UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JAQUELINE ALINE IENSEN GOULART

REGULARIDADE GLOBAL DE OPERADORES DIFERENCIAIS EM ESPAÇOS DE GELFAND-SHILOV

CURITIBA
2020

JAQUELINE ALINE IENSEN GOULART

REGULARIDADE GLOBAL DE OPERADORES DIFERENCIAIS EM ESPAÇOS DE GELFAND-SHILOV

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática, Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando de Ávila Silva.

CURITIBA
2020

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

G694r Goulart, Jaqueline Aline Iensen
Regularidade global de operadores diferenciais em espaços de Gelfand-Shilov [recurso eletrônico] / Jaqueline Aline Iensen Goulart – Curitiba, 2021

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciência Exatas. Programa de Pós-graduação em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando de Ávila Silva

1. Fourier, Transformações de. 2. Equações diferenciais.. I. Universidade Federal do Paraná. II. Silva, Fernando de Ávila. III. Título.

CDD: 515.723

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA - 40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **JAQUELINE ALINE IENSEN GOULART** intitulada: **Regularidade Global de Operadores Diferenciais em Espaços de Gelfand-Shilov,** sob orientação do Prof. Dr. FERNANDO DE AVILA SILVA, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua Aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 20 de Janeiro de 2020.

FERNANDO DE AVILA SILVA
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

GUSTAVO HOEPFNER
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS)

CLÉBER DE MEDEIRA
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Ao meu esposo Antonio, que na matemática da vida foi o meu maior acerto.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter estado presente em todos os momentos desta jornada sempre me dando forças quando eu achava que não conseguiria.

Aos meus pais Levi e Jandira, por garantirem a mim e aos meus irmãos a oportunidade de estudar mesmo em meio às dificuldades e pelo apoio dado a todo momento. Por nos ajudarem a conquistar aquilo que não tiveram a oportunidade de fazer para si mesmos.

Ao meu esposo Antonio, pelo apoio fundamental que sempre me dedicou, pelo carinho e preocupação que demonstrou durante esta jornada. Pelas noites em que me acompanhou para que eu pudesse estudar e pelas palavras de apoio nos momentos em que eu precisava ouvir.

Aos meus irmãos Janaina, Ricardo e Roberto, pelo apoio e por entenderem que muitas vezes não pude estar presente porque precisava estudar.

Aos meus sogros Cezar e Denise por me acolherem como uma filha, por estarem sempre presentes apoiando nas dificuldades e festejando nas vitórias. Por assistirem às minhas defesas, tanto de graduação quanto de mestrado, para demonstrar apoio.

Aos meus colegas Arthur, Lucas, Luciano e Rodrigo pelos momentos compartilhados, pelas horas de estudo e por nunca negarem ajuda mesmo quando já tinham seus próprios afazeres.

Aos professores do curso, pela paciência e dedicação durante suas aulas e fora delas. Em especial, agradeço ao professor Fernando pela paciência e por me orientar na realização desse trabalho, pois sua ajuda foi essencial, sem ela não teria conseguido concluir com êxito essa missão.

Aos professores Cleber e Gustavo, por aceitarem fazer parte da banca examinadora desse trabalho e pelas sugestões dadas que ajudaram a melhorar o resultado final.

RESUMO

Neste trabalho estudamos os espaços de Gelfand-Shilov do tipo $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$, com $\mu > 0$ e $\nu > 0$. Analisamos suas principais propriedades e diversas caracterizações para funções em $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$ com base no decaimento no infinito de suas derivadas e suas transformadas de Fourier. Como aplicação, investigamos a regularidade global das soluções de equações do tipo $Pu = f \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d)$, $\mu \geq 1/2$, sendo P um operador diferencial de ordem m com coeficientes polinomiais, cujo símbolo principal satisfaz uma condição elíptica global.

Palavras-chave: Espaços de Gelfand-Shilov, operadores diferenciais, transformada de Fourier, regularidade global, operadores globalmente elípticos.

ABSTRACT

In this work we study the Gelfand-Shilov spaces of type $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$, for $\mu > 0$ and $\nu > 0$. We analysis their main properties and several characterizations for functions in $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ by means of the decay at infinity of their derivatives and the Fourier transforms. As an application, we investigate the global regularity of solutions for the equations $Pu = f \in \mathcal{S}_\mu^\mu(\mathbb{R}^d)$, $\mu \geq 1/2$, where P is a partial differential operator of order m, with polynomial coefficients, having principal symbol satisfying a global elliptic condition.

Keywords: Gelfanf-Shilov spaces, differential operators, Fourier transform, global regularity, globallly elliptic operators.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 9
2 NOTAÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES 11
2.1 ESPAÇOS DE FUNÇÕES E TRANSFORMADA DE FOURIER . . . 13
3 ESPAÇOS DE GELFAND-SHILOV 16
3.1 UMA TOPOLOGIA PARA OS ESPAÇOS $\mathcal{S}_{\mu}^{\mu}(\mathbb{R}^D)$ 19
4 CARACTERIZAÇÕES DOS ESPAÇOS DE GELFAND-SHILOV 22
4.1 OS ESPAÇOS $\mathcal{S}_{\mu}^{\mu}(\mathbb{R}^D)$ 27
4.2 TRIVIALIDADE NO CASO $\mu + \nu < 1$ 29
5 REGULARIDADE GLOBAL DE OPERADORES DIFERENCIAIS 34
6 CONCLUSÃO 40
REFERÊNCIAS 41

1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação estudamos as principais propriedades dos espaços de Gelfand-Shilov do tipo $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$, com $\mu > 0$ e $\nu > 0$, os quais foram introduzidos por *I. M. Gelfand* e *G. E. Shilov* em (Gelfand; Shilov, 1968) e (Gelfand; Shilov, 1967). O espaço $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$ pode ser caracterizado pelas funções suaves $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ que satisfazem

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d} \frac{|x^{\beta}\partial^{\alpha} f(x)|}{C^{|\alpha+\beta|}\alpha!^{\mu}\beta!^{\nu}} < \infty, \tag{1.1}$$

para alguma constante $C > 0$, ou pela condição equivalente

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \frac{e^{\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}|\partial^{\alpha} f(x)|}{C^{|\alpha|}\alpha!^{\mu}} < \infty, \tag{1.2}$$

para algum $C > 0$ e $\epsilon > 0$.

Para $\mu > 1$, a desigualdade (6.1) acima mostra que o espaço $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$ pode ser visto como uma extensão global natural das classes de Gevrey $\mathcal{G}^{\mu}(\mathbb{R}^d)$, enquanto que (6.2) permite descrever com certa precisão o comportamento no infinito para uma classe de funções pertencentes ao espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Neste sentido, as classes $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$ apresentam-se como uma alternativa ao espaço de Schwartz, que é um dos espaços fundamentais no estudo de equações diferenciais parciais e operadores pseudodiferenciais. Ver (Hormander, 2007) e (Wong, 2014).

Neste trabalho vamos exibir caracterizações dos espaços de Gelfand-Shilov seguindo as ideias descritas por Fabio Nicola e Luigi Rodino na referência (Nicola; Rodino, 2010). Nossa formulação é apresentada da seguinte forma: como de costume, vamos fixar no Capítulo 2 notações e alguns resultados básicos a serem utilizados no decorrer do texto.

No capítulo seguinte introduziremos o espaço $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$, $\mu > 0$ e $\nu > 0$, demonstrando suas principais propriedades e também estimativas auxiliares para a caracterização de tais espaços. Apresentaremos ainda uma forma de se introduzir uma topologia limite indutiva em $\mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d)$, $\mu > 1$, através da sequência de espaços de Banach $\mathcal{S}^{\mu}_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$, a serem definidos.

O Capítulo 4 vamos exibir diversos resultados que caracterizam de forma mais precisa os espaços $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$. No Teorema 4.1 são exibidas diversas estimativas equivalentes para funções em $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$, com $\mu+\nu \geq 1$, as quais são necessárias ao desenvolvimento do trabalho. Um segundo resultado interessante é dado pelo Teorema 4.6 onde se demonstra que, sob certas condições nos índices μ e ν, funções em $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$ possuem extensões analíticas. Uma consequência interessante deste resultado é o Teorema 4.9, no qual se demonstra a trivialidade do espaço $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$ quando $\mu + \nu < 1$. Este resultado pode ser visto com uma versão do Princípio da Incerteza de Heisenberg, o qual expressa genericamente que uma função f e sua transformada não podem ambas decaírem rapidamente no infinito.

Por fim, no Capítulo 5, vamos investigar a regularidade global das soluções de equações do tipo $Pu = f \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d)$, $\mu \geq 1/2$, sendo P um operador diferencial de ordem m com

coeficientes polinomiais, cujo símbolo principal satisfaz uma condição elíptica global. Após analisarmos algumas propriedades do oscilador harmônico de Schrödinger

$$H = -\Delta + |x|^2, \;\; x \in \mathbb{R}^d,$$

vamos enunciar e demonstrar o principal resultado deste trabalho, o qual pode ser encontrado na referência (Nicola; Rodino, 2010).

Teorema. *Sejam P um operador como descrito acima e $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ uma solução da equação*

$$Pu = f \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d), \;\; \mu \geq 1/2.$$

Nestas condições, temos que $u \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d)$. Em particular, se $f \equiv 0$ então $u \in \mathcal{S}^{1/2}_{1/2}(\mathbb{R}^d)$.

2 NOTAÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, fixamos notações básicas e apresentamos alguns resultados que serão constantemente utilizados ao longo do texto. Todos os resultados enunciados neste capítulo podem ser encontrados nas referências (Nicola; Rodino, 2010) e (Wong, 2014).

Denotamos por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto dos naturais e por $\mathbb{N}^d$ o conjunto dos multi-índices. Dados $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ são introduzidas as seguintes notações:

- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$;
- $\beta \leq \alpha \iff \beta_j \leq \alpha_j, \quad j = 1, \dots, d$;
- $\alpha! = \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_d!$;
- se $\beta \leq \alpha$, então $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_d - \beta_d)$ e

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} \ .$$

Em particular, dados $x \in (x_1, \dots, x_d)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ introduz-se

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d},$$

e ainda os operadores diferenciais

- $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$, sendo $\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial_{x_j}}$;
- $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d}$, sendo $D_j = -i\partial_{x_j}$.

Relembramos também a Regra de Leibniz: Sejam f e g duas funções diferenciáveis então

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g.$$

Abaixo enunciamos a fórmula de Newton generalizada, a partir da qual obtém-se diversas identidades e desigualdades que serão constantemente utilizadas no decorrer do texto.

$$(t_1 + \cdots + t_n)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} t_1^{\alpha_1} \cdots t_n^{\alpha_n}, \tag{2.1}$$

sendo $N \in \mathbb{N}$ e $t_1, \dots, t_d$ números reais.

Em particular, tomando $t_1 = \cdots = t_d = 1$ obtém-se

$$d^N = \sum_{|\alpha|=n} \frac{N!}{\alpha!}, \tag{2.2}$$

donde

$$|\alpha|! \leq d^{|\alpha|}\alpha!. \tag{2.3}$$

Além disso, para $d = 2$ segue de (2.2) e (2.3), respectivamente, que

$$2^N = \sum_{k+j=N} \frac{N!}{k!j!} \tag{2.4}$$

e

$$(k+j)! \leq 2^{k+j}k!j!\ , \tag{2.5}$$

para quaisquer $k, j \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$(\alpha+\beta)! \leq 2^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!\beta!,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d. \tag{2.6}$$

Relembramos ainda que

$$\alpha!\beta! \leq (\alpha+\beta)! \tag{2.7}$$

e também que

$$\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} = 2^{|\alpha|}, \tag{2.8}$$

de onde podemos obter

$$\binom{\alpha}{\beta} \leq 2^{|\alpha|}, \quad \beta \leq \alpha. \tag{2.9}$$

Enfatizamos abaixo duas identidades relacionadas à cardinalidade (denotada por #) de dois subconjuntos finitos de multi-índices:

$$\#\{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d : |\alpha| \leq m\} = \binom{m+d}{m} \tag{2.10}$$

e

$$\#\{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d : |\alpha| = m\} = \binom{m+d-1}{d-1} \tag{2.11}$$

Por fim, observamos que da fórmula de Stirling

$$N! = N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}e^{\frac{\theta_N}{12N}},$$

para algum $0 < \theta_N < 1$, $N = 1, 2, \ldots$, obtém-se

$$N^N \leq e^N N! \tag{2.12}$$

e também

$$N! \leq N^N. \tag{2.13}$$

Em particular, segue da expansão de Taylor para a função e^t, $t > 0$, a seguinte expressão:

$$t^N \leq N!e^t, \quad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

2.1 ESPAÇOS DE FUNÇÕES E TRANSFORMADA DE FOURIER

Nesta seção fixamos alguns espaços de funções utilizados neste trabalho, bem como alguns resultados referentes à transformada de Fourier. Omitiremos todas as demonstrações, sendo que essas podem ser encontradas nas referências (Hormander 2007), (Hounie, 1979) e (Wong, 2014).

Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p(\mathbb{R}^d)$ é definido por

$$L^p(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } |f|^p \text{ é integrável}\},$$

o qual é um espaço de Banach quando munido da norma

$$||f||_{L^p} = ||f||_p = \left[\int |f(x)|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Em especial, o espaço $L^2(\mathbb{R}^d)$ é um espaço de Hilbert com produto interno definido por

$$(f,g)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{2.15}$$

Para $p = \infty$, fixemos o espaço de medida $(\mathbb{R}^d, \mathbb{M}, \mu)$. Definimos o espaço

$$L^\infty(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ é mensurável e } ||f||_\infty < \infty\},$$

sendo

$$||f||_\infty = \inf\{M \geq 0; \mu(\{x; |f(x)| > M\}) = 0\},$$

com $\inf(\emptyset) = \infty$.

O espaço de Schwarz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, constitui-se das funções rapidamente decrescentes em $\mathbb{R}^d$, isto é, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se, e somente se, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, existe $C_{\alpha\beta} > 0$ tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| \leq C_{\alpha\beta}. \tag{2.16}$$

Recordemos que uma sequência de funções $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ converge para zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, tivermos

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x)\right| \to 0, \quad \text{quando} \quad j \to \infty.$$

Temos assim a seguinte definição:

Definição 2.1. *Um funcional linear $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C}$ é dito uma distribuição temperada se para toda sequência $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, que converge para zero em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tivermos que $\{u(\phi_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero em $\mathbb{C}$. Denotamos o espaço das distribuições temperadas por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.*

No que segue estaremos utilizando as seguintes notações: dados $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ e $\alpha \in \mathbb{N}^d$, define-se:

- $x\xi = x \cdot \xi = \langle x, \xi \rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j \xi_j$;
- $|x| = \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

Ao longo deste trabalho estaremos considerando a transformada de Fourier sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ como sendo o isomorfismo linear e contínuo $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definido por

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

com inversa

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = f^{\vee}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

No teorema a seguir destacam-se algumas propriedades elementares a serem utilizadas ao longo do texto.

Teorema 2.2. *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Então*

i) $\widehat{D^\alpha f(\xi)} = \xi^\alpha \widehat{f}(\xi)$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^d$;

ii) $D^\beta \widehat{f}(\xi) = (\widehat{-x)^\beta f}(\xi)$, *para todo* $\beta \in \mathbb{N}^d$;

iii) $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$;

iv) $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{g}(x) dx$;

v) $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ *(Identidade de Plancherel);*

Exemplo 2.3. *Seja* $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, *vamos determinar* $\widehat{\phi}(\xi)$.

Note que a função ϕ está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ e satisfaz a equação diferencial linear

$$\begin{cases} \phi'(x) + x\phi(x) = 0 \\ \phi(0) = 1 \end{cases} \tag{2.17}$$

Aplicando a transformada de Fourier à equação (2.17) *e usando as condições i) e ii) do Teorema 2.2, temos:*

$$\begin{aligned} 0 &= \widehat{\phi'(x)} + \widehat{x\phi(x)} = i\xi\widehat{\phi(\xi)} - \frac{1}{i}\left(\frac{d\widehat{\phi}}{d\xi}(\xi)\right) \\ &= i\left(\frac{d\widehat{\phi}(\xi)}{d\xi}(\xi) + \xi\widehat{\phi}(\xi)\right) \end{aligned}$$

ou seja, $\widehat{\phi}(\xi)$ satisfaz a mesma equação que $\phi(x)$ e, por conseguinte,

$$\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi}(0)\phi(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^0 \phi(x) dx\right) \phi(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right) e^{-\frac{\xi^2}{2}} = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Portanto, $\widehat{\phi}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Agora definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$, com $s \in \mathbb{R}$, por

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d);\ \langle\xi\rangle^s \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

o qual está equipado com a norma

$$\|f\|_{H^s} = \|\langle\cdot\rangle^s \hat{f}\|_2,$$

sendo $\langle\cdot\rangle = (1 + |\cdot|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Para o caso particular $s = k \in \mathbb{N}$ tem-se a norma equivalente

$$\|f\|_{H^k} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_2 .$$

Para finalizar, recordamos a inclusão

$$H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d),\ s > \frac{d}{2},$$

conhecida como Teorema de Imersão de Sobolev.

3 ESPAÇOS DE GELFAND-SHILOV

Neste Capítulo definimos os espaços $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$, $\mu > 0$ e $\nu > 0$, e apresentamos algumas propriedades básicas e estimativas auxiliares para a caracterização de tais espaços.

Primeiramente, introduzimos a seguinte notação: sejam X um conjunto não vazio e $f, g : X \longrightarrow [0, +\infty)$. Dizemos que

$$f(x) \lesssim g(x), \quad x \in X,$$

se existe $C > 0$ tal que $f(x) \leq Cg(x)$, para todo $x \in X$.

Definição 3.1. *(Espaços de Gelfand-Shilov) Sejam $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mu > 0$ e $\nu > 0$. Dizemos que f pertence ao espaço $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ se existe uma constante $\epsilon > 0$ tal que*

$$|f(x)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \tag{3.1}$$

e

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \lesssim e^{-\epsilon|\xi|^{\frac{1}{\mu}}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{3.2}$$

Exemplo 3.2. *Considere em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a função $f(t) = e^{-t^{2k}}$, para um inteiro fixado $k > 0$ e $t \in \mathbb{R}$. Então $f \in \mathcal{S}_{\frac{1}{2k}}^{1-\frac{1}{2k}}(\mathbb{R})$ e $\widehat{f} \in \mathcal{S}_{1-\frac{1}{2k}}^{\frac{1}{2k}}(\mathbb{R})$.*

Vamos mostrar o caso $k = 1$, ou seja, para a função $g(t) = e^{-t^2}$. Inicialmente, note que g satisfaz (3.1) para $\nu = \frac{1}{2}$.

Agora, considere a transformada de Fourier de g dada por

$$h(\xi) = \widehat{g}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-it\xi - t^2} dt.$$

Note que $g(t)$ é solução da equação

$$g' + 2tg = 0$$

e, portanto, $h(\xi)$ é a única solução em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ da transformada da equação dada por

$$h' + \frac{1}{2}\xi h = 0.$$

Logo, a solução da EDO acima deve satisfazer

$$|h(\xi)| \lesssim e^{-\epsilon|\xi|^2}, \qquad \text{para algum } \epsilon > 0.$$

Portanto, (3.2) vale para $\mu = \frac{1}{2}$ e, logo, $g \in \mathcal{S}_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$. Analogamente, tem-se que $h(\xi) \in \mathcal{S}_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

Observe que considerando $t = -\frac{|x|^2}{\sqrt{2}}$ temos a função Gaussiana $e^{-\frac{|x|^2}{2}}$. Então, pelo que acabamos de mostrar, a função Gaussiana e sua transformada pertencem ao espaço $\mathcal{S}_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$.

Conforme mencionado no começo do exemplo, essa propriedade vale de forma geral, ou seja, para qualquer inteiro fixado $k > 0$.

Observação 3.3. *Observamos que os espaços $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ são fechados para a soma, diferenciação e o produto. Apenas por uma questão de conveniência deixaremos para verificar essas propriedades mais adiante, como o leitor pode ver no Corolário 4.5.*

Proposição 3.4. *Temos que $f \in \mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ se, e somente se, $\widehat{f} \in \mathcal{S}_\mu^\nu(\mathbb{R}^d)$. Em particular, O espaço $\mathcal{S}_\mu^\mu(\mathbb{R}^d)$, com $\mu > 0$, é invariante pela ação da transformada de Fourier.*

Demonstração. Supondo $f \in \mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$, segue da Definição 3.1 que

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \lesssim e^{-\epsilon|\xi|^{\frac{1}{\mu}}}.$$

Além disso, vale que

$$\left|\widehat{\widehat{f}}\,(x)\right| \leq |f(x)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}},$$

assim $\widehat{f} \in S_\mu^\nu(\mathbb{R}^d)$. De maneira análoga obtemos a recíproca.

□

Veremos no capítulo 4 que é possível substituir as estimativas (3.1) e (3.2), vistas na Definição 3.1, por estimativas que envolvam apenas a função f. Para tanto, começamos com o seguinte resultado.

Proposição 3.5. *Dada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, são equivalentes as seguintes condições:*

i) $\exists \epsilon > 0$ *tal que*

$$|f(x)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}, \quad x \in \mathbb{R}^d; \tag{3.3}$$

ii) $\exists C > 0$ *tal que*

$$|x^\alpha f(x)| \lesssim C^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu, \quad x \in \mathbb{R}^d \text{ e } \alpha \in \mathbb{N}^d. \tag{3.4}$$

Demonstração. Suponha que (3.3) seja válida e, para uma nova constante $\epsilon > 0$, considere

$$|f(x)|^{\frac{1}{\nu}} \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}. \tag{3.5}$$

Utilizando a expansão em série de Taylor da função $e^{\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}$, reescrevemos a expressão (3.5) como

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n (n!)^{-1} |x|^{\frac{n}{\nu}} |f(x)|^{\frac{1}{\nu}} < \infty. \tag{3.6}$$

Segue de (3.6) que para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\epsilon^n (n!)^{-1} |x|^{\frac{n}{\nu}} |f(x)|^{\frac{1}{\nu}} < \infty \Rightarrow \epsilon^{n\nu} (n!)^{-\nu} |x|^n |f(x)| < \infty. \tag{3.7}$$

Assim,

$$\epsilon^n(n!)^{-1}|x|^{\frac{n}{\nu}}|f(x)|^{\frac{1}{\nu}} \leq C \Rightarrow |x|^n|f(x)| \leq C\epsilon^{-n\nu}(n!)^\nu,$$

donde $|x|^n|f(x)| \lesssim \epsilon^{-n\nu}(n!)^\nu$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $n \in \mathbb{N}$.

Agora, considerando $|\alpha| = n$ e usando (2.3), temos que

$$\begin{aligned} |x^\alpha f(x)| &\lesssim \epsilon^{-n\nu}(n!)^\nu \\ &\lesssim \epsilon^{-n\nu}\left(d^{|\alpha|}\alpha!\right)^\nu \\ &= \left(\frac{d^\nu}{\epsilon^\nu}\right)^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu. \end{aligned}$$

Logo,

$$|x^\alpha f(x)| \lesssim C^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu, \ \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d. \tag{3.8}$$

com $C = \left(\frac{d}{\epsilon}\right)^\nu$.

Para provar a recíproca, note que existe uma constante positiva k dependendo somente da dimensão d tal que

$$|x|^n \leq k^n \sum_{|\alpha|=n} |x^\alpha|, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned} |x|^n|f(x)| &\overset{(3.9)}{\leq} k^n \sum_{|\alpha|=n} |x^\alpha f(x)| \\ &\leq k^n \sum_{|\alpha|=n} C^{|\alpha|}\,(\alpha!)\,\nu \\ &\leq (kC)^n \sum_{|\alpha|=n} (n!)^\nu \\ &\leq (kC)^n (n!)^\nu \sum_{|\alpha|=n} 1. \end{aligned}$$

Observe que o número de multi-índices α no último somatório não excede 2^{d+n-1}, em virtude de (2.9) e (2.11). Segue disto que

$$\begin{aligned} |x|^n|f(x)| &\leq (kC)^n(n!)^\nu 2^{d+n-1} \\ &\leq (2kC)^n 2^{d-1}(n!)^\nu \\ &\leq C_1 C_2^n (n!)^\nu \\ &\lesssim C_2^n (n!)^\nu, \end{aligned} \tag{3.10}$$

sendo $C_1 = 2^{d-1}$ e $C_2 = 2kC$.

Para uma nova constante C, tem-se

$$|x|^n|f(x)| \lesssim C^n(n!)^\nu, \tag{3.11}$$

donde conclui-se que a sequência $C^{-n}(n!)^{-\nu}|x|^n|f(x)|$ é uniformemente limitada para $x \in \mathbb{R}^d$. Desta forma, chega-se em

$$C^{-\frac{n}{\nu}}(n!)^{-1}|x|^{\frac{n}{\nu}}|f(x)|^{\frac{1}{\nu}} < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.12}$$

Escolhendo $\epsilon = \frac{C^{-\frac{1}{\nu}}}{2}$, concluímos que

$$\begin{aligned} e^{\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}|f(x)|^{\frac{1}{\nu}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{-\frac{n}{\nu}}}{2^n}(n!)^{-1}|x|^{\frac{n}{\nu}}|f(x)|^{\frac{1}{\nu}} \\ &\overset{(3.12)}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

portanto

$$e^{\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}|f(x)|^{\frac{1}{\nu}} \leq C \Longrightarrow |f(x)|^{\frac{1}{\nu}} \leq Ce^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}.$$

Logo, $|f(x)|^{\frac{1}{\nu}} \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}$. Assim, $|f(x)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}$ para uma nova constante $\epsilon > 0$, o que conclui a demonstração.

□

Proposição 3.6. *Para $\mu \leq \mu'$ e $\nu \leq \nu'$, é válida a inclusão $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_{\nu'}^{\mu'}(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração. Seja $\nu \leq \nu'$. Suponha que $f \in \mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ então f satisfaz (3.1). Pela Proposição 3.5, existe $C > 0$ tal que

$$|x^\alpha f(x)| \lesssim C^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu, \quad x \in \mathbb{R}^d \text{ e } \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

Note que

$$|x^\alpha f(x)| \lesssim C^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu \lesssim C^{|\alpha|}(\alpha!)^{\nu'},$$

para $\nu \leq \nu'$.

Assim, novamente pela Proposição 3.5, f satisfaz (3.1) para o índice ν'.

Analogamente, temos que $\widehat{f}$ satisfaz (3.2) para o índice μ'.

Portanto, $f \in \mathcal{S}_{\nu'}^{\mu'}(\mathbb{R}^d)$. Logo, $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_{\nu'}^{\mu'}(\mathbb{R}^d)$, para $\mu \leq \mu'$ e $\nu \leq \nu'$.

□

3.1 UMA TOPOLOGIA PARA OS ESPAÇOS $\mathcal{S}_\mu^\mu(\mathbb{R}^d)$

Nesta seção fazemos uma breve abordagem sobre como induzir uma topologia nos espaços de Gelfand-Shilov considerando o caso particular $\mathcal{S}_\mu^\mu(\mathbb{R}^d)$, com $\mu > 1$.

Para tanto, seja C uma constante positiva e defina o espaço $\mathcal{S}_{\mu,C}^\mu(\mathbb{R}^d)$ formado pelas funções $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ tais que

$$\sup_{\alpha,\beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} C^{-|\alpha|-|\beta|}(\alpha!\beta!)^{-\mu}|x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty. \tag{3.13}$$

O número

$$\|f\|_{\mu,C} \doteq \sup_{\alpha,\beta} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} C^{-|\alpha|-|\beta|}(\alpha!\beta!)^{-\mu}|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \tag{3.14}$$

define uma norma segundo a qual $\mathcal{S}^{\mu}_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$ é um espaço de Banach. Isso nos permite então considerar

$$\mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d) = \bigcup_{C>0} \mathcal{S}^{\mu}_{\mu,C}(\mathbb{R}^d), \tag{3.15}$$

munido da topologia *limite indutiva* determinada pelos espaços $\mathcal{S}^{\mu}_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$. (Uma introdução sobre este tipo de topologia pode ser encontrada na referência (Petronilho, 2003) e mais detalhes sobre (3.15) podem ser encontrados na referência (Nicola, Rodino, 2010).

Proposição 3.7. *Para cada $C > 0$, o espaço $\mathcal{S}^{\mu}_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$ é um espaço de Banach munido com a norma $\|\cdot\|_{\mu,C}$ dada em* (3.14).

Demonstração. Mostraremos que $\mathcal{S}^{\mu}_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$ é um espaço completo. Para isso, considere $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{S}^{\mu}_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$. Mostraremos que existe $\phi \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\|\phi_j - \phi\|_{\mu,C} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } j \longrightarrow \infty.$$

Considere $\epsilon > 0$. Fixados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ obtém-se um $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\phi_j - \phi_k\| < \epsilon_1, \ \forall j,k \geq j_0, \tag{3.16}$$

sendo $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!\beta!)^{\mu}}$.

Assim, para cada $x \in \mathbb{R}^d$ temos que

$$\begin{aligned}
\left|x^{\alpha}\partial^{\beta}\phi_j(x) - x^{\alpha}\partial^{\beta}\phi_k(x)\right| &\leq ||\phi_j(x) - \phi_k(x)||_{\mu,C}\, C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!\beta!)^{\mu} \\
&< \epsilon_1 C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!\beta!)^{\mu} \\
&= \frac{\epsilon}{C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!\beta!)^{\mu}} C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!\beta!)^{\mu} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

sempre que $j,k \geq j_0$.

Portanto, a sequência $\{x^{\alpha}\partial^{\beta}\phi_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{C}$. Logo, podemos definir a função $\varphi_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ pondo

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x) = \lim_{j\to\infty} x^{\alpha}\partial^{\beta}\phi_j(x).$$

Pode ser demonstrado (ver (Zani, 1988)) que

$$\phi \doteq \varphi_{0,0} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d) \ \text{ e } \ \varphi_{\alpha,\beta} = x^{\alpha}\partial^{\beta}\phi.$$

Mostremos agora que $\phi \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$. Para isso, observemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j,k \geq j_0$ então

$$||\phi_j - \phi_k||_{\mu,C} < 1. \tag{3.17}$$

Como $\phi(x) = \lim \phi_j(x)$, fazendo $k \longrightarrow \infty$ em (3.16), obtemos

$$\begin{aligned}\left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)\right| &\leq \left|x^\alpha \partial^\beta \phi(x) - x^\alpha \partial^\beta \phi_{j_0}(x)\right| + \left|x^\alpha \partial^\beta \phi_{j_0}(x)\right| \\ &\leq \|\phi - \phi_{j_0}\|_{\mu,C} C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!\beta!)^\mu + \left|x^\alpha \partial^\beta \phi_{j_0}(x)\right| \\ &\leq C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!\beta!)^\mu + C_{j_0} C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!\beta!)^\mu \\ &= (1 + C_{j_0})\, C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!\beta!)^\mu,\end{aligned}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ e para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Assim, $\phi \in \mathcal{S}^\mu_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$.

Finalmente, verifiquemos que $\phi_j \longrightarrow \phi$ em $\mathcal{S}^\mu_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$. Seja $\epsilon > 0$ dado, tomando o limite em (3.17) quando $k \to \infty$ obtemos

$$\|\phi_j - \phi\| < \epsilon$$

sempre que $j \geq j_0$.

Logo, $\phi_j \to \phi$ em $\mathcal{S}^\mu_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$, concluindo a demonstração.

□

4 CARACTERIZAÇÕES DOS ESPAÇOS DE GELFAND-SHILOV

Neste capítulo exibimos diversos resultados que caracterizam de forma mais precisa os espaços $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$. O Teorema 4.1, logo abaixo, traz várias estimativas para funções em $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$, com $\mu+\nu \geq 1$. Na sequência reformulamos uma dessas estimativas para o caso particular $\mathcal{S}_\mu^\mu(\mathbb{R}^d)$, a qual nos será útil no capítulo posterior. Por fim, vamos mostrar a trivialidade do espaço $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ quando consideramos $\mu+\nu<1$.

Teorema 4.1. *Assuma $\mu>0$, $\nu>0$ e $\mu+\nu\geq 1$. Para $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ as seguintes condições são equivalentes:*

i) $f\in\mathcal{S}_\nu^\mu\left(\mathbb{R}^d\right)$;

ii) Existe $C>0$ tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|x^\alpha f(x)|\lesssim C^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^d,$$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\left|\xi^\beta\widehat{f}(\xi)\right|\lesssim C^{|\beta|}(\beta!)^\mu,\ \forall\beta\in\mathbb{N}^d;$$

iii) Existe $C>0$ tal que

$$\|x^\alpha f(x)\|_{L^2}\lesssim C^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^d,$$

$$\left\|\xi^\beta\widehat{f}(\xi)\right\|_{L^2}\lesssim C^{|\beta|}(\beta!)^\mu,\ \forall\beta\in\mathbb{N}^d;$$

iv) Existe $C>0$ tal que

$$\|x^\alpha f(x)\|_{L^2}\lesssim C^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^d,$$

$$\left\|\partial^\beta f(x)\right\|_{L^2}\lesssim C^{|\beta|}(\beta!)^\mu,\ \forall\beta\in\mathbb{N}^d;$$

v) Existe $C>0$ tal que

$$\left\|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right\|_{L^2}\lesssim C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!)^\nu(\beta!)^\mu,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^d,\forall\beta\in\mathbb{N}^d;$$

vi) Existe $C>0$ tal que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right|\lesssim C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!)^\nu(\beta!)^\mu,\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^d,\forall\beta\in\mathbb{N}^d.$$

Demonstração. Segue da Proposição 3.5 que

$$|f(x)|\lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}\iff|x^\alpha f(x)|\lesssim C^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu$$

e

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right|\lesssim e^{-\epsilon|\xi|^{\frac{1}{\mu}}}\iff\left|\xi^\beta\widehat{f}(\xi)\right|\lesssim C^{|\beta|}(\beta!)^\mu,$$

portanto temos a equivalência $i) \Leftrightarrow ii)$. Assim, para demonstrarmos o teorema é suficiente seguir o seguinte roteiro:

$$ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow v) \Rightarrow vi) \Rightarrow ii).$$

$ii) \Rightarrow iii)$ Fixando um inteiro $M > \dfrac{d}{4}$ tal que $\left\|(1+|x|^2)^{-M}\right\|_{L^2} < \infty$, temos:

$$\begin{aligned} ||x^\alpha f(x)||_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |x^\alpha f(x)|^2 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|x|^2\right)^{-M} \left[\left(1+|x|^2\right)^M |x^\alpha f(x)|^2\right] dx \end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, então

$$||x^\alpha f(x)||_{L^2}^2 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left[\left(1+|x|^2\right)^M |x^\alpha f(x)|\right] \cdot C_1$$

Para o inteiro M fixado acima podemos escrever

$$\left(1+|x|^2\right)^M = \sum_{|\gamma|\leq M} C_\gamma x^{2\gamma},$$

sendo cada C_γ um inteiro positivo e, em particular, podemos escolher uma constante $C_M > 0$ tal que $C_\gamma \leq C_M$.

Assim, segue de $ii)$ que

$$\begin{aligned} ||x^\alpha f(x)||_{L^2}^2 &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left[\sum_{|\gamma|\leq M} C_\gamma x^{2\gamma} |x^\alpha f(x)|\right] \cdot C_1 \\ &\leq C_1 C_M \sum_{|\gamma|\leq M} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left|x^{\alpha+2\gamma} f(x)\right| \\ &\leq C_1 C_M \sum_{|\gamma|\leq M} C^{|\alpha+2\gamma|} \left[(\alpha+2\gamma)!\right]^\nu, \end{aligned}$$

e utilizando (2.5) conclui-se que

$$\begin{aligned} ||x^\alpha f(x)||_{L^2}^2 &\leq C_1 C_M \sum_{|\gamma|\leq M} C^{|\alpha+2\gamma|} \left[2^{|\alpha+2\gamma|}(\alpha!(2\gamma)!)\right]^\nu \\ &\leq C_1 \sum_{|\gamma|\leq M} C^{|\alpha+2\gamma|} \left[2^{|\alpha+2\gamma|}(\alpha!(2\gamma)!)\right]^\nu \\ &\leq C_1 \left(2^\nu C\right)^{|\alpha|+2M} (\alpha!(2M)!)^\nu \sum_{|\gamma|\leq M} 1. \end{aligned}$$

Segue de (2.9) e (2.10) que o número de termos da soma $\sum_{|\gamma|\leq M} 1$ não excede 2^{M+d}, então

$$\begin{aligned} ||x^\alpha f(x)||_{L^2}^2 &\leq C_1 \left(2^\nu C\right)^{|\alpha|+2M} (\alpha!(2M)!)^\nu \cdot 2^{M+d} \\ &\leq C_1 C_3 C_2^{|\alpha|} (\alpha!)^\nu \\ &\lesssim C_2^{|\alpha|} (\alpha!)^\nu. \end{aligned}$$

para $C_2 = 2^\nu C$ e $C_3 = C^{2M}(2M)!^\nu 2^{M(2\nu+1)+d}$.

Assim, obtém-se uma constante $C > 0$ independente de α tal que

$$||x^\alpha f(x)||_{L^2} \lesssim C^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu.$$

Prosseguindo similarmente na variável ξ obtemos a segunda desigualdade em $iii)$.

$iii) \Rightarrow iv)$ Para a primeira estimativa não há nada a fazer. Vamos, então, demonstrar a segunda.

Considere $C > 0$ satisfazendo

$$||\xi^\beta \widehat{f}(\xi)||_{L^2} \lesssim C^{|\beta|}(\beta!)^\mu.$$

Utilizando a identidade de Plancherel conclui-se que

$$||\partial^\beta f(\xi)||_{L^2} = ||\widehat{\partial^\beta f(\xi)}||_{L^2} = ||\xi^\beta \widehat{f}(\xi)||_{L^2} \lesssim C^{|\beta|}(\beta!)^\mu,$$

o que demonstra $iv)$.

$iv) \Rightarrow v)$ Nesta parte da demonstração iremos utilizar a notação de produto interno em L^2 dada em (2.15). Observe que integrando por partes obtém-se

$$\begin{aligned}\left|\left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right|\right|_{L^2}^2 &= \left(\partial^\beta f, x^{2\alpha}\partial^\beta f\right)_{L^2} \\ &= (-1)^{|\beta|}\left(f, \partial^\beta\left(x^{2\alpha}\partial^\beta f\right)\right)_{L^2} \\ &= \left|\left(f, \partial^\beta\left(x^{2\alpha}\partial^\beta f\right)\right)_{L^2}\right|,\end{aligned}$$

donde aplicando-se a regra de Leibniz:

$$\begin{aligned}\left|\left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right|\right|_{L^2}^2 &= \left|\left(f, \sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\partial^\gamma x^{2\alpha}\partial^{\beta-\gamma}\left(\partial^\beta f\right)\right)_{L^2}\right| \\ &= \left|\left(f, \sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\partial^\gamma x^{2\alpha}\partial^{2\beta-\gamma} f\right)_{L^2}\right|.\end{aligned}$$

Agora, calculando as derivadas $\partial^\gamma x^{2\alpha}$ obtemos

$$\begin{aligned}\left|\left(f, \sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\partial^\gamma x^{2\alpha}\partial^{2\beta-\gamma} f\right)_{L^2}\right| &= \left|\left(f, \sum_{\gamma\leq\beta,\gamma\leq 2\alpha}\binom{\beta}{\gamma}\binom{2\alpha}{\gamma}\gamma! x^{2\alpha-\gamma}\partial^{2\beta-\gamma} f\right)_{L^2}\right| \\ &\leq \sum_{\gamma\leq\beta,\gamma\leq 2\alpha}\binom{\beta}{\gamma}\binom{2\alpha}{\gamma}\gamma!\left|\left(x^{2\alpha-\gamma} f, \partial^{2\beta-\gamma} f\right)_{L^2}\right|\end{aligned}$$

Note que de (2.9) temos $\binom{\beta}{\gamma}\binom{2\alpha}{\gamma} \leq 2^{|\beta|+2|\alpha|}$.

Usando Cauchy-Schwarz e, posteriormente, $iv)$ obtemos:

$$\begin{aligned}\left|\left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right|\right|_{L^2}^2 &\leq 2^{|\beta|+2|\alpha|}\sum_{\gamma\leq\beta,\gamma\leq 2\alpha}\gamma!\left|\left|x^{2\alpha-\gamma} f(x)\right|\right|_{L^2}\left|\left|\partial^{2\beta-\gamma} f(x)\right|\right|_{L^2} \\ &\lesssim 2^{|\beta|+2|\alpha|}\sum_{\gamma\leq\beta,\gamma\leq 2\alpha}\gamma! C^{|2\alpha-\gamma|}(2\alpha-\gamma)!^\nu C^{|2\beta-\gamma|}(2\beta-\gamma)!^\mu \\ &\lesssim 2^{|\beta|+2|\alpha|}\sum_{\gamma\leq\beta,\gamma\leq 2\alpha}\gamma! C^{2|\alpha|}(2\alpha-\gamma)!^\nu C^{2|\beta|}(2\beta-\gamma)!^\mu, \qquad (4.1)\end{aligned}$$

assumindo $C \geq 1$, $\gamma \leq \beta$ e $\gamma \leq 2\alpha$.

Enfatizamos que neste ponto, e apenas neste ponto, utiliza-se a hipótese $\mu + \nu \geq 1$, a qual nos permite escrever

$$\gamma! \leq (\gamma!)^{\mu}(\gamma!)^{\nu}. \tag{4.2}$$

Segue da desigualdade (4.2) que

$$\begin{aligned}
\left|\left|x^{\alpha}\partial^{\beta}f(x)\right|\right|_{L^2}^2 &\lesssim 2^{|\beta|+2|\alpha|}\, C^{2|\alpha|+2|\beta|} \sum_{\gamma\leq\beta,\gamma\leq 2\alpha} (\gamma!)^{\mu}(\gamma!)^{\nu}(2\alpha-\gamma)!^{\nu}(2\beta-\gamma)!^{\mu} \\
&\lesssim 2^{|\beta|+2|\alpha|}\, C^{2(|\alpha|+|\beta|)} \sum_{\gamma\leq\beta,\gamma\leq 2\alpha} (2\alpha)!^{\nu}(2\beta)!^{\mu} \\
&\lesssim 2^{|\beta|+2|\alpha|}\, C^{2(|\alpha|+|\beta|)} (2\alpha)!^{\nu}(2\beta)!^{\mu} \sum_{\gamma\leq\beta,\gamma\leq 2\alpha} 1,
\end{aligned}$$

e uma vez que os termos da soma não excedem $2^{2|\alpha|+|\beta|+2d}$, obtém-se

$$\left|\left|x^{\alpha}\partial^{\beta}f(x)\right|\right|_{L^2}^2 \lesssim 2^{|\beta|+2|\alpha|}\, 2^{2|\alpha|+|\beta|+2d}\, C^{2(|\alpha|+|\beta|)} (2\alpha)!^{\nu}(2\beta)!^{\mu}.$$

Por outro lado, segue de (2.5) que

$$(2\alpha)! \leq 2^{2|\alpha|}(\alpha!)^2 \quad \text{e} \quad (2\beta)! \leq 2^{2|\beta|}(\beta!)^2,$$

portanto

$$\begin{aligned}
\left|\left|x^{\alpha}\partial^{\beta}f(x)\right|\right|_{L^2}^2 &\lesssim 2^{|\beta|+2|\alpha|}\, 2^{2|\alpha|+|\beta|+2d}\, C^{2(|\alpha|+|\beta|)}\, 2^{2|\alpha|\nu}(\alpha!)^{2\nu}\, 2^{2|\beta|\mu}(\beta!)^{2\mu} \\
&= 2^{2d}(2^{2+\nu})^{2|\alpha|}\, C^{2|\alpha|}\, (2^{1+\mu})^{2|\beta|}\, C^{2|\beta|}(\alpha!)^{2\nu}\, (\beta!)^{2\mu} \\
&\lesssim (2^{2+\nu})^{2|\alpha|}\, C^{2|\alpha|}\, (2^{1+\mu})^{2|\beta|}\, C^{2|\beta|}(\alpha!)^{2\nu}\, (\beta!)^{2\mu} \\
&= (2^{2+\nu}C)^{2|\alpha|}\, (2^{1+\mu}C)^{2|\beta|}(\alpha!)^{2\nu}\, (\beta!)^{2\mu},
\end{aligned}$$

donde para uma nova constante $C > 0$, independente de α e β, obtemos

$$\left|\left|x^{\alpha}\partial^{\beta}f(x)\right|\right|_{L^2}^2 \lesssim C^{2(|\alpha|+|\beta|)}\, (\alpha!)^{2\nu}\, (\beta!)^{2\mu},$$

o que conclui $v)$.

$v) \Rightarrow vi)$ Fixando um inteiro $s > \dfrac{d}{2}$ obtemos, através do Teorema de Imersão de Sobolev, que

$$\begin{aligned}
\left|x^{\alpha}\partial^{\beta}f(x)\right| &\leq ||x^{\alpha}\partial^{\beta}f(x)||_{H^s} \\
&\leq \sum_{|\gamma|\leq s} ||\partial^{\gamma}(x^{\alpha}\partial^{\beta}f(x))||_{L^2} \\
&\leq \sum_{|\gamma|\leq s} \sum_{\delta\leq\gamma,\delta\leq\alpha} \binom{\gamma}{\delta}\binom{\alpha}{\delta}\delta!||x^{\alpha-\delta}\partial^{\beta+\gamma-\delta}f(x)||_{L^2}.
\end{aligned}$$

Note que, por (2.7), temos

$$\binom{\gamma}{\delta}\binom{\alpha}{\delta}\delta! \leq (2^{|\gamma|}\delta!)2^{|\alpha|} \leq C_s 2^{|\alpha|},$$

em que C_s não depende de α.

Logo

$$\left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| \leq \sum_{|\gamma|\leq s} \sum_{\delta\leq\gamma, \delta\leq\alpha} C_s 2^{|\alpha|} ||x^{\alpha-\delta}\partial^{\beta+\gamma-\delta} f(x)||_{L^2} \tag{4.3}$$

Agora, usando a hipótese de v), temos

$$\begin{aligned} ||x^{\alpha-\delta}\partial^{\beta+\gamma-\delta} f(x)||_{L^2} &\lesssim C^{|\alpha|+|\beta|-2|\delta|+|\gamma|}\,(\alpha-\delta)!^\nu(\beta+\gamma-\delta)!^\mu \\ &\leq C^{|\alpha|+|\beta|-2|\delta|+|\gamma|}\alpha!^\nu(\beta+\gamma)!^\mu \\ &\overset{(2.5)}{\leq} C^{|\alpha|+|\beta|-2|\delta|+|\gamma|}\alpha!^\nu 2^{(|\beta|+|\gamma|)\mu}\beta!^\mu\gamma!^\mu \\ &\leq C^{-2|\delta|+|\gamma|}\,2^{(|\beta|+|\gamma|)\mu}\gamma!^\mu\, C^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!^\nu\beta!^\mu \\ &\leq (C_s')^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!^\nu\beta!^\mu, \end{aligned} \tag{4.4}$$

sendo C_s' independente de α.

Substituindo (4.4) em (4.3) obtemos

$$\begin{aligned} \left|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right| &\lesssim C_s 2^{|\alpha|}\,(C_s')^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!^\nu\beta!^\mu \sum_{|\gamma|\leq s}\left(\sum_{\delta\leq\gamma,\delta\leq\alpha} 1\right) \\ &\leq C_s 2^{|\alpha|+|\beta|}(C_s')^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!^\nu\beta!^\mu \\ &\lesssim C^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!^\nu\beta!^\mu, \end{aligned}$$

para uma nova constante $C>0$, uma vez que a última soma pode ser estimada por uma constante independente de α.

$vi) \Rightarrow ii)$ Note que se considerarmos $\beta = 0$ na expressão

$$\left|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right| \lesssim C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!)^\nu(\beta!)^\mu$$

obtemos a primeira desigualdade de $ii)$.

Para mostrar a segunda desigualdade, note que

$$\left|\xi^\beta \widehat{f}(\xi)\right| = \left|\widehat{\partial^\beta f}(\xi)\right| \leq (2\pi)^{-\frac{d}{2}}\left\|\partial^\beta f\right\|_{L^1} \lesssim \left\|\partial^\beta f\right\|_{L^1},\ \ \xi\in\mathbb{R}^d.$$

Fixando um inteiro $M > \dfrac{d}{2}$ tal que $\left\|(1+|x|^2)^{-M}\right\|_{L^1} < \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\|\partial^\beta f\right\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^{-M}(1+|x|^2)^M\left|\partial^\beta f(x)\right|dx \\ &\leq C\sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^M\left|\partial^\beta f(x)\right| \\ &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|^2)^M\left|\partial^\beta f(x)\right| \end{aligned}$$

Escrevendo $(1+|x|^2)^M = \sum_{|\gamma|\leq M} C_\gamma x^{2\gamma}$ e limitando C_γ por uma constante C_M, que depende somente de M, obtemos de $vi)$ que

$$\begin{aligned}\left|\left|\partial^\beta f\right|\right|_{L^1} &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{|\gamma|\leq M} C_\gamma \left|x^{2\gamma}\partial^\beta f(x)\right| \\ &\lesssim \sum_{|\gamma|\leq M} C_\gamma C^{2|\gamma|+|\beta|}(2\gamma)!^\nu(\beta!)^\mu \\ &\lesssim C_M C^{|\beta|}(\beta!)^\mu \sum_{|\gamma|\leq M} C^{2|\gamma|}(2\gamma)!^\nu \\ &\lesssim C^{|\beta|}(\beta!)^\mu\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\xi^\beta \widehat{f}(\xi)\right| \lesssim \left|\left|\partial^\beta f\right|\right|_{L^1} \lesssim C^{|\beta|}(\beta!)^\mu,$$

o que conclui a demonstração do teorema.

□

4.1 OS ESPAÇOS $\mathcal{S}^\mu_\mu(\mathbb{R}^d)$

Em virtude dos objetivos do próximo capítulo, fazemos aqui uma seção para o estudo do espaço $\mathcal{S}^\mu_\mu(\mathbb{R}^d)$, com $\mu \geq \frac{1}{2}$. Mais precisamente, reformulamos a condição $v)$ do Teorema 4.1 da seguinte forma:

Proposição 4.2. *Uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pertence a $\mathcal{S}^\mu_\mu(\mathbb{R}^d)$, com $\mu \geq \frac{1}{2}$, se, e somente se, $\exists C > 0$ tal que*

$$||x^\alpha \partial^\beta f(x)||_{L^2} \lesssim C^N N^{N\mu}, \text{ para } |\alpha|+|\beta| \leq N, \ N \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{S}^\mu_\mu(\mathbb{R}^d)$, com $\mu \geq \frac{1}{2}$. Da condição $v)$ do Teorema 4.1, para $|\alpha|+|\beta| \leq N$, temos:

$$\begin{aligned}||x^\alpha \partial^\beta f(x)||_{L^2} &\lesssim C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!\beta!)^\mu \\ &\overset{(2.7)}{\lesssim} C^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha+\beta)!^\mu \\ &\lesssim C^N N!^\mu \\ &\lesssim C^N N^{N\mu},\end{aligned}$$

assumindo-se $C > 1$.

Reciprocamente, temos $||x^\alpha \partial^\beta f(x)||_{L^2} \lesssim C^N N^{N\mu}$, para $|\alpha|+|\beta| \leq N$.

Logo,

$$||x^\alpha \partial^\beta f(x)||_{L^2} \lesssim C^{(|\alpha|+|\beta|)} \left(|\alpha|+|\beta|\right)^{(|\alpha|+|\beta|)\mu}. \tag{4.5}$$

Note que

$$\begin{aligned}(|\alpha|+|\beta|)^{(|\alpha|+|\beta|)} &\overset{(2.12)}{\leq} e^{(|\alpha|+|\beta|)}\,(|\alpha|+|\beta|)!\\ &\overset{(2.5)}{\leq} e^{(|\alpha|+|\beta|)}2^{(|\alpha|+|\beta|)}\alpha!\beta!\\ &\overset{(2.3)}{\leq} (2ed)^{(|\alpha|+|\beta|)}\alpha!\beta! \qquad (4.6)\end{aligned}$$

Usando (4.6) em (4.5), temos:

$$\begin{aligned}||x^\alpha\partial^\beta f(x)||_{L^2} &\lesssim C^{(|\alpha|+|\beta|)}(2ed)^{(|\alpha|+|\beta|)\mu}\,(\alpha!\beta!)^\mu\\ &\lesssim C_1^{(|\alpha|+|\beta|)}\alpha!^\mu\beta!^\mu\end{aligned}$$

para $C_1 = C(2ed)^\mu$.

Portanto, segue da condição v) do Teorema 4.1 que $f \in \mathcal{S}_\mu^\mu(\mathbb{R}^d)$.

□

A próxima proposição apresenta uma definição equivalente para os espaços $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$, considerando o caso $\mu+\nu \geq 1$.

Proposição 4.3. *Sejam $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mu > 0$ e $\nu > 0$, com $\mu+\nu \geq 1$. Temos que $f \in \mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ se, e somente se, existem constantes $C > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\partial^\beta f(x)\right| \lesssim C^{|\beta|}(\beta!)^\mu e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}},\ \forall\beta\in\mathbb{N}^d. \qquad (4.7)$$

Em particular, o item vi) do Teorema 4.1 é válido se, e somente se, existem $C > 0$ e $\epsilon > 0$ satisfazendo (4.7).

Demonstração. Temos que existem $C > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que

$$\left|\partial^\beta f(x)\right| \lesssim C^{|\beta|}(\beta!)^\mu e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}} \iff \left|C^{-|\beta|}(\beta!)^{-\mu}\partial^\beta f(x)\right| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}$$

Aplicando a Proposição 3.5 à função $C^{-|\beta|}(\beta!)^{-\mu}\partial^\beta f(x)$ temos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left|C^{-|\beta|}(\beta!)^{-\mu}\partial^\beta f(x)\right| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}} &\iff \left|x^\alpha C^{-|\beta|}(\beta!)^{-\mu}\partial^\beta f(x)\right| \lesssim C_1^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu\\ &\iff \left|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right| \lesssim C_1^{|\alpha|}(\alpha!)^\nu C^{|\beta|}(\beta!)^\mu\\ &\iff \left|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right| \lesssim C_2^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!)^\nu(\beta!)^\mu\\ &\iff f \in \mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

A última implicação segue do Teorema 4.1. □

Corolário 4.4. *Sejam $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\mu > 0$ e $\nu > 0$, com $\mu+\nu \geq 1$. Então, $f \in \mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ se, e somente se, existem constantes $C > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|\partial^\beta f(x)\right| \leq C^{|\beta|+1}(\beta!)^\mu e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}},\ \forall\beta\in\mathbb{N}^d.$$

Corolário 4.5. *Os espaços $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ são fechados para a soma, produto e diferenciação.*

Demonstração. Iremos verificar apenas a última afirmação, sendo as demais imediatas. Para tanto, sejam $f, g \in \mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$. Segue do Corolário 4.4 a existência de constantes positivas ϵ_1, ϵ_2, C_1 e C_2, tais que

$$\left|\partial^\beta f(x)\right| \leq C_1^{|\beta|+1}(\beta!)^\mu e^{-\epsilon_1|x|^{\frac{1}{\nu}}} \quad \text{e} \quad \left|\partial^\beta g(x)\right| \leq C_2^{|\beta|+1}(\beta!)^\mu e^{-\epsilon_2|x|^{\frac{1}{\nu}}},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$ e $\beta \in \mathbb{N}^d$.

Assim, fixado $\beta \in \mathbb{N}^d$ e $x \in \mathbb{R}^d$ obtemos pela regra de Leibniz que

$$\begin{aligned}\left|\partial^\beta (f\cdot g)(x)\right| &\leq \sum_{\gamma=0}^{\beta} \binom{\beta}{\gamma} \left|\partial^{\beta-\gamma} f \partial^\gamma g\right| \\ &\leq \sum_{\gamma=0}^{\beta} \binom{\beta}{\gamma} C_1^{|\beta-\gamma|+1} C_2^{|\gamma|+1}((\beta-\gamma)!(\gamma)!)^\mu e^{-(\epsilon_1-\epsilon_2)|x|^{1/\nu}},\end{aligned}$$

logo, por (2.7), temos que existem constantes positivas C e ϵ tais que

$$\left|\partial^\beta (f\cdot g)(x)\right| \leq C^{|\beta|+1}\beta!^\mu e^{-\epsilon|x|^{1/\nu}}.$$

Portanto, $f \cdot g \in \mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$.

□

4.2 TRIVIALIDADE NO CASO $\mu + \nu < 1$

Nesta seção, mostraremos que se $\mu + \nu < 1$, então $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d) = \{0\}$. Para tanto serão necessários alguns resultados preliminares, com especial atenção ao Teorema 4.6 o qual versa sobre extensão analítica para funções em $\mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$.

Primeiramente recordemos alguns resultados importantes relacionados ao estudo de funções analíticas:

a) Uma função suave $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ é analítica (real) em todo $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, para cada $x \in \mathbb{R}^d$ existirem uma bola $B(x, R)$, $R > 0$, e uma constante $M > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq M\frac{\alpha!}{R^{|\alpha|}},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d.$$

b) Se f é uma função analítica real em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^d$, com raio de convergência $R > 0$, então f pode ser extendida a uma função analítica em $z_0 = x_0 + i0 \in \mathbb{C}^d$ com raio de convergência igual a R.

c) O raio de convergência R da série de Taylor num ponto $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (ou $x_0 \in \mathbb{C}^d$) pode ser calculado através do limite

$$\frac{1}{R} = \limsup_{|\alpha|\longrightarrow\infty} \left|\frac{\partial^\alpha f}{\alpha!}(x_0)\right|^{1/|\alpha|}.$$

Teorema 4.6. *Considere $f \in \mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$, com $0 < \mu < 1$ e $\nu > 0$. Supondo válida a condição (4.7), então f se extende a uma função analítica inteira $f(x+iy)$ em $\mathbb{C}^d$, com*

$$|f(x+iy)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}+\delta|y|^{\frac{1}{1-\mu}}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d \tag{4.8}$$

sendo δ uma constante positiva.

Para o caso $\mu = 1$ e $\nu > 0$, tem-se que f se extende a uma função analítica $f(x+iy)$ numa faixa $\{x+iy \in \mathbb{C}^d; |y| < T\}$ satisfazendo

$$|f(x+iy)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}} \text{ com } x \in \mathbb{R}^d \text{ e } |y| < T \text{ para algum } T > 0. \tag{4.9}$$

Demonstração. Note que se $\nu > 0$ e $\mu = 1$, então obtemos de (4.7) que

$$\begin{aligned}\left|\partial^\beta f(x)\right| &\lesssim C^{|\beta|}(\beta!) \\ &= \frac{\beta!}{(1/C)^{|\beta|}}, \ \forall x \in \mathbb{R}^d, \ \forall \beta \in \mathbb{N}^d.\end{aligned}$$

Segue da observação anterior, parte a), que f é analítica real em $\mathbb{R}^d$, enquanto que a parte b) garante a analiticidade na faixa

$$\{x+iy \in \mathbb{C}^d; \ |y| < 1/C\}.$$

Por outro lado, se $\mu < 1$, podemos obter de (4.7) que

$$\left|\frac{\partial^\beta f(0)}{\beta!}\right| \lesssim C^{|\beta|}(\beta!)^{\mu-1}, \ \forall \beta \in \mathbb{N}^d,$$

donde

$$\limsup_{|\beta| \longrightarrow \infty} \left|\frac{\partial^\beta f(0)}{\beta!}\right| = 0,$$

pois $\mu - 1 < 0$.

Assim, a série de Taylor

$$f(z) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\partial^\beta f(0)}{\beta!} z^\beta, \quad z = x+iy \in \mathbb{C}^d,$$

tem raio de convergência igual a ∞.

Passemos agora para a demonstração da estimativa (4.8). Para tanto, considere a expansão em série de Taylor da função $f(x+iy)$ em $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x+iy) = \sum_\beta \frac{\partial^\beta f(x)}{\beta!} ((x+iy)-x)^\beta = \sum_\beta \frac{\partial^\beta f(x)}{\beta!} (iy)^\beta.$$

Logo,

$$\begin{aligned}|f(x+iy)| &= \left|\sum_\beta \frac{\partial^\beta f(x)}{\beta!}(iy)^\beta\right| \\ &\leq \sum_\beta \left\{|y|^\beta \left|\frac{\partial^\beta f(x)}{\beta!}\right|\right\} \\ &\overset{(4.7)}{\lesssim} \sum_\beta |y|^\beta e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}} C^{|\beta|} \beta!^{\mu-1}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Escreva

$$\sum_{\beta} |y|^{\beta} C^{|\beta|} \beta!^{\mu-1} = \prod_{j=1}^{d} M\left(|y_j|\right), \tag{4.11}$$

em que

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C^n (n!)^{\mu-1} t^n, \quad t > 0. \tag{4.12}$$

Denotando $\lambda = (2Ct)^{\frac{1}{1-\mu}}$, para $t > 0$, obtém-se

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)^{1-\mu}. \tag{4.13}$$

Usando (2.14) obtemos

$$\left(\frac{\lambda^n}{n!}\right)^{1-\mu} \leq e^{(1-\mu)\lambda}, \tag{4.14}$$

e assim,

$$\begin{aligned} M(t) &\lesssim \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e^{(1-\mu)\lambda} \\ &\lesssim e^{(1-\mu)(2Ct)^{\frac{1}{1-\mu}}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \\ &= e^{(1-\mu)(2C)^{\frac{1}{1-\mu}} t^{\frac{1}{1-\mu}}} C, \end{aligned}$$

donde conclui-se que $M(t) \lesssim e^{\delta t^{\frac{1}{1-\mu}}}$, para $\delta = (1-\mu)(2C)^{\frac{1}{1-\mu}}$.

Retornando a (4.10) e (4.11) temos

$$|f(x+iy)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{1-\mu}}} e^{\delta|y|^{\frac{1}{1-\mu}}} = e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}} + \delta|y|^{\frac{1}{1-\mu}}}$$

o que prova (4.8).

Um argumento similar nos dá (4.9), e portanto a demonstração está concluída.

□

Antes de exibirmos o próximo resultado relambramos o Teorema de Liouville:

Teorema 4.7. *(Teorema de Liouville) Uma função inteira é limitada se, e somente se, é constante.*

Proposição 4.8. *Considere $0 < \lambda < \theta$ e seja $f(x+iy)$ uma função inteira em $\mathbb{C}^d$ tal que para $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tenha-se*

$$|f(x+iy)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\theta} + \delta|y|^{\lambda}}, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d. \tag{4.15}$$

Nestas condições, $f \equiv 0$.

Demonstração. Considere as funções inteiras $g(z) = f(iz)$ e $h(z) = f(z)g(z)$. Segue de (4.15) que

$$\begin{aligned}|h(z)| &= |f(z)f(iz)| \\ &\lesssim e^{-\epsilon|x|^\theta+\delta|y|^\lambda}e^{-\epsilon|y|^\theta+\delta|x|^\lambda} \\ &= e^{-\epsilon(|x|^\theta+|y|^\theta)+\delta(|y|^\lambda+|x|^\lambda)}\end{aligned}$$

Como $\lambda < \theta$, então a exponencial acima converge para 0, quando $|z| \longrightarrow \infty$. Portanto h é limitada e, pelo Teorema de Liouville, devemos ter $h \equiv 0$. Logo, f também é identicamente nula.

□

Estamos agora em condições de enunciar o principal resultado desta seção.

Teorema 4.9. *Sejam ϵ, μ e ν constantes positivas tais que $\mu+\nu < 1$ e considere $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo*

$$|f(x)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}, \forall x \in \mathbb{R}^d \tag{4.16}$$

e

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \lesssim e^{-\epsilon|\xi|^{\frac{1}{\mu}}}, \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{4.17}$$

Nestas condições tem-se $f \equiv 0$. Além disso, as condições ii), iii), iv), v) e vi) no Teorema 4.1, bem como (4.7) *na Proposição 4.3, implicam $f \equiv 0$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que na demonstração do Teorema 4.1 a condição $\mu + \nu \geq 1$ é utilizada somente na prova de $iv) \Longrightarrow v)$ para obter (4.2). Então vamos seguir os passos da demonstração do Teorema 4.1 a partir deste ponto, agora supondo que $\mu + \nu < 1$.

Assim, para $\mu + \nu < 1$, considere

$$\gamma! = (\gamma!)^\mu(\gamma!)^\nu(\gamma!)^{1-(\mu+\nu)}. \tag{4.18}$$

Em (4.1) supomos $\gamma \leq \beta$, então temos

$$\gamma!^{1-(\mu+\nu)} \leq (\beta!)^{1-(\mu+\nu)} \leq (2\beta!)^{\frac{1-(\mu+\nu)}{2}}.$$

Portanto, (4.18) pode ser reescrita como

$$\gamma! \leq (\gamma!)^\mu(\gamma!)^\nu(2\beta!)^{\frac{1-(\mu+\nu)}{2}}. \tag{4.19}$$

Usando (4.19) em (4.1) e continuando os argumentos como na prova do Teorema 4.1, obtemos a condição $v)$ do Teorema 4.1 para novos índices μ^* e ν:

$$\left|\left|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right|\right|_{L^2} \lesssim C^{(|\alpha|+|\beta|)}(\alpha!)^\nu(\beta!)^{\mu^*}, \tag{4.20}$$

com $\mu^* = \mu + \dfrac{1-(\mu+\nu)}{2}$ e $\mu + \nu < \mu^* + \nu < 1$.

Observe que a partir de (4.16) e (4.17), isto é, $f \in \mathcal{S}_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ com $\mu + \nu < 1$ é possível obter as condições $ii)$, $iii)$ e $iv)$ no Teorema 4.1 para os mesmos μ e ν. Note também que as condições $v)$, $vi)$ e a estimativa (4.7) da Proposição 4.3 valem para novos μ^* e ν.

Segue do Teorema 4.6 que f possui uma extensão analítica e inteira satisfazendo

$$|f(x+iy)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}} + \delta|y|^{\frac{1}{1-\mu^*}}}.$$

Aplicando a Proposição 4.8 com

$$\lambda = \frac{1}{1-\mu^*} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{1}{\nu},$$

obtém-se $f \equiv 0$.

Por fim, observe que na Proposição 4.8 pede-se $\lambda < \theta$, ou seja, $\dfrac{1}{1-\mu^*} < \dfrac{1}{\nu}$, o que é válido, pois da condição $\nu + \mu^* < 1$ temos que

$$\nu < \mu^* + 1 \Longrightarrow \frac{1}{\mu^*+1} < \frac{1}{\nu}.$$

□

5 REGULARIDADE GLOBAL DE OPERADORES DIFERENCIAIS

Neste capítulo estudamos a regularidade global de operadores diferenciais parciais com coeficientes polinomiais do tipo

$$P = \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} c_{\alpha\beta} x^{\beta} D_x^{\alpha}, \tag{5.1}$$

sendo m um inteiro positivo e $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$.

Mais precisamente, estamos interessados no seguinte problema: supondo que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e $f \in \mathcal{S}_{\mu}^{\mu}(\mathbb{R}^d)$ satisfaçam a equação $Pu = f$, então podemos afirmar que u também pertence ao espaço $\mathcal{S}_{\mu}^{\mu}(\mathbb{R}^d)$?

Para tanto, nos restringimos ao estudo dos operadores do tipo (5.1) pertencentes a seguinte classe:

Definição 5.1. *Dizemos que o operador P, definido em* (5.1)*, é globalmente elíptico em $\mathbb{R}^d$ se seu símbolo principal*

$$p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} c_{\alpha\beta} x^{\beta} \xi^{\alpha} \tag{5.2}$$

satisfaz a seguinte propriedade:

$$p_m(x,\xi) = 0 \Longleftrightarrow (x,\xi) = (0,0). \tag{5.3}$$

Antes de enunciarmos o teorema principal deste capítulo vamos considerar, como motivação, o seguinte exemplo:

Exemplo 5.2. *Considere o oscilador harmônico de Schrödinger*

$$H = -\Delta + |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Para $\lambda \in \mathbb{C}$, considere o operador:

$$P = H - \lambda = -\Delta + |x|^2 - \lambda.$$

Note que o símbolo principal $|z|^2 = |x|^2 + |\xi|^2$ satisfaz (5.3) *e para os autovalores*

$$\lambda = \lambda_k = \sum_{j=1}^{d} (2k_j + 1), \quad k = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d,$$

temos as seguintes autofunções:

$$u(x) = u_k(x) = \prod_{j=1}^{d} P_{k_j}(x_j) e^{-\frac{|x|^2}{2}}. \tag{5.4}$$

(Ver (Nicola; Rodino, 2010), Seção 2.2.)

Observe que o decaimento no infinito de $u(x)$ *em* (5.4) *é dado por*

$$|u(x)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{5.5}$$

para um certo $\epsilon > 0$.

Da Proposição 4.8, temos que uma solução u *da equação* $Pu = 0$ *se estende como uma função inteira* $u(x+iy)$ *em* $\mathbb{C}^d$ *satisfazendo, para determinadas constantes positivas* ϵ *e* δ*, a seguinte desigualdade:*

$$|u(x+iy)| \lesssim e^{-\epsilon|x|^2+\delta|y|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{5.6}$$

Agora, observe que as autofunções em (5.4) *são invariantes pela ação da transformada de Fourier. E, portanto, em termos do espaço* $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$*, temos* $\mu = \nu = \frac{1}{2}$.

Assim, motivados por esse exemplo, enunciamos o principal resultado deste capítulo, o qual pode ser encontrado na referência (Nicola; Rodino, 2010), seção 6.2.

Teorema 5.3. *Sejam* P *um operador do tipo* (5.1) *globalmente elíptico e* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *uma solução da equação*

$$Pu = f \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d), \ \mu \geq 1/2.$$

Nestas condições, temos que $u \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d)$*. Em particular, se* $f \equiv 0$ *então* $u \in \mathcal{S}^{1/2}_{1/2}(\mathbb{R}^d)$.

Antes de iniciarmos a demonstração deste teorema precisamos enunciar o seguinte resultado auxiliar:

Teorema 5.4. *Sejam* P *como no Teorema 5.3 e* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$*. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

a) Se $Pu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*, então* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*. Em particular, todas as soluções* $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ *da equação homogênea* $Pu = 0$ *pertencem a* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$*;*

b) Existe $C^* > 0$ *tal que*

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|\leq m} ||x^{\alpha} D_x^{\alpha} u||_{L^2} \leq C^* \left(||Pu||_{L^2} + ||u||_{L^2} \right).$$

A demonstração deste teorema utiliza argumentos da teoria do Operadores Pesudo-Diferenciais, a qual não foi abordada na preparação desta dissertação. Os detalhes de sua demonstração podem ser encontradas no Capítulo 2 da referência (Nicola; Rodino, 2010).

Finalmente, fixamos a seguinte notação: dados P e Q operadores diferenciais e $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, escreve-se

$$[P, Q]u = (P \circ Q)u - (Q \circ P)u.$$

Demonstração do Teorema 5.3. Primeiramente, observe que a condição do operador ser globalmente elíptico será necessária quando utilizarmos o Teorema 5.4, o que ocorre logo no começo desta demonstração.

Note que, em virtude da Proposição 4.2, é suficiente provar que existe $C > 0$ satisfazendo

$$||x^\alpha \partial^\beta u(x)||_{L^2} \leq C^{N+1} N^{N\mu}, \ \forall |\alpha| + |\beta| \leq N, \ \forall N \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

Por sua vez, segue do Teorema 5.4, que a equação $Pu = f \in \mathcal{S}^\mu_\mu(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ implica em $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Segue ainda desta equação que, para $C > 1$ suficientemente grande, tem-se (5.7) para cada $N \leq 2m$. Assim, utilizando o princípio de indução forte, mostraremos que se (5.7) é válido para $N < M$, com $M > 2m$, então temos necessariamente que (5.7) vale para $N = M$.

Suponha então que seja válida a hipótese de indução e tome $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ satisfazendo $|\alpha| + |\beta| = M$ e escreva

$$x^\beta D^\alpha_x u = x^{\beta-\delta} x^\delta D^{\alpha-\gamma}_x D^\gamma_x u, \tag{5.8}$$

sendo $\gamma \leq \alpha$ e $\delta \leq \beta$ tais que $|\gamma| + |\delta| = M - m$ e $|\alpha - \gamma| + |\beta - \delta| = m$.

Note que tal escolha sempre é possível pois, se $|\beta| \geq m$, então podemos tomar $\theta \leq \beta$ tal que $|\theta| = m$ e então definir $\gamma = \alpha$ e $\delta = \beta - \theta$. Caso contrário, $|\beta| < m$, teremos necessariamente $|\alpha| \geq m$, pois $|\alpha| + |\beta| > 2m$. Neste caso, toma-se $\rho \leq \alpha$ satisfazendo $|\rho| = m$ e define-se $\gamma = \alpha - \rho$ e $\delta = \beta$.

Note que é válida a igualdade

$$x^\beta D^\alpha_x u = x^{\beta-\delta} D^{\alpha-\gamma}_x \left(x^\delta D^\gamma_x u \right) + x^{\beta-\delta} \left[x^\delta, D^{\alpha-\gamma}_x \right] D^\gamma_x u, \tag{5.9}$$

pois denotanto o lado direito por $\bigstar$ obtém-se

$$\begin{aligned} \bigstar &= x^{\beta-\delta} D^{\alpha-\gamma}_x \left(x^\delta D^\gamma_x u \right) + x^{\beta-\delta} \left(x^\delta D^{\alpha-\gamma}_x (D^\gamma_x u) - D^{\alpha-\gamma}_x x^\delta (D^\gamma_x u) \right) \\ &= x^{\beta-\delta} D^{\alpha-\gamma}_x \left(x^\delta D^\gamma_x u \right) + x^\beta D^{\alpha-\gamma}_x (D^\gamma_x u) - x^{\beta-\delta} D^{\alpha-\gamma}_x (x^\delta D^\gamma_x u) \\ &= x^\beta D^\alpha_x u. \end{aligned}$$

Considere $\blacktriangle = \left\| x^\beta D^\alpha_x u \right\|_{L^2}$. Aplicando a desigualdade triangular em (5.9) e o Teorema 5.4, item b), obtém-se

$$\begin{aligned} \blacktriangle &\leq \left\| x^{\beta-\delta} D^{\alpha-\gamma}_x \left(x^\delta D^\gamma_x u \right) \right\|_{L^2} + \left\| x^{\beta-\delta} \left[x^\delta, D^{\alpha-\gamma}_x \right] D^\gamma_x u \right\|_{L^2} \\ &\leq C^* \left(\left\| P \left(x^\delta D^\gamma_x u \right) \right\|_{L^2} + \left\| x^\delta D^\gamma_x u \right\|_{L^2} \right) + \left\| x^{\beta-\delta} \left[x^\delta, D^{\alpha-\gamma}_x \right] D^\gamma_x u \right\|_{L^2} \\ &\leq C^* \left(\left\| x^\delta D^\gamma_x (Pu) \right\|_{L^2} + \left\| \left[P, x^\delta D^\gamma_x \right] u \right\|_{L^2} + \left\| x^\delta D^\gamma_x u \right\|_{L^2} \right) + \left\| x^{\beta-\delta} \left[x^\delta, D^{\alpha-\gamma}_x \right] D^\gamma_x u \right\|_{L^2}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

sendo que estamos utilizando

$$P \left(x^\delta D^\gamma_x u \right) = x^\delta D^\gamma_x (Pu) + \left[P, x^\delta D^\gamma_x \right] u$$

para obter a última desigualdade.

Como $Pu = f \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d)$ e $|\gamma| + |\delta| = M - m$, da Proposição 4.2 temos, para alguma constante $C_1 > 1$,

$$\left|\left|x^{\delta} D_x^{\gamma}(Pu)\right|\right|_{L^2} \leq C_1^{M-m+1}(M-m)^{(M-m)\mu} \leq C_1^{M+1} M^{M\mu}. \tag{5.11}$$

Afirmamos que

$$\left[P, x^{\delta} D_x^{\gamma}\right] = \sum_{|\widetilde{\alpha}|+|\widetilde{\beta}|\leq m} c_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} [x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}}, x^{\delta} D_x^{\gamma}]. \tag{5.12}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left[P, x^{\delta} D_x^{\gamma}\right] &= P(x^{\delta} D_x^{\gamma}) - x^{\delta} D_x^{\gamma}(P) \\
&= \left(\sum_{|\widetilde{\alpha}|+|\widetilde{\beta}|\leq m} c_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}} \right) (x^{\delta} D_x^{\gamma}) - x^{\delta} D_x^{\gamma} \left(\sum_{|\widetilde{\alpha}|+|\widetilde{\beta}|\leq m} c_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}} \right) \\
&= \sum_{|\widetilde{\alpha}|+|\widetilde{\beta}|\leq m} c_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}} (x^{\delta} D_x^{\gamma}) - x^{\delta} \sum_{|\widetilde{\alpha}|+|\widetilde{\beta}|\leq m} c_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} D_x^{\gamma} (x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}}) \\
&= \sum_{|\widetilde{\alpha}|+|\widetilde{\beta}|\leq m} c_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} \left[x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}} (x^{\delta} D_x^{\gamma}) - x^{\delta} D_x^{\gamma} (x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}}) \right] \\
&= \sum_{|\widetilde{\alpha}|+|\widetilde{\beta}|\leq m} c_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} \left[x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}}, x^{\delta} D_x^{\gamma} \right].
\end{aligned}$$

Voltando em (5.10) e utilizando (5.11) e (5.12), dado $C_2 > 0$ tal que $|c_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}| \leq C_2$ para $|\widetilde{\alpha}| + |\widetilde{\beta}| \leq m$, temos:

$$\left|\left|x^{\beta} D_x^{\alpha} u\right|\right|_{L^2} \leq C^* C_1^{M+1} M^{M\mu} + \Theta_1 + \Theta_2, \tag{5.13}$$

sendo

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= C^* C_2 \sum_{|\widetilde{\alpha}|+|\widetilde{\beta}|\leq m} \left|\left| [x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}}, x^{\delta} D_x^{\gamma}] u \right|\right|_{L^2}, \\
\Theta_2 &= C^* \left|\left| x^{\delta} D_x^{\gamma} u \right|\right|_{L^2} + \left|\left| x^{\beta-\delta} \left[x^{\delta}, D_x^{\alpha-\gamma} \right] D_x^{\gamma} u \right|\right|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Considere agora o operador differencial $Q = [x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}}, x^{\delta} D_x^{\gamma}]$. Temos então:

$$
\begin{aligned}
Q &= \left[x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}} \left(x^{\delta} D_x^{\gamma}\right) - x^{\delta} D_x^{\gamma} \left(x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}}\right)\right] \\
&= x^{\widetilde{\beta}} \sum_{0 \neq \sigma \leq \widetilde{\alpha}} \binom{\widetilde{\alpha}}{\sigma} D_x^{\sigma} x^{\delta} D_x^{\widetilde{\alpha}-\sigma} D_x^{\gamma} - x^{\delta} \sum_{0 \neq \sigma \leq \gamma} \binom{\gamma}{\sigma} D_x^{\sigma} x^{\widetilde{\beta}} D_x^{\gamma-\sigma} D_x^{\widetilde{\alpha}} \\
&= x^{\widetilde{\beta}} \sum_{\substack{0 \neq \sigma \leq \widetilde{\alpha} \\ \sigma \leq \delta}} \binom{\widetilde{\alpha}}{\sigma} (-i)^{|\sigma|} \sigma! \binom{\delta}{\sigma} x^{\delta-\sigma} D_x^{\widetilde{\alpha}-\sigma+\gamma} - x^{\delta} \sum_{\substack{0 \neq \sigma \leq \widetilde{\beta} \\ \sigma \leq \gamma}} \binom{\gamma}{\sigma} (-i)^{|\sigma|} \sigma! \binom{\widetilde{\beta}}{\sigma} x^{\widetilde{\beta}-\sigma} D_x^{\gamma-\sigma+\widetilde{\alpha}} \\
&= \sum_{\substack{0 \neq \sigma \leq \widetilde{\alpha} \\ \sigma \leq \delta}} \binom{\widetilde{\alpha}}{\sigma} \binom{\delta}{\sigma} (-i)^{|\sigma|} \sigma! x^{\delta-\sigma+\widetilde{\beta}} D_x^{\widetilde{\alpha}-\sigma+\gamma} - \sum_{\substack{0 \neq \sigma \leq \widetilde{\beta} \\ \sigma \leq \gamma}} \binom{\gamma}{\sigma} \binom{\widetilde{\beta}}{\sigma} (-i)^{|\sigma|} \sigma! x^{\widetilde{\beta}-\sigma+\delta} D_x^{\gamma-\sigma+\widetilde{\alpha}} \\
&= \sum_{\substack{0 \neq \sigma \leq \widetilde{\alpha} \\ \sigma \leq \delta}} c_{\widetilde{\alpha}\delta\sigma} x^{\delta+\widetilde{\beta}-\sigma} D_x^{\gamma+\widetilde{\alpha}-\sigma} - \sum_{\substack{0 \neq \sigma \leq \widetilde{\beta} \\ \sigma \leq \gamma}} c_{\widetilde{\beta}\gamma\sigma} x^{\delta+\widetilde{\beta}-\sigma} D_x^{\gamma+\widetilde{\alpha}-\sigma}
\end{aligned}
$$

com

$$
c_{\widetilde{\alpha}\delta\sigma} = \binom{\widetilde{\alpha}}{\sigma} \binom{\delta}{\sigma} (-i)^{|\sigma|} \sigma! = \frac{(-i)^{|\sigma|}}{\sigma!} \frac{\tilde{\alpha}!}{(\tilde{\alpha}-\sigma)!} \frac{\delta!}{(\delta-\sigma)!}
$$

e

$$
c_{\widetilde{\beta}\gamma\sigma} = \binom{\gamma}{\sigma} \binom{\widetilde{\beta}}{\sigma} (-i)^{|\sigma|} \sigma! = \frac{(-i)^{|\sigma|}}{\sigma!} \frac{\tilde{\beta}!}{(\tilde{\beta}-\sigma)!} \frac{\gamma!}{(\gamma-\sigma)!} \, .
$$

Note que as constantes constantes $c_{\widetilde{\alpha}\delta\sigma}$ e $c_{\widetilde{\beta}\gamma\sigma}$ podem ser limitadas por $C_3 M^{|\sigma|}$, em que C_3 depende somente da ordem m do operador P e da dimensão d.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
||Qu||_{L^2} \leq\ & C_3 \sum_{\substack{0 \neq \sigma \leq \widetilde{\alpha} \\ \sigma \leq \delta}} M^{|\sigma|} \left|\left| x^{\delta+\widetilde{\beta}-\sigma} D_x^{\gamma+\widetilde{\alpha}-\sigma} u \right|\right|_{L^2} \\
& + C_3 \sum_{\substack{0 \neq \sigma \leq \widetilde{\beta} \\ \sigma \leq \gamma}} M^{|\sigma|} \left|\left| x^{\delta+\widetilde{\beta}-\sigma} D_x^{\gamma+\widetilde{\alpha}-\sigma} u \right|\right|_{L^2} . \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

Observe agora que as condições $|\gamma| + |\delta| = M - m$ e $|\widetilde{\alpha}| + |\widetilde{\beta}| \leq m$ implicam em

$$
|\gamma + \widetilde{\alpha} - \sigma| + |\delta + \widetilde{\beta} - \sigma| \leq M - 2|\sigma|,
$$

e da hipótese de indução conclui-se que

$$
\begin{aligned}
\left|\left| x^{\delta+\widetilde{\beta}-\sigma} D_x^{\gamma+\widetilde{\alpha}-\sigma} u \right|\right|_{L^2} &\leq C^{M-2|\sigma|+1} (M - 2|\sigma|)^{(M-2|\sigma|)\mu} \\
&\leq C^M M^{(M-2|\sigma|)\mu} \\
&\leq C^M M^{M\mu} M^{-2|\sigma|\mu}. \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

Substituindo (5.15) em (5.14) obtém-se

$$\begin{aligned}
||Q\cdot u||_{L^2} &\leq C_3 \sum_{0\neq\sigma\leq\widetilde{\alpha}\sigma\leq\delta} M^{|\sigma|}C^M M^{M\mu}M^{-2|\sigma|\mu} + C_3 \sum_{\substack{0\neq\sigma\leq\widetilde{\beta}\\ \sigma\leq\gamma}} M^{|\sigma|}C^M M^{M\mu}M^{-2|\sigma|\mu} \\
&\leq C_3 C^M M^{M\mu}\left[\sum_{0\neq\sigma\leq\widetilde{\alpha}\sigma\leq\delta} M^{|\sigma|(1-2\mu)} + \sum_{0\neq\sigma\leq\widetilde{\beta}\sigma\leq\gamma} M^{|\sigma|(1-2\mu)}\right] \\
&\overset{*}{\leq} C_3 C^M M^{M\mu}\left(\sum_{0\neq\sigma\leq\widetilde{\alpha}\sigma\leq\delta} 1 + \sum_{0\neq\sigma\leq\widetilde{\beta}\sigma\leq\gamma} 1\right) \\
&\overset{**}{\leq} C_3 C^M M^{M\mu} C_4. \qquad (5.16)
\end{aligned}$$

* Observamos que neste ponto estamos utilizamos a desigualdade $M^{|\sigma|(1-2\mu)} \leq 1$, a qual é consequência de $\mu \geq 1/2$.

** Por outro lado, a última desigualdade segue do fato que os dois somatórios podem ser limitados por uma constante C_4 que depende somente de m e da dimensão d.

Por argumentos similares, observando que $|\alpha-\gamma| \leq m$ e $|\beta-\delta| \leq m$, podemos estimar

$$\left\|x^{\beta-\delta}\left[x^\delta, D_x^{\alpha-\gamma}\right]D_x^\gamma u\right\|_{L^2} \leq C_5 C^M M^{M\mu}. \qquad (5.17)$$

Note que também temos

$$\left\|x^\delta D_x^\gamma u\right\| \leq C^{M-m+1}(M-m)^{(M-m)\mu} \leq C^M M^{M\mu}. \qquad (5.18)$$

Usando (5.16), (5.17) e (5.18) em (5.13) finalmente obtemos

$$\left\|x^\beta D_x^\alpha u\right\|_{L^2} \leq C^* C_1^{M+1} M^{M\mu} + C^* C_2 \sum_{|\widetilde{\alpha}|+|\widetilde{\beta}|\leq m} C_3 C^M M^{M\mu} C_4 + C^* C^M M^{M\mu} + C_5 C^M M^{M\mu}.$$

Limitando os termos da soma por C_6 temos

$$\left\|x^\beta D_x^\alpha u\right\|_{L^2} \leq M^{M\mu}\left(C^* C_1^{M+1} + C^* C_2 C_3 C_4 C_6 C^M + C^* C^M + C_5 C^M\right).$$

Portanto, assumindo que a constante indutiva C é suficientemente grande, obtemos:

$$\left\|x^\beta D_x^\alpha u\right\|_{L^2} \leq C^{M+1} M^{M\mu} \quad \text{para} \quad |\alpha|+|\beta| \leq M,$$

o que nos dá $u \in \mathcal{S}_\mu^\mu(\mathbb{R}^d)$, e portanto o teorema está provado.

□

6 CONCLUSÃO

Estudamos as principais propriedades dos espaços de Gelfand-Shilov do tipo $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$, com $\mu > 0$ e $\nu > 0$, os quais podem ser caracterizados pelas funções suaves $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ que satisfazem

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^d} \frac{|x^{\beta}\partial^{\alpha} f(x)|}{C^{|\alpha+\beta|}\alpha!^{\mu}\beta!^{\nu}} < \infty, \tag{6.1}$$

para alguma constante $C > 0$, ou pela condição equivalente

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \frac{e^{\epsilon|x|^{\frac{1}{\nu}}}|\partial^{\alpha} f(x)|}{C^{|\alpha|}\alpha!^{\mu}} < \infty, \tag{6.2}$$

para algum $C > 0$ e $\epsilon > 0$.

Introduzimos o espaço $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$, $\mu > 0$ e $\nu > 0$, demonstramos suas principais propriedades e também estimativas auxiliares para a caracterização de tais espaços. Apresentamos ainda uma forma de se introduzir uma topologia limite indutiva em $\mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d)$, $\mu > 1$, através da sequência de espaços de Banach $\mathcal{S}^{\mu}_{\mu,C}(\mathbb{R}^d)$, a serem definidos.

Exibimos diversos resultados que caracterizam de forma mais precisa os espaços $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$. No Teorema 4.1 são exibidas diversas estimativas equivalentes para funções em $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$, com $\mu+\nu \geq 1$, as quais são necessárias ao desenvolvimento do trabalho. Um segundo resultado interessante é dado pelo Teorema 4.6 onde se demonstra que, sob certas condições nos índices μ e ν, funções em $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$ possuem extensões analíticas. Uma consequência interessante deste resultado é o Teorema 4.9, no qual se demonstra a trivialidade do espaço $\mathcal{S}^{\mu}_{\nu}(\mathbb{R}^d)$ quando $\mu + \nu < 1$. Este resultado pode ser visto com uma versão do Princípio da Incerteza de Heisenberg, o qual expressa genericamente que uma função f e sua transformada não podem ambas decaírem rapidamente no infinito.

Por fim, investigamos a regularidade global das soluções de equações do tipo $Pu = f \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d)$, $\mu \geq 1/2$, sendo P um operador diferencial de ordem m com coeficientes polinomiais, cujo símbolo principal satisfaz uma condição elíptica global. Após analisarmos algumas propriedades do oscilador harmônico de Schrödinger

$$H = -\Delta + |x|^2, \;\; x \in \mathbb{R}^d,$$

enunciamos e demonstramos o principal resultado deste trabalho, o qual pode ser encontrado na referência (Nicola; Rodino, 2010).

Teorema. *Sejam P um operador como descrito acima e $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ uma solução da equação*

$$Pu = f \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d), \;\; \mu \geq 1/2.$$

Nestas condições, temos que $u \in \mathcal{S}^{\mu}_{\mu}(\mathbb{R}^d)$. Em particular, se $f \equiv 0$ então $u \in \mathcal{S}^{1/2}_{1/2}(\mathbb{R}^d)$.

REFERÊNCIAS

GELFAND, I. M.; SHILOV. G. E.. *Generalized functions*: Spaces of fundamental and generalized functions. Nova York, Londres: Academic Press, v.2, 1968.

GELFAND, I. M.; SHILOV. G. E.. *Generalized functions*: Theory of differential equations. Nova York, Londres: Academic Press, v.3, 1967.

HÖRMANDER, L.. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Berlim: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.

HOUNIE, J. *Teoria elementar das distribuições.* Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

NICOLA, F.; RODINO, L.. *Global Pseudo-Differential Calculus on Euclidean Spaces.* Basileia: Birkhäuser Verlag, v.4, 2010.

PETRONILHO, G. *Ultradistribuições Gevrey periódicas em* $\mathbb{R}^n$. Apostila do curso apresentado na I EBED - UNICAMP, 2003.

WONG, M. W.. *An introduction to pseudo-differential operators.* Singapura: World Scientific Publishing Company, 2014.

ZANI, S. L.. *Hipoeliticidade global para operadores de segunda ordem.* 1988. 128 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos. 1988.