

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LEANDRO HIDEKI SIMIZU YORINORI

ANÁLISE VISCO-PLÁSTICA DE ESTABILIDADE DE TALUDES
PELO MÉTODO SEM MALHA ELEMENT-FREE GALERKIN UTILIZANDO A TÉCNICA DE
REDUÇÃO DA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO

CURITIBA

2021

LEANDRO HIDEKI SIMIZU YORINORI

ANÁLISE VISCO-PLÁSTICA DE ESTABILIDADE DE TALUDES
PELO MÉTODO SEM MALHA ELEMENT-FREE GALERKIN UTILIZANDO A TÉCNICA DE
REDUÇÃO DA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE da Universidade Federal do Paraná - Setor de Tecnologia, como requisito parcial para a obtenção do grau de "Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia", área de concentração em Mecânica Computacional

Orientador: Prof Roberto Dalledone Machado, DEng

CURITIBA

2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

Y61a Yorinori, Leandro Hideki Simizu
 Análise visco-plástica de estabilidade de taludes pelo método sem malha Element-Free Galerkin
 utilizando a técnica de redução da resistência ao cisalhamento [recurso eletrônico] / Leandro Hideki
 Simizu Yorinori. – Curitiba, 2021.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-
Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE, 2021.

Orientador: Roberto Dalledone Machado.

1. Taludes (Mecânica do solo) - Estabilidade. 2. Método dos Elementos Finitos.
3. Cisalhamento dos solos - Resistência. I. Universidade Federal do Paraná. II. Machado,
Roberto Dalledone. III. Título.

CDD: 620.11245

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

ATA Nº351

**ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA**

No dia vinte e seis de fevereiro de dois mil e vinte e um às 14:00 horas, na sala TEAMS, VÍDEO CONFERÊNCIA, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de dissertação do mestrando **LEANDRO HIDEKI SIMIZU YORINORI**, intitulada: **ANÁLISE VISCO-PLÁSTICA DE ESTABILIDADE DE TALUDES PELO MÉTODO SEM MALHA ELEMENT-FREE GALERKIN UTILIZANDO A TÉCNICA DE REDUÇÃO DA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO DALLEDONE MACHADO. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: ROBERTO DALLEDONE MACHADO (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), EDUARDO DELL AVANZI (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), JOÃO ELIAS ABDALLA FILHO (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela APROVAÇÃO. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de mestre está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, ROBERTO DALLEDONE MACHADO, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

CURITIBA, 26 de Fevereiro de 2021.

Assinatura Eletrônica

02/03/2021 07:28:18.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

01/03/2021 10:29:52.0

EDUARDO DELL AVANZI

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

01/03/2021 12:04:44.0

JOÃO ELIAS ABDALLA FILHO

Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LEANDRO HIDEKI SIMIZU YORINORI** intitulada: **ANÁLISE VISCO-PLÁSTICA DE ESTABILIDADE DE TALUDES PELO MÉTODO SEM MALHA ELEMENT-FREE GALERKIN UTILIZANDO A TÉCNICA DE REDUÇÃO DA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO DALLEDONE MACHADO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 26 de Fevereiro de 2021.

Assinatura Eletrônica

02/03/2021 07:28:18.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

01/03/2021 10:29:52.0

EDUARDO DELL AVANZI

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

01/03/2021 12:04:44.0

JOÃO ELIAS ABDALLA FILHO

Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

"Scientific understanding proceeds by way of constructing and analysing models of the segments or aspects of reality under study. The purpose of these models is not to give a mirror image of reality, not to include all its elements in their exact sizes and proportions, but rather to single out and make available for intensive investigation those elements which are decisive. We abstract from the non-essentials, we blot out the unimportant to get an unobstructed view of the important, we magnify in order to improve the range and accuracy of our observation. A model is, and must be, unrealistic in the sense in which the word is most commonly used. Nevertheless, and in a sense, paradoxically, if it is a good model it provides the key to understanding reality."

(Baran and Sweezy, 1968)

RESUMO

A maioria das análises de estabilidade de taludes são realizadas com versões computacionais dos tradicionais Métodos de Equilíbrio Limite (LEM) ou Método dos Elementos Finitos (FEM). O FEM leva vantagens sobre os LEM por considerar a relação de tensão-deformação do solo e não ser necessário que hipóteses sejam assumidas sobre a forma e localização do mecanismo de falha. Apesar do uso consagrado, o FEM apresenta limitações. Muitas aplicações da engenharia geotécnica envolvem grandes deformações, e neste aspecto o FEM apresenta dificuldades devido ao problema de distorção de malha inerente ao método. Tendo isto em mente, torna-se atrativo a utilização dos chamados Métodos Sem Malha (MFree). Neste trabalho, o método sem malha Element-Free Galerkin (EFG) é aplicado na análise de estabilidade de taludes. Diversas análises de estabilidade de taludes são realizadas para demonstrar a capacidade do modelo EFG. O estado plano de deformações é empregado para a análise de taludes homogêneos e isotrópicos de solo seco. A análise não-linear utilizando o modelo EFG com a Técnica de redução de resistência ao cisalhamento é aplicada para determinar o Fator de Segurança e superfície potencial de ruptura. Os valores de Fator de Segurança obtidos pelo modelo EFG proposto estão de acordo com valores encontrados na literatura obtidos por métodos clássicos FEM e LEM, além de métodos MFree. O critério de ruptura é adotado como sendo a incapacidade dos deslocamentos nodais convergirem em um número limite de iterações que é prescrito. A localização e forma da superfície potencial de ruptura são obtidas de forma natural pelos resultados de deformações ou tensões principais plásticas. Deste modo, a análise de deformações ou tensões principais plásticas torna-se mais uma alternativa para verificar se o talude se encontra na iminência da ruptura.

Palavras-chaves: Análise de estabilidade de taludes. Método Element-Free Galerkin. Método Sem Malha.

ABSTRACT

The majority of slope stability analyses are performed using either the computational approach of traditional Limit Equilibrium Methods (LEM) or the Finite Element Methods (FEM). FEM has advantages over LEM, since it takes into account the stress-strain relationship for soils and it does not require any a priori assumptions about form and location of failure mechanism. Despite its advances, FEM has its own limitations. Several applications in geotechnical engineering involve large displacements, and FEM has difficulties to handle this kind of problems due to the mesh distortion inherent to the method. To overcome this problem, it is attractive to employ meshless methods. In this paper the meshless method Element-Free Galerkin (EFG) is applied to the slope stability analysis. Several analyses are performed to demonstrate the capability of the EFG model to assess the slope stability. The results obtained are compared with literature values. Plane strain state is employed to the stability analyses of homogeneous, isotropic and dry soil slope. A non-linear EFG approach with the shear strength reduction technique is applied to assess the factor of safety and potential slip surface. The results show good agreements with values found in the literature of classical methods, like LEM and FEM, and with meshless methods. The failure criterion adopted is the incapability of the algorithm to converge within a user-specified maximum number of iterations. The location and form of the potential slip surface are naturally obtained from the results of displacements and principal plastic strains. Therefore, the principal plastic stress or strain analysis becomes a strong alternative to verify the slope stability state.

Key-words: Slope stability analyses. Element-Free Galerkin Method. Meshless Methods.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – Ilustração de um talude e as partes que o compõe. H é a altura do talude e DH é a altura do talude incluindo a camada de fundação.	22
FIGURA 2 – Fluxograma com procedimentos de solução para problemas de valor de contorno utilizando duas abordagens diferentes, o consagrado FEM e os métodos sem malha (MFree).	37
FIGURA 3 – Representação do domínio por (a) FEM e (b) MFree.	38
FIGURA 4 – Diversas formas de representações (elíptica, circular e retangular) do domínio de suporte local.	38
FIGURA 5 – Domínio representado através de domínios de suporte retangular. x_Q é o ponto de interesse (geralmente um ponto de quadratura ou um nó de campo), Ω_s é o domínio de suporte local, r_{sx} e r_{sy} são os espaçamentos nodais médios no domínio de suporte nas direções x e y , respectivamente. Cada ponto de interesse define um domínio de suporte local.	40
FIGURA 6 – A função aproximada $u^h(x)$ e parâmetros nodais u_i na aproximação MLS. Note que, em geral, $u^h(x)$ não passa pelos valores nodais. Portanto, não possui a propriedade do delta de Kronecker.	48
FIGURA 7 – Células de fundo utilizadas para a integração.	50
FIGURA 8 – Método de rigidez constante. As setas indicam as iterações.	62
FIGURA 9 – Relação tensão-deformação elasto-perfeitamente plástica.	63
FIGURA 10 – Representação das tensões no espaço das tensões principais ou espaço de tensões de Haigh-Westergaard.	65
FIGURA 11 – Estado de tensões em um ponto projetado em um plano desviador.	66
FIGURA 12 – Critério de ruptura de Mohr-Coulomb	67
FIGURA 13 – Algoritmo do modelo visco-plástico.	73
FIGURA 14 – Viga em balanço submetida a uma carga com distribuição parabólica na extremidade livre	76
FIGURA 15 – Configuração deformada e indeformada obtidas utilizando o EFG com 175 nós de campo.	78
FIGURA 16 – Deflexões ao longo de $y = 0$. Os valores obtidos pelo modelo EFG estão de acordo com a solução analítica.	79
FIGURA 17 – Tensões normais σ_x em $x = L/2$. Os valores obtidos pelo modelo EFG estão de acordo com a solução analítica.	80
FIGURA 18 – Tensões cisalhantes τ_{xy} em $x = L/2$. Os valores obtidos pelo modelo EFG estão de acordo com a solução analítica.	80

FIGURA 19 – Geometria do Talude 1. Solo homogêneo com ângulo (2:1). $\phi_s = 20^\circ$, $c/\gamma_s H = 0.05$	81
FIGURA 20 – Talude 1: Análise de convergência dos deslocamentos adimensionais δ_{max}^{adim} para diferentes números de nós de campos, N.	83
FIGURA 21 – Comparação dos resultados de deslocamentos adimensionais δ_{max}^{adim} obtidos pelo modelo EFG proposto e por Griffiths e Lane (1999) com o FEM.	83
FIGURA 22 – Deslocamentos adimensionais (em preto) e número de iterações para convergência (em cinza) para diferentes valores de FOS. Valores de FOS obtidos pelos métodos clássicos também são apresentados.	84
FIGURA 23 – Deslocamentos adimensionais (em preto) e número de iterações para convergência (em cinza) para valores de FOS entre 1.35 e 1.40	87
FIGURA 24 – Talude 1: Mapas de deformações plásticas longitudinais ε_{xx}^{vp} em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das deformações ε_{xx}^{vp} até a ruptura ocorrer em FOS=1.40	89
FIGURA 25 – Talude 1: Mapas de deformações plásticas angulares ε_{xy}^{vp} em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das deformações ε_{xy}^{vp} até a ruptura ocorrer em FOS=1.40	90
FIGURA 26 – Talude 1: Mapas de tensões totais normais σ_x em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das tensões σ_x até a ruptura ocorrer em FOS=1.40. A unidade das tensões é $[N/m^2]$	91
FIGURA 27 – Talude 1: Mapas de tensões totais cisalhantes τ_{xy} em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das tensões τ_{xy} até a ruptura ocorrer em FOS=1.40. A unidade das tensões é $[N/m^2]$	92
FIGURA 28 – Talude 1: Mapas de deformações principais e tensões principais capturam a superfície potencial de ruptura para FOS=1.40	93
FIGURA 29 – Talude 1: Configuração deformada e vetores de deslocamentos nodais antes e depois da ruptura do talude.	94
FIGURA 30 – Talude 1: Comportamento do talude na ruptura e identificação da superfície potencial de ruptura. Resultados de FOS=1.38 representam o comportamento do talude na ruptura.	95
FIGURA 31 – Talude 1: Comparação das Superfícies potenciais de ruptura obtidas pelo software SLOPE/W e modelo EFG para talude com $c/\gamma_s H = 0.05$	96
FIGURA 32 – Geometria do Talude 2. Solo homogêneo com ângulo (2:1); $H=1.0$, $D=1.5$. $\phi_s = 20^\circ$, $c/\gamma_s H = 0.05$	97
FIGURA 33 – Talude 2: Análise de convergência dos deslocamentos adimensionais para diferentes números de nós utilizados na discretização do domínio	98
FIGURA 34 – Talude 2: Deslocamentos adimensionais (em preto) e número de iterações para convergência (em cinza) para diferentes valores de FOS. Um grande salto nos valores de deslocamentos e iterações ocorre em FOS=1.40	98

FIGURA 35 – Talude 2: Deslocamentos adimensionais (em preto) e número de iterações para convergência (em cinza) para os valores de FOS=[1.35; 1.36; 1.37; 1.38]. Um salto nos valores de deslocamentos e iterações ocorre em FOS=1.37 e 1.38	100
FIGURA 36 – Talude 2: Mapas de deformações plásticas longitudinais ε_{xx}^{vp} em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das deformações ε_{xx}^{vp} até a ruptura ocorrer em FOS=1.40	102
FIGURA 37 – Talude 2: Mapas de distorções angulares plásticas ε_{xy}^{vp} em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das distorções angulares ε_{xy}^{vp} até a ruptura ocorrer em FOS=1.40	103
FIGURA 38 – Talude 2: Configuração deformada e vetores de deslocamentos nodais antes e depois da ruptura do talude.	104
FIGURA 39 – Talude 2: Contribuições das deformações plásticas em FOS=1.40 para a identificação da superfície potencial de ruptura.	105
FIGURA 40 – Talude 2: Análise minuciosa para a identificação do Fator de Segurança que leva o talude à ruptura. São analisadas as deformações principais plásticas ε_1^{vp}	106
FIGURA 41 – Talude 2: Comportamento do talude na ruptura e identificação da superfície potencial de ruptura. Resultados de FOS=1.38 representam o comportamento do talude na ruptura.	107
FIGURA 42 – Talude 2: Comparação das Superfícies potenciais de ruptura obtidas pelo software SLOPE/W e modelo EFG para talude com $c/\gamma_s H = 0.05$	108
FIGURA 43 – Geometria do Talude 3. Solo homogêneo com ângulo (2:1); H=1.0, D=1.5. $\phi_s = 20^\circ$, $c/\gamma_s H = 0.075$	109
FIGURA 44 – Talude 3: Deslocamentos adimensionais (em preto) e número de iterações para convergência (em cinza) para diferentes valores de FOS. Um grande salto nos valores de deslocamentos e iterações ocorre em FOS=1.60	110
FIGURA 45 – Talude 3: Análise minuciosa para a identificação do Fator de Segurança que leva o talude à ruptura. São analisadas as deformações principais plásticas ε_1^{vp}	112
FIGURA 46 – Talude 3: Comportamento do talude na ruptura e identificação da superfície potencial de ruptura. Resultados de FOS=1.60 representam o comportamento do talude na ruptura.	113
FIGURA 47 – Talude 3: Comparação das Superfícies potenciais de ruptura obtidas pelo software SLOPE/W e modelo EFG.	114

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 –	Quadratura de Gauss-Legendre para $-1 \leq \xi \leq 1$	58
TABELA 2 –	Parâmetros do solo utilizados no Talude 1 e 2. Solo homogêneo, isotrópico e seco.	82
TABELA 3 –	Número de nós utilizados em cada análise para o Talude 1.	82
TABELA 4 –	Talude 1: Resultados de deslocamentos adimensionais e número de iterações para convergência para diferentes valores de FOS para o modelo EFG e FEM.	84
TABELA 5 –	Talude 1: Comparação de Fatores de Segurança da literatura com o obtido pelo modelo EFG proposto	87
TABELA 6 –	Número de nós utilizados em cada análise para o Talude 2.	97
TABELA 7 –	Talude 2: Resultados de deslocamentos adimensionais e número de iterações para convergência para diferentes valores de FOS.	99
TABELA 8 –	Talude 2: Fator de Segurança obtido pelo modelo EFG proposto é comparado com valores da literatura.	101
TABELA 9 –	Parâmetros do solo utilizados no Talude 3. Solo homogêneo, isotrópico e seco.	109
TABELA 10 –	Talude 3: Resultados de deslocamentos adimensionais e número de iterações para convergência para diferentes valores de FOS.	110
TABELA 11 –	Talude 3: Comparação de Fatores de Segurança obtidos por Gago, Mužík e Bulkova (2019) através de diversos métodos e pelo modelo EFG proposto	111

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNM	<i>Boundary Node Method</i>
BPIM	<i>Boundary Point Interpolation Method</i>
DEM ¹	<i>Diffuse Element Method</i>
DEM ²	<i>Discrete Element Method</i>
EDP	Equações Diferenciais Parciais
EFG	<i>Element-Free Galerkin</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i> ou Método dos Elementos Finitos
FOS	Fator de Segurança ou <i>Factor of Safety</i>
GFEM	<i>Generalized Finite Element Method</i>
GPD3D	<i>General Particle Dynamics 3D</i>
GSMF	<i>Generalized-strain Mesh-Free</i>
LEM	<i>Limit Equilibrium Methods</i> ou Métodos de Equilíbrio Limite
LPIM	<i>Local Point Interpolation Method</i>
LRPIM	<i>Local Radial Point Interpolation Method</i>
MFree	<i>MeshFree</i> mas também Métodos Sem Malha, ou <i>Meshless</i>
MLBIE	<i>Meshless Local Boundary Integral Equation</i>
MLPG	<i>Meshless Local Petrov-Galerkin</i>
MLS	<i>Moving Least Square</i>
MM	Métodos <i>Meshless</i>
MSM	Método Sem Malha
PIM	<i>Point Interpolation Methods</i>
PUFEM	<i>Partition of Unity Finite Element Method</i>
PUM	<i>Partition of Unity Method</i>
PVC	Problema de valor de contorno

RBDMF	<i>Rigidy-body Displacement Mesh-Free</i>
RKPM	<i>Reproducing Kernel Particle Method</i>
RPIM	<i>Radial Point Interpolation Method</i>
SL-RKPM	<i>Semi Lagrangian Reproducing Kernel Particle Method</i>
SPH	<i>Smoothed Particle Hydrodynamics</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

s	Resistência ao cisalhamento do solo disponível
τ	Tensão de cisalhamento de equilíbrio
c	Coesão do solo
ϕ_s	Ângulo de atrito do solo
σ	Tensão normal total no plano de cisalhamento
c_d	Coesão mobilizada do solo
ϕ_d	Ângulo de atrito mobilizado do solo
$\mathbf{x}$ ou $\mathbf{x}_Q$	ponto de interesse
ϕ_i	Função de forma nodal
$\mathbf{u}_i$	Vetor deslocamento nodal
n	Número de nós presentes no domínio de suporte
Φ	Vetor com valores nodais das funções de forma para todos os nós no domínio de suporte
$\mathbf{U}_s$	Vetor com valores nodais dos parâmetros deslocamentos ou deslocamentos para todos os nós no domínio de suporte
Ω_s	Domínio de suporte local
Ω	Domínio do problema
d_s	Dimensão do domínio de suporte
α_s	Tamanho adimensional do domínio de suporte
d_c	Espaçamento nodal próximo ao ponto de interesse
A_s	Área do domínio de suporte
n_A	Número de nós dentro do domínio de suporte auxiliar
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$	Função de deslocamentos
$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$	Aproximação da função de deslocamentos

m	Número de funções que compõe a base
$p_j(\mathbf{x})$	Monômio da função de base polinomial
$\mathbf{a}$	Vetor de coeficientes
p	Ordem da base polinomial completa
$\mathbf{p}$	Vetor de funções da base
$\widehat{W}$	Função peso
$\mathbf{A}(\mathbf{x})$	Matriz de momentos ponderada
$\mathbf{B}$	Matriz de deformações. Também é a matriz auxiliar para cálculo da função de forma
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\mathbf{L}$	Operador diferencial
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor de tensões
$\mathbf{b}$	Vetor de forças de corpo
$\bar{\mathbf{t}}$	Tração prescrita no contorno. Condição de contorno natural
$\bar{\mathbf{u}}$	Condição de contorno essencial
$\mathbf{n}$	Vetor unitário normal ao contorno natural em um dado ponto
$\mathbf{D}$	Matriz Constitutiva
$\mathbf{D}^e$	Matriz constitutiva elástica
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
ν	Coeficiente de Poisson
$\boldsymbol{\alpha}$	Matriz diagonal com coeficientes de penalidade
α_i	Coeficiente de penalidade
N	Número total de nós de campo
$\mathbf{K}_{IJ}$	Matriz de rigidez nodal
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global
$\mathbf{U}$	Vetor global de parâmetros de deslocamento

$\mathbf{F}_I^{(b)}$	Vetor nodal de forças de corpo
$\mathbf{F}^{(b)}$	Vetor global de forças de corpo
$\mathbf{F}_I^{(t)}$	Vetor de forças de tração nodal
$\mathbf{F}^{(t)}$	Vetor de forças de tração global
$\mathbf{K}_{IJ}^\alpha$	Matriz de penalidades de rigidez nodal
$\mathbf{K}^\alpha$	Matriz de penalidades de rigidez global
$\mathbf{F}_I^\alpha$	Vetor de penalidades de forças nodal
$\mathbf{F}^\alpha$	Vetor de penalidades de forças global
$\mathbf{F}$	Vetor de forças global
n_c	Número de células de fundo
$f(x)$	Integrando
Ω_k	Domínio da k-ésima célula de fundo
n_g	Número de pontos de Gauss em uma célula de fundo
$(\mathbf{x}_{Qi})$	Coordenada do ponto de Gauss
$\hat{w}_i$	Peso de integração
$\mathbf{J}_{ik}^D$ ou $\mathbf{J}_{ik}^B$	Matriz jacobiana
ξ	Coordenada do espaço paramétrico
$n_{gp}^{(1D)}$	Número de pontos de Gauss adotados em uma única direção
$\hat{w}_k$	Peso de integração (2D)
n_{sc}	Número total de sub-curvas
n_Q	Número total de pontos de quadratura
$\tilde{N}$	Número de nós de campo não fixados
F	Função de falha ou de plastificação
σ_m	Média das tensões normais (invariante de tensão)
J_2, J_3	Invariantes do tensor de tensões desviadora
ξ	Componente hidrostática (invariante de tensão, coordenada de Haigh-Westergaard)

ρ	Componente desviadora (invariante de tensão, coordenada de Haigh-Westergaard)
θ	Ângulo Lode (invariante de tensão, coordenada de Haigh-Westergaard)
$\bar{\sigma}$	Tensão de von Mises ou tensão equivalente (invariante de tensão)
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais
Q	Função potencial de plastificação
ψ	Ângulo de dilatação
$\dot{\epsilon}^{vp}$	Taxa de deformação visco-plástica
$\frac{\partial Q}{\partial \sigma}$	Derivada da função potencial de plastificação em relação a tensões
$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_m}, \frac{\partial Q}{\partial J_2}, \frac{\partial Q}{\partial J_3}$	Derivadas da função potencial de plastificação em relação aos invariantes de tensão
M_1, M_2, M_3	Matrizes auxiliares no cálculo da derivada da função potencial de plastificação em relação a tensões
Δt	Passo de tempo
$\Delta \epsilon^{vp}$	Variação de deformação visco-plástica
ϵ^{tot}	Deformações totais
ϵ^e	Deformações elásticas
ϵ^{vp}	Deformações visco-plásticas
ϵ_0	Deformações iniciais
σ^e	Tensões elásticas
σ_0	Tensões iniciais
$\bar{F}$	Vetor de forças que levam em conta o estágio inicial do solo
$\hat{K}$	Matriz de rigidez global no contexto visco-plástico
$\hat{F}$	Vetor de forças globais no contexto visco-plástico
V	Vetor de forças globais que inclui as parcelas de redistribuição de tensões
γ_s	Peso específico do solo
F_g	cargas devido à gravidade
c_f	coesão reduzida

ϕ_f	ângulo de atrito reduzido
L	Comprimento da viga
D	Largura da viga ou fator que multiplica a altura do talude para obter a altura total do talude com camada de fundação
P	Carga
I	Momento de inércia
e_{norm}	Norma de energia
H	Altura do talude
δ_{max}^{adim}	Deslocamento adimensional
ε_{xx}^{vp}	Deformações plásticas longitudinais
ε_{xy}^{vp}	Distorção angular plástica
σ_x	Tensão total normal
τ_{xy}	Tensão total cisalhante
$(\varepsilon_{xy}^{vp})_{max}$	Distorção angular plástica máxima
$(\tau_{xy})_{max}$	Tensão total cisalhante máxima
ε_1^{vp}	Deformação principal plástica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	22
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
2.1	Métodos Sem Malha	27
2.2	Métodos utilizados na Análise de Estabilidade de Taludes	31
2.2.1	Métodos de Equilíbrio Limite	31
2.2.2	Método dos Elementos Finitos	33
2.2.3	Métodos Sem Malha	34
3	MÉTODO ELEMENT-FREE GALERKIN	36
3.1	Domínio de suporte	39
3.2	Moving Least Square (MLS)	41
3.2.1	Funções Peso	45
3.2.2	Propriedades das funções de forma MLS	47
3.3	Formulação do método Element-Free Galerkin	48
3.4	Aspectos de implementação numérica	56
3.4.1	Integração Numérica	56
3.4.2	Imposição de Condições de Contorno Essenciais - Método da Penalidade	60
4	ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE TALUDES UTILIZANDO O MÉTODO ELEMENT-FREE GALERKIN	62
4.1	Relação tensão-deformação	63
4.2	Invariantes de Tensão	64
4.3	Critério de Ruptura: Mohr-Coulomb	66
4.4	Visco Plasticidade	68
4.4.1	Deformações visco-plásticas	68
4.4.2	Obtenção do sistema de equações lineares utilizando modelo visco-plástico	70
4.4.3	Algoritmo visco-plástico para análise de estabilidade de taludes	72
5	RESULTADOS E ANÁLISES	76
5.1	Validação do Modelo Elástico	76
5.2	Resultados do Modelo Element-Free Galerkin com abordagem Visco-plástica aplicado na análise de estabilidade de taludes	81
5.2.1	Talude 1: Talude homogêneo sem camada de fundação	81
5.2.2	Talude 2: Talude homogêneo com camada de fundação	97
5.2.3	Talude 3: Talude homogêneo com camada de fundação	109

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS 115

REFERÊNCIAS 117

intempéries como o sol, chuva, vento, etc. A caracterização do material de taludes naturais só é possível através de um criterioso programa de prospecção, isto porque pode haver uma grande variação nas propriedades do material devido a diversos fatores como por exemplo ao desconhecimento de sua formação. Taludes artificiais são aqueles que são formados por ação antrópica. Comumente em obras da engenharia civil são necessárias construções de *taludes de aterro* que são aqueles construídos por deposição de material como os empregados na terraplanagem de fundações de terrenos irregulares. Escavações de encostas resultam em *taludes de corte*, que são taludes provenientes da retirada de material. Na construção civil, o talude mais utilizado é o artificial. Para este caso, como as propriedades geotécnicas do solo compactado são conhecidas os cálculos de estabilidade envolvem menos incertezas se comparados aos dos solos naturais.

A análise de estabilidade de taludes é uma análise quantitativa realizada para estimar o estado de equilíbrio que o talude se encontra com a finalidade de avaliar se existe a possibilidade de ruptura do talude e portanto verificar sua segurança. A análise ocorre através da determinação da relação entre a resistência ao cisalhamento do material que compõe o talude e as tensões cisalhantes que atuam sobre a superfície potencial de ruptura. A análise de estabilidade de taludes tem como objetivos a investigação dos potenciais mecanismos de falha; otimização de projetos com relação a segurança, confiabilidade e economia; projetos de medidas de mitigação para taludes instáveis; localização de áreas danificadas do talude e análise de sensibilidade para diferentes agentes instabilizantes.

Segundo [Duncan e Wright \(2005\)](#) é importante entender os agentes de instabilidade dos taludes por duas razões. Primeiramente para propósitos de desenvolvimento de projetos e construção de novos taludes, é relevante que seja possível antecipar as mudanças das propriedades do solo que podem sofrer alteração ao longo do tempo e condições de cargas e infiltração a que o talude estará sujeito. Segundo, para propósitos de restauração de taludes rompidos, é importante entender os elementos essenciais que levaram à ruptura para que isto não ocorra novamente. A partir das experiências de taludes que romperam pode-se tirar lições fundamentais acerca das etapas necessárias para projetar, construir e restaurar taludes de tal forma que eles se mantenham seguros e estáveis.

Independente dos vários agentes que possam causar a ruptura de um talude, é útil ter em mente que a exigência fundamental para a estabilidade de um talude é que a resistência ao cisalhamento do solo deve ser maior que as tensões cisalhantes requeridas para o equilíbrio. Dado isto, a principal causa de instabilidade é aquela que por alguma razão faz com que a resistência ao cisalhamento seja menor que a tensão cisalhante necessária para que o equilíbrio seja mantido. Isto pode ocorrer de duas formas:

- Através da diminuição da resistência ao cisalhamento do solo, como pode acontecer por exemplo quando há um aumento na poro pressão, existência de fraturamentos, aumento no índice de vazios, etc;

- Através do aumento da tensão de cisalhamento exigida para o equilíbrio. Ocorre por exemplo ao aplicar cargas no topo do talude, aumento do peso do solo devido a presença de água no solo, escavação no sopé do talude, ações de terremotos, etc).

A Análise de estabilidade de taludes atualmente é desenvolvida sobre duas abordagens, os *Métodos Probabilísticos* e *Métodos Determinísticos* (Tenório et al. (2018)). Nos métodos Probabilísticos a medida da segurança é feita por uma análise quantitativa em termos da probabilidade ou do risco de ocorrência da ruptura. Os Métodos Determinísticos são os mais largamente empregados e baseiam-se na obtenção do *Fator de Segurança* ou *Factor of Safety* (FOS), que representa o fator pelo qual a resistência ao cisalhamento deve ser reduzida para que se obtenha um estado limite de equilíbrio (ruptura iminente).

A abordagem clássica para realizar a análise de estabilidade de taludes é justamente feita ao avaliar as condições no estado de equilíbrio limite. Os métodos que utilizam esta abordagem são chamados de *Limit Equilibrium Methods* (LEM) ou *Métodos de Equilíbrio Limite*. Para os LEM primeiro é necessário assumir uma superfície de ruptura e sua forma. É avaliado o equilíbrio da massa de solo acima desta superfície e isto é feito admitindo apenas um único corpo livre (procedimento de massa) ou dividindo a massa de solo em diversas fatias verticais (método das fatias). Diversas superfícies de ruptura diferentes são consideradas e para cada uma delas é calculado o Fator de Segurança. A *superfície potencial de ruptura* é aquela que produz o Fator de Segurança mínimo (FOS_{min}). Uma característica dos LEM é que estes não levam em conta a relação tensão-deformação do solo, e portanto negligenciam o comportamento de deformação do solo. Outra característica comum a estes métodos é que necessitam que várias hipóteses sejam assumidas sobre as forças entre fatias, forma e localização da superfície de ruptura. Apesar de serem eficientes para muitos problemas de rotina, os LEM se tornam de difícil aplicação quando problemas mais complexos se apresentam.

O *Finite Element Method* (FEM) ou *Método dos Elementos Finitos* (Turner et al. (1956)) atualmente é um dos métodos mais amplamente utilizados nas mais diversas áreas do conhecimento. A análise de estabilidade de taludes representa uma área da geotecnia onde uma abordagem não-linear do FEM oferece claros benefícios em relação aos métodos clássicos como os LEM. O FEM incorpora o comportamento do solo na análise e utiliza a técnica de redução da resistência ao cisalhamento (e. g Zienkiewicz, Humpheson e Lewis (1975), Naylor e Pande (1981), Matsui e San (1992), Griffiths e Lane (1999)) para o cálculo do Fator de Segurança.

Segundo Griffiths e Lane (1999) e Bui et al. (2011b) a abordagem pelo FEM em análise de estabilidade de taludes possui algumas vantagens sobre os tradicionais LEM. As vantagens levantadas pelos autores são descritas a seguir.

1. O FEM leva em conta a relação tensão-deformação do solo, e portanto um comportamento do solo mais acurado pode ser estimado;

2. Não é necessário assumir hipóteses em relação a posição e forma da superfície de ruptura;
3. A ruptura ocorre "naturalmente" nas regiões em que a resistência ao cisalhamento do solo são incapazes de resistir as tensões cisalhantes mobilizadas, ou seja, a ruptura ocorre por uma consequência lógica da mudança dos resultados de tensão e deformação;
4. Visto que no FEM não há o conceito de fatias utilizado nos LEM, não é necessário assumir hipóteses em relação às forças entre fatias. A abordagem pelo FEM mantém o equilíbrio global até que a ruptura ocorra;
5. Caso informações realistas da compressibilidade do solo estejam disponíveis, as soluções pelo FEM oferecem boa referência sobre as deformações nos níveis de tensão vistas em campo;

Apesar de todas estas vantagens, o FEM apresenta limitações. Muitas aplicações da engenharia geotécnica envolvem grandes deformações. E neste aspecto o FEM apresenta dificuldades devido ao problema de distorção de malha inerente ao método. Um processo de reconstrução de malha pode ser empregado para tentar superar este problema, porém o processo é complexo e demanda um grande custo computacional e humano. Tendo isso em mente, torna-se atrativo a utilização dos chamados *Métodos Sem Malha (MFree)*. Os MFree não utilizam uma malha para a aproximação das variáveis de campo e por isso é possível tratar naturalmente de problemas com grandes deslocamentos. Essa aproximação é feita com base em nós que estão dentro de um domínio de suporte local. Alguns trabalhos que utilizam MFree na análise de estabilidade de taludes são listados a seguir:

- *Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)* (Bui et al. (2011b), Li et al. (2019));
- *Semi Lagrangian Reproducing Kernel Particle Methods (SL-RKPM)* (Kwok et al. (2014));
- *General Particle Dynamics (GPD3D)* (Zhou, Zhao e Qian (2015));
- *Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)* (Gago, Mužík e Bulko (2019)).

Os MFree são uma poderosa ferramenta para entender e quantificar os mecanismos de falha do solo para os problemas desafiadores de grandes deslocamentos. Até o momento, nenhum trabalho utilizou uma análise não linear do EFG para realizar a análise de estabilidade de taludes. Neste trabalho a análise de estabilidade de taludes é realizada com o método *Element-Free Galerkin (EFG)* desenvolvido por Belytschko, Lu e Gu (1994). Para capturar a natureza elasto-plástica do material é utilizado o modelo visco-plástico de Zienkiewicz e Corneau (1974).

Um modelo computacional foi desenvolvido com a utilização da linguagem de programação *Python* para efetuar análises bidimensionais no estado plano de deformações de

solos perfeitamente-plásticos submetidos ao critério de falha de Mohr-Coulomb. As fases de construção do vetor de cargas devido à gravidade, geração da matriz de rigidez e redistribuição de tensões demandam a resolução de integrais. Estas são calculadas por um processo de integração numérica e para isto são utilizadas células de fundo. Em cada célula de fundo são utilizados 16 pontos de Gauss dispostos em uma configuração (4×4) . Inicialmente o solo é considerado no regime elástico e é estabelecido o estado de tensão em cada ponto de Gauss. Estas tensões são utilizadas para calcular a função de plastificação/ruptura, F , construída com base no critério de Mohr-Coulomb. Caso a função F seja menor que zero em algum ponto de Gauss em particular isto significa que o presente estado de tensão está dentro da envoltória de ruptura de Mohr-Coulomb e portanto este ponto de Gauss permanece no regime elástico. Caso o estado de tensão recaia sobre ou fora a envoltória de ruptura (representado por valores de $F = 0$ e $F > 0$, respectivamente), então o ponto de Gauss está em processo de plastificação. As tensões plásticas são redistribuídas ao longo de todos os nós de campo utilizando o algoritmo visco-plástico de Zienkiewicz e Corneau (1974). A ruptura ocorre quando um número suficiente de pontos de Gauss plastificam permitindo que o mecanismo de falha se desenvolva.

O principal objetivo do trabalho é investigar se o modelo computacional desenvolvido é apto a realizar análises de estabilidade de taludes consistentes. Para isto diversas análises de estabilidade de taludes são realizadas para demonstrar a capacidade do modelo EFG. O estado plano de deformações é empregado para a análise de taludes homogêneos e isotrópicos de solo seco. A análise não-linear utilizando o modelo EFG com a *Técnica de redução de resistência ao cisalhamento* é aplicada para determinar o Fator de Segurança. Os resultados de Fator de Segurança alcançados são comparados com valores da literatura obtidos por métodos clássicos (LEM e FEM) e outros Métodos Sem Malha. Também é examinado se o modelo EFG proposto é capaz de identificar a superfície potencial de ruptura, capturar como se desenvolve o mecanismo de falha e o comportamento do solo pós-ruptura.

Este trabalho está organizado em seis capítulos. A seguir, uma revisão acerca dos Métodos Sem Malha e dos métodos empregados na análise de estabilidade de taludes é apresentada no Capítulo 2. Em seguida, no Capítulo 3 são apresentados todos os processos envolvidos na formulação do método Element-Free Galerkin. No Capítulo 4 é apresentado o algoritmo visco-plástico e como este se relaciona com o método EFG. As diversas análises de estabilidade de taludes realizadas com o modelo EFG são exibidas no Capítulo 5. As considerações finais do trabalho são expressas no Capítulo 6.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são apresentados os fundamentos dos Métodos Sem Malha. São tratados os diversos métodos Métodos Sem Malha existentes, no que baseiam suas formulações e aproximações, suas aplicações e vantagens sobre o Método dos Elementos Finitos. Em seguida é mostrado o processo de evolução dos métodos determinísticos empregados na análise de estabilidade de taludes, desde os Métodos de Equilíbrio Limite, passando pelo Método dos Elementos Finitos e terminando nos Métodos Sem Malha.

2.1 MÉTODOS SEM MALHA

Os problemas físicos frequentemente são representados por equações diferenciais parciais e muitas vezes é necessário recorrer aos métodos numéricos para a solução destes problemas. Em 1956, [Turner et al. \(1956\)](#) deram os primeiros passos para o desenvolvimento do *Finite Element Method (FEM)* ou *Método dos Elementos Finitos* que viria a se tornar o método computacional mais utilizado em diversas áreas do conhecimento tanto para aplicação na área acadêmica quanto industrial. A aproximação pelo FEM se baseia em nós dispersos pelo domínio do problema que necessitam de informações a priori de como estes nós se conectam entre si para formar um *elemento*. A união destes elementos formam uma *malha*.

Apesar do grande sucesso do FEM ele apresenta limitações. Sua interpolação é baseada em uma malha e devido a isto sofre com problemas ocasionados por esta. Malhas distorcidas ou de má qualidade levam a grandes erros de aproximação. Para lidar com isto é necessário um processo de remalhamento (recriação da malha) que despende um grande custo computacional e humano. Foi com o intuito de eliminar parte das dificuldades associadas as aproximações baseadas em malha que surgiram os métodos sem malha.

Os *Métodos Sem Malha (MSM)*, *Métodos Meshless (MM)* ou ainda métodos *Meshfree (MFree)* apresentam estas várias designações e vêm sendo largamente estudados nas últimas décadas nas mais variadas áreas de aplicação. Neste trabalho a designação adotada para métodos sem malha será *MFree*.

[Liu \(2002\)](#) define os métodos MFree como:

"Um método sem malha é um método utilizado para estabelecer um sistema de equações algébricas para todo o domínio do problema sem a utilização de uma malha predefinida para a discretização do domínio."

Os métodos MFree fazem a representação do domínio e seu contorno por meio de um conjunto de nós distribuídos de forma esparsa. A aproximação das variáveis de campo é feita com o auxílio de um domínio local. Nenhuma informação a priori entre as relações entre os nós

é necessária para a realização das aproximações. A exigência mínima para um método MFree é que a aproximação não seja baseada em uma malha. Por outro lado, a exigência ideal é de que nenhum tipo de malha seja necessário durante todo o processo de formulação do método, seja na aproximação da variável de campo ou na construção do sistema algébrico de equações.

No final dos anos 70, [Lucy \(1977\)](#) e [Gingold e Monaghan \(1977\)](#) desenvolveram um dos primeiros métodos MFree a ser amplamente aplicado, o chamado *Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)*. Inicialmente utilizado para modelar fenômenos astrofísicos, o SPH se tornou um dos MFree mais estabelecidos. O SPH é um método puramente lagrangiano em que partículas carregam variáveis de campo como massa, densidade, tensor de tensão, etc. As aproximações das funções de forma são feitas com formas integrais. A ideia básica do SPH é que a configuração do sistema pode ser representada por partículas arbitrariamente distribuídas e a aproximação pelo SPH é utilizada para discretizar a forma forte das equações diferenciais do problema. [Libersky et al. \(1993\)](#) foi o primeiro trabalho a aplicar o SPH na mecânica dos sólidos. O SPH vem sendo aplicado em diversas áreas como em escoamento incompressível ([Liu et al. \(2001\)](#)); transferência de calor ([Cleary \(1998\)](#)); explosão e penetração ([Liu, Liu e Lam \(2001a\)](#)); análise de estabilidade de taludes incluindo mecanismos pós ruptura ([Bui et al. \(2011b\)](#)). Dentre as maiores desvantagens do método pode-se citar a instabilidade de tensões, falta de consistência nas aproximações das variáveis de campo, e dificuldade na imposição das condições de contorno. Muitos pesquisadores estão se dedicando em modificar e aperfeiçoar o SPH ([Monaghan e Lattanzio \(1985\)](#), [Swegle, Hicks e Attaway \(1995\)](#), [Morris \(1996\)](#), [Bui e Fukagawa \(2011a\)](#)).

O *Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)* foi desenvolvido por [Liu, Jun e Zhang \(1995\)](#) para melhorar as aproximações utilizadas no SPH a fim de satisfazer os requerimentos de consistência através de uma função de correção. Além disso, apesar de ser um método global como o SPH, o RKPM se baseia na forma fraca para obter o sistema discreto de equações. Este método tem sido empregado na solução de problemas não lineares e de grandes deformações ([Chen et al. \(1996\)](#)); estruturas inelásticas ([Chen, Pan e Wu \(1997\)](#)); estruturas acústicas ([Uras et al. \(1997\)](#)); dinâmica dos fluídos ([Liu et al. \(1997\)](#)); etc.

De forma geral, há menos pesquisas sobre métodos MFree baseados na forma forte, como o SPH. [Liu e Gu \(2005\)](#) diz que isto ocorre provavelmente devido a menor robustez dos métodos baseados na forma forte quando comparado aos baseados na forma fraca. Além disso grande parte das pesquisas se concentram na utilização do Método dos Elementos Finitos que se baseia na forma fraca, assim é natural que isto influencie na utilização de métodos MFree baseados na forma fraca. Foi a partir da década de 90 que uma diversidade de métodos sem malha baseados na forma fraca foi desenvolvida. Exemplos destes métodos são listados a seguir:

- *Diffuse Element Method (DEM)* ([Nayroles, Touzot e Villon \(1992\)](#))
- *Element-Free Galerkin (EFG)* ([Belytschko, Lu e Gu \(1994\)](#))

- *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM) (Liu, Jun e Zhang (1995))
- *Point Interpolation Methods* (PIM) (Liu e Gu (2001), Wang e Liu (2000))
- *Boundary Node Methods* (BNM) (Mukherjee e Mukherjee (1997))
- *Boundary Point Interpolation Method* (BPIM) (Gu e Liu (2001e), Gu e Liu (2002a), Gu e Liu (2003b))

Nos MFree baseados na forma fraca, as *Equações Diferenciais Parciais (EDP)* que governam o problema são primeiro transformadas em equações integrais reconhecidas como *forma fraca*, então a partir destas equações é obtido um sistema algébrico de equações através de um processo de integração numérica que pode ser construído globalmente ou localmente. A abordagem global necessita que seja adotado um conjunto de *células de fundo* para realizar as integrações e devido a isto os métodos que adotam estas células de fundo não são verdadeiramente métodos sem malha (apenas cumprem a requisição mínima). Os métodos costumam se diferenciar pela forma na qual a aproximação da variável de campo é realizada; na forma em que o domínio é representado e no próprio processo de formulação.

O primeiro MFree baseado na forma fraca foi desenvolvido por [Nayroles, Touzot e Villon \(1992\)](#) e é conhecido por *Diffuse Element Method (DEM)* ¹. O método utiliza a aproximação chamada *Moving Least Squares (MLS)* para obtenção das funções de forma. Originalmente a aproximação MLS foi desenvolvida por [Lancaster e Salkauskas \(1981\)](#) para ajuste de dados e construção de superfícies. O desenvolvimento da aproximação MLS foi muito importante para o desenvolvimento de diversos MFree baseados na forma fraca, pois o MLS fornece uma aproximação contínua para as funções de campo sobre todo o domínio do problema.

Um dos métodos que derivam do DEM é o *Element-Free Galerkin (EFG)*. Proposto em 1994 por [Belytschko, Lu e Gu \(1994\)](#), o EFG utiliza a aproximação MLS sobre a forma fraca de Galerkin para estabelecer um sistema algébrico de equações. Em contraste com o DEM, o EFG passa a empregar alguns termos das derivadas parciais dos interpolantes que haviam sido omitidas no DEM. Além disso, as condições de contorno essenciais são aplicadas de forma mais apropriada. Estes fatores conferiram ao método uma melhor estabilidade e acurácia, e por isso o EFG atualmente é mais empregado que o DEM.

[Belytschko, Lu e Gu \(1994\)](#) mostraram que o EFG é bastante acurado e que a taxa de convergência do EFG obtida em testes numéricos é superior a do FEM. Além disso, mostraram que a irregularidade dos nós não afeta a performance do método. Devido sua estabilidade e acurácia o EFG vem sendo largamente empregado com sucesso em diversas áreas do conhecimento, como em problemas de fraturamento e propagação de trincas ([Belytschko, Gu e Lu \(1994b\)](#), [Belytschko et al. \(1995b\)](#), [Fleming et al. \(1997\)](#)). O EFG também é utilizado

¹ Não confundir com o *Discrete Element Method*.

para simular Viscous pressure forming (VPF) (Yuan et al. (2016)); propagação de onda e fratura dinâmica (Lu, Belytschko e Tabbara (1995)); entre outros. Também há propostas de acoplamentos de EFG com outros métodos, como por exemplo Belytschko, Organ e Krongauz (1995) propõem um método acoplado FEM-EFG.

Alguns dos trabalhos mais recentemente publicados acerca do EFG podem ser citados. Ding, Shen e Huo (2021) sugerem uma forma de estimar erros de problemas de contato quase-estáticos com o modelo de fricção de Tresca que utiliza o EFG. Unnikrishnan, Krishna e Arun (2020) utilizam o EFG para análise de vibração de membrana pré tensionada. Sendi e BelHadjSalah (2020) analisam problemas elástico e elasto-plásticos 2D com o EFG. Pathania, Eldho e Bottacin-Busolin (2020a) utilizam o EFG e *Particle swarm optimization* para otimizar projetos de bio-remediação in-situ. No trabalho subsequente Pathania e Eldho (2020b) utilizam o EFG para simular o acoplamento de escoamento solo-água e transporte de contaminantes. Tey et al. (2020) trazem um *review* do desenvolvimento e aplicações do método EFG na dinâmica de fluídos computacional.

Todos esses avanços nas pesquisas do método EFG o consolidaram na mecânica computacional. Isto ocorreu graças a aproximação MLS por conseguir estabilidade nas funções de aproximação, e por utilizar a forma fraca de Galerkin para gerar um sistema de equações discreto global estável e bem condicionado.

Para resolver as integrais presentes na forma fraca de Galerkin o EFG utiliza um processo de integração numérica global. Neste processo são utilizadas células de fundo e portanto o EFG não cumpre o requisito ideal de um método sem malha. Ao final do processo é construído o sistema de equações discreto.

A fim de superar a utilização das células de fundo para realizar a integração global, vários métodos MFree baseados na forma fraca local de Galerkin foram propostos e alguns deles são listados a seguir:

- *Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)* (Atluri e Zhu (1998a))
- *Meshless Local Boundary Integral Equation (MLBIE)* (Zhu, Zhang e Atluri (1998))
- *Local Point Interpolation Method (LPIM)* (Liu e Gu (2001))
- *Local Radial Point Interpolation Method (LRPIM)* (Liu et al. (2002b))

O mais popular destes métodos é o *Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)*, que também é derivado do DEM e utiliza a aproximação por MLS. A principal diferença do MLPG para o EFG, é que as integrações são realizadas sobre a forma fraca local de Galerkin em domínios locais e por isso não é necessário a utilização das células de fundo para a integração.

A maioria dos métodos citados utilizam bases *intrínsecas* para compor as funções da base de aproximação. Outros métodos que utilizam o conceito das chamadas bases *extrínsecas* e

partição da unidade (PU) foram desenvolvidos. Duarte e Oden (1996) desenvolveram o método *Hp-cloud* que utilizam bases extrínsecas. Melenk e Babuška (1996) propõem o *Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM)* e BABUŠKA e MELENK (1997) apresentam o *Partition of Unit Method (PUM)*. Estes trabalhos foram de grande importância para amadurecimento da ideia dos chamados métodos enriquecidos, um exemplo é o *Generalized Finite Element Method (GFEM)* de Strouboulis, Copps e Babuška (2000). O GFEM revela que diferentes partições da unidade podem ser utilizadas para a aproximação usual e a enriquecida.

Além de variações dos métodos sem malha já consagrados outros novos vem sendo desenvolvidos muito recentemente, como por exemplo o *Rigid-body Displacement Mesh-Free (RBDMF)* e *Generalized-strain Mesh-Free (GSMF)* ambos propostos por Oliveira e Portela (2016) para resolver problemas 2D de elasticidade linear.

O livro de Liu e Gu (2005) apresenta descrições detalhadas de métodos sem malha já consolidados como o PIM, RPIM, EFG, MLPG, etc. Liu aborda todo o embasamento teórico dos métodos além de aspectos de suas implementações computacionais. Outros trabalhos importantes de revisão dos métodos sem malha foram realizados por Fries e Matthies (2004) e Nguyen et al. (2008).

2.2 MÉTODOS UTILIZADOS NA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE TALUDES

2.2.1 Métodos de Equilíbrio Limite

Os projetos de estabilidade de taludes visam garantir que as forças de resistência ao cisalhamento do solo sejam suficientemente maiores que as forças que tendem a causar a ruptura do talude. A análise geralmente envolve o cálculo do *Fator de Segurança (Factor of Safety, FOS)* através de um dos muitos *Métodos de Equilíbrio Limite* ou *Limit Equilibrium Methods (LEM)* existentes. Tais métodos utilizam a mesma definição do fator de segurança e o calculam através de equações de equilíbrio estático. Os conceitos apresentados seguem a abordagem descrita no livro de Duncan e Wright (2005, Capítulo 6).

O *Fator de Segurança* ou *Factor of Safety (FOS)* é definido com base na resistência ao cisalhamento do solo como:

$$FOS = \frac{s}{\tau} \quad (2.1)$$

Onde s é a resistência ao cisalhamento do solo disponível e τ é a tensão de cisalhamento de equilíbrio. A tensão de cisalhamento de equilíbrio é a tensão mínima necessária para manter um talude estável (na iminência de instabilidade) e a partir da Equação 2.1 pode ser expressa como:

$$\tau = \frac{s}{FOS} \quad (2.2)$$

A tensão de cisalhamento de equilíbrio é igual a resistência ao cisalhamento disponível dividida pelo Fator de Segurança. O Fator de Segurança representa o fator pelo qual a

resistência ao cisalhamento deve ser reduzida para que se obtenha um equilíbrio com a tensão de cisalhamento τ , ou seja, o talude está em um estado de *equilíbrio limite*. Os métodos para realizar estes cálculos são conhecidos como *Métodos de Equilíbrio Limite*.

A resistência ao cisalhamento do solo pode ser expressa pela equação de Mohr-Coulomb. Caso a resistência ao cisalhamento seja expressa em termos de tensões totais, a Equação 2.2 se torna:

$$\tau = \frac{c + \sigma \tan \phi_s}{FOS} \quad (2.3)$$

ou ainda

$$\tau = \frac{c}{FOS} + \frac{\sigma \tan \phi_s}{FOS} \quad (2.4)$$

Em que c é a coesão do solo; ϕ_s é o ângulo de atrito do solo; e σ é a tensão normal total no plano de cisalhamento. Neste caso, o mesmo fator de segurança é aplicado para a coesão e ângulo de atrito. Outra forma que as Equações (2.3-2.4) podem ser escritas é:

$$\tau = c_d + \sigma \tan \phi_d \quad (2.5)$$

onde

$$c_d = \frac{c}{FOS} \quad (2.6)$$

$$\tan \phi_d = \frac{\tan \phi}{FOS} \quad (2.7)$$

em que c_d e ϕ_d representam a coesão e o ângulo de atrito mobilizados, respectivamente.

Para calcular o Fator de Segurança, deve ser considerada uma *superfície de ruptura* ou de *escorregamento* e uma ou mais equações de equilíbrio estático são admitidas para calcular as tensões e o Fator de Segurança para cada superfície assumida.

O Fator de Segurança é considerado o mesmo para todos os pontos ao longo da superfície de ruptura. Então, o fator representa um valor médio para essa superfície. Caso ocorra a ruptura, a tensão de cisalhamento será igual a resistência ao cisalhamento em todos pontos ao longo da superfície de falha e a hipótese de que o fator de segurança é constante é válida.

Várias superfícies de ruptura devem ser consideradas para encontrar a superfície que produz o mínimo Fator de Segurança. A superfície com o mínimo Fator de Segurança é chamada de *superfície potencial de ruptura* ou *superfície crítica de ruptura* e representa a superfície em que é mais provável que a ruptura ocorra. Mesmo que a ruptura de um talude não apresente aparentes consequências significativas, o fator de segurança mínimo deve ser calculado como parte da análise de estabilidade e seu valor é único.

Nos LEM duas abordagens são utilizadas para satisfazer o equilíbrio estático. Alguns métodos consideram o equilíbrio para toda a massa de solo compreendida entre a superfície de ruptura e a superfície do talude. Para estes métodos as equações de equilíbrio são escritas

e resolvidas para um único corpo livre. Já em outros métodos a massa de solo é dividida em várias fatias verticais e as equações de equilíbrio são escritas e resolvidas para cada fatia.

São três as condições de equilíbrio a serem satisfeitas:

1. Equilíbrio de forças na direção vertical;
2. Equilíbrio de forças na direção horizontal;
3. Equilíbrio de momentos sobre qualquer ponto.

Os métodos de equilíbrio limite utilizam pelo menos algumas equações de equilíbrio para o cálculo do fator de segurança. Alguns métodos satisfazem todas as equações enquanto outros satisfazem apenas algumas equações.

Outro aspecto importante se refere ao fato de que o cálculo do Fator de Segurança é um problema estaticamente indeterminado, ou seja, existem mais incógnitas do que equações de equilíbrio. Consequentemente, hipóteses devem ser adotadas para que se equipare o número de equações e incógnitas. Métodos diferentes adotam diferentes hipóteses para satisfazer o equilíbrio estático. Dois métodos diferentes podem até mesmo satisfazer as mesmas condições de equilíbrio mas ao admitirem hipóteses diferentes apresentam, portanto, Fatores de Segurança diferentes.

Os LEM se originaram com o trabalho de [Fellenius \(1936\)](#) e foram aprimorados por diversos autores como [Bishop \(1955\)](#), [Lowe e Karafiath \(1960\)](#), [Morgenstern e Price \(1965\)](#), [Spencer \(1967\)](#), [Janbu \(1968\)](#), [USACE \(1970\)](#), [Sarma \(1973\)](#), [Fredlund e Krahn \(1977\)](#), [Chen e Morgenstern \(1983\)](#). Atualizações desses métodos clássicos incluem um processo de automação da busca do fator de segurança mínimo e da superfície potencial de ruptura ao utilizar métodos de otimização (e. g. [Celestino e Duncan \(1981\)](#), [Nguyen \(1985\)](#), [Chen e Shao \(1988\)](#)).

2.2.2 Método dos Elementos Finitos

[Duncan \(1996\)](#) faz um excelente trabalho do estado da arte da utilização dos Métodos de Equilíbrio Limite (*Limit Equilibrium Methods*, LEM) e do Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method*, FEM) na análise de taludes. Porém se concentra principalmente nas deformações ao invés da estabilidade do talude. A primeira aparição do FEM na engenharia geotécnica aconteceu em 1967 com o trabalho de [Clough e Woodward \(1967\)](#). O trabalho estuda relações de tensão-deformação não lineares na análise de uma barragem de aterro. [Smith e Hobbs \(1974\)](#) traz resultados de taludes com $\phi_u = 0$ que estão de acordo com os diagramas de [Taylor \(1937\)](#). [Zienkiewicz, Humpheson e Lewis \(1975\)](#) adotam taludes com c' , ϕ' e obtém concordância com a solução de superfície de escorregamento circulares. [Matsui e San \(1992\)](#) apresentam a *técnica de redução da resistência ao cisalhamento* para estimar o Fator de Segurança na Análise de Estabilidade de Taludes.

Wong (1984) sumariza potenciais fontes de erro da análise de estabilidade efetuada pelo FEM. Alguns resultados mais recentes mostram que é possível conseguir uma melhor acurácia para os resultados (Griffiths e Lane (1999)). O artigo apresentado por Griffiths e Lane (1999) mostra que o FEM representa uma poderosa alternativa para a análise de estabilidade de taludes, devido sua acurácia, versatilidade e por ser necessário assumir menos hipóteses sobre os mecanismos de falha. Na análise pelo FEM o talude rompe de forma 'natural' nas regiões em que a resistência ao cisalhamento são insuficientes para conter as tensões mobilizantes. A ruptura ocorre por uma consequência lógica da mudança dos resultados de tensão e deformação.

2.2.3 Métodos Sem Malha

Recentemente, os chamados *Meshless/Meshfree* (MFree) ou métodos particulados tem sido ativamente desenvolvidos e aplicados na simulação de grandes deformações do contínuo ou de material disperso. Entre estes métodos, o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) é um dos métodos mais consolidados entre os MFree. Bui et al. (2008) aplica o SPH para resolver problemas de deformações plásticas de solo. Os resultados obtidos mostraram que o método original do SPH foi incapaz de resolver diretamente o fluxo elasto-plástico do solo devido a chamada instabilidade de tensão do SPH. A aplicação de um método de tensão artificial foi necessária para remover a instabilidade, tornando o método apto a ser empregado em problemas geotécnicos de forma geral. Posteriormente, Bui e Fukagawa (2011a) fazem a ressalva de que erros significativos acontecem quando gradientes de poropressão são modelados através da formulação padrão do SPH. Então é proposta uma nova formulação do SPH capaz de lidar diretamente tanto com solos saturados como com os secos. Além disso, como aplicação do método proposto é avaliado o efeito do ângulo de dilatância sobre o mecanismo de falha de um aterro de reservatório de água. Bui et al. (2011b) também utiliza essa nova versão do SPH para realizar a Análise de Estabilidade de Taludes e para simular o comportamento do solo após a ruptura. Os resultados mostram grande concordância com os métodos tradicionais em termos de Fator de Segurança e superfície crítica de ruptura. Além disso, apresenta a vantagem de conseguir capturar os comportamentos de grandes deslocamentos pós-falha. Além de Bui, outros autores mostram que o SPH é capaz de simular problemas grandes deformações da engenharia geotécnica, como deslizamentos de terra (An et al. (2016), He, Liang e Bolton (2018)). Segundo Li et al. (2019), para taludes instáveis com $FOS_{min} < 1.0$ é de extrema importância a localização da superfície de ruptura para o desenvolvimento de medidas de estabilização. A superfície crítica obtida pelo LEM subestima a verdadeira superfície de ruptura. Além disto, Li et al. (2019) propõem uma nova abordagem para localizar uma superfície de ruptura mais apropriada de taludes instáveis ($FOS_{min} < 1$) quando é utilizado o LEM. Foi descoberto que para taludes instáveis a superfície de ruptura não é aquela que apresenta o Fator de Segurança mínimo mas aquela que apresenta $FOS = 1.0$.

Outro MFree aplicado na engenharia geotécnica é o *Discrete-Element Method (DEM)*², que consegue rastrear o movimento de um grande número de partículas, sendo que o contato entre partículas é modelado através de um sistema mola-amortecedor (Cundall e Strack (1979)). Esta abordagem tem como principal vantagem a capacidade de lidar com problemas de grandes deformações e de falha, mesmo que o conceito seja relativamente simples. Entretanto, o DEM têm baixa acurácia pois há dificuldades em estabelecer os parâmetros apropriados no modelo de contato (Bui e Fukagawa (2011a)).

Kwok et al. (2014) utilizam o método sem malha *Semi Lagrangian Reproducing Kernel Particle Methods (SL-RKPM)* (Guan et al. (2009), Guan et al. (2011)) em problemas de geomecânica envolvendo grandes deformações. Análises de Estabilidade de Taludes são realizadas utilizando o SL-RKPM e validadas com resultados de métodos convencionais, como o FEM e LEM. O SL-RKPM se mostrou apropriado para simular as condições pós-falha.

O método *General Particle Dynamics (GPD3D)* é proposto por Zhou, Zhao e Qian (2015) para realizar a Análise de Estabilidade de Taludes. A partir dos resultados numéricos foi constatado que a iniciação, propagação e coalescência das trincas levam a macro-falhas do talude. O Fator de Segurança e superfície de escorregamento do talude calculados através do GPD3D estão de acordo com aqueles do LEM e FEM, mostrando-se um método viável para a análise. Tais análises também são feitas por Gago, Mužík e Bulko (2019) utilizando o *Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)* através de um modelo constitutivo elasto-plástico. Os resultados são similares aos obtidos pelo FEM e LEM.

Outro método utilizado é o *Element-Free Galerkin (EFG)*, que faz a aproximação das variáveis de campo através da aproximação por *Moving Least Square (MLS)*. A primeira aplicação do EFG em problemas geotécnicos é feita por Modaressi e Aubert (1998). Murakami faz um trabalho extensivo para entendimento de problemas de solos saturados utilizando o EFG (Murakami, Kawabata e Aoyama (2001), Murakami e Arimoto (2003), Murakami et al. (2005)). No trabalho de Qin e Wang (2012), quando é feita a Análise de Estabilidade de Taludes, os principais índices que influenciam a estabilidade do talude são determinados e um processo analítico hierárquico é utilizado para determinar o peso desses índices. Ao modificar os dados dos índices principais são obtidas as mudanças dos deslocamentos nodais. Então é possível alcançar o peso final dos índices baseado na interação entre os resultados obtidos pelo EFG e pelo processo analítico hierárquico. A partir disto um modelo *fuzzy comprehensive evaluation* é construído. Até o momento, nenhum trabalho utilizou uma análise não linear do EFG para realizar a análise de estabilidade de taludes. A proposta do presente trabalho é utilizar o EFG com a técnica de redução da tensão cisalhante para estimar o Fator de Segurança. A não linearidade material é introduzida com o modelo visco-plástico de Zienkiewicz e Corneau (1974).

² Não confundir com o *Diffuse Element Method*

3 MÉTODO ELEMENT-FREE GALERKIN

O *Element-Free Galerkin (EFG)* é um Método Sem Malha (MFree) global baseado na forma fraca de Galerkin proposto por Belytschko, Lu e Gu (1994). Outros autores apresentam a formulação do EFG com grandes detalhes (e.g. Liu e Gu (2005), Fries e Matthies (2004), Nguyen et al. (2008)). Esta seção se baseia fortemente na abordagem adotada por Liu e Gu (2005, Capítulos 3 e 4).

No EFG a aproximação da variável de campo em um ponto de interesse é feita utilizando funções de forma construídas com nós de campo que estão dentro de um domínio de suporte local definido pelo ponto de interesse. Devido a esta particularidade, as funções de forma podem variar para diferentes pontos de interesse e não dependem de uma malha para serem obtidas. Esta é uma das características mais marcantes dos métodos sem malha.

A seguir será descrito de forma breve o procedimento de solução de Problemas de Valor de Contorno (PVC) utilizando Métodos MFree. O Método dos Elementos Finitos (Finite Element Method, FEM) é considerado o método padrão para solução de grande parte dos PVC, e por isso é largamente conhecido. O FEM se baseia na discretização do domínio por uma *malha* e é interessante que se faça uma comparação entre essas duas abordagens de solução, MFree e FEM. A Figura 2 apresenta o procedimento de solução através dos Métodos MFree e FEM.

Etapas 1: Representação do domínio

Após a definição da geometria do problema (Figura 2a), o próximo passo é representar o domínio e seu contorno de uma forma discreta. Nos métodos MFree, a discretização é feita por um conjunto de nós espalhados que compreendem todo o domínio e o contorno do problema (Figura 2c). Visto que os nós armazenam as informações das *variáveis de campo*, eles são chamados de *nós de campo*. A densidade dos nós influencia na acurácia da aproximação e é limitada pelos recursos computacionais disponíveis entre outros fatores. Um método MFree deve ser capaz de lidar com uma distribuição arbitrária de nós.

No FEM, a representação do domínio é feita por meio de elementos de formas pré definidas. Além dos nós são necessárias informações acerca da relação entre nós, o que é chamado de *conectividade*. A união dos elementos forma a malha que representa o problema (Figura 2b), sendo que não são permitidos sobreposições de elementos nem vazios. A Figura 3 ilustra as diferenças de representação do domínio entre os métodos MFree e o FEM.

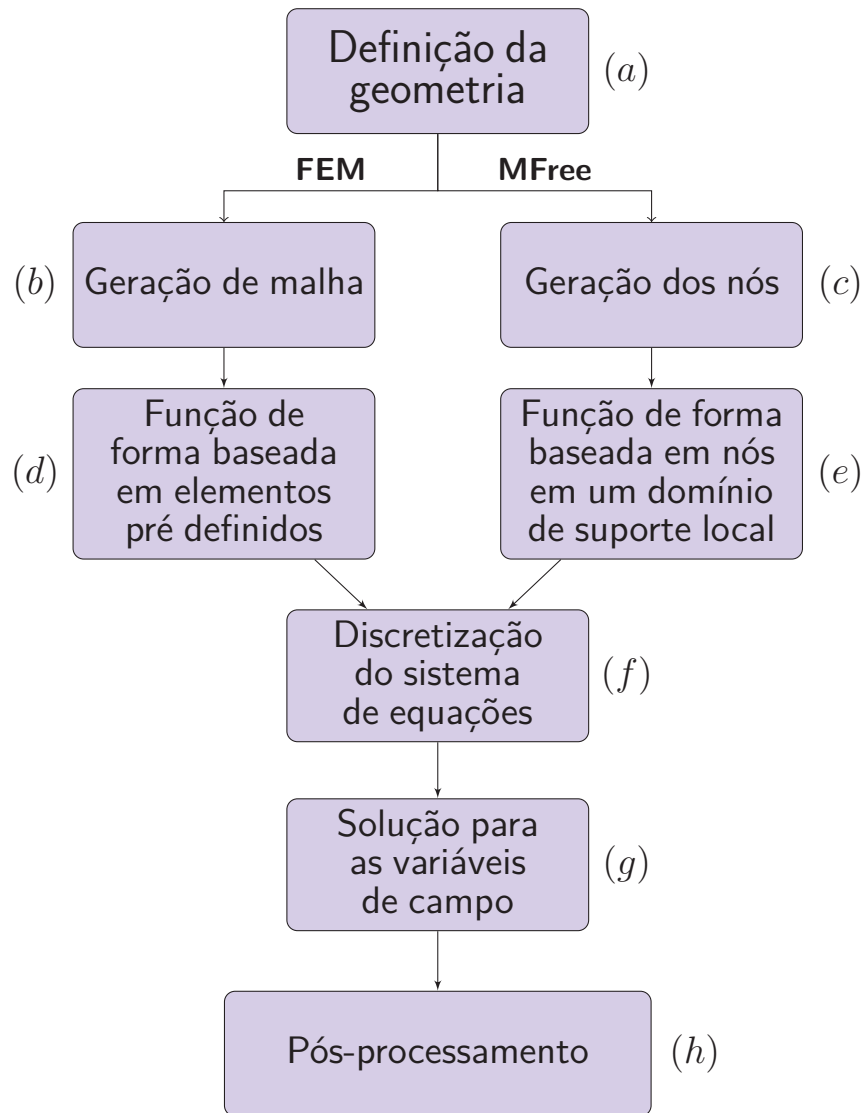


Figura 2 – Fluxograma com procedimentos de solução para problemas de valor de contorno utilizando duas abordagens diferentes, o consagrado FEM e os métodos sem malha (MFree).

Etapa 2: Função de aproximação/interpolação

Nos métodos MFree, como não existem malhas nem elementos, um *domínio de suporte local* de um ponto $\mathbf{x}$ determina o número de nós de campo que serão utilizados para aproximar o valor da função em $\mathbf{x}$ (Figura 2e). É importante que a sobreposição de todos os domínios de suporte local utilizados para os pontos de interesse consigam cobrir todo o domínio do problema, caso contrário pode haver perda na acurácia da solução. O domínio de suporte pode apresentar várias formas e sua dimensão e forma podem ser diferentes para diferentes pontos de interesse $\mathbf{x}$, como pode ser visto na Figura 4.

A aproximação das variáveis de campo comumente é feita por uma combinação linear dos valores nodais das funções de forma, $\phi_i(\mathbf{x})$ e dos valores nodais da variável de campo, $\mathbf{u}_i$,

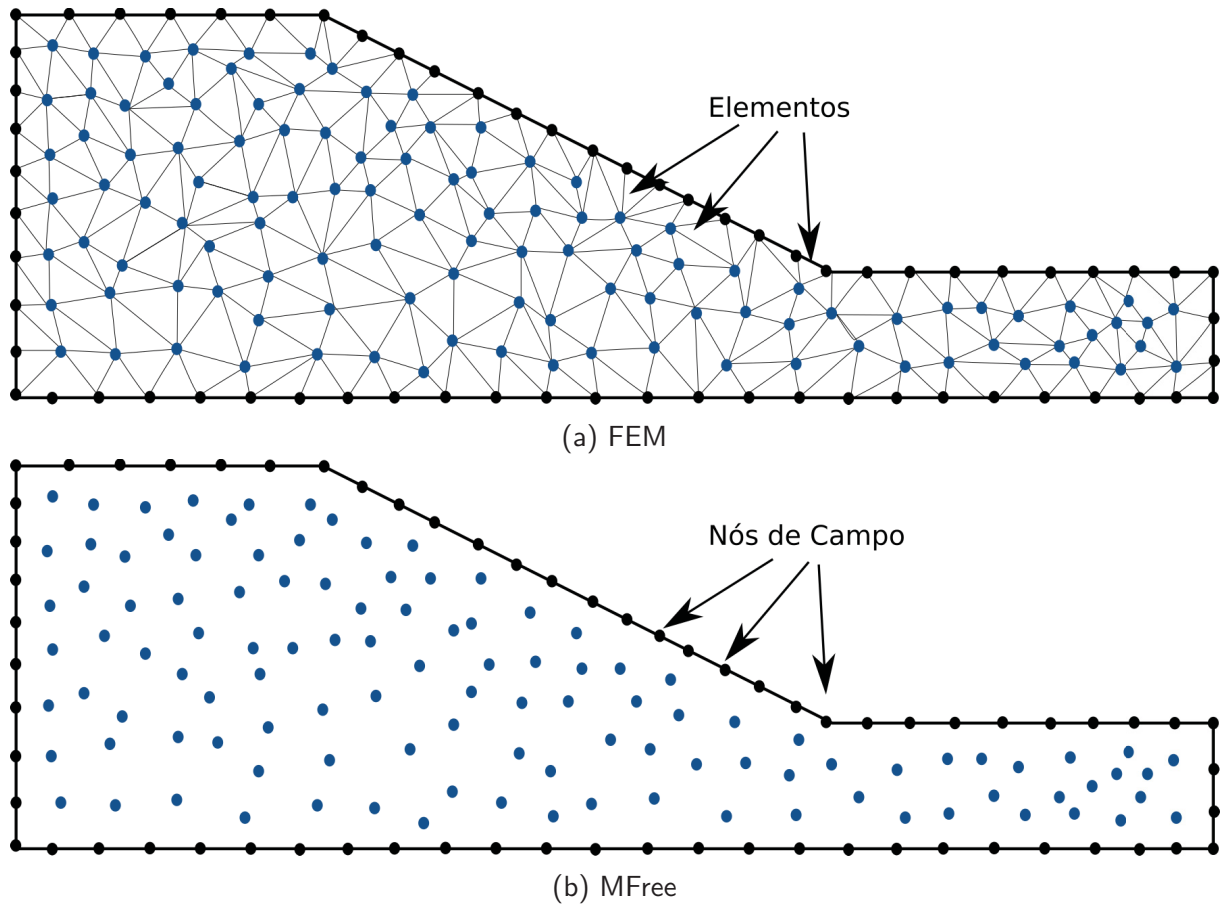


Figura 3 – Representação do domínio por (a) FEM e (b) MFree.

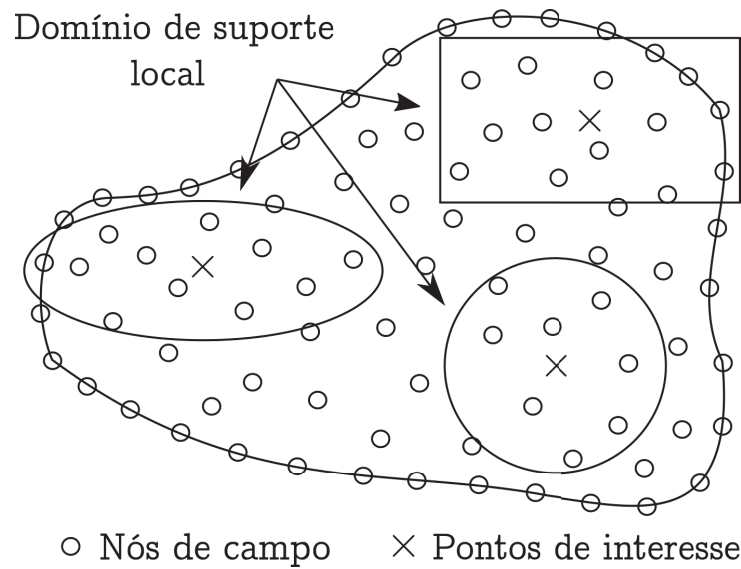


Figura 4 – Diversas formas de representações (elíptica, circular e retangular) do domínio de suporte local.

para os nós que estão dentro do domínio de suporte local.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i = \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (3.1)$$

onde n é o número de nós presentes no domínio de suporte do ponto x ; $\Phi^T(x)$ é o vetor com valores nodais das funções de forma para todos os nós no domínio de suporte. U_s é o vetor que contém todos os valores das variáveis de campo para esses n nós. A função de forma utilizada no método *Element-Free Galerkin (EFG)* são as *Moving Least Square (MLS)* e serão melhor abordadas na Seção 3.2.

No FEM, as funções de forma são geradas a partir de técnicas de interpolação baseadas em elementos formados por um conjunto de nós fixos (Figura 2d). Por este motivo este tipo de interpolação é chamada de interpolação *estacionária baseada em elemento*.

Etapa 3: Construção do sistema de equações discreto

O sistema de equações discretas dos métodos MFree é obtido com a utilização das funções de forma para a aproximação das variáveis de campo presentes na forma forte ou fraca das equações de equilíbrio. Geralmente o processo envolve cálculo de matrizes nodais que são somadas ao sistema global de matrizes (Figura 2f). No EFG, são utilizadas células de fundo para o cálculo das integrais da forma fraca da equação de equilíbrio. No FEM o processo é semelhante mas as integrações ocorrem dentro de cada elemento. Os sistemas de equações para os métodos MFree e FEM são similares quando se tratam de características da matriz (e.g. possuem matrizes em banda ou esparsas).

Etapa 4: Resolução do sistema de equações

Os métodos MFree e FEM seguem procedimentos similares uma vez que o sistema global de equações discreto está estabelecido. Ao resolver o sistema os deslocamentos nodais (ou parâmetros nodais de deslocamento no caso do EFG) são obtidos (Figura 2g) e com eles pode-se obter as deformações e tensões (Figura 2h). Há casos em que as matrizes construídas pelos métodos MFree são assimétricas. Para estes casos um *solver* apropriado deve ser empregado.

A seguir serão tratadas com mais detalhes todas as etapas acerca do processo de formulação do método Element-Free Galerkin. O processo de formulação descrito a seguir se baseia em e adota as mesmas notações utilizadas por Liu e Gu (2005).

3.1 DOMÍNIO DE SUPORTE

A acurácia da interpolação para um ponto de interesse depende dos nós que pertencem a um *domínio de suporte local* ou *local support domain*. Conforme mencionado anteriormente o domínio de suporte pode apresentar formas variadas, como mostrado na Figura 4. As formas circulares e retangulares são as mais empregadas.

A Figura 5 mostra a aplicação de domínios de suporte retangulares, Ω_s , para os pontos de interesse x_Q que estão dispersos por todo o domínio Ω .

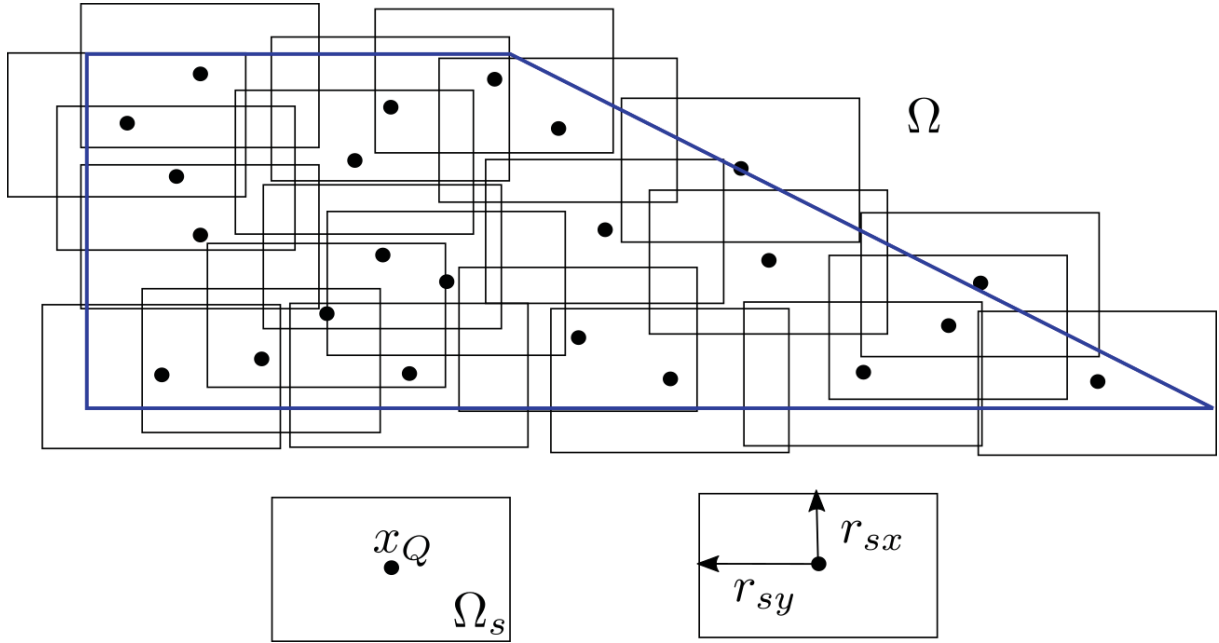


Figura 5 – Domínio representado através de domínios de suporte retangular. x_Q é o ponto de interesse (geralmente um ponto de quadratura ou um nó de campo), Ω_s é o domínio de suporte local, r_{sx} e r_{sy} são os espaçamentos nodais médios no domínio de suporte nas direções x e y , respectivamente. Cada ponto de interesse define um domínio de suporte local.

Um domínio de suporte apropriado deve ser escolhido para garantir uma aproximação acurada e eficiente. Para o ponto de interesse x_Q , a dimensão do domínio de suporte d_s é determinada por

$$d_s = \alpha_s d_c \quad (3.2)$$

onde α_s é o tamanho adimensional do domínio de suporte, e d_c é o espaçamento nodal próximo ao ponto x_Q . Caso os nós sejam uniformemente distribuídos, d_c é simplesmente a distância entre dois nós vizinhos. Quando os nós estão distribuídos de forma não uniforme, d_c pode ser definido como um espaçamento nodal médio no domínio de suporte de x_Q .

O verdadeiro tamanho do domínio de suporte é controlado por α_s . Há a ressalva de que α_s deve ser pré determinado pelo analista através de experimentos numéricos em problemas já conhecidos. Liu e Gu (2005) dizem que valores de $\alpha_s = 2.0 \sim 3.0$ são frequentemente empregados. Em geral, o domínio de suporte é centrado no ponto de interesse em x_Q , porém em casos especiais isso pode ser alterado.

O procedimento 2-D para o cálculo de d_s quando os nós são distribuídos de forma não uniforme passa pelos seguintes passos:

1. Uma estimativa de $\bar{d}_s$ para o ponto x_Q é feita. A estimativa não precisa ser acurada mas deve ser uma estimativa razoável.

Quando um domínio de suporte retangular é adotado. É necessária a estimativa de dois

valores $\bar{r}_{sx}$ e $\bar{r}_{sy}$, um para a direção x e outro para a direção y, como representado no índice subscrito (Ver Figura 5).

2. Calcula-se a área do domínio de suporte, A_s , gerada por $\bar{d}_s$. É contado o número de nós inclusos no domínio de suporte auxiliar, n_{A_s} .

Para a forma retangular do domínio de suporte, A_s é dado por

$$A_s = (2 \bar{r}_{sx})(2 \bar{r}_{sy}) \quad (3.3)$$

3. A determinação do espaçamento nodal médio pode ser calculado da seguinte forma

$$d_c = \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{n_{A_s}} - 1} \quad (3.4)$$

4. Calcula-se d_s ao substituir d_c na Equação 3.2 para o valor de α_s adotado.

3.2 MOVING LEAST SQUARE (MLS)

A aproximação por *Moving Least Squares (MLS)* foi desenvolvida por Lancaster e Salkauskas (1981) com a finalidade de construções de superfícies e ajuste de curvas na área matemática. Graças a aproximação MLS vários métodos sem malha puderam ser desenvolvidos.

O MLS pode ser categorizado como um método de representação por séries. Desta forma, para $u(x)$ no domínio Ω , a aproximação MLS de $u(x)$ é dada por

$$\begin{aligned} u^h(x) &= \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) \\ &= \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x) \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde $p_j(x)$ é um monômio da função de base polinomial com coordenadas espaciais $\mathbf{x}^T = [x, y]$, m é o número de monômios que compõem a base e pode ser entendido como o tamanho da base. $\mathbf{a}$ é o vetor de coeficientes.

Os monômios utilizados na base são os que compõem o triângulo de Pascal. Há preferência em utilização de bases completas. A seguir são apresentados funções de bases lineares para um espaço de uma (1-D) ou duas dimensões (2-D).

$$\mathbf{p}^T(x) = \{1 \quad x\} \quad m = 2, p = 1 \quad (1-D) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{p}^T(x) = \{1 \quad x \quad y\} \quad m = 3, p = 1 \quad (2-D) \quad (3.7)$$

Funções de base quadrática são dadas por

$$\mathbf{p}^T(x) = \{1 \quad x \quad x^2\} \quad m = 3, p = 2 \quad (1-D) \quad (3.8)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2\} \quad m = 6, p = 2 \quad (2-D) \quad (3.9)$$

A base polinomial completa de ordem p pode ser escrita na forma geral

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad x^2 \dots x^{p-1} \quad x^p\} \quad (1-D) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \dots x^p \quad y^p\} \quad (2-D) \quad (3.11)$$

De uma forma mais geral $\mathbf{p}$ é o vetor de funções da base e não necessariamente precisa ser somente uma base polinomial. Existem problemas em que o comportamento da solução é conhecido e por isso podem ser adicionadas funções de enriquecimento na base para melhor capturar o comportamento da solução. Por exemplo, sabe-se que próximo a uma ponta de trinca existe um campo de tensões singular. A captura deste comportamento pode ser feito com o enriquecimento da base com funções singulares. Certamente neste problema os erros computacionais seriam grandes caso somente funções polinomiais compusessem a base.

Na Equação 3.5, o vetor de coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ é uma função de $\mathbf{x}$ e é dada por

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x}) \quad a_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad a_m(\mathbf{x})\} \quad (3.12)$$

Os coeficientes $\mathbf{a}$ podem ser obtidos ao minimizar a seguinte norma L_2 .

$$J = \sum_{i=1}^n \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_i]^2 \quad (3.13)$$

onde n é o número de nós de campo no domínio de suporte de $\mathbf{x}$ em que a função peso $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \neq 0$, $\mathbf{x}_i$ é a coordenada do nó i e $\mathbf{u}_i$ é o parâmetro nodal de $\mathbf{u}$ em $\mathbf{x}_i$.

A partir da condição de estacionaridade de J com respeito a $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ tem-se

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (3.14)$$

que leva ao seguinte conjunto de relações lineares

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (3.15)$$

onde $\mathbf{U}_s$ é o vetor que contém os parâmetros nodais da função de campo para todos os nós dentro do domínio de suporte.

$$\mathbf{U}_s = \{\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n\}^T \quad (3.16)$$

E a matriz $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é chamada de *matriz de momentos ponderada* e é definida por

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (3.17)$$

onde

$$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (3.18)$$

Para ilustrar $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ é adotado uma base polinomial linear ($m = 3$) para um problema 2-D. $\mathbf{A}$ tem dimensão (3×3) e é escrita de forma explícita como

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(3 \times 3)}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \\ &= \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ x_1 & x_1^2 & x_1 y_1 \\ y_1 & x_1 y_1 & y_1^2 \end{bmatrix} + \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 \\ x_2 & x_2^2 & x_2 y_2 \\ y_2 & x_2 y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} + \\ &\dots + \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} 1 & x_n & y_n \\ x_n & x_n^2 & x_n y_n \\ y_n & x_n y_n & y_n^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

ou

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n y_i \widehat{W}_i \\ \sum_{i=1}^n x_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \widehat{W}_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i \widehat{W}_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 \widehat{W}_i \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad (3.20)$$

Na aproximação MLS, um domínio de suporte, definido pela Equação 3.2, é admitido para qualquer ponto de interesse (um ponto amostral, nó de campo ou um ponto de quadratura). Os nós de campo que pertencem ao domínio de suporte local são utilizados para a obtenção das funções de forma MLS no ponto de interesse. O número de nós de campo, n dentro do domínio de suporte, devem ser suficientes para garantir que a matriz $\mathbf{A}$ seja inversível, além de conferirem estabilidade no processo de interpolação. A escolha de n depende da distribuição dos nós assim como no tamanho da base, m . Para garantir a existência de $\mathbf{A}^{-1}$ e que $\mathbf{A}$ seja uma matriz bem condicionada, geralmente adota-se $n \gg m$. O valor de n deve ser determinado experimentalmente pois não existe um valor teórico que seja mais apropriado de ser adotado.

A matriz $\mathbf{B}$ na Equação 3.15 é definida como

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\widehat{W}_1 \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad \widehat{W}_2 \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad \widehat{W}_n \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (3.21)$$

B possui dimensão $(3 \times n)$, e pode ser explicitamente expressa por

$$\begin{aligned}
 B_{(3 \times n)}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} & \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} & \dots & \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} 1 \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \widehat{W}_1 & \widehat{W}_2 & \dots & \widehat{W}_n \\ x_1 \widehat{W}_1 & x_2 \widehat{W}_2 & \dots & x_n \widehat{W}_n \\ y_1 \widehat{W}_1 & y_2 \widehat{W}_2 & \dots & y_n \widehat{W}_n \end{bmatrix}_{3 \times n}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Resolvendo a Equação 3.15 para $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ tem-se

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \tag{3.23}$$

Substituindo a equação acima na Equação 3.5, obtém-se

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i = \Phi^T \mathbf{U}_s \tag{3.24}$$

onde $\Phi(\mathbf{x})$ é o vetor das funções de forma MLS correspondentes aos n nós no domínio de suporte do ponto $\mathbf{x}$, e pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
 \Phi^T(\mathbf{x}) &= \{\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \phi_n(\mathbf{x})\}_{(1 \times n)} \\
 &= \underbrace{\mathbf{p}^T(\mathbf{x})}_{1 \times 3} \underbrace{\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})}_{3 \times 3} \underbrace{\mathbf{B}(\mathbf{x})}_{3 \times n}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

A função de forma $\phi_i(\mathbf{x})$ para o i -ésimo nó é definida como

$$\begin{aligned}
 \phi_i(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}))_{ji} \\
 &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})_i
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Uma característica muito importante das funções de forma MLS é que elas são contínuas ao longo de todo o domínio global do problema caso a escolha da função peso seja feita de forma adequada. Isto ocorre pois a aproximação é feita de forma dinâmica, visto que o coeficiente $\mathbf{a}$ é uma função de $\mathbf{x}$.

No artigo de Belytschko et al. (1996) é apresentada uma forma mais eficiente para serem calculadas as derivadas parciais das funções de forma. Para auxiliar o cálculo, a Equação 3.25 passa a ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \Phi^T(\mathbf{x}) &= \underbrace{\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})}_{\gamma^T} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \\
 &= \gamma^T \mathbf{B}(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde

$$\boldsymbol{\gamma}^T = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (3.28)$$

Desde que $\mathbf{A}$ seja simétrica, $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$ pode ser escrita como

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{p} \quad (3.29)$$

A partir da Equação 3.29 são determinadas as derivadas parciais de $\boldsymbol{\gamma}$ utilizando a regra da cadeia e rearranjando as equações.

$$\boldsymbol{\gamma}_{,i} = \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{p}_{,i} - \mathbf{A}_{,i}\boldsymbol{\gamma}] \quad (3.30)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{,ij} = \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{p}_{,ij} - (\mathbf{A}_{,i}\boldsymbol{\gamma}_{,j} + \mathbf{A}_{,j}\boldsymbol{\gamma}_{,i} + \mathbf{A}_{,ij}\boldsymbol{\gamma})] \quad (3.31)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{,ijk} = \mathbf{A}^{-1} [\mathbf{p}_{,ijk} - (\mathbf{A}_{,i}\boldsymbol{\gamma}_{,jk} + \mathbf{A}_{,j}\boldsymbol{\gamma}_{,ik} + \mathbf{A}_{,k}\boldsymbol{\gamma}_{,ij} + \mathbf{A}_{,ij}\boldsymbol{\gamma}_{,k} + \mathbf{A}_{,ik}\boldsymbol{\gamma}_{,j} + \mathbf{A}_{,jk}\boldsymbol{\gamma}_{,i} + \mathbf{A}_{,ijk}\boldsymbol{\gamma})] \quad (3.32)$$

onde i, j e k denotam coordenadas x e y , e a vírgula é a notação adotada para derivação parcial em relação a coordenada espacial que segue a vírgula. Com isso podemos obter as derivadas parciais das funções de forma Φ .

$$\Phi_{,i}^T = \boldsymbol{\gamma}_{,i}^T \mathbf{B} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{B}_{,i} \quad (3.33)$$

$$\Phi_{,ij}^T = \boldsymbol{\gamma}_{,ij}^T \mathbf{B} + \boldsymbol{\gamma}_{,i}^T \mathbf{B}_{,j} + \boldsymbol{\gamma}_{,j}^T \mathbf{B}_{,i} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{B}_{,ij} \quad (3.34)$$

$$\Phi_{,ijk}^T = \boldsymbol{\gamma}_{,ijk}^T \mathbf{B} + \boldsymbol{\gamma}_{,ij}^T \mathbf{B}_{,k} + \boldsymbol{\gamma}_{,ik}^T \mathbf{B}_{,j} + \boldsymbol{\gamma}_{,jk}^T \mathbf{B}_{,i} + \boldsymbol{\gamma}_{,i}^T \mathbf{B}_{,jk} + \boldsymbol{\gamma}_{,j}^T \mathbf{B}_{,ik} + \boldsymbol{\gamma}_{,k}^T \mathbf{B}_{,ij} + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{B}_{,ijk} \quad (3.35)$$

Conforme mencionado anteriormente, a construção das funções de forma é a parte mais importante de um método sem malha. É ela quem determina a característica de uma técnica de interpolação que não se baseia em uma malha para a aproximação das variáveis de campo. Com isso se abrem diversas possibilidades para abordar problemas que métodos baseados em malha apresentam grande dificuldade em resolver, como é o caso de problemas de grandes deslocamentos.

3.2.1 Funções Peso

A continuidade das funções de forma MLS, Φ , depende das funções utilizadas na base, $\mathbf{p}$, assim como da suavidade das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Para a obtenção das matrizes $\mathbf{A}$ e

B (ver Equações 3.17 e 3.21) foi utilizada uma função peso. Esta função peso é responsável pela garantia da suavidade de A e B . Por esta razão, a escolha da função peso tem grande relevância na aplicação da aproximação por MLS. As propriedades exigidas para as funções peso são:

- $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) > 0$ dentro do domínio de suporte;
- $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0$ fora do domínio de suporte;
- $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ decresce de forma monotônica a partir do ponto de interesse, $\mathbf{x}$;
- $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ é suficientemente suave, especialmente no contorno do domínio de suporte;

A seguir são listadas algumas funções que cumprem as requisições acima e que são comumente empregadas.

- A função exponencial:

$$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} e^{-(\bar{r}_i/\alpha)^2} & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (3.36)$$

onde α é um parâmetro, e

$$\bar{r}_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{r_w} \quad (3.37)$$

em que $d_i = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$ é a distância do nó $\mathbf{x}_i$ para o ponto de interesse $\mathbf{x}$, e r_w é o tamanho do domínio de suporte para a função peso.

- A função *cubic spline*:

$$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2/3 - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ 4/3 - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - 4/3\bar{r}_i^3 & 0.5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (3.38)$$

que possui continuidade de segunda ordem.

- A função *quartic spline*:

$$\widehat{W}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{r}_i^2 + 8\bar{r}_i^3 - 3\bar{r}_i^4 & \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (3.39)$$

que possui continuidade de terceira ordem.

3.2.2 Propriedades das funções de forma MLS

1. As funções são suficientemente robustas para uma distribuição arbitrária dos nós. Esta característica é de fundamental importância para um método sem malha;
2. As funções são numericamente estáveis e computacionalmente eficientes;
3. As funções possuem consistência. *Consistência* é a habilidade da função de forma em reproduzir um polinômio de ordem completa. A consistência da aproximação por MLS depende da ordem completa dos monômios que constituem a base polinomial. Caso a ordem completa dos monômios seja k , as funções de forma terão consistência C^k . A consistência é importante para uma aproximação acurada da função e para a convergência do método. As funções de forma MLS possuem consistência;
4. As funções apresentam reprodutibilidade. *Reprodutibilidade* é a habilidade das funções de forma reproduzirem as funções da base que foram utilizadas para obter as próprias funções de forma. As funções da base podem não ser polinomiais. Quando as funções de base são polinomiais, reprodutibilidade e consistência tem o mesmo significado. As funções de forma MLS possuem reprodutibilidade.
5. As funções possuem suporte compacto. O suporte compacto é necessário para produzir um sistema de equações esperso que possa ser resolvido de forma mais efetiva. Isto se torna um ótimo recurso no caso de grandes sistemas;
6. As funções MLS tem compatibilidade global. Esta é uma exigência quando métodos MFree globais baseados em forma fraca são empregados, como é o caso do EFG.
7. Caso o termo constante esteja incluso na base, as funções MLS ϕ_i formam uma *partição da unidade*.

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.40)$$

8. As funções não possuem a propriedade da função delta de Kronecker. As funções obtidas pela aproximação MLS são curvas (ou superfícies) suaves e não passam pelos valores nodais, como pode ser visto na Figura 6. Consequentemente, as funções de forma MLS em geral não satisfazem a condição do delta de Kronecker. Portanto

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (3.41)$$

Logo, são necessárias técnicas especiais para a imposição das condições de contorno essenciais.

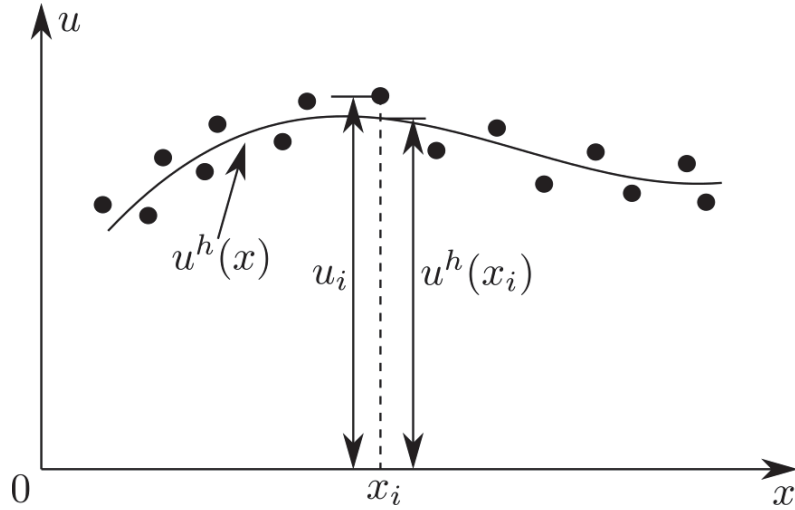


Figura 6 – A função aproximada $u^h(x)$ e parâmetros nodais u_i na aproximação MLS. Note que, em geral, $u^h(x)$ não passa pelos valores nodais. Portanto, não possui a propriedade do delta de Kronecker.

3.3 FORMULAÇÃO DO MÉTODO ELEMENT-FREE GALERKIN

Comumente os fenômenos da natureza são descritos por meio de equações diferenciais. A equação de equilíbrio que governa o problema junto de suas condições de contorno formam o que chamamos de *Problema de Valor de Contorno (PVC)*. Um problema bi-dimensional (2D) de elasticidade linear definido sobre um domínio Ω e contorno Γ são descritos pelo seguinte PVC.

$$\text{Equação de equilíbrio:} \quad \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \quad (3.42)$$

$$\text{Condições de contorno natural:} \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \Gamma_t \quad (3.43)$$

$$\text{Condições de contorno essencial:} \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (3.44)$$

Onde (Para o caso 2D):

$\mathbf{L}$: operador diferencial;

$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}\}$: o vetor de tensões;

$\mathbf{u}^T = \{u \quad v\}$: o vetor deslocamento;

$\mathbf{b}^T = \{b_x \quad b_y\}$: o vetor de forças de corpo;

$\bar{\mathbf{t}}$: tração prescrita no contorno de trações (natural);

$\bar{\mathbf{u}}$: o deslocamento prescrito no contorno de deslocamento (essencial);

$\mathbf{n}$: o vetor unitário normal ao contorno natural em um dado ponto.

A equação de equilíbrio nos fornece uma relação entre tensão e as forças externas atuantes. A Equação 3.42 está escrita em sua forma forte e de forma oportuna pode ser escrita

em sua forma fraca. Há diversas maneiras de transformar uma equação da sua forma forte para a forma fraca, podendo citar método de cálculo variacional e métodos dos resíduos ponderados. A forma fraca da Equação 3.42 pode ser escrita como

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (3.45)$$

onde $\delta \mathbf{u}$ são deslocamentos virtuais e $\mathbf{D}$ é a matriz constitutiva, cuja forma depende das hipóteses adotadas. Para o *Estado plano de tensões* a matriz $\mathbf{D}$ é:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (\text{Estado Plano de Tensões}) \quad (3.46)$$

E para o *Estado plano de deformações* é:

$$\mathbf{D} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{Estado Plano de Deformações}) \quad (3.47)$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson. Estes são parâmetros elásticos do material que compõem a matriz constitutiva.

Em 1994, Belytschko, Lu e Gu (1994) propuseram o método *Element-Free Galerkin* (EFG). Este é um Método MFree Global baseado na forma fraca de Galerkin. O método EFG utiliza aproximações do tipo *Moving least squares* (MLS) para a construção das funções de forma. Como as funções obtidas na aproximação por MLS não possuem a propriedade da função delta de Kronecker, é necessário que se faça uma alteração na Equação 3.45, que toma a seguinte forma.

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0 \quad (3.48)$$

onde $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k]$ é uma matriz diagonal com coeficientes de penalidades, em que $k = 2$ para 2D, e $k = 3$ para 3D. Os coeficientes de penalidade α_i podem ser diferentes uns dos outros, mas devem ser fornecidos. Em teoria, quanto maior o coeficiente adotado melhores são os resultados obtidos, porém há um limite em que os erros numéricos passam a afetar significativamente os resultados. Por isto, os valores de α_i devem ser empregados de forma consciente. Frequentemente, um mesmo valor (positivo) é empregado para todos α_i . Caso um valor negativo seja adotado, a matriz não será positiva definida, mas vale ressaltar que um valor positivo empregado não garante que a matriz será positiva definida.

A Equação 3.48 é a forma fraca definida sobre o domínio global do problema. Para calcular as integrais da Equação 3.48, o domínio global do problema é discretizado em um

conjunto de *células de fundo* (ou *background cells*) que não se sobrepõem, como mostrado na Figura 7. Estas células de fundo auxiliam no processo de integração numérica. A forma com que a integração é feita depende do método de integração adotado. De forma análoga as integrais no contorno são calculadas com um conjunto de curvas sem sobreposição. Mais detalhes sobre o processo de integração numérica serão abordados na seção 3.4.1

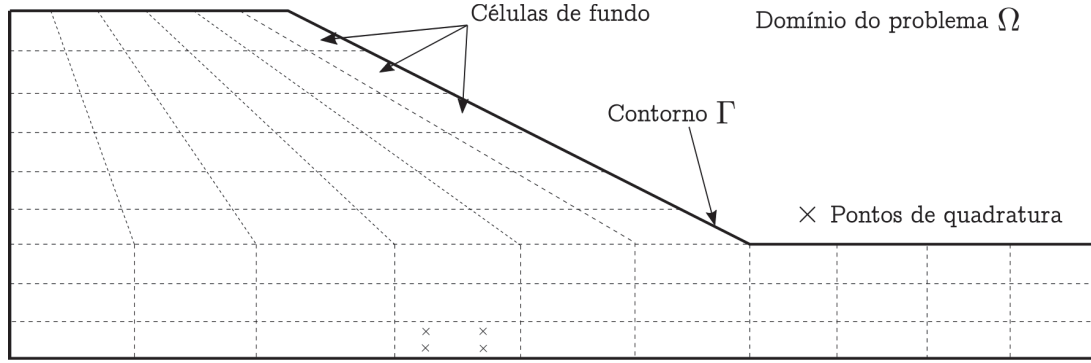


Figura 7 – Células de fundo utilizadas para a integração.

Para fazer a aproximação da variável de campo (deslocamento) o domínio do problema é representado por um conjunto de *nós de campo* dispersos por todo o domínio. É interessante que estes nós estejam numerados de forma sequencial de 1 a N . A aproximação dos deslocamentos para qualquer ponto de interesse é feita utilizando as funções de forma construídas com o auxílio do conjunto de nós de campo que estão dentro do domínio de suporte local do ponto de interesse. A construção das funções de forma foram apresentadas na Seção 3.2.

$$\mathbf{u}_{(2 \times 1)}^h = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = \mathbf{\Phi}_{(2 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \quad (3.49)$$

onde $\mathbf{\Phi}$ é a matriz das funções de forma, n é o número de nós no domínio de suporte local, e $\mathbf{u}$ é o vetor de parâmetros de deslocamentos dos nós presentes no domínio de suporte local. A Equação 3.49 também pode ser escrita em termos de um somatório das parcelas nodais.

$$\mathbf{u}_{(2 \times 1)}^h = \sum_i^n \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \sum_i^n \mathbf{\Phi}_i \mathbf{u}_i \quad (3.50)$$

onde $\mathbf{\Phi}_i$ é a matriz das funções de forma para o nó i , e $\mathbf{u}_i$ é o parâmetro de deslocamento nodal.

Na Equação 3.50, $\mathbf{u}^h$ é o deslocamento aproximado do ponto de interesse que pode ser tanto um ponto amostral quanto um ponto de quadratura.

De maneira análoga, conseguimos uma aproximação para $\delta \mathbf{u}^h$.

$$\delta \mathbf{u}_{(2 \times 1)}^h = \mathbf{\Phi}_{(2 \times 2n)} \delta \mathbf{u}_{(2n \times 1)} = \sum_i^n \mathbf{\Phi}_i \delta \mathbf{u}_i \quad (3.51)$$

É oportuno apresentar como as deformações no ponto de interesse podem ser calculadas utilizando a aproximação de deslocamentos.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_{(3 \times 1)} &= \mathbf{L} \mathbf{u}^h = \mathbf{L}_{(3 \times 2)} \boldsymbol{\Phi}_{(2 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \dots & \phi_n & 0 \\ 0 & \phi_1 & \dots & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial y} & \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{B}_{(3 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \quad (3.52) \\
 &= \sum_I^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I
 \end{aligned}$$

onde $\mathbf{B}$ é a matriz de deformações e $\mathbf{B}_i$ é a matriz de deformações para o nó i . De forma similar temos:

$$\mathbf{L} \delta \mathbf{u}^h = \mathbf{L}_{(3 \times 2)} \boldsymbol{\Phi}_{(2 \times 2n)} \delta \mathbf{u}_{(2n \times 1)} = \mathbf{B}_{(3 \times 2n)} \delta \mathbf{u}_{(2n \times 1)} = \sum_i^n (\mathbf{B}_i)_{(3 \times 2)} (\delta \mathbf{u}_i)_{(2 \times 1)} \quad (3.53)$$

A partir das deformações é possível obter o vetor de tensões, $\boldsymbol{\sigma}$, ao utilizar a relação constitutiva no ponto de interesse.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \\
 &= \mathbf{D}_{(3 \times 3)} \mathbf{B}_{(3 \times 2n)} \mathbf{u}_{(2n \times 1)} \\
 &= \sum_i^n \mathbf{D}_{(3 \times 3)} (\mathbf{B}_i)_{(3 \times 2)} (\mathbf{u}_i)_{(2 \times 1)} \quad (3.54)
 \end{aligned}$$

Agora que as variáveis $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ estão bem definidas em relação à aproximação adotada, passa-se para a construção do sistema discreto de equações. Para fazê-lo cada integral da Equação 3.48 deve ser analisada de forma separada.

A primeira integral utilizando os deslocamentos aproximados $\mathbf{u}^h$

$$\int_{\Omega} \delta (\mathbf{L} \mathbf{u}^h)^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \mathbf{u}^h) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{L} \delta \mathbf{u}^h)^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \mathbf{u}^h) d\Omega \quad (3.55)$$

Substituindo as Equações 3.52 e 3.53 na Equação 3.55.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u}^h)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}^h) d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\sum_i^n \mathbf{B}_i \delta\mathbf{u}_i \right)^T \left(\sum_j^n \mathbf{D}\mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sum_i^n \sum_j^n \delta\mathbf{u}_i^T [\mathbf{B}_i^T \mathbf{D}\mathbf{B}_j] \mathbf{u}_j d\Omega \end{aligned} \quad (3.56)$$

Até aqui os índices i e j são referentes ao sistema de numeração local para nós pertencentes ao domínio de suporte local. Note que a Equação 3.48 é escrita em termos globais do domínio do problema. Por esta razão é adequado transferirmos o sistema de numeração de nós da abordagem local para a global. Sendo assim, todos os nós de campo dispostos por todo o domínio estarão numerados de uma maneira única de 1 a N , onde N é o número total de nós. Consequentemente, os índices do sistema local i e j se transformarão em índices do sistema global I e J . Este processo pode ser feito com um mapeamento das relações entre índices locais e globais. É importante ressaltar que quando os nós I e J não estão no mesmo domínio de suporte, o integrando é zero e portanto a integral também. Dessa forma, a Equação 3.56 é escrita como:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u}^h)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}^h) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_I^N \sum_J^N \delta\mathbf{u}_I^T [\mathbf{B}_I^T \mathbf{D}\mathbf{B}_J] \mathbf{u}_J d\Omega \quad (3.57)$$

Através da propriedade da linearidade da integração podemos mover a integral para dentro dos somatórios.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{L}\delta\mathbf{u}^h)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}^h) d\Omega &= \sum_I^N \sum_J^N \delta\mathbf{u}_I^T \underbrace{\left[\int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D}\mathbf{B}_J d\Omega \right]}_{\mathbf{K}_{IJ}} \mathbf{u}_J \\ &= \sum_I^N \sum_J^N \delta\mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde $\mathbf{K}_{IJ}$ é uma matriz conhecida por *matriz de rigidez nodal*, apresenta dimensões (2×2) e é definida por:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_I^T)_{(2 \times 3)} \mathbf{D}_{(3 \times 3)} (\mathbf{B}_J)_{3 \times 2} d\Omega \quad (3.59)$$

Note que quando os nós I e J não estão no mesmo domínio de suporte do mesmo ponto de quadratura da integração, $\mathbf{K}_{IJ} = 0$.

A última expressão da Equação 3.58 escrita em forma explícita é:

$$\begin{aligned}
 \sum_I^N \sum_J^N \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J &= \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{K}_{12} \mathbf{u}_2 + \dots + \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{K}_{1N} \mathbf{u}_N \\
 &\quad + \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{K}_{21} \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{u}_2 + \dots + \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{K}_{2N} \mathbf{u}_N \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{K}_{N1} \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{K}_{N2} \mathbf{u}_2 + \dots + \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{K}_{NN} \mathbf{u}_N \\
 &= \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Assim, chega-se na expressão desejada para a primeira integral da Equação 3.48.

$$\int_{\Omega} (\mathbf{L} \delta \mathbf{u}^h)^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \mathbf{u}^h) d\Omega = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \tag{3.61}$$

onde $\mathbf{K}$ é a *matriz de rigidez global*, escrita na forma.

$$\mathbf{K}_{(2N \times 2N)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1N} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \dots & \mathbf{K}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N1} & \mathbf{K}_{N2} & \dots & \mathbf{K}_{NN} \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

A dimensão da matriz $\mathbf{K}$ deve ser $(2N \times 2N)$ pois o número total de nós em todo o domínio do problema é N e a matriz de rigidez nodal tem dimensão (2×2) , isto porque existem 2 graus de liberdade por nó.

Na Equação 3.61, o vetor $\mathbf{U}$ é o *vetor global de parâmetros de deslocamento* que reúne os parâmetros de deslocamentos nodais de todos os nós do domínio do problema. O vetor $\mathbf{U}$ tem dimensão $(2N)$ e apresenta a forma:

$$\mathbf{U}_{(2N \times 1)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{Bmatrix} \tag{3.63}$$

A segunda integral da Equação 3.48 utilizando a aproximação dos deslocamentos e a Equação 3.51.

$$\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^h)^T \mathbf{b} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\delta \sum_i^n \Phi_i \mathbf{u}_i \right)^T \mathbf{b} d\Omega \tag{3.64}$$

Ao mudar o sistema de numeração local para global e utilizar a propriedade da

linearidade da integração tem-se.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^h)^T \mathbf{b} d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\delta \sum_I^N \Phi_I \mathbf{u}_I \right)^T \mathbf{b} d\Omega \\ &= \sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega}_{\mathbf{F}_I^b}\end{aligned}\quad (3.65)$$

onde $\mathbf{F}_I^{(b)}$ é a *vetor de força de corpo nodal* que é definido por:

$$\mathbf{F}_I^b = \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega \quad (3.66)$$

onde $\mathbf{b}$ é o vetor de força de corpo.

O último somatório da Equação 3.65 pode ser expandida e depois agrupada para produzir as matrizes como se segue.

$$\begin{aligned}\sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega}_{\mathbf{F}_I^b} &= \sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{F}_I^b \\ &= \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{F}_1^b + \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{F}_2^b + \dots + \delta \mathbf{u}_N^T \mathbf{F}_N^b \\ &= \delta \mathbf{u}_1^T \dots \delta \mathbf{u}_{N(1 \times 2N)}^T \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_1^b \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N^b \end{array} \right\}_{(2N \times 1)} \\ &= \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^b\end{aligned}\quad (3.67)$$

onde $\mathbf{F}^{(b)}$ é o *vetor de força de corpo global* construído com os vetores de força de corpo nodais em todos os nós do domínio do problema. $\mathbf{F}^{(b)}$ tem dimensão $(2N)$ e é definido como:

$$\mathbf{F}^b = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F}_1^b \\ \vdots \\ \mathbf{F}_N^b \end{array} \right\}_{(2N \times 1)} \quad (3.68)$$

A terceira integral da Equação 3.48 tem um tratamento análogo ao procedimento anterior. As diferenças são que o vetor de forças de corpo é substituído pelo vetor de trações e a integral que antes ocorria sobre o domínio agora ocorrerá sobre o contorno. Desta forma,

tem-se.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{u}^h)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma &= \sum_i^n \delta \mathbf{u}_i^T \underbrace{\int_{\Gamma_t} \Phi_i^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma}_{\mathbf{F}_i^{(t)}} \\
 &= \sum_I^N \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Gamma_t} \Phi_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\
 &= \delta \mathbf{U}^T \sum_I^N \underbrace{\int_{\Gamma_t} \Phi_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma}_{\mathbf{F}_I^{(t)}} \\
 &= \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{(t)}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

onde $\mathbf{F}_I^{(t)}$ é o vetor de forças de tração nodal.

$$(\mathbf{F}_I^{(t)})_{(2 \times 1)} = \int_{\Gamma_t} \Phi_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \tag{3.70}$$

Na Equação 3.69, $\mathbf{F}^{(t)}$ é o vetor de forças de tração global construído com os vetores de força de tração nodais. A dimensão de $\mathbf{F}^{(t)}$ é $2N$.

A quarta integral da Equação 3.48 segue um processo semelhante aos anteriores, porém a integração ocorrerá para as condições de contorno essenciais. Além disso a integral poderá ser escrita em duas parcelas.

$$\int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}})^T \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = -\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}^\alpha \mathbf{U} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^\alpha \tag{3.71}$$

A matriz $\mathbf{K}^\alpha$ é a matriz de penalidades de rigidez global e é construída com matrizes de penalidades de rigidez nodais de forma semelhante ao processo da construção da matriz de rigidez global (ver Equação 3.62). $\mathbf{K}_{IJ}^\alpha$ possui dimensão (2×2) e é definida como:

$$\mathbf{K}_{IJ}^\alpha = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \boldsymbol{\alpha} \Phi_J d\Gamma \tag{3.72}$$

Na Equação 3.71, o vetor de penalidade de forças global, $\mathbf{F}^\alpha$, é obtido devido as condições de contorno essenciais. Os vetores de penalidade de força nodais que estão envolvidos na construção de $\mathbf{F}^\alpha$ são definidos como:

$$\mathbf{F}_I^\alpha = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \boldsymbol{\alpha} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \tag{3.73}$$

Note que nas Equações 3.72 e 3.73, as integrações são realizadas sobre curvas (para problemas 2D), que representam o contorno que possui condições de contorno essencial.

Neste momento estão definidas todas as equações necessárias para a escrever o sistema discretizado de equações. Ao substituir as Equações (3.61; 3.67; 3.69; 3.71) na Equação 3.48 resulta em

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta (\mathbf{L} \mathbf{u})^T \mathbf{D} (\mathbf{L} \mathbf{u}) d\Omega}_{\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}} - \underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega}_{\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{(b)}} - \underbrace{\int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma}_{\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{(t)}} - \underbrace{\delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma}_{-\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}^\alpha \mathbf{U} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^\alpha} = 0 \tag{3.74}$$

ou

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{(b)} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^{(t)} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K}^\alpha \mathbf{U} - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}^\alpha = 0 \quad (3.75)$$

ou ainda

$$\delta \mathbf{U}^T \left[(\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha) \mathbf{U} - \mathbf{F}^{(b)} - \mathbf{F}^{(t)} - \mathbf{F}^\alpha \right] = 0 \quad (3.76)$$

Como $\delta \mathbf{U}$ é arbitrário, a equação acima só poderá ser satisfeita se:

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha] \mathbf{U} - \mathbf{F}^{(b)} - \mathbf{F}^{(t)} - \mathbf{F}^\alpha = 0 \quad (3.77)$$

ou

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha] \mathbf{U} = \mathbf{F}^{(b)} + \mathbf{F}^{(t)} + \mathbf{F}^\alpha \quad (3.78)$$

O sistema pode ser reescrito como

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha] \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^\alpha \quad (3.79)$$

onde $\mathbf{F}$ é o *vetor de forças global* e é dado por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(b)} + \mathbf{F}^{(t)} \quad (3.80)$$

A Equação 3.79 é o sistema discretizado de equações final para o método EFG com a utilização do método da penalidade para impor as condições de contorno essenciais. O método de Galerkin garante a simetria das matrizes $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}^\alpha$. Os parâmetros de deslocamentos podem ser obtidos ao resolver o sistema da Equação 3.79. Após obter os parâmetros de deslocamentos, com o auxílio das Equações 3.50, 3.52 e 3.54 podemos obter os deslocamentos, deformações e tensões, respectivamente.

3.4 ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

3.4.1 Integração Numérica

No processo de resolução de problemas de valor de contorno é comum o uso de equações que envolvam integrais. Geralmente estas integrais são complexas e não são possíveis de serem resolvidas analiticamente. Esta é uma das razões que justificam o uso de métodos de integração numérica.

Para resolver as integrais globais, o domínio do problema é discretizado em um conjunto de células de fundo, como mostrado na Figura 7. Desta forma, a integração que antes ocorria diretamente sobre todo o domínio passa a ser calculada como o somatório das integrais em cada célula de fundo. Matematicamente isto é expresso por:

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_k^{n_c} \int_{\Omega_k} f(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.81)$$

onde n_c é o número de células de fundo, $f(\mathbf{x})$ é o integrando, e Ω_k é o domínio da k -ésima célula de fundo.

Um método de integração numérica é adotado para resolver as integrais em todas as células. Um dos métodos mais amplamente utilizados é o da *Quadratura de Gauss-Legendre*. Cada célula é discretizada por um número de pontos, n_g , os chamados *pontos de Gauss*. Cada ponto de Gauss possui uma coordenada ($\mathbf{x}_{Qi}$) e a ela está associada um peso, $\hat{w}_i$. A Equação 3.81 se torna.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega &= \sum_k^{n_c} \int_{\Omega_k} f(\mathbf{x}) d\Omega \\ &= \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \hat{w}_i f(\mathbf{x}_{Qi}) |\mathbf{J}_{ik}^D| \end{aligned} \quad (3.82)$$

onde $\mathbf{J}_{ik}^D$ é a matriz jacobiana e $|\mathbf{J}_{ik}^D|$ é o jacobiano para a integração da área da célula de fundo k , em que o ponto de Gauss $\mathbf{x}_{Qi}$ está localizado.

A coordenada $\mathbf{x}_{Qi}$ se relaciona com a coordenada do espaço paramétrico, ξ . Os pontos de integração são localizados simetricamente em relação ao centro do intervalo de integração. Os pares simétricos têm o mesmo peso. A tabela 1 lista pares adotados para diferentes números de pontos de Gauss, $n_{gp}^{(1D)}$, adotados em uma única dimensão

Em problemas 2D, para situações no domínio (2D),

$$n_g = n_{gp}^{(1D)} \times n_{gp}^{(1D)} \quad (3.83)$$

$$\hat{w}_k = w_i(\xi_i) \times w_j(\xi_j) \quad (3.84)$$

onde $k = (1, 2, \dots, n_g)$.

Para o contorno (1D):

$$n_g = n_{gp}^{(1D)} \quad (3.85)$$

$$\hat{w}_k = w_i(\xi_i) \quad (3.86)$$

De forma similar é possível obter a integração numérica de uma curva 1D para o contorno utilizando a quadratura de Gauss. Ao invés de células de fundo, contorno é discretizado em sub-curvas não sobrepostas. O número total de sub-curvas é n_{sc} .

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) d\Gamma &= \sum_l^{n_{sc}} \int_{\Gamma_l} f(\mathbf{x}) d\Gamma \\ &= \sum_l^{n_{sc}} \sum_{i=1}^{n_g} \hat{w}_i f(\mathbf{x}_{Qi}) |\mathbf{J}_{il}^B| \end{aligned} \quad (3.87)$$

onde $\mathbf{J}_{il}^B$ é a matriz jacobiana e $|\mathbf{J}_{il}^B|$ é o jacobiano para a integração da sub-curva.

Tabela 1 – Quadratura de Gauss-Legendre para $-1 \leq \xi \leq 1$.

$n_{gp}^{(1D)}$	i	ξ_i	w_i
1	1	0	2
2	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	1	$\sqrt{0.6}$	$\frac{5}{9}$
	2	0	$\frac{8}{9}$
	3	$-\sqrt{0.6}$	$\frac{5}{9}$
4	1	0.8611363116	0.3478548451
	2	0.3399810435	0.6521451549
	3	-0.3399810435	0.6521451549
	4	-0.8611363116	0.3478548451
5	1	0.9061798459	0.2369268850
	2	0.5384693101	0.4786286704
	3	0	0.5688888888
	4	-0.5384693101	0.4786286704
	5	-0.9061798459	0.2369268850

Fonte: [Assam \(2003, p. 255\)](#)

Vale a pena exemplificar a aplicação das integrações numéricas para o método EFG.

A matriz de rigidez nodal seria expressa por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{IJ} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega \\
 &= \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \underbrace{\hat{w}_i \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}_{Qi}) \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}_{Qi}) |\mathbf{J}_{ik}^D|}_{\mathbf{K}_{IJ}^{ik}} \\
 &= \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} (\mathbf{K}_{IJ}^{ik})_{(2 \times 2)}
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

onde $\mathbf{K}_{IJ}^{ik}$ é definida como

$$\mathbf{K}_{IJ}^{ik} = \hat{w}_i \mathbf{B}_I^T(\mathbf{x}_{Qi}) \mathbf{D} \mathbf{B}_J(\mathbf{x}_{Qi}) |\mathbf{J}_{ik}^D| \tag{3.89}$$

O vetor de forças de corpo nodais é escrito como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_I^{(b)} &= \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega \\
 &= \sum_k^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \underbrace{\hat{w}_i \Phi_I^T(\mathbf{x}_{Qi}) \mathbf{b}(\mathbf{x}_{Qi}) |\mathbf{J}_{ik}^D|}_{\mathbf{F}_I^{ik(b)}} \\
 &= \sum_l^{n_c} \sum_{i=1}^{n_g} \mathbf{F}_I^{ik(b)}
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

onde $\mathbf{F}_I^{ik(b)}$ tem dimensão 2 e é definido por

$$\mathbf{F}_I^{ik(b)} = \hat{w}_i \Phi_I^T(\mathbf{x}_{Qi}) \mathbf{b}(\mathbf{x}_{Qi}) |\mathbf{J}_{ik}^D| \tag{3.91}$$

Para exemplificar a aplicação em uma integral numérica de contorno, é mostrado o vetor de força de tração nodal.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_I^{(t)} &= \int_{\Gamma_t} \Phi_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\
 &= \sum_l^{n_{sc}} \sum_{i=1}^{n_g} \underbrace{\hat{w}_i \Phi_I^T(\mathbf{x}_{Qi}) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_{Qi}) |\mathbf{J}_{il}^B|}_{\mathbf{F}_I^{il(t)}} \\
 &= \sum_l^{n_{sc}} \sum_{i=1}^{n_g} \mathbf{F}_I^{il(t)}
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

onde $\mathbf{F}_I^{il(t)}$ tem dimensão 2 e é definido por

$$\mathbf{F}_I^{il(t)} = \hat{w}_i \Phi_I^T(\mathbf{x}_{Qi}) \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_{Qi}) |\mathbf{J}_{il}^B| \tag{3.93}$$

De forma semelhante os termos $\mathbf{K}^\alpha$ e $\mathbf{F}^\alpha$ da Equação 3.79 podem ser obtidos. Porém, estes serão abordados na seção seguinte.

É importante que seja feita a observação de que para pontos de Gauss diferentes podem apresentar domínios de suporte diferentes, e portanto, a matriz de funções de forma

Φ e a matriz de deformações B podem ser diferentes para diferentes pontos de Gauss. Isto ocorre de forma diferente no FEM, onde todos os pontos de Gauss em um elemento possuem os mesmos nós para realizar a interpolação.

A integração numérica para métodos sem malha globais baseados na forma fraca é uma questão muito importante dentre os métodos numéricos. Diversas pesquisas acerca do tema são feitas (Dolbow e Belytschko (1998), Liu e Yan (1999), Liu (2002), Wang et al. (2011)). Liu e Gu (2005) tiram duas conclusões em relação a estes estudos.

1. O número total de pontos de quadratura (pontos de Gauss), n_Q , deve ser pelo menos $2/3$ do número de nós de campo não fixados, $\tilde{N}$, no domínio do problema.

$$3 n_Q > N_u \approx 2\tilde{N} \quad \text{ou} \quad n_Q > \frac{2}{3}\tilde{N} \quad \text{para problemas } 2D \quad (3.94)$$

Note que esta regra é necessária, mas não suficiente.

2. Outros aspectos devem ser levados em conta para selecionar o número apropriado de pontos de quadratura. Liu (2002) estudou esta questão para problemas clássicos e como resultado obteve que um requerimento suficiente para o número total de pontos de quadratura é

$$n_Q = (3 \sim 9)\tilde{N} \quad \text{para problemas } 2D \quad (3.95)$$

3.4.2 Imposição de Condições de Contorno Essenciais - Método da Penalidade

Na formulação do método EFG apresentada na seção 3.3 o quarto termo da Equação 3.48 é justamente o termo referente à imposição das condições de contorno essenciais através do método da penalidade. Quando realizada a aproximação dos deslocamentos pelas funções de forma MLS podemos obter a expressão da Equação 3.71. Ao adotar a integração numérica pelo método da quadratura de Gauss o processo para obtenção de K^α e F^α é semelhante ao apresentado na seção anterior. Desta forma a matriz de penalidades de rigidez nodais são escritas como

$$\begin{aligned} K_{IJ}^\alpha &= \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \alpha \Phi_J d\Gamma \\ &= \sum_l^{n_{sc}} \sum_{i=1}^{n_g} \underbrace{\hat{w}_i \Phi_I^T(x_{Qi}) \alpha \Phi_J(x_{Qi}) |J_{il}^B|}_{K_{IJ}^{il(\alpha)}} \\ &= \sum_l^{n_{sc}} \sum_{i=1}^{n_g} (K_{IJ}^{il(\alpha)})_{(2 \times 2)} \end{aligned} \quad (3.96)$$

onde

$$K_{IJ}^{il(\alpha)} = \hat{w}_i \Phi_I^T(x_{Qi}) \alpha \Phi_J(x_{Qi}) |J_{il}^B| \quad (3.97)$$

E o vetor de penalidade de força nodal é representado como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_I^\alpha &= \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \alpha \bar{u} d\Gamma \\
 &= \sum_l^{n_{sc}} \sum_{i=1}^{n_g} \underbrace{\hat{w}_i \Phi_I^T(\mathbf{x}_{Q_i}) \alpha \bar{u}(\mathbf{x}_{Q_i}) |\mathbf{J}_{il}^B|}_{\mathbf{F}_I^{il(\alpha)}} \\
 &= \sum_l^{n_{sc}} \sum_{i=1}^{n_g} \mathbf{F}_I^{il(\alpha)}
 \end{aligned} \tag{3.98}$$

onde

$$\mathbf{F}_I^{il(\alpha)} = \hat{w}_i \Phi_I^T(\mathbf{x}_{Q_i}) \alpha \bar{u}(\mathbf{x}_{Q_i}) |\mathbf{J}_{il}^B| \tag{3.99}$$

As vantagens de utilizar o método da penalidade é que a dimensão, as propriedade simetria e positivo-definido da matriz de rigidez são mantidas, caso coeficientes de penalidades positivos sejam adotados. Além disso a simetria e a disposição em banda do sistema são preservadas.

[Liu e Gu \(2005\)](#) citam as seguintes desvantagens para o método da penalidade:

- A imposição das condições de contorno essenciais é realizada de forma aproximada, e é dependente da magnitude dos coeficientes de penalidade. Teoricamente quanto maiores os valores dos coeficientes, mais acurada será a imposição das condições de contorno essenciais
- É uma tarefa difícil a escolha de coeficientes de penalidades que sejam aplicáveis para todos os tipos de problemas. O ideal seria a utilização dos maiores coeficientes possíveis, porém coeficientes muito grandes podem apresentar problemas numéricos. Portanto, torna-se necessário uma avaliação de qual valor para os coeficientes de penalidade devem ser adotados para cada tipo de problema.
- Em geral, os resultados obtidos são menos acurados que o método dos multiplicadores de Lagrange.

Apesar destas desvantagens, o método da penalidade vem sendo largamente utilizado.

4 ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE TALUDES UTILIZANDO O MÉTODO ELEMENT-FREE GALERKIN

Os solos são intrinsecamente um sistema particulado que tipicamente apresentam um comportamento complexo. Uma de suas principais características físicas são as deformações irreparáveis e por esta razão mesmo os modelos elásticos não-lineares não são capazes em reproduzir o comportamento do solo quando estas deformações desempenham um papel importante. Para conseguir representar tais deformações irreparáveis é necessário recorrer à teoria da plasticidade (e. g. Hill (1950), Drucker e Prager (1952), Drucker (1954)).

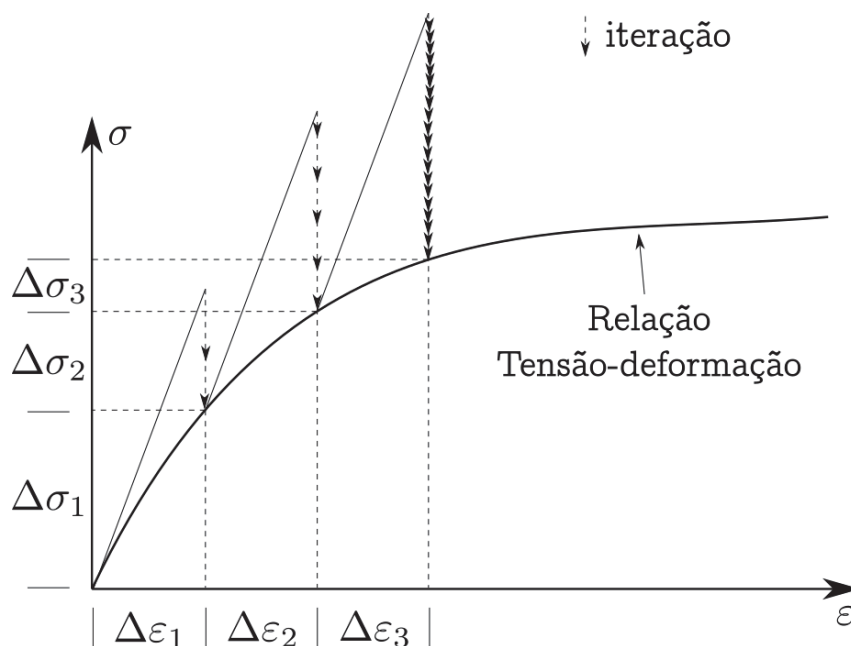


Figura 8 – Método de rigidez constante. As setas indicam as iterações.

Em Smith, Griffiths e Margetts (2014) é abordado um dos principais procedimentos de solução adotado para modelar a não-linearidade material em uma análise pelo Método dos Elementos Finitos (Finite Element Method, FEM). Este procedimento envolve iterações com "rigidez constante" em que a não-linearidade é introduzida ao alterar o vetor de "forças" durante as iterações. No processo, a matriz de rigidez global, que possui características elásticas, é gerada apenas uma vez. O vetor de forças é composto pelas forças externas aplicadas e uma parcela responsável por redistribuir as tensões no sistema quando a plastificação ocorre. A convergência acontece quando as tensões geradas pelas forças satisfazem alguma relação tensão-deformação ou critério de falha/plastificação dentro de certas tolerâncias. Com o método de "rigidez constante" muitas iterações podem ser necessárias a medida que a ruptura se aproxima, isto ocorre pois a matriz de rigidez global (elástica) passa a superestimar seriamente a verdadeira rigidez do material. Este efeito pode ser observado na Figura 8.

O método da rigidez constante, explicado acima, pode ser estendido para as aplicações

por Métodos Sem Malha (MFree) baseados na forma fraca de Galerkin. Aqui o método *Element-Free Galerkin (EFG)* auxiliado pelo método de rigidez constante será empregado na análise de estabilidade de taludes. Antes de discutir como todo este processo ocorre é relevante que alguns conceitos sejam apresentados.

4.1 RELAÇÃO TENSÃO-DEFORMAÇÃO

Um dos modelos mais simples para representar deformações irreparáveis são os modelos elasto-perfeitamente plásticos, como mostrado na Figura 9. É conveniente definir uma superfície de plastificação que separa os diferentes estados de tensão para regime elástico e plástico. Algebricamente, as superfícies de ruptura/plastificação são expressas em termos de uma função de falha ou de plastificação, F . A função é definida de forma que seja negativa dentro da superfície de plastificação, zero sobre a superfície, e positiva quando as tensões estão fora da superfície de plastificação. Os valores positivos não são permitidos e é necessário um processo de redistribuição das tensões. A Equação 4.1 mostra esquematicamente as relações dos valores de F .

$$\begin{aligned}
 F < 0 & \quad \text{Tensões dentro da superfície de plastificação (regime elástico)} \\
 F = 0 & \quad \text{Tensões está sobre a superfície de plastificação} \\
 & \quad \text{(regime plástico)} \\
 F > 0 & \quad \text{Tensões extrapolam a superfície de plastificação} \\
 & \quad \text{(Ocorre plastificação e tensões devem ser redistribuídas)}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

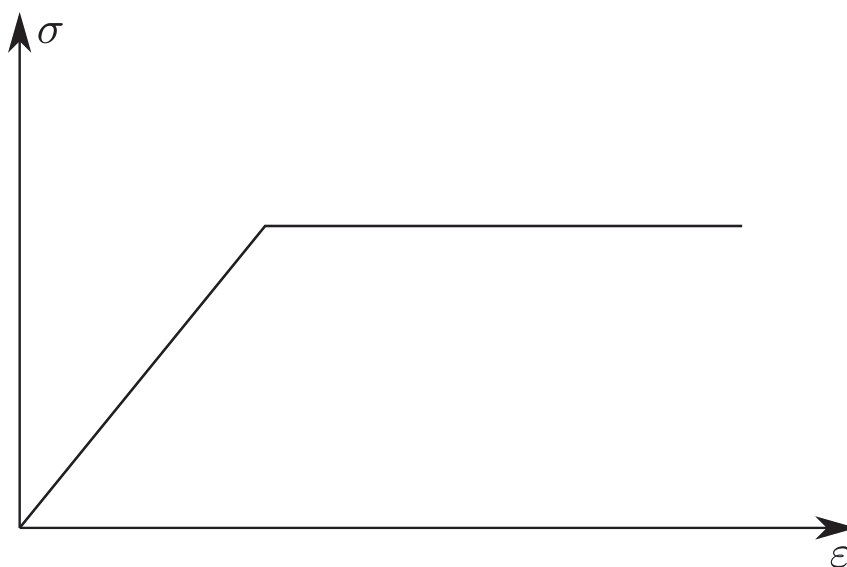


Figura 9 – Relação tensão-deformação elasto-perfeitamente plástica.

4.2 INVARIANTES DE TENSÃO

O tensor de tensões de Cauchy escrito de acordo com a convenção de Voight, pode ser expresso vetorialmente como:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T \quad (4.2)$$

Existem outras formas de expressar as tensões que talvez sejam mais convenientes para determinadas situações. A seguir serão apresentadas diferentes formas de invariantes que serão utilizadas neste trabalho, começando pelas formas invariantes (σ_m, J_2, J_3) que são definidas pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ J_2 &= \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2] \\ J_3 &= s_x s_y s_z - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{zx}^2 - s_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)}{3} = \sigma_x - \sigma_m \\ s_y &= \frac{(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)}{3} = \sigma_y - \sigma_m \\ s_z &= \frac{(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)}{3} = \sigma_z - \sigma_m \end{aligned} \quad (4.4)$$

σ_m é a tensão normal média, J_2 e J_3 são invariantes do tensor de tensões desviadoras, s_x , s_y e s_z são as componentes normais do tensor de tensões desviadoras.

O espaço tridimensional que utiliza as tensões principais $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ como coordenadas para representar o estado de tensões é conhecido como espaço de tensões de Haigh-Westergaard. Neste espaço o conjunto de pontos em que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ forma o *eixo hidrostático* ou *espaço diagonal*. Qualquer plano perpendicular ao eixo hidrostático é denominado *plano desviador*. Em particular, o plano desviador que passa pela origem é chamado de Plano- π . Um estado de tensões pode ser representado no espaço de tensões principais como o ponto $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ mostrado na Figura 10. O vetor OP pode ser dividido nas componentes ξ e ρ , onde ξ é a componente hidrostática (vetor OA), enquanto ρ é a componente desviadora (vetor AP) do estado de tensões representado por P . A Figura 11 apresenta as projeções da componente desviadora ρ (vetor AP) e dos eixos de coordenadas sobre um plano desviador. Nessa figura, σ'_1 , σ'_2 e σ'_3 são as projeções dos eixos σ_1 , σ_2 e σ_3 sobre o plano desviador. O ângulo formado entre o vetor AP que representa a componente desviadora ρ e o eixo σ'_1 é chamado de *ângulo Lode*. As formas invariantes (ξ, ρ, θ) são conhecidas como coordenadas de Haigh-Westergaard.

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sqrt{3} \sigma_m$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{3}}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]^{1/2} = \sqrt{2} J_2 \quad (4.5)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{-3\sqrt{6} J_3}{\rho^3} \right) = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right)$$

onde σ_m , J_2 e J_3 são dados pela Equação 4.3.

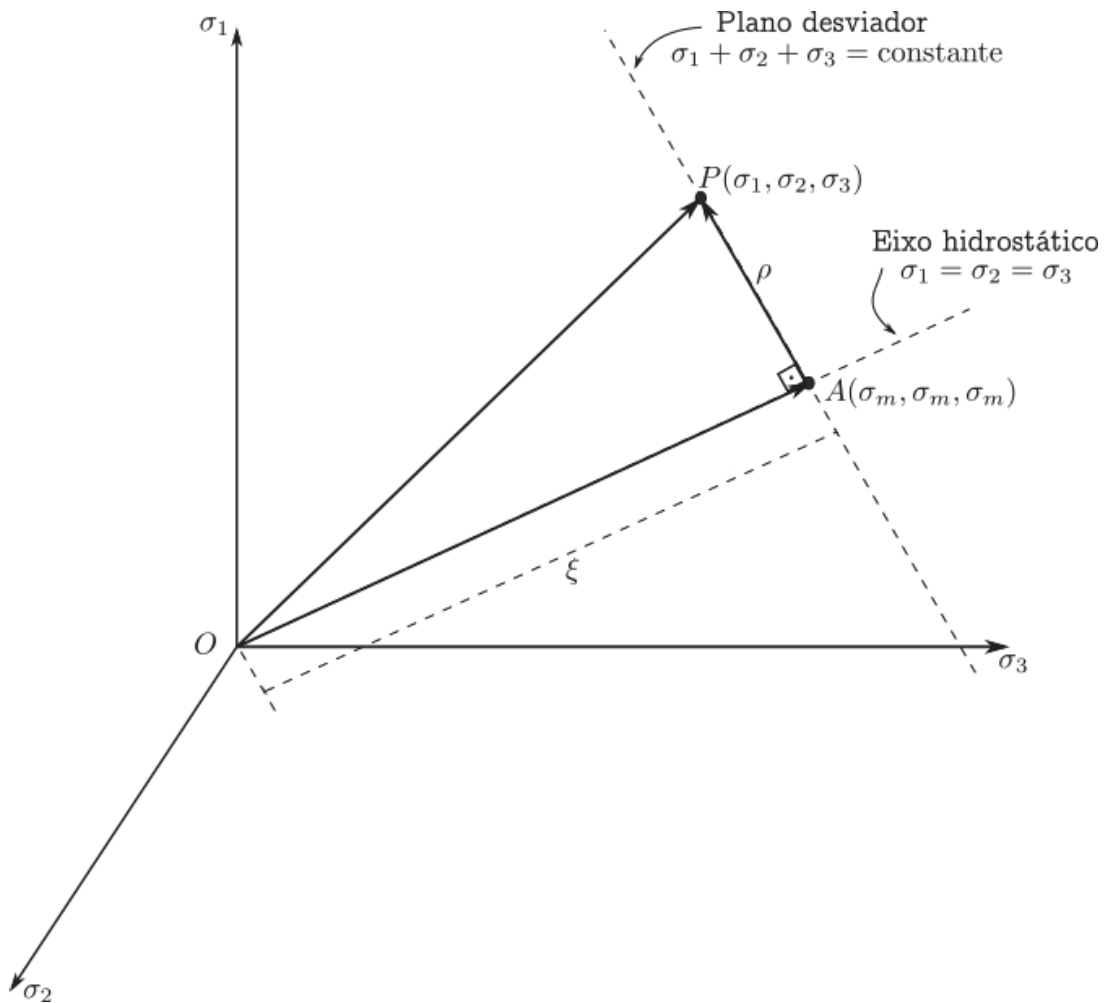


Figura 10 – Representação das tensões no espaço das tensões principais ou espaço de tensões de Haigh-Westergaard.

Considera-se ainda definir os invariantes de tensão na forma $(\sigma_m, \bar{\sigma}, \theta)$. Em que $\bar{\sigma}$ é a *tensão de von Mises* ou *tensão equivalente* expressa por

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \rho = \sqrt{3} J_2 \quad (4.6)$$

Nesta última forma, os invariantes de tensão apresentam um significado físico, onde σ_m é a tensão normal média e $\bar{\sigma}$ se relaciona com a tensão desviadora frequentemente utilizada

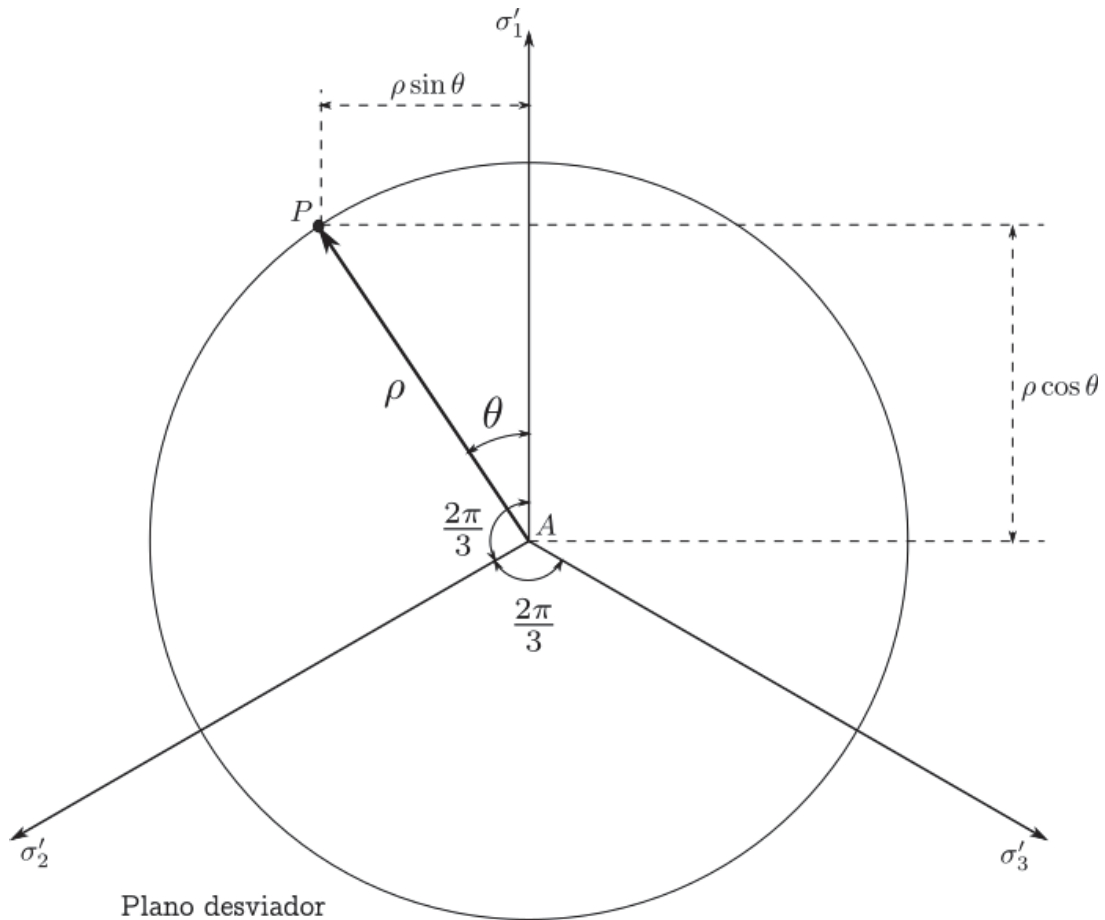


Figura 11 – Estado de tensões em um ponto projetado em um plano desviador.

em ensaios triaxiais (Smith, Griffiths e Margetts (2014)). A relação entre os invariantes de tensão (σ_m , $\bar{\sigma}$, θ) e as tensões principais são:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_m + \frac{2}{3}\bar{\sigma} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sigma_2 &= \sigma_m + \frac{2}{3}\bar{\sigma} \sin\theta \\ \sigma_3 &= \sigma_m + \frac{2}{3}\bar{\sigma} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}\tag{4.7}$$

As tensões principais escritas nesta forma garantem que σ_1 assumam sua forma mais compressiva e σ_3 a menos compressiva. Assumindo compressão como sendo negativa, o ângulo Lode θ varia entre $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$.

4.3 CRITÉRIO DE RUPTURA: MOHR-COULOMB

Até hoje, o critério de falha mais adequado para solos é o critério de Mohr-Coulomb. No espaço das tensões principais, o critério de Mohr-Coulomb toma a forma de um cone hexagonal irregular, como pode ser visto na Figura 12. Aqui é admitido que a superfície de

plasticidade e ruptura são coincidentes. A função de plasticidade/ruptura, F , em termos de tensões principais é dada por (assumindo compressão com sinal negativo).

$$F = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi_s - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - c \cos \phi_s \quad (4.8)$$

Onde c é a coesão e ϕ_s é o ângulo de atrito do solo.

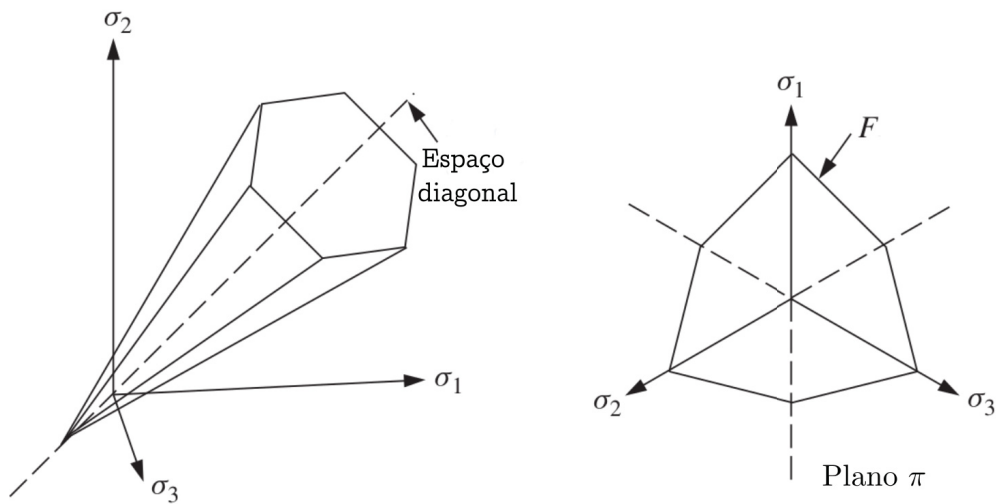


Figura 12 – Critério de ruptura de Mohr-Coulomb
Fonte: Adaptado de [Smith, Griffiths e Margetts \(2014, p. 239\)](#)

A versão da função de falha em termos dos invariantes de tensão é obtida ao substituir a Equação 4.7 na Equação 4.8.

$$F = \sigma_m \sin \phi_s + \bar{\sigma} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \theta \sin \phi_s}{3} \right) - c \cos \phi_s \quad (4.9)$$

Note que o critério de Mohr-Coulomb depende de todos os três invariantes de tensão na forma $(\sigma_m, \bar{\sigma}, \theta)$ e de propriedades do material $(c \text{ e } \phi_s)$.

Segundo [Smith, Griffiths e Margetts \(2014\)](#), para materiais relacionados com parâmetros c e ϕ_s (os chamados *frictional materials*), cujo estado último são descritos pelo critério de Mohr-Coulomb, um fluxo associado nos leva a expansões volumétricas fisicamente irreais ou dilatação durante a plastificação. Para estes casos, regras de fluxos não associados são preferíveis e neste caso as deformações plásticas são descritas por uma função potencial de plastificação, Q . Esta função pode ser geometricamente similar à função de ruptura F mas com o ângulo de atrito ϕ_s sendo substituído pelo ângulo de dilatação ψ . A função de potencial de plastificação será melhor discutida na seção a seguir.

4.4 VISCO PLASTICIDADE

4.4.1 Deformações visco-plásticas

Materiais viscoplásticos são aqueles descritos por propriedades mecânicas plásticas e reológicas, ou seja, o material apresenta não só efeitos plásticos representados por possíveis deformações permanentes após a aplicação de carga mas também por continuar com o escoamento do material em função do tempo com influência da carga que fora aplicada. Este último efeito é conhecido como *creep*. O conceito de visco-plasticidade não é algo novo. O chamado material de Bingham (Bingham (1922)) utilizava o conceito de visco-plasticidade já em 1922. Entretanto, houveram muitos avanços na área e Perzyna (1966) apresenta uma excelente pesquisa da evolução do conceito. Zienkiewicz e Corneau (1974) se inspiraram no trabalho de Perzyna (1966) para propor o método visco-plástico abordado nesse trabalho. No método, tensões que extrapolam o critério de ruptura (condizente por valores de $F > 0$) não são permitidas e devem ser redistribuídas em sua vizinhança.

É importante salientar que o incremento das deformações visco-plásticas ocorre somente quando há a extrapolação do critério de ruptura. As deformações visco-plásticas são geradas a uma taxa proporcional a F através da equação:

$$\dot{\epsilon}^{vp} = F \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (4.10)$$

onde $\dot{\epsilon}^{vp}$ é a taxa de deformação visco-plástica, F é a função de plastificação e Q é a função potencial de plastificação, responsável pela descrição das deformações plásticas. Como a Equação 4.10 necessita do cálculo da derivada da função potencial de plastificação é importante ressaltar que há limitações em adotar a envoltória de Mohr-Coulomb, pois esta superfície cônica hexagonal possui "cantos" em que a derivada pode se tornar indeterminada. Isto ocorre na seguinte condição

$$|\sin \theta| > 0.49 \quad (4.11)$$

Para contornar este inconveniente, uma superfície cônica é adotada quando a situação ocorre. Na prática isto é feito ao fixar $\theta = 30^\circ$ ou $\theta = -30^\circ$ dependendo do valor em que θ se aproxima de $\pm 30^\circ$.

A função potencial de plastificação pode ser escrita em função dos invariantes de tensão (σ_m, J_2, J_3). Logo, A derivada da função potencial de plastificação Q em relação às tensões, são expressas pela seguinte regra da cadeia.

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_m} \frac{\partial \sigma_m}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial Q}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \quad (4.12)$$

Assim, a taxa de deformação visco-plástica calculada numericamente para um ponto em que as tensões violaram o critério de ruptura pode ser escrito como.

$$\dot{\epsilon}^{vp} = F \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma_m} [M_1] + \frac{\partial Q}{\partial J_2} [M_2] + \frac{\partial Q}{\partial J_3} [M_3] \right) \sigma \quad (4.13)$$

onde $\frac{\partial Q}{\partial \sigma_m}$, $\frac{\partial Q}{\partial J_2}$, $\frac{\partial Q}{\partial J_3}$ são escalares e $[M_1]$, $[M_2]$, $[M_3]$ são matrizes dadas por

$$M_1 = \frac{1}{3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ Sim. & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$M_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 6 & 0 & 0 \\ & & & & 6 & 0 \\ Sim. & & & & & 6 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$M_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} s_x & s_z & s_y & \tau_{xy} & -2\tau_{yz} & \tau_{zx} \\ & s_y & s_x & \tau_{xy} & \tau_{yz} & -2\tau_{zx} \\ & & s_z & -2\tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ & & & -3s_z & 3\tau_{zx} & 3\tau_{yz} \\ & & & & -3s_x & 3\tau_{xy} \\ Sim. & & & & & -3s_y \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Para materiais de Mohr-Coulomb

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma_m} = \sin \psi$$

$$\frac{\partial Q}{\partial J_2} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}\rho} \left(1 + \tan \theta \tan(3\theta) + \frac{\sin \psi}{\sqrt{3}} [\tan(3\theta) - \tan \theta] \right) \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial J_3} = \frac{\sqrt{3} \sin \theta + \sin \psi \cos \theta}{\rho^2 \cos(3\theta)}$$

onde ρ é a componente desviadora da coordenada de Haigh-Westergaard e θ é o ângulo Lode que são calculadas pelas expressões na Equação 4.5, (s_x, s_y, s_z) são dados pela Equação 4.4 e ψ é o Ângulo de dilatação. O ângulo de dilatação afeta a variação volumétrica durante a plastificação. Neste trabalho $\psi = 0$ é adotado, o que corresponde com um fluxo não associado com variação volumétrica nula durante a plastificação.

A multiplicação da taxa de deformação plástica da Equação 4.10 por um intervalo de pseudo-tempo Δt nos fornece a variação de deformação visco-plástica que deve ser acumulada para o ponto de interesse em que $F > 0$.

$$\Delta \epsilon^{vp} = \dot{\epsilon}^{vp} \Delta t \quad (4.18)$$

onde

$$\Delta t = \frac{4(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{E(1 - 2\nu + \sin^2 \phi_s)} \quad (4.19)$$

em que E e ν são propriedades elásticas do material. A Equação 4.19 representa o passo de tempo que deve ser adotado para que haja estabilidade numérica incondicional (Zienkiewicz e Corneau (1974)).

4.4.2 Obtenção do sistema de equações lineares utilizando modelo visco-plástico

Neste item apresenta-se a construção do procedimento de solução através do modelo visco-plástico.

O método Element-Free Galerkin é utilizado no processo de obtenção do sistema algébrico de equações. A construção do sistema é muito semelhante ao procedimento descrito na Seção 3.3 com algumas modificações devido à introdução do conceito de visco-plasticidade.

Na abordagem visco-plástica a deformação total passa a ser dividida nas seguintes parcelas conforme a equação a seguir.

$$\epsilon^{tot} = \epsilon^e + \epsilon^{vp} + \epsilon^0 \quad (4.20)$$

Onde ϵ^{tot} são deformações totais, ϵ^e são deformações elásticas, ϵ^{vp} são deformações visco-plásticas e ϵ^0 são deformações iniciais.

A partir da Equação 4.20 as deformações elásticas podem ser escritas como

$$\epsilon^e = \epsilon^{tot} - \epsilon^{vp} - \epsilon^0 \quad (4.21)$$

Somente as deformações elásticas geram tensões na matriz de tensão-deformação elástica, e portanto, as tensões são escritas como

$$\sigma^e = D^e \epsilon^e + \sigma_0 = D^e (\epsilon^{tot} - \epsilon^{vp} - \epsilon^0) + \sigma_0 \quad (4.22)$$

onde σ_0 são as tensões iniciais e D^e é a matriz constitutiva elástica.

$$D^e = \frac{E(1 - \nu)}{(1 - \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Esta é a forma geral de D^e , caso estado plano de tensão ou deformação seja adotado a Equação 4.23 se torna a versão particular apresentada nas Equações 3.46 e 3.47.

A forma fraca de Galerkin apresentada na Seção 3.3 com domínio Ω e contorno Γ , em sua forma mais geral pode ser escrita na seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B})^T \boldsymbol{\sigma}^e d\Omega - \int_{\Omega} \Phi^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \Phi^T \bar{t} d\Gamma = 0 \quad (4.24)$$

onde $\mathbf{b}$ são as forças de corpo ao qual o domínio está sujeito; $\bar{t}$ são trações prescritas; Φ são as funções de forma do método empregado para aproximar as variáveis de campo, para o EFG as funções de forma são do tipo *Moving Least Square (MLS)*. $\mathbf{B}$ são as matrizes de deformações apresentadas na Equação 3.52, onde aqui em uma forma mais geral $\mathbf{B}_i$ é dada por.

$$\mathbf{B}_i^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & \frac{\partial \phi_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Substituindo a Equação 4.22 na Equação 4.24 tem-se

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B})^T [\mathbf{D}^e (\boldsymbol{\varepsilon}^{tot} - \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + \boldsymbol{\sigma}_0] d\Omega = \mathbf{F} \quad (4.26)$$

onde $\mathbf{F}$ são as forças externas do problema

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \Phi^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi^T \bar{t} d\Gamma \quad (4.27)$$

É oportuno apresentar a relação deformação-deslocamento

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{U}_s \quad (4.28)$$

onde $\mathbf{U}_s$ são os parâmetros nodais de deslocamento apresentados na Seção 3.3.

A Equação 4.26 com o auxílio da Equação 4.28 se torna

$$\underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{B})^T \mathbf{D}^e \mathbf{B} d\Omega}_{\mathbf{K}} \mathbf{U}_s = \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{B})^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{B})^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^0 d\Omega + \mathbf{F} - \int_{\Omega} (\mathbf{B})^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega}_{\bar{\mathbf{F}}} \quad (4.29)$$

onde $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez global e $\bar{\mathbf{F}}$ é o vetor de forças que levam em conta o estágio inicial do solo.

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + \int_{\Omega} (\mathbf{B})^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^0 d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{B})^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega \quad (4.30)$$

Para o método EFG, caso o método da penalidade seja adotado para fazer a imposição das condições de contorno essenciais, a matriz de penalidades de rigidez global $\mathbf{K}^\alpha$ e o vetor de penalidades de forças global $\mathbf{F}^\alpha$ abordados na Seção 3.3 devem ser incorporados no processo de formulação. Desta forma a matriz de rigidez global se torna

$$\widehat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha] \quad (4.31)$$

E o vetor de forças global se torna

$$\widehat{\mathbf{F}} = [\overline{\mathbf{F}} + \mathbf{F}^\alpha] \quad (4.32)$$

Desta forma a Equação 4.29 se torna

$$\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{U}_s = \widehat{\mathbf{F}} + \underbrace{\int_{\Omega} (\mathbf{B})^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} d\Omega}_{\text{Redistribuição de tensões}} \quad (4.33)$$

A integral na Equação 4.33 é a parcela responsável pela redistribuição das tensões que excedem o critério de plastificação.

O sistema de equações algébricas do modelo visco-plástico é dado pela equação a seguir

$$\widehat{\mathbf{K}}\mathbf{U}_s = \mathbf{V} \quad (4.34)$$

onde

$$\mathbf{V} = \widehat{\mathbf{F}} + \int_{\Omega} (\mathbf{B})^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\varepsilon}^{vp} d\Omega \quad (4.35)$$

4.4.3 Algoritmo visco-plástico para análise de estabilidade de taludes

Um modelo computacional foi desenvolvido com a utilização da linguagem de programação *Python* para realizar a análise de estabilidade de taludes utilizando o algoritmo visco-plástico discutido neste capítulo. O Fator de Segurança (Factor of Safety, FOS) deve ser estimado, sendo este definido como o fator pelo qual $\tan \phi_s$ e c devem ser reduzidos para que a ruptura do talude ocorra. Este processo é atualmente conhecido como *Técnica de Redução da Resistência ao cisalhamento* do solo (e. g. Matsui e San (1992), Griffiths e Lane (1999)). Diversos valores de Fator de Segurança são testados progressivamente. Caso o Fator de Segurança a ser testado reduza a resistência ao cisalhamento de forma que a ruptura aconteça, este é o Fator de Segurança empregado para o talude analisado.

O método sem malha Element-Free Galerkin é utilizado para a aproximação das variáveis de campo e para obter o sistema de equações discreto global (Ver Equação 4.34). A matriz de rigidez global $\widehat{\mathbf{K}}$ é calculada apenas uma vez, assim como o vetor devido às cargas gravitacionais $\mathbf{F}_g$. Este é obtido através do vetor de forças de corpo ao adotar $\mathbf{b} = \gamma_s$. Sendo que γ_s é o peso específico do solo.

$$\mathbf{F}_g = \gamma_s \int_{\Omega} \boldsymbol{\Phi}^T d\Omega \quad (4.36)$$

A Figura 13 apresenta um fluxograma com o funcionamento do algoritmo. Primeiramente é fixado o valor do Fator de Segurança a ser testado, então é aplicada a técnica de redução da tensão cisalhante para obter os parâmetros ϕ_f e c_f que serão utilizados no critério de falha.

$$c_f = \frac{c}{FOS} \quad (4.37)$$

$$\phi_f = \arctan \left(\frac{\tan \phi_s}{FOS} \right) \quad (4.38)$$

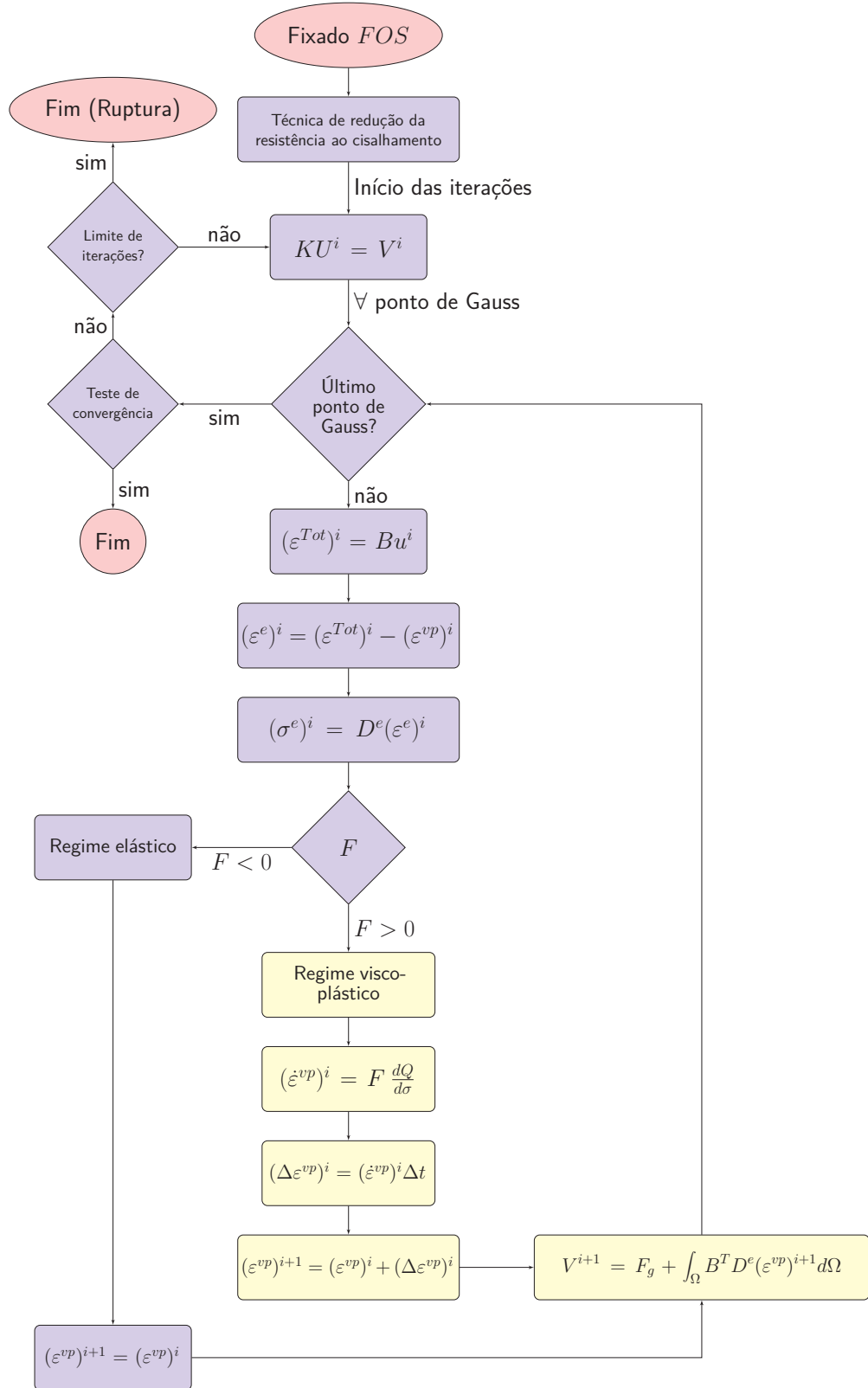


Figura 13 – Algoritmo do modelo visco-plástico.

O problema elasto-plástico é resolvido por repetidas iterações no "tempo" no regime elástico utilizando um método de rigidez constante. Para este problema as deformações e tensões iniciais (ϵ_0 e σ_0) são consideradas nulas e portanto, inicialmente V^i é o próprio vetor de cargas devido à gravidade F_g . Neste momento o sistema de equações global é resolvido para obter os parâmetros de deslocamentos nodais U_s^i .

$$U_s^i = [K]^{-1} V^i \quad (4.39)$$

Em seguida são efetuados diversos cálculos para cada um dos pontos de Gauss presentes em cada célula de fundo. São adotados 16 pontos de Gauss por célula na disposição 4×4 . As deformações totais são obtidas através de

$$(\epsilon^{Tot})^i = B u^i \quad (4.40)$$

onde u^i são parâmetros de deslocamentos nodais para pontos dentro do domínio de suporte do ponto de Gauss. Com isso são calculadas as deformações elásticas por

$$(\epsilon^e)^i = (\epsilon^{Tot})^i - (\epsilon^{vp})^i \quad (4.41)$$

Em seguida as tensões são calculadas, lembrando que são as deformações elásticas que são utilizadas para o cálculo das tensões.

$$(\sigma^e)^i = D^e (\epsilon^e)^i \quad (4.42)$$

Após estabelecido o estado de tensões no ponto de Gauss, os invariantes de tensão ou tensões principais são utilizados para obter o valor da função de ruptura, F . Neste momento o algoritmo se divide em duas partes que dependem do valor que F assume.

1. Caso $F < 0$, o ponto de Gauss permanece no regime elástico e não há acúmulo de deformações visco-plásticas para a próxima iteração. Desta forma, as deformações visco-plásticas para o ponto em questão são apenas atualizadas.

$$(\epsilon^{vp})^{i+1} = (\epsilon^{vp})^i \quad (4.43)$$

2. Caso $F \geq 0$, ocorre a plastificação e é necessário uma redistribuição das tensões. Isto ocorre através de uma contribuição visco-plástica no vetor global de forças. Para isto, são calculadas a taxa de deformação visco-plástica através de

$$(\dot{\epsilon}^{vp})^i = F \frac{dQ}{d\sigma} \quad (4.44)$$

Ao multiplicar a taxa de deformações visco-plásticas por um pseudo passo de tempo Δt dado pela Equação 4.19 é obtida a variação de deformação visco-plástica

$$(\Delta \epsilon^{vp})^i = (\dot{\epsilon}^{vp})^i \Delta t \quad (4.45)$$

Esta variação de deformação visco-plástica deve ser acumulada para a próxima iteração no "tempo".

$$(\epsilon^{vp})^{i+1} = (\epsilon^{vp})^i + (\Delta\epsilon^{vp})^i \quad (4.46)$$

A parcela de tensão que deve ser redistribuída depende das deformações visco-plásticas no ponto de Gauss e é calculada pela integral na equação a seguir.

$$\mathbf{V}^{i+1} = \mathbf{F}_g + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e (\epsilon^{vp})^{i+1} d\Omega \quad (4.47)$$

Esta parcela é acrescentada ao vetor de forças globais que será utilizado na próxima iteração no "tempo" e o algoritmo efetua todo o processo para o próximo ponto de Gauss. Caso todos os cálculos já tenham sido executados para todos os pontos de Gauss é realizado um teste de convergência.

O teste de convergência consiste em uma verificação da diferença relativa dos parâmetros nodais entre a iteração atual e a anterior para cada grau de liberdade de $\mathbf{U}_s$. Caso os valores das diferenças relativas sejam menores que um valor de tolerância prescrita ($TOL = 10^{-4}$ é adotado neste trabalho) para todos os graus de liberdade então o sistema é dito convergente. Basta que um grau de liberdade exceda o valor de tolerância para o teste de convergência falhar e assim o processo se repete para o próximo passo de iteração no "tempo". Um valor máximo de iterações é prescrito e quando atingido admite-se que não houve convergência (1000 iterações são adotadas para este trabalho). Neste trabalho a incapacidade do modelo convergir é admitido como sendo o critério de ruptura, portanto o Fator de Segurança que reduz a resistência ao cisalhamento até o ponto em que o modelo não seja capaz de convergir é o adotado para o talude em análise.

5 RESULTADOS E ANÁLISES

Serão apresentados os resultados obtidos pelo modelo Element-Free Galerkin (EFG) desenvolvido no trabalho. Inicialmente o modelo EFG é aplicado a um problema elástico simples conhecido na literatura para validação do modelo computacional desenvolvido quando aplicado em regime elástico. Na sequência, diversas análises não lineares utilizando o modelo constitutivo visco-plástico proposto por [Zienkiewicz e Corneau \(1974\)](#) são realizadas para avaliar a estabilidade de taludes. Três configurações de taludes são apresentadas e os resultados de Fator de Segurança obtidos são comparados com valores encontrados na literatura.

5.1 VALIDAÇÃO DO MODELO ELÁSTICO

Foi desenvolvido um modelo computacional do método Element-Free Galerkin (EFG) utilizando a linguagem computacional *Python*. A validação do modelo EFG para regime elástico é feita com base em uma simulação sobre um problema conhecido na literatura. É estudada uma viga em balanço submetida à carga de cisalha com distribuição parabólica na extremidade livre como mostrado na Figura 14.

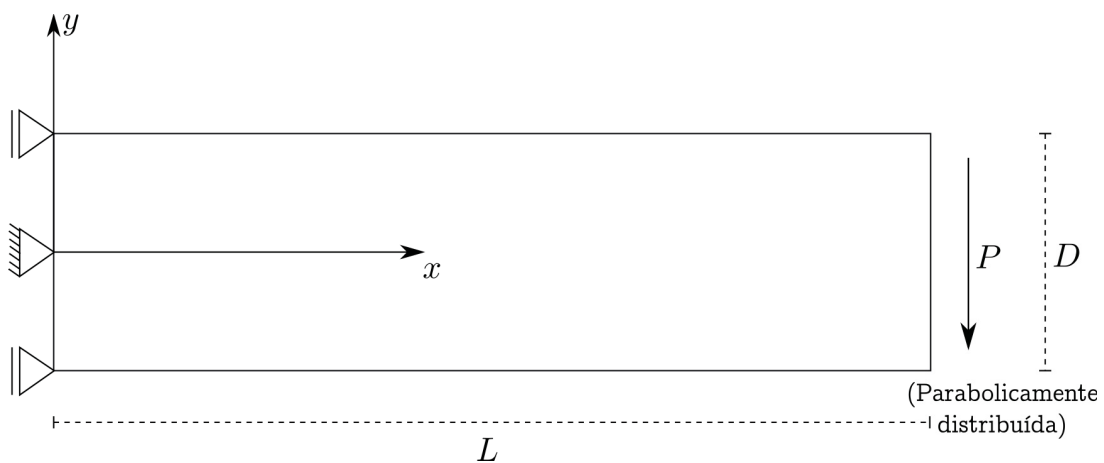


Figura 14 – Viga em balanço submetida a uma carga com distribuição parabólica na extremidade livre

Os parâmetros para a viga são os seguintes e as unidades obedecem o [Sistema Internacional \(SI\)](#) :

Comprimento da viga: $L = 48$;

Largura da viga: $D = 12$;

Espessura da viga: $t = 1.0$;

Módulo de elasticidade ou módulo de Young: $E = 3 \times 10^7$;

Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.3$;

Carga (integração da carga distribuída): $P = -1000$

A solução analítica está disponível no livro de [Timoshenko e Goodier \(1970\)](#) e são listadas a seguir junto das hipóteses adotadas.

- A viga possui espessura unitária ($t = 1.0$);
- É considerado *Estado Plano de Tensões*;
- Os deslocamentos na direção x são dados por:

$$u(x, y) = -\frac{Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (5.1)$$

Em que I é o momento de inércia. Para uma viga com secção retangular e espessura unitária I é dado por:

$$I = \frac{D^3}{12} \quad (5.2)$$

- Os deslocamentos na direção y :

$$v(x, y) = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right] \quad (5.3)$$

- A tensão normal na secção da viga:

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{P(L - x)y}{I} \quad (5.4)$$

- A tensão normal na direção y :

$$\sigma_y(x, y) = 0 \quad (5.5)$$

- A tensão cisalhante em uma secção da viga:

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{P}{2I} \left[\frac{D^2}{4} - y^2 \right] \quad (5.6)$$

No contorno da extremidade direita ($x = L$), a força externa de cisalhamento aplicada é calculada a partir da formula analítica presente na Equação 5.6. A força tem distribuição parabólica na secção da extremidade direita da viga.

$$t_{xy}|_{x=L} = \frac{P}{2I} \left[\frac{D^2}{4} - y^2 \right] \quad (5.7)$$

No contorno da extremidade esquerda ($x = 0$), as condições de contorno essenciais são obtidas pelas fórmulas analíticas das Equações 5.1 e 5.3.

$$u|_{x=0} = -\frac{P(2+\nu)}{6EI} \left[y^2 - \frac{D^2}{4} \right] \quad (5.8)$$

$$v|_{x=0} = \frac{P\nu L}{2EI} y^2 \quad (5.9)$$

A discretização do problema foi feita utilizando 175 nós de campo regularmente distribuídos na forma (25×7) . 40 células de fundo retangulares são adotadas. Em cada célula 16 pontos de Gauss (4×4) são utilizados para realizar as integrações numéricas.

A Figura 15 apresenta as configurações indeformada e deformada. O comportamento observado é o esperado.

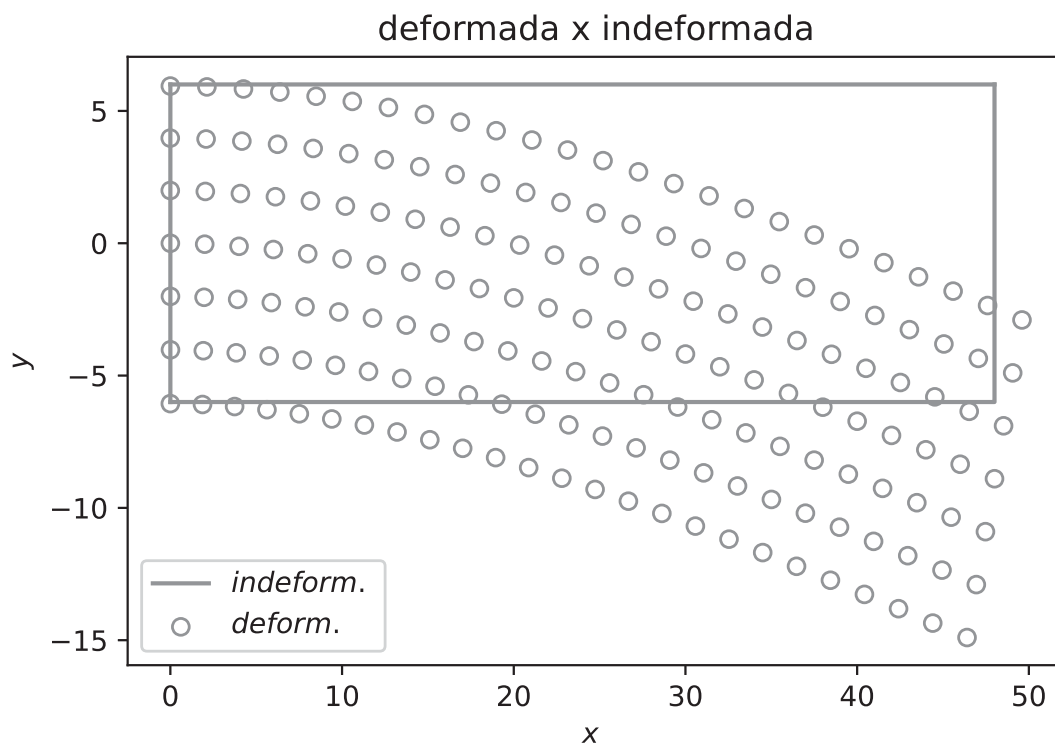


Figura 15 – Configuração deformada e indeformada obtidas utilizando o EFG com 175 nós de campo.

As deflexões obtidas pelo modelo EFG em $y = 0$ junto da solução analítica são exibidas na Figura 16. Os resultados obtidos estão de acordo com a solução exata do problema.

Os resultados de tensões normais σ_x em $x = L/2$ obtidos pelo modelo EFG e a solução são apresentados na Figura 17. Pode-se observar uma grande concordância entre as soluções.

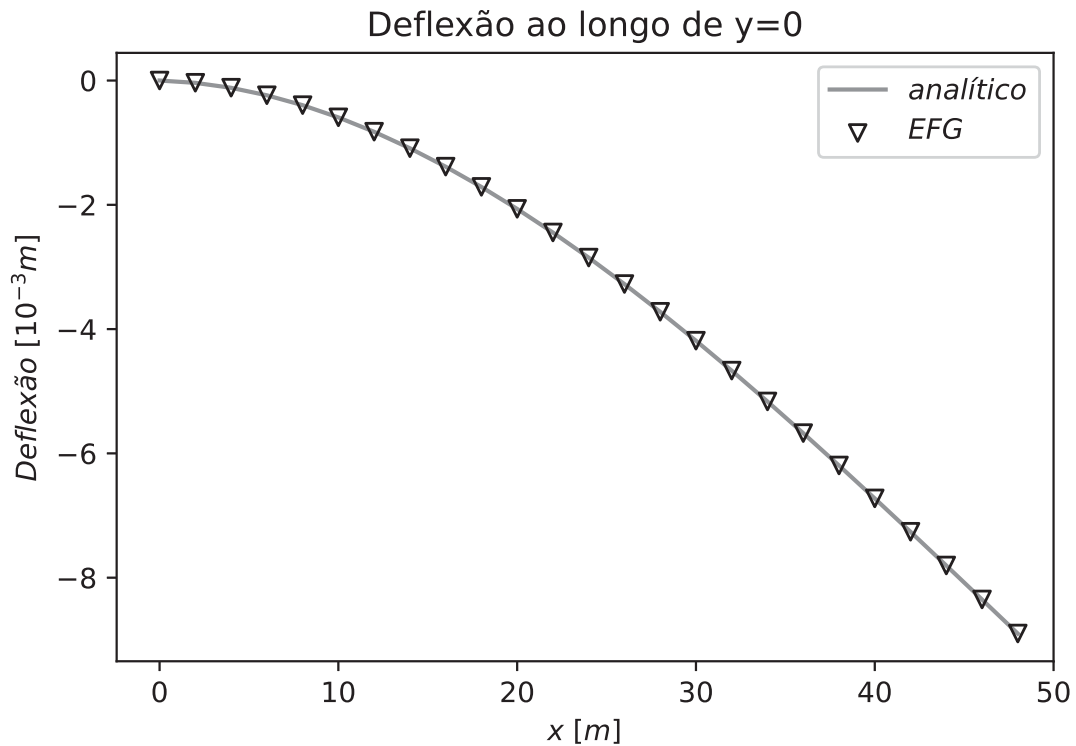


Figura 16 – Deflexões ao longo de $y = 0$. Os valores obtidos pelo modelo EFG estão de acordo com a solução analítica.

As tensões cisalhantes em $x = L/2$ calculadas pelo modelo EFG estão de acordo com a solução analítica (Figura 18), inclusive nas extremidades onde o Método dos Elementos Finitos costuma apresentar problemas.

Além disso, foi calculada uma norma de energia dada pela expressão a seguir.

$$e_{norm} = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon^{Num} - \varepsilon^{Exact})^T \mathbf{D} (\varepsilon^{Num} - \varepsilon^{Exact}) d\Omega} = 0,042... \quad (5.10)$$

onde $\mathbf{D}$ é a matriz constitutiva, ε^{Num} são as deformações obtidas pelo modelo EFG e ε^{Exact} são as deformações exatas. A norma foi calculada em todos os pontos de Gauss e o valor obtido $e_{norm} = 0.042$ indica uma boa aproximação numérica.

Os resultados obtidos pelo modelo EFG foram bastante condizentes com a solução analítica, mostrando que o modelo foi capaz de representar o problema.

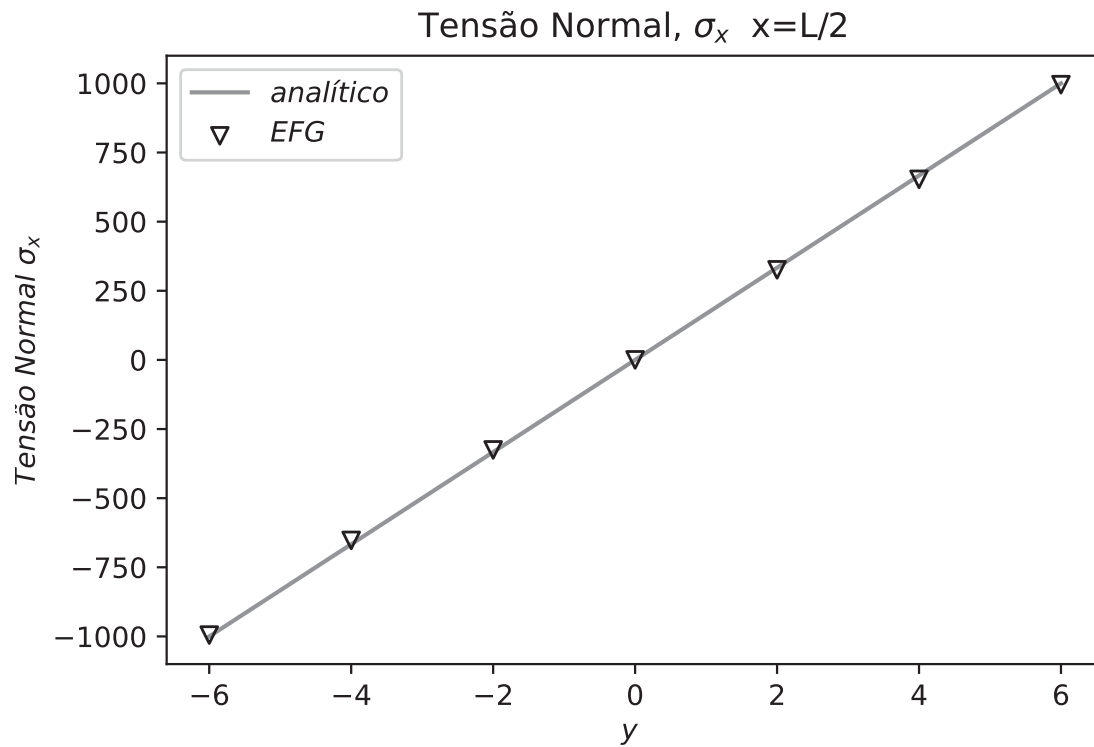


Figura 17 – Tensões normais σ_x em $x = L/2$. Os valores obtidos pelo modelo EFG estão de acordo com a solução analítica.

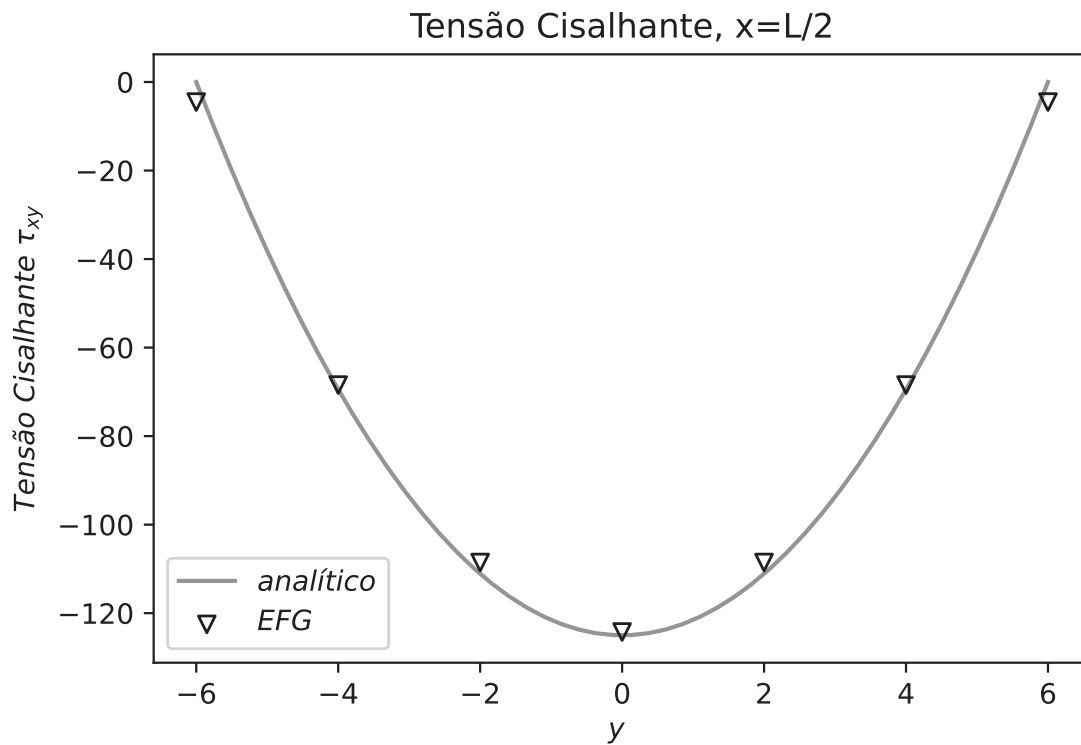


Figura 18 – Tensões cisalhantes τ_{xy} em $x = L/2$. Os valores obtidos pelo modelo EFG estão de acordo com a solução analítica.

5.2 RESULTADOS DO MODELO ELEMENT-FREE GALERKIN COM ABORDAGEM VISCO-PLÁSTICA APLICADO NA ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE TALUDES

Diversas análises de estabilidade de taludes são realizadas e apresentadas para demonstrar a capacidade e performance do método EFG quando utilizado nesta aplicação da engenharia geotécnica. A estabilidade de três taludes compostos de solos secos, homogêneos e isotrópicos são analisados para o estado plano de deformações. Os resultados obtidos pelo modelo EFG proposto são comparados com as soluções de métodos clássicos como o método das fatias de Bishop Simplificado (Bishop e Morgenstern (1960)) e Método dos Elementos Finitos (Finite Element Method, FEM) (Griffiths e Lane (1999)). Além disto, os resultados também são comparados com os resultados obtidos por métodos sem malhas como o Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) (Gago, Mužík e Bulkoa (2019)), Semi Lagrangian Reproducing Kernel Particle Method (SL-RKPM) (Kwok et al. (2014)) e Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) (Bui et al. (2011b)). O modelo EFG proposto usa base quadrática para a construção das funções de forma utilizadas para a aproximação dos deslocamentos e $\alpha_s = 3.0$ como tamanho adimensional do domínio de suporte.

Na análise de estabilidade do talude as cargas devido ao peso próprio são aplicadas em uma única etapa. A técnica de redução da resistência ao cisalhamento é aplicada em um processo de testagem de valores de Fator de Segurança (Factor of Safety, FOS) que são gradativamente aumentados até que a convergência não possa ser atingida. O valor limite de iterações é prescrito e neste trabalho o valor 1000 é adotado. O FOS a ser testado é responsável por reduzir os parâmetros que representam a resistência ao cisalhamento.

5.2.1 Talude 1: Talude homogêneo sem camada de fundação

O primeiro talude a ser analisado apresenta a geometria mostrada na Figura 19 sendo que a altura $H=1.0$ m é empregada. O talude têm restrições de deslocamentos horizontais na lateral enquanto a restrição de deslocamento na base é total. O talude é composto de solo seco, homogêneo e isotrópico e os parâmetros de solo utilizados estão dispostos na Tabela 2.

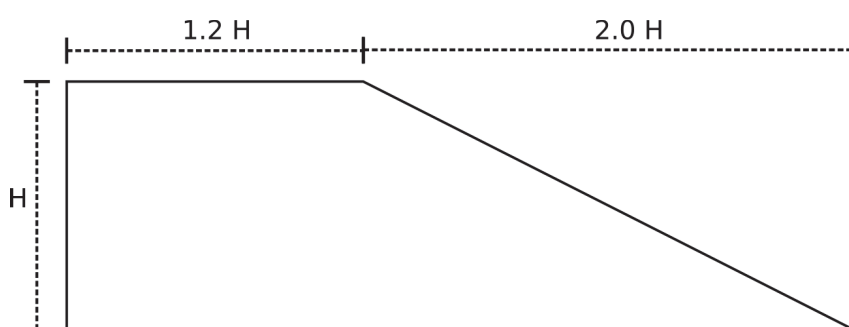


Figura 19 – Geometria do Talude 1. Solo homogêneo com ângulo $(2:1)$. $\phi_s = 20^\circ$, $c/\gamma_s H = 0.05$.

Tabela 2 – Parâmetros do solo utilizados no Talude 1 e 2. Solo homogêneo, isotrópico e seco.

Parâmetros do solo		
ϕ_s	20°	
c	1	kN/m^2
E	10 ⁵	kN/m^2
ν	0.3	
ψ	0°	
γ_s	20	kN/m^3

Para este problema foram analisados quatro cenários em que diferentes números de nós de campo são utilizados para a discretização do problema. Os números de nós, N , empregados para cada cenário são apresentados na Tabela 3 e foram aumentados gradativamente entre cenários até que se atingisse a convergência dos resultados de deslocamento.

Tabela 3 – Número de nós utilizados em cada análise para o Talude 1.

Cenário	N
1	49
2	165
3	315
4	475

Para as análises é útil definir os deslocamentos adimensionais δ_{max}^{adim} que podem ser expressos pela seguinte equação:

$$\delta_{max}^{adim} = E\delta_{max}/\gamma_s H^2 \quad (5.11)$$

onde E é o módulo de Young, δ_{max} é o máximo valor do módulo do vetor deslocamento dentre todos os nós, γ_s é o peso específico do solo e H é a altura total do talude.

A Figura 20 apresenta os deslocamentos adimensionais δ_{max}^{adim} para diferentes Fatores de Segurança que foram testados. Estes variam de FOS=0.8 até FOS=1.45. Note que há convergência nos resultados de deslocamentos adimensionais para os dois últimos cenários ($N=315$ e $N=475$), com exceção do valor em FOS=1.4 onde ocorre um grande salto dos deslocamentos adimensionais. Por esta razão, os resultados subsequentes serão apresentados somente para o cenário que utiliza $N=475$.

É feita uma comparação direta entre os resultados de deslocamentos adimensionais δ_{max}^{adim} obtidos pelo modelo EFG e resultados obtidos por Griffiths e Lane (1999), utilizando o FEM. Griffiths e Lane (1999) utilizam na análise uma malha (20×10) de 200 elementos quadriláteros de oito nós com integração reduzida (quatro pontos de Gauss por elemento). A comparação dos resultados é exibida na Figura 21 e explicitada na Tabela 4. Os métodos apresentam grande concordância no comportamento dos deslocamentos adimensionais. Griffiths e Lane (1999) utilizam como critério de ruptura a impossibilidade de convergência dos resultados

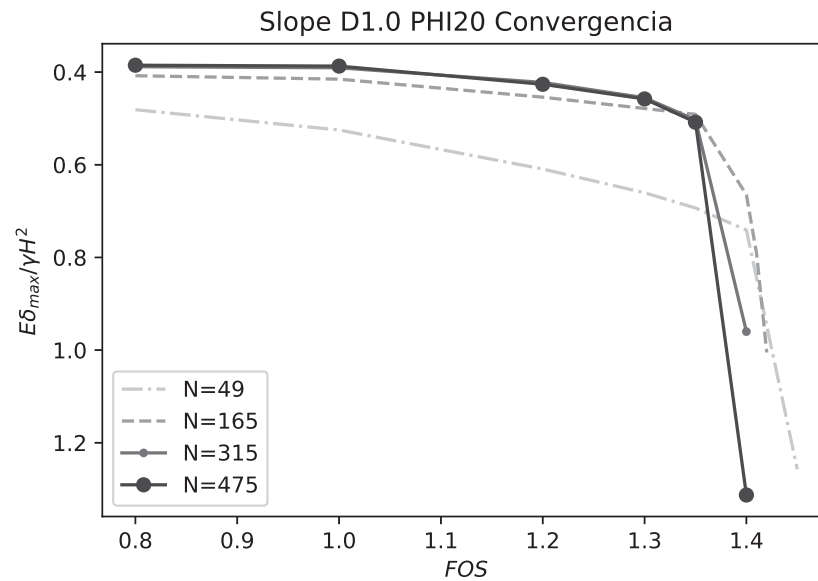


Figura 20 – Talude 1: Análise de convergência dos deslocamentos adimensionais δ_{max}^{adim} para diferentes números de nós de campos, N.

de deslocamentos em um número limite de iterações que é prescrito (1000 iterações). Para ambos os métodos não houve convergência dos deslocamentos quando o fator de segurança assume o valor FOS=1.40 e isto é reforçado pelo grande aumento nos deslocamentos adimensionais verificados na Figura 21. Griffiths e Lane (1999) adotam FOS=1.40 como Fator de Segurança.

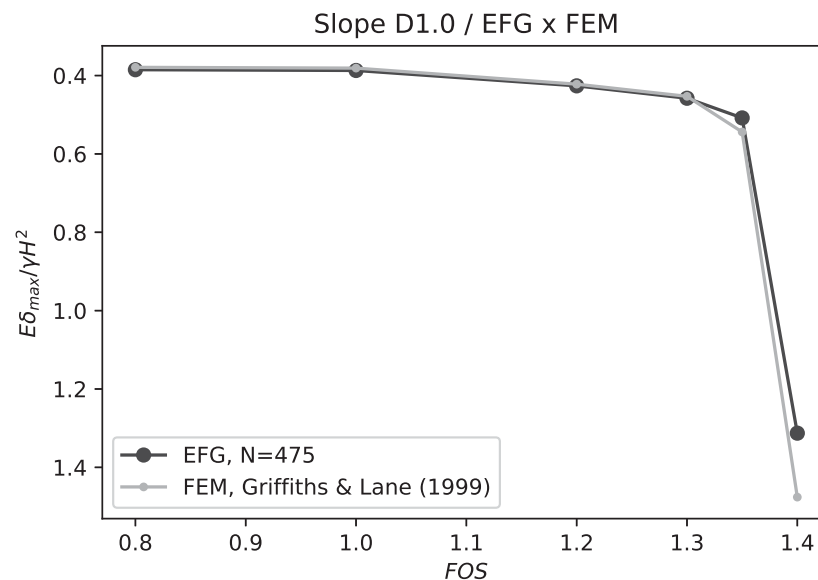


Figura 21 – Comparação dos resultados de deslocamentos adimensionais δ_{max}^{adim} obtidos pelo modelo EFG proposto e por Griffiths e Lane (1999) com o FEM.

A Figura 22 apresenta os deslocamentos máximos adimensionais (em preto) e número de iterações para que a convergência seja atingida (em cinza) em relação aos valores de FOS para o modelo EFG. As linhas verticais tracejadas mostram os valores de FOS para o

Tabela 4 – Talude 1: Resultados de deslocamentos adimensionais e número de iterações para convergência para diferentes valores de FOS para o modelo EFG e FEM.

FOS	Modelo EFG		FEM, Griffiths e Lane (1999)	
	$E\delta_{max}/\gamma H^2$	iterações	$E\delta_{max}/\gamma H^2$	iterações
0.80	0.3851	1	0.379	2
1.00	0.3870	9	0.381	10
1.20	0.4263	20	0.422	20
1.30	0.4579	59	0.453	41
1.35	0.5081	217	0.544	792
1.40	1.3127	1000	1.476	1000

método das fatias de Bishop Simplificado (FOS=1.38, Bishop e Morgenstern (1960)) e FEM (FOS=1.40, Griffiths e Lane (1999)). Em FOS=1.40 fica claro que há um grande salto nos deslocamentos adimensionais que corroboram com a não convergência do modelo verificada pelo grande salto no número de iterações para convergência.

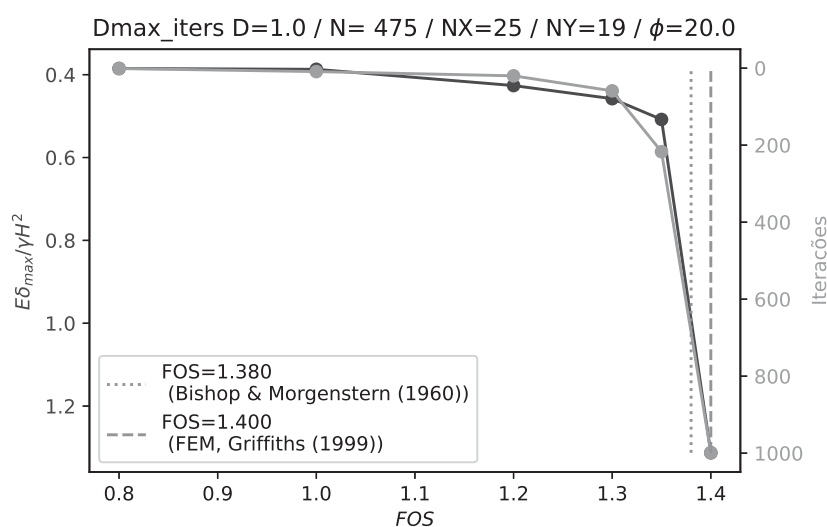


Figura 22 – Deslocamentos adimensionais (em preto) e número de iterações para convergência (em cinza) para diferentes valores de FOS. Valores de FOS obtidos pelos métodos clássicos também são apresentados.

Ainda que o critério para a ruptura acontecer tenha sido atingido em FOS=1.40, uma avaliação mais aprofundada utilizando outras variáveis podem trazer informações relevantes sobre o mecanismo de falha. Portanto são analisados mapas de tensões totais normais e cisalhantes, deformações longitudinais plásticas e distorções angulares plásticas visando um melhor entendimento sobre como estas variáveis se relacionam e influenciam a ruptura do talude.

Os resultados de deformações plásticas longitudinais ε_{xx}^{vp} são apresentados na Figura 24. As deformações ε_{xx}^{vp} positivas (em vermelho) estão presentes no meio do talude com magnitudes discretas em FOS=1.20 (Figura 24a). À medida que a resistência ao cisalhamento vai sendo

diminuída (com o aumento de FOS), as deformações ε_{xx}^{vp} positivas vão se intensificando e começam a tomar a forma da superfície potencial de ruptura em FOS=1.35 (Figura 24c). A ruptura ocorre em FOS=1.40 (Figura 24d) e a superfície potencial de ruptura é estabelecida. As deformações ε_{xx}^{vp} positivas se estendem da crista até quase alcançar o sopé do talude. As deformações ε_{xx}^{vp} negativas se concentram no sopé do talude e tem magnitudes mais modestas que as parcelas positivas.

Os resultados de distorções angulares plásticas ε_{xy}^{vp} são apresentados na Figura 25. As distorções angulares ε_{xy}^{vp} positivas apresentam a tendência de uma grande concentração no sopé do talude. Com o aumento do FOS estas distorções angulares se estendem até o meio do talude, partindo do sopé e subindo em direção à crista do talude. As distorções angulares ε_{xy}^{vp} negativas apresentam sua maior parcela significativa concentrada na crista do talude.

A Figura 26 apresenta os resultados para as tensões totais normais σ_x . Para FOS=1.20 (Figura 26a) as maiores tensões estão no topo e fundo do talude e de forma sutil há um esboço de concentração de tensões próximo à crista do talude. Em FOS=1.35 (Figura 26c) é visível a concentração de tensões positivas na região próxima à crista do talude. Para FOS=1.40 (Figura 26d) há uma expansão da área que das tensões normais positivas atuam, delimitando a região de provável ruptura. Esta expansão é acompanhada do aumento da magnitude das tensões. Para FOS=1.40 a concentração de tensões normais negativas ocorrem no sopé do talude.

Os resultados de tensões cisalhantes totais τ_{xy} são apresentados na Figura 27. As tensões cisalhantes τ_{xy} mais significativas são positivas (em vermelho) e é possível observar que com a diminuição da resistência ao cisalhamento elas tendem a se concentrar próximo ao sopé do talude. Em FOS=1.40 (Figura 27d) apesar das maiores concentrações de tensão cisalhante ocorrerem no sopé do talude, observa-se que estas também são significativas em uma região que compreende o meio até o sopé do talude.

É sabido que a ruptura acontece segundo o que ocorre nas direções principais. Por esta razão, são calculadas as tensões principais, deformações principais, tensão de cisalhamento máxima e distorção angular plástica máxima. Os resultados para FOS=1.40 destas variáveis são mostrados na Figura 28. Observa-se que claramente é capturada a localização e forma da superfície potencial de ruptura para todas as variáveis apresentadas que demonstram grandes semelhanças entre si. Além disso, observa-se uma grande concentração no sopé do talude para todas as variáveis.

Pode-se notar que há uma grande semelhança nos resultados de deformações longitudinais plásticas (Figura 24) e de tensões totais normais (Figura 26). Também há conformidade entre as distorções angulares plásticas (Figura 25) e tensões totais de cisalhamento (Figura 27). Devido a estas semelhanças entre deformações plásticas e tensões totais, daqui em diante serão apresentados apenas os resultados de deformações plásticas, visto que os resultados de tensões totais são reflexo dos resultados de deformações plásticas. O mesmo se aplica para as deformações e tensões principais, como pode ser visto na Figura 28.

A Figura 29 apresenta os resultados das configurações indeformada e deformada para dois fatores de segurança (FOS=1.35 e 1.40). Em FOS=1.35 a configuração deformada apresenta características muito semelhantes ao que seria obtido em uma análise puramente elástica (Figura 29a). Para FOS=1.4 (Figura 29b), observa-se o comportamento do solo na ruptura, onde há o rebaixamento da crista do talude e escorregamento próximo ao sopé do talude. Também são apresentados os vetores de deslocamentos nodais para os fatores de segurança FOS=1.35 (Figura 29c) e FOS=1.40 (Figura 29d). O comportamento dos vetores de deslocamento nodais em FOS=1.40 dão ideia da movimentação do solo durante a ruptura.

Durante a aplicação da técnica de redução da resistência ao cisalhamento, os Fatores de Segurança a serem testados são aumentados progressivamente até que o modelo seja incapaz de convergir em um número máximo de iterações estipulado pelo analista. Para a atual análise o último Fator de Segurança testado em que foi possível a convergência (ver Tabela 4) tem valor de FOS=1.35. Com isto em mente, é possível que a ruptura ocorra para um valor de Fator de Segurança entre 1.35 e 1.40 e portanto, uma análise mais minuciosa é realizada para investigar se a ruptura acontece para um valor menor que FOS=1.40 neste intervalo. Os resultados de deslocamentos adimensionais e número de iterações para atingir a convergência para este restrito intervalo de FOS igual 1.35 até 1.40 são apresentados na Figura 23. Observa-se que o modelo foi incapaz de convergir para FOS=1.38, além disto há um salto no valor dos deslocamentos adimensionais, porém bem mais modesto do que o observado para FOS=1.40 ($\delta_{max}^{adim} = 1.3127$). Este último fato pode iniciar uma discussão acerca do critério de ruptura comumente adotado. O questionamento que surge é o seguinte: A não convergência dos resultados de deslocamento nodais em um limite de iterações prescrito é condição suficiente para que a ruptura aconteça? O valor limite de iterações é subjetivo e pode ser observado uma grande variação nos valores adotados na literatura (e.g. 250, 500, 1000). Fica a cargo do analista escolher o valor mais apropriado durante a análise. Alguns Métodos MFree aplicam como critério de ruptura a forma que os resultados de deslocamentos máximos assumem ao longo de um grande número de iterações (e.g. 5000). Formas convexas apontam a convergência do resultado enquanto uma forma côncava dos resultados indicam a não convergência e portanto o colapso do talude é decretado (Bui et al. (2011b), Kwok et al. (2014)).

A Figura 30 apresenta resultados de deslocamentos nodais da configuração deformada, vetores de deslocamentos nodais e deformação principal plástica para FOS=1.38. Observa-se que apesar dos resultados de deslocamentos não apresentarem claros sinais de que a ruptura ocorre, quando observado os resultados de deformações principais plásticas ao longo do domínio há o claro estabelecimento da superfície potencial de ruptura. Esta pode ser uma alternativa para mais uma evidência de que o talude esteja na iminência da ruptura. Levando em conta o estabelecimento da superfície potencial de ruptura nos resultados de deformação principal plástica, salto (modesto) nos deslocamentos adimensionais e incapacidade do modelo convergir em FOS=1.38, este valor é adotado como sendo o Fator de Segurança do Talude 1. Este

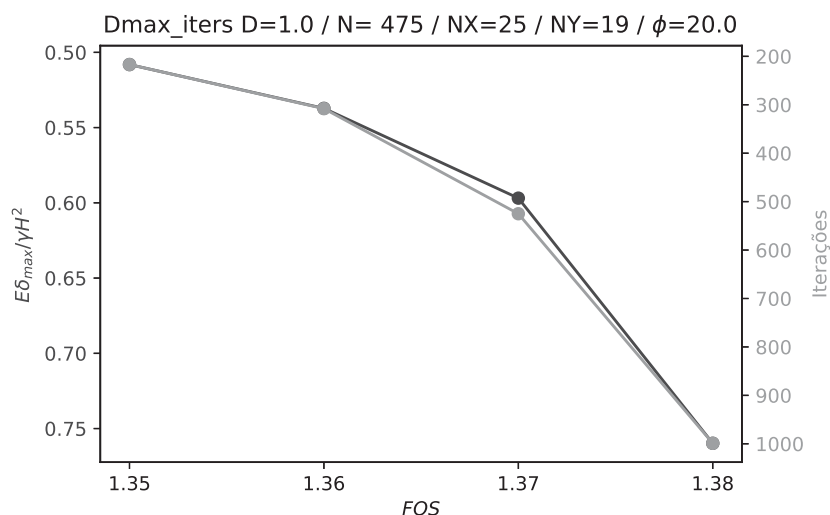


Figura 23 – Deslocamentos adimensionais (em preto) e número de iterações para convergência (em cinza) para valores de FOS entre 1.35 e 1.40

resultado é comparado com os já citados valores de LEM e FEM, mas também com os valores obtidos por Kwok et al. (2014) através do SL-RKPM. Os valores dos FOS são apresentados na Tabela 5 e o valor obtido pelo modelo EFG está de acordo com os do LEM e FEM. Há uma maior discrepância entre o valor calculado pelo EFG caso seja comparado com os resultados alcançados pelo SL-RKPM. Kwok et al. (2014) apresenta dois possíveis valores para FOS obtidos pelo SL-RKPM, sendo que a diferença ocorre pelo critério de ruptura adotado. O valor $FOS=1.50$ é obtido quando os resultados de deslocamentos máximos em um grande número de iterações assume uma forma côncava relacionada a não-convergência dos resultados. O $FOS=1.45$ é alcançado quando é verificado um súbito aumento nos deslocamentos máximos mesmo que a sua forma permaneça convexa e portanto indicando convergência.

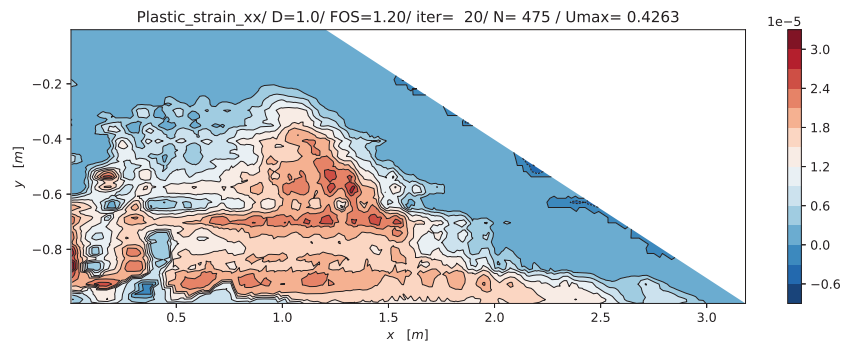
Tabela 5 – Talude 1: Comparação de Fatores de Segurança da literatura com o obtido pelo modelo EFG proposto

Método Computacional	FOS	Fonte
FEM	1.40	Griffiths e Lane (1999)
LEM - Método de Bishop Simplificado	1.38	Bishop e Morgenstern (1960)
SL-RKPM	1.45/1.50	Kwok et al. (2014)
EFG	1.38	Modelo proposto

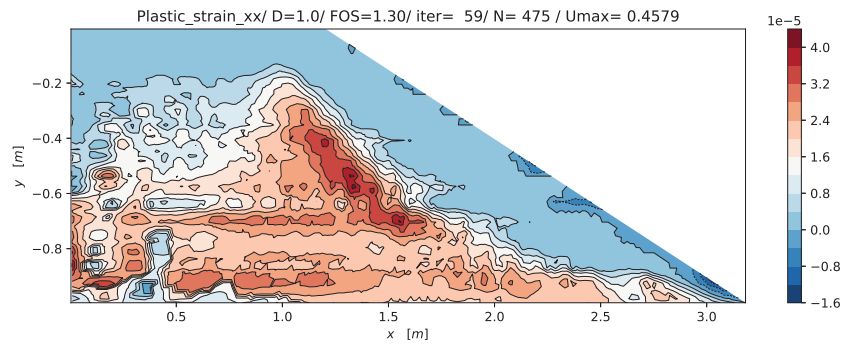
O software comercial SLOPE/W é uma ferramenta computacional frequentemente utilizada para análises de estabilidade de taludes (GEO-SLOPE International Ltd (2008)). Através de cálculos iterativos, utilizando equações de equilíbrio limite, o SLOPE/W identifica a superfície potencial de ruptura e o Fator de Segurança correspondente.

Neste trabalho, o software SLOPE/W utiliza o Método de Equilíbrio Limite de Morgenstern & Price. Para o Talude 1, foi obtido $FOS=1.391$ e superfície potencial de ruptura com centro em (2.7436m, 0.98327m) e raio igual a 1.9788m, que está representada pela

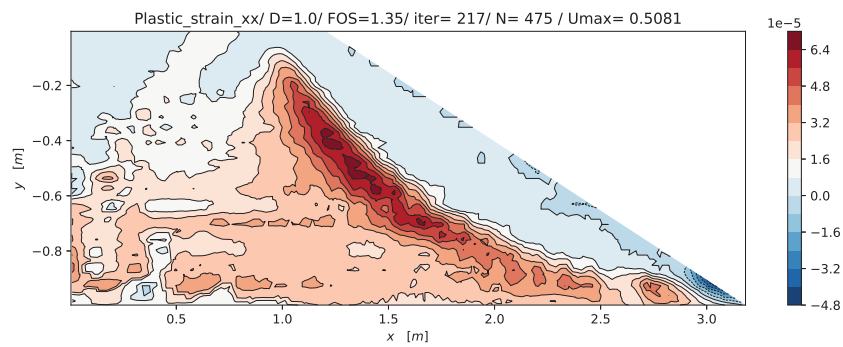
linha em branco na Figura 31a. Esta mesma superfície está plotada, em preto, na Figura 31b, sobrepondo o resultado de deformações principais plásticas obtidos pelo modelo EFG quando $FOS=1.38$, que representa a superfície potencial de ruptura obtida pelo modelo EFG. A comparação entre as superfícies potenciais de ruptura obtidas pelo SLOPE/W e modelo EFG mostra que as superfícies são semelhantes, porém pode-se notar que a superfície obtida pelo modelo EFG é mais profunda na região da crista do talude se comparada à superfície obtida pelo SLOPE/W (Figura 31b).



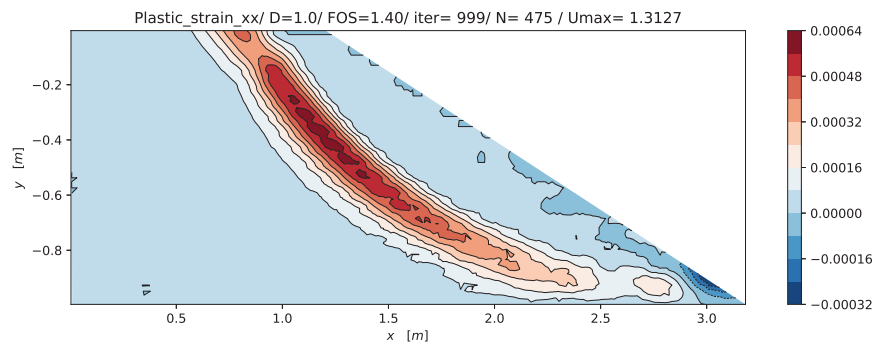
(a) FOS=1.20



(b) FOS=1.30

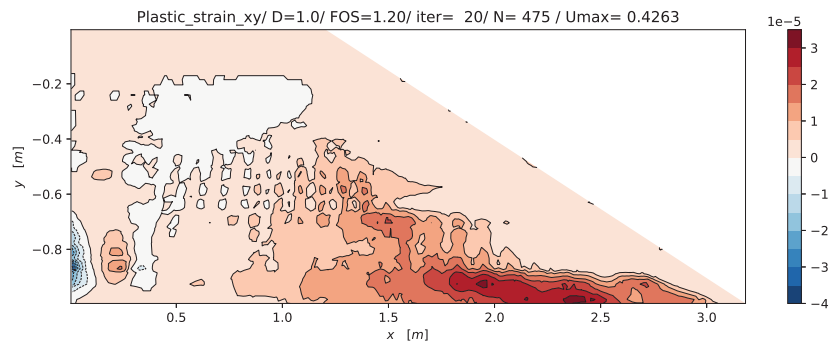


(c) FOS=1.35

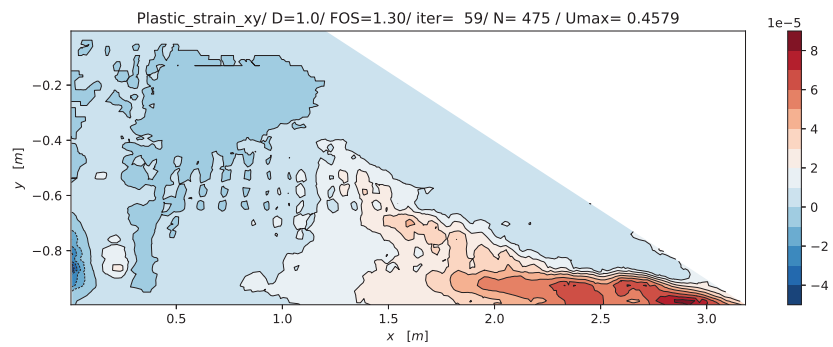


(d) FOS=1.40

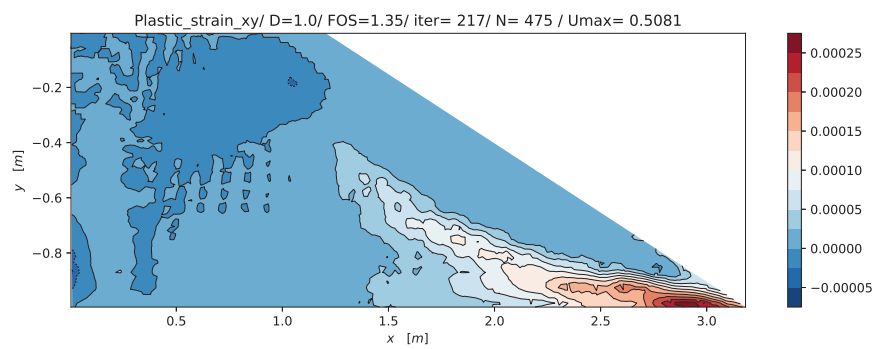
Figura 24 – Talude 1: Mapas de deformações plásticas longitudinais ε_{xx}^{vp} em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das deformações ε_{xx}^{vp} até a ruptura ocorrer em FOS=1.40



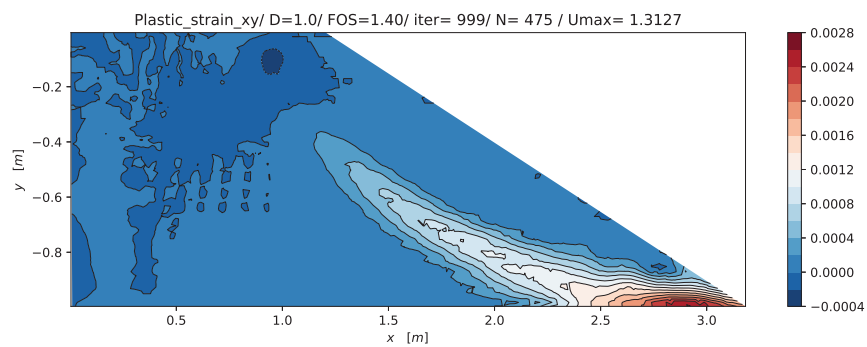
(a) FOS=1.20



(b) FOS=1.30

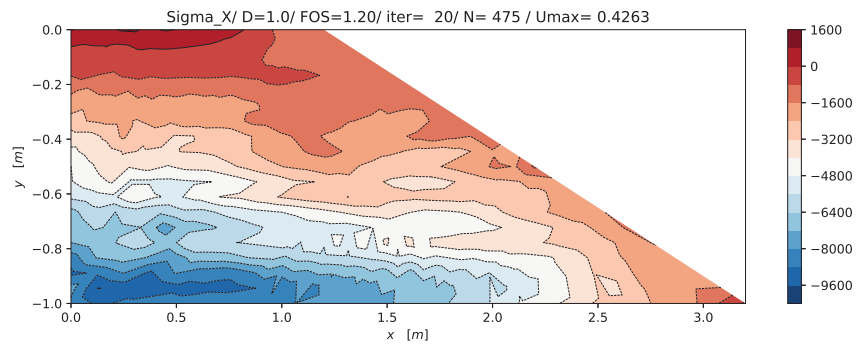


(c) FOS=1.35

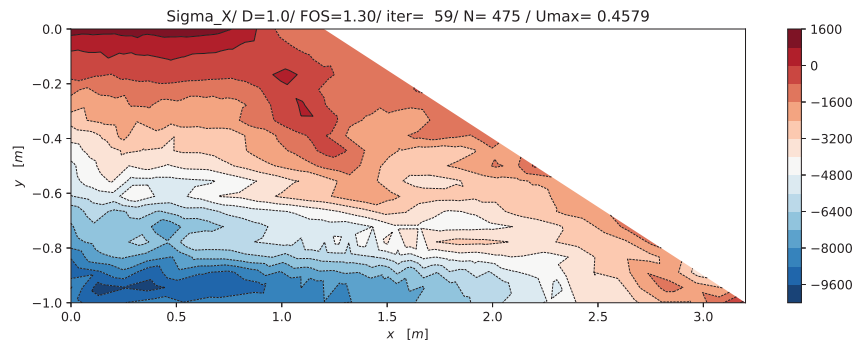


(d) FOS=1.40

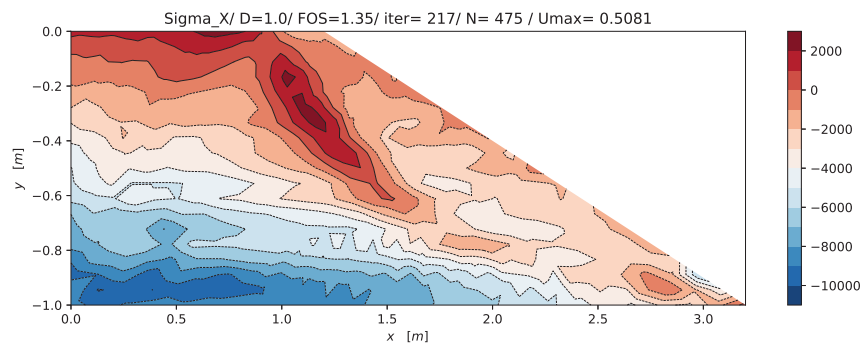
Figura 25 – Talude 1: Mapas de deformações plásticas angulares ε_{xy}^{vp} em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das deformações ε_{xy}^{vp} até a ruptura ocorrer em FOS=1.40



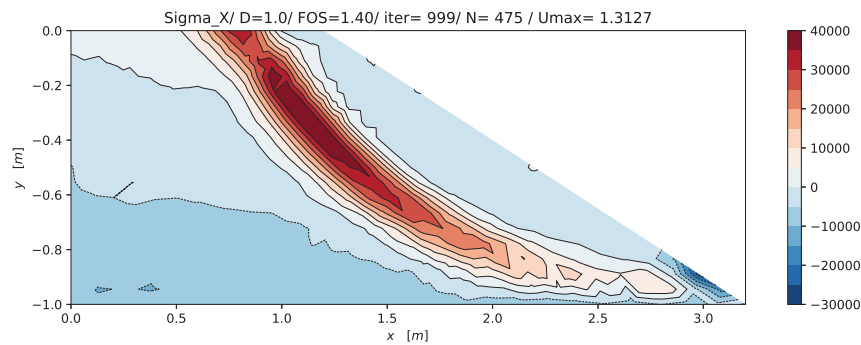
(a) FOS=1.20



(b) FOS=1.30



(c) FOS=1.35



(d) FOS=1.40

Figura 26 – Talude 1: Mapas de tensões totais normais σ_x em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das tensões σ_x até a ruptura ocorrer em FOS=1.40. A unidade das tensões é $[N/m^2]$

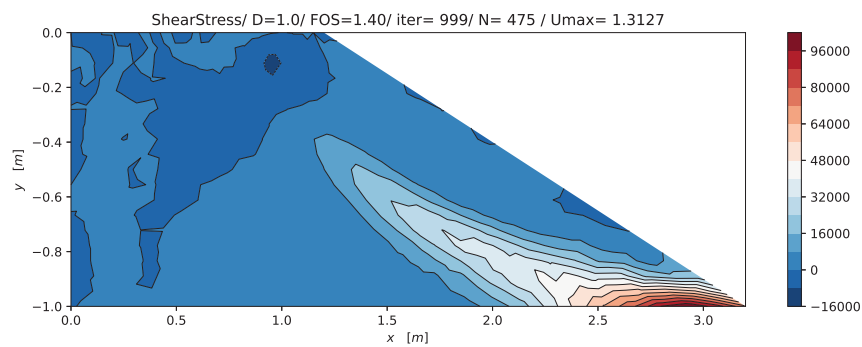
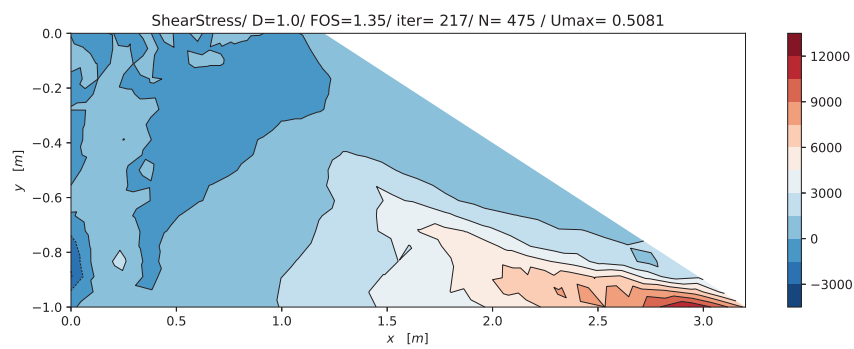
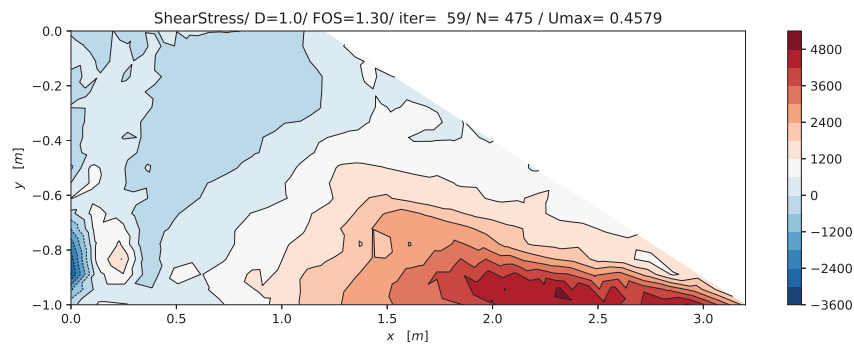
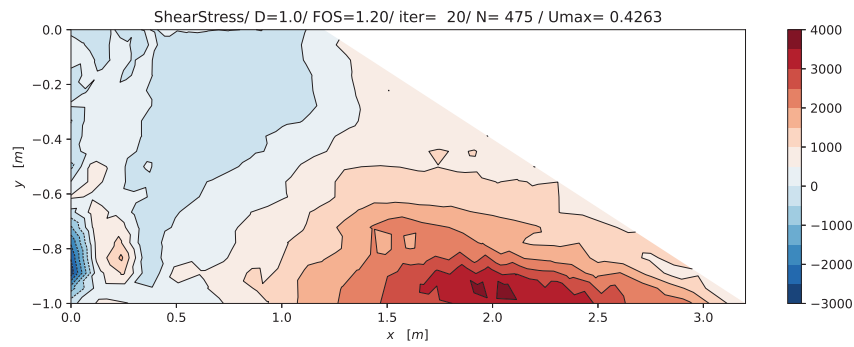
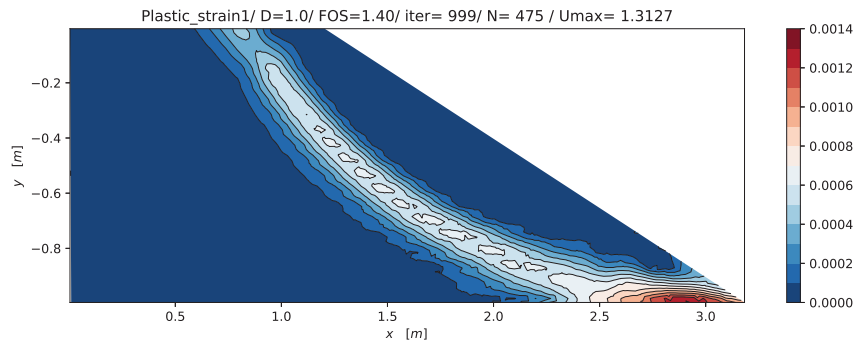
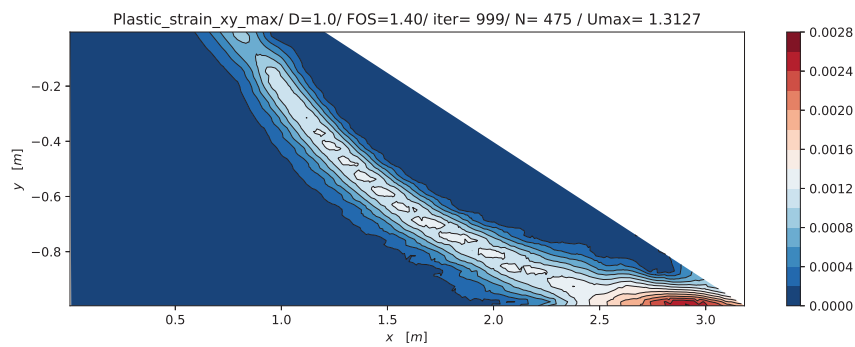


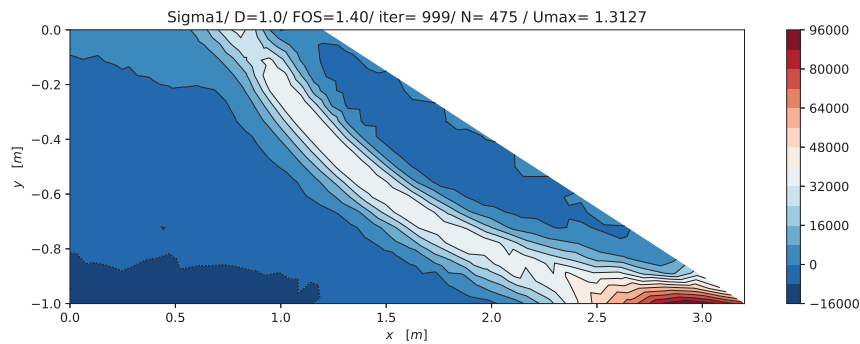
Figura 27 – Talude 1: Mapas de tensões totais cisalhantes τ_{xy} em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das tensões τ_{xy} até a ruptura ocorrer em FOS=1.40. A unidade das tensões é $[N/m^2]$



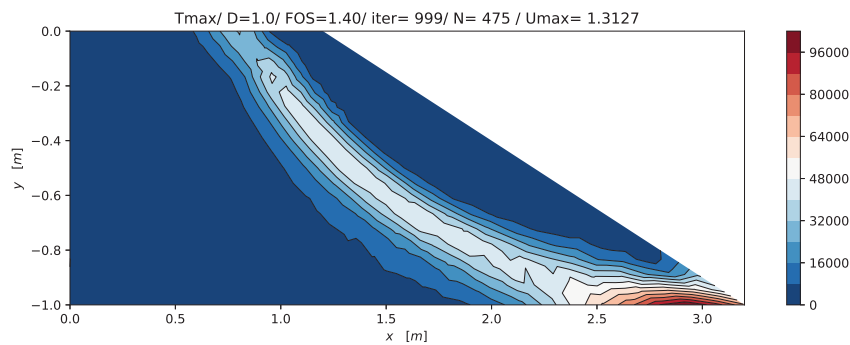
(a) Deformações principais plásticas ε_1^{vp}



(b) Distorções angulares plásticas máximas $(\varepsilon_{xy}^{vp})_{max}$

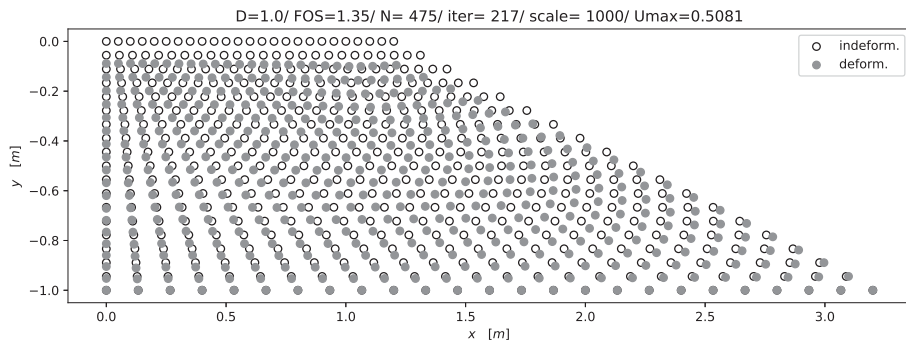


(c) Tensões principais σ_1 [N/m^2]

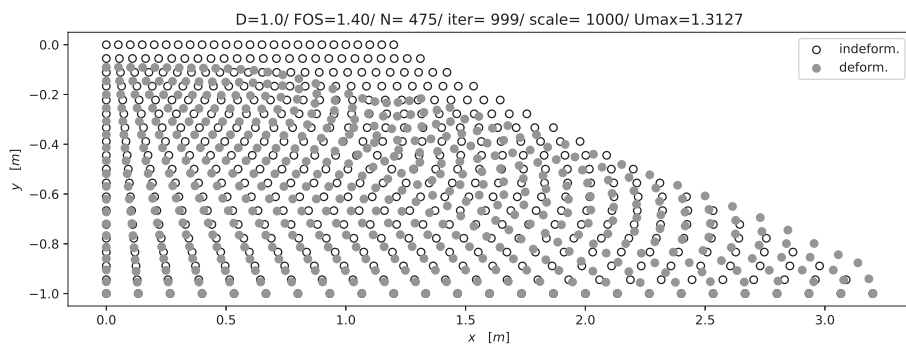


(d) Tensões cisalhantes máximas $(\tau_{xy})_{max}$ [N/m^2]

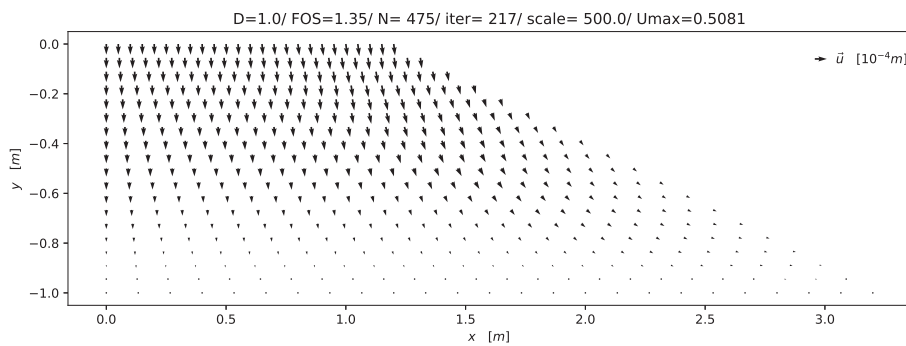
Figura 28 – Talude 1: Mapas de deformações principais e tensões principais capturam a superfície potencial de ruptura para FOS=1.40



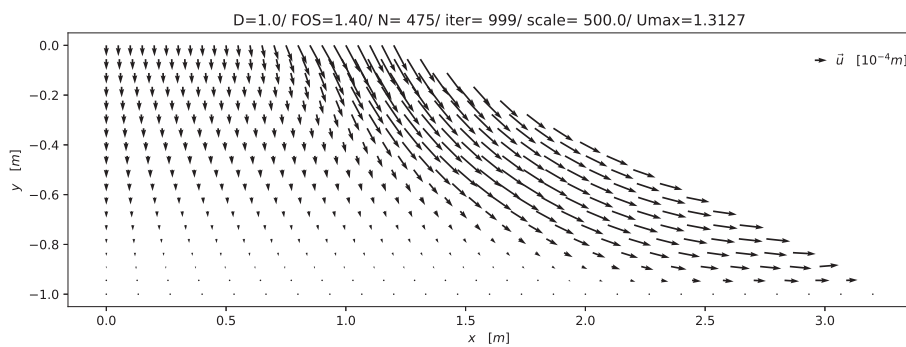
(a) Configuração deformada FOS=1.35



(b) Configuração deformada FOS=1.40

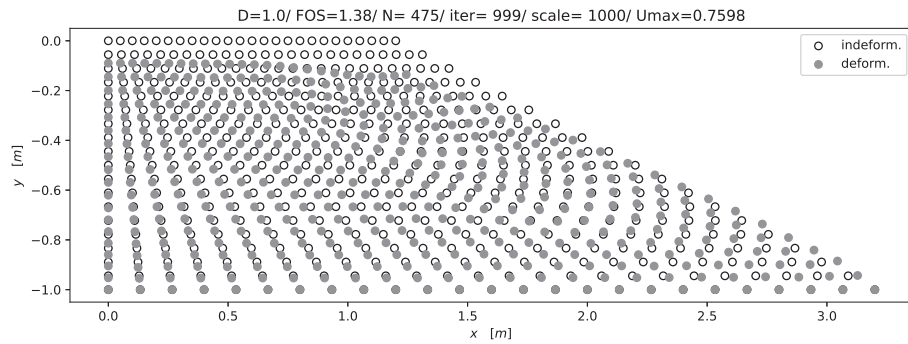


(c) Vetores de deslocamentos nodais FOS=1.35

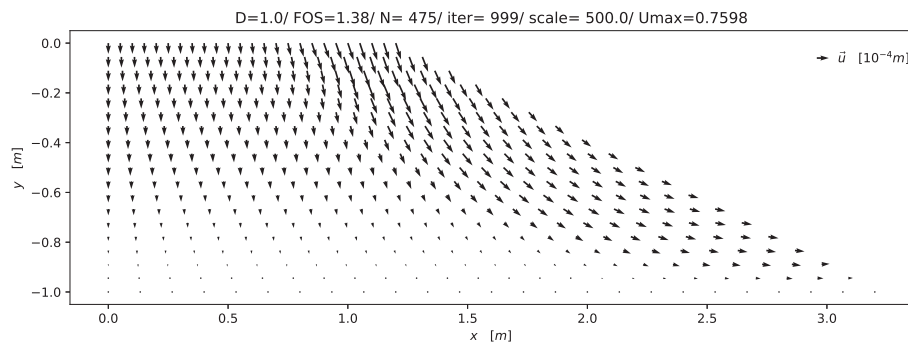


(d) Vetores de deslocamentos nodais FOS=1.40

Figura 29 – Talude 1: Configuração deformada e vetores de deslocamentos nodais antes e depois da ruptura do talude.



(a) Configurações indeformada e deformada



(b) Vetores de deslocamentos nodais

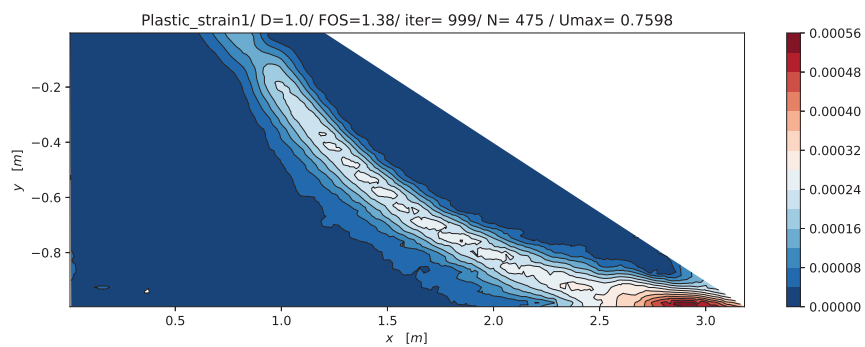
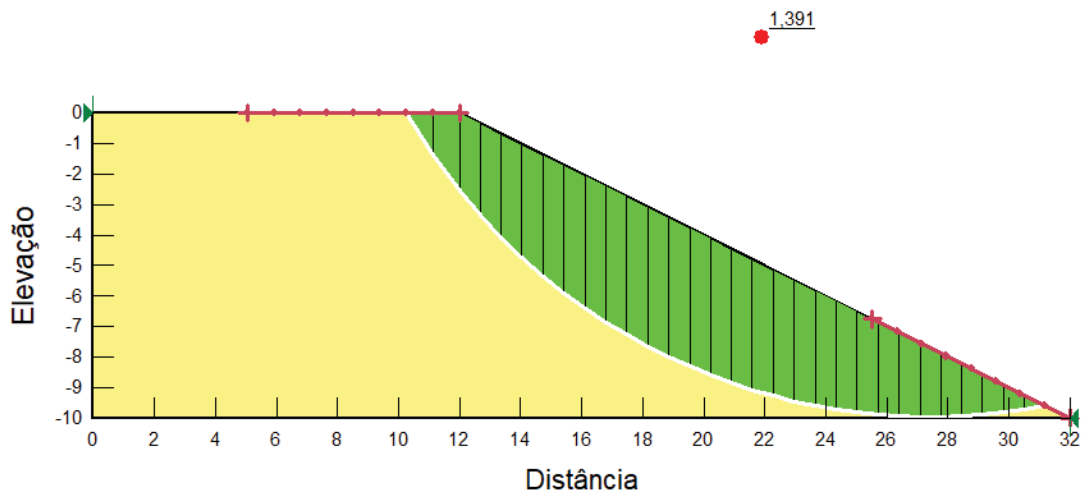
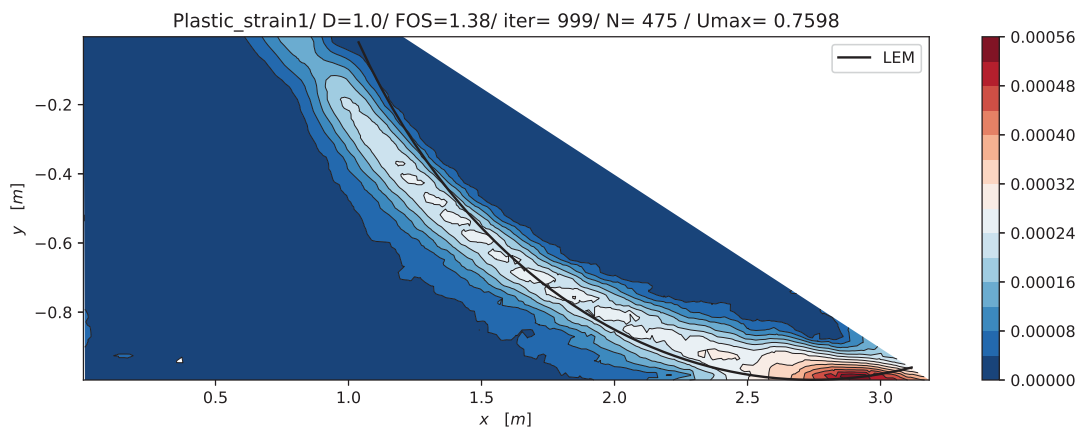
(c) Deformação plástica principal ε_1^{vp}

Figura 30 – Talude 1: Comportamento do talude na ruptura e identificação da superfície potencial de ruptura. Resultados de FOS=1.38 representam o comportamento do talude na ruptura.



(a) SLOPE/W: Superfície potencial de ruptura com centro em (2.7436m, 0.98327m) e raio igual a 1.9788m com FOS=1.391 correspondente, obtidos pelo método de Morgenstern & Price.



(b) Superfície potencial de ruptura através dos resultados de deformações principais plásticas pelo modelo EFG para FOS=1.38, com sobreposição da superfície potencial de ruptura obtida pelo software SLOPE/W representada pela linha em preto.

Figura 31 – Talude 1: Comparação das Superfícies potenciais de ruptura obtidas pelo software SLOPE/W e modelo EFG para talude com $c/\gamma_s H = 0.05$.

5.2.2 Talude 2: Talude homogêneo com camada de fundação

O segundo talude a ser analisado é semelhante ao Talude 1 porém é adicionada uma camada de fundação na análise. A profundidade da camada de fundação depende do fator D que multiplica a altura H (ver Figura 32). A geometria do Talude 2 é apresentada na Figura 32 sendo que $H=1.0$ m e $D=1.5$ são empregados. O talude tem restrições de deslocamentos horizontais em ambas as laterais e restrição total de deslocamento na base. Os parâmetros do solo utilizados são os mesmos do Talude 1 e estão dispostos na Tabela 2.

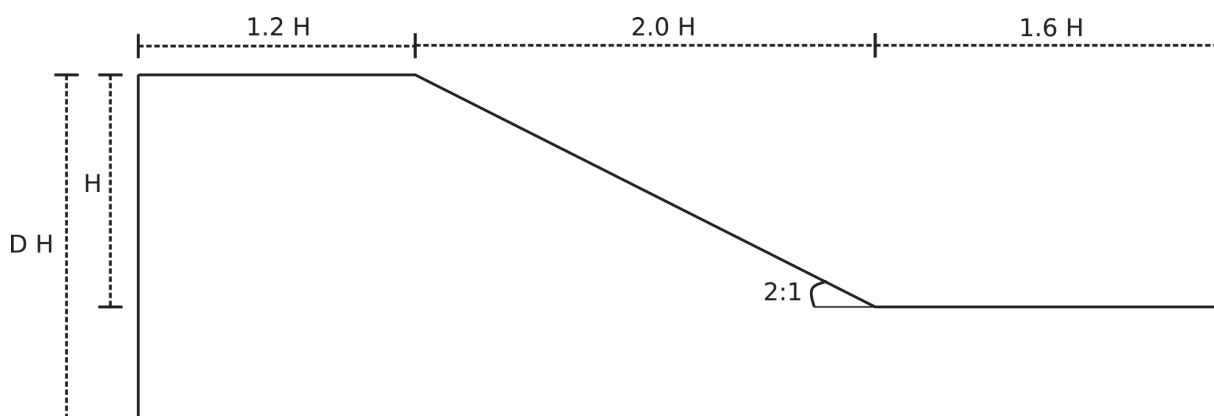


Figura 32 – Geometria do Talude 2. Solo homogêneo com ângulo (2:1); $H=1.0$, $D=1.5$. $\phi_s = 20^\circ$, $c/\gamma_s H = 0.05$.

Quatro cenários com diferentes números de nós de campo utilizados para a discretização do problema são empregados e estão dispostos na Tabela 6.

Tabela 6 – Número de nós utilizados em cada análise para o Talude 2.

Cenário	N
1	82
2	282
3	542
4	820

Uma análise de convergência em relação aos deslocamentos adimensionais é realizada para os quatro cenários apresentados acima. Há a ressalva de que para o cálculo do deslocamento adimensional dado pela Equação 5.11 o valor utilizado como altura é DH ao invés de H. A Figura 33 mostra que a convergência ocorre entre os dois últimos cenários ($N=542$ e $N=820$). Com base nisto os resultados que serão apresentados a seguir são referentes ao cenário que utiliza $N=820$ para a discretização do domínio.

A Figura 34 mostra os gráficos de deslocamentos adimensionais máximos (em preto) e número de iterações para que a convergência seja atingida (em cinza) para diversos valores de FOS. A linha vertical se refere ao resultado obtido pelo FEM (FOS=1.40, Griffiths e Lane (1999)). O resultado obtido por Bishop e Morgenstern (1960) pelo Método das Fatias de

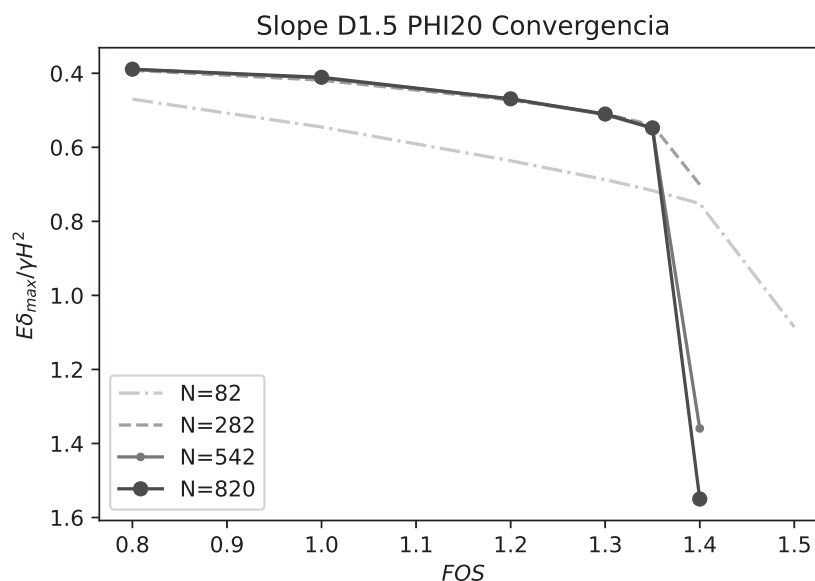


Figura 33 – Talude 2: Análise de convergência dos deslocamentos adimensionais para diferentes números de nós utilizados na discretização do domínio

Bishop Simplificado é $FOS=1.752$ e não aparece na imagem. É possível notar que há um grande salto no número de deslocamentos para $FOS=1.40$. Além disto, o modelo foi incapaz de convergir até o limite de iterações prescrito. Isto é um indicativo de que a ruptura ocorre para o valor de $FOS=1.40$. Os valores discutidos na Figura 34 são explicitados na Tabela 7.

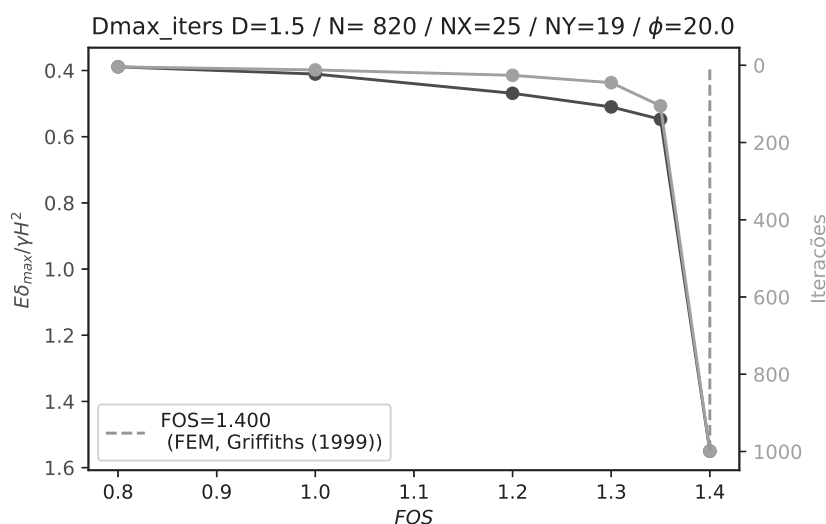


Figura 34 – Talude 2: Deslocamentos adimensionais (em preto) e número de iterações para convergência (em cinza) para diferentes valores de FOS. Um grande salto nos valores de deslocamentos e iterações ocorre em $FOS=1.40$

Com a finalidade de acompanhar o comportamento do solo conforme a resistência ao cisalhamento é progressivamente diminuída (com o aumento do valor do FOS), são calculados mapas de tensões totais e deformações plásticas. Apenas os resultados das deformações plásticas

Tabela 7 – Talude 2: Resultados de deslocamentos adimensionais e número de iterações para convergência para diferentes valores de FOS.

FOS	$E\delta_{max}/\gamma H^2$	iterações
0.80	0.3889	4
1.00	0.4107	12
1.20	0.4689	26
1.30	0.5100	45
1.35	0.5474	105
1.40	1.5500	1000

serão apresentados devido a grande semelhança no comportamento dos resultados de tensões totais e deformações plásticas.

Os resultados de deformações plásticas longitudinais ε_{xx}^{vp} são exibidos na Figura 36. Em FOS=1.20 (Figura 36a) a magnitude das deformações plásticas ε_{xx}^{vp} ainda são discretas e estão localizadas no meio do corpo (em vermelho) e sopé do talude (em azul). Há uma intensificação progressiva nas magnitudes das deformações em FOS=1.30 (Figura 36b) e FOS=1.35 (Figura 36c) conforme as regiões de concentração das deformações vão sendo melhor definidas. Em FOS=1.4 (Figura 36d) é verificado o deslocamento das deformações plásticas ε_{xx}^{vp} positivas (em vermelho) para a direita, em direção à crista do talude e estas assumem uma forma que se assemelha à superfície potencial de ruptura. Uma concentração das deformações plásticas ε_{xx}^{vp} negativas no sopé do talude é constatada (em azul).

A Figura 37 apresenta os resultados de distorções angulares plásticas ε_{xy}^{vp} . A partir de FOS=1.20 (Figura 37a) até FOS=1.35 (Figura 37c) as distorções angulares ε_{xy}^{vp} são modestas e estas apresentam maior concentração em duas regiões, na crista (em azul) e no sopé do talude (em vermelho). Para FOS=1.4 (Figura 37d) há uma grande mudança na disposição das distorções angulares plásticas ε_{xy}^{vp} (em vermelho). Uma grande faixa que se inicia no sopé do talude e se estende até o meio deste em direção à crista em uma forma curvilínea que lembra a superfície potencial de ruptura.

O comportamento dos deslocamentos nodais são avaliados de duas formas: primeiro, através da configuração deformada do talude e segundo, através de vetores deslocamentos nodais. Estes resultados são exibidos na Figura 38 para uma situação antes da ruptura (FOS=1.35) e outra após a ruptura (FOS=1.40). É possível observar através da configuração deformada que a ruptura ocorre pelo escorregamento do sopé do talude (Figura 38b). Além disto, é possível ver a influência da camada de fundação que causa um rebaixamento na localização da superfície de ruptura se comparado com uma situação sem camada de fundação (Figura 29b). Os vetores de deslocamentos nodais dão uma noção de como o escorregamento se desenvolve (Figura 38d).

A Figura 39 retrata que as deformações longitudinais plásticas ε_{xx}^{vp} positivas parecem influenciar mais significativamente o mecanismo de falha na crista do talude (Figura 39a) enquanto as distorções angulares plásticas ε_{xy}^{vp} mais significativas atuam no mecanismo de

falha mais próximo ao sopé do talude (Figura 39b). Para as deformações longitudinais plásticas negativas o efeito é o oposto e portanto parecem influenciar mais o mecanismo no sopé enquanto as distorções angulares negativas plásticas atuam na crista. A combinação dos efeitos levam então à formação da superfície de ruptura observada no resultado de deformações principais plásticas ε_1^{vp} (Figura 39c).

Os diversos resultados apresentados até aqui indicam que a ruptura ocorre para o valor de FOS=1.40. Para este valor é constatado um grande salto no número de iterações necessários para convergência e claro estabelecimento da superfície potencial de ruptura nos resultados de deformações plásticas. Com a finalidade de realizar uma análise mais criteriosa, os valores de FOS entre 1.35 e 1.40 foram testados para identificar se a ruptura ocorre para um Fator de Segurança menor que FOS=1.40. Os resultados desta análise são apresentados na Figura 35 e 40.

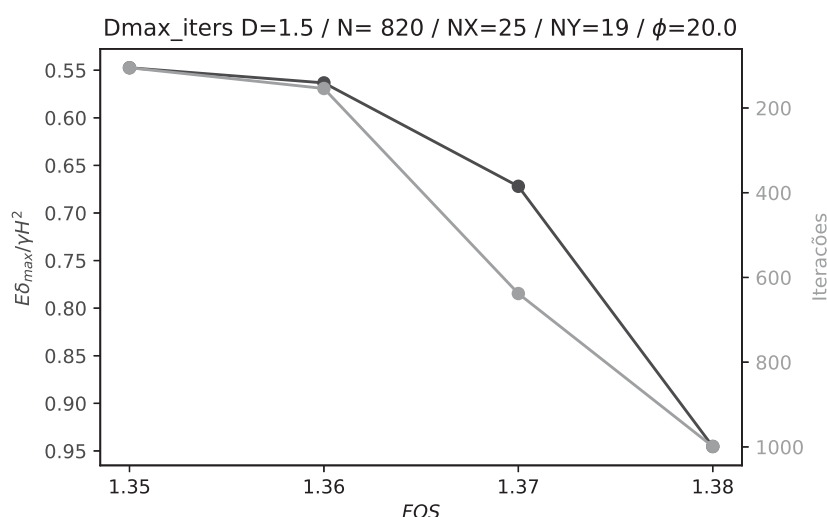


Figura 35 – Talude 2: Deslocamentos adimensionais (em preto) e número de iterações para convergência (em cinza) para os valores de FOS=[1.35; 1.36; 1.37; 1.38]. Um salto nos valores de deslocamentos e iterações ocorre em FOS=1.37 e 1.38

Na Figura 35 é observado que o modelo EFG não é capaz de convergir até o limite de iterações quando o Fator de Segurança igual a 1.38 é testado. Além disto, é verificado um salto nos deslocamentos adimensionais. Os resultados de deformações principais plásticas ε_1^{vp} são apresentados para FOS=[1.36; 1.37 e 1.38] na Figura 40 e mostram o desenvolvimento e estabelecimento da superfície potencial de ruptura. Inicialmente o critério de ruptura adotado é a incapacidade do modelo convergir até o número limite de iterações prescrito, porém também é verificado o comportamento das deformações principais plásticas a fim de investigar se a superfície potencial de ruptura é determinada. Estas condições são validadas e portanto o valor FOS=1.38 é adotado como Fator de Segurança do Talude 2. Apesar disto, a superfície potencial de ruptura já está estabelecida a partir de FOS=1.37 como pode ser visto na Figura 40(b). FOS=1.37 também poderia ser adotado como Fator de Segurança em uma decisão

mais conservadora.

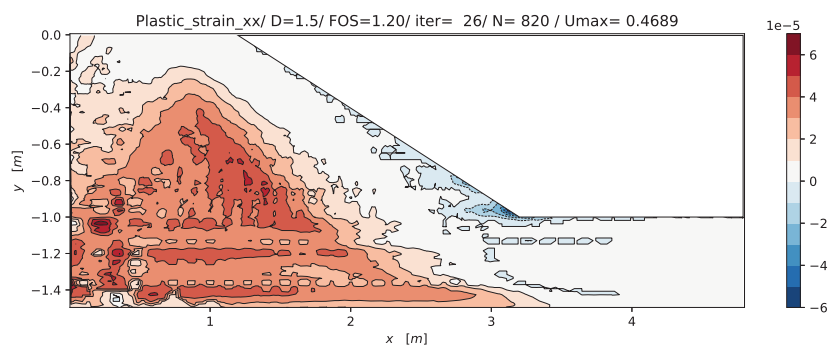
Com a finalidade de ilustrar o comportamento do talude na ruptura para o Fator de Segurança adotado (FOS=1.38), a Figura 41 apresenta a configuração deformada, vetores de deslocamentos nodais e deformações principais plásticas para representar o mecanismo de falha e identificação da superfície potencial de ruptura. É possível observar, principalmente pelos resultados de deslocamentos, que há diferenças entre os resultados de FOS=1.38 e 1.40. Para FOS=1.40 o colapso do talude é mais evidente se comparado com o valor 1.38.

O Fator de Segurança definido pelo modelo EFG para o Talude 2 é comparado com os já citados valores de LEM e FEM, mas também com os valores obtidos por Bui et al. (2011b) através do SPH. Na análise do problema Bui et al. (2011b) utiliza um valor diferente de ângulo de dilatância ($\psi = 9^\circ$) que não há interferência significativa para a comparação. Os valores dos Fatores de Segurança são apresentados na Tabela 8 e o valor obtido pelo modelo EFG está de acordo com os do FEM e SPH. O valor de FOS apresentado pelo LEM difere significativamente dos obtidos pelos outros métodos.

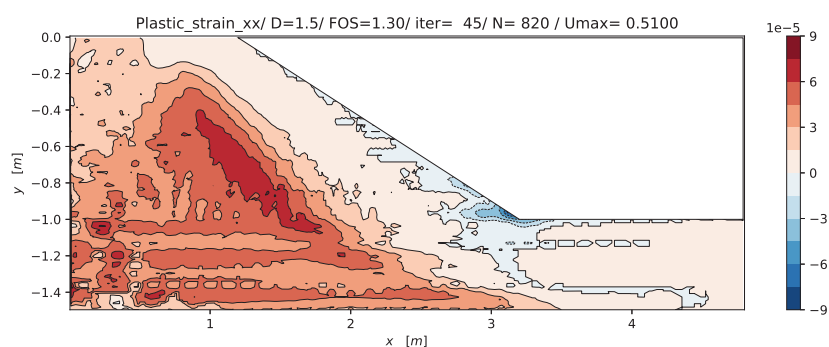
Tabela 8 – Talude 2: Fator de Segurança obtido pelo modelo EFG proposto é comparado com valores da literatura.

Método Computacional	FOS	Fonte
FEM	1.40	Griffiths e Lane (1999)
LEM - Método de Bishop Simplificado	1.752	Bishop e Morgenstern (1960)
SPH	1.40	Bui et al. (2011b)
EFG	1.38	Modelo proposto

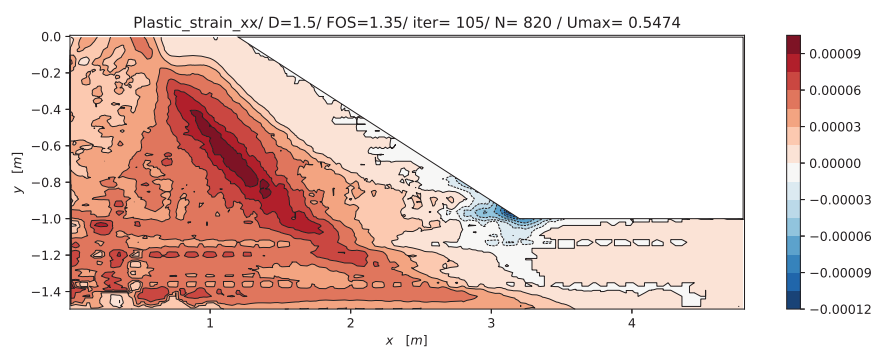
Neste trabalho, o software SLOPE/W é utilizado com o Método de Equilíbrio Limite de Morgenstern & Price para o cálculo da superfície potencial de ruptura e FOS correspondente, a fim de realizar uma comparação com os resultados obtidos pelo modelo EFG. Para o Talude 2, pelo SLOPE/W foi obtido FOS=1.370 e superfície potencial de ruptura com centro em (2.7783m, 1.0407m) e raio igual a 2.0839m, que está representada pela linha em branco na Figura 42a. Esta mesma superfície está plotada, em preto, na Figura 42b, sobrepondo o resultado de deformações principais plásticas obtidos pelo modelo EFG quando FOS=1.38, que representa a superfície potencial de ruptura obtida pelo modelo EFG. As superfícies potenciais de ruptura obtidas pelo SLOPE/W e modelo EFG são semelhantes porém há diferenças tanto na região do sopé quanto na região da crista do talude (Figura 42b).



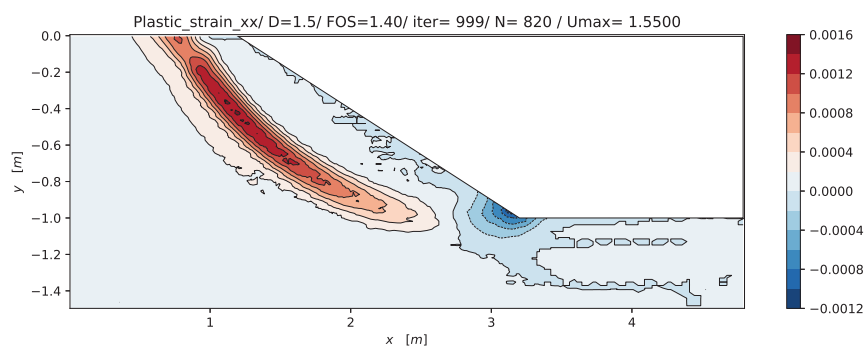
(a) FOS=1.20



(b) FOS=1.30

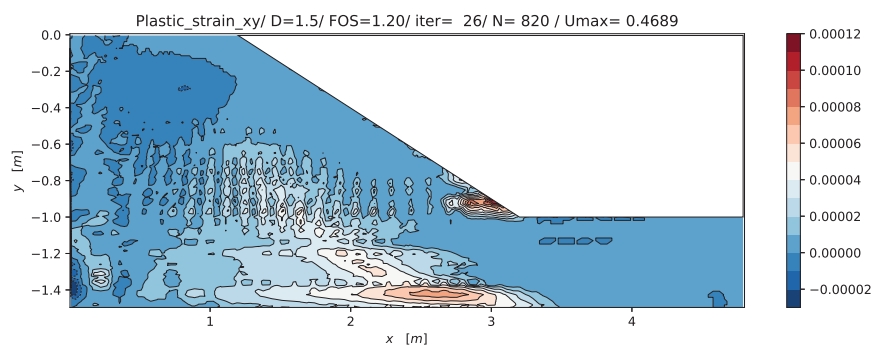


(c) FOS=1.35

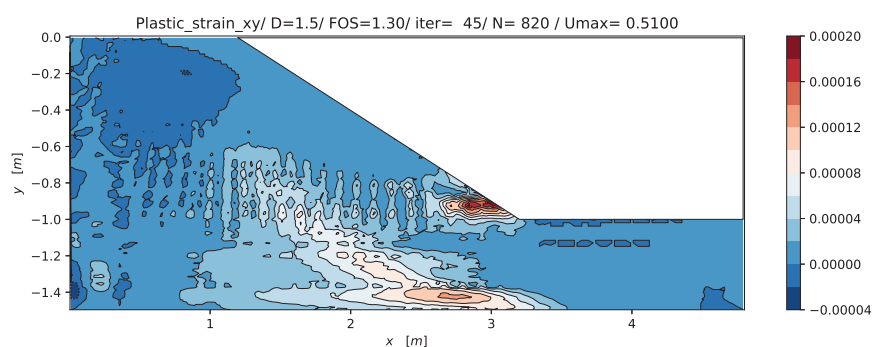


(d) FOS=1.40

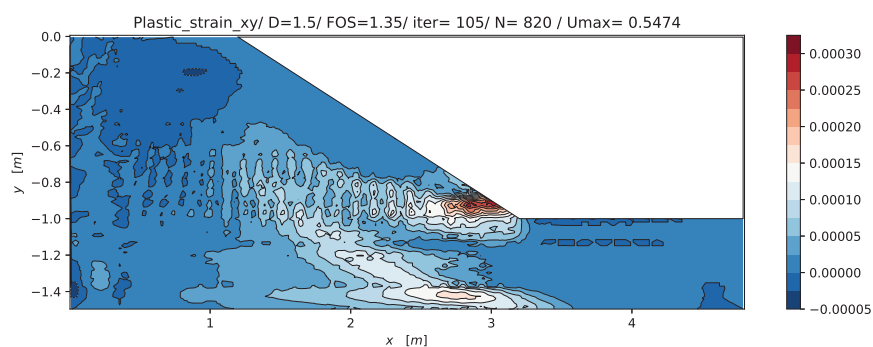
Figura 36 – Talude 2: Mapas de deformações plásticas longitudinais ε_{xx}^{vp} em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das deformações ε_{xx}^{vp} até a ruptura ocorrer em FOS=1.40



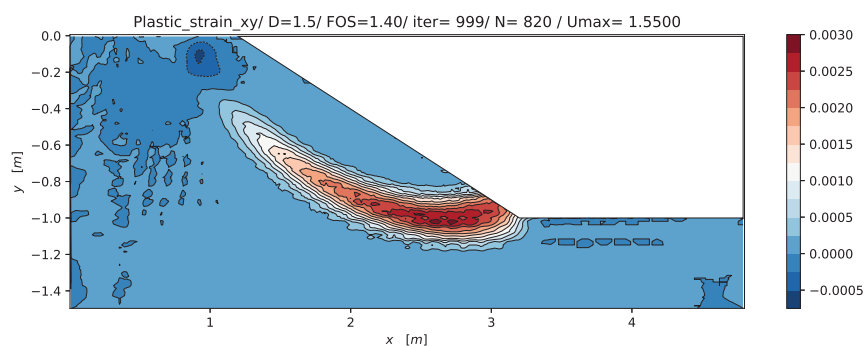
(a) FOS=1.20



(b) FOS=1.30

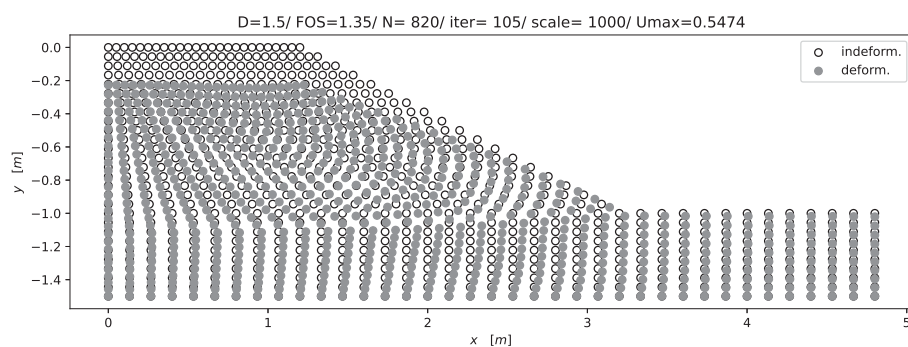


(c) FOS=1.35

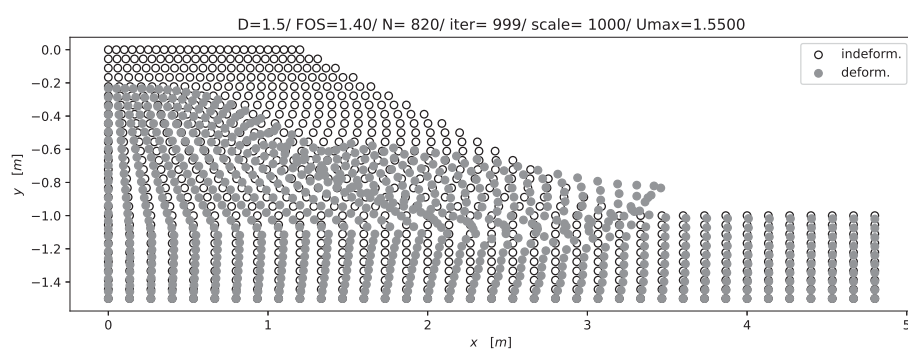


(d) FOS=1.40

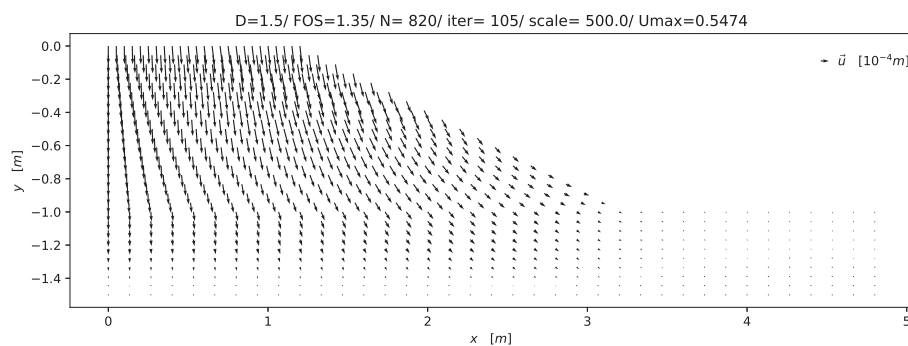
Figura 37 – Talude 2: Mapas de distorções angulares plásticas ε_{xy}^{vp} em todo o domínio para diversos Fatores de Segurança. Evolução das distorções angulares ε_{xy}^{vp} até a ruptura ocorrer em FOS=1.40



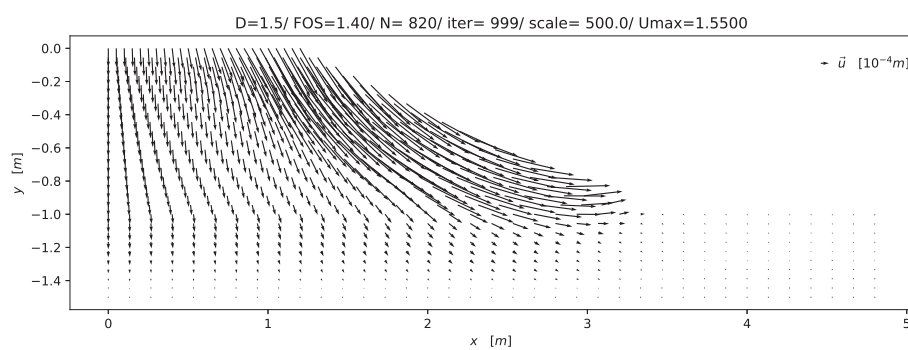
(a) Configuração deformada FOS=1.35



(b) Configuração deformada FOS=1.40

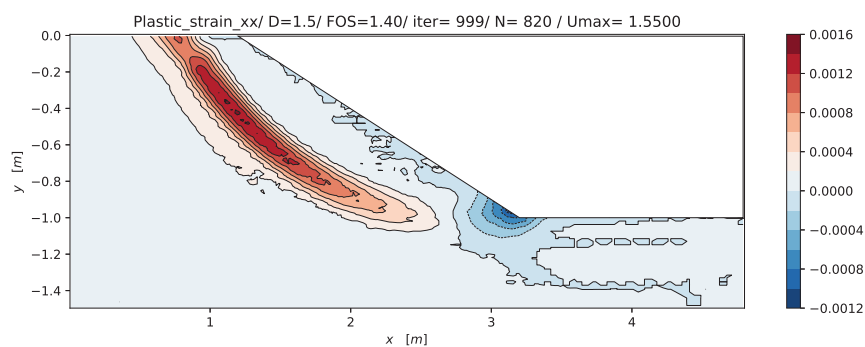


(c) Vetores de deslocamentos nodais FOS=1.35

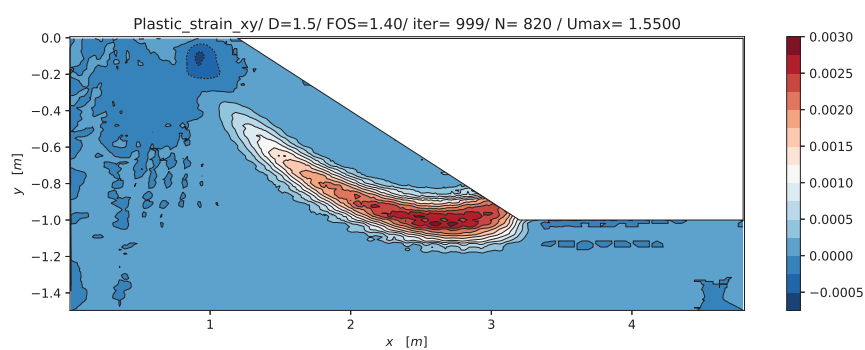


(d) Vetores de deslocamentos nodais FOS=1.40

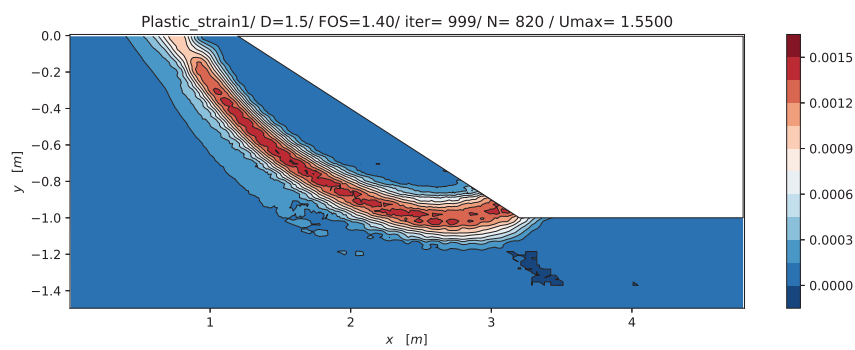
Figura 38 – Talude 2: Configuração deformada e vetores de deslocamentos nodais antes e depois da ruptura do talude.



(a) Deformação longitudinal plástica ε_{xx}^{vp}

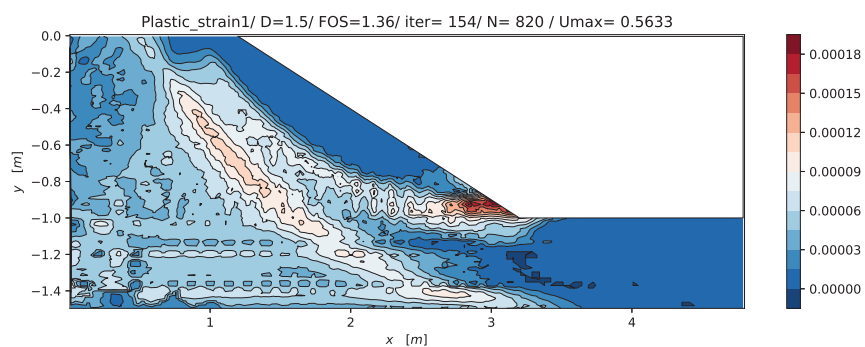


(b) Distorção angular plástica ε_{xy}^{vp}

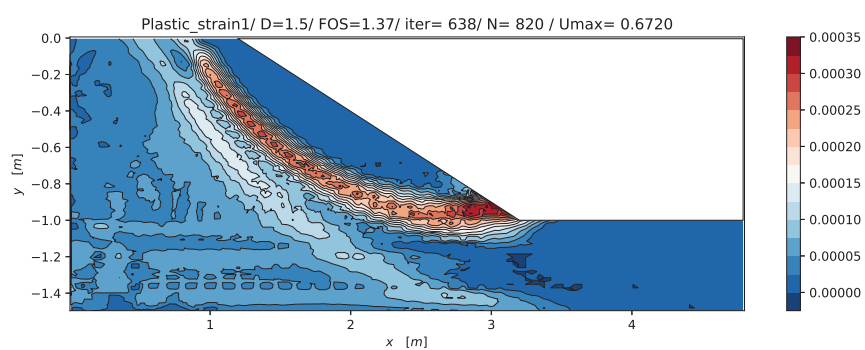


(c) Deformação principal plástica ε_1^{vp}

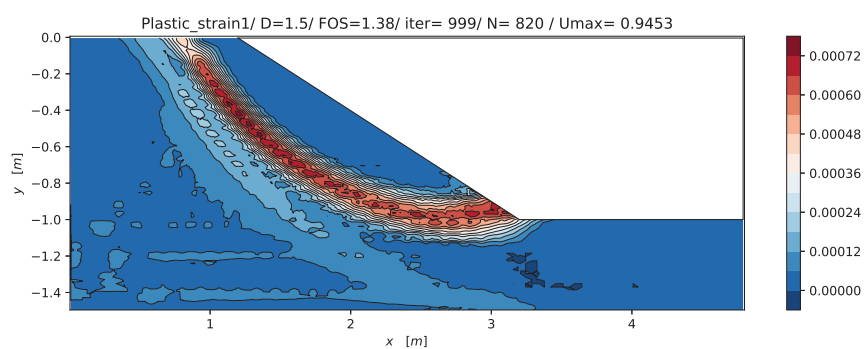
Figura 39 – Talude 2: Contribuições das deformações plásticas em FOS=1.40 para a identificação da superfície potencial de ruptura.



(a) Deformações principais plásticas ε_1^{vp} FOS=1.36

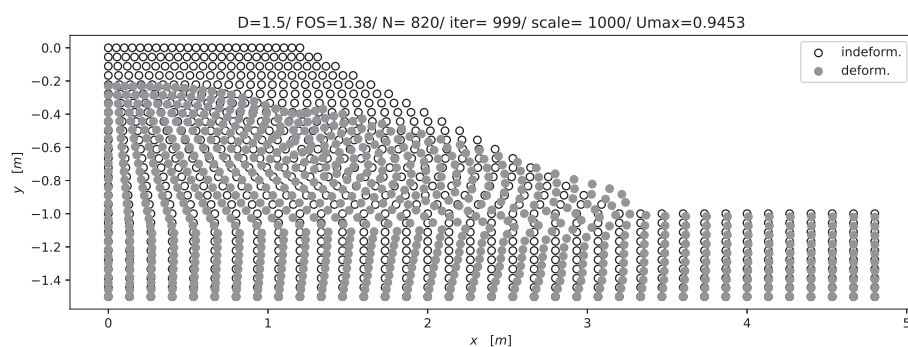


(b) Deformações principais plásticas ε_1^{vp} FOS=1.37

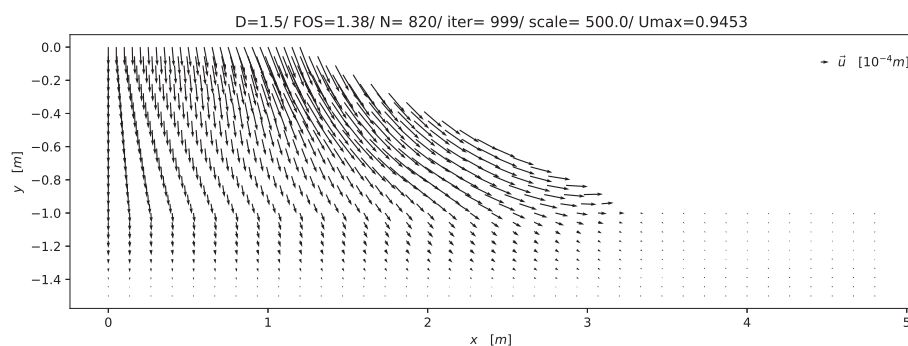


(c) Deformações principais plásticas ε_1^{vp} FOS=1.38

Figura 40 – Talude 2: Análise minuciosa para a identificação do Fator de Segurança que leva o talude à ruptura. São analisadas as deformações principais plásticas ε_1^{vp} .



(a) Configurações indeformada e deformada



(b) Vetores de deslocamentos nodais

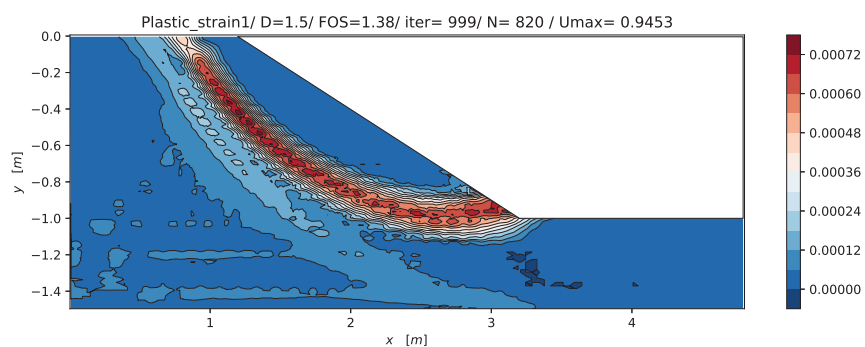
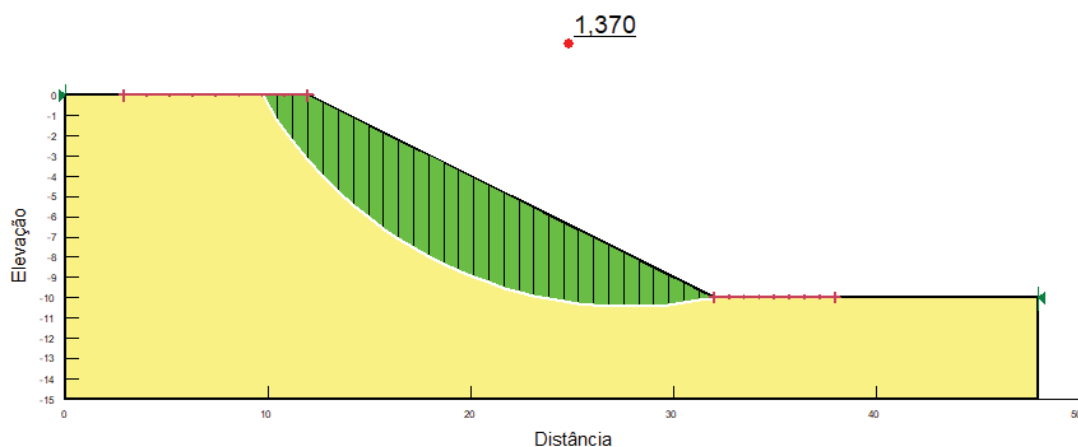
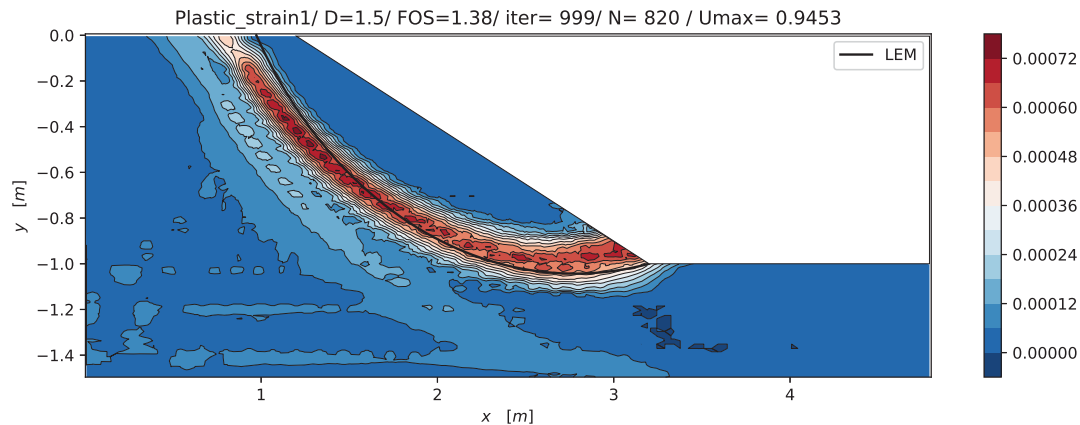
(c) Deformação plástica principal ε_1^{vp}

Figura 41 – Talude 2: Comportamento do talude na ruptura e identificação da superfície potencial de ruptura. Resultados de FOS=1.38 representam o comportamento do talude na ruptura.



(a) SLOPE/W: Superfície potencial de ruptura com centro em (2.7783m, 1.0407m) e raio igual a 2.0839m com FOS=1.370 correspondente, obtidos pelo método de Morgenstern & Price.



(b) Superfície potencial de ruptura através dos resultados de deformações principais plásticas pelo modelo EFG para FOS=1.38, com sobreposição da superfície potencial de ruptura obtida pelo software SLOPE/W representada pela linha em preto.

Figura 42 – Talude 2: Comparação das Superfícies potenciais de ruptura obtidas pelo software SLOPE/W e modelo EFG para talude com $c/\gamma_s H = 0.05$.

5.2.3 Talude 3: Talude homogêneo com camada de fundação

Com o propósito de fazer uma comparação com resultados de Fator de Segurança obtidos por Gago, Mužík e Bulkoa (2019), um terceiro talude é avaliado. O talude investigado é muito semelhante ao Talude 2 estudado anteriormente. As principais diferenças envolvem uma pequena alteração na geometria (Figura 43), mudança na coesão do solo e alteração do módulo de elasticidade. Os parâmetros de solo são apresentados na Tabela 9, é admitido $H=1.0$ m e $D=1.5$. O talude têm restrições de deslocamentos horizontais nas laterais enquanto a restrição de deslocamento na base é total.

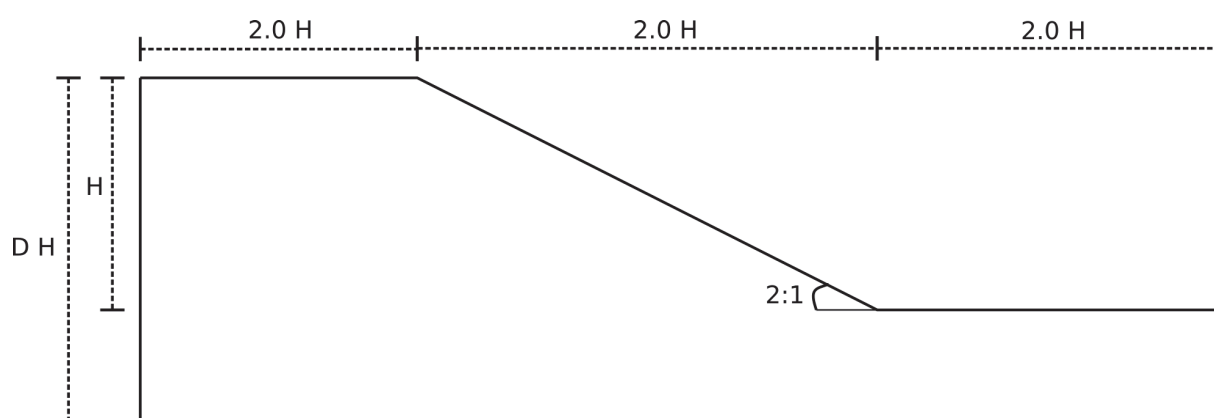


Figura 43 – Geometria do Talude 3. Solo homogêneo com ângulo (2:1); $H=1.0$, $D=1.5$. $\phi_s = 20^\circ$, $c/\gamma_s H = 0.075$.

Tabela 9 – Parâmetros do solo utilizados no Talude 3. Solo homogêneo, isotrópico e seco.

Parâmetros do solo		
ϕ_s	20°	
c	1.5	kN/m^2
E	5×10^4	kN/m^2
ν	0.3	
ψ	0°	
γ_s	20	kN/m^3

Na análise, 820 nós de campo são utilizados para a discretização do domínio. A técnica de redução da resistência ao cisalhamento é aplicada para valores de FOS que são aumentados progressivamente, variando de 1.40 até 1.60. A partir do valor 1.50 uma abordagem mais detalhada é aplicada e portanto os valores de FOS são acrescidos por um incremento de 0.01 até que o modelo seja incapaz de convergir. Os dados obtidos de deslocamentos adimensionais e número de iterações para a convergência ser alcançada para os diversos valores de FOS testados são apresentados na Figura 44. Os valores são explicitados na Tabela 10. Os resultados de deslocamentos adimensionais revelam um grande salto quando o modelo é incapaz de convergir até o número limite de iterações estabelecido. Isto ocorre para $FOS=1.60$ e portanto este é o valor adotado como Fator de Segurança para o Talude 3. A Tabela 11 mostra valores de

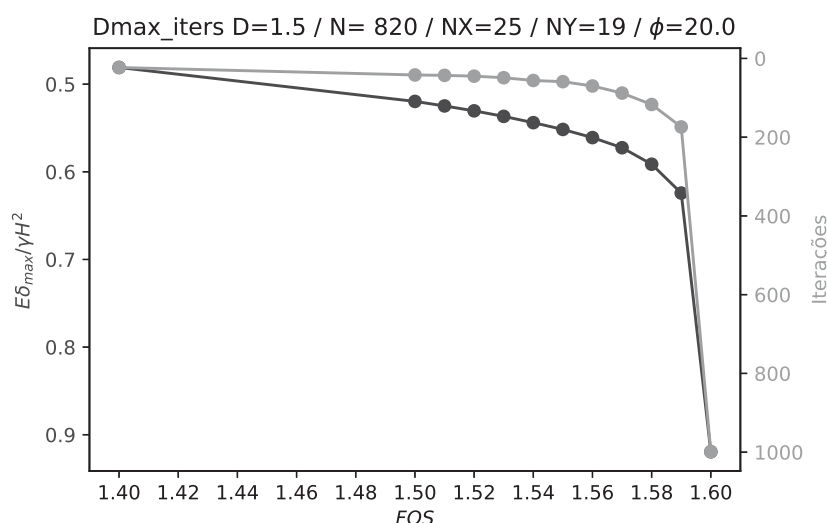


Figura 44 – Talude 3: Deslocamentos adimensionais (em preto) e número de iterações para convergência (em cinza) para diferentes valores de FOS. Um grande salto nos valores de deslocamentos e iterações ocorre em FOS=1.60

Tabela 10 – Talude 3: Resultados de deslocamentos adimensionais e número de iterações para convergência para diferentes valores de FOS.

FOS	$E\delta_{max}/\gamma H^2$	iterações
1.40	0.4810	23
1.50	0.5197	42
1.51	0.5248	43
1.52	0.5304	45
1.53	0.5367	49
1.54	0.5439	56
1.55	0.5517	59
1.56	0.5610	70
1.57	0.5725	88
1.58	0.5914	117
1.59	0.6242	174
1.60	0.9194	1000

Fatores de Segurança obtidos por [Gago, Mužík e Bulkoa \(2019\)](#) para o FEM, LEM e MLPG. Estes valores quando comparados com o FOS calculado através do modelo EFG revelam uma maior concordância com o FEM e LEM. O valor de FOS obtido pelo MLPG é significativamente menor ao alcançado pelo modelo EFG.

A formação da superfície potencial de ruptura é verificada através de mapas de deformação principal plástica ε_1^{vp} como pode ser visto na Figura 45. Para os valores de FOS=1.58 e 1.59 (Figuras 45(a,b), respectivamente) as deformações principais mais significativas se concentram no sopé do talude. Em FOS=1.60 estas deformações mais significativas claramente tomam a forma da superfície potencial de ruptura.

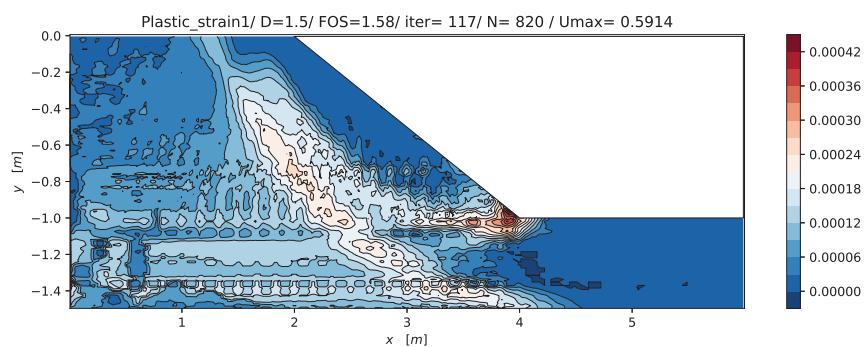
A Figura 46 retrata a configuração do talude na ruptura (FOS=1.60). A configuração

Tabela 11 – Talude 3: Comparação de Fatores de Segurança obtidos por [Gago, Mužík e Bulkoa \(2019\)](#) através de diversos métodos e pelo modelo EFG proposto

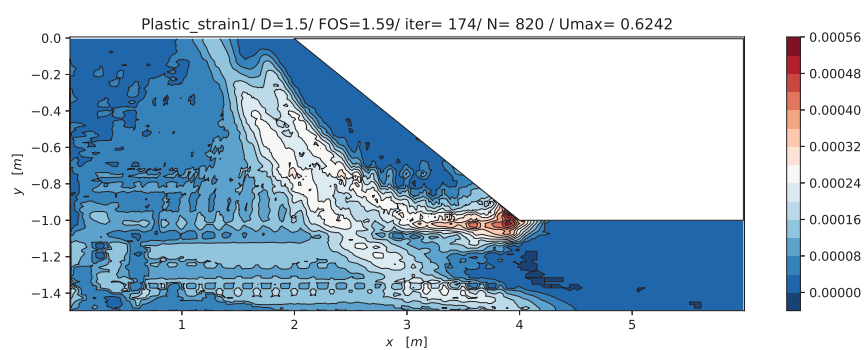
Método Computacional	FOS	Fonte
FEM	1.57	Gago, Mužík e Bulkoa (2019)
LEM - Jambu (Geostudio 2007)	1.62	Gago, Mužík e Bulkoa (2019)
MLPG com RBF	1.52	Gago, Mužík e Bulkoa (2019)
EFG	1.60	Modelo proposto

deformada demonstra que o mecanismo de falha ocorre pelo escorregamento do sopé do talude. Os vetores de deslocamentos nodais indicam como o escorregamento ocorre e as deformações principais plásticas revelam a forma e localização da superfície potencial de ruptura.

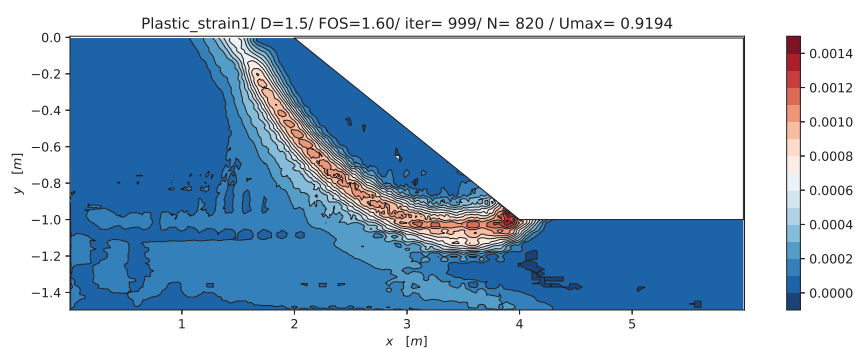
Neste trabalho, o software SLOPE/W é utilizado com o Método de Equilíbrio Limite de Morgenstern & Price para o cálculo da superfície potencial de ruptura e FOS correspondente, a fim de realizar uma comparação com os resultados obtidos pelo modelo EFG. Para o Talude 3, pelo SLOPE/W foi obtido $FOS=1.588$ e superfície potencial de ruptura com centro em (3.5344m, 1.0693m) e raio igual a 2.1234m, que está representada pela linha em branco na Figura 47a. Esta mesma superfície está plotada, em preto, na Figura 47b, sobrepondo o resultado de deformações principais plásticas obtidos pelo modelo EFG quando $FOS=1.38$, que representa a superfície potencial de ruptura obtida pelo modelo EFG. As superfícies potenciais de ruptura obtidas pelo SLOPE/W e modelo EFG são semelhantes porém pode-se notar que a superfície obtida pelo modelo EFG é mais profunda na região da crista do talude se comparada à superfície obtida pelo SLOPE/W (Figura 47b).



(a) Deformações principais plásticas ε_1^{vp} FOS=1.58

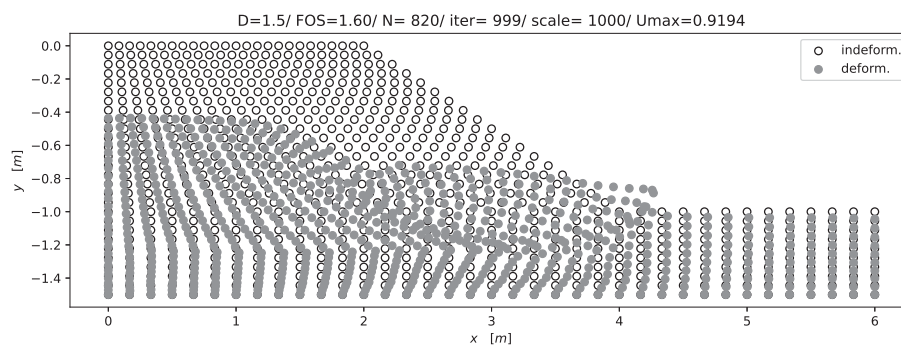


(b) Deformações principais plásticas ε_1^{vp} FOS=1.59

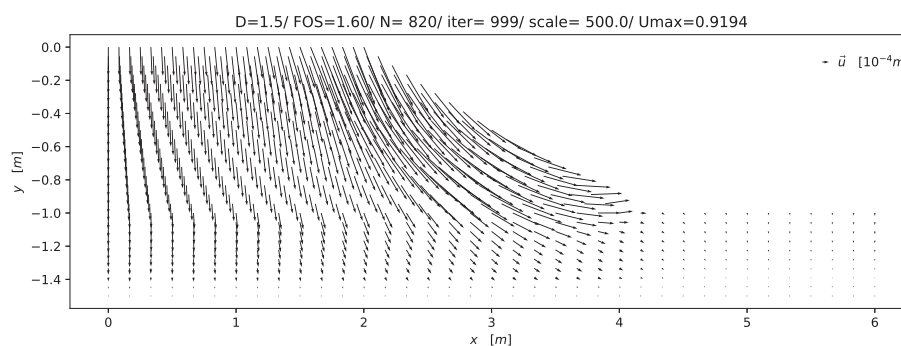


(c) Deformações principais plásticas ε_1^{vp} FOS=1.60

Figura 45 – Talude 3: Análise minuciosa para a identificação do Fator de Segurança que leva o talude à ruptura. São analisadas as deformações principais plásticas ε_1^{vp} .



(a) Configurações indeformada e deformada



(b) Vetores de deslocamentos nodais

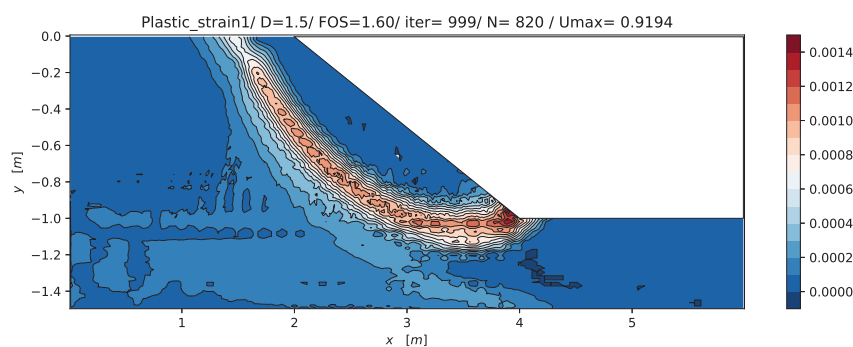
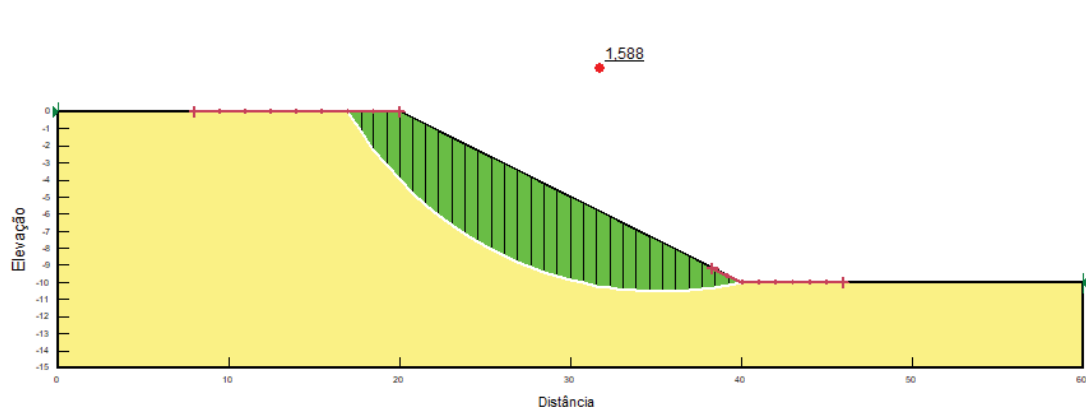
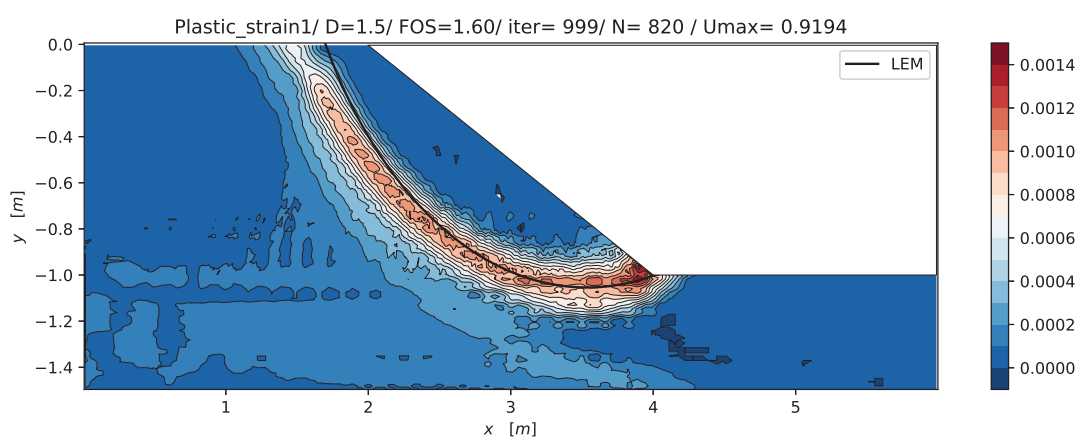
(c) Deformação plástica principal ε_1^{vp}

Figura 46 – Talude 3: Comportamento do talude na ruptura e identificação da superfície potencial de ruptura. Resultados de FOS=1.60 representam o comportamento do talude na ruptura.



(a) SLOPE/W: Superfície potencial de ruptura com centro em (3.5344m, 1.0693m) e raio igual a 2.1234m com FOS=1.588 correspondente, obtidos pelo método de Morgenstern & Price.



(b) Superfície potencial de ruptura através dos resultados de deformações principais plásticas pelo modelo EFG para FOS=1.60, com sobreposição da superfície potencial de ruptura obtida pelo software SLOPE/W representada pela linha em preto.

Figura 47 – Talude 3: Comparação das Superfícies potenciais de ruptura obtidas pelo software SLOPE/W e modelo EFG.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As consequências da ruptura de um talude podem envolver grandes impactos sócio-econômicos e ambientais. Para verificar as condições de estabilidade do talude a fim de evitar que uma ruptura ocorra é necessário que seja feita uma análise da estabilidade do talude. Neste trabalho um modelo computacional foi desenvolvido com a utilização da linguagem de programação *Python* para realizar a análise de estabilidade de taludes. Com a finalidade de capturar o comportamento não-linear dos solos um modelo visco-plástico foi utilizado. A solução do problema foi obtida através de um método de rigidez constante que utiliza repetidas iterações elásticas. A não linearidade material foi introduzida nos vetores de força durante as iterações como efeito da redistribuição de tensões plásticas. O método sem malha Element-Free Galerkin (EFG) foi utilizado para aproximação das variáveis de campo e obtenção do sistema de equações discreto.

Diversas análises de estabilidade de taludes foram realizadas para demonstrar a capacidade do modelo EFG. Os resultados obtidos foram comparados com valores da literatura obtidos por métodos clássicos (Método dos Elementos Finitos e Métodos de Equilíbrio Limite) e por Métodos Sem Malha. O estado plano de deformações foi empregado para a análise de taludes homogêneos e isotrópicos de solo seco. A análise não-linear utilizando o modelo EFG com a *Técnica de redução de resistência ao cisalhamento* foi aplicada para determinar o Fator de Segurança e superfície potencial de ruptura.

Inicialmente o critério de ruptura foi adotado como sendo a incapacidade dos resultados de deslocamentos nodais convergirem em um número limite de iterações prescrito. Para pequenos incrementos no Fator de Segurança quando a técnica de redução da resistência ao cisalhamento é aplicada, pode ocorrer a situação em que os deslocamentos adimensionais não apresentam um grande salto quando a convergência não é atingida. Para estes casos, foi proposto verificar a configuração das deformações principais plásticas a fim de averiguar se a superfície potencial de ruptura está estabelecida. Esta pode ser mais uma evidência de que o talude esteja na iminência da ruptura. Os resultados obtidos pelo modelo EFG proposto mostraram que os valores de Fator de Segurança determinados estão de acordo com os valores encontrados na literatura, conferindo confiabilidade ao método. O modelo EFG foi capaz de representar claramente o mecanismo de falha de escorregamento pelo sopé do talude quando a geometria do talude inclui uma camada de fundação. A localização e forma da superfície potencial de ruptura foram obtidas de maneira natural pelos resultados de deformações ou tensões principais plásticas.

O modelo EFG se mostrou robusto, acurado e adequado para tratar do problema que envolve grandes deslocamentos. Por esses motivos a análise não linear de estabilidade de taludes utilizando o método EFG oferece reais benefícios sobre os métodos clássicos LEM e FEM. Apesar do grande potencial de uso na área geotécnica o método EFG possui suas limitações.

As funções de forma construídas pela aproximação *Moving Least Square* não possuem a propriedade do delta de Kronecker e por isto são necessários procedimentos especiais para a imposição das condições de contorno essenciais. O método EFG tem um custo computacional maior se comparado com o FEM ([Liu e Gu \(2005\)](#)). O tamanho do domínio de suporte local pode influenciar significativamente o resultado, portanto sua determinação requer cuidado por parte do analista.

Para trabalhos futuros é interessante que o modelo incorpore a ação de potenciais agentes desestabilizadores como a ação da água ou de terremotos. Também é interessante que o modelo consiga lidar com taludes compostos de camadas de materiais com propriedades diferentes. Para uma maior eficiência do modelo a não linearidade material pode ser tratada com um método de rigidez variável em que a rigidez do material é reduzida conforme se aproxima da ruptura.

REFERÊNCIAS

- AN, Y. et al. Three-dimensional smoothed-particle hydrodynamics simulation of deformation characteristics in slope failure. **Géotechnique**, v. 66, n. 8, p. 670–680, 2016. Citado na página 34.
- ASSAM, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. Campinas, SP: Unicamp, 2003. Citado na página 58.
- ATLURI, S.; ZHU, T. A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. **Computational Mechanics**, v. 22, p. 117–127, 1998a. Citado na página 30.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1997. Citado na página 31.
- BELYTSCHKO, T.; GU, L.; LU, Y. Y. Fracture and crack growth by element free galerkin methods. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, IOP Publishing, v. 2, n. 3A, p. 519–534, may 1994b. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0965-0393/2/3a/007>>. Citado na página 29.
- BELYTSCHKO, T. et al. Smoothing and accelerated computations in the element free galerkin method. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 74, n. 1, p. 111 – 126, 1996. ISSN 0377-0427. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0377042796000209>>. Citado na página 44.
- BELYTSCHKO, T. et al. Element-free galerkin methods for static and dynamic fracture. **International Journal of Solids and Structures**, v. 32, n. 17, p. 2547 – 2570, 1995b. ISSN 0020-7683. Citado na página 29.
- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free galerkin methods. **Int. J. Numer. Methods Engrg.**, v. 37, p. 229–256, 1994. Citado 5 vezes nas páginas 25, 28, 29, 36 e 49.
- BELYTSCHKO, T.; ORGAN, D.; KRONGAUZ, Y. A coupled finite element-element-free galerkin method. **Computational Mechanics**, v. 17, n. 3, p. 186–195, 1995. Citado na página 30.
- BINGHAM, E. C. **Fluidity and Plasticity**. New York: McGraw-Hill, 1922. Citado na página 68.
- BISHOP, A. W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes. **Géotechnique**, v. 5, n. 1, p. 7–17, 1955. Citado na página 33.
- BISHOP, A. W.; MORGENSTERN, N. Stability coefficients for earth slopes. **Géotechnique**, v. 10, n. 4, p. 129–153, 1960. Citado 5 vezes nas páginas 81, 84, 87, 97 e 101.
- BUI, H. H. et al. Slope stability analysis and discontinuous slope failure simulation by elasto-plastic smoothed particle hydrodynamics (sph). **Geotechnique**, v. 61, n. 7, p. 565–574, 2011b. Citado 7 vezes nas páginas 24, 25, 28, 34, 81, 86 e 101.

- BUI, H. H.; FUKAGAWA, R. R. An improved sph method for saturated soils and its application to investigate the mechanisms of embankment failure: Case of hydrostatic pore-water pressure. **International Journal For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 37, p. 31–50, 2011a. Citado 3 vezes nas páginas 28, 34 e 35.
- BUI, H. H. et al. Lagrangian mesh-free particle method (sph) for large deformation and post-failure of geomaterial using elastic-plastic soil constitutive model. **Int. J. Numer. Analyt. Methods Geomech**, v. 32, n. 12, p. 1537–1573, 2008. Citado na página 34.
- CALIZOTTI, G. S. 2021. Acervo pessoal de Giulianne Simizu Calizotti. Citado na página 22.
- CELESTINO, T.; DUNCAN, J. Simplified search for non-circular slip surface. In: THE ORGANIZATION. Stockholm: 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1981. v. 3, p. 391–394. Citado na página 33.
- CHEN, J.-S.; PAN, C.; WU, C. Large deformation analysis of rubber based on a reproducing kernel particle method. **Computational Mechanics**, v. 19, p. 211–227, 02 1997. Citado na página 28.
- CHEN, J.-S. et al. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1, p. 195 – 227, 1996. Citado na página 28.
- CHEN, Z.-Y.; MORGENSTERN, N. R. Extensions to the generalized method of slices for stability analysis. **Canadian Geotechnical Journal**, v. 20, n. 1, p. 104–119, 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1139/t83-010>>. Citado na página 33.
- CHEN, Z.-Y.; SHAO, C.-M. Evaluation of minimum factor of safety in slope stability analysis. **Canadian Geotechnical Journal**, v. 25, n. 4, p. 735–748, 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1139/t88-084>>. Citado na página 33.
- CLEARY, P. W. Modelling confined multi-material heat and mass flows using sph. **Applied Mathematical Modelling**, v. 22, n. 12, p. 981 – 993, 1998. Citado na página 28.
- CLOUGH, R.; WOODWARD, R. Analysis of embankment stresses and deformations. **Journal of Soil Mechanics and Foundations Division**, v. 4, p. 529–549, 1967. Citado na página 33.
- CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. **Géotechnique**, v. 29, n. 1, p. 47–65, 1979. Citado na página 35.
- DING, R.; SHEN, Q.; HUO, Y. The element-free galerkin method for a quasistatic contact problem with the tresca friction in elastic materials. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, v. 37, n. 1, p. 69–97, 2021. Citado na página 30.
- DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. An introduction to programming the meshless element free galerkin method. **Arch Computat Methods Eng**, v. 5, p. 207–241, 1998. Citado na página 60.
- DRUCKER, D. C. Coulomb friction, plasticity and limit loads. **journal of applied mechanics**, v. 21, p. 71–74, 1954. Citado na página 62.

DRUCKER, D. C.; PRAGER, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 10, p. 157–165, 1952. Citado na página 62.

DUARTE, C.; ODEN, J. An h-p adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1, p. 237 – 262, 1996. ISSN 0045-7825. Citado na página 31.

DUNCAN, J.; WRIGHT, S. **Soil Strength and Slope Stability**. Hoboken, NJ: John Wiley, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 31.

DUNCAN, J. M. State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes. **J. Geotech. Engng, ASCE**, v. 122, n. 7, p. 577–596, 1996. Citado na página 33.

FELLENIOUS, W. Calculation of the stability of earth dams. **Proc. 2nd Congr. Large Dams, Washington**, DC, n. 4, p. 445–462, 1936. Citado na página 33.

FLEMING, M. et al. Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 8, p. 1483–1504, 1997. Citado na página 29.

FREDLUND, D.; KRAHN, J. Comparison of slope stability methods. **Canadian Geotechnical Journal**, v. 14, p. 429–439, 01 1977. Citado na página 33.

FREITAS, R.; ALMEIDA, F. **Um ano após tragédia da Vale, dor e luta por justiça unem famílias de 259 mortos e 11 desaparecidos**. 2020. Disponível em <<https://g1.globo.com/mg/minas-gerais/noticia/2020/01/25/um-ano-apos-tragedia-da-vale-dor-e-luta-por-justica-unem-familias-de-259-mortos-e-11-desaparecidos.ghtml>> Acesso em (01/02/2021). G1 Minas e TV Globo. Citado na página 22.

FRIES, T.; MATTHIES, H. **Classification and overview of meshfree methods**. Brunswick, Germany, 2004. Technical Report 2003-3. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 36.

GAGO, F.; MUŽÍK, J.; BULKOA, R. The slope stability solution using meshless local petrov-galerkin method. **Transportation Research Procedia**, v. 40, p. 686–693, 2019. Citado 7 vezes nas páginas 12, 25, 35, 81, 109, 110 e 111.

GEO-SLOPE International Ltd. **Stability Modeling with SLOPE/W**. Calgary, Alberta, Canada, 2008. Citado na página 87.

GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non spherical stars. **Monthly Notices R. Astronom. Soc**, v. 181, p. 375–389, 1977. Citado na página 28.

GRIFFITHS, D. V.; LANE, P. A. Slope stability analysis by finite elements. **Géotechnique**, v. 49, n. 3, p. 387–403, 1999. Citado 11 vezes nas páginas 10, 24, 34, 72, 81, 82, 83, 84, 87, 97 e 101.

GU, Y.; LIU, G. A boundary point interpolation method for stress analysis of solids. **Computational Mechanics**, v. 1, p. 47–54, 2002a. Citado na página 29.

GU, Y. T.; LIU, G. R. A boundary point interpolation method (bpim) using radial function basis. **First MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics**, p. 1590–1592, 2001e. Citado na página 29.

- GU, Y. T.; LIU, G. R. A boundary radial point interpolation method (brpim) for 2-d structural analyses. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 15, n. 5, p. 535–550, 2003b. Citado na página 29.
- GUAN, P. C. et al. A semi-lagrangian reproducing kernel formulation for modeling earth moving operations. **Mechanics of Materials**, v. 41, n. 6, p. 670–683, 2009. Citado na página 35.
- GUAN, P. C. et al. Semi-lagrangian reproducing kernel particle method for fragment-impact problems. **International Journal of Impact Engineering**, v. 38, n. 12, p. 1033–1047, 2011. Citado na página 35.
- HE, X.; LIANG, D.; BOLTON, M. D. Run-out of cut-slope landslides: mesh-free simulations. **Géotechnique**, v. 68, n. 1, p. 50–63, 2018. Citado na página 34.
- HILL, R. **The mathematical theory of plasticity**. Oxford: Clarendon Press, 1950. Citado na página 62.
- JANBU, N. Slope stability computation, soil mechanics and foundation engineering report. **Trondheim: Technical University of Norway**, 1968. Citado na página 33.
- KWOK, O.-L. A. et al. Semi-lagrangian reproducing kernel particle method for slope stability analysis and post-failure simulation. **KSCE Journal of Civil Engineering**, v. 19, n. 1, p. 107–115, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 25, 35, 81, 86 e 87.
- LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. Surfaces generated by moving least squares methods. **Mathematics of Computation**, American Mathematical Society, v. 37, n. 155, p. 141–158, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 41.
- LI, L. et al. Evaluation of critical slip surface in limit equilibrium analysis of slope stability by smoothed particle hydrodynamics. **International Journal of Geomechanics**, v. 19, n. 5, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 34.
- LIBERSKY, L. D. et al. High strain lagrangian hydrodynamics: A three-dimensional sph code for dynamic material response. **Journal of Computational Physics**, v. 109, n. 1, p. 67 – 75, 1993. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199918371199X>>. Citado na página 28.
- LIU, G.; GU, Y. Local point interpolation method for stress analysis of two-dimensional solids. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 11, p. 221–236, 02 2001. Citado na página 30.
- LIU, G. et al. Point interpolation method based on local residual formulation using radial basis functions. **Structural engineering & mechanics**, v. 14, p. 713–732, 12 2002b. Citado na página 30.
- LIU, G.; LIU, M.; LAM, K. Smoothed particle hydrodynamics for numerical simulation of high explosive explosions. In: (AFI-2001), T. first international symposium on advanced fluid information (Ed.). Tohoku University, Sendai, Japan, 2001a. Citado na página 28.
- LIU, G.; YAN, L. A study on numerical integrations in element free methods. In: THE ORGANIZATION. Singapore: Proceeding of APCOM '99, 1999. p. 979–984. Citado na página 60.

LIU, G. R. **Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method**. [S.l.]: CRC Press, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 60.

LIU, G. R.; GU, Y. T. A local radial point interpolation method (lr-pim) for free vibration analyses of 2-d solids. **J. of Sound and Vibration**, v. 246, n. 1, p. 29–46, 2001. Citado na página 29.

LIU, G. R.; GU, Y. T. **An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming**. [S.l.]: Springer, 2005. Citado 8 vezes nas páginas 28, 31, 36, 39, 40, 60, 61 e 116.

LIU, M. et al. Numerical simulation of incompressible flows by sph. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SCIENTIFIC & ENGINEERING COMPUTING. Beijing, China, 2001. Citado na página 28.

LIU, W.; JUN, S.; ZHANG, Y. Reproducing kernel particle methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, p. 1081–1106, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

LIU, W. K. et al. Multiresolution reproducing kernel particle method for computational fluid dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 24, n. 12, p. 1391–1415, 1997. Citado na página 28.

LOWE, J.; KARAFIATH, L. Stability of earth dams upon drawdown. **Proc. 1st Pan-Am. Conf. Soil Mech. Found. Engng**, p. 537–552, 1960. Citado na página 33.

LU, Y.; BELYTSCHKO, T.; TABBARA, M. Element-free galerkin method for wave propagation and dynamic fracture. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 126, n. 1, p. 131 – 153, 1995. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004578259500804A>>. Citado na página 30.

LUCY, L. A numerical approach to testing the fission hypothesis. **Astronomical Journal**, n. 82, p. 1013–1024, 1977. Citado na página 28.

MATSUI, T.; SAN, K. C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique. **Soils Found**, v. 32, n. 1, p. 59–70, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 24, 33 e 72.

MELENK, J.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1, p. 289 – 314, 1996. ISSN 0045-7825. Citado na página 31.

MODARESSI, H.; AUBERT, P. Element-free galerkin method for deforming multiphase porous media. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 42, p. 313–340, 1998. Citado na página 35.

MONAGHAN, J. J.; LATTANZIO, J. A refined particle method for astrophysical problems. **Astronomy and Astrophysics**, v. 149, p. 135–143, 1985. Citado na página 28.

MORGENSTERN, N. R.; PRICE, V. E. The analysis of the stability of general slip surfaces. **Géotechnique**, v. 15, n. 1, p. 79–93, 1965. Citado na página 33.

MORRIS, J. P. Stability properties of sph. **Publ. Astron. Soc. Aust.**, v. 13, p. 97, 1996. Citado na página 28.

MUKHERJEE, Y. X.; MUKHERJEE, S. The boundary node method for potential problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 5, p. 797–815, 1997. Citado na página 29.

MURAKAMI, A.; ARIMOTO, S. Localized behavior of saturated soil via element-free strategy. **Proc. 12th Asian Regional Conf. on Soil Mechanics & Geotechnical Engineering**, v. 1, p. 925–928, 2003. Citado na página 35.

MURAKAMI, A. et al. Mesh-free method for predicting the behavior of saturated soil. **Geomechanics**, v. 1, p. 664–672, 2005. Citado na página 35.

MURAKAMI, A.; KAWABATA, H.; AOYAMA, S. Efgm analysis for saturated soil. **Computer Methods and Advances in Geomechanics**, v. 1, p. 153–156, 2001. Citado na página 35.

NAYLOR, D. J.; PANDE, G. N. **Finite elements in geotechnical engineering**. Swansea: Pineridge Press, 1981. Citado na página 24.

NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. **Computational Mechanics**, v. 10, p. 307–318, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

NGUYEN, V. Determination of critical slope failure surface. **ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 105, p. 238–250, 1985. Citado na página 33.

NGUYEN, V. P. et al. Meshless methods: A review and computer implementation aspects. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 79, n. 3, p. 763 – 813, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 36.

OLIVEIRA, T.; PORTELA, A. Weak-form collocation – a local meshless method in linear elasticity. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 73, p. 144–160, 2016. Citado na página 31.

PATHANIA, T.; ELDHO, T. A moving least squares based meshless element-free galerkin method for the coupled simulation of groundwater flow and contaminant transport in an aquifer. **Water Resour Manage**, v. 34, p. 4773–4794, 2020b. Citado na página 30.

PATHANIA, T.; ELDHO, T.; BOTTACIN-BUSOLIN, A. Optimal design of in-situ bioremediation system using the meshless element-free galerkin method and particle swarm optimization. **Advances in Water Resources**, v. 144, p. 103707, 2020a. ISSN 0309-1708. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0309170820301780>>. Citado na página 30.

PERZYNA, P. Fundamental problems in viscoplasticity. In: CHERNYI, G. et al. (Ed.). [S.l.]: Elsevier, 1966, (Advances in Applied Mechanics, v. 9). p. 243 – 377. Citado na página 68.

QIN, F.; WANG, L. Slope stability analysis based on the element-free galerkin method. **Applied Mechanics and Materials**, v. 226-228, p. 1449–1452, 11 2012. Citado na página 35.

SARMA, S. K. Stability analysis of embankments and slopes. **Géotechnique**, v. 23, n. 3, p. 423–433, 1973. Disponível em: <<https://doi.org/10.1680/geot.1973.23.3.423>>. Citado na página 33.

SENDI, Z.; BELHADJSALAH, H. Analysing 2d elastic and elastoplastic problems with the element free galerkin method. In: **Design and Modeling of Mechanical Systems - IV**. Cham: Springer International Publishing, 2020. p. 804–814. Citado na página 30.

SILVA, D. L. da; FERREIRA, M. C.; SCOTTI, M. R. O maior desastre ambiental brasileiro: de mariana (mg) a regência (es). **Periódicos UFMG**, v. 24, n. 1-2, 2015. Citado na página 22.

SMITH, I. M.; GRIFFITHS, D. V.; MARGETTS, L. **Programming the Finite Element Method**. 5. ed. United Kingdom: John Wiley & Sons,, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 62, 66 e 67.

SMITH, I. M.; HOBBS, R. Finite element analysis of centrifuged and built-up slopes. **Géotechnique**, v. 24, n. 4, p. 531–559, 1974. Citado na página 33.

SOUZA, F.; FELLET, J. **Brumadinho pode ser 2º maior desastre industrial do século e maior acidente de trabalho do Brasil**. 2019. Disponível em <<https://epocanegocios.globo.com/Brasil/noticia/2019/01/brumadinho-pode-ser-2-maior-desastre-industrial-do-seculo-e-maior-acidente-de-trabalho-do-brasil.html>> Acesso em (01/02/2021). Época. Citado na página 22.

SPENCER, E. A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel interslice forces. **Géotechnique**, v. 17, n. 1, p. 11–26, 1967. Citado na página 33.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 47, n. 8, p. 1401–1417, 2000. Citado na página 31.

SWEGLE, J.; HICKS, D.; ATTAWAY, S. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. **Journal of Computational Physics**, v. 116, n. 1, p. 123 – 134, 1995. Citado na página 28.

TAYLOR, D. W. Stability of earth slopes. **J. Boston Soc. Civ. Eng.**, v. 24, p. 197–246, 1937. Citado na página 33.

TENÓRIO, E. A. G. et al. Comparação entre a análise de estabilidade de taludes por método determinístico e probabilístico. In: ANAIS III CONAPESC. Campina Grande: Realize Editora, 2018. Disponível em <<https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/43006>> Acesso em (01/02/2021). Citado na página 24.

TEY, W. Y. et al. A review on development and applications of element-free galerkin methods in computational fluid dynamics. **International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics**, Taylor & Francis, v. 21, n. 5, p. 252–275, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/15502287.2020.1821126>>. Citado na página 30.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Theory of Elasticity**. [S.l.]: McGraw-hill, 1970. Citado na página 77.

TURNER, M. J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of Aeronautic Society**, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 27.

UNNIKRISHNAN, K. R.; KRISHNA, I. R. P.; ARUN, C. O. Free vibration analysis of pre-stressed membrane using element free galerkin method. In: SATAPATHY, S. C. et al. (Ed.). **International Conference on Emerging Trends in Engineering (ICETE)**. Cham: Springer International Publishing, 2020. p. 542–550. Citado na página 30.

URAS, R. A. et al. Multiresolution reproducing kernel particle methods in acoustics. **Journal of Computational Acoustics**, v. 05, n. 01, p. 71–94, 1997. Citado na página 28.

USACE. **Engineering and design: Slope stability of earth and rockfill dams**. Washington, DC: USACE, 1970. Citado na página 33.

WANG, J.; LIU, G. Radial point interpolation method for elastoplastic problems. **On Structural Stability and Dynamics**, Dec. 7-9, 2000, Taipei, Taiwan, p. 703–708, 2000. Citado na página 29.

WANG, L. et al. Study on the numerical integration of element free galerkin method. **Jixie Qiangdu/Journal of Mechanical Strength**, v. 33, p. 368–372, 06 2011. Citado na página 60.

WONG, F. S. Uncertainties in fe modeling of slope stability. **Comput. Struct**, v. 19, p. 777–791, 1984. Citado na página 34.

YUAN, B. et al. A coupled finite element-element-free galerkin method for simulating viscous pressure forming. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 68, p. 86–102, 07 2016. Citado na página 30.

ZHOU, X.; ZHAO, Y.; QIAN, Q. A novel meshless numerical method for modeling progressive failure processes of slopes. **Engineering Geology**, v. 192, p. 139–153, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 35.

ZHU, T.; ZHANG, J.; ATLURI, S. A local boundary integral equation (lbie) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. **Computational Mechanics**, v. 21, p. 223–235, 1998. Citado na página 30.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CORMEAU, I. C. Viscoplasticity, plasticity and creep in elastic solids. a unified approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, n. 8, p. 821–845, 1974. Citado 6 vezes nas páginas 25, 26, 35, 68, 70 e 76.

ZIENKIEWICZ, O. C.; HUMPHESON, C.; LEWIS, R. W. Associated and non-associated viscoplasticity and plasticity in soil mechanics. **Géotechnique**, v. 25, n. 4, p. 671–689, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 33.