UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EVERSON LUIZ RICORDI

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA UMA EQUAÇÃO DE ONDAS SEMILINEAR EM $\mathbb{R}^n$

CURITIBA
2019

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EVERSON LUIZ RICORDI

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA UMA EQUAÇÃO DE ONDAS SEMILINEAR EM $\mathbb{R}^n$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Higidio Portillo Oquendo.

CURITIBA
2019

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

R541c Ricordi, Everson Luiz

Comportamento assintotico para uma equacão de ondas semilinear em Rn [recurso eletrônico] / Everson Luiz Ricordi – Curitiba, 2019.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção de título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof Dr. Higidio Portillo Oquendo.

1. Equação de onda. 2. Matemática. I. Oquendo, Higidio Portillo. II. Universidade Federal do Paraná. III. Título.

CDD 530.124

Bibliotecária: Vilma Machado CRB-9/1563

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA - 40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **EVERSON LUIZ RICORDI** intitulada: **Comportamento assintótico para uma equação de ondas semilinear em Rn**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 31 de Maio de 2019.

HIGIDIO PORTILLO OQUENDO
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

Cleverson R. da Luz
CLEVERSON ROBERTO DA LUZ
Avaliador Externo (UFSC)

JURANDIR CECCON
Avaliador Interno (UFPR)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por todo o suporte que me deram.

Ao Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo, pela orientação e paciência.

Ao programa de Pós-graduação em Matemática da UFPR, pela grande oportunidade.

A todos os professores que fizeram parte da minha trajetória acadêmica, em especial ao Prof. Dr. Fabio Antonio Dorini da UTFPR, pelo apoio e incentivo.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos os resultados de existência, unicidade e comportamento assintótico da solução para o problema de Cauchy de equações de ondas duplamente amortecidas (amortecimento friccional u_t e viscoelástico $-\triangle u_t$),

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + u_t - \triangle u_t = f(u), & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ (u, u_t)(0, x) = (u_0, u_1)(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

sob a presença de não linearidades do tipo, $f(u) = |u|^p$, $|\nabla u|^p$, $|u_t|^p$, com $p > 1$. Assumimos que os dados iniciais pertencem aos conjuntos

$$(L^1 \cap H^1) \times (L^1 \cap L^2) \text{ ou } (W^{1,1} \cap H^2) \times (L^1 \cap L^2),$$

e deduzimos as estimativas de energia, bem como as estimativas L^1 para a solução da parte linear deste problema. Então, mostramos a existência global de solução para (1) em qualquer espaço de dimensão $n \geq 1$ para quaisquer dados iniciais suficientemente pequenos.

Palavras-chave: Equações de ondas duplamente amortecidas, solução global para dados pequenos.

ABSTRACT

In this work, we study the results of existence, uniqueness and asymptotic behavior of the solution to the Cauchy problem of doubly damped wave equations (frictional damping u_t and viscoelastic $-\triangle u_t$),

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + u_t - \triangle u_t = f(u), & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ (u, u_t)(0, x) = (u_0, u_1)(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

under the presence of non-linearities of the type, $f(u) = |u|^p$, $|\nabla u|^p$, $|u_t|^p$, with $p > 1$. We assume that the initial data belong to the sets

$$(L^1 \cap H^1) \times (L^1 \cap L^2) \text{ ou } (W^{1,1} \cap H^2) \times (L^1 \cap L^2),$$

and we derive the energy estimates, as well as the estimates L^1 for the solution of the linear part of this problem. We then show the global solution existence for (1) in any dimension space $n \geq 1$ for any sufficiently small initial data.

Keywords: Doubly damped waves, global small data solution.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação, baseado em [6], estudamos a existência, unicidade e comportamento assintótico da solução para o problema de Cauchy de equações de ondas duplamente amortecidas (amortecimento friccional u_t e amortecimento viscoelástico $-\triangle u_t$),

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + u_t - \triangle u_t = f(u), & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

sob a presença de não linearidades do tipo $f(u) = |u|^p$, $|\nabla u|^p$, $|u_t|^p$, com $p > 1$. Primeiro, deduzimos as estimativas de energia e as estimativas L^1 para a parte linear deste problema,

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + u_t - \triangle u_t = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.2}$$

e então aplicamos estas estimativas para obter a existência de solução global para os referidos problemas não-lineares, em qualquer espaço de dimensão $n \geq 1$, para dados iniciais suficientemente pequenos. A solução para (1.2) possui boas propridades as quais nos permitem empregar técnicas e obter resultados novos, quando comparados aos resultados correspondentes para o problema da equação de onda com somente o amortecimento friccional u_t, ou com somente o amortecimento viscoelástico $-\triangle u_t$.

A presença dos dois termos de amortecimento traz grandes benefícios para a solução de (1.2), por um lado ela herda as mesmas propriedades de decaimento da solução para o problema de equação onda com amortecimento friccional somente. Por outro lado, possui a mesma regularidade da solução para o problema de equação de onda com amortecimento viscoelástico somente. Deste modo, o perfil da solução em baixas frequências é modificado pela presença do termo de amortecimento u_t, enquanto que, o perfil da solução em altas frequências é modificado pela presença do termo de amortecimento $-\triangle u_t$.

Como consequência destas propriedades combinadas, obtemos a existência global para o probema de Cauchy (1.1), em qualquer espaço de dimensão $n \geq 1$, assumindo somente dados iniciais no espaço de energia com regularidade L^1 adicional. Para ilustrar, o resultado correspondente para a equação de onda com somente amortecimento friccional, com não linearidade do tipo $|u|^p$, somente é válido em dimensão $n = 1, 2$. A extensão do resultado para $n \geq 1$ requer suposições mais fortes sobre os dados iniciais.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2, introduzimos alguns resultados pertinentes ao desenvolvimento dos resultados. No capítulo 3 seções 1 e 2, deduzimos as estimativas de energia e as estimativas L^1 para a solução de (1.2). Para isso, mostramos que para dados iniciais pertencentes ao espaço $H^m \times L^2$, com $m = 0, 1, 2$, o problema de Cauchy (1.2) possui solução global u, satisfazendo $u(t, \cdot) \in H^m$ para todo $t \geq 0$. Em seguida, utilizando as propriedades da transformada de Fourier e os resultados de interpolação no espaço $L^1 \cap L^2$, deduzimos algumas estimativas de energia para u. Ainda, utilizando a desigualdade de Young para convoluções, obtemos as estimativas L^1, supondo que os dados iniciais pertençam à $L^1 \times L^1$ ou $W^{1,1} \times L^1$.

No capítulo 3 seção 3, mostramos a existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy (1.1) e obtemos ainda o comportamento assintótico da solução. Para tanto, consideramos então o espaço,

$$\mathcal{X} = C([0, \infty), W_1) \cap C^1([0, \infty), W_2),$$

onde W_1 e W_2 são espaços de Banach de funções definidas em $\mathbb{R}^n$ e um operador M definido sobre $\mathcal{X}$. Então, provamos que $\mathcal{X}$ é um espaço de Banach e que sob certas condições o operador M pode ser restringido sobre um espaço métrico completo $\mathcal{X}_r \subset \mathcal{X}$ e utilizando o teorema do ponto fixo de Banach, mostramos que M possui ponto fixo.

Por fim, aplicando este resultado e utilizando as estimativas de decaimento da solução da parte linear, mostramos que o problema (1.1) possui uma única solução global, em qualquer espaço de dimensão $n \geq 1$, para as não linearidades citadas anteriormente e ainda obtemos o comportamento assintótico destas soluções.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo serão apresentadas a terminologia, as notações e alguns resultados sobre os espaços L^p, espaços de Sobolev e transformada de Fourier que serão úteis no decorrer deste trabalho.

Por $\mathbb{N}_0^n$ denotamos a n-upla de números naturais, incluído o número 0. Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, definimos

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!.$$

Ainda, se $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ é tal que $\beta_j \leq \alpha_j$ para todo $1 \leq j \leq n$, escrevemos simplesmente $\beta \leq \alpha$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, definimos x^α como

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Dadas duas funções f, g definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, denotamos o suporte de f como sendo o conjunto $supp(f) = \overline{\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}}$. Valem as seguintes propriedades:

- $supp(f+g) \subset supp(f) \cup supp(g)$;
- $supp(fg) \subset supp(f) \cap supp(g)$;
- $supp(af) = a supp(f)$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Escrevemos $f \lesssim g$ quando existe $C > 0$ tal que $f \leq Cg$.

2.1 Espaços de Banach

2.1.1 Espaços Métricos

Definição 2.1.1 *Seja X um conjunto. Uma métrica sobre X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$d(x, y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$ e $d(x, y) = 0$ se, e só se, $x = y$;*

2. *$d(x, y) = d(y, x)$, $x, y \in X$;*

3. *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, para todos $x, y, z \in X$ (Desigualdade triangular).*

O par (X, d) de um conjunto X munido de uma métrica d é chamado de **espaço métrico**.

Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico (X, d) **converge** para $x \in X$, se dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos que $d(x_n, x) < \varepsilon$. Uma sequência (y_n) é dita ser uma **sequência de Cauchy**, se para todos $n, m \geq n_0$ temos que $d(y_n, y_m) < \varepsilon$.

Observação 2.1.2 *Em espaços métricos arbitrários, toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy, mas nem toda sequência de Cauchy é convergente.*

Definição 2.1.3 *Dizemos que um espaço métrico X é **completo**, se toda sequência de Cauchy em X for convergente.*

Uma função $T : X \to X$, em que (X, d) é um espaço métrico, é dita ser uma contração se existe $0 < \alpha < 1$ tal que

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y), \text{ para todos } x, y \in X.$$

Teorema 2.1.4 (Ponto Fixo de Banach). *Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $T : X \to X$ uma contração. Então T possui um único ponto fixo, ou seja, existe $x \in X$ tal que $Tx = x$.*

Demonstração: Seja $x_0 \in X$ qualquer e definimos $x_{n+1} = Tx_n$, $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy em X.

De fato, como T é uma contração, existe $0 < \alpha < 1$ tal que $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ para todos x, y em X. Logo,

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) =& d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) = \alpha d(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \\ & \cdots \leq \alpha^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular, para $n > m$ obtemos

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) \leq & d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ \leq & (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ = & \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Como $\alpha < 1$ temos que $(1 - \alpha^{n-m}) < 1$, logo

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_0, x_1).$$

Além disso, temos que $\alpha^m \to 0$ quando $m \to \infty$, de modo que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > n_0$ temos

$$\alpha^m < \frac{(1 - \alpha)}{d(x_0, x_1)} \varepsilon.$$

Portanto, se $n, m > n_0$, temos que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ e consequentemente (x_n) é uma sequência de Cauchy em X.

Como X é completo, temos que $x_n \to x$, para algum $x \in X$. Assim, segue que

$$d(x, Tx) \leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x) < \varepsilon,$$

para todo m suficientemente grande. Logo, concluímos que $d(x, Tx) = 0$ ou equivalentemente $Tx = x$, ou seja, x é um ponto fixo de T. Resta provar então a unicidade.

Sejam x, x' pontos fixos de T. Então,

$$d(x, x') = d(Tx, Tx') \leq \alpha d(x, x').$$

Logo $(1 - \alpha) d(x, x') = 0$. Como $(1 - \alpha) \neq 0$ temos $d(x, x') = 0$, ou seja, $x = x'$, o que prova o teorema. ■

2.1.2 Espaços Normados

Definição 2.1.5 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Uma norma sobre V é uma função $N : V \to \mathbb{R}$, tal que:*

1. $N(x) \geq 0$, $\forall x \in V$ *e* $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$, *para todos* $\alpha \in \mathbb{F}$ *e* $x \in V$;

3. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$, *para todos* $x, y \in V$.

Um espaço normado (V, N) é também um espaço métrico com a métrica induzida pela norma $d : V \times V \to \mathbb{R}$, definida por:

$$d(x, y) = N(x - y).$$

Definição 2.1.6 *Dizemos que um espaço normado é um espaço de* ***Banach****, se é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.*

Teorema 2.1.7 *Sejam N_1, N_2 espaços normados, N_2 espaço de Banach e $X \subset N_1$ um subespaço. Se $T : X \to N_2$ é um operador linear limitado e $\overline{X} = N_1$, então existe uma única extensão $\overline{T} : N_1 \to N_2$ para T tal que $\overline{T}|_X = T$.*

Demonstração: Dado $x \in N_1$, seja $(x_n) \subset X$ uma sequência convergindo para x. Como T é um operador linear limitado e (x_n) é uma sequência de Cauchy, temos que

$$\|T(x_n) - T(x_m)\|_{N_2} \leq C\|x_n - x_m\|_{N_1} < \varepsilon, \tag{2.1}$$

para $n, m \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes. Logo, temos que $(Tx_n) \subset N_2$ é uma sequência de Cauchy. Como N_2 é um espaço de Banach, temos que $Tx_n \to y$, para algum $y \in N_2$.

Definimos,

$$\begin{aligned} \overline{T} :& N_1 \to N_2 \\ & x \mapsto \lim Tx_n \end{aligned}$$

em que (x_n) é uma sequência em X convergindo para x.

Afirmação: $\overline{T}x$ não depende da escolha sequência $x_n \to x$. De fato, sejam (x_n) e (z_n) duas sequências convergindo para x, então

$$\|Tx_n - Tz_n\|_{N_2} \leq C\|x_n - z_n\|_{N_1} \leq C(\|x_n - x\|_{N_1} + \|z_n - x\|_{N_1}) \leq \varepsilon,$$

para n suficientemente grande. Logo, temos que $\overline{T}x = \lim Tx_n = \lim Tz_n$, para todo $x \in X$. Além disso segue que,

$$\|\overline{T}x\|_{N_2} = \|\lim Tx_n\|_{N_2} \leq C \lim \|x_n\|_{N_1} \leq C\|x\|_{N_1}.$$

Portanto, temos que $\overline{T}$ é um operador linear limitado de N_1 em N_2. Ainda, para $x \in X$ basta tomarmos $x_n = x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e consequentemente temos $\overline{T}x = \lim Tx_n = Tx$, onde obtemos que $\overline{T}|_X = T$. ■

2.2 Espaços L^p

Definição 2.2.1 *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $1 \leq p < \infty$. *Definimos os espaços* $L^p(\Omega)$ *como o conjunto de todas as classes de equivalência de funções mensuráveis* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, *tais que,*

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty.$$

Teorema 2.2.2 *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. *Se* $1 \leq p < \infty$, *então o espaço* $L^p(\Omega)$ *é um espaço de Banach com a norma definida por*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Definição 2.2.3 *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. *Definimos os espaço* $L^\infty(\Omega)$ *como o conjunto de todas as classes de equivalência das funções* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *mensuráveis que são limitadas q.t.p. (quase toda parte) em* Ω.

Teorema 2.2.4 *O espaço* $L^\infty(\Omega)$ *é um espaço de Banach com a norma definida por*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C > 0; |f(x)| < C \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega\}.$$

Definição 2.2.5 *Sejam* $1 \leq p, q \leq \infty$. *Dizemos que* p *e* q *são expoentes conjugados se,*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 2.2.6 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* p, q *expoentes conjugados. Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$, *então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e ainda temos a seguinte desigualdade:*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |fg(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Se $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ então temos que $f \equiv 0$ q.t.p. Logo, $fg \equiv 0$ q.t.p, e assim

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| dx = 0 = \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Do mesmo modo ocorre se $\|g\|_{L^q(\Omega)} = 0$. Suponhamos então que $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ e $\|g\|_{L^q(\Omega)}$ são não nulas e $1 < p < \infty$. Da desigualdade de Young, temos que

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}},$$

onde obtemos que $fg \in L^1(\Omega)$, pois o lado direito da desigualdade acima é integrável.

Temos ainda que

$$\frac{\|f(x)g(x)\|_{L^1(\Omega)}}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

e portanto temos $\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$. ■

Teorema 2.2.7 (Desigualdade de Hölder generalizada) *Sejam $f_1, \cdots, f_k$, funções tais que $f_i \in L^{p_i}$, com $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$. Se $f = f_1 \ldots f_k$ e p é definido pela expressão,*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então $f \in L^p$ e satisfaz a seguinte desigualdade

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

Teorema 2.2.8 (Desigualdade de Interpolação) *Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e ainda satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)},$$

em que $\theta \in [0,1]$ e,

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}. \tag{2.2}$$

Demonstração: Para $q = p$ não há nada a mostrar. Agora se $p < q$, temos para $r = p$, $\theta = 1$ e para $r = q$, $\theta = 0$ de modo que nestes casos vale a igualdade. Suponhamos que $1 \leq p < r < q < \infty$ e seja θ como em (2.2). Logo, temos que

$$\frac{r\theta}{p} + \frac{r(1-\theta)}{q} = 1.$$

Tomando $\alpha = p/(r\theta)$ e $\alpha' = q/(r(1-\theta))$, temos que $|u|^{r\theta} \in L^{\alpha}$ e $|u|^{r(1-\theta)} \in L^{\alpha'}$, com $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$. Assim, pela desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |u(x)|^r dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{r\theta + r(1-\theta)} dx &\leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{r\theta\alpha} dx\right)^{1/\alpha} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{r(1-\theta)\alpha'} dx\right)^{1/\alpha'} \\ &= \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx\right)^{r\theta/p} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q dx\right)^{r(1-\theta)/q}.\end{aligned}$$

Deste modo, obtemos

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}.$$

onde $\theta \in (0,1)$. ■

Definição 2.2.9 *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Definimos a convolução de f e g, por*

$$(f * g)(x) = \int_\Omega f(x-y)g(y)dy.$$

Teorema 2.2.10 *Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis cujas convoluções estão bem definidas. Então valem as seguintes propriedades:*

1. $f * g = g * f$;

2. $\alpha(f * g) = (\alpha f) * g = f * (\alpha g)$, $\alpha \in \mathbb{C}$;

3. $(f * g) * h = f * (g * h)$;

4. $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Teorema 2.2.11 *Sejam f e g funções definidas em $\mathbb{R}^n$ tais que f é de classe C^k, para algum $k \in \mathbb{N}$, e que $(\partial^\alpha f) * g$ esteja bem definida para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| \leq k$. Então $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha f) * g$.*

Teorema 2.2.12 (Desigualdade de Young) *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Se $r \in \mathbb{R}$ é tal que*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0,$$

então $u * v \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e ainda $\|u * v\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$.

2.3 Espaços de Sobolev

Definição 2.3.1 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p \leq \infty$. Dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, dizemos que $u \in L^p(\Omega)$ admite derivada distribucional de ordem α em $L^p(\Omega)$ se existe uma função $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\partial^\alpha \phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha(x)\phi(x)dx,$$

para toda função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Neste caso denotamos $v_\alpha = \partial^\alpha u$.

Definição 2.3.2 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tal que $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ com $|\alpha| \leq m$.*

Observação 2.3.3 *Na definição acima, se* $p = 2$ *escrevemos* $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

Teorema 2.3.4 *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $m \in \mathbb{N}$ *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $W^{m,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach com a norma definida por:*

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema 2.3.5 (Desigualdade de Gagliardo-Niremberg) *Sejam* $1 \leq p, q \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, *com* $0 \leq k < m$. *Sejam* θ, r *tais que*

$$k/m \leq \theta \leq 1$$

e

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{n} + \left(\frac{1}{p} - \frac{m}{n}\right)\theta + \frac{1-\theta}{q}.$$

Se $u \in L^q$ *é tal que* $\partial_\alpha u \in L^p$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *com* $|\alpha| = m$, *então existe uma constante* $C > 0$ *dependendo de* m, n, p, q, k *tal que:*

$$\|\nabla^k u\|_{L^r} \leq C\|\nabla^m u\|_{L^p}^\theta \|u\|_{L^q}^{1-\theta},$$

em que $\nabla^j u$ *denota as derivadas de ordem* $|\alpha| = j$ *de* u.

2.4 Transformada de Fourier

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f é a função

$$(\mathfrak{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix.\xi}dx,$$

onde $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ e $x.\xi$ denota o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.4.1 *A transformada de Fourier é um operador linear limitado de* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *em* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Vale ainda*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Teorema 2.4.2 *Sejam* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Então* $\widehat{(f * g)}(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

Demonstração: Como $f, g \in L^1$, pela desigualdade de Young para convolução, temos que

$f * g \in L^1$. Logo a transformada de Fourier de $f * g$ está bem definida. Deste modo,

$$\begin{aligned}\widehat{(f*g)}(\xi) =&(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}(f*g)(x)e^{-ix.\xi}dx\\ =&(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)g(y)e^{-ix.\xi}dydx\\ =&(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)e^{-ix.\xi}dxdy.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $x-y=z$ e aplicando o teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{(f*g)}(\xi) =&(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)\int_{\mathbb{R}^n}f(z)e^{-i(z+y).\xi}dzdy\\ =&(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}g(y)e^{-iy.\xi}dy\int_{\mathbb{R}^n}f(z)e^{-iz.\xi}dz\\ =&(2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

■

2.4.1 Espaço de Schwarz

O espaço de Schwarz $S(\mathbb{R}^n)$, ou das funções rapidamente decrescentes no infinito, é o espaço das funções f definidas sobre $\mathbb{R}^n$ de classe C^∞ tais que para todo par de multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta f(x)| < \infty.$$

Observação 2.4.3 *O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ está contigo e é denso em $S(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 2.4.4 *$S(\mathbb{R}^n)$ está contido e é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \le p < \infty$.*

2.4.2 Transformada de Fourier no espaço de Schwarz

Em vista do teorema (2.4.4) temos que $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Assim, estão bem definidas as funções,

$$\mathfrak{F}(\phi)(\xi) = \hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)e^{-ix.\xi}dx, \tag{2.3}$$

$$\mathfrak{F}^{-1}(\phi)(\xi) = \phi^\vee(\xi) = \hat{\phi}(-\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)e^{ix.\xi}dx, \tag{2.4}$$

para toda $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.4.5 *Se $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{\phi} \in S(\mathbb{R}^n)$ e vale a fórmula,*

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{\phi}(\xi) = i^{|\beta|} \mathfrak{F}(\partial_x^\alpha(-x^\beta \phi(x))), \tag{2.5}$$

para todo par de multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Demonstração: Inicialmente temos,

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{\phi}(\xi) = \xi^\alpha (2\pi)^{-n/2} \partial_\xi^\beta \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ix.\xi} dx.$$

Logo, derivando sob o sinal da integral, obtemos

$$\begin{aligned}
\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{\phi}(\xi) =& (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha (-ix)^\beta \phi(x) e^{-ix.\xi} dx \\
=& i^{|\alpha|} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (-i\xi)^\alpha (-ix)^\beta \phi(x) e^{-ix.\xi} dx \\
=& i^{|\alpha|} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\beta \phi(x) \partial_x^\alpha e^{-ix.\xi} dx.
\end{aligned}$$

Integrando por partes e usando o fato de que ϕ e todas as suas derivadas são nulas no infinito, temos

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{\phi}(\xi) = i^{|\beta|} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha ((-x)^\beta \phi(x)) e^{-ix.\xi} dx.$$

Além disso, temos

$$|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \hat{\phi}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|^2)^{n+1} \partial_x^\alpha ((-x)^\beta \phi(x))| \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{-n-1} dx < \infty.$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Portanto, $\hat{\phi} \in S(\mathbb{R}^n)$. ∎

Proposição 2.4.6 *Para todas $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \hat{\psi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x) \psi(x) dx.$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) \hat{\psi}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) e^{-ix.y} dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) e^{-ix.y} dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \hat{\phi}(y) dy.
\end{aligned}$$

∎

Teorema 2.4.7 *(*Fórmula de inversão*) Para toda função $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, temos*

$$(\hat{\phi})^{\vee} = \widehat{(\phi^{\vee})} = \phi.$$

Teorema 2.4.8 (Plancherel) *Para todas as funções $\phi, \psi \in S(\mathbb{R}^n)$ valem as igualdades*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x)\overline{\hat{\psi}(x)}dx,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\phi}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi^{\vee}(x)|^2 dx.$$

Tem-se ainda que $\mathfrak{F}$ extende-se unicamente a um isomorfismo sobre L^2.

Demonstração: Considere $\psi = \overline{\hat{\phi}}$. Segue da fórmula da inversaõ, que

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\xi) =& (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{\phi}(x)}(x) e^{-ix.\xi} dx \\
=& (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{\phi}(x)}\,\overline{e^{ix.\xi}} dx \\
=& (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{\phi}(x) e^{ix.\xi}} dx \\
=& \overline{(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x) e^{ix.\xi} dx} = \overline{\hat{\phi}^{\vee}(\xi)} = \overline{\phi(\xi)}.
\end{aligned}$$

Logo, $\hat{\hat{\psi}} = \overline{\psi}$. Pela proposição 2.4.6 temos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\overline{\psi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\widehat{\overline{\hat{\psi}(x)}}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x)\overline{\hat{\psi}(x)}dx.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\overline{\phi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\widehat{\overline{\hat{\phi}(x)}}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(x)\overline{\hat{\phi}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\phi}(x)|^2 dx.$$

Pelo que acabamos de mostrar, a transformada de Fourier é um operador linear limitado de $S(\mathbb{R}^n) \to L^2$. Como $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em L^2 , pelo teorema 2.1.7, existe uma única extensão $\mathfrak{F} : L^2 \to L^2$. Do mesmo modo, obtemos que $\mathfrak{F}^{-1}$ pode ser extendida de modo único em L^2, obtendo assim um isomorfismo. ■

Proposição 2.4.9 (Desigualdade de Hausdorff-Young) *Seja $1 < p < 2$. Então a transformada de Fourier pode ser extendida unicamente a um operador $\mathfrak{F} : L^p \to L^q$, onde $q > 1$ é tal que $1/q + 1/p = 1$, e satisfaz ainda a seguinte desigualdade*

$$\|\mathfrak{F}(f)\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p.$$

Capítulo 3

A Equação de Onda Duplamente Amortecida

Neste capítulo, estudaremos os resultados de existência, unicidade e comportamento assintótico da solução para o problema de Cauchy de equações de onda duplamente amortecida (amortecimento friccional u_t e viscoelástico $-\triangle u_t$),

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + u_t - \triangle u_t = f(u), & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.1}$$

sob a presença de não linearidades do tipo, $f(u) = |u|^p$, $|u_t|^p$ ou $|\nabla u|^p$ com $p > 1$.

Para tanto, primeiro deduziremos algumas estimativas de decaimento para a solução da parte linear deste problema,

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + u_t - \triangle u_t = 0, & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde os dados iniciais pertencem aos espaços

$$(L^1 \cap H^1) \times (L^1 \cap L^2) \text{ ou } (W^{1,1} \cap H^2) \times (L^1 \cap L^2).$$

Devido a presença simultânea dos termos de amortecimento viscoelástico e friccional, veremos que a solução para (3.2) ganha boas propriedades as quais nos permitem deduzir as estimativas de decaimento que serão úteis para provar a existência global de solução para o problema de Cauchy (3.1), em qualquer espaço de dimensão $n \geq 1$ para dados iniciais suficientemente pequenos.

Para iniciar, suponha que $u_0, u_1 \in L^2$. Após realizar a transformada de Fourier em (3.2) em relação a variável x, obtemos o seguinte problema de Cauchy com relação a variável ξ,

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + (1+|\xi|^2)\hat{u}_t + |\xi|^2\hat{u} = 0, \quad t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \\ \hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi). \end{cases} \tag{3.3}$$

As raízes características para esta equação diferencial ordinária em relação a variável t são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -|\xi|^2$. Deste modo, a solução para o problema acima é da forma

$$\hat{u}(t,\xi) = C_1(\xi)e^{-t|\xi|^2} + C_2(\xi)e^{-t}.$$

Utilizando as condições iniciais, $C_1(\xi)$ e $C_2(\xi)$ devem atender ao seguinte sistema,

$$\begin{cases} C_1(\xi) + C_2(\xi) = \hat{u}_0(\xi) \\ -|\xi|^2 C_1(\xi) - C_2(\xi) = \hat{u}_1(\xi). \end{cases}$$

Após resolver o sistema acima, obtemos a seguinte solução para o problema (3.3),

$$\hat{u}(t,\xi) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t|\xi|^2} - |\xi|^2 e^{-t}}{1-|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi) + \dfrac{e^{-t|\xi|^2} - e^{-t}}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1(\xi), \quad \text{se} \quad |\xi| \neq 1 \\ (1+t)e^{-t}\hat{u}_0(\xi) + te^{-t}\hat{u}_1(\xi), \quad \text{se} \quad |\xi| = 1. \end{cases}$$

Observação 3.0.1 Pela regra de L'Hôpital, para cada $t \geq 0$ fixado temos,

$$(i) \quad \lim_{s\to 1}\frac{e^{-ts^2} - s^2e^{-t}}{1-s^2} = \lim_{s\to 1}\frac{-2ste^{-ts^2} - 2se^{-t}}{-2s} = \lim_{s\to 1}(te^{-ts^2} + e^{-t}) = (1+t)e^{-t};$$

$$(ii) \quad \lim_{s\to 1}\frac{e^{-ts^2} - e^{-t}}{1-s^2} = \lim_{s\to 1}\frac{-2ste^{-ts^2}}{-2s} = \lim_{s\to 1} \quad te^{-ts^2} = te^{-t}.$$

Assim, definimos as funções,

$$g_j(t,\xi) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t|\xi|^2} - |\xi|^{2j}e^{-t}}{1-|\xi|^2}, & \text{se} \quad |\xi| \neq 1, \\ (j+t)e^{-t}, & \text{se} \quad |\xi| = 1, \end{cases}$$

para $j = 0, 1$. Deste modo, temos que

$$\hat{u}(t,\xi) = g_1(t,\xi)\hat{u}_0(\xi) + g_0(t,\xi)\hat{u}_1(\xi), \tag{3.4}$$

em que $g_j(t,\cdot)$ é contínua em $\mathbb{R}^n$ para $j = 0, 1$, pela observação (3.0.1). Além disso, temos que $g_j(t,\cdot)$ é limitada em $\mathbb{R}^n$, pois $\lim_{|\xi|\to\infty} g_0(t,\xi) = 0$, $\lim_{|\xi|\to\infty} g_1(t,\xi) = e^{-t}$. Logo, existe $C > 0$ tal que

$$|\hat{u}(t,\xi)| \leq C(|\hat{u}_0(\xi)| + |\hat{u}_1(\xi)|).$$

Como $u_0, u_1 \in L^2$, temos $\hat{u}_0, \hat{u}_1 \in L^2$ e consequentemente,

$$\|\hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2} \leq C(\|\hat{u}_0\|_{L^2} + \|\hat{u}_1\|_{L^2}),$$

ou seja, $\hat{u}(t,\cdot) \in L^2$. Considerando $u(t,\cdot) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{u}(t,\cdot))$, isto é

$$u(t,x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(t,\xi) e^{ix.\xi} d\xi, \tag{3.5}$$

esta função está bem definida e ainda pertence a L^2 para cada $t \geq 0$.

Ainda, se $m = 1$ ou 2 e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ é um multi-índice com $|\alpha| \leq m$, então $|\xi|^{|\alpha|} g_0(t,\xi)$ continua limitada em $\mathbb{R}^n$, de modo que

$$|(i\xi)^\alpha \hat{u}(t,\xi)| \leq C(|(i\xi)^\alpha \hat{u}_0(\xi)| + |\hat{u}_1(\xi)|).$$

Assim, se $u_0 \in H^m$, pelo teorema de Plancherel e pelas propriedades da transformada de Fourier, $\|(i\xi)^\alpha \hat{u}_0\|_{L^2} = \|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^2}$, de modo que

$$\|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2} = \|(i\xi)^\alpha \hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2} \leq C(\|(i\xi)^\alpha \hat{u}_0\|_{L^2} + \|\hat{u}_1\|_{L^2}) = C(\|\partial_x^\alpha u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}),$$

onde obtemos que $u(t,\cdot) \in H^m$.

Concluimos então que, se $u_0 \in H^m$, $m = 0, 1, 2$, e $u_1 \in L^2$, então o problema de Cauchy (3.2) possui solução global u, dada por (3.5), e ainda satisfaz $u(t,\cdot) \in H^m$, para todo $t \geq 0$.

Agora, consideremos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$:

$$\Omega_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n | |\xi| < \sqrt{3}/2\},$$
$$\Omega_1 = \{\xi \in \mathbb{R}^n | |\xi| > \sqrt{5}/2\}.$$

Logo, existem funções χ_0 e χ com $0 \leq \chi_0, \chi \leq 1$, tais que,

- $\chi_0 \in C_c^\infty$, $supp(\chi_0) \subset \Omega_0$ com $\chi_0 \equiv 1$ sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^n | |\xi|^2 \leq (1/2)\}$;
- $\chi \in C_c^\infty$, $supp(\chi) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n | |\xi|^2 < (3/2)\}$ com $\chi \equiv 1$ sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^n | |\xi|^2 \leq (5/4)\}$.

Definindo $\chi_1 = 1 - \chi$, temos $\chi_1 \in C^\infty$, $0 \leq \chi_1 \leq 1$, $supp(\chi_1) \subset \Omega_1$ e $\chi \equiv 1$ sobre $\{\xi \in \mathbb{R}^n | |\xi|^2 \geq (3/2)\}$. Considerando então,

$$h = \chi_0 + \chi_1 + (1 - \chi_0 - \chi_1),$$

temos $h \equiv 1$ sobre $\mathbb{R}^n$. Deste modo, segue que

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}(t,\xi) h(\xi), \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \geq 0.$$

Definimos as funções

$$\begin{aligned}\hat{u}_\Omega(t,\xi) &= \hat{u}(t,\xi)(\chi_0(\xi)+\chi_1(\xi))\\ \hat{u}_K(t,\xi) &= \hat{u}(t,\xi)\chi_K(\xi),\end{aligned}$$

onde $\chi_K = (1-\chi_0-\chi_1)$ e $\hat{u}$ é a função definida em (3.4). Logo, podemos reescrever $\hat{u}$ como $\hat{u} = \hat{u}_\Omega + \hat{u}_K$, em que

$$\hat{u}_\Omega(t,\xi) = \left(\frac{-e^{-t}}{1-|\xi|^2}(|\xi|^2\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi)) + \frac{e^{-t|\xi|^2}}{1-|\xi|^2}(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))\right)(\chi_0(\xi)+\chi_1(\xi)) \quad (3.6)$$

$$\hat{u}_K(t,\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{-t|\xi|^2}-|\xi|^2e^{-t}}{1-|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi) + \dfrac{e^{-t|\xi|^2}-e^{-t}}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1(\xi)\right)\chi_K(\xi), & \text{se} \quad |\xi|\neq 1,\\ [(1+t)e^{-t}\hat{u}_0(\xi)+te^{-t}\hat{u}_1(\xi)]\chi_K(\xi), & \text{se} \quad |\xi| = 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Evidentemente, $supp(\hat{u}_\Omega(t,\cdot)) \subset \overline{\Omega_0\cup\Omega_1}$ e $supp(\hat{u}_K(t,\cdot)) \subset \Omega_K \doteq \{1/2 < |\xi|^2 < 3/2\}$. Além disso, temos que

$$u(t,\cdot) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{u}(t,\cdot)) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{u}_\Omega(t,\cdot)) + \mathfrak{F}^{-1}(\hat{u}_K(t,\cdot)).$$

A fim de obter os resultados acerca do comportamento assintótico de u, estudaremos separadamente o comportamento das funções $u_\Omega = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{u}_\Omega)$ e $u_K = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{u}_K)$.

3.1 Estimativas de Decaimento de u_Ω

Nesta seção, estudaremos o comportamento assintótico da função u_Ω definida por,

$$u_\Omega(t,x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}_\Omega(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi, \quad (3.8)$$

onde $\hat{u}_\Omega$ foi definida em (3.6). A fim de facilitar as contas, vamos decompor a função u_Ω como a soma de duas funções u^- e u^+ e obter as estimativas desejadas sobre cada uma. Para tanto, considere as funções

$$\begin{aligned}\hat{u}^-(t,\xi) &= \left(\frac{-e^{-t}}{1-|\xi|^2}(|\xi|^2\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))\right)(\chi_0(\xi)+\chi_1(\xi)),\\ \hat{u}^+(t,\xi) &= \left(\frac{e^{-t|\xi|^2}}{1-|\xi|^2}(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))\right)(\chi_0(\xi)+\chi_1(\xi)).\end{aligned}$$

Observação 3.1.1 *Note que $|\xi|^k/(1-|\xi|^2)$, $k = 0,1,2$ é limitada em $\Omega_0\cup\Omega_1$. De fato, considerando $a = \sqrt{3}/2$ e $b = \sqrt{5}/2$, se $\xi\in\Omega_0$ temos que $|\xi|^k < a^k < 1$, logo*

$1-a^2 < 1-|\xi|^2 \Longrightarrow (1-|\xi|^2)^{-1} < (1-a^2)^{-1}$. *Consequentemente*

$$\left|\frac{|\xi|^k}{1-|\xi|^2}\right| = \frac{|\xi|^k}{1-|\xi|^2} < \frac{a^k}{1-a^2}, \quad \forall \xi \in \Omega_0.$$

Por outro lado, se $\xi \in \Omega_1$ temos que $b^2 < |\xi|^2$, logo $|\xi|^2 b^2 - |\xi|^2 < |\xi|^2 b^2 - b^2$. Consequentemente

$$\left|\frac{|\xi|^k}{1-|\xi|^2}\right| = \frac{|\xi|^k}{|\xi|^2-1} \le \frac{|\xi|^2}{|\xi|^2-1} < \frac{b^2}{b^2-1}, \quad \forall \xi \in \Omega_1.$$

Ainda, se $u_0, u_1 \in L^2$, temos que $\hat{u}^-(t,\cdot)$, $\hat{u}^+(t,\cdot) \in L^2$. Definimos então as funções u^- e u^+ por,

$$u^-(t,\cdot) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{u}^-(t,\cdot)), \tag{3.9}$$

$$u^+(t,\cdot) = \mathfrak{F}^{-1}(\hat{u}^+(t,\cdot)). \tag{3.10}$$

Por outro lado, se $u_0 \in H^m$ com $m = 0,1,2$, $u_1 \in L^2$ e α é um multi-índice com $|\alpha| \le m$, pela observação 3.1.1 segue que

$$|(i\xi)^\alpha \hat{u}^{-,+}(t,\cdot)| \le C(|(i\xi)^\alpha \hat{u}_0| + |\hat{u}_1|).$$

Consequentemente,

$$\|u^-(t,\cdot)\|_{H^m} \le C(\|u_0\|_{H^m} + \|u_1\|_{L^2}),$$
$$\|u^+(t,\cdot)\|_{H^m} \le C(\|u_0\|_{H^m} + \|u_1\|_{L^2}).$$

No que segue, buscaremos algumas estimativas de decaimento para a função u^-.

Proposição 3.1.2 *Seja u^- definida em (3.9). Se $(u_0,u_1) \in H^2 \times L^2$, então u^- satisfaz as seguintes estimativas:*

$$(i) \quad \|\triangle u^-(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-t}(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^2});$$
$$(ii) \quad \|u_t^-(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-t}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}).$$

Demonstração: Pelo teorema de Plancherel e pela observação 3.1.1 temos que,

$$\begin{aligned}
\|\triangle u^-(t,\cdot)\|_{L^2} =& \||\xi|^2 \hat{u}^-(t,\cdot)\|_{L^2} = \left\|\frac{e^{-t}|\xi|^2}{1-|\xi|^2}(|\xi|^2\hat{u}_0 + \hat{u}_1)(\chi_0(\xi)+\chi_1(\xi))\right\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} \\
\lesssim& \left\|\frac{e^{-t}|\xi|^2}{1-|\xi|^2}(|\xi|^2\hat{u}_0 + \hat{u}_1)\right\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\|\frac{e^{-t}|\xi|^2}{1-|\xi|^2}(|\xi|^2\hat{u}_0 + \hat{u}_1)\right\|_{L^2(\Omega_1)} \\
\lesssim& e^{-t}(\||\xi|^2\hat{u}_0 + \hat{u}_1\|_{L^2(\Omega_0)} + \||\xi|^2\hat{u}_0 + \hat{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)}) \\
\lesssim& e^{-t}\||\xi|^2\hat{u}_0 + \hat{u}_1\|_{L^2} \le e^{-t}(\|\triangle u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}) \\
\lesssim& e^{-t}(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

Logo, obtemos o item (i) desta proposição. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|u_t^-(t,\cdot)\|_{L^2} =& \|\hat{u}_t^-(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} \lesssim \|\hat{u}_t^-(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\hat{u}_t^-(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_1)} \\
\lesssim & e^{-t}\left(\left\|\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\hat{u}_0 + \frac{1}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1\right\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\|\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\hat{u}_0 + \frac{1}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1\right\|_{L^2(\Omega_1)}\right) \\
\lesssim & e^{-t}\left(\left\|\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\hat{u}_0\right\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\|\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\hat{u}_0\right\|_{L^2(\Omega_1)}\right. \\
& \left. + \left\|\frac{1}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1\right\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\|\frac{1}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1\right\|_{L^2(\Omega_1)}\right) \\
\lesssim & e^{-t}(\|\hat{u}_0\|_{L^2} + \|\hat{u}_1\|_{L^2}) = e^{-t}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

Portanto, o item (ii) desta proposição também está provado. ■

Proposição 3.1.3 *Seja u^- definida em (3.9). Se $(u_0,u_1) \in H^1 \times (L^1 \cap L^2)$ e $m \in [1,2]$ satisfaz,*

$$n\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2}\right) < 1,$$

então

$$\|\nabla u^-(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-t}(\|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^m}).$$

Demonstração: Pelo teorema de Plancherel, segue que,

$$\|\nabla u^-(t,\cdot)\|_{L^2} = \left(\sum_{j=1}^n \left\|\frac{\partial u^-}{\partial x_j}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n \|(i\xi_j)\hat{u}^-(t,\cdot)\|_{L^2}^2\right)^{1/2}.$$

Por outro lado, para cada $1 \le j \le n$, temos

$$\begin{aligned}
\|(i\xi_j)\hat{u}^-(t,\cdot)\|_{L^2} &= \|(i\xi_j)\hat{u}^-(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} \\
&\lesssim e^{-t}\left(\left\|\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}(i\xi_j)\hat{u}_0\right\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} + \left\|\frac{i\xi_j}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1\right\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)}\right)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Note que,

$$\left|\frac{\xi_j}{1-|\xi|^2}\right| \le \frac{|\xi|}{|1-|\xi|^2|} \le \frac{1+|\xi|}{|1-|\xi|^2|} = \frac{(1+|\xi|)^2}{|1-|\xi|^2|}(1+|\xi|)^{-1} \lesssim (1+|\xi|)^{-1} \quad \forall \xi \in \Omega_0 \cup \Omega_1.$$

Assim, tomando $r = 2m/(2-m)$ ($r = \infty$, se $m = 2$), temos que

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{r} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m'},$$

em que m' denota o expoente conjugado de m. Deste modo, segue que $(1+|\xi|)^{-1} \in L^r$. Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|(1+|\xi|)^{-1}\hat{u}_1\|_{L^2} \leq \|(1+|\xi|)^{-1}\|_{L^r}\|\hat{u}_1\|_{L^{m'}} \leq \|(1+|\xi|)^{-1}\|_{L^r}\|u_1\|_{L^m}.$$

Logo,

$$\left\|\frac{i\xi_j}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1\right\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} \lesssim \|(1+|\xi|)^{-1}\hat{u}_1\|_{L^2} \lesssim \|u_1\|_{L^m}. \tag{3.12}$$

Além disso,

$$\left\|\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}(i\xi_j)\hat{u}_0\right\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} \lesssim \|(i\xi_j)\hat{u}_0\|_{L^2} = \left\|\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right\|_{L^2}. \tag{3.13}$$

Usando (3.12) e (3.13) em (3.11) obtemos a seguinte estimativa

$$\|(i\xi_j)\hat{u}^-(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-t}(\|\partial_j u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^m}).$$

Portanto,

$$\|\nabla u^-(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-t}(\|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^m}).$$

■

Proposição 3.1.4 *Seja u^- definida em (3.9). Se $(u_0,u_1) \in L^2 \times (L^1 \cap L^2)$ e $m \in [1,2]$ satisfaz,*

$$n\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right) < 2,$$

então,

$$\|u^-(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-t}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^m}).$$

Demonstração: Pelo teorema de Plancherel, segue que

$$\begin{aligned}
\|u^-(t,\cdot)\|_{L^2} &= \|\hat{u}^-(t,\cdot)\|_{L^2} = \|\hat{u}^-(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} \lesssim e^{-t}\left\|\frac{|\xi|^2\hat{u}_0+\hat{u}_1}{1-|\xi|^2}\right\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} \\
&\leq e^{-t}\left(\left\|\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\hat{u}_0\right\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} + \left\|\frac{1}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1\right\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)}\right).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Note que,

$$\left|\frac{1}{1-|\xi|^2}\right| = \frac{(1+|\xi|^2)}{|1-|\xi|^2|}(1+|\xi|^2)^{-1} \lesssim (1+|\xi|^2)^{-1}, \quad \forall \xi \in \Omega_0 \cup \Omega_1.$$

Deste modo, tomando $r = 2m/(2-m)$ ($r = \infty$ se $m = 2$), segue por hipótese que $r > n/2$, de onde obtemos que $(1+|\xi|^2)^{-1} \in L^r$. Logo, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\left\|\frac{1}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1\right\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} \lesssim \|(1+|\xi|^2)^{-1}\|_{L^r}\|\hat{u}_1\|_{L^{m'}} \lesssim \|u_1\|_{L^m}. \tag{3.15}$$

Temos ainda,

$$\left\|\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\hat{u}_0\right\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} \lesssim \|\hat{u}_0\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}. \tag{3.16}$$

Portanto, usando (3.15) e (3.16) em (3.14), concluímos que

$$\|u^-(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-t}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^m}).$$

■

No que segue procuraremos algumas estimativas de decaimento para a função u^+.

Proposição 3.1.5 *Seja u^+ definida em (3.10). Se $(u_0,u_1) \in (L^1\cap H^2)\times(L^1\cap L^2)$ e $m \in [1,2]$, então u^+ satisfaz a seguinte estimativa,*

$$\|\partial_t^k\partial_x^\alpha u^+(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2r}-\frac{|\alpha|}{2}-k}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^2}),$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $k \in \mathbb{N}$ com $|\alpha| + 2k = 0,1,2$ e $r = 2m/(2-m)$ (sendo $r = \infty$ quando $m = 2$).

Demonstração: De fato, dados $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $|\alpha| + 2k = 0,\ 1,\ 2$, pelo teorema de Plancherel temos que

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t^k\partial_x^\alpha u^+(t,\cdot)\|_{L^2} && (3.17)\\
&\quad=\|\partial_t^k(i\xi)^\alpha\hat{u}^+(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \|\partial_t^k(i\xi)^\alpha\hat{u}^+(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_0)} + \|\partial_t^k(i\xi)^\alpha\hat{u}^+(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}\\
&\quad\lesssim\left\||\xi|^{|\alpha|}\partial_t^k\left(\frac{e^{-t|\xi|^2}}{1-|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\right)\right\|_{L^2(\Omega_0)} + \left\||\xi|^{|\alpha|}\partial_t^k\left(\frac{e^{-t|\xi|^2}}{1-|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\right)\right\|_{L^2(\Omega_1)}\\
&\quad\lesssim\||\xi|^{|\alpha|+2k}e^{-t|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\|_{L^2(\Omega_0)} + \|e^{-t|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\|_{L^2(\Omega_1)}. && (3.18)
\end{aligned}$$

uma vez que $(1-|\xi|^2)^{-1}$ é limitada em Ω_0 e $|\xi|^{|\alpha|+2k}/(1-|\xi|^2)$ é limitada em Ω_1, dado que $|\alpha| + 2k \leq 2$. Para $\xi \in \Omega_1$, temos $e^{-t|\xi|^2} \leq e^{-t}$ e consequentemente

$$\begin{aligned}
\|e^{-t|\xi|^2}(\hat{u}_0 + \hat{u}_1)\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq e^{-t}(\|\hat{u}_0\|_{L^2(\Omega_1)} + \|\hat{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)}) \leq e^{-t}(\|\hat{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\hat{u}_1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \\
&= e^{-t}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Por outro lado, para $\xi \in \Omega_0$ e $t \in [0,1]$ temos $|\xi|^{|\alpha|+2k} e^{-t|\xi|^2} \leq 1$. Consequentemente

$$\||\xi|^{|\alpha|+2k} e^{-t|\xi|^2}\|_{L^r(\Omega_0)} \leq \left(\int_{\Omega_0} \left| |\xi|^{|\alpha|+2k} e^{-t|\xi|^2} \right|^r d\xi \right)^{1/r} \leq \left(\int_{\Omega_0} d\xi \right)^{1/r} = |\Omega_0|^{1/r}. \quad (3.20)$$

onde $|A|$ denota a medida do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Agora, se $t \geq 1$, fazendo a mudança de variável $\eta = \sqrt{t}\xi$, obtemos

$$\||\xi|^{|\alpha|+2k} e^{-t|\xi|^2}\|_{L^r(\Omega_0)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| |\xi|^{|\alpha|+2k} e^{-t|\xi|^2} \right|^r d\xi \right)^{1/r} = t^{-\frac{n}{2r} - \frac{|\alpha|}{2} - k} \||\eta|^{|\alpha|+2k} e^{-|\eta|^2}\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.21)$$

Note que para $t \geq 1$, temos

$$t^{-\frac{n}{2r} - \frac{|\alpha|}{2} - k} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2r} - \frac{|\alpha|}{2} - k},$$

enquanto que para $t < 1$ temos

$$1 \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2r} - \frac{|\alpha|}{2} - k}.$$

Logo, por (3.20) e (3.21) segue que

$$\||\xi|^{|\alpha|+2k} e^{-t|\xi|^2}\|_{L^r(\Omega_0)} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2r} - \frac{|\alpha|}{2} - k}. \quad (3.22)$$

Pela desigualdade de interpolação, temos que $(u_0 + u_1) \in L^m$ para qualquer $m \in [1,2]$, e portanto $(\hat{u}_0 + \hat{u}_1) \in L^{m'}$ (m' expoente conjugado de m). Assim, como $r = 2m/(2-m)$, temos que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m'} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2},$$

e deste modo, por (3.22) e pela desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned}
\||\xi|^{|\alpha|+2k} e^{-t|\xi|^2}(\hat{u}_0 + \hat{u}_1)\|_{L^2(\Omega_0)} &\lesssim \||\xi|^{|\alpha|+2k} e^{-t|\xi|^2}\|_{L^r(\Omega_0)}(\|\hat{u}_0\|_{L^{m'}(\Omega_0)} + \|\hat{u}_1\|_{L^{m'}(\Omega_0)}) \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2r} - \frac{|\alpha|}{2} - k}(\|\hat{u}_0\|_{L^{m'}(\mathbb{R}^n)} + \|\hat{u}_1\|_{L^{m'}(\mathbb{R}^n)}) \\
&\leq (1+t)^{-\frac{n}{2r} - \frac{|\alpha|}{2} - k}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^m}). \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Portanto, usando (3.19) e (3.23) em (3.17), concluimos que

$$\|\partial_t^k \partial_x^\alpha u^+(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2r} - \frac{|\alpha|}{2} - k}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^2}).$$

$\blacksquare$

Corolário 3.1.6 *Se* $(u_0, u_1) \in (L^1 \cap H^2) \times (L^1 \cap L^2)$*, então,*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \|\triangle u^+(t,\cdot)\|_{L^2} && \lesssim (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^2}); \\
(ii) \quad & \|\triangle u^+(t,\cdot)\|_{L^2} && \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2}); \\
(iii) \quad & \|u_t^+(t,\cdot)\|_{L^2} && \lesssim (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}); \\
(iv) \quad & \|u_t^+(t,\cdot)\|_{L^2} && \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

Demonstração: Pela proposição 3.1.5, para $m = 2$ $(r = \infty)$, $\alpha = 2e_j$ e $k = 0$, temos que

$$\left\| \frac{\partial^2 u^+}{\partial x_j^2}(t,\cdot) \right\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\triangle u^+(t,\cdot)\|_{L^2} = & \left(\sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u^+}{\partial x_j^2}(t,\cdot) \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \lesssim (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}) \\
\leq & (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

Logo, o item (i) está provado. Por outro lado, para $m = 1$ $(r = 2)$, $\alpha = 2e_j$ e $k = 0$, temos

$$\left\| \frac{\partial^2 u^+}{\partial x_j^2}(t,\cdot) \right\| \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1}).$$

Logo, o item (ii) também está provado. Do mesmo modo, para provar (iii) basta tomarmos $m = 2$ e $k = 1$, enquanto que, para provar (iv) tomamos $m = 1$ e $k = 1$ na proposição (3.1.5). $\blacksquare$

Proposição 3.1.7 *Seja* u^+ *definida em (3.10). Se* $(u_0, u_1) \in (L^1 \cap H^1) \times (L^1 \cap L^2)$ *e* $m \in [1, 2]$ *satisfaz,*

$$n\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2}\right) < 1, \tag{3.24}$$

então, u^+ *satisfaz as seguintes estimativas*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \|\nabla u^+(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^m}); \\
(ii) \quad & \|\nabla u^+(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^m}).
\end{aligned}$$

Demonstração: Pelo teorema de Plancherel, segue que,

$$\left\|\nabla u^{+}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2=\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial u^{+}}{\partial x_j}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2=\sum_{j=1}^{n}\left\|\xi_j\hat{u}^{+}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2\lesssim\left\||\xi|\hat{u}^{+}(t,\cdot)\right\|_{L^2}^2. \tag{3.25}$$

Por outro lado, temos que,

$$\begin{aligned}\left\||\xi|\hat{u}^{+}(t,\cdot)\right\|_{L^2} &\lesssim \left\||\xi|\hat{u}^{+}(t,\cdot)\right\|_{L^2(\Omega_0)}+\left\||\xi|\hat{u}^{+}(t,\cdot)\right\|_{L^2(\Omega_1)}\\ &\lesssim \left\|\frac{|\xi|}{1-|\xi|^2}e^{-t|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\right\|_{L^2(\Omega_0)}+\left\|\frac{|\xi|}{1-|\xi|^2}e^{-t}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\right\|_{L^2(\Omega_1)}\\ &\lesssim \left\||\xi|e^{-t|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\right\|_{L^2(\Omega_0)}+\left\|\frac{|\xi|^{2+1-2}}{1-|\xi|^2}e^{-t}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\right\|_{L^2(\Omega_1)}\\ &\lesssim \left\||\xi|e^{-t|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\right\|_{L^2(\Omega_0)}+\left\||\xi|^{-1}e^{-t}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\right\|_{L^2(\Omega_1)}. \end{aligned}\tag{3.26}$$

Sejam $m\in[1,2]$ satisfazendo (3.24) e $r=2m/(2-m)$ com $r=\infty$ se $m=2$. Como $u_0+u_1\in L^1\cap L^2$, pela desigualdade de interpolação, temos $u_0+u_1\in L^m$, de modo que $\hat{u}_0+\hat{u}_1\in L^{m'}$. Além disso,

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{r}=\frac{1}{2}-\frac{1}{m'},$$

de onde obtemos que $|\xi|^{-1}\in L^r(\Omega_1)$. Logo, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\|e^{-t}|\xi|^{-1}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq e^{-t}\||\xi|^{-1}\|_{L^r(\Omega_1)}\|\hat{u}_0+\hat{u}_1\|_{L^{m'}(\Omega_1)}\\ &\leq e^{-t}\||\xi|^{-1}\|_{L^r(\Omega_1)}\|\hat{u}_0+\hat{u}_1\|_{L^{m'}(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq e^{-t}(\|u_0\|_{L^m}+\|u_1\|_{L^m}).\end{aligned}\tag{3.27}$$

Por outro lado, utilizando (3.22), temos

$$\||\xi|e^{-t|\xi|^2}\|_{L^r(\Omega_0)}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{2r}-\frac{1}{2}}.$$

Novamente, pela desigualdade de Hölder obtemos,

$$\||\xi|e^{-t|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\|_{L^2(\Omega_0)}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{2r}-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{L^m}+\|u_1\|_{L^m}). \tag{3.28}$$

Utilizando (3.27) e (3.28) em (3.26), e substituindo em (3.25), obtemos o item (i).

$$\|\nabla u^{+}(t,\cdot)\|_{L^2}\lesssim(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m}+\|u_1\|_{L^m}).$$

Agora, utilizando novamente (3.22) e pela desigualdade de Hölder, temos que,

$$\begin{aligned} \||\xi|e^{-t|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\|_{L^2(\Omega_0)} \lesssim& \||\xi|e^{-t|\xi|^2}\|_{L^2(\Omega_0)}\|\hat{u}_0+\hat{u}_1\|_{L^\infty(\Omega_0)} \\ \lesssim&(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^1}). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Portanto, utilizando (3.27) e (3.29) em (3.26) e substituindo em (3.25), concluímos o item (ii). ■

Proposição 3.1.8 *Seja u^+ definida em (3.10). Se $(u_0,u_1) \in (L^1\cap L^2)\times(L^1\cap L^2)$ e $m \in [1,2]$ satisfaz*

$$n\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right) < 2, \tag{3.30}$$

então u^+ satisfaz as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} (i)\quad \|u^+(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim&\ (1+t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m}+\|u_1\|_{L^m}); \\ (ii)\quad \|u^+(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim&\ (1+t)^{-\frac{n}{4}}(\|u_0\|_{L^1}+\|u_0\|_{L^m}+\|u_1\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^m}). \end{aligned}$$

Demonstração: Pelo teorema de Plancherel temos que,

$$\begin{aligned} \|u^+(t,\cdot)\|_{L^2} =&\ \|\hat{u}^+(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|\hat{u}^+(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_0\cup\Omega_1)} \\ \lesssim&\ \left\|\frac{e^{-t|\xi|^2}}{1-|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\right\|_{L^2(\Omega_0)} + e^{-t}\left\|\frac{1}{1-|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\right\|_{L^2(\Omega_1)}, \end{aligned} \tag{3.31}$$

pois $e^{-t|\xi|^2} \leq e^{-t}$ para $\xi \in \Omega_1$. Seja $m \in [1,2]$ satisfazendo (3.30) e defina $r = 2m/(2-m)$. Então por hipótese, temos que $r > n/2$ de modo que $(1+|\xi|^2)^{-1} \in L^r$. Como

$$\left|\frac{1}{1-|\xi|^2}\right| \leq \frac{(1+|\xi|^2)}{|1-|\xi|^2|}(1+|\xi|^2)^{-1} \lesssim (1+|\xi|^2)^{-1} \quad \forall \xi \in \Omega_1,$$

pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \|(1-|\xi|^2)^{-1}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\|_{L^2(\Omega_1)} \lesssim&\ \|(1+|\xi|^2)^{-1}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\|_{L^2} \\ \leq&\ \|(1+|\xi|^2)^{-1}\|_{L^r}\|\hat{u}_0+\hat{u}_1\|_{L^{m'}} \lesssim \|u_0\|_{L^m}+\|u_1\|_{L^m}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Por outro lado, como $e^{-t|\xi|^2} \in L^r$, utilizando (3.22) segue que

$$\begin{aligned} \|e^{-t|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq&\ \|e^{-t|\xi|^2}\|_{L^r}\|\hat{u}_0+\hat{u}_1\|_{L^{m'}} \\ \lesssim&\ (1+t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m}+\|u_1\|_{L^m}). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Portanto, utilizando (3.32) e (3.33) em (3.31), obtemos o item (i),

$$\|u^+(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^m}).$$

Agora, note que,

$$\begin{aligned}\|e^{-t|\xi|^2}(\hat{u}_0+\hat{u}_1)\|_{L^2(\Omega_0)} \leq & \|e^{-t|\xi|^2}\|_{L^2(\Omega_0)}\|\hat{u}_0+\hat{u}_1\|_{L^\infty(\Omega_0)} \\ \leq & (1+t)^{-\frac{n}{4}}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1}).\end{aligned} \tag{3.34}$$

Logo, utilizando (3.32) e (3.34) em (3.31), provamos o item (ii) desta proposição. ■

Proposição 3.1.9 *Seja u_Ω definida em (3.8). Então:*

(a) Se $(u_0,u_1) \in (L^1 \cap H^2) \times (L^1 \cap L^2)$, valem as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
(i) &\quad \|\triangle u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^2});\\
(ii) &\quad \|\triangle u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2});\\
(iii) &\quad \|u_{\Omega,t}(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2});\\
(iv) &\quad \|u_{\Omega,t}(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

(b) Se $(u_0,u_1) \in (L^1 \cap H^1) \times (L^1 \cap L^2)$ e $m \in [1,2]$ é tal que,

$$n\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right) < 1,$$

valem as estimativas:

$$\begin{aligned}
(v) &\quad \|\nabla u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^m});\\
(vi) &\quad \|\nabla u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^m}).
\end{aligned}$$

(c) Se $(u_0,u_1) \in (L^1 \cap L^2) \times (L^1 \cap L^2)$ e $m \in [1,2]$ é tal que,

$$n\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right) < 2,$$

valem as estimativas:

$$\begin{aligned}
(vii) &\quad \|u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^m});\\
(viii) &\quad \|u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-\frac{n}{4}}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^m}).
\end{aligned}$$

Demonstração: (i) Pelo item (i) da proposição 3.1.2 e do corolário 3.1.6, temos que

$$\begin{aligned}\|\triangle u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \leq & \|\triangle u^-(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\triangle u^+(t,\cdot)\|_{L^2} \\ \lesssim & e^{-t}(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^2}) + (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^2}) \\ \lesssim & (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^2}).\end{aligned}$$

(ii) Pela proposição 3.1.2 item (i) e pelo corolário 3.1.6 item (ii), segue que

$$\begin{aligned}\|\triangle u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \leq & \|\triangle u^-(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\triangle u^+(t,\cdot)\|_{L^2} \\ \lesssim & e^{-t}(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^2}) + (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2}) \\ \lesssim & (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2}).\end{aligned}$$

(iii) Pela proposição 3.1.2 item (ii) e pelo corolário 3.1.6 item (iii), segue que

$$\begin{aligned}\|u_{\Omega,t}(t,\cdot)\|_{L^2} \leq & \|u_t^-(t,\cdot)\|_{L^2} + \|u_t^+(t,\cdot)\|_{L^2} \\ \lesssim & e^{-t}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}) + (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}) \\ \lesssim & (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}).\end{aligned}$$

(iv) Pela proposição 3.1.2 item (ii) e pelo corolário 3.1.6 item (iv), temos

$$\begin{aligned}\|u_{\Omega,t}(t,\cdot)\|_{L^2} \leq & \|u_t^-(t,\cdot)\|_{L^2} + \|u_t^+(t,\cdot)\|_{L^2} \\ \lesssim & e^{-t}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}) + (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2}) \\ \lesssim & (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2}).\end{aligned}$$

(v) Pelas proposições 3.1.3 e 3.1.7-(i), segue que,

$$\begin{aligned}\|\nabla u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \leq & \|\nabla u^-(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\nabla u^+(t,\cdot)\|_{L^2} \\ \lesssim & e^{-t}(\|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^m}) + (1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^m}) \\ \lesssim & (1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^m}).\end{aligned}$$

(vi) Segue das proposições 3.1.3 e 3.1.7-(ii),

$$\begin{aligned}\|\nabla u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \leq & \|\nabla u^-(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\nabla u^+(t,\cdot)\|_{L^2} \\ \lesssim & e^{-t}(\|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^m}) + (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^m}) \\ \lesssim & (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^m}).\end{aligned}$$

(vii) Segue das proposições 3.1.4 e 3.1.8-(i), que

$$\begin{aligned}\|u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \leq& \|u^-(t,\cdot)\|_{L^2} + \|u^+(t,\cdot)\|_{L^2}\\ \lesssim& e^{-t}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^m}) + (1+t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^m})\\ \lesssim& (1+t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^m}).\end{aligned}$$

$(viii)$ Por fim, segue das proposições 3.1.4 e 3.1.8-(ii), que

$$\begin{aligned}\|u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^2} \leq& \|u^-(t,\cdot)\|_{L^2} + \|u^+(t,\cdot)\|_{L^2}\\ \lesssim& e^{-t}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^m}) + (1+t)^{-\frac{n}{4}}(\|u_1\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^m})\\ \lesssim& (1+t)^{-\frac{n}{4}}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^m}).\end{aligned}$$

■

3.1.1 Estimativas L^1 de u_Ω

Proposição 3.1.10 *Seja $n \geq 1$ e $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $supp(\chi_0) \subset B_1(0)$ e constante em alguma vizinhança da origem. Então:*

$$K_1 = \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{i\xi_j}{1-|\xi|^2}\chi_0\right), \quad K_2 = \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\chi_0\right) \quad \in L^1.$$

Demonstração: ver [6] página 19.

Proposição 3.1.11 *Seja $n \geq 1$ e $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $supp(\chi_1) \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_1(0)$ e constante para $|x| > R$ para algum $R > 0$. Então:*

$$K_3 = \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^2-1}\chi_1\right), \quad K_4 = \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{i\xi_j}{|\xi|^2-1}\chi_1\right) \quad \in L^1.$$

Demonstração: ver [6] página 20.

Proposição 3.1.12 *Seja u^- definida em (3.9). Se $u_0 \in W^{1,1}$ e $u_1 \in L^1$, então $u^- \in W^{1,1}$ e valem as seguintes estimativas:*

$$\begin{aligned}(i)& \quad \|u^-(t,\cdot)\|_{L^1} \lesssim e^{-t}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1});\\ (ii)& \quad \|u_t^-(t,\cdot)\|_{L^1} \lesssim e^{-t}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1});\\ (iii)& \quad \|\nabla u^-(t,\cdot)\|_{L^1} \lesssim e^{-t}(\|u_0\|_{W^{1,1}} + \|u_1\|_{L^1}).\end{aligned}$$

Demonstração: Para $\xi \in \Omega_0$, podemos escrever

$$\hat{u}^-(t,\xi) = -e^{-t}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}(\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi)) + \hat{u}_1(\xi)\right)\chi_0(\xi), \tag{3.35}$$

enquanto que para $\xi \in \Omega_1$, escrevemos

$$\hat{u}^{-}(t,\xi) = e^{-t}\left(\frac{1}{|\xi|^2-1}(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))+\hat{u}_0(\xi)\right)\chi_1(\xi). \tag{3.36}$$

Agora note que,

$$\begin{aligned} u^{-}(t,x) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}^{-}(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_0}\hat{u}^{-}(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi + (2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_1}\hat{u}^{-}(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Logo, utilizando a identidade (3.35) temos que

$$\begin{aligned} &(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_0}\hat{u}^{-}(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} -e^{-t}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))+\hat{u}_1(\xi)\right)\chi_0(\xi)e^{ix.\xi}d\xi \\ &= -(2\pi)^{-n/2}e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\chi_0(\xi)\right)(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))e^{ix.\xi}d\xi \\ &\quad -(2\pi)^{-n/2}e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_0(\xi)\hat{u}_1(\xi)e^{ix.\xi}d\xi. \end{aligned}$$

Pela proposição 3.1.10 e pelas propriedades da transformada de Fourier para convoluções, obtemos

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_0}\hat{u}^{-}(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi &= -e^{-t}(2\pi)^{-n/2}\left(\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\chi_0(\xi)\right)*(u_0+u_1)(x)\right. \\ &\quad \left.+(\mathfrak{F}^{-1}(\chi_0)*u_1)(x)\right) \end{aligned}$$

Assim, como $u_0, u_1 \in L^1$, pela desigualdade de Young segue que

$$\begin{aligned} \left\|(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_0}\hat{u}^{-}(t,\xi)e^{i(\cdot)\xi}d\xi\right\|_{L^1} &\lesssim e^{-t}\left(\left\|\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\chi_0\right)\right\|_{L^1}\|u_0+u_1\|_{L^1}\right. \\ &\quad \left.+\|\mathfrak{F}^{-1}(\chi_0)\|_{L^1}+\|u_0\|_{L^1}\right) \\ &\lesssim e^{-t}(\|u_0\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^1}). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Do mesmo modo, utilizando a identidade (3.36), temos que

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_1}\hat{u}^-(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi\\
&\qquad = (2\pi)^{-n/2}e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|\xi|^2-1}(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))+\hat{u}_0(\xi)\right)\chi_1(\xi)e^{ix.\xi}d\xi\\
&\qquad = (2\pi)^{-n/2}e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{|\xi|^2-1}\chi_1(\xi)\right)(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))e^{ix.\xi}d\xi\\
&\qquad\quad +(2\pi)^{-n/2}e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}_0(\xi)\chi_1(\xi)e^{ix.\xi}d\xi. \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

Note que, pela definição de χ_1, o último termo da equação anterior pode ser escrito da forma,

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}_0(\xi)\chi_1(\xi)e^{ix.\xi}d\xi &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}_0(\xi)e^{ix.\xi}d\xi-(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}_0(\xi)\chi(\xi)e^{ix.\xi}d\xi\\
&= u_0(x)-(\mathfrak{F}^{-1}\chi * u_0)(x).
\end{aligned}
$$

Desta forma, de (3.39) temos que

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_1}\hat{u}^-(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi\\
&\quad = e^{-t}(2\pi)^{-n/2}\left(\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^2-1}\chi_1(\xi)\right)*(u_0+u_1)(x)+\mathfrak{F}^{-1}(u_0\chi_1)(x)\right)\\
&\quad = e^{-t}(2\pi)^{-n/2}\left(\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^2-1}\chi_1(\xi)\right)*(u_0+u_1)(x)+u_0(x)-(\mathfrak{F}^{-1}(\chi)*u_0)(x)\right).
\end{aligned}
$$

Pela desigualdade de Young e pela proposição 3.1.11, temos

$$
\begin{aligned}
\left\|(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_1}\hat{u}^-(t,\xi)e^{i(\cdot)\xi}d\xi\right\|_{L^1} &\lesssim e^{-t}(\|\mathfrak{F}^{-1}((|\xi|^2-1)^{-1}\chi_1)\|_{L^1}\|u_0+u_1\|_{L^1}\\
&\quad +\|\mathfrak{F}^{-1}(\chi)\|_{L^1}\|u_0\|_{L^1}+\|u_0\|_{L^1})\\
&\lesssim e^{-t}(\|u_0\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^1}). \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Finalmente, utilizando (3.38) e (3.40) em (3.37) e notando que $u_t^-=-u^-$, concluímos que $u^-,u_t^-\in L^1$ e valem os itens $(i),(ii)$ desta proposição.

Para provar (iii), basta notar que para $\xi\in\Omega_0$ podemos escrever

$$
i\xi_j\hat{u}^-(t,\xi)=-e^{-t}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}i\xi_j\hat{u}_0(\xi)+\frac{i\xi_j}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1(\xi)\right)\chi_0(\xi), \qquad (3.41)
$$

enquanto que para $\xi\in\Omega_1$ escrevemos

$$
i\xi_j\hat{u}^-(t,\xi)=e^{-t}\left(i\xi_j\hat{u}_0(\xi)+\frac{1}{|\xi|^2-1}i\xi_j\hat{u}_0(\xi)+\frac{i\xi_j}{|\xi|^2-1}\hat{u}_1(\xi)\right)\chi_1(\xi), \qquad (3.42)
$$

para qualquer $1 \leq j \leq n$. Note que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^-}{\partial x_j}(t,x) &= \mathfrak{F}^{-1}(i\xi_j \hat{u}^-(t,\xi)) \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} i\xi_j \hat{u}^-(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_0} i\xi_j \hat{u}^-(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi + (2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_1} i\xi_j \hat{u}^-(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi. \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Logo, utilizando a identidade (3.41), temos

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_0} i\xi_j \hat{u}^-(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi \\
&\quad = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} -e^{-t}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}(i\xi_j\hat{u}_0(\xi)) + \frac{i\xi_j}{1-|\xi|^2}\hat{u}_1(\xi)\right)\chi_0(\xi)e^{ix.\xi}d\xi \\
&\quad = -e^{-t}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\chi_0(\xi)\right)(i\xi_j\hat{u}_0(\xi))e^{ix.\xi}d\xi \\
&\quad\quad - e^{-t}(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{i\xi_j}{1-|\xi|^2}\chi_0(\xi)\right)\hat{u}_1(\xi)e^{ix.\xi}d\xi.
\end{aligned}$$

Assim, pela proposição 3.1.10 e pelas propriedades da transformada de Fourier para a convolução, obtemos

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_0} i\xi_j \hat{u}^-(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi = -e^{-t}(2\pi)^{n/2}\left(\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\chi_0\right) * \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)\right)(x) \\
- e^{-t}(2\pi)^{n/2}\left(\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{i\xi_j}{1-|\xi|^2}\chi_0\right) * u_1\right)(x).
\end{aligned}$$

Como $(\partial u_0/\partial x_j), u_1 \in L^1$, pela desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_0} i\xi_j \hat{u}^-(t,\xi)e^{i(.)\xi}d\xi\right\|_{L^1} \lesssim e^{-t}\left\|\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\chi_0\right)\right\|_{L^1}\left\|\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right\|_{L^1} \\
+ e^{-t}\left\|\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{i\xi_j}{1-|\xi|^2}\chi_0\right)\right\|_{L^1}\|u_1\|_{L^1}. \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Por outro lado, de modo análogo, utilizando a identidade (3.42), temos

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_1} i\xi_j \hat{u}^-(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi &= e^{-t}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j} - \mathfrak{F}^{-1}(\chi) * \frac{\partial u_0}{\partial x_j} + \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^2-1}\chi_1\right) * \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)\right. \\
&\quad \left. + \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{i\xi_j}{|\xi|^2-1}\chi_1\right) * u_1\right)(x).
\end{aligned}$$

Deste modo, como $(\partial u_0/\partial x_j), u_1 \in L^1$, pela proposição 3.1.11 e pela desigualdade de

Young, segue que

$$\begin{aligned}
&\left\| (2\pi)^{-n/2} \int_{\Omega_1} i\xi_j \hat{u}^-(t,\xi) e^{i(\cdot)\xi} d\xi \right\|_{L^1} \\
&\leq e^{-t} \left(\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right\|_{L^1} + \|\mathfrak{F}^{-1}(\chi)\|_{L^1} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right\|_{L^1} + \left\| \mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{1}{|\xi|^2 - 1} \chi_1 \right) \right\|_{L^1} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right\|_{L^1} \right. \\
&\quad \left. + \left\| \mathfrak{F}^{-1} \left(\frac{i\xi_j}{|\xi|^2 - 1} \chi_1 \right) \right\|_{L^1} \|u_1\|_{L^1} \right) \\
&\lesssim e^{-t} \left(\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1} \right). \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Logo, utilizando (3.44) e (3.45) em (3.43) obtemos

$$\left\| \frac{\partial u^-}{\partial x_j}(t,\cdot) \right\|_{L^1} \lesssim e^{-t} \left(\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1} \right).$$

Portanto, temos que $u^-(t,\cdot) \in W^{1,1}$ e vale o item (iii). Desta forma esta proposição está provada. ■

Observação 3.1.13 *Para cada $t > 0$ e $j, l, k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq j \leq n$ e $l + k = 0, 1$, temos:*

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^l \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \left[\left(\frac{\pi}{t} \right)^{n/2} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} \right] \right\|_{L^1} \lesssim t^{-k-\frac{l}{2}}$$

Definimos $\alpha(t,x) = (\pi/t)^{n/2} \exp(-|x|^2/4t)$. Fazendo a mudança de variável $\eta = (4t)^{-1/2}x$ temos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^m e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = (4t)^{\frac{n+m}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\eta|^m e^{-|\eta|^2} d\eta = (4t)^{\frac{n+m}{2}} \||\eta|^m e^{-|\eta|^2}\|_{L^1}.$$

Logo, temos que

$$\||x|^m \alpha(t,\cdot)\|_{L^1} = (\pi/t)^{n/2} (4t)^{(n+m)/2} \||\eta|^m e^{-|\eta|^2}\|_{L^1} \lesssim t^{m/2}.$$

Como as derivadas parciais de α são dadas por,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t,x) &= \frac{-n}{2t} \alpha(t,x) + \frac{1}{4t^2} |x|^2 \alpha(t,x), \\
\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(t,x) &= \frac{-x_j}{2t} \alpha(t,x),
\end{aligned}$$

obtemos o resultado desejado.

Observação 3.1.14 *Note que, $\mathfrak{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}) = \alpha(t,x)$, para $t > 0$.*

Proposição 3.1.15 *Seja u^+ definida em (3.10). Se $u_0 \in W^{1,1}$ e $u_1 \in L^1$, então valem as seguintes estimativas:*

$$\begin{array}{rll}(i) & \|u^+(t,\cdot)\|_{L^1} & \lesssim (\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1});\\ (ii) & \|\nabla u^+(t,\cdot)\|_{L^1} & \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{W^{1,1}} + \|u_1\|_{L^1});\\ (iii) & \|u_t^+(t,\cdot)\|_{L^1} & \lesssim (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1}).\end{array}$$

Demonstração: Primeiro vamos mostrar para $t \geq 1$ e neste caso, lembramos que $t^{-1} \lesssim (1+t)^{-1}$. Para $\xi \in \Omega_0$ podemos escrever,

$$(i\xi_j)^l \partial_t^k \hat{u}^+(t,\xi) = ((i\xi_j)^l \partial_t^k e^{-t|\xi|^2}) \left(\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi) + \frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}(\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi)) \right) \chi_0(\xi) \tag{3.46}$$

enquanto que para $\xi \in \Omega_1$ escrevemos,

$$(i\xi_j)^l \partial_t^k \hat{u}^+(t,\xi) = -((i\xi_j)^l \partial_t^k e^{-t|\xi|^2}) \left(\frac{\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi)}{|\xi|^2 - 1} \right) \chi_1(\xi), \tag{3.47}$$

com $j,k,l \in \mathbb{N}$, $l+k = 0,1$ e $1 \leq j \leq n$. Note que,

$$\begin{aligned}\partial_j^l \partial_t^k u^+(t,x) &= \mathfrak{F}^{-1}((i\xi_j)^l \partial_t^k \hat{u}^+(t,\xi))\\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi_j)^l \partial_t^k \hat{u}^+(t,\xi) e^{ix.\xi} d\xi\\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\Omega_0} (i\xi_j)^l \partial_t^k \hat{u}^+(t,\xi) e^{ix.\xi} d\xi + (2\pi)^{-n/2} \int_{\Omega_1} (i\xi_j)^l \partial_t^k \hat{u}^+(t,\xi) e^{ix.\xi} d\xi\end{aligned} \tag{3.48}$$

Utilizando a identidade (3.46), temos que

$$\begin{aligned}&(2\pi)^{-n/2} \int_{\Omega_0} (i\xi_j)^l \partial_t^k \hat{u}^+(t,\xi) e^{ix.\xi} d\xi\\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} ((i\xi_j)^l \partial_t^k e^{-t|\xi|^2}) \left(\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi) + \frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}(\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi)) \right) \chi_0(\xi) e^{ix.\xi} d\xi\\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} ((i\xi_j)^l \partial_t^k e^{-t|\xi|^2})(\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi))\chi_0(\xi) e^{ix.\xi} d\xi\\ &\quad + (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} ((i\xi_j)^l \partial_t^k e^{-t|\xi|^2}) \left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\chi_0(\xi) \right) (\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi)) e^{ix.\xi} d\xi\end{aligned}$$

Pela proposição 3.1.10 e pelas propriedades da transformada de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_0}(i\xi_j)^l\partial_t^k\hat{u}^+(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi\\
&\quad=(\mathfrak{F}^{-1}(\chi_0)*\mathfrak{F}^{-1}((i\xi_j)^l\partial_t^k e^{-t|\xi|^2})(\hat{u}_0+\hat{u}_1)))(x)\\
&\qquad+(\mathfrak{F}^{-1}(\chi_0|\xi|^2/(1-|\xi|^2))*\mathfrak{F}^{-1}((i\xi_j)^l\partial_t^k e^{-t|\xi|^2})(\hat{u}_0+\hat{u}_1)))(x)\\
&\quad=(\mathfrak{F}^{-1}(\chi_0)*(\partial_j^l\partial_t^k\mathfrak{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}))*(u_0+u_1))(x)\\
&\qquad+(\mathfrak{F}^{-1}(\chi_0|\xi|^2/(1-|\xi|^2))*(\partial_j^l\partial_t^k\mathfrak{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2}))*(u_0+u_1))(x).
\end{aligned}$$

Assim, como $u_0,u_1\in L^1$, pela proposição 3.1.10, pela observação 3.1.13 e pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned}
\left\|(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_0}(i\xi_j)^l\partial_t^k\hat{u}^+(t,\xi)e^{i(\cdot).\xi}d\xi\right\|_{L^1}&\lesssim\|\partial_j^l\partial_t^k\mathfrak{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^2})\|_{L^1}\|u_0+u_1\|_{L^1}\\
&\lesssim(1+t)^{-k-\frac{l}{2}}(\|u_0\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^1}).
\end{aligned}\tag{3.49}$$

Do mesmo modo, utilizando a identidade (3.47), temos que

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_1}(i\xi_j)^l\partial_t^k\hat{u}^+(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi\\
&\quad=-(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}((i\xi_j)^l\partial_t^k e^{-t|\xi|^2})\left(\frac{1}{|\xi|^2-1}\chi_1(\xi)\right)(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))e^{ix.\xi}d\xi
\end{aligned}$$

Pela proposição 3.1.11 e pelas propriedades da transformada de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_1}(i\xi_j)^l\partial_t^k\hat{u}^+(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi\\
&\quad=-(\mathfrak{F}^{-1}(\chi_1/(1-|\xi|^2))*(\partial_j^l\partial_t^k\mathfrak{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^2}))*(u_0+u_1))(x).
\end{aligned}$$

Logo, pela proposição 3.1.11, pela observação 3.1.13 e pela desigualdade de Young, segue que

$$\begin{aligned}
\left\|(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_1}(i\xi_j)^l\partial_t^k\hat{u}^+(t,\xi)e^{i(\cdot).\xi}d\xi\right\|_{L^1}&\lesssim\|\partial_j^l\partial_t^k\mathfrak{F}^{-1}(e^{-t|\cdot|^2})\|_{L^1}\|u_0+u_1\|_{L^1}\\
&\lesssim(1+t)^{-k-\frac{l}{2}}(\|u_0\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^1}).
\end{aligned}\tag{3.50}$$

Assim, utilizando (3.49) e (3.50) em (3.48), obtemos

$$\|\partial_j^l\partial_t^k u^+(t,\cdot)\|_{L^1}\lesssim(1+t)^{-k-\frac{l}{2}}(\|u_0\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^1}),$$

para cada $1\leq j\leq n$ e $l+k=0,1$.

Por outro lado, para $t<1$, podemos escrever

$$\begin{aligned}(i\xi_j)\hat{u}^+(t,\xi) &= e^{-t|\xi|^2}\left(\frac{i\xi_j}{1-|\xi|^2}(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))\right)\chi_0(\xi)\\ \partial_t\hat{u}^+(t,\xi) &= e^{-t|\xi|^2}\left(\frac{|\xi|^2}{|\xi|^2-1}(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))\right)\chi_0(\xi)\end{aligned}$$

para $\xi\in\Omega_0$ enquanto que para $\xi\in\Omega_1$ escrevemos,

$$\begin{aligned}(i\xi_j)\hat{u}^+(t,\xi) &= -e^{-t|\xi|^2}\left(\frac{i\xi_j}{|\xi|^2-1}(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))\right)\chi_1(\xi)\\ \partial_t\hat{u}^+(t,\xi) &= e^{-t|\xi|^2}\left(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi)+\frac{1}{|\xi|^2-1}(\hat{u}_0(\xi)+\hat{u}_1(\xi))\right)\chi_1(\xi).\end{aligned}$$

Pelas proposições 3.1.10 e 3.1.11 as funções

$$\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{i\xi_j}{1-|\xi|^2}\chi_0\right), \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{i\xi_j}{1-|\xi|^2}\chi_1\right), \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}\chi_0\right), \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{1}{1-|\xi|^2}\chi_1\right)$$

pertencem a L^1, de modo análogo ao realizado anteriormente, para $s=0,1$ temos que

$$\begin{aligned}\left\|(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_s}(i\xi_j)^l\partial_t^k\hat{u}^+(t,\xi)e^{i(\cdot).\xi}d\xi\right\|_{L^1} &\lesssim \|\mathfrak{F}^{-1}(e^{-t|\xi|^2})\|_{L^1}(\|u_0\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^1})\\ &\lesssim \|u_0\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Ainda, como $t<1$, temos que $1\lesssim(1+t)^{-1}$ e consequentemente os resultados obtidos nesta demonstração para $t\geq 1$ continuam válidos. Portanto, temos que $u^+(t,\cdot)\in W^{1,1}$ para cada $t\geq 0$, e valem os itens $(i)-(iii)$ desta proposição. ∎

Corolário 3.1.16 *Seja u_Ω definida em (3.8). Se $u_0\in W^{1,1}$ e $u_1\in L^1$, então u_Ω satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\begin{aligned}&(i) && \|u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^1} && \lesssim(\|u_0\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^1});\\ &(ii) && \|\nabla u_\Omega(t,\cdot)\|_{L^1} && \lesssim(1+t)^{-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{W^{1,1}}+\|u_1\|_{L^1});\\ &(iii) && \|u_{\Omega,t}(t,\cdot)\|_{L^1} && \lesssim(1+t)^{-1}(\|u_0\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^1}).\end{aligned}$$

Demonstração: Segue como consequência das proposições 3.1.12 e 3.1.15. ∎

3.2 Estimativas de Decaimento de u_K

Nesta seção estudaremos o comportamento assintótico da função u_K definida por,

$$u_K(t,x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{u}_K(t,\xi)e^{ix.\xi}d\xi, \tag{3.51}$$

em que $\hat{u}_K$ está definida em (3.7).

Lema 3.2.1 *São decrescentes as funções* $g_j : [0, \infty) \times [a, b] \to \mathbb{R}$, $j = 0, 1$, *definidas por*

$$g_j(t, s) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ts^2} - s^{2j} e^{-t}}{1 - s^2}, & se \quad s \neq 1, \\ (j + t)e^{-t}, & se \quad s = 1. \end{cases}$$

Além disso, temos que $|g_j(t, s)| \lesssim e^{-ta^2}$, *para todo* $s \in [a, b]$.

Demonstração: De fato, basta mostrar que a derivada de $g_0(t, \cdot)$ é negativa com respeito a variável s. Note que

$$\partial_s g_0(t, s) = \begin{cases} \dfrac{-2s}{(1 - s^2)^2}[te^{-ts^2}(1 - s^2) - (e^{-ts^2} - e^{-t})], & \text{se} \quad s \neq 1, \\ -t^2 e^{-t}, & \text{se} \quad s = 1. \end{cases}$$

Assim, calculando a derivada da função $h(t, s) = [te^{-ts^2}(1-s^2)-(e^{-ts^2} - e^{-t})]$ e igualando a zero, ou seja,

$$\partial_s h(t, s) = -2st^2(1 - s^2)e^{-ts^2} = 0,$$

temos que $s = 1$ é ponto crítico de $h(t, \cdot)$ em $[a, b]$. Note que para $s < 1$ temos $h(t, s) < 0$ enquanto que para $s > 1$ temos $h(t, s) > 0$, ou seja, $s = 1$ é ponto de mínimo de $h(t, \cdot)$. Como $h(t, 1) = 0$ concluímos que $h(t, s) \geq 0$ para todo $s \in [a, b]$. Notando que

$$\partial_s g_0(t, s) = -2sh(t, s)/(1 - s^2),$$

concluímos que $\partial_s g_0(t, \cdot) < 0$, ou seja, $g_0(t, \cdot)$ é decrescente. Deste modo, obsevando ainda que g_0 é positiva, segue que

$$|g_0(t, s)| = g_0(t, s) \leq \frac{e^{-ta^2} - e^{-t}}{1 - a^2} \lesssim e^{-ta^2}.$$

Para concluir, basta notar que $g_1(t, s) = g_0(t, s) + e^{-t}$, portanto o lema está provado. ■

Proposição 3.2.2 *Se* $u_0 \in H^2$ *e* $u_1 \in L^2$ *então* u_K, *definida em (3.51), satisfaz as seguintes estimativas:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \|\triangle u_K(t, \cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-t/2}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}); \\ (ii) \quad & \|\partial_t u_K(t, \cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-t/2}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}). \end{aligned}$$

Demonstração: Pelo lema 3.2.1, as funções $g_j(t, s)$ são positivas e decrescentes no intervalo

$[\sqrt{1/2}, \sqrt{3/2}]$. Logo, para $\xi \in \Omega_K$ temos que

$$|g_j(t,\xi)| = g_j(t,\xi) \leq \frac{e^{-t/2} - (1/2)^j e^{-t}}{1-(1/2)} \lesssim e^{-t/2}.$$

Pelo teorema de Plancherel e pelas propriedades da transformada de Fourier, segue que

$$\begin{aligned}\|\triangle u_K(t,\cdot)\|_{L^2} =& \||\xi|^2 \hat{u}_K(t,\cdot)\|_{L^2} \leq (3/2)\|\hat{u}_K(t,\cdot)\|_{L^2}\\ \lesssim& \|g_1(t,\cdot)\hat{u}_0\|_{L^2} + \|g_0(t,\cdot)\hat{u}_1\|_{L^2}\\ \lesssim& e^{-t/2}(\|\hat{u}_0\|_{L^2} + \|\hat{u}_1\|_{L^2})\\ =& e^{-t/2}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}),\end{aligned}$$

onde obtemos o item (i) desta proposição. Agora, note que

$$\partial_t \hat{u}_K(t,\xi) = (\partial_t g_1)(t,\xi)\hat{u}_0(\xi) + (\partial_t g_0)(t,\xi)\hat{u}_1(\xi).$$

Deste modo, temos que

$$\begin{aligned}\partial_t g_1(t,\xi) &= -|\xi|^2 g_0(t,\xi),\\ \partial_t g_0(t,\xi) &= \begin{cases} -g_0(t,\xi) + e^{-t|\xi|^2}, & \text{se} \quad |\xi| \neq 1,\\ (1-t)e^{-t}, & \text{se} \quad |\xi| = 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Assim, temos que $|g_j(t,\xi)| \lesssim e^{-t/2}$ para todo $\xi \in \Omega_K$ e $j = 0, 1$. Logo, pelo teorema de Plancherel, segue que

$$\begin{aligned}\|\partial_t u_K(t,\cdot)\|_{L^2} =& \|\partial_t \hat{u}_K(t,\cdot)\|_{L^2}\\ \leq& \|\partial_t g_1(t,\cdot)\hat{u}_0\|_{L^2} + \|\partial_t g_0(t,\cdot)\hat{u}_1\|_{L^2}\\ \lesssim& e^{-t/2}(\|\hat{u}_0\|_{L^2} + \|\hat{u}_1\|_{L^2})\\ =& e^{-t/2}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2}).\end{aligned}$$

Logo, o item (ii) também está provado. ■

Proposição 3.2.3 *Se $u_0 \in L^1 \cap H^q$, $q = 0, 1, 2$, e $u_1 \in L^1 \cap L^2$, então para qualquer $m \in [1, 2]$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| \leq q$, temos que u_K satisfaz*

$$\|\partial_x^\alpha u_K(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim e^{-t/2}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^m}).$$

Demonstração: Pelas propriedades da transformada de Fourier e pelo teorema de Plancherel, temos que

$$\|\partial_x^\alpha u_K(t,\cdot)\|_{L^2} = \|(i\xi)^\alpha \hat{u}_K(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \||\xi|^{|\alpha|}\hat{u}_K(t,\cdot)\|_{L^2} \leq (3/2)^{|\alpha|}\|\hat{u}_K(t,\cdot)\|_{L^2}.$$

Por outro lado, temos que

$$\|\hat{u}_K(t,\cdot)\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_K(t,\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega_K} |\hat{u}_K(t,\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} = \|\hat{u}_K(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_K)}$$

As funções $g_j(t,\xi)$ são integráveis sobre Ω_K e temos que $g_j(t,\cdot) \in L^r(\Omega_K)$, para todo $r \geq 1$ e ainda

$$\|g_j(t,\cdot)\|_{L^r(\Omega_K)} = \left(\int_{\Omega_K} |g_j(t,\xi)|^r d\xi\right)^{1/r} \lesssim e^{-t/2}|\Omega_K|^{1/r}.$$

Logo, como $u_0, u_1 \in L^1 \cap L^2$ temos que $\hat{u}_0, \hat{u}_1 \in L^{m'}$, onde m' denota o conjugado de $m \in [1,2]$. Tomando $r = 2m/(2-m)$, segue que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m'},$$

de modo que $1/r + 1/m' = 1/2$. Assim, pela desigualdade de Hölder generalizada, temos que

$$\begin{aligned}
\|\hat{u}_K(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_K)} \leq& \|g_1(t,\cdot)\hat{u}_0\|_{L^2(\Omega_K)} + \|g_0(t,\cdot)\hat{u}_1\|_{L^2(\Omega_K)} \\
\leq& \|g_1(t,\cdot)\|_{L^r(\Omega_K)}\|\hat{u}_0\|_{L^{m'}(\Omega_K)} + \|g_0(t,\cdot)\|_{L^r(\Omega_K)}\|\hat{u}_1\|_{L^{m'}(\Omega_K)} \\
\lesssim& e^{-t/2}(\|\hat{u}_0\|_{L^{m'}} + \|\hat{u}_1\|_{L^{m'}}) \\
\lesssim& e^{-t/2}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^m}).
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Corolário 3.2.4 *Se $u_0 \in L^1 \cap H^1$ e $u_1 \in L^1 \cap L^2$, então para qualquer $m \in [1,2]$ segue que*

$$\begin{aligned}
(i) \quad \|\nabla u_K(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim e^{-t/2}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^m}); \\
(ii) \quad \|u_K(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim e^{-t/2}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_1\|_{L^m}).
\end{aligned}$$

Demonstração: É consequência imediata da proposição anterior. ■

3.2.1 Estimativas L^1 de u_K

Observação 3.2.5 *Seja $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$. Então, para $m > n/2$ temos que,*

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)(1+|x|^2)^m(1+|x|^2)^{-m}|dx \\
&\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)(1+|x|^2)^m| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-m}dx \\
&\lesssim \|(1+|\cdot|^2)^m\phi\|_{L^\infty} \\
&\lesssim \|\mathfrak{F}((1+|\cdot|^2)^m\phi)\|_{L^1},
\end{aligned}$$

uma vez que $(1+|\cdot|^2)\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ e,

$$(1+|x|^2)^m\phi(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathfrak{F}((1+|x|^2)^m\phi)(\xi)e^{ix.\xi}d\xi.$$

Proposição 3.2.6 *Se $u_0, u_1 \in L^1$, então u_K satisfaz a estimativa:*

$$\|\partial_t^l\nabla^j u_K(t,\cdot)\|_{L^1} \lesssim (1+t)^{2n+1}e^{-t/2}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1}),$$

onde $l+j = 0, 1$.

Demonstração: Pondo $g = g_0$, podemos reescrever a função $\hat{u}_K$ como,

$$\hat{u}_K(t,\xi) = g(t,\xi)(\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi)) + e^{-t}\hat{u}_0(\xi).$$

Para iniciar, note que

$$g(t,\xi) = \frac{e^{-t|\xi|^2} - e^{-t}}{1-|\xi|^2} = te^{-t}\left(\frac{e^{-t(|\xi|^2-1)} - 1}{-t(|\xi|^2-1)}\right) = te^{-t}h(t,\xi),$$

onde $h(t,\xi) = [e^{-t(|\xi|^2-1)} - 1]/[-t(|\xi|^2-1)]$. Ainda, utilizando a série de Taylor da função exponencial podemos reescrever a função h como

$$h(t,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k[t(|\xi|^2-1)]^k}{(k+1)!}.$$

Deste modo, para $\xi \in \Omega_K$, temos que

$$|h(t,\xi)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[t(|\xi|^2-1)]^k}{k!} \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/2)^k}{k!} = e^{t/2},$$

uma vez que $||\xi|^2-1|<1/2$. Ainda, pode-se provar por indução que

$$|\partial^\alpha h(t,\xi)| \lesssim t^{|\alpha|}e^{t/2},$$

para todos $\xi \in \Omega_K$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Logo, temos que

$$|\partial^\alpha g(t,\xi)\chi_K(\xi)| \lesssim t^{|\alpha|+1}e^{-t/2}, \quad \xi \in \Omega_K, \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \tag{3.52}$$

Como $g(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\chi_K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos que $g(t,\cdot)\chi_K \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, para todo $t \geq 0$. Deste modo, pela observação 3.2.5, temos que

$$\|\mathfrak{F}^{-1}(g(t,\cdot)\chi_K)\|_{L^1} \lesssim \|\mathfrak{F}^{-1}((1+|\cdot|^2)^n g(t,\cdot)\chi_K)\|_{L^1}$$

Por outro lado, dado $f \in S(\mathbb{R}^n)$, temos

$$(1+|x|^2)^n f = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{k_1}\cdots\sum_{k_n=0}^{k_{n-1}}\binom{n}{k_1}\cdots\binom{k_{n-1}}{k_n}x_1^{2(k_1-k_2)}\dots x_n^{2k_n}f.$$

Logo, aplicando a transformada de Fourier, segue que

$$\mathfrak{F}((1+|x|^2)^n f) = \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{k_1}\cdots\sum_{k_n=0}^{k_{n-1}}\binom{n}{k_1}\cdots\binom{k_{n-1}}{k_n}\partial_{\xi_1}^{2(k_1-k_2)}\dots\partial_{\xi_n}^{2k_n}\hat{f}.$$

Ainda, considerando $\alpha = 2(k_1-k_2, k_2-k_3, \dots, k_{n-1}-k_n, k_n)$ temos $|\alpha| = 2k_1$. Logo, considerando $f = \mathfrak{F}^{-1}(g(t,\cdot)\chi_K)$ e utilizando a estimativa (3.52), temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{F}^{-1}(g(t,\cdot)\chi_K)\|_{L^1} &\lesssim \sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{k_1}\cdots\sum_{k_n=0}^{k_{n-1}}\binom{n}{k_1}\cdots\binom{k_{n-1}}{k_n}\|\partial_{\xi_1}^{2(k_1-k_2)}\dots\partial_{\xi_n}^{2k_n}g(t,\cdot)\chi_K\|_{L^1}\\
&\lesssim \sum_{k_1=0}^{n}\binom{n}{k_1}t^{2k_1+1}e^{-t/2}\\
&\lesssim (1+t)^{2n+1}e^{-t/2},
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
\|\partial_{\xi_1}^{2(k_1-k_2)}\dots\partial_{\xi_n}^{2k_n}g(t,\cdot)\chi_K\|_{L^1} &= \int_{\Omega_K}|\partial_{\xi_1}^{2(k_1-k_2)}\dots\partial_{\xi_n}^{2k_n}g(t,\xi)\chi_K(\xi)|d\xi\\
&\lesssim t^{2k_1+1}e^{-t/2}\int_{\Omega_K}d\xi\\
&= t^{2k_1+1}e^{-t/2}|\Omega_K|,
\end{aligned}$$

onde $|A|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Assim, temos que $\mathfrak{F}^{-1}(g(t,\cdot)\chi_K) \in$

L^1 e ainda $\|\mathfrak{F}^{-1}(g(t,\cdot)\chi_K)\|_{L^1} \lesssim (1+t)^{2n+1}e^{-t/2}$ para todo $t \geq 0$. Como,

$$\begin{aligned}
u_K(t,x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\Omega_K} g(t,\xi)\chi_K(\xi)(\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi))e^{-ix.\xi}d\xi \\
&\quad + (2\pi)^{-n/2} \int_{\Omega_K} e^{-t}\chi_K(\xi)\hat{u}_0(\xi)e^{-ix.\xi}d\xi \\
&= (2\pi)^{n/2}(\mathfrak{F}^{-1}(g(t,\cdot)\chi_K) * (u_0 + u_1))(x) + (2\pi)^{n/2}e^{-t}(\mathfrak{F}^{-1}(\chi_K) * u_0)(x),
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u_K(t,\cdot)\|_{L^1} &\lesssim \|\mathfrak{F}^{-1}(g(t,\cdot)\chi_K\|_{L^1}\|u_0 + u_1\|_{L^1} + e^{-t}\|\mathfrak{F}^{-1}(\chi_K)\|_{L^1}\|u_0\|_{L^1} \\
&\lesssim (1+t)^{2n+1}e^{-t/2}\|u_0 + u_1\|_{L^1} + e^{-t}\|u_0\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\partial_t\hat{u}_K(t,\xi) &= (-g(t,\xi) + e^{-t|\xi|^2})\chi_K(\xi)(\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi)) - e^{-t}\chi_K(\xi)\hat{u}_0(\xi), \\
(i\xi_j)\hat{u}_K(t,\xi) &= (i\xi_j)g(t,\xi)\chi_K(\xi)(\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi)) + e^{-t}(i\xi_j)\chi_K(\xi)\hat{u}_0(\xi),
\end{aligned}$$

e ainda,

$$|\partial^\alpha(g(t,\xi) + e^{-t|\xi|^2})\chi_K| \lesssim (1+t)^{|\alpha|+1}e^{-t/2},$$

para $\xi \in \Omega_K$. Logo, como

$$\partial_t u_K(t,x) = \mathfrak{F}^{-1}(\partial_t\hat{u}_K(t,\xi)), (\partial/\partial x_j)u_K(t,x) = \mathfrak{F}^{-1}(i\xi_j\hat{u}_K(t,\xi)),$$

temos que

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^l\nabla^j u_K(t,\cdot)\|_{L^1} &\lesssim (1+t)^{2n+1}e^{-t/2}\|u_0 + u_1\|_{L^1} + e^{-t}\|u_0\|_{L^1}. \\
&\lesssim (1+t)^{2n+1}e^{-t/2}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1}),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

3.3 Comportamento Assintótico da Solução para o Problema Linear

Finalmente, com os resultados obtidos para as funções u_Ω e u_K nas seções anteriores, estamos aptos a deduzir as estimativas de energia e as estimativas L^1 para a solução do problema de Cauchy (3.2), apresentados nos teoremas seguintes:

Teorema 3.3.1 *A solução u para o problema de Cauchy linear (3.2) satisfaz as seguintes estimativas:*

(a) Se $(u_0, u_1) \in (L^1 \cap H^2) \times (L^1 \cap L^2)$, então

$$\begin{aligned}
(i) \quad \|\triangle u(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^2});\\
(ii) \quad \|\triangle u(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2});\\
(iii) \quad \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^2});\\
(iv) \quad \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2}).
\end{aligned}$$

(b) Se $(u_0, u_1) \in (L^1 \cap H^1) \times (L^1 \cap L^2)$ e se $m \in [1,2]$ é tal que

$$n\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2}\right) < 1,$$

então são válidas

$$\begin{aligned}
(v) \quad \|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^m});\\
(vi) \quad \|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^m}).
\end{aligned}$$

(c) Se $(u_0, u_1) \in (L^1 \cap L^2) \times (L^1 \cap L^2)$ e se $m \in [1,2]$ é tal que

$$n\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2}\right) < 2,$$

então são válidas

$$\begin{aligned}
(vii) \quad \|u(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_0\|_{L^m} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^m});\\
(viii) \quad \|u(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^m}).
\end{aligned}$$

Demonstração: Uma vez que a solução para (3.2) pode ser escrita como $u = u_\Omega + u_K$, os itens $(i) - (iv)$ decorrem como consequência das proposições 3.1.9 e 3.2.2, enquanto que os itens $(v) - (viii)$ decorrem como consequência da proposição 3.1.9 e do corolário 3.2.4.
■

Proposição 3.3.2 *Se $u_0 \equiv 0$ e $u_1 \in L^1 \cap L^2$, então a função u, solução para o problema de Cauchy linear (3.2), satisfaz as seguintes estimativas,*

$$\begin{aligned}
(i) \quad \|\partial_t u(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \ (1+t)^{-1} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|u_1\|_{L^m};\\
(ii) \quad \|\partial_t u(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \ (1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)-1} t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^m}),
\end{aligned}$$

para $m \in [1,2]$ com $n(1/m - 1/2) < 2$ e $t > 0$.

Demonstração: Primeiro vamos mostrar o resultado para u_Ω. Note que $u_t^- = -u^-$. Logo, pela proposição 3.1.4, os itens (i) e (ii) são válidos para u_t^-. Assim, como $u_\Omega = u^- + u^+$, resta-nos mostrar que o resultado é válido para u^+.

Para $\xi \in \Omega_1$ temos que $e^{-t|\xi|^2} \leq e^{-t/2}e^{-t|\xi|^2/2}$. Pelo teorema de Plancherel, segue que

$$\|u_t^+(t,\cdot)\|_{L^2} = \|\hat{u}_t^+(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \||\xi|^2\hat{u}^+(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_0)} + \||\xi|^2\hat{u}^+(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega_1)}.$$

Tomando $r = 2m/(2-m)$, utilizando a desigualdade (3.22) obtemos

$$\begin{aligned}\|\hat{u}_t^+(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \||\xi|^2 e^{-t|\xi|^2}\|_{L^r(\Omega_0)}\|\hat{u}_1\|_{L^{m'}(\Omega_0)} + e^{-t/2}\|e^{-t|\xi|^2/2}\|_{L^r(\Omega_1)}\|\hat{u}_1\|_{L^{m'}(\Omega_1)} \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2r}-1}\|\hat{u}_1\|_{L^{m'}} + e^{-t/2}(1+t)^{-\frac{n}{2r}}\|\hat{u}_1\|_{L^{m'}}\end{aligned}$$

onde m' denota o expoente conjugado de m. Como $(1+t)^{-\frac{n}{2r}} \leq t^{-\frac{n}{2r}}$ e $e^{-t/2} \lesssim (1+t)^{-1}$, concluímos que

$$\|u_t^+(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-1}t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|u_1\|_{L^m},$$

e consequentemente o item (i) desta proposição é válido para u_Ω.

Por outro lado, para $t \in [0,1]$ temos que

$$\begin{aligned}\||\xi|^2\hat{u}^+(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \||\xi|^2 e^{-t|\xi|^2}\|_{L^2(\Omega_0)}\|\hat{u}_1\|_{L^\infty(\Omega_0)} + e^{-t}\|(1-|\xi|^2)^{-1}\|_{L^r(\Omega_1)}\|\hat{u}_1\|_{L^{m'}(\Omega_1)} \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^m}).\end{aligned}$$

enquanto que para $t > 1$ obtemos diretamente

$$\||\xi|^2\hat{u}^+(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \||\xi|^2 e^{-t|\xi|^2}\|_{L^2}\|\hat{u}_1\|_{L^\infty} \lesssim t^{-\frac{n}{4}-1}\|u_1\|_{L^1}.$$

Notando que para $m \in [1,2]$ temos

$$\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right) \leq \frac{n}{4},$$

e que,

$$\frac{n}{4} = \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right),$$

concluímos que o item (ii) desta proposição também é válido para u_Ω.

Por outro lado, temos que $\hat{u}_K(t,\xi) = g(t,\xi)\hat{u}_1(\xi)$, onde

$$g(t,\xi) = \frac{e^{-t|\xi|^2} - e^{-t}}{1-|\xi|^2},\ \xi \in \Omega_K \text{ e } t \geq 0.$$

Logo,

$$\partial_t \hat{u}_K(t,\xi) = \frac{-|\xi|^2 e^{-t|\xi|^2} + e^{-t}}{1-|\xi|^2} = -\frac{e^{-t|\xi|^2} - e^{-t}}{1-|\xi|^2} + e^{-t|\xi|^2}.$$

Assim, pelo teorema de Plancherel, segue que

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u_K(t,\cdot)\|_{L^2} &= \|\partial_t \hat{u}_K(t,\cdot)\|_{L^2} \\
&\lesssim \|(g(t,\cdot) + e^{-t|\cdot|^2})\hat{u}_1\|_{L^2(\Omega_K)} \\
&\lesssim \|g(t,\cdot) + e^{-t|\cdot|^2}\|_{L^r} \|\hat{u}_1\|_{L^{m'}} \\
&\lesssim e^{-t/2}\|u_1\|_{L^m}.
\end{aligned}$$

Logo, os itens (i) e (ii) também valem para u_k. Portanto, como $u = u_\Omega + u_K$, a proposição está provada. ■

Teorema 3.3.3 *Se $u_0 \in W^{1,1}$ e $u_1 \in L^1$, então a solução u para o problema de Cauchy linear (3.2) satisfaz as estimativas L^1 seguintes:*

$$\begin{array}{lll}
(i) & \|u(t,\cdot)\|_{L^1} & \lesssim \|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1}; \\
(ii) & \|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^1} & \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{2}}(\|u_0\|_{W^{1,1}} + \|u_1\|_{L^1}); \\
(iii) & \|u_t(t,\cdot)\|_{L^1} & \lesssim (1+t)^{-1}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^1}).
\end{array}$$

Demonstração: Decorre como consequência do corolário 3.1.16 e da proposição 3.2.6. ■

Capítulo 4

Existência e Unicidade de Solução para o Problema Não Linear

Nesta seção provaremos a existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy (3.1), sob a presença de não linearidades do tipo $f(u) = |u|^p$, $|u_t|^p$, $|\nabla u|^p$, com $p > 1$, e obteremos o comportamento assintótico destas soluções. Para isso, definiremos o espaço solução das funções $u : [0, \infty) \to \mathcal{W}$, onde $\mathcal{W}$ é um espaço de Banach de funções definidas em $\mathbb{R}^n$, e um operador F definido sobre $\mathcal{W}$. Utilizando o teorema do ponto fixo de Banach, mostraremos a existência de uma única solução global em qualquer espaço de dimensão $n \geq 1$.

Para iniciar, temos que a solução geral para o problema linear (3.2) pode ser escrita como,

$$u_l(t, x) = (J(t, \cdot) * u_0)(x) + e^{-t}u_0(x) + (J(t, \cdot) * u_1)(x),$$

onde

$$J(t, x) = \mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{e^{-t|\xi|^2} - e^{-t}}{1 - |\xi|^2}\right)(x).$$

Para o problema não linear, pelo princípio de Duhamel, uma função u é solução se, e somente se, satisfaz a igualdade

$$u(t, x) = u_l(t, x) + \int_0^t (J(t - s, \cdot) * f(u(s, \cdot))(x)ds.$$

onde f é uma função não linear.

Para $1 \leq p, q \leq \infty$ e $m, k \in \mathbb{N}$, definimos o espaço $\mathcal{X}_{m,p}^{k,q}$ das funções

$$u \in C([0, \infty); W^{m,p} \cap W^{k,q}) \cap C^1([0, \infty); L^p \cap L^q),$$

tais que

$$\sup_{t\geq 0}\left\{\sum_{j\leq m} w_j(t)\|\nabla^j u(t)\|_{L^p}+\sum_{s\leq k} v_s(t)\|\nabla^s u(t)\|_{L^q}+\gamma_1(t)\|u_t(t)\|_{L^p}+\gamma_2(t)\|u_t(t)\|_{L^q}\right\}<\infty, \tag{4.1}$$

em que $w_j, v_s, \gamma_1, \gamma_2 : [0,\infty) \to [1,\infty)$ e introduzimos o espaço de Banach

$$\mathcal{A}^{k,q}_{m,p} \doteq (W^{m,p}\cap W^{k,q})\times(L^p\cap L^q), \tag{4.2}$$

munido com a norma

$$\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}} = \|u_0\|_{W^{m,p}}+\|u_0\|_{W^{k,q}}+\|u_1\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^q}.$$

Teorema 4.0.1 *Sejam U, V espaços de Banach e $X \subset U$ aberto. Se $(f_j) \subset C^1(X,V)$ e $f_j \to f$, $f_j' \to g$, localmente uniformemente em X quando $j \to \infty$, então $f \in C^1(X,V)$ e $f' = g$.*

Demonstração: ver [5], página 7.

Teorema 4.0.2 *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$, $m, k \in \mathbb{N}$. Defina,*

$$\begin{aligned} X =&\{u\in C([0,\infty),W^{m,p}\cap W^{k,q})\cap C^1([0,\infty),L^p\cap L^q);\\ &\sup_{t\geq 0}\{\sum_{j\leq m}\alpha_j(t)\|\nabla^j u(t)\|_{L^p}+\sum_{s\leq k}\beta_s(t)\|\nabla^s u(t)\|_{L^q}+\gamma_1(t)\|u_t(t)\|_{L^p}\\ &\qquad +\gamma_2(t)\|u_t(t)\|_{L^q}\}<\infty\}\end{aligned}$$

em que $\alpha_j, \beta_s, \gamma_1, \gamma_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $\alpha_j, \beta_s, \gamma_1, \gamma_2 \geq 1$. Então X é um espaço de Banach munido com a norma,

$$\begin{aligned}\|u\|_X = \sup_{t\geq 0}&\left\{\sum_{j\leq m}\alpha_j(t)\|\nabla^j u(t)\|_{L^p}+\sum_{s\leq k}\beta_s(t)\|\nabla^s u(t)\|_{L^q}\right.\\ &\left.+\gamma_1(t)\|u_t(t)\|_{L^p}+\gamma_2(t)\|u_t(t)\|_{L^q}\right\}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Demonstração: De fato, seja $(u_n) \subset X$ uma sequência de Cauchy. Definimos $X_1 = (W^{m,p}\cap W^{k,q})$ e $X_2 = (L^p \cap L^q)$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|u_n(t)-u_m(t)\|_{X_1} \lesssim \|u_n-u_m\|_X < \varepsilon, \quad \forall n,m\geq n_0$$

para todo $t \in [0,\infty)$. Assim, temos que $(u_n(t)) \subset X_1$ é uma sequência de Cauchy e como X_1 é um espaço de Banach, temos que $(u_n(t))$ é convergente para cada t fixado.

Definimos,

$$u(t) = \lim u_n(t) \quad \text{em} \quad X_1.$$

Vamos mostrar que $u_n \to u$ uniformemente. Dado $t \geq 0$, para $\varepsilon > 0$ considerado anteriormente, segue que

$$\|u(t) - u_m(t)\|_{X_1} = \lim_{n\to\infty} \|u_n(t) - u_m(t)\|_{X_1} \lesssim \lim_{n\to\infty} \|u_n - u_m\|_X \leq \varepsilon,$$

logo a convergência é uniforme.

Agora vamos mostrar que $u \in C([0,\infty), X_1)$. Dado $\eta > 0$, segue da convergência uniforme de $u_n \to u$ que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\|u(t) - u_n(t)\|_{X_1} < \tfrac{\eta}{3}, \text{ para todo } n \geq n_1 \text{ e } t \geq 0.$$

Logo, fixado $t_0 \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(t_0)\|_{X_1} &= \|u(t) - u_{n_1}(t) + u_{n_1}(t) - u_{n_1}(t_0) + u_{n_1}(t_0) - u(t_0)\|_{X_1} \\
&\leq \|u(t) - u_{n_1}(t)\|_{X_1} + \|u(t_0) - u_{n_1}(t_0)\|_{X_1} + \|u_{n_1}(t) - u_{n_1}(t_0)\|_{X_1} \\
&< \frac{2\eta}{3} + \|u_{n_1}(t) - u_{n_1}(t_0)\|_{X_1}.
\end{aligned}$$

Como $u_{n_1} \in C([0,\infty), X_1)$, existe $\delta > 0$ tal que $\|u_{n_1}(t) - u_{n_1}(t_0)\|_{X_1} < \eta/3$ sempre que $|t - t_0| < \delta$. Logo, obtemos que $u \in C([0,\infty), X_1)$, como queríamos.

Por outro lado, para ε considerado anteriormente, temos que

$$\alpha_j(t)\|\nabla^j u_n(t) - \nabla^j u_m(t)\|_{L^p} \leq \|u_n - u_m\|_X < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

Logo, temos que

$$\|\nabla^j u_n(t) - \nabla^j u_m(t)\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{\alpha_j(t)}, \forall n, m \geq n_0.$$

Tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos,

$$\|\nabla^j u(t) - \nabla^j u_m(t)\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{\alpha_j(t)}, \forall t \geq 0.$$

Deste modo, segue que

$$\begin{aligned}
\alpha_j(t)\|\nabla^j u(t)\|_{L^p} &\leq \alpha_j(t)\|\nabla^j u(t) - \nabla^j u_m(t)\|_{L^p} + \alpha_j(t)\|\nabla^j u_m(t)\|_{L^p} \\
&\leq \varepsilon + \alpha_j(t)\|\nabla^j u_m(t)\|_{L^p} \\
&\leq \varepsilon + \|u_m\|_X \\
&\leq \varepsilon + C,
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$, onde obtemos que $\sup_{t\geq 0}\{\alpha_j(t)\|\nabla^j u(t)\|_{L^p}\} < \infty$, para todo $j \leq m$. Do mesmo modo obtemos que $\sup_{t\geq 0}\{\beta_s(t)\|\nabla^s u(t)\|_{L^q}\} < \infty$, para todo $s \leq k$.

De modo análogo, podemos mostrar que $\exists w \in C([0,\infty), X_2)$ tal que $u_{n,t} \to w$ uniformemente, com

$$\sup_{t\geq 0}\{\gamma_1(t)\|w(t)\|_{L^p} + \gamma_2(t)\|w(t)\|_{L^q}\} < \infty.$$

Por fim, notando que $X_1 \subset X_2$ e que $(u_n) \subset C^1([0,\infty), X_2)$ com $u_n \to u$ e $u_{n,t} \to w$ uniformemente em $[0,\infty)$, pelo teorema 4.0.1 temos que $u \in C^1([0,\infty), X_2)$ e $u_t = w$, onde obtemos que

$$u \in C([0,\infty), W^{m,p} \cap W^{k,q}) \cap C^1([0,\infty), L^p \cap L^q)$$

com $\|u\|_X < \infty$. ■

Lema 4.0.3 *Sejam $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{k,q}_{m,p}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{k,q}_{m,p}$ definidos em (4.1) e (4.2) respectivamente. Sejam*

$$F : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \text{ e } G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$$

operadores satisfazendo as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \|Fu\|_{\mathcal{X}} \leq C\|u\|^p_{\mathcal{X}};\\
&(2) \quad \|Fu - Fv\|_{\mathcal{X}} \leq C\|u - v\|_{\mathcal{X}}(\|u\|^{p-1}_{\mathcal{X}} + \|v\|^{p-1}_{\mathcal{X}});\\
&(3) \quad \|G(u_0, u_1)\|_{\mathcal{X}} \leq C\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$ e $p > 1$. Fixado $(u_0, u_1) \in \mathcal{A}$, consideramos o operador $M : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ definido por

$$Mu = G(u_0, u_1) + Fu.$$

Nestas condições, existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon$, então o operador M possui um único ponto fixo u^*. Além disso, valem as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
(i) &\quad \|\nabla^j u^*(t)\|_{L^p} &\lesssim (\alpha_j(t))^{-1}\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}};\\
(ii) &\quad \|\nabla^s u^*(t)\|_{L^q} &\lesssim (\beta_s(t))^{-1}\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}};\\
(iii) &\quad \|u^*_t(t)\|_{L^p} &\lesssim (\gamma_1(t))^{-1}\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}};\\
(iv) &\quad \|u^*_t(t)\|_{L^q} &\lesssim (\gamma_2(t))^{-1}\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Demonstração: De fato, tomamos $\varepsilon = 1/(4C)^{p/(p-1)}$ e seja $(u_0, u_1) \in \mathcal{A}$ tal que

$$H = \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon.$$

Definimos $r = 2CH$ e $\mathcal{X}_r = \{u \in \mathcal{X}; \|u\|_{\mathcal{X}} \leq r\}$. Note que,

$$H \leq \frac{1}{(4C)^{p/(p-1)}} \Rightarrow H^{p-1} \leq \frac{1}{(4C)^p} \Rightarrow (2C)^p H^{p-1} \leq \frac{1}{2^p} \Rightarrow C(2CH)^p \leq \frac{CH}{2^p},$$

ou seja, $Cr^p \leq r/2$, pois $p \geq 1$. Dado $u \in \mathcal{X}_r$, pelos itens (1) e (3) deste teorema, segue que

$$\begin{aligned}\|Mu\|_{\mathcal{X}} =& \|Fu + G(u_0, u_1)\|_{\mathcal{X}} \leq \|Fu\|_{\mathcal{X}} + \|G(u_0, u_1)\|_{\mathcal{X}} \\ \leq& C\|u\|_{\mathcal{X}}^p + CH \leq Cr^p + CH \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.\end{aligned}$$

Logo, temos que M pode ser restringido a um operador sobre $\mathcal{X}_r$. Além disso, por (2), dados $u, v \in \mathcal{X}_r$, segue que

$$\begin{aligned}\|Mu - Mv\|_{\mathcal{X}} =& \|Fu - Fv\|_{\mathcal{X}} \leq C\|u - v\|_{\mathcal{X}}(\|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1} + \|v\|_{\mathcal{X}}^{p-1}) \\ \leq& 2Cr^{p-1}\|u - v\|_{\mathcal{X}} \leq (2C)^p H^{p-1}\|u - v\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_{\mathcal{X}},\end{aligned}$$

onde obtemos que $M : \mathcal{X}_r \to \mathcal{X}_r$ é uma contração. Como $\mathcal{X}_r$ é um conjunto fechado do espaço de Banach $\mathcal{X}$, então temos que é um espaço métrico completo. Logo, pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe uma única u^* ponto fixo de M.

Por outro lado, temos que,

$$\begin{aligned}\alpha_j(t)\|\nabla^j u^*(t)\|_{L^p} \leq& \|u\|_{\mathcal{X}} = \|Fu + G(u_0, u_1)\|_{\mathcal{X}} \leq \frac{r}{2} + C\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}} \\ \lesssim& \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}}, \quad \forall t \geq 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u^*(t)\|_{L^p} \lesssim (\alpha_j(t))^{-1}\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}},$$

o que prova o item (i). De modo análogo, provam-se os itens $(ii) - (iv)$. ∎

4.0.1 Problema Não Linear: caso $f(u) = |u|^p$

Teorema 4.0.4 *Seja $n \geq 1$ e $p > 1 + 2/n$, e se $n \geq 3$ suponha também que $p \leq 1 + 2/(n - 2)$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para quaisquer dados*

$$\begin{aligned}(u_0, u_1) \in \mathcal{A} \doteq (L^1 \cap H^1) \times (L^1 \cap L^2), \quad \textit{com} \\ \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}} \doteq \|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2} \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

existe uma única solução

$$u \in \mathcal{C}([0,\infty), L^1 \cap H^1) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), L^1 \cap L^2),$$

para o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + u_t - \triangle u_t = |u|^p, & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.4}$$

A solução de (4.4) tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\begin{aligned} &(i) \quad \|\nabla u(t.\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}; \\ &(ii) \quad \|u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-\frac{n}{4}} \|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}; \\ &(iii) \quad \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim && (1+t)^{-\frac{n}{4}-1} \|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}; \\ &(iv) \quad \|u(t,\cdot)\|_{L^1} \lesssim && \|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}; \\ &(v) \quad \|u_t(t,\cdot)\|_{L^1} \lesssim && (1+t)^{-1} \|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

Demonstração: Inicialmente definimos o espaço $\mathcal{X}$ das funções

$$u \in C([0,\infty); L^1 \cap H^1) \cap C^1([0,\infty); L^1 \cap L^2)$$

tais que

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{X}} = \sup_{t\geq 0} \big\{ &(1+t)^{\frac{n}{4}} \|u(t,\cdot)\|_{L^2} + (1+t)^{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}} \|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2} + (1+t)^{\frac{n}{4}+1} \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} \\ &+ \|u(t,\cdot)\|_{L^1} + (1+t)\|u_t(t,\cdot)\|_{L^1} \big\} < \infty, \end{aligned}$$

e o operador F definido sobre $\mathcal{X}$ por,

$$Fu(t,x) = \int_0^t (J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p)(x) ds.$$

Pelo teorema 4.0.2 temos que $\mathcal{X}$ é um espaço de Banach com a norma definida acima. Vamos provar que F satisfaz as condições (1) e (2) do lema 4.0.3.

Note que, se $u \in \mathcal{X}$, então $u(t,\cdot) \in L^1 \cap H^1$. Pela desigualdade de interpolação temos que $u(t,\cdot) \in L^q$, para $q \in (1,2)$. Por outro lado, como $\nabla u(t,\cdot) \in L^2$, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, temos $u(t,\cdot) \in L^q$, para $q \in (2,\infty]$ se $n=1$, para $q \in (2,\infty)$ se $n=2$ ou para $q \in (2, 2n/(n-2))$ se $n \geq 3$. Além disso, segue que

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \lesssim \|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2}^{\theta} \|u(t,\cdot)\|_{L^2}^{1-\theta}. \tag{4.5}$$

em que θ é tal que

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{\theta}{n}.$$

Ainda, como

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}} \|u\|_{\mathcal{X}},$$
$$\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}},$$

de (4.5) e desde que

$$\left(-\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{n}{4}(1-\theta) = -\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

obtemos,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_{\mathcal{X}}. \tag{4.6}$$

Além disso, das hipóteses deste teorema temos $1 < p < \infty$ se $n = 1, 2$ ou $1 < p < 2p < 2n/(n-2)$ se $n \geq 3$, o que nos fornece, em ambos os casos, que $u(t,\cdot) \in L^p \cap L^{2p}$ para todo $u \in \mathcal{X}$, ou seja, $|u(t,\cdot)|^p \in L^1 \cap L^2$.

Mostraremos agora que $\|\partial_t F u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}}^p$. Para cada $s \geq 0$ fixado, temos que

$$w(t,x) \doteq (J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} J(t-s,y)|u(s,x-y)|^p dy,$$

é solução do seguinte problema de Cauchy linear:

$$\begin{cases} w_{tt} - \triangle w + w_t - \triangle w_t = 0, & t > s, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ w(s,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ w_t(s,x) = |u(s,x)|^p, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Assim, pelo teorema 3.3.1 itens (iii) e (iv), temos que $J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p$ satisfaz as seguintes estimativas :

$$\|\partial_t J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} \lesssim (1+t-s)^{-1} \||u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}; \tag{4.7}$$
$$\|\partial_t J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} \lesssim (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-1} (\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}). \tag{4.8}$$

Logo, usando a estimativa (4.8) em $[0,t/2]$ e (4.7) em $[t/2,t]$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t F u(t,\cdot)\|_{L^2} &\leq \int_0^t \|\partial_t(J(t-s,\cdot)*|u(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} ds \\
&\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-1}(\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}) ds \\
&\quad + \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1}\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} ds.
\end{aligned}
$$

Note que,

$$
\begin{aligned}
\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(s,x)|^p dx = \|u(s,\cdot)\|_{L^p}^p, \\
\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(s,x)|^{2p} dx\right)^{1/2} = \|u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p.
\end{aligned}
$$

Assim, utilizando as identidades acima segue que

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t F u(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-1}(\|u(s,\cdot)\|_{L^p}^p + \|u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p) ds \\
&\quad + \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1}\|u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p ds.
\end{aligned}
$$

Utilizando a estimativa (4.6) temos que,

$$
\begin{aligned}
\|u(s,\cdot)\|_{L^p}^p &\lesssim (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \\
\|u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p &\lesssim (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)}\|u\|_{\mathcal{X}}^p.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Logo, utilizando as estimativas (4.9), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t F u(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-1}((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)}\|u\|_{\mathcal{X}}^p + (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)}\|u\|_{\mathcal{X}}^p) ds \\
&\quad + \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1}(1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)}\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds.
\end{aligned}
$$

Usando as desigualdades,

$$
\begin{aligned}
(1/2)(1+t) \leq \quad & 1+t-s \leq 1+t, \quad \forall s \in [0,t/2], \\
(1/2)(1+t) \leq \quad & 1+s \leq 1+t, \quad \forall s \in [t/2,t],
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

obtemos a seguinte desigualdade,

$$\begin{aligned}\|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim &(1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_0^{t/2} ((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)} + (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)})ds \\ &+ (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-1} ds.\end{aligned}$$

Como $p > 1 + 2/n$, temos que

$$\int_0^{t/2} ((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)} + (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)})ds \lesssim \int_0^{\infty} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)} ds \lesssim 1,$$

enquanto que,

$$\int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-1} ds \lesssim \int_0^{t} (1+t-s)^{-\frac{2}{n(p-1)}} ds \lesssim (1+t)^{-\frac{2}{n(p-1)}+1}.$$

Ainda, como

$$(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{2}{n(p-1)}+1} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1},$$

uma vez que

$$1 - \frac{n}{2}(p-1) - \frac{2}{n(p-1)} < -1,$$

utilizando estas estimativas, concluímos que

$$\|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|u\|_{\mathcal{X}}^p. \tag{4.11}$$

Agora vamos mostrar que

$$\|\nabla Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p.$$

Pelo teorema 3.3.1 itens (v) e (vi), tomando $m = 2$, temos que

$$\|\nabla J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} \lesssim (1+t-s)^{-\frac{1}{2}}\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}; \tag{4.12}$$

$$\|\nabla J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} \lesssim (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}). \tag{4.13}$$

Do mesmo modo, utilizando as estimativas (4.13) em $[0, t/2]$ e (4.12) em $[t/2, t]$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\nabla Fu(t,\cdot)\|_{L^2} &\leq \int_0^t \|\nabla(J(t-s) * |u(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} ds\\ &\leq \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\|u(s,\cdot)\|_{L^p}^p + \|u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p) ds\\ &\quad + \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p ds.\end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades (4.9), temos

$$\begin{aligned}\|\nabla Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim &\int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)}\|u\|_{\mathcal{X}}^p + (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)}\|u\|_{\mathcal{X}}^p) ds\\ &+ \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-\frac{1}{2}}(1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)}\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds.\end{aligned}$$

Ainda, utilizando as desigualdades (4.10), obtemos

$$\begin{aligned}\|\nabla Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim &(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)} ds\\ &+ (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-\frac{1}{2}} ds\\ \lesssim &(1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p + (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)+\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p.\end{aligned}$$

Como $p > 1 + 2/n$, temos que $-(n(p-1)-1)/2 < -1/2$, de modo qu

$$\|\nabla Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p. \tag{4.14}$$

Vamos provar agora que

$$\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p.$$

Pelo teorema 3.3.1 itens (vii) e $(viii)$, tomando novamente $m = 2$, temos

$$\|J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} \lesssim \||u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}; \tag{4.15}$$

$$\|J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} \lesssim (1+t-s)^{-\frac{n}{4}}(\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}). \tag{4.16}$$

Deste modo, utilizando (4.16) em $[0, t/2]$ e (4.15) em $[t/2, t]$ obtemos

$$\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}}(\|u(s,\cdot)\|_{L^p}^p + \|u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p) ds + \int_{t/2}^t \|u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p ds.$$

Assim, utilizando as estimativas (4.9), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}} \|u\|_{\mathcal{X}}^p ((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)} + (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)}) ds \\
+ \int_{t/2}^{t} (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)} \|u\|_{\mathcal{X}}^p ds.
\end{aligned}
$$

Novamente, por (4.10), segue que

$$
\begin{aligned}
\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}} \|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_0^{t/2} ((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)} + (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)}) ds \\
&\quad + (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)} \|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_{t/2}^{t} ds \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}} \|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)} ds + (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)} \|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_{t/2}^{t} ds \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}} \|u\|_{\mathcal{X}}^p + (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)+1} \|u\|_{\mathcal{X}}^p.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $-n(p-1)/2+1<0$, concluímos que

$$
\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}} \|u\|_{\mathcal{X}}^p. \tag{4.17}
$$

Por outro lado, pelo teorema 3.3.3, temos que $J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p$ também satisfaz as seguintes estimativas L^1:

$$
\begin{aligned}
\|J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} &\lesssim \||u(s,\cdot)|^p\|_{L^1}, && (4.18)\\
\|\partial_t J(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} &\lesssim (1+t-s)^{-1} \||u(s,\cdot)|^p\|_{L^1}. && (4.19)
\end{aligned}
$$

Deste modo, aplicando (4.19), obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^1} &\lesssim \int_0^t (1+t-s)^{-1} \|u(s,\cdot)\|_{L^p}^p ds \\
&\lesssim (1+t)^{-1} \|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)} ds \\
&\quad + (1+t)^{-\frac{n}{2}(p-1)} \|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-1} ds \\
&\lesssim (1+t)^{-1} \|u\|_{\mathcal{X}}^p + (1+t)^{-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{2}{n(p-1)}+1} \|u\|_{\mathcal{X}}^p \\
&\lesssim (1+t)^{-1} \|u\|_{\mathcal{X}}^p. && (4.20)
\end{aligned}
$$

e ainda, aplicando (4.18), temos

$$
\|Fu(t,\cdot)\|_{L^1} \lesssim \int_0^t \|u(s,\cdot)\|_{L^p}^p ds \lesssim \int_0^t (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)} \|u\|_{\mathcal{X}}^p ds \lesssim \|u\|_{\mathcal{X}}^p. \tag{4.21}
$$

Logo, por (4.11), (4.14), (4.17), (4.20) e (4.21) concluímos que $Fu \in \mathcal{X}$ e ainda que $\|Fu\|_{\mathcal{X}} \leq C\|u\|_{\mathcal{X}}^p$, satisfazendo a condição (1) do lema 4.0.3. Por outro lado, para $u, v \in \mathcal{X}$ segue que

$$Fu(t,x) - Fv(t,x) = \int_0^t (J(t-s,\cdot) * (|u(s,\cdot)|^p - |v(s,\cdot)|^p))(x)ds.$$

Ainda, como

$$\||u(s,\cdot)|^p - |v(s,\cdot)|^p\|_{L^q} \lesssim \||u(s,\cdot) - v(s,\cdot)|^p\|_{L^q},$$

para todo $s \geq 0$, aplicando as estimativas (4.16) e (4.15) em $[0, t/2]$ e $[t/2, t]$ respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
\|Fu(t,\cdot) - Fv(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^t \|J(t-s,\cdot) * (|u(s,\cdot)|^p - |v(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} ds \\
&\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}} (\||u(s,\cdot)|^p - |v(s,\cdot)|^p\|_{L^1} \\
&\qquad + \||u(s,\cdot)|^p - |v(s,\cdot)|^p\|_{L^2}) ds + \int_{t/2}^t \||u(s,\cdot)|^p - |v(s,\cdot)|^p\|_{L^2} ds \\
&\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}} \||u(s,\cdot) - v(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||u(s,\cdot) - v(s,\cdot)|^p\|_{L^2} ds \\
&\qquad + \int_{t/2}^t \||u(s,\cdot) - v(s,\cdot)|^p\|_{L^2} ds.
\end{aligned}$$

Assim, aplicando as estimativas (4.9), temos

$$\begin{aligned}
\|Fu(t,\cdot) - Fv(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}} ((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)} + (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)}) \|u-v\|_{\mathcal{X}}^p ds \\
&\qquad + \int_{t/2}^t (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)} \|u-v\|_{\mathcal{X}}^p ds.
\end{aligned}$$

Ainda, utilizando as desigualdades (4.10), segue que

$$\begin{aligned}
\|Fu(t,\cdot) - Fv(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}} \|u-v\|_{\mathcal{X}}^p \int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)} ds \\
&\qquad + (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)+1} \|u-v\|_{\mathcal{X}}^p \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}} \|u-v\|_{\mathcal{X}}^p.
\end{aligned}$$

De modo análogo, temos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla Fu(t,\cdot) - \nabla Fv(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u-v\|_{\mathcal{X}}^p;\\
\|\partial_t Fu(t,\cdot) - \partial_t Fv(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u-v\|_{\mathcal{X}}^p;\\
\|Fu(t,\cdot) - Fv(t,\cdot)\|_{L^1} &\lesssim \|u-v\|_{\mathcal{X}}^p;\\
\|\partial_t Fu(t,\cdot) - \partial_t Fv(t,\cdot)\|_{L^1} &\lesssim (1+t)^{-1}\|u-v\|_{\mathcal{X}}^p.
\end{aligned}$$

Logo, como $p > 1$ segue que

$$\|Fu - Fv\|_{\mathcal{X}} \leq C\|u-v\|_{\mathcal{X}}^p = C\|u-v\|_{\mathcal{X}}\|u-v\|_{\mathcal{X}}^{p-1} \leq C\|u-v\|_{\mathcal{X}}(\|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1} + \|v\|_{\mathcal{X}}^{p-1}),$$

onde concluímos que F satisfaz a condição (2) do lema 4.0.3. Assim, considerando $G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ o operador que associa cada par $(u_0, u_1) \in \mathcal{A}$ à solução do problema de Cauchy linear (3.2), temos que

$$\|G(u_0, u_1)\|_{\mathcal{X}} \lesssim \|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}},$$

e portanto, pelo lema (4.0.3), existe $\varepsilon > 0$ tal que para quaisquer dados $(u_0, u_1) \in \mathcal{A}$ com $\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon$, o operador $Mu = Fu + u_l$ possui um único ponto fixo, ou seja, existe

$$u \in C([0,\infty), L^1 \cap H^1) \cap C^1([0,\infty), L^1 \cap L^2)$$

tal que $u = u_l + Fu$, solução para o problema de Cauchy (4.4), satisfazendo as estimativas $(i) - (v)$ desta proposição, como queríamos demonstrar. ■

4.0.2 Problema Não Linear: caso $f(u) = |u_t|^p$

Teorema 4.0.5 *Se $n = 1$ e $1 < p \leq 2$, ou $n \geq 2$ e $1 < p < 1 + 2/n$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que se*

$$(u_0, u_1) \in \mathcal{A} = (L^1 \cap H^1) \times (L^1 \cap L^2), \quad \textit{com},$$
$$\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}} = \|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{H^1} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^2} \leq \varepsilon,$$

existe uma única solução,

$$u \in C([0,\infty), L^1 \cap H^1) \cap C^1([0,\infty), L^1 \cap L^2),$$

para o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + u_t - \triangle u_t = |u_t|^p, & t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.22}$$

A solução de (4.22) tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\begin{array}{lll} (i) & \|\nabla u(t.\cdot)\|_{L^2} & \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}} \\ (ii) & \|u(t,\cdot)\|_{L^2} & \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}} \\ (iii) & \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} & \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}} \\ (iv) & \|u(t,\cdot)\|_{L^1} & \lesssim \|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}} \\ (v) & \|u_t(t,\cdot)\|_{L^1} & \lesssim (1+t)^{-1}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}} \end{array}$$

Demonstração: Como no teorema anterior, definimos o espaço $\mathcal{X}$ das funções

$$u \in C([0,\infty); L^1 \cap H^1) \cap C^1([0,\infty); L^1 \cap L^2)$$

tais que

$$\|u\|_{\mathcal{X}} \doteq \sup_{t\geq 0}\{(1+t)^{\frac{n}{4}}\|u(t,\cdot)\|_{L^2} + (1+t)^{\frac{n}{4}+\frac{1}{2}}\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2} + (1+t)^{\frac{n}{4}+1}\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}$$
$$+ \|u(t,\cdot)\|_{L^1} + (1+t)\|u_t(t,\cdot)\|_{L^1}\} < \infty$$

e o operador F definido sobre $\mathcal{X}$ por

$$Fu(t,x) = \int_0^t (J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)(x)ds.$$

Agora note que se $u \in \mathcal{X}$, então $u_t(t,\cdot) \in L^1 \cap L^2$ para todo $t \geq 0$. Logo, por interpolação, temos que $u_t(t,\cdot) \in L^q$, para $q \in (1,2)$. Temos ainda

$$\|u_t(t,\cdot)\|_{L^q} \leq \|u_t(t,\cdot)\|_{L^1}^{\theta}\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^{1-\theta},$$

onde $\theta = 2/q - 1$. Como

$$\|u_t(t,\cdot)\|_{L^1} \lesssim (1+t)^{-1}\|u\|_{\mathcal{X}},$$
$$\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|u\|_{\mathcal{X}},$$

obtemos a seguinte desigualdade,

$$\|u_t(t,\cdot)\|_{L^q} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)-1}\|u\|_{\mathcal{X}}, \quad q \in [1,2]. \tag{4.23}$$

Vamos mostrar que F satisfaz as condições (1) e (2) do lema 4.0.3. Para cada $s \geq 0$ fixado, temos que

$$w(t,x) = (J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)(x)$$

é solução para o problema de Cauchy linear

$$\begin{cases} w_{tt} - \triangle w + w_t - \triangle w_t = 0, & t > s, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ w(s,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ w_t(s,x) = |u_t(s,\cdot)|^p & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Deste modo, pela proposição 3.3.2, temos que $(J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)$ satisfaz as seguintes desigualdades:

$$\|\partial_t(J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} \lesssim (1+t-s)^{-1}(t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m}, \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} \|\partial_t(J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} &\lesssim (1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)-1}(t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)} \\ &\quad \times(\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m}), \end{aligned} \tag{4.25}$$

para $m \in [1,2]$ satisfazendo $n(1/m - 1/2) < 2$. Por hipótese, temos que $p \in (1,2]$ e assim, tomando $m = 2/p$ temos $m \in [1,2)$ com

$$n\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2}\right) = n\frac{(p-1)}{2} < 1.$$

Utilizando a estimativa (4.25) no intervalo $[0, t/2]$ e a estimativa (4.24) no intervalo $[t/2, t]$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^t \|\partial_t(J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} ds \\ &\leq \int_0^{t/2} \|\partial_t(J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} ds + \int_{t/2}^t \|\partial_t(J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} ds \\ &\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)-1}(t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m}) ds \\ &\quad + \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1}(t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m} ds. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |u_t(s,x)|^p dx = \|u_t(t,\cdot)\|_{L^p}^p, \\ \||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^{2/p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(s,x)|^2 dx\right)^{p/2} = \|u_t(s,\cdot)\|_{L^2}^p. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Deste modo, utilizando as identidades em (4.26), segue que

$$\begin{aligned} \|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim &\int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)-1}(t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(\|u_t(s,\cdot)\|_{L^p}^p + \|u_t(s,\cdot)\|_{L^2}^p) ds \\ &+ \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1}(t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|u_t(s,\cdot)\|_{L^2}^p ds. \end{aligned}$$

Como $1 < p \leq 2$, por (4.23) temos que,

$$\|u_t(s,\cdot)\|_{L^p}^p \lesssim (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-p}\|u\|_{\mathcal{X}}^p, \tag{4.27}$$

enquanto que,

$$\|u_t(s,\cdot)\|_{L^2}^p \lesssim (1+s)^{(-\frac{n}{4}-1)p}\|u\|_{\mathcal{X}}^p, \tag{4.28}$$

uma vez que $u \in \mathcal{X}$. Logo, utilizando estas desigualdades, segue que

$$\begin{aligned}\|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \int_0^{t/2} &(1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)-1}(t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)} \\ &\times ((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-p} + (1+s)^{(-\frac{n}{4}-1)p})\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds \\ + \int_{t/2}^t &(1+t-s)^{-1}(t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(1+s)^{-(\frac{n}{4}+1)p}\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds.\end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades dadas em (4.10), obtemos

$$\begin{aligned}\|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-p} + (1+s)^{(-\frac{n}{4}-1)p} ds \\ &+ (1+t)^{(-\frac{n}{4}-1)p}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1}(t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)} ds.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Já que $p \leq 2$, temos que $n(p-1)/2 < np/4$ e assim

$$\begin{aligned}\int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-p} + (1+s)^{-\frac{n}{4}p-p} ds &\lesssim \int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-p} ds \\ &\lesssim \int_0^{\infty} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-p} ds \lesssim 1,\end{aligned} \tag{4.30}$$

uma vez que $-n(p-1)/2 - p + 1 < 0$. Por outro lado, na segunda integral, fazendo a mudança de variável $x = t - s$, temos que

$$\int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1}(t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)} ds = \int_0^{t/2} (1+x)^{-1}x^{-1/k} dx,$$

onde $1/k = n(m^{-1} - 2^{-1})/2 < 1/2$. Deste modo, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^{t/2} (1+x)^{-1}x^{-1/k} dx &\leq \int_0^1 (1+x)^{-1}x^{-1/k} dx + \int_1^{\infty} (1+x)^{-1}x^{-1/k} dx \\ &\lesssim \int_0^1 x^{-1/k} dx + \int_1^{\infty} x^{-(1+1/k)} dx \lesssim 1.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Consequentemente, utilizando (4.30) e (4.31) em (4.29), obtemos

$$\begin{aligned}\|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim ((1+t)^{-\frac{n}{4}-1} + (1+t)^{(-\frac{n}{4}-1)p})\|u\|_{\mathcal{X}}^p \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|u\|_{\mathcal{X}}^p. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Agora vamos mostrar que,

$$\|\nabla Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p.$$

Considerando ainda $m = 2/p$, pela proposição 3.3.1 itens (v) e (vi), para cada $s \geq 0$ temos que $(J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)$ satisfaz as seguintes estimativas:

$$\|\nabla(J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} \lesssim (1+t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m}; \tag{4.33}$$

$$\|\nabla(J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} \lesssim (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m} + \||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^1}). \tag{4.34}$$

Deste modo, utilizando (4.34) em $[0, t/2]$ e (4.33) em $[t/2, t]$, temos que

$$\begin{aligned}\|\nabla Fu(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^{t/2} \|\nabla(J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} ds + \int_{t/2}^t \|\nabla(J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} ds \\ &\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}(\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m}) ds \\ &\quad + \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m} ds.\end{aligned}$$

Logo, utilizando as identidades em (4.26) e as desigualdades (4.27) e (4.28) na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}\|\nabla Fu(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-p} + (1+s)^{-(1+\frac{n}{4})p})\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds \\ &\quad + \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}(1+s)^{-(\frac{n}{4}+1)p}\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds.\end{aligned}$$

Ainda, utilizando as desigualdades em (4.10), segue que

$$\begin{aligned}\|\nabla Fu(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-p} ds \\ &\quad + (1+t)^{-(1+\frac{n}{4})p}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}} ds.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Note que,

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2},$$

logo,

$$\int_{t/2}^{t}(1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}ds \leq \int_{0}^{t}(1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}ds \lesssim (1+t)^{1/2}.$$

Assim, utilizando esta estimativa na segunda integral em (4.35), obtemos

$$\|\nabla Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p, \tag{4.36}$$

como desejávamos.

Provaremos agora que

$$\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p.$$

Pela proposição 3.3.1 itens (vii) e $(viii)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|J(t-s,\cdot)*|u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^2} &\lesssim (1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m}; &(4.37)\\
\|J(t-s,\cdot)*|u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^2} &\lesssim (1+t-s)^{-\frac{n}{4}}(\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^1}+\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m}). &(4.38)
\end{aligned}$$

Aplicando a estimativa (4.38) em $[0,t/2]$ e (4.37) em $[t/2,t]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^{t/2}\|J(t-s,\cdot)*|u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^2}ds + \int_{t/2}^{t}\|J(t-s,\cdot)*|u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^2}ds\\
&\lesssim \int_0^{t/2}(1+t-s)^{-\frac{n}{4}}(\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^1}+\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m})ds\\
&\quad + \int_{t/2}^{t}(1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m}ds.
\end{aligned}$$

Novamente, utilizando as identidades (4.26) e as estimativas (4.27) e (4.28), temos que

$$\begin{aligned}
\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^{t/2}(1+t-s)^{-\frac{n}{4}}((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-p}+(1+s)^{-(1+\frac{n}{4})p})\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds\\
&\quad + \int_{t/2}^{t}(1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(1+s)^{-(1+\frac{n}{4})p}\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds.
\end{aligned}$$

Logo, utilizando as desigualdades dadas em (4.10), segue que

$$\begin{aligned}
\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p\int_0^{t/2}(1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-p}ds\\
&\quad + (1+t)^{-(1+\frac{n}{4})p}\|u\|_{\mathcal{X}}^p\int_{t/2}^{t}(1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}ds\\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p + (1+t)^{-(1+\frac{n}{4})p}(1+t)\|u\|_{\mathcal{X}}^p\\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Finalmente, vamos mostrar que

$$\|\partial_t^k Fu(t,\cdot)\|_{L^1} \lesssim (1+t)^{-k}\|u\|_{\mathcal{X}}^p,$$

para $k=0,1$. Pelo teorema 3.3.3, temos que

$$\|\partial_t^k (J(t-s,\cdot) * |u_t(s,\cdot)|^p)\|_{L^1} \lesssim (1+t-s)^{-k}\||u_t(s,\cdot)|^p\|_{L^1}. \tag{4.40}$$

Deste modo, utilizando a estimativa acima, segue que

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^k Fu(t,\cdot)\|_{L^1} &\lesssim \int_0^t \|\partial_t^k (J(t-s,\cdot) * |u_t(t,\cdot)|^p)\|_{L^1} ds \\
&\lesssim \int_0^t (1+t-s)^{-k}\||u_t(t,\cdot)|^p\|_{L^1} ds \\
&\lesssim \int_0^t (1+t-s)^{-k}(1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-p}\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds \\
&\lesssim \int_0^t (1+t-s)^{-k-\frac{n}{2}(p-1)-p}\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds \\
&\lesssim (1+t)^{-k}\|u\|_{\mathcal{X}}^p,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

uma vez que $-n(p-1)/2-p+1<0$. Portanto, por (4.32), (4.36), (4.39) e (4.41), temos que $Fu \in \mathcal{X}$ e ainda $\|Fu\|_{\mathcal{X}} \le C\|u\|_{\mathcal{X}}^p$, satisfazendo a condição (1) do lema 4.0.3. Por outro lado, para obtermos a condição (2) do referido lema, note que

$$Fu(t,x) - Fv(t,x) = \int_0^t (J(t-s,\cdot) * (|u_t(s,\cdot)|^p - |v_t(s,\cdot)|^p))(x) ds,$$

para $u,v \in \mathcal{X}$. Como,

$$\||u_t(s,\cdot)|^p - |v_t(s,\cdot)|^p\|_{L^q} \lesssim \||u_t(s,\cdot) - v_t(s,\cdot)|^p\|_{L^q}$$

para todo $s \ge 0$, aplicando as estimativas (4.38) em $[0,t/2]$ e (4.37) em $[t/2,t]$, segue que

$$\begin{aligned}
\|Fu(t,\cdot) - Fv(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^t \|J(t-s,\cdot) * (|u_t(s,\cdot)|^p - |v_t(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} ds \\
&\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}}(\||u_t(s,\cdot)|^p - |v_t(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||u_t(s,\cdot)|^p - |v_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m}) ds \\
&\quad + \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\||u_t(s,\cdot)|^p - |v_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m} ds \\
&\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}}(\||u_t(s,\cdot) - v_t(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||u_t(s,\cdot) - v_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m}) ds \\
&\quad + \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\||u_t(s,\cdot) - v_t(s,\cdot)|^p\|_{L^m} ds.
\end{aligned}$$

Ainda, utilizando as identidades em (4.26), as estimativas (4.27), (4.28) e as desigualdades (4.10), obtemos

$$\|Fu(t,\cdot)-Fv(t,\cdot)\|_{L^2}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{4}}\|u-v\|_{\mathcal{X}}^p.$$

De modo análogo, temos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla Fu(t,\cdot)-\nabla Fv(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u-v\|_{\mathcal{X}}^p\\
\|\partial_t Fu(t,\cdot)-\partial_t Fv(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|u-v\|_{\mathcal{X}}^p\\
\|\partial_t Fu(t,\cdot)-\partial_t Fv(t,\cdot)\|_{L^1} &\lesssim (1+t)^{-1}\|u-v\|_{\mathcal{X}}^p\\
\|Fu(t,\cdot)-Fv(t,\cdot)\|_{L^1} &\lesssim \|u-v\|_{\mathcal{X}}^p
\end{aligned}$$

e consequentemente, como $p>1$, temos

$$\|Fu-Fv\|_{\mathcal{X}}\leq C\|u-v\|_{\mathcal{X}}^p\leq C\|u-v\|_{\mathcal{X}}(\|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1}+\|v\|_{\mathcal{X}}^{p-1}).$$

Logo o operador F satisfaz as condições (1) e (2) do lema 4.0.3. Assim, tomando $G:\mathcal{A}\to\mathcal{X}$, o operador que associa cada par $(u_0,u_1)\in\mathcal{A}$ à solução do problema de Cauchy linear (3.2), temos que

$$\|G(u_0,u_1)\|_{\mathcal{X}}\leq C\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}},$$

Portanto, pelo lema 4.0.3, existe $\varepsilon>0$ tal que para quaisquer dados iniciais $(u_0,u_1)\in\mathcal{A}$ com

$$\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}\leq\varepsilon,$$

o operador $Mu=G(u_0,u_1)+Fu$ possui um único ponto fixo, ou seja, existe

$$u\in C([0,\infty);L^1\cap H^1)\cap C^1([0,\infty);L^1\cap L^2)$$

tal que

$$u(t,x)=u_l(t,x)+\int_0^t(J(t-s,\cdot)*|u_t(s,\cdot)|^p)(x)ds$$

solução para o problema de Cauchy (4.22), satisfazendo as estimativas $(i)-(v)$ deste teorema, como queríamos demonstrar. ■

4.0.3 Problema Não Linear: caso $f(u)=|\nabla u|^p$

Teorema 4.0.6 *Seja $n\geq1$ e $p>1+1/(n+1)$. Suponha também que $p\leq1+2/(n-2)$ se $n\geq3$. Então, existe $\varepsilon>0$ tal que para quaisquer dados*

$$(u_0,u_1)\in\mathcal{A}\doteq(W^{1,1}\cap H^2)\times(L^1\cap L^2),\quad \textit{com}$$
$$\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}\doteq\|u_0\|_{W^{1,1}}+\|u_0\|_{H^2}+\|u_1\|_{L^1}+\|u_1\|_{L^2}\leq\varepsilon,$$

existe uma única solução

$$u \in \mathcal{C}([0,\infty), W^{1,1} \cap H^2) \cap \mathcal{C}^1([0,\infty), L^1 \cap L^2)$$

para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + u_t - \triangle u_t = |\nabla u|^p, & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{4.42}$$

A solução de (4.42) tem o seguinte comportamento assintótico:

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \|u(t,\cdot)\|_{L^2} && \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}};\\
(ii) \quad & \|\triangle u(t,\cdot)\|_{L^2} && \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}};\\
(iii) \quad & \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2} && \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}};\\
(iv) \quad & \|u(t,\cdot)\|_{L^1} && \lesssim \|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}};\\
(v) \quad & \|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^1} && \lesssim (1+t)^{-\frac{1}{2}}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}};\\
(vi) \quad & \|u_t(t,\cdot)\|_{L^1} && \lesssim (1+t)^{-1}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Aqui, definimos o espaço $\mathcal{X}$ das funções

$$u \in C([0,\infty); W^{1,1} \cap H^2) \cap C^1([0,\infty); L^1 \cap L^2)$$

tais que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{X}} = & \sup_{t\geq 0}\big\{(1+t)^{\frac{n}{4}}\|u(t,\cdot)\|_{L^2} + (1+t)^{\frac{n}{4}+1}\|\triangle u(t,\cdot)\|_{L^2} + (1+t)^{\frac{n}{4}+1}\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}\\
& + \|u(t,\cdot)\|_{L^1} + (1+t)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^1} + (1+t)\|u_t(t,\cdot)\|_{L^1}\big\} < \infty
\end{aligned} \tag{4.43}$$

e o operador F definido sobre $\mathcal{X}$ por,

$$Fu(t,x) = \int_0^t (J(t-s,\cdot) * |\nabla u(s,\cdot)|^p)(x)ds.$$

Novamente pelo teorema (4.0.2) temos que $\mathcal{X}$ é um espaço de Banach munido com a norma definida em (4.43) e vamos mostrar que F satisfaz as condições (1) e (2) do lema (4.0.3).

Note que, se $u \in \mathcal{X}$, então

$$(1+t)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^1} \leq \sup_{t\geq 0}(1+t)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^1} \leq \|u\|_{\mathcal{X}}.$$

Logo, temos que

$$\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^1} \leq (1+t)^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}, \forall t \geq 0.$$

Por outro lado, por Plancherel temos

$$\|\nabla^2 u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \sum_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2} = \sum_{|\alpha|=2} \|\xi^\alpha \hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \||\xi|^2 \hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2} = \|\triangle u(t,\cdot)\|_{L^2}.$$

onde $\nabla^2 u$ denota as derivadas de segunda ordem de u com relação a variável x. Como $\|\triangle u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|u\|_{\mathcal{X}}$, segue que

$$\|\nabla^2 u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|u\|_{\mathcal{X}}.$$

Deste modo, temos que $\nabla u(t,\cdot) \in L^1 \cap L^2$ com derivadas de primeira ordem em L^2. Logo, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg segue que $\nabla u(t,\cdot) \in L^q$, em que

$$\frac{1}{q} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\theta + (1-\theta).$$

onde $\theta \in [0,1]$ com $\theta \neq 1$ para $1 - n/2 \in \mathbb{Z}^+$. Assim, temos que $q \in [1,\infty]$ se $n = 1$, $q \in [1,\infty)$ se $n = 2$ e $q \in [1, 2n/(n-2)]$ se $n \geq 3$. Temos ainda a seguinte desigualdade,

$$\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^q} \lesssim \|\nabla^2 u(t,\cdot)\|_{L^2}^{\theta}\|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^1}^{1-\theta} \leq (1+t)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}. \tag{4.44}$$

Além disso, como $1 < p < \infty$ se $n = 1, 2$ ou $1 < p < n/(n-2)$ se $n \geq 3$, temos em ambos os casos que $\nabla u(t,\cdot) \in L^p \cap L^{2p}$, ou ainda, $|\nabla u(t,\cdot)|^p \in L^1 \cap L^2$. Agora, para cada $s > 0$ fixado temos que

$$(J(t-s,\cdot) * |\nabla u(s,\cdot)|^p)(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} J(t-s,y)|\nabla u(s,x-y)|^p dy$$

é solução para o seguinte problema de Cauchy linear:

$$\begin{cases} w_{tt} - \triangle w + w_t - \triangle w_t = 0, & t > s, x \in \mathbb{R}^n \\ w(s,x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ w_t(s,x) = |\nabla u(s,x)|^p, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Assim, pelo Teorema (3.3.1) temos que $J(t-s,\cdot) * |\nabla u(s,\cdot)|^p$ satisfaz as seguintes estimativas:

$$
\begin{aligned}
\|\triangle(J*|\nabla u|^p)(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t-s)^{-1}\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} &(4.45)\\
\|\triangle(J*|\nabla u|^p)(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-1}(\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1}+\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}) &(4.46)\\
\|\partial_t(J_1*|\nabla u|^p)(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t-s)^{-1}\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} &(4.47)\\
\|\partial_t(J*|\nabla u|^p)(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-1}(\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1}+\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}) &(4.48)\\
\|(J*|\nabla u|^p)(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} &(4.49)\\
\|(J*|\nabla u|^p)(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim (1+t-s)^{-\frac{n}{4}}(\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1}+\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}). &(4.50)
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que

$$\|\triangle Fu(t,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2}\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|u\|^p_{\mathcal{X}}.$$

De fato, temos que

$$
\begin{aligned}
\|\triangle Fu(t,\cdot)\|_{L^2}+\|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \le& \int_0^t \|\triangle J(t-s,\cdot)*|\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^t \|\partial_t J(t-s,\cdot)*|\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}ds.
\end{aligned}
$$

Utilizando as estimativas (4.46) e (4.45) nos intervalos $[0,t/2]$ e $[t/2,t]$ respectivamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|\triangle Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim& \int_0^{t/2} \|\triangle(J(t-s,\cdot)*|\nabla u(s,\cdot)|^p)\|_{L^2}ds\\
&+\int_{t/2}^t \|\triangle(J(t-s,\cdot)*|\nabla u(s,\cdot)|^p)\|_{L^2}ds\\
\lesssim& \int_0^{t/2}(1+t-s)^{-\frac{n}{4}-1}(\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1}+\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2})ds\\
&+\int_{t/2}^t(1+t-s)^{-1}\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}ds. \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, utilizando a estimativa (4.48) em $[0,t/2]$ e a estimativa (4.47) em $[t/2,t]$, temos

$$
\begin{aligned}
\|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim & \int_0^{t/2} \|\partial_t (J(t-s,\cdot) * |\nabla u(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} ds \\
& + \int_{t/2}^{t} \|\partial_t (J(t-s,\cdot) * |\nabla u(s,\cdot)|^p)\|_{L^2} ds \\
\lesssim & \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-1} (\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}) ds \\
& + \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-1} \||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} ds. \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

Logo, por (4.51) e (4.52) segue que

$$
\begin{aligned}
\|\triangle Fu(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim & \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-1} (\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}) ds \\
& + \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-1} \||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} ds. \qquad (4.53)
\end{aligned}
$$

Como,

$$
\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(s,x)|^p dx \right) = \|\nabla u(s,\cdot)\|_{L^p}^p, \qquad (4.54)
$$

$$
\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(s,x)|^{2p} dx \right)^{1/2} = \|\nabla u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p \qquad (4.55)
$$

substituindo em (4.53), temos

$$
\begin{aligned}
\|\triangle Fu(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim & \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-1} (\|\nabla u(s,\cdot)\|_{L^p}^p + \|\nabla u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p) ds \\
& + \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-1} \|\nabla u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p ds.
\end{aligned}
$$

Utilizando a estimativa (4.44) para $q = p$ e $q = 2p$, temos que

$$
\|\nabla u(s,\cdot)\|_{L^p}^p \lesssim (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}}^p, \qquad (4.56)
$$

$$
\|\nabla u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p \lesssim (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}} \|u\|_{\mathcal{X}}^p. \qquad (4.57)
$$

Deste modo, segue que

$$\begin{aligned}
&\|\triangle Fu(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \\
&\lesssim \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}-1}((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p + (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p)ds \\
&\quad + \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1}(1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $p > 1+1/(n+1)$, segue que $n(p-1)/2+p/2 > 1$ e consequentemente

$$(1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}} < (1+s)^{-\frac{n}{4}-1}, s \geq 0.$$

Com isso, utilizando as desigualdades (4.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\triangle Fu(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\partial_t Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim & (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_0^{t/2} (1+s)^{-1} + (1+s)^{-\frac{n}{4}-1} ds \\
& + (1+t)^{-\frac{n}{4}-1}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1} ds \\
\lesssim & \, (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{1}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p, \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}} + (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}} ds \lesssim \int_0^{\infty} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}} ds \lesssim 1 \\
&\int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1} ds \lesssim \int_0^t (1+s)^{-1/2} ds \lesssim (1+t)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que $\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{4}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p$. Utilizando a estimativa (4.50) em $[0, t/2]$, a estimativa (4.49) em $[t/2, t]$, as identidades (4.54) e (4.55), temos que

$$\begin{aligned}
\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \leq & \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}}(\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} + \||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2}) ds \\
& + \int_{t/2}^t \||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^2} ds \\
= & \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}}(\|\nabla u(s,\cdot)\|_{L^p}^p + \|\nabla u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p) ds \\
& + \int_{t/2}^t \|\nabla u(s,\cdot)\|_{L^{2p}}^p ds.
\end{aligned}$$

Ainda, utilizando as desigualdades (4.56) e (4.57) na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned}\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim& \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{n}{4}}((1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}} + (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}})\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds \\ &+ \int_{t/2}^{t} (1+s)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds.\end{aligned}$$

Deste modo, aplicando as aproximações dadas em (4.10), segue que

$$\begin{aligned}\|Fu(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim&(1+t)^{-\frac{n}{4}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}} ds \\ &+ (1+t)^{-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_{t/2}^{t} ds \\ \lesssim&(1+t)^{-\frac{n}{4}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Do mesmo modo, deduziremos as estimativas L^1 para Fu. Primeiro, pelo teorema 3.3.3, temos que $J(t-s,\cdot) * |\nabla u(s,\cdot)|^p$ satisfaz as seguintes estimativas L^1:

$$\|(J(t-s,\cdot) * |\nabla u(s,\cdot)|^p)\|_{L^1} \lesssim \||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1}; \tag{4.60}$$
$$\|\nabla(J(t-s,\cdot) * |\nabla u(s,\cdot)|^p)\|_{L^1} \lesssim (1+t-s)^{-1/2}\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1}; \tag{4.61}$$
$$\|\partial_t(J(t-s,\cdot) * |\nabla u(s,\cdot)|^p)\|_{L^1} \lesssim (1+t-s)^{1}\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1}. \tag{4.62}$$

Deste modo, utilizando estas estimativas, para $j+k=0,1$, obtemos

$$\begin{aligned}\|\nabla^j\partial_t^k Fu(t,\cdot)\|_{L^1} \lesssim& \int_0^t \|\nabla^j\partial_t^k(J(t-s,\cdot) * |\nabla u(s,\cdot)|^p)\|_{L^1} ds \\ \lesssim& \int_0^t (1+t-s)^{-\frac{j}{2}-k}\||\nabla u(s,\cdot)|^p\|_{L^1} ds.\end{aligned}$$

Utilizando a estimativa (4.56) e as aproximações (4.10), temos

$$\begin{aligned}\|\nabla^j\partial_t^k Fu(t,\cdot)\|_{L^1} \lesssim& \int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\frac{j}{2}-k}(1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds \\ &+ \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\frac{j}{2}-k}(1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p ds \\ \lesssim&(1+t)^{-\frac{j}{2}-k}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_0^{t/2} (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}} ds \\ &+ (1+t)^{-\frac{n}{2}(p-1)-\frac{p}{2}}\|u\|_{\mathcal{X}}^p \int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\frac{j}{2}-k} ds \\ \lesssim&(1+t)^{-\frac{j}{2}-k}\|u\|_{\mathcal{X}}^p. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Portanto, por (4.58), (4.59) e (4.63) temos que $Fu \in \mathcal{X}$ e que $\|Fu\|_{\mathcal{X}} \leq C\|u\|_{\mathcal{X}}^p$

para todo $u \in \mathcal{X}$. Ainda, de modo análogo aos teoremas anteriores, podemos mostrar que

$$\|Fu - Fv\|_{\mathcal{X}} \leq C\|u - v\|_{\mathcal{X}}(\|u\|_{\mathcal{X}}^{p-1} + \|v\|_{\mathcal{X}}^{p-1}), \quad u, v \in \mathcal{X}.$$

Logo, temos que F satisfaz as condições (1) e (2) do lema 4.0.3. Assim, considerando novamente o operador $G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$, o operador que associa cada par $(u_0, u_1) \in \mathcal{A}$ à solução do problema de Cauchy linear (3.2), temos que G satisfaz a condição (3) do referido lema.

Portanto, pelo lema (4.0.3), existe $\varepsilon > 0$ tal que para quaisquer dados iniciais $(u_0, u_1) \in \mathcal{A}$, com $\|(u_0, u_1)\|_{\mathcal{A}} \leq \varepsilon$, o operador $Fu + u_l$ possui um único ponto fixo, ou seja, existe

$$u \in C([0, \infty); W^{1,1} \cap H^2) \cap C^1([0, \infty); L^1 \cap L^2),$$

tal que $u = u_l + Fu$, solução para o problema de Cauchy (4.42), satisfazendo as estimativas $(i) - (vi)$, como queríamos demonstrar. ∎

Observação 4.0.7 *Consideremos $f(u) = |u|^p$. Para cada $s \geq 0$ fixado, temos que*

$$(J(t - s, \cdot) * f(u(s, \cdot)))$$

é solução para o seguinte problema de Cauchy linear:

$$\begin{cases} w_{tt} - \triangle w + w_t - \triangle w_t = 0 & t > s, x \in \mathbb{R}^n, \\ w(s, x) = 0, \\ w_t(s, x) = f(u(s, x)). \end{cases}$$

Deste modo,

$$J(t - s, \cdot) * f(u(s, \cdot)) \in C([s, \infty); L^1 \cap H^1) \cap C^1([s, \infty); L^1 \cap L^2),$$

para $s \geq 0$. Assim, dado $t_0 \in [0, \infty)$ e $t > t_0$ segue que

$$\begin{aligned} Fu(t, x) - Fu(t_0, x) &= \int_0^t (J(t - s, \cdot) * f(u(s, \cdot)))(x)ds - \int_0^{t_0} (J(t_0 - s, \cdot) * f(u(s, \cdot)))(x)ds \\ &= \int_0^{t_0} (J(t - s, \cdot) * f(u(s, \cdot)))(x)ds + \int_{t_0}^t (J(t - s, \cdot) * f(u(s, \cdot))(x)ds \\ &\quad + \int_0^{t_0} (J(t_0 - s, \cdot) * f(u(s, \cdot)))(x)ds \\ &= \int_0^{t_0} (J(t - s, \cdot) - J(t_0 - s, \cdot)) * f(u(s, \cdot)))(x)ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t J(t - s, \cdot) * f(u(s, \cdot))(x)ds. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\|Fu(t,\cdot)-Fu(t_0,\cdot)\|_{L^2} \lesssim & \int_0^{t_0} \|(J(t-s,\cdot)-J(t_0-s,\cdot))*f(u(s,\cdot))\|_{L^2}ds \\ & + \int_{t_0}^{t} \|J(t-s,\cdot)*f(u(s,\cdot))\|_{L^2}ds.\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon>0$, para cada $s\in[0,t_0]$ existe $\delta_s>0$ tal que,

$$\|(J(t-s,\cdot)-J(t_0-s,\cdot))*f(u(s,\cdot))\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{t_0+1}.$$

Assim, tomando $\delta = \inf_{s\in[0,t_0]}\{\delta_s\}$, temos $\|(J(t-s,\cdot)-J(t_0-s,\cdot))*f(u(s,\cdot))\|_{L^2} < \varepsilon/(1+t_0)$, para todo $s\in[0,t_0]$. Logo,

$$\int_0^{t_0} \|(J(t-s,\cdot)-J(t_0-s,\cdot))*f(u(s,\cdot))\|_{L^2}ds < \frac{t_0}{1+t_0}\varepsilon < \varepsilon.$$

Ainda como,

$$\int_{t_0}^{t} \|J(t-s,\cdot)*f(u(s,\cdot))\|_{L^2}ds \to 0,$$

quando $t\to t_0$, temos que

$$\|Fu(t,\cdot)-Fu(t_0,\cdot)\|_{L^2} \to 0,$$

onde obtemos que $Fu\in C([0,\infty);L^2)$. Do mesmo modo mostramos para $t<t_0$. Agora, definindo $w(t,x)=J(t-s,\cdot)*f(u(s,\cdot))(x)$, de modo análogo podemos mostrar que,

$$w\in C([0,\infty);L^1\cap H^1)\cap C^1([0,\infty);L^1\cap L^2).$$

Referências

[1] E. Kreyszig, Introductory functional analysis with applications. Wiley New York, 1989.

[2] N. Hayashi, E.I. Kaikina, P.I. Naumkin, I.A. Shishmavev, Asymtoptics for dissipative nonlinear equations. Springer Verlag, 2006.

[3] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer Science and Business Media, 2010.

[4] G. Leoni, A first course in sobolev spaces, second edition. American mathematical society, 2017.

[5] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators I, segunda edição. Springer-Verlag, 1990.

[6] M. D'Abbicco, $L^1 - L^1$ estimates for a doubly dissipative semilinear wave equation. Nonlinear Differ. Equ. Appl (2017).

[7] Y. Shibata, On the Rate of Decay of Solutions to Linear Viscoelastic Equation. Math. Meth. Appl. Sci., 23, 203-226 (2000).

[8] J. Fritz, Partial differential equations. Springer-Verlag, New York, 1978.

[9] R.G. Bartle, The elements of integration and lebesgue measure. John Wiley and Sons, 1995.

[10] M. D'Abbicco, Reissig, M.: Semilinear structural damped waves. Math. Methods Appl. Sci.(2013).

[11] M. D'Abbicco, The critical exponent for the dissipative plate equation with power nonlinearity. Elsevier (2017).

[12] M. D'Abbicco, A note on a weakly coupled system of structurally damped waves. Diff Equ. Appl. (2015).

[13] J.J. Duistermaat, J.A.C Kolk, Distributions, theory and applications. Birkhäuser, 2010.

[14] R.I. Júnior, V.M. Iório, Equações diferenciais parciais: uma introdução. Rio de Janeiro, IMPA, 1988.