $\Delta t = 0,469$, $\Delta t = 0,234$ e $\Delta t = 0,625$, nos gráficos da Figura 6.20 é possível observar esse erro.

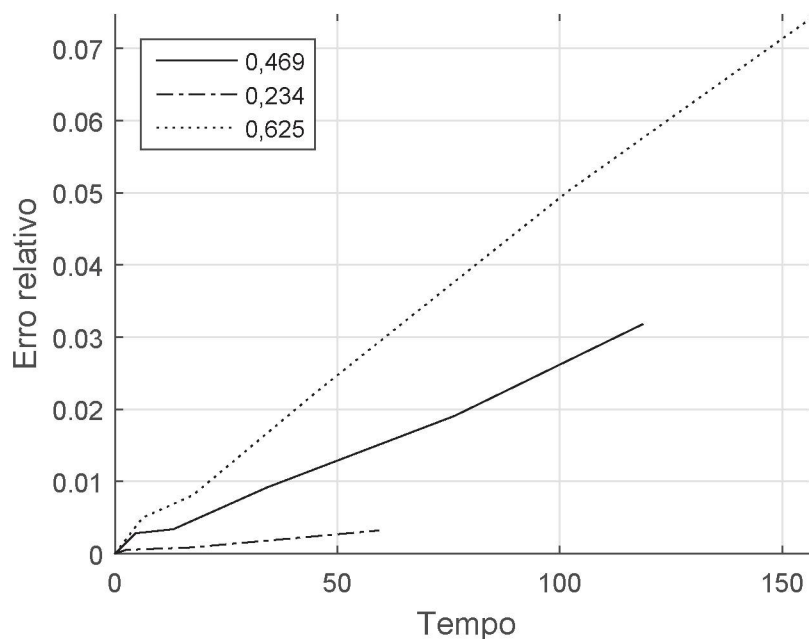


Figura 6.20: Erro relativo das soluções numéricas pelo método *leapfrog* da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert para diferentes valores de Δt .

Observa-se no gráfico da Figura 6.20 que o erro relativo é crescente no decorrer do tempo e proporcional ao fator que multiplica Δx . Além disso, o erro é sempre na ordem de 10^{-2} . Além disso, nota-se que o caso em que $\Delta t = 0,625$, tem-se que $\sigma = 0,8 > \frac{2}{3}$, isto é, σ , nesse caso, não satisfaz a condição de estabilidade estudada na subseção 6.2.1 e mesmo assim o erro fica na ordem de 10^{-2} .

Para o método Runge-Kutta de quarta ordem os valores de Δt são: $\Delta t = 0,469$, $\Delta t = 1,406$ e $\Delta t = 1,875$. Nos gráficos na Figura 6.21 é possível observar o erro relativo para cada um dos valores de Δt .

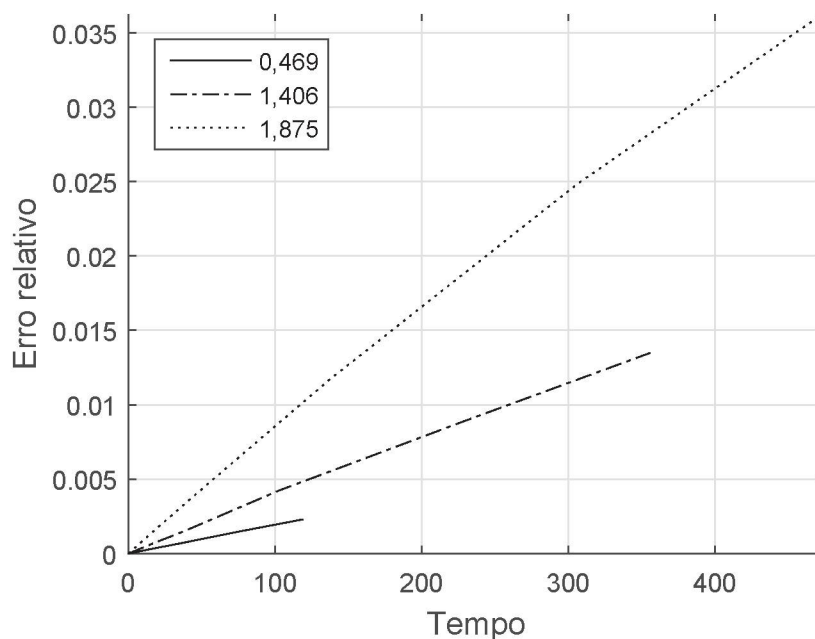


Figura 6.21: Erro relativo das soluções numéricas pelo método Runge-Kutta de quarta ordem da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert para diferentes valores de Δt .

Observa-se no gráfico da Figura 6.21 que o erro relativo é crescente no decorrer do tempo e proporcional ao fator que multiplica Δx . Além disso, o erro relativo é na ordem de 10^{-3} para $\Delta t = 0,469$ e 10^{-2} para $\Delta t = 0,234$, nos casos em que $\sigma \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$. No caso em que $\Delta t = 1,875$, tem-se que $\sigma = 2,4 > \frac{4\sqrt{2}}{3}$, isto é, σ , nesse caso, não satisfaz a condição de estabilidade estudada na subseção 6.2.1 e o erro relativo fica na ordem de 10^{-2} . Nota-se que esse erro ficou melhor quando comparado com o caso anterior que não tem o operador na equação.

6.2.6 Equação de Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na Faixa

Agora considera-se a equação com o operador da **Transformada de Hilbert na faixa**, isto é, $u_t + u_x - b\mathcal{T}[u]_{xt} - au_{xxt} = 0$. Analogamente, segue a solução analítica dada por: $u(x, t) = u_0(x) * (e^{-i\varphi(k)t})^\vee$, onde $\varphi(k) = \frac{k}{1 + bk \coth(hk) + ak^2}$ e as soluções dadas a partir dos métodos descritos na subseção anterior.

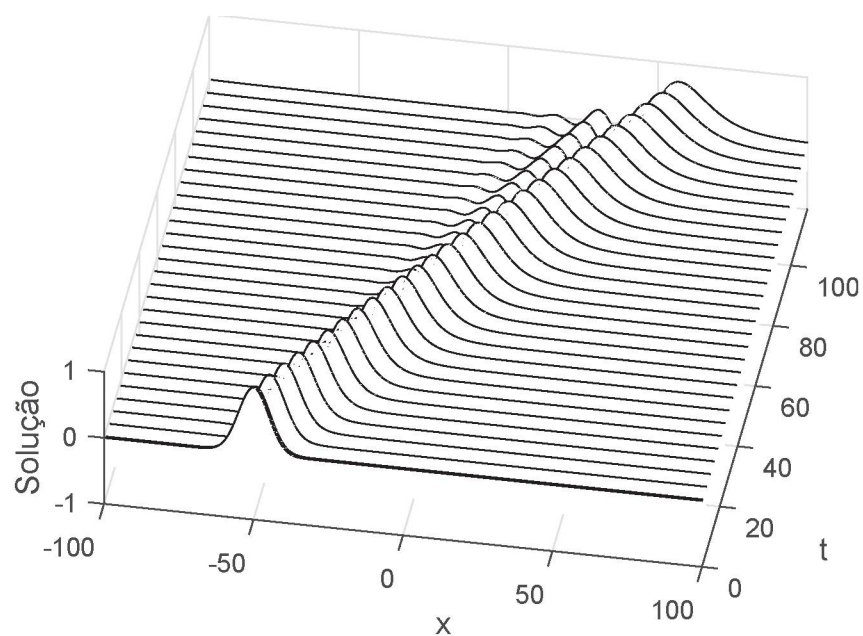


Figura 6.22: Solução analítica da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa.

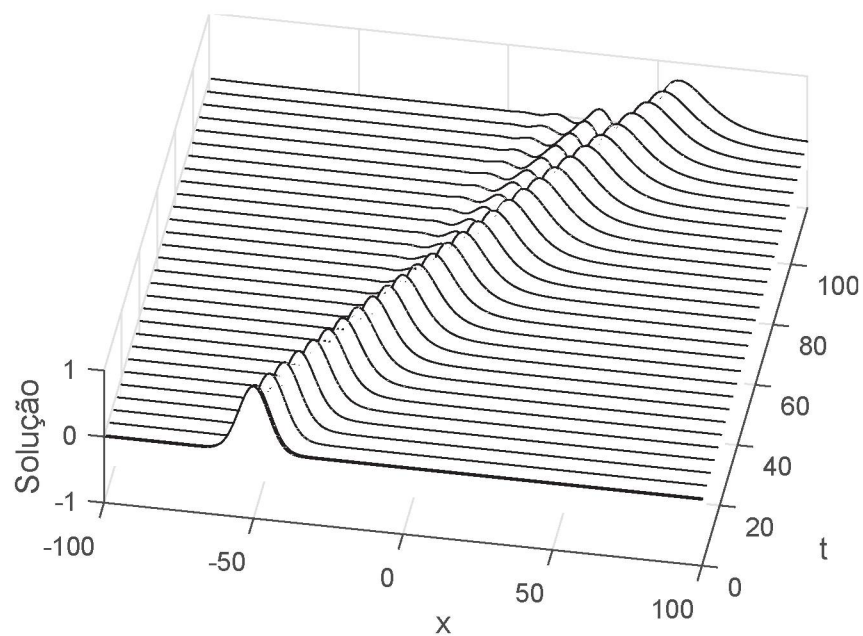


Figura 6.23: Solução da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa dada pelo método *leapfrog*.

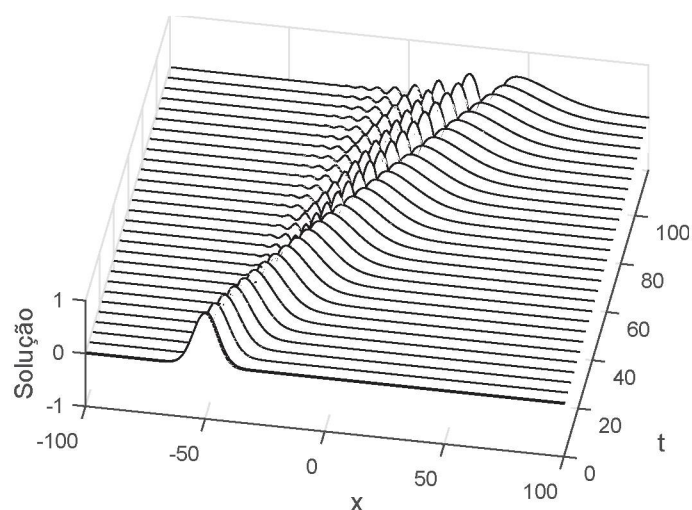


Figura 6.24: Solução da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa dada pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.

Nos gráficos da Figura 6.25 é possível verificar a dispersão da solução da equação e também as soluções encontradas pelos métodos estudados para vários valores de t .

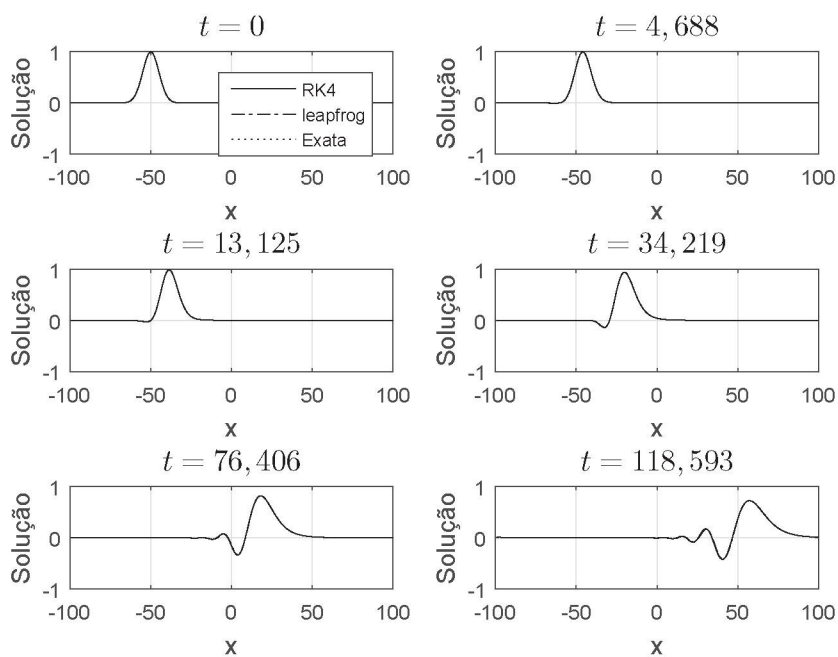


Figura 6.25: Solução da Equação Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa.

x	<i>Solução analítica</i>	<i>Solução Numérica pelo método Runge-Kutta de quarta ordem</i>	<i>Solução Numérica pelo método leapfrog</i>
-99.2188	0.0126	0.0126	0.0125
-98.4375	0.0118	0.0118	0.0117
-92.9688	0.0076	0.0076	0.0075
-89.0625	0.0057	0.0057	0.0056
-88.2813	0.0054	0.0054	0.0053
-85.9375	0.0046	0.0046	0.0045
-67.9688	0.0016	0.0016	0.0015
-64.0625	0.0013	0.0013	0.0012
-50.0000	0.0006	0.0006	0.0005
-25.7813	-0.0002	-0.0002	-0.0001
-16.4063	-0.0004	-0.0004	-0.0005
-15.6250	-0.0004	-0.0004	-0.0005
-14.8438	-0.0004	-0.0004	-0.0005
-14.0625	-0.0004	-0.0004	-0.0005
-13.2813	-0.0005	-0.0004	-0.0005
-11.7188	-0.0006	-0.0006	-0.0005
-10.9375	-0.0007	-0.0008	-0.0006
-10.1563	-0.0008	-0.0009	-0.0008
-9.3750	-0.0009	-0.0010	-0.0009
-8.5938	-0.0009	-0.0009	-0.0010
-7.8125	-0.0008	-0.0007	-0.0009
-7.0313	-0.0006	-0.0005	-0.0008
-6.2500	-0.0004	-0.0002	-0.0006
-5.4688	-0.0002	-0.0001	-0.0003
-4.6875	-0.0003	-0.0002	-0.0002
-3.9063	-0.0006	-0.0006	-0.0004
-3.1250	-0.0012	-0.0013	-0.0007
-2.3438	-0.0019	-0.0022	-0.0014
-1.5625	-0.0026	-0.0029	-0.0021
-0.7813	-0.0030	-0.0032	-0.0027
0	-0.0028	-0.0030	-0.0030
0.7813	-0.0021	-0.0020	-0.0027
1.5625	-0.0007	-0.0005	-0.0019
2.3438	0.0009	0.0014	-0.0004
3.1250	0.0025	0.0031	0.0012
3.9063	0.0035	0.0040	0.0027

4.6875	0.0034	0.0037	0.0033
5.4688	0.0018	0.0019	0.0028
6.2500	-0.0011	-0.0014	0.0009
7.0313	-0.0051	-0.0058	-0.0023
7.8125	-0.0095	-0.0103	-0.0063
8.5938	-0.0132	-0.0141	-0.0104
9.3750	-0.0152	-0.0160	-0.0135
10.1563	-0.0147	-0.0151	-0.0147
10.9375	-0.0111	-0.0111	-0.0132
11.7188	-0.0046	-0.0041	-0.0087
12.5000	0.0042	0.0051	-0.0016
13.2813	0.0138	0.0151	0.0072
14.0625	0.0226	0.0240	0.0163
14.8438	0.0288	0.0300	0.0239
15.6250	0.0305	0.0313	0.0282
16.4063	0.0267	0.0270	0.0277
17.1875	0.0169	0.0166	0.0216
17.9688	0.0016	0.0007	0.0097
18.7500	-0.0176	-0.0190	-0.0069
19.5313	-0.0386	-0.0402	-0.0265
20.3125	-0.0584	-0.0601	-0.0466
21.0938	-0.0742	-0.0756	-0.0642
21.8750	-0.0831	-0.0842	-0.0765
22.6563	-0.0830	-0.0836	-0.0811
23.4375	-0.0728	-0.0727	-0.0761
24.2188	-0.0523	-0.0516	-0.0609
25.0000	-0.0227	-0.0215	-0.0360
25.7813	0.0137	0.0152	-0.0032
26.5625	0.0537	0.0554	0.0347
27.3438	0.0935	0.0952	0.0742
28.1250	0.1291	0.1306	0.1114
28.9063	0.1566	0.1577	0.1422
29.6875	0.1726	0.1733	0.1629
30.4688	0.1748	0.1751	0.1708
31.2500	0.1618	0.1616	0.1640
32.0313	0.1334	0.1328	0.1416
32.8125	0.0906	0.0897	0.1043
33.5938	0.0356	0.0344	0.0538
34.3750	-0.0286	-0.0299	-0.0073
35.1563	-0.0984	-0.0996	-0.0754
35.9375	-0.1696	-0.1707	-0.1465

36.7188	-0.2381	-0.2390	-0.2163
37.5000	-0.2999	-0.3007	-0.2808
38.2813	-0.3516	-0.3521	-0.3361
39.0625	-0.3902	-0.3904	-0.3790
39.8438	-0.4136	-0.4135	-0.4071
40.6250	-0.4205	-0.4202	-0.4188
41.4063	-0.4104	-0.4100	-0.4133
42.1875	-0.3837	-0.3832	-0.3907
42.9688	-0.3415	-0.3408	-0.3519
43.7500	-0.2853	-0.2847	-0.2985
44.5313	-0.2174	-0.2168	-0.2324
45.3125	-0.1402	-0.1396	-0.1562
46.0938	-0.0562	-0.0557	-0.0725
46.8750	0.0317	0.0321	0.0159
47.6563	0.1211	0.1214	0.1063
48.4375	0.2095	0.2097	0.1962
49.2188	0.2947	0.2948	0.2833
50.0000	0.3748	0.3749	0.3655
50.7813	0.4485	0.4484	0.4412
51.5625	0.5143	0.5143	0.5092
52.3438	0.5717	0.5716	0.5685
53.1250	0.6200	0.6198	0.6186
53.9063	0.6591	0.6589	0.6592
54.6875	0.6890	0.6888	0.6905
55.4688	0.7100	0.7098	0.7126
56.2500	0.7227	0.7225	0.7261
57.0313	0.7276	0.7275	0.7316
57.8125	0.7255	0.7254	0.7298
58.5938	0.7171	0.7170	0.7217
59.3750	0.7033	0.7032	0.7080
60.1563	0.6849	0.6849	0.6895
60.9375	0.6627	0.6627	0.6672
61.7188	0.6375	0.6374	0.6418
62.5000	0.6099	0.6099	0.6141
63.2813	0.5806	0.5806	0.5846
64.0625	0.5503	0.5503	0.5541
64.8438	0.5194	0.5194	0.5230
65.6250	0.4884	0.4884	0.4917
66.4063	0.4576	0.4576	0.4607
67.1875	0.4274	0.4274	0.4303
67.9688	0.3981	0.3981	0.4007

68.7500	0.3698	0.3698	0.3720
69.5313	0.3426	0.3427	0.3445
70.3125	0.3168	0.3169	0.3183
71.0938	0.2924	0.2924	0.2935
71.8750	0.2694	0.2694	0.2700
72.6563	0.2478	0.2478	0.2480
73.4375	0.2277	0.2277	0.2275
74.2188	0.2089	0.2089	0.2084
75.0000	0.1915	0.1915	0.1907
75.7813	0.1754	0.1754	0.1744
76.5625	0.1606	0.1606	0.1595
77.3438	0.1469	0.1469	0.1458
78.1250	0.1343	0.1344	0.1333
78.9063	0.1228	0.1228	0.1219
79.6875	0.1123	0.1123	0.1116
80.4688	0.1027	0.1027	0.1021
81.2500	0.0939	0.0939	0.0935
82.0313	0.0858	0.0858	0.0856
82.8125	0.0785	0.0785	0.0783
83.5938	0.0718	0.0718	0.0717
84.3750	0.0658	0.0658	0.0656
85.1563	0.0603	0.0603	0.0601
85.9375	0.0552	0.0552	0.0550
86.7188	0.0507	0.0507	0.0503
87.5000	0.0465	0.0465	0.0461
88.2813	0.0427	0.0427	0.0423
89.0625	0.0393	0.0393	0.0389
89.8438	0.0362	0.0362	0.0358
90.6250	0.0333	0.0333	0.0330
91.4063	0.0307	0.0307	0.0304
92.1875	0.0284	0.0284	0.0281
92.9688	0.0262	0.0262	0.0260
93.7500	0.0242	0.0242	0.0241
94.5313	0.0224	0.0224	0.0224
95.3125	0.0208	0.0208	0.0207
96.0938	0.0193	0.0193	0.0192
96.8750	0.0179	0.0179	0.0178
97.6563	0.0167	0.0167	0.0166
98.4375	0.0155	0.0155	0.0154
99.2188	0.0145	0.0145	0.0143

100.0000	0.0135	0.0135	0.0134
----------	--------	--------	--------

Tabela 6.3: Solução da Equação Equação do tipo Benjamin com operador da Transformada de Hilbert na faixa no tempo $t = 118,593$.

Os valores das soluções que são iguais a menos de quatro casas decimais para valores de x não estão presentes na Tabela 6.3. Nos gráficos da Figura 6.26 e na Tabela 6.3 nota-se o erro relativo dado pela equação (6.19) obtido em cada um dos tempos dos gráficos da Figura 6.25.

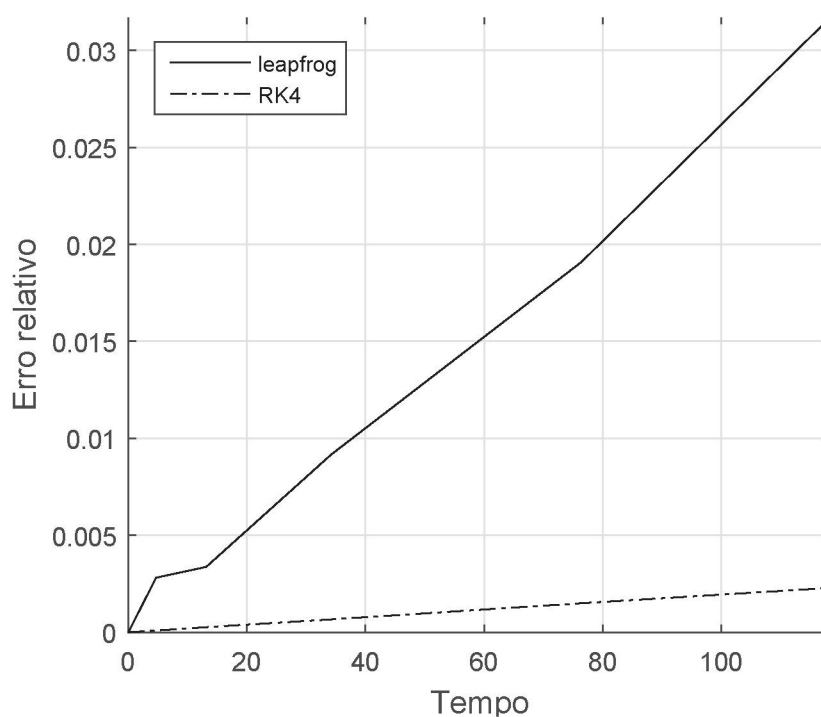


Figura 6.26: Erro relativo das soluções numéricas pelo método *leapfrog* da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa.

Nota-se nos gráficos da Figura 6.26 e na Tabela 6.3 que o erro relativo do método de Runge-Kutta de quarta ordem é na ordem de 10^{-3} enquanto que o erro relativo do método *leapfrog* é na ordem de 10^{-2} .

Além disso, analisou-se o erro relativo dado pela equação (6.19) para cada um dos métodos com valores de Δt diferentes. Para o método de *leapfrog* os valores de Δt escolhidos foram: $\Delta t = 0,469$, $\Delta t = 0,234$ e $\Delta t = 0,625$ e nos gráficos da Figura 6.27 observa-se os erros para cada um deles.

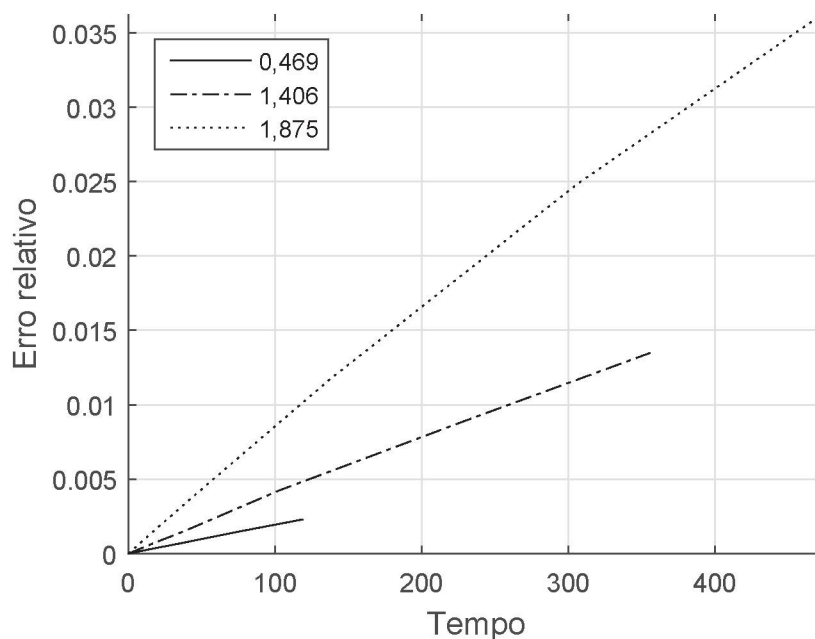


Figura 6.27: Erro relativo das soluções numéricas pelo método *leapfrog* da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa para diferentes valores de Δt .

Observa-se no gráfico da Figura 6.20 que o erro relativo é crescente no decorrer do tempo e proporcional ao fator que multiplica Δx . Além disso, o erro é sempre da ordem de 10^{-2} . Além disso, nota-se que o caso em que $\Delta t = 0,625$, tem-se que $\sigma = 0,8 > \frac{2}{3}$, isto é, σ , nesse caso, não satisfaz a condição de estabilidade estudada na subseção 6.2.1 e mesmo assim o erro fica na ordem de 10^{-2} . Nota-se o mesmo comportamento que no caso anterior com o operador \mathcal{H} na equação.

Para o método Runge-Kutta de quarta ordem os valores de Δt são: $\Delta t = 0,469$, $\Delta t = 1,406$ e $\Delta t = 1,875$. Nos gráficos na Figura 6.28 é possível observar o erro relativo para cada um dos valores de Δt .

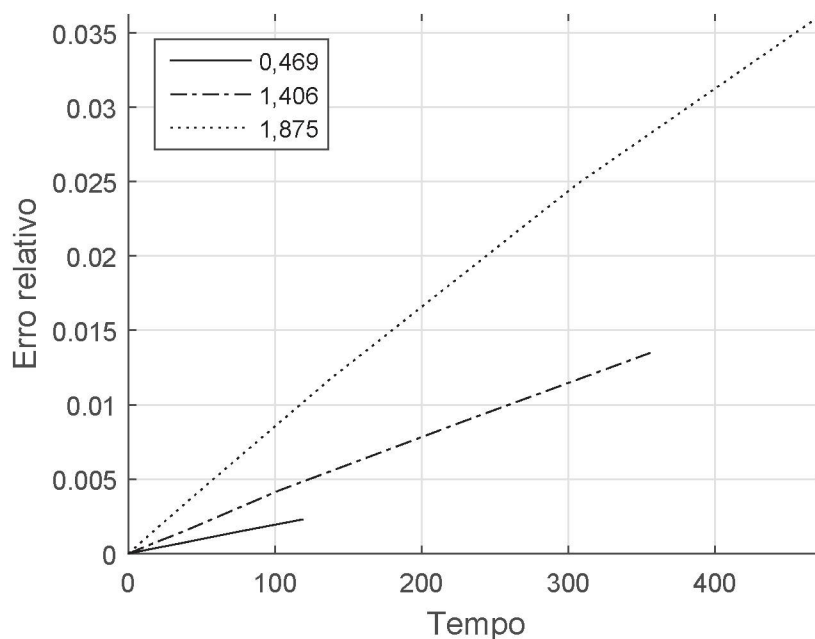


Figura 6.28: Erro relativo das soluções numéricas pelo método Runge-Kutta de quarta ordem da Equação do tipo Benjamin linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa para diferentes valores de Δt .

Observa-se no gráfico da Figura 6.28 que o erro relativo é crescente no decorrer do tempo e proporcional ao fator que multiplica Δx . Além disso, o erro relativo é da ordem de 10^{-3} para $\Delta t = 0,469$ e 10^{-2} para $\Delta t = 1,406$, os casos em que $\sigma \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$. No caso em que $\Delta t = 1,875$, tem-se que $\sigma = 2,4 > \frac{4\sqrt{2}}{3}$, isto é, σ , nesse caso, não satisfaz a condição de estabilidade estudada na subseção 6.2.1 e o erro relativo fica na ordem de 10^{-2} .

6.3 Implementação da solução da família de equações de Benjamin não linear

Nesta seção será feita a implementação da solução da família de equações de Benjamin no caso não linear, com os mesmos métodos descritos anteriormente a menos da solução analítica, pois agora a equação não é mais a linear.

Os dados iniciais considerados são hipóteses estabelecidas neste trabalho em todas as implementações com o objetivo de comparar as soluções para as diferentes equações, o único dado a mais do caso linear é o coeficiente do termo não linear na equação, isto é, α . Os dados iniciais são:

- $N = 2^8 = 256$;

- $L = 100$;
- $a = \frac{1}{5} = 0,2$;
- $b = \sqrt{a} = 0,4472$;
- $\alpha = a = 0,2$;
- $h = 10L = 1000$;
- $\Delta t = 0,6 \Delta x = 0,4688$ para o método de linhas que utiliza o método de *leapfrog* na discretização temporal;
- $\Delta t = 1,8 \Delta x = 1,4063$ para o método de linhas que utiliza o método de Runge-Kutta de quarta ordem na discretização temporal.

Os valores de Δt serão considerados os mesmos do caso linear que foi encontrado a partir da condição de estabilidade na subseção 6.2.1. E a solução inicial é dada por $u_0 = \exp\left(-\frac{(x+90)^2}{50}\right)$, nesse caso o dado inicial está mais deslocado da origem comparado com a implementação do caso linear, tal escolha foi feita para poder analisar o deslocamento completo da onda para a direita.

6.3.1 BBM adaptada

Considera-se a equação sem o operador, isto é, a equação BBM adaptada da equação do tipo Benjamin: $u_t + u_x - \frac{3}{2}\alpha uu_x - au_{xxt} = 0$.

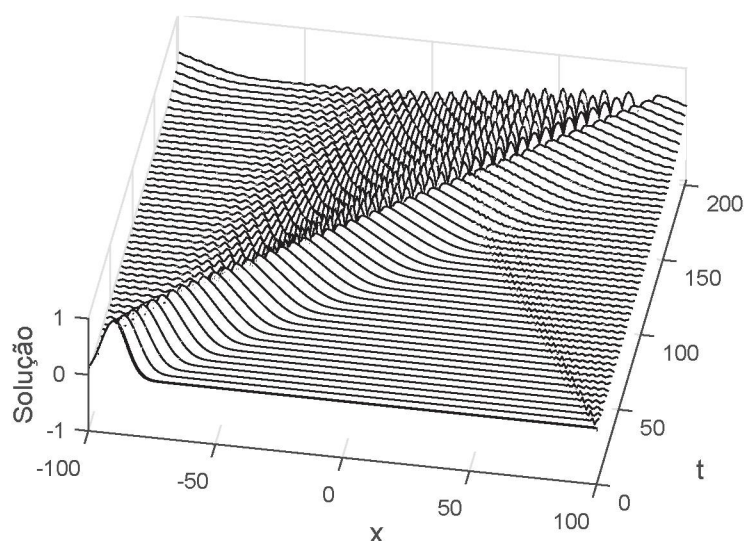


Figura 6.29: Solução da Equação BBM adaptada dada pelo método *leapfrog*.

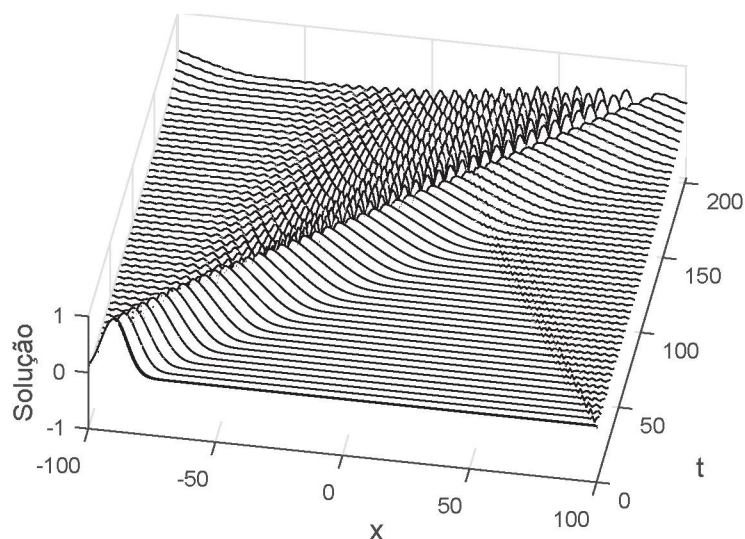


Figura 6.30: Solução da Equação BBM adaptada dada pelo método Runge-Kutta de ordem quatro.

Nos gráficos das Figuras 6.31 e 6.32 é possível verificar a dispersão da equação da BBM e as soluções encontradas pelo método *leapfrog* e pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem para vários valores de t .

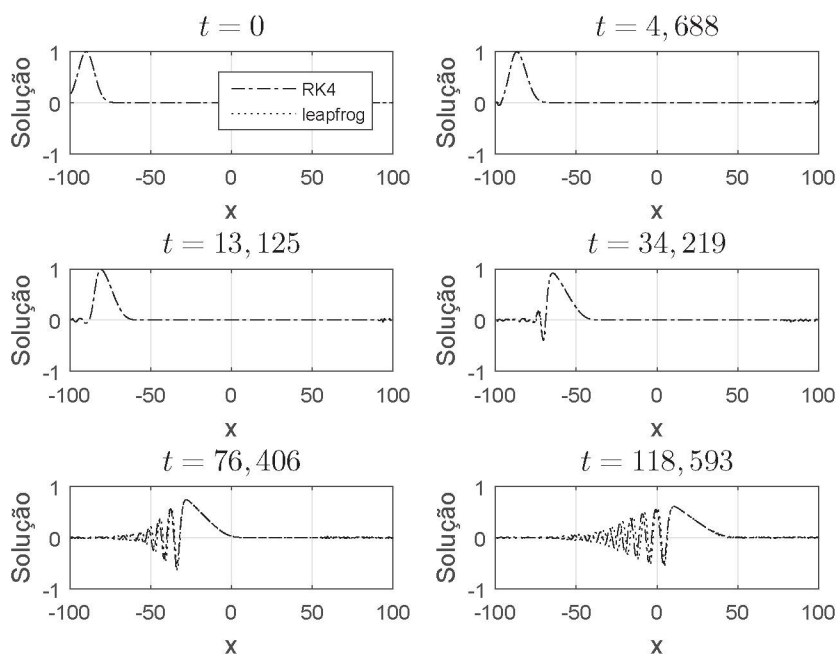


Figura 6.31: Solução da Equação BBM adaptada.

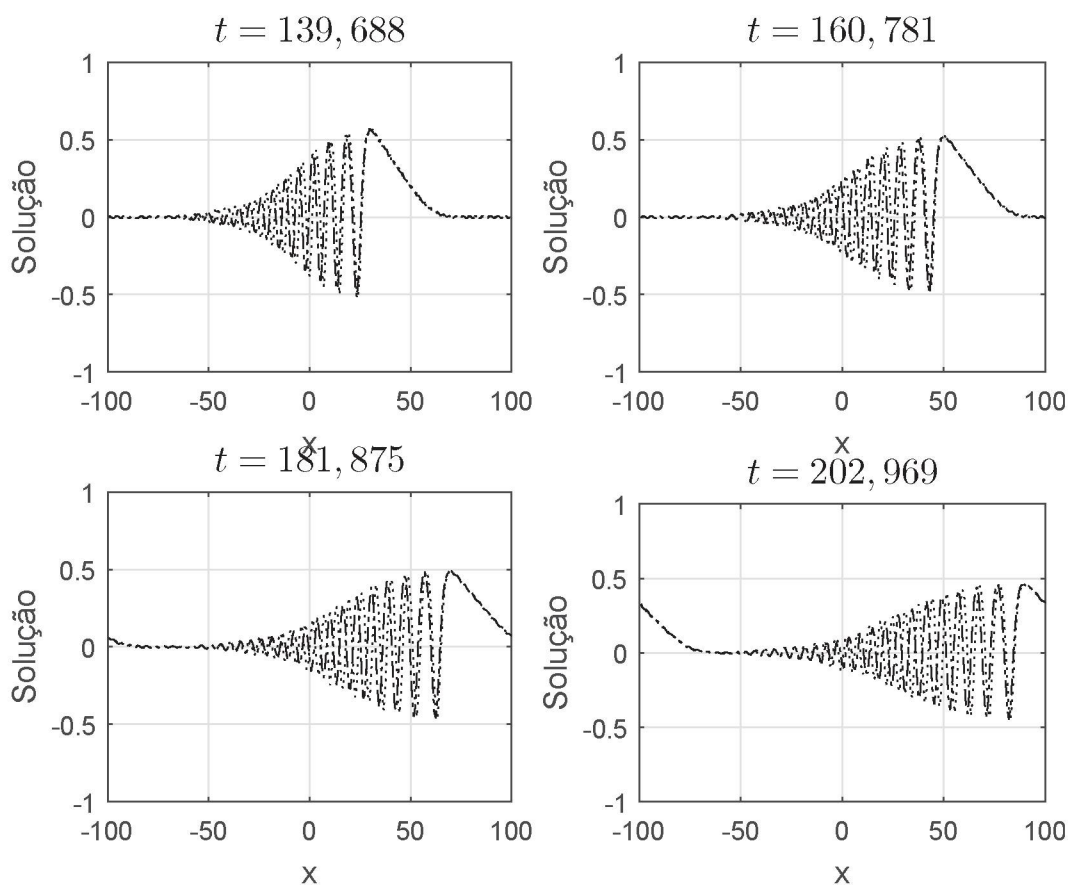


Figura 6.32: Solução da Equação BBM adaptada.

Observa-se nas Figuras 6.31 e 6.32 a dispersão da solução resolvida pelos dois métodos e nota-se que no decorrer do tempo a amplitude da onda se mantém de -1 a 1 .

6.3.2 Equação de Benjamin com o operador da Transformada de Hilbert

Considera-se a equação com o operador da **transformada de Hilbert**: $u_t + u_x - \frac{3}{2}\alpha uu_x - b\mathcal{H}[u]_{xt} - au_{xxt} = 0$.

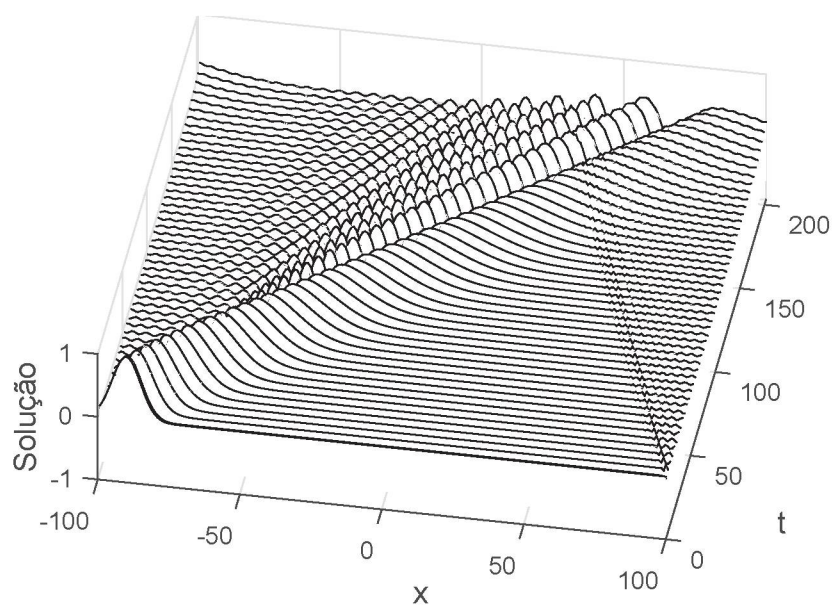


Figura 6.33: Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert dada pelo método *leapfrog*

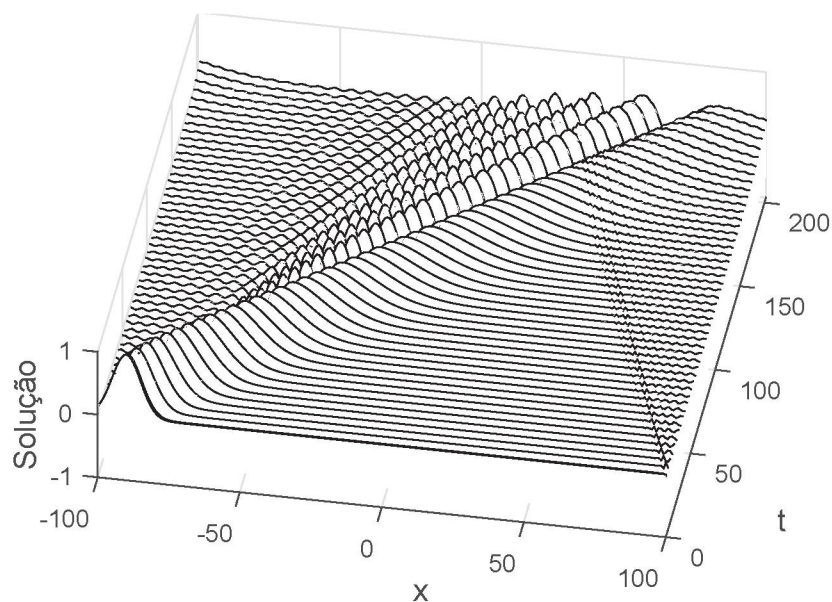


Figura 6.34: Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert dada pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.

Nos gráficos das Figuras 6.35 e 6.36 é possível verificar a dispersão da solução da equação da BBM e as soluções encontradas pelo método *leapfrog* e pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem para vários valores de t .

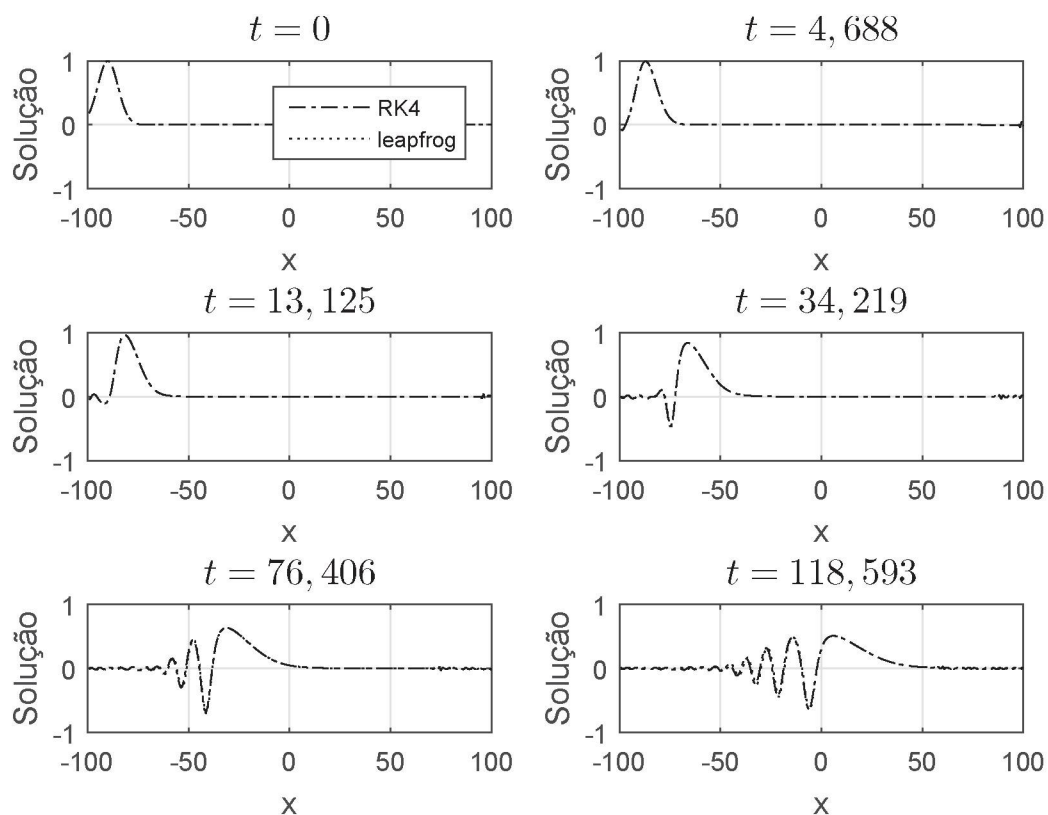


Figura 6.35: Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert.

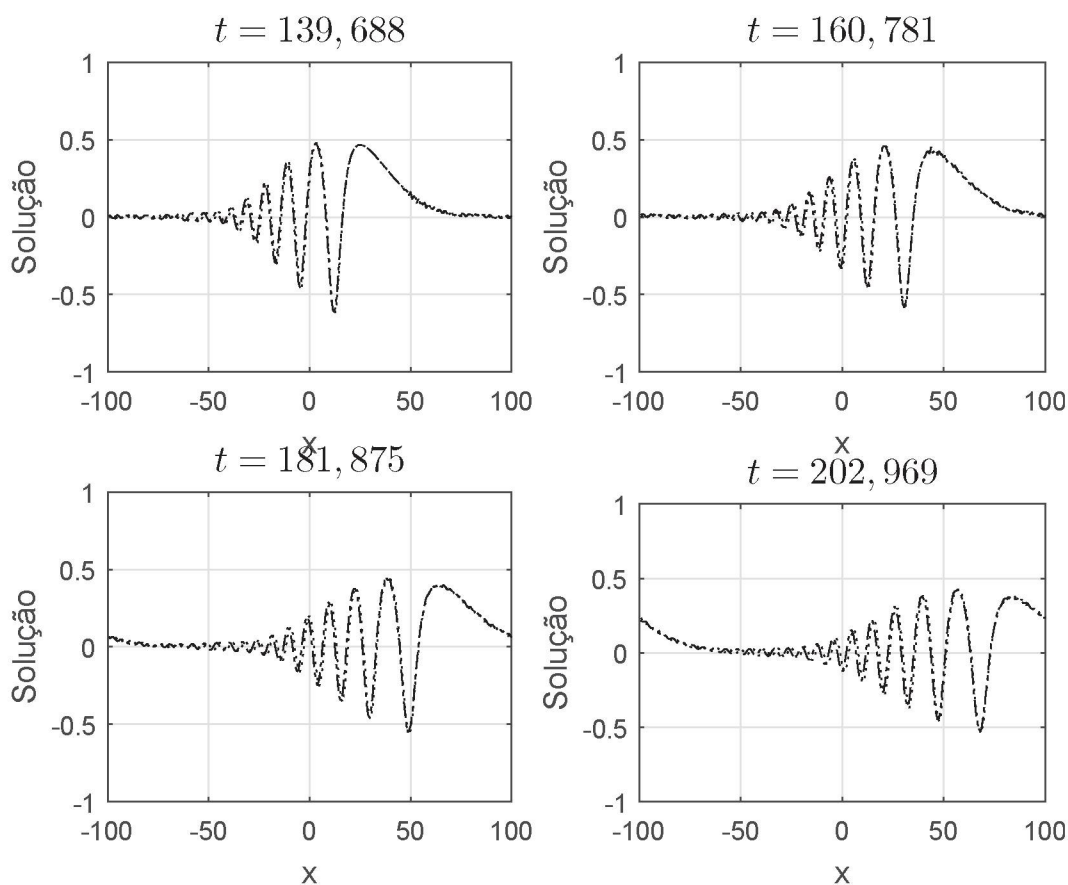


Figura 6.36: Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert.

Observa-se nas Figuras 6.35 e 6.36 a dispersão da solução resolvida pelos dois métodos e nota-se que no decorrer do tempo a amplitude da onda se mantém de -1 a 1 , sendo que após um longo período de tempo a amplitude é menor que um, como no último tempo plotado na Figura 6.36.

6.3.3 Equação de Benjamin com o operador da Transformada de Hilbert na faixa

Agora considera-se a equação com o operador da transformada de Hilbert na faixa: $u_t + u_x - \frac{3}{2}\alpha uu_x - b\mathcal{T}[u]_{xt} - au_{xxt} = 0$.

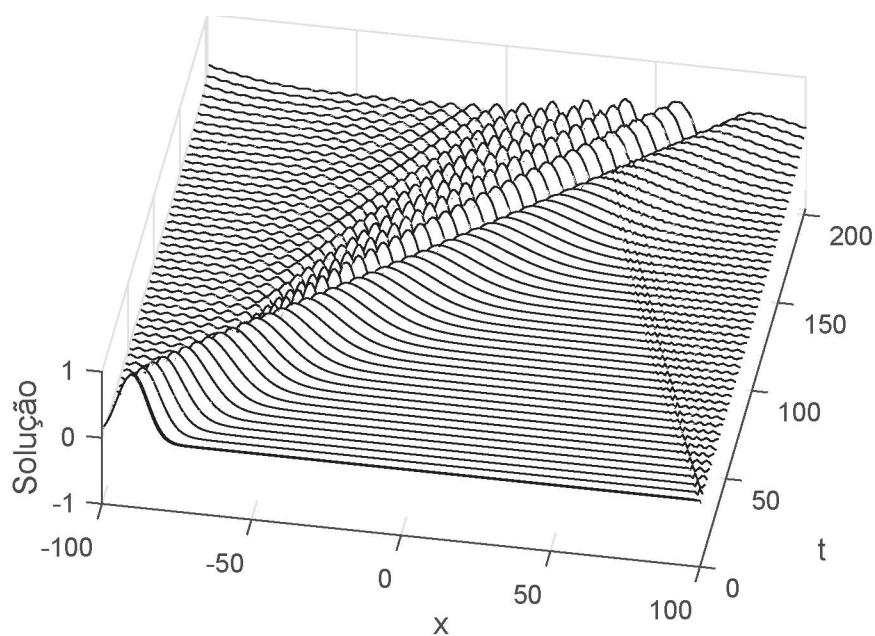


Figura 6.37: Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa dada pelo método *leapfrog*.

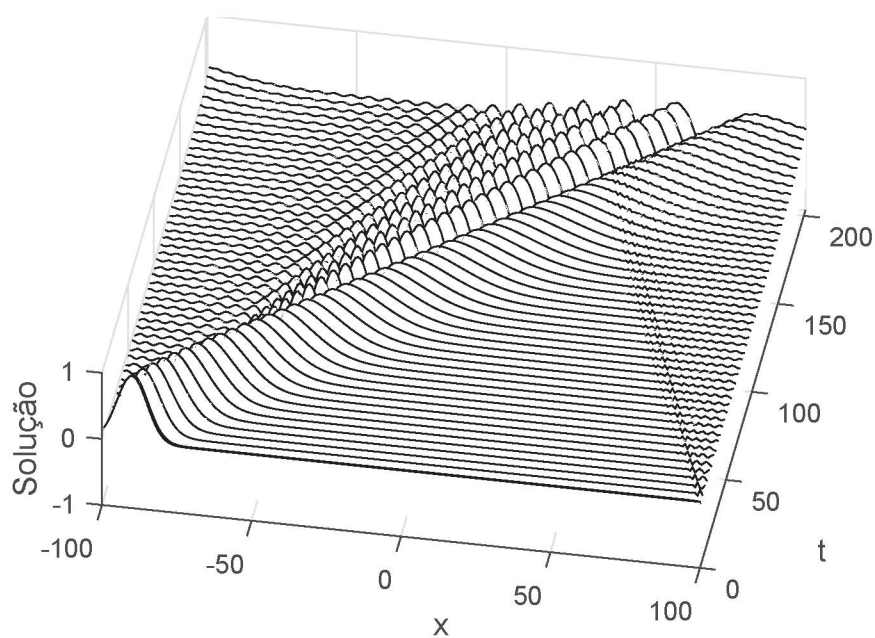


Figura 6.38: Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa dada pelo método Runge-Kutta de quarta ordem.

Nos gráficos das Figuras 6.39 e 6.40 é possível verificar a dispersão da solução da equação da BBM e as soluções encontradas pelo método *leapfrog* e pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem para vários valores de t .

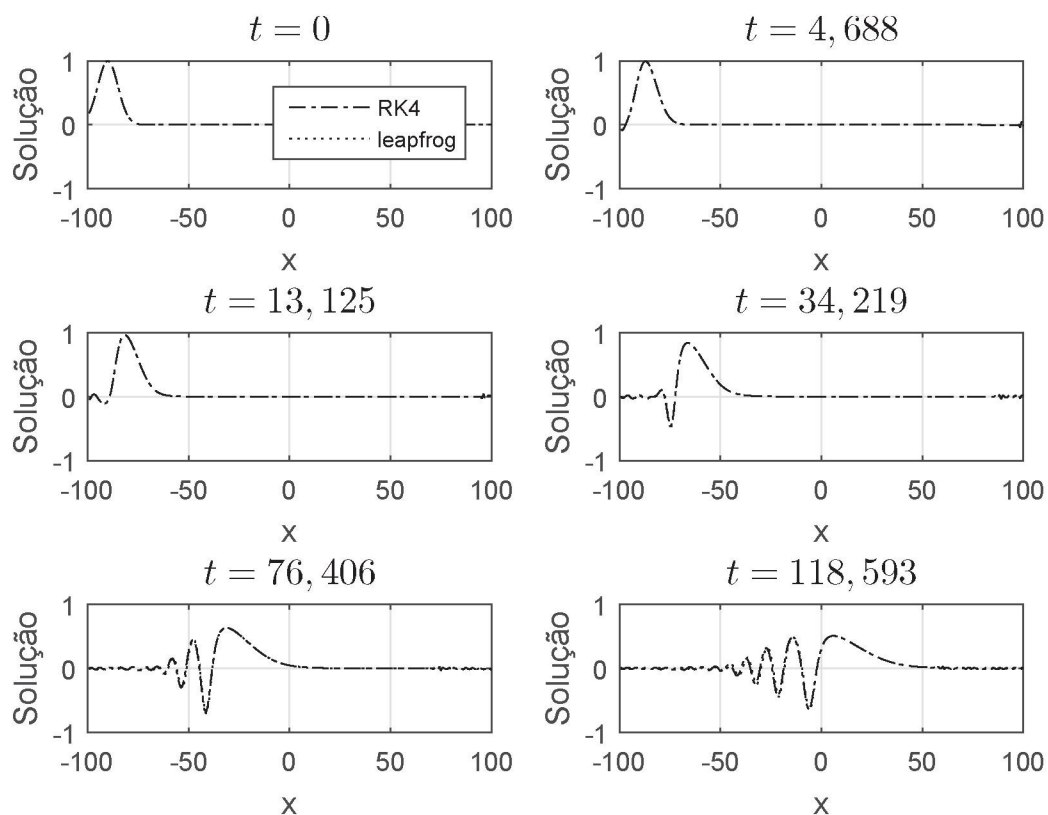


Figura 6.39: Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa.

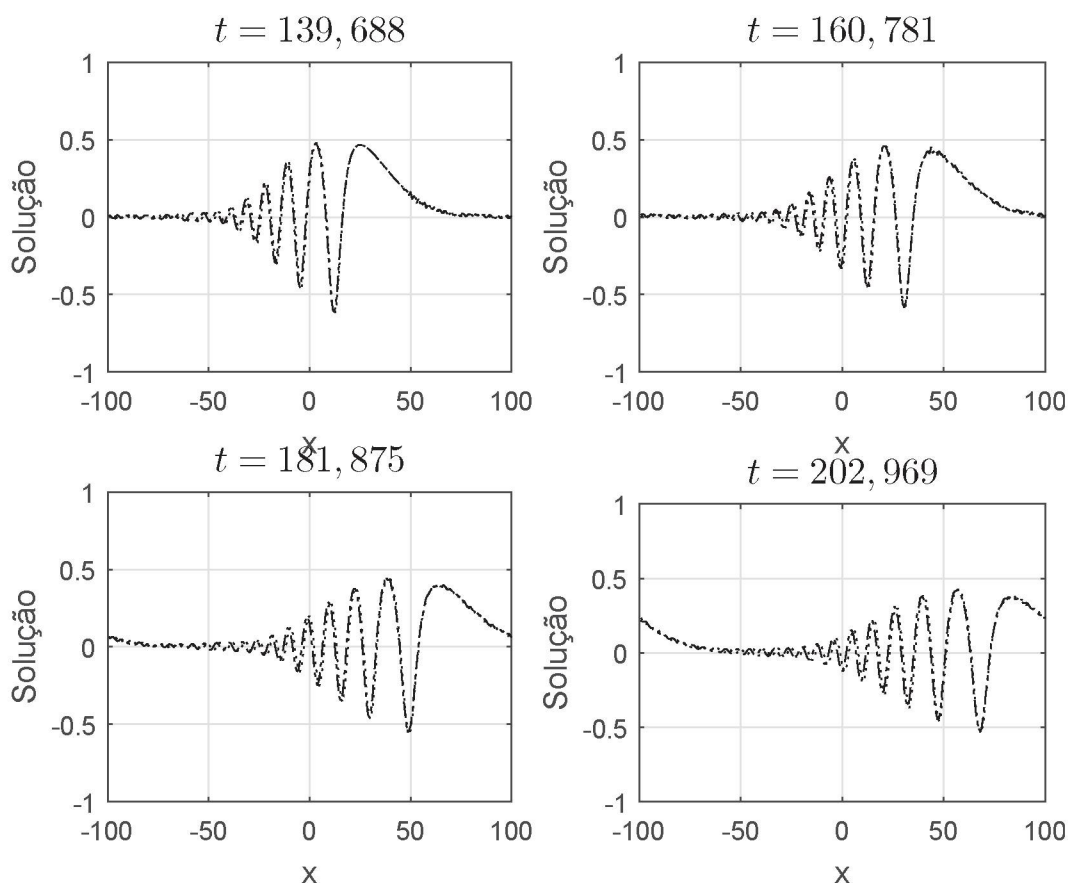


Figura 6.40: Solução da Equação do tipo Benjamin não linear com operador da Transformada de Hilbert na faixa.

Observa-se nas Figuras 6.39 e 6.40 a dispersão da solução resolvida pelos dois métodos e nota-se que após um longo período de tempo a amplitude da onda se mantém de $-0,5$ a $0,5$.

Conclui-se então, pela implementação do caso linear, que o método de Runge-Kutta de quarta ordem fornece uma solução numérica com um erro relativo na ordem de 10^{-3} , e o método de *leapfrog* com um erro relativo na ordem de 10^{-2} . Outro fator importante, é que o método de *leapfrog* mantém a ordem do erro relativo em 10^{-2} mesmo que a condição de estabilidade não seja satisfeita, desde que os operadores estejam presentes na equação. Porém, isso não acontece com o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Já na implementação do caso não linear, foi feita a plotagem da solução numérica para tempos maiores quando comparado com o caso linear e assim foi possível analisar o efeito da dispersão ao longo do tempo. Além disso, a amplitude da onda se manteve no intervalo de $[-1, 1]$ em todos os instantes

de tempo, observando que após um longo período de tempo essa amplitude reduziu ao intervalo de $[-0,5; 0,5]$.

Capítulo 7

Conclusões e trabalhos futuros

Neste trabalho foi realizado o estudo da família de equações de Benjamin. Na abordagem analítica, foi mostrado que o problema de Cauchy da equação RILW-Benjamin dado por

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s), \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0 \text{ em } H^s, \\ \eta(0) = \phi \in H^s, \end{cases}$$

é globalmente bem posto em H^s , para $s \geq 0$, com $s \neq \frac{1}{2}$. Inicialmente, no Capítulo 3, estudou-se o caso da família de equações de Benjamin linearizada a partir da teoria de semigrupos, tanto a equação regularizada quanto a não regularizada. Nesse caso, verificou-se que o problema de Cauchy da equação não regularizada

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s), \\ \eta_t(t) = -\eta_x + b\mathcal{L}[\eta_{xx}] + a\eta_{xxx}, \\ \eta(0) = \eta_0 \in H^s, \end{cases}$$

tem uma única solução η e ainda, $\eta \in C^1(\mathbb{R}, H^s)$, para $s \in \mathbb{R}$. Analogamente, o problema de Cauchy da equação regularizada

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s), \\ \eta_t(t) = -\eta_x + b\mathcal{L}[\eta_{xt}] + a\eta_{xxt}, \\ \eta(0) = \eta_0 \in H^s, \end{cases}$$

tem uma única solução η e ainda, $\eta \in C^1(\mathbb{R}, H^s)$, para $s \in \mathbb{R}$. Com esse estudo foi possível escrever a solução analítica da família de equações de Benjamin linearizada que foi utilizada na implementação para avaliar a solução numérica no Capítulo 6. Além disso, foi possível verificar que o semigrupo

associado ao problema de Cauchy é unitário e por consequência, de classe C_0 , informação essencial para o estudo da boa colocação do caso não linear que foi feito no Capítulo 4.

Dessa forma, no Capítulo 4 a boa colocação da família de equações de Benjamin numa versão regularizada foi garantida. Para tal foi utilizada a teoria de semigrupos baseada em [7, 10, 15, 17–19] utilizando os resultados encontrados no Capítulo 3. No caso local, foi possível garantir a boa colocação para $s \geq 0$, esse resultado se deve ao lema 4.1.3 que foi estendido a partir de [15]. Nota-se que foi possível melhorar o resultado apresentado em [7, 10], uma vez que em [7, 10] foi feita uma demonstração direta para a equação rILW garantindo a boa colocação local para $s > \frac{1}{2}$, onde para a família de equações de Benjamin é possível fazer uma demonstração análoga. A definição que foi utilizada para garantir a boa colocação local é dada por [16]. Dessa forma, concluiu-se que:

Teorema 7.0.1. *Sejam $s \geq 0$, $\eta_0 \in H^s$, então existe $T = T(s, \|\eta_0\|_s) > 0$ tal que o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} \eta \in C([-T, T], H^s) \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0 \text{ em } H^s \\ \eta(0, x) = \eta_0(x) \in H^s, \end{cases}$$

é localmente bem posto no sentido da definição 4.1.1.

Já para a boa colocação global foi necessário separar em dois teoremas. Um deles foi baseado em [10], estendendo o resultado para a família de equações de Benjamin e utilizando a teoria de semigrupos. Dessa forma, foi possível garantir que o problema é bem posto para $s \geq 1$, devido à equivalência das normas como detalhado no lema 4.2.1. Já no segundo teorema, foi feita uma demonstração pela teoria de semigrupos baseada em [15] estendendo para a família de equações de Benjamin e foi possível garantir que o problema é bem posto para $0 \leq s \leq 1$ com $s \neq \frac{1}{2}$ utilizando o lema A.0.2 e decompondo a solução η numa soma de duas funções v e w . Portanto, a família de equações de Benjamin é globalmente bem posta em H^s para $s \geq 0$, com $s \neq \frac{1}{2}$, isto é,

Teorema 7.0.2. *Sejam $s \geq 0$, com $s \neq \frac{1}{2}$ e $\eta_0 \in H^s$, então o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} \eta \in C(\mathbb{R}, H^s), \\ \eta_t + \eta_x - \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x - b\mathcal{L}[\eta]_{xt} - a\eta_{xxt} = 0 \text{ em } H^s, \\ \eta(x, 0) = \eta_0(x) \in H^s, \end{cases}$$

é globalmente bem posto.

Além disso, no Capítulo 5, estudou-se o operador pseudodiferencial que aparece nos sistemas do tipo Boussinesq para ondas intermediárias e nas equações derivadas destes, conhecido como Transformada de Hilbert na faixa, \mathcal{T} . O núcleo desse operador estudado no caso periódico é diferente do caso não periódico, uma vez que é dado pelas funções especiais enquanto que o outro é dado pela cotangente hiperbólica, respectivamente. A motivação do estudo do núcleo pelas funções especiais foi dada por [9].

Na abordagem numérica, inicialmente, no Capítulo 5 verificou-se a diferença entre o núcleo do operador da Transformada de Hilbert na faixa, \mathcal{T} , do caso periódico e do não periódico. Além disso, foi possível verificar que a Série de Fourier truncada não fornece uma boa aproximação numérica do núcleo periódico, desse operador, por convergir apenas no sentido das distribuições, o que justifica a necessidade de representação pelas funções especiais desse operador.

Ainda na abordagem numérica, também foi feita a implementação dos operadores que aparecem na família de equações de Benjamin e depois foi implementada a solução numérica da família de equações de Benjamin. No Capítulo 5 foi feita a implementação do operador tanto da Transformada de Hilbert na faixa, \mathcal{T} , quanto do operador da Transformada de Hilbert, \mathcal{H} , ambos no caso periódico. Como esses operadores são uma convolução com os seus respectivos núcleos, a implementação foi feita por duas abordagens: Transformada de Fourier e Regra do Trapézio Alternada. Além disso, foram realizados testes com diferentes funções como argumento da convolução. Para função argumento foi escolhida a Gaussiana e sua derivada, a menos de constantes. Observou-se que para ambos os operadores e para as diferentes funções argumento, a diferença entre a implementação por Transformada de Fourier e Regra do Trapézio Alternada ficou muito pequena. No entanto, foi possível observar para todas as funções argumento, que tanto pela Transformada de Fourier como pela Regra do Trapézio Alternada a parte real das frequências tem sempre o mesmo sinal enquanto que na parte imaginária o sinal fica alternando.

No Capítulo 6 foi implementada a solução numérica da família de equações de Benjamin com os dois operadores, da Transformada de Hilbert e da Transformada de Hilbert na faixa, tanto no caso linear quanto no caso não linear. O método utilizado foi o método das linhas, em que a discretização espacial foi feita pelo método das diferenças finitas dos cinco pontos e pela espectral. Optou-se pela discretização espectral para a derivada espacial de segunda ordem, pois o método das diferenças finitas dos cinco pontos não se mostrou estável. Após essa discretização foi feita a discretização temporal comparando o método *leapfrog* e o método Runge-Kutta de quarta ordem. Segundo [27], quando a EDP depende do tempo, elas são resolvidas nume-

ricamente por métodos espectrais, normalmente escolhe-se discretização espectral no espaço e diferenças finitas no tempo. Isso porque pequenos passos no tempo com fórmulas de ordem 2 ou superior geralmente deixam a precisão global bastante satisfatória. Passos pequenos no tempo são muito mais vantajosos do que intervalos de discretização pequenos no espaço, pois afetam o tempo de execução, mas não o armazenamento, e somente linearmente.

No estudo da condição de estabilidade foi possível observar que o Δt no método *leapfrog* é menor que o método de Runge-Kutta de quarta ordem, pois o método *leapfrog* é estável quando $\sigma < \frac{2}{3}$ e o método Runge-Kutta de quarta ordem é estável se $\sigma \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$. O estudo da estabilidade dos dois métodos foi baseado em [27, 30].

Verificou-se na implementação do caso linear, que o método de Runge-Kutta de quarta ordem forneceu uma solução aproximada com um erro relativo na ordem de 10^{-3} , e a solução aproximada pelo método de *leapfrog* teve um erro relativo na ordem de 10^{-2} . Para analisar esse erro, foi utilizada a solução analítica encontrada no Capítulo 3. Analisou-se também, o erro relativo das soluções numéricas, fornecida por cada um dos métodos, para diferentes valores de Δt . Com isso, observou-se que no método de *leapfrog* o erro relativo se manteve desde que a condição de estabilidade fosse mantida. No caso em que σ não satisfaz a condição de estabilidade verificou-se que erro relativo continuou na mesma ordem, isto é, 10^{-2} , para as equações com qualquer um dos operadores. Já no método de Runge-Kutta de quarta ordem, para $\sigma = 1,8$ que ainda satisfaz a condição de estabilidade o erro relativo aumentou para a ordem de 10^{-2} , mesma ordem do erro relativo para $\sigma = 2,4$ que não satisfaz a condição de estabilidade.

Além disso, no caso não linear, para todas as equações, observou-se o efeito da dispersão para tempos maiores e a amplitude da onda iniciou com tamanho igual a um, depois de um período de tempo aumentou para um tamanho um pouco maior que um, não ultrapassando dois, e após um período de tempo maior volta ao tamanho um, sendo que iniciou no intervalo de $[0, 1]$ e após um longo período de tempo ficou no intervalo de $[-0,5; 0,5]$. Nota-se também que a solução dada para a equação de Benjamin com a Transformada de Hilbert e com a Transformada de Hilbert na faixa ficaram muito próximas, isso se deve ao fato de que a profundidade da camada inferior foi escolhida como $h = 10L$, onde L é a largura da faixa. Isto é, a profundidade da camada inferior é dez vezes maior que a largura da faixa, isso se aproxima do caso em que a profundidade da camada inferior tende ao infinito quando comparada com a largura da faixa.

Como trabalhos futuros pretende-se:

- Verificar a boa colocação global para $s = \frac{1}{2}$.

- Implementar a Regra do Trapézio Alternada para calcular o operador atuando em funções suaves.
- Aprimorar e realizar mais testes numéricos para comparação das soluções a partir de diversos dados iniciais, inclusive ondas viajantes.

Referências

- 1 BECKERS, J.; CUSHMAN-ROSIN, B. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects*. [S.l.]: Pearson Education, 2006.
- 2 VIGO, D. G. A. et al. On the numerical approximation of some nonlocal operators. *Anais do XXXII Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, v. 1, 2011.
- 3 ZÁRATE, A. R. de et al. Resolução numérica de um modelo para ondas internas interagindo com a topografia. *II Simpósio de Análise Numérica e Otimização, UFPR, Curitiba*, 2010.
- 4 CHOI, W.; CAMASSA, R. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system. *Journal of Fluid Mechanics*, n. 313, p. 83–103, 1996.
- 5 CHOI, W.; CAMASSA, R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system. *Journal of Fluid Mechanics*, n. 396, p. 01–36, 1999.
- 6 ZÁRATE, A. R. de. A Reduced Model for Internal Waves Interacting with Submarine Structures at Intermediate Depth, Tese do Doutorado. *IMPA, Rio de Janeiro*, 2007.
- 7 NACHBIN, A.; ZÁRATE, A. R. de. A Reduced Model for Internal Waves Interacting with topography at Intermediate Depth. *Commun. Math. Sci.*, n. 6, p. 385–396, 2008.
- 8 CHORIN, A.; MARSDEN, J. E. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. [S.l.]: Springer-Verlag Publishing Company, Inc., Nova York, 2000.
- 9 SCHOEFFEL, J. Estudo de um modelo de dispersão não linear para ondas internas, Tese do Doutorado. *UFPR, Curitiba*, 2016.
- 10 ABLOWITZ, M. J. et al. On the periodic intermediate long wave equation. *Journal of Physics*, n. A 15, p. 781–786, 1982.

- 11 SCHOEFFEL, J. et al. Well-posedness for the regularized intermediate long-wave equation. *Communications in Mathematical Sciences*, v. 16, n. 2, p. 523–535, 2018.
- 12 WHITHAM, G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. [S.l.]: John Wiley e Sons, 1999.
- 13 BENJAMIN, T. B. A new kind of solitary wave. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 245, p. 401–411, 1992.
- 14 LINARES, F. L^2 Global Well-Posedness of Initial Value Problem Associated to the Benjamin Equation. *Journal of Differential Equations*, n. 152, p. 377–393, 1999.
- 15 LINARES, F.; SCIALON, M. On generalized Benjamin type equations. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A*, n. 12, p. 161–174, 2005.
- 16 BONA, J. L.; TZVETKOV, N. Sharp well-posedness results for the bbm equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, v. 23, n. 4, p. 1241–1252, 2009.
- 17 JR., R. J. I.; ÍORIO, V. M. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- 18 GOMES, A. M. *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações as Equações de Evolução*. [S.l.]: Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, 1999.
- 19 OQUENDO, H. P. *Notas de aula: Semigrupos de Operadores Lineares*. [S.l.]: <http://people.ufpr.br/higidio>, 2017.
- 20 PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. [S.l.]: Springer-Verlang, 1983.
- 21 TAO, T. *Nonlinear Dispersive Equations Local and Global Analysis*. [S.l.]: CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Number 106, 2006.
- 22 LINARES, F.; PONCE, G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. [S.l.]: Springer-Verlang, 2009.
- 23 KEENER, J. P. *Principles of Applied Mathematics: Transformation and Approximation*, Westview Press. [S.l.: s.n.], 2000.

24 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. [S.l.]: Ninth printing, 1970.

25 BYRD, P. F.; FRIEDMAN, M. D. *Handbook of Elliptic Integrals for Scientists and Engineers*. [S.l.]: Springer, 1971.

26 NACHBIN, A.; ZÁRATE, A. R. de. *Tópicos Introdutórios à Análise Complexa Aplicada*. [S.l.]: 26º Colóquio Brasileiro de Matemática, 2007.

27 TREFETHEN, L. N. *Spectral methods in Matlab*. [S.l.]: SIAM, Philadelphia, 2000.

28 ASCHER, U.; PETZOLD, L. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential - Algebraic Equations*. [S.l.]: SIAM, 1998.

29 SMITH, G. D. *Numerical Solution of PDEs, Finite Difference Methos*. [S.l.]: Oxford Univ. Press, 1985.

30 STRIKWERDA, J. C. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. [S.l.]: SIAM, 2004.

Apêndice A

Boa colocação local da parcela da solução correspondente à w_0

Teorema A.0.1. *Sejam $s \geq 0$, $\frac{1}{2} < s \leq \rho \leq s + 1$ ou $s + \frac{1}{2} < \rho \leq s + 1$ e $v \in C([-T, T], H^s)$, $T > 0$, então existe $0 < A = A(\rho, s, \|w_0\|_\rho, \|v\|_{X_A^s}) \leq T$ tal que $\|v\|_{X_A^s}$ é finito e o problema de Cauchy não linear*

$$\begin{cases} w \in C([-A, A], H^\rho) \\ w_t - aw_{xxt} - b\mathcal{L}[w]_{xt} + w_x - \frac{3}{2}\alpha ww_x - \frac{3}{2}\alpha(vw)_x = 0 \text{ em } H^\rho \\ w(x, 0) = w_0(x) \in H^\rho, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

é localmente bem posto no sentido da definição 4.1.1.

Demonstração: Considera-se a equação integral dada por

$$w(x, t) = S(t)w_0(x) + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x) (w^2(x, t') + 2(vw)(x, t')) dt', \quad (\text{A.2})$$

e para aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, define-se

$$\Lambda = \Lambda(A, M) = \left\{ u \in C([-A, A], H^\rho); \|u\|_{X_A^\rho} \leq M \right\},$$

onde $\|u\|_{X_A^\rho} = \sup_{t \in [-A, A]} \|u(\cdot, t)\|_\rho$. Como Λ é um subconjunto fechado em $C([-A, A], H^\rho)$ que é um espaço completo, [10], então Λ é um espaço métrico completo para todo $M > 0$ e $A > 0$.

Agora, considera-se $M = 2 \max \left\{ \|w_0\|_\rho, \|v\|_{X_A^s} \right\}$ e

$$\begin{aligned} J : \Lambda &\rightarrow \Lambda \\ u &\mapsto Ju : [-A, A] \rightarrow H^\rho, \end{aligned}$$

definida por

$$Ju(x, t) = S(t)w_0(x) + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x) \left(u^2(x, t') + 2(vu)(x, t') \right) dt'. \quad (\text{A.3})$$

Disso segue que J satisfaz as seguintes condições:

Condição 1: Existe $B_1 > 0$ tal que para todo $A < B_1$ o operador $J : \Lambda \rightarrow \Lambda$ está bem definido, isto é, que $J(\Lambda) \subset \Lambda$.

Condição 2: Existe $B_2 > 0$ tal que para todo $A < B_2$ o operador $J : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é uma contração.

De fato, para mostrar a condição 1, nota-se que se $u \in \Lambda$, então

$$\begin{aligned} \|Ju(\cdot, t)\|_\rho &\leq \|S(t)w_0\|_\rho + \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)u^2(\cdot, t')dt' \right\|_\rho \\ &+ \left\| \frac{3i\alpha}{2} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)(vu)(\cdot, t')dt' \right\|_\rho \\ &\leq \|S(t)w_0\|_\rho + \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)u^2(\cdot, t')dt' \right\|_\rho \\ &+ \left\| \frac{3i\alpha}{2} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)(vu)(\cdot, t')dt' \right\|_{s+1}, \end{aligned}$$

porque $\rho \leq s+1$. A partir dos Lemas 4.1.3 e A.0.2, existem constantes $C_s > 0$ e $\bar{C}_s > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \|Ju\|_{X_A^\rho} &\leq \|w_0\|_\rho + \sup_{t \in [-A, A]} \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)u^2(\cdot, t')dt' \right\|_\rho \\ &+ \sup_{t \in [-A, A]} \left\| \frac{3i\alpha}{2} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)(vu)(\cdot, t')dt' \right\|_{s+1} \\ &\leq \|w_0\|_\rho + \frac{3\alpha}{4} C_s \|u\|_{X_A^\rho}^2 A + \frac{3\alpha}{2} \bar{C}_s \|v\|_{X_A^s} \|u\|_{X_A^\rho} A \\ &\leq \frac{M}{2} + \frac{3\alpha}{4} C_s M^2 A + \frac{3\alpha}{2} \bar{C}_s \frac{M}{2} MA \\ &= \frac{M}{2} \left(1 + \frac{3\alpha}{2} K_s MA \right), \end{aligned}$$

onde $K_s = C_s + \bar{C}_s$. Fixado $B_1 = \frac{2}{3\alpha K_s M}$, então para todo $A < B_1$ tem-se que

$$\|Ju\|_{X_A^\rho} \leq \frac{M}{2}(1+1) = M.$$

Além disso, Ju é contínua, pois se $t, \tilde{t} \in [-A, A]$,

$$f(\cdot, t) = \varphi_j(D_x) (u^2(\cdot, t) + 2(uv)(\cdot, t))$$

e $Tf(\cdot, t) = S(t)w_0(x) + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')f(\cdot, t')dt'$, então

$$\begin{aligned} Tf(\cdot, t) - Tf(\cdot, \tilde{t}) &= \\ &= S(t)w_0 - S(\tilde{t})w_0 + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')f(\cdot, t')dt' \\ &\quad - \frac{3i\alpha}{4} \int_0^{\tilde{t}} S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \\ &= (S(t) - S(\tilde{t}))w_0 + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t [S(t-t') - S(\tilde{t}-t')]f(\cdot, t')dt' \\ &\quad - \frac{3i\alpha}{4} \int_t^{\tilde{t}} S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \\ &= (S(t) - S(\tilde{t}))w_0 + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t [S(t-\tilde{t}) - I] S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \\ &\quad - \frac{3i\alpha}{4} \int_t^{\tilde{t}} S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \\ &= (S(t) - S(\tilde{t}))w_0 + \frac{3i\alpha}{4} [S(t-\tilde{t}) - I] \int_0^t S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \\ &\quad - \frac{3i\alpha}{4} \int_t^{\tilde{t}} S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt'. \end{aligned}$$

Nota-se que os integrandos não dependem de t , como $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um grupo unitário e portanto fortemente contínuo, então $(S(t) - S(\tilde{t}))w_0 \rightarrow 0 \in H^\rho$ e $[S(t-\tilde{t}) - I] \int_0^t S(\tilde{t}-t')f(\cdot, t')dt' \rightarrow 0 \in H^\rho$, quando $t \rightarrow \tilde{t}$. Dessa forma, segue que no limite para $t \rightarrow \tilde{t}$ tem-se que

$$Tf(\cdot, t) - Tf(\cdot, \tilde{t}) = Ju(\cdot, t) - Ju(\cdot, \tilde{t}) \rightarrow 0 \in H^\rho.$$

Conclui-se então que $Ju \in C([-A, A], H^\rho)$ e $Ju \in \Lambda$, se $u \in \Lambda$.

Para mostrar a condição 2, considera-se $u, \nu \in \Lambda$, então pelos Lemas 4.1.3 e A.0.2, existem constantes $C_s > 0$ e $\bar{C}_s > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
& \|Ju - J\nu\|_{X_A^\rho} = \\
& = \sup_{t \in [-A, A]} \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) (u^2 + 2vu - \nu^2 - 2v\nu) (\cdot, t') dt' \right\|_\rho \\
& = \sup_{t \in [-A, A]} \left\| \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x) (u - \nu) (\cdot, t') (u + \nu + 2v) (\cdot, t') dt' \right\|_\rho \\
& \leq \sup_{t \in [-A, A]} \left| \frac{3\alpha}{4} \int_0^t \|S(t-t') \varphi_j(D_x) (u - \nu) (\cdot, t') (u + \nu) (\cdot, t')\|_\rho dt' \right| \\
& + \sup_{t \in [-A, A]} \left| \frac{3\alpha}{4} \int_0^t \|S(t-t') \varphi_j(D_x) (u - \nu) (\cdot, t') (2v) (\cdot, t')\|_{s+1} dt' \right| \\
& \leq \frac{3\alpha}{4} \left[C_s \|u - \nu\|_{X_A^\rho} \|u + \nu\|_{X_A^\rho} + 2\bar{C}_s \|u - \nu\|_{X_A^\rho} \|v\|_{X_A^s} \right] A \\
& \leq \frac{3\alpha}{4} \left[C_s \|u - \nu\|_{X_A^\rho} (\|u\|_{X_A^\rho} + \|\nu\|_{X_A^\rho}) + 2\bar{C}_s \|u - \nu\|_{X_A^\rho} \|v\|_{X_A^s} \right] A \\
& \leq \frac{3\alpha}{4} \left[C_s 2M \|u - \nu\|_{X_A^\rho} + 2\bar{C}_s \frac{M}{2} \|u - \nu\|_{X_A^\rho} \right] A \\
& \leq \frac{3\alpha}{4} M (2C_s + \bar{C}_s) A \|u - \nu\|_{X_A^\rho}.
\end{aligned}$$

Fixado $B_2 = \frac{4}{3\alpha(2C_s + \bar{C}_s)M}$, então para todo $A < B_2$, tem-se que

$$\|Ju - J\nu\|_{X_A^\rho} \leq \frac{3\alpha}{4} (2C_s + \bar{C}_s) M \frac{A}{B_2} \|u - \nu\|_{X_A^\rho} = q_A \|u - \nu\|_{X_A^\rho},$$

onde $q_A = \frac{A}{B_2} \in [0, 1)$.

Portanto, considera-se

$$0 < A < \min \{B_1, B_2\} \text{ e } M = 2 \max \left\{ \|w_0\|_\rho, \|v\|_{X_A^s} \right\},$$

onde $\|v\|_{X_A^s} = \sup_{t \in [-A, A]} \|v(\cdot, t)\|_s$. Assim, $J : \Lambda \rightarrow \Lambda$ está bem definida e é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma única função $w \in \Lambda$ e portanto, $w \in C([-A, A], H^\rho)$ solução do problema integral (A.2) no espaço Λ e consequentemente, uma solução forte do problema original. Observa-se que a unicidade fornecida pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach só é válida em Λ .

Para finalizar a demonstração do item (i) da definição 4.1.1, desde que

$F(w(\cdot, t)) = -\mathbf{i}\varphi_j(D_x)w(\cdot, t) + \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4}\varphi_j(D_x)(w^2(\cdot, t) + 2v(\cdot, t)w(\cdot, t))$ tem-se que

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{w(\cdot, t+h) - w(\cdot, t)}{h} - F(w(\cdot, t)) \right\|_{\rho} = \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(t+h)w_0 - S(t)w_0}{h} \right. \\
& \quad + \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t+h-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' \\
& \quad - \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' + \mathbf{i}\varphi_j(D_x)w(\cdot, t) \\
& \quad \left. - \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4}\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t) \right\|_{\rho} \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(t+h)w_0 - S(t)w_0}{h} \right. \\
& \quad + \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(h)S(t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' \\
& \quad - \frac{1}{h} \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' + \mathbf{i}\varphi_j(D_x)w(\cdot, t) \\
& \quad \left. - \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4}\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t) \right\|_{\rho} \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(t+h)w_0 - S(t)w_0}{h} \right. \\
& \quad + \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_0^t (S(h) - I)S(t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' \\
& \quad + \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h)S(t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' + \mathbf{i}\varphi_j(D_x)w(\cdot, t) \\
& \quad \left. - \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4}\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t) \right\|_{\rho} \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(h) - I}{h} S(t)w_0 + \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4} \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' \right. \\
& \quad + \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h)S(t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' + \mathbf{i}\varphi_j(D_x)w(\cdot, t) \\
& \quad \left. - \frac{3\mathbf{i}\alpha}{4}\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t) \right\|_{\rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(h) - I}{h} \left(S(t)w_0 + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' \right) \right. \\
&\quad + \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h+t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' + i\varphi_j(D_x)w(\cdot, t) \\
&\quad \left. - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t) \right\|_{\rho} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{S(h) - I}{h} w(\cdot, t) + i\varphi_j(D_x)w(\cdot, t) \right. \\
&\quad + \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h+t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' \\
&\quad \left. - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t) \right\|_{\rho}.
\end{aligned}$$

Nota-se, pela teoria de semigrupos, pela definição 2.2.4 e pelo Teorema 2.2.5, que

$$\frac{S(h) - I}{h} w(\cdot, t) \xrightarrow{h \rightarrow 0} A_1 w(\cdot, t) = -i\varphi_j(D_x)w(\cdot, t),$$

onde A_1 é o gerador do grupo $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Além disso, pelo Teorema do Valor Médio, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h+t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t')dt' - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x)\eta^2(\cdot, t) \right\|_{\rho} \\
&= \left\| \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [S(h+t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t') \right. \\
&\quad \left. - \varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t)] dt' \right\|_{\rho} \\
&\leq \frac{3\alpha}{4} \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|S(h+t-t')\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t') - \varphi_j(D_x)\eta^2(\cdot, t)\|_{\rho} dt' \right| \\
&\leq \frac{3\alpha}{4} \left| \frac{h}{h} \|S(h - \theta_h h)\varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t + \theta_h h) \right. \\
&\quad \left. - \varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t) \right\|_{\rho} \Big|,
\end{aligned}$$

onde $\theta_h \in [0, 1]$. Logo,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{3i\alpha}{4} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(h+t-t') \varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)^2(\cdot, t') dt' \right. \\ & \left. - \frac{3i\alpha}{4} \varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t) \right\|_{\rho} \\ & \leq \frac{3\alpha}{4} \left\| S(h - \theta_h h) \varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t + \theta_h h) - \varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t) \right\|_{\rho} \\ & \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{3\alpha}{4} \left\| S(0) \varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t) - \varphi_j(D_x)(w^2 + 2vw)(\cdot, t) \right\|_{\rho} = 0, \end{aligned}$$

pois $S(0) = I$. Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{w(t+h) - w(t)}{h} - F(w(t)) \right\|_{\rho} = 0.$$

Agora será mostrado o item (ii) da definição 4.1.1, isto é, que o problema (A.1) tem no máximo uma solução no intervalo $[-A, A]$. Para isso, consideram-se $w_i \in C([-A_i, A_i], H^{\rho})$, com seus respectivos dados iniciais w_0^i , $i = 1, 2$. Logo,

$$w_i(x, t) = S(t)w_0^i + \frac{3i\alpha}{4} \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x)(w_i^2 + 2vw_i)(x, t') dt'.$$

Pelos Lemas 4.1.3 e A.0.2, no intervalo $[-\tilde{A}, \tilde{A}]$, onde $\tilde{A} = \min\{A_1, A_2\}$, existem constante $C_s > 0$ e $\bar{C}_s > 0$ tais que

$$\begin{aligned} & \|w_1(\cdot, t) - w_2(\cdot, t)\|_{\rho} \leq \\ & \leq \|S(t)(w_0^1 - w_0^2)\|_s + \frac{3\alpha}{4} \left\| \int_0^t S(t-t') \varphi_j(D_x)(w_1^2(\cdot, t') - w_2^2(\cdot, t') \right. \\ & \left. + 2vw_1(\cdot, t') - 2vw_2(\cdot, t')) dt' \right\|_{\rho} \\ & \leq \|w_0^1 - w_0^2\|_{\rho} + \frac{3\alpha}{4} \left| \int_0^t \|w_1(\cdot, t') - w_2(\cdot, t')\|_{\rho} (C_s \|w_1(\cdot, t') \right. \\ & \left. + w_2(\cdot, t')\|_{\rho} + 2\bar{C}_s \|v(\cdot, t')\|_s) dt' \right| \\ & \leq \|w_0^1 - w_0^2\|_{\rho} + \frac{3\alpha}{4} \left| \int_0^t \|w_1(\cdot, t') - w_2(\cdot, t')\|_{\rho} (2C_s \tilde{M} + C_s \|w_0^1\|_{\rho} + C_s \|w_0^2\|_{\rho} \right. \\ & \left. + 2\bar{C}_s \|v(\cdot, t')\|_s) dt' \right|, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{M} = \max \left\{ \|w_1(\cdot, t) - w_0^1\|_{X_\rho^{\widehat{A}}}, \|w_2(\cdot, t) - w_0^2\|_{X_\rho^{\widehat{A}}} \right\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} & \|w_1(\cdot, t) - w_2(\cdot, t)\|_\rho \leq \\ & \leq \|w_0^1 - w_0^2\|_\rho + \beta \left| \int_0^t \|w_1(\cdot, t') - w_2(\cdot, t')\|_\rho dt' \right|, \end{aligned}$$

onde $\beta = \frac{3\alpha}{4} \left(2C_s \widetilde{M} + C_s \|w_0^1\|_\rho + C_s \|w_0^2\|_\rho + 2\bar{C}_s \|v\|_{X_s^{\widehat{A}}} \right)$. Pela desigualdade de Gronwall, Teorema 2.1.10, segue que

$$\begin{aligned} \|w_1(\cdot, t) - w_2(\cdot, t)\|_\rho & \leq \|w_0^1 - w_0^2\|_\rho \exp \left(\beta \left| \int_0^t dt' \right| \right) \\ & = \|w_0^1 - w_0^2\|_s \exp(\beta |t|). \end{aligned}$$

Em particular, se $w_0^1 = w_0^2$ e ambas as soluções estão definidas em $[-A, A]$, então $w_1 = w_2$. Portanto, a solução do problema (A.1) é única em $C([-A, A], H^\rho)$.

Finalmente, para mostrar o item (iii) da definição 4.1.1, considera-se $(w_n^0)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^\rho$ tal que $w_n^0 \rightarrow w_0^*$ em H^ρ e $w^* \in C([-A^*, A^*], H^\rho)$ é solução com a condição inicial w_0^* , onde $A^* > 0$. Seja $w_n \in C((-A_n, A_n), H^\rho)$ a solução com condição inicial w_0^n e $\overline{A}_n = \min \{A_n, A^*\}$, $n \in \mathbb{N}$, onde $A_n > 0$ é tal que $(-A_n, A_n)$ é o maior intervalo simétrico onde a solução w_n está definida.

Então para $t \in (-\overline{A}_n, \overline{A}_n)$ segue dos Lemas 4.1.3 e A.0.2, que existem constantes $C_s > 0$ e $\bar{C}_s > 0$ tais que

$$\begin{aligned} & \|w_n(\cdot, t) - w^*(\cdot, t)\|_\rho \leq \|S(t)w_0^n - S(t)w_0^*\|_\rho \\ & + \frac{3\alpha}{4} \left| \int_0^t \|w_n(\cdot, t') - w^*(\cdot, t')\|_\rho \left(C_s \|w_n(\cdot, t') + w^*(\cdot, t')\|_\rho + 2\bar{C}_s \|v(\cdot, t')\|_s \right) dt' \right| \\ & \leq \|S(t)(w_0^n - w_0^*)\|_\rho \\ & + \frac{3\alpha}{4} \left| \int_0^t \|w_n(\cdot, t') - w^*(\cdot, t')\|_\rho \left(C_s \|w_n(\cdot, t') - w^*(\cdot, t')\|_\rho + 2C_s \|w^*(\cdot, t')\|_\rho \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\bar{C}_s \|v(\cdot, t')\|_s \right) dt' \right|, \end{aligned}$$

Como $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um grupo unitário e se $M^* = 2C_s \sup_{t \in [-A^*, A^*]} \|w^*(\cdot, t)\|_\rho +$

$2\bar{C}_s \sup_{t \in [-A^*, A^*]} \|v(\cdot, t)\|_s$, $C_0 = \frac{3\alpha}{4} M^*$ e $C_1 = \frac{3\alpha}{4} C_s$, então

$$\begin{aligned} & \|w_n(\cdot, t) - w^*(\cdot, t)\|_\rho \leq \|w_0^n - w_0^*\|_\rho \\ & + \left| \int_0^t \left(C_0 \|w_n(\cdot, t') - w^*(\cdot, t')\|_\rho + C_1 \|w_n(\cdot, t') - w^*(\cdot, t')\|_\rho^2 \right) dt' \right|. \end{aligned}$$

Define-se

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &= \|w_0^n - w_0^*\|_\rho \\ &+ \left| \int_0^t \left(C_0 \|w_n(\cdot, t') - w^*(\cdot, t')\|_\rho + C_1 \|w_n(\cdot, t') - w^*(\cdot, t')\|_\rho^2 \right) dt' \right|. \end{aligned}$$

Derivando $\psi_n(t)$ em relação a t segue que para $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} |\psi_n'(t)| &= C_0 \|w_n(\cdot, t) - w^*(\cdot, t)\|_\rho + C_1 \|w_n(\cdot, t) - w^*(\cdot, t)\|_\rho^2 \\ &\leq C_0 \psi_n(t) + C_1 \psi_n^2(t) \end{aligned}$$

e $\psi_n(0) = \|w_0^n - w_0^*\|_\rho$. Portanto, $\frac{C_0 |\psi_n'(t)|}{C_0 \psi_n(t) + C_1 \psi_n^2(t)} \leq C_0$. Integrando de zero a t obtem-se:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{C_0 \psi_n'(\tau)}{C_0 \psi_n(\tau) + C_1 \psi_n^2(\tau)} d\tau \leq C_0 |t| \\ & \int_0^t \frac{C_0 + C_1 \psi_n(\tau)}{C_0 \psi_n(\tau)} \frac{C_0^2 \psi_n'(\tau)}{(C_0 + C_1 \psi_n(\tau))^2} d\tau \leq C_0 |t| \\ & \int_0^t \frac{1}{\frac{C_0 \psi_n(\tau)}{C_0 + C_1 \psi_n(\tau)}} \frac{C_0^2 \psi_n'(\tau)}{(C_0 + C_1 \psi_n(\tau))^2} d\tau \leq C_0 |t| \\ & \ln \left(\frac{C_0 \psi_n(t)}{C_0 + C_1 \psi_n(t)} \right) - \ln \left(\frac{C_0 \psi_n(0)}{C_0 + C_1 \psi_n(0)} \right) \leq C_0 |t| \\ & \ln \left(\frac{C_0 \psi_n(t)}{C_0 + C_1 \psi_n(t)} \frac{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho}{C_0 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho} \right) \leq C_0 |t| \\ & \psi_n(t) \frac{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho}{(C_0 + C_1 \psi_n(t)) \|w_0^n - w_0^*\|_\rho} \leq e^{C_0 |t|} \\ & \psi_n(t) \leq (C_0 + C_1 \psi_n(t)) \frac{\|w_0^n - w_0^*\|_s}{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho} e^{C_0 |t|} \\ & \psi_n(t) \left[1 - \frac{C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho e^{C_0 |t|}}{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho} \right] \leq \frac{C_0 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho}{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho} e^{C_0 |t|} \end{aligned}$$

$$\psi_n(t) \left[\frac{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho (1 - e^{C_0|t|})}{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho} \right] \leq \frac{C_0 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho e^{C_0|t|}}{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho}.$$

Disto segue que,

$$\|w_n(\cdot, t) - w^*(\cdot, t)\|_\rho \leq \psi_n(t) \leq \frac{C_0 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho e^{C_0|t|}}{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho (1 - e^{C_0|t|})}. \quad (\text{A.4})$$

Para que a desigualdade (A.4) seja válida deve-se ter

$$C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho (1 - e^{C_0|t|}) > 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned} 1 - e^{C_0|t|} &> -\frac{C_0}{C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho}, \\ 1 + \frac{C_0}{C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho} &> e^{C_0|t|}, \\ \ln \left(\frac{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho}{C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho} \right) &> C_0 |t|, \\ |t| &< \frac{1}{C_0} \ln \left(\frac{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho}{C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho} \right). \end{aligned}$$

Assim, a desigualdade (A.4) vale para todo $t \in (-\overline{A_n}, \overline{A_n}) \cap (-A_n^*, A_n^*)$, onde $A_n^* = \frac{1}{C_0} \ln \left(\frac{C_0 + C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho}{C_1 \|w_0^n - w_0^*\|_\rho} \right)$.

Desde que $\|w_0^n - w_0^*\|_\rho \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ e escolhe-se n suficientemente grande, então $A_n^* > A^*$, e assim, a desigualdade (A.4) vale para todo $t \in (-\overline{A_n}, \overline{A_n})$. Além disso, se $A_n \leq A^*$, logo $\overline{A_n} = A_n$, e

$$\|w_n(\cdot, t)\|_\rho \leq \|w_n(\cdot, t) - w^*(\cdot, t)\|_\rho + \|w^*(\cdot, t)\|_\rho, \forall t \in (-A_n, A_n).$$

Portanto, $\|w_n(\cdot, t)\|_\rho$ é limitado em $(-A_n, A_n)$, o que contradiz a maximalidade de A_n . Assim, $A_n > A^*$ para n suficientemente grande e a estimativa (A.4) é válida $\forall t \in [-A^*, A^*]$ e ainda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w^*\|_{X_{A^*}^\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [-A^*, A^*]} \|w_n(\cdot, t) - w^*(\cdot, t)\|_\rho = 0.$$

Portanto, a aplicação $w_0 \mapsto w$ é contínua. Assim, segue pela definição

4.1.1, que o problema (A.0.1) é localmente bem posto para $s \geq 0$, $\frac{1}{2} < s \leq \rho \leq s + 1$ ou $s + \frac{1}{2} < \rho \leq s + 1$. ■

Lema A.0.2. *Sejam $u(\cdot, t) \in H^s$ e $v(\cdot, t) \in H^r$, $t \in I$, I um intervalo não vazio, onde $\frac{1}{2} < s \leq r$ ou $0 \leq s < r$ com $r - s > \frac{1}{2}$, então $\varphi_j(D_x)(uv)(\cdot, t) \in H^{s+1}$ e existe uma constante $C = C(s) > 0$ tal que*

$$\|\varphi_j(D_x)(uv)(\cdot, t)\|_{s+1} \leq C \|u(\cdot, t)\|_s \|v(\cdot, t)\|_r,$$

$\forall t \in I$.

Demonstração:

Inicialmente, nota-se que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^{s+1} \frac{k^2}{(1+b|k|+ak^2)^2} |(\widehat{uv})(k)|^2 dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k^2+k^4}{(1+b|k|+ak^2)^2} (1+k^2)^s |(\widehat{uv})(k)|^2 dk, \end{aligned}$$

como $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{k^2+k^4}{(1+b|k|+ak^2)^2} = \frac{1}{a^2}$ e $\frac{k^2+k^4}{(1+b|k|+ak^2)^2}$ é contínua num compacto $[-\delta, \delta]$, $\delta > 0$. Dessa forma, existe $M > 0$ tal que

$$\|\varphi_1(D_x)(uv)(\cdot, t)\|_{s+1} \leq M \|(uv)(\cdot, t)\|_s, \quad (\text{A.5})$$

$\forall t \in I$. Além disso, como $|\varphi_2(k)| \leq |\varphi_1(k)|$, $\forall k \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$\|\varphi_j(D_x)(uv)(\cdot, t)\|_{s+1}^2 \leq M \|(uv)(\cdot, t)\|_s^2, \quad (\text{A.6})$$

$\forall t \in I$ e $j = 1, 2$.

Nota-se que se $\frac{1}{2} < s \leq r$, então pelos Teoremas 2.1.5 e 2.1.6, existe uma constante $K_s = K(s) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\varphi_j(D_x)(uv)(\cdot, t)\|_{s+1}^2 &\leq M \|(uv)(\cdot, t)\|_s^2 \\ &\leq MK_s \|u(\cdot, t)\|_s^2 \|v(\cdot, t)\|_s^2 \\ &\leq MK_s \|u(\cdot, t)\|_s^2 \|v(\cdot, t)\|_r^2. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Além disso, caso $0 \leq s < r$ com $r - s > \frac{1}{2}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \|\varphi_j(D_x)(uv)(\cdot, t)\|_{s+1}^2 &\leq M \|(uv)(\cdot, t)\|_s^2 \\ &= M \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s |(\widehat{v} * \widehat{u})(k)|^2 dk \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2\pi}M \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(k_1)\widehat{u}(k-k_1)dk_1 \right|^2 dk \\
&\leq \sqrt{2\pi}M \int_{-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{v}(k_1)| |\widehat{u}(k-k_1)| dk_1 \right]^2 dk \\
&= \sqrt{2\pi}M \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (1+k_1^2)^{r/2} |\widehat{v}(k_1)| \frac{(1+k^2)^{s/2}}{(1+k_1^2)^{r/2}} |\widehat{u}(k-k_1)| dk_1 \right]^2 dk.
\end{aligned}$$

Nota-se que a integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+k^2)^s}{(1+k_1^2)^r} |\widehat{u}(k-k_1)|^2 dk_1$ é finita pela desigualdade (4.8). Dessa forma, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, Teorema 2.1.2, segue que

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_j(D_x)(uv)(\cdot, t)\|_{s+1}^2 \\
&\leq \sqrt{2\pi}M \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (1+k_1^2)^r |\widehat{v}(k_1)|^2 dk_1 \right] \\
&\quad \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+k^2)^s}{(1+k_1^2)^r} |\widehat{u}(k-k_1)|^2 dk_1 \right] dk \\
&= \sqrt{2\pi}M \|v(\cdot, t)\|_r^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+k^2)^s}{(1+k_1^2)^r} |\widehat{u}(k-k_1)|^2 dk_1 dk.
\end{aligned}$$

Da desigualdade (4.8) existe uma constante $\bar{C}_s > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_j(D_x)(uv)(\cdot, t)\|_{s+1}^2 \\
&\leq \sqrt{2\pi}M\bar{C}_s \|v(\cdot, t)\|_r^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+k_1^2)^{r-s}} \int_{-\infty}^{\infty} (1+(k-k_1)^2)^s |\widehat{u}(k-k_1)|^2 dk dk_1 \\
&\leq K \|v(\cdot, t)\|_r^2 \|u(\cdot, t)\|_s^2, \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$\forall t \in I$, uma vez que $r - s > \frac{1}{2}$.

Portanto, das desigualdades (A.7) e (A.8) tem-se que existe uma constante $C_s = C(s)$ tal que

$$\|\varphi_j(D_x)(uv)(\cdot, t)\|_{s+1} \leq C_s \|u(\cdot, t)\|_s \|v(\cdot, t)\|_r,$$

se $\frac{1}{2} < s \leq r$ ou $0 \leq s < r$ com $r - s > \frac{1}{2}$. ■

Apêndice B

Implementação

B.1 Algoritmo para o núcleo do operador da Transformada de Hilbert na faixa

B.1.1 Comparativo dos núcleos

```
L=pi;
h=pi/2;
N=128;
x=-pi+2*pi/N:2*pi/N:pi;
q=h/L;

%NUCLEO USANDO AS FUNCOES ESPECIAIS POR Q-SERIES:
%calculo do parametro m
parametro_m = calculo_parametro(h/L);

%calculo da eliptica completa K
K=ellipke(parametro_m);

%calculo funcao zeta de jacobi por expansao
%de q-serie e dncs por pacote do Matlab
for k=N/2:-1:1
    Z(k,:)=(2*pi*q^k)/(K*(1-q^(2*k)))*sin(k*pi*x/L);
end
zeta=sum(Z);
[sn,cn,dn]=ellipj(K*x/L,parametro_m);
dncs=cn.*dn./sn;
```

```

%calculo do operador usando as funcoes especiais
T=-K/(L*pi)*(zeta+dncs);

%NUCLEO USANDO TRANSFORMADA DE FOURIER
for k=N/2:-1:1
    B(k,:)=(i/(2*L))*coth(k*pi*h/L)*exp(i*k*pi*x/L);
end
TFFT=sum(B);

%NUCLEO DEFINIDO EM R -
%este foi plotado separadamente para diferentes valores de N
TR=-1/(2*h)*coth(pi/(2*h)*x);

```

B.1.2 Cálculo do parâmetro m

```

function M = calculo_parametro(delta_sobre_L)

    m = 0.001:0.001:1-0.001;
    K = ellipke(m);
    K_linha = ellipke(1-m);
    K_linha_sobre_K = K_linha./K;

M = interp1(K_linha_sobre_K,m,h_sobre_L);

```

B.2 Comparativo dos dois operadores por RTA e FFT

```

function y=comparacao(op)

h=pi/3;
L=pi;
N=128;
deltax=2*L/N;
x=-L+deltax:deltax:L;
f=exp(-x.^2/2);

op_trapezio=operadorT2(h,L,N,deltax,x,f,op);
op_fourier=fourier(h,L,N,op);

plot(x,op_trapezio,'k-', 'DisplayName',

```

```

'Operador pela Regra do Trapézio');
hold on
plot(x,op_fourier,'k.','DisplayName',
'Operador por Transformada de Fourier');
legend('show');
hold off
grid on
switch lower(op)
    case 'normal'
        N_string = 'Operador com Nucleo cotangente';
        title(N_string)
        print -depsc2 'comparativo_operador_cot.eps'
    case 'especial'
        N_string = 'Operador com Nucleo funções especiais';
        title(N_string)
        print -depsc2 'comparativo_operador_especial.eps'
end
end

function y=operadorT2(h,L,N,deltax,x,f,op)

%calculo do nucleo - caso ímpar
nuc=[];
for i=1:2:N-1
    n(i) = nucleo(deltax*i,h,L,N,op);
    nuc=[n];
end

for j=1:N
    aux2=0;
    for k=1:N
        aux1=0;
        if rem(j+k,2)~=0
            if j-k>0
                aux1=-2*deltax*f(k)*nuc(j-k);
                aux2 = aux2 + aux1;
            else
                aux1=2*deltax*f(k)*nuc(k-j);
                aux2 = aux2 + aux1;
            end
        end
    end
end

```

```

        operadorT2(j,1)=aux2;
    end
end

y=operadorT2;

function y=nucleo(x,delta,L,N,op)

switch lower(op)

    case 'normal'

y=1/(2*L)*cot((pi*x)/(2*L));

    case 'especial'

q=delta/L;
parametro_m = calculo_parametro(delta/L);

%%%calculo da eliptica completa K%%%

K=ellipke(parametro_m);

%%%calculo funcao zeta de jacobi e dncs por expansao de%%%
%%%q-serie%%%

for k=N/2:-1:1
    Z(k,:)=(2*pi*q^k)/(K*(1-q^(2*k)))*sin(k*pi*x/L);
end
zeta=sum(Z);

[sn,cn,dn]=ellipj(K*x/L,parametro_m);
dncs=cn.*dn./sn;

%%%calculo do nucleo do operador usando as funcoes%%%
%%%especiais%%%

y=K/(L*pi)*(zeta+dncs);

end

```

```

function y=fourier(h,L,N,deltax,x,f,op)

%fft da função f
fftf=fft(f);

%fft do nucleo
aux = [1:N/2 -N/2 + 1:-1];
aux = pi*aux/L; % 2L period

switch lower(op)
    case 'normal'
        fftnucleo=i*sign(aux);
    case 'especial'
        fftnucleo=i*coth(h*aux);
end
fftnucleo=[0 fftnucleo];

%produto das fft
fftresultado=fftf.*fftnucleo;

%transformada inversa
resultado=ifft(fftresultado);
y=real(resultado);

```

B.3 Algoritmo da solução da família de equações de Benjamin

B.3.1 Equação de Benjamin com o operador de Hilbert

```

function y=benjamin_hilbert_leapfrog(N,L)
% Solução equação de Benjamin na faixa usando
% matriz de diferenciação de 5 pontos e espectral
% Derivação temporal pelo método leapfrog
%  $u_t + u_x - 3/2\alpha u u_x - bL(u)_{xt} - a u_{xxt} = 0$ 

% Grid, and initial data:
a=1/5;
b=sqrt(a);
alfa=a;
deltax=2*L/N;

```

```

x=-L+deltax:deltax:L;
x=x';
t = 0;
dt = 0.6*deltax; %deve ser menor que dt/dx=2/3
D = dif(N);
D = (1/deltax)*D;
D2 = dif2_hilbert(L,N,a,b);
B=D2\D;

%solução inicial
u=exp(-((x+90).^2)/50);

uold=u;
u = uold - dt*B*(uold-0.75*alfa*uold.^2);

%passo 1 do leap-frog

data = [ uold' ; u'; zeros(48,N)]; tdata = [t;t+dt];
t=t+dt;
    for i = 2:49
        for n = 1:9
            t = t+dt;
            unew = uold - 2*dt*B*(u-0.75*alfa*u.^2);

%passo n do leap-frog
            uold = u;
            u = unew;
        end
        data(i+1,:) = [u']; tdata = [tdata; t];
    end
y=data;

function y=benjamin_hilbert_rk4_plot(N,L)
% Solução equação de Benjamin na faixa usando
% matriz de diferenciação de 5 pontos e espectral
% Derivação temporal pelo método Runge-Kutta
%  $u_t + u_x - 3/2*alfa*u*u_x - bL(u)_{xt} - a*u_{xxt} = 0$ 

% Grid, and initial data:
a=1/5;
b=sqrt(a);

```

```

alfa=a;
deltax=2*L/N;
x=-L+deltax:deltax:L;
x=x';
t = 0;
dt = 1.8*deltax; %deve ser menor que dt/dx=4\sqrt{2}/3
D=dif(N);
D=(1/deltax)*D;
D2=dif2_hilbert(L,N,a,b);
B =-D2\D;

%solução inicial
u=exp(-((x+90).^2)/50);

%para poder comparar com o método leap-frog
%plotar no tempo t=0+1/3*dt
dt=1/3*dt;
K1=dt*B*(u-0.75*alfa*u.^2);
K2=dt*B*(u+K1/2-0.75*alfa*(u+K1/2).^2);
K3=dt*B*(u+K2/2-0.75*alfa*(u+K2/2).^2);
K4=dt*B*(u+K3-0.75*alfa*(u+K3).^2);
uold = u + (K1+2*K2+2*K3+K4)/6;

data = [ u' ; uold'; zeros(48,N)]; tdata = [t;t+dt];
t=t+dt;
u=uold;
for i = 2:49
    for n = 1:9
        t = t+dt;
        K1=dt*B*(u-0.75*alfa*u.^2);
        K2=dt*B*(u+K1/2-0.75*alfa*(u+K1/2).^2);
        K3=dt*B*(u+K2/2-0.75*alfa*(u+K2/2).^2);
        K4=dt*B*(u+K3-0.75*alfa*(u+K3).^2);
        unew = u + (K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
        u = unew;
    end
    data(i+1,:) = [u']; tdata = [tdata; t];
end
y=data;

```

B.3.2 Equação de Benjamin com o operador de Hilbert na faixa

```

function y=benjamin_hilbert_faixa_leapfrog(N,L)
% Solução equação de Benjamin na faixa usando
% matriz de diferenciação de 5 pontos e espectral
% Derivação temporal pelo método leapfrog
%  $u_t + u_x - 3/2\alpha u u_x - bL(u)_{xt} - a u_{xxt} = 0$ 

% Grid, and initial data:
a=1/5;
b=sqrt(a);
alfa=a;
h=10*L;
%profundidade da camada no caso da transformada
%de hilbert na faixa
deltax=2*L/N;
x=-L+deltax:deltax:L;
x=x';
t = 0;
dt = 0.6*deltax; %deve ser menor que dt/dx=2/3
D = dif(N);
D = (1/deltax)*D;
D2 = dif2_hilbert_faixa(L,N,a,b,h);
B=D2\D;

%solução inicial
u=exp(-((x+90).^2)/50);

uold=u;
u = uold - dt*B*(uold-0.75*alfa*uold.^2);
%passo 1 do leap-frog

data = [ uold' ; u'; zeros(48,N)]; tdata = [t;t+dt];
t=t+dt;
    for i = 2:49
        for n = 1:9
            t = t+dt;
            unew = uold - 2*dt*B*(u-0.75*alfa*u.^2);
%passo n do leap-frog
            uold = u;

```

```

        u = unew;
    end
    data(i+1,:) = [u']; tdata = [tdata; t];
end
y=data;

function y=benjamin_hilbert_faixa_rk4(N,L)
% Solução equação de Benjamin na faixa usando
% matriz de diferenciação de 5 pontos e espectral
% Derivação temporal pelo método Runge-Kutta
%  $u_t + u_x - 3/2*alfa*u*u_x - bL(u)_{xt} - a*u_{xxt} = 0$ 

% Grid, and initial data:
a=1/5;
b=sqrt(a);
alfa=a;
h=10*L;
%profundidade da camada no caso da transformada
%de hilbert na faixa
deltax=2*L/N;
x=-L+deltax:deltax:L;
x=x';
t = 0;
dt = 1.8*deltax;
D = dif(N);
D = (1/deltax)*D;
D2 = dif2_hilbert_faixa(L,N,a,b,h);
B =-D2\D;

%solução inicial
u=exp(-((x+90).^2)/50);

%para poder comparar com o método leap-frog
%plotar no tempo t=0+1/3*dt
dt=1/3*dt;
K1=dt*B*(u-0.75*alfa*u.^2);
K2=dt*B*(u+K1/2-0.75*alfa*(u+K1/2).^2);
K3=dt*B*(u+K2/2-0.75*alfa*(u+K2/2).^2);
K4=dt*B*(u+K3-0.75*alfa*(u+K3).^2);
uold = u + (K1+2*K2+2*K3+K4)/6;

```

```

data = [ u' ; uold'; zeros(48,N)]; tdata = [t;t+dt];
t=t+dt;
u=uold;
    for i = 2:49
        for n = 1:9
            t = t+dt;
K1=dt*B*(u-0.75*alfa*u.^2);
K2=dt*B*(u+K1/2-0.75*alfa*(u+K1/2).^2);
            K3=dt*B*(u+K2/2-0.75*alfa*(u+K2/2).^2);
            K4=dt*B*(u+K3-0.75*alfa*(u+K3).^2);
            unew = u + (K1+2*K2+2*K3+K4)/6;
            u = unew;
        end
        data(i+1,:) = [u']; tdata = [tdata; t];
    end
y=data;

```

B.4 Algoritmo matriz derivação espacial

B.4.1 Discretização espacial de cinco pontos

```

function D = dif(N)
% dif compute D = differentiation matrix
%finite difference differentiation 5 pontos
    if N==4
E=[0 2/3 0 -2/3];
F=[0;-2/3;0;2/3];
    else
E=[0 2/3 -1/12 0*(1:N-5) 1/12 -2/3];
F=-E';
    end
D=toeplitz(F,E);

```

B.4.2 Discretização espectral para o operador de Hilbert

```

function D2 = dif2_hilbert(L,N,a,b)
% dif compute D2 = differentiation matrix
%finite difference differentiation fft
w = exp(-2*pi*i/N);

```

```

for j = 1:N
for k = 1:N
F(j,k) = w^((j-1)*(k-1));
end
end
aux = [0:N/2 -N/2 + 1:-1];
aux = pi*aux/L; % 2l period
v = (ones(1,N) + b*abs(aux)+a*aux.^2);
diagonal_v = diag(v);
D2 = real(conj(F)*diagonal_v*F/N);

```

B.4.3 Discretização espectral para o operador de Hilbert na faixa

```

function D2 = dif2_hilbert_faixa(L,N,a,b,h)
% dif compute D2 = differentiation matrix
%finite difference differentiation fft
w = exp(-2*pi*i/N);
for j = 1:N
for k = 1:N
F(j,k) = w^((j-1)*(k-1));
end
end
aux = [1:N/2 -N/2 + 1:-1];
aux = pi*aux/L; % 2l period
v = (ones(1,N-1) + b*aux.*coth(h*aux.*L/pi)+a*aux.^2);
v=[1 v];
diagonal_v = diag(v);
D2 = real(conj(F)*diagonal_v*F/N);

```