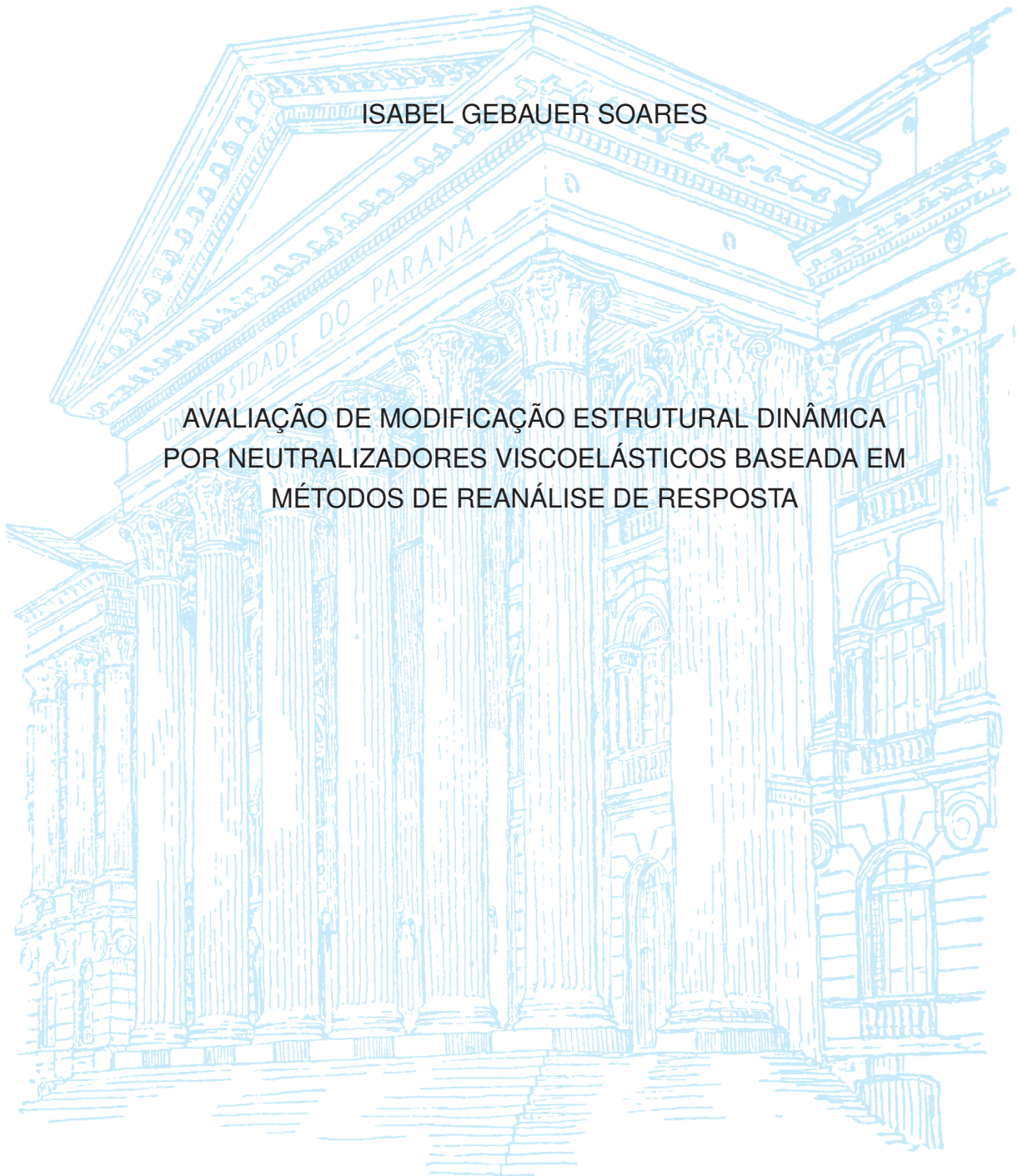


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ISABEL GEBAUER SOARES

AVALIAÇÃO DE MODIFICAÇÃO ESTRUTURAL DINÂMICA
POR NEUTRALIZADORES VISCOELÁSTICOS BASEADA EM
MÉTODOS DE REANÁLISE DE RESPOSTA



CURITIBA

2021

ISABEL GEBAUER SOARES

AVALIAÇÃO DE MODIFICAÇÃO ESTRUTURAL DINÂMICA
POR NEUTRALIZADORES VISCOELÁSTICOS BASEADA EM
MÉTODOS DE REANÁLISE DE RESPOSTA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, linha de pesquisa em Mecânica dos Sólidos e Vibrações, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestra em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Eduardo M. O. Lopes, PhD

CURITIBA

2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

- S676a Soares, Isabel Gebauer
Avaliação de modificação estrutural dinâmica por neutralizadores viscoelásticos baseada em métodos de reanálise de resposta [recurso eletrônico] / Isabel Gebauer Soares. – Curitiba, 2021.
- Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica.
- Orientador: Eduardo Márcio de Oliveira Lopes.
Acesso dados abertos BDC/UFPR: <http://dx.doi.org/10.5380/bdc/83>
1. Controle de vibrações. 2. Análise modal. 3. Reanálise. I. Universidade Federal do Paraná. II. Lopes, Eduardo Márcio de Oliveira. III. Título.

CDD: 531

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **ISABEL GEBAUER SOARES** intitulada: **AVALIAÇÃO DA MODIFICAÇÃO ESTRUTURAL DINÂMICA POR NEUTRALIZADORES VISCOELÁSTICOS BASEADA EM MÉTODOS DE REANÁLISE DE RESPOSTA**, sob orientação do Prof. Dr. EDUARDO MÁRCIO DE OLIVEIRA LOPES, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 01 de Outubro de 2021.



EDUARDO MÁRCIO DE OLIVEIRA LOPES
Presidente da Banca Examinadora



CARLOS ALBERTO BAVASTRI
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



MARCO ANTONIO LUERSEN
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

In memoriam

*Ao meu avô, Carl Heinz Antonius Gebauer, que me ensinou a estar sempre sorrindo e
estará pra sempre em meu coração.*

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, deixo os meus sinceros agradecimentos a todos que estiveram e estão presentes durante a minha caminhada.

Primeiramente, a Deus.

Ao meu orientador e professor, Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes, pelo auxílio e atenção dedicada a este trabalho.

Agradeço também à banca examinadora e aos demais seletos professores.

Aos meus colegas do Laboratório de Vibrações e Som, em especial ao Maurizio Barghouthi e ao Kevin Ribeiro, que sempre estiveram presentes na vida um do outro, com ajudas mútuas.

Aos meus pais.

Ao Professor Emilio E. Kavamura, por toda a ajuda com o editor LATEX e também pelas conversas e conselhos de vida.

Ao Professor Carlos Bavastri, pelas aulas ministradas.

Ao Jean Di Santi, pelos momentos de distração e risadas nas trilhas.

Bruna Heck, Cláudia Mulinari e Marineide Araújo, pelas conversas e conselhos.

Ao Lucas Bozz, por todo seu tempo dedicado a me ensinar programação e por toda a ajuda nos momentos de crise.

Agradeço também ao meu namorado, que resolve todos os meus problemas de informática quando eu me desespero e penso em voltar ao tempo da pedra, além de ser o meu porto seguro nos momentos de angústia.

Para fechar com chave de ouro minha gratidão, minha querida oma (vó) que se desdobrou pra cuidar de mim da melhor forma possível nesta época: realmente teria sido impossível esta jornada sem a sua presença.

Amo todos vocês!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001: meus agradecimentos.

- *"Seja forte e corajoso!*

Não se apavore nem desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar"

(Josué 1:9)

- *"Desde que eu fui uma criança tenho tido esse impulso instintivo por expansão e crescimento. Para mim, a função e dever de um ser humano de qualidade é o honesto e sincero desenvolvimento do seu potencial."*

(Bruce Lee)

RESUMO

Modificações estruturais ou alterações de projeto podem ocorrer por vários motivos, tais como: produto insatisfatório para o cliente, defeitos estruturais, atualização de peças obsoletas, geração de ruído intenso do equipamento para o operador e vibrações indesejadas. Quando existe certo conhecimento prévio das características dinâmicas do sistema mecânico de interesse, particularmente em associação com a região onde as modificações ocorrerão, uma abordagem prática e conveniente é analisar os efeitos dessas modificações usando técnicas de reanálise. Essas técnicas visam prever o comportamento dinâmico do sistema após a implementação das modificações, a partir de um conjunto compacto e específico de dados relativos ao sistema e às modificações. Embora as técnicas de reanálise empreguem uma quantidade reduzida de dados, elas ainda podem fornecer informações relevantes para uma análise satisfatória das ações desejadas de modificação estrutural. O presente trabalho tem como objetivo investigar o uso de duas técnicas de reanálise de resposta, em formulação matricial, para avaliar os efeitos da inserção de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos como modificações estruturais localizadas. Os neutralizadores viscoelásticos são considerados no contexto de implementação futura do controle de vibração em uma viga metálica engastada-livre. São utilizados, na modelagem dos neutralizadores, conceitos de parâmetros equivalentes generalizados, para se manter a mesma dimensão nas matrizes do sistema antes e após a inserção dos neutralizadores. Para validar o uso das técnicas empregadas, suas previsões são comparadas com os resultados obtidos por um programa computacional dedicado ao projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos em sistemas mecânicos, programa esse já consolidado e denominado LAVIBS-ND[®]. Mostra-se que as técnicas investigadas não diferem, no tocante às previsões realizadas, da técnica atualmente utilizada naquele programa, que foi empregado como referência para aferir a acurácia dos métodos avaliados. Conclui-se então que as técnicas em questão são realmente capazes de prever com exatidão os efeitos de modificações estruturais por neutralizadores dinâmicos viscoelásticos para fins de controle de vibração.

Palavras-chaves: Controle de vibrações. Material viscoelástico. Neutralizador viscoelástico. Modificação estrutural. Reanálise.

ABSTRACT

Structural modifications or design alterations can occur for several reasons, such as: unsatisfactory product for the customer, structural defects, updating of obsolete parts, generation of intense noise from the equipment to the operator and unwanted vibrations. When there is some prior knowledge of the dynamic characteristics of the mechanical system of interest, particularly in association with the region where the changes will occur, a practical and convenient approach is to analyze the effects of these changes using reanalysis techniques. These techniques aim to predict the dynamic behavior of the system after the implementation of the modifications, from a compact and specific set of data related to the system and the modifications. Although reanalysis techniques employ a reduced amount of data, they can still provide relevant information for a satisfactory analysis of desired structural modification actions. The present work aims to investigate the use of two response reanalysis techniques, in matrix formulation, to evaluate the effects of the insertion of viscoelastic dynamic neutralizers as localized structural modifications. The viscoelastic neutralizers are considered in the context of future implementation of vibration control on a cantilever steel beam. In modeling the neutralizers, concepts of generalized equivalent parameters are used to maintain the same dimension in the system matrices before and after the insertion of the devices. To validate the use of the techniques employed, their predictions are compared with the results obtained by a established computational program dedicated to the optimal design of dynamic neutralizers in mechanical systems, named LAVIBS-ND[®]. It is shown that the investigated techniques do not differ, as far as their predictions are concerned, from the technique currently used in the above program, which is employed as a benchmark to assess the accuracy of the evaluated methods. It is then concluded that the focused techniques are actually able to accurately predict the effects of structural modifications by viscoelastic dynamic neutralizers for vibration control purposes.

Key-words: Reanalysis. Structural modification. Vibration control.
Viscoelastic neutralizers. Viscoelastic material.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – SISTEMA COM UM GDL × SISTEMA COM MÚLTIPLOS GDL . . .	23
FIGURA 2 – SISTEMAS MECÂNICOS	24
FIGURA 3 – ELEMENTO DE VIGA COM 2GDL POR NÓ	24
FIGURA 4 – ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL	28
FIGURA 5 – ANÁLISE MODAL OPERACIONAL - HIGHWAY BRIDGE (ZURIQUE, SUÍÇA)	29
FIGURA 6 – DIFERENTES PONTOS DE EXCITAÇÃO E MEDIÇÃO EM UMA AME	31
FIGURA 7 – MÓDULO DE FRF COM RESSONÂNCIAS ESPAÇADAS	34
FIGURA 8 – REGIÃO DE RESSONÂNCIA	35
FIGURA 9 – MÍNIMO LOCAL × MÍNIMO GLOBAL	38
FIGURA 10 – PROPRIEDADES DINÂMICAS DE UM MVE	42
FIGURA 11 – NOMOGRAMA DE FREQUÊNCIA REDUZIDA	43
FIGURA 12 – MODELOS DE NEUTRALIZADOR VISCOSO E VISCOELÁSTICO	45
FIGURA 13 – ETAPAS DO DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO	56
FIGURA 14 – REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA PRIMÁRIO	57
FIGURA 15 – VIGA EM SUPORTE EXPERIMENTAL	58
FIGURA 16 – DIVISÃO EM NÓS E ELEMENTOS	58
FIGURA 17 – EQUIPAMENTOS DE MEDIÇÃO	58
FIGURA 18 – ESQUEMA DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL	59
FIGURA 19 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL	60
FIGURA 20 – CONFIGURAÇÃO DO <i>IMPACTEST</i> LABVIEW®	61
FIGURA 21 – INERTÂNCIA VIA MODELO NUMÉRICO	62
FIGURA 22 – OTIMIZAÇÃO HÍBRIDA	63
FIGURA 23 – COMPARAÇÃO ENTRE INERTÂNCIAS EXPERIMENTAL E NUMÉRICA	71
FIGURA 24 – 1ª FAIXA: RIGIDEZ DINÂMICA DO NEUTRALIZADOR	74
FIGURA 25 – 2ª FAIXA: RIGIDEZ DINÂMICA DO NEUTRALIZADOR	74
FIGURA 26 – 3ª FAIXA: RIGIDEZ DINÂMICA DO NEUTRALIZADOR	75
FIGURA 27 – SISTEMA PRIMÁRIO UTILIZADO NO MÉTODO MODAL × SISTEMA PRIMÁRIO UTILIZADO NOS MÉTODOS DE REANÁLISE	76
FIGURA 28 – 1ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODOS DE REANÁLISE	77
FIGURA 29 – 1ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODO MODAL	78
FIGURA 30 – 1ª FAIXA: $R(\omega)$ –MÉTODO MODAL E $R(\omega)$ –MÉTODOS DE REANÁLISE	79

FIGURA 31 – 1ª FAIXA: $I(\omega)$ –MÉTODO MODAL E $I(\omega)$ –MÉTODOS DE REANÁLISE	79
FIGURA 32 – 1ª FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO <i>SOFTWARE</i> LAVIBS-ND®	80
FIGURA 33 – 1ª FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO <i>SOFTWARE</i> LAVIBS-ND®	81
FIGURA 34 – 2ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODOS DE REANÁLISE	82
FIGURA 35 – 2ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODO MODAL	82
FIGURA 36 – 2ª FAIXA: $R(\omega)$ –MÉTODO MODAL E $R(\omega)$ –MÉTODOS DE REANÁLISE	83
FIGURA 37 – 2ª FAIXA: $I(\omega)$ –MÉTODO MODAL E $I(\omega)$ –MÉTODOS DE REANÁLISE	84
FIGURA 38 – 2ª FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO <i>SOFTWARE</i> LAVIBS-ND®	84
FIGURA 39 – 2ª FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO <i>SOFTWARE</i> LAVIBS-ND®	85
FIGURA 40 – 3ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODOS DE REANÁLISE	86
FIGURA 41 – 3ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODO MODAL	86
FIGURA 42 – 3ª FAIXA: $R(\omega)$ –MÉTODO MODAL E $R(\omega)$ –MÉTODOS DE REANÁLISE	87
FIGURA 43 – 3ª FAIXA: $I(\omega)$ –MÉTODO MODAL E $I(\omega)$ –MÉTODOS DE REANÁLISE	88
FIGURA 44 – 3ª FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO <i>SOFTWARE</i> LAVIBS-ND®	88
FIGURA 45 – 3ª FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO <i>SOFTWARE</i> LAVIBS-ND®	89
FIGURA 46 – CONJUNTO ISOLADOR COM ABAS FLUTUANTES	104
FIGURA 47 – NEUTRALIZADOR VISCOELÁSTICO COM SUPORTES FLUTUANTES	105
FIGURA 48 – LADO ESQUERDO DO NVE COM SUPORTES FLUTUANTES	105
FIGURA 49 – DEFORMAÇÃO RELATIVA NA MOLA 2E	108
FIGURA 50 – DEFORMAÇÃO RELATIVA NA MOLA 3E	109
FIGURA 51 – DIMENSÕES DA MASSA DO NDV	115
FIGURA 52 – DIMENSÕES DO ELEMENTO VISCOELÁSTICO PRISMÁTICO	116
FIGURA 53 – DIMENSÕES DO ELEMENTO VISCOELÁSTICO CILÍNDRICO	118
FIGURA 54 – DIMENSÕES DO ELEMENTO VISCOELÁSTICO ANULAR	120
FIGURA 55 – DIMENSÕES DO ÍMÃ DE NEODÍMIO COM SEÇÃO ANULAR	122
FIGURA 56 – NEUTRALIZADOR - VISTA FRONTAL	123
FIGURA 57 – NEUTRALIZADOR - VISTA EXPLODIDA	124

FIGURA 58 – COMPONENTES NEUTRALIZADOR 125

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – TERMOS EMPREGADOS EM ALGORITMOS GENÉTICOS . . .	39
TABELA 2 – CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA PRIMÁRIO	57
TABELA 3 – FAIXAS DE INTERESSE	65
TABELA 4 – PARÂMETROS EAR TM C-1002	65
TABELA 5 – ESPESSURAS DO MVE	65
TABELA 6 – FREQ. NUMÉRICAS × FREQ. EXPERIMENTAIS	72
TABELA 7 – RAZÕES DE AMORTECIMENTOS NUMÉRICOS × RAZÕES DE AMORTECIMENTOS EXPERIMENTAIS	73
TABELA 8 – AMPLITUDES NUMÉRICAS × AMPLITUDES EXPERIMENTAIS .	73
TABELA 9 – RELAÇÃO DE MASSAS E FREQUÊNCIAS DO NVE NAS FAIXAS ANALISADAS	73

LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

AG	Algoritmo Genético
AME	Análise Modal Experimental
AMO	Análise Modal Operacional
AMT	Análise Modal Teórica
CA	Combinação Aproximada
FRF	Função Resposta em Frequência
GDL	Grau de Liberdade
LABVIEW®	<i>Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench</i>
LAVIBS-ND®	Laboratório Vibrações e Som-Neutralizador Dinâmico
MATLAB®	<i>Matrix Laboratory</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MVE	Material Viscoelástico
PEGs	Parâmetros Equivalentes Generalizados
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming Method</i>
TONL	Técnicas de Otimização não Lineares
UFPR	Universidade Federal do Paraná
WLF	Williams-Landel-Ferry

LISTA DE SÍMBOLOS

AG	Algoritmo Genético
AME	Análise Modal Experimental
AMO	Análise Modal Operacional
AMT	Análise Modal Teórica
CA	Combinação Aproximada
FRF	Função Resposta em Frequência
GDL	Grau de Liberdade
LABVIEW®	<i>Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench</i>
LAVIBS-ND®	Laboratório Vibrações e Som-Neutralizador Dinâmico
MATLAB®	<i>Matrix Laboratory</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MVE	Material Viscoelástico
PEGs	Parâmetros Equivalentes Generalizados
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming Method</i>
TONL	Técnicas de Otimização não Lineares
UFPR	Universidade Federal do Paraná
WLF	Williams-Landel-Ferry

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	18
1.2	OBJETIVOS	19
1.2.1	Objetivo Geral	19
1.2.2	Objetivos Específicos	20
1.3	ESTRUTURA DO TEXTO	20
2	FUNDAMENTAÇÃO CONCEITUAL	22
2.1	MODELAGEM DINÂMICA	22
2.1.1	Visão Geral	22
2.1.2	Elementos Finitos	23
2.1.2.1	Descrição Geral	23
2.1.2.2	Elemento Simples (Viga de Euler-Bernoulli)	23
2.1.2.3	Equação de Movimento	25
2.1.2.4	Solução do Sistema não Amortecido	25
2.1.2.5	Fontes de erros do MEF	26
2.2	ANÁLISE MODAL	27
2.2.1	Tipos de Análise Modal	27
2.2.2	Funções Resposta em Frequência	28
2.3	INSERÇÃO DE AMORTECIMENTO	31
2.3.1	Modelos de amortecimento	31
2.3.2	Amortecimento Proporcional	33
2.3.3	Método da Banda de Meia Potência (-3 dB)	34
2.4	ATUALIZAÇÃO E VALIDAÇÃO VIA OTIMIZAÇÃO	36
2.4.1	Elementos de um Problema de Otimização	37
2.4.1.1	Variáveis de Projeto	37
2.4.1.2	Função Objetivo	37
2.4.1.3	Funções de Restrições	38
2.4.1.4	Formulação do Problema	38
2.4.2	Técnicas Empregadas	39
2.4.2.1	Algoritmos Genéticos	39
2.4.2.2	Programação Quadrática Sequencial (SQP)	39
2.5	MODIFICAÇÃO ESTRUTURAL POR NDV	40
2.5.1	Materiais Viscoelásticos	40
2.5.1.1	Influência da Temperatura e Frequência	41

2.5.1.2	Representação de Propriedades Dinâmicas	41
2.5.2	Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos	44
3	REANÁLISE DE RESPOSTA	46
3.1	CLASSIFICAÇÃO GERAL	46
3.2	MÉTODOS EXATOS DE REANÁLISE DE RESPOSTA	47
3.2.1	Método via partição matricial	47
3.2.2	Método via produto matricial	51
3.3	ESTUDOS CORRELATOS	54
4	MATERIAIS E MÉTODOS	56
4.1	ETAPAS DO DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO	56
4.2	SISTEMA PRIMÁRIO	57
4.3	MODELO NUMÉRICO	61
4.4	ATUALIZAÇÃO E VALIDAÇÃO	61
4.4.1	Vetor de projeto e função objetivo	63
4.5	CARACTERÍSTICAS ÓTIMAS DE NDV	64
4.6	APLICAÇÃO DE MÉTODOS DE REANÁLISE	65
4.6.1	Modificação via partição matricial	65
4.6.2	Método via produto matricial	66
4.6.2.1	Formulação específica	66
5	APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS	71
5.1	SISTEMA PRIMÁRIO E NDV	71
5.1.1	Sistema primário	71
5.1.2	Neutralizador Viscoelástico	73
5.2	SISTEMA COMPOSTO	75
5.2.1	Primeira Faixa de Frequência	76
5.2.2	Segunda Faixa de Frequência	81
5.2.3	Terceira Faixa de Frequência	85
5.3	CONSOLIDAÇÃO	89
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS	90
6.1	CONCLUSÕES	90
6.2	SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS	91
	REFERÊNCIAS	92

APÊNDICES **96**

APÊNDICE A EXEMPLOS NUMÉRICOS DE REANÁLISE DE RESPOSTA **97**

A.1	PARTIÇÃO MATRICIAL	97
A.2	PRODUTO MATRICIAL	99

APÊNDICE B ANTEPROJETO DE NEUTRALIZADOR COM SUPORTES FLUTUANTES **104**

B.1	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	104
B.2	PROCEDIMENTO DE DIMENSIONAMENTO	114
B.2.1	Massa do NDV	114
B.2.2	Elementos Viscoelásticos Prismáticos	116
B.2.3	Elementos Viscoelásticos Cilíndricos	118
B.2.4	Elementos Viscoelásticos Anulares	120
B.3	EXEMPLO ILUSTRATIVO	121

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Os termos “reanálise estrutural” e “modificação dinâmica estrutural” têm sido usados para descrever técnicas que buscam analisar, com reduzido esforço numérico, o comportamento dinâmico de estruturas e sistemas mecânicos que, por alguma razão, sofrem alterações específicas em seus parâmetros (BRANDON, 1990; KIRSCH, 2008). Dessa forma, estão contempladas, dentre outras formas de ação, ganho ou retirada de massa, elevação ou diminuição de rigidez e adição de amortecimento. Entende-se por “reduzido esforço” que, face às alterações sofridas, não haverá a necessidade de, por exemplo, rodar novamente todo o modelo numérico da estrutura ou sistema mecânico de interesse.

As técnicas de reanálise, ou de modificação estrutural, podem ser empregadas tanto na fase de projeto quanto numa fase posterior. Elas almejam o fornecimento de respostas satisfatórias sem que sejam requeridas todas as informações relativas à estrutura ou sistema mecânico em tela. Há, em decorrência, uma redução do tempo de processamento gasto na análise desejada e, até mesmo, a possibilidade de se lidar com situações em que dados completos simplesmente não estejam disponíveis.

Uma causa frequente para que sejam feitas alterações em estruturas e sistemas mecânicos é a presença de vibrações mecânicas indesejadas. Essas vibrações podem conduzir, dentre outros, a desgaste precoce de componentes, falhas por fadiga, ruídos excessivos, afrouxamento de conexões aparafusadas e fabricação insatisfatória de peças. Há, basicamente, duas abordagens clássicas para redução dos níveis de vibração, quais sejam (MEAD, 1999):

1. A ação sobre a fonte de excitação, eliminando-a, reduzindo sua amplitude e/ou alterando sua frequência;
2. A atuação sobre a estrutura ou sistema mecânico vibrante em si, alterando diretamente seus parâmetros, como massa, rigidez e amortecimento, ou inserindo elementos adicionais, como neutralizadores dinâmicos, que produzem efeitos adicionais de controle.

Os neutralizadores dinâmicos são dispositivos auxiliares (ou secundários), que, ao serem inseridos numa estrutura ou sistema mecânico com vibrações indesejadas (dito, então, sistema primário), buscam reduzir as vibrações pela redistribuição e, quando amortecidos, também pela dissipação da energia de movimento. A inserção

de neutralizadores dinâmicos pode ser considerada uma modificação estrutural (HE; FU, 2001) e, como tal, analisada por métodos de reanálise. A abordagem torna-se ainda mais conveniente quando também é empregado o conceito de parâmetros generalizados equivalentes (ESPÍNDOLA; SILVA, 1992; BAVASTRI, 1997; LOPES, 1998), que permite que os neutralizadores dinâmicos inseridos sejam modelados por elementos de massa, amortecedor viscoso e mola. Isso permite que a dinâmica do sistema composto (sistema primário junto com os dispositivos de controle) ainda seja descrita em termos das coordenadas generalizadas do sistema primário, reforçando ainda mais o caráter de modificação dos neutralizadores dinâmicos.

O presente trabalho aborda a análise do comportamento dinâmico de uma estrutura simples, qual seja, uma viga engastada-livre, modificada pela inserção de um neutralizador dinâmico viscoelástico. São empregados dois métodos de reanálise de resposta, que lidam, em essência e como o próprio nome já antecipa, com funções resposta em frequência da estrutura e com funções que representam a modificação introduzida pelo neutralizador. São utilizados, assim, conjuntos reduzidos de informações, de caráter não modal, particularmente associados à região modificada da estrutura em tela.

Os métodos de reanálise investigados são o método da partição matricial e o método do produto matricial. Eles são métodos exatos, baseados diretamente na Álgebra Linear. Sua escolha se baseia no fato de que, além de trabalhar com volumes compactos de dados, eles podem ser imediatamente adaptados para formulações no domínio da frequência. Isso faz com que tratamentos por materiais viscoelásticos, cujas características elásticas e viscosas são convenientemente descritas naquele domínio, possam ser contemplados de forma muito conveniente. É de amplo conhecimento que materiais viscoelásticos têm sido largamente usados no controle passivo de vibrações (NASHIF A. D. JONES; HENDERSON, 1985).

Para fins de comprovação da eficácia dos métodos, toma-se, como referência, a abordagem modal implementada no programa computacional LAVIBS-ND[®], já claramente consolidada (BAVASTRI, 1997). Entende-se que os métodos em questão, caso se provem fidedignos, poderão não só se prestar para a avaliação expedita e simples da eficácia de modificações, o que aqui se faz, como também para guiar, no futuro, o próprio projeto das modificações.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Investigar dois métodos matriciais existentes de reanálise de resposta, quais sejam, partição matricial e produto matricial, avaliando suas respectivas eficácias

quando da predição dos efeitos da inserção de um neutralizador dinâmico viscoelástico para controle passivo de vibração em faixas de frequência de uma estrutura simples, a saber, uma viga engastada-livre.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Atualizar e validar, do ponto de vista estrutural, um modelo numérico para a viga engastada-livre, construído pelo método dos elementos finitos, através de análise modal experimental e técnicas de otimização não linear;
- Modelar e determinar as características ótimas do neutralizador viscoelástico (modificação estrutural) a ser acoplado à viga (sistema primário), utilizando o programa computacional LAVIBS-ND^{®1};
- Comparar os resultados alcançados com os métodos investigados com aqueles obtidos via LAVIBS-ND[®], programa computacional para projeto ótimo de neutralizadores viscoelásticos, desenvolvido no Laboratório de Vibrações e Som da Universidade Federal do Paraná (UFPR) .

1.3 ESTRUTURA DO TEXTO

No corrente capítulo (CAPÍTULO 1), contextualiza-se o estudo realizado na dissertação, particularmente no tocante à sua associação com o controle de vibrações. São também relacionados o objetivo geral e os objetivos específicos.

No segundo capítulo (CAPÍTULO 2), são expostos conceitos fundamentais gerais aplicáveis ao tema investigado. Trata-se, então, da modelagem dinâmica via método dos elementos finitos, da obtenção de parâmetros modais via análise modal experimental e do uso de técnicas de otimização não linear para a atualização e validação de modelos numéricos, com ênfase na inserção de informações sobre amortecimento. Considera-se também, de forma breve, a inserção de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos.

Os métodos de reanálise investigados na dissertação, a saber, o método da partição matricial e o método do produto matricial, são detalhados no terceiro capítulo (CAPÍTULO 3). Busca-se, em especial, apresentar a fundamentação matemática dos métodos e sua relação com funções que contêm informações sobre o comportamento dinâmico de estruturas e sistemas mecânicos.

Os materiais e métodos empregados na realização do estudo são relacionados no quarto capítulo (CAPÍTULO 4), que se inicia com um fluxograma das etapas percorridas, etapas essas detalhadas na sequência do capítulo. Posteriormente, o

¹ Laboratório Vibrações e Som-Neutralizador Dinâmico (LAVIBS-ND[®])

quinto capítulo (CAPÍTULO 5) traz os resultados alcançados, bem como sua discussão, contemplando tanto o que se obtém apenas com os métodos investigados em si, quanto em sua comparação com a abordagem modal do programa computacional LAVIBS-ND[®], já consolidada na literatura, o que é feito para fins de comprovação dos métodos.

Concluindo o texto, há o sexto capítulo (CAPÍTULO 6), em que são feitas as conclusões e sugestões de trabalhos futuros. Há também, na sequência, a seção de referências (REFERÊNCIAS).

Por fim, há dois apêndices (APÊNDICE A, APÊNDICE B). O primeiro apêndice traz exemplos numéricos simples, para ilustração do funcionamento dos métodos de reanálise investigados. No segundo apêndice, apresenta-se uma nova concepção de neutralizador dinâmico viscoelástico, com suporte flutuante, que, acredita-se, poderá ser útil em situações em que frequências características baixas para o dispositivo sejam requeridas. Desenhos técnicos relativos a essa concepção também são incluídos.

2 FUNDAMENTAÇÃO CONCEITUAL

2.1 MODELAGEM DINÂMICA

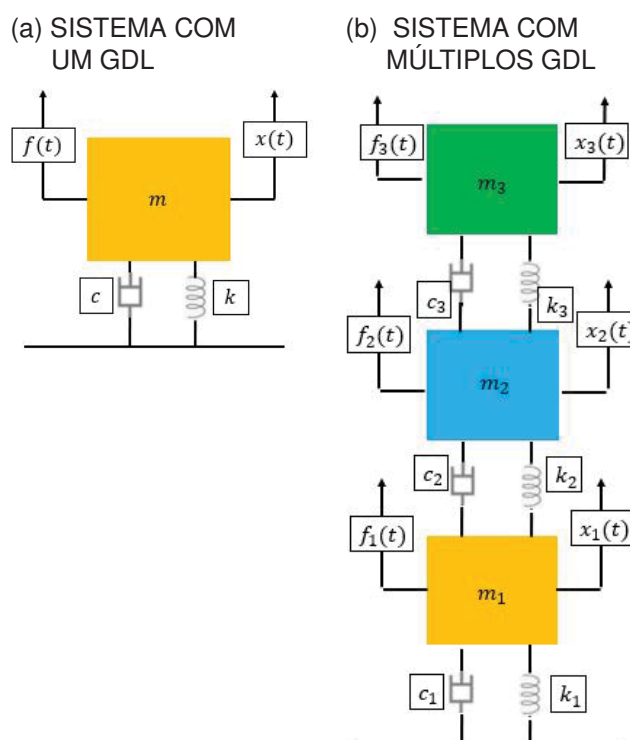
Esta dissertação tem a ver com análise expedita de estruturas e sistemas dinâmicos modificados, com vistas, em particular, ao controle de vibrações. Porém, antes de tratar especificamente dessa análise, é importante abordar, ainda que de forma breve, alguns conceitos fundamentais associados ao comportamento e às características dinâmicas de estruturas e sistemas mecânicos em geral. Isso é feito no presente capítulo.

2.1.1 Visão Geral

Sistemas mecânicos reais são complexos e, por isso, difíceis de serem representados em sua plenitude. Este é um dos motivos de se empregar os modelos, que constituem uma aproximação do sistema físico real, sendo fundamental, na modelagem, listar as simplificações realizadas ou hipóteses concebidas no processo. Os modelos auxiliam, por exemplo, no estudo e no levantamento das características dinâmicas mais relevantes, tais como frequências naturais, razões de amortecimento e modos de vibrar.

De forma geral, os modelos mecânicos podem ser divididos em discretos (em que os parâmetros de interesse encontram-se concentrados), contínuos (em que os parâmetros de interesse encontram-se distribuídos) e mistos (que contêm ambas as características dos anteriores) (MEIROVITCH, 2010). O modelo, ou sistema, discreto com 1 Grau de Liberdade (GDL) e amortecimento viscoso é o mais simples dos modelos e está ilustrado na FIGURA 1(a). Quanto mais complexo o sistema investigado, mais o modelo discreto pode ser expandido para quantos graus de liberdade forem necessários, originando o modelo, ou sistema, com múltiplos GDL, como ilustrado na FIGURA 1 (b) para 3 GDL. Via de regra, o modelo deve ser tão simples quanto possível, adequando-se a cada representação em questão.

FIGURA 1 – SISTEMA COM UM GDL × SISTEMA COM MÚLTIPLOS GDL



FONTE: Adaptado de Soares (2018)

Existem vários métodos para modelagem de estruturas e sistemas mecânicos (MEIROVITCH, 2010). Porém, este trabalho aborda apenas, de forma simples, o Método dos Elementos Finitos (MEF). Essa abordagem é apresentada na sequência.

2.1.2 Elementos Finitos

2.1.2.1 Descrição Geral

O MEF consiste basicamente em subdividir um problema complexo em problemas menores, que se correlacionam (RAO, 2009). As FIGURAS 2 (a) e 2 (b) ilustram esta afirmação.

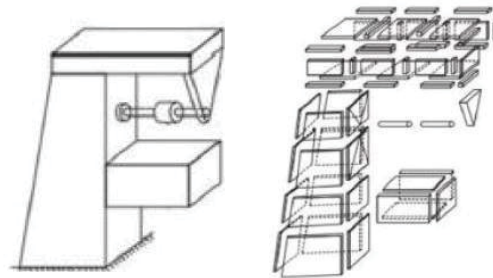
Malha é o nome dado à representação do todo em componentes. Quanto maior o número de componentes, mais refinada é a malha e, assim, mais exato o resultado, aliado a um maior esforço computacional.

O método dos elementos finitos, basicamente, discretiza um problema contínuo. Por se tratar de um método numérico, e assim estar passível de erros, os resultados obtidos via elementos finitos devem ser avaliados criteriosamente.

2.1.2.2 Elemento Simples (Viga de Euler-Bernoulli)

Para o elemento de viga Euler-Bernoulli, ilustrado na FIGURA 3, considerando-se apenas translação e rotação em cada nó, as matrizes elementares de rigidez, $[K]_e$,

FIGURA 2 – SISTEMAS MECÂNICOS
(a) SISTEMA COMPLETO (b) SISTEMA SUBDIVIDIDO



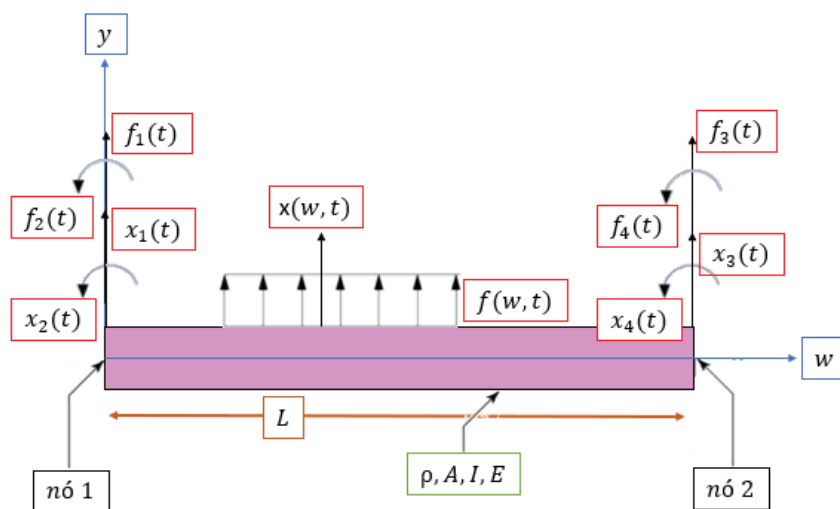
FONTE: Rao (2009)

e de massa, $[M]_e$, são dadas, respectivamente, por (RAO, 2009)

$$[K]_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$[M]_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

FIGURA 3 – ELEMENTO DE VIGA COM 2GDL POR NÓ



FONTE: Adaptado de Rao (2009)

onde

L	→ Comprimento do elemento;
E	→ Módulo de elasticidade do material do elemento;
I	→ Momento de inércia da secção transversal do elemento;
A	→ Área da secção transversal do elemento;
ρ	→ Densidade do material do elemento.

2.1.2.3 Equação de Movimento

Através do método, forma-se a representação espacial do problema dinâmico. Sendo o amortecimento muito complexo de ser modelado, numa primeira abordagem, o sistema é modelado como não-amortecido.

As matrizes de massa e rigidez fornecidas pelo método possuem dimensão correspondente ao número de graus de liberdade considerados. Tem-se, então, para uma viga não sujeita à ação de forças e/ou momentos externos, a seguinte equação de movimento:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{0\} \quad (2.3)$$

onde

$[M]$	→ Matriz global de massa;
$[K]$	→ Matriz global de rigidez;
$\{\ddot{x}(t)\}$	→ Vetor de aceleração;
$\{x(t)\}$	→ Vetor de deslocamento.

Salienta-se que, na EQUAÇÃO 2.3, as matrizes globais de massa e rigidez da viga são compostas pela associação pertinente das várias matrizes elementares dos elementos finitos componentes, tal como exposto nas EQUAÇÕES 2.2 e 2.1.

2.1.2.4 Solução do Sistema não Amortecido

Uma forma direta de se resolver a EQUAÇÃO 2.3 é relacioná-la com o problema de autovalores da Álgebra Linear. Para tanto, substituindo na EQUAÇÃO 2.3 a solução harmônica, representada por

$$\{x(t)\} = \{u\}e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

onde

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

obtém-se

$$\left(-\omega^2 [M] + [K] \right) \{u\} e^{i\omega t} = 0$$

Como o termo $e^{i\omega t}$ não pode ser nulo, decorre que

$$\left(-\omega^2 [M] + [K] \right) \{u\} = 0 \quad (2.6)$$

Para a existência da solução não trivial, requer-se que

$$\det \left(-\omega^2 [M] + [K] \right) = 0 \quad (2.7)$$

sendo a EQUAÇÃO 2.7 conhecida como **equação característica** do problema. Sua resolução fornece as frequências naturais (ω_n) do caso em análise. Levando essas frequências na EQUAÇÃO 2.6, podem ser determinados os modos de vibrar $\{u\}$ correspondentes.

A solução geral da EQUAÇÃO 2.3 é a soma das soluções individuais, tal que

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^n (a_i u_i e^{+\omega_i t} + b_i u_i e^{-\omega_i t}) \quad (2.8)$$

$$= \sum_{i=1}^n (a_i e^{+\omega_i t} + b_i e^{-\omega_i t}) u_i \quad (2.9)$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ são constantes arbitrárias a serem determinadas pelas condições iniciais do problema (KREYSZIG, 2006).

2.1.2.5 Fontes de erros do MEF

Segundo Mottershead, Link e Friswell (2011), os erros oriundos do MEF podem ser divididos em três categorias. São elas:

1. Erros de idealização

- Simplificações da estrutura;
- Determinações incorretas nas propriedades de massa (por exemplo, quando a excentricidade de distribuição de massa é ignorada);
- Negligenciamento de esforços na formulação de elementos finitos, (por exemplo não considerar esforços cisalhantes em uma estrutura);
- Modelagem incorreta das condições de contorno (por exemplo, utilizar um apoio flexível quando o correto seria o uso de um engaste);
- Estrutura não linear ser considerada linear.

2. Erros de discretização do modelo no MEF

- Refinamento incorreto da malha, não permitindo convergência para a frequência de interesse;

3. Erros por hipóteses incorretas para parâmetros de um modelo

- Definição incorreta ou inexata das propriedades do material (por exemplo, densidade e módulo de elasticidade);
- Propriedades da seção transversal;
- Espessura dos elementos.

Devido à variedade de fontes de erros, é de extrema importância a comparação do modelo numérico proposto pela técnica de MEF com o modelo experimental (objeto da validação, tema abordado na Seção 2.3). Esta comparação é, via de regra, feita através das curvas de Função Resposta em Frequência (FRF) obtidas numérica e experimentalmente, sendo os resultados experimentais decorrentes do uso de métodos de análise modal experimental, que é contextualizada na próxima seção.

2.2 ANÁLISE MODAL

2.2.1 Tipos de Análise Modal

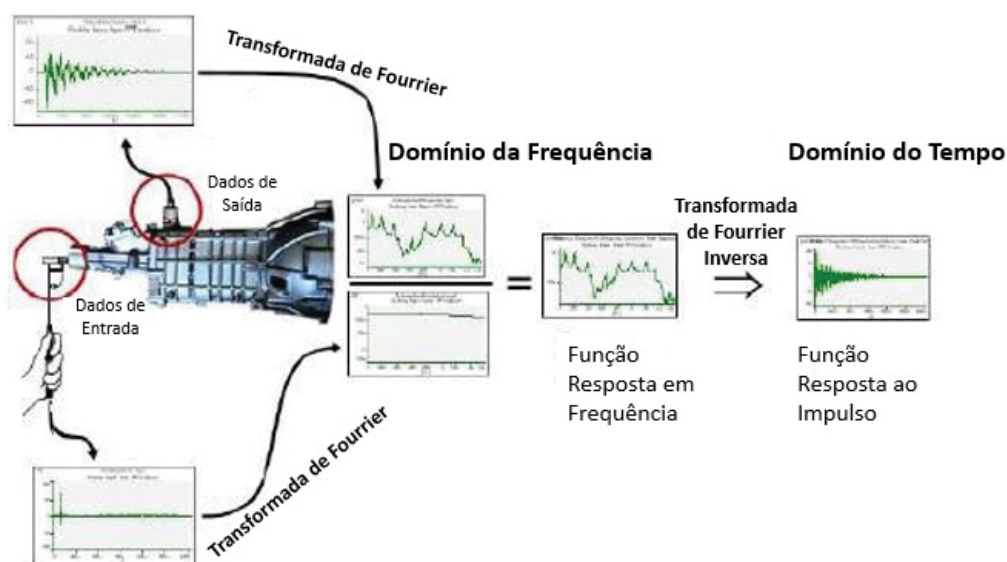
Como exposto por Meirovitch (2010), o termo "análise modal" tem sido usado tanto para procedimentos teóricos quanto experimentais. Tem-se, em síntese, os seguintes tipos: análise modal teórica, análise modal experimental e análise modal operacional. Esses tipos são comentados abaixo.

Na Análise Modal Teórica (AMT), busca-se determinar a resposta de um sistema de múltiplos graus de liberdade pela resolução inicial de um problema de autovalor, associado às equações de movimento do sistema. Então, usa-se a matriz modal resultante para desacoplar as equações de movimento interdependentes num conjunto de equações independentes, conhecidas como equações modais. Essas

equações podem ser resolvidas uma a uma e suas soluções reunidas para expressar a solução global.

Já a identificação das características dinâmicas de um sistema pela via experimental, através das informações fornecidas por funções resposta em frequência (FRFs) medidas, é conhecida como Análise Modal Experimental (AME). As FRFs medidas decorrem de sinais obtidos por sensores de excitação e resposta (vide FIGURA 4), processados, via de regra, por analisadores digitais de sinais. Os parâmetros modais desejados são extraídos por procedimentos que ajustam modelos previamente escolhidos aos dados experimentais (EWINS, 2000). A análise modal experimental é empregada nesta dissertação, como se verá posteriormente.

FIGURA 4 – ANÁLISE MODAL EXPERIMENTAL



FONTE: Adaptado de Costa (2017)

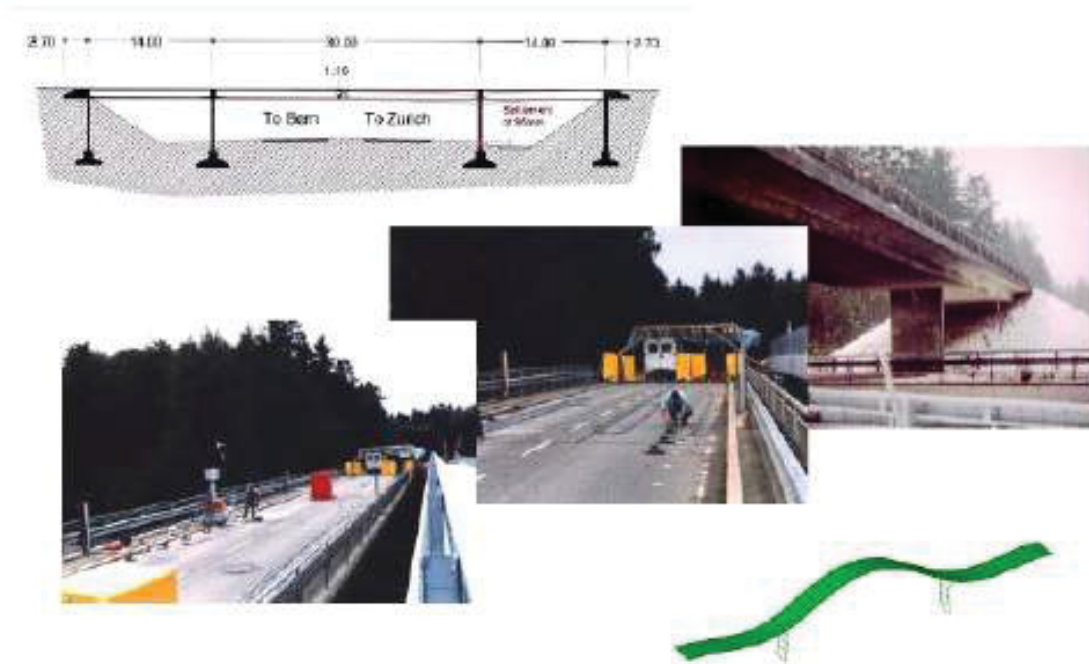
Por fim, na Análise Modal Operacional (AMO), também conhecida como análise de vibrações ambientais, ou de excitação natural, são utilizadas apenas as medições de resposta da estrutura em condições de operação (ou seja, sujeitas a situações ambientais ou naturais, como vento, tráfego e tremores) para identificar as características modais. Esta técnica é amplamente utilizada em estruturas de grande porte (vide FIGURA 5).

2.2.2 Funções Resposta em Frequência

A equação de movimento de um sistema discreto com múltiplos graus de liberdade, amortecimento viscoso e sujeito a excitações externas, pode ser analisada no domínio da frequência através da transformada de Fourier.

Tem-se, assim, que

FIGURA 5 – ANÁLISE MODAL OPERACIONAL - HIGHWAY BRIDGE (ZURIQUE, SUÍÇA)



FONTE: Adaptado de Costa (2017)

$$\begin{aligned}
 [M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} &= \{f(t)\} \rightarrow \\
 \rightarrow -\omega^2 [M]\{\bar{X}(\omega)\} + i\omega [C]\{\bar{X}(\omega)\} + [K]\{\bar{X}(\omega)\} &= \{\bar{F}(\omega)\}
 \end{aligned}
 \quad (2.10)$$

onde

- [C] → Matriz de amortecimento viscoso;
- $\{f(t)\}$ → Vetor de excitação (forças e/ou momentos);
- ω → Frequência (em rad/s);
- $\bar{X}(\omega)$ → Vetor de deslocamento no domínio da frequência;
- $\bar{F}(\omega)$ → Vetor de excitação no domínio da frequência.

Sendo agora o ponto de excitação designado pelo subscrito $_r$ e o ponto de resposta designado pelo subscrito $_s$, tem-se, então, as seguintes funções:

- Receptância¹

$$\bar{R}(\omega)_{sr} = \frac{\bar{X}_s(\omega)}{\bar{F}_r(\omega)} \quad (2.11)$$

¹ Alguns autores também utilizam $\bar{H}(\omega)$ para representar receptância.

- Mobilidade

$$\bar{M}(\omega)_{sr} = \frac{\bar{X}_{V,s}(\omega)}{\bar{F}_r(\omega)} = \frac{i\omega\bar{X}_s(\omega)}{\bar{F}_r(\omega)} \quad (2.12)$$

- Inertância

$$\bar{I}(\omega)_{sr} = \frac{\bar{X}_{A,s}(\omega)}{\bar{F}_r(\omega)} = \frac{-\omega^2\bar{X}_s(\omega)}{\bar{F}_r(\omega)} \quad (2.13)$$

onde $\bar{X}_V$ e $\bar{X}_A$ são, pela ordem, os vetores de velocidade e aceleração no domínio da frequência. Todas essas funções, ditas funções resposta em frequência, são, para sistemas com múltiplos graus de liberdade, elementos de matrizes. Dessa forma, tem-se, respectivamente, as matrizes de receptância $[\bar{R}(\omega)]$, mobilidade $[\bar{M}(\omega)]$ e inertância $[\bar{I}(\omega)]$. Já as matrizes inversas associadas são

- Rigidez dinâmica $[\bar{S}(\omega)] \rightarrow$ Inversa da Receptância $[\bar{R}(\omega)]$

$$[\bar{S}(\omega)] = [\bar{R}(\omega)]^{-1} \quad (2.14)$$

- Impedância Mecânica $[\bar{Z}(\omega)] \rightarrow$ Inversa da Mobilidade $[\bar{M}(\omega)]$

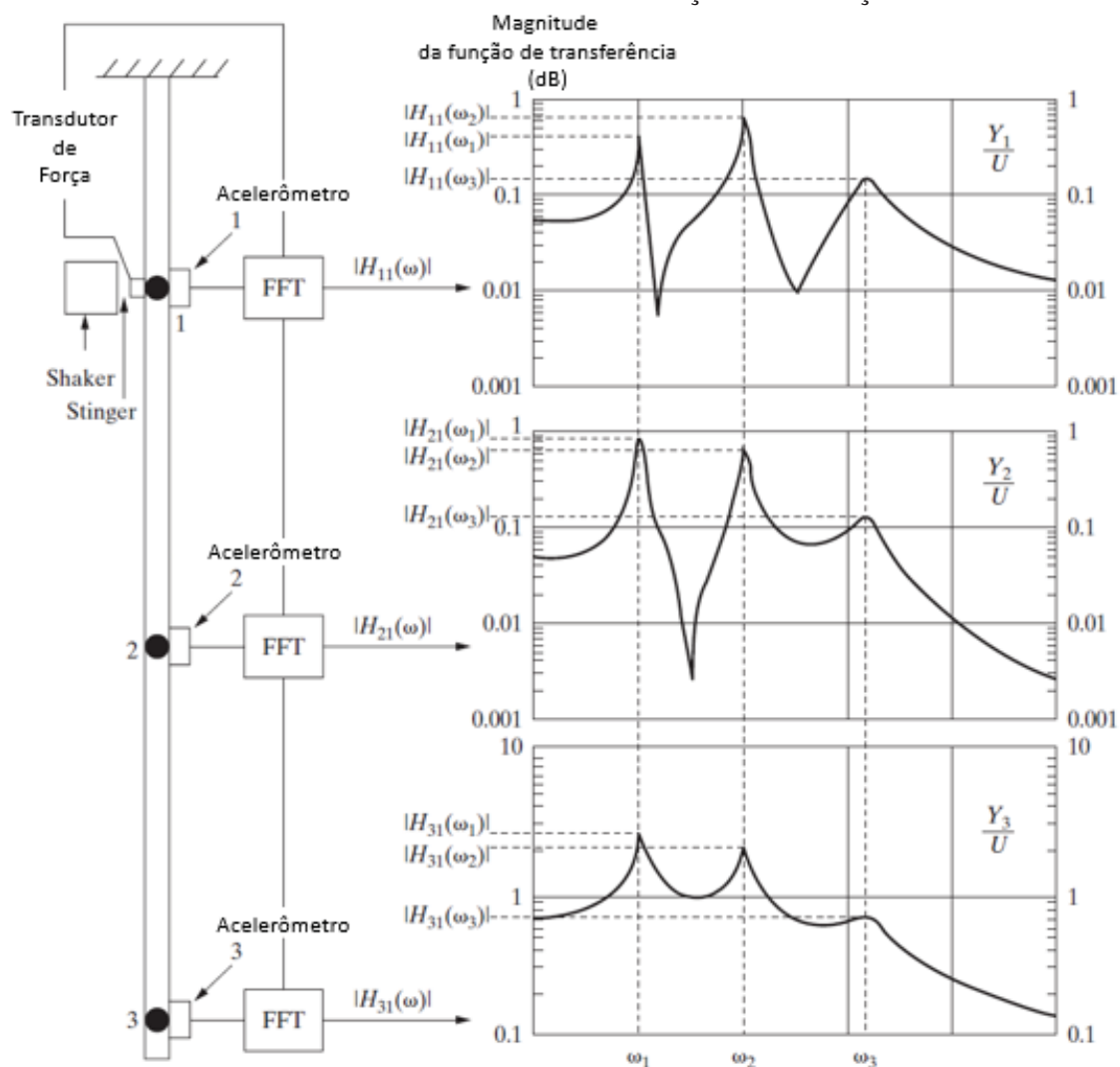
$$[\bar{Z}(\omega)] = [\bar{M}(\omega)]^{-1} \quad (2.15)$$

- Massa dinâmica $[\bar{Y}(\omega)] \rightarrow$ Inversa da Inertância $[\bar{I}(\omega)]$

$$[\bar{Y}(\omega)] = [\bar{I}(\omega)]^{-1} \quad (2.16)$$

As FRFs constituem a 'matéria prima' para os métodos de AME no domínio da frequência. Embora suas formas gerais se alterem, conforme os pontos de excitação e resposta (vide FIGURA 6), seus picos de máxima amplitude ocorrem nas mesmas frequências ditas frequências de ressonância. Em sistemas fracamente amortecidos, como vigas metálicas, essas frequências podem ser empregadas como estimativas para as frequências naturais do sistema, ao passo que o método da banda de $-3dB$ (descrito adiante) pode ser aplicado no entorno das regiões de ressonância para se estimar as razões de amortecimento (EWINS, 2000).

FIGURA 6 – DIFERENTES PONTOS DE EXCITAÇÃO E MEDIÇÃO EM UMA AME



FONTE: Inman (1994)

2.3 INSERÇÃO DE AMORTECIMENTO

Em seções anteriores, considerou-se, inicialmente, a modelagem dinâmica sem amortecimento. Depois, considerou-se a inserção de amortecimento viscoso. Nesta seção, a questão do amortecimento é aprofundada, com foco no que é empregado na dissertação.

2.3.1 Modelos de amortecimento

A inserção de amortecimento pode se dar, de forma conveniente, pela consideração dos seguintes modelos:

- Amortecimento Viscoso

Amortecimento viscoso é o modelo de amortecimento mais comumente usado em análise de vibrações. No caso de um sistema com 1 GDL, a força viscosa (f_v) é considerada como diretamente proporcional à velocidade do sistema, opondo-se ao movimento, de modo que

$$f_v = c\dot{x} \quad (2.17)$$

A equação de movimento fica dada, para um sistema com massa m e constante de rigidez k

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (2.18)$$

- Amortecimento Histerético

O amortecimento histerético, também conhecido como amortecimento estrutural, deve-se basicamente às fricções internas geradas durante o movimento. Neste tipo de amortecimento, de novo para um sistema com 1 GDL, a força de atrito é diretamente proporcional à velocidade e inversamente proporcional à frequência. Considerando a constante de amortecimento estrutural h , a força de atrito f_{at} é expressa por

$$f_{at} = \frac{h}{\omega} \dot{x} \quad (2.19)$$

Para um sistema de 1 GDL, a equação de movimento pode ser dada, então, por

$$m\ddot{x}(t) + \frac{h}{\omega} \dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (2.20)$$

ou, alternativamente, por

$$m\ddot{x}(t) + (k + ih)x(t) = f(t) \quad (2.21)$$

Para sistemas com múltiplos graus de liberdade, tem-se, em correspondência para os modelos de amortecimento viscoso e histerético, as seguintes equações de movimento:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.22a)$$

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + ([K] + i[H])\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (2.22b)$$

Nessas equações, tem-se que

- $m \rightarrow$ Massa;
- $[M] \rightarrow$ Matriz de massa;
- $\ddot{x} \rightarrow$ Aceleração;
- $\{\ddot{x}\} \rightarrow$ Vetor de aceleração;
- $c \rightarrow$ Amortecimento viscoso;
- $[C] \rightarrow$ Matriz de amortecimento viscoso;
- $\dot{x} \rightarrow$ Velocidade;
- $\{\dot{x}\} \rightarrow$ Vetor de velocidade;
- $h \rightarrow$ Amortecimento histerético;
- $[H] \rightarrow$ Matriz de amortecimento histerético;
- $k \rightarrow$ Rigidez;
- $[K] \rightarrow$ Matriz de rigidez;
- $x \rightarrow$ Deslocamento;
- $\{x\} \rightarrow$ Vetor de Deslocamento;
- $f \rightarrow$ Força;
- $\{f\} \rightarrow$ Vetor de força.

2.3.2 Amortecimento Proporcional

É conveniente utilizar, na resolução das EQUAÇÕES 2.22a e 2.22b, uma hipótese conhecida como amortecimento proporcional. Tem-se, assim, as seguintes matrizes:

- Amortecimento viscoso

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2.23)$$

- Amortecimento histerético

$$[H] = \gamma[K] \quad (2.24)$$

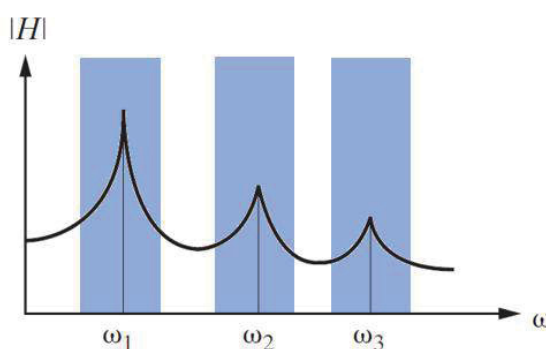
Os valores das constantes α , β e γ são determinados na etapa de atualização e validação do modelo elaborado, comparando as curvas obtidas numericamente via MEF com as obtidas experimentalmente via AME. Atualização e validação são abordadas mais adiante neste capítulo.

2.3.3 Método da Banda de Meia Potência (-3 dB)

Geralmente, a FRF obtida para AME é a inertância, pois o sensor mais usual na análise é o acelerômetro. É imediata a obtenção de uma FRF a partir da outra, como mostram as EQUAÇÕES 2.11, 2.12 e 2.13. A partir das FRFs levantadas experimentalmente, um método simples de se estimar as razões de amortecimento é o método da banda de meia potência (-3 dB), descrito abaixo. Essas estimativas podem, então, ser usadas para orientar a inserção de amortecimento num modelo numérico, como é feito no presente trabalho.

Sabe-se que, para estruturas e sistemas mecânicos com amortecimento relativamente baixo e ressonâncias espaçadas, como ilustrado na curva de módulo de FRF da FIGURA 7², o comportamento dinâmico nas proximidades de uma ressonância é dominado pelo modo de vibração correspondente Inman (1994). Dessa maneira, pode-se considerar que, em cada uma dessas regiões, a estrutura ou sistema mecânico de interesse se comporta como um sistema com 1 GDL, sendo possível extrair a frequência natural e a razão de amortecimento associadas.

FIGURA 7 – MÓDULO DE FRF COM RESSONÂNCIAS ESPAÇADAS



FONTE: Adaptado de Inman (1994)

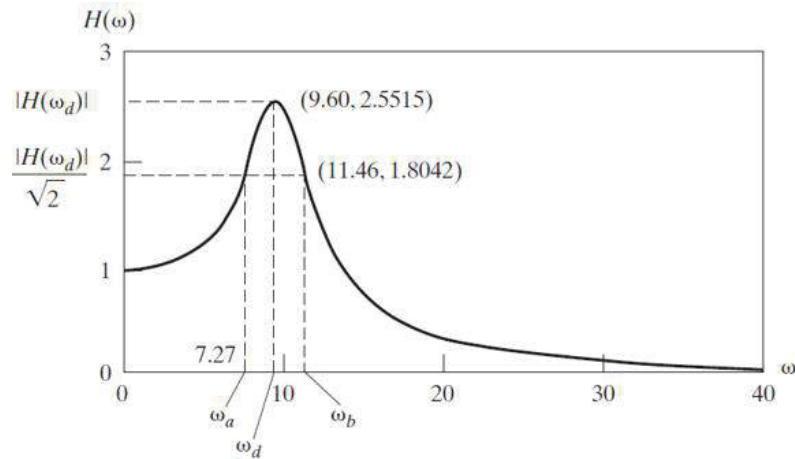
Considere-se, então, a FIGURA 8, onde uma região de ressonância é abordada. Nessa região, são indicadas as seguintes informações:

- ω_a Frequência a ;
- $|H(\omega_a)|$ Módulo da receptância na frequência ω_a ;

² Inman (1994) utiliza $H(\omega)$ para receptância, em vez de $\bar{R}(\omega)$.

- ω_b Frequência b ;
- $|H(\omega_b)|$ Módulo da receptância na frequência ω_b ;
- ω_d Frequência de ressonância (máxima amplitude na FRF);
- $|H(\omega_d)|$ Módulo da receptância na frequência de ressonância.

FIGURA 8 – REGIÃO DE RESSONÂNCIA



FONTE: Inman (1994)

Observa-se, na FIGURA 8, que

$$|H(\omega_a)| = |H(\omega_b)| = \frac{|H(\omega_d)|}{\sqrt{2}} \quad (2.25)$$

Como se assume baixo amortecimento, pode-se considerar que (INMAN, 1994)

$$\omega_n \approx \omega_d \quad (2.26)$$

Assim, a razão de amortecimento modal (ζ) pode ser calculada por (INMAN, 1994)

$$\zeta = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_d} \quad (2.27)$$

Esse método é dito método da banda de de meia potência, ou método da banda -3 dB pois dividir o valor do módulo da receptância na frequência de ressonância ($|H(\omega_d)|$) por $\sqrt{2}$ equivale a reduzir 3 dB desse valor de pico, quando se usa escala logarítmica.

Ainda no contexto da divisão de uma FRF em pequenas faixas de frequência em torno de ressonâncias, em que, para cada uma, ($\omega_n \approx \omega_d$) tem-se que o valor da receptância, numa dada frequência natural, pode ser aproximado por (INMAN, 1994)

$$H_{sr}(\omega_{n_j}) \approx \frac{[u_j u_j^T]_{sr}}{(\omega_{n_j}^2 - \omega_{n_j}^2) + i(\zeta_j \omega_{n_j} \omega_{n_j})} = \frac{u_{sj} u_{rj}}{i(2\zeta_j \omega_{n_j}^2)} \quad (2.28)$$

onde, recordando que r corresponde ao ponto de excitação e s ao ponto de resposta e considerando que os modos de vibrar podem ser alocados, em colunas, numa matriz dita matriz modal, tem-se que

- $[u_j]$ → j -ésima coluna da matriz modal (j -ésimo modo de vibrar);
- $[u_j]^T$ → j -ésima coluna da matriz modal transposta;
- $[u_{sj}]$ → Componente na linha s e coluna j da matriz modal;
- $[u_{rj}]$ → Componente na linha r e coluna j da matriz modal;
- ζ_j → j -ésima de amortecimento modal;
- $[\omega_{n_j}]$ → j -ésima frequência natural.

Como mencionado na seção 2.2, as curvas de FRF diferem conforme os pontos de excitação e resposta mudam. Porém, os valores de frequências naturais (ω_n) e razões de amortecimento (ζ) independem desses pontos em particular, pois são características do sistema sob investigação.

2.4 ATUALIZAÇÃO E VALIDAÇÃO VIA OTIMIZAÇÃO

O que se busca, ao validar um modelo, é torná-lo fidedigno, de modo a representar satisfatoriamente o sistema investigado, nas condições de interesse. Concebido o modelo, as respostas obtidas com seu auxílio são comparadas com medições efetuadas. Em decorrência dessas comparações, alterações podem ser introduzidas no modelo e o processo repetido, até que uma correlação adequada entre resultados matemáticos/numéricos e experimentais seja alcançada.

As alterações a serem introduzidas em um modelo podem se dar por tentativa e erro, com, por exemplo, valores de parâmetros estruturais sendo variados, até que se alcance a representação desejada. Contudo, a inserção de alterações pode ser realizada de forma mais sistemática via atualização estrutural. Na atualização estrutural, um modelo numérico é aperfeiçoado de forma judiciosa, selecionando-se previamente os parâmetros a serem alterados e usando dados adquiridos em medições para, por técnicas de otimização, estimar os valores dos parâmetros que minimizem as diferenças entre resultados numéricos e experimentais.

2.4.1 Elementos de um Problema de Otimização

Técnicas de Otimização não Lineares (TONL) são ferramentas valiosas para essas situações. Além de maximizarem (ou, de forma correspondente, minimizarem) funções, podem também, eventualmente, limitar o valor de parâmetros (variáveis de projeto) numa dada faixa de valores pré estabelecidos (espaço de projeto viável). Dentre as várias técnicas disponíveis vide (RAO, 2019), são empregadas nesta dissertação, de forma associada e sequencial, algoritmos genéticos e programação quadrática sequencial, posto que essa abordagem tem se mostrado muito eficaz (MEDEIROS JÚNIOR et al., 2019). Algumas características dessas técnicas são elencadas mais adiante, após se discorrer sobre os elementos de um problema de otimização.

2.4.1.1 Variáveis de Projeto

A ideia de atualizar, por otimização, o modelo numérico de uma estrutura implica em alterar grandezas associadas com o modelo. O conjunto de grandezas escolhidas para a atualização é chamado de vetor de variáveis de projeto. De forma genérica, esse vetor pode ser indicado pelo vetor $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, onde n é o número total de variáveis de projeto de um dado problema. O conjunto de valores resultantes do processo de otimização é chamado de **ponto ótimo** e também pode ser representado por um vetor, qual seja, $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ (KIRSCH, 1993).

2.4.1.2 Função Objetivo

A noção de otimização implica a existência de uma função que pode ser utilizada como medida de eficácia para a busca desejada. A esta função é dado o nome de função objetivo $f(x)$. Um problema de otimização pode ser formulado com um objetivo único ou com múltiplos objetivos.

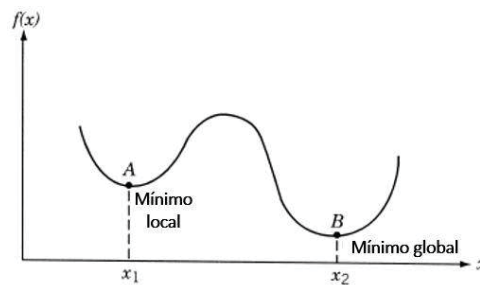
A respeito da solução (ou do conjunto de soluções) que pode ser encontrada, é interessante ressaltar as seguintes designações:

- Ótimo local $\rightarrow$ melhor solução encontrada em uma região específica do espaço de busca;
- Ótimo global $\rightarrow$ melhor solução encontrada em todo o espaço de busca.

Essas designações são ilustradas, para pontos de mínimo, na FIGURA 9.

Nem todas as técnicas de otimização garantem que a solução encontrada será a ótima global. A grande maioria converge apenas para uma solução mais próxima ao ponto inicial, ou seja, uma solução ótima local (ARORA, 2012)

FIGURA 9 – MÍNIMO LOCAL × MÍNIMO GLOBAL



FONTE: Adaptado de Rao (2019)

2.4.1.3 Funções de Restrições

Em muitos problemas, dos mais variados campos da engenharia, algumas condições são impostas de modo a limitar o espaço de busca a valores factíveis ou, de alguma forma, condicionados. Estas condições são denominadas **funções de restrições**, que, segundo Arora (2012), podem ser divididas da seguinte maneira:

- Geométricas;
- De comportamento;
- De igualdade;
- De desigualdade.

2.4.1.4 Formulação do Problema

De maneira geral, um problema de otimização pode ser formulado da seguinte maneira:

- Minimize $f(x)$
- Sujeito a
 - $g_j(x) \leq 0, j = 1 \cdots p;$
 - $h_k(x) = 0, k = 1 \cdots q;$
 - $x_j^L \leq x_i \leq x_i^U, i = 1 \cdots n.$

onde

- | | |
|--------|---|
| x | → Vetor das variáveis de projeto; |
| $f(x)$ | → Função objetivo; |
| $g(x)$ | → Vetor das restrições de desigualdades; |
| $h(x)$ | → Vetor das restrições de igualdades; |
| x^L | → Vetor de limites inferiores dos vetores das variáveis de projeto; |
| x^U | → Vetor de limites superiores dos vetores das variáveis de projeto. |

2.4.2 Técnicas Empregadas

Como já exposto, duas TONL são empregadas no presente trabalho, de forma combinada. São elas algoritmos genéticos e programação quadrática sequencial. Algumas características dessas técnicas são mencionadas na sequência.

2.4.2.1 Algoritmos Genéticos

A grande vantagem de se trabalhar com métodos estocásticos/randômicos é que eles não convergem para um mínimo local do problema em análise, visando, de maneira geral, o mínimo global. O método do Algoritmo Genético (AG) foi desenvolvido no final da década de 60 por John Holland com base na evolução natural (teoria de Darwin), funciona dessa forma. A TABELA 1 apresenta alguns termos básicos relacionados com o método

TABELA 1 – TERMOS EMPREGADOS EM ALGORITMOS GENÉTICOS

Termo	Definição
Cromossomo	Cadeia de caracteres representando alguma informação relativa às variáveis do problema.
Gene	Unidade básica do cromossomo. Cada cromossomo tem um certo número de genes, descrevendo uma certa variável do problema.
População	Conjunto de cromossomos.
Geração	Número da iteração que o método executa.
Operações Genéticas	Operações às quais os cromossomos são submetidos.
Região Viável	Espaço que compreende as soluções possíveis ou viáveis do problema. É caracterizada pelas funções de restrição que definem as soluções.
Função Objetivo	Função a ser minimizada. Contém a informação numérica do desempenho de cada cromossomo na população.
Genótipo	Representa a informação contida nos cromossomos.

FONTE: Adaptado de CARBONO (2005)

No ambiente computacional MATLAB®, o método dos algoritmos genéticos encontra-se implementado na subrotina *ga*.

2.4.2.2 Programação Quadrática Sequencial (SQP)

Métodos de programação quadrática sequencial *Sequential Quadratic Programming Method* (SQP) são métodos de programação não lineares com restrições. Basicamente, esses métodos solucionam, em cada iteração, um subproblema interno de minimização ou maximização de uma função quadrática com restrições lineares

(TELES; GOMES, 2010; DUBEUX, 2005; SEVERO; GIRARDI, 2009). Há necessidade de se fornecer uma estimativa inicial da solução procurada, que, quando há associação com o método dos algoritmos genéticos, pode ser fornecida por este e, então, refinada.

No ambiente MATLAB®, a implementação correspondente é encontrada na subrotina *fmincon*.

2.5 MODIFICAÇÃO ESTRUTURAL POR NDV

Quando o principal problema é a vibração excessiva da estrutura analisada, duas linhas de ação principais podem ser consideradas. São elas:

1. Agir diretamente na fonte excitadora;
2. Modificar a estrutura.

Muitas vezes, agir na fonte excitadora é inviável. Deve-se, então, modificar a estrutura, alterando massa e/ou rigidez, adicionando amortecimento ou ainda inserindo dispositivos conhecidos como neutralizadores de vibração (MEAD, 1999). Tanto na adição de amortecimento quanto na inserção de neutralizadores, os materiais viscoelásticos desempenham papel de destaque. Esses materiais são abordados abaixo.

2.5.1 Materiais Viscoelásticos

Materiais viscoelásticos são amplamente usados no controle de vibrações, devido à sua versatilidade de confecção, aliada à sua capacidade de dissipação de energia (PRITZ, 2001). Como seu próprio nome indica, eles possuem tanto características viscosas (associadas à dissipação de energia) quanto elásticas (associadas ao armazenamento de energia). Dentre as medidas de controle de vibrações usando materiais viscoelásticos, destacam-se as camadas constritas e não constritas, os isoladores, os neutralizadores (abordados em seção subsequente) e os elos (NASHIF A. D. JONES; HENDERSON, 1985; MEAD, 1999).

Os principais fatores que alteram o comportamento dinâmico de um material viscoelástico são a temperatura e a frequência. Recorda-se que o comportamento dinâmico pode ser descrito em termos do módulo real de elasticidade e do correspondente fator de perda (NASHIF A. D. JONES; HENDERSON, 1985), que são ditas propriedades dinâmicas do material. As dependências em questão são tratadas a seguir.

2.5.1.1 Influência da Temperatura e Frequência

A temperatura é um fator que afeta severamente as propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos. Em uma faixa ampla de temperaturas, um material viscoelástico pode apresentar três tipos de comportamento diferentes, como ilustrado na FIGURA 10 (a). As regiões correspondentes são:

- Primeira região, ou região vítrea, onde o material atinge o máximo valor do módulo real de elasticidade e valores muito baixos de fator de perda;
- Segunda região, ou região de transição, onde o material atinge o máximo valor do fator de perda;
- Terceira região, ou região elástica, onde valores relativamente baixos de módulo real de elasticidade e fator de perda são observados.

Observa-se que, para materiais viscoelásticos ditos termoreologicamente simples, os efeitos da frequência são qualitativamente inversos aos efeitos da temperatura, como ilustrado na FIGURA 10(b). A ampla maioria de materiais viscoelásticos usados em controle de vibrações é termoreologicamente simples.

2.5.1.2 Representação de Propriedades Dinâmicas

Uma forma bastante usada para reunir as propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos é através da representação por módulos complexos. Esta representação evidencia, de forma conveniente e simultânea, as características conservativas (parte real) e dissipativas (parte imaginária) (SNOWDON, 1968). Por ela, tem-se, para os módulos de elasticidade longitudinal e de cisalhamento, que

$$\bar{E}(\omega, T) = E_R(\omega, T) + iE_I(\omega, T) = E_R(\omega, T) + i\eta_E(\omega, T) \quad (2.29a)$$

$$\bar{G}(\omega, T) = G_R(\omega, T) + iG_I(\omega, T) = G_R(\omega, T) + i\eta_G(\omega, T) \quad (2.29b)$$

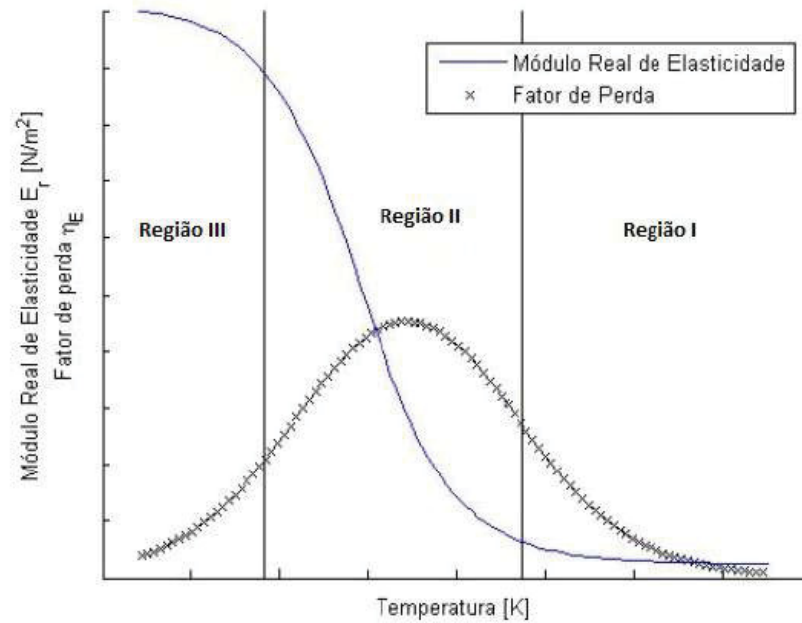
O fator de perda η corresponde à razão entre os módulos imaginário e real, de modo que

$$\eta_E = \frac{E_I(\omega, T)}{E_R(\omega, T)} \quad (2.30a)$$

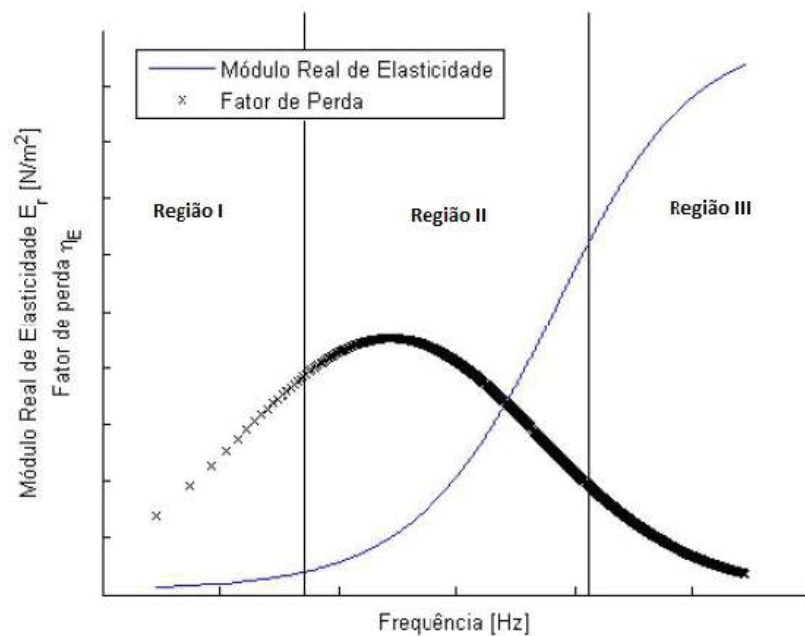
$$\eta_G = \frac{G_I(\omega, T)}{G_R(\omega, T)} \quad (2.30b)$$

FIGURA 10 – PROPRIEDADES DINÂMICAS DE UM MVE

(a) MÓDULO REAL DE ELASTICIDADE E FATOR DE PERDA PELA TEMPERATURA



(b) MÓDULO REAL DE ELASTICIDADE E FATOR DE PERDA PELA FREQUÊNCIA



FONTE: Adaptado de Rodrigues (2016)

onde

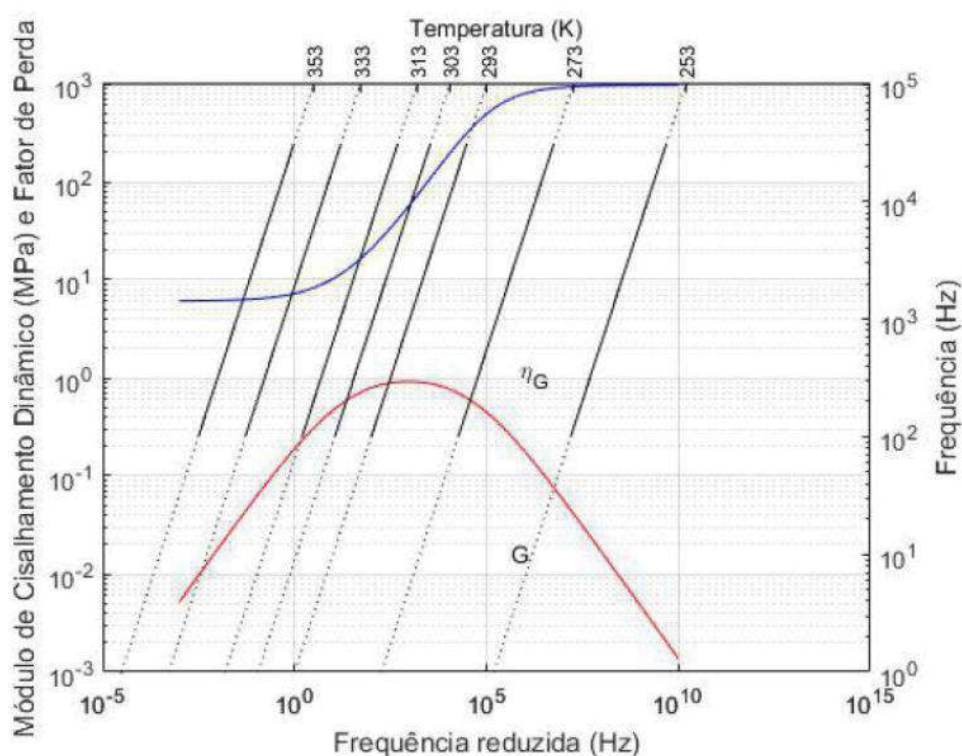
- $E_R(\omega, T)$ Módulo real de elasticidade longitudinal $\rightarrow$ Módulo real de elasticidade longitudinal;

- $E_I(\omega, T)$ Módulo imaginário de elasticidade longitudinal → Módulo imaginário de elasticidade longitudinal;
- $G_R(\omega, T)$ Módulo real de elasticidade ao cisalhamento → Módulo real de elasticidade ao cisalhamento;
- $G_I(\omega, T)$ Módulo imaginário de elasticidade ao cisalhamento → Módulo imaginário de elasticidade ao cisalhamento;
- $\eta_E(\omega, T)$ Fator de perda longitudinal → Fator de perda longitudinal;
- $\eta_G(\omega, T)$ Fator de perda ao cisalhamento → Fator de perda ao cisalhamento.

Quando se visa redução de vibração de um sistema nas regiões de ressonância, o ideal é trabalhar com uma grande dissipação de energia. Ou seja, com um alto valor de fator de perda, encontrado na região de transição das FIGURAS 10 (a) e 10 (b).

O conhecimento amplo das características de um material viscoelástico só pode ser alcançado após a realização de ensaios em amplas faixas de temperatura e frequência. (LOPES et al., 2004; MEDEIROS JÚNIOR et al., 2019). As propriedades dinâmicas levantadas nesses ensaios podem ser representadas graficamente em nomogramas, como ilustrado na FIGURA 11, e/ou através de modelos matemáticos. Uma abordagem largamente utilizada é a que associa o modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros com a equação Williams-Landel-Ferry (WLF), tal como apresentado abaixo na EQUAÇÃO 2.31 para o módulo complexo ao cisalhamento.

FIGURA 11 – NOMOGRAMA DE FREQUÊNCIA REDUZIDA



FONTE: A autora (2021)

$$\bar{G}(\omega, T) = \frac{G_0 + G_\infty \phi_0 (i\omega\alpha_T)^{\beta_\nu}}{1 + \phi_0 (i\omega\alpha_T)^{\beta_\nu}} \quad (2.31a)$$

$$\log_{10}(\alpha_T(T)) = \frac{-\theta_1(T - T_0)}{\theta_2 + (T - T_0)} \quad (2.31b)$$

Na EQUAÇÃO 2.31 tem-se que

- $\omega \rightarrow$ frequência (rad/s);
- $G_0 \rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} G_r(\omega, T_0)$, ou seja, é o valor assintótico do módulo real de cisalhamento para frequências muito baixas, (Pa);
- $G_\infty \rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} G_r(\omega, T_0)$, ou seja, é o valor assintótico do módulo real de cisalhamento para frequências muito altas, (Pa);
- $\phi_0 \rightarrow$ constante de relaxação, $(s)^{\beta_\nu}$;
- $\beta_\nu \rightarrow$ ordem da derivada fracionária, tal que $\beta_\nu \in (0, 1)$ (adimensional);
- $\alpha_T \rightarrow$ fator de deslocamento;
- T_0 Temperatura de referência, (K) $\rightarrow$ Temperatura de referência, (K);
- T Temperatura de operação, (K) $\rightarrow$ Temperatura de operação, (K);
- θ_1 Parâmetro a ser determinado na equação WLF $\rightarrow$ Parâmetro a ser determinado na equação WLF;
- θ_2 Parâmetro a ser determinado na equação WLF $\rightarrow$ Parâmetro a ser determinado na equação WLF.

2.5.2 Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos

Neutralizadores dinâmicos viscoelásticos constituem uma classe de dispositivos de controle de vibração que contêm elementos de materiais viscoelásticos. Eles, ao serem inseridos em sistemas mecânicos cuja vibração se deseja controlar, injetam significativa impedância mecânica nos pontos de fixação, com redistribuição e dissipação de energia de movimento ao longo da frequência.

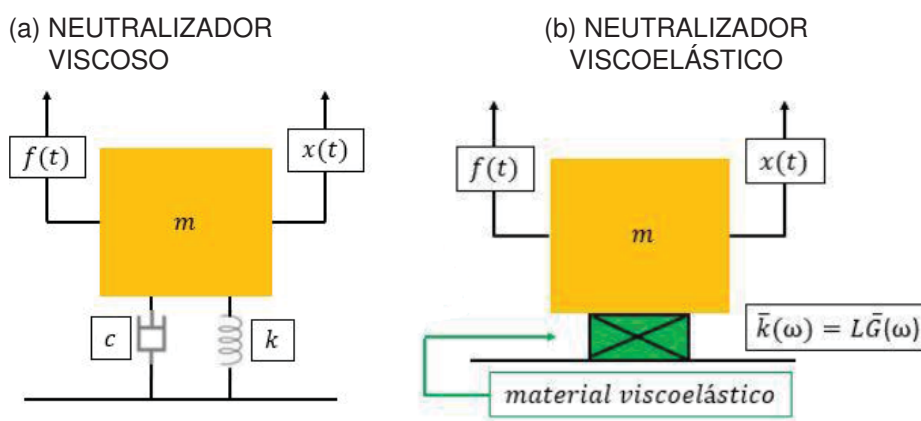
Snowdon (1968) foi um dos pioneiros no estudo dos materiais viscoelásticos em substituição aos elementos de amortecedor e mola no neutralizador dinâmico viscoso, cujo modelo é ilustrado na FIGURA 12 (a). Os materiais viscoelásticos, como já exposto, são de fácil fabricação, maleáveis e de baixo custo, apresentando, porém, forte dependência da temperatura e da frequência.

Um modelo de neutralizador viscoelástico está representado na FIGURA 12 (b). Nesta figura, tem-se que

- $\bar{k}(\omega)$ Rigidez dinâmica complexa → Rigidez dinâmica complexa;
- L Fator de forma → Fator de forma;
- $\bar{G}(\omega)$ Módulo de cisalhamento complexo → Módulo de cisalhamento complexo.

A rigidez do elemento viscoelástico do neutralizador é complexa pelo fato do módulo de elasticidade do Material Viscoelástico (MVE) empregado também ser complexo, tal como exposto anteriormente.

FIGURA 12 – MODELOS DE NEUTRALIZADOR VISCOSO E VISCOELÁSTICO



FONTE: Adaptado de Soares (2018)

A inserção de um neutralizador (sistema secundário) em uma estrutura vibrante (sistema primário) aumenta os graus de liberdade do sistema composto (estrutura + neutralizador), aumentando o grau de complexidade do problema. Espíndola e Silva (1992) desenvolveram uma técnica que permite descrever a dinâmica do sistema composto apenas em função das coordenadas generalizadas do sistema primário. Esta metodologia considera que a adição de neutralizadores não altera a dimensão das matrizes na equação de movimento do sistema composto, sendo denominada de Parâmetros Equivalentes Generalizados (PEGs).

A metodologia mencionada acima, inicialmente empregada para controle modo-a-modo, foi posteriormente expandida por Bavastri (1997) por controle em banda larga. Desde então, elas vem sido utilizadas com sucesso em várias ocasiões (RODRIGUES, 2016; BAVARESCO, 2019; SILVA, 2019). Ela também é empregada no programa computacional LAVIBS-ND[®], que, a partir dos parâmetros modais de um sistema mecânico linear de qualquer complexidade, fornece os parâmetros ótimos de um conjunto de neutralizadores dinâmicos para controle de vibrações daquele sistema. O programa LAVIBS-ND[®], já amplamente testado, é usado na presente dissertação tanto para a concepção de um NDV ótimo quanto para comparação de seus resultados com aqueles dos métodos aqui investigados.

3 REANÁLISE DE RESPOSTA

Por vezes, surgem problemas em estruturas e sistemas mecânicos, não antecipados na fase de projeto, havendo necessidade de se realizar modificações para sua correção. Alguns dos problemas que podem ser encontrados são:

- Regiões com falha, ou falta, de rigidez, com potencial para ruptura;
- Estrutura com ergonomia prejudicial para o usuário;
- Regiões com alta concentração de tensões;
- Presença de ressonância em condição de operação;
- Ruído excessivo devido a vibração.

Mesmo sem a presença de problemas, pode ser indicado realizar uma modificação para atualizar um projeto antiquado ou promover mudanças na sua aparência (BRANDON, 1990).

He (2001) relacionou algumas restrições que podem ser encontradas em modificações ditas estruturais. São elas:

- As modificações estruturais podem não ser viáveis ou práticas;
- A mudança no valor de um parâmetro pode ocasionar mudanças indesejadas na estrutura, pois todas as características estão interligadas;
- Existem certos limites que devem obrigatoriamente ser respeitados, como, por exemplo, massa total mínima.

Há métodos, ou técnicas, que buscam avaliar o efeito de modificações em estruturas e sistemas mecânicos fazendo uso de uma quantidade reduzida de informações, seja para diminuição do esforço computacional associado, seja pela própria indisponibilidade de informações complementares. Esses métodos são denominados, em geral, de métodos de reanálise, ou, em particular, de métodos de modificação estrutural dinâmica (BRANDON, 1990). Sua classificação geral é apresentada na sequência.

3.1 CLASSIFICAÇÃO GERAL

Segundo Brandon (1990), os métodos de reanálise podem ser classificados em função do modelo empregado para descrição do comportamento dinâmico da estrutura

ou sistema mecânico de interesse. São considerados, então, os modelos **modal** e de **resposta**. Uma divisão subsequente pode ainda ser feita, com base nas formas **exata** e **aproximada** de se construir e manipular os modelos expostos anteriormente. Tem-se, assim, a seguinte classificação geral:

1. Métodos modais

- a) Exatos;
- b) Aproximados.

2. Métodos de Resposta

- a) Exatos;
- b) Aproximados.

Os métodos modais fazem uso de modelos elaborados a partir de parâmetros modais, enquanto os métodos de resposta fazem uso direto de FRFs. Tanto num caso quanto no outro, os modelos podem ser construídos e manipulados de forma exata, a partir da Álgebra Linear, quanto de forma aproximada, empregando derivadas e séries. Segundo Brandon (1990), o termo reanálise é amplo e pode englobar todos os métodos, enquanto que o termo modificação estrutural dinâmica é mais utilizado para designar os métodos modais, ainda que não se deva considerar isso de forma estrita.

Nesta dissertação, são abordados dois métodos exatos de reanálise de resposta, que fazem uso direto de FRFs, em formulação matricial. Esses métodos lidam com uma quantidade reduzida de informações, associada, de um modo ou de outro, à região da estrutura ou sistema mecânico em que ocorre a modificação. Entende-se que esses métodos, expostos a seguir, ainda podem ser melhor explorados, particularmente em situações que requeiram o tratamento, por dispositivos viscoelásticos, de características de resposta insatisfatórias e localizadas, seja em frequência ou em posição.

3.2 MÉTODOS EXATOS DE REANÁLISE DE RESPOSTA

3.2.1 Método via partição matricial

Quando é realizada uma modificação, com dispositivos viscoelásticos, sob temperatura constante, pode-se alterar a matriz de massa, a matriz de rigidez e/ou a matriz de amortecimento. Sendo assim, têm-se, conforme o modelo de amortecimento empregado e por generalidade, que (BAVASTRI, 1997; LOPES, 1998)

- $[\Delta M(\omega)] \rightarrow$ Matriz de modificação de massa;
- $[\Delta C(\omega)] \rightarrow$ Matriz de modificação de amortecimento viscoso.
- $[\Delta H(\omega)] \rightarrow$ Matriz de modificação de amortecimento histerético;
- $[\Delta K(\omega)] \rightarrow$ Matriz de modificação de rigidez.

Essas modificações podem ser reunidas na matriz de modificação $[\Delta S(\omega)]$, que é dada, face à modelagem escolhida, por

$$[\Delta S(\omega)] = \left[-\omega^2 [\Delta M(\omega)] + i\omega [\Delta C(\omega)] + [\Delta K(\omega)] \right] \quad (3.1a)$$

$$[\Delta S(\omega)] = \left[-\omega^2 [\Delta M(\omega)] + i [\Delta H(\omega)] + [\Delta K(\omega)] \right] \quad (3.1b)$$

Resulta, então, que a matriz de receptância modificada, $[R(\omega)]^*$, é dada por

$$[R(\omega)]_{n \times n}^* = \left[[S(\omega)]_{n \times n} + [\Delta S(\omega)]_{n \times n} \right]_{n \times n}^{-1} \quad (3.2)$$

em que a matriz de rigidez dinâmica $[S(\omega)] = [R(\omega)]^{-1}$, de modo que a matriz de receptância original $[R(\omega)] = [S(\omega)]^{-1}$, sendo n o número de GDL do sistema.

Considerando uma modificação localizada, de ordem r , a matriz de modificação $[\Delta S(\omega)]$ possui a seguinte forma:

$$[\Delta S(\omega)]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & [\Delta S(\omega)]_{r \times r} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Então, as matrizes $[R(\omega)]^*$, $[R(\omega)]$ e $[\Delta S(\omega)]$ na EQUAÇÃO 3.2 podem ser particionadas, separando-se as coordenadas conectadas à modificação, associada ao daquelas não conectadas, associadas ao subscrito 1. Assim sendo,

$$[R(\omega)]_{n \times n}^* = \begin{bmatrix} R^*(\omega)_{11} & R^*(\omega)_{12} \\ R^*(\omega)_{21} & R^*(\omega)_{22} \end{bmatrix} \quad (3.4a)$$

$$[R(\omega)]_{n \times n} = \begin{bmatrix} R_{11}(\omega) & R_{12}(\omega) \\ R_{21}(\omega) & R_{22}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.4b)$$

$$[\Delta S(\omega)]_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\Delta S(\omega)]_{22} \end{bmatrix} \quad (3.4c)$$

Pode-se mostrar, como visto a seguir, que a partição da matriz de receptância modificada, correspondente apenas às coordenadas associadas à modificação, é dada por (RODRIGUES, 2016)

$$[R(\omega)]_{22}^* = \left[[R(\omega)]_{22}^{-1} + [\Delta S(\omega)]_{22} \right]^{-1} \quad (3.5)$$

onde $[\Delta S(\omega)]_{22} = [\Delta S(\omega)]_{r \times r}$, sendo r a ordem de modificação realizada, como já antecipado.

Para provar a relação acima, omite-se, por simplicidade, a dependência da frequência. Recorda-se, da EQUAÇÃO 3.2, que

$$[R]^* = \left[[S] + [\Delta S] \right]^{-1}$$

Evidenciando a matriz $[S]$, obtém-se

$$[R]^* = \left[[S] \left([I] + [S]^{-1} [\Delta S] \right) \right]^{-1} \quad (3.6)$$

Realizando a inversa da expressão entre colchetes e recordando que $[R] = [S]^{-1}$, tem-se, sucessivamente, que

$$\begin{aligned} [R]^* &= \left([I] + [S]^{-1} [\Delta S] \right)^{-1} [S]^{-1} \\ [R]^* &= \left([I] + [R] [\Delta S] \right)^{-1} [R] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ou seja, para $[R]^*$, $[R]$, $[\Delta S]$ de ordem n e $[\Delta S_{22}]$ de ordem r , decorre que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{11}^* & R_{12}^* \\ R_{21}^* & R_{22}^* \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I_{n-r} & 0_{(n-r) \times r} \\ 0_{r \times (n-r)} & I_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n-r} & 0_{(n-r) \times r} \\ 0_{r \times (n-r)} & \Delta S_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} I_{n-r} & 0_{(n-r) \times r} \\ 0_{r \times (n-r)} & I_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n-r} & R_{12} \Delta S_{22} \\ 0_{r \times (n-r)} & R_{22} \Delta S_{22} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{n-r} & R_{12} \Delta S_{22} \\ 0_{r \times (n-r)} & (I_r + R_{22} \Delta S_{22}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Observa-se que, acima, $[I]$ indica a matriz identidade e $[0]$ a matriz nula.

Sabe-se que a inversa $[A]^{-1}$ de uma matriz $[A]$, particionada como

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

pode ser expressa por (BIERENS, 2014)

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Aplicando a EQUAÇÃO 3.10 na EQUAÇÃO 3.8, chega-se a

$$[R]^* = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} [R]$$

onde

- $[B_{11}] = [I_{n-r} - R_{12}\Delta S_{22}(I_r + R_{22}\Delta S_{22})^{-1}0_{r \times (n-r)}]^{-1}$
- $[B_{12}] = -I_{n-r}R_{12}\Delta S_{22}[(I_r + R_{22}\Delta S_{22}) - 0_{r \times (n-r)}I_{n-r}^{-1}R_{12}\Delta S_{22}]^{-1}$
- $[B_{21}] = -(I_r + R_{22}\Delta S_{22})^{-1}0_{r \times (n-r)}[I_{n-r} - R_{12}\Delta S_{22}(I_r + R_{22}\Delta S_{22})^{-1}0_{r \times (n-r)}]^{-1}$
- $[B_{22}] = [(I_r + R_{22}\Delta S_{22}) - 0_{r \times (n-r)}I_{n-r}^{-1}R_{12}\Delta S_{22}]^{-1}$

Assim sendo,

$$[R]^* = \begin{bmatrix} I_{n-r} & -R_{12}\Delta S_{22}(I_r + R_{22}\Delta S_{22})^{-1} \\ 0_{r \times (n-r)} & (I_r + R_{22}\Delta S_{22})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

donde se observa que

$$[R_{22}]^* = [I_r + R_{22}\Delta S_{22}]^{-1} [R_{22}] \quad (3.12)$$

A EQUAÇÃO 3.12 pode ser manipulada da seguinte forma (em que a notação matricial está implícita):

$$\begin{aligned} R_{22}^* &= (R_{22}R_{22}^{-1} + R_{22}\Delta S_{22})^{-1}R_{22} \\ R_{22}^* &= [R_{22}(R_{22}^{-1} + \Delta S_{22})]^{-1}R_{22} \\ R_{22}^* &= (R_{22}^{-1} + \Delta S_{22})^{-1}R_{22}^{-1}R_{22} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Da EQUAÇÃO 3.13, resulta que

$$[R_{22}]^* = [R_{22}^{-1} + \Delta S_{22}]^{-1} \quad (3.14)$$

provando, de forma concisa, o exposto na EQUAÇÃO 3.5.

Ou seja, as funções componentes da nova matriz de receptância, associadas apenas às coordenadas generalizadas conectadas à modificação localizada, podem ser obtidas a partir das funções componentes correspondentes da matriz de receptância original e das funções componentes da submatriz de rigidez dinâmica que contém as informações da modificação realizada, em forma equivalente ou não. Caso uma única coordenada generalizada seja afetada pela modificação, a EQUAÇÃO 3.14 assume sua forma mais simples.

Destaca-se que, no método da partição matricial, obtém-se especificamente uma partição da matriz de receptância modificada, qual seja, aquela associada apenas às coordenadas afetadas pela modificação. No APÊNDICE A, seção A.1, apresenta-se um exemplo numérico para ilustrar o método exposto acima. Na sequência, é apresentado um método em que toda a matriz de receptância modificada é obtida.

3.2.2 Método via produto matricial

Considere-se agora que a matriz de modificação passa ser expressa pelo seguinte produto:

$$[\Delta S(\omega)]_{n \times n} = [U(\omega)]_{n \times r} [V(\omega)]_{r \times n} \quad (3.15)$$

sendo $r \leq n$ (recorda-se que n é o número de GDL da estrutura ou sistema e r a ordem da modificação).

Mostra, então, que a matriz de receptância modificada $[R(\omega)]^*$ pode ser dada por (BRANDON, 1990)

$$[R(\omega)]_{n \times n}^* = [R(\omega)]_{n \times n} - \left[[R(\omega)]_{n \times n} [U(\omega)]_{n \times r} [W(\omega)]_{r \times r}^{-1} [V(\omega)]_{r \times n} [R(\omega)]_{n \times n} \right] \quad (3.16)$$

sendo que

$$[W(\omega)]_{r \times r} = [I_r] + \left[[V(\omega)]_{r \times n} [R(\omega)]_{n \times n} [U(\omega)]_{n \times r} \right] \quad (3.17)$$

onde

- $[R(\omega)]_{n \times n}$ → Matriz de receptância original;
- $[U(\omega)]_{n \times r}$ → Primeira matriz do produto matricial;
- $[V(\omega)]_{r \times n}$ → Segunda matriz do produto matricial;
- $[W(\omega)]_{r \times r}$ → Matriz auxiliar;
- $[I_r]$ → Matriz identidade de ordem r .

Para garantir maior eficiência computacional, é indicado que r seja muito menor que n .

Para modificações localizadas, pode-se separar os graus de liberdade envolvidos diretamente dos não envolvidos (vide indicação dos subscritos correspondentes na subseção anterior), de modo que

$$\begin{Bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{Bmatrix}^* = \left(\begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta S_{22}(\omega) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{Bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

onde

- $X_i(\omega)^*$ → Vetor de novos deslocamentos ($i = 1, 2$);
- $[\Delta S_{22}(\omega)]$ → Partição não nula da matriz de modificação;
- $F_i(\omega)$ → Vetor de forças ($i = 1, 2$);
- $[S_{ij}(\omega)]$ → Submatrizes resultantes de uma partição da matriz de rigidez dinâmica, relativa aos graus de liberdades não envolvidos e envolvidos diretamente na modificação ($i, j = 1, 2$).

Nesse caso, da EQUAÇÃO 3.15 e da EQUAÇÃO 3.18, tem-se que

$$[\Delta S(\omega)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta S_{22}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

o que corresponde à fatoração

$$[\Delta S(\omega)]_{n \times n} = [U(\omega)]_{n \times r} [V(\omega)]_{r \times n}$$

com

$$[U(\omega)] = \begin{bmatrix} 0 \\ U_2(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.20a)$$

$$[V(\omega)] = \begin{bmatrix} 0 & V_2(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.20b)$$

Substituindo a EQUAÇÃO 3.20 na EQUAÇÃO 3.16, qual seja,

$$[R(\omega)]^* = [R(\omega)] - \left[[R(\omega)][U(\omega)][W(\omega)]^{-1}[V(\omega)][R(\omega)] \right]$$

pode-se escrever, sucessivamente, que

$$\begin{aligned} [R(\omega)]^* &= [R(\omega)] - \begin{bmatrix} R_{11}(\omega) & R_{12}(\omega) \\ R_{21}(\omega) & R_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_2(\omega) \end{bmatrix} [W(\omega)]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & V_2(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11}(\omega) & R_{12}(\omega) \\ R_{21}(\omega) & R_{22}(\omega) \end{bmatrix} \\ [R(\omega)]^* &= [R(\omega)] - \begin{bmatrix} R_{12}(\omega)U_2(\omega) \\ R_{22}(\omega)U_2(\omega) \end{bmatrix} [W(\omega)]^{-1} \begin{bmatrix} V_2(\omega)R_{21}(\omega) & V_2(\omega)R_{22}(\omega) \end{bmatrix} \\ [R(\omega)]^* &= [R(\omega)] - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

em que as partições da matriz A, agora, são dadas por

$$A_{11} = R_{12}(\omega)U_2(\omega)[W(\omega)]^{-1}V_2(\omega)R_{21}(\omega) \quad (3.22a)$$

$$A_{12} = R_{12}(\omega)U_2(\omega)[W(\omega)]^{-1}V_2(\omega)R_{22}(\omega) \quad (3.22b)$$

$$A_{21} = R_{22}(\omega)U_2(\omega)[W(\omega)]^{-1}V_2(\omega)R_{21}(\omega) \quad (3.22c)$$

$$A_{22} = R_{22}(\omega)U_2(\omega)[W(\omega)]^{-1}V_2(\omega)R_{22}(\omega) \quad (3.22d)$$

Alternativamente, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{11}(\omega) & R_{12}(\omega) \\ R_{21}(\omega) & R_{22}(\omega) \end{bmatrix}^* &= \begin{bmatrix} R_{11}(\omega) & R_{12}(\omega) \\ R_{21}(\omega) & R_{22}(\omega) \end{bmatrix} - \\ &\quad - \begin{bmatrix} R_{12}(\omega) \\ R_{22}(\omega) \end{bmatrix} [U_2(\omega)][W(\omega)]^{-1}[V_2(\omega)] \begin{bmatrix} R_{21}(\omega) & R_{22}(\omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $[W(\omega)]$, da EQUAÇÃO 3.17 e da EQUAÇÃO 3.20, corresponde a

$$[W(\omega)] = [I_r] + \begin{bmatrix} 0 & V_2(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11}(\omega) & R_{12}(\omega) \\ R_{21}(\omega) & R_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ U_2(\omega) \end{bmatrix}$$

$$[W(\omega)] = [I_r] + \begin{bmatrix} V_2(\omega)R_{22}(\omega)U_2(\omega) \end{bmatrix}$$

de modo que

$$[W(\omega)]^{-1} = \left[[I_r] + \left[V_2(\omega) R_{22}(\omega) U_2(\omega) \right] \right]^{-1} \quad (3.24)$$

A EQUAÇÃO 3.23 e a EQUAÇÃO 3.24 indicam que é possível determinar toda a matriz de receptância modificada com base no conhecimento da matriz de receptância original e das informações da modificação realizada na matriz de rigidez dinâmica original. O APÊNDICE A, na seção A.2, apresenta um exemplo numérico de aplicação do método, para fins de ilustração.

3.3 ESTUDOS CORRELATOS

Na década de 60, iniciaram-se os estudos sobre modificações estruturais. Weissenburger (1968) foi o pioneiro, partindo de estruturas mais simples, sem a presença de amortecimento no sistema. Na sequência, Pomazal e Snyder (1971) e Hallquist e Snyder (1973) estudaram estruturas amortecidas, tornando assim a modificação dinâmica estrutural (MDE) uma ferramenta de análise mais comum no final dos anos 70.

Özgüven (1984) desenvolveu uma técnica baseada na inversão de matrizes e com utilidade em sistemas com amortecimento geral, técnica essa semelhante ao método do produto matricial, que este trabalho aborda. Em sequência, Jones e Iberle (1986) realizaram comparação de várias técnicas de modificação estrutural.

Posteriormente, Özgüven (1987) desenvolveu uma nova técnica que evita a inversão de matrizes, face ao esforço computacional, apresentando um método mais simples e confiável para o estudo de sistemas amortecidos, de forma geral. Indo além, Özgüven (1990) estudou casos de modificação que adicionam GDL, a exemplo da inserção de neutralizadores.

Lopes (1998) avaliou três diferentes casos de modificação com dispositivos contendo material viscoelástico em uma estrutura de alumínio, utilizando a técnica de reanálise de resposta via produto matricial. Nesse trabalho, foram empregadas tanto receptâncias numéricas quanto experimentais.

Avitabile (2003) enfatiza que os principais erros encontrados em abordagens modais aproximadas são decorrentes do truncamento dos modos. Ressalta também que as demais fontes de erro, tais como a negligência dos graus de liberdade rotacionais do sistema (característica complexa de se obter experimentalmente) ou a modelagem incorreta do amortecimento, não devem ser menosprezadas.

Já Rodrigues (2016) emprega o método da partição matricial no projeto de um neutralizador viscoelástico com múltiplos graus de liberdade. O neutralizador é

aplicado no controle de vibrações de uma viga engastada-livre, ao longo de uma faixa de frequências.

Jafri e Mohammad (2017) utilizam uma técnica de modificação estrutural dinâmica estrutural (MED) que engloba a modificação em todos os termos da estrutura, isto é, nos componentes de massa ($[M]$), rigidez ($[K]$) e amortecimento ($[H]$), considerado como amortecimento histerético. Modificações específicas, porém, são analisadas separadamente, com apresentação dos resultados gráficos das receptâncias do sistema modificado ($R^*(\omega)$) e do sistema original ($R(\omega)$). Cada modificação realizada também é comentada separadamente.

Zuo et al. (2016) discorrem sobre a técnica de Combinação Aproximada (CA) que pode ser incluída no campo da reanálise aproximada, através do uso de sensibilidades (ou seja, derivadas da função considerada, com relação a um certo parâmetro de interesse). Tal técnica foi aplicada na estrutura metálica de um ônibus e demonstrou erros em uma faixa de 1%, que é um valor bastante aceitável.

Tsai, Ouyang e Chang (2018) desenvolveram estudos sobre uma técnica de modificação estrutural dinâmica, de forma prática, em rotores. A abordagem adotada tratava a modificação de forma ampla, ou seja, nas matrizes de massa ($[M]$), rigidez ($[K]$) e amortecimento ($[C]$). Porém pela dificuldade de execução prática, demonstrou-se apenas a modificação de massa na estrutura do rotor, inserindo arruelas em sua extremidade. Foram expostos os resultados encontrados, comparando-os com os obtidos pela via tradicional e, ao final, concluiu-se que o método empregado é bastante satisfatório.

Caixu et al. (2019) realizaram um estudo apurado sobre uma forma de vibração típica de máquinas-ferramenta, o "*chatter*", investigado, no caso, em operações de fresamento. Utilizaram técnicas de MED e AME, bem como o MEF, para realizar uma comparação na eficiência entre métodos de controle passivo, controle híbrido e controle semi-adaptativo. A modificação estrutural presente no sistema diz respeito a massa da peça usinada, onde o processo de fresamento retira material (massa) da estrutura.

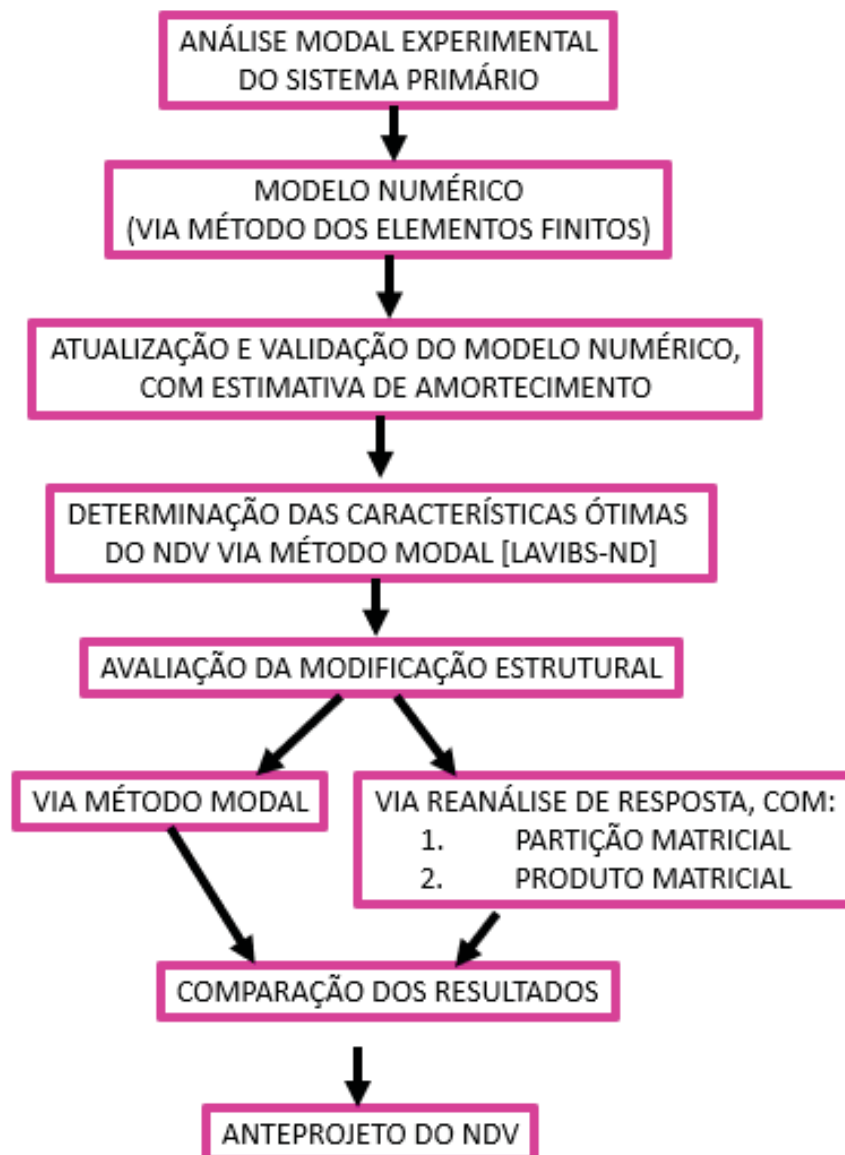
4 MATERIAIS E MÉTODOS

Este capítulo apresenta os materiais e métodos empregados na dissertação, contemplando todas as etapas envolvidas.

4.1 ETAPAS DO DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

As etapas envolvidas no desenvolvimento da dissertação são relacionadas no fluxograma da FIGURA 13. Detalhes relativos a essas etapas são expostos de forma particularizada nas seções subsequentes.

FIGURA 13 – ETAPAS DO DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

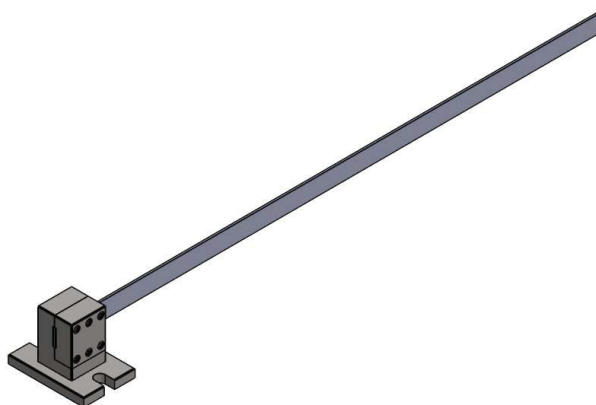


FONTE: A autora (2021)

4.2 SISTEMA PRIMÁRIO

O sistema primário utilizado foi a viga engastada-livre representada na FIGURA 14, com as características listadas na TABELA 2. O suporte que simula o engaste da viga retira 100 mm de seu comprimento, então o seu comprimento livre é 1500 mm. A viga engastada-livre, já em sua realização física, é mostrada na FIGURA 14.

FIGURA 14 – REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA PRIMÁRIO



FONTE: Soares (2018)

TABELA 2 – CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA PRIMÁRIO

CARACTERÍSTICA	UNIDADE	VALOR
COMPRIMENTO	mm	1600
LARGURA	mm	50
ESPESSURA	mm	7,94
DENSIDADE	kg/mm ³	$7,86 \times 10^{-6}$
VOLUME	mm ³	$5,95 \times 10^5$
MASSA	kg	4,68

FONTE: A Autora (2021)

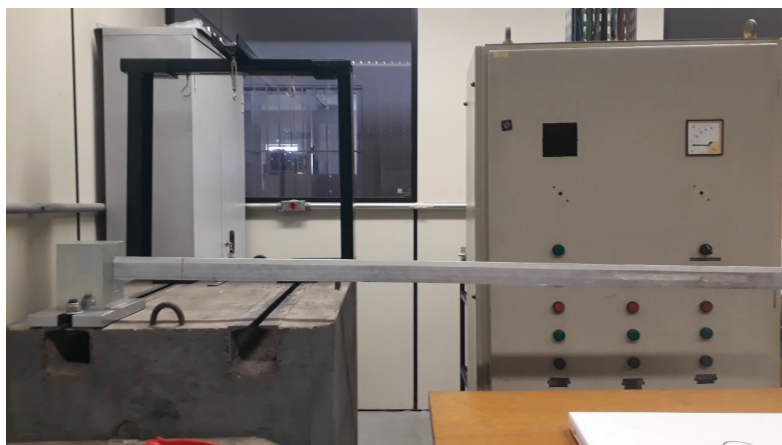
O cálculo do volume livre foi feito da seguinte maneira:

$$V = \text{comprimento livre} \times \text{largura} \times \text{espessura}$$

$$V = 1500 \text{ mm} \times 50 \text{ mm} \times 7,94 \text{ mm} = 595500 \text{ mm}^3$$

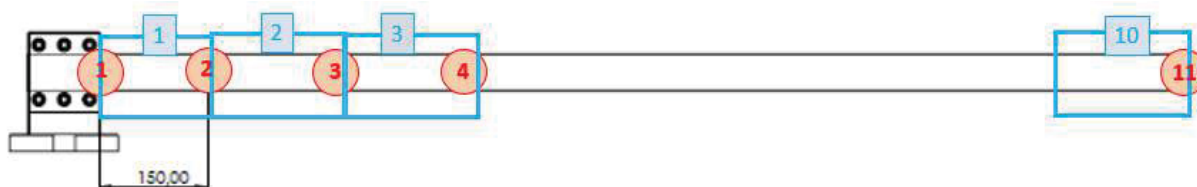
Visando uma modelagem numérica reduzida do sistema primário pelo MEF, considerou-se a divisão da viga em 10 elementos, com 11 nós, tal como ilustrado na FIGURA 16. Entendeu-se que essa modelagem seria satisfatória para os propósitos de presente trabalho, ainda que se tratasse de algo restrito, pois se buscava trabalhar com as 7 primeiras frequências naturais da viga usando a divisão em apenas 10 elementos. A construção do modelo numérico propriamente dito é abordada na seção seguinte.

FIGURA 15 – VIGA EM SUPORTE EXPERIMENTAL



FONTE: Soares (2018)

FIGURA 16 – DIVISÃO EM NÓS E ELEMENTOS



FONTE: A Autora (2021)

Com auxílio de um martelo de impacto, um analisador de sinais e um acelerômetro, como ilustrado na FIGURA 17, foi possível levantar FRFs (no caso, inertâncias) da viga (sistema primário) em análise. Os equipamentos anteriormente mencionados foram os seguintes:

- Martelo de impacto (FIGURA 17(a)) → PCB Piezotronics®, 086C04 ;
- Analisador de sinais (FIGURA 17(b)) → Nacional Instruments®, NI USB-4431;
- Acelerômetro (FIGURA 17(c)) → PCB Piezotronics®, 352C68.

FIGURA 17 – EQUIPAMENTOS DE MEDIÇÃO

(a) MARTELO DE IMPACTO



(b) ANALISADOR DE SINAIS



(c) ACELERÔMETRO



FONTE: Soares (2018)

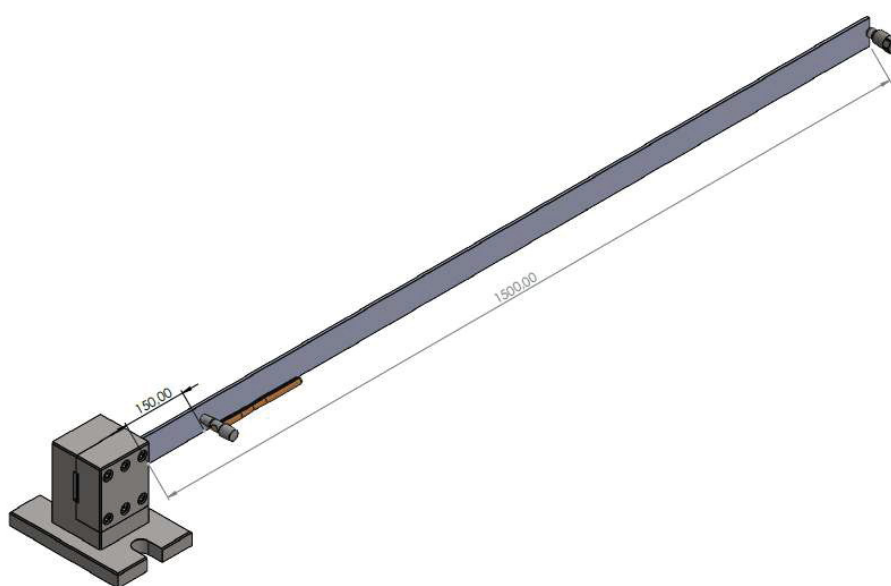
Foram consideradas no processamento posterior, face à sua qualidade, as FRFs relativas aos seguintes pontos de excitação e resposta:

- Ponto de excitação → 150 mm (nó 2);
- Ponto de resposta → 1500 mm (nó 11).

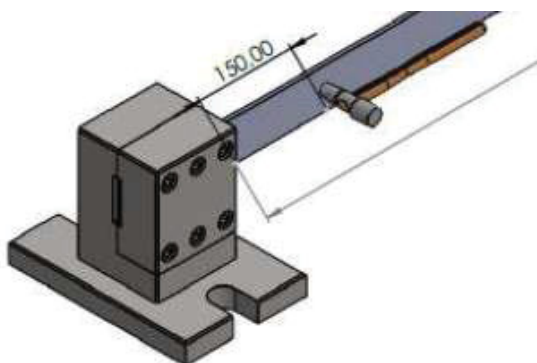
Esse procedimento é ilustrado, de forma esquemática, na FIGURA 18.

FIGURA 18 – ESQUEMA DO PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

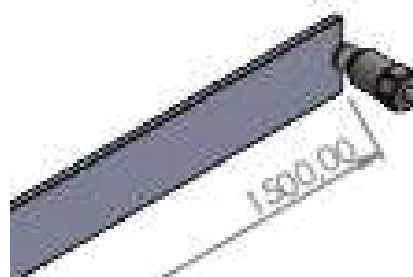
(a) VISTA EXPANDIDA



(b) ORIENTAÇÃO DO MARTELO DE IMPACTO



(c) ORIENTAÇÃO DO ACELERÔMETRO



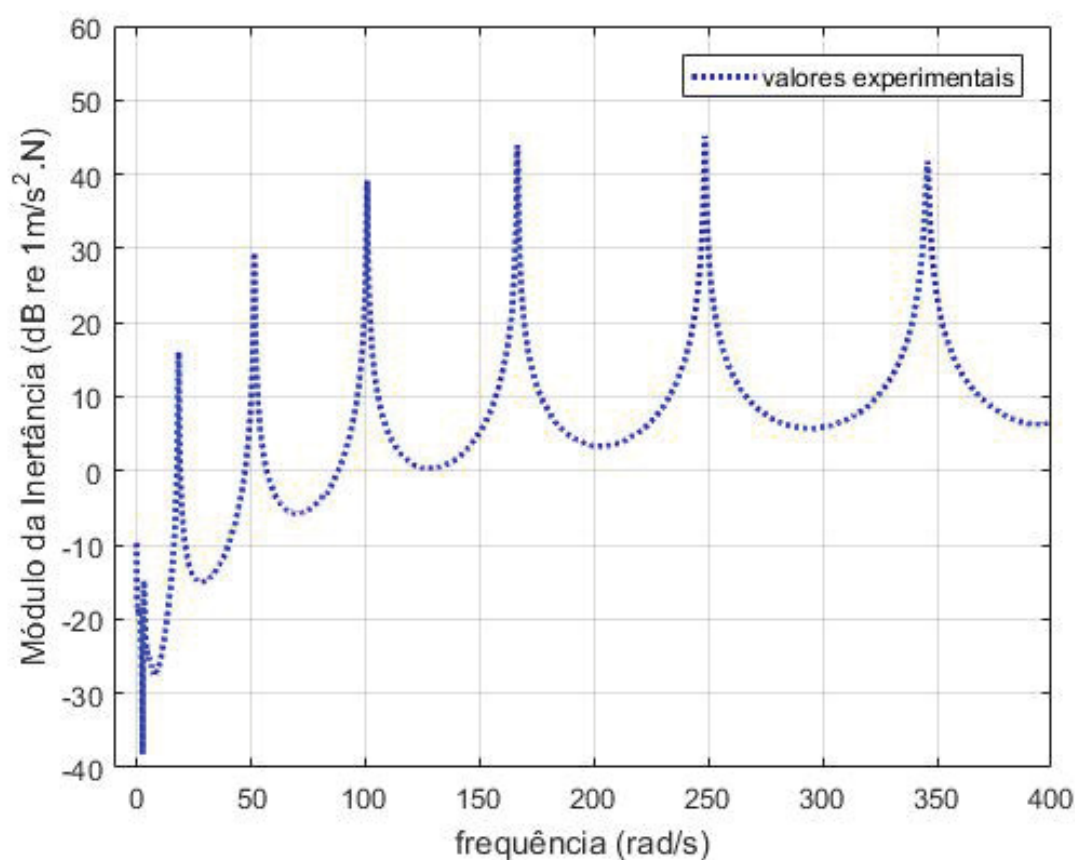
FONTE: A Autora (2021)

Com auxílio do *plug-in- Impacttest*, do *Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench* (LABVIEW®), foi possível obter a inércia mostrada, em módulo, na FIGURA 19. Na configuração do *plug-in*, foram usados os seguintes parâmetros (vide FIGURA 20):

- Faixa de frequência $\rightarrow 0$ à 400 Hz;
- Resolução em frequência $\rightarrow 0,5$ Hz, (portanto, tempo de aquisição $\rightarrow 2$ s);
- Unidade do martelo de impacto [EU] $\rightarrow$ N;
- Sensibilidade do martelo de impacto $\rightarrow 1,17\text{mV/EU}$;
- Unidade do acelerômetro [EU] $\rightarrow g$;
- Sensibilidade do acelerômetro $\rightarrow 99,7\text{mV/EU}$.

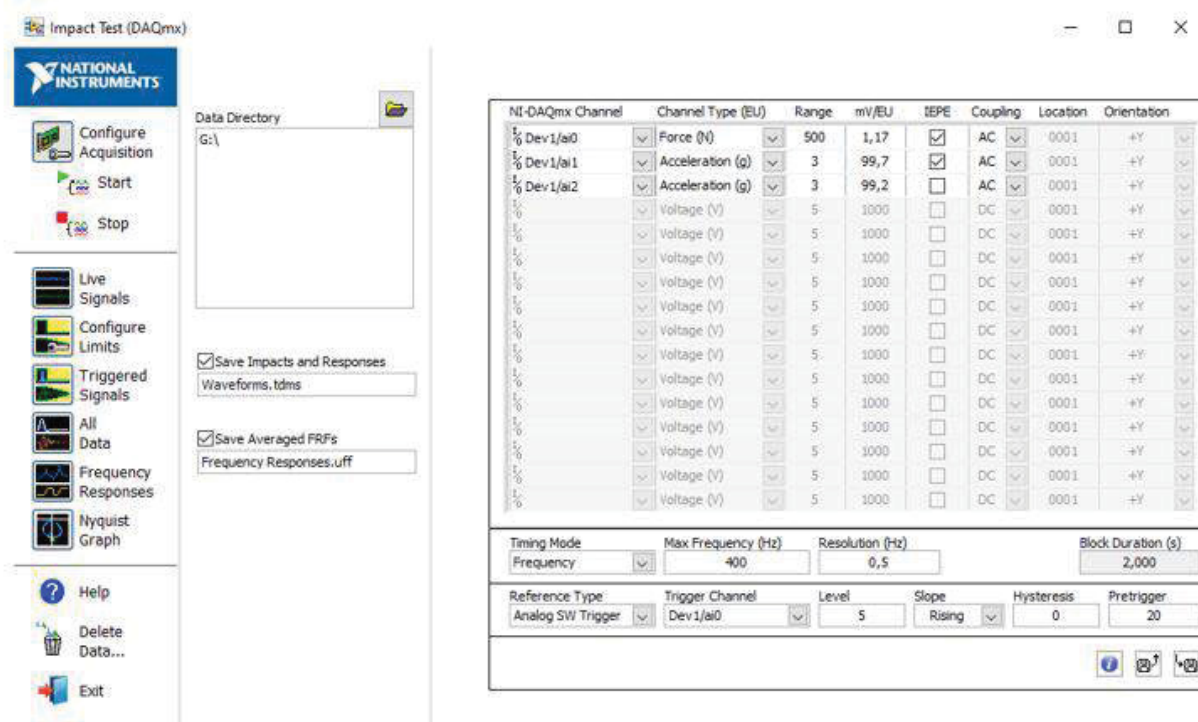
Através de métodos de AME, aplicados à inertância experimental, foram obtidas estimativas para as sete primeiras frequências naturais do sistema primário, bem como para as sete primeiras razões de amortecimento e para as sete primeiras amplitudes de ressonância. Os métodos empregados foram a captura de picos de ressonância ("*peak picking*"), para obtenção das frequências naturais e amplitudes de ressonância, e a banda de meia potência (-3 dB), nas regiões de ressonância, para obtenção das razões de amortecimento.

FIGURA 19 – INERTÂNCIA EXPERIMENTAL



FONTE: A autora (2021)

FIGURA 20 – CONFIGURAÇÃO DO IMPACTEST LABVIEW®



FONTE: A autora (2021)

4.3 MODELO NUMÉRICO

Para as matrizes globais de massa [M] e rigidez [K] foram utilizadas as matrizes elementares das equações do CAPÍTULO 2, subseção 2.1.2 (EQUAÇÃO 2.2 para massa e EQUAÇÃO 2.1 para rigidez). Já para o amortecimento, foi considerado amortecimento viscoso proporcional, como proposto na subseção 2.3.1.

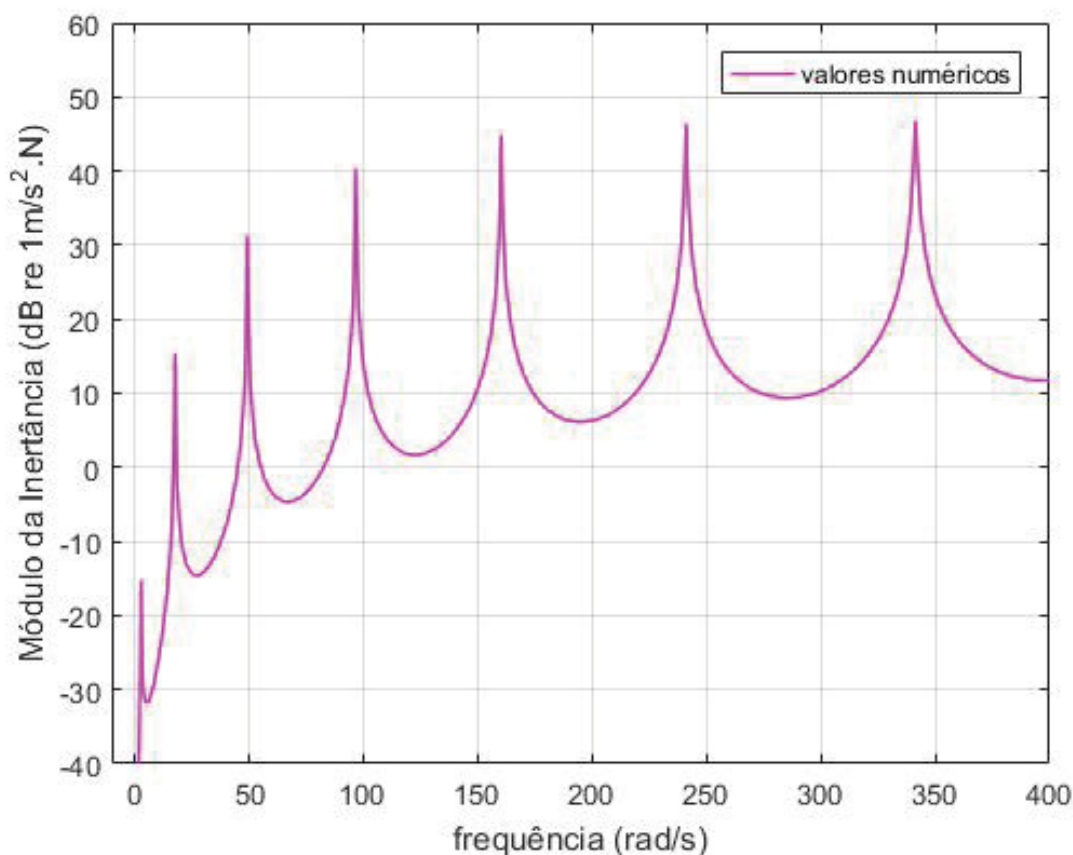
O sistema primário foi modelado via MEF, com a possibilidade de se utilizar tanto os GDL de translação e rotação quanto apenas os translação, via redução de Guyan. Segundo Hatch (2001), a escolha mais comum nos GDL a serem eliminados, na redução de Guyan, são as translações de nós com massas relativamente baixas e rotações de nós com momentos de inércia de massa relativamente baixos, por este motivo optou-se por eliminar a rotação dos nós.

A programação correspondente ao modelo numérico foi feita no ambiente computacional *Matrix Laboratory* (MATLAB®). Também nesse ambiente foram geradas as FRFs da viga considerada, como mostra a FIGURA 21.

4.4 ATUALIZAÇÃO E VALIDAÇÃO

Para atualização e validação do modelo numérico da viga engastada-livre, com base nas medições realizadas, foi empregado um procedimento híbrido de otimização, em que duas técnicas de otimização não linear foram associadas sequencialmente.

FIGURA 21 – INERTÂNCIA VIA MODELO NUMÉRICO



FONTE: A autora (2021)

Buscou-se, através desse procedimento, minimizar a diferença (erro) entre parâmetros oriundos das curvas experimental e numérica e assim determinar valores para as seguintes grandezas:

- $\alpha \rightarrow$ Constante que multiplica a matriz $[M]$ para inserção de amortecimento proporcional;
- $\beta \rightarrow$ Constante que multiplica a matriz $[K]$ para inserção de amortecimento proporcional;
- $t \rightarrow$ Espessura da viga;
- $E \rightarrow$ Módulo de elasticidade do material da viga;
- $\rho \rightarrow$ Densidade do material da viga.

O procedimento de otimização associou, sequencialmente, a técnica de algoritmos genéticos com a técnica SQP (*Sequential Quadratic Programming*), a partir de suas respectivas implementações nas subrotinas ga e fmincon do ambiente computacional MATLAB® (vide FIGURA 22). Como não havia valores iniciais disponíveis para todas as grandezas de interesse (notadamente, para α e β), buscou-se, através

da técnica de algoritmos genéticos, localizar um ponto de mínimo global, de forma aproximada. Então, pela técnica SQP, buscou-se refinar o resultado encontrado pela técnica anterior, com o ponto de mínimo global aproximado da técnica de algoritmos genéticos tornando-se o ponto de partida da técnica SQP.

Na segunda técnica de otimização, foram usadas restrições para as grandezas de interesse, de modo que realmente se fizesse um refinamento do que já havia sido obtido pela primeira técnica. Foi determinada uma faixa de variação de 20% para cima e 30% para baixo dos valores de partida, com exceção dos parâmetros E e ρ , cujas variações foram, devido à necessidade de uma maior acurácia na resposta, de $\pm 5\%$ e $\pm 1\%$, respectivamente. Devido à grande discrepância entre as ordens de grandeza das variáveis de projeto, adotou-se, ao longo do procedimento de otimização, um esquema de normalização linear. Por esse esquema, os valores das variáveis de projeto, durante a busca dos valores ótimos, eram mantidos entre 1 e 2.

FIGURA 22 – OTIMIZAÇÃO HÍBRIDA

OTIMIZAÇÃO HÍBRIDA:

algoritmo genético:

```
rng default
tic
options_ga=gaoptimset('Generations',1000,'PopulationSize',50,'TolFun',1e-6,'PlotFcn',@gaplotbestf);
[X0_ga,~,exitflag_ga,output_ga] = ga(@erro_hibrida_com_amplitude,5,[],[],[],[],Lin,Lsn,[],options_ga);
```

fmincon:

```
options_naolinear=optimoptions('fmincon','Algorithm','interior-point','StepTolerance',1e-7,...
'MaxFunctionEvaluations',600,'DiffMinChange',1e-6,'DiffMaxChange',1e-4);
[X0_nl_final,~,exitflag_nl,output_nl] = fmincon('erro_hibrida_com_amplitude',X0_ga,[],[],[],[],Lin,Lsn,[],options_naolinear);
toc
```

FONTE: A autora (2021)

4.4.1 Vetor de projeto e função objetivo

Na atualização e validação do modelo numérico, optou-se, como já antecipado, por encontrar valores para as grandezas de interesse minimizando a diferença (erro) entre parâmetros relevantes, obtidos a partir das inertâncias experimental e numérica via métodos de análise modal. As ações escolhidas foram as seguintes:

1. Tornar as frequências naturais numéricas mais próximas das experimentais;
2. Tornar as razões de amortecimento numéricas mais próximas das experimentais;
3. Tornar as amplitudes na ressonância numéricas mais próximas das experimentais.

Entendeu-se que, dessa forma, as inertâncias experimental e numérica seriam aproximadas, usando um volume compacto de informações (se comparado, por exemplo, ao volume formado pelas informações correspondentes a todos os pontos dessas curvas).

Designando as frequências naturais por ω_n , as razões de amortecimento por ζ e as amplitudes na ressonância por A_r , além de usar os superescritos *exp* e *num* para indicar, respectivamente, valores experimentais e numéricos, os problemas de otimização abordados podem ser formulados, por clareza e conveniência da seguinte forma:

Minimizar a função objetivo $f(x)$, dada por

$$f(x) = \sum_{j=1}^7 \left(\frac{\omega_{n,j}^{\text{exp}} - \omega_{n,j}^{\text{num}}}{\omega_{n,j}^{\text{exp}}} \right)^2 + \sum_{j=1}^7 \left(\frac{\zeta_j^{\text{exp}} - \zeta_j^{\text{num}}}{\zeta_j^{\text{exp}}} \right)^2 + \sum_{j=1}^7 \left(\frac{A_{r,j}^{\text{exp}} - A_{r,j}^{\text{num}}}{A_{r,j}^{\text{exp}}} \right)^2 \quad (4.1)$$

em que o vetor de variáveis de projeto x é tal que

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ t \\ E \\ \rho \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

sendo que, na segunda parte do procedimento híbrido de otimização, o problema está sujeito a

$$\alpha_{\text{mín}} \leq \alpha \leq \alpha_{\text{máx}} \quad (4.3a)$$

$$\beta_{\text{mín}} \leq \beta \leq \beta_{\text{máx}} \quad (4.3b)$$

$$t_{\text{mín}} \leq t \leq t_{\text{máx}} \quad (4.3c)$$

$$E_{\text{mín}} \leq E \leq E_{\text{máx}} \quad (4.3d)$$

$$\rho_{\text{mín}} \leq \rho \leq \rho_{\text{máx}} \quad (4.3e)$$

onde os subscritos *mín* e *máx* se referem, respectivamente aos valores mínimo e máximo das variáveis. Ainda que não indicado explicitamente na EQUAÇÃO 4.1, os parâmetros ali relacionados, no seu conjunto, são dependentes das grandezas na EQUAÇÃO 4.2.

4.5 CARACTERÍSTICAS ÓTIMAS DE NDV

Através da abordagem modal em que o *software* LAVIBS-ND[®] é usado (BOZZ, 2019), foram determinados os valores de massa e frequência ótima do NDV, para três faixas de frequência de interesse. Essas faixas são relacionadas na TABELA 3.

TABELA 3 – FAIXAS DE INTERESSE

Faixa de Interesse	Intervalo de Frequência	Frequências Naturais (por faixa de interesse)
1ª faixa	$15 \leq \omega \leq 100$ Hz	ω_2 , ω_3 e ω_4
2ª faixa	$45 \leq \omega \leq 180$ Hz	ω_3 , ω_4 e ω_5
3ª faixa	$150 \leq \omega \leq 350$ Hz	ω_5 , ω_6 e ω_7

FONTE: A Autora (2021)

O material viscoelástico (MVE) utilizado foi o EARTM C-1002, cujos parâmetros estão contidos na TABELA 4. Esse material é disponibilizado pelo fabricante em placas, cujas espessuras são as indicadas na TABELA 5

TABELA 4 – PARÂMETROS EARTM C-1002

Material viscoelástico	T ₀ (K)	G ₀ (Pa)	G _∞ (Pa)	β _v	Φ ₀ (s) ^{β_v}	θ ₁	θ ₂ (K)
EAR TM C-1002	293	6,06 × 10 ⁵	9,7 × 10 ⁸	0,5465	6,9 × 10 ⁻⁴	17,8052	177,1193

FONTE: Silva (2019)

TABELA 5 – ESPESSURAS DO MVE

EAR TM C-1002		
espessura 01	0,0015"	0,3810 mm
espessura 02	0,030"	0,7620 mm
espessura 03	0,062"	1,5748 mm
espessura 04	1/8"	3,1750 mm
espessura 05	1/4"	6,3500 mm
espessura 06	1/2"	12,700 mm

FONTE: A Autora (2021)

A eficácia do neutralizador viscoelástico será medida através das técnicas de reanálise de interesse e confrontada com os resultados obtidos por análise modal experimental. Esse procedimento é abordado abaixo.

4.6 APLICAÇÃO DE MÉTODOS DE REANÁLISE

4.6.1 Modificação via partição matricial

Como explicado no CAPÍTULO 3, subseção 3.2.1, é necessário conhecer, para aplicação do método, a modificação da estrutura primária, no caso, a rigidez dinâmica $(\Delta S(\omega)_{r \times r})^1$.

Outra característica do método da partição matricial é a necessidade *a priori* da curva de receptância no local onde se deseja conhecer a resposta do sistema composto. Esse local deve ser o mesmo onde ocorrerá a modificação estrutural do sistema, ou seja, o local onde se deseja avaliar a redução, ou não, de vibração da estrutura deve ser o mesmo onde, no caso deste trabalho, o NDV será acoplado.

¹ Como foi inserido **apenas um** neutralizador simples, de um GDL, no sistema primário, a matriz de modificação possui ordem 1, ou seja, $\Delta S(\omega)_{r \times r} = \Delta S(\omega)_{1 \times 1}$

Considere-se, agora, que o ponto do sistema primário em que se avalia a redução, ou não, de vibração é o ponto em que o NDV será inserido e que se conheça a FRF pontual ali. Nesse caso, o método da partição matricial é aplicado de maneira direta.

Já quando a FRF é fornecida em outro ponto, é necessário ter o modelo analítico do sistema, e aplicá-lo ao ponto de localização da modificação estrutural. O caso deste trabalho **se enquadra nesta categoria** e será mais detalhado abaixo.

Neste trabalho, conhecia-se, pelas medições realizadas, a curva de inertância no ponto (1×10) , (ou seja, excitação no ponto 1, que é o nó 2 da malha, e resposta no ponto 10, que é o nó 11 da malha). Porém, pretende-se fixar o dispositivo será anexado na extremidade livre da viga, que é o ponto (10×10) , (ou seja, excitação e resposta no ponto 10, que é o nó 11 da malha). A ideia aqui foi exatamente a de se verificar o caso em que se possui informação sobre o sistema primário num local e se deseja fixar o NDV noutro, de modo que a aplicação do método não seja direta.

Assim, após a modelagem da viga por elementos finitos, a atualização e a validação foram realizadas com relação à localização (1×10) , como se verá no capítulo seguinte. Como o modelo validado, determinou-se, então, a FRF requerida para a aplicação do método, a saber, a receptância no ponto (10×10) . De posse dessa informação, o método foi aplicado como indicado na subseção 3.2.1

4.6.2 Método via produto matricial

4.6.2.1 Formulação específica

No presente caso, a modificação possui 1 GDL e está localizada na extremidade da viga, que corresponde à porção extrema inferior da sua matriz de rigidez dinâmica. Como visto na subseção 3.2.2

É possível reescrever a matriz de Rigidez dinâmica da modificação estrutural $[\Delta S_{n \times n}]$ como a multiplicação de duas matrizes, sendo elas

- $[U(\omega)]_{n \times r} \rightarrow$ primeira matriz do produto matricial ²;
- $[V(\omega)]_{r \times n} \rightarrow$ segunda matriz do produto matricial ³.

onde

$$\begin{array}{ll} n & \rightarrow 10 \\ r & \rightarrow 1 \end{array}$$

² $n \rightarrow$ graus de liberdade do sistema;

³ $r \rightarrow$ graus de liberdade da modificação estrutural.

Tem-se, assim, que

$$[\Delta S(\omega)] = [U(\omega)] \times [V(\omega)]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta S(\omega) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \Delta S(\omega) \end{pmatrix}$$

Na sequência, determina-se

$$[W(\omega)]_{r \times r} = [I]_{r \times r} + [V]_{r \times n} \times [R]_{n \times n} \times [U]_{n \times r}$$

em que se tem, sequencialmente, as seguintes operações:

- $[V] \times [R]$

$$[V] \times [R] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R(\omega)_{11} & R(\omega)_{12} & \cdots & R(\omega)_{1n} \\ R(\omega)_{21} & R(\omega)_{22} & \cdots & R(\omega)_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\omega)_{n1} & R(\omega)_{n2} & \cdots & R(\omega)_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\omega)_{n1} & \cdots & R(\omega)_{nn} \end{pmatrix}$$

- $[V(\omega)] \times [R(\omega)] \times [U(\omega)]$

$$[V(\omega)] \times [R(\omega)] \times [U(\omega)] = \begin{pmatrix} R(\omega)_{n1} & \cdots & R(\omega)_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta S(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\omega)_{nn} \times \Delta S(\omega) \end{pmatrix}$$

Portanto, na situação considerada, decorre que

$$[W(\omega)]_{1 \times 1} = \left(1 + R(\omega)_{10,10} \times \Delta S(\omega) \right)$$

Como, da subseção 3.2.2, tem-se que

$$[R(\omega)]_{n \times n}^* = [R(\omega)]_{n \times n} - \left[[R(\omega)]_{n \times n} \times [U(\omega)]_{n \times r} \times [W]_{r \times r}^{-1} \times [V(\omega)]_{r \times n} \times [R(\omega)]_{n \times n} \right]$$

(vide EQUAÇÃO 3.16).

Obtém-se, realizando as operações em etapas, que

- $[R(\omega)] \times [U(\omega)]$

$$[R(\omega)] \times [U(\omega)] = \begin{pmatrix} R(\omega)_{11} & R(\omega)_{12} & \cdots & R(\omega)_{1n} \\ R(\omega)_{21} & R(\omega)_{22} & \cdots & R(\omega)_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R(\omega)_{n1} & R(\omega)_{n2} & \cdots & R(\omega)_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta S(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(\omega)_{1n} \Delta S(\omega) \\ R(\omega)_{2n} \Delta S(\omega) \\ \vdots \\ R(\omega)_{nn} \Delta S(\omega) \end{pmatrix}$$

- $[R(\omega)] \times [U(\omega)] \times [W(\omega)]^{-1}$

$$[R(\omega)] \times [U(\omega)] \times [W(\omega)]^{-1} = \begin{bmatrix} R(\omega)_{1n} \times \Delta S(\omega) \times \left(1 + R(\omega)_{nn} \times \Delta S(\omega) \right)^{-1} \\ R(\omega)_{2n} \times \Delta S(\omega) \times \left(1 + R(\omega)_{nn} \times \Delta S(\omega) \right)^{-1} \\ \vdots \\ R(\omega)_{nn} \times \Delta S(\omega) \times \left(1 + R(\omega)_{nn} \times \Delta S(\omega) \right)^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{bmatrix}$$

Por conveniência e simplicidade, faz-se

$$[\kappa(\omega)] = \left([R(\omega)] \times [U(\omega)] \times [W(\omega)]^{-1} \right)$$

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\omega)_{1n} \times \Delta S(\omega) \times \left(1(\omega) + R(\omega)_{nn} \times \Delta S(\omega) \right)^{-1} \\ R(\omega)_{2n} \times \Delta S(\omega) \times \left(1(\omega) + R(\omega)_{nn} \times \Delta S(\omega) \right)^{-1} \\ \vdots \\ R(\omega)_{nn} \times \Delta S(\omega) \times \left(1(\omega) + R(\omega)_{nn} \times \Delta S(\omega) \right)^{-1} \end{bmatrix}$$

onde

$$[\kappa(\omega)]_{n \times r} \rightarrow \text{Matriz auxiliar}$$

- $[R(\omega)] \times [U(\omega)] \times [W(\omega)]^{-1} \times [V(\omega)] = [\kappa(\omega)] \times [V(\omega)]$

$$[\kappa(\omega)] \times [V(\omega)] = \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \kappa_1 \\ 0 & \cdots & \vdots & \kappa_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_n \end{pmatrix}$$

- $[\kappa(\omega)] \times [V(\omega)] \times [R(\omega)]$

$$[\kappa(\omega)] \times [V(\omega)] \times [R(\omega)] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \kappa_1 \\ 0 & \cdots & \vdots & \kappa_2 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R(\omega)_{11} & R(\omega)_{12} & \cdots & R(\omega)_{1n} \\ R(\omega)_{21} & \cdots & \vdots & R(\omega)_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ R(\omega)_{n1} & R(\omega)_{n2} & \cdots & R(\omega)_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \times R(\omega)_{n1} & \kappa_1 \times R(\omega)_{n2} & \cdots & \kappa_1 \times R(\omega)_{nn} \\ \kappa_2 \times R(\omega)_{n1} & \cdots & \vdots & \kappa_2 \times R(\omega)_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_n \times R(\omega)_{n1} & \kappa_n \times R(\omega)_{n2} & \cdots & \kappa_n \times R(\omega)_{nn} \end{pmatrix}$$

Também por conveniência e simplicidade, faz-se

$$\begin{bmatrix} \psi(\omega)_{11} & \psi(\omega)_{12} & \cdots & \psi(\omega)_{1n} \\ \psi(\omega)_{21} & \cdots & \vdots & \psi(\omega)_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \psi(\omega)_{n1} & \psi(\omega)_{n2} & \cdots & \psi(\omega)_{nn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \times R(\omega)_{n1} & \kappa_1 \times R(\omega)_{n2} & \cdots & \kappa_1 \times R(\omega)_{nn} \\ \kappa_2 \times R(\omega)_{n1} & \cdots & \vdots & \kappa_2 \times R(\omega)_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa_n \times R(\omega)_{n1} & \kappa_n \times R(\omega)_{n2} & \cdots & \kappa_n \times R(\omega)_{nn} \end{pmatrix}$$

onde

$$[\psi(\omega)]_{n \times n} \rightarrow \text{Matriz auxiliar}$$

- $[R(\omega)]^* = R(\omega) - [\psi(\omega)]$

$$[R(\omega)]^* = \begin{bmatrix} R(\omega)_{11} & R(\omega)_{12} & \cdots & R(\omega)_{1n} \\ R(\omega)_{21} & \cdots & \vdots & R(\omega)_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ R(\omega)_{n1} & R(\omega)_{n2} & \cdots & R(\omega)_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \psi(\omega)_{11} & \psi(\omega)_{12} & \cdots & \psi(\omega)_{1n} \\ \psi(\omega)_{21} & \cdots & \vdots & \psi(\omega)_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \psi(\omega)_{n1} & \psi(\omega)_{n2} & \cdots & \psi(\omega)_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[R(\omega)]^* = \begin{bmatrix} (R(\omega)_{11} - \psi(\omega)_{11}) & (R(\omega)_{12} - \psi(\omega)_{12}) & \cdots & (R(\omega)_{1n} - \psi(\omega)_{1n}) \\ (R(\omega)_{21} - \psi(\omega)_{21}) & \cdots & \vdots & (R(\omega)_{2n} - \psi(\omega)_{2n}) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ (R(\omega)_{n1} - \psi(\omega)_{n1}) & (R(\omega)_{n2} - \psi(\omega)_{n2}) & \cdots & (R(\omega)_{nn} - \psi(\omega)_{nn}) \end{bmatrix}$$

Assim sendo, para a receptância de interesse, qual seja, aquela do ponto 10×10 , resulta que

$$R(\omega)_{10 \times 10}^* = R(\omega)_{10 \times 10} - (\kappa_{10} \times R(\omega)_{10 \times 10})$$

onde

$$\kappa_{10} = R(\omega)_{10 \times 10} \times \Delta S(\omega) \times (W(\omega))^{-1}$$

com

$$W(\omega) = 1 + R(\omega)_{10 \times 10} \times \Delta S(\omega)$$

5 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

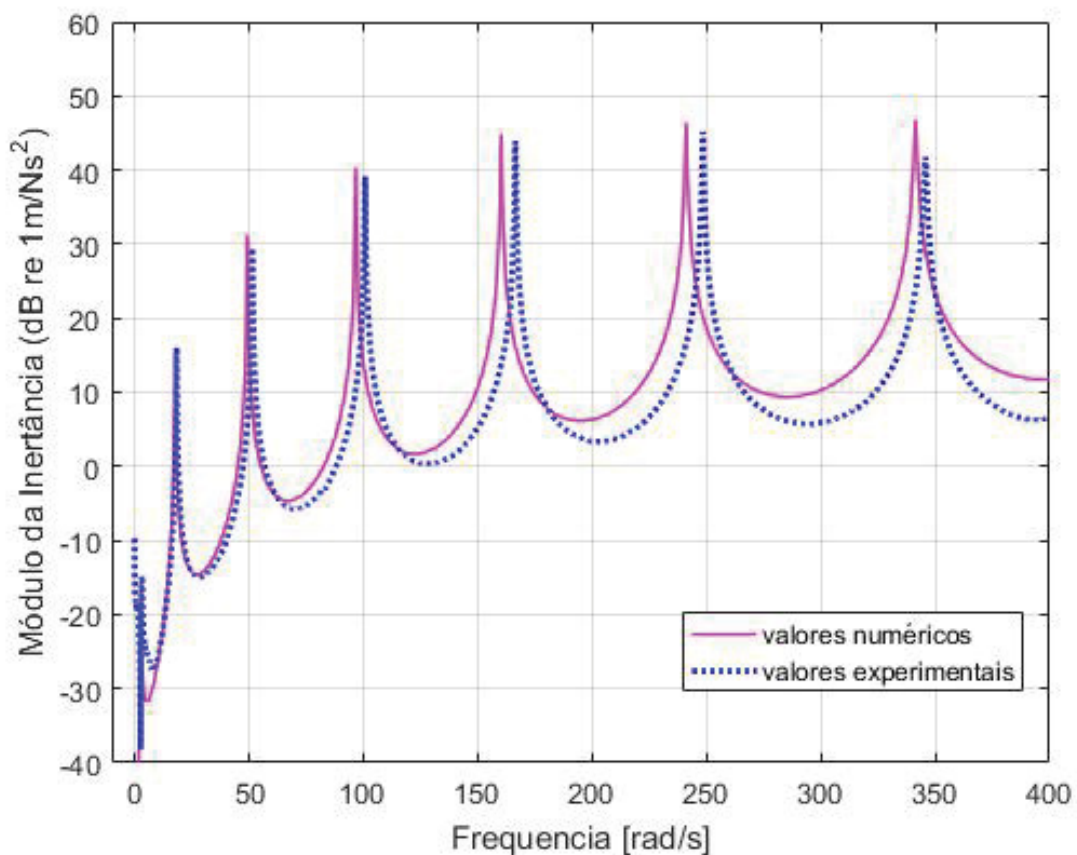
Neste capítulo, são apresentados sequencialmente todos os resultados alcançados nas etapas do trabalho. São também apresentadas as discussões correspondentes aos resultados, particularmente quanto aos métodos de reanálise investigados.

5.1 SISTEMA PRIMÁRIO E NDV

5.1.1 Sistema primário

A FIGURA 23 apresenta duas inertâncias, uma experimental e outra numérica. A inertância experimental serviu de referência para a atualização e a validação do modelo numérico, via procedimento híbrido de otimização. A inertância numérica decorre do modelo numérico validado. Observa-se a significativa semelhança entre as duas curvas.

FIGURA 23 – COMPARAÇÃO ENTRE INERTÂNCIAS EXPERIMENTAL E NUMÉRICA



FONTE: A autora (2021)

Os valores encontrados foram:

- $\alpha = 0.2300$
- $\beta = 7.6816 \times 10^{-6}$
- $t = 7.9853 \text{ mm}$
($t_{\text{referência}} = 7,938 \text{ mm}$)
- $E = 1.900 \times 10^{11} \text{ Pa}$
($E_{\text{referência}} = 2 \times 10^{11} \text{ Pa}$)
- $\rho = 7939 \text{ kg/m}^3$
($\rho_{\text{referência}} = 7860 \text{ kg/m}^3$)

Já a TABELA 6, a TABELA 7 e a TABELA 8 relacionam, respectivamente, os valores numéricos e experimentais para as frequências naturais, as razões de amortecimento e as amplitudes de ressonância. Recorda-se que os valores experimentais para frequências naturais, razões de amortecimento e amplitudes de ressonância foram obtidos como exposto na seção 4.2.

De modo geral, há uma concordância satisfatória entre os valores numéricos e os experimentais. As discrepâncias observadas se devem às limitações dos procedimentos empregados tanto para a atualização do modelo numérico quanto para a análise modal experimental. Essas limitações são bem conhecidas na literatura, como se constata em Mottershead, Link e Friswell (2011) e Ewins (2000).

TABELA 6 – FREQ. NUMÉRICAS

× FREQ. EXPERIMENTAIS	
Frequências Naturais Numéricas	Frequências Naturais Experimentais
$f_{n1} = 2,80 \text{ Hz}$	$f_{n1} = 3,2 \text{ Hz}$
$f_{n2} = 17,58 \text{ Hz}$	$f_{n2} = 18,4 \text{ Hz}$
$f_{n3} = 49,24 \text{ Hz}$	$f_{n3} = 51,5 \text{ Hz}$
$f_{n4} = 96,60 \text{ Hz}$	$f_{n4} = 100,8 \text{ Hz}$
$f_{n5} = 160,21 \text{ Hz}$	$f_{n5} = 166,5 \text{ Hz}$
$f_{n6} = 241,05 \text{ Hz}$	$f_{n6} = 248,5 \text{ Hz}$
$f_{n7} = 341,33 \text{ Hz}$	$f_{n7} = 345,8 \text{ Hz}$

FONTE: A Autora (2021)

TABELA 7 – RAZÕES DE AMORTECIMENTOS NUMÉRICOS × RAZÕES DE AMORTECIMENTOS EXPERIMENTAIS

Razões de Amortecimento Numéricas	Razões de Amortecimento Experimentais
$\zeta_1 = 0,0410$	$\zeta_1 = 0,0593$
$\zeta_2 = 0.0066$	$\zeta_2 = 0,0060$
$\zeta_3 = 0.0025$	$\zeta_3 = 0,0032$
$\zeta_4 = 0,0016$	$\zeta_4 = 0,0016$
$\zeta_5 = 0.0013$	$\zeta_5 = 0,0011$
$\zeta_6 = 0,0014$	$\zeta_6 = 0,0011$
$\zeta_7 = 0,0016$	$\zeta_7 = 0,0016$

FONTE: A Autora (2021)

TABELA 8 – AMPLITUDES NUMÉRICAS

×

AMPLITUDES EXPERIMENTAIS

Amplitudes de Ressonância Numéricas	Amplitude de Ressonância Experimentais
$A_{r1} = -15.288 \text{ dB}$	$A_{r1} = -14,73 \text{ dB}$
$A_{r2} = 15.411 \text{ dB}$	$A_{r2} = 16,07 \text{ dB}$
$A_{r3} = 31.612 \text{ dB}$	$A_{r3} = 29,49 \text{ dB}$
$A_{r4} = 40.393 \text{ dB}$	$A_{r4} = 39,11 \text{ dB}$
$A_{r5} = 44.817 \text{ dB}$	$A_{r5} = 43,91 \text{ dB}$
$A_{r6} = 46.516 \text{ dB}$	$A_{r6} = 45,15 \text{ dB}$
$A_{r7} = 46.676 \text{ dB}$	$A_{r7} = 41,73 \text{ dB}$

FONTE: A Autora (2021)

5.1.2 Neutralizador Viscoelástico

Através do método modal, ou seja, do *software* LAVIBS-ND[®] foram calculados os valores de massa do NDV e frequência ótima do NDV, para três faixas de frequência de interesse, como segue na TABELA 9

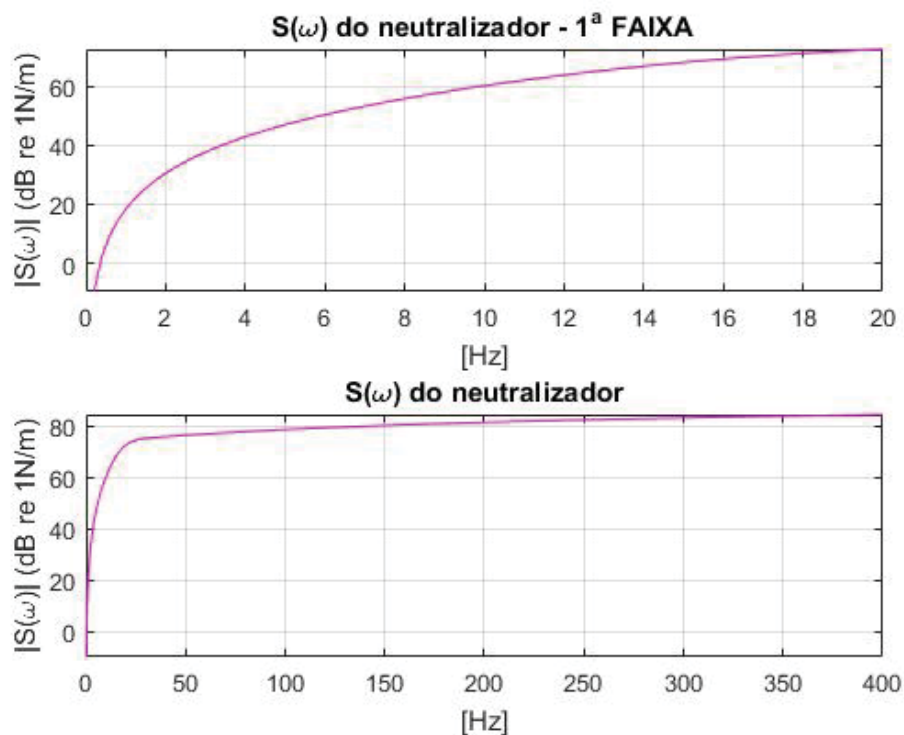
TABELA 9 – RELAÇÃO DE MASSAS E FREQUÊNCIAS DO NVE NAS FAIXAS ANALISADAS

	Faixa de Frequência	Massa do NDV	Frequência Ótima do NDV
1 ^a faixa	15 Hz a 100 Hz	208 g	16,22 Hz
2 ^a faixa	45 Hz a 180 Hz	172 g	43,69 Hz
3 ^a faixa	150 Hz a 350 Hz	179 g	122,60 Hz

FONTE: A Autora (2021)

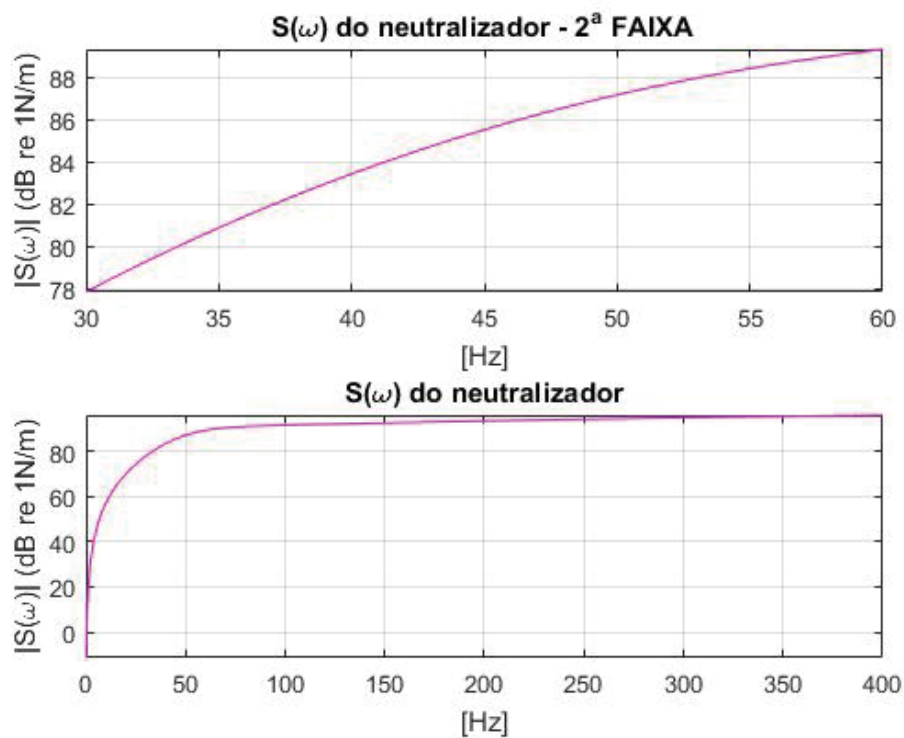
Apresentam-se as três curvas de módulo de rigidez dinâmica dos neutralizadores, tanto em torno de suas respectivas faixas de atuação quanto, logo abaixo, ao longo da faixa completa de investigação.

FIGURA 24 – 1ª FAIXA: RIGIDEZ DINÂMICA DO NEUTRALIZADOR



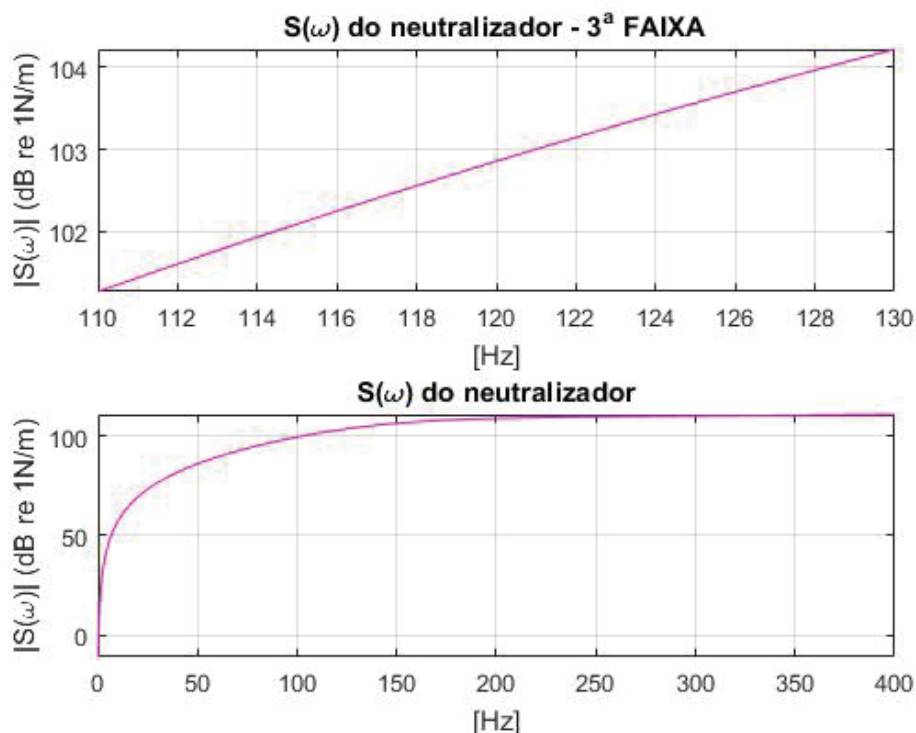
FONTE: A autora (2021)

FIGURA 25 – 2ª FAIXA: RIGIDEZ DINÂMICA DO NEUTRALIZADOR



FONTE: A autora (2021)

FIGURA 26 – 3ª FAIXA: RIGIDEZ DINÂMICA DO NEUTRALIZADOR



FONTE: A autora (2021)

5.2 SISTEMA COMPOSTO

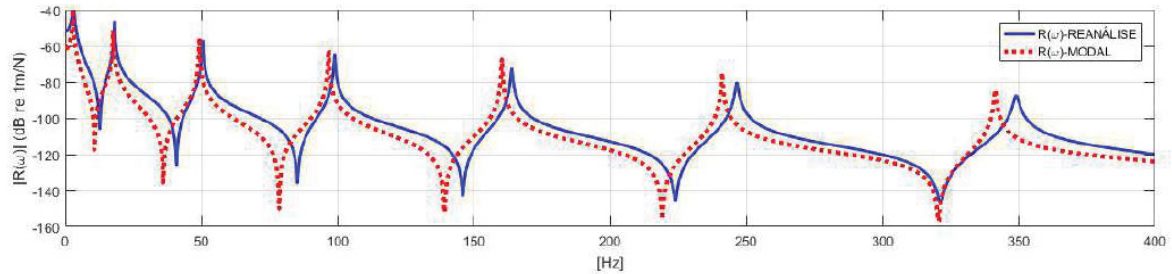
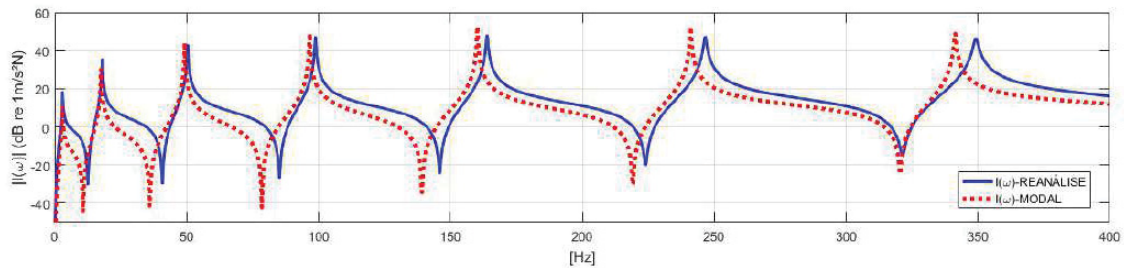
Nesta seção, são mostrados, inicialmente, os resultados encontrados nos métodos de reanálise investigados. Em seguida, são mostradas as comparações com os resultados da abordagem modal, utilizada pelo programa computacional LAVIBS-ND[®].

É interessante ressaltar que, como exposto anteriormente, devido ao fato da TONL ter sido realizada no ponto (1×10) (visto que a FRF experimental ter sido levantada apenas nesse ponto), tanto os gráficos de receptância quanto os de inertância no ponto de acoplamento do dispositivo (10×10) diferem levemente dos gráficos utilizados no método modal, que é utilizado pelo software LAVIBS-ND[®], como mostram as FIGURAS 27a e 27b. Portanto é esperado uma resposta levemente diferente entre os dois métodos devido ao *inputs* diferentes de dados de entrada.

Sendo assim, a FIGURA 27a ilustra a comparação do gráfico de receptância e a FIGURA 27b ilustra a comparação do gráfico inertância do sistema primário do ponto (10×10) utilizado na reanálise comparada com o gráfico de receptância do ponto (10×10) utilizado no método modal (*software* LAVIBS-ND[®])

FIGURA 27 – SISTEMA PRIMÁRIO UTILIZADO NO MÉTODO MODAL

×
SISTEMA PRIMÁRIO UTILIZADO NOS MÉTODOS DE REANÁLISE

(a) $R(\omega)_{\text{primário}} - \text{REANÁLISE} \times R(\omega)_{\text{primário}} - \text{MODAL}$ (b) $I(\omega)_{\text{primário}} - \text{REANÁLISE} \times I(\omega)_{\text{primário}} - \text{MODAL}$ 

FONTE: A autora

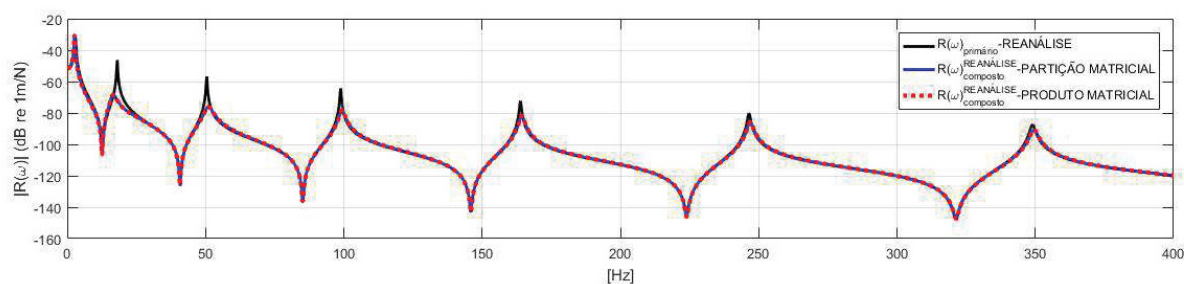
5.2.1 Primeira Faixa de Frequência

As FIGURAS 28a e 28b mostram a curva de módulo de receptância pontual do sistema primário, qual seja, a viga engastada-livre, na sua extremidade livre. Essa curva é obtida a partir do modelo numérico validado para a viga. Na mesma figura, são também incluídas as curvas de módulo de receptância correspondentes para o sistema composto, ou seja, viga com NDV. Tais curvas são computadas através dos métodos de reanálise de partição matricial e de produto matricial.

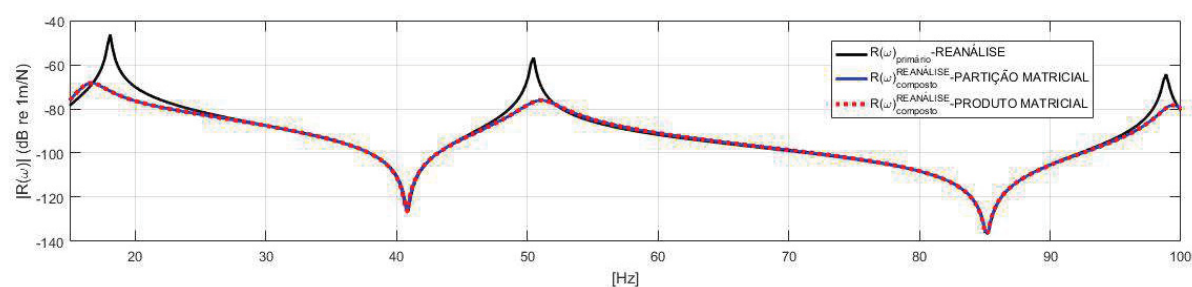
Na FIGURA 28, assim como nas figuras subsequentes, são contempladas tanto uma escala mais ampla em frequência, de 0 a 400 Hz, quanto uma escala mais específica para a faixa considerada, no caso, de 0 a 100 Hz. Observa-se, nos gráficos, que não há diferença entre as previsões via partição matricial e via produto matricial.

FIGURA 28 – 1ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODOS DE REANÁLISE

(a) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (0 a 400 Hz)



(b) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (15 a 100 Hz)

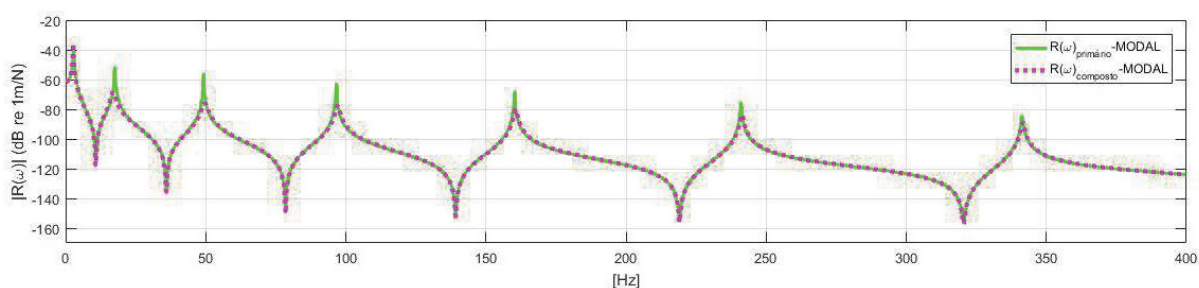


FONTE: A autora (2021)

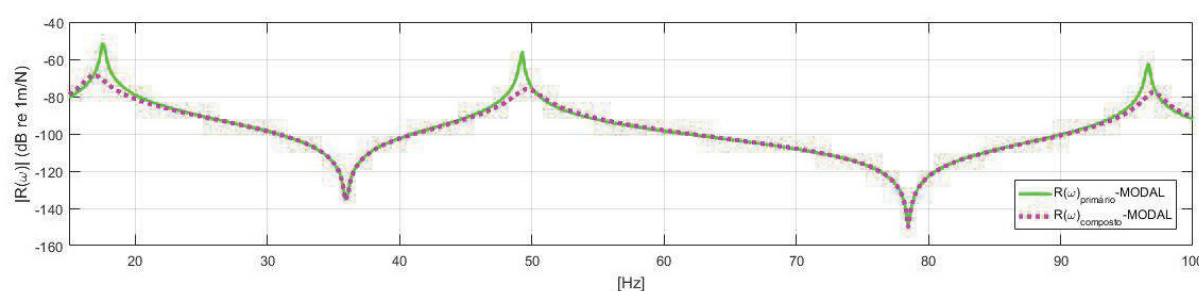
Já na FIGURA 29, são mostradas as curvas de módulo de receptância do sistema primário e do sistema composto, tal como geradas pelo LAVIBS-ND®. Face à abordagem usada nesse programa, essas curvas são construídas a partir dos parâmetros modais do sistema primário e das informações do dispositivo ótimo indicado pelo programa, com modelagem pelo conceito de parâmetros equivalentes generalizados.

FIGURA 29 – 1ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODO MODAL

(a) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (0 a 400 Hz)



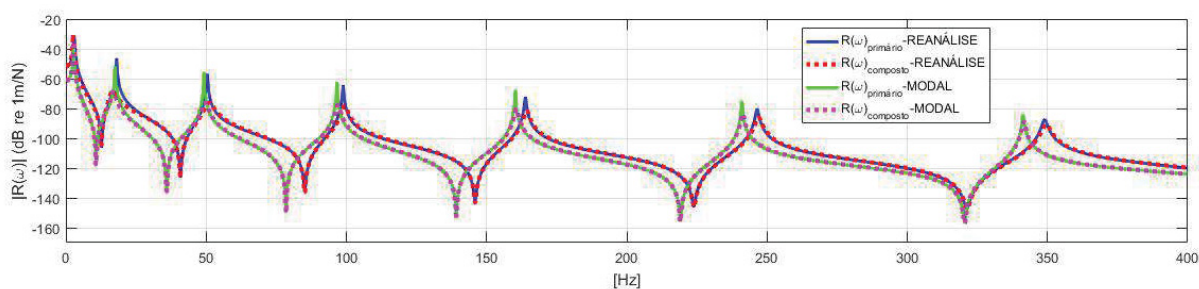
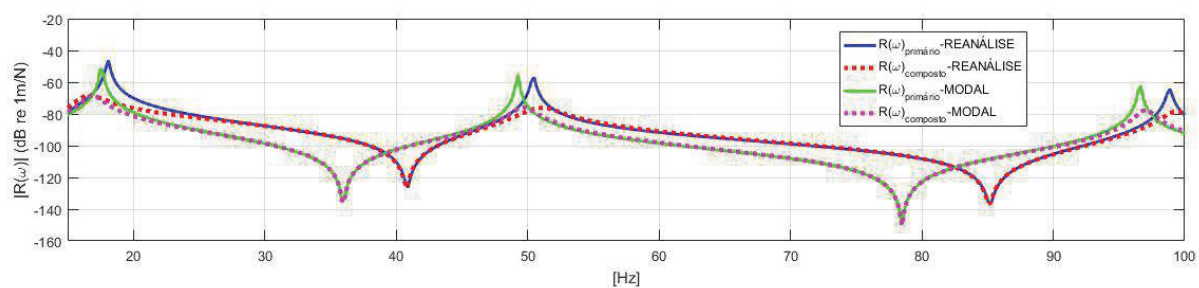
(b) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (15 a 100 Hz)



FONTE: A autora (2021)

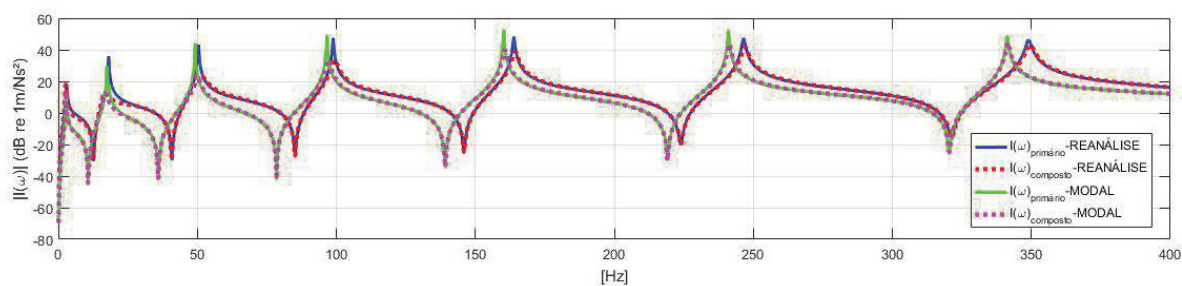
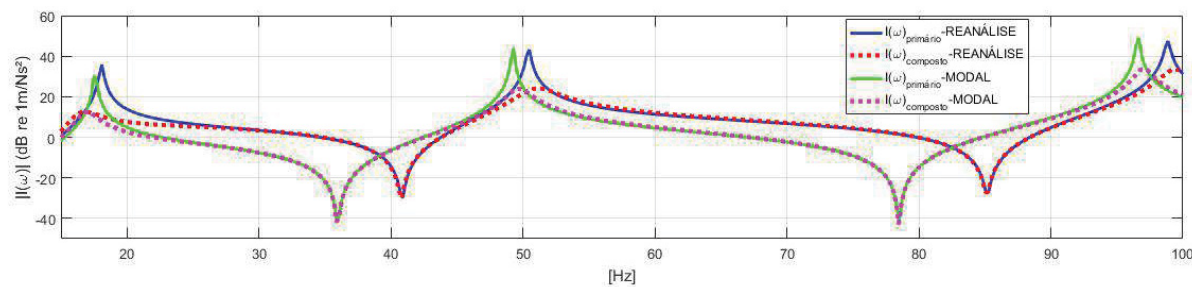
Para fins de comparação, são mostradas, na FIGURA 30, todas as curvas ¹ de módulo de receptância juntas, reunindo os resultados obtidos através de modelo numérico e LAVIBS-ND[®]. A semelhança entre as curvas correspondentes é clara.

¹ Para melhor clareza, ilustra-se apenas uma curva obtida por um dos métodos de reanálise, pois, como se mostrou, eles convergem para a mesma resposta.

FIGURA 30 – 1ª FAIXA: $R(\omega)$ –MÉTODO MODAL E $R(\omega)$ –MÉTODOS DE REANÁLISE(a) $R(\omega)$ - 0 a 400 Hz(b) $R(\omega)$ - 15 a 100 Hz

FONTE: A autora (2021)

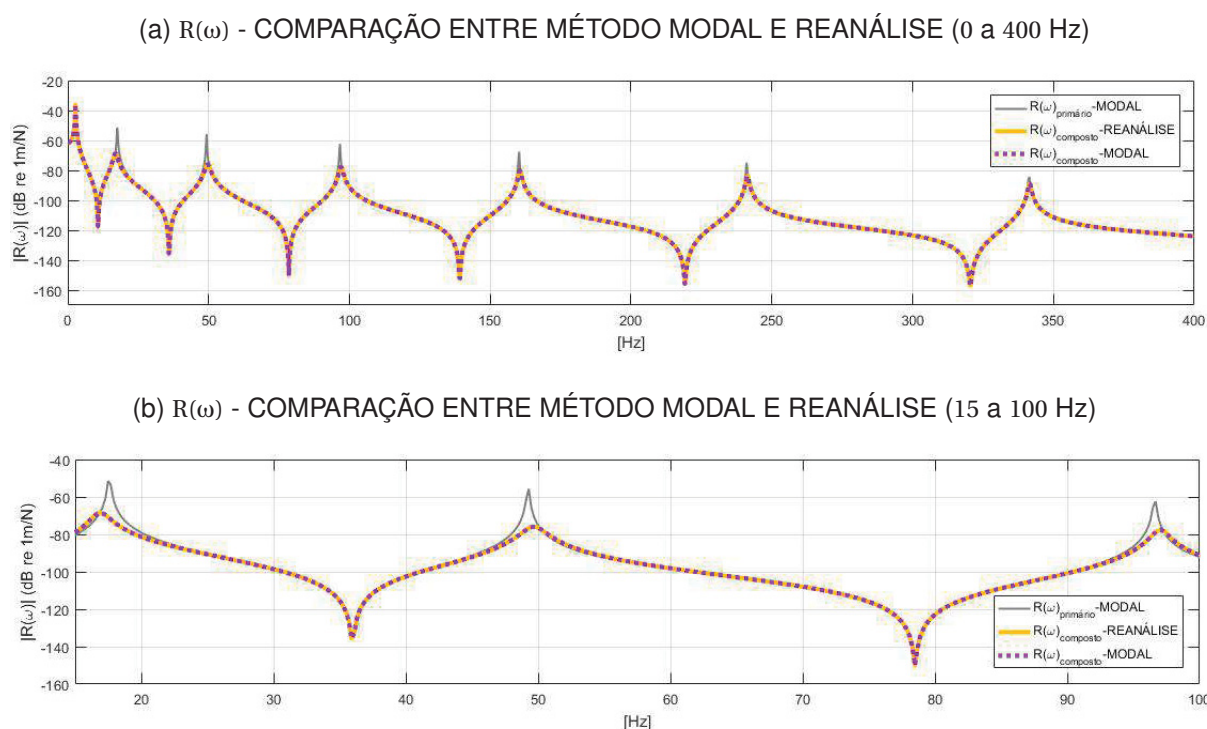
A FIGURA 31 traz a mesma comparação, agora em termos de módulo da inertância.

FIGURA 31 – 1ª FAIXA: $I(\omega)$ –MÉTODO MODAL E $I(\omega)$ –MÉTODOS DE REANÁLISE(a) $I(\omega)$ - 0 a 400 Hz(b) $I(\omega)$ - 15 a 100 Hz

FONTE: A autora (2021)

Caso agora se use a receptância determinada pelo LAVIBS-ND[®] como informação de FRF para os métodos de reanálise, e não mais a receptância fornecida pelo modelo numérico, obtém-se as curvas ² de módulo de receptância do sistema composto da FIGURA 32. Nota-se que não há distinção entre as curvas de módulo de receptância do sistema composto determinadas via métodos de reanálise e via LAVIBS-ND[®]. Análoga comparação é feita na FIGURA 33, para o módulo da inertância.

FIGURA 32 – 1^a FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO SOFTWARE LAVIBS-ND[®]

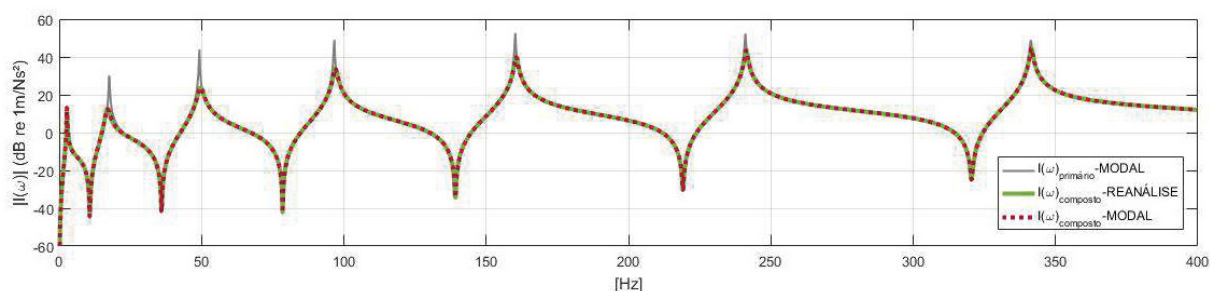


FONTE: A autora (2021)

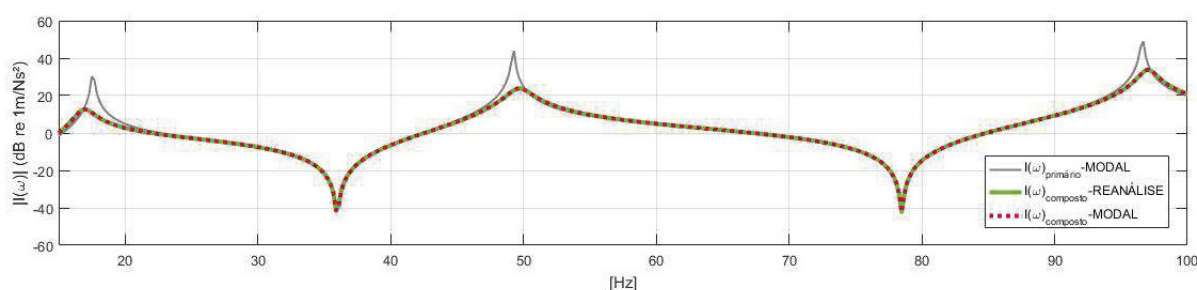
² Para melhor clareza, ilustra-se apenas uma curva obtida por um dos métodos de reanálise, pois, como se mostrou, eles convergem para a mesma resposta.

FIGURA 33 – 1ª FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO SOFTWARE LAVIBS-ND®

(a) $I(\omega)$ - COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO MODAL E REANÁLISE (0 a 400 Hz)



(b) $I(\omega)$ - COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO MODAL E REANÁLISE (15 a 100 Hz)



FONTE: A autora (2021)

5.2.2 Segunda Faixa de Frequência

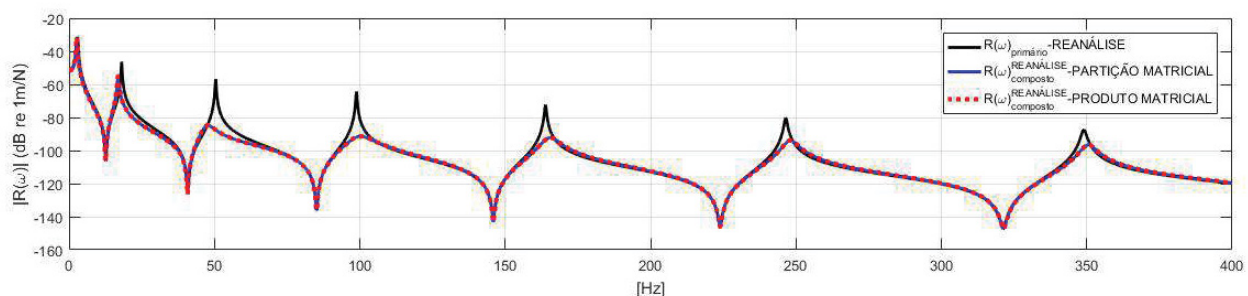
São consideradas, na segunda faixa de frequência, as mesmas curvas e gráficos apresentados anteriormente. Nessa faixa, porém, o neutralizador viscoelástico possui outras características, pertinentes à ação requerida na banda em questão.

Na FIGURA 34, são mostradas as curvas de módulo de receptância do sistema primário e do sistema composto, via modelo numérico e métodos de reanálise, respectivamente. A escala específica de frequência aqui vai de 45 Hz a 180 Hz. De novo, não se constata diferenças nas previsões via partição matricial e via produto matricial.

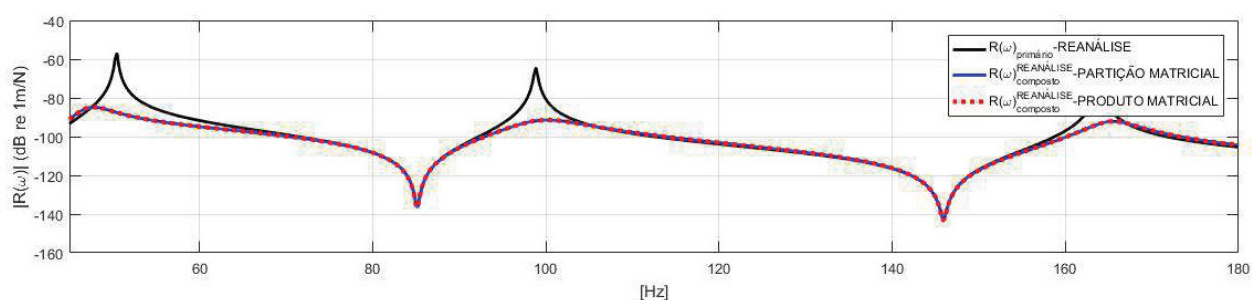
A FIGURA 35 apresenta os resultados correspondentes obtidos pelo LAVIBS-ND®. Também são usadas, nessa figura, as escalas ampliada e específica (FIGURAS 35a e 35b).

FIGURA 34 – 2ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODOS DE REANÁLISE

(a) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (0 a 400 Hz)



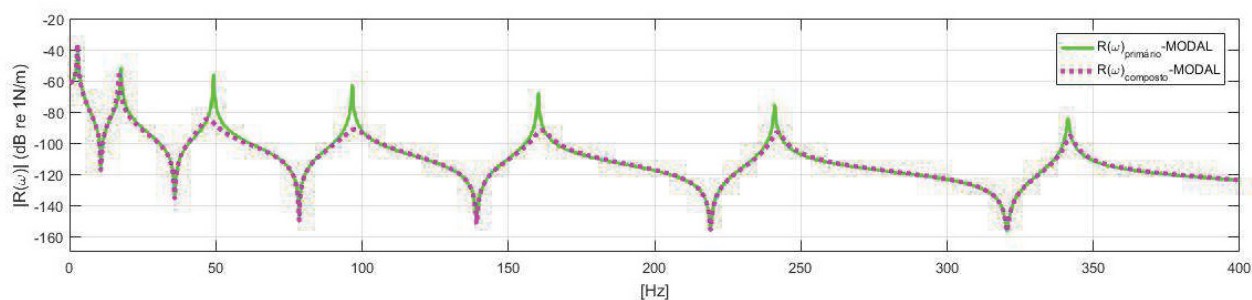
(b) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (45 a 180 Hz)



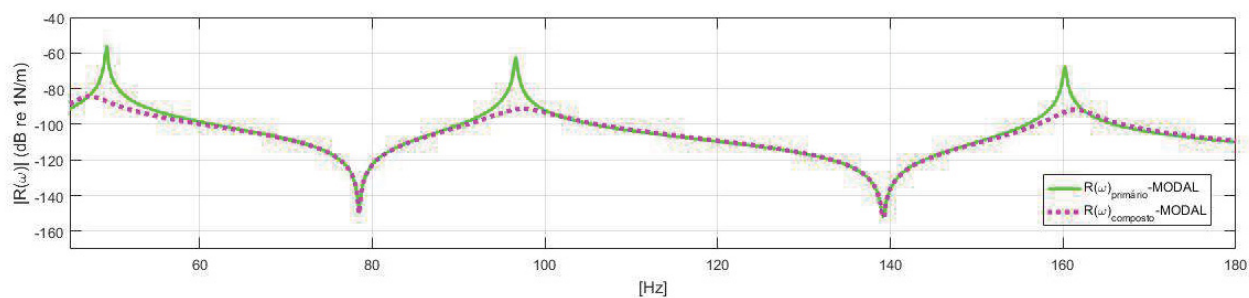
FONTE: A autora (2021)

FIGURA 35 – 2ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODO MODAL

(a) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (0 a 400 Hz)



(b) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (45 a 180 Hz)

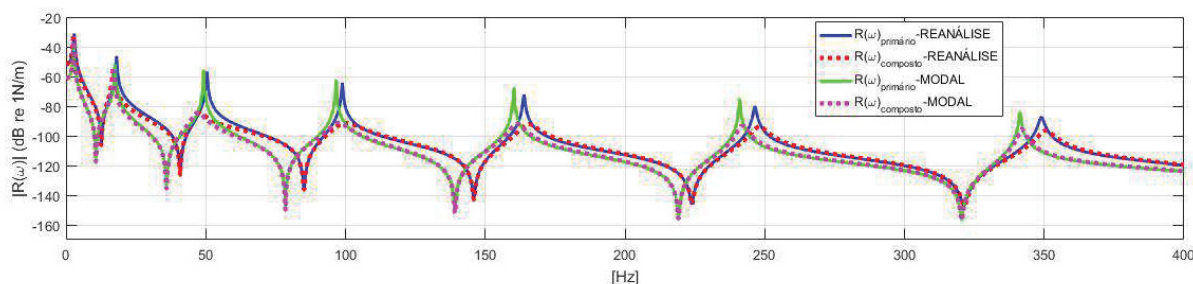


FONTE: A autora (2021)

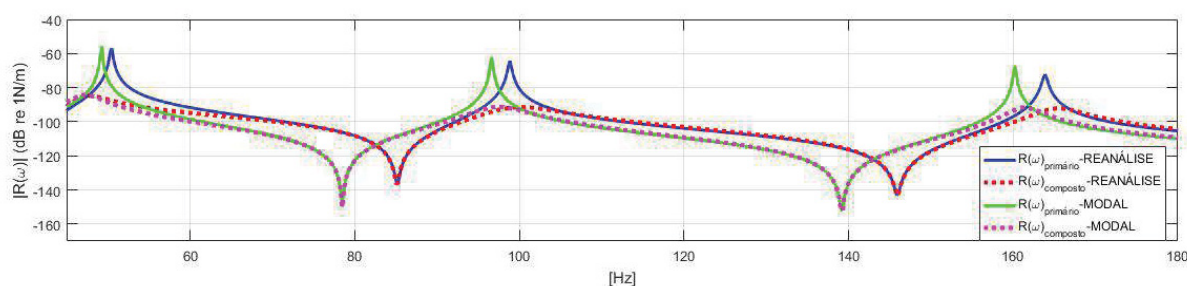
Para fins de comparação, são reunidas, na FIGURA 36, todas as curvas³ de módulo de receptância geradas anteriormente. Observa-se de novo a semelhança entre as curvas correspondentes.

FIGURA 36 – 2ª FAIXA: $R(\omega)$ –MÉTODO MODAL E $R(\omega)$ –MÉTODOS DE REANÁLISE

(a) $R(\omega)$ - 0 a 400 Hz



(b) $R(\omega)$ - 45 a 180 Hz



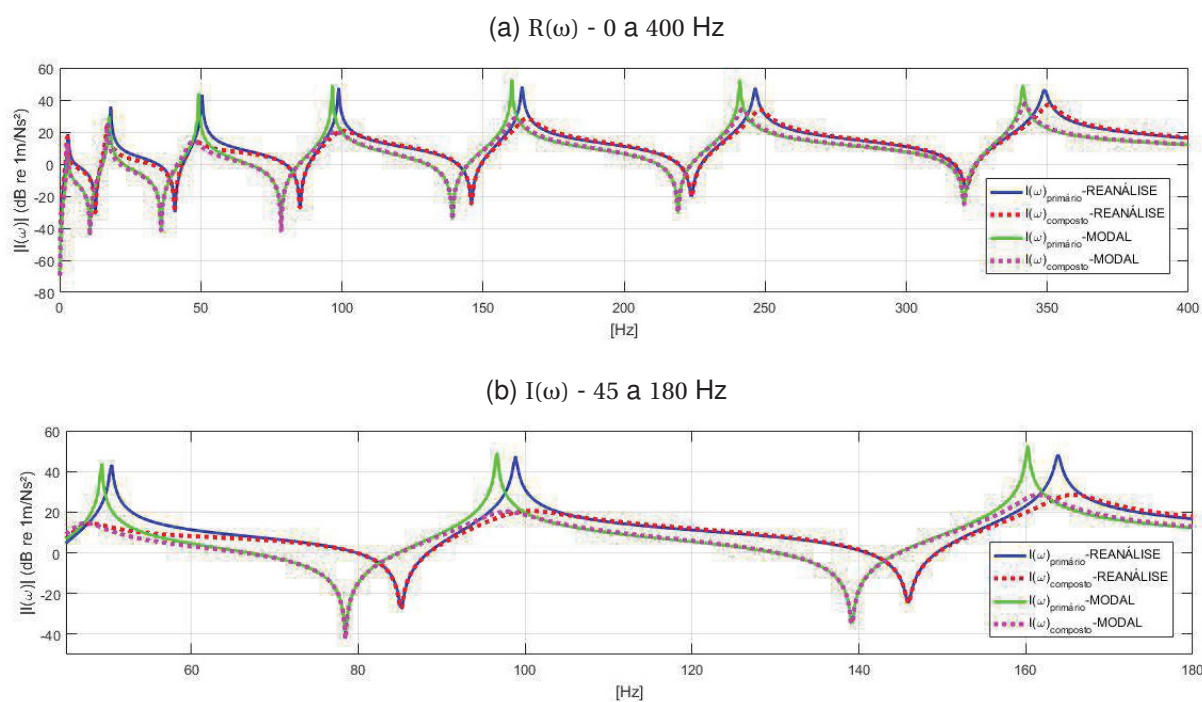
FONTE: A autora (2021)

Já a FIGURA 37 traz uma comparação análoga para as curvas de módulo de inércia.

Caso se use agora, nos métodos de reanálise investigados, a receptância pontual da viga na extremidade livre, tal como determinada pelo LAVIBS-ND[®], são obtidas as curvas⁴ de módulo de receptância do sistema composto viga e NDV da FIGURA 38. Na FIGURA 39, são comparadas as curvas correspondentes de inércia. Tal como observado na primeira faixa de frequência, não há distinção entre as previsões via métodos de reanálise e via LAVIBS-ND[®].

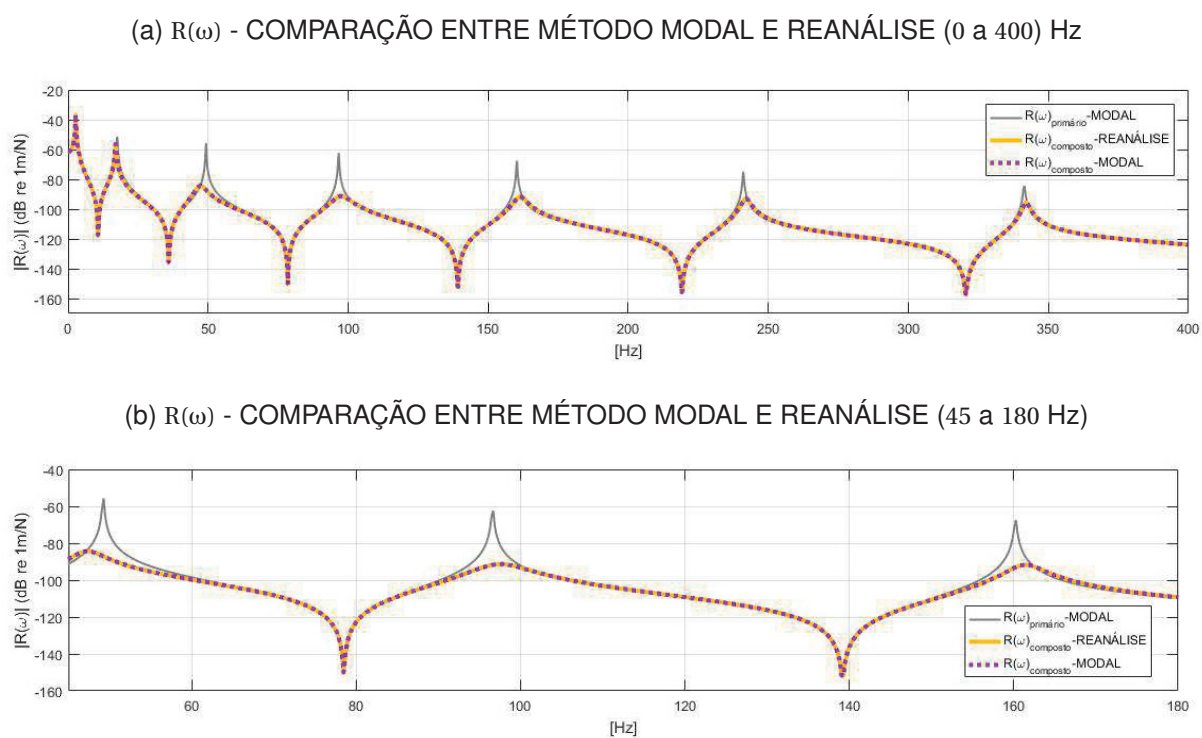
³ Para melhor clareza, ilustra-se apenas uma curva obtida por um dos métodos de reanálise, pois, como se demonstrou eles convergem para a mesma resposta.

⁴ Para melhor clareza, ilustra-se apenas uma curva obtida por um dos métodos de reanálise, pois, como se demonstrou eles convergem para a mesma resposta.

FIGURA 37 – 2ª FAIXA: $I(\omega)$ – MÉTODO MODAL E $I(\omega)$ – MÉTODOS DE REANÁLISE

FONTE: A autora (2021)

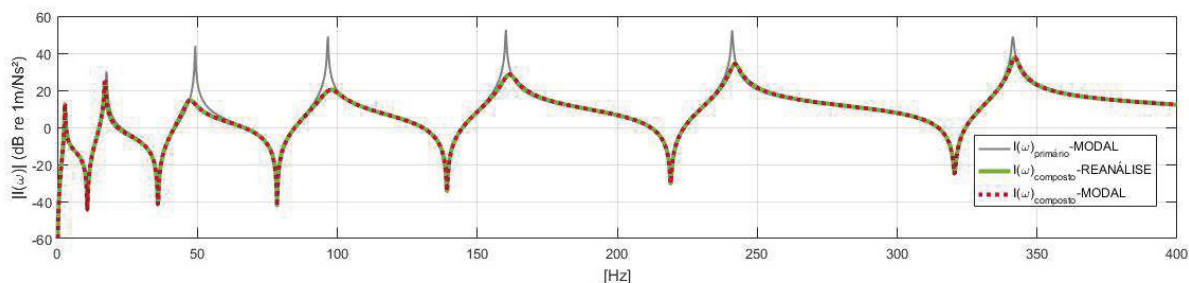
FIGURA 38 – 2ª FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO SOFTWARE LAVIBS-ND®



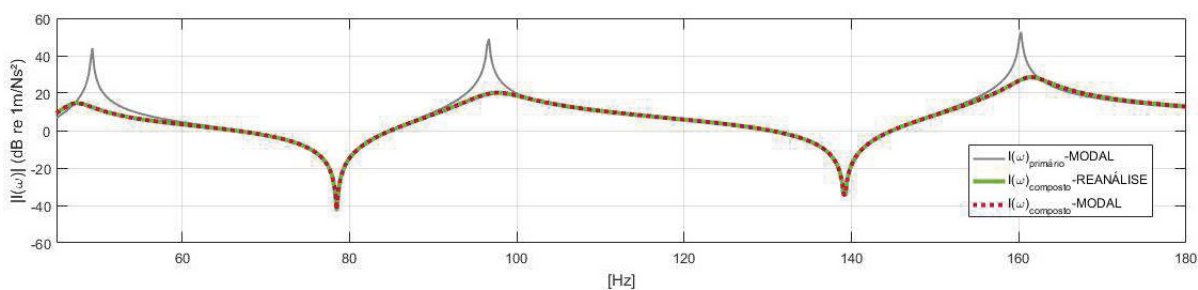
FONTE: A autora (2021)

FIGURA 39 – 2ª FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO SOFTWARE LAVIBS-ND®

(a) $I(\omega)$ - COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO MODAL E REANÁLISE (0 a 400 Hz)



(b) $I(\omega)$ - COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO MODAL E REANÁLISE (45 a 180 Hz)



FONTE: A autora (2021)

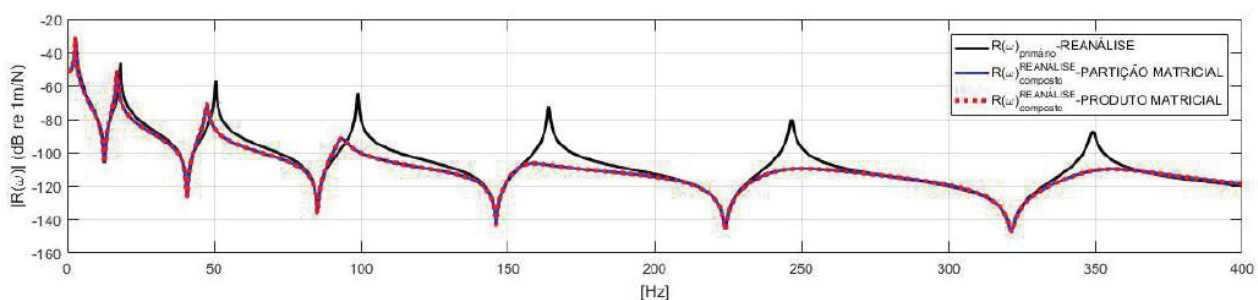
5.2.3 Terceira Faixa de Frequência

São apresentadas, por fim, as curvas correspondentes à terceira faixa de frequência considerada. Nessa faixa, a escala específica em frequência vai de 150 à 400 Hz.

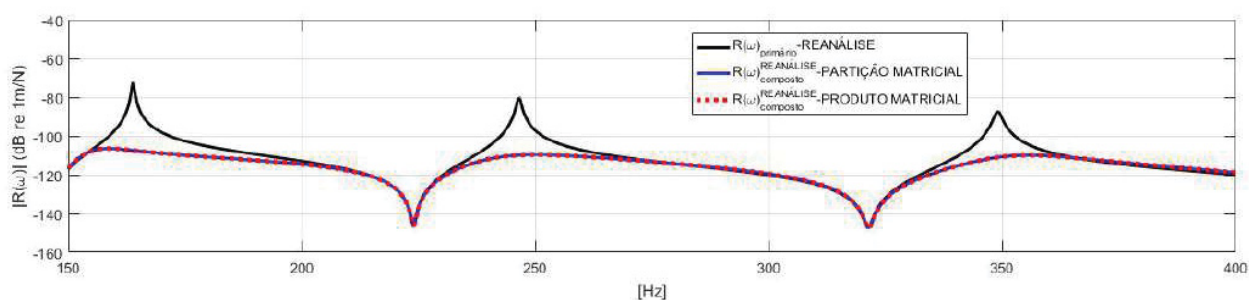
Na FIGURA 40, são mostradas as curvas de módulo de receptância dos sistema primário e composto, via, respectivamente, modelo numérico e métodos de reanálise, verificando-se, outra vez, a coincidência entre as predições dos dois métodos. Já a FIGURA 41 traz as curvas correspondentes, geradas pelo LAVIBS-ND®.

FIGURA 40 – 3ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODOS DE REANÁLISE

(a) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (0 a 400 Hz)



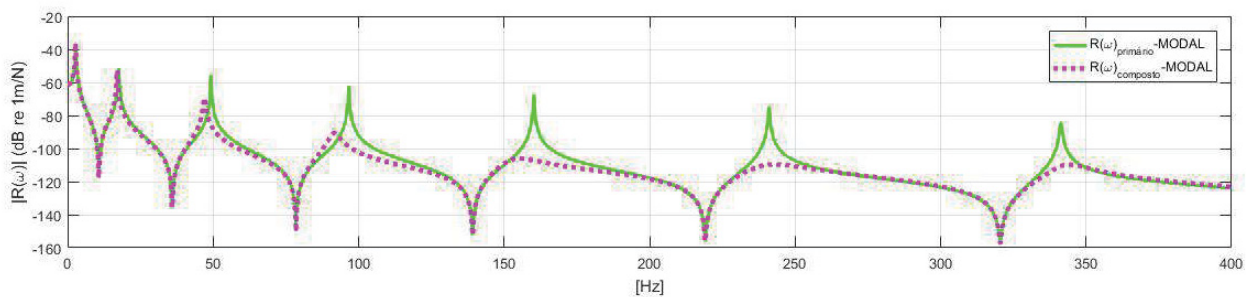
(b) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (150 a 350 Hz)



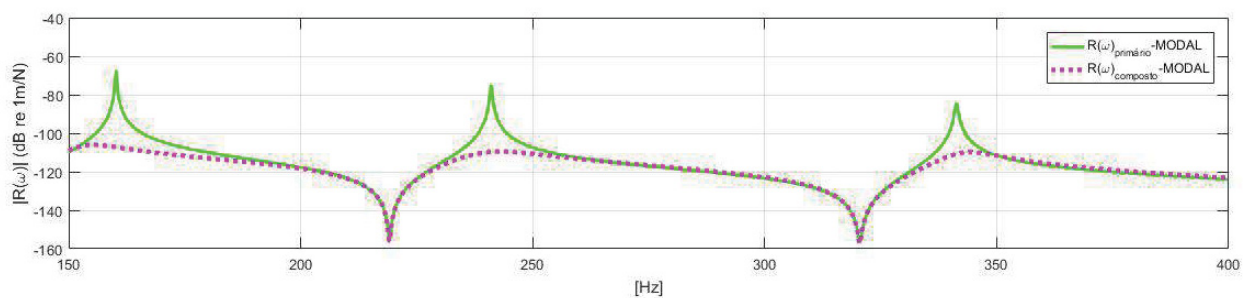
FONTE: A autora (2021)

FIGURA 41 – 3ª FAIXA: $R(\omega)$ VIA MÉTODO MODAL

(a) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (0 a 400 Hz)



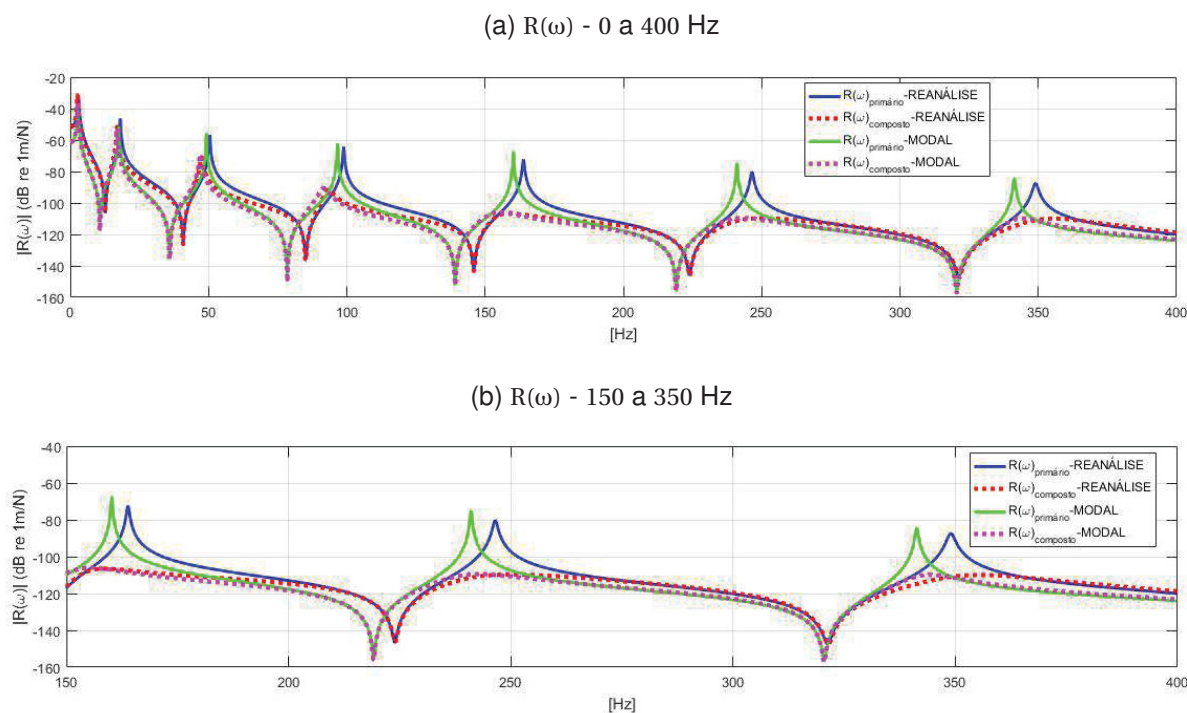
(b) SISTEMA PRIMÁRIO E SISTEMA COMPOSTO (150 a 350 Hz)



FONTE: A autora (2021)

De maneira complementar e comparativa a FIGURA 42 ilustra os resultados obtidos através dos dois métodos de reanálise e do LAVIBS-ND[®] 5 a partir da FRF receptância a FIGURA 43 os ilustra sob o ponto de vista da FRF inertância.

FIGURA 42 – 3^a FAIXA: $R(\omega)$ –MÉTODO MODAL E $R(\omega)$ –MÉTODOS DE REANÁLISE

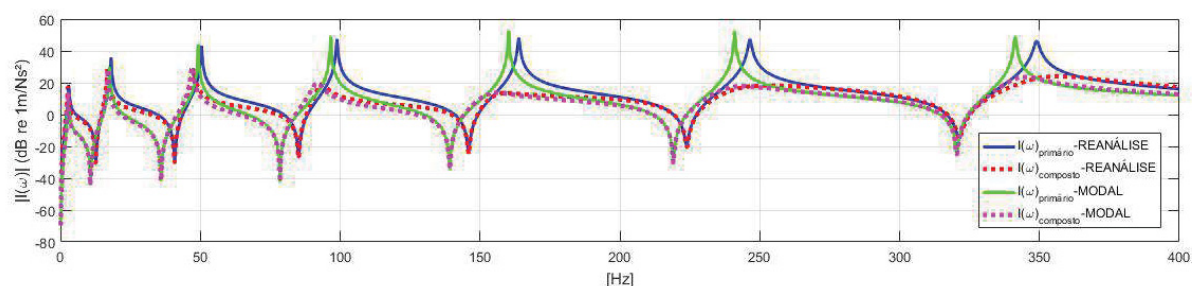
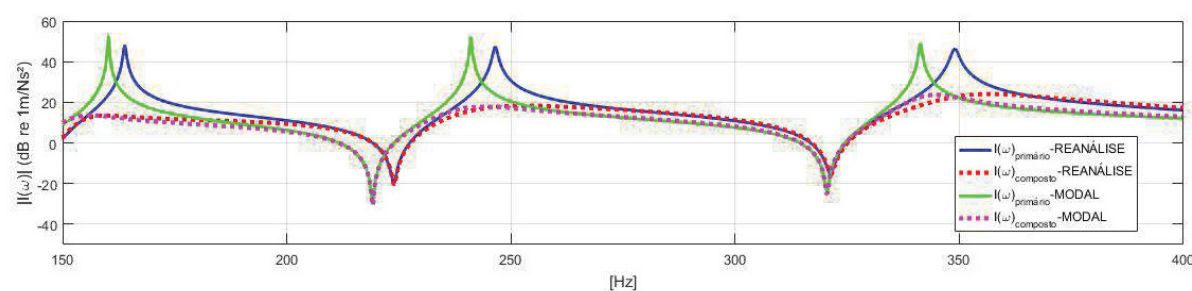


FONTE: A autora (2021)

Caso, outra vez, se recorra à receptância determinada pelo LAVIBS-ND[®] para gerar as previsões da inserção do NDV através dos métodos de reanálise, na faixa de frequência em questão, são obtidas as curvas 6 de módulo da receptância da FIGURA 44. Dessa forma, já não se observa diferença alguma entre as previsões via LAVIBS-ND[®] e métodos de reanálise, o que também se constata na FIGURA 45, para as curvas de módulo de inertância.

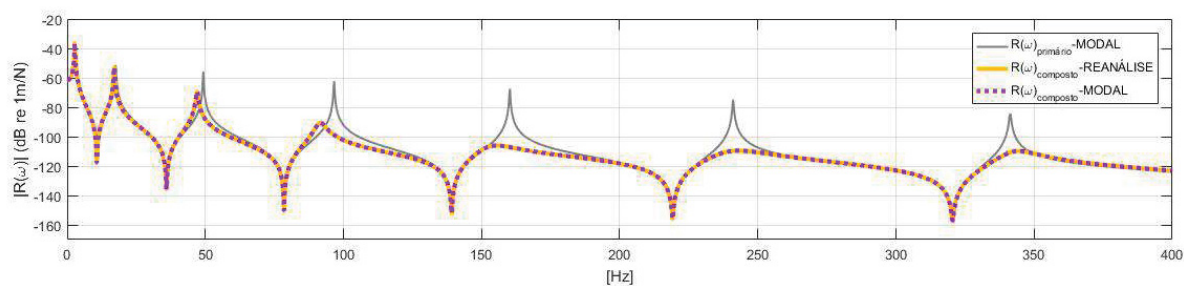
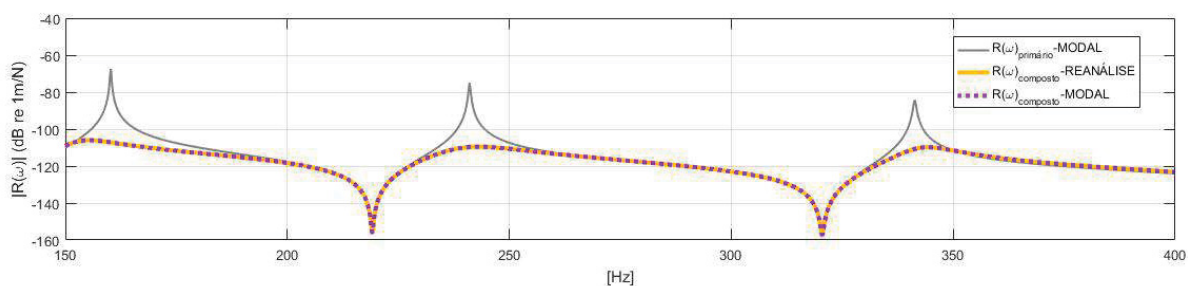
⁵ Para melhor clareza ilustra-se apenas uma curva obtida por um dos métodos de reanálise, pois como se demonstrou eles convergem para a mesma resposta.

⁶ Para melhor clareza ilustra-se apenas uma curva obtida por um dos métodos de reanálise, pois como se demonstrou eles convergem para a mesma resposta.

FIGURA 43 – 3ª FAIXA: $I(\omega)$ – MÉTODO MODAL E $I(\omega)$ – MÉTODOS DE REANÁLISE(a) $I(\omega)$ - 0 a 400 Hz(b) $R(\omega)$ - 150 a 350 Hz

FONTE: A autora (2021)

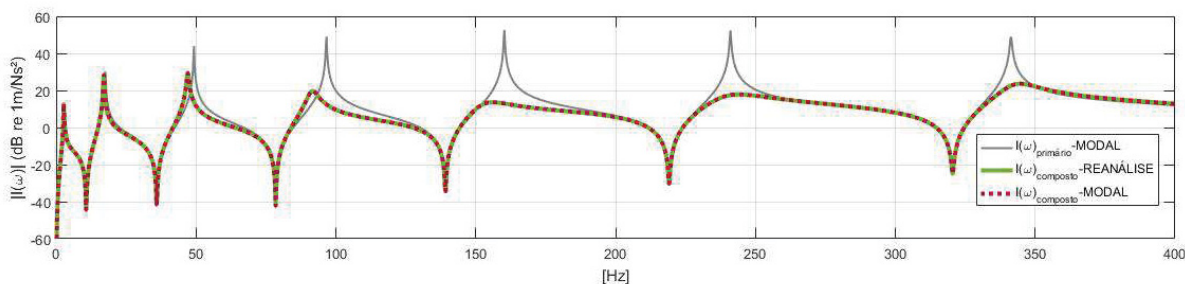
FIGURA 44 – 3ª FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO SOFTWARE LAVIBS-ND®

(a) $R(\omega)$ - COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO MODAL E REANÁLISE 0 a 400 Hz(b) $R(\omega)$ - COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO MODAL E REANÁLISE (150 a 350 Hz)

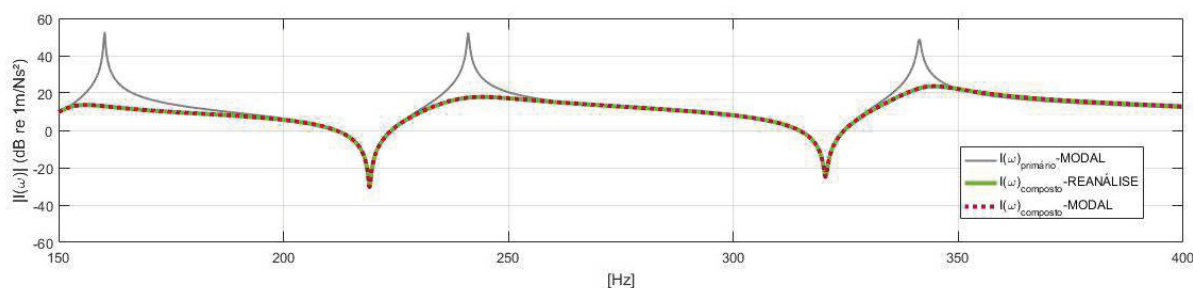
FONTE: A autora (2021)

FIGURA 45 – 3ª FAIXA: UTILIZANDO MESMO SISTEMA PRIMÁRIO USADO PELO SOFTWARE LAVIBS-ND®

(a) $I(\omega)$ - COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO MODAL E REANÁLISE (0 a 400 Hz)



(b) $I(\omega)$ - COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODO MODAL E REANÁLISE (150 a 350 Hz)



FONTE: A autora (2021)

5.3 CONSOLIDAÇÃO

Duas constatações se destacam nos resultados correspondentes às três faixas de frequência consideradas. A primeira constatação é que não há distinção entre as predições geradas pelos dois métodos de reanálise de resposta investigados, quaisquer que sejam as condições. Isso era esperado, pois ambos são métodos exatos, oriundos da Álgebra Linear.

A segunda constatação é que quando os métodos de reanálise usam a mesma informação do sistema primário que o programa LAVIBS-ND®, as predições de uma e de outra abordagem são idênticas. Quando informações distintas do sistema primário são empregadas, as predições são semelhantes, mas não idênticas.

Argumenta-se que as diferenças entre as receptâncias do sistema primário do modelo numérico e do LAVIBS-ND® decorrem das próprias abordagens distintas utilizadas por um e por outro. Uma investigação mais detalhada deve ser feita para se apontar, de forma clara, a fonte das diferenças.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES

O presente trabalho abordou a análise do comportamento dinâmico de uma viga engastada-livre, modificada pela inserção de neutralizadores dinâmicos visco-elásticos em sua extremidade livre, para controle passivo de vibrações. Para tanto, foram empregados dois métodos exatos de reanálise de resposta, quais sejam, os métodos da partição matricial e do produto matricial, que manipulam funções resposta em frequência da viga e funções que representam as modificações específicas introduzidas pelos neutralizadores. Diferentes faixas de frequência foram consideradas no estudo realizado.

Foram verificadas as predições fornecidas pelos métodos de reanálise e comparados os resultados correspondentes com aqueles fornecidos pelo programa computacional LAVIBS-ND[®]. O programa LAVIBS-ND[®] adota uma abordagem modal, já firmemente estabelecida. Dessa forma, seus resultados puderam ser usados para fins de comprovação da eficácia dos métodos de reanálise.

Constatou-se, nas investigações, que não há distinção entre as predições geradas pelo método da partição matricial e pelo método do produto matricial, o que já era esperado, pois ambos são métodos exatos, oriundos da Álgebra Linear. Constatou-se também que quando os métodos de reanálise usam a mesma informação do viga engastada-livre que o programa LAVIBS-ND[®], as predições de uma e de outra abordagem são idênticas, o que pontua favoravelmente para os métodos estudados.

Ambos os métodos possuem suas vantagens e desvantagens, sendo o uso do método de reanálise por partição matricial mais favorável quando o interesse se dá no mesmo ponto onde é feita a modificação. Já o método de reanálise por produto matricial é mais trabalhoso porém permite a investigação de todos os pontos da estrutura independentemente do ponto de modificação.

Entende-se que os métodos da partição matricial e do produto matricial apresentam ótimo desempenho na avaliação expedita e simples da eficácia de neutralizadores viscoelásticos. Vislumbra-se que a aplicação desses métodos possa ser estendida para a avaliação de outros dispositivos viscoelásticos e também para a busca de parâmetros ótimos de dispositivos em geral, com vistas controle de vibrações.

6.2 SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

As sugestões aqui indicadas são restritas aos métodos de reanálise de resposta investigados e sua aplicação. A primeira, e imediata, sugestão é que sejam construídos e implementados os neutralizadores viscoelásticos com suportes flutuantes, expostos no APÊNDICE B, visando o controle de vibrações da viga engastada-livre, nas três faixas de frequência consideradas. Esses dispositivos, cujo desenvolvimento foi iniciado no presente trabalho, revelam-se como de aplicação bastante versátil em relação a outras concepções, particularmente quando o controle de vibrações é requerido em baixas frequências. De posse dos resultados dessa ação, será possível avaliar a qualificação das predições fornecidas pelos métodos de reanálise.

A segunda sugestão é empregar nos métodos de reanálise de resposta, de forma direta, receptâncias pontuais experimentais, associadas às localizações em que se pretenda inserir neutralizadores viscoelásticos. Embora as receptâncias experimentais possam apresentar eventuais problemas quanto à sua “suavidade” (o que não ocorre, por exemplo, com aquelas oriundas de modelos numéricos), trata-se de uma investigação interessante, face à sua eventual aplicação prática futura. Benefícios e limitações decorrentes poderão ser mais claramente evidenciados.

Outros insertos viscoelásticos, como elos e camadas constringidas, também podem ser modelados de forma a serem investigados pelos métodos de reanálise estudados nesta dissertação. A terceira sugestão é exatamente estender o uso dos métodos para outros meios de controle de vibrações por materiais viscoelásticos.

Por fim, a quarta sugestão é aplicar os métodos de reanálise de resposta não só para predizer e avaliar os efeitos de modificações por dispositivos viscoelásticos mas também para determinar parâmetros ótimos para o projeto desses dispositivos. Como se disporá das receptâncias atuais e das receptâncias decorrentes das modificações, entende-se ser factível buscar parâmetros ótimos que, a partir dessas informações, alcancem objetivos pré-determinados de interesse.

REFERÊNCIAS

- ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 3rd. San Diego, USA: Academic Press, 2012.
- AVITABILE, P. Twenty years of structural dynamic modification - a review. **Sound and Vibration**, [Bay Village, Ohio, Acoustical Publications, inc.], v. 37, n. 1, p. 14–27, 2003.
- BAVARESCO, M. W. **Development of an adjustable neutraliser for passive vibration control**. 2019. Dissertação de mestrado – Universidade Federal do Paraná.
- BAVASTRI, C. A. **Redução de Vibrações de Banda Larga em Estruturas Complexas por Neutralizadores Viscoelásticos**. 1997. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC.
- BIERENS, H. J. **The inverse of a partitioned matrix**. University Park, PA: Lecture notes, 2014. Disponível em: <<https://bit.ly/37N0Bdr>>. Acesso em: 14 dez. 2018.
- BOZZ, L. B. **Optimal design of viscoelastic dynamic neutralizers using operational modal parameters**. 2019. Dissertação de mestrado – Universidade Federal do Paraná.
- BRANDON, J. A. **Strategies for Structural Dynamic Modification**. Cardiff: School of Engineering, University of Wales, College of Cardiff, 1990.
- CAIXU, Y. et al. A review of chatter vibration research in milling. **Chinese Journal of Aeronautics**, Elsevier, v. 32, n. 2, p. 215–242, 2019.
- CARBONO, A. J. J. **Otimização da Disposição de Linhas de Ancoragem Utilizando Algoritmos Genéticos**. 2005. Dissertação de mestrado – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- COSTA, N. C. **Análise Modal Operacional (OMA)**. São Paulo: Brüel & Kjaer, 2017.
- DUBEUX, V. J. C. **Técnicas de Programação Não Linear para Otimização de Grande Porte**. 2005. Tese (Doutorado) – COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.
- ESPÍNDOLA, J. J.; SILVA, H. P. Modal reduction of vibrations by dynamic neutralizers. **International Modal Analysis Conference**, p. 1367–1373, 1992.
- EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory, Practice and Application**. London, England: RESEARCH STUDIES PRESS LTD, 2000. v. 2.
- FREAKLEY; PAYNE. **Theory and practice of engineering with rubber**. Londres: Applied Science Publishers, 1978.
- HALLQUIST, J.; SNYDER, V. Synthesis of two discrete vibratory systems using eigenvalue modification. **AIAA journal**, v. 11, n. 2, p. 247–249, 1973.

HATCH, M. R. **Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS**. New York Washington, D.C.: CHAPMAN & HALL/CRC, 2001.

HE, J. Structural modification. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 359, n. 1778, p. 187–204, 2001.

HE, J.; FU, Z. **Modal Analysis**. Jordan Hill: Butterworth-Heinemann, out. 2001. ISBN 0750650796. Disponível em: <<https://www.xarg.org/ref/a/0750650796/>>.

IMÃ, CASA DO. **Casa do Imã Produtos Magnéticos e Vibratórios**. Curitiba: Ltda, 2021. Disponível em: <<https://www.casadoima.com.br/ima-neodimio/anel-de-neodimio-n42-o9-5-x-o3-5-x-1-5-mm>>. Acesso em: 6 ago. 2021.

INMAN, D. J. **Engineering Vibration**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1994.

JAFRI, H. Z.; MOHAMMAD, A. Structural Dynamic Modification Using Discrete Models. **Innovative Product Design & Development**, IJSER, p. 158, 2017.

JONES, R.; IBERLE, K. Structural modification - a comparison of techniques. International Modal Analysis Conference, v. 1, p. 59–65, 1986.

KIRSCH, U. **Reanalysis of structures - A Unified Approach for Linear, Nonlinear, Static and Dynamic Systems**. Dordrecht: Springer, 2008. DOI: 10.1007/978-3-642-84845-2.

_____. **Structural optimization: fundamentals and applications**. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 1993.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. Columbus, Ohio: JOHN WILEY & SONS, INC, 2006. v. 9.

LOPES, E. M. O. **On the Experimental Response Reanalysis of Structures with Elastomeric Materials**. 1998. Tese (Doutorado) – University of Wales Cardiff, Cardiff, País de Gales.

LOPES, E. M. O. et al. Caracterização dinâmica integrada de elastômeros por derivadas generalizadas. the III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM), 2004.

MEAD, D. J. **Passive Vibration Control**. Chichester: John Wiley & Sons, 1999.

MEDEIROS JÚNIOR, W. B. et al. On an integrated dynamic characterization of viscoelastic materials by fractional derivate and GHM models. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Scielo Brasil, São Paulo, v. 16, n. 2, 2019.

MEIROVITCH, L. **Fundamentals of Vibrations**. London: Waveland Press, 2010.

MOTTERSHEAD, J. E.; LINK, M.; FRISWELL. The sensitivity method in finite element model updating: a tutorial. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 25, n. 7, p. 2275–2296, 2011.

NASHIF A. D. JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P. **Vibration Damping**. New York: John Wiley & Sons, 1985.

ÖZGÜVEN, H. N. A new method for harmonic response of non-proportionally damped structures using undamped modal data. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 117, n. 2, p. 313–328, 1987.

_____. Determination of receptances of locally damped structures. Proceedings of the Second International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, v. 2, p. 887–892, 1984.

_____. Structural modifications using frequency response functions. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 4, n. 1, p. 53–63, 1990.

POMAZAL, R. J.; SNYDER, V. W. Local modifications of damped linear systems. **AIAA Journal**, v. 9, n. 11, p. 2216–2221, 1971.

PRITZ, T. Loss factor peak of viscoelastic materials: magnitude to width relations. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 246, n. 2, p. 265–280, 2001.

RAO. **Engineering optimization: theory and practice**. UK: John Wiley & Sons, 2019.

_____. **Vibrações Mecânicas**. São Paulo, SP: Pearson Education, 2009.

RODRIGUES, I. F. **Metodologia numérica para projeto de neutralizador dinâmico viscoelástico do tipo sanduíche tubular**. 2016. Dissertação de mestrado – Universidade Federal do Paraná.

SEVERO, L. C.; GIRARDI, A. Projeto automatico de blocos analogicos integrados usando metodos de otimizacao nao-linear. **XV Workshop Iberchip**, 2009. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/238080615_Projeto_Automatico_de_Blocos_Analogicos_Integrados_Usando_Metodos_de_Otimizacao_Nao-Linear>. Acesso em: 28 dez. 2021.

SILVA, F. E. C. **Projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos com múltiplos graus de liberdade considerando os parâmetros físicos, localização e material viscoelástico**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.

SNOWDON, J.C. **Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems**. UK: John Wiley & Sons Inc, ago. 1968. ISBN 0471810002. Disponível em: <<https://www.xarg.org/ref/a/0471810002/>>.

SOARES, I. G. **Análise experimental de um neutralizador viscoelástico com múltiplos graus de liberdade**. 2018. Monografia de graduação – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.

TELES, M. L.; GOMES, H. M. Comparação de algoritmos genéticos e programação quadrática seqüencial para otimização de problemas em engenharia. **Teoria e Prática na Engenharia Civil**, v. 10, n. 15, p. 29–39, 2010.

TSAI, S.-H.; OUYANG, H.; CHANG, J.-Y. Inverse structural modifications of a geared rotor-bearing system for frequency assignment using measured receptances. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 110, p. 59–72, 2018.

WEISSENBURGER, J. T. Effect of Local Modifications on the Vibration Characteristics of Linear Systems. **Journal of Applied Mechanics**, ASME International, v. 35, n. 2, p. 327–332, jun. 1968. DOI: 10.1115/1.3601199. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3601199>>.

ZUO, W. et al. Sensitivity reanalysis of vibration problem using combined approximations method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 55, n. 4, p. 1399–1405, 2016.

APÊNDICES

APÊNDICE A – EXEMPLOS NUMÉRICOS DE REANÁLISE DE RESPOSTA

São incluídos, neste apêndice, alguns exemplos numéricos correspondentes aos métodos de reanálise de resposta abordados na dissertação. Busca-se, com esses exemplos, ilustrar, de forma simplificada, o funcionamento dos métodos.

A.1 PARTIÇÃO MATRICIAL

Apresenta-se aqui um exemplo numérico do método de reanálise de resposta denominado partição matricial, utilizando matrizes hipotéticas de quarta ordem. Face ao contexto de interesse, parte-se da existência de duas matrizes, $[A]$ e $[B]$, em que $[B] = [A]^{-1}$. São indicadas, abaixo, a matriz original $[B]$ e a matriz reduzida correspondente, $[B]_{2 \times 2}$, contendo apenas os valores nas posições em que haverá alterações na matriz $[A]$.

$$[B] = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & \boxed{3} & 7 & \boxed{7} \\ 1 & 6 & 8 & 10 \\ 14 & \boxed{7} & 9 & \boxed{10} \end{bmatrix}$$


$$[B]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} B_{22} & B_{24} \\ B_{42} & B_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{7} \\ \boxed{7} & \boxed{10} \end{bmatrix}$$

É indicada na sequência, a matriz de modificação $[\Delta A]$ em sua forma completa, ou seja, com ordem 4×4 . Indica-se ainda a matriz de modificação $[\Delta A]_{2 \times 2}$, que representa, de forma compacta e específica, as alterações a serem feitas na matriz original $[A]$.

$$[\Delta A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[\Delta A]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \Delta A_{22} & \Delta A_{24} \\ \Delta A_{42} & \Delta A_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Como $[B]^{-1} = [A]$, tem-se, em associação com o exposto no CAPÍTULO 3, subseção 3.2.1, que a matriz $[B]^*$, decorrente das alterações na matriz $[A]$, pode ser dada por

$$[B]^* = \left[[B]^{-1} + [\Delta A] \right]^{-1} \quad (\text{A.1})$$

o que resulta, no presente exemplo em que as matrizes originais têm ordem (4×4) e as matrizes reduzidas ordem (2×2) , em

$$[B]^* = \begin{bmatrix} 6.4251 & 0.2271 & -4.3768 & -0.2077 \\ 0.9565 & 0.2609 & -0.3478 & -0.2174 \\ -10.5362 & -0.1159 & -0.9565 & 0.3188 \\ -1.7295 & -0.4010 & 0.9420 & 0.6860 \end{bmatrix}$$

Como foi demonstrado na subseção 3.2.1, quando se tem interesse apenas nas posições em que há alterações na matriz original $[A]$, é possível obter os elementos da matriz inversa correspondente nessas posições através da equação

$$[B]_{2 \times 2}^* = \left[[B]_{2 \times 2}^{-1} + [\Delta A]_{2 \times 2} \right]_{2 \times 2}^{-1} \quad (\text{A.2})$$

Assim, face aos valores numéricos apresentados anteriormente, tem-se que

$$\begin{bmatrix} B_{22}^* & B_{24}^* \\ B_{42}^* & B_{44}^* \end{bmatrix} = \left[\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \right)^{-1} + \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2609 & -0,2174 \\ -0,4010 & 0,6860 \end{bmatrix}$$

o que confere com o resultado apresentado anteriormente, nos pontos pertinentes, como ressaltado abaixo, por clareza e conveniência.

$$[B]^* = \begin{bmatrix} 6.4251 & 0.2271 & -4.3768 & -0.2077 \\ 0.9565 & \boxed{0.2609} & -0.3478 & \boxed{-0.2174} \\ -10.5362 & -0.1159 & -0.9565 & 0.3188 \\ -1.7295 & \boxed{-0.4010} & 0.9420 & \boxed{0.6860} \end{bmatrix}$$

$$[B]_{2 \times 2}^* = \begin{bmatrix} \boxed{0.2609} & \boxed{-0.2174} \\ \boxed{-0.4010} & \boxed{0.6860} \end{bmatrix}$$

Ilustra-se assim, com o exemplo em questão, que não é necessário o conhecimento da matriz original completa $[B]$ para se analisar os efeitos de alterações pontuais na matriz inversa associada $[A]$. Quando se deseja apenas saber, em $[B]$, os efeitos nas posições correspondentes às alterações em $[A]$, basta conhecer os valores associados às alterações, além dos valores das alterações em si (que constituem, então, uma modificação na matriz $[A]$).

A.2 PRODUTO MATRICIAL

Apresenta-se aqui um exemplo numérico do método de reanálise de resposta denominado produto matricial, utilizando novamente matrizes hipotéticas de quarta ordem designadas por $[A]$ e $[B]$, sendo que $[B] = [A]^{-1}$.

São indicadas abaixo a matriz original $[B]$ e a matriz completa ΔA , contendo as alterações a serem realizadas na matriz original $[A]$. São elas

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$[\Delta A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que a matriz $[B]^*$, face às alterações na matriz $[A]$, é dada por

$$[B]^* = \left[[A] + [\Delta A] \right]^{-1} \quad (\text{A.3})$$

Como $[A] = [B]^{-1}$, tem-se que

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{8} & \frac{-2}{8} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{4}{8} \end{bmatrix}$$

e, face às alterações, que

$$[B]^* = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{8} & \frac{-2}{8} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{4}{8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$[B]^* = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{30}{8} & \frac{22}{8} \\ 0 & 0 & 6 & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6452 & -0,2366 \\ 0 & 0 & -0,5161 & 0,3226 \end{bmatrix}$$

Utilizando as equações expostas no CAPÍTULO 3, subseção 3.2.2, é possível escrever a matriz completa $[\Delta A]_{4 \times 4}$ como a multiplicação de duas matrizes $[U]$ e $[V]$ tais que, no caso das alterações propostas neste exemplo, possuem as seguintes ordens

- $U_{4 \times 2} \rightarrow$ primeira matriz do produto matricial;
- $V_{2 \times 4} \rightarrow$ segunda matriz do produto matricial.

No presente exemplo, para

$$[V] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$[U] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

decorre que

$$[\Delta A] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Também de acordo com o exposto na subseção 3.2.2, pode-se, determinar uma matriz $[W]$ tal que,

$$[W]_{2 \times 2} = [I]_{2 \times 2} + \left[[V]_{2 \times 4} \times [B]_{4 \times 4} \times [U]_{4 \times 2} \right] \quad (\text{A.4})$$

Realizando as operações correspondentes obtém-se

- $[V] \times [B]$

$$[V] \times [B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

- $[V] \times [B] \times [U]$

$$\left([V] \times [B] \right) \times [U] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 12 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 56 \\ 36 & 56 \end{pmatrix}$$

- $[W]$

$$[W] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36 & 56 \\ 36 & 56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (36+1) & 56 \\ 36 & (56+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 56 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}$$

- $[W]^{-1}$

$$[W]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,6129 & -0,6021 \\ -0,3870 & 0,3978 \end{bmatrix}$$

Portanto, ainda como exposto na subseção 3.2.2, para

$$[B]^* = [B] - [B] \times [U] \times [W]^{-1} \times [V] \times [B] \quad (A.5)$$

tem-se, realizado novamente as operações em sequência, que

- $[B] \times [U]$

$$[B] \times [U] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10 & 16 \\ 26 & 40 \end{pmatrix}$$

- $\left([B] \times [U]\right) \times [W]^{-1}$

$$\left([B] \times [U]\right) \times [W]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 10 & 16 \\ 26 & 40 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,6129 & -0,6021 \\ -0,3870 & 0,3978 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0645 & 0,3440 \\ 0,4516 & 0,2580 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \left([B] \times [U] \times [W]^{-1} \right) \times [V]$$

$$\left([B] \times [U] \times [W]^{-1} \right) \times [V] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0645 & 0,3440 \\ 0,4516 & 0,2580 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2795 & 0,2795 \\ 0 & 0 & 0,7096 & 0,7096 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \left([B] \times [U] \times [W]^{-1} \times [V] \right) \times [B]$$

$$\left([B] \times [U] \times [W]^{-1} \times [V] \right) \times [B] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2795 & 0,2795 \\ 0 & 0 & 0,7096 & 0,7096 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,3548 & 2,2365 \\ 0 & 0 & 8,5161 & 5,6774 \end{pmatrix}$$

Retomando a EQUAÇÃO A.5, qual seja,

$$[B]^* = [B] - \left[[B] \times [U] \times [W]^{-1} \times [V] \times [B] \right]$$

resulta que

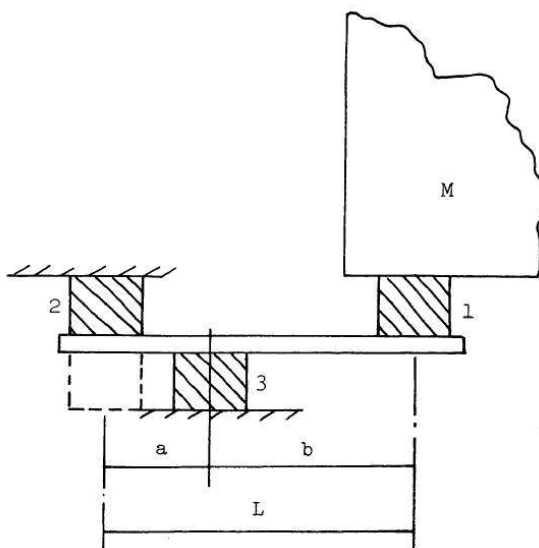
$$[B]^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,3548 & 2,2365 \\ 0 & 0 & 8,5161 & 5,6774 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6451 & -0,2365 \\ 0 & 0 & -0,5161 & 0,3225 \end{bmatrix}$$

O resultado acima é, a menos de algumas diferenças de arredondamento, igual ao apresentado anteriormente para a matriz $[B]^*$. Observa-se que, no método do produto matricial, toda a matriz modificada $[B]^*$ é obtida, o que não ocorre no método da partição matricial.

APÊNDICE B – ANTEPROJETO DE NEUTRALIZADOR COM SUPORTES FLUTUANTES

Apresenta-se, neste apêndice, uma nova concepção de NDV que permite que frequências ótimas de interesse sejam alcançadas com elementos viscoelásticos de dimensões factíveis de fabricação, trabalhando à compressão. Além disso, há, nessa concepção, a possibilidade de sintonização do dispositivo, face a uma relativa liberdade de posicionamento dos elementos dentro dele. Essa concepção é denominada de NDV com suporte flutuante, em vista da inspiração decorrente do conjunto isolador de vibrações com abas flutuantes (FREAKLEY; PAYNE, 1978), ilustrado na FIGURA 46.

FIGURA 46 – CONJUNTO ISOLADOR COM ABAS FLUTUANTES



FONTE: Freakley e Payne (1978)

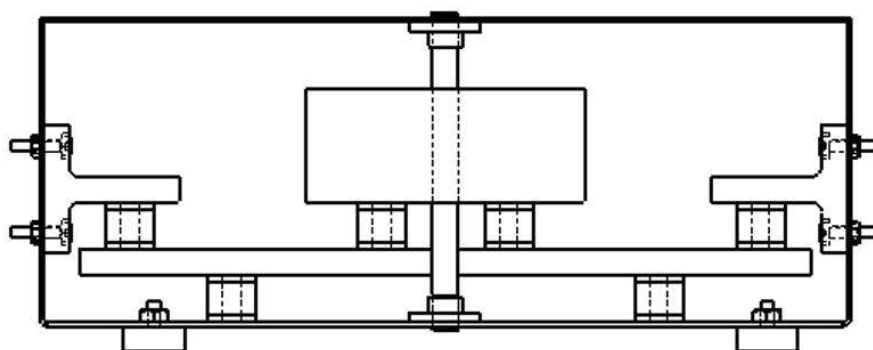
Salienta-se preliminarmente que os elementos viscoelásticos à compressão podem assumir distintas formas geométricas, como prismáticas, cilíndricas, anulares e outras. A escolha da forma a ser usada tem a ver com a rigidez pretendida para o dispositivo e com a sua estabilidade e robustez. São expostos, na sequência, os conceitos fundamentais associados ao dispositivo, a metodologia de dimensionamento de componentes e um exemplo ilustrativo, com os desenhos construtivos correspondentes, para o caso de um dos NDVs considerados na dissertação.

B.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Para introduzir os conceitos fundamentais, apresenta-se, na FIGURA 47, uma vista frontal do neutralizador com suporte flutuante, onde alguns elementos viscoelásticos são fixados ao suporte flutuante por meio de ímãs, visando a sintonização do dispositivo. Já a FIGURA 48 ilustra apenas o lado esquerdo do dispositivo, visto que o

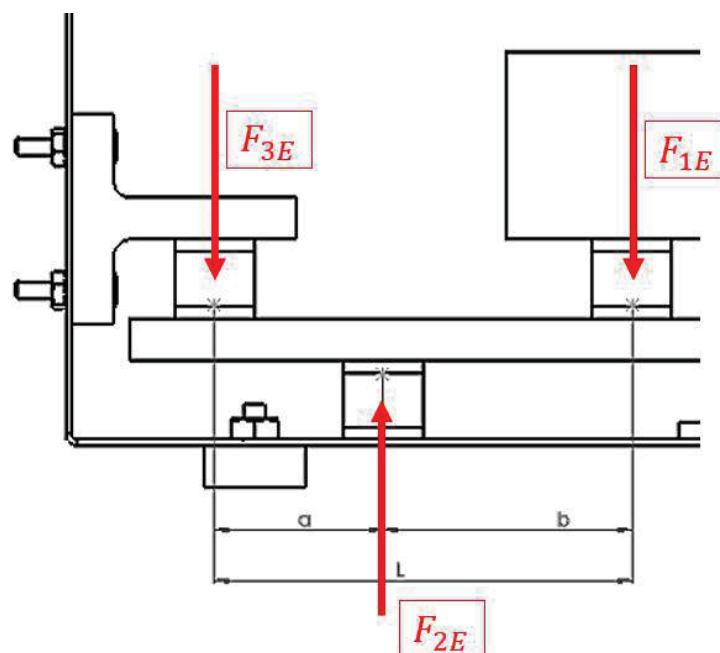
lado direito é espelhado, possuindo as mesmas características. Abaixo é demonstrado o equacionamento vetorial de forças e momentos do equipamento.

FIGURA 47 – NEUTRALIZADOR VISCOELÁSTICO COM SUPORTES FLUTUANTES



FONTE: A autora (2021)

FIGURA 48 – LADO ESQUERDO DO NVE COM SUPORTES FLUTUANTES



FONTE: A autora (2021)

Aplicando as equações de equilíbrio estático no sistema estrutural ilustrado na FIGURA 48, tem-se que

$$\sum F = 0 \quad \therefore -F_{1E} + F_{2E} + F_{3E} = 0 \quad (\text{B.1a})$$

$$\sum M = 0 \quad \therefore -(F_{2E} \times a) + (F_{1E} \times L) = 0 \quad (\text{B.1b})$$

donde decorre, da EQUAÇÃO B.1b, que

$$(a \times F_{2E}) = (F_{1E} \times L)$$

e, portanto,

$$F_{2E} = F_{1E} \times \left(\frac{L}{a}\right) \quad (\text{B.2})$$

Já da EQUAÇÃO B.1b, tem-se que

$$F_{3E} = F_{2E} - F_{1E}$$

o que, face ao encontrado na EQUAÇÃO B.2, fornece, em sequência,

$$F_{3E} = \left(F_{1E} \times \frac{L}{a}\right) - F_{1E},$$

$$F_{3E} = F_{1E} \times \left(\frac{L}{a} - 1\right),$$

e

$$F_{3E} = F_{1E} \times \left[\frac{(L - a)}{a}\right]$$

Como $L = a + b$ e, portanto $L - a = b$, decorre que

$$F_{3E} = F_{1E} \times \left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{B.3})$$

A deflexão total da massa do dispositivo (bloco central interno na FIGURA 47), indicado por x_t , resulta da soma das deformações nos elementos viscoelásticos, trazidas para a posição da massa do dispositivo. Esses elementos, para os fins do presente cálculo, podem ser modelados por molas, como ilustrado na FIGURA 49 e na FIGURA 50. As deformações nas molas e sua repercussões em deslocamentos na massa do dispositivo podem ser calculadas como se segue.

- Deformação na mola 1E

$$x_1 = \frac{F_{1E}}{K_{1E}} \quad (B.4)$$

onde

F_{1E}	→ Força atuando na mola 1E;
K_{1E}	→ Rigidez da mola 1E;
x_{1E}	→ Deformação da mola 1E.

- Deformação na mola 2E

Como ilustra a FIGURA 49, do mesmo modo que na mola 1E, tem-se, para a mola 2E, que

$$y_2 = \frac{F_{2E}}{K_{2E}} \quad (B.5)$$

onde

F_{2E}	→ Força atuando na mola 2E;
K_{2E}	→ Rigidez da mola 2E;
y_{2E}	→ Deformação na mola 2E.

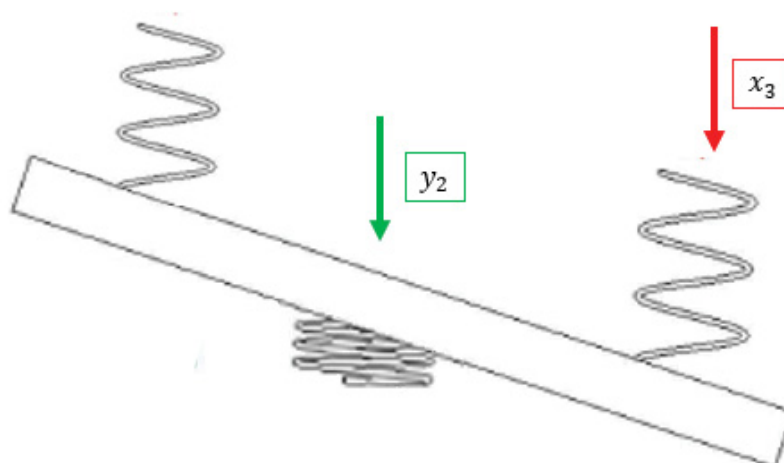
Ocorre que, por semelhança de triângulos,

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{a}{L} \quad (B.6)$$

donde decorre que

$$x_2 = \frac{L}{a} \times y_2 \quad (B.7)$$

FIGURA 49 – DEFORMAÇÃO RELATIVA NA MOLA 2E



FONTE: A autora (2021)

Substituindo a EQUAÇÃO B.2 na EQUAÇÃO B.5, tem-se

$$y_2 = \frac{\left(F_{1E} \times \frac{L}{a}\right)}{K_{2E}} \quad (B.8)$$

enquanto que substituindo a EQUAÇÃO B.8 na EQUAÇÃO B.7, tem-se

$$x_2 = \frac{L}{a} \times \left[\frac{\left(F_{1E} \times \frac{L}{a}\right)}{K_{2E}} \right]$$

ou ainda

$$x_2 = \frac{F_{1E}}{K_{2E}} \times \left(\frac{L}{a}\right)^2 \quad (B.9)$$

- Deformação na mola 3E

Como ilustra a FIGURA 50, do mesmo modo que na mola 1E e na mola 2E, tem-se, para a mola 3E, que

$$y_3 = \frac{F_{3E}}{K_{3E}} \quad (B.10)$$

onde

- F_{3E} → Força atuando na mola 3E;
 K_{3E} → Rigidez da mola 3E;
 y_{3E} → Deformação na mola 3E.

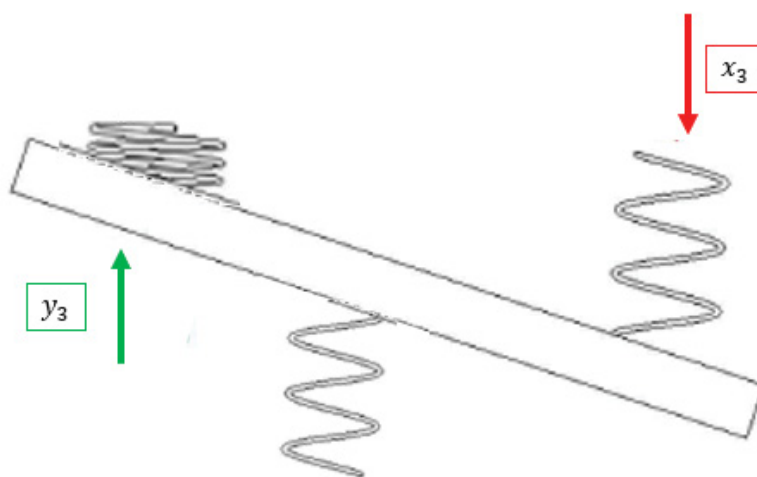
Também por semelhança de triângulos, tem-se que

$$\frac{y_3}{x_3} = \left(\frac{a}{b} \right)$$

e, portanto, que

$$x_3 = \left(\frac{b}{a} \right) \times y_3 \quad (\text{B.11})$$

FIGURA 50 – DEFORMAÇÃO RELATIVA NA MOLA 3E



FONTE: A autora (2021)

Substituindo a EQUAÇÃO B.10 na EQUAÇÃO B.11, decorre que

$$x_3 = \left(\frac{b}{a} \right) \times \left(\frac{F_{3E}}{K_{3E}} \right) \quad (\text{B.12})$$

ao passo que substituindo a EQUAÇÃO B.3 na EQUAÇÃO B.12, decorre que

$$x_3 = \left(\frac{b}{a} \right) \times \left(\frac{F_{1E} \times b}{a} \right) \times \left(\frac{1}{K_{3E}} \right)$$

Portanto

$$x_3 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{F_{1E}}{K_{3E}}\right) \quad (B.13)$$

Como a deflexão total, x_t , é a soma de $x_t = x_1 + x_2 + x_3$, resulta que

$$x_t = \left(\frac{F_{1E}}{K_{1E}}\right) + \left(\frac{K_{1E}}{K_{2E}}\right) \times \left(\frac{L}{a}\right)^2 + \left(\frac{F_{1E}}{K_{3E}}\right) \times \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

ou ainda que

$$x_t = F_{1E} \times \left[\frac{1}{K_{1E}} + \frac{1}{K_{2E}} \times \left(\frac{L}{a}\right)^2 + \frac{1}{K_{3E}} \times \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right] \quad (B.14)$$

Então, a rigidez parcial à esquerda é tal que

$$k_E = \frac{1}{\left[\frac{1}{K_{1E}} + \frac{1}{K_{2E}} \times \left(\frac{L}{a}\right)^2 + \frac{1}{K_{3E}} \times \left(\frac{b}{a}\right)^2 \right]} \quad (B.15)$$

Como trata-se de um sistema simétrico, tem-se que a rigidez total do dispositivo é a soma dos valores de rigidez parcial à esquerda e a direita. Ou seja,

$$k_{TOTAL} = k_E + k_D$$

onde

- k_{TOTAL} → Rigidez total;
- k_E → Rigidez parcial a esquerda;
- k_D → Rigidez parcial a direita;

Como o lado esquerdo e o lado direito são iguais, decorre que

$$k_{TOTAL} = 2 \times k_E \quad (B.16)$$

Modelando o NDV com 1 GDL, tem-se que sua frequência natural não amortecida é dada por

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{x_t}} \quad (B.17)$$

onde

- ω_n → Frequência natural NDV;
 g → Aceleração da gravidade ($g = 9,81 \text{ g/m}^2$);
 x_t → Deflexão total da massa do dispositivo.

Considerando que o NDV seja confeccionado com molas iguais, tem-se que

$$k_{1E} = k_{2E} = k_{3E} = k \quad (\text{B.18})$$

Considerando também um caso especial em que as distâncias a e b sejam iguais, tem-se, então, que

$$L = 2 \times a \quad (\text{B.19})$$

Levando, primeiro, a EQUAÇÃO B.18 na EQUAÇÃO B.14, decorre que

$$x_t = F_{1E} \times \left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k} \times \left(\frac{L}{a} \right)^2 + \frac{1}{k} \times \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right]$$

ou

$$x_t = \left(\frac{F_{1E}}{k} \right) \times \left[1 + \left(\frac{L}{a} \right)^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] \quad (\text{B.20})$$

Levando, em sequência, a EQUAÇÃO B.19 na EQUAÇÃO B.20, decorre sucessivamente que

$$x_t = \left(\frac{F_{1E}}{k} \right) \times \left[1 + \left(\frac{2a}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{a} \right)^2 \right],$$

$$x_t = \left(\frac{F_{1E}}{k} \right) \times [1 + 2^2 + 1^2],$$

$$x_t = \frac{6F_{1E}}{k} \quad (\text{B.21})$$

Assim sendo, a rigidez da parte esquerda do conjunto é um sexto da rigidez de cada elemento viscoelástico, ou seja,

$$k_E = \frac{k}{6} \quad (\text{B.22})$$

enquanto que a rigidez total é tal que

$$k_{\text{TOTAL}} = \frac{k}{3} \quad (\text{B.23})$$

Como, sendo m a massa do dispositivo,

$$K_{\text{TOTAL}} = m \times \omega_n^2 \quad (\text{B.24})$$

tem-se, ao substituir a EQUAÇÃO B.23 na EQUAÇÃO B.24, que

$$k = 3 \times m \times \omega_n^2 \quad (\text{B.25})$$

Sendo

$$k = L_i \times E$$

onde

E → Módulo de elasticidade estático do material viscoelástico empregado;

L_i → Fator de projeto para cada elemento viscoelástico;

tem-se que

$$L_i = \frac{3 \times m \times \omega_n^2}{E}$$

Considere-se, agora, que as distâncias a e b não são mais iguais, e sim que

$$r = \frac{b}{a} \quad (\text{B.26})$$

onde

r → Razão de sintonização do NDV

Tem-se, então, que

$$\frac{L}{a} = \frac{(a+b)}{a} = \left(\frac{a}{a}\right) + \left(\frac{b}{a}\right) = 1 + r \quad (\text{B.27})$$

Substituindo, com essa consideração, a EQUAÇÃO B.26 e a EQUAÇÃO B.27 na EQUAÇÃO B.20, tem-se sucessivamente que

$$x_t = \left(\frac{F_{1E}}{k}\right) \times \left[1 + (1+r)^2 + r^2\right],$$

$$x_t = \left(\frac{F_{1E}}{k}\right) \times \left[1 + 1 + 2r + r^2 + r^2\right],$$

$$x_t = \left(\frac{F_{1E}}{k}\right) \times \left[2 + 2r + 2r^2\right],$$

$$x_t = \left(\frac{F_{1E}}{k}\right) \times \left[2 \times (r^2 + r + 1)\right],$$

e

$$x_t = \frac{2F_{1E} \times (r^2 + r + 1)}{k}$$

Como

$$x_t = \frac{F_{1E}}{k_E} \quad (\text{B.28})$$

decorre que

$$k_E = \frac{F_{1E} \times k}{2 \times F_{1E} \times (r^2 + r + 1)}$$

ou

$$k_E = \frac{k}{2 \times (r^2 + r + 1)} \quad (\text{B.29})$$

Retomando a EQUAÇÃO B.16, conclui-se que

$$k_{\text{TOTAL}} = \frac{k}{(r^2 + r + 1)} \quad (\text{B.30})$$

B.2 PROCEDIMENTO DE DIMENSIONAMENTO

Do projeto ótimo de um NDV de 1 GDL, resultam a sua frequência característica ótima e a sua massa, que é especificada dentro de uma faixa pertinente. A partir dessas informações, os componentes do NDV, quais sejam, o bloco correspondente à massa e os elementos viscoelásticos, podem ser dimensionados. Apresenta-se, abaixo, o procedimento para dimensionamento dos componentes do NDV com suporte flutuante, contemplando algumas opções de interesse.

B.2.1 Massa do NDV

Considerando uma massa de formato prismático, como ilustrado na FIGURA 51, tem-se que

- Volume (v_{NDV})

$$v_{\text{NDV}} = L_b \times p_b \times h_b \quad (\text{B.31})$$

onde

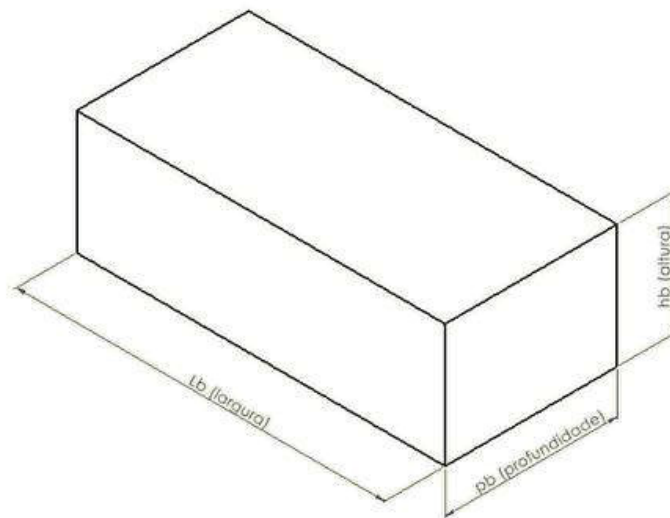
- | | |
|-------|---------------------------------|
| L_b | → Largura do bloco do NDV; |
| p_b | → Profundidade do bloco do NDV; |
| h_b | → Altura do bloco do NDV. |

Por conveniência e simplicidade, considera-se

$$p_b = h_b = \frac{L_b}{2} \quad (\text{B.32})$$

A EQUAÇÃO B.31 torna-se, então,

FIGURA 51 – DIMENSÕES DA MASSA DO NDV



FONTE: A autora (2021)

$$v_{NVE} = L_b \times \frac{L_b}{2} \times \frac{L_b}{2} \quad (\text{B.33})$$

Como a densidade do material do bloco (via de regra, um material metálico), ρ , é tal que

$$\rho = \frac{m_{NDV}}{v_{NDV}} \quad (\text{B.34})$$

onde m_{NDV} é a massa do dispositivo, decorre que

$$m_{NVE} = \rho \times v_{NDV} \quad (\text{B.35})$$

Substituindo a EQUAÇÃO B.33 na EQUAÇÃO B.35 tem-se

$$m_{NDV} = \rho \times \left(L_b \times \frac{L_b}{2} \times \frac{L_b}{2} \right) \quad (\text{B.36})$$

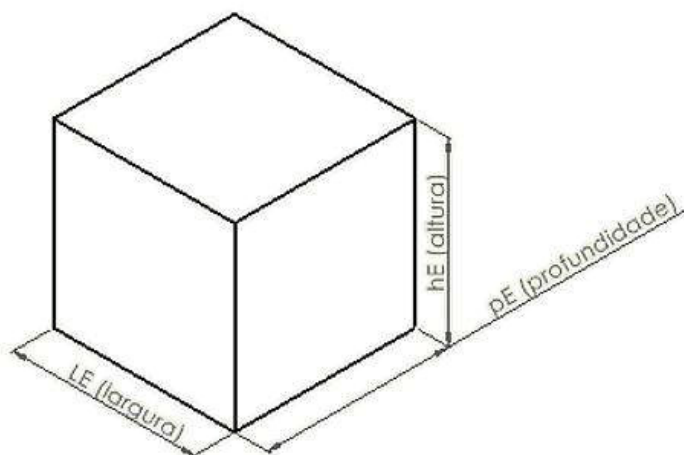
donde resulta que

$$L_b^3 = \frac{4 \times m_{NDV}}{\rho} \quad (\text{B.37})$$

B.2.2 Elementos Viscoelásticos Prismáticos

Sejam inicialmente os Elementos dinâmicos viscoelásticos de formato prismático, como ilustra FIGURA 52, nessa figura, tem-se que

FIGURA 52 – DIMENSÕES DO ELEMENTO VISCOELÁSTICO PRISMÁTICO



FONTE: A autora (2021)

onde

- L_E → Largura do elemento viscoelástico;
- p_E → Profundidade do elemento viscoelástico;
- h_E → Altura do elemento viscoelástico.

Sabe-se, para um elemento de material viscoelástico trabalhando à compressão, que o módulo de elasticidade efetivo, $E_{efetivo}$, pode ser dado por (NASHIF A. D. JONES; HENDERSON, 1985)

$$E_{efetivo} \cong E(1 + \beta S^2) \quad (B.38)$$

onde

- $E_{efetivo}$ → E_{ef} ;
- E → Módulo de elasticidade do MVE;
- β_f → Constante associada à formulação do MVE;
- S → Fator de forma do elemento viscoelástico.

Para um elemento viscoelástico prismático,

$$S = \frac{L_E \times p_E}{2h_E \times (L_E + p_E)} \quad (B.39)$$

Dessa forma, a rigidez de um elemento viscoelástico prismático é tal que

$$k_{EV} = \frac{A}{h_E} \times E_{ef} \quad (B.40)$$

ou, em vista da EQUAÇÃO B.38, que

$$k_{EV} = \left(\frac{L_E \times p_E}{h_E} \right) \times \left[E(1 + \beta_f S^2) \right] \quad (B.41)$$

Como

$$k_{EV} = L_{EV} \times E \quad (B.42)$$

onde

L_{EV} → Fator de projeto do elemento viscoelástico;

Assim, resulta que

$$L_{EV} = \left(\frac{L_E \times p_E}{h_E} \right) \times (1 + \beta_f S^2) \quad (B.43)$$

Substituindo EQUAÇÃO B.39 na EQUAÇÃO B.43, tem-se que

$$L_{EV} = \left(\frac{L_E \times p_E}{h_E} \right) \times \left\{ 1 + \beta_f \left[\frac{L_E \times p_E}{2h_E \times (L_E + p_E)} \right]^2 \right\} \quad (B.44)$$

Para um elemento viscoelástico de seção transversal quadrada, com $L_E = p_E$, decorre sucessivamente, da EQUAÇÃO B.44, que

$$L_{EV} = \left(\frac{L_E^2}{h_E} \right) \times \left\{ 1 + \beta_f \left[\frac{L_E^2}{2h_E \times (2L_E)} \right]^2 \right\},$$

$$L_{EV} = \left(\frac{L_E^2}{h_E} \right) \times \left[1 + \beta_f \left(\frac{L_E}{4h_E} \right)^2 \right],$$

$$L_{EV} = \left(\frac{L_E^2}{h_E} \right) \times \left[1 + \beta_f \times \frac{L_E}{16h_E^2} \right],$$

$$L_{EV} = \frac{L_E^2}{h_E} + \left(\frac{L_E^2}{h_E} \times \beta_f \times \frac{L_E^2}{16h_E^2} \right),$$

e

$$L_{EV} = \frac{L_E^2}{h_E} + \frac{\beta_f L_E^4}{16h_E^3}$$

Manipulando a equação acima, chega-se a

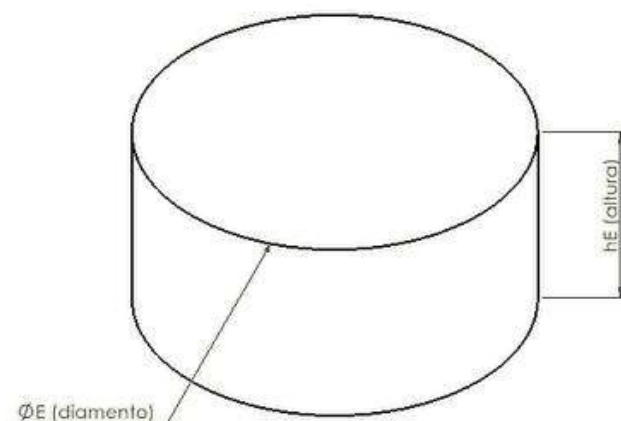
$$16h_E^3 \times L_{EV} - 16h_E^2 \times L_E^2 - \beta_f L_E^4 = 0 \quad (B.45)$$

A EQUAÇÃO B.45 pode ser resolvida para a altura h_E , uma vez conhecido o fator de projeto L_{EV} e especificados o comprimento L_E e o valor de β_f .

B.2.3 Elementos Viscoelásticos Cilíndricos

Seja, na sequência, um elemento viscoelástico cilíndrico, como ilustra a FIGURA 53.

FIGURA 53 – DIMENSÕES DO ELEMENTO VISCOELÁSTICO CILÍNDRICO



FONTE: A autora (2021)

Para um elemento cilíndrico, tem-se que

$$S = \frac{D_E}{4 \times h_E} \quad (B.46)$$

$$A = \frac{\pi \times D_E^2}{4} \quad (B.47)$$

onde

D_E → Diâmetro do elemento viscoelástico;
 h_E → Altura do elemento viscoelástico.

Retomando a EQUAÇÃO B.38 e a EQUAÇÃO B.43, tem-se, sucessivamente, que

$$L_{EV} = \left(\frac{\pi \times D_E^2}{4 \times h_E} \right) \times \left[1 + \beta_f \times \left(\frac{D_E}{4 \times h_E} \right)^2 \right],$$

$$L_{EV} = \left(\frac{\pi \times D_E^2}{4 \times h_E} \right) \times \left(1 + \beta_f \times \frac{D_E^2}{16 \times h_E^2} \right),$$

$$L_{EV} = \left(\frac{\pi \times D_E^2}{4 \times h_E} \right) + \left(\frac{\pi \times D_E^2}{4 \times h_E} \right) \times \left(\frac{\beta_f \times D_E^2}{16 \times h_E^2} \right),$$

$$L_{EV} = \frac{\pi \times D_E^2}{4 \times h_E} + \frac{\pi \times D_E^2 \times \beta_f \times D_E^2}{(4 h_E) \times (16 \times h_E^2)},$$

e

$$L_{EV} = \frac{\pi \times D_E^2}{4 \times h_E} + \frac{\pi \times D_E^2 \times \beta_f \times D_E^2}{64 \times h_E^3}$$

Manipulando a expressão acima, chega-se a

$$L_{EV} \times 64 \times h_E^3 - \pi \times D_E^2 \times 16 \times h_E^2 - \pi \times D_E^2 \times \beta_f \times D_E^2 = 0 \quad (B.48)$$

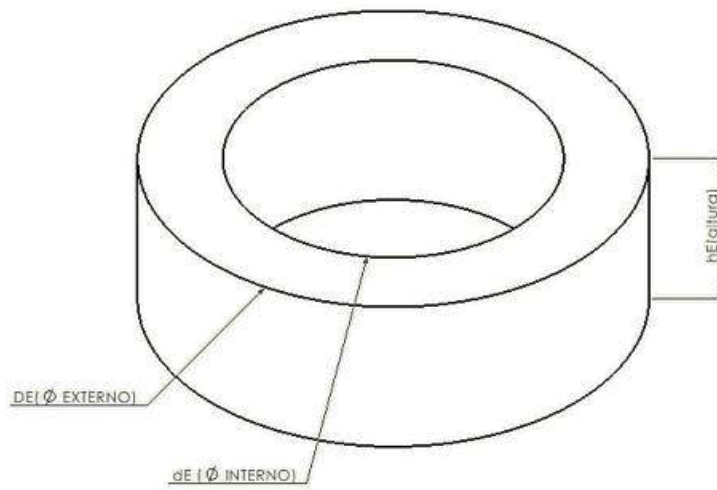
A EQUAÇÃO B.48 pode ser resolvida para a altura h_E , uma vez conhecido o fator de projeto L_{EV} e especificados o diâmetro ϕ_E e o valor de β_f .

B.2.4 Elementos Viscoelásticos Anulares

Sejam considerados, por fim, elementos viscoelásticos anulares, tal como ilustrado na FIGURA 54. Na figura, tem-se que

- D_E Diâmetro externo do elemento viscoelástico;
- d_E Diâmetro interno do elemento viscoelástico;
- h_E Altura do elemento viscoelástico.

FIGURA 54 – DIMENSÕES DO ELEMENTO VISCOELÁSTICO ANULAR



FONTE: A autora (2021)

Para um elemento anular, decorre que

$$S = \frac{(D_E - d_E)}{4 \times h_E} \quad (B.49)$$

$$A = \frac{\pi \times (D_E^2 - d_E^2)}{4} \quad (B.50)$$

Retomando a EQUAÇÃO B.38 e a EQUAÇÃO B.43, tem-se, sucessivamente, que

$$L_{Ev} = \left[\frac{\pi \times (D_E^2 - d_E^2)}{4h_E} \right] \times \left[1 + \beta_f \times \frac{(D_E - d_E)^2}{16h_E^2} \right],$$

$$L_{Ev} = \left[\frac{\pi \times (D_E^2 - d_E^2)}{4h_E} \right] + \left\{ \frac{[\pi \times (D_E^2 - d_E^2)] \times [\beta_f \times (D_E - d_E)^2]}{(4h_E) \times (16h_E^2)} \right\},$$

e

$$L_{Ev} = \left[\frac{\pi \times (D_E^2 - d_E^2)}{4h_E} \right] + \left[\frac{\pi \times (D_E^2 - d_E^2) \times \beta_f \times (D_E - d_E)^2}{64h_E^3} \right]$$

Manipulando a expressão acima, chega-se a

$$\begin{aligned} \left[L_{Ev} \times (64h_E^3) \right] - \left[16 \times \pi \times (D_E^2 - d_E^2) \times h_E^2 \right] - \\ - \left[\pi \times (D_E^2 - d_E^2) \times \beta_f \times (D_E - d_E)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (B.51)$$

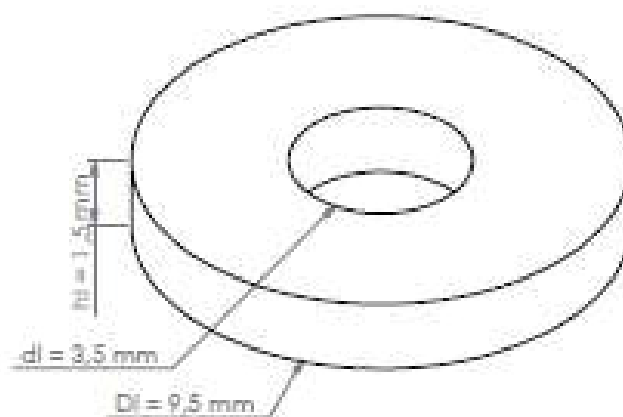
A EQUAÇÃO B.51 pode ser resolvida para a altura h_E , uma vez conhecido o fator de projeto L_{Ev} e especificados os diâmetros externo e interno do elemento, além do valor de β_f . Alternativamente, pode-se selecionar as dimensões e ajustar o valor de r , de modo que a frequência característica do dispositivo seja alcançada, tal como feito no exemplo ilustrativo a seguir.

B.3 EXEMPLO ILUSTRATIVO

Apresenta-se, nessa seção, um exemplo de aplicação da concepção de NDV com suporte flutuante, em associação com um dos NDVs considerados na dissertação. Por conveniência de sintonização dos dispositivos, são contemplados elementos viscoelásticos anulares, para uso com um ímã comercial de neodímio, tal como ilustrado na FIGURA 55. Para esse modelo de ímã, tem-se que o diâmetro externo é 9,5 mm e o diâmetro interno é 3,5 mm.

Assim sendo, os diâmetros externo e interno dos elementos viscoelásticos são os mesmos do ímã. Quanto à espessura, seleciona-se, da tabela de espessuras disponibilizada pelo fabricante do material viscoelástico usado (vide TABELA 5), o valor de 6,40 mm. O NDV é o requerido para controle de vibrações na terceira faixa. Com essas informações, encontra-se, para o dispositivo com suporte flutuante, uma razão $r = \frac{b}{a} = 1,585$.

FIGURA 55 – DIMENSÕES DO ÍMÃ DE NEODÍMIO COM SEÇÃO ANULAR



FONTE: Adaptado de IMÃ (2021)

- D_1 Diâmetro externo do ímã → Diâmetro externo do ímã = 9,5 mm
- d_1 Diâmetro interno do ímã → Diâmetro interno do ímã = 3,5 mm
- h_1 Altura do ímã → Altura do ímã = 1,5 mm

Por conveniência, escolheu-se, como caso de aplicação, a terceira faixa para redução de vibração do sistema primário. As dimensões finais do NDV são encontradas nos desenhos construtivos apresentados abaixo, na FIGURA 56, FIGURA 57 e na FIGURA 58.

FIGURA 56 – NEUTRALIZADOR - VISTA FRONTAL

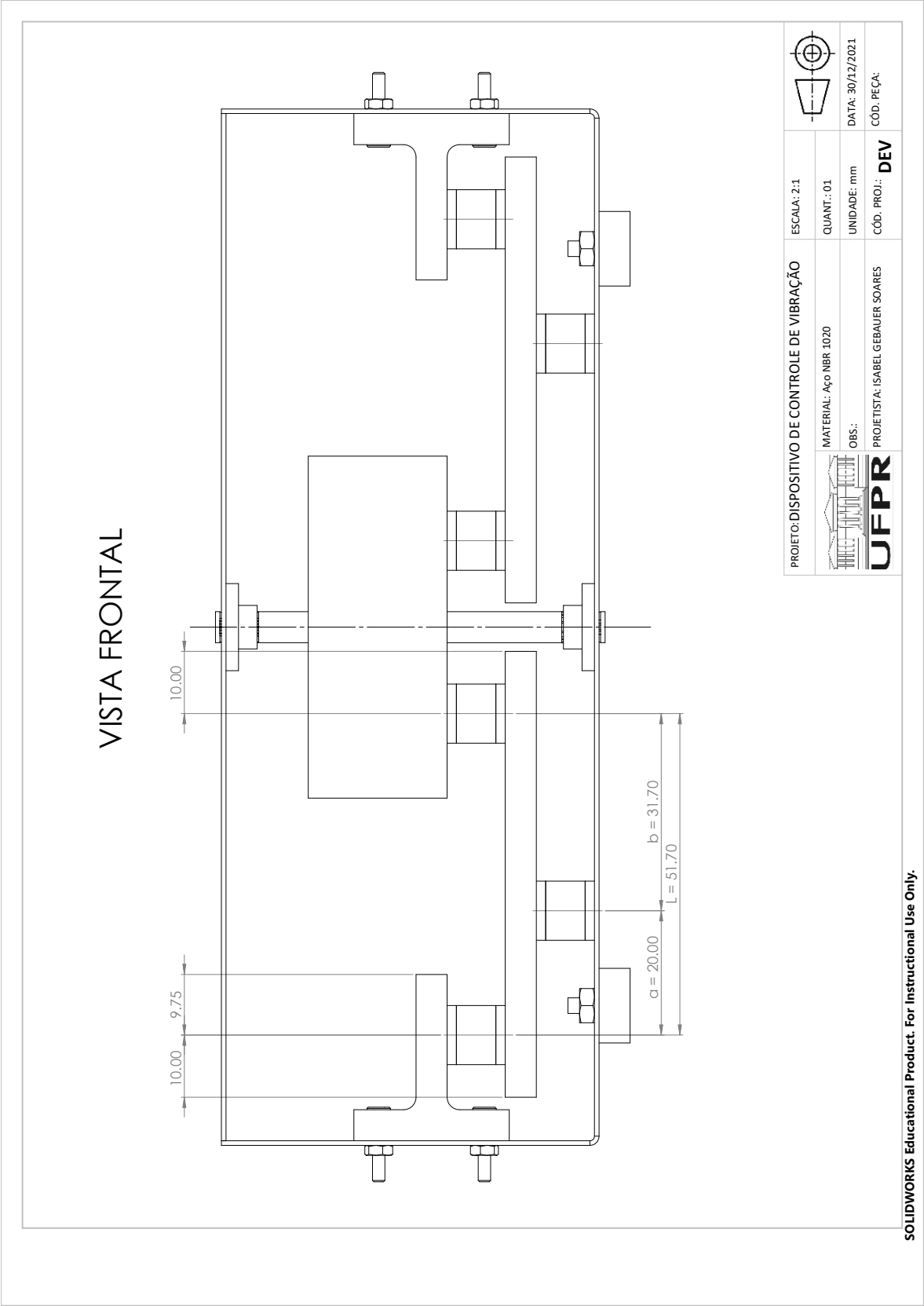
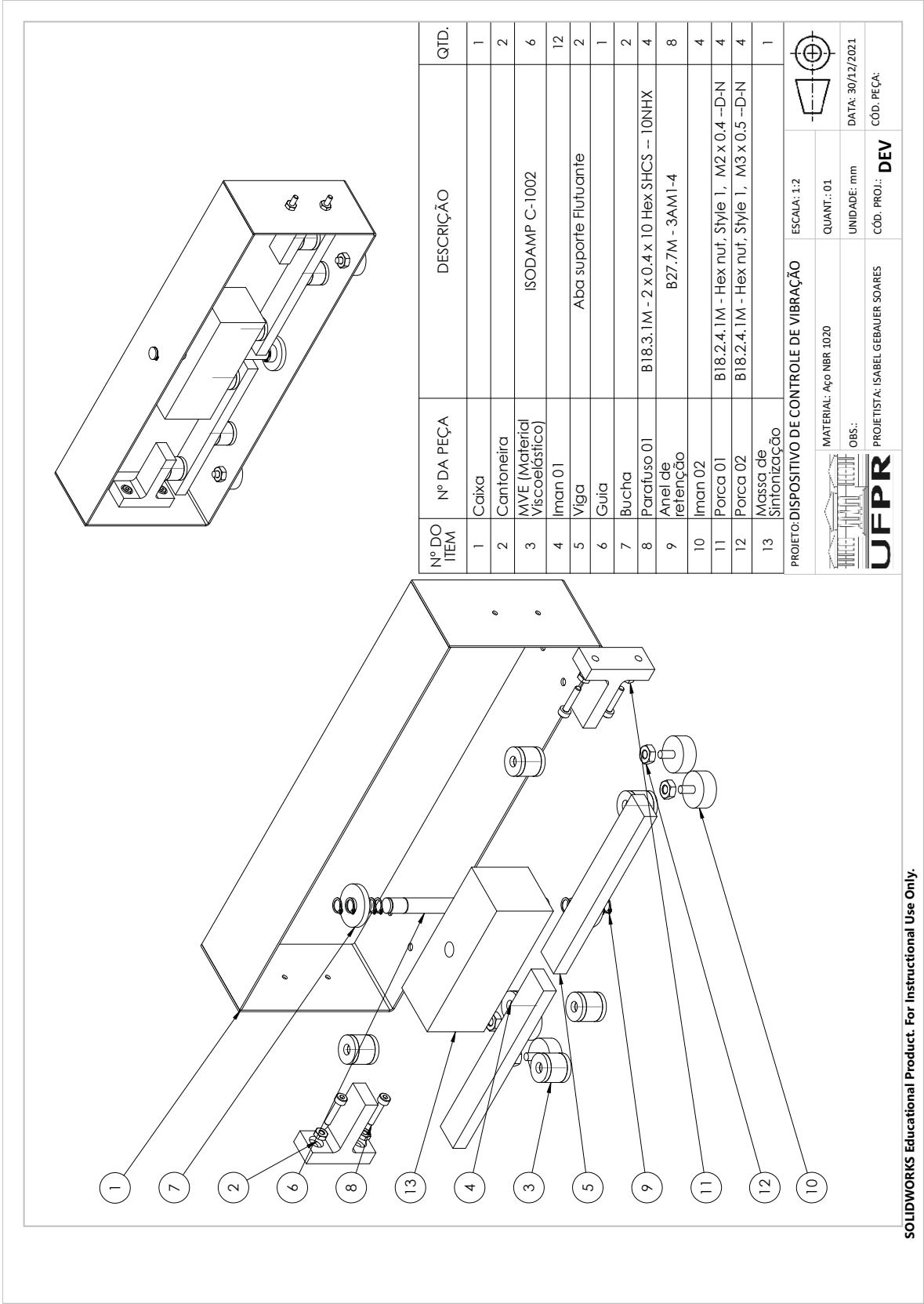


FIGURA 57 – NEUTRALIZADOR - VISTA EXPLODIDA



FONTE: A autora (2021)

