

SIMONE DOS SANTOS HOEFEL

**MÉTODO DOS ELEMENTOS COMPOSTOS APLICADOS À
ANÁLISE DE VIBRAÇÕES DE VIGA DE TIMOSHENKO**

**CURITIBA
DEZEMBRO 2002**

SIMONE DOS SANTOS HOEFEL

**MÉTODO DOS ELEMENTOS COMPOSTOS APLICADOS À
ANÁLISE DE VIBRAÇÕES DE VIGA DE TIMOSHENKO**

Dissertação apresentada como requisito parcial
à obtenção do grau de Mestre em Ciências,
pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos
Numéricos em Engenharia, Universidade Federal
do Paraná.

Orientador: Roberto Dalledone Machado

Co-Orientador: Mildred Ballin Hecke

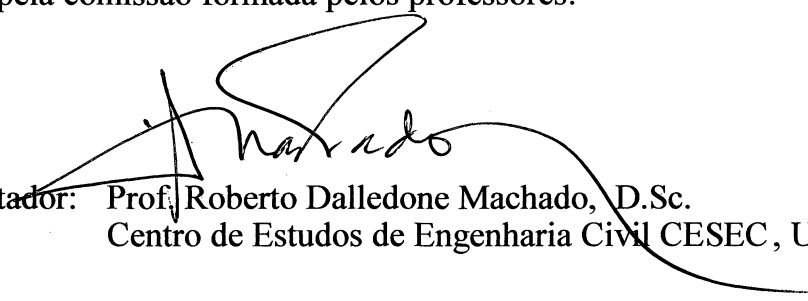
**CURITIBA
DEZEMBRO 2002**

TERMO DE APROVAÇÃO

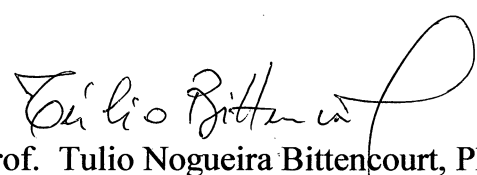
SIMONE SANTOS HOEFEL


MÉTODO DOS ELEMENTOS COMPOSTOS APLICADOS À ANÁLISE DE VIBRAÇÕES DE VIGA DE TIMOSHENKO

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná, pela comissão formada pelos professores:


Orientador: Prof. Roberto Dalledone Machado, D.Sc.
Centro de Estudos de Engenharia Civil CESEC, UFPR


Profª Mildred Ballin Hecke, D.Sc.
Centro de Estudos de Engenharia Civil CESEC, UFPR


Prof. Tulio Nogueira Bittencourt, Ph.D..
POLI/USP


Prof. Amir Eljas Abdalla Kurban, D.Sc.
Ministério da Defesa

Curitiba, 18 de dezembro de 2002

Só é útil o conhecimento que nos torna melhores.

(Sócrates)

Aos meus pais Cida e Carlos, meu marido Eduardo e
aos meus adoráveis sobrinhos Nicolás, Juliana, Gustavo,
Giovana e Camile.

Agradecimentos

Ao meu marido Eduardo e ao Prof^o Carlos Henrique pelo apoio e incentivo, sem os quais este trabalho não teria sequer começado. Aos meus pais Cida e Carlos, pelo carinho e paciência nos momentos difíceis. E também ao Phie pela alegria que sempre me contagiou mesmo nos momentos mais críticos.

Aos meus amigos Neil e Alberto, meus sinceros agradecimentos pela amizade, carinho e colaboração no decorrer do curso.

Ao Prof^o Roberto Dalledone pela orientação e incentivo na realização deste trabalho. Aos professores Amir, Mildred e Fernando Laroca pelo apoio.

Aos amigos do CESEC: Roberto Vosgerau, Márcio, Bárbara, Giancarlo, Maria Fernanda e Ana Paula que nos momentos difíceis sempre tinham uma palavra amiga ou no mínimo uma boa piada.

Aos amigos da Unicamp: Luís Henrique, Cornélis, Carlos e principalmente ao Ilson, meu “consultor” em ANSYS. Aos professores da Unicamp, Paulo Sollero, Renato Pavanello e Janito Vaqueiro pela compreensão durante os meses finais deste trabalho.

À minha querida sogra Bernadete e às minhas cunhadas Mariana e Luciana pelo carinho e torcida.

E finalmente, à Maristela Bandil por sua eficiência profissional, sua amizade e principalmente por tornar minha passagem pelo CESEC muito mais alegre.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão da Literatura	8
2.1	Teoria Clássica	12
2.2	Método da Matriz de Rigidez Dinâmica	15
2.3	Método dos Elementos Finitos	16
2.4	Método dos Elementos Compostos	21
2.5	Outros Métodos	22
3	Método dos Elementos Compostos	25
3.1	Introdução	25
3.2	Teoria Clássica para Solução da Viga de Timoshenko	27
3.3	Campo de Deslocamentos Nodais	43
3.3.1	Método dos Elementos Finitos	43
3.4	Método dos Elementos Compostos	48
3.4.1	Matriz de rigidez devido à flexão	52
3.4.2	Matriz de rigidez devido ao cisalhamento	56
3.4.3	Matriz de massa devido a inércia translacional.	59
3.4.4	Matriz de massa devido à inércia rotacional	61
3.5	Transformação de coordenadas	64

Lista de Figuras

2.1	ELEMENTO SIMPLES	18
2.2	GRAUS DE LIBERDADE DO ELEMENTO	20
3.1	DEFORMAÇÃO CINEMÁTICA DA VIGA	28
3.2	VIGA BI-ENGASTADA.	34
3.3	1º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO À FLEXÃO.	38
3.4	2º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO À FLEXÃO.	39
3.5	3º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO À FLEXÃO.	39
3.6	4º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO À FLEXÃO.	40
3.7	5º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO À FLEXÃO.	40
3.8	1º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO A ROTAÇÃO TOTAL. . .	41
3.9	2º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO A ROTAÇÃO TOTAL. . .	41
3.10	3º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO A ROTAÇÃO TOTAL. . .	42
3.11	4º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO A ROTAÇÃO TOTAL. . .	42
3.12	5º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO A ROTAÇÃO TOTAL. . .	43
3.13	ELEMENTO DE VIGA DE TIMOSHENKO	44
3.14	TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS	64
4.1	VIGA CANTILEVER	68
4.2	ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES OBTIDOS PELO MEF	71

4.3	ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c DO MC PARA O 1° AUTOVALOR	75
4.4	ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c DO MC PARA O 2° AUTOVALOR	76
4.5	ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c DO MC PARA O 8° AUTOVALOR	77
4.6	ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c E h DO MC PARA O 2° AUTOVALOR	78
4.7	ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c E h DO MC PARA O 3° AUTOVALOR	79
4.8	ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c E h DO MC PARA O 6° AUTOVALOR	79
4.9	ERRO RELATIVO PARA O 1° AUTOVALOR.	81
4.10	ERRO RELATIVO PARA O 3° AUTOVALOR.	81
4.11	VIGA BI-APOIADA.	82
4.12	ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES OBTIDOS PELO MEF.	83
4.13	ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c COM MALHA 1 ELEMENTO.	87
4.14	ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c COM MALHA DE 2 ELEMENTOS.	88
4.15	REFINAMENTO c E h DO MC PARA O 3° AUTOVALOR.	89
4.16	REFINAMENTO c E h DO MC PARA O 4° AUTOVALOR.	89
4.17	ERRO RELATIVO DO MEF E MC.	91
4.18	ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES OBTIDOS PELO MEF.	93

4.41 ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c COM MALHA DE 2 ELEMENTOS	114
4.42 MEF E MC COM TOTAL 6 GRAUS DE LIBERDADE.	115
4.43 PRIMEIRO AUTOVALOR OBTIDO PELO MEF.	116
4.44 PRIMEIRO AUTOVALOR OBTIDO PELO MC.	117

Capítulo 1

Introdução

Há centenas de anos o homem se dedica ao estudo das vibrações, abrangendo desde fenômenos simples como vibrações das cordas em instrumentos musicais à fenômenos mais complexos como teorias sobre a constituição do universo.

As notas musicais produzidas por um violino são dadas pelos modos normais de vibração de suas cordas. Na Física Moderna, mais especificamente na área da Física conhecida como *Teoria de Cordas* (POLCHINSKI, 1998), os estados das partículas elementares são descritos como modos de vibração de cordas. O estudo das vibrações está presente, portanto, na música, atividade que visa o prazer de ouvir sons agradáveis, bem como na Física de partículas, ramo da Ciência que procura explicar quais são os elementos fundamentais que constituem o universo.

As vibrações estão presentes em muitos outros fenômenos naturais, como ondas do mar e terremotos, além de máquinas e estruturas criadas pelo homem.

Vibrações ocorrem em muitos sistemas de engenharia, e se estiverem sem qualquer controle, podem levar a resultados catastróficos. Por exemplo, vibrações resultantes do desbalanceamento rotativo nas pás de um helicóptero podem fazer com que o piloto perca o controle e o vôo se torne instável. Analogamente, vibrações excessivas, como as testemunhadas sobre a Ponte do Rio Tacoma, nos

Estados Unidos, podem mesmo provocar o colapso das estruturas.

Existe uma grande quantidade de estruturas que vibram dentro de um ambiente industrial. São comuns processos que envolvem impacto, como prensas, bate-estacas, vibrações motoras, ventiladores, bombas, compressores, veículos de transportes, etc. Vibrações excessivas em compressores industriais ou bombas aumentam o nível de ruído nos arredores das máquinas podendo induzir vibrações em estruturas vizinhas, e causando perda de eficiência em diversas outras máquinas e equipamentos.

As vibrações, além de serem incômodas, podem provocar uma série de outros problemas, como, por exemplo, desconforto humano e prejuízo à saúde. A análise de vibração, hoje em dia, é fundamental tanto para as indústrias automobilística e aeroespacial, como também nas construções de edifícios, torres de telecomunicações. Por outro lado, permite a diminuição dos níveis de ruído no interior de veículos e, por outro, permite a fabricação de estruturas mais leves e esbeltas, sem que se percam as condições ideais de funcionamento.

Uma das formas características das vibrações é a repetição do movimento em intervalos definidos de tempo. Neste caso, vibração é um fenômeno oscilatório, repetitivo, que tende a desaparecer em decorrência dos efeitos de amortecimento viscoso normalmente presentes nas estruturas

Para melhor entendimento dos fenômenos oscilatórios, considera-se que quando um corpo movimenta-se de forma repetitiva, a partir de uma posição extrema e retorna a posição inicial diz-se que completou um ciclo. O tempo necessário para completar um ciclo é chamado de período. A quantidade de número de ciclos por unidade de tempo é chamada frequência. O deslocamento máximo de um corpo em movimento vibratório a partir da sua posição de equilíbrio é chamado

amplitude. Em movimentos amortecidos, a amplitude é uma função do tempo.

As vibrações costumam ser divididas em quatro grupos : livres sem amortecimento, livres com amortecimento, forçadas sem amortecimento e forçadas com amortecimento.

Denomina-se *vibração livre*, um sistema que vibra sem ação de forças externas. No caso de possuir apenas um grau de liberdade, o sistema vibra em sua frequência natural. Sistemas mais complexos vibram conforme uma combinação de seus modos naturais. Em qualquer situação, entretanto, a vibração depende essencialmente das propriedades inerciais e de rigidez do sistema, bem como das condições iniciais impostas e de contorno.

Quando a vibração do sistema é associada à intervenção de uma força externa, denomina-se de *vibração forçada*. A frequência com que vibra o sistema dependerá da frequência da excitação atuante. Ao coincidir a frequência da força excitadora com a natural, o sistema entra no fenômeno de *ressonância* que se caracteriza pelo grande aumento das amplitudes de vibração, podendo causar o colapso do sistema.

As vibrações podem ser classificadas também quanto à força resistiva. O atrito, a resistência do ar, o amortecimento viscoso e todas as outras forças dissipativas, podem influenciar de forma significativa na resposta dinâmica do sistema. Neste caso, tem-se a *vibração amortecida*. Quando as forças resistivas são desprezíveis em relação à resposta dinâmica do sistema denomina-se *vibração sem amortecimento*.

Há séculos muitos pesquisadores tem se dedicado ao estudo de vibrações em estruturas e desenvolvido vários métodos para tratar problemas de vibração. Entre eles destaca-se a *Teoria Clássica (TC)* que corresponde à solução analítica

dos problemas de vibração em sistemas contínuos, cujas equações governantes do movimento são equações diferenciais parciais.

A solução analítica determinada pela Teoria Clássica é obtida, em geral através de séries, da equação diferencial governante para problemas de vibração em sistemas contínuos.

Na grande maioria dos problemas atualmente analisados torna-se impraticável qualquer tratamento analítico existente, devido, principalmente, às geometrias complexas e condições de contorno quaisquer a que os problemas estão submetidos. Com a rápida evolução dos equipamentos de informática, desenvolveram-se diversos métodos computacionais para solucionar problemas de engenharia. Graças a esse desenvolvimento originou-se uma área do conhecimento denominada *Mecânica Computacional*. Assim, os métodos numéricos encontram-se em uma posição de destaque junto às diversas áreas de pesquisa, sendo objeto de estudo de inúmeros pesquisadores que se concentram no aprimoramento e na busca de novas técnicas que satisfaçam as crescentes exigências da Engenharia Moderna.

Vários métodos numéricos foram desenvolvidos para a análise de vibrações em estruturas, entre eles destaca-se o *Método dos Elementos Finitos (MEF)* (BATHE, 1996; ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1977; PETYT, 1990; COOK, 1989; ODEN, CAREY e BECKER, 1981) o qual baseia-se em aproximações do tipo polinomial nodal em subdomínios, o que implica em processos de discretização dos domínios, que podem ter geometrias irregulares arbitrárias.

O *Método da Matriz de Rigidez Dinâmica* (BANERJEE e WILLIAN, 1992; MARTINS e LAIER, 1997; ALGHAMDI, 2001), o *Método dos Elementos de Contorno (MEC)* (BREBBIA e NARDINI, 1983; DAVÍ e MILAZZO, 1997; TA-

NAKA, MATSUMOTO, e SHIOZAKI, 1998) que consiste na discretização apenas do contorno do domínio físico do problema, reduzindo assim o volume de dados necessários para a modelagem de um determinado problema.

WEAVER e LOH (1985) desenvolveram o *Método do Modo Componente*. Esse método utiliza na função de interpolação de deslocamentos laterais do elemento as soluções analíticas do problema de vibração livre de uma viga bi-articulada, com o objetivo de incluir o efeito dos modos locais de vibração na análise dinâmica de treliças.

ZENG (1998) desenvolveu um método numérico denominado Método dos Elementos Compostos (MC) para análise de vibração em estruturas e apresenta trabalhos a formulação de um elemento composto para análise de vibrações em barra e em viga. Os resultados numéricos obtidos foram comparados à Teoria Clássica (TC) e ao MEF. Concluiu-se que o MC é mais preciso que o MEF com o mesmo número de graus de liberdade e que o refinamento c leva a uma superconvergência de resultados.

SHI e ZENG (2000) desenvolveram um elemento composto para análise de vibração em placa fina. Alguns exemplos foram apresentados e seus resultados comparados ao MEF e a TC. Vários outros trabalhos foram consequência destes e comprovam a eficiência do método.

ARNDT (2001) aplicou método para análise de vibrações em treliça, viga de Euler-Bernoulli e em pórticos. Vários exemplos numéricos foram propostos e os resultados obtidos comparados com a TC e com o MEF. Verificou-se ótima precisão do método em relação a TC e ao MEF.

ARNDT, MACHADO e HECKE (2002) analisaram a convergência do MC em relação ao tipo de refinamento (c e h). CARVALHO (2002) desenvolveu um

elemento composto para problemas de vibrações em placas espessas.

O objetivo do presente trabalho é desenvolver a formulação do Método dos Elementos Compostos (MC) para o problema de vibrações livres em vigas de Timoshenko além de analisar a influência da inércia rotacional e da tensão de cisalhamento na precisão do método. Por levar em consideração tais efeitos, o modelo de viga de Timoshenko permite o tratamento e análise de peças curtas que, ao se flexionarem, tendem a manter a seção transversal plana ma não necessariamente perpendicular à superfície neutra.

O capítulo 2 é dedicado à revisão bibliográfica, onde um breve histórico da evolução do estudo de vibrações é apresentado. Em seguida, é feita uma revisão um pouco mais detalhada sobre os trabalhos de vários pesquisadores que investigaram o problema de vibração em vigas de Timoshenko através da teoria clássica e dos diversos métodos numéricos empregados para a análise de vibrações.

O capítulo 3 descreve o Método dos Elementos Compostos. Este capítulo é dividido em 5 seções. Na primeira seção é feita uma abordagem sobre a formulação do Método dos Elementos Compostos. Na segunda seção é apresentada a solução do problema de vibração da viga de Timoshenko através da Teoria Clássica (TC). A contribuição da inércia rotacional e da tensão de cisalhamento nos modos de vibração de uma viga bi-engastada são analisados. Com o objetivo de se avaliar o campo de deslocamentos nodais do MEF, é desenvolvido na terceira seção, um elemento finito de viga de Timoshenko, o qual possui dois nós, sendo que cada um possui dois graus de liberdade, quais sejam, deslocamento lateral e rotação. Na quarta seção um elemento composto para o problema de vibração em viga de Timoshenko é desenvolvido, o campo de deslocamentos do MC é definido, a matrizes de rigidez e massa são apresentadas. Finalmente, na quinta seção é

apresentada a transformação de coordenadas do sistema local para o sistema de coordenadas global.

As verificações numéricas são apresentadas no capítulo 4. São propostos dois problemas de vigas de Timoshenko para verificação do método. No primeiro caso, as frequências naturais de uma viga cantilever são obtidas pelo MC e comparadas com resultados obtidos pela TC e pelo MEF. O segundo caso consiste na análise de uma viga bi-apoiada. Com o objetivo de analisar a influência da inércia rotacional e da tensão de cisalhamento na precisão dos resultados obtidos pelo MC, foram considerados três sub-casos: viga esbelta, viga média e viga espessa. Os resultados obtidos pelo MC são comparados com a TC e com o MEF e, para o caso da viga espessa, as frequências também são comparadas com o software comercial ANSYS.

O capítulo 5 apresenta as conclusões da aplicação do MC à análise de vibrações de vigas de Timoshenko apresentadas neste trabalho. São apresentadas também algumas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

A história do estudo das ondas e dos fenômenos vibratórios remonta há centenas de anos. A maioria dos estudos prévios foram, naturalmente, mais observacionais que quantitativos e freqüentemente foram ligados a tons musicais ou ondas de água, duas das mais comuns associações com o movimento ondulatório. Desde o tempo de Galileo (1564-1642) até os dias atuais, a ciência das vibrações e das ondas progrediu rapidamente em conjunto com o desenvolvimento da dinâmica dos sólidos. De acordo com ALVES (1999), alguns dos maiores progressos nesta área ao longo dos anos estão cronologicamente ordenados abaixo:

- Século VI antes de Cristo: Pitágoras estudou a origem dos sons musicais e as vibrações das cordas.
- 1636: Mersenne apresentou o primeiro cálculo correto sobre as vibrações das cordas.
- 1638: Galileo descreveu as vibrações do pêndulo, o fenômeno da ressonância, e os fatores que influenciavam as vibrações das cordas.
- 1678: Robert Hooke formulou a lei da proporcionalidade entre tensão e deformação para corpos elásticos. Essa lei forma a base para a teoria estática

e dinâmica da elasticidade.

- 1686: Newton investigou a velocidade das ondas na água e do som no ar.
- 1700: Sauveur calculou a frequência vibracional da uma corda esticada.
- 1713: Taylor estudou a solução dinâmica das vibrações das cordas.
- 1744: Leonardo Euler (1744) e Daniel Bernoulli (1751) desenvolveram a equação das vibrações de uma viga e desenvolveram um modo normal para vários limites condicionais.
- 1747: D'Alembert derivou a equação do movimento de uma corda e resolveu um problema de valor inicial.
- 1755: D. Bernoulli desenvolveu o princípio da superposição e aplicou-o para as vibrações das cordas.
- 1759: Lagrange analisou a corda como um sistema de massas discretas de partículas.
- 1766: Euler analisou as vibrações do sino como base no comportamento de uma barra curvada. James Bernoulli (1789) investigou esse mesmo problema.
- 1802: E. F. F. Chaldni relatou investigações experimentais sobre as vibrações das vigas e vibrações longitudinal e transversal de barras.
- 1815: Madame Sophie Germain desenvolveu a equação para vibrações de uma placa, porém obteve condições de contorno errôneas.
- 1821: Navier investigou uma equação geral de equilíbrio e de sólidos elásticos. Este representou o mais importante desenvolvimento na mecânica.

- 1822 : Cauchy desenvolveu mais aspectos sobre a teoria da elasticidade incluindo as equações da dinâmica do movimento para os sólidos. Poisson (1829) também investigou a equação geral.
- 1828: Poisson investigou a propagação das ondas através do sólido elástico. Ele encontrou dois tipos de ondas, longitudinal e transversal. Cauchy (1830) obteve resultado similar. Poisson também resolveu o problema de vibrações radiais numa esfera.
- 1828: Poisson desenvolveu uma teoria aproximada para as vibrações de uma barra.
- 1862: Clebsch apresentou a teoria geral para vibrações de corpos sólidos livres usando modo normal.
- 1872: J. Hopkinson formulou o primeiro experimento da propagação no fio de onda plástica.
- 1876: Pochhammer obteve a equação da frequência para a propagação de ondas numa barra exatamente de acordo com a equação da elasticidade. Chree (1889) desenvolveu similar estudo.
- 1880: Jaerisch analisou um problema geral para as vibrações na esfera.
- 1882: Hertz desenvolveu a primeira teoria para impacto.
- 1883: St.Venant, baseando-se na teoria do impacto apresentada por Hertz, analisou impactos transversais.
- 1887: Rayleigh investigou as propagações de ondas na superfície dos sólidos.

- 1888: Rayleigh e Lamb (1889) desenvolveram a equação de frequências para ondas numa placa de acordo com a teoria da elasticidade.
- 1904: Lamb fez a primeira investigação da propagação de um pulso num sólido semi-infinito.
- 1911: Love desenvolveu a teoria de ondas em uma fina cobertura de um sólido e mostrou que tal onda apresentava certa anomalia em seu sismógrafo.
- 1914: B. Hopkinson desenvolveu experimentos para a propagação de um pulso elástico das barras.
- 1921: Timoshenko desenvolveu a teoria para vigas avaliando a deformação.
- 1930: Donnel estudou o efeito da lei não linear de tensão e deformação da propagação forçada da onda em uma barra.
- 1942: Von Karman, Taylor (1942) e Rakmatulim desenvolveram a teoria de uma onda plástica unidimensional de amplitude finita.
- 1949: Davies publicou um extenso estudo teórico e experimental sobre ondas em uma barra.
- 1951: Mindlin apresentou uma teoria aproximada para ondas em uma placa.
- 1951: Malvern desenvolveu uma teoria para a propagação de ondas plásticas.
- 1955: Perkeris apresentou uma solução para problema do pulso de propagação em um sólido semi-infinito, investigado anteriormente por Lamb.

O advento dos computadores digitais na década de 1950, permitiu o aprimoramento das teorias e dos métodos clássicos, e o desenvolvimento de novas técnicas para análise de vibrações. Muitas pesquisas tem sido realizadas com o objetivo de desenvolver técnicas para obtenção de soluções analíticas e principalmente métodos aproximados para soluções de problemas gerais de vibração. A seguir são apresentados relatos de estudos desenvolvidos a respeito de alguns métodos aplicados à problema de vibrações em viga de Timoshenko.

2.1 Teoria Clássica

Neste trabalho, denomina-se "Teoria Clássica" (TC) aquela que corresponde à solução analítica dos problemas de vibração em sistemas contínuos, cujas equações governantes do movimento são equações diferenciais parciais apresentadas por S. P. Timoshenko em 1921. A teoria de vigas de Timoshenko gera resultados mais flexíveis que a teoria de Euler-Bernoulli, já que a rotação da seção transversal é a soma da deformação da linha média mais o efeito de cisalhamento. Esta diferença, no entanto, é mínima para vigas finas. O efeito só é considerável no caso de vigas curtas e altas. No caso de vibrações de vigas, há diferenças nas frequências dos modos mais altos mesmo em vigas finas.

Muitos pesquisadores estudaram a formulação de Timoshenko. Devido a dificuldade em se obter a solução exata, somente em 1952 a solução correta para equação de Timoshenko foi apresentada por DENGLER e GOLAND (1952), obtida através da Transformada de Laplace para o problema de uma viga infinita, uniforme com impulso transversal. MIKLOWITZ (1952) também desenvolveu um método para obtenção da solução através da transformada de Laplace para o problema de vibração numa viga semi-infinita, uniforme sujeita a carga-

mento transiente. Embora seja apropriado para o estudo de propagação de ondas elásticas, a solução por meio da Transformada de Laplace não é tão facilmente obtida como são as soluções das equações de Euler-Bernoulli em forma de séries.

DOLH (1954) faz um paralelo passo-a-passo com teoria de Euler-Bernoulli discutindo ortogonalidade, problemas de valor de contorno, problemas envolvendo forças externas e momento e problemas envolvendo condições de contorno dependente do tempo. ANDERSON e PASADENA (1954) apresentam uma solução geral na forma de superposição de modos para o caso de uma viga de seção uniforme, de acordo com a teoria de Timoshenko. A solução das equações foram aproximadas através de funções harmônicas no tempo e funções harmônicas e hiperbólicas no espaço. Esta aproximação conduz a uma solução em forma de séries semelhante à solução da equação de Euler-Bernoulli. São apresentadas soluções para vibrações de vigas com uma das extremidades livres, é analisado caso de uma viga com uma carga transiente concentrada localizada na extremidade da viga. Os resultados obtidos pela formulação de Timoshenko foram comparados com os obtidos através das equações de Euler-Bernoulli.

HUANG (1961) analisou o efeito do cisalhamento e da inércia rotacional na equação da frequência e no modo de vibração de uma viga uniforme em vibração livre com várias condições de contorno. Através de um exemplo numérico, verificou-se uma redução na frequência e na amplitude dos modos de vibração quando incluídos os efeitos de cisalhamento e inércia rotacional. Por se tratar de equações altamente transcendentais e conseqüentemente de difícil resolução, em 1963, HUANG e KUNG publicam uma tabela contendo os valores da frequência e os modos de vibração de vigas uniformes, mono-engastadas, para vários parâmetros de cisalhamento. Em 1965, COWPER faz uma discussão sobre a forma de ob-

tenção do fator de correção de cisalhamento empregada por vários pesquisadores e introduz uma nova fórmula para o cálculo desse fator. Resultados numéricos são obtidos e comparados com os apresentados por outros autores. HSU (1975) analisou o fator de correção de cisalhamento para seções transversais circulares, KANEKO (1975) discute o fator de correção de cisalhamento em vibração de vigas. STEPHEN (1975) pesquisa a influência da variação do fator de correção de cisalhamento na frequência da viga.

WANG e KINSMAN (1971) estudam vibração em vigas metálicas e pórticos pela formulação de Timoshenko. Em 1990, CHANDRASHEKHARA, KRISHNAMURTHY e ROY analisam a vibração livre de uma viga de Timoshenko para materiais compostos. ABRAMOVICH (1992) estudou o efeito da inércia rotacional e do cisalhamento em vigas de materiais compostos.

Em 1995, HERR e SCHMIDT determinaram analiticamente a influência da distribuição da inércia rotacional e da deformação de cisalhamento no movimento de uma viga de Timoshenko, não-engastada, com massa concentrada, usando o programa comercial MATHEMATICA para resolver a equação da frequência.

A influência da posição, densidade e comprimento da massa nas frequências naturais da viga de Timoshenko foram analisadas por CHAN e WANG (1997) e comparadas com resultados obtidos experimentalmente. Para modos altos, observou-se que a teoria de Euler-Bernoulli não apresentou resultados tão precisos como a teoria de Timoshenko. BANERJEE (2001) apresenta uma formulação para vigas de Timoshenko para materiais compostos. A equação diferencial governante do modelo para vibração livre é resolvida analiticamente. Expressões exatas para a equação da frequência e modo de vibração de uma viga cantilever são obtidas de maneira analítica pelo uso do programa computacional REDUCE.

2.2 Método da Matriz de Rigidez Dinâmica

O Método da Matriz de Rigidez Dinâmica aproxima a solução exata através de funções de interpolação obtidas a partir da solução analítica da equação diferencial do modelo. O método apresenta excelente precisão, porém exige a solução de um problema de autovalores não linear. Em 1971, WANG e KINSMAN desenvolveram o método da matriz de rigidez dinâmica para análise de vibrações em pórticos de acordo com a teoria de Timoshenko. Posteriormente em 1973, HOWSON, WILLIAMS, CHENG e TSENG desenvolveram o método da matriz de rigidez dinâmica para uma viga de Timoshenko sujeita a cargas axiais. HALLAUER e LIU (1985) formularam a matriz de rigidez dinâmica de uma viga de Timoshenko com acoplamento flexão-torção. CHENG e PANTELIDES (1988) apresentam uma formulação para uma viga-coluna de Timoshenko numa base elástica sujeita a excitações transientes lateral e carregamento axial estático.

BARNEJEE E WILLIAMS (1992) desenvolveram expressões analíticas para a matriz de rigidez dinâmica com acoplamento flexão-torção de um elemento de viga de Timoshenko uniforme para resolver a equação diferencial governante do movimento do elemento. Concluíram que o uso das expressões analíticas na obtenção dos elementos da matriz de rigidez dinâmica é computacionalmente mais eficiente do que a inversão numérica da matriz necessária para obtê-los numericamente.

Em 1995, LEUNG e ZHOU aplicaram o Método de Kantorovich para análise de uma viga de Timoshenko, de seção não uniforme, submetida a um carregamento axial, obtendo um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Em conjunto com as condições de contorno naturais, as soluções das equações diferenciais fornecem a matriz de rigidez dinâmica. Logo, os termos da matriz são formados

por funções de forma que são soluções das equações diferenciais governantes do problema. Igualando o determinante da matriz de rigidez dinâmica a zero, obtém-se as frequências naturais do sistema. Alguns exemplos numéricos são apresentados e seus resultados comparados com os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos. MARTINS e LAIER (1998) investigam a existência do segundo espectro de frequência da teoria de viga de Timoshenko, baseando-se na matriz de rigidez dinâmica apresentada por CHEN (1987). Concluíram que a força e a inércia de rotação diminuem os valores das frequências naturais. Verificaram que esta diminuição se deve ao fato de que estas solicitações aumentam os valores das deflexões, portanto, diminui o número de vezes em que a viga passa em um ponto em um determinado tempo, isto é, a frequência.

Baseado na solução da equação diferencial governante de equilíbrio dinâmico de uma viga de Timoshenko, ALGHAMDI (2001) desenvolveu equações matriciais de transporte dinâmico e funções de carga. Os resultados das equações matriciais são então usados para obter expressões analíticas para os termos da matriz de rigidez dinâmica e funções de carga assumindo que os efeitos de amortecimento e deformação da seção transversal são negligenciados. Para obtenção do vetor de funções carga de rigidez dinâmica é adotado o mesmo procedimento da matriz de rigidez dinâmica para elementos de viga sujeitos a cargas concentradas e distribuídas. Foram analisados os efeitos da deformação e inércia rotacional nos valores das frequências naturais para vários tipos de viga.

2.3 Método dos Elementos Finitos

Segundo COOK e DAVIS (1981) remontam a 1906 as primeiros princípios que posteriormente seriam consolidados no Método dos Elementos Finitos. Nesta

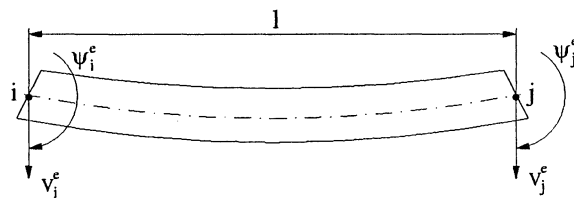
época foi proposto um mecanismo de modelagem do contínuo por um modelo de barras elásticas de tal forma que os deslocamentos nos nós representassem uma aproximação para os deslocamentos do contínuo. Em 1943, COURANT usou o princípio da energia potencial estacionária e a interpolação polinomial por partes sobre subregiões triangulares para estudar o problema de torção de Saint-Venant. De acordo com PAVANELLO e IGUTI (2002), o trabalho de COURANT foi considerado na época de valor prático baixo, pois não haviam computadores capazes de generalizar e resolver grandes conjuntos de equações algébricas simultâneas. Por isso o desenvolvimento do MEF coincide com o maior avanço dos computadores digitais e linguagens de programação. O MEF foi criado com o objetivo de se resolver os problemas de mecânica que não admitem soluções fechadas (de forma analítica). O método baseia-se em aproximações do tipo polinomial nodal em subdomínios, o que implica em processos de discretização dos domínios, que podem ter geometrias irregulares arbitrárias (HECKE, 2001).

O MEF tem se destacado com sendo uma ferramenta de uso geral, eficaz e de alto desempenho (CRAIG, 1981; ZIENKIEWICZ, 1977; CHOPRA, 1995; BATHE, 1996; PETYT, 1990).

Um número grande de elementos finitos de viga de Timoshenko tem sido proposto na literatura (THOMAS, WILSON E WILSON, 1973). Segundo a literatura e no decorrer deste trabalho, os vários elementos podem ser divididos em duas classes: simples e complexos. Um elemento simples é aquele que, para um deslocamento transversal unidimensional no plano principal, possui um total de quatro graus de liberdade, isto é, dois em cada nó. Um elemento complexo é aquele que possui mais de quatro graus de liberdade, ou seja, mais de dois graus de liberdade por nó ou então mais de dois nós.

A formulação de um elemento simples de viga de Timoshenko, isto é, com dois nós por elemento e dois graus de liberdade por nó, sendo as variáveis nodais o deslocamento transversal e a rotação total da viga como apresentado na figura 2.1 , foi proposta por vários pesquisadores, entre eles ASCHER (1965).

Figura 2.1: ELEMENTO SIMPLES



Em um artigo publicado em 1966 KAPUR, apresenta um elemento complexo de dois nós por elemento com quatro graus de liberdade por nó. O elemento foi desenvolvido considerando o deslocamento transversal dividido em duas partes, a primeira devido ao deslocamento transversal e a segunda devido ao cisalhamento. Foi assumida uma aproximação cúbica para ambas partes. As variáveis nodais usadas foram os dois tipos de deslocamentos e suas derivadas em relação ao espaço.

Em 1973, NICKELL e SECOR propõem um elemento chamado TIM7, com sete graus de liberdade. Uma função cúbica é adotada para o deslocamento e, para a rotação total, uma função quadrática. O elemento, possui três nós, dois em cada extremidade e um localizado no ponto médio da viga. Os graus de liberdade nodais nos extremos da viga são o deslocamento transversal, a rotação total e a derivada do deslocamento em relação ao espaço. O sétimo grau de liberdade é a rotação na seção transversal com o terceiro nó no ponto médio da viga. O elemento de KAPUR ao lado do TIM7 são de difícil aplicação para problemas complexos, como por exemplo, problemas com variação da seção transversal da

viga .

THOMAS, WILSON e WILSON (1973) propõem um novo elemento de viga de Timoshenko com dois nós e três graus de liberdade para cada nó, como apresentado na figura. As variáveis nodais são o deslocamento transversal, a rotação e o cisalhamento da seção transversal. É assumida uma variação cúbica para o deslocamento transversal e uma variação linear para o cisalhamento. O elemento é usado para calcular as frequências naturais de uma viga cantilever, e os resultados são comparados com os obtidos através de outros elementos.

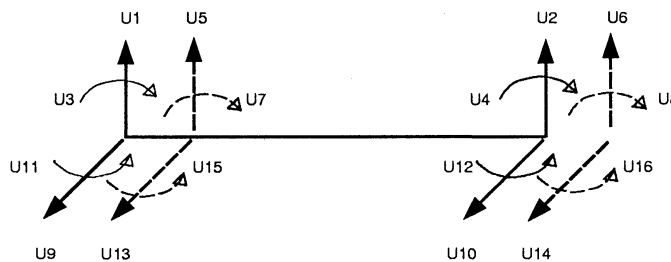
Em 1978, DAWE desenvolve uma formulação para um elemento finito de viga de Timoshenko com um total de seis graus de liberdade, isto é, três nós por elemento e dois graus de liberdade por nó. As variáveis nodais são o deslocamento transversal e a rotação total da seção. O deslocamento e a rotação são interpolados por funções de quinta e quarta ordem respectivamente.

YOKOYAMA (1995) apresentou uma técnica de elementos finitos simples para determinação das características de vibração de uma viga-coluna de Timoshenko de seção uniforme apoiada sobre uma fundação elástica. O elemento de viga é composto por dois nós por elemento com dois graus de liberdade nodais. Os efeitos da força axial, parâmetro de rigidez da fundação, cisalhamento e inércia rotacional são incorporados na formulação do elemento. São obtidos resultados para as frequências naturais e os modos de vibrações associados às teorias de Timoshenko e de Euler-Bernoulli e esses resultados são comparados com a solução analítica . Verificou que os resultados obtidos convergem mais rapidamente que o MEF em relação a solução analítica quanto menor a taxa de esbeltez.

A estabilidade dinâmica de uma coluna de Timoshenko vertical sujeita a

ação de forças sub-tangenciais foi pesquisada por BONG RYU, KATAYAMA, SUGIYAMA (1998). RAO E GUPTA (2001) aplicam o método dos elementos finitos para obter as frequências naturais e os modos de vibrações de uma viga cantilever de seção não uniforme sujeita a torção. É assumindo que o ângulo de torção e largura da viga variam linearmente ao longo do comprimento da viga. O elemento desenvolvido possui dois nós, o deslocamento total do elemento, (direções x e y e ao longo do eixo z) é representado por quatro variáveis nodais, quais sejam, deslocamentos transversais nos planos x e y respectivamente e outras duas referentes à deformação de cisalhamento nos planos correspondentes como mostra a figura 2.2, assumindo uma aproximação cúbica para interpolação dessas variáveis.

Figura 2.2: GRAUS DE LIBERDADE DO ELEMENTO



Outros métodos com concepções semelhantes para a solução do problema de vibrações também foram propostos. O Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) foi aplicado por BARDELL (1991) para vibrações em placas. HOU-MAT (1997) desenvolveu uma variante do MEFH para vibrações em placas na qual funções de formas trigonométricas hierárquicas são compostas com funções de forma polinomiais, sendo que, os exemplos numéricos testados, apresentaram resultados de superconvergência com o aumento do números de funções

hierárquicas.

2.4 Método dos Elementos Compostos

O método dos Elementos Compostos (MC) é uma variação do Método dos Elementos Finitos (MEF) proposto por ZENG (1998(a), 1998(b), 1998(c)) para análise de vibrações em estruturas. Este método combina o MEF convencional com a Teoria Clássica, e apresenta dois tipos de refinamento: h e c . Nestes trabalhos foram desenvolvidos elementos de barra e de viga de Euler-Bernoulli para o MC. Os resultados de exemplos numéricos comparados às soluções analíticas, mostraram que o MC é mais preciso que o MEF, com o mesmo número de graus de liberdade, principalmente para frequências mais altas. Conclui-se também que o refinamento c leva a uma superconvergência de resultados.

Em 2000, SHI e ZENG desenvolveram, o elemento composto para vibração de placa fina elástica. Verificou-se que os resultados obtidos pelo MC apresentam boa precisão em relação a solução analítica e aos resultados obtidos pelo MEF, utilizando o software ANSYS.

ARNDT (2001), ARNDT, MACHADO e HECKE (2001) desenvolveram um elemento composto para análise de vibração de treliça, de viga de Euler-Bernoulli e pórtico plano. Diversas aplicações são apresentadas e os resultados obtidos são comparados com a teoria clássica e com o MEF. Verificou-se que o MC é mais preciso que o MEF, com o mesmo número de graus de liberdade, na análise de vibrações livres. Uma análise do refinamento c e do refinamento p do método dos elementos composto foi apresentada por ARNDT, MACHADO e HECKE (2002).

CARVALHO (2002) aplicou o MC para determinar as frequências e modos

de vibrar em placas espessas de Mindlin-Reissner. A solução analítica para a vibração de placas é apresentada e a equação da frequência é determinada. Alguns exemplos são apresentados para mostrar a eficiência e precisão do método. Os efeitos relacionados à distorção dos elementos, também são apresentados e comparados, tanto em relação ao MEF quanto ao MC.

Em 2002, MACHADO, HECKE, ARNDT, CARVALHO e SANTOS apresentaram em 2002 um estudo sobre o método do elementos compostos aplicados a problemas de vibrações em vigas, placas, treliças e pórticos.

2.5 Outros Métodos

Em 1994, LOW apresentou a implementação de um software para análise de resposta e frequência de vibrações de um sistema. O sistema pode ser discreto ou contínuo, o qual pode ser representado por um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem acopladas. Vários métodos numéricos são usados para análise da resposta do sistema como Diferença Central, Newmark Beta, Wilson Theta, Houbolt e Runge-Kuta de quarta ordem. Os dados gerados na análise de resposta são processados para obter a frequência do sistema pelo uso do Método da Transformada Rápida de Fourier (FFT).

CHEN e HO (1996) propuseram um método para resolver problemas de autovalores usando a transformação diferencial. Em 1998, FODA usou o Método de Múltiplas Escalas para analisar a vibração não-linear de uma viga bi-apoiada. A formulação incorpora o efeito da deformação transversal de cisalhamento bem como a inércia rotacional sob grandes amplitudes de vibração. A solução da equação diferencial é obtida pelo Método de Galerkin e para solução da perturbação de segunda ordem, foi utilizado o Método de Múltipla Escalas, o qual

adota uma aproximação em forma de uma expansão uniforme de segunda ordem. São analisadas as influências do cisalhamento e da inércia rotacional em frequências não lineares.

Em 1999, CHEN e HO usaram a técnica de transformação diferencial para problemas de torção em vigas de Timoshenko sujeitas a um carregamento axial. As frequências naturais da viga foram obtidas através da técnica de transformação diferencial enquanto que para obtenção dos modos de vibração é adotada uma solução em forma de série.

Um conjunto de funções de viga de Timoshenko estática é desenvolvido por CHEUNG e ZHOU (2000) como funções admissíveis para o estudo de vibrações em placas retangulares moderadamente espessas usando o método de Rayleigh-Ritz. A viga é considerada como sendo uma tira de largura unitária da placa retangular paralela a direção das extremidades da placa. Comparações e estudos de convergência demonstram a precisão do método.

ZHOU (2001) estudou a vibração livre de vigas de Timoshenko contínuas pelo método de Rayleigh-Ritz. As funções estática de uma viga de Timoshenko são desenvolvidas como funções de forma, as quais completam as soluções para o deslocamento transversal e a rotação de uma viga quando uma série de carregamentos senoidais estáticos agem sobre a viga. A alta precisão e baixo custo computacional são confirmados pela convergência dos resultados obtidos e por comparações com outros resultados da literatura.

Em 2002, YAVARI, NOURI e MOFID apresentaram a Técnica do Elemento Discreto (DET) para vigas de Timoshenko sujeitas a cargas móveis. No DET, elementos de vigas flexíveis e contínuas são substituídos por um sistema de barras rígidas e juntas flexíveis. Os resultados obtidos pelo modelo DET são comparados

com a solução obtida por outros métodos.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) consiste na discretização apenas do contorno do domínio físico do problema, reduzindo assim o volume de dados necessários para a modelagem de um determinado problema. O MEC baseia-se na utilização de um procedimento matemático consistente, baseado em princípios da Teoria das Equações Integrais, a fim de transformar a equação diferencial associada ao modelo matemático em uma expressão integral, onde os limites das integrações encontram-se somente sobre o contorno do domínio físico do problema. A expressão integral é discretizada com vários elementos sobre o contorno do domínio físico do problema, sendo que tais elementos são definidos por um conjunto de pontos nodais. A seguir as equações são expressas através de um sistema de equações algébricas, formado pelos denominados coeficientes de influência, que computam a influência de uma ação de domínio concentrada em determinado ponto sobre os pontos nodais de um determinado elemento de contorno (BREBBIA e NARDINI 1983; DAVÍ e MILAZZO, 1997; TANAKA, MATSUMOTO e SHIOZAKI, 1998).

Existem vários outros métodos empregados na análise de vibrações, como os métodos mistos, os quais combinam o MEF e o MEC, potencializando as vantagens de cada uma das abordagens. Um exemplo é o *Método da Função de Green Local Modificado - MMFGL*, utilizado por FILIPPIN (1992) para analisar problemas de vibrações em membranas e cavidades. Há também métodos que não utilizam malhas, conhecido como *Método das Nuvens* proposto por Duarte e Oden (1995) discretiza o modelo (domínio arbitrário) apenas por uma nuvem esparsa de nós.

Capítulo 3

Método dos Elementos Compostos

3.1 Introdução

O Método dos Elementos Compostos consiste na superposição da solução da Teoria Clássica ao MEF convencional, isto é, acrescentam-se às funções de formas do MEF as soluções obtidas pela Teoria Clássica, combinando assim, a versatilidade do MEF à alta precisão da TC. O MC permite excelente precisão e convergência de resultados na análise de problemas com geometria e condições de contorno complexas. A utilização de um sistema de coordenadas apropriado é a base para a descrição adequada do campo de deslocamentos em cada um dos elementos (SHI e ZENG, 2000). Assim, pode-se descrever dois sistemas de coordenadas para o MC, referentes ao campo de deslocamentos nodais (graus de liberdade nodais) obtidos pelo MEF e ao campo de deslocamento local, com os graus de liberdade associados à parcela da TC.

- Campo de deslocamentos do MEF: o sistema de coordenadas nodais do MEF descreve o campo de deslocamentos U_{MEF} através dos deslocamentos

dos nós do elemento, ou seja:

$$U_{MEF}(\xi) = N(\xi)^T q$$

Onde N é o vetor de funções de forma, q é o vetor de deslocamentos nodais ou graus de liberdade nodais e ξ é a coordenada local do elemento.

- Campo de deslocamento da TC: no sistema de coordenadas de local, o campo de deslocamento U_{TC} é obtido através de coeficientes que multiplicam funções obtidas da teoria clássica:

$$U_{TC}(\xi) = \Upsilon(\xi)^T c$$

Onde Υ é o vetor de funções analíticas da teoria clássica e c é o vetor de coeficientes, ou graus de liberdade c .

O vetor de funções analíticas é obtido através da solução da equação diferencial que governa o problema, no domínio do elemento, sujeita a condições de contorno de compatibilidade. Essas condições de contorno de compatibilidade tem o objetivo de não alterar os deslocamentos nodais do elemento, quando adicionadas às funções de forma do MEF.

Assim, o campo de deslocamentos do MC é obtido através da superposição das funções analíticas obtidas pela TC às funções de forma do MEF. Tem-se:

$$U_{MC}(\xi) = U_{MEF}(\xi) + U_{TC}(\xi)$$

Ou seja:

$$U_{MC}(\xi) = N(\xi)^T q + \Upsilon(\xi)^T c$$

Outra particularidade do MC reside no tipo de refinamento. São de dois tipos:

- refinamento h , semelhante ao refinamento h do MEF, que consiste no refinamento da malha, ou seja, no aumento do número de elementos finitos.
- refinamento c , que consiste no aumento do número de funções de interpolação, através da inclusão de novos termos da série correspondentes à solução da TC, eventualmente o mesmo pode ser feito a parcela do MEF, tal como mostrada em ARNDT (2001)

A próxima seção apresenta o elemento de viga de Timoshenko obtido pela Teoria Clássica quando o campo de deslocamento para a TC é determinado e alguns resultados são discutidos em função da variação da inércia rotacional e do cisalhamento. Nas seções seguintes, são definidos os campos de deslocamentos nodais e um elemento composto para viga de Timoshenko é desenvolvido para análise de vibrações.

3.2 Teoria Clássica para Solução da Viga de Timoshenko

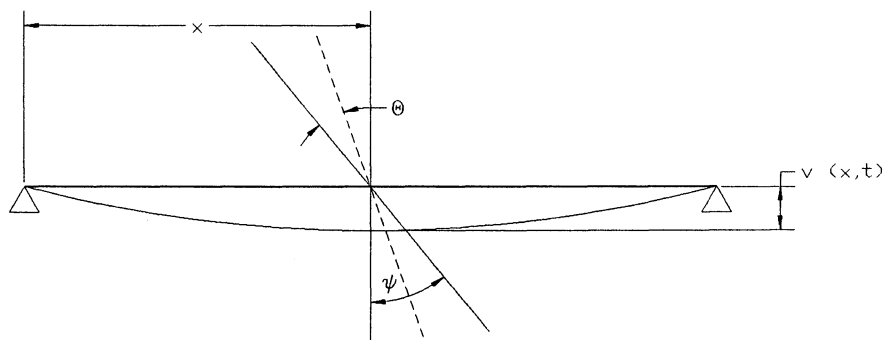
Para o elemento de viga de Timoshenko consideram-se as seguintes hipóteses (E. HINTON, 1980; HINTON e OWEN, 1979):

- a existência de um eixo neutro (eixo x), onde a viga não sofre tração nem compressão;
- seções planas e perpendiculares ao eixo neutro da viga permanecem planas mas não necessariamente perpendiculares após a deformação;
- deflexões laterais são pequenas em relação a espessura da viga;
- material elástico linear e homogêneo;

- tensões normais ao eixo neutro são negligenciadas.

A figura 3.1 mostra a deformação cinemática de um elemento infinitesimal de viga sofrendo deformação cisalhante devido a flexão simples, onde $v(x, t)$ é o deslocamento transversal total do eixo neutro da viga.

Figura 3.1: DEFORMAÇÃO CINEMÁTICA DA VIGA



O ângulo de cisalhamento é dado por:

$$\theta = \psi - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.1)$$

sendo ψ a rotação total da seção e $\frac{\partial v}{\partial x}$ a rotação devido à flexão da viga.

Da teoria elementar de viga, a equação momento-curvatura é

$$M = EI\psi'$$

onde

$$\psi' = \frac{d\psi}{dx}$$

A energia de deformação é

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI(\psi')^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l kGA\theta^2 dx \quad (3.2)$$

O primeiro termo da equação 3.2 é a energia de deformação devido à flexão e o segundo, a energia de deformação devido ao cisalhamento, onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, G , o módulo de elasticidade transversal, I é o momento de inércia da seção transversal e k é o fator adimensional de correção ou de cisalhamento.

Por outro lado, a energia cinética da viga é dada por

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A (\dot{v})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I (\dot{\psi})^2 dx \quad (3.3)$$

onde

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} \quad (3.4)$$

O primeiro termo da equação (3.3) é a energia cinética devido a inércia de translação e o segundo termo é a energia cinética devido a inércia rotacional.

Aplicando-se o *Princípio de Hamilton*:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_e dt = 0 \quad (3.5)$$

Onde T é a energia cinética do sistema, U é a energia de deformação elástica do sistema, δW_e é o trabalho virtual devido a forças externas e t_1, t_2 são instantes de limites de tempo.

Para uma viga com carga transversal distribuída $p(x, t)$:

$$\delta W_e = \int_0^l p(x, t) \delta v(x, t) dx. \quad (3.6)$$

Usando a equação 3.1 para eliminar o ângulo de cisalhamento $\theta(x, t)$, obtém-se pelo *Princípio de Hamilton*:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \delta \left[\rho A \dot{v}^2 + \rho I \dot{\psi}^2 - E I (\psi')^2 - k G A (\psi - v')^2 \right] dx dt + \\ & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l p \delta v dx dt = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Integrando por partes e observando que $\delta v(x, t_1) = \delta v(x, t_2) = \delta \psi(x, t_1) = \delta \psi(x, t_2) = 0$, obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l [[k G A (\psi' - v'')] - \rho A \ddot{v} + p] \delta v dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l [-\rho I \ddot{\psi} + (E I \psi'') - k G A (\psi - v')] \delta \psi dx dt = 0 \quad (3.8)$$

Como δv e $\delta \psi$ são arbitrários a equação 3.8 conduz à :

$$[k G A (\psi' - v'')] - \rho A \ddot{v} = p(x, t) \quad (3.9)$$

$$k G A (\psi - v') + (E I \psi'') - \rho I \ddot{\psi} = 0 \quad (3.10)$$

As expressões 3.9 e 3.10 são as equações diferenciais parciais que governam o movimento do modelo de viga de Timoshenko.

Supondo que a viga seja uniforme, ou seja, E e I são constantes e no caso de vibrações livres, as equações governantes do movimento tornam-se:

$$[k G A (\psi' - v'')] - \rho A \ddot{v} = 0 \quad (3.11)$$

$$k G A (\psi - v') + (E I \psi'') - \rho I \ddot{\psi} = 0 \quad (3.12)$$

A equação 3.11 pode ser escrita em função de v :

$$\psi' = v'' - \left(\frac{\rho}{k G}\right) \ddot{v} \quad (3.13)$$

Diferenciando 3.12 em relação a x tem-se:

$$kGA(\psi' - v'') + (EI\psi''') - (\rho I \ddot{\psi})' = 0 \quad (3.14)$$

Substituindo 3.13 em 3.14, obtém-se:

$$\underbrace{EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}_{\text{Bernoulli-Euler}} - \underbrace{\rho I \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2}}_{\substack{\text{inércia} \\ \text{rotacional}}} + \underbrace{\frac{\rho EI}{kG} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2}}_{\text{cisalhamento}} + \underbrace{\frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4}}_{\substack{\text{Inércia rot.} \\ + \\ \text{cisalhamento}}} = 0 \quad (3.15)$$

Note que primeiro termo da equação 3.15 se refere a teoria de Bernoulli-Euler, o segundo e o terceiro termo apresentam a contribuição da inércia rotacional e da deformação de cisalhamento respectivamente e finalmente, o quarto termo é formado pela contribuição da inércia rotacional e do cisalhamento. Da mesma forma, tem-se para a rotação total ψ :

$$EI \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho EI}{kG} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{kG} \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0 \quad (3.16)$$

Assumindo o movimento harmônico dado pelas equações:

$$v = V e^{jft}, \quad \psi = \Psi e^{jft}, \quad \xi = \frac{x}{l}$$

Sendo V a função normal de v , Ψ a função normal de ψ , f a frequência angular, l o comprimento da viga, ξ o comprimento adimensional, e $j = \sqrt{-1}$.

Diferenciando em relação a ξ e omitindo o fator e^{jft} , as equações 3.11, 3.12, 3.15, 3.16 se reduzem a:

$$s^2\Psi'' - (1 - b^2r^2s^2)\Psi + \frac{V'}{l} = 0 \quad (3.17)$$

$$V'' + b^2s^2V - l\Psi' = 0 \quad (3.18)$$

$$V^{iv} + b^2(r^2 + s^2)V'' - b^2(1 - b^2r^2s^2)V = 0 \quad (3.19)$$

$$\Psi^{iv} + b^2(r^2 + s^2)\Psi'' - b^2(1 - b^2r^2s^2)\Psi = 0 \quad (3.20)$$

onde

$$b^2 = \frac{\rho A l^4}{EI} f^2, \quad f = 2\pi\omega \quad (3.21)$$

sendo f a frequência angular e ω a frequência natural.

$$r^2 = \frac{I}{Al^2}, \quad s^2 = \frac{EI}{kAGl^2}.$$

Onde s é a variável adimensional relacionada com o efeito da deformação de cisalhamento e r a variável adimensional relacionada com a inércia rotacional (inércia associada com a rotação local da seção transversal da viga durante a deformação de flexão) que pode ser escrita em função da variável s da seguinte forma:

$$r^2 = s^2 \frac{kG}{E}.$$

As soluções analíticas das equações diferenciais 3.19 e 3.20 são compostas por equações transcendentais, conforme HUANG (1961); BANERJEE (2001); e BOYCE e PRIMA (1998); MEIROVITCH (1975) na forma:

$$V = c_1 \cosh b\alpha \xi + c_2 \sinh b\alpha \xi + c_3 \cos b\beta \xi + c_4 \sin b\beta \xi \quad (3.22)$$

$$\Psi = \bar{c}_1 \sinh b\alpha \xi + \bar{c}_2 \cosh b\alpha \xi + \bar{c}_3 \sin b\beta \xi + \bar{c}_4 \cos b\beta \xi \quad (3.23)$$

Onde :

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{-(r^2 + s^2) + \sqrt{\left[(r^2 - s^2)^2 + \frac{4}{b^2}\right]}} \quad (3.24)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{(r^2 + s^2) + \sqrt{\left[(r^2 - s^2)^2 + \frac{4}{b^2}\right]}} \quad (3.25)$$

e assumindo-se que:

$$\left[(r^2 - s^2)^2 + \frac{4}{b^2}\right]^{\frac{1}{2}} > (r^2 + s^2).$$

Como 3.22 e 3.23 são soluções acopladas das equações originais 3.17 e 3.18, suas constantes podem ser relacionadas como segue-se:

$$c_1 = \frac{l}{b\alpha} [1 - b^2 s^2 (\alpha^2 + r^2)] \bar{c}_1, \quad c_2 = \frac{l}{b\alpha} [1 - b^2 s^2 (\alpha^2 + r^2)] \bar{c}_2$$

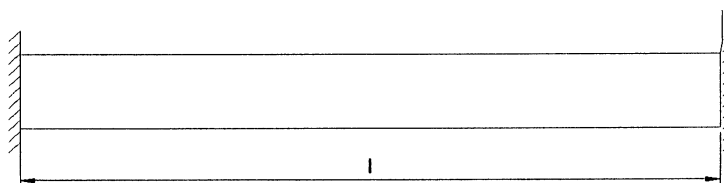
$$c_3 = -\frac{l}{b\beta} [1 - b^2 s^2 (\beta^2 - r^2)] \bar{c}_3, \quad c_4 = \frac{l}{b\beta} [1 - b^2 s^2 (\beta^2 - r^2)] \bar{c}_4$$

Ou ainda

$$\begin{aligned}\bar{c}_1 &= \frac{b(\alpha^2 + s^2)}{l} \frac{1}{\alpha} c_1, & \bar{c}_2 &= \frac{b(\alpha^2 + s^2)}{l} \frac{1}{\alpha} c_2 \\ \bar{c}_3 &= -\frac{b(\beta^2 - s^2)}{l} \frac{1}{\beta} c_3, & \bar{c}_4 &= \frac{b(\beta^2 - s^2)}{l} \frac{1}{\beta} c_4\end{aligned}$$

Para obterem-se as freqüências e os modos de vibração da viga, e consequentemente, as funções analíticas para o MC, é necessária a aplicação das condições de contorno do problema. Adotam-se condições de contorno que garantem a compatibilidade do MEF, ou seja, que não afetem os valores associados aos graus de liberdade nodais no MEF. Para garantir esta compatibilidade é necessário que as soluções analíticas obtidas resultem em deslocamentos nulos nos nós do elemento. Isso corresponde a se adotar um modelo de viga bi-engastada, tal como indicado na figura 3.2. Logo, para o elemento de viga de comprimento l , as condições de contorno de compatibilidade são:

Figura 3.2: VIGA BI-ENGASTADA.



$$\begin{aligned}V(0) &= 0 & V(l) &= 0 \\ \Psi(0) &= 0 & \Psi(l) &= 0\end{aligned}\tag{3.26}$$

Substituindo as condições de contorno 3.26 nas equações 3.22 e 3.23, obtém-se um sistema de equações homogêneas, cuja forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(\alpha b) & \sinh(\alpha b) & \cos(\beta b) & \sin(\beta b) \\ 0 & \mu & 0 & \nu \\ \sin(\alpha b)\mu & \cosh(\alpha b)\mu & -\sin(\beta b)\nu & \cos(\beta b)\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Onde :

$$\nu = \frac{b(\beta^2 - s^2)}{l\beta} \quad \mu = \frac{b(\alpha^2 + s^2)}{l\alpha}$$

Para que o sistema 3.27 tenha solução diferente da trivial é necessário que o determinante da matriz de coeficientes seja igual a zero. Obtém-se então a equação da frequência:

$$f = 2 - 2 \cosh(\alpha b) \cos(\beta b) - \mathcal{D} \sinh(\alpha b) \sin(\beta b) \quad (3.28)$$

onde,

$$\mathcal{D} = \frac{\nu^2 - \mu^2}{\nu\mu}$$

Para cada r e s conhecidos, os valores de b_i com $i = 1, 2, 3, \dots$, podem ser obtidos através da determinação das raízes ¹ da equação 3.28, e a frequência natural ω correspondente pode ser calculada pela equação 3.21.

Assim, tem-se:

$$b = 2\pi \sqrt{\frac{\rho A l^4 \omega^2}{EI}}$$

¹Neste trabalho utilizou-se o Método da Falsa Posição para determinação das raízes da equação da frequência, (ARNDT, 2001).

Para cada conjunto de parâmetros r e s , obtêm-se as raízes “ b ” da equação 3.28 que são os autovalores do problema.

Nota-se que, para valores nulos de r e s obtém-se o modelo de viga de Euler-Bernoulli. Seja b_0 o autovalor do modelo de Bernoulli e f_0 a frequência natural correspondente, para a equação 3.21 tem-se:

$$\frac{b}{b_0} = \frac{f}{f_0} \implies f_0 \geq f. \quad (3.29)$$

A taxa b/b_0 e f/f_0 é chamada de “quociente modificado” conforme HUANG (1963). Se o quociente modificado é conhecido, a equação 3.29 fornece os valores de b para os quais a frequência natural f pode ser calculada.

Para uma viga bi-engastada, com combinações de r e s obtêm-se os seguintes valores para b indicados na tabela 3.1:

Tabela 3.1: AUTOVALORES OBTIDOS PARA UMA VIGA BI-ENGASTADA.

r	s	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
0	0	22,373	61,673	120,903	199,859	298,556
0,008	0,01399	22,257	60,934	118,399	193,549	285,357
0,04	0,0699	19,934	48,875	85,118	125,449	168,339
0,08	0,1399	15,741	33,839	54,833	76,643	147,098

A cada autovalor (ou frequência), são associadas auto-funções (ou modos de vibração) que podem ser escritas da seguinte forma:

$$V(\xi) = c_4 \{ \text{sen}(B_i \xi) - \zeta_i \text{senh}(A_i \xi) + \mathcal{Z}_i [\cosh(A_i \xi) - \cos(B_i \xi)] \}$$

$$\Psi(\xi) = c_4 \{ \cos(B_i \xi) \nu_i - \cosh(A_i \xi) \nu_i + \mathcal{Z}_i [\text{sen}(B_i \xi) \nu_i + \text{senh}(A_i \xi) \theta_i] \}$$

Onde:

$$A_i = b_i \alpha_i, \quad B_i = b_i \beta_i, \quad \zeta_i = \frac{\nu_i}{\mu_i},$$

$$\mathcal{Z}_i = \frac{\text{sen}(B_i) - \zeta_i \text{senh}(A_i)}{\cos(B_i) - \cosh(A_i)}$$

Observa-se que as funções analíticas que podem ser embutidas no MC são infinitas pois a viga possui infinitas frequências e modos naturais de vibração. Assim, o campo de deslocamentos da Teoria Clássica para o elemento de viga de Timoshenko é dado por:

$$v_{TC}(\xi, t) = \Upsilon_v^T(\xi) c(t) \quad (3.30)$$

$$\psi_{TC}(\xi, t) = \Upsilon_\psi^T(\xi) c(t) \quad (3.31)$$

Onde :

$$\Upsilon_v^T(\xi) = \left[F_{v_1} \quad F_{v_2} \quad \dots \quad F_{v_i} \quad \dots \quad F_{v_n} \right]$$

$$\Upsilon_\psi^T(\xi) = \left[F_{\psi_1} \quad F_{\psi_2} \quad \dots \quad F_{\psi_i} \quad \dots \quad F_{\psi_n} \right]$$

$$c(t) = \left[c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \dots \quad c_n \right]$$

Sendo as funções F_{v_i} e F_{ψ_i} dadas por:

$$F_{v_i} = \text{sen}(B_i \xi) - \zeta_i \text{senh}(A_i \xi) + \mathcal{Z}_i [\cosh(A_i \xi) - \cos(B_i \xi)] \quad (3.32)$$

$$F_{\psi_i} = \cos(B_i \xi) \nu_i - \cosh(A_i \xi) \nu_i + \mathcal{Z}_i [\text{sen}(B_i \xi) \nu_i + \text{senh}(A_i \xi) \mu_i] \quad (3.33)$$

Com $i = 1, 2, \dots, n$ sendo $c_i(t)$ as constantes que multiplicam as soluções analíticas da TC e n o número de funções utilizadas.

As figuras 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 e 3.7 apresentam os gráficos das cinco primeiras funções analíticas (modo de vibração ou funções de forma da TC) referentes ao deslocamento transversal e as figuras 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 e 3.7 a rotação total de uma viga engastada-engastada para um conjunto de parâmetros r e s conforme indicado na tabela 3.1. Nota-se que a amplitude do modo de vibração diminui com o aumento da contribuição da inércia rotacional e da deformação de cisalhamento.

Figura 3.3: 1º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO À FLEXÃO.

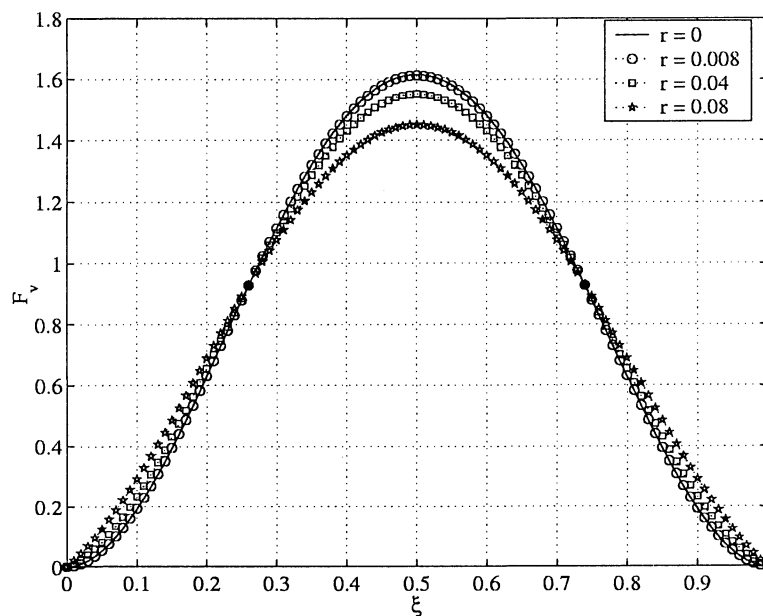


Figura 3.4: 2º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO À FLEXÃO.

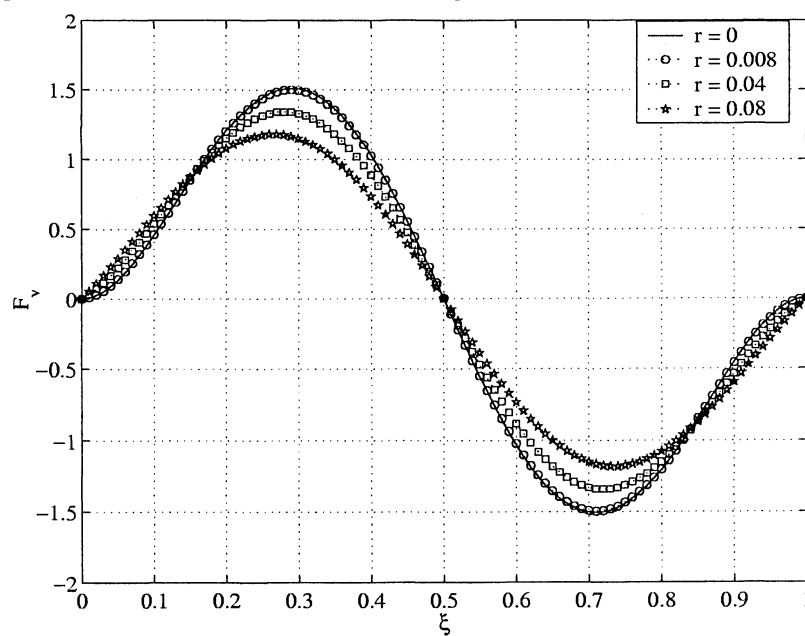


Figura 3.5: 3º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO À FLEXÃO.

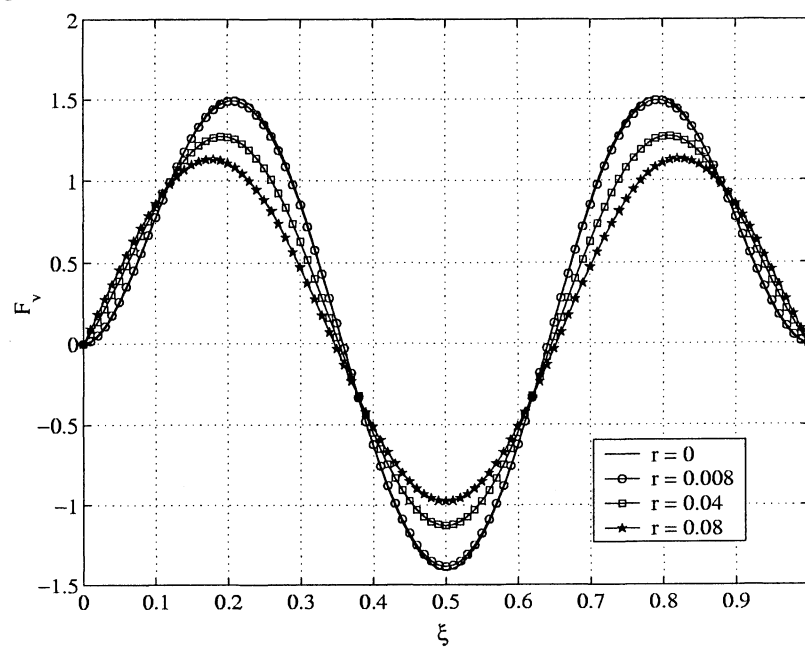


Figura 3.8: 1º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO A ROTAÇÃO TOTAL.

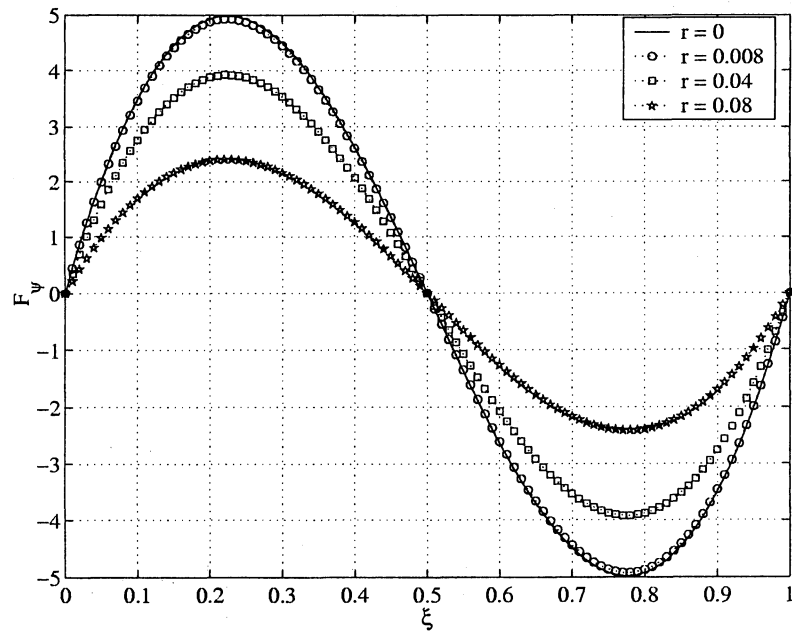


Figura 3.9: 2º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO A ROTAÇÃO TOTAL.

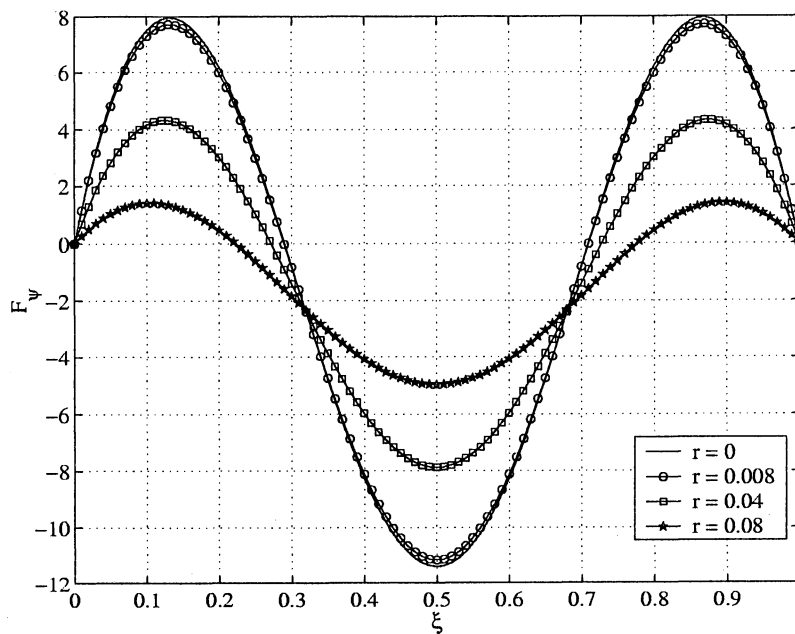


Figura 3.10: 3º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO A ROTAÇÃO TOTAL.

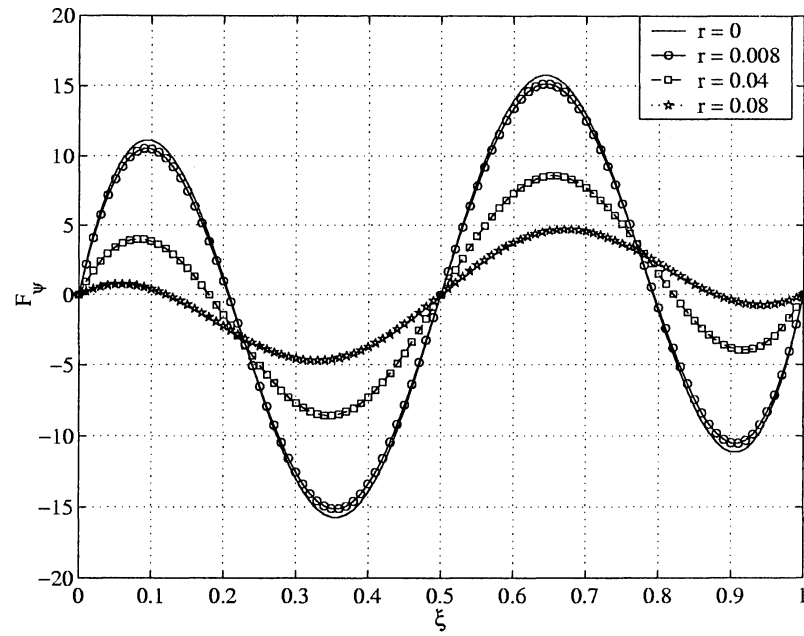


Figura 3.11: 4º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO A ROTAÇÃO TOTAL.

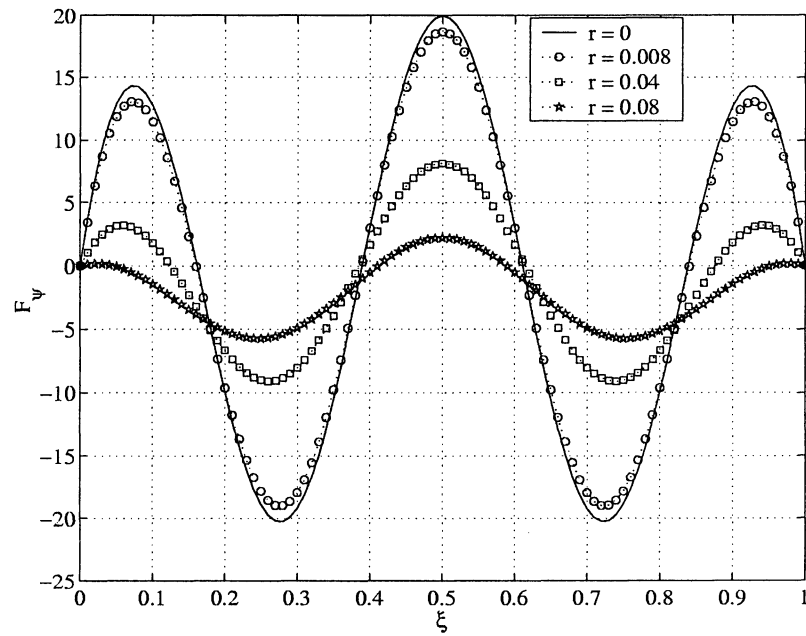
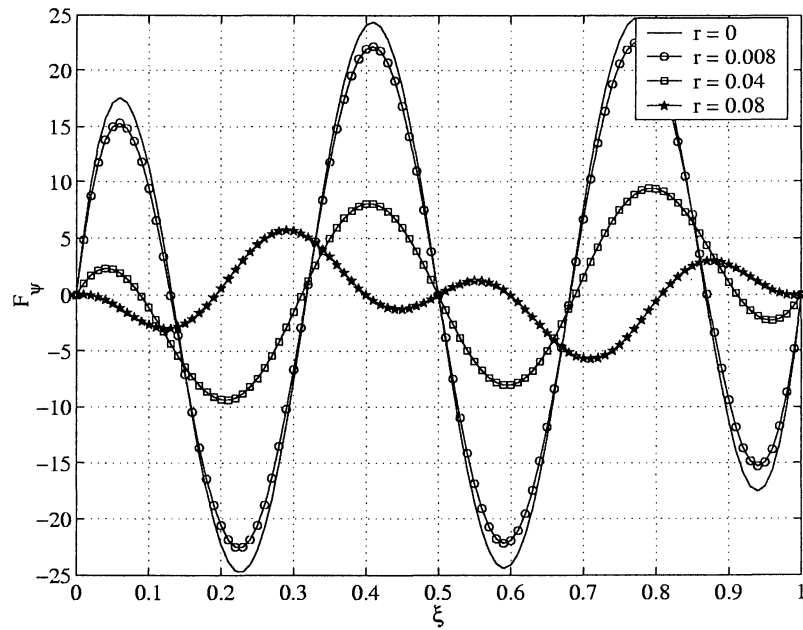


Figura 3.12: 5º MODO DE VIBRAÇÃO DEVIDO A ROTAÇÃO TOTAL.



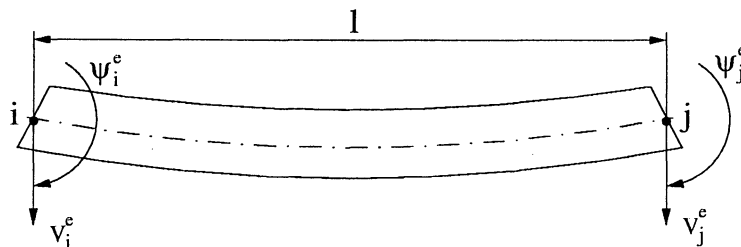
3.3 Campo de Deslocamentos Nodais

Nesta seção será desenvolvido um elemento finito de viga de Timoshenko com o objetivo de obter-se o campo de deslocamentos nodais.

3.3.1 Método dos Elementos Finitos

O elemento de viga de Timoshenko, conforme mostrado na figura 3.13, consiste em dois nós, i e j , sendo que cada um possui dois graus de liberdade, isto é, deslocamento transversal v^e e rotação ψ^e .

Figura 3.13: ELEMENTO DE VIGA DE TIMOSHENKO



É proposta a seguinte interpolação para o campo de deslocamentos transversais v^e e para as rotações ψ^e respectivamente:

$$\begin{aligned} v(\xi, t) &= v_i(t) N_{v1}(\xi) + \psi_i(t) N_{v2}(\xi) + v_j(t) N_{v3}(\xi) + \psi_j(t) N_{v4}(\xi) \\ \psi(\xi, t) &= v_i(t) N_{\psi1}(\xi) + \psi_i(t) N_{\psi2}(\xi) + v_j(t) N_{\psi3}(\xi) + \psi_j(t) N_{\psi4}(\xi) \end{aligned}$$

Onde N_{vk} e $N_{\psi k}$, $k = 1, \dots, 4$ são funções de forma ou interpolação associadas aos graus de liberdade do elemento de viga.

Assumindo uma aproximação cúbica e quadrática, respectivamente, para os deslocamentos e rotações, tem-se:

$$\begin{aligned} v^e &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ \psi^e &= \bar{a}_1 + \bar{a}_2 x + \bar{a}_3 x^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

As sete constantes de integração indicadas na equação 3.34 não são independentes. Assim as soluções dessas equações devem também satisfazer as equações 3.15 e 3.16. Desta forma, obtém-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{1}{l} a_1 + \frac{6EI}{\kappa AG l^2} a_3 \\ \bar{a}_2 &= \frac{2}{l} a_2 \\ \bar{a}_3 &= \frac{3}{l} a_3 \end{aligned}$$

O deslocamento transversal v pode ser representado como

$$v^e = X_v^T a$$

Sendo:

$$X_v^T = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

Onde a é o vetor formado pelas constantes de integração. A rotação $\psi^e = \left(\frac{\partial v^e}{\partial x} - \theta^e\right)$ do elemento pode ser escrita em função do vetor a :

$$\psi^e = X_\psi^T a$$

$$X_\psi^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2x & 3x^2 + 6\frac{EI}{\kappa GA} \end{bmatrix}$$

As funções, 3.34 devem satisfazer as seguintes condições de contorno em i ($x = 0$), e j ($x = l$).

Em $x = 0$

$$v_i^e = a_1$$

$$\psi_i^e = a_2 + 6\frac{EI}{\kappa GA} a_3$$

Em $x = l$

$$v_j^e = a_1 + a_2 l + a_3 l^2 + a_4 L^3$$

$$\psi_j^e = a_2 + 2a_3 l + \left(3l^2 + 6\frac{EI}{\kappa GA}\right) a_3$$

Fazendo-se $\phi = 6\frac{EI}{\kappa GA}$, tem-se matricialmente:

$$\begin{bmatrix} v_i^e \\ \psi_i^e \\ v_j \\ \psi_j^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \phi \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & (3l^2 + \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

O que resulta em:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2\phi}{l(l^2+2\phi)} & \frac{l^2+\phi}{l^2+2\phi} & \frac{2\phi}{l(l^2+2\phi)} & -\frac{\phi}{l^2+2\phi} \\ \frac{-3}{l^2+2\phi} & -\frac{2l^2+\phi}{l(l^2+2\phi)} & \frac{3}{l^2+2\phi} & \frac{-l^2+\phi}{l(l^2+2\phi)} \\ \frac{2}{l(l^2+2\phi)} & \frac{1}{l^2+2\phi} & \frac{-2}{l(l^2+2\phi)} & \frac{1}{l^2+2\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^e \\ \psi_i^e \\ v_j \\ \psi_j^e \end{bmatrix}$$

$$a^T = \mathcal{M}\bar{q}$$

Onde a é o vetor das constantes de integração e \bar{q} é o vetor campo de deslocamento do elemento. Pode-se reescrever as equações 3.34 como:

$$v^e = X_v^T \mathcal{M}\bar{q}, \quad \psi^e = X_\psi^T \mathcal{M}\bar{q}. \quad (3.35)$$

Manipulando as equações apresentadas em 3.35 obtêm-se as funções de forma para o deslocamento transversal e para a rotação respectivamente:

$$\begin{aligned} N_{v1} &= \frac{[1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + (1 - \xi)]}{(1 + \Phi)} \\ N_{v2} &= \frac{[\xi - 2\xi^2 + \xi^3 + (\xi - \xi^2) \Phi/2]}{(1 + \Phi)} \\ N_{v3} &= \frac{(3\xi^2 - 2\xi^3 + \xi\Phi)}{(1 + \Phi)} \\ N_{v4} &= \frac{[-\xi^2 + \xi^3 - (\xi - \xi^2) \Phi/2]}{(1 + \Phi)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

e

$$\begin{aligned}
 N_{\psi_1} &= 6 \frac{-\xi + \xi^2}{l(1 + \Phi)} \\
 N_{\psi_2} &= \frac{[1 - 4\xi + 3\xi^2 + (1 - \xi)\Phi]}{(1 + \Phi)} \\
 N_{\psi_3} &= 6 \frac{\xi - \xi^2}{l(1 + \Phi)} \\
 N_{\psi_4} &= \frac{-2\xi + 3\xi^2 + \xi\Phi}{(1 + \Phi)}
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Onde o parâmetro de cisalhamento Φ é dado por:

$$\Phi = \frac{12EI}{\kappa GA l^2}$$

Matricialmente, tem-se:

$$v^e = \begin{bmatrix} N_{v1} & N_{v2} & N_{v3} & N_{v4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^e \\ \psi_i^e \\ v_j^e \\ \psi_j^e \end{bmatrix}$$

$$\psi^e = \begin{bmatrix} N_{\psi1} & N_{\psi2} & N_{\psi3} & N_{\psi4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^e \\ \psi_i^e \\ v_j^e \\ \psi_j^e \end{bmatrix}$$

Logo o campo de deslocamento do MEF para a viga uniforme de Timoshenko é descrito com:

$$v_{MEF} = N_v^T \bar{q}$$

$$\psi_{MEF} = N_\psi^T \bar{q}$$

3.4 Método dos Elementos Compostos

Conforme visto anteriormente, o campo de deslocamentos do MC é decorrente da associação do MEF e da TC. Assim, para uma viga de Timoshenko uniforme, o campo de deslocamentos pode ser escrito da seguinte forma:

$$v^e(\xi, t) = N_v^T(\xi) \bar{q}(t) + \Upsilon_v^T(\xi) c(t)$$

$$\psi^e(\xi, t) = N_\psi^T(\xi) \bar{q}(t) + \Upsilon_\psi^T(\xi) c(t)$$

ou ainda,

$$v^e(\xi, t) = S_v^T(\xi) q(t)$$

$$\psi^e(\xi, t) = S_\psi^T(\xi) q(t) \quad (3.38)$$

Onde

$$S_v^T(\xi) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} N_{v1} & N_{v2} & N_{v3} & N_{v4} & F_{v1} & F_{v2} & \dots & F_{vn} \end{array} \right]$$

$$S_\psi^T(\xi) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} N_{\psi1} & N_{\psi2} & N_{\psi3} & N_{\psi4} & F_{\psi1} & F_{\psi2} & \dots & F_{\psi n} \end{array} \right]$$

$$q(t) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} v_i & \psi_i & v_j & \psi_j & c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{array} \right]$$

A deformação proveniente da flexão, ε_f , no elemento é definida como:

$$\varepsilon_f = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Sendo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{l} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{\partial N_{\psi 1}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{\psi 2}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{\psi 3}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{\psi 4}}{\partial \xi} & \frac{\partial F_{\psi 1}}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial F_{\psi n}}{\partial \xi} & \\ \hline & & & & & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_i^e \\ \psi_i^e \\ v_j^e \\ \psi_j^e \\ \hline c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Designando, $B_f = \frac{1}{l} \left[\frac{\partial S_\psi}{\partial \xi} \right]$, tem-se:

$$\varepsilon_f = [B_f] \{q\} \quad (3.39)$$

Por outro lado, o ângulo de cisalhamento θ no elemento pode ser escrito como:

$$\theta = \psi - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.40)$$

Mas

$$\frac{\partial S_v}{\partial x} = \frac{1}{l} \left[\begin{array}{cccc|cccc} \frac{\partial N_{v1}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{v2}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{v3}}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{v4}}{\partial \xi} & \frac{\partial F_{v1}}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial F_{vn}}{\partial \xi} & \\ \hline & & & & & & & \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_i^e \\ \psi_i^e \\ v_j^e \\ \psi_j^e \\ \hline c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Sendo $\bar{B}_c = \frac{1}{l} \left[\frac{\partial S_\psi}{\partial \xi} \right]$, o ângulo de cisalhamento pode ser escrito como:

$$\theta = ([S_\psi] - [\bar{B}_c]) \{q\}. \quad (3.41)$$

Com o auxílio das equações 3.38, e 3.39, a energia de deformação U^e (3.2) e a energia cinética T^e (3.3) podem ser expressas em termos do vetor de deslocamento nodal $\{q^e\}$ como:

$$\begin{aligned} U^e = & \frac{1}{2} \int_0^1 \{q\}^T [B_f]^T EI [B_f] \{q\} \frac{l}{2} d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \{q\}^T ([S_\psi] - [\bar{B}_c])^T kGA ([S_\psi] - [\bar{B}_c]) \{q\} \frac{l}{2} d\xi \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} T^e = & \frac{1}{2} \int_0^1 \{\dot{q}\}^T [S_v]^T \rho A [S_v] \{\dot{q}\} \frac{l}{2} d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \{\dot{q}\}^T [S_\psi]^T \rho I [S_\psi] \{\dot{q}\} \frac{l}{2} d\xi \end{aligned} \quad (3.43)$$

Designando por $[B_c] = ([S_\psi] - [\bar{B}_c])$ e:

$$[k_f] = \int_0^1 [B_f]^T EI [B_f] l d\xi$$

$$[k_c] = \int_0^1 [B_c]^T kGA [B_c] l d\xi$$

$$[m_t] = \int_0^1 [S_v]^T \rho A [S_v] l d\xi$$

$$[m_r] = \int_0^1 [S_\psi]^T \rho I [S_\psi] l d\xi$$

Onde:

- $[k_f]$ é a matriz de rigidez elementar devido à flexão
- $[k_c]$ é a matriz de rigidez elementar devido ao cisalhamento
- $[m_t]$ é a matriz de massa elementar consistente devido à inércia de translação.

- $[m_r]$ é a matriz de massa elementar devido à inércia rotacional

Expandindo-se as expressões 3.42 e 3.43 como:

$$U^e = \frac{1}{2}\{q^e\}^T [k_f]^e \{q\}^e + \frac{1}{2}\{q^e\}^T [k_c]^e \{q\}^e$$

$$T^e = \frac{1}{2}\{\dot{q}^e\}^T [m_t]^e \{\dot{q}\}^e + \frac{1}{2}\{q^e\}^T [m_r]^e \{q\}^e$$

Aplicando-se novamente o *Princípio de Hamilton* conforme a expressão 3.5, tem-se a equação matricial que governa a vibração livre na viga de Timoshenko:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = 0 \quad (3.44)$$

Sendo:

$$[M] = \sum_e ([m_t]^e + [m_r]^e) \quad (3.45)$$

$$[K] = \sum_e ([k_f]^e + [k_c]^e) \quad (3.46)$$

$$\{q\} = \sum_e (\{q\}^e) \quad (3.47)$$

Onde:

- $[M]$ é a matriz de rigidez global.
- $[K]$ é a matriz de massa global.
- $\{q\}$ é o vetor de deslocamento global.

Supondo que deslocamento global do vetor $\{q\}$ seja harmônico com frequência angular dada por ω , então:

$$\begin{aligned}\{q\}(t) &= \{Q\} \operatorname{sen} \omega t \\ \{\ddot{q}\}(t) &= -\omega^2 \{Q\} \operatorname{sen} \omega t\end{aligned}$$

Onde ω é a frequência natural (autovalor) e Q é o modo de vibração ou autovetor. O vetor $\{q\}$ é composto pelos deslocamentos e rotações nodais e pelas coordenadas c , na forma:

$$q(t) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} v_i & \psi_i & v_j & \psi_j & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \end{array} \right]$$

Assim a equação 3.44 é válida em qualquer tempo t e pode ser expressa como:

$$(K - \omega^2 M) \{Q\} = \{0\}$$

Para uma solução não-trivial é necessário que:

$$\det | (K - \omega^2 M) | = 0 \quad (3.48)$$

A equação 3.48 é chamada de equação das frequências ou *equação característica*.

3.4.1 Matriz de rigidez devido à flexão

A partir da expressão (3.39), obtém-se:

$$[S_\psi]^T = \left[\frac{6(-1+2\xi)}{l(1+\Phi)} \quad \frac{-4+6\xi-\Phi}{1+\Phi} \quad \frac{6(1-2\xi)}{l(1+\Phi)} \quad \frac{-2+6\xi+\Phi}{1+\Phi} \quad \frac{\partial F_\psi 1}{\partial \xi} \quad \dots \quad \frac{\partial F_\psi n}{\partial \xi} \right]. \quad (3.49)$$

As funções analíticas (3.32) e (3.33) podem ser expressas através de uma forma geral:

$$F_i = [\cos(B_i\xi)] u_i + [\text{sen}(B_i\xi)] x_i + [\cosh(A_i\xi)] w_i + [\text{senh}(A_i\xi)] z_i. \quad (3.50)$$

onde u_i , x_i , w_i e z_i são constantes que assumem valores distintos para cada caso. O produto dessas funções, ou seja, $F_i F_i$, é escritos da seguinte maneira:

Quando $i = j$ tem-se:

$$\int_0^1 F_i'^2 d\xi = \frac{2}{A_i+B_i^2} \{f_i [z_i \text{senh}(A_i\xi) + w_i \cosh(A_i\xi)] - \frac{B_i g_i}{A_i} [x_i \cos(B_i\xi) - u_i \text{sen}(B_i\xi)]\} \quad (3.51)$$

Similarmente, quando $i \neq j$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_i F_j d\xi = & \left(B_j - \frac{B_i^2}{B_j}\right)^{-1} \left\{ f_i [u_j \text{sen}(B_j \xi) - x_j \cos(B_j \xi)] + \right. \\ & \left. + \frac{B_i f_j}{B_j} [u_i \text{sen}(B_i \xi) + x_i \cos(B_i \xi)] \right\} + \\ & + \left(A_j + \frac{B_j^2}{A_i}\right)^{-1} \left\{ f_j [z_i \text{senh}(A_i \xi) + w_i \cosh(A_i \xi)] - \right. \\ & \left. - \frac{B_j g_i}{A_i} [x_j \cos(B_j \xi) - u_i \text{sen}(B_j \xi)] \right\} + \\ & \left(A_j - \frac{A_i^2}{A_j}\right)^{-1} \left\{ g_i [z_j \text{senh}(A_j \xi) + w_j \cosh(A_j \xi)] - \right. \\ & \left. - \frac{A_i g_j}{A_j} [z_i \text{senh}(A_i \xi) + w_i \cosh(A_i \xi)] \right\} \quad (3.52) \end{aligned}$$

Onde f são funções trigonométricas e g funções hiperbólicas, dadas respectivamente por:

$$f_i = \cos(B_i\xi)u_i + \text{sen}(B_i\xi)x_i$$

$$g_i = \cosh(A_i\xi)z_i + \text{senh}(A_i\xi)w_i$$

Assim, para este caso têm-se as seguintes constantes:

- Para a função F_{v_i} dada pela equação 3.32.

$$\begin{aligned} u_i &= -Z_i & x_i &= 1 \\ z_i &= Z_i & w_i &= -\zeta_i \end{aligned} \quad (3.53)$$

- Para a função F'_{v_i} :

$$\begin{aligned} u_i &= B_i & x_i &= Z_i B_i \\ z_i &= -A_i \zeta_i & w_i &= Z_i A_i \end{aligned} \quad (3.54)$$

- Para a função F_{ψ_i} dada pela equação 3.33:

$$\begin{aligned} u_i &= \nu_i & x_i &= Z_i \nu_i \\ z_i &= -\mu_i \zeta_i & w_i &= Z_i \mu_i \end{aligned} \quad (3.55)$$

- Para a função F'_{ψ_i} :

$$\begin{aligned} u_i &= \nu_i B_i Z_i & x_i &= -B_i \nu_i \\ z_i &= \mu_i Z_i A_i & w_i &= -\mu_i \zeta_i A_i \end{aligned} \quad (3.56)$$

As matrizes da expressão 3.44 podem ser determinadas como:

$$[kf] = EI \left[\begin{array}{cc|cc} \int_0^1 (N'_{\psi_1})^2 d\xi & \dots & \int_0^1 N'_{\psi_1} N'_{\psi_4} d\xi & \int_0^1 N'_{\psi_1} F'_{\psi_1} d\xi & \dots & \int_0^1 N'_{\psi_1} F'_{\psi_n} d\xi \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 N'_{\psi_4} N'_{\psi_1} d\xi & \dots & \int_0^1 (N'_{\psi_4})^2 d\xi & \int_0^1 N'_{\psi_4} F'_{\psi_1} d\xi & \dots & \int_0^1 N'_{\psi_4} F'_{\psi_n} d\xi \\ \hline & & \text{Simétrico} & \int_0^1 (F'_{\psi_1})^2 d\xi & \dots & \int_0^1 F'_{\psi_1} F'_{\psi_n} d\xi \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & \int_0^1 F'_{\psi_n} F'_{\psi_1} d\xi & \dots & \int_0^1 (F'_{\psi_n})^2 d\xi \end{array} \right]$$

Ou ainda, resumidamente:

$$[kf] = EI \left[\begin{array}{c|c} kf^{qq} & \textit{simétrico} \\ \hline kf^{cq} & kf^{cc} \end{array} \right] \quad (3.57)$$

Onde $[kf^{qq}]$, $[kf^{cq}]$ e $[kf^{cc}]$ são submatrizes ou blocos da matriz de rigidez elementar devido à flexão. Levando-se as submatrizes definidas em 3.49 na matriz de rigidez global à flexão, e procedendo-se com o agrupamento das matrizes elementares, determina-se a parcela de flexão da matriz $[K]$ em 3.46.

A submatriz $[kf^{qq}]$ obtida é dada por:

$$[kf^{qq}] = [Kf_{ij}^{qq}]_{i=1..4, j=1..4} \quad (3.58)$$

$$[Kf_{ij}^{qq}] = \int_0^1 N'_{\psi_i} N'_{\psi_j} d\xi.$$

Onde:

$$N'_{\psi_1} = 6 \frac{-1 + 2\xi}{l(1 + \Phi)} \quad N'_{\psi_2} = \frac{-4 + 6\xi - \Phi}{1 + \Phi}$$

$$N'_{\psi_3} = 6 \frac{1 - 2\xi}{l(1 + \Phi)} \quad N'_{\psi_4} = \frac{-2 + 6\xi + \Phi}{1 + \Phi}.$$

Efetuada-se as integrações da matriz 3.58, obtém-se:

$$[kf^{qq}] = \frac{1}{l^4(1 + \Phi)^2} \left[\begin{array}{cccc} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & (4 + 2\Phi + \Phi^2)l^2 & -6l & (2 - 2\Phi - \Phi^2)l^2 \\ \textit{Simétrico} & & 12 & -6l \\ & & & (4 + 2\Phi + \Phi^2)l^2 \end{array} \right]$$

A submatriz $[kf^{qc}]$ é dada por:

$$\begin{aligned} [kf^{qc}] &= [Kf_{ij}^{qc}]_{i=1\dots 4, j=1\dots n}. \\ [Kf_{ij}^{qc}] &= \int_0^1 N'_{\psi i} F'_{\psi j} d\xi \end{aligned}$$

Onde $F'_{\psi j}$ é obtido pela expressão 3.50 e pelo conjunto de constantes 3.56.

A submatriz $[kf^{cc}]$ contendo somente os termos da T.C. é dada por:

$$\begin{aligned} [kf^{cc}] &= [Kf_{ij}^{cc}]_{i=1\dots n, j=1\dots n}. \\ [Kf_{ij}^{cc}] &= \int_0^1 F'_{\psi i} F'_{\psi j} d\xi. \end{aligned}$$

Assim, os termos da diagonal da submatriz $[kf_{cc}]$ são obtidos pela expressão 3.51 com as constantes u_i, x_i, z_i e w_i dadas por 3.56. Os termos fora da diagonal da submatriz são obtidos pela expressão 3.52 com as constantes dadas por 3.56.

3.4.2 Matriz de rigidez devido ao cisalhamento

Da expressão 3.41 obtém-se:

$$[S_{\psi}]^T = [G_1 \ G_2 \ G_3 \ G_4 \ H_1 \ \dots \ H_n]$$

Onde $G_i = N'_{\psi i} - N_{\psi i}$, com $i = 1\dots 4$ e $j = 1\dots 4$, ou seja:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{(-6\xi + 6\xi^2 - \Phi)l + 6\xi - 6\xi^2}{l(1+\Phi)} \\ G_2 &= \frac{(1 - 4\xi + 3\xi^2 + 1/2(1-2\xi)\Phi)l - 1 + 4\xi - 3\xi^2 - (1-\xi)\Phi}{1+\Phi} \\ G_3 &= \frac{(6\xi - 6\xi^2 + \Phi)l - 6\xi + 6\xi^2}{l(1+\Phi)} \\ G_4 &= \frac{(-2\xi + 3\xi^2 - 1/2(1-2\xi)\Phi)l + 2\xi - 3\xi^2 - \xi\Phi}{1+\Phi} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Sendo $H_i = (F'_{vi} - F_{\psi i})$, com $i = 1 \dots n$, e $j = 1 \dots n$ representada pela expressão 3.50, com os seguintes valores para as constantes u_i , x_i , z_i e w_i :

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{B_i}{l} - \nu i & x_i &= -Z_i u_i \\ z_i &= -\zeta_i \left(\mu i - \frac{A_i}{l} \right) & w_i &= Z_i z_i \end{aligned} \quad (3.60)$$

Desenvolvendo a expressão 3.44, obtém-se a matriz de rigidez devido ao cisalhamento:

$$[kc] = \kappa AG \left[\begin{array}{c|c} \int_0^1 (N'_{v_1})^2 d\xi & \dots & \int_0^1 N'_{v_1} N'_{v_4} d\xi & \int_0^1 N'_{v_1} F'_{v_1} d\xi & \dots & \int_0^1 N'_{v_1} F'_{v_n} d\xi \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 N'_{v_4} N'_{v_1} d\xi & \dots & \int_0^1 (N'_{v_4})^2 d\xi & \int_0^1 N'_{v_4} F'_{v_1} d\xi & \dots & \int_0^1 N'_{v_4} F'_{v_n} d\xi \\ \hline & \text{Simétrico} & & \int_0^1 (F'_{v_1})^2 d\xi & \dots & \int_0^1 F'_{v_1} F'_{v_n} d\xi \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & \int_0^1 F'_{v_n} F'_{v_1} d\xi & \dots & \int_0^1 (F'_{v_n})^2 d\xi \end{array} \right]$$

Pode-se representar a matriz acima como:

$$[kc] = \kappa GA \left[\begin{array}{c|c} kc^{qq} & \text{simétrico} \\ \hline kc^{cq} & kc^{cc} \end{array} \right] \quad (3.61)$$

Onde $[kc^{qq}]$, $[kc^{qc}]$ e $[kc^{cc}]$ são submatrizes ou blocos da matriz de rigidez elementar devido ao cisalhamento.

A submatriz de rigidez $[kc^{qq}]$ é definida como:

$$[kc^{qq}] = [Kc_{ij}^{qq}]_{i=1..4, j=1..4}$$

$$[Kc_{ij}^{qq}] = \int_0^1 G_i G_j d\xi$$

Resolvendo as integrações, a submatriz $[kc_{qq}]$ pode ser obtida por :

$$[kc^{qq}] = \frac{\Phi^2}{4l(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} 4 & 2l & -4 & 2l \\ & l^2 & -2l & l^2 \\ \text{Simétrico} & & 4 & -2l \\ & & & l^2 \end{bmatrix}$$

A submatriz $[kc^{qc}]$ é dada por:

$$[kc^{qc}] = [Kc_{ij}^{qc}]_{i=1..n, j=1..4}$$

$$[Kc_{ij}^{qc}] = \int_0^1 H_i G_j d\xi$$

Onde G_i é dado por 3.59.

A submatriz $[kc^{cc}]$ é dada por:

$$[kc^{cc}] = [Kc_{ij}^{cc}]_{i=1..n, j=1..n}$$

$$[Kc_{ij}^{cc}] = \int_0^1 H_i H_j d\xi.$$

Onde a submatriz $[Kc_{ij}^{cc}]$ pode reescrita como:

$$[Kc_{ij}^{cc}] = \int_0^1 F_i F_j d\xi.$$

Quando $i = j$, os termos da diagonal da submatriz $[kc^{cc}]$ são expressos por 3.51, quando $i \neq j$, obtém-se os termos fora da diagonal da submatriz pela expressão 3.52, sendo o conjunto de constantes dado por 3.60.

A soma das submatrizes $[kf^{qq}] + [kc^{qq}]$ corresponde à matriz de rigidez elementar do MEF para o elemento de viga de Timoshenko, a matriz de rigidez elementar para o MC é obtida a partir da soma das matrizes $[kf]$ (3.57) e $[kc]$ (3.61), como citado na expressão 3.46.

$$[K^e] = \left[\begin{array}{c|c} kf^{qq} + kc^{qq} & \text{simétrico} \\ \hline kf^{qc} + kf_{qc} & kf^{cc} + kc^{cc} \end{array} \right]$$

3.4.3 Matriz de massa devido a inércia translacional.

De maneira análoga a matriz de rigidez elementar, desenvolvendo-se a equação 3.45, obtém-se para a matriz de massa elementar devido a inércia de translação:

$$[mt] = \rho Al \left[\begin{array}{cc|cc} \int_0^1 (N_{v_1})^2 d\xi & \dots & \int_0^1 N_{v_1} N_{v_4} d\xi & \int_0^1 N_{v_1} F_{v_1} d\xi & \dots & \int_0^1 N_{v_1} F_{v_n} d\xi \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 N_{v_4} N_{v_1} d\xi & \dots & \int_0^1 (N_{v_4})^2 d\xi & \int_0^1 N_{v_4} F_{v_1} d\xi & \dots & \int_0^1 N_{v_4} F_{v_n} d\xi \\ \hline & & \text{Simétrico} & \int_0^1 (F_{v_1})^2 d\xi & \dots & \int_0^1 F_{v_1} F_{v_n} d\xi \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & \int_0^1 F_{v_n} F_{v_1} d\xi & \dots & \int_0^1 (F_{v_n})^2 d\xi \end{array} \right]$$

Ou, ainda, de maneira compacta:

$$[mt] = \rho Al \left[\begin{array}{c|c} mt^{qq} & \text{simétrico} \\ \hline mt^{qc} & mt^{cc} \end{array} \right] \quad (3.62)$$

Onde $[mt^{qq}]$, $[mt^{qc}]$ e $[mt^{cc}]$ são submatrizes ou blocos da matriz de massa elementar devido a inércia de translação.

A submatriz $[mt^{qq}]$ é dada por:

$$[mt^{qq}] = [Mt_{ij}^{qq}]_{i=1\dots4 \text{ e } j=1\dots4}$$

$$[Mt_{ij}^{qq}] = \int_0^1 N_{vi} N_{vj} d\xi$$

Onde N_{vi} são as funções de forma representadas em 3.36 logo, a submatriz $[mt^{qq}]$ é dada por:

$$[mt^{qq}] = (1+\Phi)^{-2} \begin{bmatrix} mt_{11}^{qq} & mt_{12}^{qq} & mt_{13}^{qq} & mt_{14}^{qq} \\ & mt_{22}^{qq} & mt_{23}^{qq} & mt_{24}^{qq} \\ & & mt_{33}^{qq} & mt_{34}^{qq} \\ \text{Simétrico} & & & mt_{44}^{qq} \end{bmatrix}$$

Onde:

$$\begin{aligned} mt_{11}^{qq} &= \frac{13}{35} + \frac{7\Phi}{10} + \frac{\Phi^2}{3} & mt_{12}^{qq} &= \left(\frac{11}{210} + \frac{11\Phi}{120} + \frac{\Phi^2}{24}\right)l \\ mt_{13}^{qq} &= \frac{9}{70} + \frac{3\Phi}{10} + \frac{\Phi^2}{6} & mt_{14}^{qq} &= -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\Phi}{40} + \frac{\Phi^2}{24}\right)l \\ mt_{22}^{qq} &= \left(\frac{1}{105} + \frac{\Phi}{60} + \frac{\Phi^2}{120}\right)l^2 & mt_{23}^{qq} &= \frac{13}{420} + \frac{3\Phi}{40} + \frac{\Phi^2}{24}l \\ mt_{24}^{qq} &= -\left(\frac{1}{140} + \frac{\Phi}{60} + \frac{\Phi^2}{120}\right)l^2 & mt_{33}^{qq} &= \frac{13}{35} + \frac{7\Phi}{10} + \frac{\Phi^2}{3} \\ mt_{34}^{qq} &= -\left(\frac{11}{210} + \frac{11\Phi}{120} + \frac{\Phi^2}{24}\right)l & mt_{44}^{qq} &= \left(\frac{1}{105} + \frac{\Phi}{60} + \frac{\Phi^2}{120}\right)l^2 \end{aligned}$$

$$[mr] = \rho I l r \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \int_0^1 (N_{\psi_1})^2 d\xi & \dots & \int_0^1 N_{\psi_1} N_{\psi_4} d\xi \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 N_{\psi_4} N_{\psi_1} d\xi & \dots & \int_0^1 (N_{\psi_4})^2 d\xi \end{array} & \begin{array}{ccc} \int_0^1 N_{\psi_1} F_{\psi_1} d\xi & \dots & \int_0^1 N_{\psi_1} F_{\psi_n} d\xi \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 N_{\psi_4} F_{\psi_1} d\xi & \dots & \int_0^1 N_{\psi_4} F_{\psi_n} d\xi \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{Simétrico} \end{array} & \begin{array}{ccc} \int_0^1 (F_{\psi_1})^2 d\xi & \dots & \int_0^1 F_{\psi_1} F_{\psi_n} d\xi \\ \vdots & & \vdots \\ \int_0^1 F_{\psi_n} F_{\psi_1} d\xi & \dots & \int_0^1 (F_{\psi_n})^2 d\xi \end{array} \end{array} \right]$$

Logo, tem-se:

$$[m_r] = \rho I r l \left[\begin{array}{c|c} mr^{qq} & \text{simétrico} \\ \hline mr^{cq} & mr^{cc} \end{array} \right] \quad (3.63)$$

Onde r é o parâmetro de inércia rotacional e $[mr^{qq}]$, $[mr^{cq}]$ e $[mr^{cc}]$ são submatrizes ou blocos da matriz de massa elementar devido a inércia rotacional.

A submatriz $[mr^{qq}]$ é dada por:

$$[mr^{qq}] = [Mr_{ij}^{qq}]_{i=1\dots 4, j=1\dots 4.}$$

$$[Mr_{ij}^{qq}] = \int_0^1 N_{\psi_i} N_{\psi_j} d\xi$$

Onde N_{ψ_i} e N_{ψ_j} correspondem as funções de forma representadas em 3.37.

Integrando-se os elementos da submatriz $[mr^{qq}]$, obtém-se:

$$[mr^{qq}] = \frac{1}{(l+\Phi)^2} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & (\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi)l & -\frac{6}{5} & (\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi)l \\ (\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Phi^2)l^2 & -(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi)l & -(\frac{1}{30} + \frac{1}{6}\Phi - \frac{1}{6}\Phi^2)l^2 & \\ & \frac{6}{5} & & (\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\Phi)l \\ \text{Simétrico} & & & (\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\Phi + \frac{1}{3}\Phi^2)^2 \end{bmatrix}$$

A submatriz $[mr_{qc}]$ é dada por:

$$[mr^{qc}] = [Mr_{ij}^{qc}]_{i=1..4, j=1..n.}$$

$$[Mr_{ij}^{qc}] = \int_0^1 N_{\psi i} F_{\psi j} d\xi$$

Onde a função $F_{\psi i}$ é obtida pela expressão 3.50 e 3.55.

A submatriz $[mr_{cc}]$ é dada por:

$$[mr^{cc}] = [Mr_{ij}^{cc}]_{i=1..n, j=1..n.}$$

$$[Mr_{ij}^{cc}] = \int_0^1 F_{\psi i} F_{\psi j} d\xi$$

Onde $[Mr_{ij}^{cc}]$, pode ser escrito na forma:

$$[Mr_{ij}^{cc}] = \int_0^1 F_i F_j d\xi$$

Assim, para $i = j$, os termos da submatriz $[mr^{cc}]$ são obtidos pela expressão 3.51, e para $i \neq j$, através da expressão 3.52, com o conjunto de constantes dado por 3.55.

De acordo com a equação 3.45, a matriz de massa elementar para o MC é obtida através do agrupamento das matrizes elementares, $[mt]$ e $[mr]$:

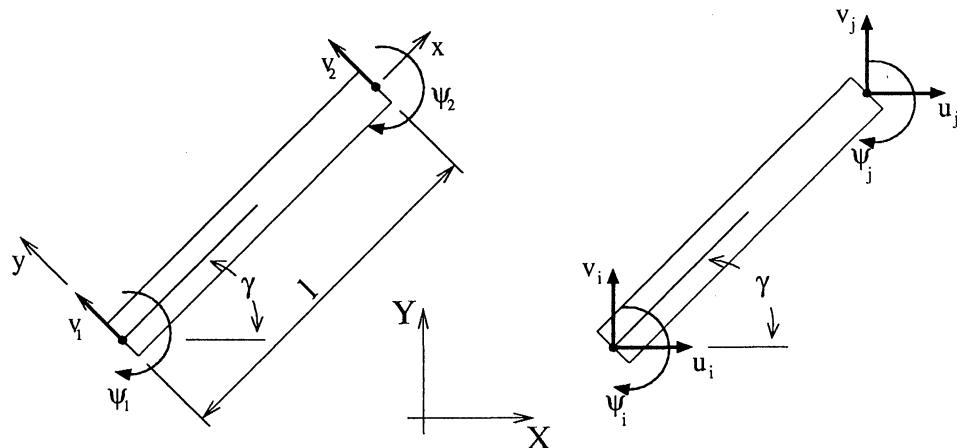
$$[M^e] = \left[\begin{array}{c|c} mt^{qq} + mr^{qq} & \text{simétrico} \\ \hline mt_{cq} + mr^{cq} & mt^{cc} + mr^{cc} \end{array} \right]$$

Observa-se que a soma das submatrizes $[mt_{qq}] + [mr_{qq}]$ da matriz $[M^e]$ corresponde à matriz de massa elementar do MEF para o elemento de viga de Timoshenko.

3.5 Transformação de coordenadas

As matrizes de rigidez e massa elementares desenvolvidas para o elemento de viga de Timoshenko baseiam-se no sistema de coordenadas local, conforme a figura 3.14. Para que estas matrizes possam ser aplicadas a estruturas formadas por diversos elementos é necessária a transformação destas do sistema de coordenadas local para o sistema de coordenadas global.

Figura 3.14: TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS



A transformação entre coordenadas é feita utilizando-se a seguinte equação:

$$U = T\bar{U} \quad (3.64)$$

Onde U são as coordenadas no sistema local, \bar{U} são as coordenadas no sistema global e T é a matriz de transformação de coordenadas.

Observando a figura 3.14, verifica-se que a relação entre os graus de liberdade do sistema local e os graus de liberdade do sistema global é:

$$\begin{bmatrix} v_i \\ \psi_i \\ v_j \\ \psi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ u_i \\ \psi_i \\ v_j \\ u_j \\ \psi_j \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{x_j - x_i}{L} & \text{sen}\gamma &= \frac{y_j - y_i}{L} \\ L &= \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \end{aligned}$$

Onde (x_i, y_i) são as coordenadas do nó i e (x_j, y_j) são as coordenadas do nó j do elemento no sistema de coordenadas global.

Observa-se que as coordenadas c não sofrem nenhuma alteração com a mudança no sistema de coordenadas, uma vez que no MC as funções de forma associadas à TC não alteram os valores nodais. Portanto a matriz de transformação no plano para o elemento de viga do MC é:

$$T = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} -\text{sen}\gamma & \text{cos}\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\gamma & \text{cos}\gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \quad (3.66)$$

Logo, as matrizes de rigidez e massa elementares para o elemento da barra são transformadas utilizando-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} K &= T^T k T \\ M &= T^T m T \end{aligned} \quad (3.67)$$

Onde K e M são as matrizes de rigidez e massa, respectivamente, no sistema de coordenadas global. Portanto as matrizes de rigidez e massa elementares para o elemento de viga são transformadas utilizando-se as equações 3.67 e 3.66.

Capítulo 4

Verificação Numérica

Para verificação numérica do MC são utilizados modelos simples que têm solução analítica a fim de que se possa avaliar a precisão e a convergência do método. Os resultados obtidos também são comparados com os determinados pelo MEF, através do próprio programa ou comparando-se com códigos comerciais.

As tabelas apresentadas nas seções seguintes apresentaram a seguinte nomenclatura:

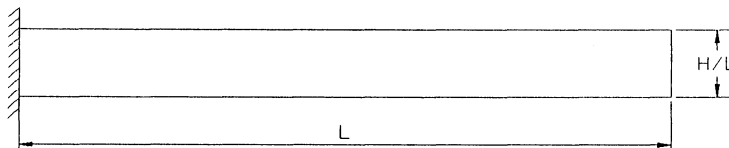
- MEF(ne) - Método dos Elementos Finitos com n elementos.
- MC($ne\ mc$) - Método dos Elementos Compostos com n elementos e m graus de liberdade c por elemento.

4.1 Viga Cantilever

Neste exemplo considera-se a vibração livre lateral à flexão da viga de Timoshenko reta e uniforme de seção retangular, engastada em uma das extremidades como mostra a figura 4.1.

Considerando as condições de contorno do problema, obtém-se a equação da frequência, conforme HUANG (1961,1963), HERR e SCHIMIDT (1995):

Figura 4.1: VIGA CANTILEVER



$$f = 2 + \left[b^2 (r^2 - s^2)^2 + 2 \right] \cosh(b\alpha) \cos(b\beta) - \frac{b (r^2 + s^2) \sinh(b\alpha) \sin(b\beta)}{\sqrt{1 - b^2 r^2 s^2}}$$

Cujas raízes fornecem as frequências naturais da viga. Neste caso,

$$b_i = 2\pi \sqrt{\frac{\rho A l^4}{EI}} \omega_i^2 \quad (4.1)$$

onde ω_i é a frequência natural de vibração da barra, r a variável relacionada com a inércia rotacional e s , o efeito da deformação de cisalhamento definidos em 3.21.

O raio de giração é dado por $r_g = \sqrt{I/A}$. Portanto o parâmetro de inércia rotacional r pode ser reescrito como $r = r_g/L$.

Considerando V e Ψ como os modos de vibração da viga e C_4 uma constante como definidos em 3.22 e 3.23, então:

$$\begin{aligned}
V(\xi) &= C_4 \left\{ \text{sen}(\beta b \xi) - \frac{\text{senh}(\alpha b \xi) \mu}{\nu} + \mathcal{Z} (\cosh(\alpha b \xi) - \cos(\beta b \xi)) \right\} \\
\Psi(\xi) &= C_4 \left\{ \cos(\beta b \xi) - \cosh(\alpha b \xi) + \mathcal{Z} \left(\text{senh}(\alpha b \xi) + \frac{\nu}{\mu} \text{sen}(\beta b \xi) \nu \right) \right\}
\end{aligned}$$

onde:

$$\mathcal{Z} = \frac{\alpha b \nu \text{senh}(\alpha b) + \beta b \mu \text{sen}(\beta b)}{A \alpha b \nu \cosh(\alpha b) + \beta b \mu \cos(\beta b)}$$

$$\nu = \frac{b(\beta^2 - s^2)}{l\beta} \quad \mu = \frac{b(\alpha^2 + s^2)}{l\alpha}$$

Para obtenção da solução analítica, foi considerada a viga da figura 4.2 de comprimento unitário L , o raio de giração é dado por $r_g/L = 0,02$ correspondente a $H/L = 0,69282$, coeficiente de Poisson igual a $1/3$ ou $E/G = 2,667$ e coeficiente de cisalhamento $\kappa = 2/3$.

Na solução pelo MEF foi utilizado o mesmo elemento do MC fazendo apenas o número de funções analíticas (graus de liberdade c) igual a zero.

Para comparação entre a solução analítica (TC) e as obtidas pelo MEF e pelo MC utilizou-se o parâmetro b indicado na equação 4.1.

4.1.1 Método do Elementos Finitos.

As tabelas 4.1 e 4.2 apresentam os autovalores (frequência naturais de vibração) b_i com $i = 1..10$, obtidos através da teoria clássica para viga de Timoshenko (PETYT, 1990) e pelo MEF com 1, 2, 3, 7, 12 e 15 elementos e os respectivos erros em relação à solução obtida pela Teoria Clássica. Neste exemplo o número

de graus de liberdade do MEF corresponde ao número de elementos. O aumento do número de graus de liberdade decorrente do aumento do número de elementos correspondente ao refinamento h do MEF.

Tabela 4.1: RESULTADOS OBTIDOS PELO MEF COM 1 A 3 ELEMENTOS

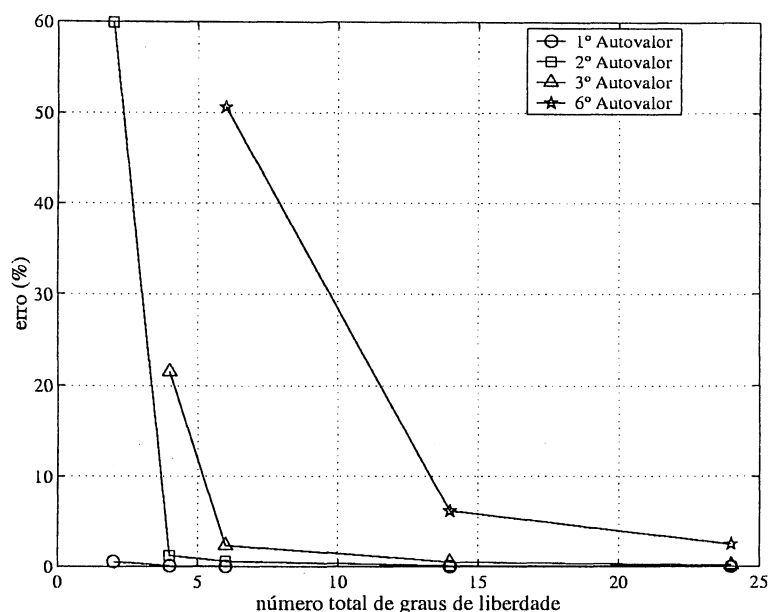
i	Analítica	MEF(1e)		MEF(2e)		MEF(3e)	
	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	3,500	3,518	0,52	3,502	0,07	3,500	0,02
2	21,355	34,154	59,94	21,612	1,21	21,480	0,59
3	57,470			73,246	27,45	58,839	2,38
4	106,926			205,876	92,54	134,635	25,91
5	166,660					248,522	49,12
6	233,849					473,903	102,65
7	306,343						
8	382,557						
9	461,347						
10	541,883						

Tabela 4.2: RESULTADOS OBTIDOS PELO MEF COM 7, 12 E 15 ELEMENTOS

i	Analítica	MEF(7e)		MEF(12e)		MEF(15e)	
	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	3,500	3,500	0,00	3,500	0,00	3,500	0,00
2	21,355	21,370	0,07	21,359	0,02	21,358	0,01
3	57,470	57,760	0,50	57,561	0,16	57,528	0,10
4	106,926	108,704	1,66	107,499	0,54	107,288	0,34
5	166,660	172,960	3,78	168,782	1,27	168,006	0,81
6	233,849	249,217	6,57	239,594	2,46	237,512	1,57
7	306,343	329,517	7,56	318,973	4,12	314,466	2,65
8	382,557	539,082	40,92	406,461	6,25	398,156	4,08
9	461,347	665,093	44,16	501,510	8,71	488,258	5,83
10	541,883	831,243	53,40	602,314	11,15	584,532	7,87

Observando as tabelas 4.1 e 4.2, nota-se que os autovalores b_i obtidos pelo MEF apresentam boa precisão em relação aos autovalores obtidos pela solução

Figura 4.2: ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES OBTIDOS PELO MEF



analítica. O erro relativo (%) do MEF para os autovalores b_i correspondentes à 1ª, 2ª, 3ª e 8ª frequências naturais são apresentados no gráfico da figura 4.2.

4.1.2 Método dos Elementos Compostos

Para verificação da eficiência do MC, foram consideradas, a princípio, variações no grau de liberdade c (acréscimo de termos analíticos da TC na função de interpolação) para um número fixo de elementos (graus de liberdades nodais), o que caracteriza o refinamento c do MC. Numa segunda análise, foram consideradas variações nos graus de liberdade nodais (elemento) para um número fixo de graus de liberdade c , o que define o refinamento h do MC.

Refinamento c do MC.

O aumento de graus de liberdade c , isto é, o acréscimo de termos da TC na função de interpolação, corresponde ao refinamento c do MC. As tabelas a seguir

Tabela 4.3: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 1 ELEMENTO 1 A 3 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO.

i	Analítica	MC(1e 1c)		MC (1e 2c)		MC (1e 3c)	
	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	3,500	3,501	0,04	3,500	0,01	3,500	0,00
2	21,355	21,475	0,56	21,396	0,19	21,394	0,19
3	57,470	113,163	96,91	57,910	0,77	57,651	0,31
4	106,926			236,673	121,34	108,695	1,65
5	166,660					395,788	137,48
6	233,849						
7	306,343						
8	382,557						
9	461,347						
10	541,883						

apresentam os autovalores obtidos através do refinamento c para um modelo discretizado através de 1, 2 e 4 elementos. As tabelas 4.3 e 4.4 apresentam os autovalores b_i obtidos pelo MC com 1 elemento e 1, 2, 3, 7, 12 e 15 graus de liberdade c .

Tabela 4.4: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 1 ELEMENTO E 7, 12 E 15 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO.

i	Analítica	MC (1e 7c)		MC (1e 12c)		MC (1e 15c)	
	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	3,500	3,499	0,01	3,499	0,02	3,499	0,02
2	21,355	21,377	0,10	21,365	0,05	21,357	0,01
3	57,470	57,520	0,09	57,399	0,12	57,343	0,22
4	106,926	107,972	0,98	107,667	0,69	107,526	0,56
5	166,660	168,036	0,83	167,435	0,46	167,149	0,29
6	233,849	237,307	1,48	236,029	0,93	235,715	0,80
7	306,343	310,512	1,36	309,034	0,88	308,430	0,68
8	382,557	392,547	2,61	386,820	1,11	386,404	1,01
9	461,347	1102,059	138,88	466,581	1,13	465,443	0,89
10				548,476	1,22	547,701	1,07

Os autovalores apresentados nas tabelas 4.5 e 4.6 foram obtidos pelo MC com

2 elementos e 1, 2, 3, 7, 12 e 15 graus de liberdade c por elemento e a tabela 4.7 os autovalores obtidos através de uma malha de 4 elementos e 1, 2, e 3 graus de liberdade c .

Tabela 4.5: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 2 ELEMENTOS E 1 A 3 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO

i	Analítica	MC (2e 1c)		MC (2e 2c)		MC (2e 3c)	
	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	3,500	3,500	0,01	3,500	0,01	3,500	0,01
2	21,355	21,443	0,41	21,408	0,25	21,405	0,23
3	57,470	59,343	3,26	59,016	2,69	58,963	2,60
4	106,926	115,047	7,60	112,226	4,96	111,973	4,72
5	166,660	269,512	61,71	180,300	8,18	178,956	7,38
6	233,849	508,564	117,47	262,280	12,16	255,450	9,24
7	306,343			556,075	81,52	342,974	11,96
8	382,557			882,218	130,61	444,429	16,17
9	461,347					940,519	103,86
10	541,883					1282,089	136,60

Tabela 4.6: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 2 ELEMENTOS E 7, 12 E 15 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO

i	Analítica	MC (2e 7c)		MC (2e 12c)		MC (2e 15c)	
	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	3.500	3.500	0.01	3.500	0.01	3.500	0.01
2	21.355	21.398	0.20	21.395	0.19	21.393	0.18
3	57.470	58.816	2.34	58.699	2.14	58.636	2.03
4	106.926	111.442	4.22	111.019	3.83	110.829	3.65
5	166.660	177.781	6.67	176.831	6.10	176.447	5.87
6	233.849	253.649	8.47	252.898	8.15	252.457	7.96
7	306.343	339.349	10.77	338.256	10.42	337.696	10.23
8	382.557	427.025	11.62	425.106	11.12	424.459	10.95
9	461.347	520.965	12.92	518.279	12.34	517.302	12.13
10	541.883	615.776	13.64	613.429	13.20	612.226	12.98

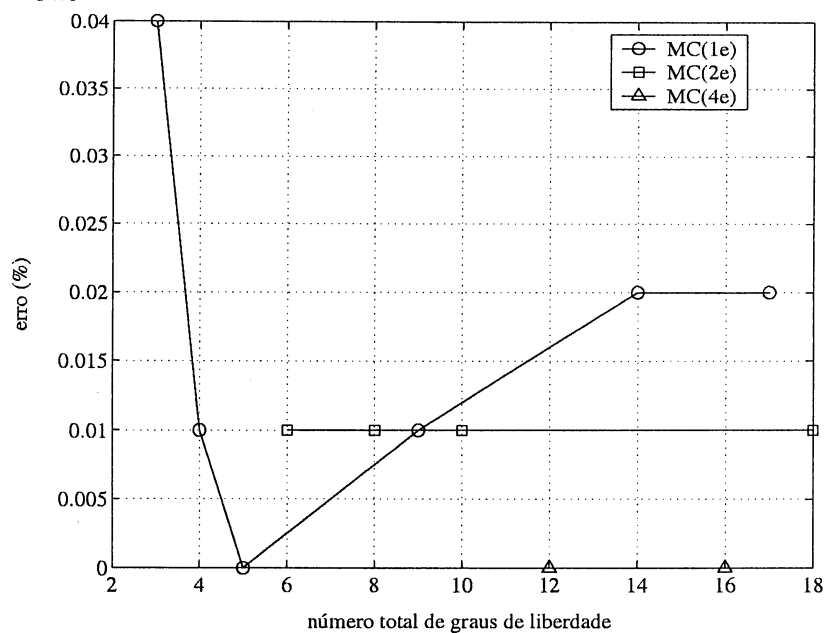
Os gráficos da figuras 4.3, 4.4 e 4.5 apresentam os erros relativos do refinamento c para o primeiro, segundo e oitavo autovalor b_i da viga cantilever.

Tabela 4.7: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 4 ELEMENTOS E 1, 2 E 3 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO

i	Analítica	MC (4e 1c)		MC (4e 2c)		MC (4e 3c)	
	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	3,500	3,500	0,00	3,500	0,00	3,500	0,00
2	21,355	21,388	0,15	21,387	0,15	21,386	0,15
3	57,470	58,043	1,00	58,018	0,95	58,007	0,93
4	106,926	109,577	2,48	109,215	2,14	109,189	2,12
5	166,660	185,480	11,29	184,806	10,89	184,599	10,76
6	233,849	272,487	16,52	268,001	14,60	267,867	14,55
7	306,343	379,792	23,98	367,620	20,00	367,408	19,93
8	382,557	493,197	28,92	478,089	24,97	476,184	24,47
9	461,347	848,448	83,91	611,740	32,60	609,144	32,04
10	541,883	1054,370	94,58	737,711	36,14	723,591	33,53

Observa-se que os resultados obtidos através do refinamento c do MC apresentaram excelente precisão para o primeiro autovalor, para os três tipos de malhas, como mostra a figura 4.3 com erro relativo inferior a 0,04% em relação a TC.

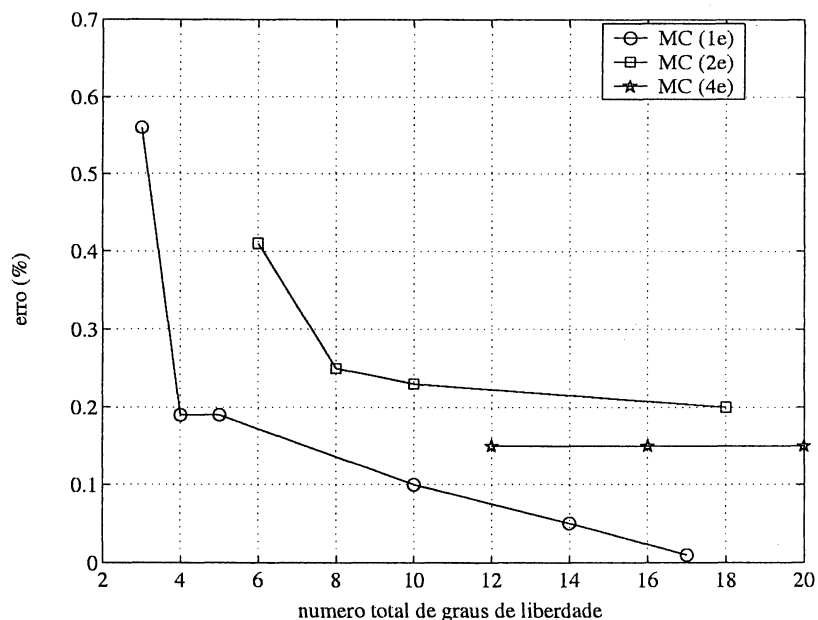
Nota-se que a malha discretizada com 1 elemento converge mais rapidamente para a solução analítica, enquanto que a malha de 4 elementos converge mais lentamente como mostra a tabela 4.7. O mesmo pode ser observado para o oitavo autovalor como observa-se na figura 4.5. Conclui-se neste exemplo que o MC é mais eficiente quando utiliza-se o refinamento c com número mínimo de elementos necessário para bem representar a geometria da estrutura.

Figura 4.3: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c DO MC PARA O 1º AUTOVALOR

Refinamento h do MC.

O refinamento h consiste no aumento do número de elementos da malha do modelo. A tabela 4.8 apresenta os autovalores b_i obtidos pelo MC com 1, 2 e 4 elementos e 1 grau de liberdade c , o que corresponde ao refinamento h do MC. Os gráficos das figuras 4.6, 4.7 e 4.8 apresentam os erros relativos do refinamento h do MC comparados com os erros do refinamento c para uma malha de 1 elemento, denominado simplesmente de refinamento c .

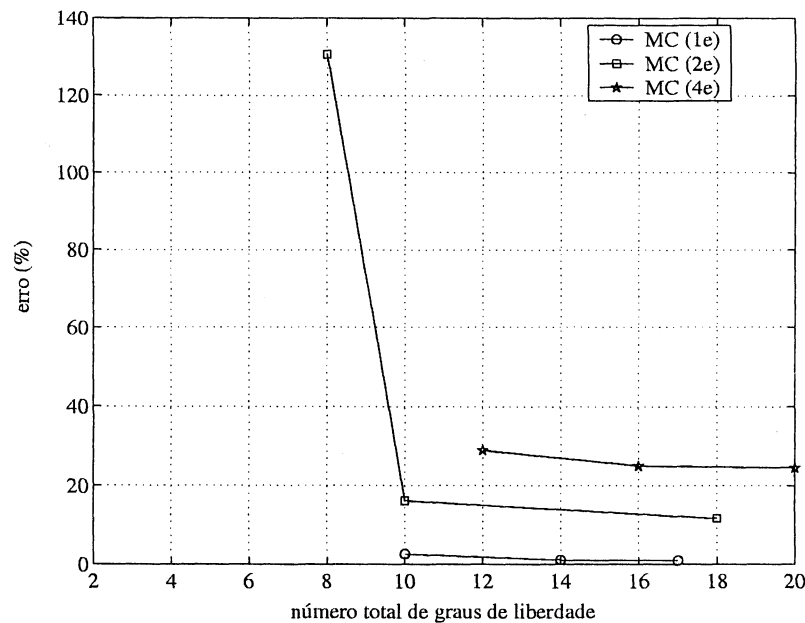
Verifica-se que o refinamento c é sempre mais eficiente e converge mais rapidamente que o refinamento h . Conclui-se neste exemplo que o MC é mais eficiente quando utiliza-se o refinamento c com um número mínimo de elementos necessário para bem representar a geometria da estrutura.

Figura 4.4: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c DO MC PARA O 2º AUTOVALORTabela 4.8: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 1, 2 E 4 ELEMENTOS E 1 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO.

i	Analítica	MC (1e 1c)		MC (2e 1c)		MC (4e 1c)	
	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	3,500	3,501	0,04	3,500	0,012	3,500	0,00
2	21,355	21,475	0,56	21,443	0,413	21,388	0,15
3	57,470	113,163	96,91	59,343	3,258	58,043	1,00
4	106,926			115,047	7,595	109,577	2,48
5	166,660			269,5118	61,714	185,480	11,29
6	233,849			508,564	117,475	272,487	16,52
7	306,343					379,792	23,98
8	382,557					493,197	28,92
9	461,347					848,448	83,91
10	541,883					1054,370	94,58

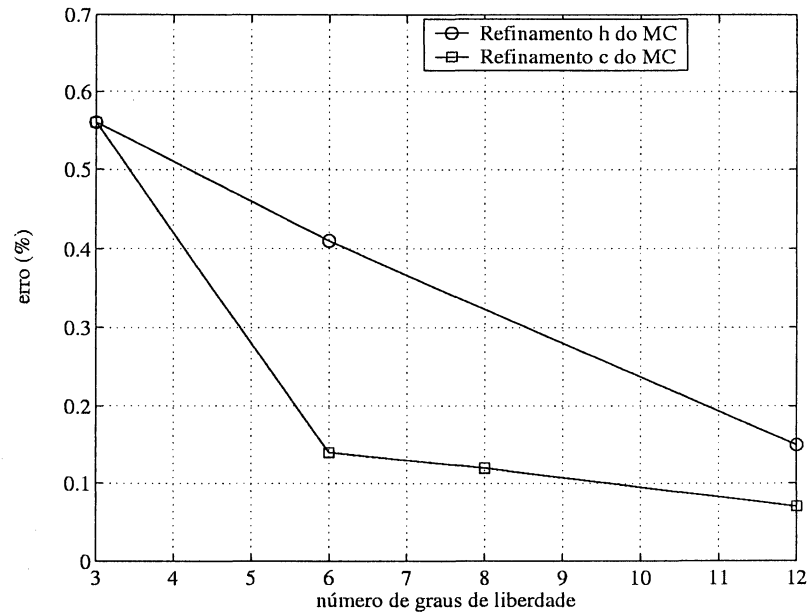
Comparação entre MC e MEF

As tabelas de autovalores 4.9 e 4.10 apresentam os erros relativos obtidos pelo MEF e pelo MC para os modelos com número total de graus de liberdade igual

Figura 4.5: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c DO MC PARA O 8º AUTOVALOR

a 12, ou seja, que demandam o mesmo esforço computacional. Os erros relativos obtidos para o modelo total com 12 graus de liberdade para algumas frequências naturais são apresentados nas figuras 4.9 e 4.10.

Observando os resultados obtidos nas tabelas 4.9 e 4.10, verifica-se que os autovalores b_i obtidos pelo MC com malha de 1 elemento são sempre mais precisos que os autovalores correspondentes obtidos pelo MEF. Por exemplo, para o terceiro autovalor b_3 , o erro relativo obtido pelo MEF é de 0,71%, enquanto que o erro relativo obtido pelo MC com malha de 1 elemento e 10 graus de liberdade c , ou seja, MC(1e 10c) é de 0,04%. Conclui-se que com o mesmo esforço computacional, isto é, com o mesmo número de graus de liberdade total o MC é mais eficiente que o MEF. Observa-se ainda que, os resultados obtidos pela malha discretizada com 2 elementos e 4 graus de liberdade c , conforme mostra a tabela 4.9, apresentou resultados mais precisos que o MEF para as frequências

Figura 4.6: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c E h DO MC PARA O 2º AUTOVALOR

mais altas. A malha de 4 elementos e 1 grau de liberdade c apresentou menos eficiência que MEF.

Conclui-se que o MC apresenta resultados mais precisos que o MEF para o mesmo número de graus de liberdade, ou seja, o mesmo esforço computacional, porém para uma melhor eficiência deve-se adotar o número mínimo de elementos para representar adequadamente a geometria e então escolher o número adequado de graus de liberdade c .

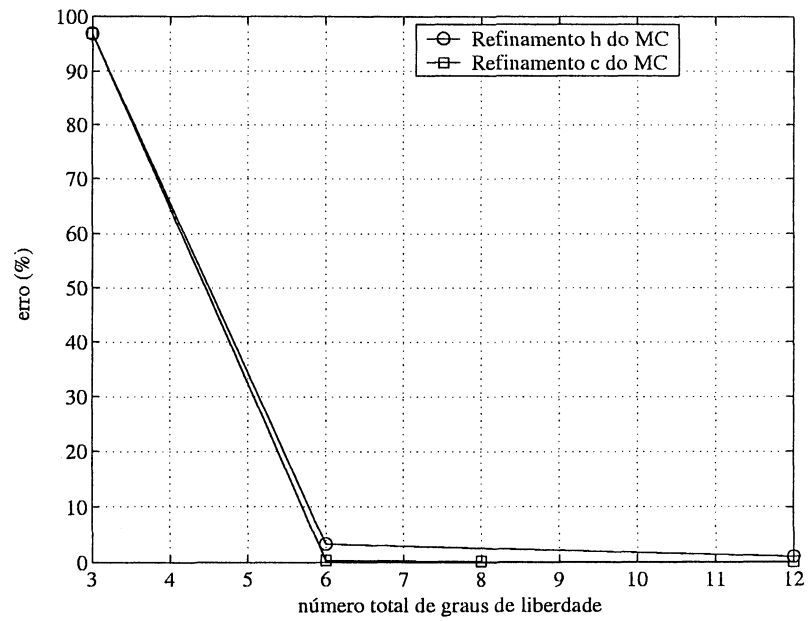
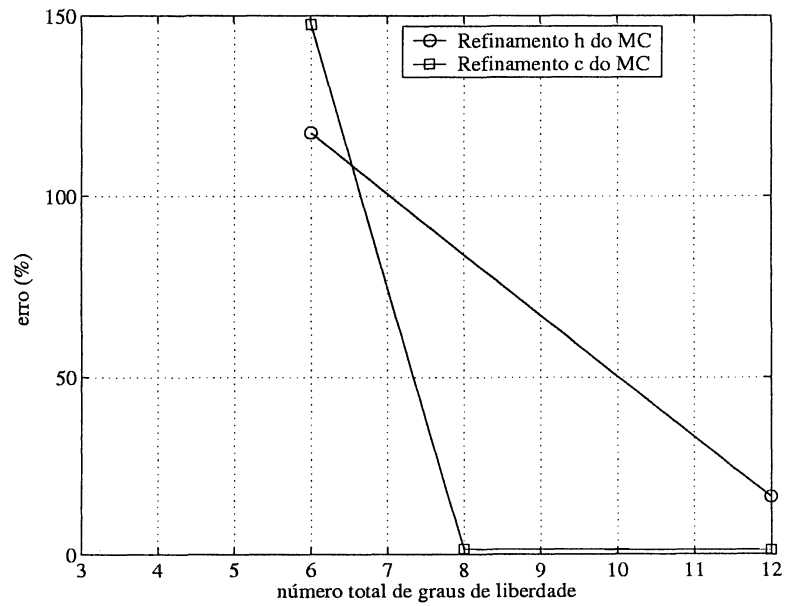
Figura 4.7: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c E h DO MC PARA O 3° AUTOVALORFigura 4.8: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c E h DO MC PARA O 6° AUTOVALOR

Tabela 4.9: MEF E MC COM TOTAL DE 12 GRAUS DE LIBERDADE.

Analítico		MEF (6e)		MC(1e 10c)	
i	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	3,500	3,500	0,00	3,499	0,02
2	21,355	21,377	0,10	21,370	0,07
3	57,470	57,879	0,71	57,445	0,04
4	106,926	109,381	2,30	107,763	0,78
5	166,660	174,853	4,92	167,676	0,61
6	233,849	248,615	6,31	236,320	1,06
7	306,343	417,568	36,31	309,588	1,06
8	382,557	544,304	42,28	387,410	1,27
9	461,347	716,809	55,37	467,944	1,43
10	541,883	928,599	71,37	550,185	1,53

Tabela 4.10: MEF E MC COM TOTAL DE 12 GRAUS DE LIBERDADE.

Analítico		MC(2e 4c)		MC(4e 1c)	
i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)	
1	3,500	3,500	0,01	3,500	0,00
2	21,355	21,402	0,22	21,388	0,15
3	57,470	58,915	2,51	58,043	1,00
4	106,926	111,706	4,47	109,577	2,48
5	166,660	178,541	7,13	185,480	11,29
6	233,849	254,726	8,93	272,487	16,52
7	306,343	340,751	11,23	379,792	23,98
8	382,557	430,302	12,48	493,197	28,92
9	461,347	526,809	14,19	848,448	83,91
10	541,883	641,798	18,44	1054,37	94,58

Figura 4.9: ERRO RELATIVO PARA O 1º AUTOVALOR.

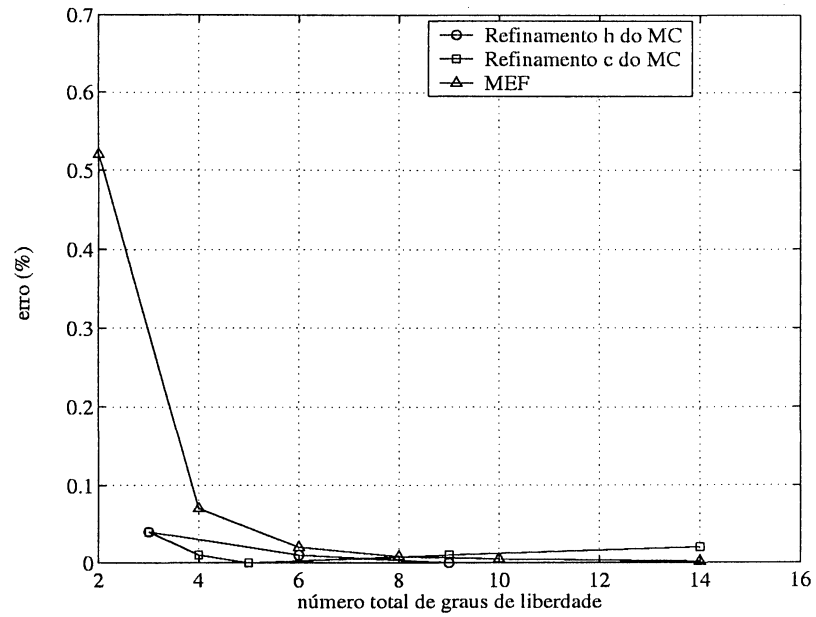
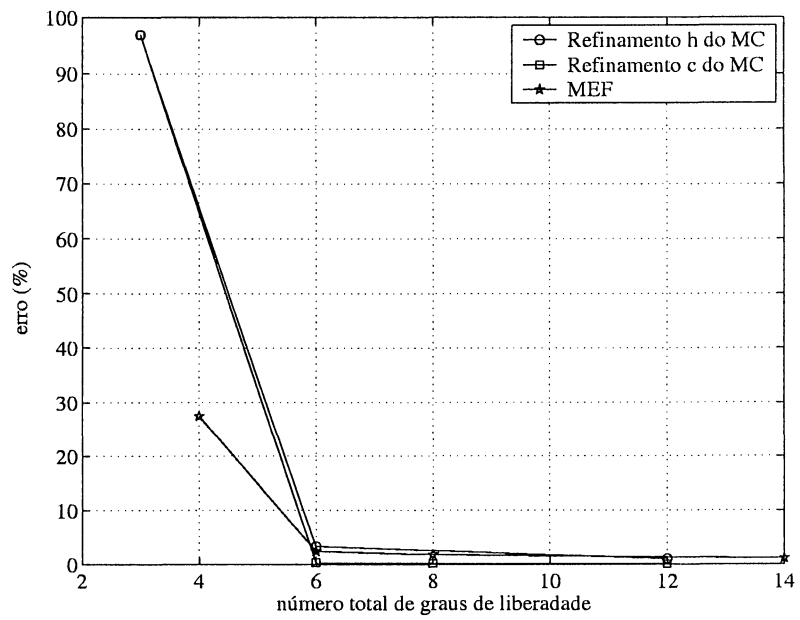


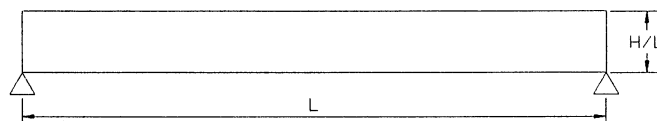
Figura 4.10: ERRO RELATIVO PARA O 3º AUTOVALOR.



4.2 Viga bi-apoiada

Neste exemplo considera-se uma viga de Timoshenko, reta e uniforme, de comprimento unitário, coeficiente de Poisson igual a 0,3 e coeficiente de cisalhamento $\kappa = 0,85$, apoiada em ambas extremidades conforme mostra a figura 4.11

Figura 4.11: VIGA BI-APOIADA.



A equação da frequência para uma viga bi-apoiada (HUANG, 1961) cujas raízes fornecem as frequências naturais da viga é dada por $f = \sin(b\beta)$ e os modos de vibração são obtidos pela equação:

$$\begin{aligned} V(\xi) &= C_4 \left\{ \left[-\frac{\sin(\beta b)}{\sinh(\alpha b)} \right] \sinh(b\beta\xi) + \sin(b\beta\xi) \right\} \\ \Psi(\xi) &= C_4 \left\{ \left[-\frac{\sin(\beta b)}{\sinh(\alpha b)} \right] \sinh(b\beta\xi) + \sin(b\beta\xi) \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Onde C_4 é uma constante e α e β são definidos na expressões 3.24 e 3.25. Com o objetivo de analisar o efeito da contribuição da inércia rotacional e do cisalhamento (conseqüentemente do raio de giração) no modo de vibração da viga, nesta seção são apresentados três casos para a viga da figura 4.11.

4.2.1 Caso 1: Viga esbelta

Neste exemplo, considera-se a viga da figura 4.11 com $H/L = 0,0277128$, ou seja, $r_g/L = 0,008$, portanto uma viga esbelta. Para comparação entre a solução analítica e as soluções obtidas pelo MEF e pelo MC utilizou-se o parâmetro b_i definido na equação 3.21.

Método dos Elemento Finitos

As tabelas 4.11 e 4.12 a seguir apresentam os autovalores b_i , obtidos através do MEF com 1, 2, 4, 6, 8 e 10 elementos e os respectivos erros em relação à solução analítica obtida pela Teoria Clássica. Neste exemplo o número de graus de liberdade do MEF corresponde ao número de elementos. O aumento do número de graus de liberdade decorrente do aumento do número de elementos corresponde ao refinamento h do MEF. O gráfico da figura 4.12 apresenta o erro relativo para o 1º, 3º, 5º e 8º autovalores obtidos pelo MEF.

Figura 4.12: ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES OBTIDOS PELO MEF.

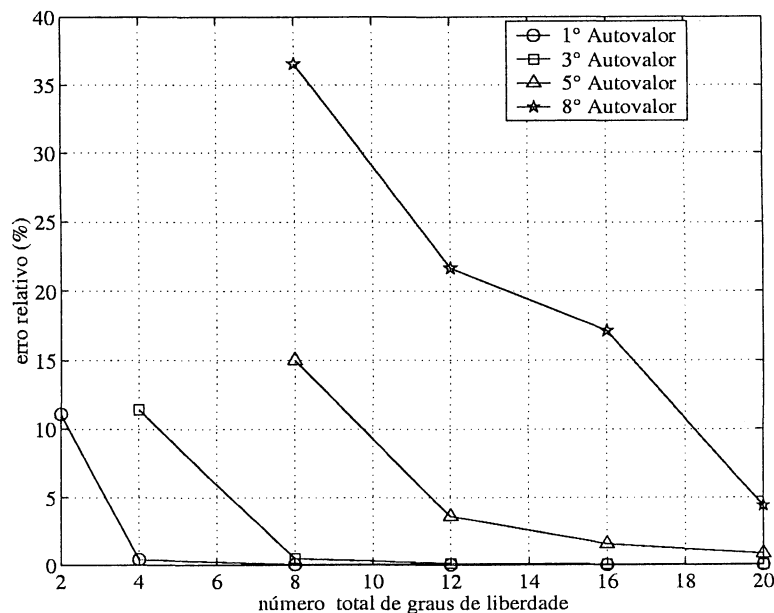


Tabela 4.11: RESULTADOS OBTIDOS PELO MEF COM 1, 2 E 4 ELEMENTOS.

	Analítica	MEF (1e)		MEF (2e)		MEF (4e)	
i	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	9,857	10,951	11,10	9,898	0,41	9,860	0,03
2	39,278	50,191	27,78	43,762	11,42	39,461	0,46
3	87,823			109,802	25,03	89,697	2,13
4	154,794			200,663	29,3	174,381	12,65
5	239,274					247,864	3,59
6	340,189					389,894	14,61
7	456,355					520,088	13,97
8	586,534					713,507	21,65

Tabela 4.12: RESULTADOS OBTIDOS PELO MEF COM 8, 6 E 10 ELEMENTOS.

	Analítica	MEF (6e)		MEF (8e)		MEF (10e)	
i	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	9,857	9,858	0,01	9,857	0,00	9,857	0,00
2	39,278	39,323	0,11	39,296	0,05	39,287	0,02
3	87,823	88,307	0,55	88,017	0,22	87,923	0,11
4	154,794	157,313	1,63	155,826	0,67	155,330	0,35
5	239,274	247,864	3,59	242,958	1,54	241,213	0,81
6	340,189	389,894	14,61	350,297	2,97	345,616	1,60
7	456,355	520,088	13,97	478,761	4,91	469,036	2,78
8	586,534	713,507	21,65	687,153	17,15	612,245	4,38

Método dos Elementos Compostos

Refinamento c do MC

Os resultados com o aumento do número de graus de liberdade c , ou seja, o acréscimo de termos analíticos da TC na função de interpolação estão apresentados nas tabelas 4.13, 4.14, 4.15 e 4.16 a seguir e correspondem ao refinamento c do MC para o modelo discretizado de 1 e 2 elementos.

Tabela 4.13: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 1 ELEMENTO E 1, 2 E 4 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO.

i	Analítica	MC (1e 1c)		MC (1e 2c)		MC (1e 4c)	
	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	9,857	9,858	0,01	9,858	0,01	9,857	0,00
2	39,278	50,191	27,78	39,306	0,07	39,270	0,02
3	87,823	122,511	39,50	122,511	39,50	88,220	0,45
4	154,794			229,623	48,34	155,828	0,67
5	239,274					371,168	55,12
6	340,189					548,687	61,29
7	456,355						
8	586,534						

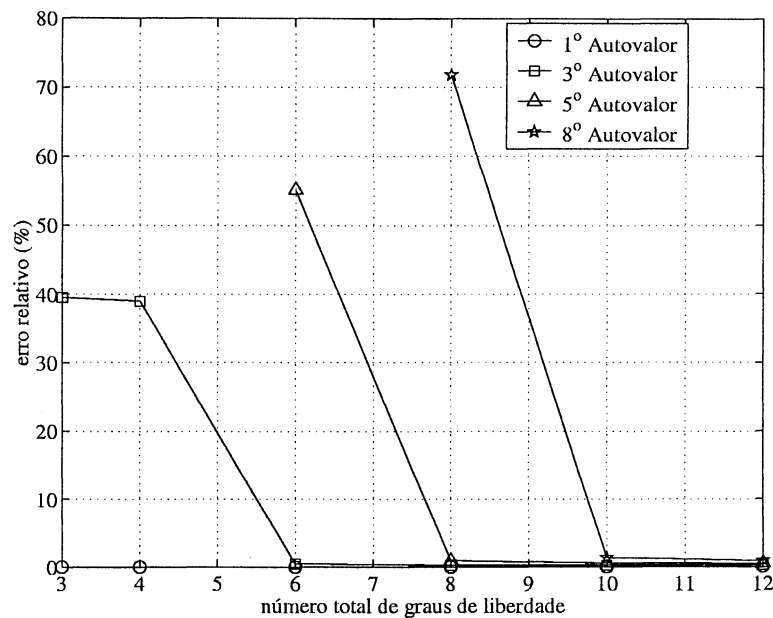
Tabela 4.14: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 1 ELEMENTO E 6, 8 E 10 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO.

i	Analítica	MC (1e 6c)		MC (1e 8c)		MC (1e 10c)	
	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	9,857	9,857	0,00	9,856	0,01	9,856	0,01
2	39,278	39,265	0,03	39,263	0,04	39,262	0,04
3	87,823	88,050	0,26	88,026	0,23	88,018	0,22
4	154,794	155,358	0,36	155,276	0,31	155,245	0,29
5	239,274	241,456	0,91	240,561	0,54	240,381	0,46
6	340,189	343,889	1,09	342,429	0,66	342,089	0,56
7	456,355	759,586	66,45	462,029	1,24	459,971	0,79
8	586,534	1007,637	71,79	594,486	1,36	591,773	0,89

Os gráficos das figuras 4.13 e 4.14 apresentam o erro relativo para o 1º, 3º,

0,56% enquanto que com o mesmo número de graus de liberdade total o erro relativo para b_6 obtido pela malha de 2 elementos, (MC(2e 4c)), é de 3,42%.

Figura 4.13: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c COM MALHA 1 ELEMENTO.



Refinamento h do MC.

O refinamento h consiste no aumento do número de elementos da malha do modelo. A tabela 4.17 apresenta os resultados obtidos pelo MC com 1 e 2 elementos e 1 grau de liberdade c , o que corresponde ao refinamento h . Os gráficos das figuras 4.15 e 4.16 ilustram os erros relativos do refinamento h do MC comparados com os erros do refinamento c do MC para uma malha de 1 elemento, denominado simplesmente de refinamento c .

Comparação entre MEF e MC

As tabelas 4.18 e 4.19 a seguir apresentam os resultados obtidos pelo MEF e pelo MC com número de graus de liberdade total igual a 12, ou seja, que demandam

Figura 4.14: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c COM MALHA DE 2 ELEMENTOS.

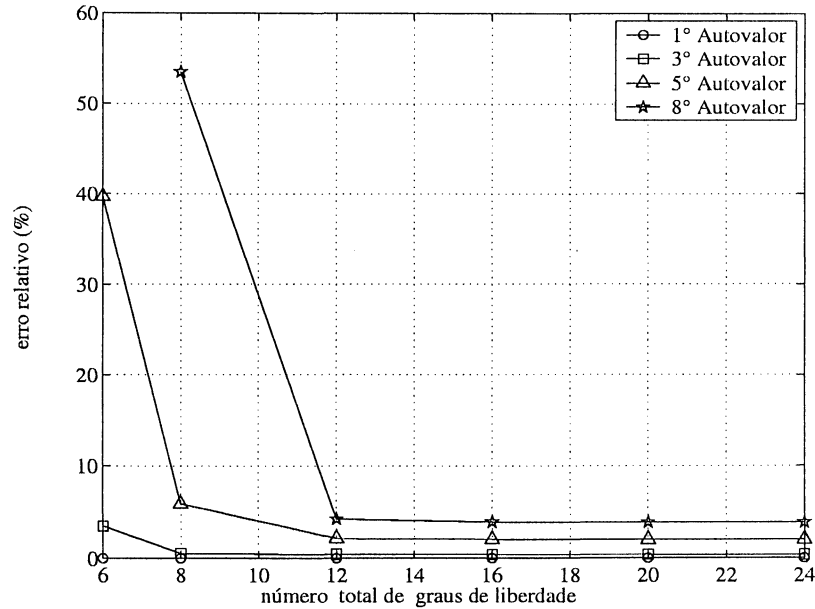


Tabela 4.17: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 1, 2 E 4 ELEMENTOS E 1 GRAU DE LIBERDADE c POR ELEMENTO.

i	Analítica	MC (1e 1c)		MC (2e 1c)		MC (4e 1c)	
	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	9,857	9,858	0,01	9,859	0,02	9,857	0,00
2	39,278	50,191	27,78	39,367	0,23	39,307	0,07
3	87,823	122,511	39,50	90,855	3,45	88,153	0,38
4	154,794			200,663	29,63	156,850	1,33
5	239,274			334,219	39,68	246,138	2,87
6	340,189			484,070	42,29	359,915	5,80
7	456,355					501,707	9,94
8	586,534					800,987	36,56

o mesmo esforço computacional. Os erros relativos para os autovalores b_i com $i = 1..8$, obtidos pelo MEF e pelo MC com 12 graus de liberdade total, são representados no gráfico da figura 4.17.

Observando os resultados das tabelas 4.18 e 4.19 verifica-se que com o mesmo número de graus de liberdade total os autovalores (ou frequências) obtidas pelo

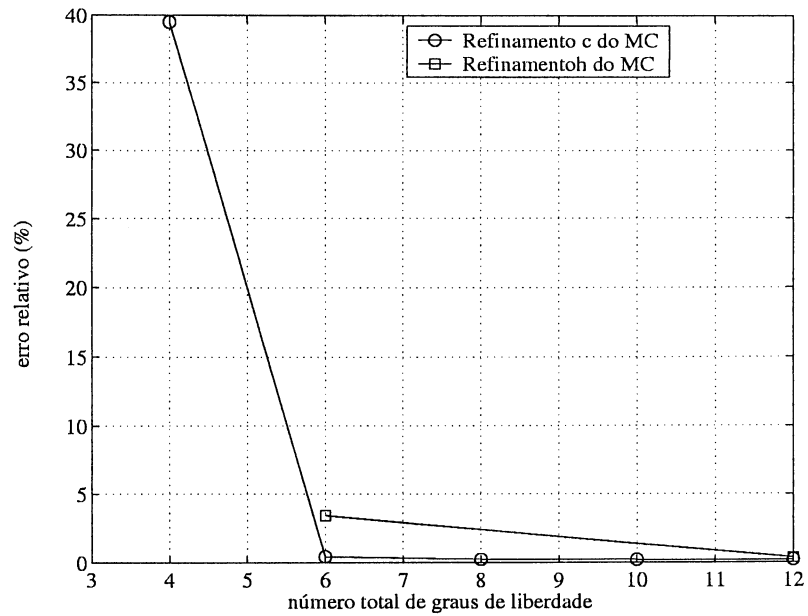
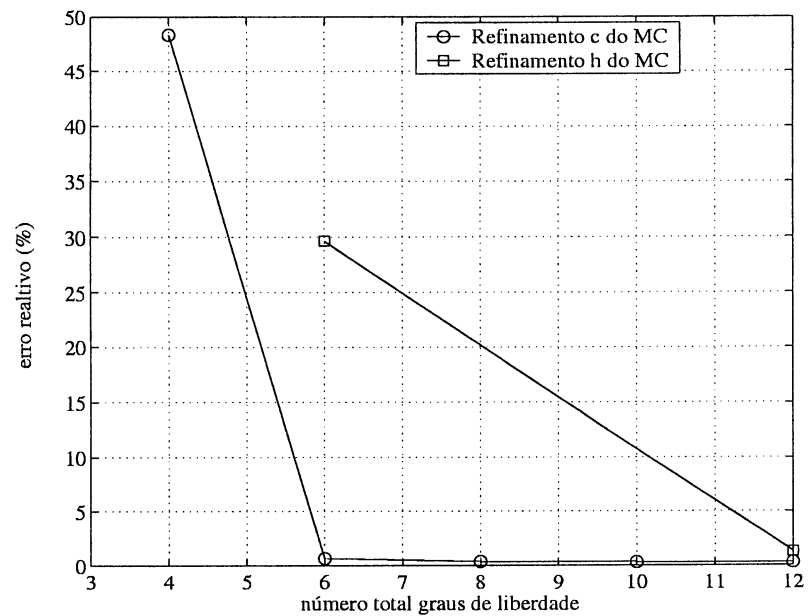
Figura 4.15: REFINAMENTO c E h DO MC PARA O 3º AUTOVALOR.Figura 4.16: REFINAMENTO c E h DO MC PARA O 4º AUTOVALOR.

Tabela 4.18: MEF E MC COM 12 GRAUS DE LIBERDADE TOTAL.

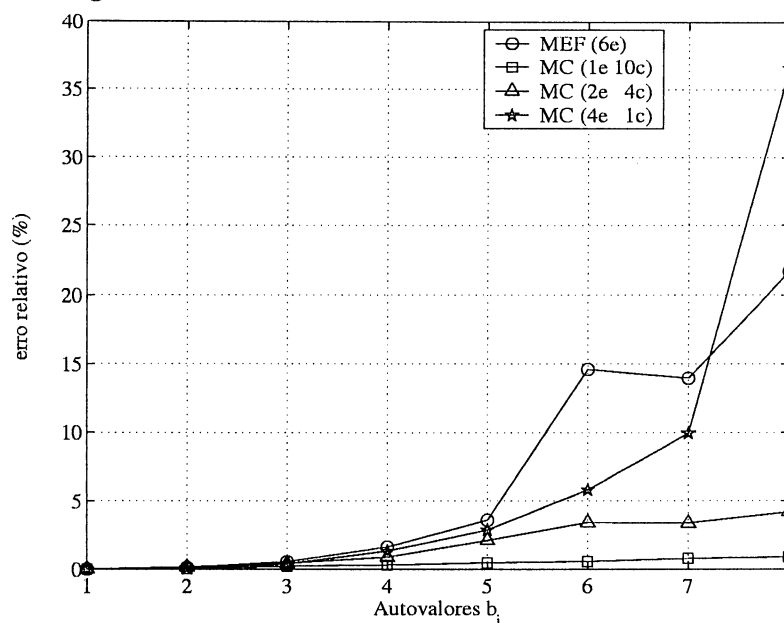
Analítica		MEF(6e)		MC(1e 10c)	
i	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	9,857	9,858	0,01	9,856	0,01 0
2	39,278	39,323	0,11	39,262	0,04
3	87,823	88,307	0,55	88,018	0,22
4	154,794	157,313	1,63	155,245	0,29
5	239,274	247,864	3,59	240,381	0,46
6	340,189	389,894	14,61	342,089	0,56
7	456,355	520,088	13,97	459,971	0,79
8	586,534	713,507	21,65	591,773	0,89

Tabela 4.19: MEF E MC COM 12 GRAUS DE LIBERDADE TOTAL.

Analítica		MC(2e 4c)		MC(4e 1c)	
i	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	9,857	9,858	0,01	9,857	0,00
2	39,278	39,340	0,16	39,307	0,07
3	87,823	88,204	0,43	88,153	0,38
4	154,794	156,156	0,88	156,850	1,33
5	239,274	244,317	2,11	246,138	2,87
6	340,189	351,840	3,42	359,915	5,80
7	456,355	471,716	3,37	501,707	9,94
8	586,534	611,096	4,19	800,987	36,56

MC convergem mais rapidamente para a solução analítica quando comparados com o MEF. Nota-se também que, principalmente para as frequências mais altas, o MC apresentou melhores resultados para malhas discretizadas com os menores números de elementos, isto é, menor número de graus de liberdade nodais. Por exemplo, a malha de 1 elemento e 10 graus de liberdade c , isto é, MC(1e 10c) apresenta um erro relativo máximo inferior a 1%, enquanto que na malha discretizada com dois elementos, os erros são superiores a 2% para as frequências mais altas.

Figura 4.17: ERRO RELATIVO DO MEF E MC.



4.2.2 Caso 2: Viga média

Para a viga representada pela figura 4.11 com $H/L = 0,138564$, ou seja, $r_g/L = 0,04$, têm-se uma viga média. Para comparação entre a solução analítica e as soluções obtidas pelo MEF e pelo MC utilizou-se o parâmetro b_i definido na equação 3.21.

Método dos Elementos Finitos

As tabelas 4.20 e 4.21 a seguir, apresentam os autovalores b_i , obtidos através do MEF com 1, 2, 4, 6, 8 e 10 elementos e os respectivos erros em relação à solução analítica obtida pela Teoria Clássica. O gráfico da figura 4.18 apresenta o erro relativo para o 1º, 3º, 5º e 8º autovalores obtidos pelo MEF.

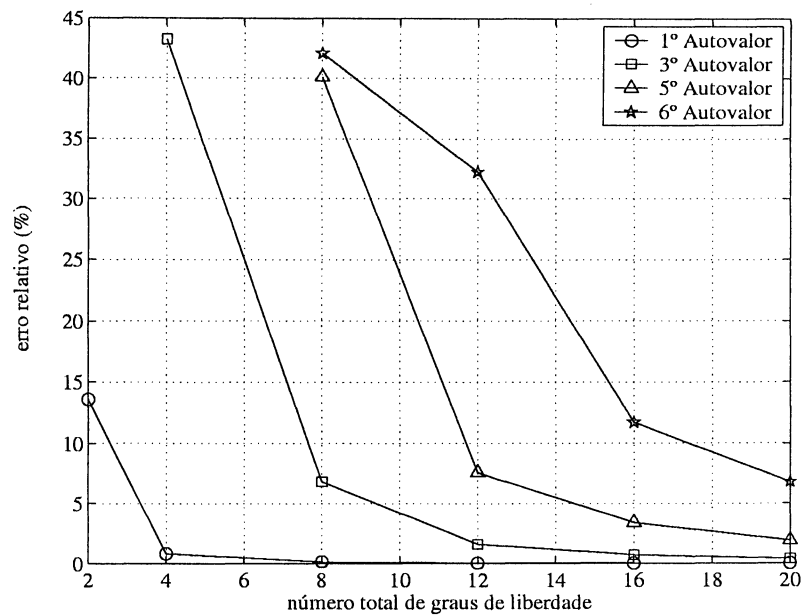
Tabela 4.20: RESULTADOS OBTIDOS PELO MEF COM 1, 2 E 4 ELEMENTOS.

i	Analítica	MEF(1e)		MEF(2e)		MEF(4e)	
		b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	9,571	10,868	13,55	9,649	0,810	9,584	0,14
2	35,359	49,973	41,33	42,480	20,138	35,994	1,80
3	71,657			102,651	43,254	76,554	6,83
4	113,845			192,551	69,134	156,392	37,37
5	159,136					222,937	40,09
6	205,992					322,783	56,70
7	253,582					403,301	59,04
8	301,458					428,277	42,07

Tabela 4.21: RESULTADOS OBTIDOS PELO MEF COM 8, 6 E 10 ELEMENTOS.

i	Analítica	MEF(6e)		MEF(8e)		MEF(10e)	
		b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	9,571	9,576	0,06	9,574	0,03	9,573	0,02
2	35,359	35,620	0,74	35,501	0,40	35,449	0,25
3	71,657	73,760	2,94	72,814	1,61	72,389	1,02
4	113,845	121,948	7,12	118,392	3,99	116,736	2,54
5	159,136	178,970	12,46	171,252	7,61	166,938	4,90
6	205,992	314,134	52,50	230,892	12,09	222,647	8,09
7	253,582	368,293	45,24	292,704	15,43	283,615	11,84
8	301,458	420,616	39,53	398,632	32,23	347,865	15,39

Figura 4.18: ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES OBTIDOS PELO MEF.



Método dos Elementos Compostos

Refinamento c do MC

Os autovalores b_i com $i = 1..8$ para uma viga bi-apoiada média, com raio de giração igual a $r_g/L = 0,04$ são apresentadas nas tabelas 4.22 e 4.23 para uma malha de 1 elemento e 1, 2, 4, 6, 8 e 10 graus de liberdade c por elemento. As tabelas 4.24 e 4.25 foram elaboradas para uma malha de 2 elemento e 1, 2, 4, 6, 8 e 10 graus de liberdade c por elemento. Os gráficos das figuras 4.19 e 4.20 apresentam o erro relativo para o 1º, 3º, 5º e 8º autovalores b_i obtidos pelo refinamento c do MC para a malha de 1 e 2 elementos.

Tabela 4.22: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 1 ELEMENTO E 1, 2 E 3 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO.

i	Analítica	MC (1e 1c)		MC (1e 2c)		MC (1e 4c)	
	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	9,571	9,572	0,01	9,572	0,01	9,554	0,18
2	35,359	49,973	41,33	35,384	0,07	35,104	0,72
3	71,657	121,369	69,38	121,368	69,37	74,552	4,04
4	113,845			221,685	94,72	117,910	3,57
5	159,136					316,470	98,87
6	205,992					401,178	94,75
7	253,582						
8	301,458						

Tabela 4.23: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 1 ELEMENTO E 6, 8 E 10 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO.

i	Analítica	MC (1e 6c)		MC (1e 8c)		MC (1e 10c)	
	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	9,571	9,543	0,30	9,533	0,40	9,519	0,55
2	35,359	34,952	1,15	34,832	1,49	34,830	1,50
3	71,657	74,134	3,46	73,972	3,23	73,920	3,16
4	113,845	117,289	3,02	117,069	2,83	117,055	2,82
5	159,136	164,830	3,58	164,347	3,27	164,238	3,21
6	205,992	211,377	2,61	210,972	2,42	210,928	2,40
7	253,582	428,665	69,04	258,702	2,02	258,320	1,87
8	301,458	458,978	52,25	305,016	1,18	304,063	0,86

Tabela 4.24: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 2 ELEMENTOS E 1, 2 E 4 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO.

i	Analítica	MC (2e 1c)		MC (2e 2c)		MC (2e 4c)	
	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	9,571	9,596	0,26	9,594	0,24	9,591	0,21
2	35,359	36,815	4,12	36,799	4,07	36,685	3,75
3	71,657	80,357	12,14	76,688	7,02	76,319	6,51
4	113,845	192,551	69,13	127,040	11,59	125,948	10,63
5	159,136	283,494	78,15	188,289	18,32	179,000	12,48
6	205,992	381,270	85,09	380,947	84,93	233,663	13,43
7	253,582			468,116	84,60	287,815	13,50
8	301,458			527,076	74,84	343,221	13,85

Tabela 4.25: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 2 ELEMENTOS E 6, 8 E 10 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO.

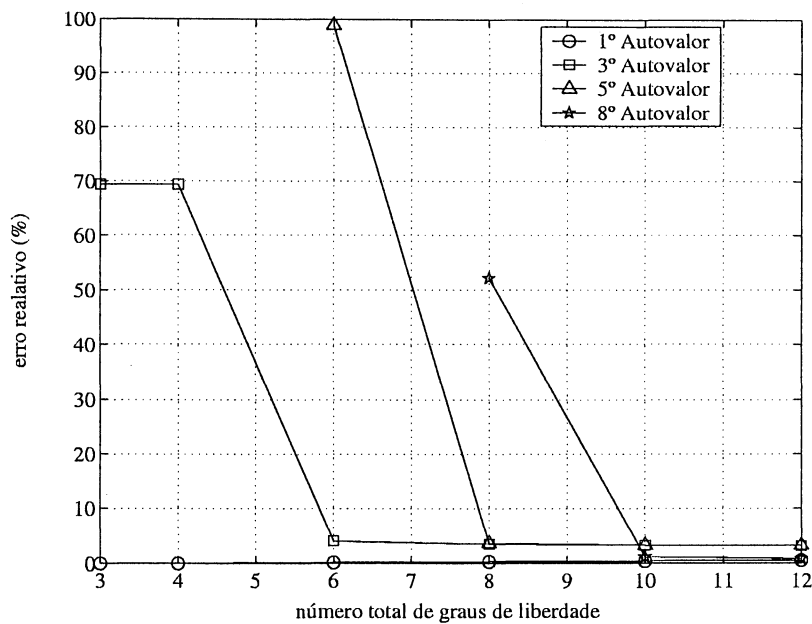
i	Analítica	MC (2e 6c)		MC (2e 8c)		MC (2e 10c)	
	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	9,571	9,590	0,20	9,588	0,18	9,587	0,17
2	35,359	36,606	3,53	36,538	3,33	36,465	3,13
3	71,657	76,076	6,17	75,866	5,87	75,736	5,69
4	113,845	125,252	10,02	124,667	9,51	124,568	9,42
5	159,136	178,386	12,10	178,068	11,90	177,987	11,85
6	205,992	232,627	12,93	232,153	12,70	231,878	12,57
7	253,582	286,562	13,01	286,193	12,86	286,042	12,80

Analisando as tabelas de resultados 4.22, 4.23, 4.24 e 4.25 obtidos pelo refinamento c do MC, verifica-se que os autovalores obtidos pelo refinamento c do MC apresentam uma boa precisão em relação a solução analítica. Observa-se que as frequências mais altas (b_5 , b_8 , por exemplo) obtidas através refinamento c com malha de 1 elemento apresentaram menores erros comparados com a malha de 2 elementos, e com o mesmo número de graus de liberdade total. Por exemplo, o 8º autovalor apresenta erro relativo inferior a 1% para malha discretizada com 1 elemento e 10 graus de liberdade total, e superior a 40% para malha de 2 elementos, conforme ilustram os gráficos das figuras 4.19 e 4.20.

Refinamento h do MC.

O refinamento h consiste no aumento do número de elementos da malha do modelo. A tabela 4.26 apresenta os resultados obtidos pelo MC com 1, 2 e 4 elementos e 1 grau de liberdade c , o que corresponde ao refinamento h . O gráfico da figura 4.21 ilustra os erros relativos do refinamento h do MC comparados com os erros do refinamento c do MC para uma malha de 1 elemento, denominado simplesmente de refinamento c .

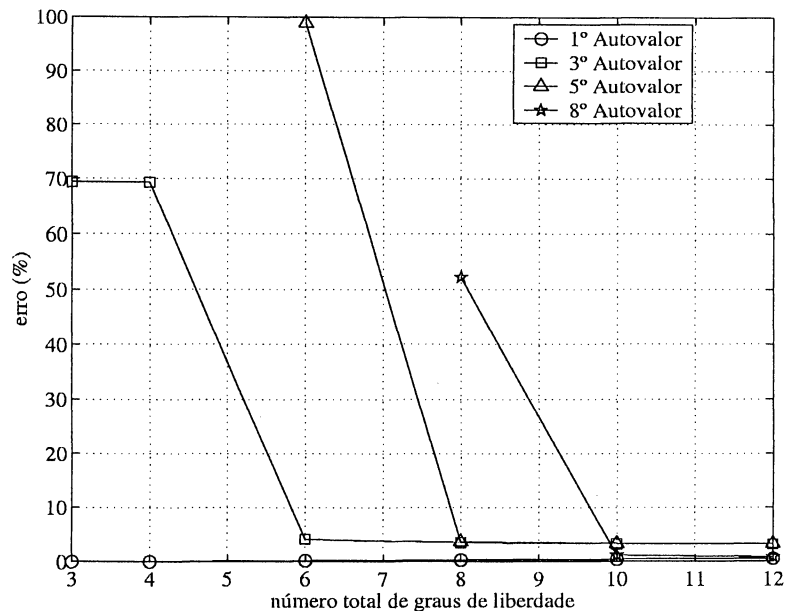
Observa-se na figura do gráfico 4.21 que o aumento no número de graus de

Figura 4.19: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c COM MALHA DE 1 ELEMENTO.Tabela 4.26: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 1, 2 E 4 ELEMENTOS E 1 GRAU DE LIBERDADE c POR ELEMENTO.

i	Analítica	MC (1e 1c)		MC (2e 1c)		MC (4e 1c)	
	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	9,571	9,572	0,01	9,596	0,26	9,581	0,10
2	35,359	49,973	41,33	36,815	4,12	35,814	1,29
3	71,657	121,369	69,38	80,357	12,14	75,142	4,86
4	113,845			192,551	69,13	135,893	19,37
5	159,136			283,494	78,15	193,746	21,75
6	205,992			381,270	85,09	268,205	30,20
7	253,582					344,070	35,68
8	301,458					428,277	42,07

liberdade c não é garantia de convergência, neste exemplo o refinamento c apresentou melhores resultados com poucos graus de liberdade c . Comparando os resultados obtidos pelos refinamentos c e h conclui-se que o refinamento c pode ser mais eficiente que o h desde que se escolha o número certo de graus de liberdade c .

Figura 4.20: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c COM MALHA DE 2 ELEMENTOS.



Comparação entre MEF e MC

Os autovalores b_i , com $i = 1..8$ obtidos pelo MEF e pelo MC com o mesmo número de graus de liberdade total são apresentados nas tabelas 4.27 e 4.28 e os erros relativos para os autovalores b_i , obtidos pelo MEF e pelo MC são representados no gráfico da figura 4.22

Tabela 4.27: MEF E MC COM TOTAL 12 GRAUS DE LIBERDADE.

i	Analítica	MEF(6e)		MC(1e 10c)	
	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	9,571	9,576	0,06	9,519	0,55
2	35,359	35,620	0,74	34,830	1,50
3	71,657	73,760	2,94	73,920	3,16
4	113,845	121,948	7,12	117,055	2,82
5	159,136	178,970	12,46	164,238	3,21
6	205,992	314,134	52,50	210,928	2,40
7	253,582	368,293	45,24	258,320	1,87
8	301,458	420,616	39,53	304,063	0,86

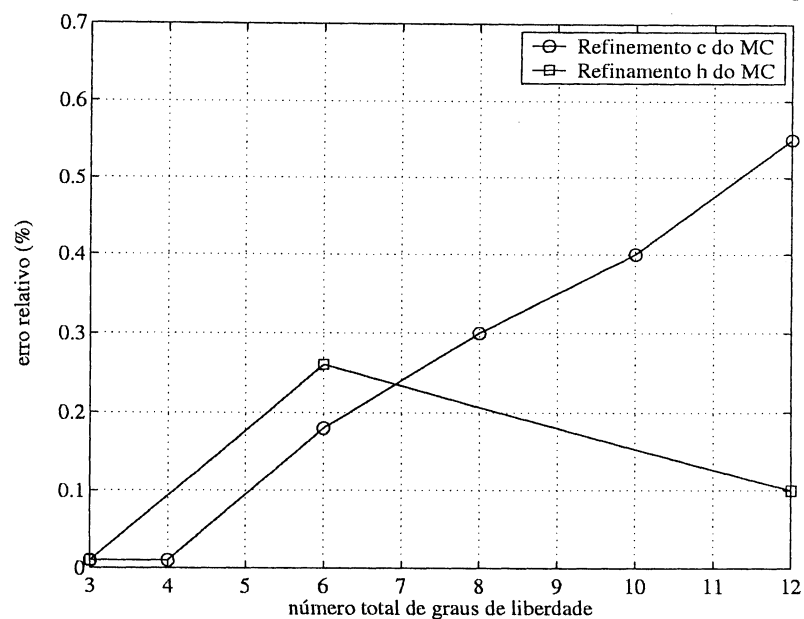
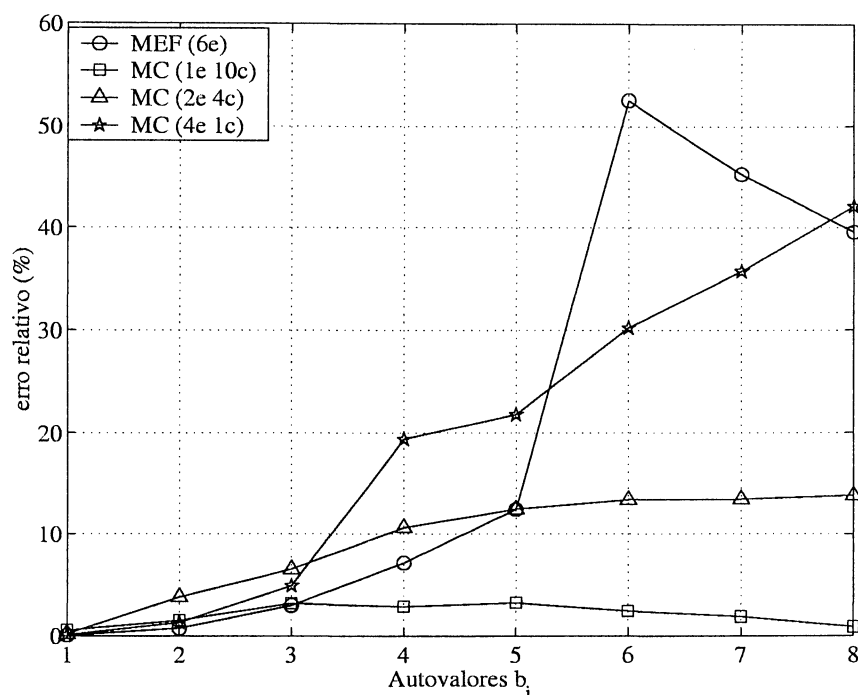
Figura 4.21: REFINAMENTO c E h DO MC PARA O 1º AUTOVALOR.

Tabela 4.28: MEF E MC COM TOTAL 12 GRAUS DE LIBERDADE.

i	Analítica	MC(2e 4c)		MC(4e 1c)	
	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	9,571	9,591	0,21	9,581	0,10
2	35,359	36,685	3,75	35,814	1,29
3	71,657	76,319	6,51	75,142	4,86
4	113,845	125,948	10,63	135,893	19,37
5	159,136	179,000	12,48	193,746	21,75
6	205,992	233,663	13,43	268,205	30,20
7	253,582	287,815	13,50	344,070	35,68
8	301,458	343,221	13,85	428,277	42,07

Figura 4.22: MEF E MC COM TOTAL 12 GRAUS DE LIBERDADE.



Verifica-se através da tabela 4.22 e do gráfico de autovalores da figura 4.22, que as frequências obtidas pelo MC são mais precisas que as frequências obtidas pelo MEF para o mesmo número de graus de liberdade total. Observa-se ainda a excelente precisão obtida pelo MC para frequências mais altas obtidas através da malha de 1 elemento e 10 graus de liberdade total, isto é, MC(1e 10c), com erro relativo máximo inferior a 1%.

4.2.3 Caso 3: Viga espessa

Neste caso considera-se uma viga espessa representada pela figura 4.11 com $H/L = 0,277128$, ou seja, $r_g/L = 0,08$.

Com o objetivo de analisar o comportamento do MC aplicado a vibração de vigas espessa, esta seção é dividida em três subseções.

A primeira subseção é dedicada à Teoria Clássica. Os modos de vibrações para

o caso de uma viga bi-engastada são apresentados. A segunda seção consiste em uma breve discussão dos resultados obtidos pelo MEF e pelo ANSYS. E finalmente a terceira seção apresenta uma análise dos resultados obtidos pelo MC.

Teoria Clássica

Como discutido no capítulo 2, as funções analíticas introduzidas nas funções de forma do MEF devem obedecer certas condições de contorno que não afetem os valores associados aos graus de liberdade nodais no MEF, o que corresponde adotar um modelo de viga bi-engastada. A figura 4.23 apresenta os modos de vibração das quatro primeiras frequências obtidas através da TC. A figura 4.24 apresenta os modos de vibrações para a 5^o, 6^o, 7^o e 8^o frequências obtida pela TC.

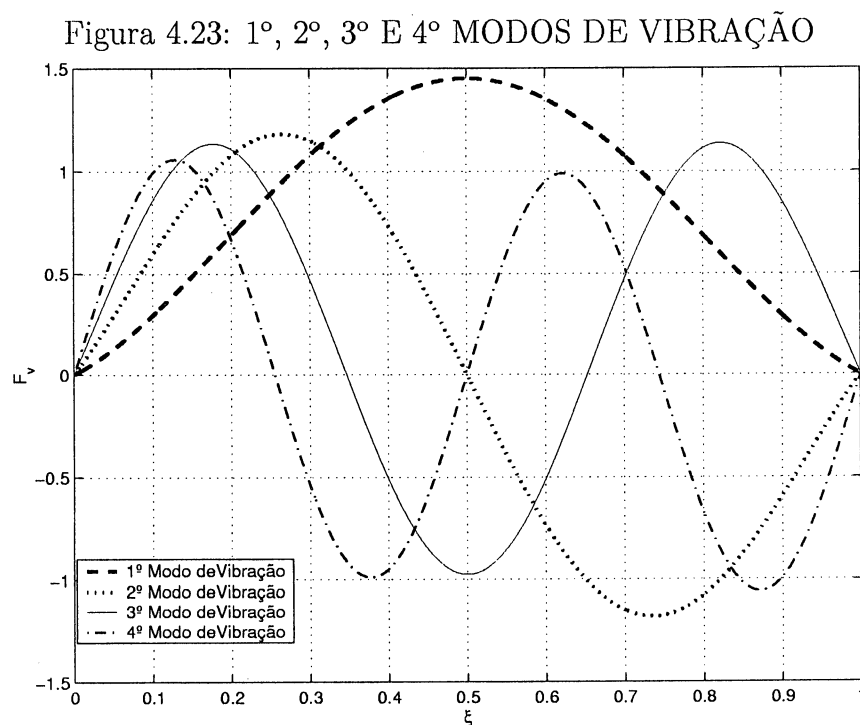
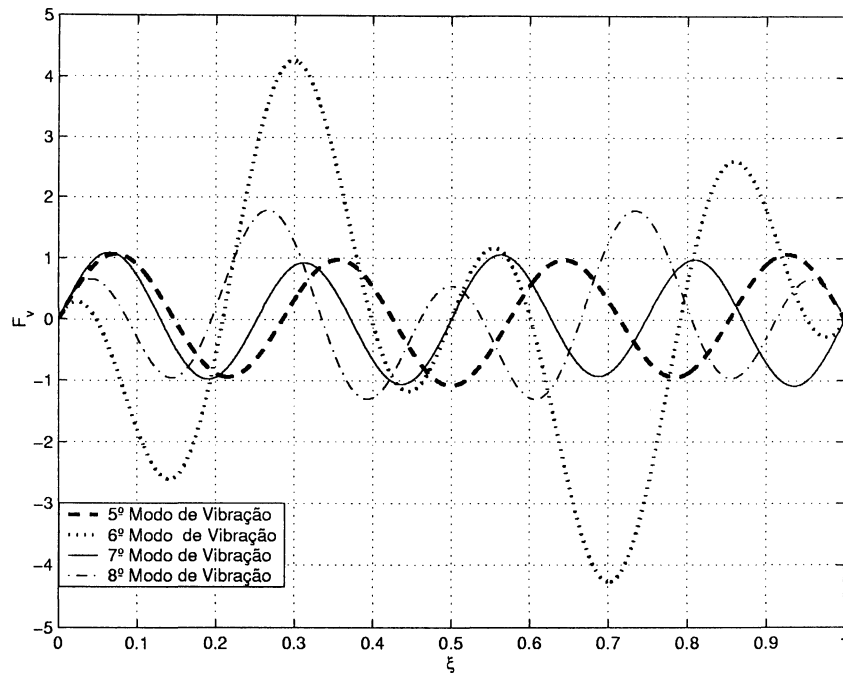


Figura 4.24: 5º, 6º, 7º E 8º MODOS DE VIBRAÇÃO



Observando o gráfico da figura 4.23, verifica-se que o comportamento dos quatro modos de vibrações apresentados correspondem ao modelo unidimensional adotado neste trabalho. Nota-se no gráfico da figura 4.24 que os modos de vibrações das frequências mais altas não apresentam o comportamento correspondente aos modos de vibração do modelo unidimensional de uma viga bi-engastada. Por este motivo, serão considerados somente os quatro primeiros modos de vibração. Assim, o número de funções analíticas obtidas pela TC acrescentadas nas funções de forma do MEF será igual quatro.

Método dos Elementos Finitos

As tabelas 4.29 e 4.30 apresentam os autovalores b_i , obtidos através do MEF com 1, 2, 4, 6, 8 e 10 elementos e os respectivos erros em relação à solução analítica obtida pela Teoria Clássica. O número de graus de liberdade do MEF corresponde

ao número de elementos. O aumento do número de graus de liberdade decorrente do aumento do número de elementos corresponde ao refinamento h do MEF.

Tabela 4.29: RESULTADOS OBTIDOS PELO MEF COM 1, 2 E 4 ELEMENTOS

i	Analítica	MEF(1e)		MEF(2e)		MEF(4e)	
		b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	8,840	10,620	20,14	8,999	1,80	8,875	0,40
2	28,461	48,138	69,13	39,098	37,37	29,598	3,99
3	51,498			80,696	56,70	57,723	12,09
4	75,365			107,070	42,07	99,658	32,23
5	99,302					114,503	15,34
6	123,098					123,198	0,08
7	146,713					143,452	2,22
8	170,155					145,699	14,37

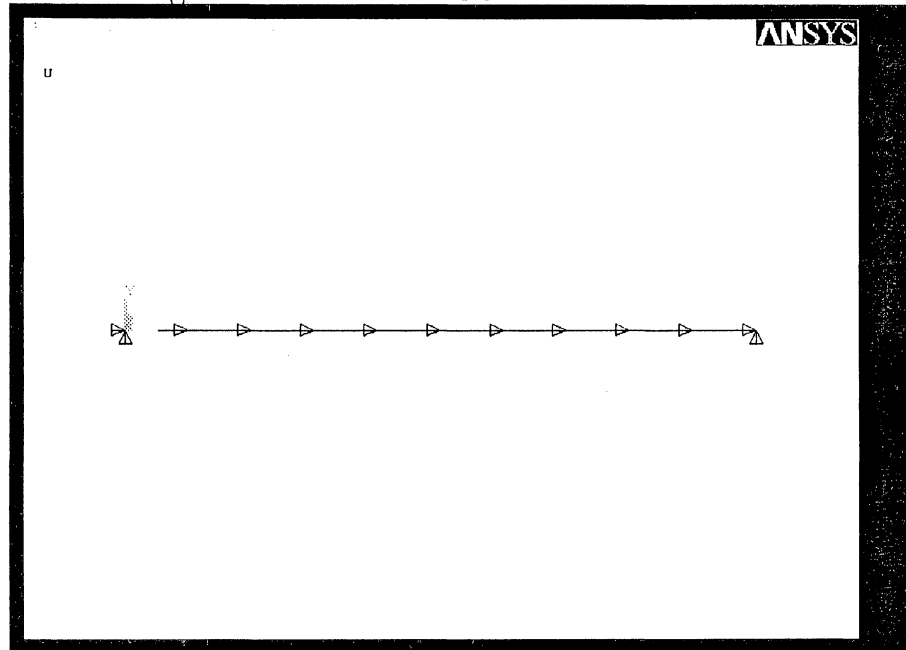
Tabela 4.30: RESULTADOS OBTIDOS PELO MEF COM 8, 6 E 10 ELEMENTOS

i	Analítica	MEF(6e)		MEF(8e)		MEF(10e)	
		b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	8,840	8,855	0,18	8,848	0,10	8,845	0,06
2	28,461	28,961	1,76	28,741	0,98	28,640	0,63
3	51,498	54,415	5,66	53,142	3,19	52,549	2,04
4	75,365	84,1933	11,71	80,505	6,82	78,617	4,39
5	99,302	94,328	5,01	92,220	7,13	91,204	8,15
6	123,098	107,301	12,83	104,128	15,41	102,583	16,67
7	146,713	116,380	20,67	110,825	24,46	106,874	27,15
8	170,155	138,935	18,35	132,915	21,89	129,774	23,73

Para comparação com códigos comerciais, utilizou-se o elemento de viga de Timoshenko *BEAM3* do software ANSYS, versão 6.0. O elemento *BEAM3*, possui três graus de liberdade em cada nó: translação nos eixos x e y e rotação em torno eixo z . Como o elemento de viga de Timoshenko proposto neste exemplo possui somente dois graus de liberdade por nó, isto é, não possui deslocamento no eixo x (figura 3.13), portanto, para que o elemento *BEAM3* seja compatível

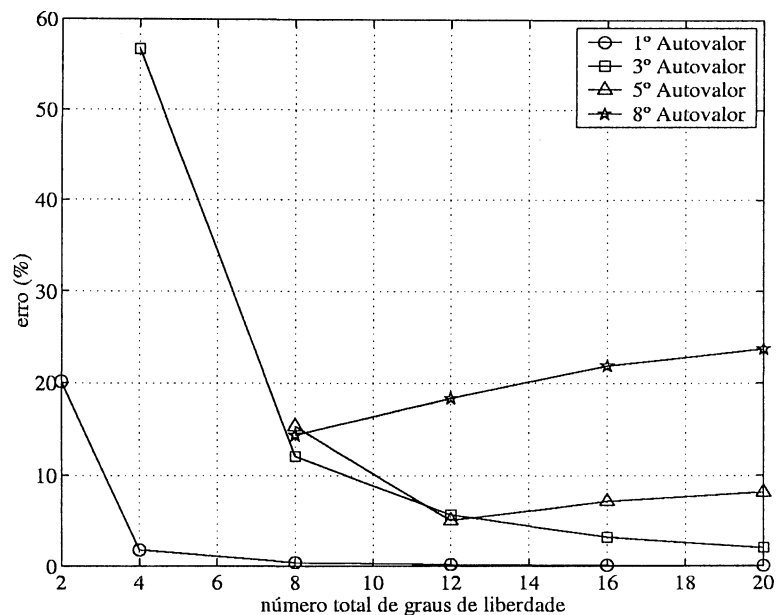
com o elemento adotado neste trabalho é necessário não permitir o deslocamento transversal na direção x . A viga bi-apoiada apresentada neste exemplo foi discretizada com malhas de 10, 20 e 100 elementos, com restrição de deslocamento na direção x como mostra a figura 4.25.

Figura 4.25: MALHA COM 10 ELEMENTOS - BEAM3



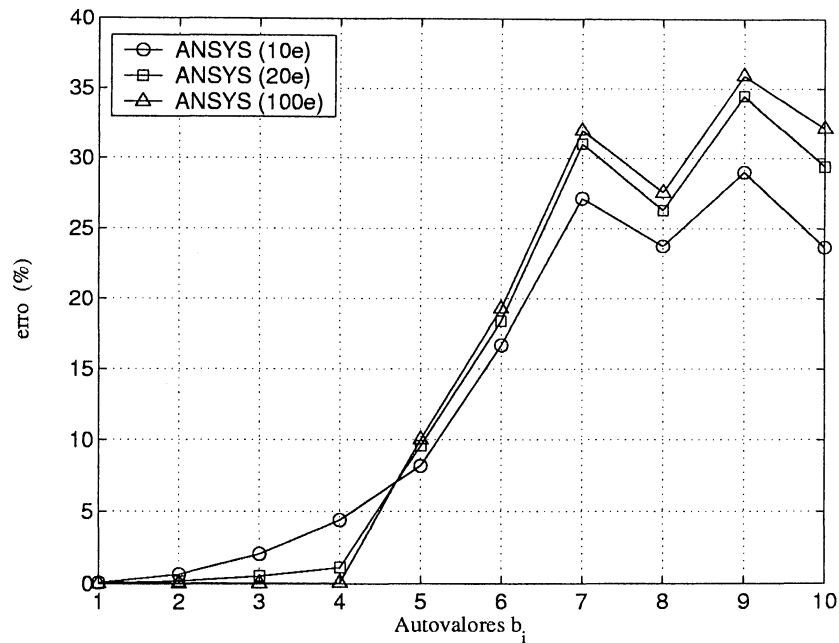
Os autovalores foram obtidos utilizando-se o mesmo parâmetro b_i definido na equação 3.21. Verificou-se que os resultados obtidos nas tabelas 4.29 e 4.30 concordam com os resultados obtidos pelo ANSYS. Nota-se, porém, que após o quarto autovalor b_4 , o modelo apresenta uma divergência em relação a solução analítica. Por exemplo, para a malha discretizada com 4 elementos, o 6º autovalor apresenta erro relativo de 0,08% com o refinamento da malha para 8 e 10 elementos os erros relativos obtidos são de 15,41% e de 16,67% respectivamente. O erro relativo para o 1º, 3º, 5º e 8º obtidos pelo MEF estão representados no gráfico da figura 4.26.

Figura 4.26: ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES OBTIDOS PELO MEF



O gráfico da figura 4.27 apresenta os resultados dos autovalores obtidos pelo software ANSYS para malhas discretizadas com 10, 20 e 100 elementos. Nota-se que as quatro primeiras frequências convergem para a solução analítica, porém a partir da quinta frequência verifica-se um aumento significativo do erro relativo com o refinamento da malha. SANCHES (2002), em sua tese de doutoramento, encontrou problema semelhante para vigas espessas, e concluiu que, para frequências mais altas ocorrem interferências de outras direções, não sendo mais possível compará-las a resultados obtidos pela teoria unidimensional. Os gráficos das figuras 4.28, 4.29, 4.30 e 4.31 apresentam alguns modos de vibração da viga bi-apoiada obtidos através do ANSYS para malha de 100 elementos. Observa-se que o 5º modo de vibração (figura 4.30) apresenta várias perturbações, provavelmente decorrentes de instabilidade numérica. Nota-se também que o 8º modo de vibração (figura 4.31) não apresenta o comportamento esperado para o modelo unidimensional de viga.

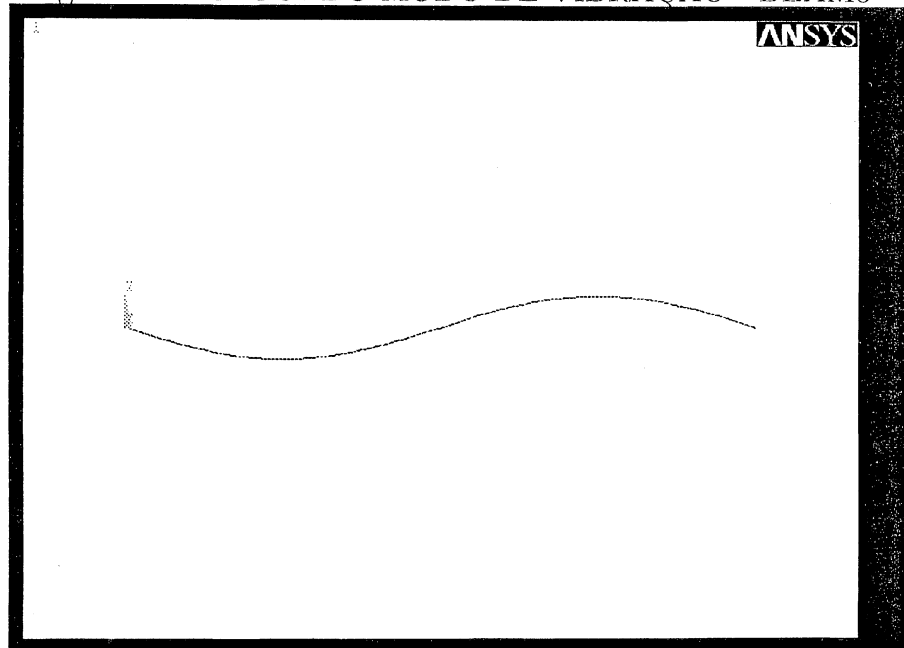
Figura 4.27: ERRO RELATIVO DOS AUTOVALORES OBTIDOS PELO ANSYS



Para verificar essas perturbações, foi adotado um modelo bi-dimensional, usando o elemento $PLAN42$ do ANSYS. Para análise plana, a viga foi discretizada com quatro tipos de malhas. Na primeira malha, a viga é discretizada com 5 elementos na direção y e 10 elementos na direção x , num total de 50 elementos, como mostra a figura 4.32. A segunda malha é formada por 10 elementos na direção y e 20 elementos na direção x , ou seja, um total de 200 elementos. A terceira e a quarta malha foram discretizadas com 20 elementos na direção y . Na direção x foram usados 40 elementos na terceira malha e 60 elementos na quarta malha, num total de 800 e 1200 elementos respectivamente.

A tabela 4.31 apresenta as frequências naturais da viga proposta. A nomenclatura usada, $PLAN42 (y \times x)$, se refere à discretização da malha, isto é, y elementos na direção y e x elementos na direção x . Os gráficos das figuras 4.34, 4.35, 4.36, 4.37, e 4.39, apresentam alguns modos de vibração da viga para a

Figura 4.28: SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO - BEAM3



modelagem plana discretizada com a malha PLAN42(20x60), conforme mostra a figura 4.33.

Observa-se também nos gráficos das figuras 4.35, 4.36, 4.37, 4.38 e 4.39 obtidas através do ANSYS perturbações no modos de vibrações mais altos. Por este motivo, nas próximas seções serão analisadas somente as quatro primeiras frequências do modelo unidimensional proposto neste trabalho.

Figura 4.29: QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO - BEAM3

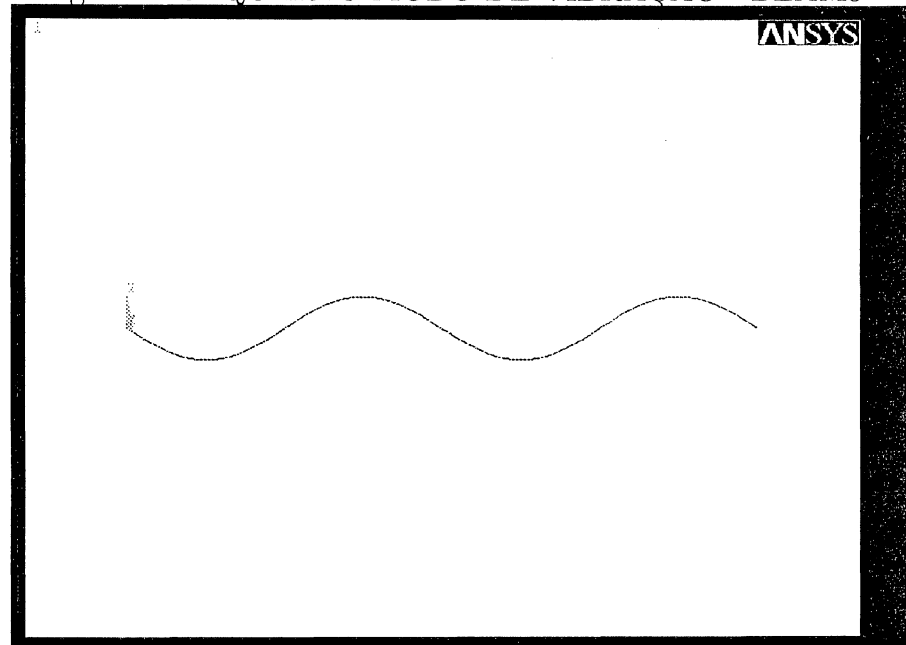


Figura 4.30: QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO - BEAM3

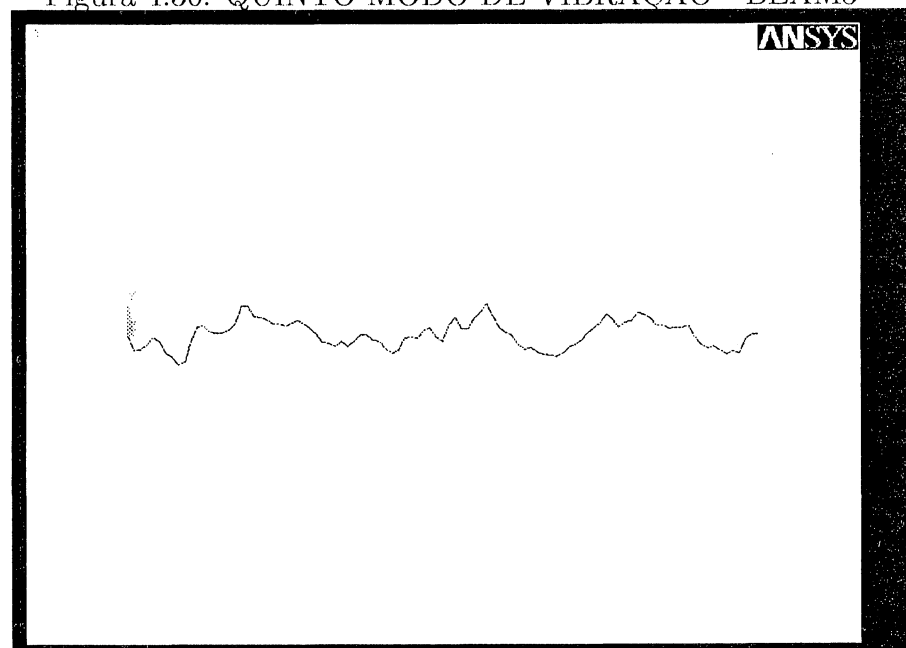


Figura 4.31: OITAVO MODO DE VIBRAÇÃO - BEAM3

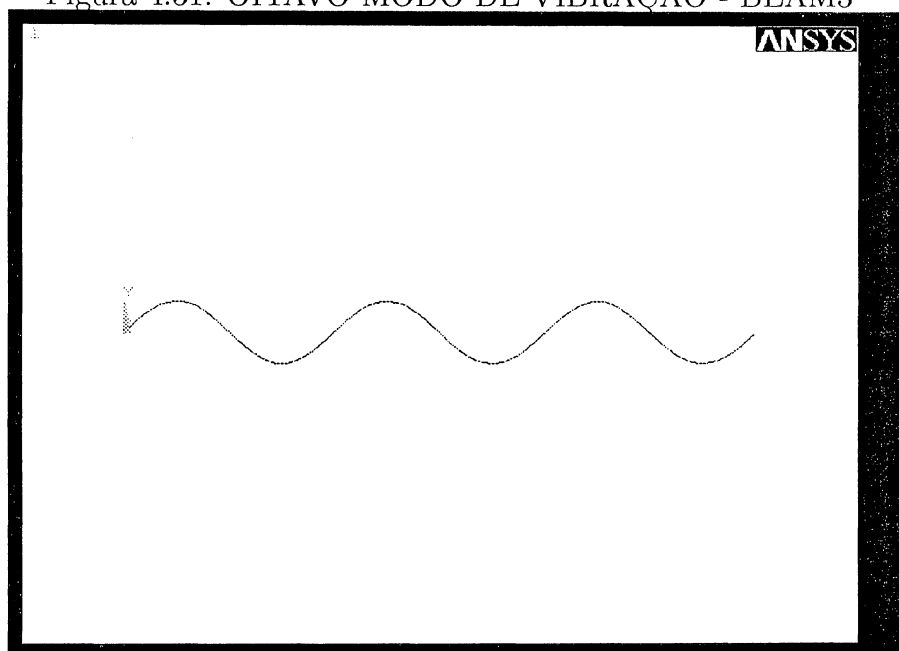


Figura 4.32: MALHA COM 50 ELEMENTOS

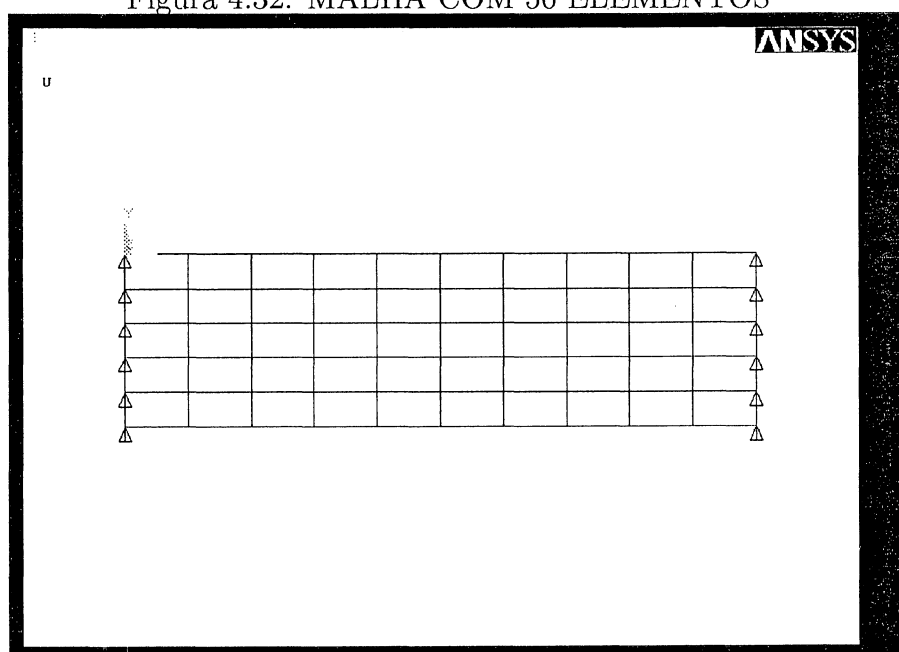


Figura 4.33: MALHA COM 1200 ELEMENTOS - PLAN42(20X60).

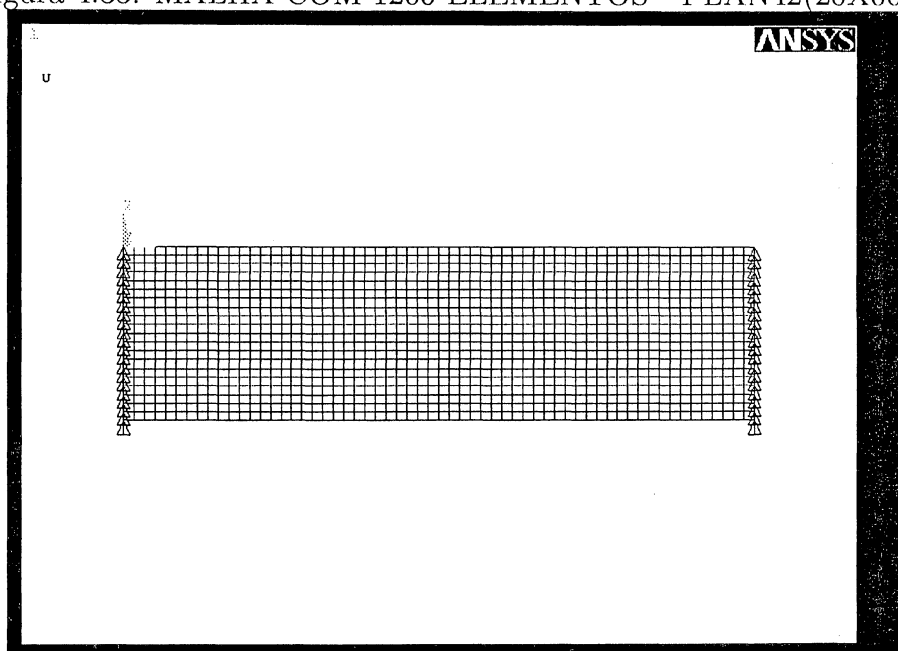


Tabela 4.31: RESULTADOS OBTIDOS PELO MODELO BI-DIMENSIONAL

<i>PLAN42 (y × x)</i>				
i	PLAN42(5x10)e	PLAN42(10x20)e	PLAN42(20x40)e	PLAN42(20x60)e
1	8,969	8,883	8,861	8,857
2	29,775	28,882	28,663	28,627
3	39,326	39,194	39,161	39,154
4	55,888	52,847	52,112	51,992
5	78,695	77,644	76,609	76,334
6	85,219	78,271	77,383	77,336
7	89,332	88,242	87,971	87,971
8	99,039	98,121	97,891	97,889

Figura 4.34: SEGUNDO MODO DE VIBRAÇÃO - PLAN42

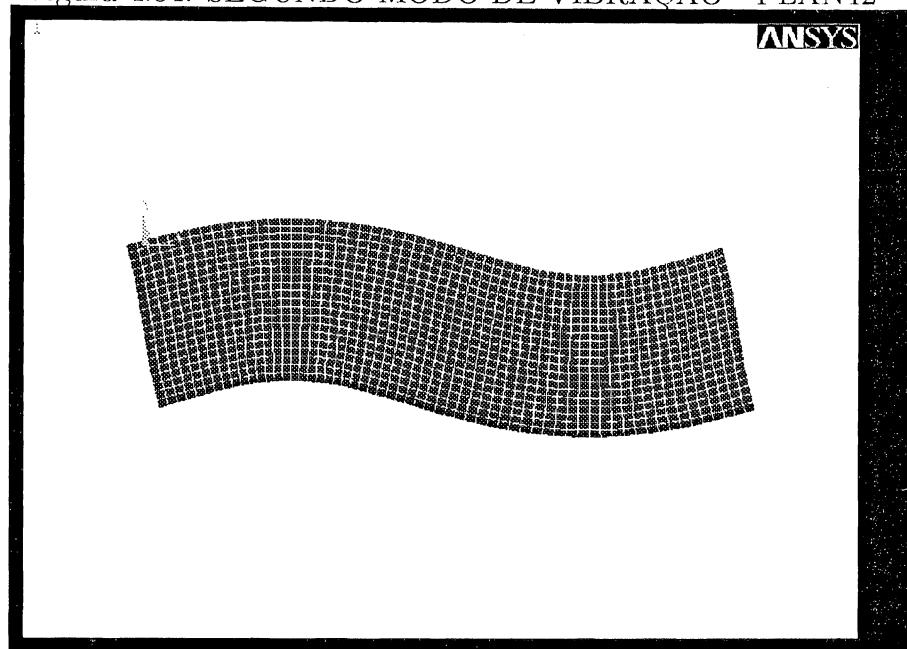


Figura 4.35: TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO - PLAN42

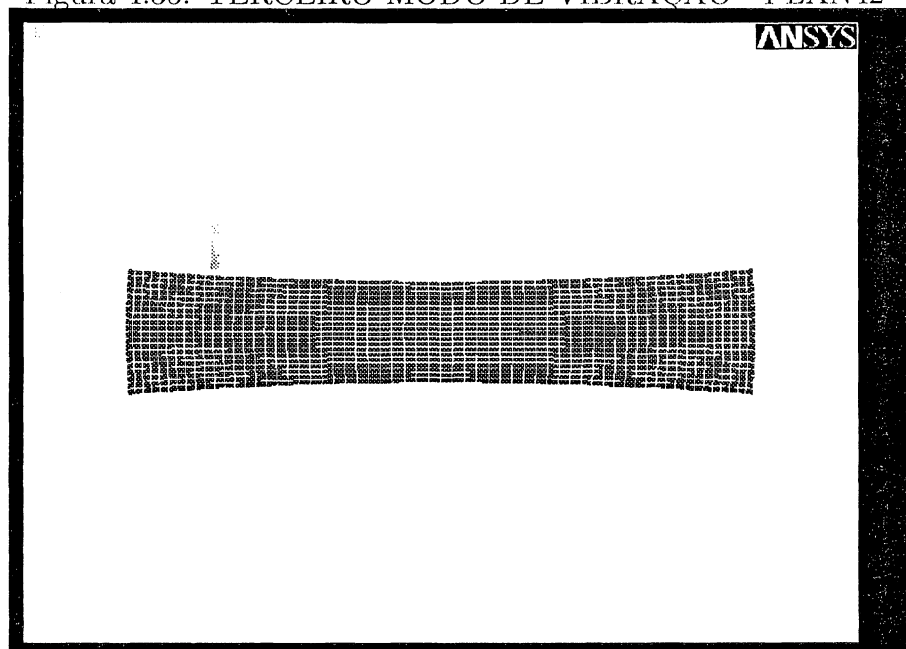


Figura 4.36: QUARTO MODO DE VIBRAÇÃO - PLAN42

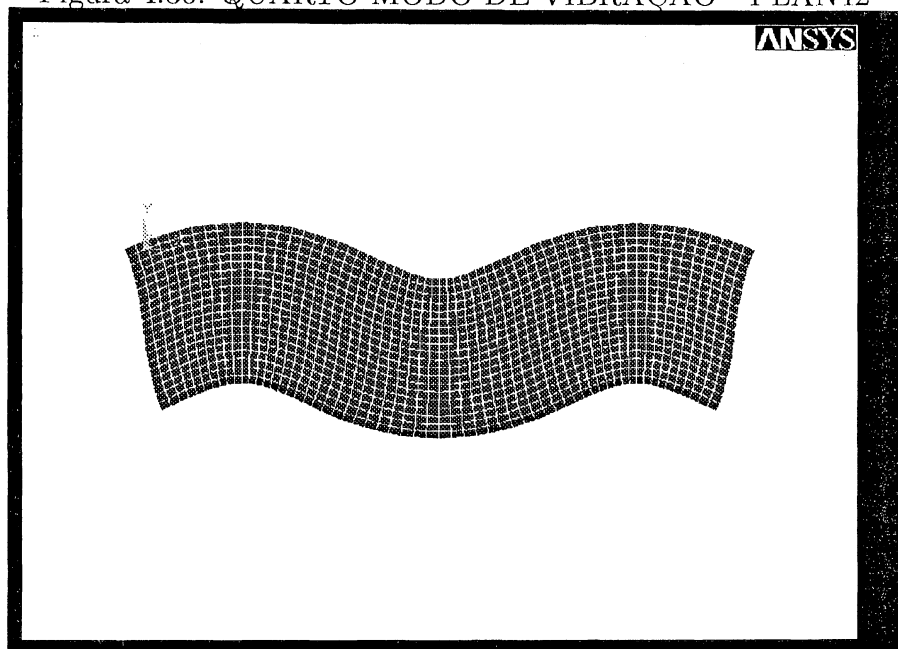


Figura 4.37: QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO - PLAN42

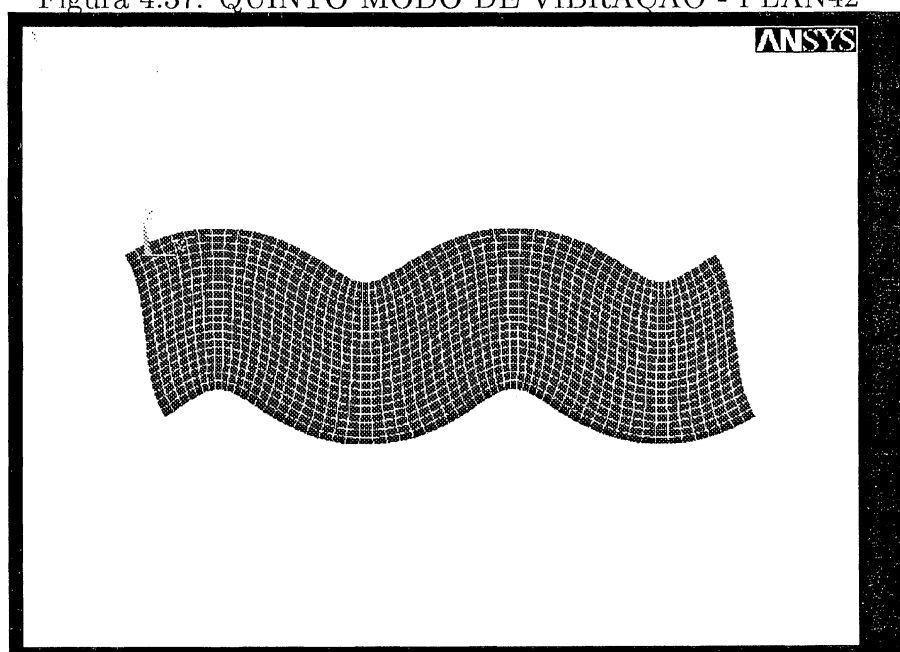


Figura 4.38: SEXTO MODO DE VIBRAÇÃO - PLAN42

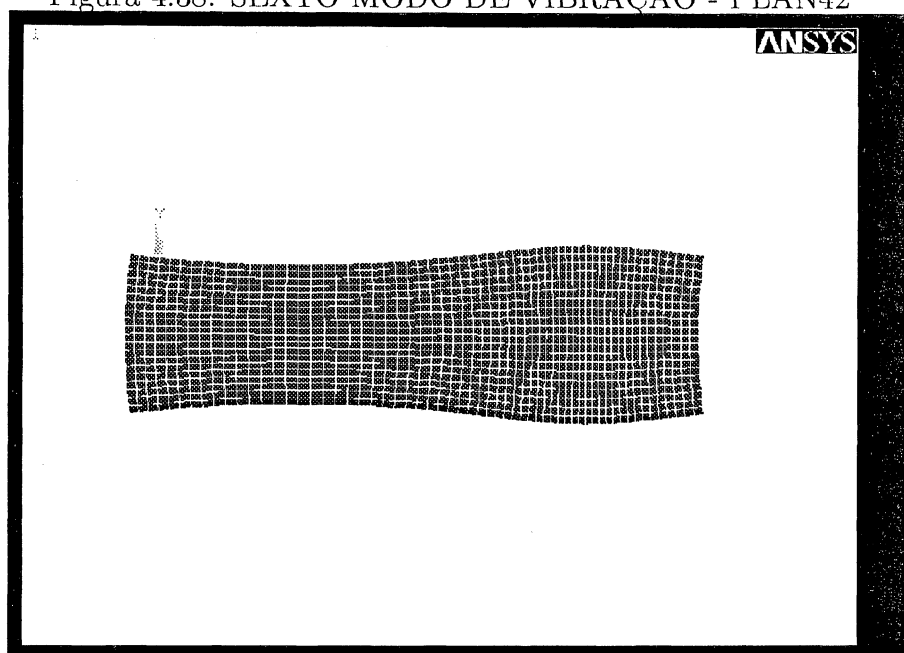
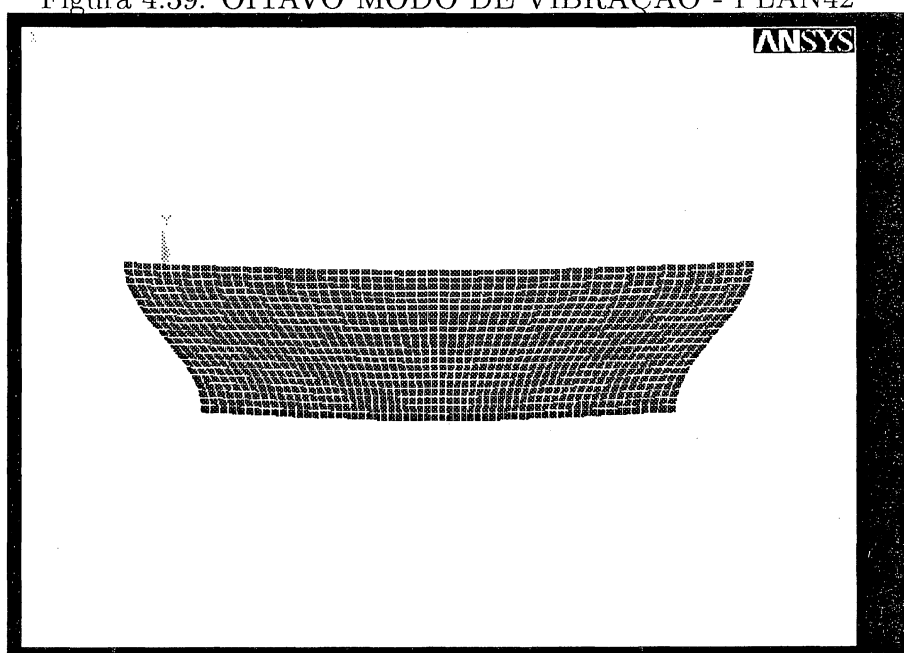


Figura 4.39: OITAVO MODO DE VIBRAÇÃO - PLAN42



MÉTODO DOS ELEMENTOS COMPOSTOS

Refinamento c do MC

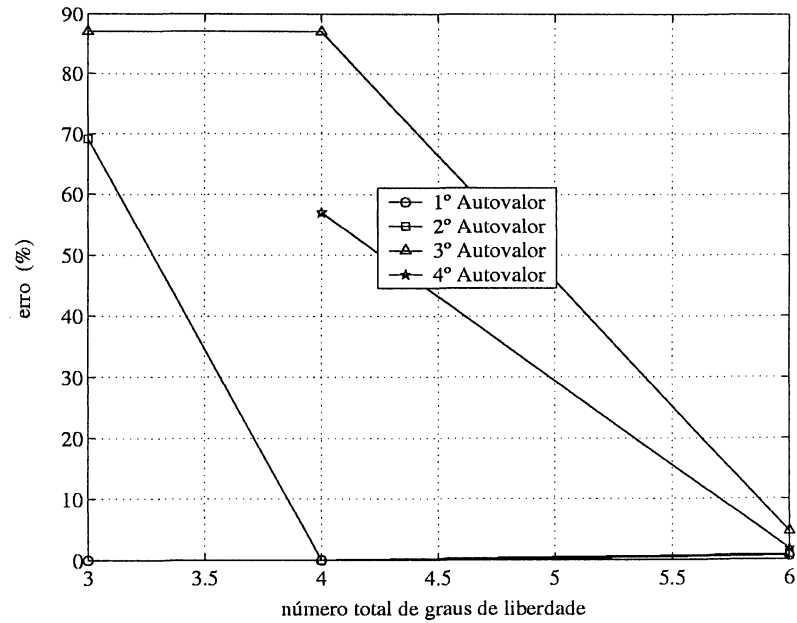
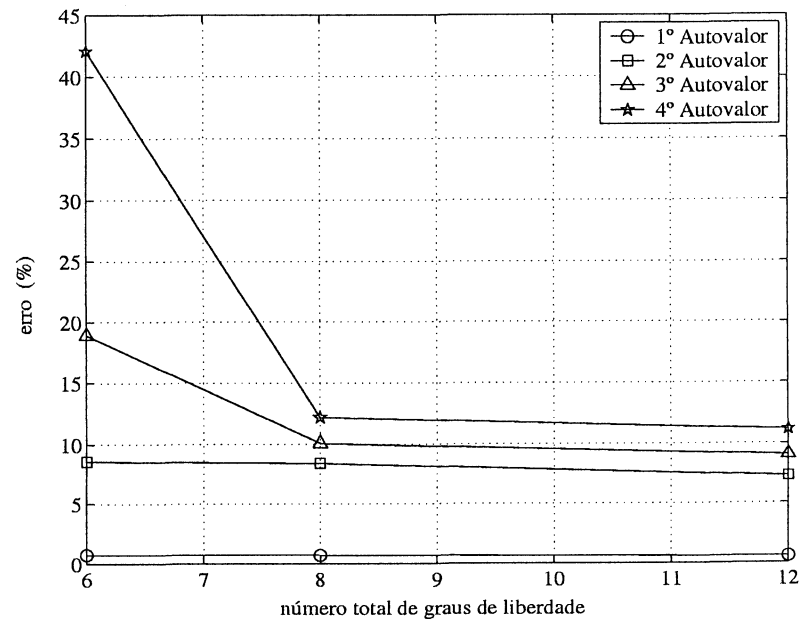
As tabelas 4.32 e 4.33 apresentam os autovalores b_i com $i = 1..4$ para a viga bi-apoiada da figura 4.11, com raio de giração igual a $r_g/L = 0,08$ para malha de 1 e 2 elementos e 1, 2 e 4 graus de liberdade c por elemento. Os gráficos das figuras 4.40 e 4.41 apresentam o erro relativo para os autovalores b_i , obtidos pelo refinamento c do MC para as malhas de 1 e 2 elementos.

Tabela 4.32: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 1 ELEMENTO E 1, 2 E 4 GRAUS DE LIBERDADE c POR ELEMENTO

Analítica		MC (1e 1c)		MC (1e 2c)		MC (1e 4c)	
i	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	8,839	8,841	0,01	8,8406	0,01	8,781	0,66
2	28,461	48,138	69,13	28,474	0,05	28,191	0,95
3	51,498	96,302	87,00	96,301	87,00	53,877	4,62
4	75,365			118,302	56,97	76,725	1,81

Tabela 4.33: RESULTADOS OBTIDOS PELO MC COM 2 ELEMENTOS E 1, 2 E 4 GRAUS DE LIBERADDE c POR ELEMENTO

Analítica		MC (2e 1c)		MC(2e 2c)		MC (2e 4c)	
i	b_i	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)	b_i	erro(%)
1	8,840	8,906	0,75	8,900	0,69	8,888	0,55
2	28,461	30,897	8,56	30,853	8,40	30,530	7,27
3	51,498	61,231	18,90	56,691	10,08	56,149	9,03
4	75,364	107,069	42,07	84,552	12,19	83,776	11,16

Figura 4.40: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c COM MALHA DE 1 ELEMENTOFigura 4.41: ERRO RELATIVO DO REFINAMENTO c COM MALHA DE 2 ELEMENTOS

Observando os resultados obtidos pelo refinamento c , verifica-se que com o

mesmo número de graus de liberdade a malha de 1 elemento mostrou-se mais precisa que a malha discretizada com 2 elementos.

Comparação entre MEF e MC

Com o objetivo de verificar a precisão do MC, a tabela 4.34 apresenta os autovalores b_i , com $i = 1..4$ obtidos pelo MEF e pelo MC com o mesmo número de graus de liberdade total. Observa-se que com o mesmo número de graus de liberdade, ou seja, o mesmo esforço computacional, os autovalores obtidos pelo MC apresentaram resultados mais precisos que os autovalores obtidos pelo MEF quando comparados com a solução analítica. Nota-se que a malha discretizada com 1 elemento apresentou melhores resultados que a malha com 2 elementos. O gráfico da figura 4.42 apresenta o erro relativo dos autovalores obtidos nos três tipos de malhas da tabela 4.34.

Figura 4.42: MEF E MC COM TOTAL 6 GRAUS DE LIBERDADE.

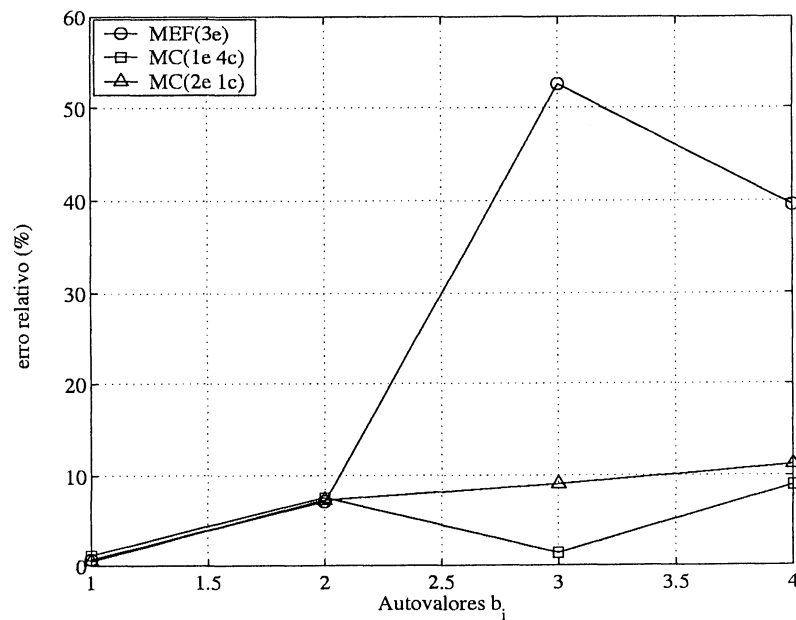


Tabela 4.34: MEF E MC COM TOTAL 6 GRAUS DE LIBERDADE.

	Analítica	MEF(3e)		MC(2e 1c)		MC(1e 4c)	
i	b_i	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)	b_i	erro (%)
1	8,840	8,905	0,74	8,888	0,55	8,8682	0,32
2	28,461	30,487	7,12	30,530	7,27	29,3531	3,13
3	51,498	78,534	52,50	56,149	9,03	56,3721	9,46
4	75,365	105,154	39,53	83,776	11,16	99,6580	32,23

Consequências do aumento da taxa de esbeltez

Observando o problema de uma viga bi-apoiada proposto nesta seção, onde é analisado o efeito do aumento na altura da viga, verifica-se que esse aumento, ou seja, o aumento do raio de giração provoca um decréscimo na frequência da viga como mostram os autovalores apresentados nas tabelas 4.11, 4.20 e 4.29. Nota-se ainda que a variação do raio de giração influencia na precisão dos resultados obtidos pelo MEF e pelo MC (com 1 malha) como mostrado nos gráficos da figuras 4.43 e 4.44.

Figura 4.43: PRIMEIRO AUTOVALOR OBTIDO PELO MEF.

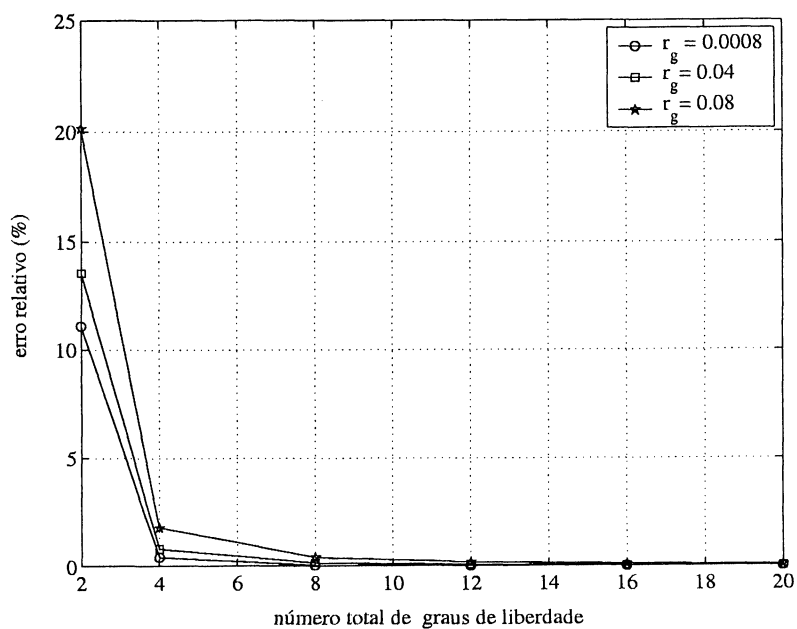
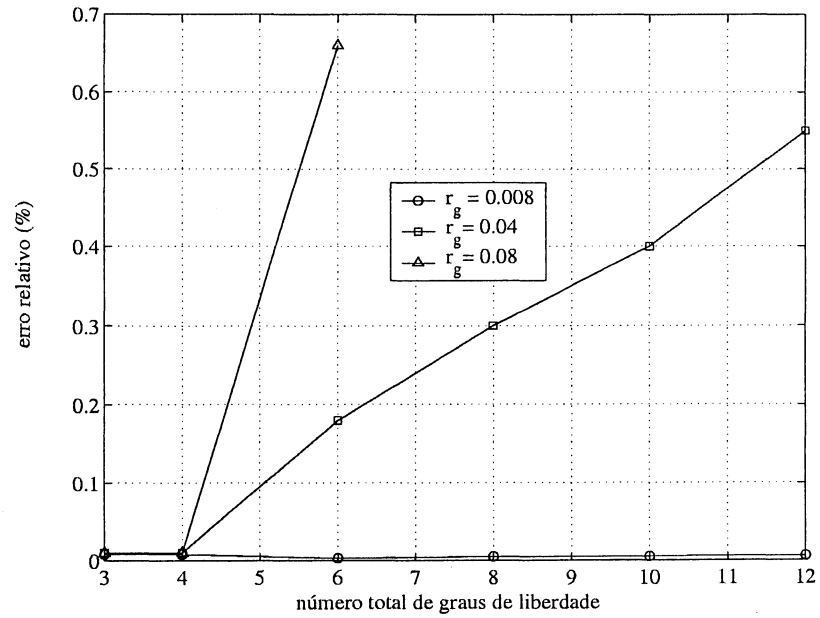


Figura 4.44: PRIMEIRO AUTOVALOR OBTIDO PELO MC.



Nota-se que quanto maior o raio de giração, isto é, quanto maior a contribuição da inércia rotacional e conseqüentemente do cisalhamento, maior será o erro relativo obtido tanto no MEF quanto no MC.

Capítulo 5

Conclusão

Este trabalho procurou aplicar um método numérico denominado de Método dos Elementos Compostos, proposto por ZENG (1998(a), 1998(b), 1998(c)) , ao problema de vibrações livres em vigas de Timoshenko. O método dos elementos compostos consiste na superposição da solução da Teoria Clássica ao MEF convencional, isto é, acrescentam-se às funções de formas do MEF as soluções obtidas pela Teoria Clássica, combinando assim, a versatilidade do MEF à alta precisão da Teoria Clássica.

Mostrou-se que o MC incorpora às funções de interpolação do MEF convencional as soluções analíticas obtidas através da Teoria Clássica (TC).

As soluções obtidas através da TC devem obedecer condições de contorno especiais, isto é, essas condições de contorno devem garantir que o acréscimo das funções analíticas (graus de liberdade c) nas funções de interpolação do MEF não altere os valores nodais. Conclui-se então que o refinamento c , ou seja, acréscimo de graus de liberdade c , representa uma aproximação no domínio do elemento, uma vez que os valores nodais devem ser os mesmos que fornecidos pelo MEF. O MEF convencional pode ser obtido fazendo-se o número de graus de liberdade c igual a zero.

Foram analisados os dois tipos de refinamento do MC. O refinamento h que, assim como ao MEF, consiste no aumento do número de elementos, ou seja, no refinamento da malha, e o refinamento c , que corresponde ao acréscimo de funções analíticas obtidas pela TC às funções de forma do MEF convencional.

Uma das maiores vantagens do MC é o refinamento c , pois para obterem-se mais frequências e modos de vibração não é preciso refinar a malha, ou seja, fazer nova discretização, bastando apenas o aumentar o número de graus de liberdade c do elemento.

Um elemento composto para análise de vibração foi desenvolvido para viga de Timoshenko. As matrizes de rigidez e de massa do MC são simétricas e formadas por quatro submatrizes também simétricas. A primeira submatriz é constituída somente com termos oriundos da formulação convencional do MEF; a segunda contém termos do MEF e da TC. A terceira submatriz é formada somente com termos da TC. Para resolver o problema de viga pela formulação de Euler-Bernoulli basta anular os termos referentes à inércia rotacional e ao cisalhamento.

A verificação numérica foi realizada através da comparação de resultados obtidos analiticamente por HUANG (1961, 1963) e resultados numéricos obtidos através do MEF por DAWE (1978), além da comparação com o software comercial ANSYS. Observou-se que o MC possui uma boa precisão em relação a solução analítica para os dois tipos de refinamento desenvolvido neste trabalho. Analisando o refinamento c e o refinamento h , conclui-se que para o mesmo número de graus de liberdade total, isto é, para o mesmo esforço computacional o refinamento c sempre é mais eficiente que o refinamento h . Nota-se também o refinamento c apresentou maior precisão quando utiliza-se a menor malha, isto é,

MEF convencional são enriquecidas com funções da TC, é natural que os resultados obtido pelo MC também apresentem pouca precisão para altas frequências.

Conclui-se, finalmente, que o MC, quando aplicado ao problema de vibrações livres em vigas de Timoshenko, mostrou-se um método eficiente que apresenta resultados mais precisos que o MEF com o mesmo esforço computacional. Porém, assim como no MEF, é necessário cautela ao aplicá-lo na análise de vibrações de vigas muito espessas.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

- Examinar melhor a topologia das matrizes do MC para explicar por que refinando-se h , a precisão é degradada. Essa recomendação se justifica pela observação, no presente trabalho, de que o refinamento h não aumenta, necessariamente a precisão dos resultados, como seria de se esperar na solução do MEF convencional. Como a resposta dinâmica de vibrações livres de uma viga de Timoshenko passa por um problema de autovalores e autovetores, este resultado depende fortemente da topologia da matriz.
- Analisar separadamente os efeitos da inércia rotacional e do cisalhamento na precisão do MC, quantificando o grau de participação de cada um na resposta final do problema.
- Verificar a relação entre raio de giração e o modo de vibração afetado por interferências de outras direções, especialmente em vigas muito espessas.
- Desenvolver o método para aplicação de problemas envolvendo estado plano de tensão e deformação, uma extensão natural do caso de vigas muito espessas.

- Aplicar o MC para análise de vibrações em vigas contínuas e vigas com seção transversal variável, cascas e etc.
- Analisar a precisão do MC aplicado a problemas de vibrações forçadas.
- Comparar com resultados experimentais.

Referências Bibliográficas

ABRAMOVICH H. Shear deformation and rotatory inertia effects of vibrating composite beams. **Composite Structure**, v. 20, p. 165-173, 1992.

ALGHAMDI, S. A. Dynamic stiffness matrix and load functions of Timoshenko beam using the transport matrix. **Computers & Structures**, v. 79, p. 1175-1185, 2001.

ALVES, M. L. G. **Departamento do Ensino Básico do Instituto Militar de Engenharia**. <http://www.ime.eb.br/webde1/gloria>. 1999

Anderson ANDERSON, R. A; PASADENA, C. Flexural Vibrations in Uniform Beams According to the Timoshenko Theory. **Journal of Applied Mechanics**, v. 20, p. 504-510, 1954.

ARNDT, M. O método dos elementos compostos aplicado à análise de vibrações. Dissertação de mestrado, **PPGMNE-UFPR**, 2001.

ARNDT M; MACHADO, R. D; HECKE, M.B. Introduction to composite element method applied to Vibration Analisis in Framed Structures. **CILAMCE** - Campinas, Brasil, 2001.

ARNDT M; MACHADO, R. D; HECKE, M.B. Comparative analysis of c and p refinements in the composite element method. **Anais of EINC/CILAMCE** - Itália, 2002.

ARNDT, M; MACHADO, R. D; HECKE, M. B. Introduction to Compo-

site Element Method Applied to Vibration Analysis of Trusses. 16th **Braslian Congress of Mechanical Engineering - COBEM**. Uberlândia, Brasil, 2001.

ASCHER, J. S. Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques. **1st AIAA Annual Meeting**, Washington, D.C., June 29-July 2, 1965.

BANERJEE, J. R. Frequency equation and mode shape formulae for composite Timoshenko beams. **Computers & Structures**, v.51, p. 381-388, 2000.

BANERJEE, J. R.; WILLIAMS, F. W. Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for timoshenko beam elements. **Computers & Structure**, v.42 n.3, p. 301-310, 1992.

BARDELL, N.S. Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 151, n. 2, p. 263-289, 1991.

BATHE K. **Finite element procedures**. New Jersey, Prentice Hall, 1996

BLEVINS, R. D. **Formulas for natural frequency and mode shape**. Krieger Publishing Company. Malabar, Flórida, 1995.

BONG J. R.; KAZUO K; YOSHIHIKO S. Dynamic stability of Timoshenko columns subjected to subtangential forces. **Computer & Structures**, v. 68, p. 499-512, 1998.

BOYCE, W. E. DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 6. ed., Rio de Janeiro: LTC, 1998.

BREBBIA, C. A.; NARDINI, D. Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 2, n. 4, p. 228-233, 1983.

CAREY, G. F; ODEN, J. T. **Finite elements**. New Jersey; Prentice Hall,

1984.

CARVALHO, N. F. O método composto aplicado à análise de vibrações livres de placas espessas. Dissertação de mestrado, **PPGMNE-UFPR**, 2002.

CARVALHO, N.; MACHADO, R.; HECKE, M. The Composite Element Method: application to the plate vibration problem. **XXIII Latin Ibero American Congress on Computational Methods for Engineering**. Giulianova - Itália, 24-jun a 26-jun, 2002.

CHAN, K. T; WANG X. Q. Free vibration of a Timoshenko beam partially loaded with distributed mass. **Journal of Sound and Vibrations**, v. 206, n.3, p. 353-369, 1997.

CHANDRASHEKHARA K; KRISHNAMURTHY K; ROY S. Free vibration of composite beams including rotatory inertia and shear deformation. **Composite Structure**, v. 14, p. 269-279, 1990.

CHEN C. K; HO S. H. Application of differential transformation to eigenvalue problem. **Journal of Applied Mathematics and Computation**, v.79, p. 109-125, 1996.

CHEN C. K; HO S. H. Transverse Vibration of Rotating Twisted Timoshenko Beams Under Axial Loading Using Differential Transform. **International Journal of Mechanical Sciences**, 1999, v. 41, p. 1339-1356, 1999.

CHEN, Y. H. General dynamic-stiffness matrix of Timoshenko beam for transverse vibration. **Earthquake and Structural Dynamics**, v. 15, p. 391-402, 1987.

CHENG, F. Y; PANTELIDES, C. P. Dinamic Timoshenko beam-columns on elastic media. **Journal of Structural Engineering**, v. 114, n. 7, p. 1524-1550, 1988.

CHEUNG Y. K; ZHOU, D. Vibrations of moderately thick rectangular plates

in terms of a set static Timoshenko beam functions. **Computers & Structures**, v. 78, p. 757-768, 2000.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering**. New Jersey; Prentice Hall, 1995.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. New York: McGraw-Hill, 1975.

COOK A; DAVIS R. **Concepts and applications of finite element analysis**. Joh Wiley & Sons, Singapore, 1981

COOK, R. D; MALKUS, D. S; PLESHA, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis**. 3. ed., New York: John Wiley, 1989.

COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. In **Bulletin of American Mathematics Socitey**, APUD Cook, Op CIT, pp. 15-17.

COWPER, G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. **Journal of Applied Mechanics**, p. 335-340, 1966.

CRAIG, R. R. **Structural dynamics: an introduction to computer methods**. New York. John Wiley, 1981.

DAVÍ, G.; MILAZZO, A. A new symmetric and positive definite boundary element formulation for lateral vibrations of plates. **Journal of Sound and Vibration**, v. 206, n. 4, p. 507-521, 1997.

DAWE, D. J. A Finite Element for the vibration analysis of Timoshenko beams. **Journal of Sound and Vibrations**, v. 60, n. 1, p. 11-20. 1978.

DENGLER, M. A; GOLAND, M. Transverse impact of long beams, including rotatory inertia and shear effects. **The American Society of Mechanical Engineers**, New York, N. Y; p. 179-186, 1952.

DOLPH, C. L. On the Timshenko Beam Vibrations. **Quatrenaly of Applied Mathematics**, v. 12, p. 175-187, 1954.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. HP CLOUDS. **A Meshless Method to solve boundary value problems** . Ticam Report, 95-05, The University of Texas at Austin, 1995.

FILLIPIN, C. G. Desenvolvimento e aplicação do Método da Função de Green Local Modificado à equação de Helmholtz. **Dissertação de mestrado**. UFSC, 1992.

FODA, M. A. Influence of shear deformation and rotatory inertia on nonlinear free vibration of a beam with pinned ends. **Computers & Structures**, v. 71, p. 663-670, 1999.

HALLAUER, W. L; LIU, R. Y. Beam beding-torsion dynamic stiffness method for calculation of exact vibration modes. **Journal of Sound and Vibration**, v. 85, p.105-113, 1982.

HECKE, M. B. **Notas de aula- Método dos elementos finitos**. PPGMNE-UFPR.

HINTON, E. **Finite element programming**. Academic press, 1980.

HINTON, E; OWEN, D. R. J. **An Introduction to Finite Element Computations**. Pineridge Press, 1979.

HORR, A. M; SCHIMIDT, L. C. Closed-Form Solution for the Timoshenko beam theory using a computer-basead mathematical package. **Computers e & Structures**, v. 55, n. 3, p. 405-412, 1995.

HOUMAT, A. An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 206, n. 2, p. 201-215, 1997.

HOWSON, W. P; WILLIAMS, F. W. Natural frequencies of frame with axially loaded Timoshenko members. **Journal of Sound and Vibration**, v. 26, p. 503-515, 1973.

HSU, Y. W. The shear coefficient of beams of circular cross section. **Journal of Applied Mechanics**, v. 42, p. 226-228, 1975.

HUANG, T. C. The Effect of Rotatory Inertia and of Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions. **Journal Applied Mechanics**, vol. 28, 1961, pp. 579-584.

HUANG, T. C. New Tables of Eigenfunctions Representing Normal Modes of Vibration of Timoshenko Beams. **Developments in Theoretical and Applied Mechanics I**. New York: Plenum Press, v. 59-71 . p. 579-584, 1963.

KANEKO, T. On Timoshenko's shear correction for shear in vibrating beams. **Journal of Physicas D: Applied Physics**, v.8, p. 1927-1936, 1975.

KAPUR, K. K. Vibrations of a Timoshenko beam, using finite element approach. **Journal of the Society of American**, v. 40, p. 1058-1063, 1966.

LOW, K. H. Numerical Implementation of Structural Dynamics Analysis. **Computers & Structures**, v. 65, n.1, 1994.

MACHADO, R. D.; HECKE, M. B.; ARNDT, M, CARVALHO, N. F; SANTOS, S. Development of the Composite Element Method to Vibration Problems. **WCCM V - Fifth World Congress on Computacional Mechanics**, Vienna, Austria, July-2002.

MARTINS, J. F.; LAIER, J. E. Considerações Sobre O Segundo Espectro de Freqüências da Teoria de Viga de Timoshenko". **Anais das XXVIII Jornadas Sul Americanas de Engenharia Estrutural**, v.2. p.605-614, 1997.

MEIROVITCH, L. **Elements of vibration analysis**. The American Society

of Mechanical Engineers, New York, N. Y. 1952.

MIKLOWITZ J. **Flexural wave solutions of coupled equations representing the more exact theory of bending.** International Student. Edition Tokio, McGraw-Hill, 1975.

NICKELL, R. E; SECOR, G. A. Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 5, p. 243-253, 1972.

ODEN, J. T.; CAREY, G. F.; BECKER, E. B. **Finite elements: an introduction.** v.1. New Jersey: Prentice-Hall, 1981.

PAVANELLO, R; IGUTI, F. **Notas de aula- Introdução ao método dos elementos finitos.** Departamento de Mecânica Computacional. Universidade Estadual de Campinas. 2002

PETTYT, M. **Introduction to finite element vibration analysis.** New York: Cambridge University Press, 1990.

POCHHAMMER, L. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Schwingungen in einem isotropen Kreiscylinder. **Journal fur Mathematik**, v. 81, p. 324-336, 1876.

POLCHINSKI, J. **String Theory**, Cambridge Un. Press, 1998.

RAO, S. S. **Mechanical vibrations.** 3. ed. Reading: Addison-Wesley, 1995.

RAO S. S; GUPTA, R. S. Finite Element Vibration Analysis of Rotating Timoshenko Beams. **Journal of Sound and Vibration**,v. 242, n. 1, p. 103-124, 2001.

SANCHES, L. C. F. Análise estática e dinâmica de um modelo de folhas poliédricas para o estudo de lajes com forma de aço incorporada (steel deck) utilizando o método dos elementos de contorno. **Dissertação de doutorado.**

Departamento de Mecânica Computacional. UNICAMP, 2002

SHI, Y. P; ZENG, P. Element modeling for vibration analysis of plate. **Key Engineering Materials**, v. 183-187, p. 397-402, 2000.

STEPHEN, N. G. On the variation of Timoshenko's shear coefficient with frequency. **Journal of Applied Mechanics**, v. 45, p. 695-697, 1975.

TANAKA, M.; MATSUMOTO, T.; SHIOZAKI, A. Application of boundary-domain element method to the free vibration problem of plate structures. **Computers & Structures**, v. 66, n. 6, p. 725-735, 1998.

THOMAS D. L; WILSON, J. M; WILSON, R. R. Timoshenko beam finite elements. **Journal of Sound and Vibration**, v. 31, n.3, 315-330, 1973.

THOMSON, W. T. **Theory of vibration with applications**. 4. ed., New Jersey: Prentice Hall, 1993.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part I: principle and C^0 element (bar). **Journal of Sound and Vibration**, v.218, n. 4, p.619-658, 1998(a).

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part II: C^1 element (beam). **Journal of Sound and Vibration**, v.218, n. 4, p.659-696, 1998(b).

ZENG, P. Introduction to composite element method for structural analysis in engineering. **Key Engineering Materials**, v.145-149, p.185-190, 1998(c).

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**, v.2, 3. ed. London: McGraw-Hill, 1977.

ZHOU, D. Free vibration of multi-span Timoshenko beam functions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 241, n.4, p. 725-734, 2001.

LEUNG, A. Y. T; and W. E. ZHOU, Dynamics stiffness analysis of axially

loaded non-uniform Timoshenko Columns. **Computer & Structures**, v. 56. N. 4, p. 577-588, 1995.

WANG T. M; KINSMAN T. A. Vibration of frame structures according to the Timoshenko beam theory. **Journal of Sound and Vibrations**, v.14, p. 215-227, 1971.

Weaver, J. W; Loh, C. L. Dynamics of trusses by component-mode method. **Journal of Structural Engineering**, v. 109, n.1, 169-187, 1983.

YAVARI, A; NOURI, M; MASSOOD M. M. Discrete element analysis of dynamic response of Timoshenko beams under moving mass. **Advances in Engineering Software**, v. 33, Issue 3, p. 143-153, March 2002.

YOKOYAMA, T. Vibration Analysis of Timoshenko Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations. **Computer & Structures**, v. 61. n. 6, p. 995-1007, 1995.