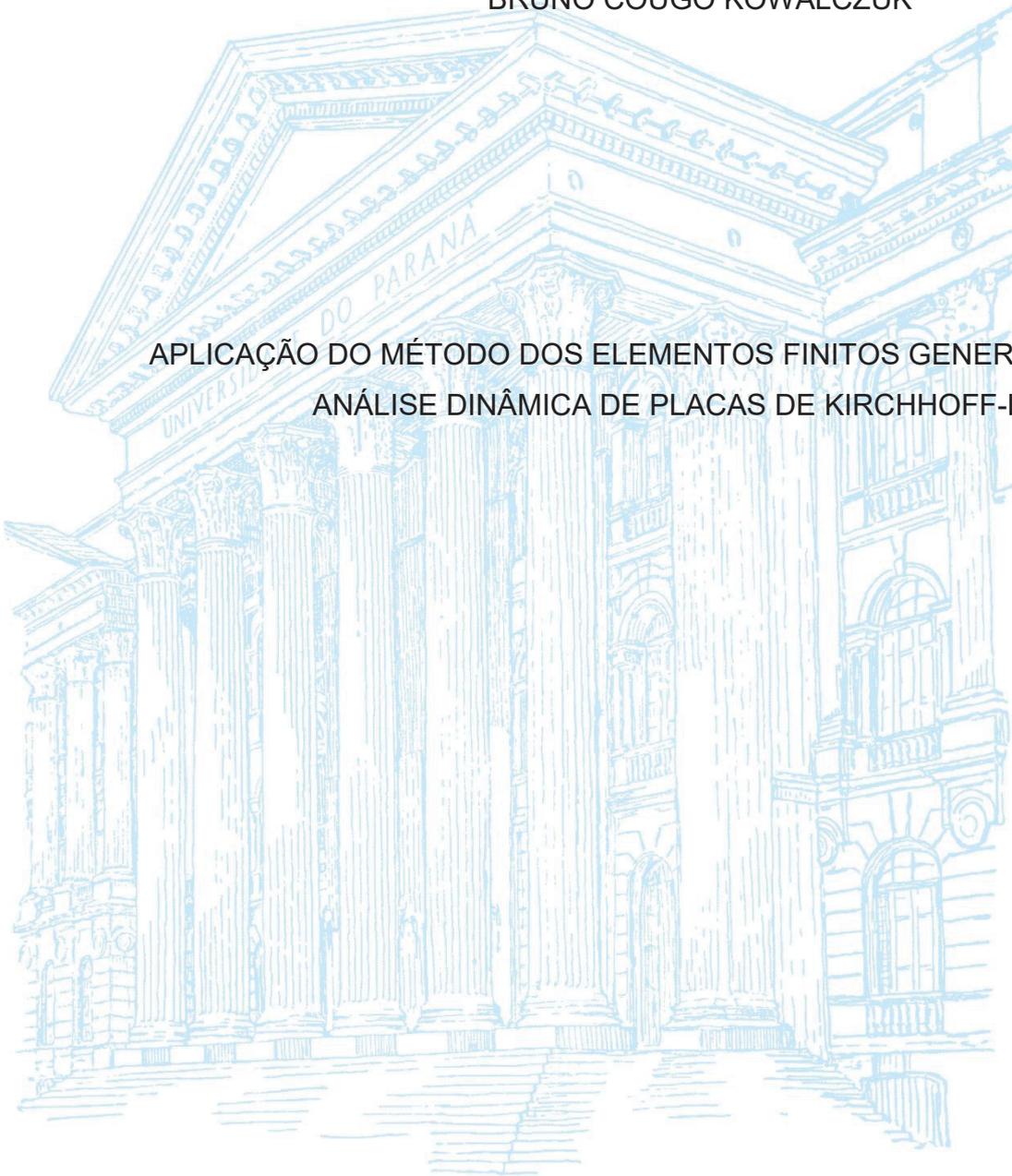


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

BRUNO COUGO KOWALCZUK

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS PARA
ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS DE KIRCHHOFF-LOVE



CURITIBA

2021

BRUNO COUGO KOWALCZUK

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS PARA
ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS DE KIRCHHOFF-LOVE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt

CURITIBA

2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

K88a Kowalczuk, Bruno Cougo
Aplicação do método dos elementos finitos generalizados para
análise dinâmica de placas de Kirchhoff-Love [recurso eletrônico] /
Bruno Cougo Kowalczuk – Curitiba, 2021.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos
em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt

1. Método dos elementos finitos. 2. Kirchhoff-Love, teoria de. I.
Universidade Federal do Paraná. II. Arndt, Marcos. III. Título.

CDD: 519.4

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **BRUNO COUGO KOWALCZUK** intitulada: **Aplicação do Método dos Elementos Finitos Generalizados para Análise Dinâmica de Placas de Kirchhoff-Love**, sob orientação do Prof. Dr. MARCOS ARNDT, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 08 de Dezembro de 2021.

Assinatura Eletrônica

08/12/2021 18:58:39.0

MARCOS ARNDT

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

10/12/2021 13:28:44.0

ANDRÉ JACOMEL TORII

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO AMERICANA)

Assinatura Eletrônica

08/12/2021 14:24:06.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

EM MEMÓRIA DE FELIPPE FLORIANO FONSECA

(20/12/1995 – 27/08/2021)

Dedico esse trabalho à memória Felipe Floriano Fonseca. Obrigado por ser o melhor amigo que eu já tive. Obrigado por ter feito parte da minha vida, por todos os momentos que passamos juntos. Você foi um presente de Deus na minha vida. Um presente de quase vinte anos que, repentinamente, Deus tomou de volta. Sou grato por ter te conhecido e ter tido o privilégio de te chamar de amigo. Você permanecerá vivo dentro de mim até o último dos meus dias.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, autor da vida. Por sua infinita misericórdia, nos providencia diariamente a dádiva do novo nascimento, através de Seu Filho, Jesus Cristo. Dando forma ao nada, Deus criou todas as coisas. De tal modo que tudo o que se vê passará, mas as Suas palavras para sempre permanecerão. Portanto, à Ele seja toda a honra, toda a glória e toda a gratidão eternamente.

Agradeço aos meus pais. A meu pai, Mário, e minha mãe, Elizabeth, por toda a criação, amor, cuidado e exemplo. Por terem sido instrumentos de Deus para me trazer até aqui.

Agradeço à minha esposa, Micheli. Por todo amor, incentivo, pela companhia, por decidir dividir seus dias comigo e acreditar em cada um dos meus sonhos. Ter ela ao meu lado, tornou toda essa caminhada muito mais fácil.

Agradeço a cada um dos meus amigos: Alexandre Turra, Arthur Cordeiro, Cleyton Stresser, Everton Melara, Gabriel Ferreira, Gabriel Niehues, João Maurício, Leonardo Miranda, Lucas Nemer, Lucas Werlang, Ranieri Mastroberardino, Rodrigo Turra, Tiago Giles e Willian Luz. Pessoas que, junto comigo, escreveram momentos diferentes da minha trajetória e carregam uma parte de tudo o que sou hoje.

Agradeço à minha madrinha, Luciana, e às minhas irmãs do coração, Isabella e Amanda. Sou grato pela companhia, bons momentos e por sempre tornarem meus dias melhores.

Agradeço ao Prof. Dr. Marcos Arndt por todo direcionamento, paciência, conselhos, aprendizado e, acima de tudo, por ser um orientador excelente e muito humano.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia por toda formação técnica, abertura ao diálogo e por me fazerem, enquanto aluno, me sentir parte de uma família. Obrigado a todos do PPGMNE.

Agradeço, por fim, à CAPES por todo apoio financeiro à pesquisa desenvolvida.

“Os céus declaram a glória de Deus e o firmamento anuncia a obra de suas mãos. (...) Não há linguagem nem fala onde não se ouça a Sua voz.”

(SALMOS, CAPÍTULO 19, v.1 e 3)

RESUMO

A modelagem matemática da vibração livre de placas finas é um assunto importante para engenheiros e pesquisadores das mais variadas áreas da ciência. Tal importância reside principalmente no fato de que muitas estruturas sujeitas a ações dinâmicas podem ser representadas por esse modelo. Metodologias numéricas fundamentadas no Método Elementos Finitos (MEF) tem sido amplamente utilizadas em problemas da análise dinâmica e demonstrado bons resultados. Neste contexto, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) surge como uma ferramenta poderosa. Aumentando o espaço de solução aproximada, o MEFG melhora a precisão das soluções sem refinar a malha. O presente estudo se propôs a avaliar diferentes enriquecimentos para o MEFG na análise de vibrações livres de placas finas. Funções trigonométricas, hiperbólicas e polinomiais especiais (tais como polinômios de Legendre) foram empregados nos problemas de autovalores associados. Todas as funções de enriquecimento também foram combinadas com diferentes funções partição da unidade. A fim de compreender melhor o comportamento do MEFG, compararam-se os resultados obtidos com duas outras abordagens numéricas enriquecidas: o Método dos Elementos Finitos Hierárquico (MEFH) e o Método dos Elementos Finitos p-Fourier. Todos os resultados aproximados foram comparados com soluções analíticas de referência da literatura. Pela análise de convergência para as frequências naturais mais baixas, foi possível concluir que as abordagens mais precisas foram as do MEFG. Análises de espectro de soluções e parâmetros de estabilidade numérica também foram realizadas paralelamente. Como observado em trabalhos correlatos anteriores, o MEFG pode diminuir sua precisão para a última parcela do espectro de soluções e mostrar aumentos significativos no número de condição da matriz de massa. Por fim, pode-se concluir que o MEFG mostrou resultados uniformemente melhores na análise de convergência, quando comparado ao refinamento h do MEF convencional e ao MEF p-Fourier. Com ótimos resultados na análise de convergência, o MEFG forneceu resultados próximos e, por vezes, superiores ao MEFH. As duas abordagens propostas com maiores taxas de convergência foram utilizando enriquecimentos trigonométricos aliados a partições da unidade Lagrangeanas quadráticas e utilizando enriquecimentos via polinômios de Legendre associados a partições da unidade trigonométricas.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados. Análise Dinâmica. Placas de Kirchhoff-Love. Vibrações Livres.

ABSTRACT

Mathematical modeling of thin plates free vibration is an important issue from the point of view of engineering and researches from many fields of science. Such importance lays mainly on the fact that a lot of structures subjected to dynamical effects can be represented by this model. Numerical methodologies based on the Finite Element Method (FEM) are widely employed in structural dynamic analysis and show good results. In such context, the Generalized Finite Element Method (GFEM) arises as a powerful tool. By increasing the approximated solution space, the GFEM improves the solution accuracy without increase the mesh size. The present study proposes and evaluates different enrichments for the GFEM in free vibration analysis of thin plates. Trigonometrical, hyperbolical and special polynomials functions (such as Legendre polynomials) were employed in the associated eigenvalue problem. All these enrichment functions were also combined with different partitions of unity. In order to better understand the GFEM behavior, one also compared the results with two other enriched approaches: The Hierarchical Finite Element Method (HFEM) and the p-Fourier Finite Element Method. All the numerical results were then compared with analytical results provided by literature. By the convergency analysis of the lowest natural frequencies was possible to conclude that the more accurated approaches were the GFEM ones. The spectrum analysis and numerical stability parameters were also carried out simultaneously for all the numerical solutions. As observed for earlier applications on structural analysis, the GFEM suddenly decays the solutions accuracy on higher frequencies and might show substantial increases on the condition mass matrix number. Finally, one can conclude that the GFEM approaches reveal uniformly better results in convergence terms comparing to the h -refinement FEM and p-Fourier FEM. With great convergence results, GFEM accuracy is similar and sometimes better than the HFEM accuracy. The more convergent GFEM approaches were obtained by using quadratic Lagrangian partition of unity functions on trigonometrical enrichments and trigonometrical partition of unity functions on Legendre polynomials enrichments.

Keywords: Generalized Finite Element Method. Dynamic Analysis. Kirchhoff-Love Plates. Free Vibration.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Ilustração de placa fina.	32
FIGURA 2 – Esquema do elemento conforme de quatro nós.	49
FIGURA 3 – Polinômios Cúbicos de Hermite. (a) $f_1(-1)$; (b) $f_1(+1)$; (c) $f_2(-1)$; (d) $f_2(+1)$	51
FIGURA 4 – Esquema de função enriquecedora borda.	53
FIGURA 5 – Esquema de função enriquecedora bolha.	54
FIGURA 6 – Polinômios de Legendre (a) $j=5$; (b) $j=6$; (c) $j=7$; (d) $j=8$; (e) $j=9$; (f) $j=10$	56
FIGURA 7 – Funções enriquecedoras do MEF p-Fourier (a) $j=5$; (b) $j=6$; (c) $j=7$; (d) $j=8$, (e) $j=9$; (f) $j=10$; (g) $j=11$; (h) $j=12$; (i) $j=12$; (j) $j=13$	57
FIGURA 8 – Partições da Unidade. (a) PU linear lagrangeana; (b) PU cúbica hermitiana; (c) PU quadrática lagrangeana; (d) PU trigonométrica	62
FIGURA 9 – Funções enriquecedoras para o MEFG-TPUL. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$; (d) $j=4$	64
FIGURA 10 – Funções enriquecedoras para o MEFG-TPUQ. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$	66
FIGURA 11 – Funções enriquecedoras para o MEFG-TPUH. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$; (d) $j=4$	67
FIGURA 12 – Funções enriquecedoras para o MEFG-MMAPUL. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$; (d) $j=4$	68
FIGURA 13 – Funções enriquecedoras para o MEFG-MMAPUH. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$; (d) $j=4$	69
FIGURA 14 – Funções enriquecedoras para o MEFG-MMAPUT. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$; (d) $j=4$	70
FIGURA 15 – Funções enriquecedoras para o MEFG-PPUT. (a) $j=5$; (b) $j=6$; (c) $j=7$; (d) $j=8$	71
FIGURA 16 – Esquema das condições de contorno avaliadas	73
FIGURA 17 - Malha utilizada nos métodos enriquecidos.	80
FIGURA 18 - Análise de Convergência SSSS: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª e 3ª Frequências, (c) 4ª Frequência, (d) 5ª e 6ª Frequências, (e) 7ª e 8ª Frequências, (f) 9ª e 10ª Frequências.	82

FIGURA 19 - Análise de Convergência CCCC: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª e 3ª Frequência, (c) 4ª Frequência, (d) 5ª Frequência, (e) 7ª e 8ª Frequência, (f) 9ª e 10ª Frequência.	84
FIGURA 20 - Análise de Convergência CSCS: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª Frequência, (c) 3ª Frequência, (d) 4ª Frequência, (e) 5ª Frequência, (f) 6ª Frequência.	86
FIGURA 21 - Análise de Convergência FSFS: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª Frequência, (c) 3ª Frequência, (d) 4ª Frequência, (e) 5ª Frequência, (f) 6ª Frequência.	88
FIGURA 22 - Análise de Convergência SSFS: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª Frequência, (c) 3ª Frequência, (d) 4ª Frequência, (e) 5ª Frequência, (f) 6ª Frequência.	90
FIGURA 23 - Análise de Convergência CSFS: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª Frequência, (c) 3ª Frequência, (d) 4ª Frequência, (e) 5ª Frequência, (f) 6ª Frequência.	92
FIGURA 24 - Espectro de frequências para placa com condições de contorno:(a) SSSS; (b) CCCC.....	100
FIGURA 25 - Espectro de frequências para placa com condições de contorno: (a) CSCS; (b) FSFS.....	102
FIGURA 26 - Espectro de frequências para placa com condições de contorno: (a) SSFS; (b) SCSF.....	104
FIGURA 27 - Número de condição da matriz de massa para placa com condições de contorno : (a) SSSS; (b) CCCC.....	109
FIGURA 28 - Número de condição da matriz de massa para placa com condições de contorno: (a) CSCS; (b) FSFS.	110
FIGURA 29 - Número de condição da matriz de massa para placa com condições de contorno: (a) SSFS; (b) SCFS.....	111

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Frequências naturais analíticas para vigas bi engastadas	63
TABELA 2 – Propriedades físico-geométricas	72
TABELA 3 – Siglas e nomenclaturas para as condições de contorno.....	73
TABELA 4 – Frequências analíticas da análise simplética para a placa SSSS	75
TABELA 5 – Frequências analíticas da análise simplética para a placa CSCS.	76
TABELA 6 – Frequências analíticas da análise simplética para a placa FSFS.	76
TABELA 7 – Frequências analíticas da análise simplética para a placa SSFS.....	77
TABELA 8 – Frequências analíticas da análise simplética para a placa CSFS.	78
TABELA 9 – Frequências numéricas de referência para a placa CCCC.....	78
TABELA 10 – Esquema geral dos enriquecimentos propostos para o MEFG	80
TABELA 11 – Comparativo entre MEFH polinomial proposto por Bardell (1991) e sua versão adaptada com funções enriquecedoras do tipo borda.....	93
TABELA 12 – Comparativo entre MEF p-Fourier proposto por Leung e Chan (1998) e sua versão adaptada com funções enriquecedoras do tipo borda.	94
TABELA 13 – Respostas de referência para a análise do espectro de frequências.	98
TABELA 14 – Respostas de referência para a análise do espectro de frequências.	99

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

MEF - Método dos Elementos Finitos

MEFH – Método dos Elementos Finitos Hierárquico

MEFG - Método dos Elementos Finitos Generalizados

MEFG-TPUL- Método dos Elementos Finitos Generalizados Trigonométrico com Partição da Unidade Linear

MEFG-TPUH – Método dos Elementos Finitos Generalizados Trigonométrico com Partição da Unidade Hermitiana

MEFG-TPUQ – Método dos Elementos Finitos Generalizados Trigonométrico com Partição da Unidade Quadrática

MEFG-MMAPUL – Método dos Elementos Finitos Generalizados com funções de enriquecimento baseadas no Método dos Modos Admissíveis com Partição da Unidade Linear

MEFG-MMAPUH – Método dos Elementos Finitos Generalizados com funções de enriquecimento baseadas no Método dos Modos Admissíveis com Partição da Unidade Hermitiana

MEFG-MMAPUT – Método dos Elementos Finitos Generalizados com funções de enriquecimento baseadas no Método dos Modos Admissíveis com Partição da Unidade Trigonométrica

NC – Número de Condição

LISTA DE SÍMBOLOS

c : Função exponencial associada aos autovalores da matriz hamiltoniana

h : Espessura da placa

t : Variável tempo

w : Campo vertical de translações que minimiza o funcional de energia

w_i : Derivada primeira parcial de w em relação a variável “ i ”

w_{ij} : Derivada segunda cruzada de w em relação a “ i ” e “ j ”

w' : Campo vertical admissível de translações

w'_i : Derivada primeira parcial de w' em relação a variável “ i ”

w'_{ij} : Derivada segunda cruzada de w' em relação a “ i ” e “ j ”

D : Rigidez Flexional

E : Módulo de Young

E_{cin} : Energia cinética

E_{pot} : Energia potencial

\bar{E} : Energia complementar

H : Espaço de Hilbert

L_y : Comprimento y da placa

L_x : Comprimento x da placa

M_x : Momento fletor em x

M_y : Momento fletor em y

M_{xy} : Momento volvente

$P(\lambda)$: Polinômio característico em relação a λ

Q_x : Esforço cortante na direção x

Q_y : Esforço cortante na direção y

V_x : Esforço cortante equivalente na direção x

V_y : Esforço cortante equivalente na direção y

W : Espaço de fases

ε : Parâmetro real associado ao caminho admissível

ε_0 : Raio de expansão da Série de Taylor para a variável ε

ε_i : Deformação longitudinal na direção do eixo “ i ”

λ : Frequência natural de vibração

ρ_x : Curvatura em torno de x
 ρ_y : Curvatura em torno de y
 ρ_{xy} : Curvatura volvente
 ν : Coeficiente de Poisson
 ρ : Densidade da placa
 Φ : Modo de vibrar associado a λ
 ψ : Caminho admissível
 ψ_i : Derivada primeira do caminho admissível em relação a variável "i"
 ψ_{ij} : Derivada segunda cruzada do caminho admissível em relação as variáveis "i" e "j"
 σ_i : Tensão axial na direção do eixo "i"
 θ_x : Rotação na direção x
 τ : Autovalor associado a direção y da matriz hamiltoniana no espaço simplético
 ω : Autovalor associado a direção x da matriz hamiltoniana no espaço simplético
 Γ : Contorno de Ω
 Γ_i : Contorno da i -ésima partição de Ω
 Π_1 : Funcional de energia total
 Ω : Domínio de aplicação da equação diferencial
 Ω_i : i -ésima partição de Ω
 Ω_p : Domínio de aplicação da equação diferencial relacionado a posição
 Ω_{p_i} : i -ésima partição de Ω_p
 \mathbb{C}^* : Conjunto dos números complexos sem o zero
 \mathbb{R}^n : Conjunto dos números reais n -dimensional
 ∂ : Derivação parcial
 $d(\cdot)$: Diferenciação
 \mathcal{M} : Espaço vetorial
 \mathcal{M}' : Espaço dual de \mathcal{M}
 $(\cdot)!$: Fatorial
 \mathcal{H} : Hamiltoniana do sistema
 \Rightarrow : Implica em
 $\int(\cdot)$: Integração
 $\oint(\cdot)$: Integral de linha
 \mathcal{L} : Lagrangeana do sistema
 \mathcal{L}_D : Lagrangeana discreta do sistema

$\nabla(\cdot)$: Operador Del

$\Delta(\cdot)$: Operador determinante

$\nabla^2(\cdot)$: Operador Laplaciano

$\nabla^4(\cdot)$: Operador Biarmônico

$\delta(\cdot)$ Operador variacional

\forall : Para todo e qualquer

\in : Pertence a

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produto interno simplético

\Leftrightarrow : Se, e somente se

$\Sigma(\cdot)$: Somatório

\mathcal{F} : Transformada de Legendre da função f

\mathbf{d} : Autovetor da matriz hamiltoniana

\mathbf{e}_i : Versor na direção 'i'

\mathbf{m} : Momento generalizado associado a caracterização hamiltoniana do sistema

\mathbf{p} : Vetor pertencente ao espaço vetorial \mathcal{M}

\mathbf{q} : Vetor pertencente ao espaço dual de \mathcal{M}

\mathbf{s} : Vetor de estados da descrição simplética

\mathbf{s}_x : Derivada parcial do vetor de estados em relação a \mathbf{x}

\mathbf{v} : Vetor de deslocamentos generalizados associado a descrição Lagrangeana do sistema

$\dot{\mathbf{v}}$: Vetor de velocidades generalizadas associado a descrição Lagrangeana do sistema

\mathbf{x} : Vetor genérico

\mathbf{x}^T : Vetor genérico transposto

\mathbf{y} : Vetor genérico

\mathbf{A} : Matriz genérica

\mathbf{A}^T : Matriz genérica transposta

\mathbf{H} : Matriz Hamiltoniana

\mathbf{H}^T : Matriz Hamiltoniana transposta

\mathbf{I} : Matriz identidade

\mathbf{J} : Matriz identidade simplética

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	17
1.1 OBJETIVO GERAL	19
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	19
1.3 ESCOPO DO TRABALHO	19
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO	20
2 REVISÃO DA LITERATURA	22
2.1 ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS FINAS	22
2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS	27
3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	31
3.1 O MODELO DE PLACAS DE KIRCHHOFF-LOVE	31
3.2 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE	33
3.3 PROBLEMA DE AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES GENERALIZADO	39
3.4 SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE AUTOVALORES	40
3.5 FORMULAÇÃO VARIACIONAL E FORMA FRACA	41
4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E MÉTODOS ENRIQUECIDOS	46
4.1 ASPECTOS PRÁTICOS GERAIS	46
4.2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO CONFORME	49
4.3 MÉTODOS ENRIQUECIDOS	52
4.3.1 Funções enriquecedoras	53
4.3.2 Níveis de enriquecimento	54
4.3.3 Construção do problema enriquecido	55
4.3.4 Método dos Elementos Finitos Hierárquico Polinomial	55
4.3.5 Método dos Elementos Finitos p-Fourier	56
5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS	58
5.1 ASPECTOS TEÓRICOS DO MÉTODO	58
5.1.1 Partição da Unidade	58
5.1.2 O espaço de soluções aproximado e convergência do MEFG em problemas de quarta ordem	59
5.2 FORMULAÇÕES PROPOSTAS PARA O MEFG	60
5.2.1 Partições da unidade selecionadas	60
5.2.2 Bases de funções enriquecedoras para o MEFG	62
5.2.3 Formulações propostas	64

a) MEFG-TPUL	64
b) MEFG-TPUQ.....	65
c) MEFG-TPUH	66
d) MEFG-MMAPUL	67
e) MEFG-MMAPUH.....	68
f) MEFG-MMAPUT	69
g) MEFG-PPUT	70
6 ESTUDOS DE CASO E ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA.....	72
6.1 PROPRIEDADES MECÂNICAS E CONDIÇÕES DE CONTORNO	72
6.1.1 Propriedades Físico-Geométricas de Referência	72
6.1.2 Condições de Contorno.....	72
6.2 EQUAÇÕES DE FREQUÊNCIA E SOLUÇÕES DE REFERÊNCIA	74
6.2.1 Placa SSSS	74
6.2.2 Placa CSCS	75
6.2.3 Placa FSFS	76
6.2.4 Placa SSFS	77
6.2.5 Placa SCSF.....	77
6.2.6 Placa CCCC	78
6.3 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA PARA FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO.....	79
6.3.1 Convergência para Placa SSSS.....	81
6.3.2 Convergência para Placa CCCC	83
6.3.3 Convergência para Placa CSCS	85
6.3.4 Convergência para Placa FSFS	87
6.3.5 Convergência para Placa SSFS	89
6.3.6 Convergência para Placa CSFS.....	91
6.4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA	93
7 ANÁLISE DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS E CONDICIONAMENTO DAS MATRIZES DE MASSA	97
7.1 ANÁLISE DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS	97
7.1.1 Valores de Referência para a Análise do Espectro	97
7.1.2 Espectro de frequências para placas SSSS e CCCC	99
7.1.3 Espectro de frequências para placas CSCS e FSFS	101
7.1.4 Espectro de frequências para placas SSFS e SCSF	103

7.2	CONDICIONAMENTO DAS MATRIZES DE MASSA.....	105
7.2.1	Cálculo do número de condição de uma matriz	106
7.2.2	Condicionamento da matriz de massa como parâmetro de estabilidade numérica.....	108
7.2.3	Condicionamento da matriz de massa para condições de contorno SSSS e CCCC	108
7.2.4	Condicionamento da matriz de massa para condições de contorno CSCS e FSFS	110
7.2.5	Condicionamento da matriz de massa para condições de contorno SSFS e CSFS	111
8	CONCLUSÃO	114
8.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	115
	REFERÊNCIAS.....	116
	APÊNDICE I: FUNDAMENTOS EM ELASTICIDADE SIMPLÉTICA	123
	APÊNDICE II: COMENTÁRIOS SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MEFG.....	140

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são, em resumo, o principal produto oriundo do interesse do homem em descrever, compreender e sintetizar através de modelos matemáticos, os mais variados fenômenos físicos, biológicos e, até econômicos, presentes ao longo de sua vida. A abstração matemática de um problema real possui, sinteticamente, duas etapas que delimitam e asseguram a validade do modelo: (i) identificar as variáveis que possuem potencial de gerar mudanças no sistema em questão; (ii) definir, de maneira clara, a quais hipóteses, ou simplificações, a modelagem poderá ser aplicada (ZILL; CULLEN, 1993). Denomina-se como solução do problema de equações diferenciais ou, simplesmente, variável primária, a função que, atendendo simultaneamente todo o conjunto de condições de contorno e satisfazendo as hipóteses impostas pela própria equação, descreve o fenômeno em questão. Existem três aspectos importantes que surgem ao analisar a obtenção da variável primária. Inicialmente, é necessário saber se, de fato, a solução existe. Em caso afirmativo, é preciso garantir a sua unicidade e, também, verificar a sua estabilidade. Quando uma modelagem satisfaz estes aspectos (existência, unicidade e estabilidade da solução) o problema é designado, em inglês, de “*well-posed problem*” (REDDY, 1997). No entanto, o que se observa é que, mesmo com todas estas três condições atendidas, muitas vezes, as condições de contorno e as informações conhecidas sobre o comportamento do problema podem ser escassas, impossibilitando o conhecimento da solução analítica da equação diferencial. Para estes casos, o enfoque torna-se encontrar a melhor aproximação possível para a resposta desconhecida (REDDY, 1997).

Este processo de aproximação, geralmente, recaí em duas abordagens possíveis para obtenção da solução aproximada. A primeira delas consiste em definir uma aproximação para os operadores diferenciais, convertendo-os para sua formulação discreta, e avaliando pontualmente a função em diversos pontos do domínio, metodologia aplicada, por exemplo, no Método das Diferenças Finitas. Existe também, a possibilidade de abordagens focadas na obtenção aproximada, não dos operadores diferenciais, mas sim da própria variável primária. Neste segundo grupo de métodos é que se encontram o Método dos Elementos Finitos (MEF) e todas as metodologias fundamentadas nele. O MEF é uma metodologia consagrada, na qual a

variável primária é aproximada por uma associação de funções de interpolação com suporte compacto, que cobrem, individualmente, todo o domínio de aplicação da equação diferencial, discretizado em partições, chamadas elementos.

Existem diversos métodos enriquecidos baseados no MEF, dentre os quais destacam-se o Método dos Elementos Finitos Hierárquico (MEFH), o Método dos Elementos Finitos p-Fourier (MEF p-Fourier) e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Todas estas abordagens visam ampliar o espaço da solução aproximada do MEF através da inserção de novos graus de liberdade e de novas funções de forma polinomiais ou de natureza transcendente, como trigonométricas ou exponenciais.

Ainda no contexto das metodologias enriquecidas fundamentadas no MEF, o MEFG corresponde a uma extensão do Método da Partição da Unidade (MELENK, 1995). Nele, as funções de enriquecimento são ponderadas por funções do tipo partição da unidade. Os enriquecimentos são particularizados para cada problema, buscando agregar um conhecimento prévio sobre a solução analítica no espaço aproximador. Em diversas situações, formulações do MEFG já demonstraram sua versatilidade e eficiência para a resolução aproximada dos mais variados problemas (FRIES; BELYTSCHKO, 2010).

Dentre a gama de aplicações das metodologias fundamentadas no MEF, destaca-se a análise dinâmica de estruturas. Um ramo amplamente difundido e muito ativo atualmente. Recentemente, muitos trabalhos demonstraram grande precisão do MEFG também em lidar com problemas provenientes da análise dinâmica de estruturas (ARNDT, MACHADO e SCREMIN, 2016; SHANG, MACHADO e ABDALLA FILHO, 2016; WHEINHARDT, 2016; DEBELLA, 2018; CITTADIN, 2020).

Dentro da análise estrutural, as placas de Kirchhoff-Love, também chamadas de placas finas, são um dos modelos matemáticos úteis à representação fenômenos diariamente presentes na engenharia. Lajes de concreto armado e pistas de aeroportos sujeitas a esforços dinâmicos são exemplos de fenômenos reais que satisfatoriamente são representados por este modelo. Neste contexto, o presente trabalho se propõe a avaliar a aplicabilidade do MEFG quando utilizado para modelar um dos fenômenos da análise dinâmica de estruturas: vibração livre de placas de Kirchhoff-Love.

1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo deste trabalho é estudar a aplicabilidade e eficiência do Método dos Elementos Finitos Generalizados na análise dinâmica de placas de Kirchhoff-Love.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Propõem-se atingir o objetivo principal do trabalho estruturando os seguintes objetivos específicos:

- Propor diferentes partições da unidade e funções de enriquecimento para o MEFG;
- Avaliar a convergência das propostas para as frequências naturais de vibração em diversas condições de contorno;
- Analisar o espectro de frequências fornecido pelas abordagens do MEFG comparando-o com outras metodologias numéricas consagradas;
- Analisar o comportamento quanto a estabilidade numérica do MEFG pela evolução do número de condição da matriz de massa.

1.3 ESCOPO DO TRABALHO

Propõem-se avaliar a aplicabilidade do MEFG para a análise dinâmica de placas de Kirchhoff-Love contemplando o seguinte escopo:

- Análise de vibrações livres: cálculo de frequências naturais de vibração;
- Avaliar domínios de geometria quadrada, apenas;
- Condições de contorno uniformes aplicadas ao longo das bordas;
- Todas as formulações baseadas apenas em um elemento retangular conforme;
- Métodos enriquecidos avaliados apenas para uma malha fixa;
- Análise feita avaliando os resultados unicamente em termos de deslocamentos;

Desta forma, por consequência, o presente trabalho não contemplará:

- Análises transientes;
- Domínios com geometrias complexas;
- Existência e/ou ocorrência de modos de vibração espúrios em geometrias complexas;
- Condições de contorno não uniformes (singularidades ou regularidades);
- Análises de travamento;
- Enriquecimentos aplicados a elementos não retangulares;
- Enriquecimentos aplicados a elementos com formulações não conformes;
- Análises de refinamento “h” para os métodos enriquecidos;
- Análises de tensões e esforços internos.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O capítulo 1 introduz de maneira geral o tema, definindo os objetivos geral e específicos do trabalho. No capítulo 2, contextualiza-se a revisão da literatura relacionada à pesquisa, primeiramente situando-a em meio ao panorama global do Método dos Elementos Finitos Generalizados e, na sequência, posicionando-a no contexto específico do método aplicado à análise dinâmica de estruturas. O capítulo 3 destina-se a formular o modelo matemático associado ao fenômeno das vibrações livres, contemplando o conjunto de hipóteses simplificadoras, dedução da equação diferencial governante e composição do problema de autovalores. Com o modelo em mãos, o capítulo 4 introduz o MEF e as metodologias enriquecidas usadas como referência, comentando alguns aspectos gerais sobre suas respectivas formulações. Na sequência, pontos teóricos relativos ao MEFG e às formulações propostas no presente trabalho são definidos. Os capítulos 6 e 7 compreendem a apresentação e validação dos resultados obtidos. O capítulo 8 tece algumas conclusões mediante os resultados obtidos e propõem sugestões para trabalhos futuros na área. Por fim, o texto contém dois apêndices. O primeiro, comentando alguns pontos referentes a um ramo novo da elasticidade que permite encontrar soluções analíticas para o problema

da vibração livre de placas finas. O segundo, por fim, fornecendo alguns comentários e detalhes referentes à implementação computacional do MEFG.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Capítulo destinado a fornecer uma breve revisão da literatura, contextualizando a importância e mencionando trabalhos realizados sobre os dois principais temas abordados no trabalho: a análise dinâmica de placas de Kirchhoff-Love e o Método dos Elementos Finitos Generalizados.

2.1 ANÁLISE DINÂMICA DE PLACAS FINAS

A análise dinâmica de placas retangulares finas não é um objeto novo de estudo. Desde que as premissas e fundamentos da teoria clássica da dinâmica de placas finas foram propostas pelo matemático inglês Augustus Edward Hough Love (1863-1940) em seu trabalho intitulado “*On the small free vibration and deformation of elastic shells*” (LOVE, 1888), muitos pesquisadores dedicaram seus esforços para encontrar soluções analíticas que satisfizessem simultaneamente a equação diferencial e as diferentes condições de contorno encontradas na prática.

Levy (1942) propôs uma solução analítica para vibração de placas finas com produtos de funções senoidais, entretanto, demonstrou-se que estas soluções eram inviáveis para algumas condições de contorno e para a implementação computacional. Em seu trabalho intitulado “*Double Fourier series and boundary value problems*”, Green (1944) sugeriu uma abordagem ligeiramente diferente utilizando um método mais geral de solução, que, para os casos em que o método proposto por Levy (1942) era aplicável, fornecia resultados equivalentes.

As abordagens via produtos de séries de Fourier, por sua vez, forneceram o fundamento para Gorman (1978) discutir de maneira exaustiva um conjunto de soluções analíticas para vibração de placas. Gorman (1978) propôs, através da sobreposição de blocos de soluções em série, uma maneira satisfatória de contornar um dos problemas mais difíceis encontrados pelos pesquisadores até o momento: a representação de soluções analíticas para placas pontualmente apoiadas. Os trabalhos subsequentes de Gorman (1980;1981) estenderam a aplicação dessa forma de solução analítica para a teoria clássica de placas finas, considerando apoios localizados estritamente ao longo da borda (GORMAN, 1980) e distribuídos de maneira simétrica ao longo da placa (GORMAN, 1981).

Embora, em termos de modelagem matemática, as soluções analíticas possam representar, em uma primeira análise, a prioridade dentre os resultados, muitas vezes, à medida que condições de contorno mais realistas são impostas, a complexidade envolvida na obtenção de uma solução analítica cresce substancialmente. É, frente a essa limitação intrínseca aos métodos analíticos em representar problemas com elevado grau de complexidade, que as metodologias aproximadas, devidamente validadas e consolidadas, surgem como ferramentas poderosas. Dentre os métodos numéricos utilizados para aproximar o problema clássico de vibrações em placas finas, destacam-se as metodologias fundamentadas no Método dos Elementos Finitos (MEF).

Na década de 1950, os pesquisadores passaram por um período de desenvolvimento extremamente ativo no estudo de formulações aproximadas via MEF. Com o passar dos anos, estes esforços culminaram na ampliação das possíveis aplicações para o MEF (HRABOK; HRUDEY, 1984). Nesse contexto, o interesse por parte dos pesquisadores em utilizar as formulações de elementos finitos para modelar fenômenos de flexão em placas finas estáticas data do início da década de 1960.

Baseados na formulação de campos de deslocamentos, surgiram trabalhos como o de Adini e Clough (1960), primeiro trabalho relativo à flexão de placas finas pelo MEF, Tocher (1962), estudando o uso de elementos triangulares e, Melosh (1961) e Clough e Tocher (1965), que estudaram com mais profundidade a formulação de matrizes de rigidez para o problema. Todos estes trabalhos pioneiros, entretanto, careciam de um amparo matemático variacional mais robusto, pois os fundamentos relativos a alguns critérios necessários, como compatibilidade e conformidade entre elementos, não eram plenamente conhecidos. Por estas razões, a convergência dessas abordagens nem sempre era observada. A bem da verdade, a maioria dos elementos desenvolvidos inicialmente também não atendia ao critério de conformidade, garantido através da exigência de continuidade tanto no campo de translações verticais, como no campo de inclinações entre os elementos (HRABOK; HRUDEY, 1984).

Prosseguindo no estudo da modelagem numérica das placas, foram desenvolvidos alguns trabalhos relacionados à formulação de elementos finitos com três nós, sem grandes resultados inicialmente. A fim de desenvolver uma formulação conforme mantendo-se apenas três graus de liberdade por nó, Bazeley *et al.* (1965) propuseram a utilização de sistemas de coordenadas alternativos, baseados em áreas

internas do elemento. Infelizmente, essa abordagem foi amplamente testada e não satisfaz o “patch” teste. Os autores, então, introduziram a técnica de superposição de funções de forma não polinomiais.

Quase uma década depois, Zienkiewicz (1977), referiu-se às funções de forma propostas por Bazeley *et al.* (1965) como “funções de forma conformes com singularidades nodais”. Clough e Tocher (1965) sugeriram uma abordagem semelhante à proposta por Bazeley *et al.* (1965), mas com um sistema de coordenadas de área, conhecida como “abordagem dos subdomínios”, para a qual cada elemento triangular é subdividido em outros três triângulos. As matrizes de rigidez de cada elemento são então obtidas através da sobreposição e compatibilização das informações provenientes de cada um dos triângulos internos.

A despeito destas abordagens, em um primeiro momento, as metodologias que se mostraram mais diretas para atingir uma formulação conforme consistiam na utilização de elementos de alta ordem com nós internos, modelados através de polinômios completos de quinta ordem para deslocamentos (ARGYRIS; FRIED; SCHARPF, 1968; BELL, 1969; IRONS, 1969; VISSER, 1969). Polinômios completos de ordem ainda maior foram utilizados nos trabalhos de Argyris, Fried e Scharpf (1968 e de Bell (1969).

Atingir uma formulação conforme para elementos de três nós mostrou-se um grande desafio, por conta de problemas como a falta de convergência (HRABOK; HRUDEY, 1984). Uma evolução à abordagem proposta por Bazeley *et al.* (1965) foi sugerida por Irons e Razzaque (1972), por meio do uso das, como denominadas pelos próprios autores, “funções de forma substitutivas” e “técnica das derivadas suaves”. As funções de forma substitutivas, na prática, consistiam em substituir termos das funções de forma já existentes, não alterando o grau mais alto do polinômio completo e aproximar as derivadas presentes no funcional de energia por meio do método dos mínimos quadrados.

Princípios energéticos variacionais alternativos também foram sugeridos, como o Princípio da Mínima Energia Potencial Complementar, para o qual as funções de forma deveriam satisfazer as equações de equilíbrio em todo e qualquer ponto e as condições de contorno sobre tensões nas interfaces de elementos. O trabalho precursor nesse sentido foi apresentado por Veubeke (1965). Veubeke (1965) propôs a formulação direta de matrizes de flexibilidade para, através de sua inversão, obter indiretamente as matrizes de rigidez e obter a solução em termos de deslocamentos.

Devido a problemas na composição de matrizes globais semi-positivas definidas, instabilidade cinemática, difícil implementação e escolha de forças para a montagem do sistema, o princípio alternativo foi gradualmente tendo seu uso abandonado em problemas de elementos finitos (HRABOK; HRUDEY, 1984).

Seguindo as abordagens alternativas para lidar com o problema da conformidade, surgiram os designados Métodos Híbridos, propostos inicialmente através da utilização de multiplicadores de Lagrange. Através da aplicação dos multiplicadores de Lagrange no contorno dos elementos, tornou-se possível uma “relaxação” das condições de continuidade, exigindo que as funções pertençam apenas à classe C^0 . Os Métodos Híbridos são assim designados pois, através de alguma técnica matemática, promovem a eliminação a nível de elemento de alguma das incógnitas do problema (HRABOK; HRUDEY, 1984).

Os primeiros elementos finitos conformes para flexão de placas finas foram desenvolvidos por Bogner, Fox e Schmit (1965), mediante a utilização de elementos retangulares de dezesseis e de trinta e seis graus de liberdade. De acordo com Irons e Draper (1965), na modelagem de placas finas é impossível atingir uma formulação conforme utilizando-se apenas funções polinomiais de Lagrange com três graus de liberdade por nó. Neste contexto, Bogner, Fox e Schmit (1965), formulando o problema dinâmico de placas finas, obtiveram matrizes de massa e rigidez, considerando as derivadas de segunda ordem também como graus de liberdade. Utilizando polinômios cúbicos de Hermite como funções de forma, adicionaram o designado “twist”, obtendo assim a primeira formulação conforme de elemento finito de placa fina conhecida. Este elemento mostrou boa precisão.

Uma vez que o elemento conforme fora atingido, os esforços direcionaram-se a melhorar ainda mais a qualidade da aproximação da formulação em elementos finitos. Representando uma quebra de paradigma em relação aos trabalhos precursores, as primeiras tentativas nesta direção, consistiram em utilizar bases de funções não polinomiais para expansão do espaço de solução, datando do início da década de 1970.

Inicialmente, propôs-se a utilização de funções não polinomiais para modelagem de campo de tensões considerando elementos finitos com fraturas. Nestes elementos, as bases exclusivamente polinomiais de funções não representavam de maneira satisfatória o comportamento assintótico e, por vezes, até descontínuo, das tensões observadas (BYSKOV, 1970). Seguindo na mesma linha,

outros estudos visaram promover uma representação mais sofisticada de fenômenos nos quais os modelos contivessem singularidades no interior de seus elementos (FIX; GULATI; WAKOFF, 1973) e, também, a extensão desta representação aos elementos finitos isoparamétricos (BENZLEY, 1974). Em outras palavras, em um primeiro momento, a utilização destas funções não polinomiais foi empregada para a modelagem de fenômenos nos quais algum tipo de descontinuidade ou singularidade precisava ser representado. Uma verdadeira quebra de paradigmas dentro da modelagem numérica via MEF.

Dentro da análise dinâmica, esta quebra de paradigma aconteceu de uma maneira mais sutil. Bardell (1991) utilizou polinômios de Legendre de alta ordem na formulação de funções de forma adicionais para o elemento conforme proposto por Bogner, Fox e Schmit (1965), designado aqui de Método dos Elementos Finitos Hierárquico (MEFH) polinomial. Muitos pontos interessantes foram levantados por Bardell (1991) em seu trabalho a respeito do MEFH: (i) esta abordagem permitia a inserção de graus de liberdade sem necessidade de refinar a malha de elementos; (ii) os autovalores relativos às novas matrizes de massa e rigidez possuíam convergência monotônica por valores superiores; (iii) problemas de autovalores de mesma ordem, quando solucionados pelo MEFH, conduziam a respostas mais precisas quando comparadas ao refino h do MEF, demonstrando maior convergência e precisão; (iv) a modelagem de estruturas através de um único elemento possui vantagens pois torna desnecessária a compatibilização das funções entre as bordas de elementos adjacentes. Embora muito promissores os resultados da técnica proposta por Bardell (1991), a magnitude real da gama de aplicações desta técnica apenas ficaria mais evidente em trabalhos futuros.

A utilização do modelo das placas de Kirchhoff-Love ainda é um objeto ativo de pesquisas em variadas áreas. Marinov e Marinova (2012) estudaram o desenvolvimento de uma abordagem numérica para estimar a rigidez flexural de placas modeladas segundo a teoria de Kirchhoff-Love utilizando o Método da Incorporação Variacional. O modelo de Kirchhoff-Love também se mostrou útil em problemas relacionados a estrutura de propagação de ondas flexurais em metamateriais. Aplicação realizada por Miranda Jr. et. al (2018), verificando concordância entre resultados para análises experimentais, numéricas (via elementos finitos) e métodos de expansão foram observados. O interesse em representar fenômenos mais complexos em placas finas, como a existência de rachaduras em

fenômenos dinâmicos e flexurais, também motivou trabalhos na área, como Vilela et.al (2019). Por fim, uma metodologia recentemente empregada no estudo das placas finas é o Método dos Elementos Virtuais (MEV). O modelo de Kirchhoff-Love permitiu conduzir à formulação variacional do MEV para o cálculo de autovalores e autofunções em problemas de flambagem, estudado por Mora e Velásquez (2019) e estudando o escopo mais geral de aplicação do MEV para este problema, estimativas mais consolidadas de erro foram desenvolvidas por Feng, Han e Huang (2021).

2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

Aproximadamente vinte anos após os primeiros trabalhos relativos a metodologias enriquecidas fundamentadas no MEF, a utilização de novas funções de forma auxiliares com suporte compacto, compostas pelas funções convencionais do MEF, multiplicadas por funções de caráter não polinomial, foi proposta e avaliada por Babuska, Caloz e Osborn (1994). Neste trabalho, os autores nomeiam a formulação proposta de Método dos Elementos Finitos Especial e avaliam sua eficiência para a resolução, não mais de um problema específico, como feito nos trabalhos anteriores, mas de toda uma classe de equações diferenciais, os designados problemas elípticos.

Mesmo com resultados mostrando a eficiência desta generalização do MEF para toda essa gama de problemas numéricos, a fundamentação matemática teórica robusta foi apresentada apenas no ano seguinte, na tese de doutorado de Melenk (1995), intitulada “*On Generalized Finite Element Method*”, desenvolvida na Universidade de Maryland, Estados Unidos. Em sua tese, o autor consolida o método hoje denominado Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), demonstrando que, se um conjunto de funções se propõem a ser usado como uma base para aumentar o espaço de solução de um problema aproximado do MEF, estas funções de base podem ser obtidas através da multiplicação de qualquer função do tipo partição da unidade por funções polinomiais ou não polinomiais.

Os métodos que apresentam a expansão (enriquecimento) da base de funções de forma do MEF também são conhecidos como métodos enriquecidos.

Outros métodos enriquecidos também foram propostos concomitantemente ao MEFG. Poucos anos depois, Leung e Chan (1998) formularam um elemento fundamentado no elemento proposto por Bogner, Fox e Schmit (1965) com graus de liberdade não nodais obtidos através da multiplicação de funções trigonométricas por

partições da unidade Lagrangeanas de segunda ordem, conhecido como Método dos Elementos Finitos p-Fourier. Propriedades de convergência semelhantes às obtidas por Bardell (1991) para o MEFH foram observadas, uma vez que o método apresentou precisão elevada para os modos de vibração com número de semi-ondas menor ou igual ao número de semi-ondas da função enriquecedora de maior ordem.

As bases do MEFG apresentadas por Melenk (1995) garantiram que sua aplicação fosse estendida para outras áreas como, por exemplo:

- Problemas de mecânica de grãos (SIMONE; DUARTE; GIESSEN, 2006);
- Problemas vetoriais de eletromagnetismo (LU; SHANKER, 2007);
- Problemas térmicos, como a equação diferencial do calor tridimensional (O'HARA; DUARTE; EASON, 2009).

O'Hara, Duarte e Eason (2009) em seu estudo do problema da condução do calor, mostraram que a utilização de elementos tri-lineares ou tri-quadráticos e, portanto, sem enriquecimento, exigiam uma taxa muito elevada de refino para obtenção de convergência e precisão aceitáveis quando comparados aos elementos enriquecidos. Posteriormente, Babuska e Lipton (2010), publicaram um artigo intitulado "*Optimal Local Approximation Spaces for Generalized Finite Element Methods with Applications to Multiscale Problems*", no qual provam que as taxas de convergência fornecidas pelo MEFG apresentam ordem exponencial, característica esta também verificada por Matache, Babuska e Schwab (2000).

De fato, o MEFG representa uma alternativa possível à resolução de uma larga gama de problemas presentes nas mais variadas áreas da análise numérica. Assim como o MEF convencional, o MEFG consegue lidar com problemas de natureza simples, porém com maior convergência, e no que concerne aos problemas mais complexos, como problemas com descontinuidades, variáveis primárias com comportamento pouco suave, gradientes elevados e derivadas de alta ordem, o MEFG se mostra substancialmente mais eficaz para fornecer respostas com grau de precisão aceitável (FRIES; BELYTCHKO, 2010).

Particularizando a aplicabilidade do MEFG, delimitando-o para um grupo específico de equações diferenciais parciais elípticas: os problemas da análise dinâmica de estruturas, Arndt (2009) propôs, em sua tese de doutorado, um conjunto de formulações para o MEFG utilizando funções transcendentais, destinado a modelar elementos de estruturas reticuladas, como barras, treliças planas, vigas e pórticos. O

autor comparou os resultados obtidos pelo MEFG para o cálculo de frequências naturais com métodos analíticos e numéricos, como o MEF convencional e o Método Composto (ZENG, 1998a, 1998b), confirmando as taxas mais elevadas de convergência esperadas para o MEFG. Entretanto, mesmo com as boas propriedades de convergência, uma aparente limitação do MEFG proposto por Arndt (2009) foi observada. O autor observou precisão elevada da solução na faixa inicial do espectro de frequências, mas erros consideráveis na avaliação das frequências mais altas do espectro. Aplicar o MEFG Adaptativo mostrou-se uma alternativa viável para contornar este problema, modelando uma frequência alvo associada a um determinado modo de vibrar e melhorando substancialmente a resposta (ARNDT, MACHADO e SCREMIN, 2010). A resposta promissora evidenciada por Arndt (2009), motivou trabalhos subsequentes a estenderem e adaptarem estas formulações para outros problemas da análise dinâmica de estruturas.

Ainda tratando das estruturas reticuladas, Torii e Machado (2012), estudaram o comportamento dinâmico de barras e treliças, não mais para vibrações livres, mas forçadas. Utilizando o Método da Superposição Modal e o Método de Newmark combinados ao MEFG, as respostas confirmaram maior qualidade para o MEFG em relação ao MEF convencional e ao MEFH.

Outros trabalhos concentraram-se em aplicações voltadas ao estudo mais detalhado dos elementos de viga de Euler-Bernoulli, visando ampliar a análise para condições mais complexas de modelagem. Entre eles, destaca-se o uso do MEFG Adaptativo aplicado em vigas uniformes e não-uniformes (ARNDT, MACHADO e SCREMIN, 2016) e também de enriquecimentos trigonométricos e exponenciais utilizados para análises elásticas e elasto-plásticas de vigas (SHANG, MACHADO e ABDALLA FILHO, 2016). Em ambos os casos, os resultados obtidos pelo MEFG foram superiores aos obtidos pelo MEF convencional.

Apesar da elevada taxa de convergência do MEFG observada em diversos trabalhos, sua eficiência, de acordo com Babuska e Banerjee (2012), está intimamente ligada à escolha das funções de forma que compõem o espaço aproximador. Muitas vezes, tais funções podem tornar a base de funções enriquecedoras quase linearmente dependente. Segundo Babuska e Banerjee (2012), esta é a principal razão de matrizes mal condicionadas serem frequentes em aplicações do MEFG. Visando estudar ainda mais as características relativas a estabilidade numérica das soluções fornecidas pelo MEFG, alguns pesquisadores dedicaram esforços para

estudar mais a fundo esta questão, visando propor alternativas que permitissem contornar o problema da instabilidade numérica, que pode ser mensurada pelo número de condição das matrizes envolvidas na solução do problema.

Piedade Neto e Proença (2016) utilizaram matrizes diagonalizadas em problemas lineares e não lineares, observando resultados consistentes em termos de deslocamentos e verificando que tais matrizes permitiam a manutenção da magnitude dos números de condição em níveis aceitáveis. Outros dois caminhos alternativos foram discutidos por Weinhardt (2016) para problemas uni e bidimensionais da análise dinâmica: (i) uma adaptação do MEFM estabilizado; (ii) um pré-condicionamento aplicado diretamente sobre as funções de forma. Resultados muito satisfatórios foram observados para ambas as técnicas, controlando a dimensão dos números de condição gerados.

Trabalhos ainda mais específicos relacionados ao estudo dos elementos de barras, treliças e vigas do MEFM permitiram elucidar alguns pontos muito importantes na análise dinâmica de estruturas. Debella (2018) propôs uma condensação da matriz modal de forma a eliminar os modos aproximados de maneira pobre e, para tornar a análise ainda mais precisa, mensurando a influência de cada modo na resposta transiente para aplicação do MEFM Adaptativo tendo como alvo o modo mais influente. A autora concluiu que as respostas do MEFM podem ser ainda melhores se, na análise transiente, apenas os modos mais predominantes forem utilizados na composição da matriz modal.

Malacarne (2018) aplicou o indicador de erro de Friberg para nortear enriquecimentos seletivos em barras, treliças e vigas. Já Cittadin (2020) estudou a aplicação do indicador de Friberg para promover enriquecimentos seletivos de malhas na análise dinâmica envolvendo estado plano de tensões e de deformações.

Fica evidente que muitos são os trabalhos e promissores são os resultados do MEFM na análise dinâmica de estruturas até o momento. O presente trabalho, portanto, se propõe a ampliar ainda mais os horizontes da aplicação do MEFM na análise dinâmica de estruturas, voltando-se para o estudo de fenômenos flexionais em elementos bidimensionais: as placas de Kirchhoff-Love.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Modelar matematicamente o problema de interesse é essencial para fundamentar qualquer análise, pois, antes de tudo é preciso entender o fenômeno que se pretende estudar. Portanto, a presente seção é destinada a descrever a formulação matemática do problema de vibração livre de placas de Kirchhoff-Love.

A modelagem matemática do problema seguirá duas etapas principais. Primeiramente, através do formalismo Lagrangeano, a equação diferencial será deduzida, para depois, segundo a aplicação da hipótese da separação das variáveis, o problema de autovalores e autofunções surgir.

3.1 O MODELO DE PLACAS DE KIRCHHOFF-LOVE

Placas planas são corpos sólidos de faces planas para os quais duas de suas dimensões são substancialmente maiores do que uma terceira e cujas solicitações externas são, preponderantemente, carregamentos transversais, aplicados na direção do eixo de menor dimensão, a chamada espessura h . Estes carregamentos, quando aplicados, dão origem a respostas mecânicas de flexão.

Convencionalmente, adota-se a direção \mathbf{e}_3 , como eixo que orienta a menor dimensão da placa. Por hipótese, na direção de \mathbf{e}_3 , as deformações normais (ε_3) resultantes podem ser consideradas suficientemente pequenas, ou seja (TIMOSHENKO; KRIGER, 1989):

$$\varepsilon_3 \approx 0 \Rightarrow \sigma_3 \approx 0 \quad (3.1)$$

sendo σ_3 a tensão normal na direção de \mathbf{e}_3 .

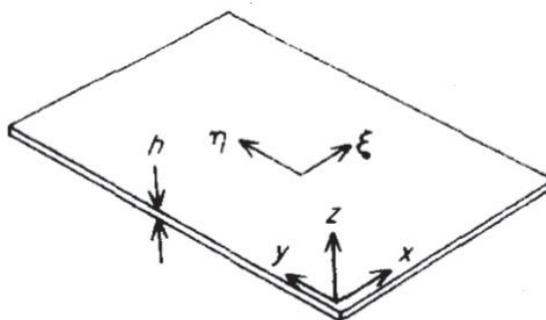
Apoiadas nesta hipótese fundamental, duas das diversas abordagens teóricas destinadas a fornecer uma modelagem matemática de uma placa são: a teoria de Kirchhoff-Love e a teoria de Reissner-Mindlin. Essas teorias são chamadas teorias de ordem inferior e se diferenciam, fundamentalmente, na magnitude atribuída às distorções angulares observadas nas seções transversais da placa.

Para a teoria de Kirchhoff-Love, também conhecida como teoria de placas finas, as deformações causadas pelo cisalhamento podem ser tomadas como muito

pequenas, mantendo as seções da placa praticamente planas na configuração deformada. Desconsidera, portanto, qualquer influência do fenômeno empenamento.

O que se observa, entretanto é que, à medida que a espessura da placa modelada cresce, o modelo proposto por Kirchhoff-Love torna-se pouco representativo. Isso acontece, geralmente, quando a rigidez ao cisalhamento se torna grande em comparação com a rigidez à flexão. Nestes casos, as distorções causadas pelos esforços cisalhantes não podem mais ser desconsideradas. Fato este que justifica o desenvolvimento de outro modelo, o modelo de Reissner-Mindlin. Hierarquicamente superior ao modelo proposto por Kirchhoff-Love, ele introduz as deformações provocadas pelo cisalhamento em sua formulação e, portanto, conduz a equações diferenciais mais sofisticadas e complexas. A complexidade nem sempre deve ser considerada como uma vantagem ou desvantagem no processo de modelagem matemática. Os aspectos práticos envolvidos em sua resolução, muitas vezes, podem determinar a escolha de um dado modelo em detrimento de outro. Problemas complexos quase sempre significam soluções mais complexas. Portanto, o caminho mais prudente é sempre avaliar a aplicação e, para os casos em que a utilização de modelos mais simples fornecer resultados semelhantes à utilização de modelos mais complexos, optar pela aplicação dos modelos mais simples. Exatamente isto é o que se observa em relação a modelagem de placas. A medida em que a espessura se torna baixa, os resultados fornecidos por ambas as abordagens se tornam próximos, não justificando, pois, a utilização do modelo mais complexo, proposto por Reissner-Mindlin. Por estes motivos, o presente trabalho se concentrou na abordagem teórica das placas finas. A Figura 1 ilustra uma representação do modelo de placas finas com h sendo a espessura da placa.

FIGURA 1 – Ilustração de placa fina.



FONTE: Adaptado de Bardell (1991).

Isotropia e regime elástico linear também foram tomados como hipóteses, tornando permitida a aplicação do princípio da superposição dos efeitos. Por fim, as tensões observadas na configuração deformada são consideradas como aplicadas na configuração indeformada, pois a peça encontra-se em regime de pequenos deslocamentos.

3.2 EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Este tópico se destina a descrever o processo de obtenção da equação diferencial governante seguindo o formalismo Lagrangeano, uma abordagem totalmente em termos de coordenadas generalizadas e energia (DYM e SHAMES, 2013).

Inicialmente, são discutidos os fundamentos desse formalismo, aplicando o Princípio da Mínima Ação (Princípio de Hamilton) no funcional de energia da placa. A aplicação deste princípio, por sua vez, conduz a Equação Diferencial mais importante da mecânica analítica Lagrangeana: a Equação de Euler-Lagrange. Posteriormente, através da resolução desta equação, a formulação convergirá para a equação diferencial particular das placas de Kirchhoff-Love.

Considere que $w': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ representa a função que descreve a posição vertical de uma dada partícula vinculada à linha neutra da placa, em algum instante de tempo t , associada a uma posição no plano xy . Genericamente, é possível realizar uma aplicação matemática na função w' , em suas variáveis independentes e em suas derivadas, associando a estes termos um dado número real.

Seja $\Pi_1: H \rightarrow \mathbb{R}$, um funcional definido por (DYM e SHAMES, 2013):

$$\Pi_1 = \int \mathcal{L} d\Omega \quad (3.2)$$

onde H representa um espaço de Hilbert, ou seja, o domínio de aplicação do funcional e o diferencial $d\Omega$ é igual a $d\Omega_p dt$, representando domínio relativo à posição da placa multiplicado pelo domínio do tempo, respectivamente.

Funcionais são estruturas matemáticas de extrema importância no formalismo Lagrangeano. Caso a função \mathcal{L} seja composta representando a diferença entre a

energia cinética e potencial acumulada por uma dada partícula, entre duas configurações distintas observadas, a função \mathcal{L} recebe o nome de Lagrangeana do sistema.

Devido ao princípio de Hamilton, sabe-se que, embora existam, supostamente, infinitas maneiras possíveis, para um sistema ou partícula ir de uma configuração para outra, fisicamente, o sistema o faz sempre da mesma forma. Este princípio desempenha o papel central na mecânica analítica. Conhecido também como princípio da mínima ação, ele enuncia que a natureza é “econômica” em seus processos, sempre realizando mudanças de configuração em sistemas visando o caminho que minimize a Lagrangeana acumulada (também chamada de ação) entre os estados finais e iniciais de um dado fenômeno (DYM e SHAMES, 2013).

O ponto de partida é supor que exista uma função, a princípio desconhecida, definida no interior do domínio de aplicação do funcional, que minimize Π_1 , atendendo simultaneamente a todas as imposições existentes no contorno. Dentro deste contexto, define-se como caminho possível, qualquer função que descreva uma mudança de configuração do sistema e esteja ligada ao caminho minimizador por (DYM e SHAMES, 2013):

$$w' = w + \varepsilon\psi \quad (3.3)$$

sendo $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, uma função chamada de caminho admissível e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ um parâmetro real associado a essa função. Para que as condições de contorno sejam atendidas, $w' = w$ em Γ , sendo Γ o contorno do problema. Tanto o caminho admissível, quanto suas derivadas parciais são nulas em Γ , para garantir que a condição de mínimo seja atingida somente em w .

Uma vez fixas as funções w e ψ , transforma-se o funcional em uma função escalar da forma:

$$\Pi_1 \equiv \Pi_1(\varepsilon) \quad (3.4)$$

Se $\varepsilon = \varepsilon_0$ e Π_1 é escrito em uma série de Taylor centrada em ε_0 (ASSAM, 2008):

$$\Pi_1(\varepsilon) = \Pi_1(\varepsilon_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^i}{i!} \left[\frac{\partial^i \Pi_1}{\partial \varepsilon^i} \right]_{\varepsilon=\varepsilon_0} \quad (3.5)$$

Por hipótese, o comportamento do funcional será analisado nas proximidades de $\varepsilon_0 = 0$, pois é quando o caminho possível coincide com o caminho estacionário. É possível perceber que, para que Π_1 tenha extremo local em $\varepsilon_0 = 0$, é suficiente que:

$$\left[\frac{\partial \Pi_1}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon_0=0} = 0 \quad (3.6)$$

A função Lagrangeana é, por definição, uma aplicação matemática sobre a função w' e suas derivadas. Do teorema do diferencial total (GUIDORIZZI, 2018):

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'} dw' + \sum_{i=x,y,t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'_i} dw'_i + \sum_{\substack{i=x,y \\ j=x,y}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'_{ij}} dw'_{ij} \quad (3.7)$$

Uma vez que a derivação parcial em relação a ε é um operador linear, observa-se que:

$$\left[\frac{\partial \Pi_1}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon_0=0} = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon_0=0} d\Omega \quad (3.8)$$

Cada uma das parcelas que compõem a variação da Lagrangeana em relação ao parâmetro ε possui um fator proveniente de uma variação da própria função w' , ou de alguma de suas derivadas. Considerando w'_i como a derivada de primeira ordem de w' em relação a i , e w'_{ij} a derivada segunda cruzada de w' em relação a i e j , tem-se (DYM e SHAMES, 2013):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'} \psi + \sum_{i=x,y,t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'_i} \psi_i + \sum_{\substack{i=x,y \\ j=x,y}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w'_{ij}} \psi_{ij} \quad (3.9)$$

Retornando à expressão inicial (Eq. (3.7)), a variação da Lagrangeana centrada no ponto $\varepsilon = 0$, faz a função w' coincidir com o caminho estacionário w , bem como todas suas derivadas. Percebe-se então que a seguinte integral deve ser nula:

$$\iiint \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} \psi + \sum_{i=x,y,t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} \psi_i + \sum_{\substack{i=x,y \\ j=x,y}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} \psi_{ij} \right) dx dy dt = 0 \quad (3.10)$$

Com a expressão reescrita em termos do caminho estacionário w , torna-se necessário, pois, estabelecer condições para que a determinação de w não esteja vinculada à escolha da função admissível ψ . As restrições de continuidade sobre o caminho admissível ψ devem ser transferidas para o caminho estacionário juntamente com imposições relativas ao comportamento do caminho admissível no contorno de integração (DYM e SHAMES, 2013).

Aplica-se então a Primeira Identidade de Green em todas as derivadas de primeira ordem da expressão, seguida de duas aplicações em todas as parcelas com derivadas segundas. Agrupam-se os termos semelhantes e obtém-se:

$$\int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} \psi - \sum_{i=x,y,t} \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} \right) \psi + \sum_{\substack{i=x,y \\ j=x,y}} \frac{\partial^2}{\partial i \partial j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} \right) \psi \right) d\Omega_p dt \quad (3.11)$$

$$+ \sum_{\substack{i=x,y,t \\ j=x,y}} \left[\oint_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} \frac{\partial \psi}{\partial i} - \frac{\partial}{\partial j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} \right) \psi \right) \right] = 0$$

Por hipótese, tanto a função ψ como todas as suas derivadas parciais devem ser nulas em todo e qualquer ponto do contorno Γ , reduzindo a expressão a:

$$\int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} - \sum_{i=x,y,t} \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} \right) + \sum_{\substack{i=x,y \\ j=x,y}} \frac{\partial^2}{\partial i \partial j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ij}} \right) \right) \psi d\Omega_p dt = 0 \quad (3.12)$$

Para que a Eq. (3.12) seja verdadeira para toda escolha possível de ψ , é suficiente que (DYM e SHAMES, 2013):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} - \sum_{i=x,y,t} \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} \right) + \sum_{\substack{i=x,y \\ j=x,y}} \frac{\partial^2}{\partial i \partial j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ji}} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Equação (3.13) é conhecida como equação de Euler-Lagrange para o problema de vibração de placas de Kirchhoff-Love.

Define-se a Lagrangeana em termos energéticos (DYM e SHAMES, 2013) como:

$$\mathcal{L} = E_{\text{cin}} - E_{\text{pot}} \quad (3.14)$$

onde E_{cin} é a energia cinética e E_{pot} a energia potencial. Petyt (2010), descreve a energia potencial elástica da placa de Kirchhoff-Love em função da rigidez flexional D na forma:

$$D = \frac{h^3 E}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.15)$$

onde E representa o módulo de Young, h a espessura da placa, tida como constante em todo o domínio e, por fim, ν o coeficiente de Poisson. Segundo Petyt (2010), a energia potencial é dada por:

$$E_{\text{pot}} = \frac{D}{2} 2\nu w_{xx} w_{yy} + \frac{D}{2} \sum_{i=x,y} w_{ii}^2 + \frac{D}{2} \left(\frac{1 - \nu}{2} \right) \sum_{\substack{i,j=x,y \\ i \neq j}} w_{ij} w_{ji} \quad (3.16)$$

enquanto a energia cinética é dada por (PETYTY, 2010):

$$E_{\text{cin}} = \frac{\rho h}{2} w_t^2 \quad (3.17)$$

sendo ρ a densidade da placa, h a espessura e w_t a primeira derivada temporal de w

Desta forma, basta avaliar cada uma das oito parcelas da equação de Euler-Lagrange (Eq. (3.13)) baseada na composição da Lagrangeana, começando por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = 0 \quad (3.18)$$

Das Eq. (3.16) e Eq. (3.17) percebe-se que a Lagrangeana do sistema não é função direta do caminho minimizador w , logo a sua derivada parcial é nula. Pelo mesmo motivo, a segunda e terceira parcelas de derivadas parciais são igualmente nulas. A Lagrangeana, portanto, independe, também, das derivadas espaciais de primeira ordem de w :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_x} \right) = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_y} \right) = 0 \quad (3.20)$$

para a quarta parcela:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_t} \right) = \rho h w_{tt} \quad (3.21)$$

Analisando as parcelas das derivadas de segunda ordem de w em relação a uma única variável observa-se que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xx}} \right) = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (3.22)$$

analogamente, pode-se escrever que:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{yy}} \right) = D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (3.23)$$

Por fim, as derivadas cruzadas, utilizando o Teorema de Schwarz (GUIDORIZZI, 2018) são iguais a:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{yx}} \right) = D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{xy}} \right) = D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \quad (3.25)$$

substituindo na Equação de Euler-Lagrange (Eq. (3.13)), obtém-se:

$$-\rho h w_{tt} - D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\nu \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \right) = 0 \quad (3.26)$$

que pode ser escrita de forma compacta como:

$$\frac{\rho h}{D} w_{tt} + \nabla^4 w = 0 \quad (3.27)$$

a Eq. (3.27) corresponde à equação diferencial que descreve a vibração livre de placas de Kirchhoff-Love.

3.3 PROBLEMA DE AUTOVALORES E AUTOFUNÇÕES GENERALIZADO

Com a equação diferencial em mãos (Eq. (3.27)), é necessário supor uma hipótese acerca da solução, conhecida como hipótese da separação de variáveis, para que o problema de autovalores possa ser extraído (LEISSA, 1969):

$$w = \cos(\lambda t) \Phi \quad (3.28)$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. De acordo com esta hipótese, o campo de translações w pode ser descrito através de um produto de duas funções. A primeira delas, representa uma função essencialmente temporal, responsável por atribuir o caráter e comportamento periódico à w . O segundo fator, $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, é função exclusiva da morfologia de translação associada a cada um dos pontos (x, y) da linha neutra da placa.

Substituindo a Eq. (3.28) na Eq. (3.27), obtém-se:

$$\nabla^4 \Phi = \lambda^2 \frac{\rho h}{D} \Phi \quad (3.29)$$

As funções Φ são, portanto, autofunções relativas a ∇^4 e associadas a autovalores da forma $\lambda^2 \frac{\rho h}{D}$.

3.4 SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA DE AUTOVALORES

Encontrar soluções analíticas para o problema de vibração livre de placas de Kirchhoff-Love tem se mostrado, desde os trabalhos precursores (POISSON, 1829; TIMOSHENKO, 1937; RAYLEIGH, 1945), um verdadeiro desafio. De uma maneira geral, a maior dificuldade intrínseca a este problema reside no fato de, muitas vezes, a formulação de uma expressão matemática para os modos de vibrar que permita satisfazer as equações governantes do problema de autovalores não ser algo simples. Este fator, por sua vez, justifica o grande número de esforços empregados na obtenção de metodologias aproximadas com precisão adequada (BIANCOLINI, BRUTTI e RECCIA, 2005).

Dentre as metodologias aproximadas, talvez a mais importante ao longo da história tenha sido o Método de Ritz e, desde que as primeiras foram propostas, pesquisadores têm focado seus estudos em fornecer outras alternativas para lidar com este problema. Gorman (1995; 2005) utilizou uma solução em séries através do Método da Superposição, no qual os modos de vibrar eram assumidos como séries trigonométricas e hiperbólicas. Kshirsagar e Bhaskar (2008) propuseram uma inovação no Método da Superposição de Gorman (1995) através do uso de expressões características de Levy em sua forma fechada, para simplificar a resolução.

Fundamentadas na Teoria de Germain-Lagrange, também surgiram tentativas baseadas em métodos variacionais, como por Filipich e Rosales (2000). Com o intuito de utilizar a abordagem variacional para modelar condições de contorno mais complexas, Seok, Tiersten e Scarto (2004) observaram que ao combinar condições de contorno ao longo da placa e aplicar uma metodologia semelhante à de Filipich e Rosales (2000), problemas com placas do tipo cantiléver tinham as condições de deslocamentos satisfeitas analiticamente e as demais condições de contorno nas bordas satisfeitas variacionalmente.

Por fim, alguns pesquisadores, começando por Ouyang e Zhong (1993), depois por Bao e Deng (2005) e Zhong e Zhang (2006), propuseram uma metodologia alternativa baseada em um modelo de equação diferencial diferente: O Método Dual de Hamilton. O Método Dual de Hamilton consiste em uma proposta na qual as soluções são modeladas através de expansões simpléticas de autofunções ao invés de utilizar formas fechadas em espaços euclidianos. Algumas destas Equações Diferenciais Duais de Hamilton são elencadas em Cen *et al.* (2005). Descrever um sistema mecânico através de uma abordagem simplética permite obter soluções analíticas para diversos problemas que, devido às suas limitações, não podiam ser resolvidos pela abordagem euclidiana. Portanto, a utilização de um espaço não-euclidiano, em uma abordagem puramente energética, permite um nível de abstração maior, ampliando o tratamento de problemas da dinâmica e conduzindo a uma maior gama de equações de frequência. A única limitação envolvida na formulação simplética é a exigência de que duas das bordas paralelas da placa fina obrigatoriamente sejam simplesmente apoiadas (LIM *et al.*, 2009).

Neste trabalho serão utilizadas todas as equações de frequência obtidas por Lim *et al.* (2009) para o cálculo dos valores analíticos em diversas condições de contorno, respeitando a limitação do método. Os valores de referência utilizados para estabelecer a análise de convergência dos métodos numéricos aqui estudados serão, portanto, extraídos de formulações fundamentadas na elasticidade simplética.

Os principais pontos relativos aos princípios da formulação Hamiltoniana em espaços simpléticos estão expostos no APENDICE deste trabalho. Para maiores detalhes a respeito desta abordagem, ver Yao, Zhong e Lim (2009).

3.5 FORMULAÇÃO VARIACIONAL E FORMA FRACA

Na construção dos métodos numéricos para solução do problema de vibração livre de placas de Kirchhoff-Love, o objetivo é converter um problema inicialmente de autovalores diferencial (Eq. (3.29)) em um problema de autovalores algébrico da forma:

$$\left(\mathbf{K} - \lambda^2 \frac{\rho h}{D} \mathbf{M} \right) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

onde as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} relacionam-se ao operador linear aplicado a Φ . O vetor \mathbf{u} representa os graus de liberdade do sistema em coordenadas generalizadas.

Existem duas maneiras possíveis de chegar a essa aproximação: obtendo a resolução aproximada da equação de Euler-Lagrange (Eq. (3.13)) ou aproximar a solução da própria equação diferencial (Eq. (3.29)). O presente capítulo destina-se a descrever o procedimento para aproximar o problema pela primeira via.

Para que uma formulação em elementos finitos possa ser desenvolvida, o problema precisa fornecer uma equação integral em uma forma chamada de “fraca”, isto é, com restrições de continuidade iguais em todas as funções envolvidas.

Esta metodologia tem seu ponto de partida na função lagrangeana do sistema, escrita de maneira genérica como (adaptado de Petyt, 2010):

$$\mathcal{L} = \frac{\rho h}{2} (w_t)^2 - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\ell} w)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\ell} w) \quad (3.31)$$

particularizando para o problema das placas finas:

$$\boldsymbol{\ell} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{2 \partial^2}{\partial x \partial y} \right)^T \quad (3.32)$$

a matriz \mathbf{D} , chamada de matriz constitutiva, é dada por (PETYT, 2010):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D & D\nu & 0 \\ D\nu & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Propondo uma maneira aproximada de escrever o campo de translações w , em uma partição Ω_i denotada por \bar{w} , substitui-se a expressão do funcional de energia, particularizando a aplicação. Construindo um funcional local $\bar{\Pi}_{1i}$:

$$\bar{\Pi}_{1i} = \frac{1}{2} \int (\rho h (\bar{w}_t)^2 - (\boldsymbol{\ell} \bar{w})^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\ell} \bar{w})) d\Omega_i \quad (3.34)$$

Supõem-se, por hipótese, que a solução aproximada \bar{w} é da forma:

$$\bar{w} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\varphi} \quad (3.35)$$

sendo \mathbf{w} o vetor de funções temporais do tipo:

$$\mathbf{w} = \cos(\lambda t) \mathbf{u} \quad (3.36)$$

ou seja, $w_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e \mathbf{u} o vetor de constantes associadas ao vetor $\boldsymbol{\varphi}$, que aproxima e distribui de maneira local o comportamento espacial das translações verticais Φ . Se $\varphi_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $\varphi_i = \varphi_i(x, y)$, então:

$$\bar{w}_t = \mathbf{w}_t^T \boldsymbol{\varphi} \quad (3.37)$$

onde \mathbf{w}_t representa a derivada temporal do vetor \mathbf{w} .

Substitui-se estas considerações na expressão do funcional local aproximado (Eq. (3.34)), e então ela é expandida em relação ao produto matricial que descreve a energia potencial aproximada. Por fim, manipulando os limites de integração, sabendo que $d\Omega_i = dx dy dt$, obtém-se:

$$\bar{\Pi}_{1_i} = \frac{\rho h}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{w}_t^T \mathbf{M}_i \mathbf{w}_t dt - \frac{D}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{w}^T \mathbf{K}_i \mathbf{w} dt \quad (3.38)$$

fazendo o diferencial relacionado a posição igual a $d\Omega_{p_i} = dx dy$, torna-se possível aplicar os limites de integração. A matriz \mathbf{M}_i , relacionada a energia cinética da placa pode ser obtida por:

$$\mathbf{M}_i = \int \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T d\Omega_{p_i} \quad (3.39)$$

e \mathbf{K}_i a matriz relacionada a energia potencial:

$$\mathbf{K}_i = \frac{D}{2} \int 2\nu \boldsymbol{\varphi}_{yy} \boldsymbol{\varphi}_{xx}^T d\Omega_{pi} + \frac{D}{2} \sum_{i=x,y} \int \boldsymbol{\varphi}_{ii} \boldsymbol{\varphi}_{ii}^T d\Omega_{pi} \quad (3.40)$$

$$+ \frac{D}{2} \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \sum_{\substack{i,j=x,y \\ i \neq j}} \int \boldsymbol{\varphi}_{ji} \boldsymbol{\varphi}_{ij}^T d\Omega_{pi}$$

O funcional de energia local $\bar{\Pi}_{1_i}$ pode, por fim, ser expresso em termos unicamente da variação dos vetores \mathbf{w} e \mathbf{w}_t :

$$\bar{\Pi}_{1_i} = \bar{\Pi}_{1_i}(\mathbf{w}, \mathbf{w}_t) \quad (3.41)$$

Nesta formulação as entradas variam única e exclusivamente em relação ao tempo. Em outras palavras, o contínuo passa a ser caracterizado através de um número finito de partículas, caracterizadas em \mathbf{w} e em suas velocidades \mathbf{w}_t . Petyt (2010) também se vale desta formulação, que conduz a uma formulação aproximada da Equação de Euler-Lagrange na forma:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{w}} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{w}_t} \right) = \mathbf{0} \quad (3.42)$$

A primeira parcela da equação de Euler-Lagrange para o movimento das partículas é equivalente a:

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{w}} = -\frac{D}{2} \mathbf{K}_i \mathbf{w} \quad (3.43)$$

enquanto a segunda parcela é igual a:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \mathbf{w}_t} \right) = -\frac{1}{2} \rho h \mathbf{M}_i \mathbf{w}_{tt} \quad (3.44)$$

substituindo as Eqs. (3.44) e (3.43), na Eq. (3.42), obtém-se:

$$-\frac{1}{2}(\rho h \mathbf{M}_i \mathbf{w}_{tt} + D \mathbf{K}_i \mathbf{w}) = \mathbf{0} \quad (3.45)$$

Por fim, pela definição do vetor \mathbf{w} , efetuando as derivadas temporais e simplificando a expressão da Eq. (3.45) obtém-se:

$$\left(\mathbf{K}_i - \lambda^2 \frac{\rho h}{D} \mathbf{M}_i \right) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

formulando assim o problema de autovalores e autovetores relativo a cada uma das i -ésimas partições do domínio de aplicação da equação diferencial.

O capítulo seguinte é destinado a apresentar brevemente uma construção dos vetores de funções de forma para o MEF convencional e para as chamadas metodologias enriquecidas. Os vetores de funções de forma, por sua vez, determinarão a composição das matrizes da Eq. (3.47).

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E MÉTODOS ENRIQUECIDOS

O presente capítulo é destinado a discutir aspectos práticos da formulação e alguns conceitos envolvidos na modelagem do problema de vibração livre de placas de Kirchhoff-Love via elementos finitos. Cada uma das modelagens utilizadas se diferenciará, basicamente, quanto à escolha das funções de forma que comporão o vetor $\boldsymbol{\varphi}$, uma vez que estas determinarão a composição de diferentes matrizes \mathbf{K}_i e \mathbf{M}_i .

4.1 ASPECTOS PRÁTICOS GERAIS

Para as metodologias fundamentadas em elementos finitos, os valores da variável de interesse são expressos em função dos valores calculados em alguns pontos específicos das partições do domínio, designados de nós (PETYT, 2010).

Sendo Ω_p o domínio de aplicação da equação integral na forma fraca, definem-se como partições, ou elementos finitos, de Ω_p os conjuntos Ω_{pi} para os quais duas proposições são verdadeiras:

$$(i) \bigcup_{i=1}^n \oplus \Omega_{pi} = \Omega_p \quad (4.1)$$

$$(ii) \forall p_1, p_2 \in \Omega_{pi}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2 \in \Omega_{pi} \quad (4.2)$$

Ou seja, a união de todos estes conjuntos é igual ao domínio e os conjuntos não compartilham pontos, ou seja, o conjunto Ω_p é a soma direta de suas partições, todas convexas. Este processo de discretização do domínio em elementos constitui a chamada malha de elementos finitos e, para o caso bidimensional, consiste na divisão de Ω_p em n quadriláteros convexas Ω_{pi} (PETYT, 2010).

Por definição, qualquer ponto da placa pode ser alocado de maneira suficiente através de um sistema de coordenadas $(x, y) \in \Omega_p$, onde:

$$\Omega_p = [0, L_x] \times [0, L_y] \quad (4.3)$$

Representar um ponto qualquer da placa utilizando de suas coordenadas (x, y) significa representar esse ponto no sistema de coordenadas global.

Mesmo sendo uma forma muito intuitiva de se pensar a representação dos pontos de um domínio, em termos práticos, essa metodologia pode não ser viável. Optar por uma representação alternativa é uma técnica observada desde os trabalhos precursores (BOGNER, FOX E SCHIMIDT, 1965). Outros trabalhos consagrados também se utilizaram deste artifício, como Bardell (1991) e Leung e Chan (1998).

A representação dos pontos através de um sistema único e global de coordenadas possui algumas limitações, como dificultar o processo de integração numérica para obtenção das matrizes de massa e de rigidez do problema. O procedimento alternativo utilizado consiste, portanto, em estabelecer um sistema de coordenadas interno para cada elemento, designado sistema local de coordenadas adimensionais. Uma vez definido, cada ponto será então alocado em relação a sua posição interna no elemento em que ele está contido, uniformizando, de maneira muito conveniente, os limites de integração (PETYT, 2010).

O sistema de coordenadas adimensionais será descrito para o caso de elementos retangulares. Para estes casos, cada elemento Ω_{pi} pode ser entendido como um retângulo de base $2a_i$ e altura $2b_i$. No interior de cada uma destes retângulos, define-se um sistema adimensional de coordenadas locais (ξ, η) tal que:

$$\xi = \frac{x}{a_i} \quad (4.4)$$

$$\eta = \frac{y}{b_i} \quad (4.5)$$

e o diferencial de domínio, $d\Omega_{pi}$, para placas planas é:

$$d\Omega_{pi} = dx dy \quad (4.6)$$

É possível expressar o diferencial de domínio $d\Omega_{pi}$, em termos do sistema local adimensional através do Jacobiano, na forma:

$$d\Omega_{pi} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d\xi d\eta \quad (4.7)$$

sendo $\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}$ o módulo do determinante da matriz jacobiana entre os dois sistemas de coordenadas. Para a presente aplicação o valor do determinante da matriz jacobiana é igual a:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = a_i b_i \quad (4.8)$$

Torna-se necessário, portanto, que os operadores diferenciais envolvidos também sejam reescritos no novo sistema:

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} = \frac{1}{a_i^j} \frac{\partial^j}{\partial \xi^j} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^j}{\partial y^j} = \frac{1}{b_i^j} \frac{\partial^j}{\partial \eta^j} \quad (4.10)$$

Estabelecidos os principais conceitos relativos ao sistema local adimensional de coordenadas, o próximo passo é elencar os dois critérios relativos à escolha das funções utilizadas para compor a base do espaço de aproximação Ψ . Uma vez atendidos, estes critérios garantirão a convergência para a solução analítica.

Existem dois critérios que devem nortear a escolha das funções de forma que comporão o vetor $\boldsymbol{\varphi}$: o Critério de Completude e o Critério de Conformidade. Definir as funções de forma de maneira que tais condições sejam atendidas é de extrema importância para uma modelagem numérica satisfatória.

Para que um elemento seja dito completo, suas funções de forma devem possuir todos os termos polinomiais até a máxima ordem da derivada presente na equação integral governante da formulação na forma fraca. Esse é o critério que considera o elemento de maneira isolada. Fisicamente, caso os graus de liberdade estejam associados a deslocamentos de alguma natureza, a modelagem deve, obrigatoriamente, conseguir representar satisfatoriamente estados de tensões constantes e deslocamentos de corpo rígido.

Por outro lado, define-se como elemento conforme um elemento que possua continuidade de suas funções de forma dos graus de liberdade, e de suas derivadas,

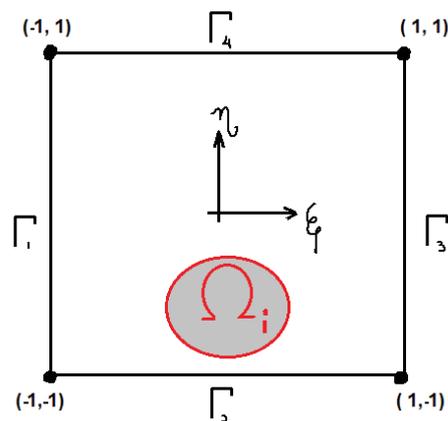
nas interfaces com elementos adjacentes em até uma ordem inferior ao máximo grau observado na formulação da equação integral em sua forma fraca (PETYT, 2010). No presente trabalho, apenas formulações que conduzam a elementos conformes e completos foram utilizadas.

4.2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO CONFORME

Definidos os conceitos relativos à conformidade e à completude, a abordagem do MEF utilizada nesse trabalho é a do elemento conforme proposto por Bogner, Fox e Schmit (1965). Existem diversas outras formulações e geometrias de elementos finitos voltados para o problema de placas: elementos triangulares, elementos com vários nós, elementos paramétricos, entre outros. No presente estudo, entretanto, todos os enriquecimentos serão propostos visando enriquecer e ampliar o espaço de solução do elemento CR, visto que esta é a formulação mais simples a satisfazer a conformidade.

O elemento conforme de placas, também designado Elemento CR (BOGNER, FOX e SCHMIDT, 1965) pode ser representado pelo esquema da Figura 2. Entre parênteses estão indicadas as coordenadas locais de cada um dos nós do elemento.

FIGURA 2 – Esquema do elemento conforme de quatro nós.



FONTE: o autor.

Afim de aproximar a solução do problema de autovalores da Eq. (3.29), propõem-se que a função Φ seja aproximada por $\bar{\Phi}_{MEF}$ no interior de cada um dos subdomínios Ω_{pi} .

Como definido na Eq. (3.28), Φ representa a componente espacial da translação vertical de uma placa fina sujeita a vibrações livres. Nas metodologias baseadas em elementos finitos, parte-se da premissa de aproximar os valores desta função através de $\mathbf{u}^T \boldsymbol{\varphi}$. O vetor \mathbf{u} é conhecido como vetor de graus de liberdade e representa, como já mostrado anteriormente, valores pontuais de $\bar{\Phi}_{MEF}$ calculados nos nós do elemento.

Para atingir a formulação conforme, Bogner, Fox e Schmit (1965) propõem o a utilização de quatro graus de liberdade em cada nó, utilizando um grau de liberdade designado “twist”. Diferenciando-se da proposta de autores anteriores, o “twist” representa uma parcela relativa às ações produzidas pelo momento volvente.

Considerando isso, o vetor de graus de liberdade do elemento conforme é:

$$\mathbf{u} = (w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, \dots, w_4, \theta_{x4}, \theta_{y4}, \theta_{z4})^T \quad (7.3.1)$$

os graus de liberdade w_j representam as translações verticais do j -ésimo nó. As rotações θ_{xj} , θ_{yj} e θ_{zj} são as rotações em torno de \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 , respectivamente (PETYT, 2010).

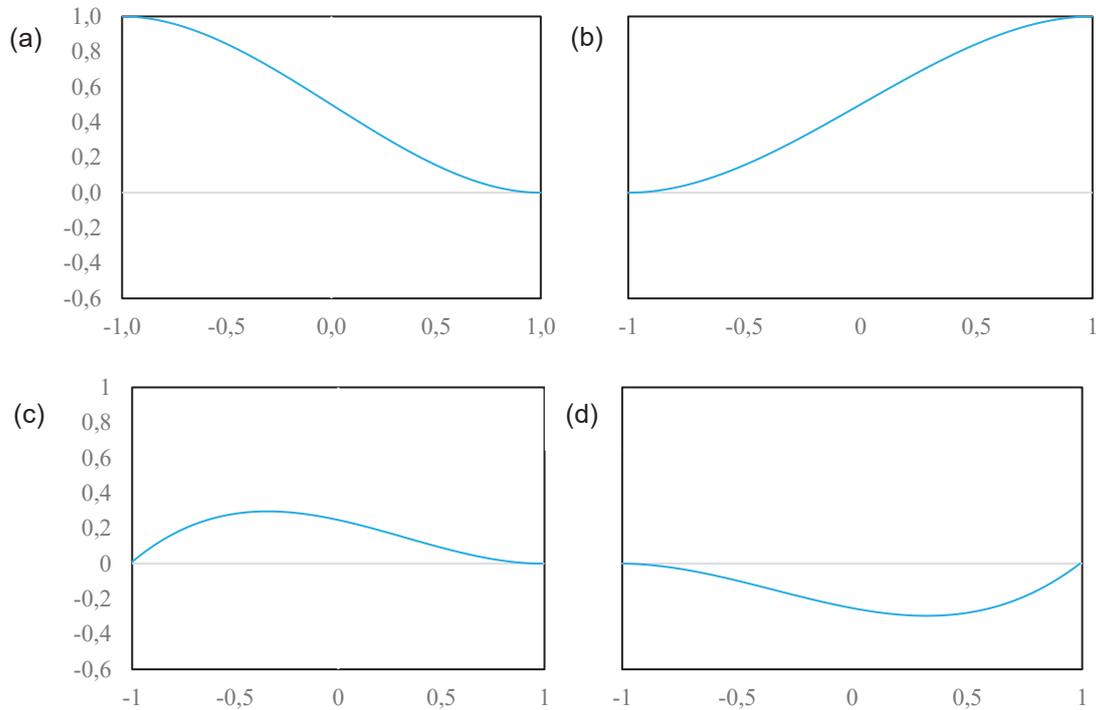
Assim como observado em vigas de Euler-Bernoulli, as rotações em placas são acopladas às translações verticais e tidas, conseqüentemente, como graus de liberdade no cálculo da solução aproximada. As funções de interpolação adotadas para compor o vetor $\boldsymbol{\varphi}$ são obtidas através da multiplicação dos polinômios cúbicos de Hermite (as mesmas funções unidimensionais utilizadas para elementos de viga de Euler-Bernoulli) em duas direções, dados por (PETYT, 2010):

$$f_{1j}(\alpha) = \frac{1}{4}(2 + 3\alpha_j\alpha - \alpha_j\alpha^3) \quad (4.11)$$

$$f_{2j}(\alpha) = \frac{J}{4}(-\alpha_j - \alpha + \alpha_j\alpha^2 + \alpha_j^3) \quad (4.12)$$

onde os valores de α_j correspondem às coordenadas dos nós do elemento, tanto no sentido horizontal, quanto vertical. O valor J representa o jacobiano entre os sistemas de coordenadas, relativo ao eixo em questão. Graficamente, as funções de Hermite utilizadas para obter todas as entradas do vetor de funções de forma estão apresentadas na Figura 3.

FIGURA 3 – Polinômios Cúbicos de Hermite. (a) $f_1(-1)$; (b) $f_1(+1)$; (c) $f_2(-1)$; (d) $f_2(+1)$



Fonte: o autor.

Na formulação conforme do MEF a solução é aproximada por:

$$\bar{\Phi}_{\text{MEF}} = \sum_{i=-1,1} \sum_{j=-1,1} \sum_{k=1,2} (f_{ki}(\xi) f_{kj}(\eta)) u_{ijk} \quad (4.14)$$

onde u_{ijk} são os valores dos graus de liberdade associados ao i -ésimo nó e às k -ésima e j -ésima funções de forma 1D.

Com a composição do vetor de funções de forma do elemento CR em mãos, é possível estruturar o problema de autovalores e autovetores desejado. Substituindo a Eq. (4.14) no cálculo da integral da Eq. (3.39), torna-se possível determinar o valor de cada uma das entradas da matriz de massa local. O mesmo vale para a formulação da matriz de rigidez local, definida na Eq. (3.40).

Entretanto, resolver o problema de autovalores e autovetores generalizado apenas no interior dos elementos não suficiente. Para que a aproximação da solução seja válida, é necessário que a solução seja aproximada e compatibilizada em todo o domínio Ω_p . Mediante esta condição, surge a necessidade de estruturar o problema

de autovalores e autovetores em todo o domínio. O processo consiste em, através da utilização de n problemas de autovalores locais, agrupar os termos semelhantes, relativos aos graus de liberdade compartilhados por dois ou mais elementos e assim compor um problema global de autovalores e autovetores. Somam-se então as entradas relativas aos mesmos graus de liberdade e, por fim, constrói-se o problema global de autovalores e autovetores:

$$\left(\mathbf{K}_G - \frac{\lambda^2 \rho h}{D} \mathbf{M}_G \right) \cdot \mathbf{u}_G = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

com $\mathbf{K}_G, \mathbf{M}_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{u}_G \in \mathbb{R}^n$. As matrizes \mathbf{K}_G e \mathbf{M}_G representam, respectivamente, as matrizes globais de rigidez e massa, enquanto que \mathbf{u}_G designa o vetor de graus de liberdade global.

4.3 MÉTODOS ENRIQUECIDOS

Considerando o espaço aproximado gerado pelas funções de forma do elemento CR, o conceito de enriquecimento consiste em uma técnica de ampliação deste espaço. Adicionando novas funções ao conjunto de funções de forma inicial, novos graus de liberdade são adicionados ao sistema. Estes novos graus de liberdade são parâmetros sem significado físico intrínseco, que visam apenas melhorar a solução fornecida pelo MEF.

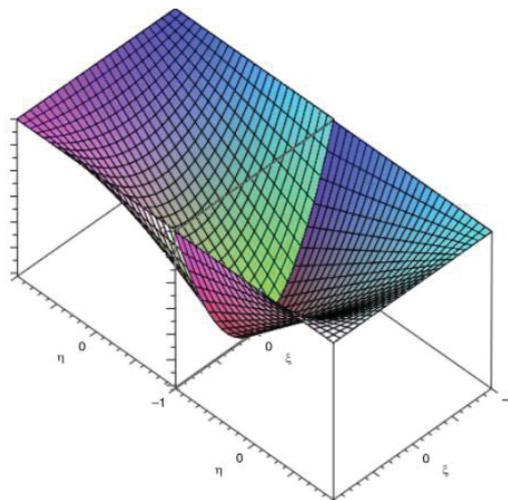
Uma prática que demonstrou bons resultados em problemas 2D é realizar este enriquecimento da solução apenas adicionando os novos graus de liberdade no interior dos elementos ou em bordas compartilhadas por dois elementos adjacentes (TORII, 2012; CITTADIN, 2020). Desta forma, o processo de imposição das condições de contorno sofrerá poucas alterações quando comparado a formulação original do MEF, facilitando sua implementação computacional e compatibilização interna dos graus de liberdade. Outro detalhe importante é que, devido à natureza física do problema modelado, a inserção de funções que não garantam continuidade \mathbb{C}^1 nas interfaces dos elementos não é viável, ocasionando resultados não convergentes. Portanto, apenas funções 1D com valores nulos e derivadas nulas no contorno foram utilizadas para compor os enriquecimentos. Desta maneira, o enriquecimento não

interfere na continuidade dos graus de liberdade de rotação aproximados nas interfaces dos elementos.

4.3.1 Funções enriquecedoras

Assim como na obtenção das funções de forma do MEF convencional, os enriquecimentos são obtidos através do produto de duas funções de forma 1D. Caso uma das duas funções 1D utilizadas seja relativa a formulação original do MEF e a outra uma função 1D atenda as exigências descritas acima (nula com derivadas nulas nos nós), a função resultante será associada a um parâmetro designado grau de liberdade “borda”. Os graus de liberdade “borda” são associados a funções com suporte apenas em dois elementos adjacentes. Relacionam-se, portanto, a um enriquecimento que visa aprimorar a solução na interface dos elementos. Um bom esquema da compatibilidade e continuidade das funções enriquecedoras borda é ilustrado por Torii (2012) na Figura 4.

FIGURA 4 – Esquema de função enriquecedora borda.

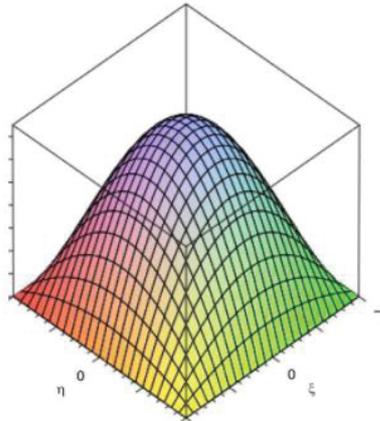


FONTE: Torii (2012).

Por outro lado, se as duas funções 1D utilizadas forem nulas com derivadas nulas nos nós do elemento, a função resultante recebe o nome de função bolha. Funções bolha são enriquecimentos presentes em trabalhos consagrados de métodos enriquecidos com bons resultados, como Bardell (1991) e Leung e Chan (1998). Caracterizam-se pelo aprimoramento da solução por funções enriquecedoras 2D com

suporte única e exclusivamente no interior dos elementos. Torii (2012) também traz uma representação muito didática de funções bolha, ilustrada na Figura 5.

FIGURA 5 – Esquema de função enriquecedora bolha.



FONTE: Torii (2012).

4.3.2 Níveis de enriquecimento

Enriquecer uma solução convencional do MEF através de funções borda ou bolha é equivalente a construir a solução aproximada igual a:

$$\bar{\Phi}_{ENR} = \bar{\Phi}_{MEF} + \sum_{k=1}^N \gamma_k \Gamma_k \quad (4.17)$$

onde γ_k e r_k representam, respectivamente, as funções enriquecedoras e os graus de liberdade enriquecedores.

Cada nova função 1D utilizada na composição das funções enriquecedoras 2D dá origem a um número específico de funções borda e de funções bolha, constituindo o que se chama de nível de enriquecimento. Essa é uma característica intrínseca, inclusive ao próprio MEEG. Um novo nível de enriquecimento introduzirá uma quantidade característica de novos graus de liberdade ao sistema, dependente do número de funções 1D utilizadas na formulação convencional do MEF e da quantidade de níveis de enriquecimento anteriores.

4.3.3 Construção do problema enriquecido

Através da Eq. (4.17) é possível perceber que a formulação enriquecida contém a formulação convencional de MEF, isto é, o espaço aproximador do MEF está contido no espaço aproximador enriquecido. Portanto, na composição das matrizes globais de massa e rigidez é possível alocar e ordenar os graus de liberdade de tal forma que o problema original do MEF apareça integralmente contido em um bloco da matriz enriquecida:

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_G & \mathbf{K}_{G,E}^T \\ \mathbf{K}_{G,E} & \mathbf{K}_E \end{bmatrix} + \frac{\lambda^2 \rho h}{D} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_G & \mathbf{M}_{G,E}^T \\ \mathbf{M}_{G,E} & \mathbf{M}_E \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_G \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.17)$$

onde o vetor \mathbf{r} representa o vetor de graus de liberdade enriquecidos, os blocos $\mathbf{K}_{G,E}$ e $\mathbf{M}_{G,E}$ correspondem aos coeficientes de rigidez e massa relativos aos graus de liberdade do MEF associados aos graus enriquecidos e os blocos \mathbf{K}_E e \mathbf{M}_E as matrizes relativas unicamente aos coeficientes entre graus enriquecidos. Tal característica facilita a ordenação dos graus de liberdade. Os elementos das matrizes relativos às funções enriquecedoras podem ser inseridos e numerados de maneira independente à formulação convencional do MEF.

Duas metodologias enriquecidas consagradas da literatura serão aplicadas juntamente ao MEF para resolução do problema proposto no presente trabalho: O MEFH polinomial de Bardell (1991) e o MEF p-Fourier de Leung e Chan (1998).

4.3.4 Método dos Elementos Finitos Hierárquico Polinomial

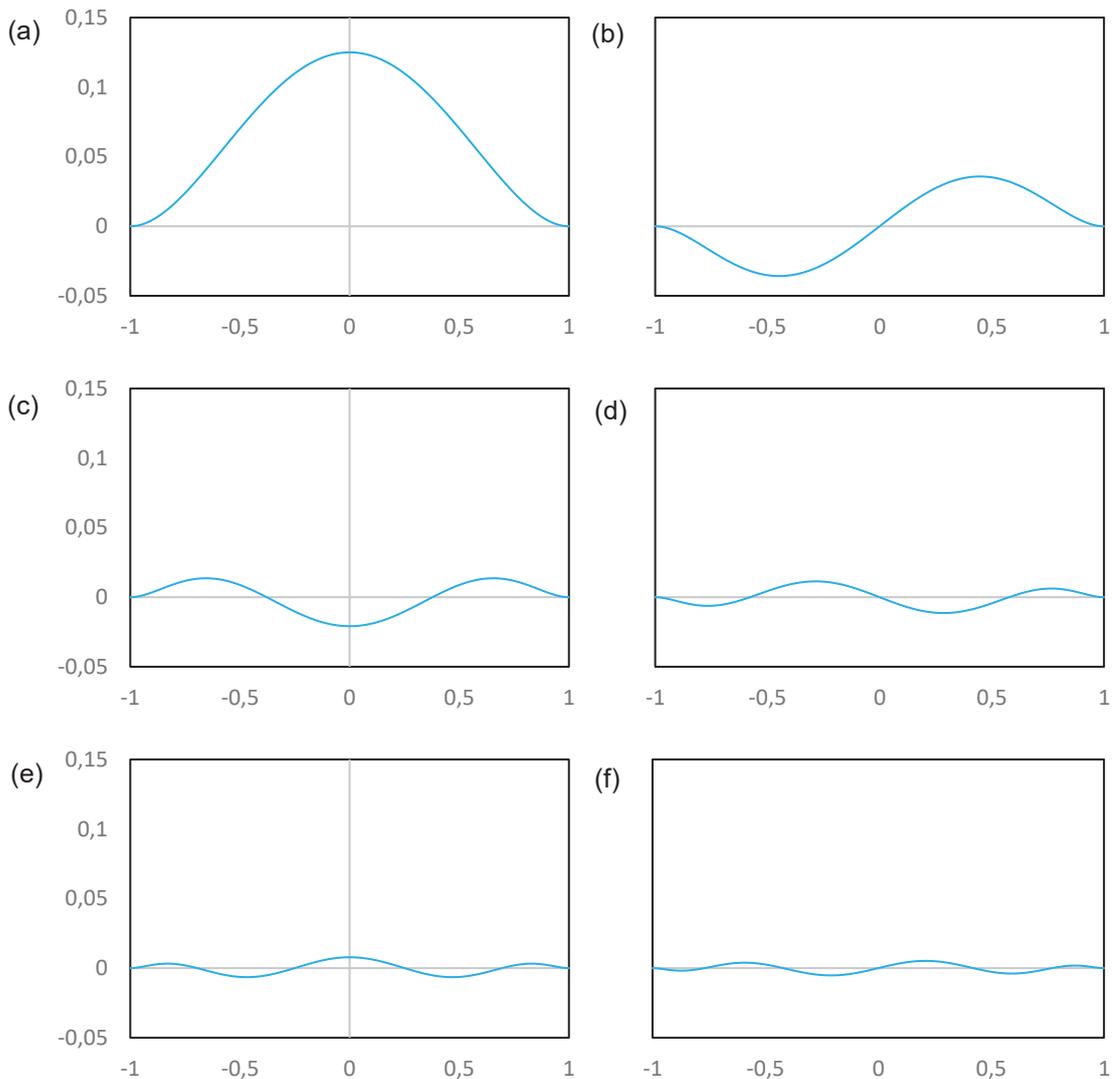
As funções 1D utilizadas para o enriquecimento da solução do Método dos Elementos Finitos Hierárquico Polinomial basearam-se no trabalho de Bardell (1991) e correspondem aos polinômios de Legendre na forma de Rodriguez:

$$\gamma_j = \frac{d^j}{d\alpha^j} \left(\frac{(1 - \alpha^2)^j}{2^j j!} \right) \quad (4.18)$$

fazendo $j = 5, 6, 7 \dots$

Graficamente, as funções enriquecedoras 1D do MEFH Polinomial estão representadas na Figura 6.

FIGURA 6 – Polinômios de Legendre (a) $j=5$; (b) $j=6$; (c) $j=7$; (d) $j=8$; (e) $j=9$; (f) $j=10$.



FONTE: o autor.

4.3.5 Método dos Elementos Finitos p-Fourier

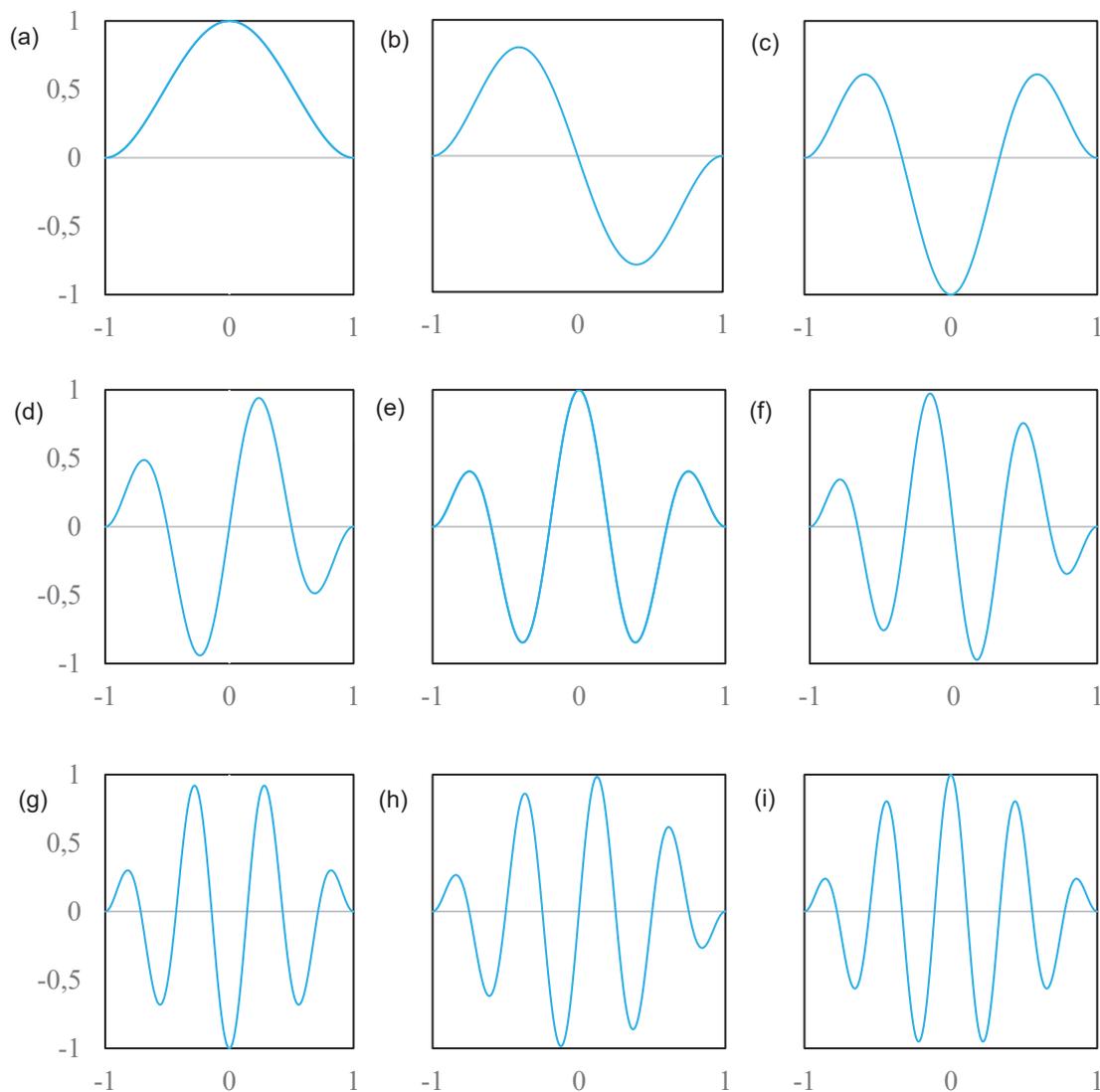
Outra formulação enriquecida utilizada no presente trabalho corresponde a proposta de Leung e Chan (1998), denominado Método dos Elementos Finitos p-Fourier. Nesta formulação, a solução é enriquecida através de funções 1D trigonométricas multiplicadas por uma função quadrática polinomial, da forma:

$$\gamma_j = (1 - \alpha^2) \text{sen} \left(j\pi \frac{(1 + \alpha)}{2} \right) \quad (4.20)$$

sendo $j = 1, 2, \dots$

Na Figura 7 seguem representadas graficamente todas as funções enriquecedoras 1D utilizadas na solução via MEF p-Fourier.

FIGURA 7 – Funções enriquecedoras do MEF p-Fourier (a) $j=5$; (b) $j=6$; (c) $j=7$; (d) $j=8$, (e) $j=9$; (f) $j=10$; (g) $j=11$; (h) $j=12$; (i) $j=12$; (j) $j=13$.



FONTE: o autor.

5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O contexto de criação do MEFG surge através da extensão do Método da Partição da Unidade (MPU), proposto por Melenk e Babuska (1996). Considera-se como MEFG a união do espaço de soluções do MEF convencional ao enriquecimento local da solução obtida por meio de uma partição da unidade (PU) aliada a funções base com características que podem ou não representar o fenômeno estudado. O MPU, assim como o MEF, é um método de resolução de equações diferenciais caracterizado pela formulação de espaços aproximados de solução com propriedades de regularidade e conformidade (MELENK e BABUSKA, 1996).

5.1 ASPECTOS TEÓRICOS DO MÉTODO

Na literatura, existem ferramentas de análise funcional que comprovam a aplicabilidade do MPU para a resolução de problemas de valores de contorno de quarta ordem (BRENNER, DAVIS e SUNG, 2014). Estas ferramentas são formulações que conduzem a estimadores do erro de aproximação envolvido no processo de solução. Com estimadores de erro em mãos, caso o erro esteja limitado e existam condições para que ele se aproxime suficientemente de zero, a convergência do MPU para a solução analítica é demonstrada.

5.1.1 Partição da Unidade

A fim de introduzir os estimadores de erro para o MPU em problemas de valores de contorno de quarta ordem, alguns conceitos devem ser apresentados.

Definição 5.1 (Partição da Unidade) seja um conjunto aberto Ω_p pertencente a \mathbb{R}^n e $\bar{\Omega}_{pj}$ uma cobertura, também aberta, que satisfaça uniformemente em todos os pontos (MELENK e BABUSKA, 1996):

$$\exists M \in \mathbb{N} \forall (x, y) \in \Omega_p \text{ card}(j: (x, y) \in \bar{\Omega}_{pj}) \leq M \quad (5.1)$$

ou seja, com um número limitado de subcoberturas relativas a um mesmo ponto. Sendo $\{\mu_j\}$ uma PU Lipschitziana subordinada a cobertura $\bar{\Omega}_{pj}$, define-se que tal PU é não nula apenas dentro de seu suporte e que o somatório em todo o domínio é constante e igual a um (MELENK e BABUSKA, 1996):

$$\forall j: \text{suporte}(\mu_j) \subset \text{fechamento}(\bar{\Omega}_j), \sum_j \mu_j \equiv 1 \text{ em } \Omega \quad (5.2)$$

Por fim, define-se que existam constantes K_0 , K_1 e K_2 para as quais as funções devam ser limitadas com derivadas e laplacianos limitados (MELENK e BABUSKA, 1996; BRENNER, DAVIS e SUNG, 2014):

$$\|\mu_j\|_{L^\infty} \leq K_0 \quad (5.3)$$

$$\|\nabla \mu_j\|_{L^\infty} \leq \frac{K_1}{\text{diam}(\bar{\Omega}_j)} \quad (5.4)$$

$$\|\nabla^2 \mu_j\|_{L^\infty} \leq \frac{K_2}{(\text{diam}(\bar{\Omega}_j))^2} \quad (5.5)$$

Com as características necessárias para uma função ser PU, basta unir o espaço de soluções do MEF convencional ao MPU para resultar no espaço aproximador do MEEG.

5.1.2 O espaço de soluções aproximado e convergência do MEEG em problemas de quarta ordem

Considerando os espaços de aproximação local das i -ésimas partições indexadas da forma V_i , pode-se definir o espaço aproximador do MEEG como o conjunto V_H (BRENNER, DAVIS e SUNG, 2014) tal que:

$$V_H = \left\{ \sum_j \sum_i \mu_j \gamma_i : \gamma_i \in V_i \right\} \quad (5.6)$$

Considerando $\bar{\Phi}_{\text{MEFG},i}$ a aproximação local da solução analítica Φ em Ω_{p_i} sabe-se que em problemas de quarta ordem existirá uma constante \bar{K} para a qual (BRENNER, DAVIS e SUNG, 2014):

$$\|\Phi - \bar{\Phi}_{\text{MEFG},i}\|_{L^\infty} \leq \bar{K}h \quad (5.7)$$

ou seja, sempre existirá um valor positivo e independente do tamanho do elemento, limitando a distância máxima da solução aproximada em relação ao valor analítico. O valor h denota o grau de aproximação do espaço e está limitado entre 0 e 1 (REDDY, 1998). A medida em que h se aproxima suficientemente de zero (seja através da diminuição do tamanho dos elementos ou da inserção de novos níveis de enriquecimento), a solução uniformemente converge para a solução analítica. Maiores detalhes envolvendo a prova deste corolário encontram-se em Brenner, Davis e Sung (2014)

5.2 FORMULAÇÕES PROPOSTAS PARA O MEFG

Para compor as formulações dos enriquecimentos usados no MEFG selecionaram-se algumas PU e funções enriquecedoras base. Cada formulação, por sua vez, se distinguirá pela escolha da PU e/ou da base de funções enriquecedoras.

5.2.1 Partições da unidade selecionadas

O presente trabalho utilizou quatro diferentes tipos possíveis de funções partições da unidade para os enriquecimentos propostos do MEFG:

- PU Lagrangeanas Lineares;
- PU Lagrangeanas Quadráticas;
- PU Hermitianas Cúbicas;
- PU Trigonométricas.

As PU Lagrangeanas Lineares são definidas dentro do elemento como:

$$\mu_1 = \frac{(1 + \alpha)}{2} \quad (5.8)$$

$$\mu_2 = \frac{(1 - \alpha)}{2} \quad (5.9)$$

As PU Lagrangeanas Quadráticas são dadas por:

$$\mu_1 = \frac{\alpha(1 + \alpha)}{2} \quad (5.10)$$

$$\mu_2 = \frac{\alpha(1 - \alpha)}{2} \quad (5.11)$$

$$\mu_3 = 1 - \alpha^2 \quad (5.12)$$

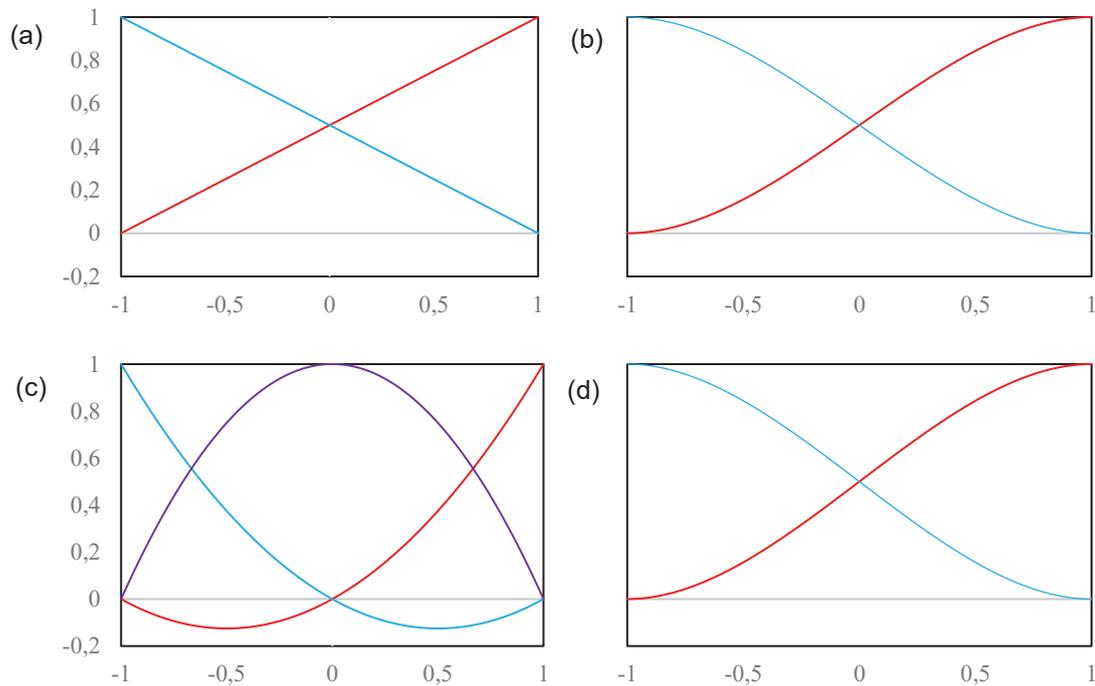
As PU Hermitianas cúbicas, por sua vez, são dadas pela Eq. (4.11). e as PU Trigonométricas correspondem a:

$$\mu_1 = \text{sen}^2\left(\frac{\pi(1 + \alpha)}{2}\right) \quad (5.13)$$

$$\mu_2 = \text{cos}^2\left(\frac{\pi(1 + \alpha)}{2}\right) \quad (5.14)$$

Os diferentes tipos de PU utilizadas estão representadas graficamente a na Figura 8.

FIGURA 8 – Partições da Unidade. (a) PU linear lagrangeana; (b) PU cúbica hermitiana; (c) PU quadrática lagrangeana; (d) PU trigonométrica



FONTE: o autor.

5.2.2 Bases de funções enriquecedoras para o MEFG

Três diferentes bases de funções foram selecionadas para compor os enriquecimentos do MEFG.

a) Funções enriquecedoras trigonométricas

A primeira base de funções enriquecedoras corresponde a um enriquecimento trigonométrico, proposto por Arndt (2009) e com bons resultados na análise dinâmica de vigas:

$$\gamma_j = \cos\left(j\pi \frac{1+\alpha}{2}\right) + \cos\left((j+2)\pi \frac{1+\alpha}{2}\right) \quad (5.15)$$

com $j = 1, 2, 3 \dots$

b) Funções enriquecedoras trigonométricas e hiperbólicas

O segundo tipo de funções enriquecedoras utilizado, também se baseou no trabalho de Arndt (2009). É uma base de funções fundamentadas no Método dos Modos Admissíveis, onde cada função enriquecedora contém funções trigonométricas e hiperbólicas ponderadas por coeficientes. Os coeficientes, por sua vez, associam-se aos níveis de enriquecimento e são obtidos através da solução analítica do problema de vibração 1D de vigas bi engastadas. As funções enriquecedoras apresentam a forma:

$$\gamma_j = \text{sen}\left(\lambda_j \frac{(1 + \alpha)}{2}\right) - \text{senh}\left(\lambda_j \frac{(1 + \alpha)}{2}\right) - q_i \left(\cos\left(\lambda_j \frac{(1 + \alpha)}{2}\right) - \cosh\left(\lambda_j \frac{(1 + \alpha)}{2}\right) \right) \quad (5.16)$$

onde:

$$q_j = \frac{\text{sen}(\lambda_j) - \text{senh}(\lambda_j)}{\cos(\lambda_j) - \cosh(\lambda_j)} \quad (5.17)$$

com $j = 1, 2, 3, \dots$

Os valores do parâmetro λ_j são retirados da literatura para a Tabela 1.

TABELA 1 – Frequências naturais analíticas para vigas bi engastadas

Frequência	Valor	Nível de Enriquecimento
λ_1	4,7300	1
λ_2	7,8532	2
λ_3	10,9956	3
λ_4	14,1372	4

FONTE: Adaptado de Carvalho (2011).

c) Enriquecimento polinomial

O último tipo de funções enriquecedoras para o MEFM utilizadas neste trabalho são os polinômios de Legendre (Eq. 4.18) já apresentados na descrição do

MEFH proposto por Bardell (1991). No presente trabalho serão também utilizados para compor um MEFG polinomial.

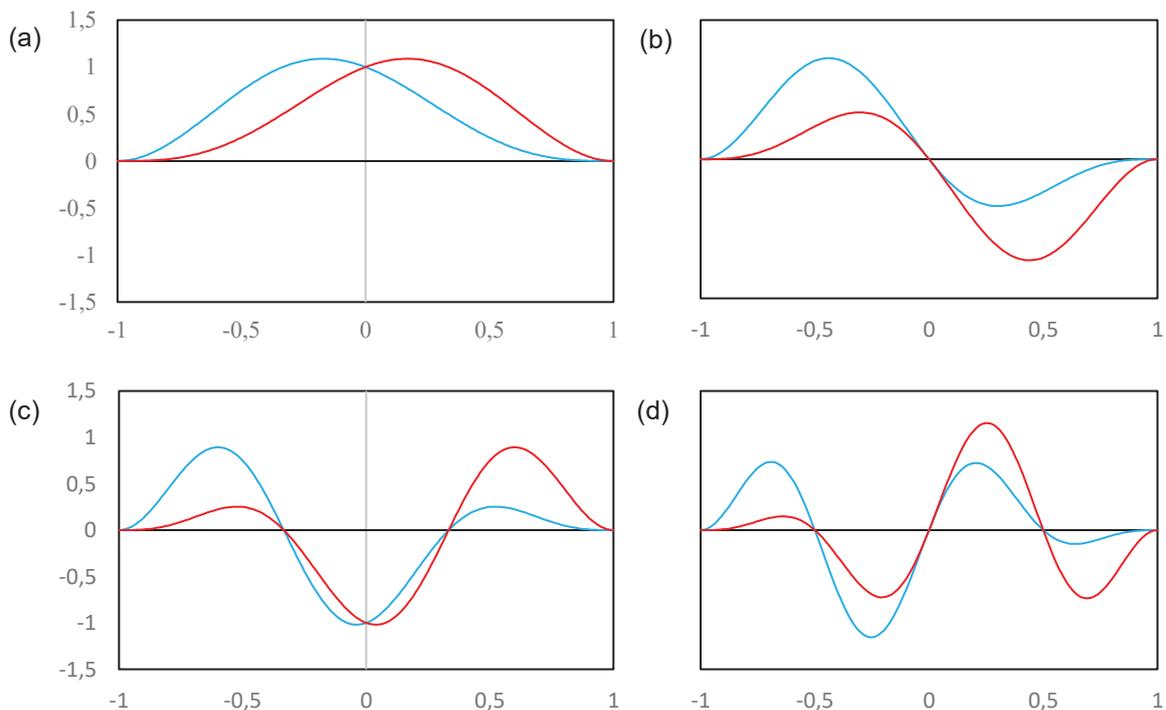
5.2.3 Formulações propostas

Iniciam-se, pois, os equacionamentos e representações gráficas das diferentes formulações propostas para o MEFG para análise de vibração livre de placas finas.

a) MEFG-TPUL

A primeira formulação apresentada é a adaptação direta da proposta de Arndt (2009) para vigas de Euler-Bernoulli e será denominada MEFG-TPUL. As funções enriquecedoras 1D utilizadas para compor as funções borda e bolha, são obtidas multiplicando-se o enriquecimento trigonométrico (Eq. (5.15)) pela PU Lagrangeana Linear (Eqs. (5.8) e (5.9)) Os quatro primeiros níveis de enriquecimento utilizados estão graficamente apresentados na Figura 9.

FIGURA 9 – Funções enriquecedoras para o MEFG-TPUL. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$; (d) $j=4$



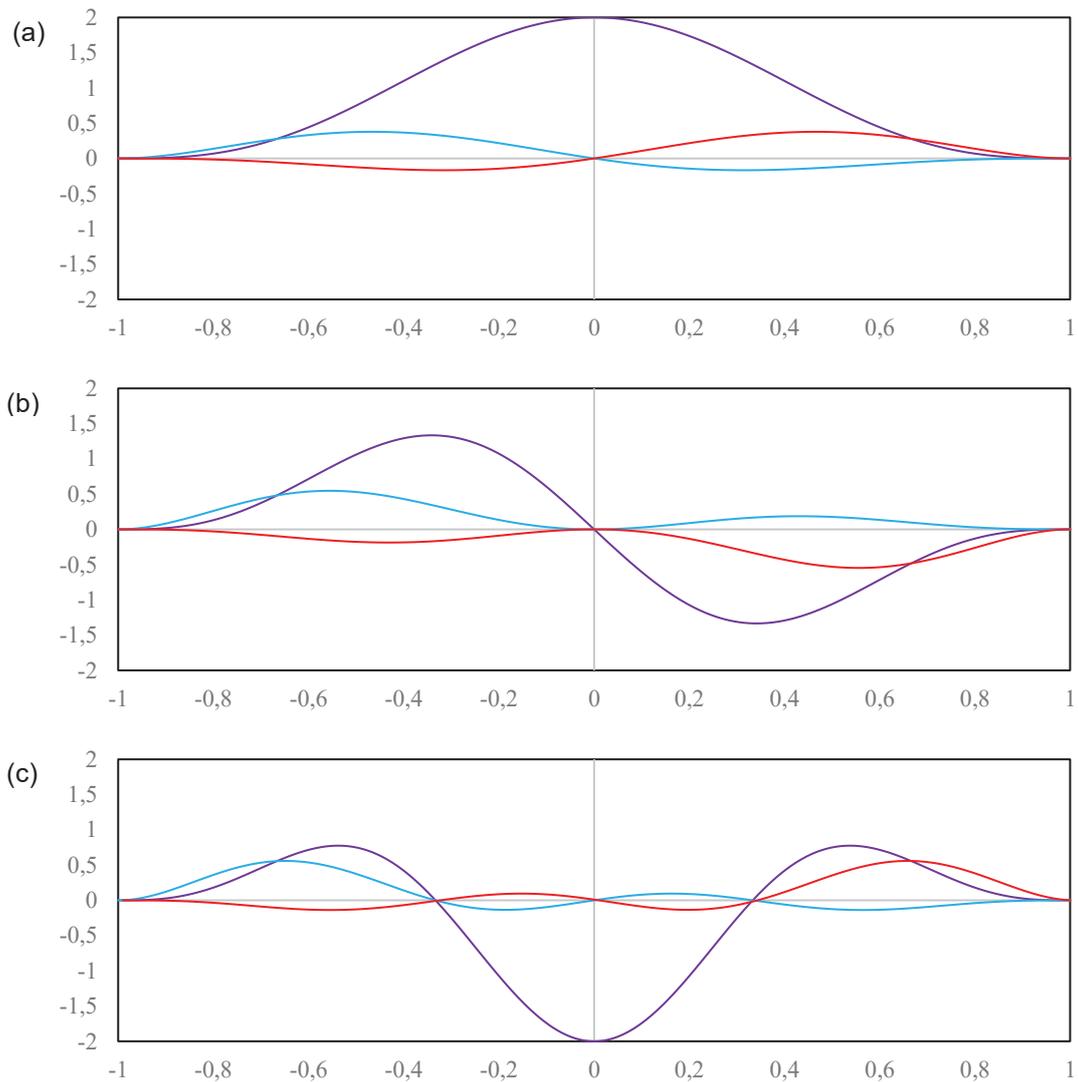
FONTE: o autor.

Percebe-se que cada novo nível de enriquecimento do MEFG-TPUL traz consigo duas funções enriquecedoras 1D. Cada par de funções 1D será utilizado para compor graus de liberdade borda e bolha no problema 2D.

b) MEFG-TPUQ

A segunda formulação do MEFG proposta é a extensão da proposta de Arndt (2009), utilizando PU Quadráticas Lagrangeanas a funções enriquecedoras trigonométricas e denominado MEFG-TPUQ. Nesta nova proposta, cada nível de enriquecimento adiciona três novas funções de forma em cada direção dadas pelo produto das PU das Eqs. (5.10), (5.11) e (5.12) pelas funções enriquecedoras da Eq. (5.15). As funções de enriquecimento do MEFG-TPUQ são apresentadas graficamente na Figura 10.

FIGURA 10 – Funções enriquecedoras para o MEFG-TPUQ. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$.

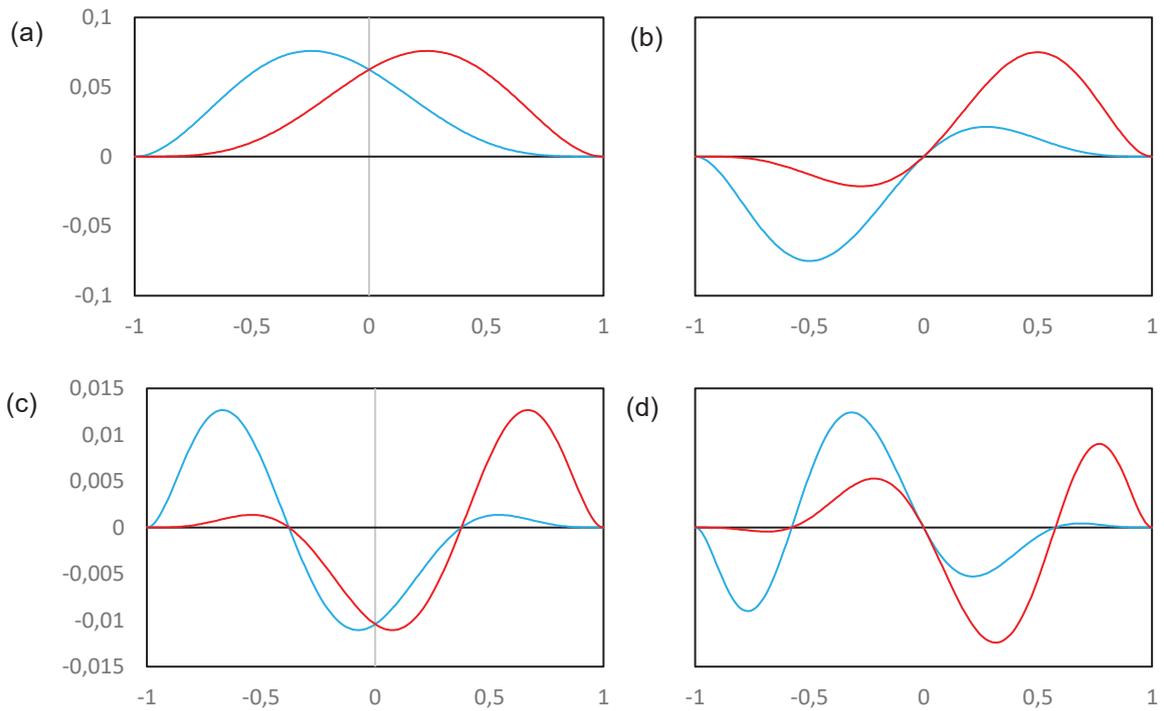


FONTE: o autor.

c) MEFG-TPUH

Seguindo a mesma linha proposta no MEFG-TPUQ, de variar a partição da unidade existente na proposta original do MEFG-TPUL, chega-se ao MEFG-TPUH. Nesta formulação, assim como no MEFG-TPUL, as funções 1D são inseridas aos pares na composição dos novos graus de liberdade borda e bolha. Tais funções são obtidas fazendo-se o produto dos polinômios cúbicos de Hermite (Eq. (4.11)) pelo enriquecimento trigonométrico (Eq. (5.15)) As funções do MEFG-TPUH estão representadas graficamente na Figura 11.

FIGURA 11 – Funções enriquecedoras para o MEFG-TPUH. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$; (d) $j=4$.

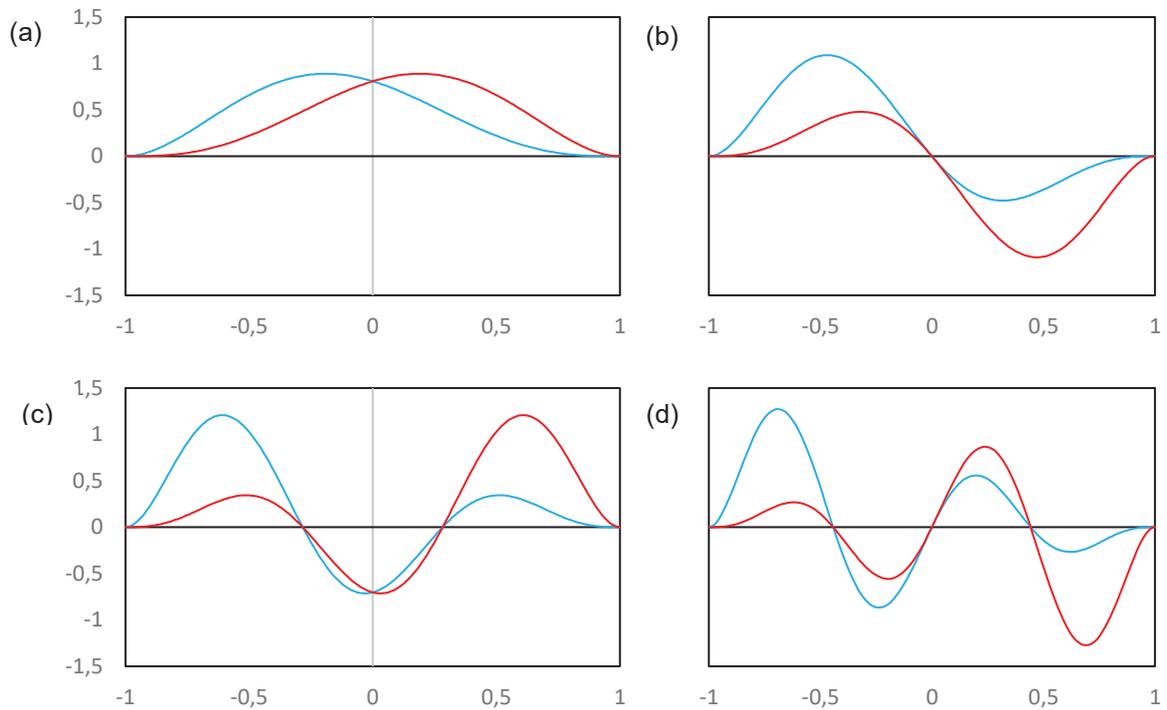


FONTE: o autor.

d) MEFG-MMAPUL

Partindo para as formulações que se baseiam no Método dos Modos Admissíveis (MMA), utilizando a PU Lagrangeana linear obtém-se um paralelo 2D para o MEFG proposto por Arndt (2009), aqui designado MEFG-MMAPUL. Nele, as funções da Eq. (5.16) são multiplicadas pelas PU das Eqs. (5.8) e (5.9). A representação gráfica dos níveis de enriquecimento do MEFG-MMAPUL é disposta na Figura 12.

FIGURA 12 – Funções enriquecedoras para o MEFG-MMAPUL. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$; (d) $j=4$



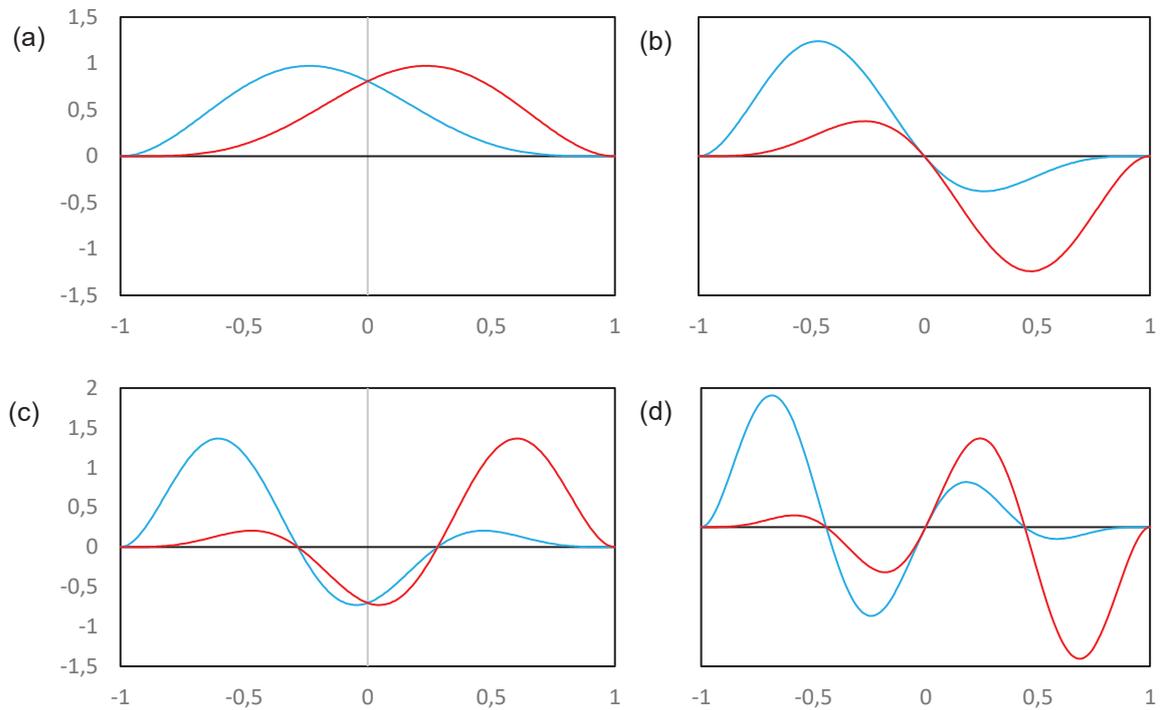
FONTE: o autor.

e) MEFG-MMAPUH

Alterando a PU utilizada, propõem-se a primeira formulação alternativa ao trabalho de Arndt (2009), também utilizando funções enriquecedoras baseadas no Método dos Modos Admissíveis. A formulação recebe o nome de MEFG-MMAPUH, pois utiliza PU Hermitianas Cúbicas. Nesta formulação os enriquecimentos são obtidos através das funções enriquecedoras da Eq. (5.16) multiplicadas pelas PU da Eq. (4.11).

A representação gráfica das funções de enriquecimento 1D utilizadas no trabalho estão dispostos na Figura 13.

FIGURA 13 – Funções enriquecedoras para o MEFG-MMAPUH. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$; (d) $j=4$.



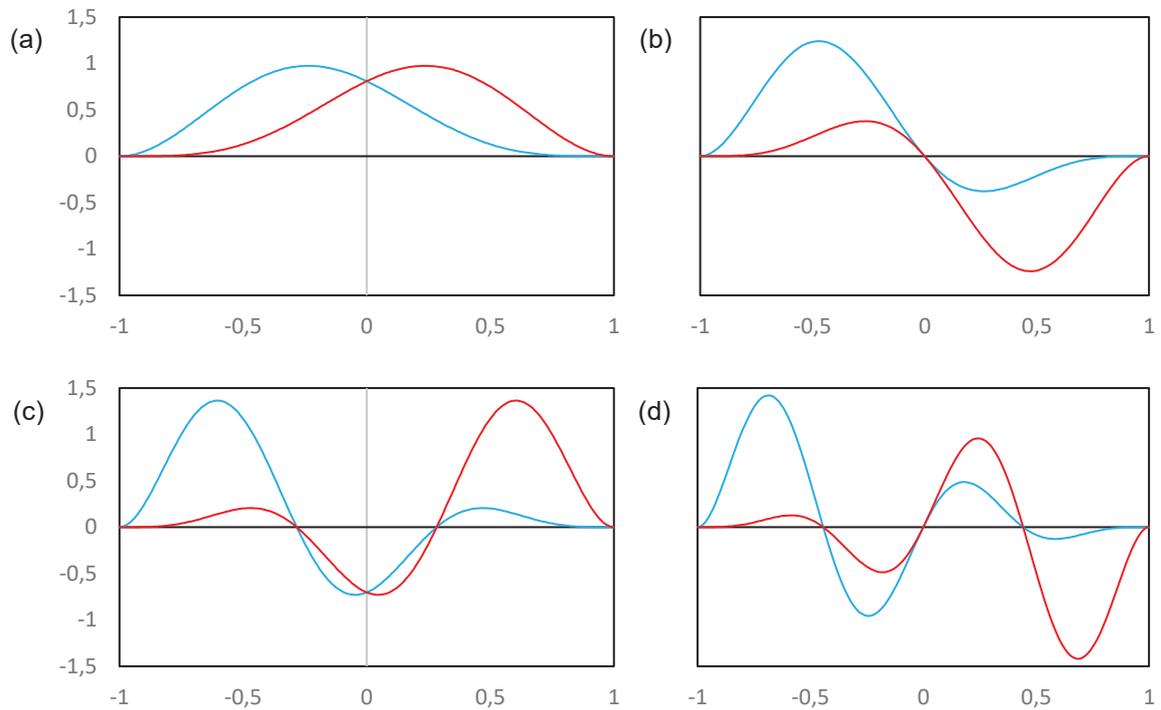
FONTE: O autor.

f) MEFG-MMAPUT

A terceira e última formulação do MEFG baseada no Método dos Modos Admissíveis é obtida através da utilização de PU trigonométricas, multiplicando-se as funções das Eq. (5.16) pelas PU das Eq. (5.13) e Eq. (5.14). Tal formulação será aqui denominada de MEFG-MMAPUT.

A representação gráfica das funções enriquecedoras do MEFG-MMAPUT está exposta na Figura 14.

FIGURA 14 – Funções enriquecedoras para o MEFG-MMAPUT. (a) $j=1$; (b) $j=2$; (c) $j=3$; (d) $j=4$.

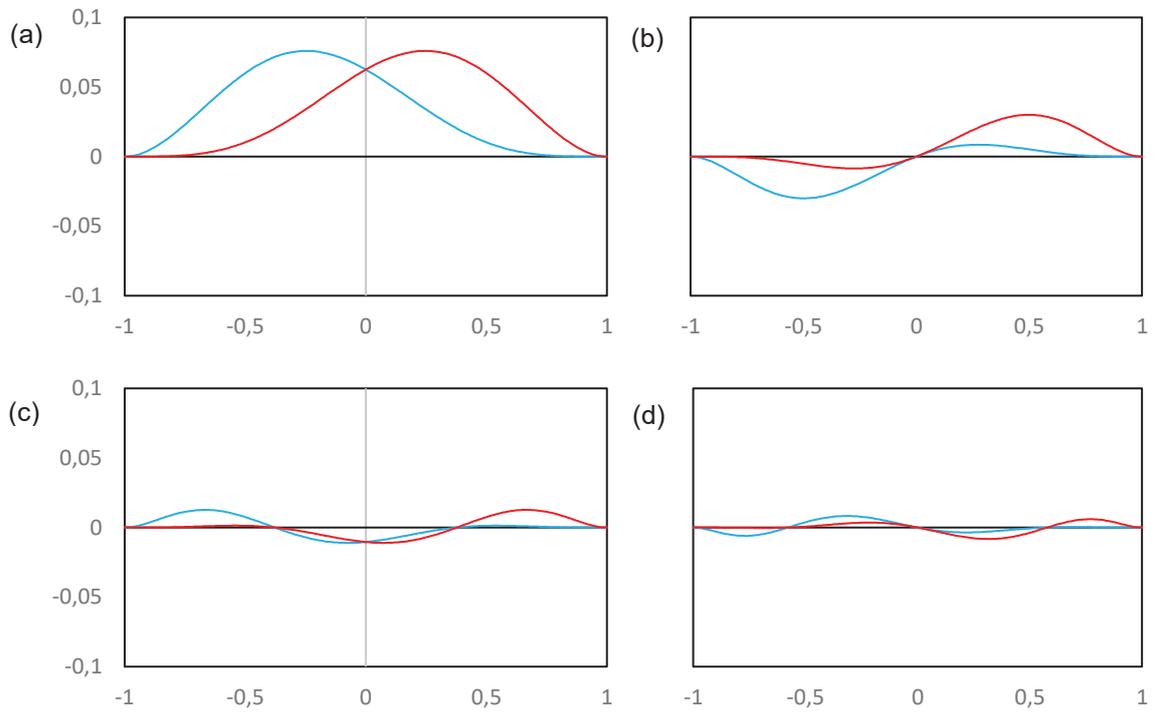


FONTE: O autor.

g) MEFG-PPUT

Por fim, a última formulação proposta para o MEFG neste trabalho utiliza funções enriquecedoras 1D polinomiais (Eq. (5.18)) multiplicadas por PU Trigonométricas (Eq. (5.13) e Eq. (5.14)), nomeado MEFG-PPUT. O uso de polinômios de Legendre no MEFG é motivado pelos excelentes resultados observados por Bardell (1991) no MEFH polinomial.

Graficamente, na Figura 15, representam-se as funções enriquecedoras 1D para os quatro primeiros níveis do MEFG-PPUT:

FIGURA 15 – Funções enriquecedoras para o MFG-PPUT. (a) $j=5$; (b) $j=6$; (c) $j=7$; (d) $j=8$.

FONTE: O autor.

6 ESTUDOS DE CASO E ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

Este capítulo é destinado a apresentar os resultados obtidos pela aplicação dos métodos numéricos na análise de vibração livre em diversas placas e realizar a análise de convergência em relação às soluções analíticas. Primeiramente, são definidas as propriedades e condições de contorno que delimitam o escopo da análise, na sequência, as soluções de referência obtidas da literatura são apresentadas e servirão para avaliar a precisão de cada uma das propostas de formulação para o MEF.

6.1 PROPRIEDADES MECÂNICAS E CONDIÇÕES DE CONTORNO

As propriedades físicas e geométricas utilizadas para formular os exemplos estudados e, posteriormente, as condições de contorno avaliadas são apresentadas na presente seção.

6.1.1 Propriedades Físico-Geométricas de Referência

Todas as propriedades físicas e geométricas do presente trabalho foram extraídas integralmente de Petyt (2010) e estão dispostas na Tabela 2.

TABELA 2 – Propriedades físico-geométricas

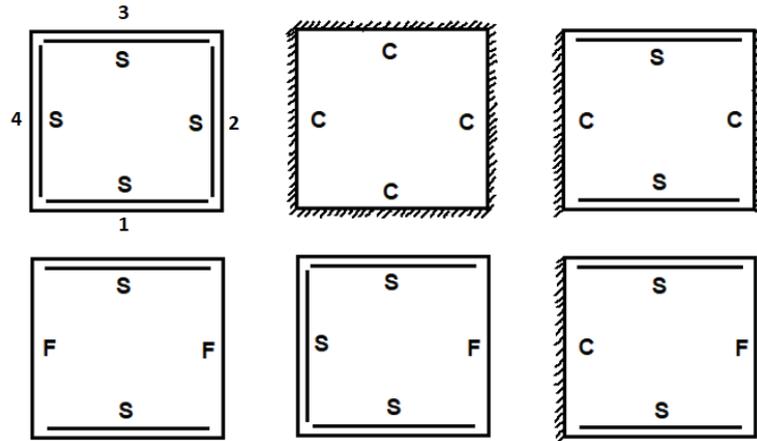
Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Altura da placa	L_y	0,3048	m
Largura da placa	L_x	0,3048	m
Espessura da placa	h	0,0032766	m
Coefficiente de Poisson	ν	0,3	---
Densidade da Placa	ρ	2821	kg/m ³
Modulo de Young	E	73084000000	Pa

FONTE: Adaptado de Petyt (2010).

6.1.2 Condições de Contorno

Esquemáticamente, a Figura 16 traz, para fins de ilustração, as condições de contorno representadas por diferentes tipos de linhas nas bordas.

FIGURA 16 – Esquema das condições de contorno avaliadas



FONTE: o autor.

As nomenclaturas “S”, “C” ou “F” referem-se respectivamente aos termos em inglês “simple supported”, “clamped” e “free edge”. A descrição completa das condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann associadas a cada uma destas condições de contorno pode ser encontrada em Leissa (1969).

O presente trabalho constitui uma análise que contempla seis diferentes condições de contorno. A Tabela 3 contém a nomenclatura das condições de contorno utilizando a notação de Leissa (1969), indicando a distribuição das imposições em cada uma das bordas da placa, juntamente com a fonte de obtenção dos valores de referência para cada um dos casos.

TABELA 3 – Siglas e nomenclaturas para as condições de contorno

Sigla	Fonte	Borda 1 e 3	Borda 2 e 4
SSSS	Analíticos	Simplemente apoiadas	Simplemente apoiadas
CCCC	Literatura	Engastadas	Engastadas
CSCS	Analíticos	Simplemente apoiadas	Engastadas
FSFS	Analíticos	Simplemente apoiadas	Livres
SSFS	Analíticos	Simplemente apoiadas	Simplemente apoiada/Livre
CSFS	Analíticos	Simplemente apoiadas	Engastada/Livre

FONTE: o autor.

Na Tabela 3 os valores designados por “analíticos” na coluna “fonte” são valores para os quais existem expressões analíticas para o cálculo das frequências naturais de vibração. No caso da condição CCCC, denota-se por “Literatura” um conjunto de soluções numéricas consagradas retiradas de Leissa (1969).

6.2 EQUAÇÕES DE FREQUÊNCIA E SOLUÇÕES DE REFERÊNCIA

Atualmente, existe uma formulação analítica que contempla algumas condições de contorno para o problema de vibrações livres em placas finas denominada de elasticidade simplética. Denomina-se elasticidade simplética a formulação de problemas de elasticidade em espaços vetoriais simpléticos. Yao, Zhong e Lim (2009) definem como espaço simplético uma geometria fundamentada em um produto interno antissimétrico, designado produto interno simplético. Utilizando-se desta nova geometria, Yao, Zhong e Lim (2009) reescrevem os problemas clássicos de elasticidade em problemas essencialmente de autovalores. A formulação dos problemas em elasticidade simplética é substancialmente mais complexa do que o tratamento convencional. Contudo, uma vez formulada, torna-se possível abranger uma maior gama de problemas, encontrando suas respectivas soluções analíticas.

Lim *et al.* (2009) aplicaram os conceitos presentes em Yao, Zhong e Lim (2009) para o problema de vibração livre de placas de Kirchhoff-Love. Os autores conseguiram obter com sucesso soluções analíticas para placas com duas bordas paralelas simplesmente apoiadas. As soluções analíticas apresentadas no presente trabalho seguirão a proposta estabelecida por Lim *et al.* (2009).

De acordo com a proposta estabelecida por Lim *et al.* (2009), define-se que as bordas tomadas como simplesmente apoiadas, são as bordas com $y = 0$ e $y = L_y$. A imposição das demais condições de contorno se dá nos contornos $x = 0$ e $x = L_x$. Segundo Lim *et al.* (2009) estas soluções seguem a forma de Levy e satisfazem todas as condições de contorno impostas.

6.2.1 Placa SSSS

Segundo Lim *et al.* (2009), a equação de frequências da placa SSSS obtida através da Elasticidade Simplética é:

$$\sinh\left(\frac{L_x}{2}\omega_n\right)\cosh\left(\frac{L_x}{2}\omega_n\right)\sinh\left(\frac{L_x}{2}\omega'_n\right)\cosh\left(\frac{L_x}{2}\omega'_n\right) = 0 \quad (5.1)$$

Resolvendo esta equação em termos de ω_n e ω'_n , parâmetros da elasticidade simplética diretamente relacionados ao autovalor usado para o cálculo de λ_n , a expressão encontrada por Lim *et al.* (2009) fornece os valores analíticos para as dez primeiras frequências quando aplicado à uma placa com as propriedades utilizadas no presente trabalho (ver Tabela 4). Como a solução aproximada do problema é encontrada para os autovalores da forma $\frac{\lambda_n^2 \rho h}{D}$ (Eq. (3.29)), o cálculo das frequências naturais aproximadas de vibração λ_n é feito através da raiz quadrada da divisão dos valores fornecidos pelo produto ρh e pela multiplicação da rigidez flexural D .

TABELA 4 – Frequências analíticas da análise simplética para a placa SSSS

Modo de Vibração	Frequência	Autovalor associado	Frequência (rad/s)
1º	λ_1	1072,31291	19,7392088
2º	λ_2	2680,782276	49,34802201
3º	λ_3	2680,782276	49,34802201
4º	λ_4	4289,251642	78,95683521
5º	λ_5	5361,564552	98,69604401
6º	λ_6	5361,564552	98,69604401
7º	λ_7	6970,033918	128,3048572
8º	λ_8	6970,033918	128,3048572
9º	λ_9	9114,659739	167,7832748
10º	λ_{10}	9114,659739	167,7832748

FONTE: Adaptado de Lim *et al.* (2009).

6.2.2 Placa CSCS

Prosseguindo a análise com a condição de contorno CSCS, a equação de frequência obtida por Lim *et al.* (2009) é:

$$2\omega_n \omega'_n (\cosh(L_x \omega_n) \cosh(L_x \omega'_n) - 1) = 0 \quad (5.2)$$

Resolver esta equação em termos de ω_n e ω'_n , fornece as seis primeiras frequências naturais apresentadas na Tabela 5.

TABELA 5 – Frequências analíticas da análise simplética para a placa CSCS.

Modo de Vibração	Frequência	Autovalor associado	Frequência (rad/s)
1º	λ_1	3812.5834	28.95085
2º	λ_2	13631.857	54.74307
3º	λ_3	21862.586	69.327
4º	λ_4	40695.251	94.58527
5º	λ_5	47526.528	102.2162
6º	λ_6	75808.677	129.0955

FONTE: Adaptado de Lim et al. (2009).

6.2.3 Placa FSFS

Para a terceira condição de contorno, a placa FSFS, a equação de frequência fornecida por Lim et al. (2009) é:

$$2\omega_n\omega'_n(k^4 - (1 - \nu^2))^2(\cosh(L_x\omega_n)\cosh(L_x\omega'_n) - 1) = 0 \quad (5.3)$$

onde o parâmetro k é dado por:

$$k^2 = \frac{2\omega_n L_y}{n^2 \pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (5.4)$$

As seis primeiras frequências analíticas obtidas por Lim et al. (2009) estão apresentadas na Tabela 6.

TABELA 6 – Frequências analíticas da análise simplética para a placa FSFS.

Modo de Vibração	Frequência	Autovalor associado	Frequência (rad/s)
1º	λ_1	421,9291	9,631
2º	λ_2	1184,192	16,13477
3º	λ_3	6135,282	36,7256
4º	λ_4	6898,868	38,944
5º	λ_5	9936,581	46,738
6º	λ_6	22762,86	70,74

FONTE: Adaptado de Lim et al. (2009).

6.2.4 Placa SSFS

Para a condição SSFS, a equação de frequência obtida por Lim et al. (2009), visto que agora duas bordas paralelas do elemento não estão mais sujeitas a mesmas condições de contorno, é:

$$\omega'_n(k^2 - (1 - \nu^2))^2 \sinh(L_x \omega_n) \cosh(L_x \omega'_n) = 0 \quad (5.5)$$

e as frequências analíticas obtidas estão apresentadas na Tabela 7.

TABELA 7 – Frequências analíticas da análise simplética para a placa SSFS.

Modo de Vibração	Frequência	Autovalor associado	Frequência (rad/s)
1º	λ_1	621,0395	11,68453
2º	λ_2	3504,45	27,7563
3º	λ_3	7720,038	41,1966
4º	λ_4	15869,55	59,0655
5º	λ_5	17407,04	61,8606
6º	λ_6	37086,45	90,29408

FONTE: Adaptado de Lim et al. (2009).

6.2.5 Placa SCSF

Por fim, o último tipo de condição, a placa SCSF representa uma combinação complexa de condições possível para a qual a análise simplética é capaz de fornecer equações de frequência (Lim et al., 2009) na forma:

$$2\omega_n \omega'_n \left((k^4 - (1 - \nu^2))^2 + (k^4 + (1 - \nu^2))^2 \cosh(L_x \omega_n) \cosh(L_x \omega'_n) \right) \quad (5.6)$$

$$+ (\omega_n^2 + \omega_n'^2) \left(\left(\frac{1 - 2\nu}{k} \right) - (1 - \nu^2) \right) \sinh(L_x \omega_n) \sinh(L_x \omega'_n)$$

$$= 0$$

As primeiras seis frequências naturais analíticas obtidas estão apresentadas na Tabela 8.

TABELA 8 – Frequências analíticas da análise simplética para a placa CSFS.

Modo de Vibração	Frequência	Autovalor associado	Frequência (rad/s)
1º	λ_1	732,2632	12,68777
2º	λ_2	4974,923	33,07081
3º	λ_3	7912,133	41,70599
4º	λ_4	18085,35	63,05435
5º	λ_5	23906,79	72,4957
6º	λ_6	37356,32	90,62201

FONTE: Adaptado de Lim et al. (2009).

6.2.6 Placa CCCC

Devido à limitação da abordagem simplética em exigir que duas bordas paralelas sejam obrigatoriamente simplesmente apoiadas, torna-se necessário recorrer a uma via alternativa de obtenção de valores de referência para a placa CCCC. Pelo histórico, durante os últimos séculos, a obtenção de uma metodologia analítica que permita a obtenção exata de todas as frequências naturais de vibração de uma placa sujeita ao pleno engastamento tem sido objeto de intenso estudo por parte de físicos e matemáticos. Infelizmente, ainda atualmente, não é possível se dizer que exista uma metodologia completamente satisfatória (WU, LIU, CHEN, 2007).

Portanto, como soluções de referência desta placa serão utilizados os valores numéricos obtidos por Leissa (1969). Estes valores são baseados em séries de Fourier com grande precisão. Os resultados estão dispostos na Tabela 9.

TABELA 9 – Frequências numéricas de referência para a placa CCCC.

Modo de Vibração	Frequência	Autovalor associado	Frequência (rad/s)
1º	λ_1	1954,859783	35,9851915
2º	λ_2	3987,02844	73,39349
3º	λ_3	3987,02844	73,39349
4º	λ_4	5878,75441	108,21651
5º	λ_5	7147,993539	131,58075
6º	λ_6	7950,067	132,2017
7º	λ_7	8963,41764	164,9992
8º	λ_8	8963,41764	164,9992
9º	λ_9	11436,38767	210,5218
10º	λ_{10}	11436,38767	210,5218

FONTE: Adaptado de Leissa (1969).

6.3 ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA PARA FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO

O estudo de convergência se baseou no cálculo do erro relativo da solução numérica obtida, em relação à solução de referência, na forma:

$$e = \frac{\lambda_{\text{calc}} - \lambda_{\text{ref}}}{\lambda_{\text{ref}}} \quad (5.7)$$

onde e representa o erro relativo, λ_{calc} os valores calculados de frequências naturais e λ_{ref} os valores de referência para uma dada frequência. Os erros foram dispostos nas ordenadas de um gráfico log-log com abscissas iguais aos números de graus de liberdade livres do sistema, ou seja, a magnitude do problema de autovalores resolvido computacionalmente.

Inicialmente, a análise de convergência foi estruturada contemplando todas as abordagens do MEFG apresentadas no capítulo 5. Nesta etapa, todas as propostas foram utilizadas para modelar placas sujeitas a condições de contorno do tipo SSSS e CCCC. Dentre este conjunto de metodologias testadas, aquelas que se mostraram mais precisas, foram, então, testadas quanto à sua capacidade de representar as frequências naturais de vibração quando condições distintas forem impostas aos pares de bordas paralelas, representadas pelas placas CSCS e FSFS. Realizou-se então uma segunda seleção das metodologias mais precisas. Por fim, foi realizada uma nova análise aplicando-se condições de contorno ainda mais complexas, combinando bordas opostas com condições diferentes (condições SSFS e CSFS), para as abordagens mais precisas das análises anteriores.

As análises de espectro de frequência e de estabilidade numérica também foram realizadas paralelamente ao desenvolvimento das etapas da análise de convergência para todas as metodologias classificadas como mais promissoras.

Resumidamente, as metodologias do MEFG testadas são sete. A Tabela 10 elenca cada uma das metodologias e suas respectivas siglas utilizadas.

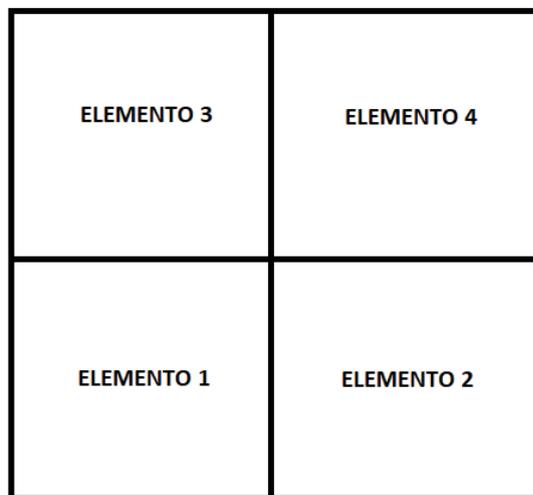
TABELA 10 – Esquema geral dos enriquecimentos propostos para o MEFG

Enriquecimento	Partição da Unidade utilizada	Sigla
Trigonométrico	Linear Lagrangeana	MEFG-TPUL
Trigonométrico	Quadrática Lagrangeana	MEFG-TPUQ
Trigonométrico	Cúbica Hermitiana	MEFG-TPUH
Método dos Modos Admissíveis	Linear Lagrangeana	MEFG-MMAPUL
Método dos Modos Admissíveis	Cúbica Hermitiana	MEFG-MMAPUH
Método dos Modos Admissíveis	Trigonométrica	MEFG-MMAPUT
Polinomial	Trigonométrica	MEFG-PPUT

FONTE: o autor.

Para incorporação dos enriquecimentos por funções borda em todas as condições de contorno escolhidas, fixou-se a utilização de uma malha com quatro elementos (Figura 17). Uma vez fixada a malha, o aumento do número de graus de liberdade se deu única e exclusivamente pela inserção de novos níveis de enriquecimento.

FIGURA 17 - Malha utilizada nos métodos enriquecidos.



Fonte: O autor.

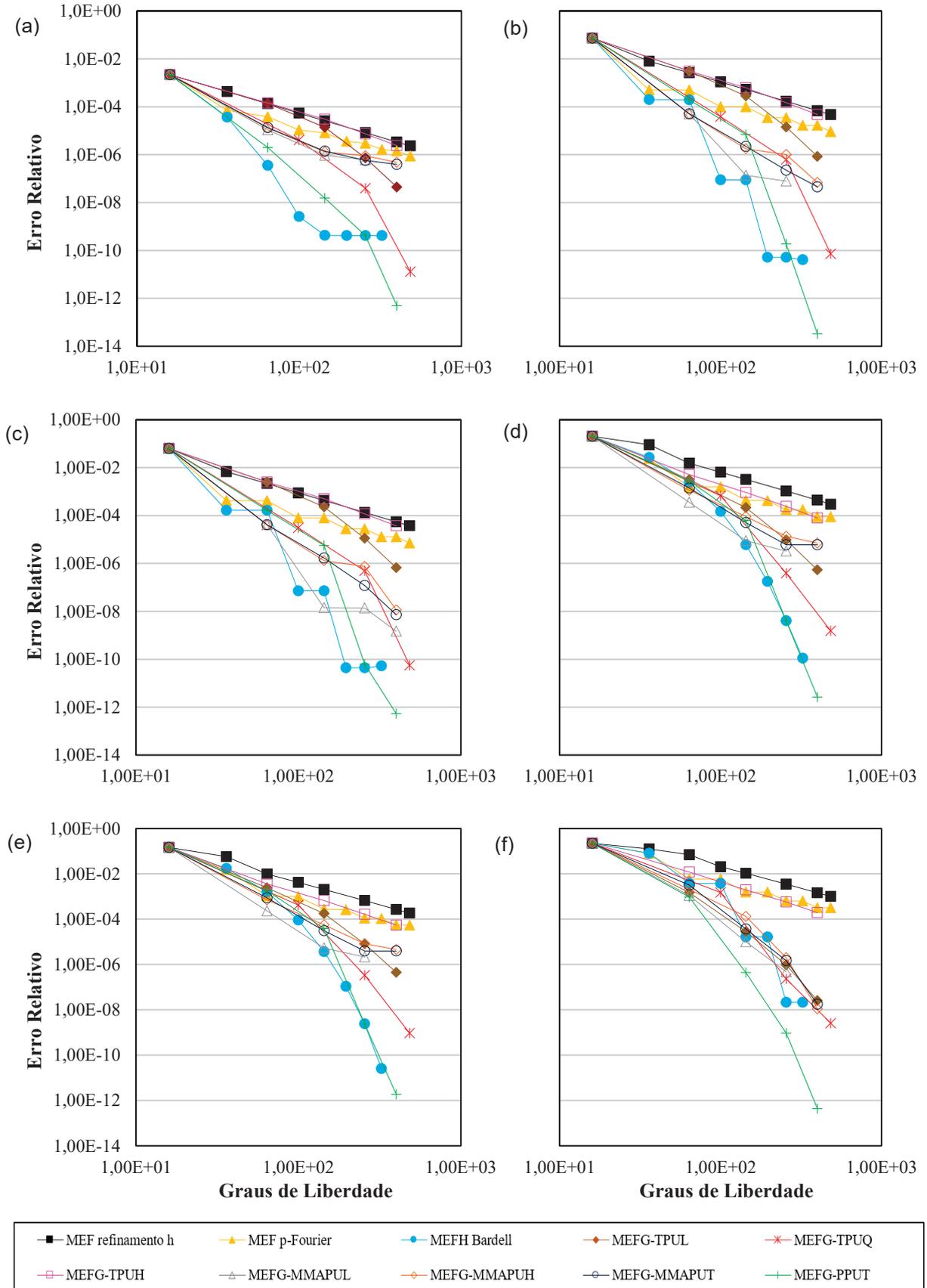
Para a obtenção das matrizes de massa e rigidez locais utilizou-se integração numérica via quadratura de Gauss-Legendre. A rotina desenvolvida utilizou 30 pontos de Gauss em cada uma das direções, totalizando 900 pontos. O grande número de pontos de Gauss foi utilizado para assegurar a precisão na integração das funções trigonométricas e hiperbólicas envolvidas.

Por fim, os autovalores calculados para obtenção das frequências naturais de vibração foram obtidos numericamente através do módulo “linalg” da biblioteca “numpy” da linguagem Python.

6.3.1 Convergência para Placa SSSS

Os resultados relativos a análise de convergência da placa SSSS estão dispostos na Figura 18.

FIGURA 18 - Análise de Convergência SSSS: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª e 3ª Frequências, (c) 4ª Frequência, (d) 5ª e 6ª Frequências, (e) 7ª e 8ª Frequências, (f) 9ª e 10ª Frequências.



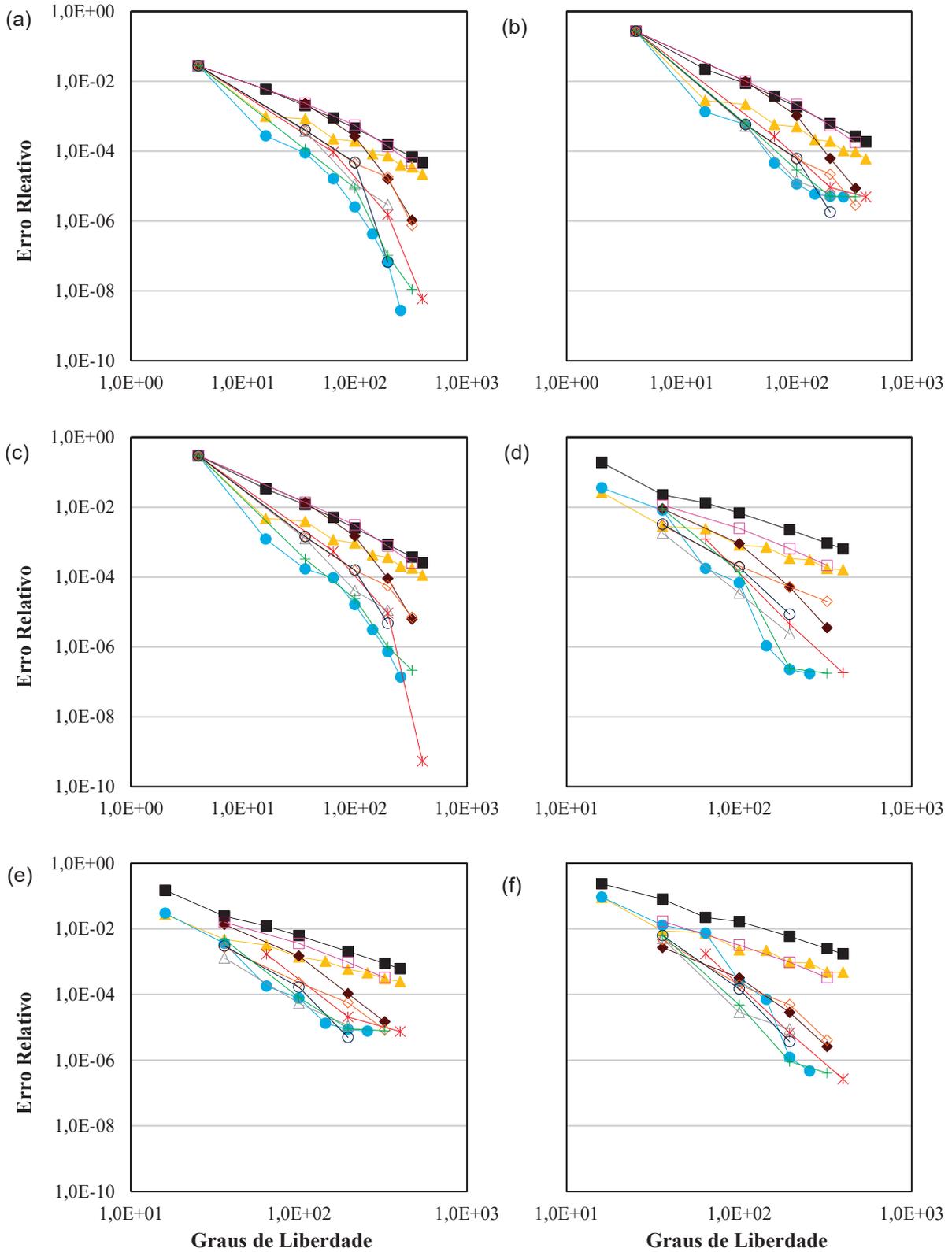
Fonte: O autor.

Observa-se na Figura 18 que, para a placa SSSS, o refinamento h do MEF revelou a menor taxa de convergência em todas as frequências avaliadas, atingindo seus melhores resultados com erros da ordem de 10^{-4} . Com comportamentos muito semelhantes ao MEF convencional, o MEF p-Fourier e o MEFG-TPUH pouco se diferenciaram da metodologia não enriquecida, mantendo-se com resultados ligeiramente melhores, no melhor dos cenários, cerca de dez vezes menores do que os do MEF h . Com uma ligeira melhora em relação ao MEFG-TPUH, o MEFG-TPUL apresenta um leve aumento na taxa de convergência a medida que se aumenta o número de graus de liberdade. Apesar dessa característica, a melhora na precisão torna-se expressiva apenas nas duas frequências mais altas. Embora, para algumas frequências (1ª, 5ª e 6ª), as três metodologias baseadas no MMA apresentassem erros pouco menores do que o MEF p-Fourier, para frequências mais altas, como a 4ª, 9ª e 10ª, os métodos demonstraram potencial em fornecer bons resultados, com erros da ordem de até 10^{-9} . Diferentemente do MEFG-TPUH e o MEFG-TPUL, o MEFG-TPUQ, apresentou convergência e precisão com comportamentos semelhantes para todo o horizonte de frequências avaliado, atingindo valores de erro inferiores até a 10^{-10} . Por fim, as posições de destaque para a modelagem da placa SSSS pertencem ao MEFH polinomial enriquecido com funções borda e ao MEFG-PPUT. Ambas as metodologias exibiram os melhores resultados em todas as frequências, com exceção da 1ª. Comparando os dois métodos entre si, verifica-se que as repostas fornecidas pelo MEFG-PPUT são melhores. Também se pontua um aumento progressivo da qualidade das repostas do MEFG-PPUT a medida em que as frequências crescem.

6.3.2 Convergência para Placa CCCC

Os resultados obtidos para a análise de convergência da placa CCCC estão dispostos na Figura 19.

FIGURA 19 - Análise de Convergência CCCC: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª e 3ª Frequência, (c) 4ª Frequência, (d) 5ª Frequência, (e) 7ª e 8ª Frequência, (f) 9ª e 10ª Frequência.



■	MEF refinamento h	▲	MEF p-Fourier	●	MEFH Bardell	◆	MEFG-TPUL	*	MEFG-TPUQ
□	MEFG-TPUH	△	MEFG-MMAPUL	◇	MEFG-MMAPUH	○	MEFG-MMAPUT	+	MEFG-PPUT

Fonte: O autor.

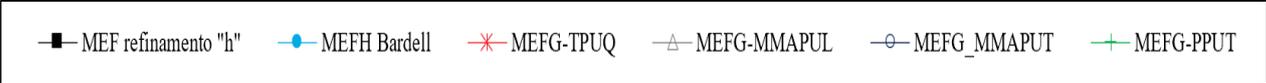
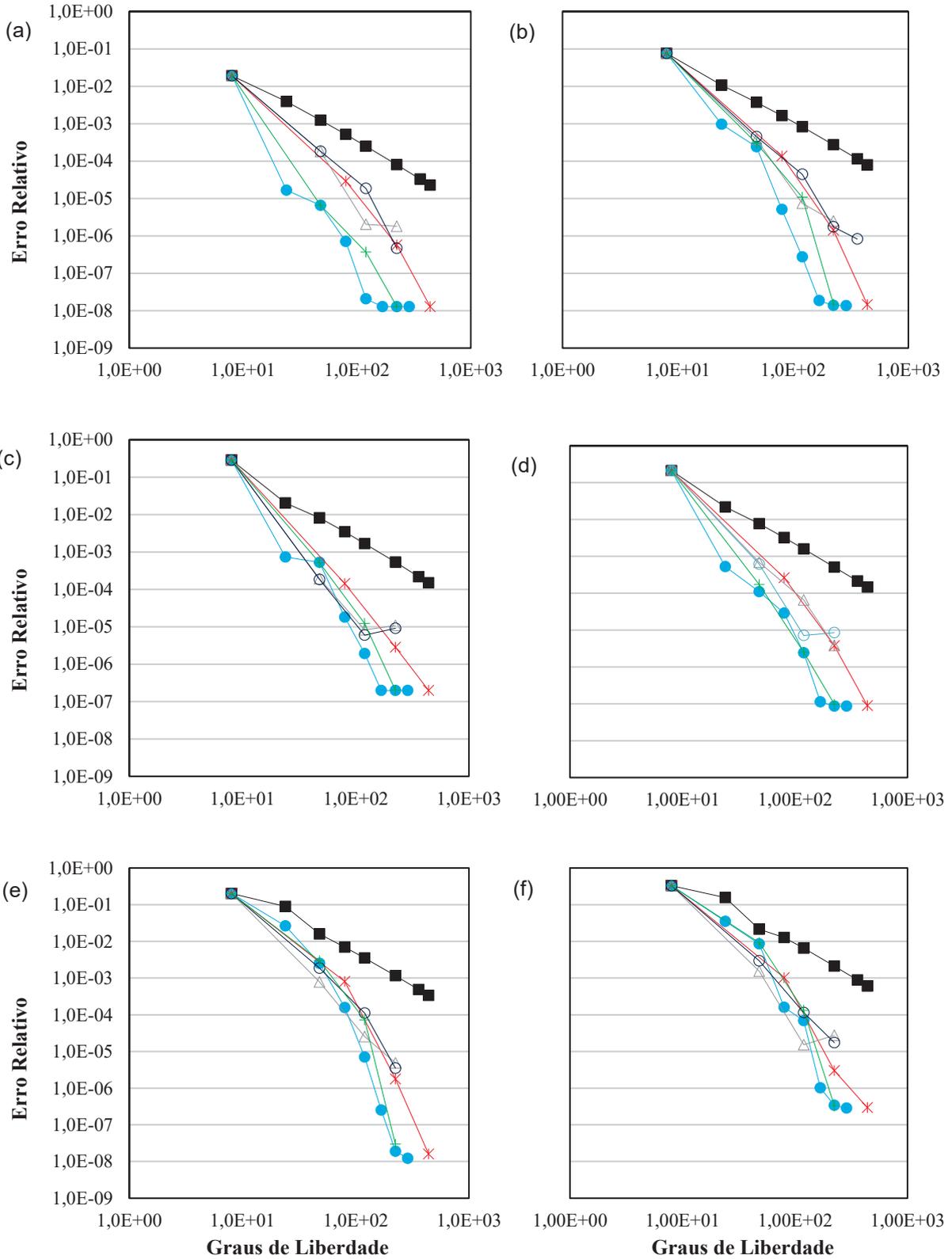
Observando a Figura 19, percebe-se que os resultados para a condição CCCC, quando comparados a condição SSSS, revelaram erros maiores para todas as frequências naturais. Em termos qualitativos, propriedades análogas para o refinamento h do MEF, MEF p-Fourier e MEFG-TPUH foram observadas em relação a placa SSSS, mostrando estas como as abordagens menos precisas. Algumas das divergências qualitativas manifestam-se no comportamento de outros métodos, como, por exemplo, a grande proximidade entre o MEFG-TPUL e o MEFG-MMAPUH em todas as dez frequências. Com uma melhora relativa na sua convergência, o MEFG-MMAPUL, apresentou precisão e taxas de convergência semelhantes ao MEFG-TPUQ em algumas frequências, com erros inferiores a 10^{-8} nas frequências associadas a modos simétricos. Percebe-se que, desde a primeira frequência, o MEFG-MMAPUT apresentou resultados muito bons. Para a 2^a, 7^a e 8^a frequências, os valores fornecidos pelo MEFG-MMAPUT superaram a qualidade dos resultados obtidos pelas metodologias MEFH polinomial enriquecido com funções borda e MEFG-PPUT, duas formulações com resultados também muito bons. Para finalizar, o método mais eficiente para a condição CCCC foi o MEFG-TPUQ, alcançando erros próximos à 10^{-10} .

A ideia de comparar as informações da Figura 17 com a Figura 18, é elencar metodologias mais promissoras, norteando a análise para condições de contorno potencialmente mais complexas. Percebe-se que, para as condições de contorno em questão, algumas abordagens se mostraram menos precisas: refinamento h do MEF, MEF p-Fourier e MEFG-TPUH. Com resultados um pouco mais precisos, o MEFG-TPUL e o MEFG-MMAPUH atingiram valores de erro bons, mas que não os classificaram como abordagens mais promissoras. Por fim, como as melhores abordagens, cinco métodos foram elencados: MEFG-MMAPUL, MEFG-MMAPUT, MEFG-TPUQ, MEFG-PPUT e MEFH polinomial enriquecido com funções borda. Estes, portanto, são os métodos que continuarão sendo analisados nas duas próximas condições de contorno: a placa CSCS e a placa FSFS.

6.3.3 Convergência para Placa CSCS

A figura 20 contém os resultados da placa CSCS.

FIGURA 20 - Análise de Convergência CSCS: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª Frequência, (c) 3ª Frequência, (d) 4ª Frequência, (e) 5ª Frequência, (f) 6ª Frequência.



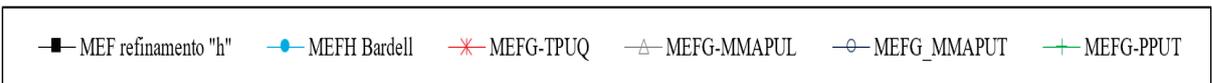
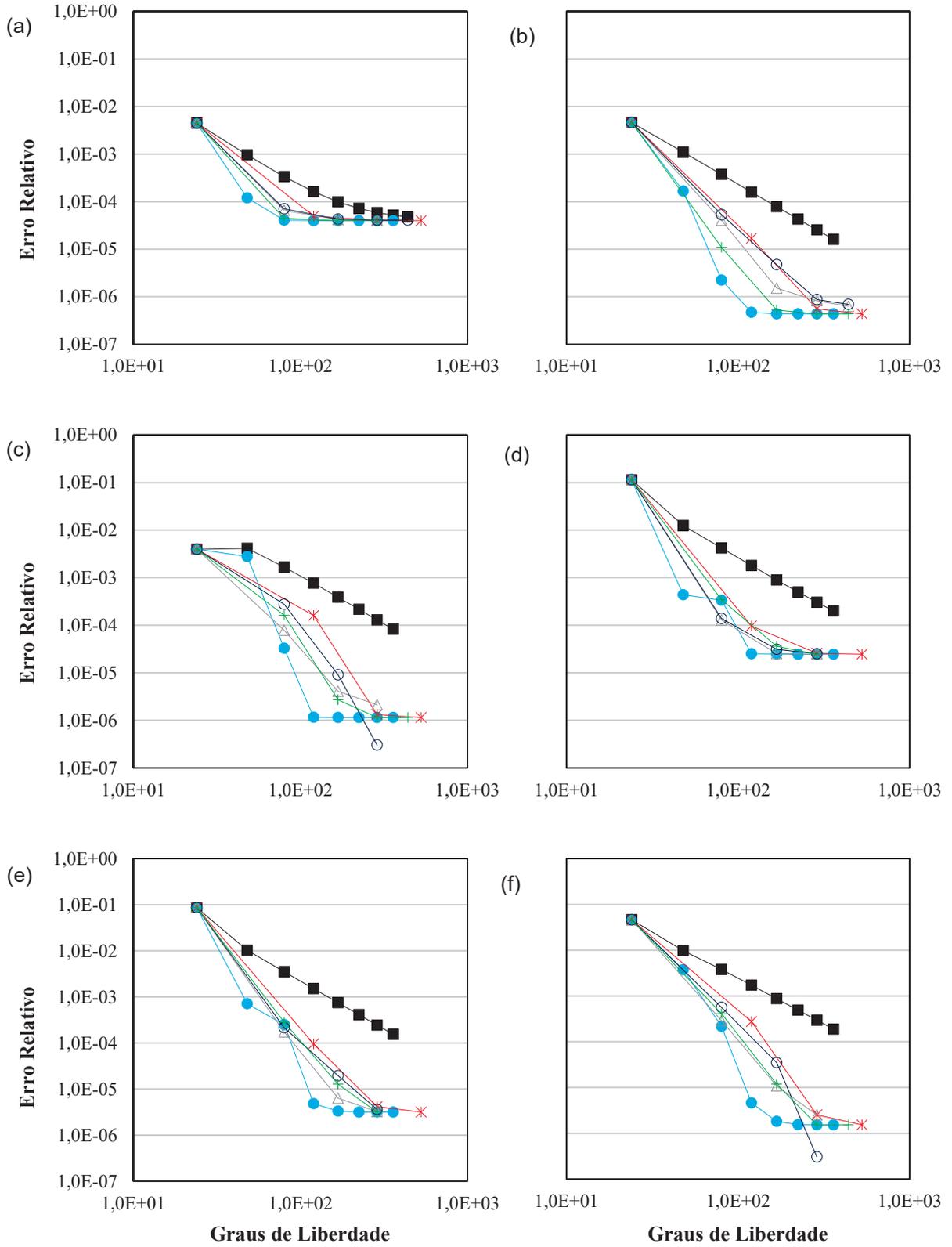
Fonte: O autor.

Na Figura 20, plotando os resultados do refinamento h do MEF para fins de comparação, percebe-se que, novamente, todas as frequências foram melhores representadas pelas metodologias enriquecidas. Entretanto, ainda que se perceba superioridade dos métodos enriquecidos, um comentário deve ser feito. Os enriquecimentos baseados no MMA apresentam erros inferiores até à 10^{-5} em todas as frequências avaliadas. Contudo, em quase metade dos resultados observados (1ª, 3ª, 4ª e 6ª frequências para o MEFG-MMAPUL e 3ª e 4ª frequências, para o MEFG-MMAPUT), manifestaram uma reversão na tendência de decrescimento do erro para o último nível de enriquecimento. Por outro lado, o MEFG-TPUQ, MEFG-PPUT e MEFH polinomial enriquecido com funções borda, em ordem crescente de taxa convergência, atingem resultados com precisão semelhante. Todas estas metodologias atingiram erros majoritariamente inferiores a 10^{-7} . Percebe-se uma crescente proximidade entre os resultados do MEFG-PPUT e do MEFH.

6.3.4 Convergência para Placa FSFS

Os resultados da análise de convergência para a placa FSFS estão compilados e expostos na Figura 21.

FIGURA 21 - Análise de Convergência FSFS: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª Frequência, (c) 3ª Frequência, (d) 4ª Frequência, (e) 5ª Frequência, (f) 6ª Frequência.



Fonte: O autor.

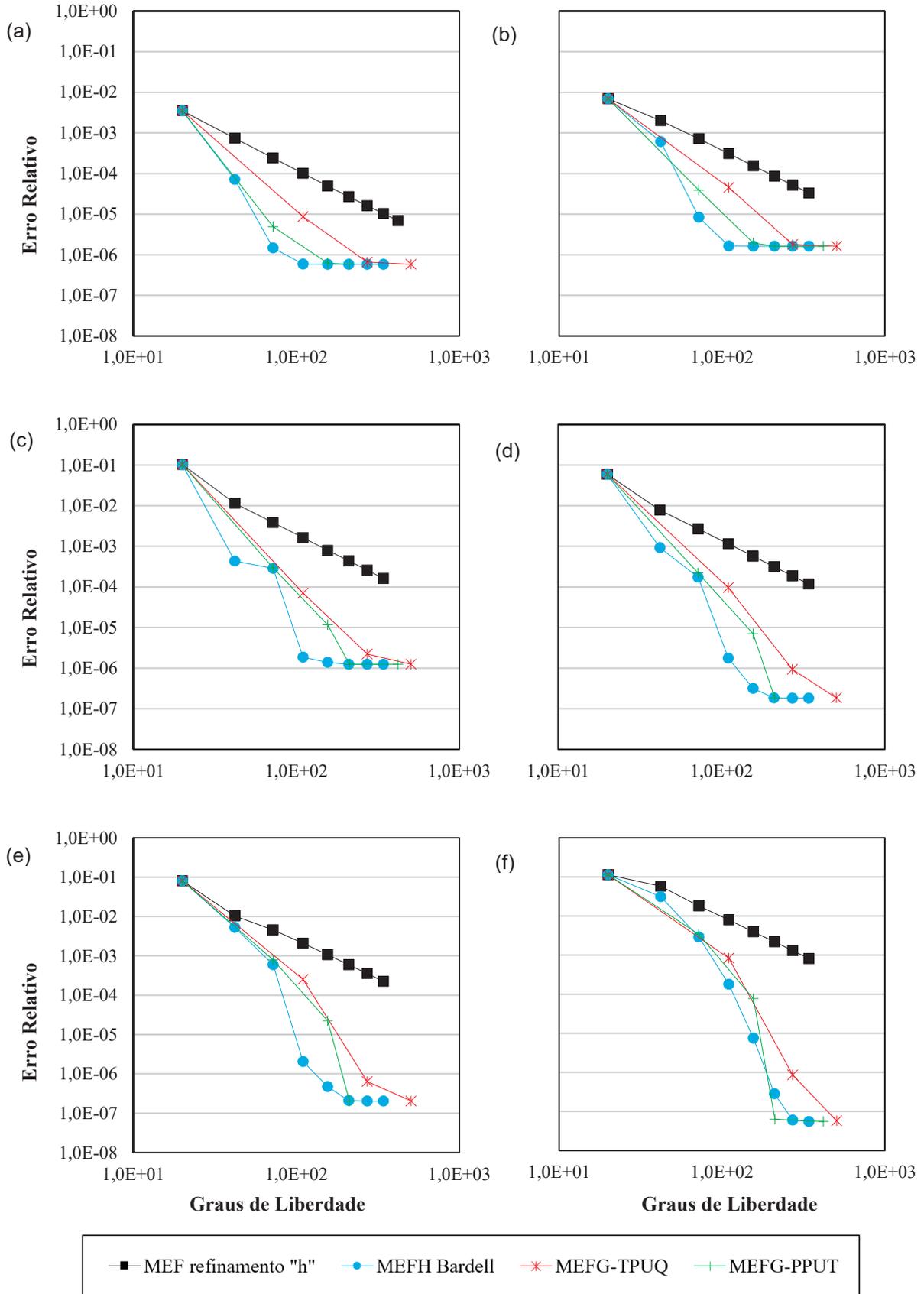
O estudo contido na Figura 21, refere-se à condição FSFS. Mesmo com variações na taxa de convergência, percebe-se que todos os métodos numéricos apresentaram precisão praticamente idêntica em todo o horizonte da análise. A eficiência descrita pelos métodos destaque nas três condições de contorno anteriores, MEFG-TPUQ, MEFG-PPUT e MEFH polinomial enriquecido com funções borda, é praticamente a mesma para a condição FSFS. As metodologias fundamentadas no MMA, pela primeira vez, forneceram resultados superiores ao MEFG-TPUQ em praticamente todos os cenários.

Constatou-se que, na maioria das frequências analisadas, os três métodos de maior destaque observados na primeira parte da análise, mantiveram a eficiência para as condições CSCS e FSFS, ainda que com algumas exceções pontuais. A qualidade superior das respostas fornecidas pelo MEFG-MMAPUT no cálculo das 3^a, 4^a e 6^a frequências da placa FSFS, é um exemplo pontual. Selecionando, portanto, o MEFG-TPUQ, o MEFG-PPUT e o MEFH como as melhores abordagens, parte-se para a última etapa da análise de convergência. Na última etapa, o comportamento de cada um destes métodos enriquecidos será avaliado para representar vibrações livres em placas finas sujeitas a duas condições mais complexas: a placa SSFS e a placa CSFS. Ambas as condições combinam imposições diferentes em bordas paralelas. Como feito anteriormente, o refinamento h do MEF convencional também foi mantido como referencial de ordem de grandeza dos resultados.

6.3.5 Convergência para Placa SSFS

Os resultados para a condição SSFS estão presentes na Figura 22.

FIGURA 22 - Análise de Convergência SSFS: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª Frequência, (c) 3ª Frequência, (d) 4ª Frequência, (e) 5ª Frequência, (f) 6ª Frequência.



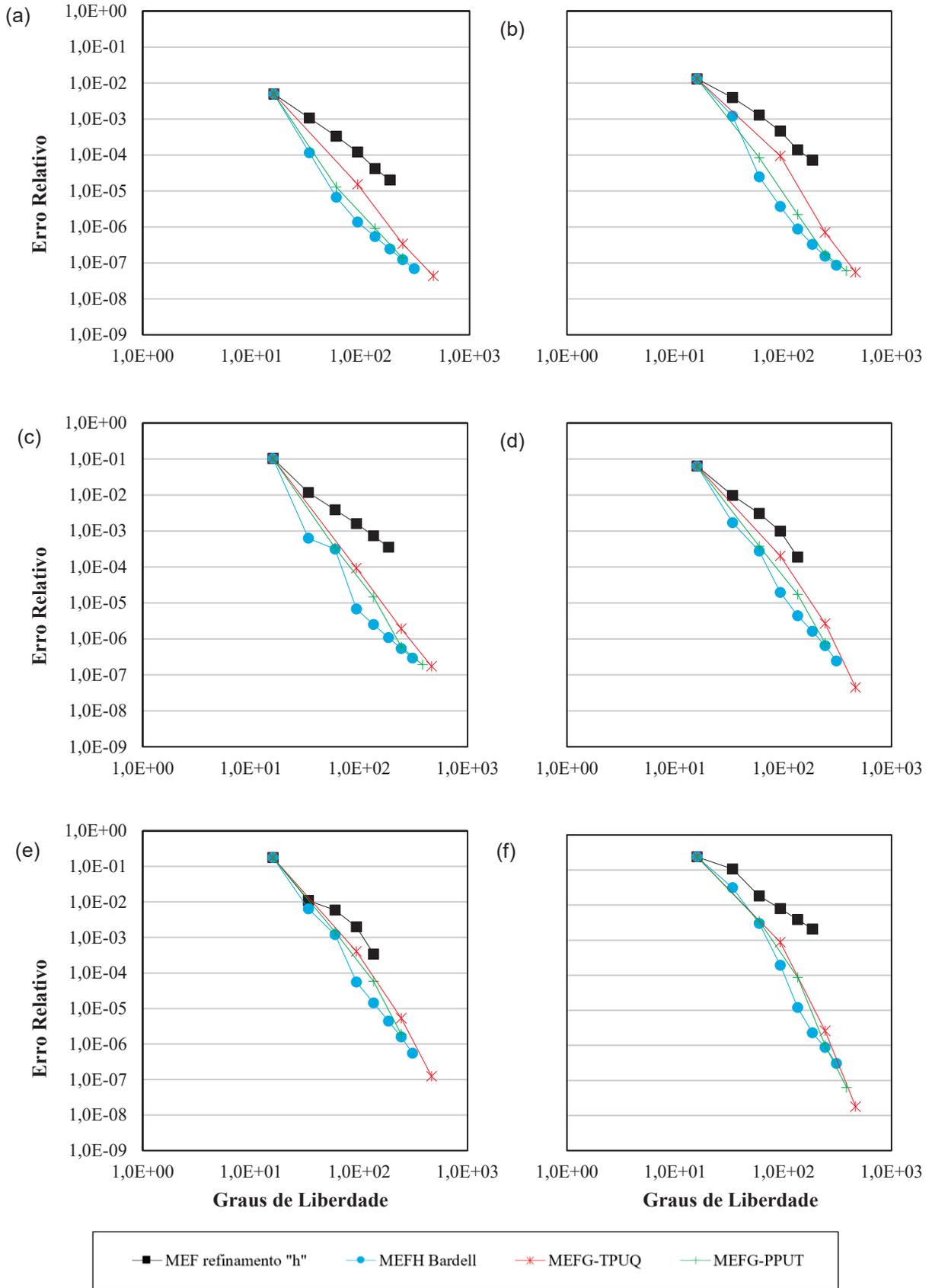
Fonte: O autor.

As curvas de convergência da Figura 22 sinalizaram pequenas diferenças no comportamento dos métodos enriquecidos, quando comparados à placa FSFS. Muito provavelmente, tal semelhança seja fruto das condições de contorno que são compartilhadas em três das bordas de cada placa. Vale comentar que, apesar de morfologicamente semelhantes, a condição SSFS manifestou respostas mais precisas, com erros cerca de cem vezes menores do que as da placa FSFS. O desempenho relativo entre os três métodos enriquecidos manteve o padrão até aqui observado. MEFH, MEFG-PPUT e MEFG-TPUQ apresentaram ordem decrescente de taxas de convergência com precisões semelhantes. Portanto, embora, dentro do horizonte do número de graus de liberdade avaliado, o MEFG-TPUQ apresente resultados menos precisos entre as 3 abordagens, a partir da 4ª frequência, percebe-se uma tendência de melhora nas respostas a medida em que as frequências aumentam.

6.3.6 Convergência para Placa CSFS

Por fim, os resultados para a última condição de contorno, a placa CSFS, estão apresentados na Figura 23.

FIGURA 23 - Análise de Convergência CSFS: (a) 1ª Frequência, (b) 2ª Frequência, (c) 3ª Frequência, (d) 4ª Frequência, (e) 5ª Frequência, (f) 6ª Frequência.



Fonte: O autor.

Na Figura 23, todas as formulações analisadas, sem exceções, apresentaram uma taxa de convergência praticamente constante na escala bi logarítmica, delineando gráficos praticamente lineares com acentuada inclinação e erros menores do que 10^{-7} . Os gráficos relativos aos métodos enriquecidos delinearam as curvas mais próximas observadas até então. Observa-se grande precisão nos resultados de metodologias enriquecidas.

6.4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA

No tocante ao MEFH polinomial, o presente estudo constituiu uma extensão à proposta de Bardell (1991), propondo uma formulação que incorpora funções que enriquecem a solução nas bordas, uma vez que no trabalho de Bardell (1991) apenas um elemento é utilizado para representar as placas. Para fins de validação dos resultados apresentados pela formulação utilizada do MEFH, os valores obtidos para as condições de contorno estudadas tanto no presente trabalho, quanto por Bardell (1991), encontram-se elencadas na Tabela 11.

TABELA 11 – Comparativo entre MEFH polinomial proposto por Bardell (1991) e sua versão adaptada com funções enriquecedoras do tipo borda.

Condições	Bardell (1991)	MEFH adaptado	Referência
SSSS	Ngl. = 64	Ngl. = 64	Lim et al. (2009)
λ_1	19,73	19,73	19,73
λ_2, λ_3	49,34	49,35	49,34
λ_4	78,95	78,96	78,95
λ_5, λ_6	98,71	98,93	98,69
CCCC	Ngl. = 36	Ngl. = 36	Leissa (1969)
λ_1	35,99	35,99	35,98
λ_2, λ_3	73,39	73,43	73,39
λ_4	108,22	108,23	108,21
CSCS	Ngl. = 52	Ngl. = 48	Lim et. al (2009)
λ_1	28,95	28,95	28,95
λ_2	54,74	54,75	54,74
λ_3	69,33	69,36	69,32
λ_4	94,59	94,59	94,58
FSFS	Ngl. = 80	Ngl. = 80	Lim et. al (2009)
λ_1	9,63	9,63	9,63
λ_2	16,13	16,13	16,13
λ_3	36,73	36,72	36,72
λ_4	38,95	38,95	38,94

FONTE: o autor. * Ngl: Número de Graus de Liberdade.

A precisão numérica de duas casas decimais com Algarismos truncados foi a mesma adotada por Bardell (1991) em seu trabalho. Embora perceba-se grande proximidade entre os resultados fornecidos pelo MEFH de Bardell (1991) e sua versão enriquecida com graus de liberdade do tipo borda, não existiram ganhos significativos de precisão mediante a inserção de graus de liberdade do tipo borda. Entretanto, como o número final de graus de liberdade utilizados nesta comparação é muito pequeno, uma afirmação categórica a respeito da influência dos graus borda no enriquecimento da solução não é recomendada. Além do mais, mesmo com estes resultados, a taxa de convergência e a precisão do MEFH adaptado com funções de borda mostram-se excelentes no estudo como um todo. Uma posterior comparação estendendo o horizonte do número de graus de liberdade da abordagem original de Bardell (1991) para valores próximos aos utilizados no presente estudo seria necessária para verificar se esta divergência ainda se faz presente ou não. Tal análise permitiria categorizar o fenômeno como uma ocorrência pontual, restrita a modelos com poucos graus de liberdade, ou como uma característica do método enriquecido com funções de borda.

Utilizando a formulação do MEF p-Fourier, proposto por Leung e Chan (1998) em uma malha de 4 elementos, apenas uma condição de contorno foi abordada simultaneamente nos dois estudos, a placa CCCC. O observado foi que, truncando os resultados para a mesma precisão usada por Leung e Chan (1998) (quarta casa decimal), tem-se o comparativo mostrado na Tabela 12.

TABELA 12 – Comparativo entre MEF p-Fourier proposto por Leung e Chan (1998) e sua versão adaptada com funções enriquecedoras do tipo borda.

Condições	Leung e Chan (1998)	MEF p-Fourier Adaptado	Referência
CCCC	Ngl = 210	Ngl =196	Leissa (1969)
λ_1	35,9856	35,9878	35.9851
λ_2, λ_3	73.4021	73,4075	73.3934
λ_4	108,2474	108,2556	108.2165
λ_5	131,6137	131,6255	131.5807
λ_6	132,2385	132,2457	132.2017
λ_7, λ_8	165,0685	165,0952	164.9992
λ_9, λ_{10}	210,6011	210,7208	210.5218

FONTE: o autor.

Para o MEF p-Fourier, a utilização de uma malha de quatro elementos conduziu a respostas substancialmente próximas, validando os resultados obtidos, para fins de comparação. Entretanto, devido a sua taxa de convergência baixa para

as frequências avaliadas e resultados levemente melhores do que o refinamento h do MEF, a formulação adaptada do MEF p -Fourier se mostrou pouco promissora na modelagem das condições SSSS e CCCC.

Um comentário importante a ser feito: é de suma importância salientar que a influência da incorporação de graus de liberdade enriquecedores nas bordas deve ser vista de maneira particularizada para cada problema. Esta questão, por exemplo, também foi objeto de estudo de Cittadin (2019). Em seu estudo, a autora verificou a influência da utilização destas funções para problemas do estado plano de tensões constatando uma significativa melhora mediante à incorporação destas funções. Os ganhos de precisão aproximaram-se da ordem de 98%. Portanto, afirmar uma piora ou melhora na qualidade das respostas baseada na simples comparação para um tipo de aplicação, é uma conclusão precipitada que não possui respaldo na literatura. A inserção ou não destas funções deve ser avaliada individualmente para cada aplicação.

Tratando agora dos enriquecimentos do MEFG, todas as variantes se mostraram com maiores taxas de convergência e mais precisas do que o refinamento h do MEF, em todas as condições de contorno e frequências avaliadas.

Quanto à enriquecimentos com base puramente trigonométrica, verificou-se que multiplicar as funções de base por PU cúbicas Hermitianas (MEFG-TPUH) conduziu a erros de magnitude muito semelhante ao próprio MEF. Comparada com a utilização de PU linear Lagrangeana, a utilização de PU cúbica Hermitiana não resultou em uma modificação vantajosa em termos de precisão. Por outro lado, com o uso da PU quadrática lagrangeana, ganhos expressivos de precisão foram observados. Resultados melhores foram observados para todas as frequências avaliadas.

Paralelamente, duas variantes alternativas também foram propostas para o MEFG baseado no MMA. O MEFG-MMAPUT conservou, em termos gerais, boas propriedades de convergência nas quatro condições de contorno para as quais foram submetidas: SSSS, CCCC, CSCS e FSFS. Embora tal modificação mantivesse a qualidade dos resultados observados boa, em termos de precisão, apenas forneceu respostas próximas ao MEFG-MMAPUL.

Por fim, a qualidade e a precisão das respostas fornecidas pelo MEFG-PPUT foram extremamente satisfatórias para todas as frequências e em todas as seis condições de contorno avaliadas. O MEFG-PPUT foi a metodologia que mais se

aproximou das excelentes respostas fornecidas pela proposta MEFH adaptada de Bardell (1991), apresentando em algumas aplicações resultados até mesmo superiores. Muito provavelmente, esse fato se deve a ambas as abordagens utilizarem os polinômios de Legendre na composição do seu espaço enriquecedor.

7 ANÁLISE DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS E CONDICIONAMENTO DAS MATRIZES DE MASSA

Este capítulo destina-se a apresentar duas análises desenvolvidas paralelamente à análise de convergência para as abordagens mais promissoras nos estudos de caso do Capítulo 6. Estas análises fornecem informações extras importantes para caracterizar mais amplamente o comportamento dos métodos avaliados na resolução do problema: a análise do espectro de frequências e a análise da evolução do número de condição como parâmetro quantitativo para risco de instabilidade numérica.

7.1 ANÁLISE DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS

O estudo do espectro de frequências é uma ferramenta útil na verificação da precisão dos resultados obtidos pelos métodos numéricos aplicados a problemas de vibração livre. Através deste tipo de análise, torna-se possível avaliar a precisão de todo o conjunto de frequências obtido em uma análise.

Primeiramente, é necessário estabelecer uma coletânea de valores (analíticos ou numéricos) considerados como respostas de referência, para balizar essa análise. Realiza-se então a razão entre o valor numérico obtido e o seu respectivo valor de referência. A qualidade global da resposta é mensurada por meio deste coeficiente.

Por meio desta análise, conclusões importantes podem ser formuladas, como descobrir o percentil das respostas de um determinado método numérico que possui boa aproximação, permitindo ajustar o número de graus de liberdade previamente, visando atingir a precisão desejada na modelagem.

7.1.1 Valores de Referência para a Análise do Espectro

A única condição de contorno de placa que possui uma sequência de resultados analíticos provenientes de uma relação de recorrência simples é a placa SSSS, relação essa dada pela equação:

$$\lambda_{m,n} = \frac{\pi^2(m^2 + n^2)}{4} \sqrt{\frac{\rho h}{DL_x^4}} \quad (6.1)$$

com $m, n \in \mathbb{N}$. Para as demais condições, os valores analíticos fornecidos pela abordagem simplética são de obtenção pouco viável nas frequências mais altas. Essa limitação se dá, entre outros motivos, pelo fato de que as equações de frequência da análise simplética formuladas por Lim et al. (2009) conduzem a fórmulas muito complexas e de difícil resolução. Os valores de referência para as demais condições de contorno aqui estudadas serão obtidos através de refinamentos h do MEF convencional utilizando-se malhas altamente refinadas (com muitos graus de liberdade).

As informações relativas à composição das soluções de referência para a análise dos espectros de frequências estão apresentadas na Tabela 13.

TABELA 13 – Respostas de referência para a análise do espectro de frequências.

Condição de Contorno	Respostas	Número de Graus de Liberdade Utilizados
SSSS	Analíticas	--
CCCC	Numéricas via MEF	1520
CSCS	Numéricas via MEF	1380
FSFS	Numéricas via MEF	1368
SSFS	Numéricas via MEF	1332
CSFS	Numéricas via MEF	900

FONTE: o autor.

Para a análise do espectro de frequências dos métodos enriquecidos mais promissores utilizou-se a malha padrão definida para a análise de convergência, com quatro elementos. Já para ilustrar as propriedades do espectro de frequências do refinamento h do MEF utilizou-se um refinamento suficiente para obtenção de um número próximo de graus de liberdade das malhas enriquecidas. Em todos os métodos enriquecidos contemplados na análise do espectro de frequências, foi estabelecido o último nível de enriquecimento utilizado na análise de convergência. A quantidade de graus de liberdade utilizados, bem como os níveis de enriquecimento utilizados para cada uma das condições de contorno avaliadas estão dispostos na Tabela 14.

TABELA 14 – Respostas de referência para a análise do espectro de frequências.

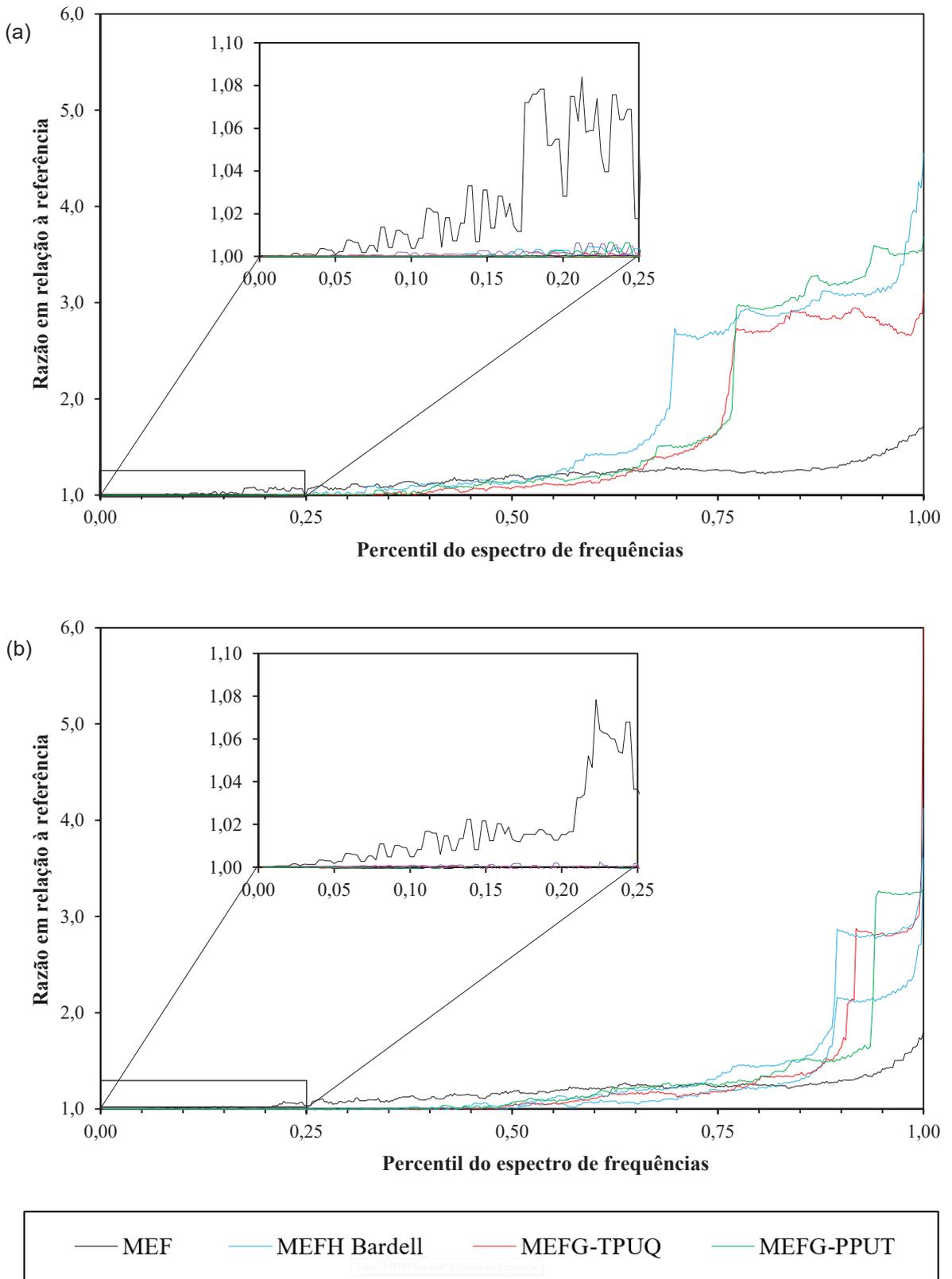
Método Enriquecido	Níveis de Enriquecimento	Condição de Contorno	Ngl.
MEFH polinomial	7 níveis	SSSS	324
		CCCC	256
		CSCS	288
		FSFS	360
		SSFS	342
		CSFS	310
MEFG-TPUQ	3 níveis	SSSS	324
		CCCC	256
		CSCS	224
		FSFS	288
		SSFS	272
		CSFS	244
MEFG-PPUT	4 níveis	SSSS	256
		CCCC	256
		CSCS	224
		FSFS	288
		SSFS	272
		CSFS	244

FONTE: o autor.

7.1.2 Espectro de frequências para placas SSSS e CCCC

As respostas relacionadas às condições de contorno SSSS e CCCC estão apresentadas na Figura 24. Para fins de salientar as diferenças na microescala entre os métodos, uma aproximação visual para o primeiro quartil foi evidenciada em cada uma das figuras.

FIGURA 24 - Espectro de frequências para placa com condições de contorno:(a) SSSS; (b) CCCC.



Fonte: O autor.

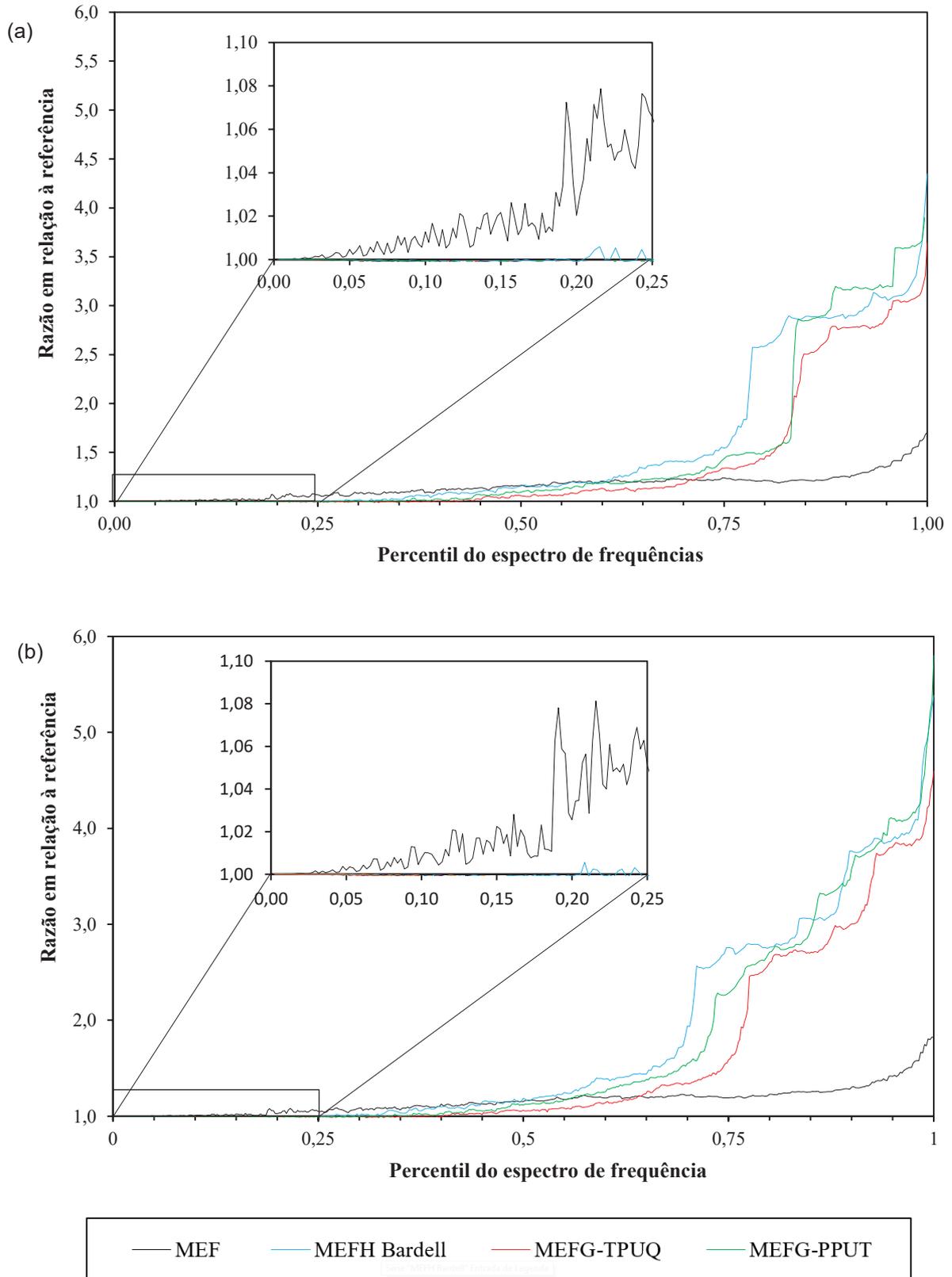
Observando os resultados da placa SSSS, nota-se que as diferenças perceptíveis entre os padrões dos espectros se manifestam majoritariamente nas 30% últimas frequências do espectro, elevando os erros numéricos para cerca de 300%. Um padrão de crescimento abrupto é observado no MEFH. Percebem-se perdas semelhantes da qualidade das respostas do MEFG-TPUQ e MEFG-PPUT, entretanto com uma leve defasagem em relação aos métodos mencionados anteriormente, ocorrendo apenas nos últimos 23% dos resultados. Por fim, não se observaram crescimentos abruptos para o refinamento h do MEF convencional. Na microescala, o primeiro quartil das respostas evidenciou que o comportamento entre as metodologias possui diferenças. O MEF apresenta respostas mais distantes da solução analítica, que progressivamente crescem até atingirem valores de erro próximos a 8%, enquanto todos os outros métodos mantêm-se com erros muito menores.

Observando os resultados para a condição CCCC, todas as metodologias apresentaram erros inferiores a 50% na faixa inicial correspondente a 90% do espectro. Destaque para o maior aumento do erro, de cerca de 250%, nos últimos 5% da série de frequências, manifestado para o MEFG-PPUT. Semelhanças são observadas no comportamento em microescala do primeiro quartil em relação a placa SSSS, sobretudo no comportamento do refinamento h do MEF. Todas as outras abordagens mantiveram erros quase inexpressivos no primeiro quartil do espectro da placa com condição de contorno CCCC.

7.1.3 Espectro de frequências para placas CSCS e FSFS

A Figura 25 apresenta os espectros de frequências de uma placa com condições de contorno CSCS e FSFS. Para a placa com condição de contorno CSCS, observa-se que todas as metodologias apresentaram resultados bons (com erros inferiores a 30%) na faixa inicial de frequências correspondente a 70% do espectro. Pouco após a marca de 70% do espectro, as metodologias enriquecidas começam a apresentar seus distanciamentos mais expressivos em relação a referência. O primeiro salto corresponde ao MEFH e ocorre por volta de 77% do espectro, e nos últimos 5% do espectro o método acaba atingindo erros ainda maiores, da ordem de 400%. O MEFG-TPUQ descreve um comportamento similar nos últimos 20% do espectro.

FIGURA 25 - Espectro de frequências para placa com condições de contorno: (a) CSCS; (b) FSFS.



Fonte: O autor.

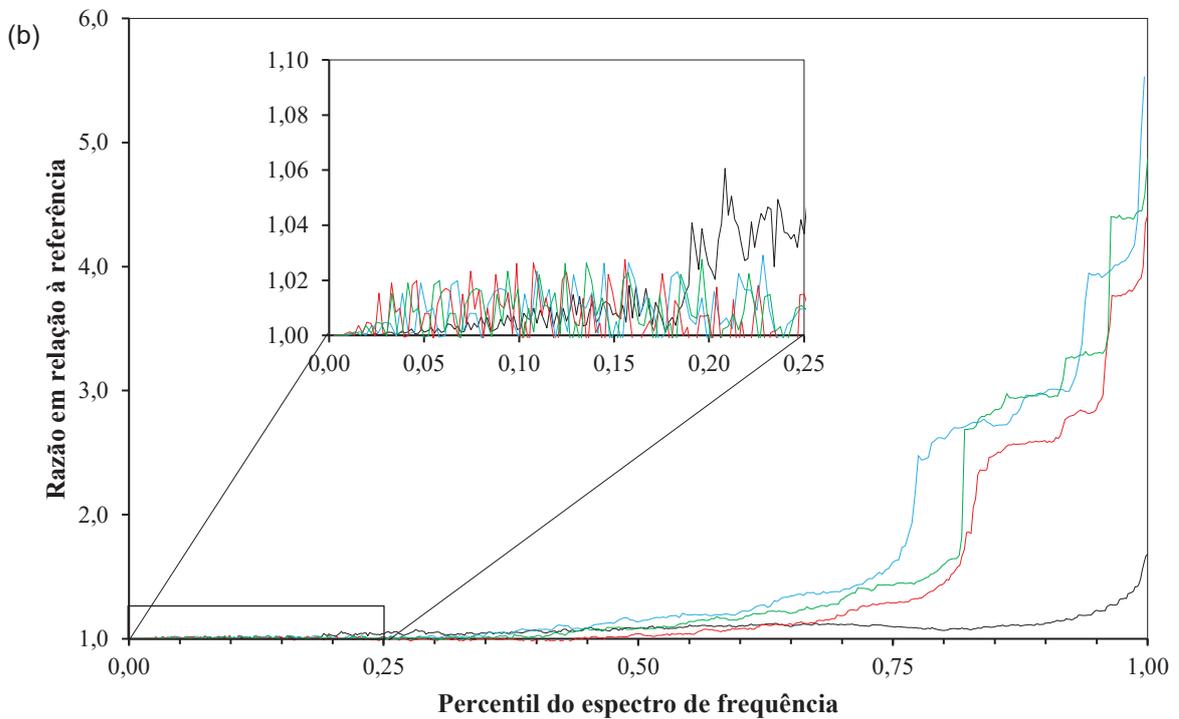
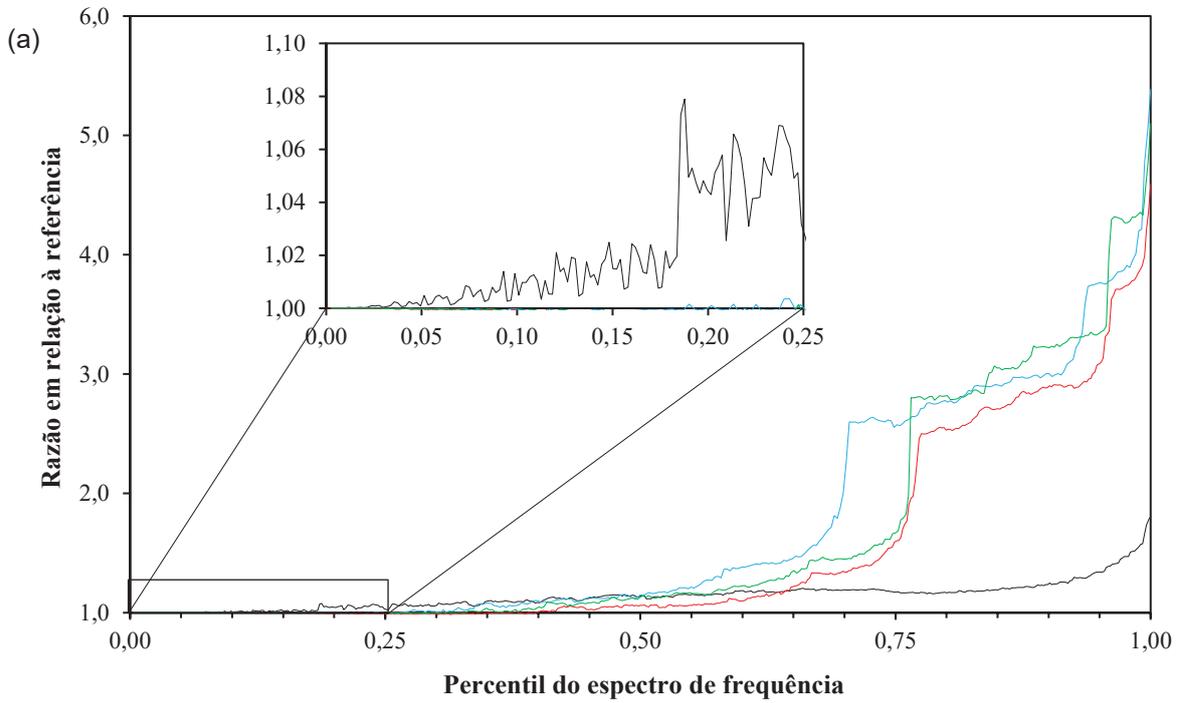
Por fim, ainda relativo a Figura 25(a) o aumento mais abrupto e tardio é manifestado pelo MEFG-PPUT, por volta da marca de 82,5% do espectro. Concentrando-se na microescala do primeiro quartil, erros são perceptíveis para duas abordagens: o refinamento h do MEF e o MEFH. Desde o início do quartil, o refinamento h do MEF manteve uma tendência de crescimento de erro praticamente constante, seguidas de um leve aumento perto dos últimos 5% do espectro, quase triplicando a magnitude dos erros. O erro do MEFH só se torna perceptível nos últimos 5% do primeiro quartil, mas ainda com máximos inferiores a 1%.

Em um primeiro momento, a morfologia de todas as curvas apresentadas para o caso FSFS muito se assemelha à das obtidas para a placa com condição de contorno CSCS. As respostas mantiveram-se, de uma maneira geral, com erros abaixo de 40%. As curvas delineadas pelo MEFG-TPUQ e pelo MEFG-PPUT mantiveram-se praticamente paralelas em toda a análise. Nota-se que, novamente, apenas o refinamento h do MEF convencional e o MEFH apresentaram resultados visíveis na microescala da análise para o primeiro quartil. Os resultados que muito se assemelham em magnitude e forma aos fornecidos pelas metodologias no caso CSCS.

7.1.4 Espectro de frequências para placas SSFS e SCSF

Os espectros de frequências para placa com condições de contorno SSFS e SCSF estão apresentadas na Figura 26. Poucas mudanças significativas no comportamento do espectro de soluções dos métodos enriquecidos se observam para a placa SSFS. Novamente, assim como nos casos anteriores, todas as metodologias enriquecidas mantêm seus resultados com erros inferiores a 40% no trecho inicial de 70% do espectro. O primeiro método a apresentar um crescimento abrupto nos erros continua sendo o MEFH. O MEFG-TPUQ e o MEFG-PPUT apresentam comportamentos muito semelhantes, com aumentos abruptos no erro mais tardios, por volta dos últimos 20% do espectro e respostas muito ruins para as últimas frequências, com erros da ordem de 500%. Novamente isso reforça a tendência observada em todas as condições de contorno precedentes de que, todas as metodologias enriquecidas apresentam ótimos resultados para o início do espectro das respostas.

FIGURA 26 - Espectro de frequências para placa com condições de contorno: (a) SSFS; (b) SCSF.



Fonte: O autor.

O maior destaque da análise para a placa CSFS está centrado no comportamento no primeiro quartil. Pela primeira vez, fica evidente uma mudança no padrão dos resultados obtidos. Logo após o início do primeiro quartil até quase 20% do espectro, todas as metodologias enriquecidas começaram a apresentar divergências em relação aos valores de referência, mas, embora com alguns resultados menos precisos que os obtidos pelo MEF, os erros se mantiveram em valores baixos, da ordem de 2%. Não é possível afirmar de maneira categórica o real motivo desta mudança súbita no comportamento das metodologias enriquecidas em representar os resultados da placa.

Contrastando com os resultados da análise de convergência, a análise do espectro de soluções revelou limitações das metodologias enriquecidas. Ao avaliar a acurácia das respostas como um todo, percebe-se que a excelente precisão das metodologias enriquecidas, limita-se a pouco além do primeiro quartil das soluções. Quanto a perda de precisão, percebem-se semelhanças no desempenho dos métodos enriquecidos. Semelhanças são observadas para as placas SSSS, CCCC, CSCS, FSFS e SSFS. Em todas estas condições de contorno, observa-se uma progressiva perda na qualidade das respostas, intensificada substancialmente no último quartil das soluções. Em todos estes casos, a diminuição da precisão é primeiramente manifestada pelo MEFH, seguida do MEFG-PPUT e do MEFG-TPUQ. A única exceção corresponde a placa CSFS, para a qual os erros, manifestos desde o primeiro quartil, apresentam-se levemente mais perceptíveis.

7.2 CONDICIONAMENTO DAS MATRIZES DE MASSA

Esta seção destina-se a discutir conceitos relativos à segunda análise paralela desenvolvida: análise de sensibilidade numérica. A sensibilidade numérica está intimamente relacionada a dois pontos cruciais de algoritmos computacionais envolvendo operações algébricas entre matrizes: o condicionamento e a estabilidade.

Associar estes conceitos à resolução computacional de sistemas lineares não é objeto novo de estudo. A utilização de algoritmos aproximados se tornou amplamente difundida para resolução de problemas de álgebra linear em grandes escalas. Wilkinson (1965) foi pioneiro a introduzir um parâmetro matemático que pudesse, de certa forma, quantificar a sensibilidade das matrizes envolvidas a perturbações na solução. Wilkinson (1965) formulou o conceito de número de

condição de uma matriz, associando a importância desse novo parâmetro à qualidade de resolução de um sistema linear. Anos mais tarde, após diversas pesquisas desenvolvidas, Higham (1995) afirma por fim que o número de condição de uma matriz é parâmetro útil em quantificar as perturbações na solução de um sistema linear inerentes aos processos de inversão da matriz.

Neste contexto, outro problema matricial da álgebra que se tornou objeto de interesse no estudo da sensibilidade, foi o problema de autovalores e autovetores. Diversas pesquisas associaram, também, o condicionamento de uma dada matriz a obtenção de boas soluções aproximadas para autovalores e autovetores. Petrolli (2016) afirma que este conceito também é de extrema importância para avaliar a qualidade de soluções aproximadas em problemas de autovalores e autovetores generalizados.

7.2.1 Cálculo do número de condição de uma matriz

A definição formal, encontrada em Bazán (2003) para o número de condição surge a partir dos conceitos descritos a seguir. Considere $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e um sistema linear da forma:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (6.1.1)$$

onde a solução \mathbf{x} é obtida diretamente através de:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad (6.1.2)$$

definindo a norma matricial induzida pela função raio espectral $\tau: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\|\mathbf{A}\| = \left(\tau(\mathbf{A}^T\mathbf{A})\right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.1.3)$$

Sabe-se que um dado erro \mathbf{e} , tem como imagem um resíduo \mathbf{r} (RUGGIERO; LOPES, 1998):

$$\mathbf{Ae} = \mathbf{r} \quad (6.1.4)$$

e que, por consequência, também:

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{r} \quad (6.1.5)$$

Pela definição de produto interno, podem-se extrair quatro desigualdades:

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (6.1.6)$$

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \geq \frac{1}{\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|} \quad (6.1.7)$$

$$\|\mathbf{e}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{r}\| \quad (6.1.8)$$

$$\|\mathbf{e}\| \geq \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{A}\|} \quad (6.1.9)$$

das quais é possível condensar uma única expressão em termos da razão conhecida como erro relativo $\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ e da razão $\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$, e que é conhecida como resíduo relativo e dada por (RUGGIERO; LOPES, 1998):

$$\kappa(\mathbf{A})^{-1} \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(\mathbf{A}) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \quad (6.1.12)$$

Percebe-se que, tanto o limite superior, quanto o limite inferior da desigualdade são combinações lineares do resíduo relativo em relação a um mesmo escalar. A este fator, que define a amplitude do intervalo de proporcionalidade entre o resíduo relativo e o erro relativo dá-se o nome de número de condição da matriz \mathbf{A} , representado por $\kappa(\mathbf{A})$:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\| \quad (6.1.11)$$

Computacionalmente falando, o processo de inversão de matrizes é muito custoso, tornando a definição acima, ainda que fundamental, pouco viável para a obtenção do número de condição. Felizmente existe uma relação alternativa

proveniente de um teorema dos números de condição, demonstrado por Ford (2015), que associa o número de condição a uma razão entre o menor e o maior autovalor da matriz **A** na forma:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\max(|\lambda_i|)}{\min(|\lambda_i|)} \quad (6.1.12)$$

Esta foi a relação utilizada para a obtenção dos números de condição (NC) das análises de sensibilidade do presente trabalho.

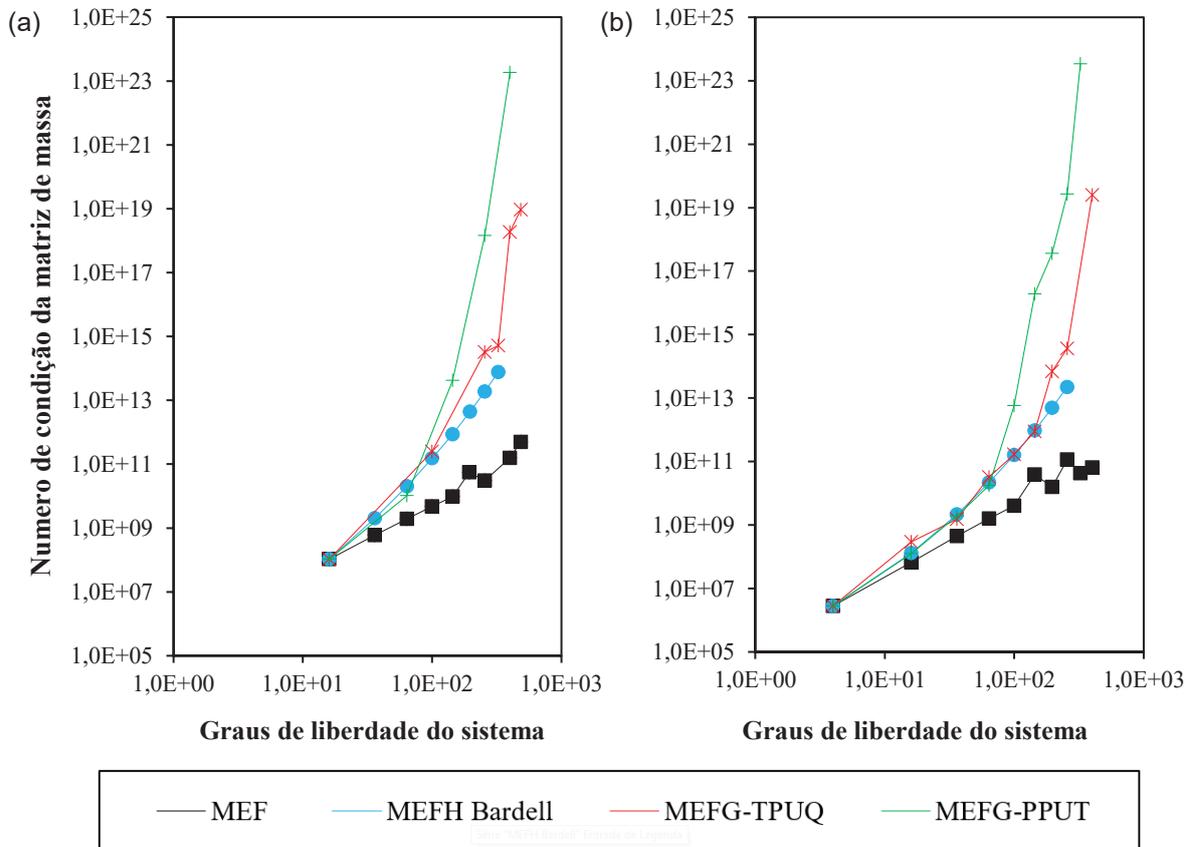
7.2.2 Condicionamento da matriz de massa como parâmetro de estabilidade numérica

Leung e Zhu (2004) sugerem que, uma vez que a matriz de massa **M** seja simétrica e positiva definida, condição do presente contexto, a sensibilidade a perturbações numéricas do problema generalizado pode ser analisada de maneira equivalente a um problema padrão em relação apenas a matriz de massa. Portanto, para avaliar a evolução da sensibilidade numérica em cada um dos métodos propostos à medida em que o número de graus de liberdade do sistema aumenta, calculou-se o NC das matrizes de massa relativas aos graus de liberdade livres do sistema. O objetivo aqui é avaliar a evolução do número de condição das matrizes de massa envolvidas com o intuito de mensurar um parâmetro associado ao risco de instabilidade numérica.

7.2.3 Condicionamento da matriz de massa para condições de contorno SSSS e CCCC

Iniciando a apresentação dos resultados de sensibilidade numérica, tem-se na Figura 27 as curvas de número de condição das matrizes de massa para as placas sujeitas a condições de contorno SSSS e CCCC.

FIGURA 27 - Número de condição da matriz de massa para placa com condições de contorno : (a) SSSS; (b) CCCC.



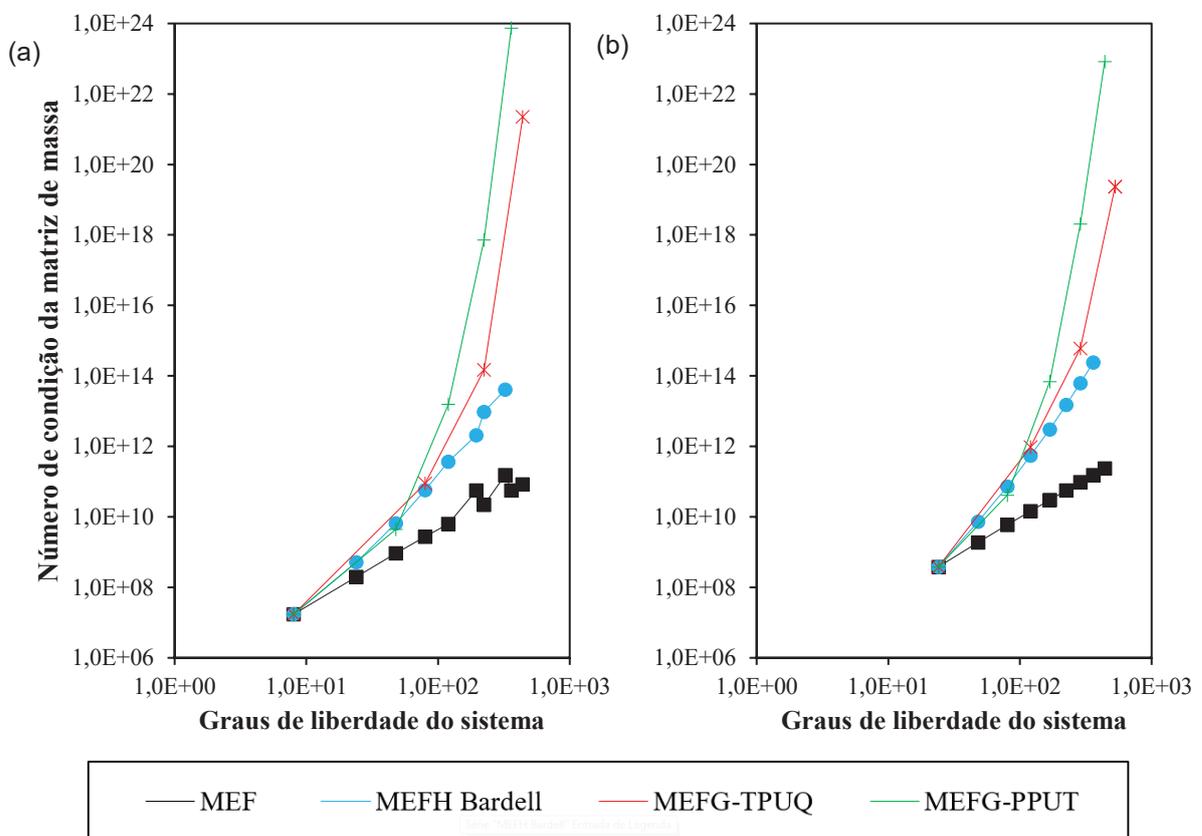
Para a condição de contorno SSSS, percebe-se que o refinamento h do MEF possui os menores NC observados, revelando-se a metodologia numericamente menos sensível a perturbações. Dentro do intervalo avaliado, o MEFH apresentou uma ordem de grandeza inferior a 10^{15} ($< 10^{16}$), estando dentro dos limites de precisão numérica da máquina. O MEFH-TPUQ apresentou NC atingindo valores da ordem de 10^{21} , conflitando com as boas propriedades de convergência já mostradas pelo método. Por fim, a abordagem que apresentou os maiores valores de NC foi o MEFH-PPUT, da ordem de 10^{24} , mostrando-se a metodologia mais sensível a perturbações.

Para a condição CCCC, o refinamento h do MEF apresentou comportamento análogo a placa SSSS. As duas formulações enriquecidas, MEFH-PPUT, MEFH-TPUQ apresentaram crescimentos acentuados do NC comparados ao MEFH. Por fim, também em concordância ao observado na placa SSSS, o método com NC mais elevados, de até 10^{24} , foi o MEFH-PPUT.

7.2.4 Condicionamento da matriz de massa para condições de contorno CSCS e FSFS

Prosseguindo, a Figura 28 apresenta os gráficos dos números de condição das matrizes de massa variando com o número de graus de liberdade para placas com condições de contorno CSCS e FSFS.

FIGURA 28 - Número de condição da matriz de massa para placa com condições de contorno: (a) CSCS; (b) FSFS.



Fonte: O autor.

Avaliando a evolução do NC com o aumento do número de graus de liberdade para a placa com condição CSCS, sem grandes mudanças características e com valores baixos, da ordem de 10^{10} , o refinamento h do MEF mantém-se como a abordagem menos sensível numericamente, seguido pelo MEFH. Ao combinar imposições diferentes no contorno da placa, não foram observadas grandes distorções no comportamento dos NC ao compará-los com as condições anteriores. Por fim, o MEFG-PPUT foi a metodologia mais sensível numericamente, superando

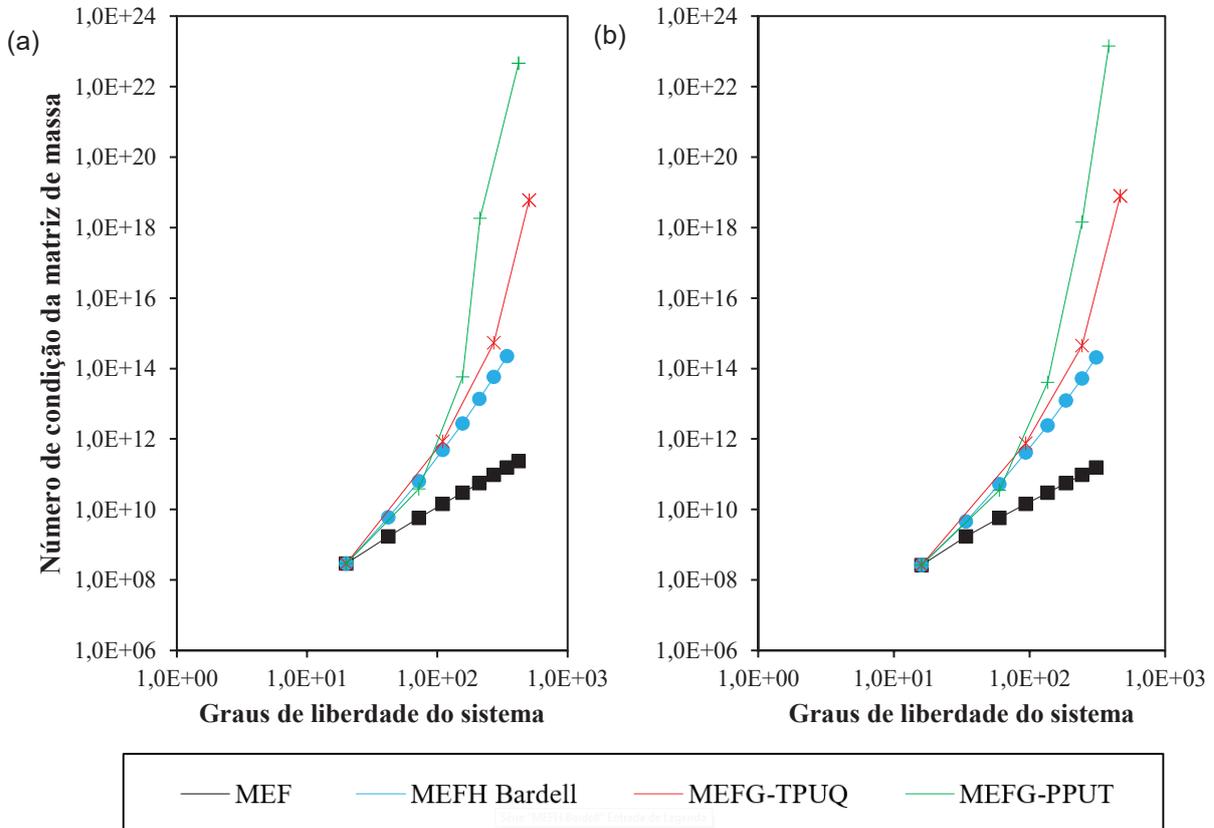
todas as abordagens numéricas para todos os valores de graus de liberdade, atingindo NC da ordem de 10^{24} na última análise.

Para a placa FSFS verifica-se que poucas são as diferenças manifestadas por todos os métodos. Pode-se apontar uma aproximação do MEFG-TPUQ em relação ao MEFH, devido a um suave aumento dos números de condição por parte do MEFH e uma suave diminuição por parte do MEFG-TPUQ. A metodologia mais sensível numericamente permanece sendo o MEFG-PPUT.

7.2.5 Condicionamento da matriz de massa para condições de contorno SSFS e CSFS

Por fim, os últimos resultados, relativos às condições SSFS e CSFS, estão dispostos na Figura 29.

FIGURA 29 - Número de condição da matriz de massa para placa com condições de contorno: (a) SSFS; (b) SCFS.



Fonte: O autor.

Percebe-se semelhança entre os comportamentos delineados pelo refinamento h do MEF e pelo MEFH para a placa SSFS, para a placa CSCS e para a placa SCSF. Nestas 3 abordagens, a evolução da magnitude do número de condição foi praticamente idêntica. Dentre as metodologias enriquecidas, o MEFG-TPUQ apresentou uma leve suavização na curvatura, terminando o último nível de enriquecimento com valores de NC da ordem de 10^{19} . Por fim, o comportamento do MEFG-PPUT, embora ainda se mostre mais sensível numericamente, apresenta uma ligeira atenuação na taxa de crescimento do NC.

O último resultado da análise de sensibilidade numérica da solução, referente a placa CSFS, manteve o mesmo padrão morfológico e de magnitude para os métodos MEFH e MEFG-TPUQ, com pouquíssimas divergências em ordem e número. O único método que mudou de comportamento em relação a condição SSFS, foi o MEFG-PPUT, que retornou ao padrão demonstrado para as outras condições de contorno com exceção da SSFS.

Por fim, é possível inferir que a sensibilidade numérica dos problemas aumenta substancialmente com a utilização das metodologias enriquecidas. O aumento da sensibilidade numérica revela-se através dos elevados NC das matrizes de massa, sobretudo para as formulações do MEFG. Pode-se concluir, portanto, que a elevada convergência dos métodos enriquecidos está atrelada a um aumento direto no risco de instabilidade numérica. Felizmente, em termos práticos, a instabilidade numérica não foi observada em nenhuma das condições de contorno dos estudos de caso deste trabalho.

De fato, conciliar boa convergência com baixos números de condição parece ser um desafio inerente à formulação de soluções numéricas via MEFG. Babuska e Banerjee (2012), ao estabelecerem uma proposta visando combater o problema do mau condicionamento, chamada MEFG Estabilizado, comentam que o mau condicionamento estaria relacionado ao aparecimento de funções de forma quase linearmente dependentes, o que, por consequência, acarretaria no mau condicionamento da matriz de rigidez, para problemas estáticos. O paralelo direto para a análise dinâmica reside em solucionar um problema de autovalores e autovetores generalizado. Como afirmam Leung e Zhu (2004), a medida numérica indireta associada ao risco a instabilidade nestes problemas, pode ser tida como número de condição da matriz de massa. Neste contexto, sugere-se que o mau condicionamento das matrizes de massa do MEFG testemunhado no presente trabalho possivelmente

tenha fonte no problema mencionado por Babuska e Banerjee (2012). Todas as abordagens enriquecidas avaliadas demonstraram maior crescimento do número de condição quando comparados ao refinamento h do MEF.

8 CONCLUSÃO

O MEFG constitui-se uma extensão do MPU, aliando o espaço de soluções aproximado do método ao espaço de soluções do MEF convencional. Trata-se de uma ferramenta poderosa para a resolução aproximada de problemas de valores de contorno, pois permite o enriquecimento da solução através da adição de graus de liberdade no interior dos elementos e/ou na interface de elementos adjacentes.

Neste contexto, o presente trabalho posiciona-se como um estudo de caso da aplicabilidade do MEFG a um problema específico de valores de contorno: a vibração livre de placas de Kirchhoff-Love.

Observa-se que todas as formulações do MEFG propostas no presente trabalho forneceram resultados precisos e elevadas taxas de convergência. Dentro do horizonte de frequências estudado na análise de convergência, as soluções enriquecidas do MEFG revelaram excelentes resultados.

Variações na utilização dos enriquecimentos e funções partição da unidade também foram estabelecidas. Duas propostas foram identificadas como as mais indicadas para o problema. Primeiramente, utilizar polinômios de Legendre aliados a partições da unidade trigonométricas e, em segundo lugar, utilizar enriquecimentos trigonométricos aliados a partições da unidade Lagrangeanas quadráticas.

Paralelamente, algumas metodologias numéricas consagradas também foram aplicadas ao problema para construção de valores de referência, como o MEF e o MEFH polinomial. As respostas fornecidas pelo MEFG mostraram-se sempre mais precisas, quando comparadas ao refinamento h do MEF e, para a maioria das frequências avaliadas, tão precisas quanto às do MEFH polinomial. Em alguns casos, a qualidade dos valores obtidos pelas formulações do MEFG superou inclusive a precisão do MEFH polinomial.

Contudo, a alta precisão dos resultados fornecidos pelo MEFG não esteve presente em todo o espectro das soluções. Um dos reveses observados foram perdas significativas e abruptas na qualidade das respostas manifestas nas parcelas finais do espectro, para todas as condições de contorno. Assim como o observado para o MEFH polinomial, os últimos valores do espectro de frequência revelaram uma limitação do MEFG em representar com precisão aceitável valores muito altos de frequência. A evolução do número de condição das matrizes de massa foi estabelecida como parâmetro de sensibilidade e de possível risco de instabilidade

numérica das soluções. Embora aumentos significativos na magnitude do número de condição das matrizes de massa tenham sido observados ao comparar as formulações mais precisas do MEFG com os demais métodos, nenhum problema de instabilidade numérica das soluções foi observado neste trabalho. Não foram observados modos espúrios para nenhum dos enriquecimentos do MEFG.

Frente aos ótimos resultados conclui-se, portanto, que o MEFG possui grande aplicabilidade e eficiência na resolução do problema de vibração livre de placas de Kirchhoff-Love.

8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão de continuidade sugere-se aplicar as formulações mais promissoras propostas neste trabalho para problemas transientes. Propõem-se aliar aos presentes métodos, técnicas de estabilização numérica, visando o melhor condicionamento das matrizes de massa para mitigação dos riscos a instabilidade numérica. Quando possível/necessário, sugere-se associar técnicas de refinamento adaptativo, almejando melhorar as respostas de frequências específicas, caso estas encontrem-se em zonas de baixa precisão do espectro. Uma análise relativa ao custo computacional associado a cada uma das propostas, visando quantificar a viabilidade de aplicação de cada técnica é recomendada. Propõem-se também ampliar a utilização do MEFG para condições de contorno e geometrias não contempladas no presente estudo, como placas pontualmente apoiadas, e o desenvolvimento de elementos isoparamétricos. Por fim, objetivando verificar a aplicabilidade completa destas formulações do MEFG na análise dinâmica de placas, sugere-se a extensão do presente estudo para placas de Reissner-Mindlin.

REFERÊNCIAS

- ADINI, A.; CLOUGH, R. W. Analysis of plate bending by the finite element method. **National Science Foundation**, Washington, D. C., np., 1960.
- ARGYRIS, J. H.; FRIED, I. & SCHARPF, D. W. The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. **The Aeronautics Journal of the Royal Aeronautics Society**, vol. 72, p.701-709, Julho, 1968.
- ARNDT, M. **O Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise Dinâmica de Estruturas Reticuladas**. 2009. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.
- ARNDT, M.; MACHADO, R.D.; SCREMIN, A. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses, **Journal of Sound and Vibration**, vol. 329, p. 659-672, 2010.
- ARNDT, M.; MACHADO, R.D.; SCREMIN, A. Accurate assessment of natural frequencies for uniform and non-uniform Euler-Bernoulli beams and frames by adaptive generalized finite element method, **Engineering Computations**, vol. 33, n. 5, p. 1586-1609, 2016.
- ASSAM, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. São Paulo: Editora UNICAMP, 2008.
- BABUSKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. Special Finite Element Methods for a Class of Second Order Elliptic Problems with Rough Coefficients, **Journal of Numerical Analysis**, vol. 31, p. 945–981, 1994.
- BABUSKA, I., BANERJEE, U. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM), **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. vol. 201–204, p. 91-111, 2012.
- BABUSKA, I.; LIPTON, R. Optimal local Approximation Spaces for Generalized Finite Element Methods with Applications to Multiscale Problems. **Technical Report**, ICES, vol.10-12, Austin, 2010.
- BAO, S. Y.; DENG, Z. C. A general solution of free vibration for rectangular thin plates in Hamilton Systems. **Journal of Dynamics and Control**, vol. 3, p.10-16, 2005.
- BARDELL, N. S. Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 151, np., 1991.
- BAZÁN, F. S. V. **Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, Computação e Aplicação**. Departamento de Matemática – Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2003.

BAZELEY, G. P.; CHEUNG, Y. K.; IRONS, B. M. & ZIENKIEWICZ, O. C. Triangular elements in plate bending – conforming and non-conforming solutions, **Proceedings on Matrix Methods in Structural Mechanics**, vol. 1, p. 547-576, Ohio, 1965.

BELL, K. A refined triangular plate bending finite element. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, vol.1, p.101-122, 1969.

BENZLEY S. E. Representation of Singularities with Isoparametric Finite Elements, **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, vol. 8 pg.:537–545, 1974.

BIANCOLINI, M.E.; BRUTTI, C.; RECCIA, L. Approximate Solution for Free Vibrations of Thin Orthotropic Rectangular Plates, **Journal of Sound and Vibration**. vol. 288, np., 2005.

BYSKOV, E. The Calculation of Stress Intensity Factors Using Finite Element with Cracked Element. **International Journal of Fracture Mechanics**, vol. 6, p. 159–167, 1970.

BOGNER, F. K.; FOX, R. L. & SCHMIT, L. A. **The generation of inter-element compatible stiffness and mass matrices by use interpolation formulas.** *In: First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Ohio, p.397-443, 1965.

BRENNER, S. C.; DAVIS, C. B.; SUNG, L. A partition of unity method for a class of fourth order elliptic variational inequalities. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, nv., np., 2014.

CARVALHO, N. F. **O Método Composto Aplicado à Análise de Vibrações Livres de Placas Espessas Brasil.** 2002. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2002.

CEN, S.; LONG, Z. F.; LUO, J.H.; LONG, Y. Q. Hamiltonian solution system for thin plates and its variational Principle. **Engineering Mechanics**, vol. 21, np., 2004.

CLOUGH, R. W.; TOCHER, J. L. **Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending.** *In: First Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, p. 515-545, 1965.

CITTADIN, C. C. **Enriquecimento seletivo com uso do método dos elementos finitos generalizados na análise dinâmica de problemas de estado plano.** Dissertação de Mestrado, Programa em Pós-graduação em Engenharia Civil - Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2020.

DEBELLA, L. B. C. **Análise dinâmica transiente pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados.** 2008. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

DYM, C. L.; SHAMES, I. H. **Solid Mechanics: a variational approach.** Springer, 2013.

FILIPICH, C. P.; ROSALES, M. B. Arbitrary precision frequencies of a free rectangular thin plate. **Journal of Sound and Vibration**. vol. 230, p.521-529, 2000.

FIX, G.; GULATI, S.; WAKOFF, G. I. On the use of singular functions with the finite element method. **Journal of Computational Physics**, vol.13, np., 1973.

FORD, W. **Numerical Linear Algebra with Applications** - Using Matlab. Elsevier Inc., 2015.

FRIES, T. M.; BELYTSCHKO, T. Review: The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications, **International Journal For Numerical Methods In Engineering**, 2010

GORMAN, D. J. Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superimposition. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 57, p. 437-447, 1978.

GORMAN, D. J. Free vibration analysis of rectangular plates with symmetrically distributed point supports along the edge. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 73, p. 563-574, 1980.

GORMAN, D. J. An analytical solution for the free vibration analysis of rectangular plates resting on symmetrically distributed point supports. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 79, p. 561-574, 1981.

GORMAN, D. J. Accurate Free Vibration Analysis of the Orthotropic Cantilever Plate. **Journal of Sound and Vibration**. vol. 181, p. 605-618, 1995.

GORMAN, D. J. Highly Accurate Free Vibration Eigenvalues for Completely Free Ortotropic Plate. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 280, 2005.

GREEN, A. E. Double Fourier series and boundary values problems. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, vol. 40, p. 222-228, 1944.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo: Volume 2**. 6ª ed., LTC, Instituto de Matemática e Estatística da USP, São Paulo, 2018

HIBBLER, R.C.; **Mechanics of Materials**. Nanyang Technological University, 2ª Edição, Illinois, EUA, 2010.

HIGHAM, D. **Condition numbers and their condition numbers**. Linear Algebra and its Applications, vol. 213, np., 1995,

HRABOK, M. M.; HRUDEY, T. M. A review and catalogue of plate bending elements. **Computers & Structures**, vol. 19, p.479-495, United States of America, 1984.

HU, H. C. **Variational Principles of Theory of Elasticity with Applications**. Gordon and Breach, New York, 1984.

IRONS, B. M.; DRAPER, K. J. Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending. **American Institute of Aeronautics and Astronautics**, vol. 3, p. 961, 1965.

IRONS, B. M.; RAZZAQUE, A. **Shape functions for elements other than displacement methods**. In: **Symposium on Variational Methods in Engineering**, University of Southampton, vol.4, p. 59-71, 1972.

IRONS, B. M. A conforming quartic triangular element for plate bending. **International Journal of Numerical Method in Engineering**, vol.1, p.29-45, 1969.

KSHIRSAGAR, S.; BHASKAR, K. Accurate and Elegant Free Vibration and Buckling Studies of Orthotropic Rectangular Plates Using Untruncated Infinite Series. **Journal of Sound and Vibration**, np., 2008.

LEISSA, A. W. **Vibration of Plates**. National Aeronautics and Space Administration SP-160, Ohio State University, Columbus, Ohio, 1969.

LEON, S. J. **Linear Algebra with Applications**. 4ª Edição, Prentice Hall, 1998.

LEVY, S. J. Buckling of rectangular plates with Built-in Edges. **Journal of Applied Mechanics**, vol. 9, np., 1942.

LEUNG, A. Y. T.; CHAN, J. K. W. Fourier p-element for the analysis of beams and plates. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 212, np., 1998.

LEUNG, A. Y. T.; ZHU, B. Fourier p-elements for curved beam vibrations. **Thin-Walled structures**. vol. 42, p. 39-57, 2004.

LIM, C. W.; LU, C. F.; XIANG, Y.; YAO, W. On new symplectic elasticity approach for exact free vibration solutions of rectangular Kirchhoff plates. **International Journal of Engineering Science**, vol. 47, np., 2009.

LOVE, A. E. H. **On the small free vibration and deformations of elastic shells**. The Royal Society Publishing, 1888.

LU, C.; SHANKER B. **Generalized Finite Element Method for Vector Electromagnetic Problems**: IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol.55, p.1369-1381, 2007.

MALACARNE, M.F. **O indicador de erro de Friberg empregado no método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise dinâmica de estruturas**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

MATACHE, A. M.; BABJUSKA, I.; SCHWAB, G. Generalized p-FEM in homogenization. **Numerical Mathematics**, vol. 86, np., 2000.

MELENKY, J. M. **On Generalized Finite Element Methods**. Tese de Doutorado, University of Maryland, 1995.

MELENKY, J.; BABUSKA, I. The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications. Austin: **Institute for Computational Engineering and Sciences**, University of Texas at Austin, 1996.

MELOSH, R. J. A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending. *Journal of Aeronautics Sciences*, vol. 28, p. 34-42, 1961.

O'HARA, P.; DUARTE, C.A.; EASON, T. Generalized Finite Element Analysis for Three-Dimensional Problems Exhibiting Sharp Thermal Gradients. **Computational Method in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 198, p. 1857–1871, 2009.

OUYANG, H.J.; ZHONG, W. X. Hamiltonian system and symplectic geometry in mechanics of materials (III)— Flexure and free vibration of plates. **Applied Mathematics and Mechanics**. vol.14, np., 1993.

PETROLI, T. **Condicionamento do Problema de Autovalores Obtido do Método dos Elementos Finitos Generalizados na Dinâmica de Estruturas**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, 2016.

PETYT, M. **Introduction to finite element vibration analysis**. Cambridge Press, 2010.

PIEADADE NETO, D.; PROENÇA, S.P.B. Generalized Finite Element Method in linear and nonlinear structural dynamic analyses. **Engineering Computations**, v. 33, p. 806-830, 2016.

POISSON, S.D. L'équilibre et le mouvement de corps élastiques. **Memoires L'Academie Royale Sciences**, L'Institute de France. vol. 8, np., 1829.

RAYLEIGH, L. **Theory of Sound**. vol. 1, Macmillan, London, 1945.

REDDY, B. **Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements**. Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Cape Town, África do Sul, 1997.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Departamento de Matemática Aplicada IMECC-UNICAMP, 2ª ed., Pearson, São Paulo, 1998.

SEOK, J. W.; TIERSTEN, H. F.; SCARTO, H.A. **Free vibrations of rectangular cantilever plates. Part 1: out-of-plane motion**. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 237, p.131-146, 2004.

SHANG, H.Y.; MACHADO, R.D.; ABDALLA FILHO J.E. Dynamic analysis of Euler-Bernoulli beam problems using the Generalized Finite Element Method. **International Journal of Computers and Structures**, v. 173, p. 109-122, 2016.

SIMONE, A.; DUARTE, C.A.; GIESSEN, V. A Generalized Finite Element Method for Polycrystals with Discontinuous Grain Boundaries. **International Journal in Numerical Methods in Engineering**, vol. 67, p. 1122–1145, 2006.

SORIANO, H.L.; **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica de Estruturas**. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2009.

STRANG, G. **Introduction to Applied Mathematics**. Wellesley-Cambridge Press, Illustred Edition, 1986.

TIMOSHENKO, S. **Vibration Problems in Engineering**. D. Van Nostrand Company, New York, 1937.

TIMOSHENKO, S.; KRIGER, S. W. **Theory of plates and shells**. McGRAW-HILL, classic textbook reissue, 1989.

TOCHER, J. J. **Analysis of plate bending using triangular elements**. Tese de Doutorado, 1962 - Department of Civil Engineering, University of California, Berkley, 1962.

TORII, A. J. **Análise Dinâmica de Estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizados**. 2012. Tese de Doutorado. Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

TORII, A. J.; MACHADO, R. D. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 9, p. 1-31, 2012.

VELBEKE, B. F. **Bending and stretching of plates – special models for upper and lower bounds**. *In: Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, p. 863-886, Ohio, 1965.

VISSER, W. A refined mixed type plate bending element. **American Institute of Aeronautics and Astronautics**, vol. 7, p. 1801-1803, 1969.

WARBURTON, G.B. The Vibration of Rectangular Plates. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, np., 1954.

WEINHARDT, P.O. **Estudo da estabilidade do método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado à análise dinâmica**. 2016. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

WILKINSON, J. H. **The Algebraic Eigenvalue Problem**, 1965.

WU, J. H.; LIU, A. Q.; CHEN, H.L. Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions. **Journal of Applied Mechanics**, vol. 74, p.1247-1251, 2007.

YAO, W.; ZHONG, W.; LIM, C. W. **Simplectic Elasticity**. World Scientific Publishing Co. 2009.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part I: principle and C0 element (bar). **Journal of Sound and Vibration**, vol. 218, p. 619-658, 1998(a).

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part II: C1 element (beam). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, p. 659-696, 1998(b).

ZHONG, Y.; ZHANG, Y. S. Free vibration of rectangular thin plate on elastic foundation with four edges free. **Journal of Vibration Engineering**, vol. 19, np., 2006.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The finite element method in engineering science**. Mc Graw-Hill, Nova York, 1977.

ZILL, D.; CULLEN, M. **Differential Equations with Boundary-Value Problems: 3th Edition**. Loyola Marymount University, Los Angeles, 1993.

APÊNDICE I: FUNDAMENTOS EM ELASTICIDADE SIMPLÉTICA

Apêndice destinado a fornecer um pano de fundo a respeito de um dos métodos existentes para obtenção da solução analítica do problema de autovalores associado à vibração livre das placas finas: a elasticidade simplética. O apêndice se inicia por seu histórico, passando por suas limitações e propostas aproximadas. Os tópicos apresentados baseiam-se fundamentalmente no livro “*Symplectic Elasticity*” de Yao, Zhong e Lim (2009). Portanto, para mais detalhes, consultar a bibliografia.

Espaço de fases é o nome dado a seguinte relação estabelecida entre um espaço vetorial \mathcal{M} e seu respectivo espaço dual \mathcal{M}' (YAO, ZHONG e LIM, 2009):

$$W = \mathcal{M} \times \mathcal{M}': \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} : \mathbf{p} \in \mathcal{M}, \mathbf{q} \in \mathcal{M}' \right\} \quad (\text{a.1})$$

Na maioria das situações práticas, mesmo que não exista correspondência física direta entre as grandezas dos elementos de \mathcal{M} e de seu espaço dual, \mathcal{M}' , a composição de W é definida em um problema para casos em que o produto destas duas grandezas físicas possui algum significado de interesse (YAO, ZHONG e LIM 2009).

Nesse contexto, define-se um espaço de fases como simplético quando existe um produto interno, representado por $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, que satisfaz quatro propriedades:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle \quad (\text{a.2})$$

$$\langle k\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = k \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, k \in \mathbb{R} \quad (\text{a.3})$$

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle \quad (\text{a.4})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}_W \Leftrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in W \quad (\text{a.5})$$

ou seja, todo e qualquer espaço de fase que possua um produto interno definido tal que seja antissimétrico, linear em relação ao primeiro argumento para soma e multiplicação por escalares e não degenerado, constitui um espaço simplético (YAO, ZHONG e LIM 2009). É imediato que todo elemento de um espaço simplético é simpleticamente ortogonal a si mesmo:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in W \quad (\text{a.6})$$

A matriz identidade simplética é denotada pela letra **J**. Ela é a estrutura que relaciona um espaço simplético $2n$ -dimensional às matrizes identidades euclidianas, através da matriz antissimétrica (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\mathbf{J}_{2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{a.7})$$

de tal forma que algumas propriedades podem ser estabelecidas:

$$\mathbf{J}_{2n}^2 = -\mathbf{I}_{2n} \quad (\text{a.8})$$

$$\mathbf{J}_{2n}^{-1} = -\mathbf{J}_{2n} \quad (\text{a.9})$$

$$\mathbf{J}_{2n}^{-1} = \mathbf{J}_{2n}^T \quad (\text{a.10})$$

$$\Delta(\mathbf{J}) = 1 \quad (\text{a.11})$$

de maneira análoga, dentro de um espaço euclidiano, a matriz unitária simplética exerce o papel da unidade imaginária. Por esta razão, pode-se correlacionar o produto interno simplético ao euclidiano da seguinte maneira (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T(\mathbf{J}\mathbf{y}) \quad (\text{a.12})$$

Para espaços euclidianos é usual que a modelagem de fenômenos da mecânica clássica conduza a transformações lineares simétricas. Diz-se que uma transformação linear euclidiana é simétrica se (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\mathbf{x}^T(\mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (\text{a.13})$$

ou seja:

$$\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \quad (\text{a.14})$$

Traçando o paralelo para os espaços simpléticos, é interessante definir uma estrutura análoga. Quando a ordem dos termos não influencia o resultado de uma

transformação simplética, tal transformação é nomeada como uma Transformação Hamiltoniana:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{H}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{H}\mathbf{x} \rangle \quad (\text{a.16})$$

onde $\mathbf{H}: W \rightarrow W$. O paralelo se torna evidente:

$$\mathbf{J}\mathbf{H}\mathbf{J} = \mathbf{H}^T \quad (\text{a.17})$$

As matrizes hamiltonianas possuem características específicas quando olhados sob o ponto de vista de seus autovalores. Algumas destas características, as tornam muito importantes para aplicações na física.

Primeiramente, seja \mathbf{H} uma matriz hamiltoniana, tal que $\mathbf{H}: W \rightarrow W$, sendo W um espaço simplético $2n$ -dimensional. Todos os autovalores complexos não nulos de \mathbf{H} são mutualmente simpléticos e adjuntos. Ou seja (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{H}\mathbf{x} = -\lambda\mathbf{x}, \forall \lambda \in \mathbb{C}^* \quad (\text{a.18})$$

portanto, se λ é autovalor de uma matriz hamiltoniana, $-\lambda$ obrigatoriamente também o é, e vice-versa. Para provar esse resultado dos espaços simpléticos, extremamente útil para enunciar diversas conclusões futuras, considere o problema (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$(\mathbf{I}\lambda - \mathbf{H})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{a.19})$$

a função característica pode ser obtida através de:

$$P(\lambda) = \Delta(\mathbf{I}\lambda - \mathbf{H}) \quad (\text{a.20})$$

aplicando-se a seguinte manipulação:

$$P(\lambda) = \Delta(\lambda\mathbf{J}\mathbf{J} - \mathbf{J}\mathbf{H}\mathbf{J}) \quad (\text{a.21})$$

de acordo com Eq. (a.21) e com Eq. (a.20):

$$P(\lambda) = \Delta(-\lambda\mathbf{I} - \mathbf{H}^T) \quad (\text{a.22})$$

transpondo-se todas as parcelas da Eq.(a.22):

$$P(\lambda) = \Delta(-\lambda\mathbf{I} - \mathbf{H}) \quad (\text{a.23})$$

portanto, conclui-se que, de fato, transformações hamiltonianas em espaços simpléticos possuem polinômios característicos pares (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$P(\lambda) = P(-\lambda) \quad (\text{a.24})$$

Considerando que para um dado autovalor λ_i exista um conjunto de m autovetores $\{\mathbf{x}_i^0, \mathbf{x}_i^1, \dots, \mathbf{x}_i^m\}$ e que, em paralelo, para um outro autovalor λ_j exista um conjunto com k autovetores associados $\{\mathbf{x}_j^0, \mathbf{x}_j^1, \dots, \mathbf{x}_j^k\}$, então, se $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, existe ortogonalidade simplética entre os autovetores (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\lambda_i + \lambda_j \neq 0 \Rightarrow \langle \mathbf{x}_i^r, \mathbf{x}_j^s \rangle = 0 \quad (\text{a.25})$$

com $r = 1, \dots, m$ e $s = 1, \dots, k$. Tal resultado é obtido através do processo de indução matemática. A demonstração completa está disponível em Yao, Zhong e Lim (2009).

Outra ferramenta matemática fundamental para a elasticidade simplética é a Transformada de Legendre. Ela é, segundo Lim et.al (2009), a chave para compreender a transformação de um sistema construído com formalismo Lagrangeano para um sistema com formalismo Hamiltoniano.

Define-se a Transformada de Legendre de uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, como a função \mathcal{F} tal que (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{a.26})$$

Ou seja, para uma dada f existirá outra função \mathcal{F} aonde as derivadas de f figuram como variáveis independentes e tal que \mathcal{F} é equivalente a f . Esse é o conceito e a definição da Transformada de Legendre (YAO, ZHONG e LIM, 2009). Para compreender o Princípio de Formação da Transformada de Legendre, será estudado o caso em que as componentes de f são definidas em termos das entradas de dois vetores genéricos \mathbf{x} e \mathbf{y} , tal que:

$$f = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{a.27})$$

assim sendo, através do teorema do diferencial total:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} d\mathbf{y} \quad (\text{a.28})$$

existe uma função:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\right) = f \quad (\text{a.29})$$

introduzida através do Princípio de Formação da Transformada de Legendre, definido por (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\mathcal{F} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{y} - f\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\right) \quad (\text{a.30})$$

pode-se perceber que:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x}; \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{y} \quad (\text{a.31})$$

Descrever um sistema através da função lagrangeana em termos contínuos nem sempre é uma forma viável de representar um fenômeno mecânico. Muitas vezes, pela falta de informações e condições, utilizar informações discretas e

pontuais, conhecidas como graus de liberdade, já é suficiente. Definindo um vetor n-dimensional $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$, onde cada uma das entradas v_i é equivalente a um valor pontual de deslocamento generalizado, localizado em algum ponto da linha neutra da placa, e tomando $\dot{\mathbf{v}} = (\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dots, \dot{v}_n)^T$ o vetor n-dimensional definido a partir das velocidades generalizadas, relativas a cada um dos valores de deslocamento de \mathbf{v} . A ação realizada pelo sistema, pode ser aproximada pelo somatório da lagrangeana acumulada apenas entre os instantes de tempo que unem os estados iniciais $(\mathbf{v}_0, \dot{\mathbf{v}}_0)$ e finais $(\mathbf{v}_f, \dot{\mathbf{v}}_f)$, nos tempos t_0 e t_f , respectivamente, onde:

$$\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_D(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \quad (\text{a.32})$$

desta forma, o sistema será caracterizado apenas através das equações de movimento de algumas de suas partículas, chamadas de graus de liberdade e a ação será:

$$I_D = \int_{t_0}^{t_f} \mathcal{L}_D(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) dt \quad (\text{a.33})$$

Aplicando o operador variacional $\delta(\cdot)$ na forma discreta do funcional de energia, Π_{1D} , surge uma composição alternativa da Equação de Euler-Lagrange (YAO, ZHONG e LIM, 2009):

$$\delta\Pi_{1D} = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \mathbf{v}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) \right) \delta \mathbf{v} dt \quad (\text{a.34})$$

De acordo com o Princípio de Hamilton, obrigatoriamente $\delta\Pi_{1D} = 0$, (LIM et.al, 2009) e, para variações arbitrárias $\delta \mathbf{v}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \mathbf{v}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \right) = 0 \quad (\text{a.35})$$

Para escrever o sistema em coordenadas hamiltonianas canônicas deve-se, através da aplicação da Transformada de Legendre, obter um sistema dual de outras

coordenadas generalizadas \mathbf{m} associadas a $\dot{\mathbf{v}}$, chamadas de momentos generalizados (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\mathbf{m} = \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \dot{\mathbf{v}}} \quad (\text{a.37})$$

Percebe-se que, nestas condições, as velocidades generalizadas serão escritas em termos dos momentos generalizados e dos deslocamentos generalizados (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, \mathbf{m}) \quad (\text{a.38})$$

Esta manipulação é extremamente útil. Descrever o sistema em termos de momentos generalizados, permite eliminar a utilização de derivadas temporais como variáveis independentes do problema. De acordo com o Princípio de Formação da Transformada de Legendre, torna-se possível introduzir a Função Hamiltoniana \mathcal{H} , equivalente a Transformada de Legendre da Função Lagrangeana (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\mathcal{H}(\mathbf{v}, \mathbf{m}) = \mathbf{m}^T \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, \mathbf{m}) - \mathcal{L}_D(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{v}, \mathbf{m})) \quad (\text{a.39})$$

O paralelo entre a Eq. (a.39) e a Eq. (a.30) torna-se evidente, pois $\mathcal{H}(\mathbf{v}, \mathbf{m})$ é a transformada de Legendre de $\mathcal{L}_D(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$. A primeira parcela de \mathcal{H} corresponde a duas vezes a energia cinética do sistema. Portanto (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\mathcal{H}(\mathbf{v}, \mathbf{m}) = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} \quad (\text{a.40})$$

Com a função hamiltoniana do sistema formulada, torna-se possível relacionar as formulações em ambos os sistemas e obter (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{v}} = - \frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \mathbf{v}} \quad (\text{a.41})$$

e também perceber que:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{m}} \quad (\text{a.42})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_D}{\partial \mathbf{v}} = \dot{\mathbf{m}} \quad (\text{a.43})$$

relações que permitem obter as duas Equações Hamiltonianas na Forma Canônica (YAO, ZHONG e LIM 2009):

$$\dot{\mathbf{m}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{v}} \quad (\text{a.44})$$

$$\dot{\mathbf{m}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{m}} \quad (\text{a.45})$$

Juntas, elas fornecem duas formas distintas de obtenção da derivada dos momentos lineares generalizados em termos dos deslocamentos generalizados e dos próprios momentos lineares generalizados, respectivamente. As duas Equações Hamiltonianas na Forma Canônica podem ser sintetizadas em uma única equação:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{m}} = \mathbf{0} \quad (\text{a.46})$$

Particularizando esta análise para os fenômenos elásticos relativos a placas finas, a fim de se extrair um problema de autovalores para uma matriz hamiltoniana, é necessário listar alguns resultados diretos da mecânica newtoniana aplicada às placas. Estes resultados se referem ao equilíbrio interno de esforços da placa e são dados por (LIM et.al, 2009):

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -\lambda^2 \rho h \Phi \quad (\text{a.47})$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (\text{a.48})$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (\text{a.49})$$

onde Q_x e Q_y representam os esforços cortantes nas faces da placa, M_x e M_y os momentos fletores e M_{xy} o momento volvente. Para tornar o equacionamento mais conveniente, cada um dos momentos envolvidos será escrito em função das curvaturas ϱ_x , ϱ_y e ϱ_{xy} :

$$M_x = D(\varrho_x + \nu\varrho_y) \quad (\text{a.50})$$

$$M_y = D(\varrho_y + \nu\varrho_x) \quad (\text{a.51})$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu)\varrho_{xy} \quad (\text{a.52})$$

Cada uma das curvaturas representa uma das derivadas segundas de w (LIM et.al, 2009):

$$\varrho_x = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (\text{a.53})$$

$$\varrho_y = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (\text{a.54})$$

$$\varrho_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (\text{a.55})$$

Também pode-se determinar as forças equivalentes de cisalhamento como (LIM et.al, 2009):

$$V_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (\text{a.56})$$

$$V_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (\text{a.57})$$

A fim de dar continuidade à dedução, é necessário introduzir uma variável de rotação em torno do eixo e_1 , permitindo a implementação da análise simplética, através da construção do par dual de variáveis (LIM et.al, 2009):

$$\theta_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (\text{a.58})$$

Define-se também o conceito de energia complementar dada por (LIM et.al, 2009):

$$\bar{E} = \frac{1}{2D(1-\nu^2)} (M_x^2 + M_y^2 + 2\nu M_x M_y + 2(1+\nu)M_{xy}^2) \quad (\text{a.59})$$

Associada aos momentos de flexão e torção da placa, permite escrever Π_2 , o segundo funcional de energia da placa, em termos da energia complementar \bar{E} (LIM et.al, 2009):

$$\Pi_2 = \int (M_x \varrho_x + M_y \varrho_y + 2M_{xy} \varrho_{xy} - \bar{E} - E_{\text{cin}}) d\Omega \quad (\text{a.60})$$

A formulação de Π_2 entretanto, infelizmente, ainda não é conveniente, pois não permite a construção do problema de autovalores em relação ao vetor de estados (LIM et.al, 2009). Para contornar este problema, suponha que se deseje construir um vetor de estado \mathbf{s} , que represente o sistema no espaço simplético W , da forma:

$$\mathbf{s} = (\Phi, \theta, V, M)^T \quad (\text{a.61})$$

Por convenção V e M , representam, respectivamente, V_x e M_x . Ou seja, nesta representação, o sistema de coordenadas no espaço simplético será estabelecido e descrito de maneira suficiente através de quatro informações. Informações relativas a deslocamentos, rotações e esforços internos. Uma vez que as entradas relativas aos momentos e esforços cortantes equivalentes dizem respeito apenas ao eixo \mathbf{e}_1 , os momentos e cortantes relativos às outras direções deverão, portanto, ser reescritos unicamente em termos das variáveis que compõem o vetor de estado (LIM et.al, 2009). Para que essa manipulação seja possível, reescreve-se:

$$M_y = -(1-\nu^2)D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (\text{a.62})$$

$$M_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{a.63})$$

Essa substituição é necessária porque permite obter uma formulação alternativa para a energia potencial total da placa, em termos das entradas do vetor de estado:

$$E_{\text{pot}} = V\theta + \nu M \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{2D} M^2 - \frac{1 - \nu^2}{2} D \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 - (1 - \nu) D \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{a.64})$$

Substituindo-se a Eq. (a.62) e Eq. (a.63) na Eq. (a.60) e Eq. (a.59) na Eq. (a.60) e aplicando-se as manipulações necessárias, obtém-se a equação do segundo funcional de energia, agora reescrito de uma maneira conveniente (LIM et.al, 2009):

$$\Pi_2 = \int (V\Phi_x - M\theta_x - E_{\text{cin}} - E_{\text{pot}}) d\Omega \quad (\text{a.65})$$

O índice x indica derivação parcial em relação a variável. Percebe-se que a última parcela é equivalente a função hamiltoniana da placa:

$$\Pi_2 = \int (V\Phi_x - M\theta_x - \mathcal{H}) d\Omega \quad (\text{a.66})$$

Fazendo-se $\delta\Pi_2 = 0$, a fim de atingir um problema matricial em termos das entradas do vetor de estados, pode-se rearranjar os termos da igualdade obtida para a seguinte relação:

$$\mathbf{s}_x = \mathbf{H}\mathbf{s} \quad (\text{a.67})$$

uma expressão unicamente em termos do vetor de estados \mathbf{s} . \mathbf{H} é um operador hamiltoniano, tal que $\mathbf{H} \in W$, dado por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1} & \mathbf{H}_{1,2} \\ \mathbf{H}_{2,1} & \mathbf{H}_{1,1}^T \end{bmatrix} \quad (\text{a.68})$$

onde, cada um dos blocos do operador hamiltoniano é dado por:

$$\mathbf{H}_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -v \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a.68})$$

$$\mathbf{H}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{D} \end{bmatrix} \quad (\text{a.69})$$

$$\mathbf{H}_{2,1} = \begin{bmatrix} D(1-v^2) \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \rho h \lambda^2 & 0 \\ 0 & 2D(1-v^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (\text{a.70})$$

Com a equação hamiltoniana dual em mãos, basta estabelecer hipóteses acerca da construção do vetor de estados e , a partir desta metodologia, obter um problema de autovalores em relação a matriz \mathbf{H} .

Para obter tal problema de autovalores em W , utiliza-se a hipótese da separação das variáveis (LIM et.al, 2009):

$$\mathbf{s} = c(x)\mathbf{d}(y) \quad (\text{a.70})$$

onde, segundo esta hipótese, o vetor de estados é definido através de um produto de uma função escalar na direção de x por uma função vetorial na direção y . Uma vez que a Equação Dual Hamiltoniana é, na realidade um sistema de equações diferenciais em relação a variável x através do operador linear \mathbf{H} , por analogia ao problema equivalente relativo a sistemas de equações diferenciais ordinárias, supõem-se que:

$$c(x) = e^{\omega x} \quad (\text{a.71})$$

Substituindo-se a Eq. (a.71) na Eq. (a.67):

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{\omega x}\mathbf{d}) = \mathbf{H}(e^{\omega x}\mathbf{d}) \quad (\text{a.72})$$

$$\therefore \omega \mathbf{d} = \mathbf{H}\mathbf{d} \quad (\text{a.73})$$

um problema de autovalores e autovetores em W , onde $\omega \in \mathbb{C}$. O vetor \mathbf{d} é autovetor de \mathbf{H} . Constrói-se então o problema de autovalores:

$$(\mathbf{H} - \mathbf{I}\omega)\mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (\text{a.74})$$

Infelizmente, devido a existência de operadores diferenciais em \mathbf{H} , essa, ainda não é uma forma conveniente de formular o problema de autovalores. Isso porque, muito pouco ou nada se sabe acerca do vetor de funções \mathbf{d} . Para tal, supõem-se que \mathbf{d} seja um vetor composto por funções suficientemente diferenciáveis em relação a y , da forma:

$$\mathbf{d} = e^{\tau y} (A \ B \ C \ F)^T \quad (\text{a.75})$$

onde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ e $\tau \in \mathbb{C}$.

Através de sua distribuição através dos blocos de \mathbf{H} percebe-se que, na realidade:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{H}_{1,1} - \mathbf{I}_2\omega)e^{\tau y} & \mathbf{H}_{1,2}e^{\tau y} \\ \mathbf{H}_{2,1}e^{\tau y} & (\mathbf{H}_{1,1} - \mathbf{I}_2\omega)e^{\tau y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A, B)^T \\ (C, F)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,0)^T \\ (0,0)^T \end{bmatrix} \quad (\text{a.76})$$

Iniciando pelo primeiro bloco:

$$(\mathbf{H}_{1,1} - \mathbf{I}_2\omega)e^{\tau y} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -v\tau^2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix} \right) e^{\tau y} \quad (\text{a.77})$$

Portanto:

$$(\mathbf{H}_{1,1} - \mathbf{I}_2\omega)e^{\tau y} = \begin{bmatrix} -\omega & 1 \\ -v\tau^2 & -\omega \end{bmatrix} e^{\tau y} \quad (\text{a.78})$$

Prosseguindo para o segundo bloco:

$$\mathbf{H}_{1,2}e^{\tau y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{D} \end{bmatrix} e^{\tau y} \quad (\text{a.79})$$

Agora, para o terceiro bloco:

$$\mathbf{H}_{2,1}e^{\tau y} = \begin{bmatrix} D(1-v^2)\frac{\partial^4 e^{\tau y}}{\partial y^4} - \rho h\lambda^2 e^{\tau y} & 0 \\ 0 & 2D(1-v^2)\frac{\partial^2 e^{\tau y}}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (\text{a.80})$$

Portanto, ao serem realizadas todas as derivações parciais em relação a y :

$$\mathbf{H}_{2,1}e^{\tau y} = \begin{bmatrix} D(1-v^2)\tau^4 - \rho h\lambda^2 & 0 \\ 0 & 2D(1-v^2)\tau^2 \end{bmatrix} e^{\tau y} \quad (\text{a.81})$$

Para obter o quarto e último bloco do problema de autovalores, basta-se transpor o primeiro. Percebe-se que uma vez que a função escalar $e^{\tau y}$ multiplica todos os termos do lado esquerdo da equação do problema de autovalores, e que, finalmente, agora, a matriz relativa ao problema de autovalores é composta apenas por entradas numéricas, permitindo desenvolver a expressão do polinômio característico, o problema de autovalores está em uma forma conveniente de ser trabalhada.

Para que \mathbf{d} seja autovalor da matriz hamiltoniana, é necessário que:

$$\Delta(\mathbf{H}_\lambda) = 0 \quad (\text{a.82})$$

$$\mathbf{H}_\lambda = \begin{bmatrix} -\omega & 1 & 0 & 0 \\ -v\tau^2 & -\omega & 0 & -\frac{1}{D} \\ D(1-v^2)\tau^4 - \rho h\lambda^2 & 0 & -\omega & -v\tau^2 \\ 0 & 2D(1-v^2)\tau^2 & 1 & -\omega \end{bmatrix} \quad (\text{a.83})$$

De acordo com Lim et.al (2008), embora o polinômio característico, a princípio, dependa de três variáveis, ou seja, $P = P(\lambda, \omega, \tau)$, na realidade, o procedimento padrão da análise simplética define que o problema deve ser resolvido primordialmente buscando-se uma expressão geral para os autovalores relativo ao autovetor da direção y , isto é, derivando as expressões como $\tau = \tau(\omega, \lambda)$. Para tal, primeiramente é necessário expressar a forma geral do polinômio característico e depois o fatorar, buscando expressar as raízes $\tau(\omega, \lambda)$. Aplicando-se o Teorema de Laplace na primeira linha da matriz hamiltoniana, desenvolve-se o determinante em:

$$P(\lambda, \omega, \tau) = \omega^2(\omega^2 + 2(1 - v^2)\tau^2 + v\tau^2) + \tau^2(v\omega + (1 - 2v^2)\tau^2) \quad (\text{a.84})$$

Fatorando-se a expressão Eq. (a.84), percebe-se que existem valores para ω, λ para os quais a expressão é nula em termos de τ :

$$P(\lambda, \omega, \tau) = \prod_{i,j=1}^2 \left(\tau + (-1)^i \sqrt{\lambda \sqrt{\frac{\rho h}{D}} + (-1)^j \omega^2} \right) \quad (\text{a.85})$$

A equação Eq. (a.85) expressa que existem quatro formas possíveis de correlacionar os parâmetros ω, λ para que eles constituam uma solução da equação característica em termos de τ , sendo estas, pois, as formas gerais dessa solução:

$$\tau_1 = \sqrt{\lambda \sqrt{\frac{\rho h}{D}} - \omega^2} \quad (\text{a.86})$$

$$\tau_2 = -\sqrt{\lambda \sqrt{\frac{\rho h}{D}} - \omega^2} \quad (\text{a.87})$$

$$\tau_3 = \sqrt{\lambda \sqrt{\frac{\rho h}{D}} + \omega^2} \quad (\text{a.88})$$

$$\tau_4 = -\sqrt{\lambda \sqrt{\frac{\rho h}{D}} + \omega^2} \quad (\text{a.89})$$

Com estas quatro relações em mãos, pode-se estabelecer a forma geral dos autovetores relacionados a todos os autovalores $\tau_i \neq 0$.

Outro detalhe é que, uma vez que, para matrizes hamiltonianas, em espaços simpléticos, os polinômios característicos são sempre pares, tanto τ como $-\tau$ serão, obrigatoriamente, autovalores associados ao mesmo autovetor. Portanto, permite-se expressar a formulação geral da solução, que, anteriormente era escrita em termos de funções exponenciais, em termos de funções hiperbólicas. Para cada autovalor τ_i

existirá um vetor de constantes $(A_i \ B_i \ C_i \ F_i)^T$ escrito em termos das funções hiperbólicas associadas a cada um dos autovalores (LIM et.al, 2008):

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ F_1 \end{pmatrix} \cosh(\tau_1 y) + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ F_2 \end{pmatrix} \sinh(\tau_2 y) + \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \\ F_3 \end{pmatrix} \cosh(\tau_3 y) + \begin{pmatrix} A_4 \\ B_4 \\ C_4 \\ F_4 \end{pmatrix} \sinh(\tau_4 y) \quad (\text{a.90})$$

Ou seja, conclui-se que, no vetor de estados, os valores de Φ podem ser expressos como:

$$\Phi = e^{\omega x} (A_1 \cosh(\tau_1 y) + A_2 \sinh(\tau_2 y) + A_3 \cosh(\tau_3 y) + A_4 \sinh(\tau_4 y)) \quad (\text{a.91})$$

As rotações, como:

$$\theta = e^{\omega x} (B_1 \cosh(\tau_1 y) + B_2 \sinh(\tau_2 y) + B_3 \cosh(\tau_3 y) + B_4 \sinh(\tau_4 y)) \quad (\text{a.92})$$

Os valores do esforço cortante equivalente:

$$V = e^{\omega x} (C_1 \cosh(\tau_1 y) + C_2 \sinh(\tau_2 y) + C_3 \cosh(\tau_3 y) + C_4 \sinh(\tau_4 y)) \quad (\text{a.93})$$

E, por fim, os valores para os momentos fletores:

$$M = e^{\omega x} (D_1 \cosh(\tau_1 y) + D_2 \sinh(\tau_2 y) + D_3 \cosh(\tau_3 y) + D_4 \sinh(\tau_4 y)) \quad (\text{a.94})$$

As expressões das Eq. (a.91), Eq. (a.92), Eq. (a.93) e Eq. (a.94), mesmo que representem, de fato, a expressão geral para a composição das entradas de \mathbf{d} , pouco dizem a respeito da obtenção dos valores de τ_i . Existem infinitos valores de ω e λ e, para cada uma das combinações entre estes valores, existirá infinitos diferentes valores de τ_i .

A fim de padronizar esta análise, Lim et.al (2008) mostram que, para a condição da placa com dois de seus lados simplesmente apoiados, é possível sintetizar a variação de ω e λ , associando-os a um único parâmetro natural, da forma ω_n e λ_n , particularizando a expressão da Eq. (a73), para o caso em que tal índice

seja variado, ou seja, $\mathbf{d} = \mathbf{d}_n$, expressão geral para o vetor de estados é dada, por fim, unicamente através do parâmetro natural n (LIM et.al, 2008):

$$\mathbf{s} = \sum_{n=1}^{+\infty} (z_1(n)e^{\omega_n x} \mathbf{d}_n + z_2(n)e^{-\omega_n x} \mathbf{d}_{-n} + z_3(n)e^{\omega'_n x} \mathbf{d}'_n + z_4(n)e^{\omega'_n x} \mathbf{d}'_{-n}) \quad (\text{a.95})$$

onde ω_n e ω'_n são os valores possíveis para o caso em que duas das bordas paralelas são simplesmente apoiadas. As funções escalares $z_i(n)$ são funções genéricas utilizadas para atender as condições de contorno nas bordas que não são definidas a priori como simplesmente apoiadas. Os vetores \mathbf{d}'_n são simplesmente os autovetores associados aos valores na forma ω'_n e possuem ortogonalidade simplética em relação a \mathbf{d}_n :

$$\langle \mathbf{d}'_n, \mathbf{d}_n \rangle = 0 \quad (\text{a.96})$$

Mostrando, portanto, que existem duas formas distintas e equivalentes de expressar o vetor de estados \mathbf{s} .

APÊNDICE II: COMENTÁRIOS SOBRE A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MEFG

Apêndice destinado a detalhar pontos importantes inerentes a um dos principais desafios comuns à implementação computacional do MEFG em problemas bidimensionais: o gerenciamento dos graus de liberdade enriquecidos.

Para fins de padronização, os graus de liberdade foram indexados no sistema global segundo a seguinte sequência:

- Graus de liberdade nodais;
- Graus de liberdade borda;
- Graus de liberdade bolha.

Os principais pontos relativos à indexação e numeração utilizados para cada um dos tipos de graus de liberdade possuem peculiaridades que os diferenciam.

Os graus de liberdade nodais são enumerados primeiro. Seguindo a disposição e numeração dos nós, estrutura-se uma maneira equivalente ao feito sem a presença dos enriquecimentos. Em um sistema de numeração dos nós, cada nó recebe um número $n_{\text{nó}}$. Considerando quatro graus de liberdade por nó, a relação de recorrência a seguir determina a numeração dos graus de liberdade n_{GL} com seu respectivo nó:

$$n_{\text{GL}} = 4n_{\text{nó}} + k \quad (\text{a.96})$$

com $k=1,2,3,4$. Desta forma, existem um total de graus de liberdade nodais $N_{\text{GL nodais}}$ dados como função do número total de nós $N_{\text{nós}}$:

$$N_{\text{GL nodais}} = 4 N_{\text{nós}} \quad (\text{a.97})$$

Para enumerar os graus de liberdade borda, dois pontos principais precisam ser considerados. O primeiro deles é a compatibilidade entre os enriquecimentos. Compatibilizar os enriquecimentos de uma dada borda, de uma maneira geral, significa garantir que as funções de forma relativas a cada dado grau de liberdade

sejam equivalentes para os dois elementos que compartilham a intersecção. Este é, sem dúvidas, o maior desafio inerente aos graus de liberdade borda. Automatizar esse procedimento significa encontrar uma maneira padronizada de ordenar os graus de liberdade borda no sistema local de graus de liberdade. A técnica proposta no presente estudo para atingir esse objetivo consiste, basicamente, em um sistema de classificação das funções de forma do tipo borda. O algoritmo realiza a classificação em duas etapas:

- Classificar os graus de liberdade quanto a borda a que eles pertencem, padronizando a ordem das bordas no sistema já adotado para a aplicação das condições de contorno;
- Com os graus de liberdade corretamente atribuídos às suas respectivas bordas, padroniza-se a ordenação dos graus de liberdade de uma mesma borda, para que a compatibilização possa ser feita na existência de um elemento que compartilhe a borda.

Um sistema de símbolos é definido. Tal sistema permite que cada um dos graus de liberdade borda possa ser identificado de maneira única e suficiente mediante apenas 3 informações:

- Borda a qual pertence: I, II, III ou IV;
- A função 1D nodal: “t” para translação e “r” para rotação;
- O nível do enriquecimento: 1, 2, 3, ...

Dessa forma, os graus de liberdade borda são numerados no sistema local seguindo a seguinte convenção:

- Ordem crescente de bordas;
- Graus de liberdade provenientes de enriquecimentos de translação primeiro;
- Ordem crescente de níveis de enriquecimentos.

Assim, está garantida a compatibilidade entre os enriquecimentos do tipo borda e os graus de liberdade podem ser enumerados no sistema global. A numeração dos graus

de liberdade do tipo borda no sistema global necessita, por sua vez, de uma numeração auxiliar das bordas. Cada borda recebe um número n_{borda} , e os graus podem ser alocados no sistema global seguindo a seguinte expressão:

$$n_{\text{GL}} = N_{\text{GL nodais}} + M_1 n_{\text{borda}} + k \quad (\text{a.98})$$

onde M_1 representa o número de graus de liberdade enriquecidos por borda e $k = 1, 2, \dots, M_1$.

Por fim, os graus de liberdade do tipo bolha, não necessitam de nenhum tipo de compatibilização, visto que possuem suporte apenas em um único elemento. Conseqüentemente, podem ser diretamente numerados no sistema global, seguindo a relação:

$$n_{\text{GL}} = N_{\text{GL nodais}} + N_{\text{GL borda}} + iM_2 + k \quad (\text{a.99})$$

com M_2 igual ao número de graus de liberdade bolha por elemento, i igual ao índice do elemento, $N_{\text{GL borda}}$ o número total de graus enriquecidos do tipo borda em toda a malha e $k = 1, 2, \dots, M_2$.