

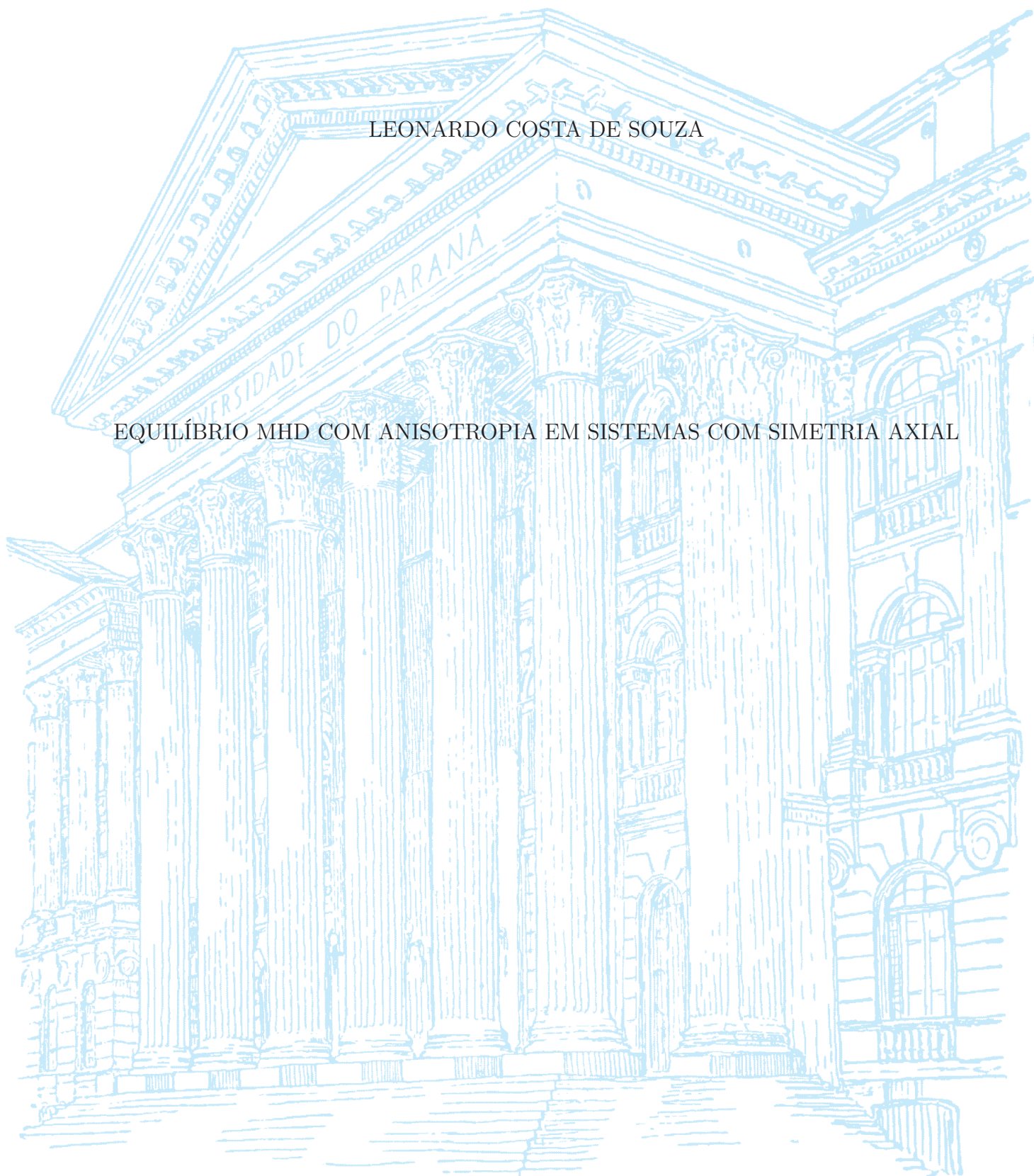
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LEONARDO COSTA DE SOUZA

EQUILÍBRIO MHD COM ANISOTROPIA EM SISTEMAS COM SIMETRIA AXIAL

CURITIBA, PARANÁ

2020



LEONARDO COSTA DE SOUZA

EQUILÍBRIO MHD COM ANISOTROPIA EM SISTEMAS COM SIMETRIA AXIAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

CURITIBA, PARANÁ

2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S729e

Souza, Leonardo Costa de

Equilíbrio MHD com anisotropia em sistemas com simetria axial [recurso eletrônico] /Leonardo Costa de Souza. – Curitiba, 2020.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2020.

Orientador: Ricardo Luiz Viana.

1. Anisotropia. 2. Equilíbrio. 3. Simetria (Física). I. Universidade Federal do Paraná. II. Viana, Ricardo Luiz. III. Título.

CDD: 215.3

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA - 40001016020P4

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LEONARDO COSTA DE SOUZA** intitulada: "**Equilíbrio MHD com anisotropia em sistemas com simetria axial**", sob orientação do Prof. Dr. RICARDO LUIZ VIANA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 07 de Fevereiro de 2020.

RICARDO LUIZ VIANA

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

JOSÉ DANILLO SZEZECH JÚNIOR

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA)

IBERÊ LUIZ CALDAS

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Madalena e Leonildo, por todo o apoio e suporte ao longo dos anos.

Ao professor Dr. Ricardo Luiz Viana, pela orientação, dedicação e paciência.

A Carlla por todo incentivo, companheirismo e amor.

Aos amigos Felipe L. Carvalho, Arturo C. Conte, Paulo M. Ferreira e Matheus Rolim.

Aos membros da banca, professores Dr. Iberê Luiz Caldas e Dr. Jose Danilo Szezech Junior.

Ao programa de Pós-Graduação em Física da UFPR.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

O plasma exibe anisotropia quando na presença de um campo magnético forte. A equação de equilíbrio MHD é resolvida analiticamente sob a hipótese de Chew, Goldberger e Low de um tensor pressão anisotrópico. Para tanto utiliza-se um método desenvolvido por Clemente, considerando uma solução previamente conhecida da equação de Grad-Schlüter-Shafranov. Este método foi generalizado para ser aplicado em sistemas de coordenadas ortogonais e não ortogonais. Isto possibilita obter equilíbrios anisotrópicos em sistemas com eixo-simetria. Três exemplos são apresentados em geometrias cilíndricas, esféricas e esferoidais, para o qual é fornecido soluções analíticas exatas do equilíbrio magnetohidrodinâmico anisotrópico. Além disso os efeitos da anisotropia sobre campos magnéticos e densidade de corrente é estudado.

Palavras-chaves: Anisotropia; Equilíbrio; Simetria.

ABSTRACT

A plasma can exhibit anisotropy when subject to a strong magnetic field. The MHD equilibrium equation is solved analytically, under the hypothesis of Chew, Goldberger and Low of an anisotropic pressure tensor. For this is used a method developed by Clemente, considering a previously known solution of the Grad-Schlüter-Shafranov equation. This method was generalized to be applied in symmetric systems described by orthogonal as well nonorthogonal systems of coordinates. This enables to obtain anisotropic magnetohydrodynamics equilibrium in axially symmetric systems. Three examples are presented in cylindrical, spherical and spheroidal geometries, for which is given exact analytic solutions of the anisotropic MHD equilibrium. Moreover the effects of anisotropy in the magnetic fields and current density is studied.

Key-words: Anisotropy; Equilibrium; Symmetric.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Esquema de um tokamak. Adaptado de 'iter.org'.	17
Figura 2 – Movimento de uma carga elétrica q na presença de um campo magnético. Adaptado de 'euro-fusion.org'.	18
Figura 3 – Elemento de área da superfície S_0	20
Figura 4 – Figura esquemática mostrando algumas superfícies coordenadas e curva em um sistema eixo simétrico.	29
Figura 5 – As linhas tracejadas pretas representam a solução isotrópica, enquanto as linhas cheias azuis a solução anisotrópica. Em (a) temos os parâmetros $a = 3/2, b = 0$, (b) $a = 3, b = 0$, em (c) $a = 3, b = 1/2$ e em (d) os parâmetros são $a = 3, b = 1$. O ponto vermelho indica a posição do eixo magnético.	45
Figura 6 – As linhas tracejadas pretas correspondem ao caso isotrópico, enquanto, as linhas cheias azuis ao caso anisotrópico. Em (a) temos os parâmetros $a = 3, b = 0$, (b) $a = 5/3, b = 1$, em (c) $a = 3, b = 0$ e em (d) os parâmetros são $a = 5/3, b = 1$	47
Figura 7 – As linhas tracejadas pretas correspondem ao caso isotrópico, enquanto, as linhas cheias azuis ao caso anisotrópico. Em (a) temos os parâmetros $a = 3, b = 0$, (b) $a = 5/3, b = 1$, em (c) $a = 3, b = 0$ e em (d) os parâmetros são $a = 5/3, b = 1$	48
Figura 8 – Perfis radiais das pressões. Em vermelho pressão paralela e em preto pressão perpendicular ao campo magnético. Em (a) temos os parâmetros $a = 3, \beta = 0, 5$, (b) $a = 5/3, \beta = 0, 5$, em (c) $a = 3, \beta = 2$ e em (d) os parâmetros são $a = 5/3, \beta = 2$	49
Figura 9 – Esquema estudado por Morikawa, dentro da esfera de circunferência é a região de plasma e a entre vermelho e azul o meio sem forças.	51
Figura 10 – Linhas tracejadas pretas soluções isotrópica, linhas cheias azuis são as soluções anisotrópica, pontos vermelhos são as posições dos eixos magnéticos. Em (a) $\lambda = 4, 0$ e em (b) $\lambda = \lambda_2 = 7, 725$	56
Figura 11 – Linhas tracejadas pretas para o caso isotrópico, linhas cheias vermelhas para o caso anisotrópico Em (a) e (b) temos a componente poloidal do campo magnético para o parâmetro $\lambda = 4, 0$ e $\lambda = 7, 5$, respectivamente. Em (c) e (d) temos a componente toroidal para $\lambda = 4, 0$ e $\lambda = 7, 5$ respectivamente.	58

Figura 12 – Linhas tracejadas pretas para caso isotrópico, linhas cheias azuis para o caso anisotrópico. Em (a) e (b) temos a componente poloidal da densidade de corrente para o parâmetro $\lambda = 4,0$ e $\lambda = 7,5$, respectivamente. Em (c) e (d) temos a componente toroidal para $\lambda = 4,0$ e $\lambda = 7,5$ respectivamente.	59
Figura 13 – As linhas tracejada pretas representam a pressão perpendicular, as linhas cheias azuis a pressão paralela ao campo magnético. Em (a) temos o parâmetro $\lambda = 4,0$ e em (b) $\lambda = 7,0$	60
Figura 14 – Linhas tracejadas pretas para o caso isotrópico, linhas ponto traço vermelho para o caso anisotrópico com perfil linear σ_{-1} e linhas sólida azul para o perfil σ_{-2} . Nesta imagem é utilizado $b/a = 0,5$	65
Figura 15 – Linhas tracejada pretas para o caso isotrópico, linhas cheias vermelhas para o caso anisotrópico com função de anisotropia linear 3.10 e linhas ponto traço azuis para o caso anisotrópico com função de anisotropia (3.12). Em (a) temos a componente do campo magnético poloidal, (b) componente toroidal, (c) componente poloidal da densidade de corrente e (d) componente toroidal. Em todas os quadros é utilizado $b/a = 0,5$	68
Figura 16 – Perfil radial das pressões para o caso $b/a = 0,5$. Curva cheia vermelha corresponde à pressão paralela, tracejada verde a perpendicular ao campo para o equilíbrio com (3.10). Curva traço ponto azul é pressão paralela e curva pontilhada preta é a pressão perpendicular para o caso (3.12).	69
Figura 17 – Vetores de base contravariantes e superfícies coordenadas.	79
Figura 18 – Esquema das coordenadas cilíndricas. Retirado de [57].	83
Figura 19 – Esquema das coordenadas esféricas. Retirado de [57].	84
Figura 20 – Esquema das coordenadas esferoidais oblatas. Retirado de [57].	86

SUMÁRIO

Introdução	12
1 Magnetohidrodinâmica	16
1.1 Plasmas e confinamento magnético	16
1.2 Equações da hidrodinâmica	18
1.2.1 Derivada convectiva	19
1.2.2 Equação da continuidade	19
1.2.3 Equação de Euler	20
1.2.4 Equação de energia	21
1.3 Equações do eletromagnetismo	22
1.3.1 Corrente de deslocamento	23
1.3.2 Lei de Ohm generalizada	24
1.4 Tensor pressão de Chew, Goldberger e Low	24
1.4.1 Equações duplo-adiabáticas	25
1.5 Resumo das equações MHD	26
2 Equilíbrio MHD em sistemas com simetria axial	27
2.1 Funções de superfície	28
2.1.1 Função de fluxo transversal	28
2.1.2 Representação para o campo magnético	30
2.1.3 Função de corrente transversal	31
2.1.4 Representação para a densidade de corrente	32
2.2 Hipóteses de Mercier-Cotsaftis	33
2.3 Equação de equilíbrio anisotrópico	35
3 Transformada de Clemente	39
4 Equilíbrio MHD anisotrópico em coordenadas cilíndricas	42
5 Equilíbrio MHD anisotrópico em coordenadas esféricas	51
6 Equilíbrio MHD anisotrópico em coordenadas esferoidais	61
Conclusões	70
Referências	72

Apêndices	77
APÊNDICE A Coordenadas curvilíneas	78
A.1 Conceitos fundamentais	78
A.2 Tensor métrico	80
A.3 Componentes vetoriais	80
A.4 Operadores diferenciais vetoriais	81
APÊNDICE B Sistemas de coordenadas	82
B.1 Coordenadas cilíndricas	82
B.2 Coordenadas esféricas	84
B.3 Coordenadas esferoidal-oblatas	85
APÊNDICE C Artigos publicados	88

INTRODUÇÃO

Fusão nuclear é o processo em que dois núcleos atômicos leves se combinam para formar um núcleo mais pesado liberando energia [1]. Este método de geração de energia das estrelas, incluído a estrela do nosso sistema solar: o Sol. Neste caso ocorre a fusão de átomos de hidrogênio em hélio liberando uma grande quantidade de energia. No Sol o que ocorre é o chamado ciclo próton-próton que desenrola-se a uma temperatura maior que 14×10^6 K. Entretanto este ciclo possui uma seção de choque muito pequena, assim sendo inviável para aplicação tecnológica na Terra. Nas estrelas tal ciclo é possível, graças as extremas condições de pressão e temperatura, causadas pela sua força gravitacional [2]. Em um laboratório de fusão são utilizados isótopos do hidrogênio em especial deutério e trítio D-T, que produzem uma partícula alfa e um nêutron, pois é com esses isótopos que se tem a maior seção de choque a uma baixa energia cedida [3].

A demanda mundial de energia tende a crescer [4], de forma que novas fontes de energia que sejam economicamente viáveis e ecologicamente corretas [5] são necessárias. Fontes de energia sustentáveis como eólica, fotovoltaica, etc, são economicamente adequadas, entretanto, apenas para demandas reduzidas devido as suas eficiências. Logo para grandes demandas o custo é elevado. Outra fonte de energia que utiliza processo nucleares é a fissão nuclear, mas essa envolve a produção de resíduos radioativos com meia vida muito alta, gerando grandes problemas ambientais relacionados a armazenagem dos mesmos. Neste cenário a fusão nuclear se mostra como uma fonte de energia economicamente viável e sustentável, sem a produção de rejeitos radioativos de alta meia vida e sem a emissão de gás carbônico ou outros gases estufa [6].

A ocorrência da fusão depende da superação da barreira energética de repulsão Coulombiana existente entre os núcleos, o que pode ocorrer quando os elementos estão em um estado chamada plasma, i.e. um gás ionizado. Também é necessário que este tenha uma densidade e temperatura iônica alta por um tempo suficientemente longo. Portanto, é necessário aquecer o plasma e confiná-lo por um período de tempo. Uma maneira de fazer isso é com o confinamento magnético, em que é utilizado campos magnéticos para aquecer e armazenar o plasma, algumas das máquinas que fazem isso são: Tokamaks, Stellarators, Spheromaks, Oblimaks, Prolemaks e configurações de campo reverso (FRC) [7, 8]. Atualmente o ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) será a maior máquina de confinamento magnético do mundo, proposto para demonstrar a viabilidade da fusão nuclear para a geração de energia, cuja a previsão é de entrar em operação em 2025 [9].

O plasma é composto de partículas carregadas e para descrevê-lo seria necessário

conhecer as posições e velocidades de todas as partículas em todos os instantes, o que é impossível na prática. Então, focamos em uma descrição macroscópica do plasma, no qual a ênfase é dada na sua natureza de fluido. A descrição de fluido é válida quando o plasma é minimamente colisional. Neste caso os íons e elétrons alcançam o equilíbrios termodinâmico local em um curto intervalo de tempo, comparado com as mudanças substanciais que ocorrem no plasma [10]. Esta descrição de plasmas é feita pela teoria magnetohidrodinâmica (MHD), que é uma descrição do comportamento macroscópico de plasmas em altas temperaturas, caracterizados como um único fluido condutor, formado por elétrons, íons e partículas neutras. A teoria MHD pode ser utilizada para a descrição de plasmas de fusão, que em diversas circunstâncias podem ser adequadamente estudados como um único fluido condutor, ao qual se aplicam as equações da Hidrodinâmica e Termodinâmica, em conjunto com as equações de Maxwell. Plasmas de fusão termonuclear controlada, tem o seu comportamento na escala de tempo típica de uma experiência e pode ser modelado por tal sistema de equações [2, 6, 11].

A viabilidade tecnológica do aproveitamento energético dos processos de fusão termonuclear controlada está vinculada à necessidade do plasma apresentar um comportamento de equilíbrio, caracterizado pela ausência de variações temporais explícitas nas grandezas físicas que caracterizam o sistema [12]. Além disso é necessário que o equilíbrio seja estável, permitindo uma duração do plasma, tal que possa ser utilizado de forma comercial [13]. O estudo de equilíbrio em plasma, para qualquer configuração, é determinar a topologia global de confinamento magnético e as suas características físicas do estado de equilíbrio. O equilíbrio estático, isto é, quando a velocidade do fluido e a variação temporal das grandezas físicas são nulas é uma primeira aproximação para muitos sistemas de fusão. Em tokamaks e spheromaks a suposição de equilíbrio estático é satisfeita com relativa precisão [7, 8, 14, 15]. A razão para o nosso interesse neste estado de equilíbrio é a perspectiva de obter energia limpa, abundante e barata de reações de fusão termonuclear controladas.

A aplicação das equações MHD a um sistema com simetria axial para a situação de equilíbrio estático, leva a uma equação geral, que utiliza de quantidade chamadas "de superfície", para a descrição das grandezas utilizadas no estudo do comportamento de plasmas magneticamente confinados. Esta equação foi obtida separadamente no fim da década de 1950 por Grad, Schlüter e Shafranov [16, 17, 18]. Este estudo foi feito considerando uma pressão isotrópica no plasma, isso é tão comum que a pressão anisotrópica não é sequer mencionada nas revisões fundamentais de MHD no ITER [19]. No caso quando há o aquecimento do plasma por injeção de nêutrons (NBI), aquecimento por ressonância ciclotrônica de íons (ICRH) ou de elétrons (ECRH), esses sistemas podem produzir uma forte anisotropia. Essas formas de aquecimento do plasma são muito comuns em sistemas de confinamento magnético [20, 21, 22], inclusive no próprio ITER. De forma que é necessário substituir a pressão isotrópica por um tensor anisotrópico.

No trabalho de Chew, Goldberger, e Low (CGL) [23], foi obtido uma forma para o tensor tensão, que distingui a pressão paralela e perpendicular à direção local do campo magnético, quando este é intenso, o que é o caso em um sistema de confinamento magnético. As equações obtidas com tal tensor anisotrópico são atualmente chamadas equações dupla adiabática [23, 24, 25]. A equação de equilíbrio MHD com o tensor tensão anisotrópico na forma de CGL, foi estudada por Mercier e Cotsaftis, que também estudaram a estabilidade das configurações de equilíbrio resultante [26]. Soluções numéricas para equilíbrio toroidal com pressão anisotrópica foram obtidas por Sestero e Taroni [27]. Fielding e Haas estudaram a dinâmica e estabilidade de sistemas de plasma-vácuo eixo simétricos e anisotrópicos [28]. Utilizando o tensor de CGL, Copper et al. realizaram investigações numéricas do equilíbrio anisotrópico [29, 30]. Outras soluções aproximadas foram obtidas para o equilíbrio anisotrópico [31, 32].

Soluções analíticas foram obtidas pela primeira vez por Clemente [33], que criou um método para construir um número infinito de equilíbrio MHD anisotrópico com simetria axial, por meio de transformá-lo na equação de Grad, Schlüter e Shafranov (GSS) descrevendo equilíbrio com pressão isotrópica [16, 17, 18]. Este método possibilitou a obtenção das soluções anisotrópicas para o vórtice de Hill da configuração de campo reverso [34], e para a solução de Maschke-Hernegger para coordenadas cilíndricas [35, 36]. Souza e Viana [37] mostraram que a transformada de Clemente é válida para coordenadas curvilíneas generalizadas, e a aplicaram em coordenadas cilíndricas, para a solução de Solovov, e em coordenadas esféricas para a solução de Morikawa e ainda os autores em um segundo trabalho [38], os autores obtiverem uma solução para o equilíbrio anisotrópico em coordenadas esferoidal utilizando da solução de Kaneko et al. [39, 40, 41] para o caso isotrópico e mostraram os efeitos da função de anisotropia sob as soluções. Estes dois artigos compilam esta dissertação, encontram-se no apêndice C.

Este trabalho é organizado da seguinte forma: no primeiro capítulo é feita uma breve introdução aos conceitos básicos da física de plasmas assim como de confinamento magnético, além disso as equações da magnetohidrodinâmica são apresentadas. No segundo capítulo é discutido equações MHD e as condições de equilíbrio magnetoestático em sistemas de coordenadas curvilíneas gerais [42, 43], além da definição geral de quantidades ditas de "superfície". Este método é utilizado, já que as equações relevantes são usualmente encontradas na literatura na forma particular para equilíbrios com simetria toroidal, como o encontrado em Tokamaks [20]. Para auxiliar à compreensão da notação empregada o Apêndice A discorre sobre sistemas de coordenadas curvilíneas e, no Apêndice B sobre os sistemas de coordenadas empregados nos capítulos quatro, cinco e seis.

No terceiro capítulo é descrito o método de Clemente para a solução da equação de equilíbrio anisotrópico utilizando uma solução já conhecida do equilíbrio isotrópico. No quarto capítulo é estudado a solução de Solovov [44] para um plasma cilíndrico, para

perfis lineares de pressão e da corrente, esta solução é especialmente útil para a validação de softwares de resolução da equação de Grad-Schlüter-Shafranov [45], e para o teste de outras teorias como as de transporte e instabilidade. Utilizamos essa solução em conjunto da transformadas de Clemente para obter uma solução da equação equilíbrio anisotrópico MHD em coordenadas cilíndricas, na qual estudamos como a anisotropia influencia o campo magnético e a densidade de corrente.

No quarto capítulo é apresentado a solução da equação de equilíbrio anisotrópico MHD em geometria esférica, utilizando da solução de Morikawa para um plasma confinado em uma casca esférica condutora, que contém o plasma circundado por uma camada de gás a baixíssima pressão, tomado como um meio onde os campos magnéticos são livres de força [46]. Este modelo foi pensado para um sistema de confinamento plasmas de fusão, mas foi abandonado em favor de outros sistemas, como o do Spheromak. Entretanto, é possível estudar problemas astrofísicos, como os de equilíbrios estelares, dentro desse tipo de situação e princípios básicos de toroides compactos.

No sexto capítulo é discutido a equação de equilíbrio anisotrópico MHD em coordenadas esferoidais oblatas, que assim como em coordenadas esféricas pode ser utilizado para estudar problemas astrofísicos [47] e também para configurações de campo reverso [8]. As configurações de equilíbrio em coordenadas esféricas e esferoidais são especialmente úteis na modelagem de configurações de campo reverso e spheromak [48]. Utilizamos a solução do caso isotrópico obtida por Kaneko et al. [39, 40, 41]. Neste capítulo também estudamos os efeitos da função de anisotropia sobre as quantidades físicas. Por fim são dadas as conclusões e considerações finais.

1 MAGNETOHIDRODINÂMICA

1.1 Plasmas e confinamento magnético

O estado físico da matéria é definido pelas forças intermoleculares. Se há energia térmica suficiente, ocorre uma transformação de um estado para outro. Fornecendo energia para um sólido ele poderá sofrer uma transição de fase para um líquido e fornecendo ainda mais energia as ligações intramoleculares são quebradas e poderá haver a transição de fase para um gás. Se for fornecida ainda mais energia a este gás, os elétrons serão dissociados dos átomos, se tornando-o um gás ionizado formado por elétrons livres (carga $q_e = -e$, $e = 1,602 \times 10^{-19}C$), íons (carga $q_i = Ze$, Z número atômico) e partículas neutras. Este gás ionizado é dito o quarto estado da matéria, **plasma**, e 99% da matéria bariônica do universo se encontra nesse estado [3]. O estudo é limitado para ao caso de um gás totalmente ionizado, logo sem átomos neutros.

Nem todo gás ionizado pode ser considerado um plasma, uma das definições mais aceitas é a encontrada em [1]: "Plasma é um gás quase-neutro que exibe comportamento coletivo". Comportamento coletivo significa que o movimento não depende apenas de condições locais, mas sim do plasma como um todo. Em um gás neutro as colisões são de curto alcance, resultando em uma interação essencialmente local, enquanto em um gás ionizado as forças eletromagnéticas entre as partículas carregadas são de longo alcance, o que causa o comportamento coletivo. Quase-neutro significa que o plasma é macroscopicamente neutro, permitindo fazer que as densidades de elétrons n_e e íons n_i , tal que $n_e \approx n_i \approx n$, onde n é a densidade do plasma, mas não tão neutro a ponto que as forças eletromagnéticas desaparecem. Isto significa que a energia potencial de uma partícula é muito menor que sua energia cinética.

A fusão nuclear é o processo em que dois átomos leves e rápidos colidem e se fundem, gerando um átomo mais pesado. Este átomo possui massa maior que a soma das massas dos reagentes, mas não igual a dos reagentes. A diferença de massa é transformada em energia, seguindo o princípio de equivalência massa energia de Einstein $E = mc^2$, onde m seria a diferença de massa, entre o átomo produto e os reagentes, e c é a velocidade da luz do vácuo. Como c é um número muito grande uma pequena massa m , resulta em uma grande quantidade de energia E .

Em um reator de fusão nuclear o combustível, usualmente isótopos de hidrogênio são aquecidos a uma alta temperatura se tornando um plasma. E ainda mais energia deve ser fornecida para superar a barreira de repulsão Coulombiana entre os núcleos. Isto só ocorre se os elementos envolvidos estiverem em um plasma de alta temperatura e densidade

por um tempo longo suficientemente longo. O plasma perde energia devido a vários fatores, e quando uma alta temperatura é alcançada, a pressão cinética tende a fazer o plasma se expandir. Entretanto, o plasma não deve entrar em contato com as paredes do reator, o que causaria a recombinação de íons, assim perdendo plasma e possivelmente danificando a máquina.

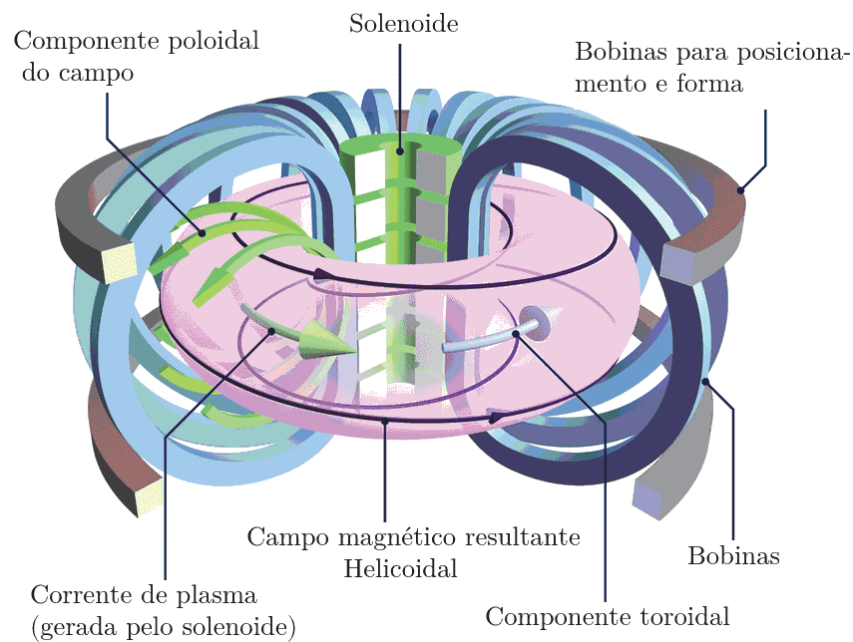


Figura 1 – Esquema de um tokamak. Adaptado de 'iter.org'.

Em ordem de contrabalancear a pressão e confinar o plasma pode ser utilizado o fato que ele é composto de partículas carregadas e confiná-lo com um campo magnético intenso. Este é o chamado "confinamento magnético", várias configurações utilizam esse tipo de confinamento, entre eles toróides compactos, como Tokamaks esféricos, Spheromaks, oblimaks, prolemaks, etc [7, 14]. O tokamak é hoje um dos mais promissores sistemas. Consiste de uma câmara toroidal, vide Figura 1, onde uma corrente de plasma é formada pela ação indutiva de um transformador, e confinada pela ação combinada de dois campos magnéticos. O campo toroidal B_T , é produzido por bobinas em volta da câmara, e o campo poloidal B_p , produzido pela corrente de plasma. A combinação dos dois campos gera linhas de campo helicoidais, permitindo o confinamento do plasma.

Toróides compactos como as configurações de campo reverso (FRC) e spheromak são de especial interesse [49]. Toróides do tipo FRC não possuem bobinas que produzem o campo toroidal, resultando em um configuração compacta e altamente modular, diminuindo seu custo e manutenção. Nos spheromaks as correntes que fluem no plasma são responsáveis por produzir praticamente todo campo magnético. Possuem um campo toroidal finito que se anula na superfície do plasma.

No confinamento magnético, as partículas carregadas sofrem influência de campos magnéticos, e então as partículas descrevem um movimento ao redor das linhas de campo, de acordo com a força de Lorentz [1, 50]. Em um campo uniforme, se as partículas possuem inicialmente velocidade na direção das linhas, então o movimento será helicoidal ao redor das linhas, Figura 2. O movimento pode ser dividido em um movimento circular com raio de giro $r_L = v_{\perp}/\omega$, e um movimento linear do centro do giro (centro guia) [1]. Em que v_{\perp} é a componente perpendicular às linhas de campo, da velocidade das partículas e $\omega = |q|B/m$, onde q é a carga, m a massa da mesma e B é a intensidade do campo magnético, r_L é conhecido como raio de Larmor.

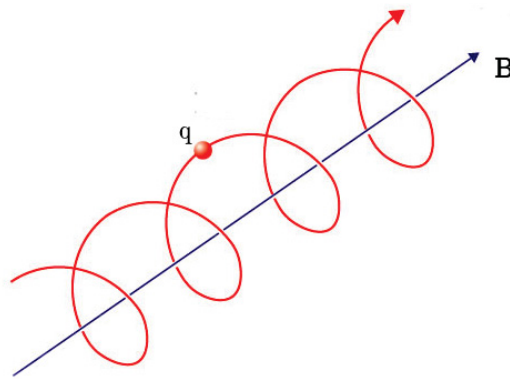


Figura 2 – Movimento de uma carga elétrica q na presença de um campo magnético. Adaptado de 'euro-fusion.org'.

Devido as suas características de alta temperatura e a presença necessária de campos magnéticos intensos, a magnetohidrodinâmica tem sido intensivamente empregada para o estudo de fenômenos a baixas frequências em plasmas de fusão, sobretudo aqueles relacionados ao equilíbrio. Uma condição necessária para a obtenção de plasmas de fusão é a de que tenha equilíbrio magnetohidrodinâmico estável. Por esta razão, o estudo de plasma de fusão é um dos principais objetivos da magnetohidrodinâmica.

1.2 Equações da hidrodinâmica

A Magnetohidrodinâmica (MHD) combina as equações da mecânica dos fluidos com as equações de Maxwell do eletromagnetismo, bem como relações termodinâmicas. As equações hidrodinâmicas podem ser obtidas a partir da teoria cinética dos gases, tomando momentos apropriados da equação de Boltzmann ou derivadas macroscópicas. Este último enfoque é o adotado nos cálculos.

1.2.1 Derivada convectiva

Seja uma grandeza física $\chi(\mathbf{r}, t)$ de um fluido. A variação temporal dessa em um referencial é $\frac{d\chi}{dt}$. No entanto, a derivada acima refere-se a um elemento de volume que se desloca no tempo juntamente com fluido, i.e., descrição Lagrangeana de movimento. Em um referencial que não se move com o fluido, descrição Euleriana do movimento do fluido, a derivada total em relação ao fluido é

$$\frac{D\chi}{Dt} = \frac{\partial\chi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$= \frac{\partial\chi}{\partial x} v_x + \frac{\partial\chi}{\partial y} v_y + \frac{\partial\chi}{\partial z} v_z + \frac{\partial\chi}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$= \frac{\partial\chi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\chi, \quad (1.3)$$

definindo a chamada derivada material ou convectiva

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla. \quad (1.4)$$

1.2.2 Equação da continuidade

Seja V_0 uma região do espaço ocupada por um fluido delimitado por uma superfície fechada S_0 , a massa m do fluido neste será $m = \int_{V_0} \rho d^3x$, onde ρ é a densidade do fluido e d^3x é o elemento de volume infinitesimal. A massa que flui por unidade de tempo por um elemento de área $d\mathbf{A}$ da superfície delimitando esse volume é $\rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$, onde \mathbf{v} é a velocidade do fluido. A magnitude de $d\mathbf{A}$ é igual a área do elemento de superfície, sua direção é normal à esta e por convenção assumimos que seu sentido é para fora da superfície, como representado na Figura 3. A massa total de fluido passando pela superfície será o fluxo líquido $\oint_{S_0} \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$, esse será positivo se o fluxo estiver fluindo para fora do volume e negativo se o fluxo for para o volume. Como não há processos de criação ou destruição de massa temos que:

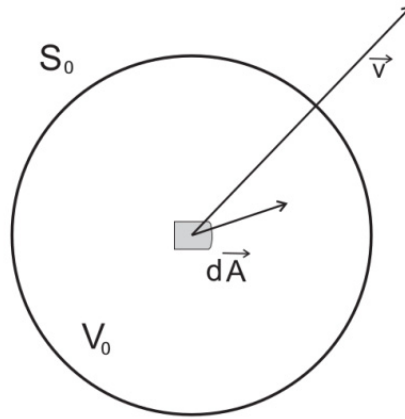
$$-\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho d^3x = \oint_{S_0} \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \quad (1.5)$$

Utilizando o teorema do divergente [51] e o fato que V_0 é fixo no tempo

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \right) d^3x = 0. \quad (1.6)$$

Isto deve ser verdade para qualquer volume V_0 de forma que é obtido

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (1.7)$$

Figura 3 – Elemento de área da superfície S_0 .

A equação (1.7) é a chamada de equação da continuidade de massa que expressa a conservação de massa. A equação de conservação de carga pode ser obtida multiplicando (1.7) pela carga do fluido q . Então a densidade de carga do fluido é $\rho_c = q\rho$ e $\mathbf{J} = \rho_c \mathbf{v}$ é a densidade de corrente. De forma que a equação da conservação de carga

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.8)$$

1.2.3 Equação de Euler

Em dinâmica dos fluidos, as equações de Euler são as que descrevem como a velocidade \mathbf{v} a pressão p e a densidade ρ do plasma se relacionam para o caso de um plasma compressível não viscoso, embora as equações *a priori* possam ser muito complexas, elas são simplificações das equações de Navier-Stokes de dinâmica de fluidos. A segunda lei de Newton para um elemento de fluido é

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{F}, \quad (1.9)$$

onde \mathbf{F} é a a força por unidade de volume agindo sobre o elemento de fluido, e $\frac{D}{Dt}$ significa a derivada convectiva (material), ou seja, estamos no referencial de Euler (laboratório). Esta força é composta de dois tipos: forças volumétricas e forças de superfície. Forças volumétricas agem em todo o volume do elemento de fluido, exemplos dessas força são: gravitação $\mathbf{F}_g = \rho \mathbf{g}$, em que \mathbf{g} é a aceleração gravitacional, e forças eletromagnéticas, dada pela força de Lorentz

$$\mathbf{F} = \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (1.10)$$

Forças de superfície são um pouco mais complexas [52]. Seja uma superfície \mathbf{S} , por convenção assumimos que o material à frente da superfície exerce uma força no material

atrás de \mathbf{S} , dada por $\mathbf{F}_s = \mathbf{S} \cdot \mathbb{T}$. Se consideramos três orientações para \mathbf{S} , na direção das três direções coordenadas $\hat{\mathbf{e}}_i$. Vemos que são necessários nove números para definir \mathbf{F}_s , esses são as componentes do tensor tensão T_{ij} . Como definimos \mathbf{F}_s como sendo a força realizada pelo material da superfície de dV , e a frente deste realiza sobre o material dentro do elemento de volume. Logo, a força resultante sob o elemento de fluido é o negativo das forças de superfície, i.e.

$$\mathbf{F}_s = - \oint_S d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}, \quad (1.11)$$

utilizando o teorema de Gauss [51] e então fazendo o volume tender a zero temos que o equivalente volumétrico das forças de superfície é

$$\mathbf{f}_s = -\nabla \cdot \mathbb{T}. \quad (1.12)$$

Incluído as forças volumétricas e de superfície, a equação de balanço de forças (1.9) fica

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla \cdot \mathbb{T} + \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}. \quad (1.13)$$

Um caso especial, é o caso isotrópico quando o tensor é diagonal e os elementos são todos iguais a pressão $\mathbb{T} = pl$, onde l é o tensor identidade. Neste caso 1.13 se reduz para o caso isotrópico

$$\rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}. \quad (1.14)$$

1.2.4 Equação de energia

Na derivação da equação de Euler (1.13) foi admitido que não há processos de troca de calor, isso significa que a entropia S do elemento de fluido é constante, ou seja, os processos são adiabáticos, seja $s = S/m$ como a entropia por unidade de massa, onde m é a massa do fluido, a condição de adiabaticidade é dada por

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0. \quad (1.15)$$

A primeira lei da termodinâmica [53] diz que a energia interna u de um fluido é dada por

$$du = Tds - pdV, \quad (1.16)$$

onde T é a temperatura e $V = 1/\rho$ é o volume específico (por unidade de massa). E ainda para N mols de um fluido ideal a variação de energia pode ser escrito como $du = Nc_v dT$, em que c_v é o capacidade térmica a volume constante. Com isso e o fato do sistema ser adiabático, pode se escrever a primeira lei (1.16) tal que:

$$Nc_v dT = -pdV, \quad (1.17)$$

por outro lado, em plasmas temos usualmente baixas pressões, de maneira que podemos utilizar a equação de estado dos gases perfeitos ($pV = NRT$, onde R é a constante universal dos gases). Diferenciando essa equação e utilizando a equação acima vemos que

$$Vdp = Nc_p dT, \quad (1.18)$$

onde $c_p = c_v + R$ é o capacidade térmica a pressão constante. Portanto,

$$Vdp = -\frac{c_p}{c_v} pdV, \quad (1.19)$$

integrando e fazendo $\gamma = c_p/c_v$, temos $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma = const.$, em que p_0 e V_0 são valores constantes de pressão e volume, respectivamente. Com isso temos a condição de fluido adiabático

$$\frac{D}{Dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0. \quad (1.20)$$

Utilizando a derivada convectiva e a equação de continuidade (1.7) podemos eliminar a densidade em favor da velocidade do fluido

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + p\gamma \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1.21)$$

Esta é a equação de energia para o caso isotrópico.

1.3 Equações do eletromagnetismo

Considerando que o plasma é pouco denso, podemos desprezar sua magnetização e assumir que é um meio não magnético. Portanto, pode ser utilizado as equações de Maxwell no vácuo [54, 55]. São elas:

- Lei de Gauss elétrica

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}, \quad (1.22)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica no vácuo. Esta lei nós diz que o fluxo do campo elétrico em uma dada superfície é proporcional à quantidade de cargas envolvida por essa superfície.

- Lei de Gauss magnética

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.23)$$

Esta lei nós diz que não há cargas magnéticas isoladas (monopolos magnéticos) e com isso que as linhas de campo magnético nunca começam ou terminam, mas sim circulam.

- Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.24)$$

A variação do campo magnético dá origem a uma força eletromotriz, tal que, se opõe à variação do campo magnético.

Lei de Ampère Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.25)$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo, o termo $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ é a chamada corrente de deslocamento. Campo magnéticos podem ser gerados por correntes elétricas e pela variação temporal do campo elétrico, e vice-versa.

1.3.1 Corrente de deslocamento

Os fenômenos estudados pela MHD são tipicamente de escalas de tempo grandes, ou seja, baixas frequências. Isso faz com que o termo da corrente de deslocamento na Lei de Ampère Maxwell (1.25) seja desprezível frente ao termo da corrente de condução. Para vermos isso derivamos (1.25) em relação ao tempo e substituímos (1.24),

$$-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.26)$$

Esta leva a uma equação de onda para o campo elétrico. Supondo ondas planas $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, onde \mathbf{k} é o vetor de onda ω a frequência, temos que são validas as associações

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \nabla \rightarrow ik. \quad (1.27)$$

Estimando os termos de (1.26) $|\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})| \sim k^2 |\mathbf{E}|$ e $|\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}| \sim \frac{\omega^2}{c^2} |\mathbf{E}|$, logo como para MHD a frequência dos fenômenos é muito pequena $\omega \ll kc$

$$|\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})| \gg \frac{\omega^2}{c^2} |\mathbf{E}|, \quad (1.28)$$

de modo que a corrente de deslocamento é desprezível, e a Lei de Ampère Maxwell, fica simplesmente

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (1.29)$$

1.3.2 Lei de Ohm generalizada

A lei de Ohm é um relação constitutiva entre o campo elétrico e a densidade de corrente, para um fluido condutor em repouso,

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{J}, \quad (1.30)$$

onde η é o tensor resistividade do fluido, se o material tem as mesmas propriedades elétricas em todas as direções, como supomos, esse é um escalar. Em um referencial em que o fluido se move com velocidade \mathbf{v} , o campo elétrico é \mathbf{E}' , que se relaciona com \mathbf{E} através da transformação de Lorentz [54, 56]

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + (1 - \gamma)(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}, \quad (1.31)$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ é o fator de Lorentz, c é a velocidade da luz no vácuo, $\hat{\mathbf{v}}$ é um vetor unitário na direção da velocidade. Como para plasmas de fusão $v \ll c$, temos $\gamma = 1$ e portanto, a transformações de campos fica

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1.32)$$

Quando esta é substituída em (1.30) temos a Lei de Ohm para o referencial em que o fluido se move (ref. laboratório), ou também chamada de Lei de Ohm generalizada

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}. \quad (1.33)$$

1.4 Tensor pressão de Chew, Goldberger e Low

Para que o plasma possa ser descrito como um fluido é necessário que as colisões entre as partículas, que o compõem, sejam muito frequentes, de forma que é possível aproximar o gás para um fluido contínuo [57]. É necessário que o tempo médio entre colisões

seja muito menor que qualquer outro tempo característico do sistema. Microscopicamente, quando as colisões são muito frequentes em um gás a teoria cinética prevê que a função de distribuição de elétrons e íons seja aproximadamente Maxwelliana [58, 59].

Se a frequência de colisão do plasma, é baixa a aproximação de fluido não é válida, entretanto se, este estiver imerso em um forte campo magnético externo, a tendência de elétrons e íons de seguirem um movimento de giração em torno das linhas de campo, resulta em uma proximidade que justifica a descrição de fluidos. O campo magnético forte tem efeito semelhante à uma alta taxa de colisões entre as partículas [60].

Na presença de um campo magnético, o movimento das partículas tem características distintas nas direções paralela e perpendicular ao campo. Na direção paralela temos o movimento do centro de guia. Quando o campo é intenso temos que r_L é pequeno, pois eles são inversamente proporcionais, de modo que na direção perpendicular o movimento será predominantemente a da deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, onde \mathbf{E} é o campo elétrico. A energia cinética média será diferente para as direções do plasma. Esta distinção permite supor que a pressão possa ser anisotrópica, ou seja, tenha valores diferentes ao longo das direções paralela e perpendicular ao campo magnético, denotamos por p_{\parallel} e p_{\perp} , respectivamente. Na teoria de Chew, Goldberger e Low [23] os elementos não diagonais do tensor tensão são nulos, como no caso isotrópico, mas os elementos diagonais são diferentes. Supondo que o campo magnético esteja na direção z de coordenadas cartesianas, o tensor tensão pode ser escrito como

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} p_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

ou ainda

$$\mathbb{T} = p_{\perp} \mathbb{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}, \quad (1.35)$$

onde \mathbb{I} é o tensor identidade, \otimes denota o produto diádico e $|\mathbf{B}|^2$ é o módulo ao quadrado do campo magnético. A pressão média do plasma é dada por

$$\langle p \rangle = \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbb{T}) = \frac{p_{\parallel} + 2p_{\perp}}{3}. \quad (1.36)$$

1.4.1 Equações duplo-adiabáticas

As equações duplo adiabáticas substituem (1.21), para a situação em que há anisotropia, uma dedução dessa por teoria cinética pode ser encontrada no próprio trabalho

de CGL [23] ou no livro do Bittencourt [3] que deduz as equações duplo adiabáticas através de (1.21), as equações são

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) = 0, \quad (1.37)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p_{\perp}}{\rho B} \right) = 0. \quad (1.38)$$

Estas equações devem ser utilizadas no equilíbrio MHD anisotrópico para o caso de um plasma não estático.

1.5 Resumo das equações MHD

Temos um conjunto de 20 equações escalares, para 20 campos escalares a serem determinados (contando com a entropia), logo este é um problema dito bem posto. Para resolvê-lo ainda é necessário as condições iniciais e de contorno apropriadas. As leis de Gauss elétrica (1.22) e magnética (1.23) são utilizadas como condições necessárias para os campos elétricos e magnéticos que se façam presentes no plasma. A seguir listamos as equações MHD:

- Equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.39)$$

- Equação de movimento, ou equação de Euler:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla \cdot \mathbb{T} + \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}, \quad (1.40)$$

- As equações duplo adiabáticas:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) = 0, \quad \frac{D}{Dt} \left(\frac{p_{\perp}}{\rho B} \right) = 0, \quad (1.41)$$

- Lei de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (1.42)$$

- Lei de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.43)$$

- Lei de Ohm Generalizada:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}. \quad (1.44)$$

2 EQUILÍBRIO MHD EM SISTEMAS COM SIMETRIA AXIAL

Iremos considerar o plasma com condutividade infinita $\eta \rightarrow 0$, assim podemos utilizar a MHD ideal para estudar a condição de quando o plasma está em equilíbrio. Um estado de equilíbrio na MHD ideal é definido como sendo aquele onde todos os campos escalares G não dependem explicitamente do tempo, i.e., $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ para qualquer campo G . Aplicando esta condição nas equações (1.39)-(1.44), obtemos o conjunto reduzido de equações MHD:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.2)$$

$$\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbb{T} + \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) = 0, \quad \nabla \left(\frac{p_{\perp}}{\rho B} \right) = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0. \quad (2.7)$$

Este tipo de equilíbrio é compatível com fluxos onde a velocidade é constante, mas por simplicidade iremos considerar a velocidade do plasma nula, o que caracteriza o caso MHD estático ($\mathbf{v} = 0$), tal que as equações MHD se reduzem para

$$\nabla \cdot \mathbb{T} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.11)$$

A interpretação da equação (2.8) é bastante simples o tensor tensão tende à fazer o plasma se expandir, sendo contrabalanceada pela combinação das forças eletromagnética e gravitacionais. Esta última é importante no contexto astrofísico, mas desprezível no contexto de plasmas de fusão, por essa razão ela será descartada no nosso estudo do equilíbrio MHD.

Os três tipos mais importantes de simetrias são: translacional, rotacional (ou axial), e helicoidal. Um resultado geral obtido por Edenstrasser [42] estabelece que apenas para estes três casos as equações do equilíbrio MHD podem ser reduzidas a uma única equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem. A solução dessa equação fornece superfícies alinhadas fechadas em que as linhas de campo magnético encontram-se, essas superfícies são ditas superfícies magnéticas. Iremos empregar a formulação em coordenadas curvilíneas, de acordo com a notação do Apêndice A. Também seguiremos a apresentação de Kucinski e Caldas [43].

2.1 Funções de superfície

Consideramos um conjunto de coordenadas curvilíneas contravariantes (x^1, x^2, x^3) para um sistema descrito pelo tensor métrico contravariante \mathbf{g}^{ij} (vide Apêndice A). Iremos considerar uma coordenada ignorável $0 \leq x^3 \leq L$, onde L é um comprimento fundamental associado à essa coordenada. Desta forma temos que o eixo magnético, uma superfície magnética degenerada (associada a um volume nulo) será uma curva coordenada $x^3 = a$ com a sendo uma constante positiva Figura 1 [61]. A direção x^2 é dita uma coordenada "transversal", enquanto as demais curvas coordenada x^3 serão chamadas direções "longitudinais". Usualmente em problemas de confinamento magnético à uma dupla periodicidade das coordenadas x^2 e x^3 , isso se deve ao fato que as superfícies magnéticas terem a topologia de toros.

2.1.1 Função de fluxo transversal

O elemento diferencial de área normal à superfície coordenada $x^i = \text{constante}$ pode ser definido como:

$$d\mathbf{S}^i = \hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{e}}_k dx^j dx^k, \quad (2.12)$$

os índices j e k não somam e i, j, k devem estar em uma permutação cíclica dos índices 1, 2 e 3. Utilizando (A.4)

$$d\mathbf{S}^i = \sqrt{g} \hat{\mathbf{e}}^i dx^j dx^k. \quad (2.13)$$

O fluxo de campo magnético \mathbf{B} através da superfície coordenada S ($x^i = \text{const.}$) pode ser definido como Φ :

$$\Phi(i) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}^i. \quad (2.14)$$

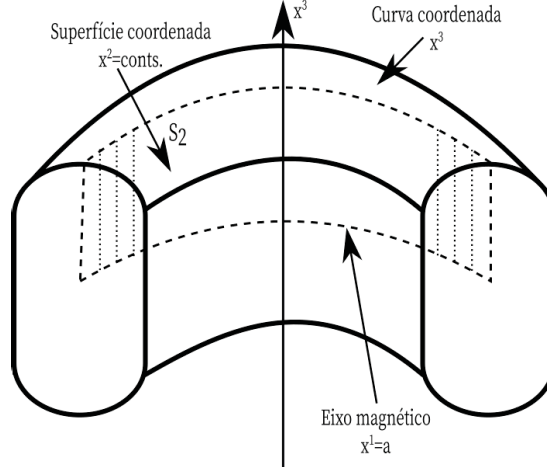


Figura 4 – Figura esquemática mostrando algumas superfícies coordenadas e curva em um sistema eixo simétrico.

A superfície coordenada $x^2 = \text{const.}$ que vai do eixo magnético até uma curva coordenada $x^3 = \text{const.}$, e que é limitada $x^3 = 0$ e $x^3 = L$, o fluxo magnético através dessa superfície será

$$\Phi(2) = \int_{x^2=\text{const.}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}^2. \quad (2.15)$$

Usando (2.13), podemos reescrever como

$$\Phi(2) = \int_{x^2=\text{const.}} \sqrt{g} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{e}}^2 dx^3 dx^1, \quad (2.16)$$

ou ainda

$$\Phi(2) = \int_a^{x^1} dx^1 \int_0^L dx^3 \sqrt{g} B^2. \quad (2.17)$$

Este pode ser identificado como uma quantidade de superfície dita "Função fluxo transversal", a menos de uma constante,

$$\Psi(x^1, x^2) = \frac{\Phi(2)}{L}. \quad (2.18)$$

A função de fluxo transversal é definida como o fluxo magnético através de S_2 por unidade de comprimento na direção x^3 . A derivada em relação a x^1 é

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^1} = \frac{1}{L} \int_0^L dx^3 \sqrt{g} B^2. \quad (2.19)$$

Utilizando o divergente em coordenadas curvilíneas (A.23), e da lei de Gauss magnética (2.9) temos

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} B^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} B^2) = 0, \quad (2.20)$$

onde usamos o fato que B^3 não depende x^3 pela simetria axial. Multiplicando (2.20) por dx^1 e integrando do eixo magnético $x^1 = a$ até um valor x^1 resulta

$$B^1(x^1, x^2) = -\frac{1}{\sqrt{g}} \int_a^{x^1} dx^1 \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} B^2), \quad (2.21)$$

onde fizemos $B^1(x^1 = a, x^2) = 0$, devido que sobre o eixo magnético o campo magnético deve apenas ter componente não nula na direção \hat{e}^3 . Multiplicando (2.21) por $\sqrt{g} dx^3$ e integrando de 0 à L e com o auxílio de (2.19) obtemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{L} \int_0^L dx^3 \sqrt{g} B^1. \quad (2.22)$$

Devido a simetria axial $\sqrt{g} B^1$ e $\sqrt{g} B^2$ não deve depender de x^3 , logo as equações (2.19) e (2.22) se tornam

$$B^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2}, \quad (2.23)$$

$$B^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1}. \quad (2.24)$$

O campo magnético é dado pela posição em que a função fluxo transversal é um extremo, denotamos essa posição por $x^1 = x^{1*}$ e $x^2 = x^{2*}$ dado por

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} \right|_{x^{1*}} = 0, \quad (2.25)$$

e

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \right|_{x^{2*}} = 0. \quad (2.26)$$

2.1.2 Representação para o campo magnético

É necessário escrever o campo magnético \mathbf{B} em termos da função de fluxo transversal Ψ em ordem de resolver a equação de equilíbrio de forças (2.8). Para isto calculamos o gradiente da função fluxo com o auxílio de (A.5) e utilizando também (2.23) e (2.24), temos

$$\nabla \Psi = \sqrt{g} (B^2 \hat{e}^1 - B^1 \hat{e}^2). \quad (2.27)$$

Tomando o produto disto com \hat{e}^3 ,

$$\hat{e}^3 \times \nabla \Psi = g_{33} B^1 \hat{e}_1 + g_{33} B^2 \hat{e}_2 - (g_{31} B^1 + g_{32} B^2) \hat{e}_3. \quad (2.28)$$

Como o tensor métrico permite levantar ou rebaixar índices, podemos escrever $B_3 = g_{31}B^1 + g_{32}B^2 + g_{33}B^3$, substituindo na equação acima,

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3 \times \nabla \Psi}{g_{33}} + B_3 \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}}. \quad (2.29)$$

Logo, disso segue que

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = 0, \quad (2.30)$$

isso significa que, o valor de Ψ é constante sobre uma dada superfície magnética. Além disso da magnetoestática podemos escrever o campo magnético como $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ onde \mathbf{A} é o potencial vetor magnético, substituindo isso na definição da função fluxo transversal e utilizando o teorema de Stokes

$$\Psi = \frac{1}{L} \left(\oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{eixo} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right), \quad (2.31)$$

onde C_2 é uma curva coordenada x^3 para a qual o elemento de linha é $d\mathbf{l} = -dx^3 \hat{\mathbf{e}}_3$, de forma que supondo que $A_3(x^1 = a, x^2) = 0$ e da simetria axial

$$\Psi(x^1, x^2) = -A_3(x^1, x^2). \quad (2.32)$$

A função fluxo é igual ao negativo da componente toroidal do potencial vetor.

2.1.3 Função de corrente transversal

Outra quantidade de superfície importante é a função de corrente transversal. Definida como

$$I = \frac{1}{L} \int_{x^2=const.} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}^{(2)} - I_{eixo} = \frac{1}{L} \int_a^{x^1} dx^1 \int_0^L dx^3 \sqrt{g} J^2 - I_{eixo}, \quad (2.33)$$

onde $I_{eixo} = I(x^1 = a, x^2)$ é uma constante calculada no eixo magnético, que interpretamos como uma corrente que circula pelo eixo magnético. Derivando em relação à x^1 resulta em

$$\frac{\partial I}{\partial x^1} = \frac{1}{L} \int_0^L dx^3 \sqrt{g} J^2. \quad (2.34)$$

Da conservação de cargas (2.10), que pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} J^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} J^2) = 0. \quad (2.35)$$

Multiplicando (2.35) por dx^1 e integrando do eixo magnético até x^1 qualquer, e devido a densidade de corrente no eixo magnético ter apenas componente na direção $\hat{\mathbf{e}}^3$

$$J^1(x^1, x^2) = -\frac{1}{\sqrt{g}} \int_a^{x^1} dx^1 \frac{\partial}{\partial x^2} (\sqrt{g} J^2). \quad (2.36)$$

Fazendo o produto desta com $\sqrt{g} dx^3$ e integrando de 0 à L ,

$$\frac{\partial I}{\partial x^2} = -\frac{1}{L} \int_0^L dx^3 \sqrt{g} J^1. \quad (2.37)$$

Dada a simetria axial assim como para a função fluxo as equações (2.34) e (2.37) resultam nas expressões para as componentes da densidade de corrente:

$$J^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial I}{\partial x^2}, \quad (2.38)$$

$$J^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial I}{\partial x^1}. \quad (2.39)$$

2.1.4 Representação para a densidade de corrente

Devido as similaridades com a representação do campo magnético iremos omitir alguns passos. Com $\Psi \rightarrow I$ e $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{J}$ em (2.28)

$$\hat{\mathbf{e}}^3 \times \nabla I = g_{33} J^1 \hat{\mathbf{e}}_1 + g_{33} J^2 \hat{\mathbf{e}}_2 - (g_{31} J^1 + g_{32} J^2) \hat{\mathbf{e}}_3, \quad (2.40)$$

logo, temos uma representação para a densidade de corrente,

$$\mathbf{J} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3 \times \nabla I}{g_{33}} + J_3 \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}}. \quad (2.41)$$

O produto escalar de (2.41) com ∇I fornece

$$\mathbf{J} \cdot \nabla I = 0, \quad (2.42)$$

de forma que as linhas de corrente jazem sobre superfícies com I constante. Isolando \mathbf{J} da lei de Ampère e substituindo na definição de I (2.33), temos com o auxílio do teorema de Stokes,

$$I = \frac{1}{\mu_0 L} \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}^{(2)} - I_{eixo} = \frac{1}{\mu_0 L} \left(\oint_{C_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{eixo} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \right) - I_{eixo}. \quad (2.43)$$

Porém

$$I_{eixo} = -\frac{1}{\mu_0 L} \oint_{eixo} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{B_3(x^1 = a, x^2)}{\mu_0}, \quad (2.44)$$

Logo (2.43) pode ser escrita como

$$B_3(x^1, x^2) = -\mu_0 I(x^1, x^2). \quad (2.45)$$

A representação para o campo magnético se torna

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \times \nabla \Psi - \mu_0 I \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}}, \quad (2.46)$$

cujo o módulo quadrado fornece

$$|B|^2 = \frac{1}{g_{33}} (|\nabla \Psi|^2 + \mu_0^2 I^2). \quad (2.47)$$

Comparando as equações (2.23), (2.24) com (2.38) e (2.39), observamos uma correspondência entre campo magnético e densidade de corrente, que pode ser dita como: Ψ está para $\mu_0 I$ assim como \mathbf{B} está para $\mu_0 \mathbf{J}$, e ainda a lei de Gauss magnética corresponderia à conservação de carga $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

2.2 Hipóteses de Mercier-Cotsaftis

Usualmente no estudo do equilíbrio MHD é feita a hipótese que o tensor tensão é isotrópico, i.e., a pressão no plasma é a mesma em todas as direções, $\mathbf{T} = p\mathbf{I}$. Todavia para vários experimentos em confinamento magnético essa não é uma boa aproximação, especialmente quando é utilizado métodos de aquecimento do plasma, e.g. injeção de nêutrons [22, 21]. O primeiro passo para aumentar a complexidade da MHD ideal de equilíbrio é permitir uma distinção entre as pressões paralela p_{\parallel} a direção local campo magnético e perpendicular p_{\perp} à esta direção. Chew, Goldberger e Low [23] obtiveram tal tensor considerando a equação de Boltzmann sem colisão (equação de Vlasov), mas com um termo forte de força de Lorentz, o tensor CGL é dado por (1.35). O estudo do equilíbrio MHD em conjunto com o tensor tensão na forma de CGL foi estudado pela primeira vez por Mercier e Cotsaftis [26], para isso eles definiram as seguintes funções,

$$\bar{p} = \frac{p_{\parallel} + p_{\perp}}{2}. \quad (2.48)$$

Podemos interpretar \bar{p} como a pressão isotrópica efetiva, que não deve ser confundido com a pressão média do plasma $\langle p \rangle$ (1.36). E ainda definimos também a função de anisotropia, que é uma medida da pressão anisotrópica,

$$\sigma_- = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{|B|^2/\mu_0}. \quad (2.49)$$

Uma quantidade de superfície f , é por definição, uma propriedade que tem o mesmo valor em uma dada superfície de fluxo, i.e. depende apenas de x^1 e x^2 . Como vimos $\Psi(x^1, x^2)$ é uma quantidade de superfície. Segue que qualquer função de superfície é de forma geral $f(\Psi(x^1, x^2))$. No estudo do equilíbrio e estabilidade MHD Mercier e Cotsaftis fizeram as hipóteses de que $\bar{p} = \bar{p}(\Psi)$ e $\sigma_- = \sigma_-(\Psi)$, de tal forma que podemos fazer $\nabla \bar{p} = (\bar{p})' \nabla \Psi$ e $\nabla \sigma_- = (\sigma_-)' \nabla \Psi$ em que o linha ' denota a derivada com relação a Ψ . Isto simplifica consideravelmente o problema, e permite escrever a equação do equilíbrio de forças (2.8) em termos de quantidades de superfícies, como feito na próxima seção.

O divergente do tensor tensão CGL, presente no lado esquerdo da equação de força (2.8) pode ser calculado com as hipóteses sobre a pressão efetiva e a função de anisotropia,

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla p_{\perp} + \frac{\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \nabla \sigma_- + \frac{\sigma_-}{\mu_0} \left[\overbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}^{=0} \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right]. \quad (2.50)$$

Como σ_- é uma quantidade de superfície e com a relação $\nabla |B|^2 = 2\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + 2(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 2\nabla \bar{p} - \nabla p_{\parallel} + \frac{\sigma_-}{\mu_0} \left(\nabla \left(\frac{|B|^2}{2} \right) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right), \quad (2.51)$$

e ainda

$$\nabla \sigma_- = \nabla \left(\frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{|B|^2/\mu_0} \right) = \frac{\mu_0}{|B|^2} (\nabla p_{\parallel} - \nabla p_{\perp}) - \frac{\mu_0^2}{|B|^4} (p_{\parallel} - p_{\perp}) \nabla \left(\frac{|B|^2}{2} \right), \quad (2.52)$$

Isolando o termo $\nabla(|B|^2/2)$ em (2.52) e substituindo em (2.51)

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla \bar{p} - \frac{|B|^2}{2\mu_0} \nabla \sigma_- + \sigma_- \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.53)$$

ou ainda com (2.24) e as hipóteses de Mercier e Cotsaftis

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \bar{p}' \nabla \Psi - \frac{1}{2g_{33}\mu_0} (|\nabla \Psi|^2 + \mu_0^2 I^2) \sigma_- \nabla \Psi + \sigma_- \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.54)$$

Com (2.54) temos o lado da equação de balanço de forças (2.8) escrito em termos de quantidades de superfície e do campo magnético de densidade de corrente que possuem representações em termo de quantidades de superfície. Logo se torna possível escrever um equação para o equilíbrio MHD anisotrópico em termos apenas de quantidades de superfície.

2.3 Equação de equilíbrio anisotrópico

O balanço de forças que atuam no plasma, dado que desprezamos os efeitos gravitacionais é,

$$\nabla \cdot \mathbb{T} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2.55)$$

mas com o auxilio de (2.54) temos que essa pode ser reescrita como

$$\bar{p}' \nabla \Psi - \frac{1}{2g_{33}\mu_0} (|\nabla \Psi|^2 + \mu_0^2 I^2) \sigma'_- \nabla \Psi = (1 - \sigma_-) \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (2.56)$$

As representações do campo magnético e densidade de corrente envolvem o uso de duas quantidades de superfície, a função de fluxo transversal Ψ e a função de corrente transversal I . A equação de equilíbrio de forças pode ser escrita em termos destas funções, substituindo (2.41) e (2.29) no termo da força de Lorentz da equação (2.55),

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_3 \times \nabla I}{g_{33}} + J_3 \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \right) \times \left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \times \nabla \Psi - \mu_0 I \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \right), \quad (2.57)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = & \underbrace{\left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \times \nabla I \right) \times \left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \times \nabla \Psi \right)}_{\text{I}} - \frac{\mu_0 I}{g_{33}^2} \overbrace{\left(\hat{\mathbf{e}}_3 \times \nabla I \right) \times \hat{\mathbf{e}}_3}^{\text{II}} + \\ & \frac{J_3}{g_{33}} \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_3 \times \left(\hat{\mathbf{e}}_3 \times \nabla \Psi \right)}_{\text{III}} - \frac{\mu_0 I J_3}{g_{33}^2} \overbrace{\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_3}^{=0}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

Calculando os termos I, II e III separadamente utilizando a identidade vetorial $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{D})\mathbf{C} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})\mathbf{D}$, então

$$\text{I} = \left(\hat{\mathbf{e}}_3 \times \nabla I \cdot \nabla \Psi \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}^2} - \underbrace{\left(\hat{\mathbf{e}}_3 \times \underbrace{\nabla I \cdot \hat{\mathbf{e}}_3}_{=0} \right)}_{=0} \frac{\nabla \Psi}{g_{33}^2} = \underbrace{\left(\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \nabla I \times \nabla \Psi \right)}_{=0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}^2} = 0, \quad (2.59)$$

$$\text{II} = (\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3) \nabla I - (\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot I) \hat{\mathbf{e}}_3 = g_{33} \nabla I, \quad (2.60)$$

$$\text{III} = (\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \nabla \Psi) \hat{\mathbf{e}}_3 - (\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3) \nabla \Psi = -g_{33} \nabla \Psi. \quad (2.61)$$

Com o auxílio destas equações, temos que a força de Lorentz se escreve como

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{g_{33}} (J_3 \nabla \Psi + \mu_0 I \nabla I). \quad (2.62)$$

Podemos obter uma expressão para J_3 em termos de quantidades de superfície considerando a lei de Ampère (2.11) e substituindo nela a representação para o campo magnético (2.29),

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{J} &= \nabla \times \left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \times \nabla \Psi \right) - \nabla \times \left(\mu_0 I \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \right), \\ &= \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \nabla^2 \Psi - \nabla \Psi \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \right) + (\nabla \Psi \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} - \left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \cdot \nabla \right) \nabla \Psi - \nabla \times \left(\mu_0 I \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \right). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Durante os cálculos surge um operador, dado por (A.5), chamado de operador de Shafranov generalizado [42],

$$\Delta^* \Psi = g_{33} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Psi}{g_{33}} \right) = \nabla^2 \Psi - \frac{1}{g_{33}} \nabla g_{33} \cdot \nabla \Psi. \quad (2.64)$$

Substituindo (2.64) em (2.63) e escolhendo a componente x^3 por meio do produto escalar com $\hat{\mathbf{e}}_3$,

$$\mu_0 J_3 = \underbrace{\Delta^* \Psi}_{\text{I}} + \underbrace{\nabla \Psi \cdot \frac{\nabla g_{33}}{g_{33}}}_{\text{II}} + \underbrace{\left((\nabla \Psi \cdot \nabla) \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \right) \hat{\mathbf{e}}_3}_{\text{III}} - \underbrace{\left[\left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \cdot \nabla \right) \nabla \Psi \right] \hat{\mathbf{e}}_3}_{\text{IV}} - \underbrace{\nabla \times \left(\mu_0 I \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3}_{\text{IV}}, \quad (2.65)$$

então calculando os termos separadamente com o auxílio de (A.25), para o cálculo do rotacional em coordenadas curvilíneas:

$$\text{I} = \frac{1}{g_{33}} \left(g^{11} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + g^{12} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + g^{21} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} + g^{22} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \right), \quad (2.66)$$

$$\text{II} = -\frac{1}{g_{33}} \left(g^{11} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + g^{12} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + g^{21} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} + g^{22} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \right), \quad (2.67)$$

$$\text{III} = \left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \cdot \nabla \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x^3} = 0, \quad (2.68)$$

$$\text{IV} = \frac{\mu_0 I g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{32}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{31}}{g_{33}} \right) \right]. \quad (2.69)$$

Logo, temos que $\text{I} = -\text{II}$ então substituindo (2.66), (2.67), (2.68) e (2.69) em (2.65), obtemos

$$\mu_0 J_3 = \Delta^* \Psi - \mu_0 I \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{32}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{31}}{g_{33}} \right) \right], \quad (2.70)$$

ou ainda

$$J_3 = \frac{\Delta^* \Psi}{\mu_0} - I \mathcal{D}, \quad (2.71)$$

onde

$$\mathcal{D} = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{32}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{31}}{g_{33}} \right) \right], \quad (2.72)$$

este fator é diferente de zero apenas para sistemas de coordenadas não ortogonais.

Substituindo (2.71) em (2.62) e como I é uma quantidade de superfície, de forma que, $\nabla I = I' \nabla \Psi$, com o linha denotando a derivada com respeito à Ψ , temos

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{g_{33}} \left(\frac{\Delta^* \Psi}{\mu_0} - I \mathcal{D} + \frac{\mu_0}{2} (I^2)' \right) \nabla \Psi. \quad (2.73)$$

Finalmente substituindo (2.73) em (2.56) temos

$$\bar{p}' \nabla \Psi - \frac{1}{2g_{33}\mu_0} (|\nabla \Psi|^2 + \mu_0^2 I^2) \sigma_- \nabla \Psi = -\frac{(1 - \sigma_-)}{g_{33}} \left(\frac{\Delta^* \Psi}{\mu_0} - I \mathcal{D} + \frac{\mu_0}{2} (I^2)' \right) \nabla \Psi. \quad (2.74)$$

Esta deve ser válida para $\nabla \Psi \neq 0$ arbitrário, o que após alguns cálculos algébricos nos conduz a uma equação de equilíbrio MHD para plasmas com anisotropia com simetria com respeito a x^3 generalizada:

$$\Delta^* \Psi - \mu_0 I \mathcal{D} - \frac{\sigma_-'}{2(1 - \sigma_-)} |\nabla \Psi|^2 = -\frac{1}{2(1 - \sigma_-)} \left[\mu_0^2 I^2 (1 - \sigma_-) \right]' - \frac{\mu_0 g_{33} \bar{p}'}{1 - \sigma_-}. \quad (2.75)$$

No caso isotrópico temos que $\sigma_- = 0$, pois se (2.49) for nulo segue que $p_{\parallel} = p_{\perp}$. Aplicando esta condição em (2.75)

$$\Delta^* \Psi - \mu_0 I \mathcal{D} = -\frac{\mu_0^2}{2} (I^2)' - \mu_0 g_{33} \bar{p}'. \quad (2.76)$$

Esta é a equação de Grad-Schlüter-Shafranov (usualmente chamada de equação de Grad-Shafranov), deduzida independentemente por Lüst e Schlüter na Alemanha [17],

Shafranov na URSS [18] e H. Grad e H. Rubin nos Estados Unidos [16], para equilíbrio MHD isotrópico. As equações (2.75) e (2.76) possuem o operador de Shafranov (2.64), que é linear e do tipo elíptico, de forma que ambas equações diferenciais parciais são do tipo elíptico, a qual pode ou não ser linear dependendo dos termos de fontes. E ainda da forma apresentada estas equações não podem ser resolvidas, pois a função de fluxo transversal é ao mesmo tempo variável dependente e independente. Logo, para termos uma equação diferencial parcial que possa ser resolvida devemos especificar a priori a pressão isotrópica efetiva \bar{p} e I . Normalmente supõem-se perfis para essas quantidades na forma de series de potência em termos de Ψ . Os perfis são escolhidos de forma arbitrária ou baseado em evidências experimentais.

Se algum dos perfis escolhidos possuírem termos de terceira ordem ou superiores a equação diferencial resultante terá termos quadráticos em Ψ , e portanto, as equações de equilíbrio isotrópico e anisotrópico serão não lineares. O que significa que não há teorema que garanta a unicidade ou mesmo a existência de soluções. Devido a este motivo é comum o emprego de técnicas numéricas para a solução de (2.75) e (2.76), mas para garantir a validade de tais técnicas é necessário soluções analíticas, que para (2.75) foram obtidas pela primeira vez por Clemente em 1993, a forma empregada por ele para resolução, aqui chamada de Transformada de Clemente é a mesma que utilizamos, e será discutida no capítulo três.

3 TRANSFORMADA DE CLEMENTE

Clemente [33] desenvolveu um método para obter soluções da equação de equilíbrio MHD anisotrópica (2.75) conhecendo previamente uma solução do equilíbrio MHD isotrópico (2.76). Este método consiste em definir uma função auxiliar $U(x^1, x^2)$, tal que

$$U = \int_0^\Psi \sqrt{1 - \sigma_-(\Phi)} d\Phi. \quad (3.1)$$

Com essa função, temos da regra da cadeia,

$$\frac{d}{d\Psi} = \frac{dU}{d\Psi} \frac{d}{dU} = \sqrt{1 - \sigma_-} \frac{d}{dU}, \quad (3.2)$$

Portanto,

$$\frac{d\bar{p}}{dU} = \frac{\bar{p}'}{\sqrt{1 - \sigma_-}}, \quad (3.3)$$

e

$$\frac{d}{dU} \left(\frac{(1 - \sigma_-)I^2}{2} \right) = \frac{[(1 - \sigma_-)I^2]'}{2\sqrt{1 - \sigma_-}}, \quad (3.4)$$

onde o ' denota a diferencial com respeito à Ψ . Multiplicando a equação (2.75) por $\sqrt{1 - \sigma_-}$, e usando (3.3) e (3.4), resulta

$$\sqrt{1 - \sigma_-} \Delta^* \Psi - \mu_0 \mathcal{I} \mathcal{D} \sqrt{1 - \sigma_-} - \frac{\sigma_-'}{2\sqrt{1 - \sigma_-}} |\nabla \Psi|^2 = -\mu_0^2 \frac{d}{dU} \left[\frac{(1 - \sigma_-)I^2}{2} \right] - \mu_0 g_{33} \frac{d\bar{p}}{dU}. \quad (3.5)$$

De acordo com a definição do operador de Shafranov (2.64), o cálculo direto resulta

$$\sqrt{1 - \sigma_-} \Delta^* \Psi = \Delta^* U + \frac{\sigma_-'}{2(1 - \sigma_-)^{3/2}} |\nabla U|^2. \quad (3.6)$$

Similarmente o gradiente em coordenadas curvilíneas (A.5), fornece

$$|\nabla \Psi|^2 = \frac{|\nabla U|^2}{1 - \sigma_-}. \quad (3.7)$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.5) obtemos a equação de equilíbrio para a função auxiliar

$$\Delta^* U - \mu_0 \mathcal{I} \mathcal{D} = -\frac{\mu_0^2}{2} \frac{d\mathcal{I}^2}{dU} - \mu_0 g_{33} \frac{d\bar{p}}{dU}, \quad (3.8)$$

onde definimos a função de corrente modificada

$$\mathcal{I} = I\sqrt{1 - \sigma_-}. \quad (3.9)$$

A equação (3.8) é formalmente equivalente a equação de Grad-Schlüter-Shafranov (2.76), dado que $I \rightarrow \mathcal{I}$, $p \rightarrow \bar{p}$ e $\Psi \rightarrow U$. Portanto, uma solução conhecida da equação de Grad-Schlüter-Shafranov pode ser utilizado para obter U . E uma vez que U é conhecida é possível obter a solução para o equilíbrio MHD anisotrópico (2.75) para uma dada função de anisotropia σ_- , invertendo a transformação de Clemente (3.1).

Em ordem de inverter a transformada de Clemente é necessário explicitar a dependência da função de anisotropia (2.49) com a função fluxo Ψ , em ordem de fazer isso podemos levar em conta algum insight físico, mas observando (3.1), temos que é necessário que $\sigma_- < 1$ para uma definição adequada de U . Isto automaticamente satisfaz a condição de estabilidade dada por Mercier e Cotsaftis [26]. Se as instabilidades "mirror" e "fire-hose" são levadas em conta H. Grad [62] mostrou que é necessário que $\sigma_- > -1$. Portanto, a escolha da função de anisotropia deve ser restrita à $|\sigma_-| < 1$.

Devido ao fato que superfície em que U é constante também são superfícies com Ψ constante, não devemos ter deslocamento do eixo magnético (Shafranov shift) devido à anisotropia. A função auxiliar U é também a função fluxo transversal para o caso isotrópico. Então é possível comparar as propriedades da solução para o caso isotrópico com anisotropia e assim analisar os efeitos da anisotropia. Para a escolha de Ψ iremos nos restringir nos capítulos 4 e 5 há uma dependência do tipo linear, o que dada a restrições da função de anisotropia é uma aproximação suficiente. Então escolhemos

$$\sigma_- = \sigma_{-1} = \bar{\sigma}_0 + \sigma_0\Psi, \quad (3.10)$$

onde $\bar{\sigma}_0$ e σ_0 são constantes conhecidas. Inserindo (3.10) em (3.1) e integrando teremos

$$\Psi_1(U) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ 1 - \bar{\sigma}_0 - \left[(1 - \bar{\sigma}_0)^{3/2} - \frac{3}{2}\sigma_0 U \right]^{2/3} \right\}. \quad (3.11)$$

A fim de estudar os efeitos da escolha da função de anisotropia no capítulo 6 designamos uma dependência da função de anisotropia com Ψ um pouco mais complexa além da linear, essa é

$$\sigma_{-2} = \tanh^2(\sigma_0\Psi), \quad (3.12)$$

novamente inserindo (3.12) em (3.1) e integrando obtemos

$$\Psi_2(U) = \frac{2}{\sigma_0} \tanh^{-1} \left[\tan \left(\frac{\sigma_0 U}{2} \right) \right], \quad (3.13)$$

deve ser notado que o subíndice 1 em na função fluxo, e em propriedades físicas subsequentes denota a função de anisotropia com dependência linear (3.10) e o subíndice 2 denota a dependência de tangente hiperbólica (3.12).

A equação (3.8), assim como a equação de Grad-Schlüter-Shafranov, necessita a especificação a priori das funções $\bar{p}(U)$ e $\mathcal{I}(U)$ assim como da condição de contorno adequada. Uma vez que a uma solução de (3.8), na forma de $U(x^1, x^2)$ nós utilizamos (3.11) e ou (3.13) para obter a solução de equação de equilíbrio MHD anisotrópico (2.75). Conhecendo a função fluxo transversal utilizamos a definição da função de corrente modificada (3.9) em conjunto com a função de anisotropia escolhida (2.49) para calcular a função de corrente transversal I , que deve ser utilizada no cálculo do módulo ao quadrado do campo magnético (2.47) e na densidade de corrente (2.41). As equações (2.48) e (2.49) definem um sistema,

$$p_{\parallel} = \bar{p} + \frac{|B|^2 \sigma_{-}}{2\mu_0}, \quad (3.14)$$

$$p_{\perp} = \bar{p} - \frac{|B|^2 \sigma_{-}}{2\mu_0}, \quad (3.15)$$

tal que as soluções fornecem as pressões nas direções paralela e perpendicular ao campo magnético.

4 EQUILÍBRIO MHD ANISOTRÓPICO EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

Em um sistema de coordenadas cilíndricas ($x^1 = R, x^2 = Z, x^3 = \phi$) a coordenada ignorável é $0 \leq \phi < 2\pi$, então as quantidades de superfície não dependem de ϕ , i.e., o sistema é eixo simétrico. Como no apêndice B temos que do tensor métrico (B.1) $g = g_{33} = R^2$, o campo magnético e a densidade de corrente dados por (2.29), e (2.41), respectivamente, são

$$\mathbf{B}(R, Z) = \frac{1}{R} \hat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla \Psi - \frac{\mu_0 I}{R} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{J}(R, Z) = \frac{1}{R} \hat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla I - \frac{1}{\mu_0 R} \Delta^* \Psi \hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (4.2)$$

Este sistema é ortogonal de forma que $\mathcal{D} = 0$, então com o auxílio de (B.8) a equação de equilíbrio para a função auxiliar $U(R, Z)$ fica,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = -\frac{1}{2} \mu_0^2 \frac{d\mathcal{I}^2}{dU} - \mu_0 R^2 \frac{d\bar{p}}{dU}. \quad (4.3)$$

Esta é equivalente a equação de Grad-Schlüter-Shafranov em coordenadas cilíndricas e possui uma solução exata para dependência linear com a função de fluxo transversal, obtida em 1967 por L. Solovév [44]. Os perfis supostos são

$$\bar{p}(U) = p_0 - \frac{a B_0}{\mu_0 R_0^2} U, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{I}^2(U) = \mathcal{I}_0^2 - \frac{2b B_0}{\mu_0^2} U, \quad (4.5)$$

onde \mathcal{I}_0, p_0 , são constantes, B_0 e R_0 é uma intensidade de campo magnético e comprimento característicos respectivamente, e ainda a e b são parâmetros reais.

A equação de equilíbrio (4.3) para esses perfis é

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = B_0 \left(a \frac{R^2}{R_0^2} + b \right). \quad (4.6)$$

Utilizamos as variáveis adimensionais $r = R/R_0, z = Z/R_0$ e a normalização $u = U/B_0 R_0^2$, com isso a equação (4.6) fica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = ar^2 + b. \quad (4.7)$$

Supomos $u(r, z) = f(r)z^2 + g(r)$ como ansatz de solução desta, de forma que

$$z^2 \underbrace{\left(\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right)}_{=0} + 2f \left(\frac{d^2 g}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} \right) = ar^2 + b, \quad (4.8)$$

o primeiro termo entre parenteses deve ser nulo pois não há outros termos dependentes de z , logo temos a equação diferencial para $f(r)$,

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} = 0, \quad (4.9)$$

para a resolução desta escolhemos $\frac{df}{dr} = h(r)$,

$$\frac{dh}{dr} - \frac{h}{r} = 0. \quad (4.10)$$

Por integração direta, temos $h(r) = Cr$, onde C é uma constante de integração. Da relação entre $f(r)$ e $h(r)$ integrando diretamente novamente

$$f(r) = C \frac{r^2}{2} + D, \quad (4.11)$$

onde D é outra constante de integração. Substituindo (4.11) em (4.8)

$$\frac{d^2 g}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} = (a - C)r^2 + b - 2D. \quad (4.12)$$

A solução geral desta equação inhomogênea pode ser escrita como $g(r) = g_h(r) + g_p(r)$ onde $g_h(r)$ é a solução da equação homogênea, e esta é equivalente à (4.9) então

$$g_h(r) = C_1 \frac{r^2}{2} + D_1, \quad (4.13)$$

temos duas novas constantes de integração C_1 e D_1 , e ainda $g_p(r)$ é a solução particular de (4.12), que iremos supor um polinômio de quarta ordem $g_p(r) = \alpha r^4 + \beta r^3 + \gamma r^2 + \delta r + \varepsilon$, substituindo isto em (4.12) obtemos

$$8\alpha r^3 + 3\beta r^2 - \delta = (a - D)r^3 + (b - 2D)r. \quad (4.14)$$

Comparando os termos de mesma ordem temos que $8\alpha = a - D$, $b = 2D$ e $\delta = \beta = 0$. Portanto, a solução da equação inhomogênea (4.12) é escrita como

$$g(r) = \frac{(a - C)}{8} r^4 + \left(\frac{C_1}{2} + \gamma \right) r^2 + D_1 + \varepsilon. \quad (4.15)$$

Finalmente combinando (4.11) com (4.15) temos a solução de (4.7)

$$u = (Cr^2 + b) \frac{z^2}{2} + \frac{(a - C)}{8} r^4 + \left(\frac{C_1}{2} + \gamma \right) r^2 + D_1 + \varepsilon, \quad (4.16)$$

há cinco constantes de integração à serem determinadas, mas para simplificar podemos, assim como Solovév [44], escolhendo $C = 1$, $C_1 + 2\gamma = -4\alpha$ e ainda $D_1 + \varepsilon = \alpha$. Logo, a solução da equação de Grad-Shafranov em coordenadas cilíndricas para a função U é escrita

$$U(r, z) = \frac{B_0 R_0^2}{2} \left[(r^2 + b)z^2 + \frac{(a - 1)}{4} (r^2 - 1)^2 \right]. \quad (4.17)$$

A função de fluxo transversal (2.18) com anisotropia pode ser obtida com a transformada de Clemente (3.1) com a função de anisotropia linear, como a equação (3.11), temos

$$\Psi_1(r, z) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ 1 - \bar{\sigma}_0 - \left[(1 - \bar{\sigma}_0)^{3/2} - \frac{3}{4} \sigma_0 B_0 R_0^2 \left((r^2 + b)z^2 + \frac{(a - 1)}{4} (r^2 - 1)^2 \right) \right]^{2/3} \right\}, \quad (4.18)$$

para simplificar iremos escolher $\bar{\sigma}_0 = 0$, $\sigma_0 = 1/B_0 R_0^2$ e ainda definiremos a função fluxo normalizada $\psi = \Psi/B_0 R_0^0 = \Psi \sigma_0$ com isso

$$\psi(r, z) = 1 - \left[1 - \frac{3}{4} \left((r^2 + b)z^2 + \frac{(a - 1)}{4} (r^2 - 1)^2 \right) \right]^{2/3}. \quad (4.19)$$

O eixo magnético situado em R_m, Z_m é um extremo da função fluxo, e como vimos esse é o mesmo para os casos isotrópico e anisotrópico. Usando (2.25) e (2.26), obtemos que esse está localizado em $R_m = R_0, Z_m = 0$, ou ainda, $r = 1, z = 0$ o eixo magnético está no plano equatorial. As superfícies fechadas de interesse para o confinamento ocorrem para os valores $1 < a$ e $0 \leq b \leq 1$. Na Figura 5 temos as curvas de contorno em que a solução de Solovév isotrópica (4.17) e anisotrópica (4.19), onde fizemos $u = U \sigma_0$ para os casos de interesse.

Na Figura 5(a) e (b) vemos quando $b = 0$ as superfícies magnéticas possuem um formato próximo de D, enquanto das figuras (c) e (d) o parâmetro b causa um alongamento das superfícies próximo da origem. Vemos que a solução anisotrópica e isotrópica produz superfícies magnéticas muito próximas, tendo um pequeno deslocamento para posições afastadas do eixo magnético, como esperávamos a anisotropia não causa um deslocamento deste.

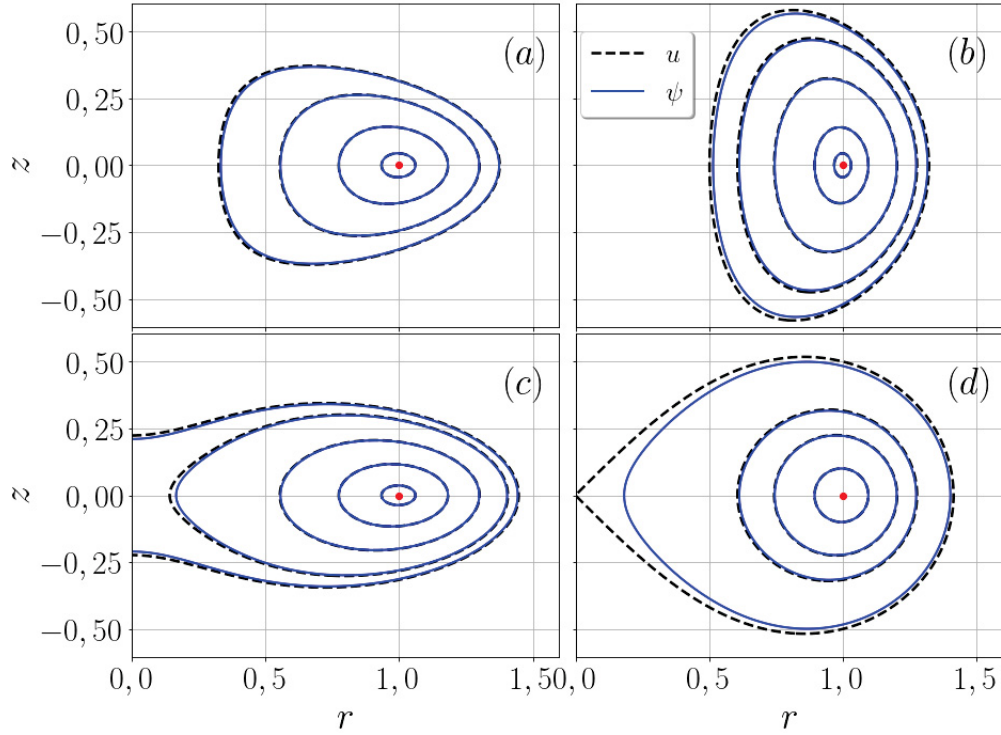


Figura 5 – As linhas tracejadas pretas representam a solução isotrópica, enquanto as linhas cheias azuis a solução anisotrópica. Em (a) temos os parâmetros $a = 3/2, b = 0$, (b) $a = 3, b = 0$, em (c) $a = 3, b = 1/2$ e em (d) os parâmetros são $a = 3, b = 1$. O ponto vermelho indica a posição do eixo magnético.

Com a solução (4.17) podemos retornar ao perfil da corrente modificada (4.5), obtendo

$$\mathcal{I}^2(r, z) = \mathcal{I}_0^2 - \frac{bB_0^2 R_0^2}{\mu_0^2} \left[(r^2 + b)z^2 + \frac{(a-1)}{4}(r^2 - 1)^2 \right]. \quad (4.20)$$

Então utilizando (4.5 e 4.17) em (4.1 e 4.2), onde fazemos a troca de Ψ por U e de I por \mathcal{I} , teremos o campo magnético e a densidade de corrente para o caso de equilíbrio isotrópico. As componentes do campo magnético ficam

$$B_r^{(i)} = -B_0 \frac{b + r^2}{r} z, \quad (4.21)$$

$$B_z^{(i)} = B_0 \left(z^2 + \frac{(a-1)}{2}(r^2 - 1) \right), \quad (4.22)$$

$$B_\phi^{(i)} = \frac{B_0}{r} \left(1 - (b + r^2)bz^2 - \frac{b(a-1)}{4}(r^2 - 1)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.23)$$

onde fizemos $B_0 = -\frac{\mu_0 \mathcal{I}_0}{R_0}$. A componente da densidade de corrente ficam

$$J_r^{(i)} = -\frac{bJ_0}{r} \frac{z(b+r^2)}{\sqrt{1 - (b+r^2)bz^2 - \frac{b(a-1)}{4}(r^2-1)^2}}, \quad (4.24)$$

$$J_z^{(i)} = \frac{bJ_0}{2} \frac{2z^2 + (a-1)(r^2-1)}{\sqrt{1 - (b+r^2)bz^2 - \frac{b(a-1)}{4}(r^2-1)^2}}, \quad (4.25)$$

$$J_\phi^{(i)} = J_0 \left(ar + \frac{b}{r} \right), \quad (4.26)$$

onde $J_0 = B_0/\mu_0 R_0$ e o índice (i) significa isotrópico. Com a função de anisotropia escolhida $\sigma_{-1} = \sigma_0 \Psi$ (3.10) e da definição da corrente modificada (3.9) podemos calcular a função de corrente transversal I ,

$$I = \mathcal{I}_0 \frac{\sqrt{1 - (r^2+b)bz^2 - \frac{b(a-1)}{4}(r^2-1)^2}}{\left[1 - \frac{3}{4} \left((r^2+b)z^2 + \frac{(a-1)}{4}(r^2-1)^2 \right) \right]^{1/3}}. \quad (4.27)$$

Portanto, com (4.19) e (4.20) aplicada em (4.1) permite obter o campo magnético para o caso anisotrópico, que suas componentes resulta

$$B_r^{(a)} = -\frac{B_0}{r} \frac{(b+r^2)z}{\left[1 - \frac{3}{4} \left((r^2+b)z^2 + \frac{(a-1)}{4}(r^2-1)^2 \right) \right]^{1/3}}, \quad (4.28)$$

$$B_z^{(a)} = \frac{B_0}{2} \frac{2z^2 + (a-1)(r^2-1)}{\left[1 - \frac{3}{4} \left((r^2+b)z^2 + \frac{(a-1)}{4}(r^2-1)^2 \right) \right]^{1/3}}, \quad (4.29)$$

$$B_\phi^{(a)} = \frac{B_0}{r} \frac{\sqrt{1 - b(r^2+b)z^2 - \frac{b(a-1)}{4}(r^2-1)^2}}{\left[1 - \frac{3}{4} \left((r^2+b)z^2 + \frac{(a-1)}{4}(r^2-1)^2 \right) \right]^{1/3}}, \quad (4.30)$$

onde o índice (a) indica anisotropia. Na Figura 6 temos o perfil radial (plano equatorial $z = 0$) das componentes do campo magnético, neste plano a componente radial B_r do campo é nula, o campo na direção z independe do parâmetro b , há variação do parâmetro a altera a intensidade desta componente. Em ambos os casos, isotrópico e anisotrópico o campo é nulo no eixo magnético e há um reversão do sinal do campo. As soluções isotrópica e anisotrópica produzem resultados similares para o campo magnético, com pequenas diferenças na origem e na fronteira do plasma. A componente toroidal do campo B_ϕ , é altíssima no centro do cilindro, e decai rapidamente.

Ainda utilizando (4.27) em (4.2) é possível obter a densidade de corrente para a solução com anisotropia. Para a componente toroidal da densidade de corrente J_ϕ , temos que utilizar (2.71) combinada com o fato que o sistema cilíndrico é ortogonal e o operador de Shafranov (B.12).

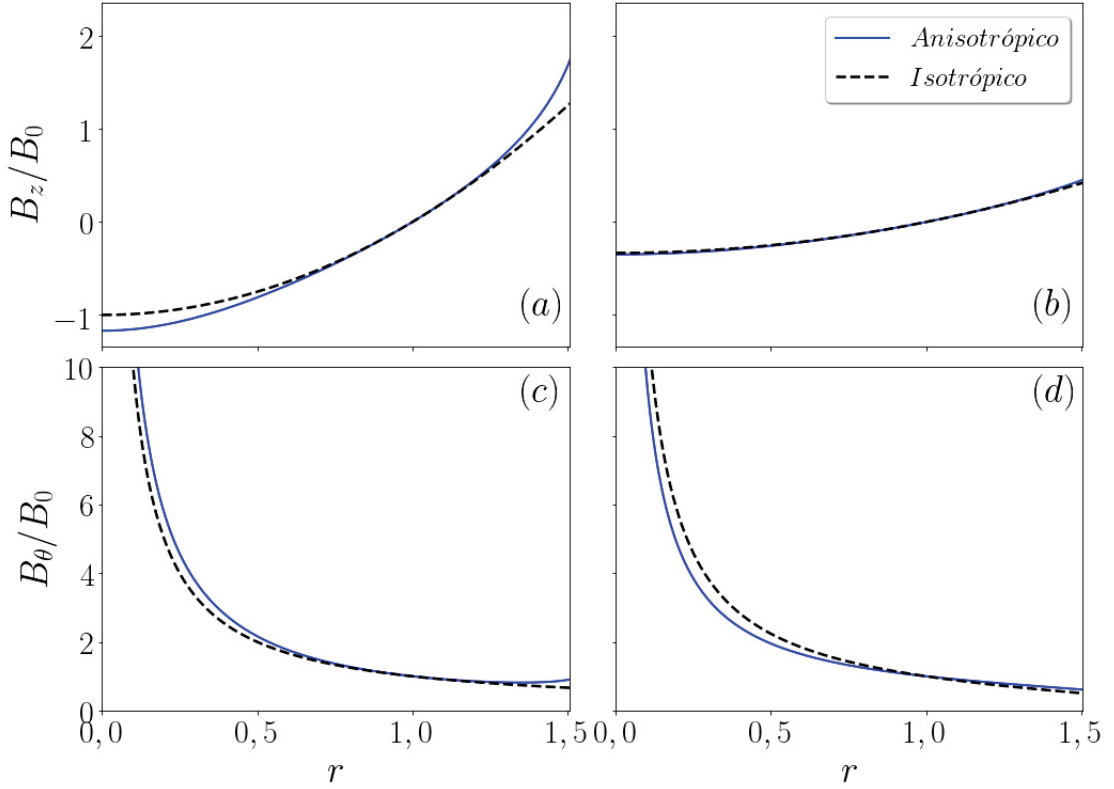


Figura 6 – As linhas tracejadas pretas correspondem ao caso isotrópico, enquanto, as linhas cheias azuis ao caso anisotrópico. Em (a) temos os parâmetros $a = 3, b = 0$, (b) $a = 5/3, b = 1$, em (c) $a = 3, b = 0$ e em (d) os parâmetros são $a = 5/3, b = 1$.

$$J_r^{(a)} = -\frac{4(2)^{1/3} J_0 z (r^2 + b) (-17 + 2r^2 - r^4 + a(r^2 - 1)^2 + 4(r^2 + b)z^2)}{r [19 - 6r^2 + 3r^2 - 3a(r^2 - 1)^2 - 12(r^2 + b)z^2] \sqrt{1 - b(r^2 + b)z^2 - \frac{b(a-1)}{4}(r^2 - 1)^2}}, \quad (4.31)$$

$$J_z^{(a)} = \frac{J_0 \left[(a-1)(r^2 - 1) + 2z^2 \right] [8 + b(-17 + 2r^2 - r^4 + a(r^2 - 1)^2 + 4(r^2 + b)z^2)]}{32 \sqrt{1 - b(r^2 + b)z^2 - \frac{b(a-1)}{4}(r^2 - 1)^2} \left[1 - \frac{3}{4} \left((r^2 + b)z^2 + \frac{(a-1)}{4}(r^2 - 1)^2 \right) \right]^{4/3}}, \quad (4.32)$$

$$J_\phi^{(a)} = J_0. \quad (4.33)$$

Na Figura 7(a-b) temos o perfil radial da componente z da densidade de corrente para as soluções isotrópica e anisotrópica. Há uma grande variação deste perfil com diferentes valores dos parâmetros a e b . Quando $b = 0$ a solução isotrópica é nula, mas a anisotrópica não e ainda possui reversão de sinal no eixo magnético, ou seja, a anisotropia cria uma densidade de corrente. Quando $b = 1$ $J_z^{(a)}$ é oposta há $J_z^{(i)}$ em toda a direção radial, exceto no eixo magnético, onde ambas são nulas.

Na Figura 7(c-d) temos o perfil radial da componente toroidal da densidade de corrente J_ϕ , quando $b = 0$ a solução isotrópica produz uma densidade de corrente linear,

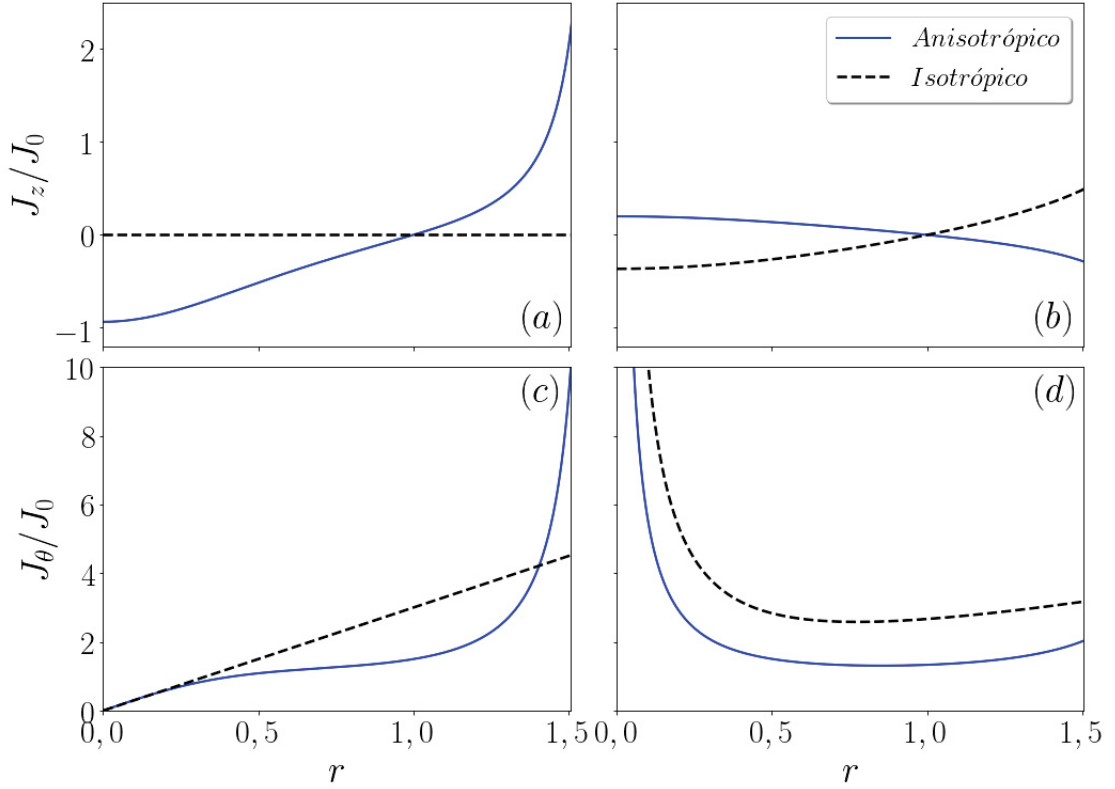


Figura 7 – As linhas tracejadas pretas correspondem ao caso isotrópico, enquanto, as linhas cheias azuis ao caso anisotrópico. Em (a) temos os parâmetros $a = 3, b = 0$, (b) $a = 5/3, b = 1$, em (c) $a = 3, b = 0$ e em (d) os parâmetros são $a = 5/3, b = 1$.

onde o coeficiente angular é o parâmetro a , mas a anisotrópica resulta um perfil mais complexo. Para a situação em que $b = 1$ esta componente, da densidade de corrente é muito grande na origem do cilindro, e após, tem pouca variação de intensidade.

Com o objetivo de investigar como as pressões se comportam com a anisotropia, utilizamos as equações (3.14) e (3.15), que combinadas com a função de anisotropia escolhida (3.10), os perfis para pressão e corrente modificada de Solovév (4.4,4.5) e ainda, (2.47) se tornam

$$p_{\parallel} = p_0 - \frac{aB_0^2}{2\mu_0} \left[(r^2 + b)z^2 + \frac{(a-1)}{4}(r^2 - 1)^2 \right] + \frac{|B_r^{(a)}|^2 + |B_z^{(a)}|^2 + |B_{\phi}^{(a)}|^2}{2\mu_0} \psi, \quad (4.34)$$

$$p_{\parallel} = p_0 - \frac{aB_0^2}{2\mu_0} \left[(r^2 + b)z^2 + \frac{(a-1)}{4}(r^2 - 1)^2 \right] - \frac{|B_r^{(a)}|^2 + |B_z^{(a)}|^2 + |B_{\phi}^{(a)}|^2}{2\mu_0} \psi. \quad (4.35)$$

É comum no estudo de física de plasma a definição do beta do plasma, definida como a razão entre a pressão cinética e a magnética, aqui definida como

$$\beta = \frac{\bar{p}}{B_0^2/2\mu_0}. \quad (4.36)$$

Usualmente para tokamaks β é muito menor que a unidade, da ordem de 0,01, enquanto para spheromaks é tipicamente uma ordem de grandeza maior 0,1. Estudamos dois caso $\beta = 0,5$ e $\beta = 2$ que representamos na Figura 8 os perfis de pressão no plano equatorial, para a situação em que não existe campo toroidal $B_\phi^{(a)} = 0$, isto é equivalente a fixar $\mathcal{I}_0 = 0$. Para baixos valores de β e a na Figura 8(a) temos que ambas as pressões são concentradas em um torno do eixo magnético, sendo nulas no centro do cilindro. Da Fig. 8(a) quando o parâmetro a aumenta o perfil da pressão passa a ser não nulo no centro, e cresce rapidamente em direção ao eixo magnético. Quando β é alto Fig. 8(c-d) o perfil se assemelha à Fig. 8(b) para todos os valores do parâmetro a .

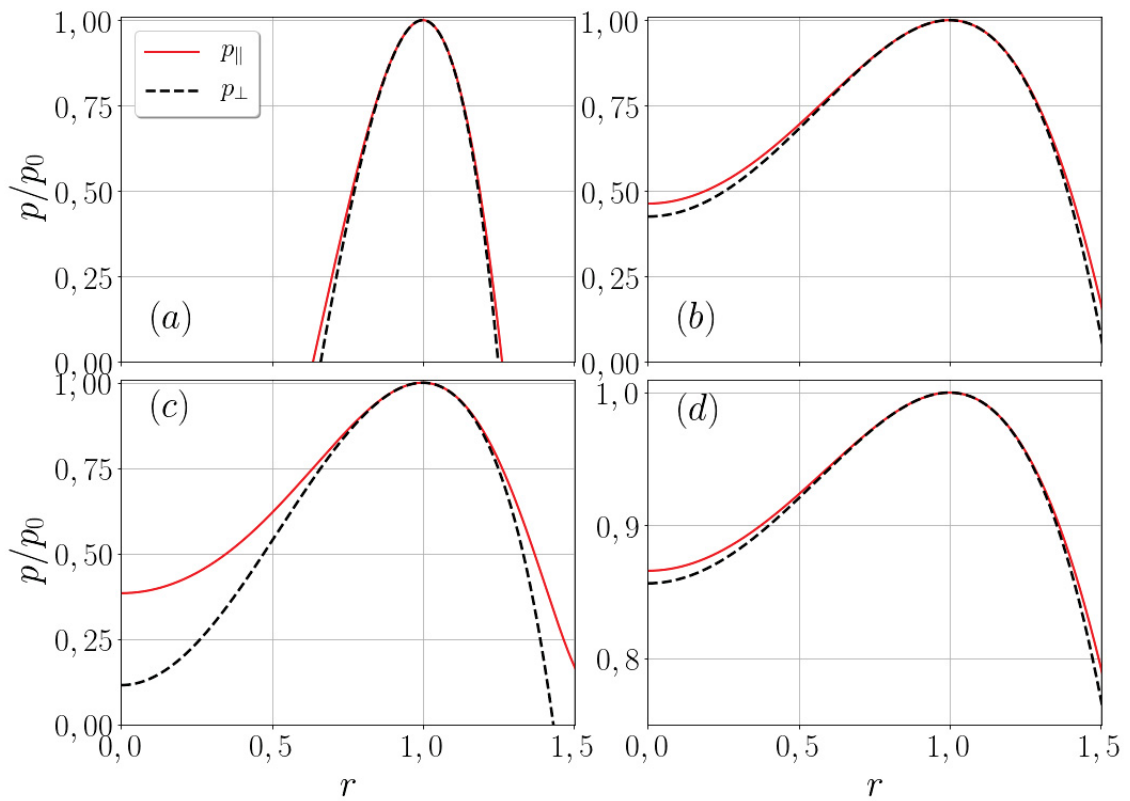


Figura 8 – Perfis radiais das pressões. Em vermelho pressão paralela e em preto pressão perpendicular ao campo magnético. Em (a) temos os parâmetros $a = 3, \beta = 0,5$, (b) $a = 5/3, \beta = 0,5$, em (c) $a = 3, \beta = 2$ e em (d) os parâmetros são $a = 5/3, \beta = 2$.

A pressão paralela é maior que a perpendicular para todos os caso, a diferença entre elas é maior na origem do cilindro, diminui próximo do eixo magnético, onde as pressões são iguais e então passam a novamente ter uma diferença em direção à fronteira do plasma. O forte campo magnético cria uma direção preferencial de movimento para partes do plasma, mas a velocidade do plasma como todo se mantém nula, o que faz com que a pressão paralela seja maior que a perpendicular.

A transformada de Clemente permite obter a solução de equilíbrio MHD anisotrópico

baseada na solução de Solovév para o caso isotrópico. A comparação entre as soluções demonstra que os efeitos da anisotropia são pequeno sobre o campo magnético, mas grandes sobre a densidade de corrente. E ainda é possível diferenciar os perfis para pressão paralela e perpendicular, ao campo magnético, sendo a primeira maior que a segunda.

5 EQUILÍBRIO MHD ANISOTRÓPICO EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Em um sistema de coordenadas esféricas ($x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$) a coordenada ignorável é $0 \leq \phi < 2\pi$, então as quantidades de superfície não dependem de ϕ , i.e., o sistema é eixo simétrico. Como no apêndice B temos que do tensor métrico (B.13) $g_{33} = r^2 \text{sen}^2 \theta$ e $g = r^4 \text{sen}^2 \theta$, o campo magnético e densidade de corrente dados por (2.29), e (2.41), respectivamente, com o auxílio de (B.17) são escritas por

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \text{sen} \theta} (\hat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla \Psi + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi), \quad (5.1)$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{r \text{sen} \theta} (\hat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla I + J_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi). \quad (5.2)$$

A equação de Grad-Schlüter-Shafranov (2.76) para a função auxiliar (3.1) com o operador de Shafranov em coordenadas esféricas (B.20) é escrita como

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{\text{sen} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\text{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = -\mu_0 r^2 \text{sen}^2 \theta \bar{p}' - \frac{\mu_0^2}{2} (\mathcal{I}^2)'. \quad (5.3)$$

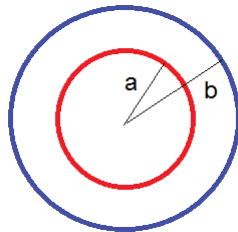


Figura 9 – Esquema estudado por Morikawa, dentro da esfera de circunferência é a região de plasma e a entre vermelho e azul o meio sem forças.

Em 1969 Morikawa [46], obteve uma solução para o equilíbrio MHD isotrópico de um sistema composto de um plasma esférico $0 \leq r \leq a$, e um meio sem forças, i.e., um plasma de β muito baixo (essencialmente vácuo) $a \leq r \leq b$ e uma casca esférica em $r = b$, como ilustrado na Figura 9. Os perfis para pressão isotrópica efetiva e função corrente modificada para a região do plasma

$$\bar{p} = p_0 + \frac{\kappa^2}{\mu_0} U, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{I}^2 = \mathcal{I}_0^2 + \frac{\lambda^2}{\mu_0^2} U^2, \quad (5.5)$$

onde κ e λ são parâmetros, p_0 e \mathcal{I}_0 são constantes. Com esses perfis a equação de equilíbrio (5.3) é escrita como

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial U}{\partial\theta} \right) \lambda U = -\kappa^2 r^2 \sin^2\theta, \quad (5.6)$$

O meio sem forças é caracterizado pelos perfis

$$\bar{p} = 0, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{I}^2 = \mathcal{I}_0^2 + \frac{\lambda^2}{\mu_0^2} U^2, \quad (5.8)$$

de forma que, a equação para a função auxiliar do meio sem forças fica

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial U}{\partial\theta} \right) \lambda U = 0, \quad (5.9)$$

que é a própria equação homogênea de (5.6). Para resolvermos (5.6) e (5.9) fazemos separação de variáveis $U(r, \theta) = w(r)\sin^2\theta$, que para a equação de equilíbrio na região de plasma se escreve

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \left(\lambda^2 - \frac{2}{r^2} \right) w = -\kappa^2 r^2. \quad (5.10)$$

A solução desta equação é composta de uma parte homogênea e uma particular $w(r) = w_h(r) + w_p(r)$, e ainda $w_h(r)\sin^2\theta$ é a solução da função auxiliar na região do meio sem forças (5.9). Podemos ver por substituição que a solução particular é

$$w_p(r) = -\frac{\kappa^2}{\lambda^2} r^2. \quad (5.11)$$

A equação para a equação homogênea fica

$$\frac{d^2 w_h}{dr^2} + \left(\lambda^2 - \frac{2}{r^2} \right) w_h = 0. \quad (5.12)$$

Por substituição direta vemos que a solução desta equação é

$$w_h(r) = C \left(\cos \lambda r - \frac{\sin \lambda r}{\lambda r} \right) + D \left(\sin \lambda r + \frac{\cos \lambda r}{\lambda r} \right), \quad (5.13)$$

onde C e D são constantes de integração. Para a região de plasma que contém a origem do sistema ($r = 0$) onde a solução deve ser regular, logo, para esta região $D = 0$. Portanto, a solução de (5.6) é

$$U_1(r, \theta) = \left[A \left(\cos \lambda r - \frac{\sin \lambda r}{\lambda r} \right) - \frac{\kappa^2}{\lambda^2 r^2} \right] \sin^2\theta, \quad (0 \leq r \leq a) \quad (5.14)$$

onde A é uma constante de integração, e utilizamos o índice 1 para denotar a região de plasma e 2 para a região sem forças onde temos a solução dada por (5.13). Como condição de contorno temos que a função auxiliar deve se anular na fronteira do plasma e na casca condutora, ou seja, $U_1(r = a, \theta) = 0$ e $U_2(r = b, \theta) = 0$, o que implica em

$$A = \frac{k^2 a^2 / \lambda^2}{\text{sen}(\lambda a) / (\lambda a) - \cos \lambda a}, \quad (5.15)$$

e em

$$\tan \lambda b = \lambda b. \quad (5.16)$$

Essa equação transcendental tem soluções positivas denotadas por $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, os valores permitidos para o parâmetro λ são dados em termos das raízes ξ_n $\lambda_n = \xi_n / b$. As soluções para o plasma e na região sem forças é

$$U_1 = \frac{\kappa^2 a^2}{\lambda^2} \left[\frac{\text{sen}(\lambda r) / (\lambda r) - \cos(\lambda r)}{\text{sen}(\lambda a) / (\lambda a) - \cos(\lambda a)} - \frac{r^2}{a^2} \right] \text{sen}^2 \theta, \quad (0 \leq r \leq a) \quad (5.17)$$

$$U_2 = \left[C \left(\frac{\text{sen}(\lambda_n r)}{(\lambda_n r)} - \cos(\lambda_n r) \right) + D \left(\text{sen}(\lambda_n r) + \frac{\cos(\lambda_n r)}{\lambda_n r} \right) \right] \text{sen}^2 \theta, \quad (a \leq r \leq b). \quad (5.18)$$

A terceira condição de contorno é a continuidade da função auxiliar na fronteira do plasma, $U_1(r = a, \theta) = U_2(r = a, \theta)$, que implica que $D = 0$ e na equação transcendental $\tan \lambda_n a = \lambda_n a$, a raiz ξ_n utilizada aqui deve ser diferente da utilizada em $\tan \lambda_n b = \lambda_n b$, em ordem de simplificar os cálculos fazemos $b = 1$ e escolhemos $\lambda_n = \lambda_2 \approx 7,725$ para que tenha apenas um eixo magnético na região de plasma e então a raiz de agora $\tan \lambda_2 a = \lambda_2 a$ deve ser uma raiz de uma ordem mais baixa no caso $\lambda_1 \approx 4,493$, de modo que o raio do plasma é fixado pelas condições de contorno

$$a = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{4,493}{7,725} = 0,5816. \quad (5.19)$$

E ainda a solução para a região de plasma admitirá qualquer valor do parâmetro λ dentro do intervalo $0 \leq \lambda \leq \lambda_2$. Morikawa mostrou que no caso limite $\lambda \rightarrow 0$ a solução isotrópica é conhecida em hidrodinâmica como vórtice de Hill [34] útil no estudo de configurações campo reverso e equilíbrio de spheromaks, e no caso $\lambda \rightarrow \lambda_2$ fornece a solução de um meio sem forças. Finalmente a última condição de contorno resulta da continuidade da componente tangencial do campo magnético [63], combinada que não

há uma densidade de corrente superficial na interface dos dois meios, plasma e meio sem forças, tal que

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial r} \right|_{(a,\theta)} = \left. \frac{\partial U_2}{\partial r} \right|_{(a,\theta)}. \quad (5.20)$$

Calculando as derivadas de (5.17,5.18) e simplificando os termos chegamos em

$$C = \frac{\kappa^2 a^2}{\lambda^2 \lambda_1 \text{sen} \lambda_1} \left[\frac{\lambda a \text{sen} \lambda a}{(\text{sen} \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a} - 3 \right]. \quad (5.21)$$

Finalmente a solução final para a função auxiliar U , que também é a solução do equilíbrio MHD isotrópico é

$$U_1(r, \theta) = C \lambda_1 \text{sen} \lambda_1 \frac{a^2 [(\text{sen} \lambda r / \lambda r) - \cos \lambda r] - r^2 [(\text{sen} \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]}{\lambda a \text{sen} \lambda a - 3 [(\text{sen} \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]} \text{sen}^2 \theta, \quad (5.22)$$

$$U_2(r, \theta) = C \left(\frac{\text{sen} \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r \right) \text{sen}^2 \theta. \quad (5.23)$$

Em ordem de calcularmos o campo magnético e densidade de corrente devemos calcular a função corrente modificada (5.5 ,5.8), que resulta em

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_0 \left\{ 1 + \lambda^2 \lambda_1^2 \text{sen}^2 \lambda_1 \left[\frac{a^2 [(\text{sen} \lambda r / \lambda r) - \cos \lambda r] - r^2 [(\text{sen} \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]}{\lambda a \text{sen} \lambda a - 3 [(\text{sen} \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]} \right]^2 \text{sen}^4 \theta \right\}^{1/2}, \quad (5.24)$$

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_0 \left\{ 1 + \lambda^2 \left(\frac{\text{sen} \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r \right)^2 \text{sen}^4 \theta \right\}^{1/2}, \quad (5.25)$$

onde fizemos $\mathcal{I}_0 = C / \mu_0$. Utilizando (5.1) calculamos as componentes do campo magnético. Para a região de plasma,

$$B_{r,1}^{(i)} = - \frac{2C \lambda_1 \text{sen} \lambda_1}{r^2} \frac{a^2 [\text{sen}(\lambda r) / (\lambda r) - \cos(\lambda r)] - r^2 [\text{sen}(\lambda a) / (\lambda a) - \cos(\lambda a)]}{\lambda a \text{sen}(\lambda a) - 3 [\text{sen}(\lambda a) / (\lambda a) - \cos(\lambda a)]} \cos \theta, \quad (5.26)$$

$$B_{\theta,1}^{(i)} = \frac{C \lambda_1 \text{sen} \lambda_1}{r} \frac{a^2 [\cos(\lambda r) / r - \text{sen}(\lambda r) / (\lambda r^2) + \lambda \text{sen}(\lambda r)] - 2r [\text{sen}(\lambda a) / (\lambda a) - \cos(\lambda a)]}{\lambda a \text{sen}(\lambda a) - 3 [\text{sen}(\lambda a) / (\lambda a) - \cos(\lambda a)]} \text{sen} \theta, \quad (5.27)$$

$$B_{\phi,1}^{(i)} = \frac{C}{r \text{sen} \theta} \left\{ 1 + \lambda^2 \lambda_1^2 \text{sen}^2 \lambda_1 \left[\frac{a^2 [(\text{sen} \lambda r / \lambda r) - \cos \lambda r] - r^2 [(\text{sen} \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]}{\lambda a \text{sen} \lambda a - 3 [(\text{sen} \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]} \right]^2 \text{sen}^4 \theta \right\}^{1/2}, \quad (5.28)$$

onde o índice i indica que é para o caso isotrópico. Para a região sem forças,

$$B_{r,2}^{(i)} = -\frac{2C\lambda_1 \text{sen}\lambda_1}{r^2} \left(\frac{\text{sen}\lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos\lambda_2 r \right) \cos\theta, \quad (5.29)$$

$$B_{\theta,2}^{(i)} = \frac{C \text{sen}\theta}{r} \left(\frac{\cos\lambda_2 r}{r} - \frac{\text{sen}\lambda_2 r}{\lambda_2 r^2} + \lambda_2 \text{sen}\lambda_2 r \right), \quad (5.30)$$

$$B_{\phi,2}^{(i)} = \frac{C}{r \text{sen}\theta} \left\{ 1 + \lambda^2 \left(\frac{\text{sen}\lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos\lambda_2 r \right)^2 \text{sen}^4\theta \right\}^{1/2}. \quad (5.31)$$

A densidade de corrente (5.2) pode ser calculada com (5.24) e (5.25) para a região e plasma de sem forças respectivamente, mas devido à elas produzirem expressões complicadas, não serão reproduzidas aqui, sendo apenas representadas graficamente na sequência.

Em ordem de obter uma solução da equação de equilíbrio MHD anisotrópico (2.75) em coordenadas esféricas utilizamos a transformada de Clemente (3.1) sob a solução de Morikawa para o caso isotrópico. Isto requer a escolha *a priori* da função de anisotropia (2.49), por simplicidade e baseado no fato que os efeitos da anisotropia não devem ser grandes, escolhemos como no capítulo anterior uma dependência linear da função de anisotropia com a função de fluxo transversal Ψ , como em (3.10), nesta condição a função fluxo é dada por (3.11), que quando combinada com (5.22) e (5.23), fornece a solução de equilíbrio anisotrópico na região de plasma e meio sem forças respectivamente,

$$\Psi_1(r, \theta) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{3}{2} \sigma_0 C \lambda_1 \text{sen}\lambda_1 \frac{a^2 [(\text{sen}\lambda r / \lambda r) - \cos\lambda r] - r^2 [(\text{sen}\lambda a / \lambda a) - \cos\lambda a]}{\lambda a \text{sen}\lambda a - 3 [(\text{sen}\lambda a / \lambda a) - \cos\lambda a]} \text{sen}^2\theta \right]^{2/3} \right\}, \quad (5.32)$$

$$\Psi_2(r, \theta) = \frac{1}{\sigma_0} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{3}{2} \sigma_1 C \left(\frac{\text{sen}\lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos\lambda_2 r \right) \text{sen}^2\theta \right]^{2/3} \right\}, \quad (5.33)$$

em que fizemos $\bar{\sigma}_0 = 0$. O eixo magnético calculado por (2.25) e (2.26), mostra que a posição do eixo ocorre no plano equatorial e que a posição radial r_m é dada pela equação transcendental

$$\frac{\cos\lambda r_m}{r_m} + \left(\lambda - \frac{1}{\lambda r_m^2} \right) \text{sen}\lambda r_m = \frac{2r_m}{a^2} \left(\frac{\text{sen}\lambda a}{\lambda a} - \cos\lambda a \right). \quad (5.34)$$

Na Figura 10 temos as curvas de contorno para as soluções isotrópica e anisotrópica, onde fizemos $\sigma_0 \Psi = \psi$ e $\sigma_0 U = u$, há duas posições de eixo magnético uma dentro da região de plasma e outra no meio sem forças. A forma nas soluções do meio sem forças

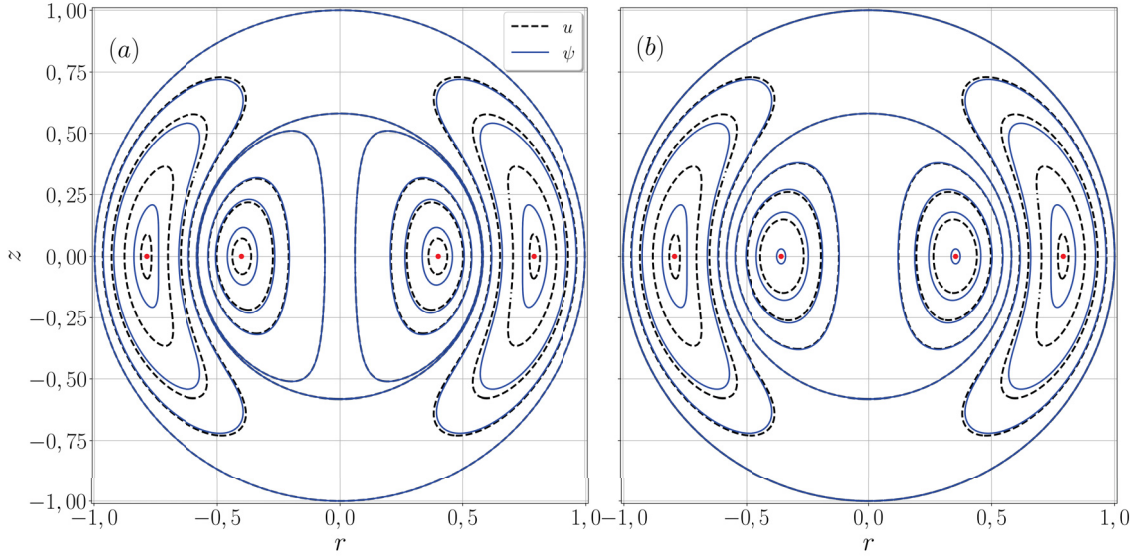


Figura 10 – Linhas tracejadas pretas soluções isotrópica, linhas cheias azuis são as soluções anisotrópica, pontos vermelhos são as posições dos eixos magnéticos. Em (a) $\lambda = 4,0$ e em (b) $\lambda = \lambda_2 = 7,725$.

independe de λ enquanto, para a região de plasma, a variação deste causa uma distorção no formato das curvas. Já para valores mais próximos de λ_2 elas possuem uma geometria mais elíptica e para baixos valores de λ ela tem um formato de D .

Da equação (3.9) temos que a função de corrente transversal é dada por

$$I_1 = \mathcal{I}_0 \frac{\left\{ 1 + \lambda^2 \lambda_1^2 \sin^2 \lambda_1 \left[\frac{a^2 [(\sin \lambda r / \lambda r) - \cos \lambda r] - r^2 [(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]}{\lambda \sin \lambda a - 3 [(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]} \right]^2 \sin^4 \theta \right\}^{1/2}}{\left[1 - \frac{3}{2} \sigma_0 C \lambda_1 \sin \lambda_1 \frac{a^2 [(\sin \lambda r / \lambda r) - \cos \lambda r] - r^2 [(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]}{\lambda \sin \lambda a - 3 [(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]} \sin^2 \theta \right]^{2/3}}, \quad (5.35)$$

$$I_2 = \mathcal{I}_0 \frac{\sqrt{1 + \lambda^2 \left(\frac{\sin \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r \right)^2 \sin^4 \theta}}{\left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\sin \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r \right) \sin^2 \theta \right]^{1/3}}. \quad (5.36)$$

Utilizando (5.35) em (5.1), vemos que podemos expressar as componentes do campo magnético quando há anisotropia com função das componentes para o caso isotrópico,

$$B_{r,1}^{(a)} = \frac{B_{r,1}^{(i)}}{(1 - \sigma_0 \Psi_1)^{1/3}}, \quad (5.37)$$

$$B_{\theta,1}^{(a)} = \frac{B_{\theta,1}^{(i)}}{(1 - \sigma_0 \Psi_1)^{1/3}}, \quad (5.38)$$

$$B_{\phi,2}^{(i)} = \frac{B_{\phi,1}^{(i)}}{(1 - \sigma_0 \Psi_1)^{1/3}}. \quad (5.39)$$

Para o meio sem forças temos que os campos são dados por,

$$B_{r,2}(r, \theta) = -\frac{2C \cos \theta}{r^2} \frac{\text{sen} \lambda_2 r / \lambda_2 r - \cos \lambda_2 r}{\left[1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 \theta \left(\frac{\text{sen} \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r\right)\right]^{1/3}}, \quad (5.40)$$

$$B_{\theta,2}(r, \theta) = \frac{C \text{sen} \theta}{r^2} \frac{\cos \lambda_2 r - \text{sen} \lambda_2 r / \lambda_2 r + \lambda_2 r \text{sen} \lambda_2 r}{\left[1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 \theta \left(\frac{\text{sen} \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r\right)\right]^{1/3}}, \quad (5.41)$$

$$B_{\phi,2}(r, \theta) = \frac{-C}{r \text{sen} \theta} \frac{\sqrt{1 + \lambda^2 \text{sen}^4 \theta (\text{sen} \lambda_2 r / \lambda_2 r - \cos \lambda_2 r)^2}}{\left[1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 \theta \left(\frac{\text{sen} \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r\right)\right]^{1/3}}. \quad (5.42)$$

Vemos que a anisotropia causa uma mudança das componentes do campo magnético para a rigião de plasmas igual à $(1 - \sigma_0 \Psi)^{-1/3}$. Na Figura 11 demonstramos graficamente os perfis do campo magnético no plano equatorial $\theta = \pi/2$ para diferentes valores do parâmetro λ . A componente radial do campo magnético é nula, no plano equatorial, a componente poloidal B_θ , Figura 11 (a) e (b), possui reversão de sinal na posição do eixo magnético (5.34), e o aumento de λ causa o aumento da intensidade dessa componente e com isso a diferença entre as soluções isotrópica e anisotrópica. A componente toroidal B_ϕ (c) e (d), exibe para o caso anisotrópico uma grande variação com o parâmetro λ , onde que para baixos valores esta componente é nula para regiões próximas a fronteira, mas com o aumento de λ esta componente se assemelha com a do caso isotrópico.

Na Figura 12 temos os perfis das componentes da densidade de corrente, na região de plasma, no plano equatorial, a componente radial J_r é nula neste plano para todas as soluções. A componente poloidal figuras (a) e (b) vemos que ela possui reversão de sinal na posição do eixo magnético, o aumento do parâmetro λ causa o aumento da intensidade, e um deslocamento da posição de máximo e mínimo, a anisotropia causa uma mudança de intensidade, mas segue essencialmente o mesmo perfil. A componente toroidal da densidade de corrente figuras (c) e (d) são nulas na origem e possuem um pequeno aumento, mas logo decrescem para valores negativos, onde a anisotropia causa uma maior diferença, para altos valores de λ , a intensidade passa a aumentar próximo a fronteira do plasma.

As pressões paralela e perpendicular ao campo magnético são dadas por (3.14) e (3.15) respectivamente, com a escolha que fizemos da função de anisotropia e com (2.47) em coordenadas esféricas temos que para a região de plasma,

$$p_{\parallel} = \bar{p} + \frac{\sigma_0 \Psi_1}{2\mu_0} (|B_{r,1}^{(a)}|^2 + |B_{\theta,1}^{(a)}|^2 + |B_{\phi,1}^{(a)}|^2), \quad (5.43)$$

$$p_{\perp} = \bar{p} - \frac{\sigma_0 \Psi_1}{2\mu_0} (|B_{r,1}^{(a)}|^2 + |B_{\theta,1}^{(a)}|^2 + |B_{\phi,1}^{(a)}|^2). \quad (5.44)$$

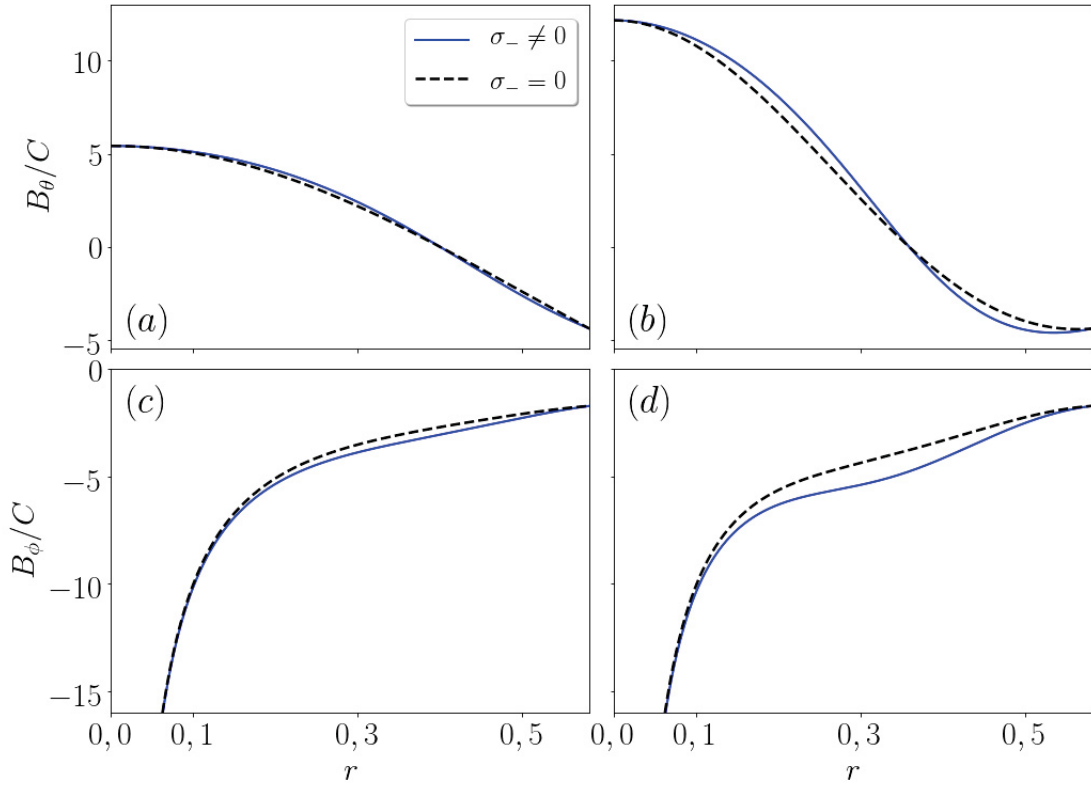


Figura 11 – Linhas tracejadas pretas para o caso isotrópico, linhas cheias vermelhas para o caso anisotrópico Em (a) e (b) temos a componente poloidal do campo magnético para o parâmetro $\lambda = 4,0$ e $\lambda = 7,5$, respectivamente. Em (c) e (d) temos a componente toroidal para $\lambda = 4,0$ e $\lambda = 7,5$ respectivamente.

onde \bar{p} é dada por (5.4) combinada com (5.22)

$$\frac{\bar{p}}{p_0} = 1 + \lambda^2 \lambda_1^2 \sin^2 \lambda_1 \frac{a^2 [(\sin \lambda r / \lambda r) - \cos \lambda r] - r^2 [(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]}{(\lambda a \sin \lambda a - 3 [(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a])^2} \sin^2 \theta [(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a], \quad (5.45)$$

em que foi feito $p_0 = C^2 / \mu_0$.

Na Figura 13 temos o perfil para as pressões no plano equatorial, vemos que a pressão paralela ao campo magnético é maior que a paralela, exceto na fronteira $r = a$, em que elas são iguais, a diferença de pressão aumenta com o aumento de λ e ainda o máximo das pressões não ocorre no mesmo ponto e nem mesmo coincide com o eixo magnético.

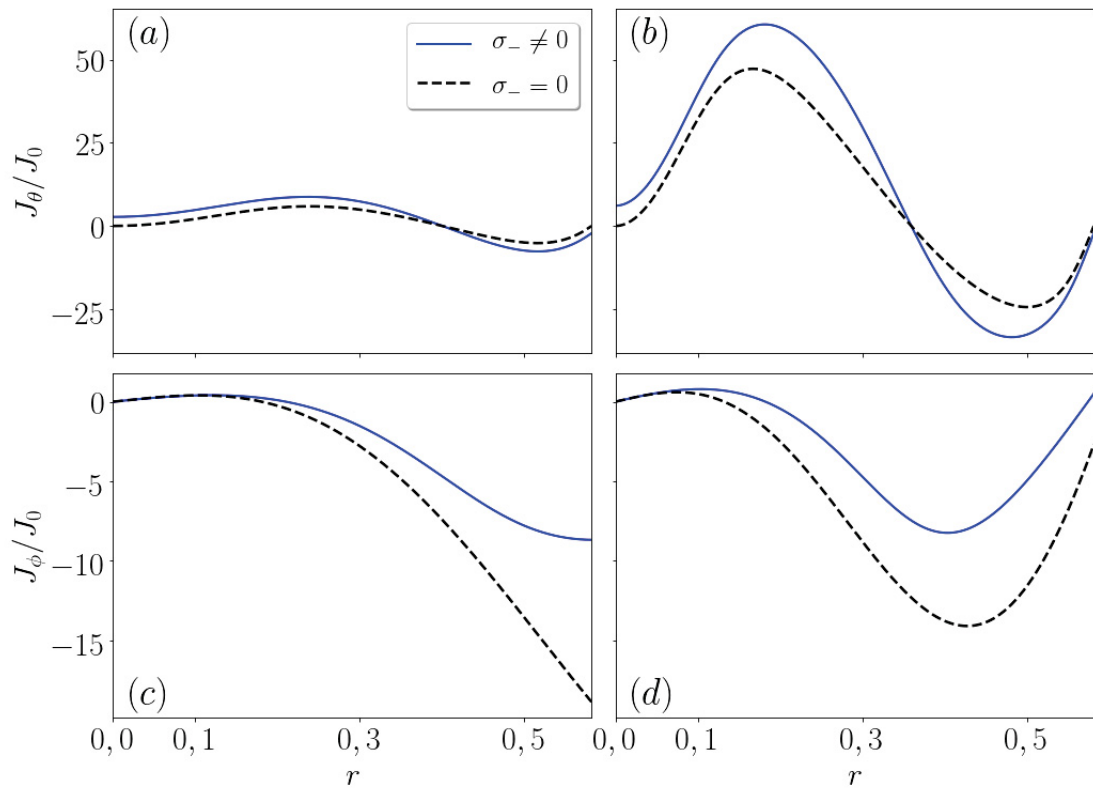


Figura 12 – Linhas tracejadas pretas para caso isotrópico, linhas cheias azuis para o caso anisotrópico. Em (a) e (b) temos a componente poloidal da densidade de corrente para o parâmetro $\lambda = 4,0$ e $\lambda = 7,5$, respectivamente. Em (c) e (d) temos a componente toroidal para $\lambda = 4,0$ e $\lambda = 7,5$ respectivamente.

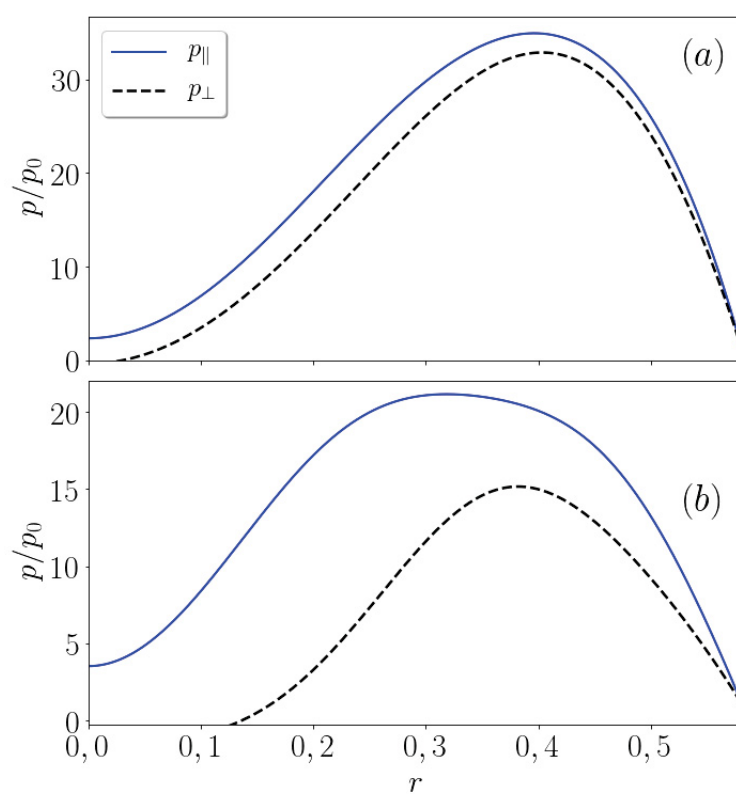


Figura 13 – As linhas tracejada pretas representam a pressão perpendicular, as linhas cheias azuis a pressão paralela ao campo magnético. Em (a) temos o parâmetro $\lambda = 4,0$ e em (b) $\lambda = 7,0$.

6 EQUILÍBRIO MHD ANISOTRÓPICO EM COORDENADAS ESFEROIDAIS

Consideremos um plasma eixo simétrico ao eixo z e usamos coordenadas esferoidais oblatas ($x^1 = \xi, x^2 = \eta, x^3 = \phi$), como descritas no apêndice B, é um sistema de coordenadas ortogonal então $\mathcal{D} = 0$, devido à simetria as quantidades de superfície não dependem de ϕ . Neste sistema o campo magnético e densidade de corrente utilizando (2.29) e (2.41) podem ser escritos como,

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla \Psi}{c \cosh \xi \operatorname{sen} \eta} + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{J} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla I}{c \cosh \xi \operatorname{sen} \eta} + J_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (6.2)$$

Assumimos que a superfície do plasma é representada por um esferoide $\xi = \xi_0$. O semieixo maior e semieixo menor são denotados por $a = c \cosh \xi_0$ e $b = c \operatorname{sen} \xi_0$ respectivamente, com c sendo a distância entre a origem e o foco do esferoide. A equação de equilíbrio MHD para a função de fluxo auxiliar $U(\xi, \eta)$ neste sistema de coordenadas pode ser escrita com o auxílio (B.32) como

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = - \frac{c^2 (\operatorname{sen}^2 \xi + \cos^2 \eta)}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta} \times \left[\frac{\mu_0^2}{2} (\mathcal{I}^2)' + \mu_0 c^2 \cosh^2 \xi \operatorname{sen}^2 \eta \bar{p}' \right]. \quad (6.3)$$

Esta é equivalente a equação de Grad-Shafranov-Schluter (2.76) em coordenadas esferoidais oblatas dada por Kaneko Chiyoda e Hirota [40] considerando uma dependência linear da pressão com a função fluxo transversal e que a componente toroidal do campo magnético é nulo, i.e. equivalente à fazer $\mathcal{I} = 0$, porém iremos estudar inicialmente o caso em que a componente toroidal não é nula, escrevemos os perfis como

$$\bar{p} = p_0 + \frac{\alpha U}{\mu_0 c^4}, \quad (6.4)$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0, \quad (6.5)$$

onde p_0 e a são constantes positivas. A equação de equilíbrio se torna

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) = -\alpha \cosh \xi \operatorname{sen} \eta (\operatorname{sen}^2 \xi + \cos^2 \eta). \quad (6.6)$$

Para resolver esta equação diferencial definiremos duas novas variáveis independentes $\lambda = i \operatorname{senh} \xi$ e $\mu = \cos \eta$, e assim como a nova variável dependente $u = U/\alpha$. Com isso podemos reescrever (6.6) da forma

$$(\lambda^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} = -(\lambda^2 - \mu^2)(1 - \mu^2)(\lambda^2 - 1). \quad (6.7)$$

A solução desta equação inhomogênea pode ser escrita como $u(\lambda, \mu) = u_h(\lambda, \mu) + u_p(\lambda, \mu)$, onde u_h, u_p são as soluções das equações homogênea correspondente e particular respectivamente. A equação homogênea de (6.7) é

$$(\lambda^2 - 1) \frac{\partial^2 u_h}{\partial \lambda^2} + (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 u_h}{\partial \mu^2} = 0, \quad (6.8)$$

Para resolvermos (6.8) fazemos a separação de variáveis $u_h(\lambda, \mu) = \Lambda(\lambda)M(\mu)$, o que resulta nas equações

$$(1 - \lambda^2) \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} + k^2 \Lambda = 0, \quad (6.9)$$

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 M}{d\mu^2} + k^2 M = 0, \quad (6.10)$$

onde $k^2 > 0$ é a constante de separação. A equação de Legendre [64] é escrita como

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \alpha y = 0, \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (6.11)$$

esta possui soluções finitas em $x \pm 1$ se e somente se $\alpha = n(n + 1)$, onde n é inteiro, tal que $y(x)$ é igual ao polinômio de Legendre de ordem n , denotado por $P_n(x)$. Derivando (6.11) em relação a x e multiplicando por $(1 - x^2)$, obtemos

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n + 1)(1 - x^2) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (6.12)$$

Comparando (6.12) com (6.9) e (6.10) temos que $k^2 = n(n + 1)$ e $\Lambda \rightarrow (1 - x^2) \frac{dy}{dx}$, assim como de maneira análoga $M \rightarrow (1 - x^2) \frac{dy}{dx}$, portanto

$$M_n = (1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} = (1 - \cos^2 \mu) P_n'(\mu) = \operatorname{sen}^2 \eta P_n'(\cos \eta), \quad (6.13)$$

e

$$\Lambda_n = (1 - \lambda^2) \frac{dP_n(\lambda)}{d\lambda} = (1 + \operatorname{senh}^2 \lambda) P_n'(\lambda) = \operatorname{cosh}^2 \xi P_n'(i \operatorname{senh} \xi). \quad (6.14)$$

Utilizamos apenas os polinômios de Legendre de primeira espécie pois queremos uma solução que seja regular na origem. A solução geral da equação homogênea (6.8) será a suposição linear das auto soluções para todos os valores de n .

$$u_p(\xi, \eta) = \cosh^2 \xi \operatorname{sen}^2 \eta \sum_{n=0}^{\infty} A_n P'_n(i \operatorname{senh} \xi) P'_n(\cos \eta). \quad (6.15)$$

Podemos verificar por substituição direta que a solução particular u_p da equação (6.7) pode ser escrita como

$$u_h(\xi, \eta) = -\frac{1}{8} \cosh^4 \xi \operatorname{sen}^4 \eta. \quad (6.16)$$

Portanto a solução geral é:

$$u(\xi, \eta) = \cosh^2 \xi \operatorname{sen}^2 \eta \sum_{n=0}^{\infty} A_n P'_n(i \operatorname{senh} \xi) P'_n(\cos \eta) - \frac{1}{8} \cosh^4 \xi \operatorname{sen}^4 \eta. \quad (6.17)$$

Impomos que U se anule na fronteira i.e., $U(\xi_0, \eta) = 0$, que fornece quando aplicada na equação assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n P'_n(i \operatorname{senh} \xi_0) P'_n(\cos \eta) = \frac{1}{8} \cosh^2 \xi_0 \operatorname{sen}^2 \eta. \quad (6.18)$$

Utilizando uma tabela de polinômios de Legendre expressamos os termos da somatória até $n = 3$ e utilizamos o fato que os polinômios são linearmente independentes, ou seja, um dado P_n não pode ser escrito como uma combinação linear dos demais, portanto

$$A_1 = \frac{1}{10} \cosh^2 \xi_0, \quad (6.19)$$

$$A_2 = 0, \quad (6.20)$$

$$A_3 = -\frac{1}{60} \frac{\cosh^2 \xi_0}{P'_3(i \operatorname{senh} \xi_0)}, \quad (6.21)$$

$$A_n = 0, \quad (n \geq 4). \quad (6.22)$$

Substituindo isto na solução (6.17) e rearranjando os termos obtemos

$$U(\xi, \eta) = \alpha \frac{\cosh^2 \xi \operatorname{sen}^2 \eta \cosh^2 \xi_0}{10} \left[1 - \frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} + \frac{P'_3(\cos \eta)}{6} \left(\frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} - \frac{P'_3(i \operatorname{senh} \xi)}{P'_3(i \operatorname{senh} \xi_0)} \right) \right]. \quad (6.23)$$

A posição do eixo magnético é denotada por $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ sendo a mesma para os casos com e sem anisotropia, utilizando (2.26) temos que o eixo magnético esta localizado no

plano equatorial $\bar{\eta} = \pi/2$, então aplicando a condição (2.25) temos $\cosh^2 \xi = \frac{1}{2} \cosh^2 \xi_0$. A distância entre o eixo de simetria (origem) ao eixo magnético é $R_0 = c \cosh \bar{\xi}$, ou ainda $R_0 = a/\sqrt{2}$. A função U é um máximo no eixo magnético, denotado por U_0 , este é

$$U_0 = U(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = -\frac{3}{16} \frac{\cosh^4 \xi_0 \sinh^2 \xi_0}{P_3'(i \sinh \xi_0)}. \quad (6.24)$$

Combinando U_0 em (6.23) temos finalmente a função auxiliar, ou função fluxo transversal para o caso isotrópico em coordenadas esferoidal oblatas,

$$U(\xi, \eta) = -\frac{8U_0\alpha}{15} \frac{P_3'(i \sinh \xi_0) \cosh^2 \xi \sin^2 \eta}{\cosh^2 \xi_0 \sinh^2 \xi_0} \left[1 - \frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} + \frac{P_3'(\cos \eta)}{6} \left(\frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} - \frac{P_3'(i \sinh \xi)}{P_3'(i \sinh \xi_0)} \right) \right]. \quad (6.25)$$

Com (6.25) e (6.1) podemos calcular as componentes do campo magnético equivalente para a solução isotrópica

$$B_\xi^i = \frac{16B_0}{15} \frac{P_3'(i \sinh \xi_0) \cosh \xi \cos \eta}{\cosh^2 \xi_0 \sinh^2 \xi_0 \sqrt{\cosh^2 \xi - \sin^2 \eta}} \left[1 - \frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} - \frac{3}{2} [1 - 5 \cos(2\eta)] \times \left(\frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} - \frac{P_3'(i \sinh \xi)}{P_3'(i \sinh \xi_0)} \right) \right], \quad (6.26)$$

$$B_\eta^i = -\frac{16B_0}{15} \frac{P_3'(i \sinh \xi_0) \sinh \xi \sin \eta}{\cosh^2 \xi_0 \sinh^2 \xi_0 \sqrt{\cosh^2 \xi - \sin^2 \eta}} \left[1 - 2 \frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} - \frac{(1 - 5 \cos(2\eta))}{2} \times \left(\frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} - \frac{P_3'(i \sinh \xi)}{P_3'(i \sinh \xi_0)} \right) \right], \quad (6.27)$$

$$B_\phi^i = -\frac{B_0}{\cosh \xi \sin \eta}. \quad (6.28)$$

onde fizemos $B_0 = U_0/c^2 = \mu_0 \mathcal{I}_0/c$ e i significa isotrópico. Da equação (6.2) vemos que as componentes radial J_ξ e poloidal J_η da densidade de corrente são nulas, dado que para o cálculo delas envolve derivadas da função de corrente modificada \mathcal{I} , que nesta solução é uma constante, entretanto a componente toroidal não é nula,

$$J_\phi^i = 4(3 - 5 \cosh 2\xi_0) \frac{\sin \eta \cosh \xi}{\cosh^4 \xi_0 \sinh^2 \xi_0}. \quad (6.29)$$

A solução da equação de equilíbrio anisotrópico (2.75) para esse caso pode ser obtida com a transformada de Clemente, com a escolha da função de anisotropia σ_- . Em ordem de estudar os efeitos da escolha iremos escolher uma função linear (3.10) e

uma função mais complexa (3.12), com isso a função fluxo será dada por (3.11) e (3.13) respectivamente, as quantidades com o índice 1 denotam a função linear, enquanto as com o índice 2 denotam as com tangente hiperbólica. Portanto, as soluções possíveis para a função de fluxo transversal são

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sigma_0} \left[1 - \left\{ 1 + \frac{2 P'_3(\text{isenh}\xi_0) \cosh^2 \xi \text{sen}^2 \eta}{5 \cosh^2 \xi_0 \text{senh}^2 \xi_0} \left[1 - \frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} + \frac{P'_3(\cos \eta)}{6} \left(\frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} - \frac{P'_3(\text{isenh}\xi)}{P'_3(\text{isenh}\xi_0)} \right) \right] \right\}^{2/3} \right], \quad (6.30)$$

onde escolhemos $\bar{\sigma}_0 = 0$ e $\sigma_0 = 1/2\alpha U_0$, e a solução, usando (3.13)

$$\Psi_2 = -\frac{2}{\sigma_0} \tanh^{-1} \left[\tan \left\{ \frac{2 P'_3(\text{isenh}\xi_0) \cosh^2 \xi \text{sen}^2 \eta}{15 \cosh^2 \xi_0 \text{senh}^2 \xi_0} \left[1 - \frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} + \frac{P'_3(\cos \eta)}{6} \left(\frac{\cosh^2(\xi)}{\cosh^2(\xi_0)} - \frac{P'_3(\text{isenh}\xi)}{P'_3(\text{isenh}\xi_0)} \right) \right] \right\} \right]. \quad (6.31)$$

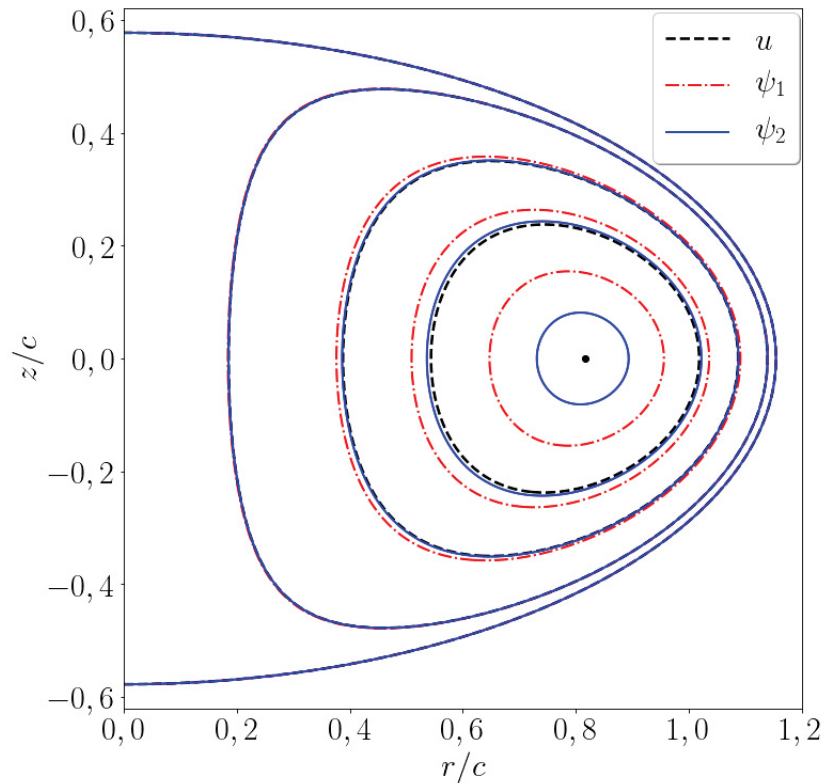


Figura 14 – Linhas tracejadas pretas para o caso isotrópico, linhas ponto traço vermelho para o caso anisotrópico com perfil linear σ_{-1} e linhas sólida azul para o perfil σ_{-2} . Nesta imagem é utilizado $b/a = 0,5$.

Na Figura 14 temos as curvas de contorno para (6.25), (6.30) e (6.31), onde fizemos a normalização $u = \sigma_0 U$, $\psi_1 = \sigma_0 \Psi_1$ e $\psi_2 = \sigma_0 \Psi_2$, há uma boa concordância entre os

contornos, especialmente para ψ_2 e u , a diferença entre eles aumenta nas proximidades do eixo magnético, mas nesta posição são iguais. A variação de ξ_0 muda o formato das curvas, quando este é pequeno as curvas são afinadas no eixo z , quando ξ_0 é próximo de 1 as curvas tem o formato de D similar a solução de Solovév em coordenadas cilíndricas para o caso em que não há campo toroidal $I = 0$. Utilizando (3.9), com as devidas funções de anisotropia temos que a função de corrente transversal é

$$I_1 = \frac{\mathcal{I}_0}{\left\{ 1 + \frac{2}{5} \frac{P'_3(i \operatorname{senh} \xi_0) \cosh^2 \xi \operatorname{sen}^2 \eta}{\cosh^2 \xi_0 \operatorname{senh}^2 \xi_0} \left[1 - \frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} + \frac{P'_3(\cos \eta)}{6} \left(\frac{\cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_0} - \frac{P'_3(i \operatorname{senh} \xi)}{P'_3(i \operatorname{senh} \xi_0)} \right) \right] \right\}^{1/3}}, \quad (6.32)$$

$$I_2 = \mathcal{I}_0 \sqrt{\cosh^2 \left\{ 2 \tanh^{-1} \left[\tan \left(\frac{\operatorname{sen}^2 \eta \cosh^2 \xi}{4 \cosh^4 \xi_0 \operatorname{senh}^2 \xi_0} (\cosh 2\xi - \cosh 2\xi_0)(\cosh 2\xi_0 + \cos 2\eta) \right) \right] \right\}}. \quad (6.33)$$

Com isso podemos calcular as componentes do campo magnético e densidade de corrente utilizando também (6.1) e (6.2), mas devido a complexidade das equações escrevemos de maneira simplificada com

$$B_\xi^1 = - \frac{2B_0\sigma_0}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta \sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta}, \quad (6.34)$$

$$B_\xi^1 = - \frac{2B_0\sigma_0}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta \sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta}, \quad (6.35)$$

$$B_\phi^1 = - \frac{B_0 \sqrt{1 - \sigma_0 \Psi_1}}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta}, \quad (6.36)$$

$$B_\xi^2 = - \frac{2B_0\sigma_0}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta \sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta}, \quad (6.37)$$

$$B_\xi^2 = - \frac{2B_0\sigma_0}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta \sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta}, \quad (6.38)$$

$$B_\phi^2 = - \frac{B_0 \sqrt{1 - \tanh^2 \Psi_2}}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta}, \quad (6.39)$$

onde $B_0 = \mu_0 \mathcal{I}_0 / c = U_0 \alpha / c^2$ e o índice 1 indica soluções utilizando a função anisotrópica linear (3.10) e o 2 indica a solução para a função (3.12). A densidade de corrente fica

$$J_\xi^1 = -J_0\sigma_0 \frac{(1 - \sigma_0\Psi_1)^{-3/2}}{2 \cosh \xi \operatorname{sen} \eta \sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \eta}, \quad (6.40)$$

$$J_\eta^1 = J_0\sigma_0 \frac{(1 - \sigma_0\Psi_1)^{-3/2}}{2 \cosh \xi \operatorname{sen} \eta \sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta}} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi}, \quad (6.41)$$

$$J_\phi^1 = 2c^2 J_0\sigma_0 \frac{\Delta^* \Psi_1}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta}, \quad (6.42)$$

$$J_\xi^2 = -J_0\sigma_0 \frac{(1 - \sigma_0 \tanh^2 \Psi_2)^{-3/2} \operatorname{sech}^2 \Psi_2 \tanh \Psi_2}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta \sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \eta}, \quad (6.43)$$

$$J_\eta^2 = J_0\sigma_0 \frac{(1 - \sigma_0 \tanh^2 \Psi_2)^{-3/2} \operatorname{sech}^2 \Psi_2 \tanh \Psi_2}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta \sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta}} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi}, \quad (6.44)$$

$$J_\phi^2 = 2c^2 J_0\sigma_0 \frac{\Delta^* \Psi_2}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta}, \quad (6.45)$$

onde $J_0 = \mathcal{I}_0/c^2$ e Δ^* é o operador de Grad-Shafranov em coordenadas oblatas (B.36). Na figura 15 temos o perfil radial ($\eta = \pi/2$) para o campo e densidade de corrente neste plano à componente radial ξ é nula para todas as soluções.

A mudança da razão b/a altera a fronteira do plasma, mas não muda a forma dos perfis. Na Figura 15(a) mostramos o perfil radial do campo poloidal B_η no plano equatorial. Vemos que para os casos isotrópico e anisotrópico há reversão do sinal na posição do eixo magnético, a solução (6.31) é mais próxima da solução isotrópica (6.25), mas ambas as soluções anisotrópicas possuem essencialmente as mesmas propriedades. O campo toroidal B_ϕ é descrito na Figura 15(b), não mostra reversão de sinal e aproxima-se de zero na superfície do plasma. Novamente vemos que a solução com a função de anisotropia de tangente é mais próxima da solução isotrópica, e (6.30) mostra pequenas diferenças para r/c entre 0,4 e 1,1.

O perfil radial correspondendo as componentes poloidal e toroidal da densidade de corrente são descritas nas Figuras 15(c) e 15(d), respectivamente. Neste caso a anisotropia cria uma corrente poloidal que não existe no caso isotrópico, apresentando reversão de sinal do eixo magnético, que leva à uma mudança similar para o campo magnético. A componente toroidal possui um comportamento curioso: no caso isotrópico decresce monotonicamente em direção a fronteira do plasma, de forma praticamente linear. As soluções anisotrópicas, por outro lado, exibe um comportamento não monotônico, especialmente na vizinhança do eixo magnético. Em particular, uma das soluções aumenta na fronteira, onde a outra diminui como a isotrópica.

As pressões na direção paralela e perpendicular ao campo magnético podem ser calculados com (3.14) e (3.15), que fornecem para o caso mais simples onde fazemos $\mathcal{I}_0 = 0$, ou seja, não há campo toroidal, sendo uma configuração de campo reverso, temos

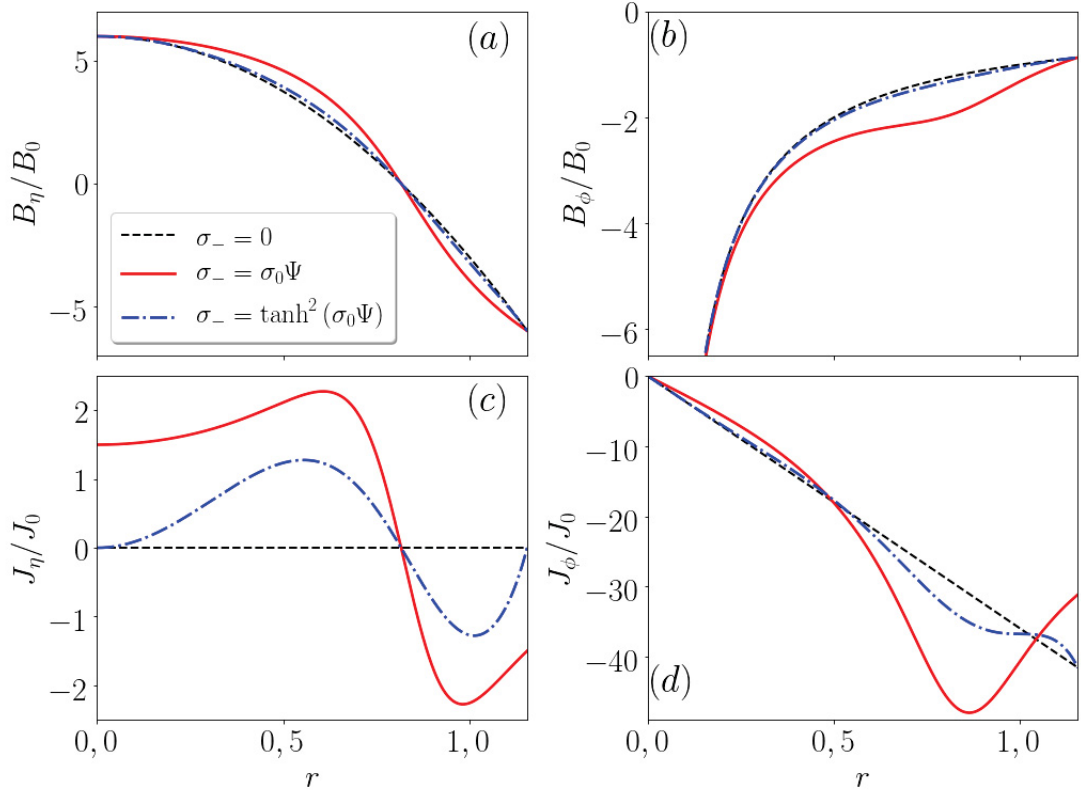


Figura 15 – Linhas tracejada pretas para o caso isotrópico, linhas cheias vermelhas para o caso anisotrópico com função de anisotropia linear 3.10 e linhas ponto traço azuis para o caso anisotrópico com função de anisotropia (3.12). Em (a) temos a componente do campo magnético poloidal, (b) componente toroidal, (c) componente poloidal da densidade de corrente e (d) componente toroidal. Em todas os quadros é utilizado $b/a = 0,5$.

$$\frac{p_{\parallel,1}}{p_0} = 1 + \frac{\alpha U}{\mu_0 c^4} - \frac{3}{32} \frac{\cosh^4 \xi_0 \sinh^2 \xi}{P_3'(i \sinh \xi_0)} (|B_\xi^1|^2 + |B_\eta^1|^2) \sigma_0 \Psi_1, \quad (6.46)$$

$$\frac{p_{\perp,1}}{p_0} = 1 + \frac{\alpha U}{\mu_0 c^4} + \frac{3}{32} \frac{\cosh^4 \xi_0 \sinh^2 \xi}{P_3'(i \sinh \xi_0)} (|B_\xi^1|^2 + |B_\eta^1|^2) \sigma_0 \Psi_1, \quad (6.47)$$

$$\frac{p_{\parallel,2}}{p_0} = 1 + \frac{\alpha U}{\mu_0 c^4} - \frac{3}{32} \frac{\cosh^4 \xi_0 \sinh^2 \xi}{P_3'(i \sinh \xi_0)} (|B_\xi^2|^2 + |B_\eta^2|^2) \tanh^2 \sigma_0 \Psi_2, \quad (6.48)$$

$$\frac{p_{\perp,2}}{p_0} = 1 + \frac{\alpha U}{\mu_0 c^4} + \frac{3}{32} \frac{\cosh^4 \xi_0 \sinh^2 \xi}{P_3'(i \sinh \xi_0)} (|B_\xi^1|^2 + |B_\eta^1|^2) \tanh^2 \sigma_0 \Psi_2. \quad (6.49)$$

Na Figura 16 temos o perfil radial das pressões no plano equatorial, vemos que para ambas escolhas da função de anisotropia (2.49) a pressão paralela é sempre maior que a pressão perpendicular ao campo magnético, exceto na separatriz (fronteira do plasma) e no eixo magnético onde elas são iguais. Esta diferença é devido à anisotropia causada por um campo magnético intenso, para o qual o movimento na direção do campo não tem restrições, enquanto o movimento perpendicular é altamente restrito, o que favorece o

movimento na direção paralela. As escolhas de diferentes σ_- leva a diferentes equilíbrios anisotrópicos, mas com propriedades semelhantes.

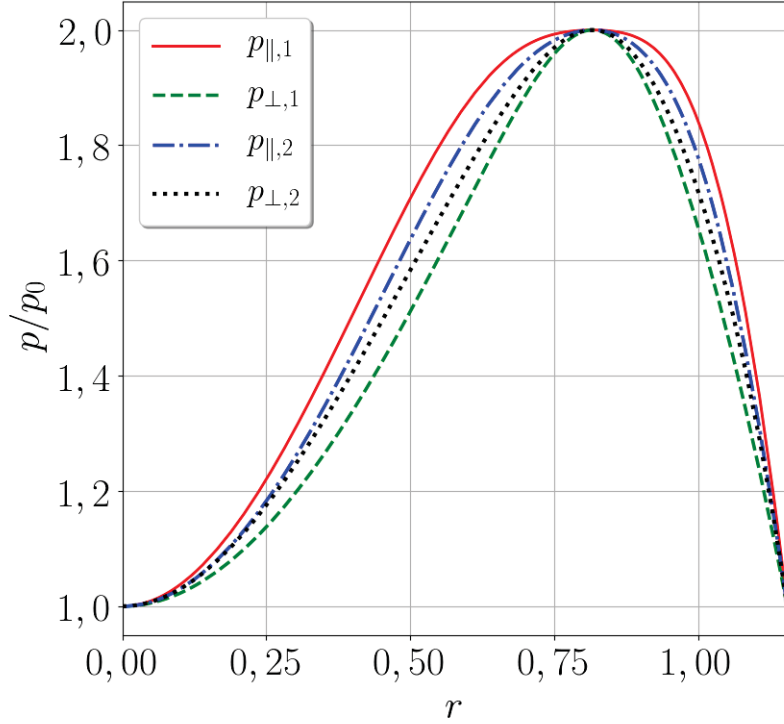


Figura 16 – Perfil radial das pressões para o caso $b/a = 0,5$. Curva cheia vermelha corresponde à pressão paralela, tracejada verde a perpendicular ao campo para o equilíbrio com (3.10). Curva traço ponto azul é pressão paralela e curva pontilhada preta é a pressão perpendicular para o caso (3.12).

Para considerarmos o caso de coordenadas esferoidais prolatas, temos apenas que realizar a transformação $i \cosh x \rightarrow \sinh x$, $i \sinh x \rightarrow \cosh x$ e $-ic \rightarrow c$ [65]. Realizando essa transformação sob (6.25), obtemos a solução para o equilíbrio MHD isotrópico em coordenadas prolatas, como feito por [39].

$$U(\xi, \eta) = \frac{8U_0\alpha}{15} \frac{P'_3(\cosh \xi_0) \sinh^2 \xi \sin^2 \eta}{\cosh^2 \xi_0 \sinh^2 \xi_0} \left[1 - \frac{\sinh^2 \xi}{\sinh^2 \xi_0} + \frac{P'_3(\cos \eta)}{6} \left(\frac{\sinh^2 \xi}{\sinh^2 \xi_0} - \frac{P'_3(\cosh \xi)}{P'_3(\cosh \xi_0)} \right) \right]. \quad (6.50)$$

Realizando o mesmo processo da transformada de Clemente podemos obter o equilíbrio anisotrópico e a partir dele derivar as quantidades físicas como campo magnético, densidade de corrente e pressão, entretanto os resultados são essencialmente os mesmo que o caso oblato.

CONCLUSÕES

Efeitos de anisotropia são esperados em plasmas de fusão e também em plasmas astrofísicos quando há um alto campo magnético. A existência de equilíbrio MHD ideal com eixo-simetria e efeitos de anisotropia, utilizando o tensor de CGL é a muito tempo conhecida, mas a equação correspondente é relativamente difícil de resolver. Quando as hipóteses de Mercier e Cotsafits, de que a função de anisotropia σ_- e a pressão "média" do plasma \bar{p} , podem ser tidas como função de superfície, são satisfeitas, é possível introduzir uma transformação integral que mapeia o equilíbrio anisotrópico em um isotrópico. Portanto, se uma solução do caso isotrópico é conhecida, é possível obter infinitas soluções do caso anisotrópico, por meio de inverter a transformação, que requer a hipótese adicional sobre a forma da função de anisotropia. Esta transformação foi desenvolvida para ser aplicada em sistemas de coordenadas ortogonais e não ortogonais.

Este método foi aplicado em equilíbrios toroidal eixo-simétricos descritos por coordenadas cilíndricas, esféricas e esferoidais oblatas, para a primeira é utilizada a solução analítica obtida por Solovév [44]. Em coordenadas esféricas, utilizamos o modelo de Morikawa para um plasma confinado por um campo magnético de um meio sem forças envolto a uma esfera condutora, que permite através da variação de um parâmetro levar a configuração de equilíbrio tipo vórtex de Hill para a solução de um meio sem forças. E em coordenadas esferoidais é usado a solução derivada por Kaneko *et al* [39, 40] e utilizamos duas funções diferentes para inverter a transformação integral, de forma que é obtido dois equilíbrios anisotrópico com fronteira esferoidal oblata. Uma simples transformação permite considerar o caso de esferoides prolatas, que mostra resultados essencialmente iguais.

Em todas os equilíbrios estudados foi obtido que a pressão paralela ao campo magnético é sempre maior que a pressão perpendicular, exceto na fronteira do plasma que elas são iguais, e para os equilíbrios em coordenadas cilíndricas e esferoidal onde as pressões assumem o mesmo valor sobre o eixo magnético. Para o sistema de coordenadas esféricas elas são iguais apenas na fronteira. A diferença de pressões é devido a anisotropia que surge devido ao alto campo magnético, que leva à um pequeno raio de Larmor, que restringe o movimento do plasma na direção perpendicular em um movimento de rotação enquanto para o movimento na direção do campo é livre, sendo então favorecida. Não ocorre uma mudança do eixo magnético devido a anisotropia. Para o campo magnético temos que a anisotropia causa pequenas alterações para todos os equilíbrios estudados, o mesmo é visto para densidade de corrente com exceção do equilíbrio em coordenadas esferoidais causa o surgimento de uma densidade de corrente na direção poloidal que

apresenta reversão de sinal.

O método da transformada de Clemente descrito, pode ser aplicado em qualquer sistema de coordenadas para qual a equação de equilíbrio MHD possui uma solução analítica de forma fechada, e devido a relativa liberdade de escolha do equilíbrio anisotrópico faz com que este seja uma ferramenta poderosa para gerar tais soluções analíticas. A obtenção destas soluções são úteis por duas razões. A primeira é a utilidade destas para realizar uma avaliação comparativa (benchmarking) de códigos computacionais, para resolver a equação de equilíbrio. E ainda, as soluções analíticas são uteis para o estudo de estabilidade e transporte MHD.

Como trabalhos futuros gostaríamos de explorar novas geometrias, em especial a toroidal com a solução do caso isotrópico baseada na solução de Shafranov [18]. E ainda em um artigo de 1994 Clemente [66] expande sua transformação integral para levar em conta a velocidade toroidal do plasma, reduzindo a equação de equilíbrio MHD anisotrópico com rotação toroidal na equação de Maschke-Perrin [67], que é a equação de equilíbrio isotrópico com rotação. A transformação permite obter configurações de equilíbrio anisotrópico com rotação toroidal. No momento da escrita procuramos expandir o método de Clemente para incluir rotação em qualquer direção.

REFERÊNCIAS

- [1] F. F. Chen. Introduction to plasma physics and controlled fusion., New York: Plenum Press, 1984.
- [2] J. P. H. Goedbloed, J. P. Goedbloed, S. Poedets. Principles of magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas. Cambridge University Press, 2004.
- [3] J. A. Bittencourt. Fundamentals of Plasma Physics. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] H. Ritchie, M. Roser. Energy production & changing energy sources, Our World in data, 2014.
- [5] W. C Gough. In: Proc. Symp. Thermonuclear Fusion Reactor Design, Texas Tech University, Texas. p. 256, 1970.
- [6] J. P. Freidberg. Plasma Physics and Fusion Energy. Cambridge university press, 2008.
- [7] F. L. Ribe. Fusion reactor systems, Reviews of Modern Physics, **47**(1), p. 7, 1975.
- [8] L. C. Steinhauer. Review of field-reversed configurations. Physics of Plasmas, **18**(7), p. 070501, 2011.
- [9] K. Ikeda. Progress in the ITER physics basis, Nuclear Fusion, **47**(6), 2007.
- [10] R. M. Kulsrud. MHD description of plasma, Handbook of plasma physics., p. 115, 1983.
- [11] J. P. Goedbloed, R. Keppens, S. Poedts. Advanced magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas. Cambridge University Press, 2010.
- [12] T. Neukirch. Introduction to the Theory of MHD Equilibria. Create Space Independent Publishing Platform, **95**, 2015.
- [13] J. P. Freidberg. Ideal magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems, Reviews of Modern Physics, **54**(3), p. 801, 1982.
- [14] T. R. Jarboe. Review of spheromak research, Plasma Physics and Controlled Fusion, **36**(6), p. 945, 1994.

- [15] M. N. Bussac, H. P. Furth, M. Okabayashi, et al. Low-aspect-ratio limit of the toroidal reactor: the spheromak. No. PPPL-1472. Princeton Univ., 1978.
- [16] H. Grad, H. Rubin. Hydromagnetic equilibria and force-free fields, in Proceedings of the 2nd UN Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, **31**, p. 190, 1958.
- [17] R. Lüst, A. Schlüter. Stability of a Plasma, Zeitschrift fuer Naturforschung (West Germany) Divided into Z. Naturforsch., A, and Z. Naturforsch., B: Anorg. Chem., Org. Chem., Biochem., Biophys..., **12**, 1957.
- [18] V. D. Shafranov. Plasma equilibrium in a magnetic field. Reviews of plasma physics, **2**, p. 103, 1966.
- [19] -. Iter Technical Basis, International Atomic Energy Agency, Vienna, 2002.
- [20] S. Suckewer, H. P. Eubank, R. J. Goldston, et al. Toroidal plasma rotation in the Princeton Large Torus induced by neutral-beam injection, Physical Review Letters, **43**(3), p. 207, 1979.
- [21] V. D. Pustovitov. Anisotropic pressure effects on plasma equilibrium in toroidal systems. Plasma Physics and Controlled Fusion, **52**(6), p. 065001, 2010.
- [22] A. Fasoli, C. Gormenzano, H. L. Berk, et al. Physics of energetic ions. Nuclear Fusion, **47**(6), p. S264, 2007.
- [23] G. F. Chew, Goldberger, F. E. Low. The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, **236**(1204), p. 112-118, 1956.
- [24] W. M. Stacey. Fusion Plasma Physics John Wiley and Sons, 2012.
- [25] I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal, et al. An energy principle for hydro-magnetic stability problems, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, **244**(1236), p. 17-40, 1958.
- [26] C. Mercier and M. Cotsaftis. Equilibrium and stability of an axially symmetric plasma with anisotropic pressure. Nuclear Fusion, **1**(2), p. 121, 1961.
- [27] A. Sestero and A. Taroni. Numerical computation of toroidal equilibria with anisotropic pressure in the presence of a dominant vacuum toroidal field. Nuclear Fusion, **16**, p. 164-167, 1976.
- [28] P. J. Fielding and F. A. Haas. Dynamics of high- β tokamaks with anisotropic pressure. Nuclear Fusion, **19**(7), p. 855, 1979.

- [29] W. A. Cooper, G. Bateman, D. B. Nelson, et al. Beam-induced tensor pressure tokamak equilibria. *Nuclear Fusion*, **20**(8), p. 985, 1980.
- [30] W. A. Cooper. Kinetic and fluid ballooning stability in anisotropic ion tokamaks. *The Physics of fluids*, **26**(7), p. 1830-1835, 1983.
- [31] E. R. Salberta. Anisotropic pressure tokamak equilibrium and stability considerations. *The Physics of fluids*, **30**(9), p. 2796-2805, 1987.
- [32] H. M. Risz. Toroidal plasma configuration with anisotropic pressure. *Journal of plasma physics*, **38**(2), p. 209-222, 1987.
- [33] R. A. Clemente. Anisotropic axisymmetric equilibria via an analytic method. *Nuclear Fusion*, **33**(6), p. 963, 1993.
- [34] J. M. Hill. On a spherical vortex, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.(A.)*, (185), p. 213-245, 1894.
- [35] E. K. Maschke. Exact solutions of the MHD equilibrium equation for a toroidal plasma. *Plasma Physics*, **15**(6), p. 535, 1973.
- [36] F. Hernegger. Controlled fusion and plasma physics. In: *Proceedings of the 5th European Conference, Grenoble*. p. 26, 1972.
- [37] L. C. Souza, R. L. Viana. Anisotropic MHD equilibria in symmetric systems. *Physics of Plasmas*, **26**(4), p. 042502, 2019.
- [38] L. C. Souza, R. L. Viana, Anisotropic Axisymmetric MHD Equilibria in Spheroidal Coordinates. *Brazilian Journal Physics* **50**, 136–142 (2020)
- [39] S. Kaneko, K. Chiyoda, I. Hirota. Magnetohydrodynamic equilibrium with prolate spheroidal plasma-vacuum interface. *Journal of the Physical Society of Japan*, **50**(2), p. 359-360, 1981.
- [40] S. Kaneko, K. Chiyoda, I. Hirota, Magnetohydrodynamic Equilibrium with Spheroidal Plasma-Vacuum Interface—Compact Toroid without Toroidal Magnetic Field. *Journal of the Physical Society of Japan*, **52**(6), p. 2016-2024, 1983.
- [41] S. Kaneko, A. Kamitani, A. Takimoto. Magnetohydrodynamic equilibrium and stability of spheromak with spheroidal plasma-vacuum interface. *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. **54**(9), p. (3347-3357), 1985.
- [42] J. W. Edenstrasser. The only three classes of symmetric MHD equilibria. *Journal of Plasma Physics*, **24**(3), p. 515-518, 1980.

- [43] M. Y. Kucinski, I. L. Caldas, MHD equilibrium equation in symmetric systems, arXiv:1103.5063, Publicações IFUSP/P-817.
- [44] L. S. Solovév. The theory of hydromagnetic stability of toroidal plasma configurations. *Sov. Phys. JETP*, **26**(2), p. 400-407, 1968.
- [45] T. Takeda and S. Tokuda. Computation of MHD equilibrium of tokamak plasma. *Journal of computational physics*, **93**(1), p. 1-107, 1991.
- [46] G. K. Morikawa. Double-Toroidal Hydromagnetic-Equilibrium Configurations within a Perfectly Conducting Sphere. *The Physics of Fluids*, **12**(8), p. 1648-1651, 1969.
- [47] J. D. B. Hodgson, T. Neukirich. A combined theory for magnetohydrodynamic equilibria with anisotropic pressure and magnetic shear. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **50**(10), p. 105501, 2017.
- [48] S. P. Auerbach, W. C. Condit. Classical diffusion in a field-reversed mirror. *Nuclear Fusion*, **21**(8), p. 927, 1981.
- [49] A. Sykes. The Development of the spherical tokamak. *International Conference on Plasma Physics*, 2008.
- [50] K. Wiesemann. A short introduction to plasma physics, arXiv preprint arXiv:1404.0509, 2014.
- [51] K. D. Machado. *Teoria do eletromagnetismo*, vol. 1. Ed. 2, Ponta Grossa., 2004.
- [52] D. D. Schnack. *Lectures in magnetohydrodynamics: with an appendix on extended MHD*. Springer, 2009.
- [53] H. M. Nussenzveig. *Curso de Física Básica: fluidos, oscilações e ondas, calor*, Editora Blucher, 2018.
- [54] K. D. Machado, *Teoria do eletromagnetismo*, vol. 3, Ed. 2, Ponta Grossa., 2017.
- [55] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Ed. 3, Wiley India Pvt. Limited, 2007.
- [56] G. M. Kremer. *Uma introdução à teoria cinética relativística*, Editora UFPR, 1998.
- [57] R. L. Viana, *Magnetohidrodinâmica, Notas de aula à serem publicadas*, 2019.
- [58] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. *Fluid mechanics*, Butterworth-Heinemann, 1987.
- [59] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskij. *Course of theoretical physics. 10: Physical kinetics*. Oxford, 1981.
- [60] H. J. Lee. *Fundamentals of Theoretical Plasma Physics*, World Scientific Publishing Company Pte Limited, 2019.

-
- [61] L. E. Zakharov and V. D. Shafranov. Evolution of equilibrium of toroidal plasma, Equilibrium of a toroidal plasma with noncircular cross section. IV Kurchatov Institute of Atomic Energy, Moscow, 1973.
- [62] H. Grad. Magneto-fluid and plasma dynamics, American Mathematical Society, 1967.
- [63] K. D. Machado. Teoria do eletromagnetismo, vol. 2. Ed. 2, Ponta Grossa., 2013.
- [64] E. Butkov. Física matemática, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- [65] P. M. Morse, H. Feshbach. Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, Part II, 1953.
- [66] R. A. Clemente, A method for obtaining rotating anisotropic toroidal equilibria. Plasma physics and controlled fusion,**36**(4), p. 707, 1994.
- [67] E. K. Maschke, H. Perrin, Exact solutions of the stationary MHD equations for a rotating toroidal plasma. Plasma Physics, **22**(6), p. 579, 1980.
- [68] S. P. Hirshman. Curvilinear coordinates for magnetic confinement geometries (Oak Ridge National Laboratory Report ORNL/TM-8393, August 1982.
- [69] W. D. D'haeseleer, W. N. Hitchon, J. D. Callen, et al. Flux coordinates and magnetic field structure: a guide to a fundamental tool of plasma theory, Springer Science & Business Media, 2012.

Apêndices

APÊNDICE A – COORDENADAS CURVILÍNEAS

Neste apêndice faremos, um breve apanhado da teoria de coordenadas curvilineas, que será utilizada em diversas partes do texto. Seguiremos essencialmente a nomenclatura adotado por Zakharov e Shafranov, com adendos de Hirshman [18, 61, 68]. Uma dedução mais completa pode ser encontrada no livro de D’haesleer, Hitchon, Callen e Shonet [69]. Iremos utilizar a convenção de soma de Einstein, de soma sobre índices repetidos a não ser que seja explicitamente indicado o contrário.

A.1 Conceitos fundamentais

Vamos considerar um sistema de coordenadas curvilineas contravariantes $x^i = x^1, x^2, x^3$ no qual o vetor posição no espaço pode ser escrito como $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$. Definimos uma superfície coordenada pela condição $x^i(\mathbf{r}) = c^i = const.$, ($i = 1, 2, 3$). Como $\mathbf{r} = x^i \hat{\mathbf{e}}_i$, podemos definir os vetores de base covariantes como:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}, \quad (\text{A.1})$$

de tal modo que $\hat{\mathbf{e}}_i$ é tangente à curva coordenada- x^i , ou seja à interseção entre as superfícies coordenadas x^j e x^k .

Os vetores de base contravariantes serão normais as superfícies coordenadas Figura 17, tal que:

$$\hat{\mathbf{e}}^k = \nabla x^k. \quad (\text{A.2})$$

Considerando intersecções entre curvas coordenadas podemos escrever relações entre vetores de base co e contra-variantes da forma:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = c_i \hat{\mathbf{e}}^j \times \hat{\mathbf{e}}^k, \quad (i \neq j \neq k) \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{\mathbf{e}}^i = c^i \hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (i \neq j \neq k) \quad (\text{A.4})$$

com i, j e k em permutação cíclica dos índice 1,2 e 3. E ainda c^i, c_i são coeficientes a serem determinados. O gradiente de uma função $\Phi(\mathbf{r})$ é escrito como:

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \nabla x^i = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \hat{\mathbf{e}}^i = \partial_i \Phi \hat{\mathbf{e}}^i. \quad (\text{A.5})$$

Além disso o elemento de linha vetorial é escrito como

$$d\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i = dx^i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (\text{A.6})$$

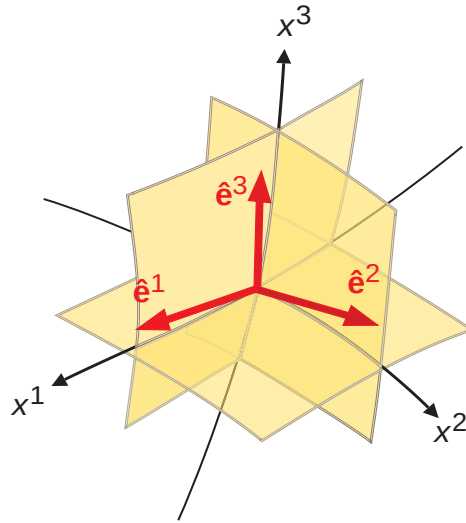


Figura 17 – Vetores de base contravariantes e superfícies coordenadas.

de forma que, combinando (A.5) e (A.6) resulta

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} dx^j \hat{\mathbf{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j, \quad (\text{A.7})$$

todavia, a expressão para a diferencial total de uma função é

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} dx^i. \quad (\text{A.8})$$

Logo, $dx^i = dx^j \hat{\mathbf{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$, com isso obtemos a relação de ortonormalidade:

$$\hat{\mathbf{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_j^i, \quad (\text{A.9})$$

onde δ_j^i é a delta de Kronecker $\delta_j^i = 1$ para $i = j$ $\delta_j^i = 0$ caso contrário. Tomando o produto escalar de (A.3) com $\hat{\mathbf{e}}^j$ assim como de (A.4) com $\hat{\mathbf{e}}_j$, obtemos os coeficiente:

$$c^i = \frac{1}{\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{e}}_k}, \quad (\text{A.10})$$

$$c_i = \frac{1}{\hat{\mathbf{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}^j \times \hat{\mathbf{e}}^k}. \quad (\text{A.11})$$

O jacobiano da transformação de coordenadas $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ é denotado por \sqrt{g} e este é dado por $\sqrt{g} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \times \hat{\mathbf{e}}_k$, e ainda devido a propriedade cíclica do produto misto somos levados à

$$c^1 = c^2 = c^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad (\text{A.12})$$

Utilizando a transformada inversa assim como a propriedade cíclica chegamos em:

$$c_1 = c_2 = c_3 = \sqrt{g}. \quad (\text{A.13})$$

A.2 Tensor métrico

O quadrado do elemento de linha pode ser escrito como uma somatória dupla:

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{A.14})$$

onde g_{ij} são os elementos do tensor métrico covariante. Utilizando (A.6), obtemos que:

$$g_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j, \quad (\text{A.15})$$

Logo $g_{ij} = g_{ji}$ o tensor métrico é simétrico. Expressando o módulo quadrado do gradiente de uma função escalar como uma forma quadrática das derivadas parciais, obtemos que

$$g^{ij} = \hat{\mathbf{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}^j. \quad (\text{A.16})$$

O tensor métrico contravariante é o inverso do covariante, e o produto de ambos resulta na identidade, $g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$. E ainda tomando o quadrado de \sqrt{g} obtemos $g = \det(g_{ij}) = \frac{1}{\det(g^{ij})}$.

A.3 Componentes vetoriais

Um vetor qualquer \mathbf{A} pode ser expresso em termo de coordenadas contra e covariantes $\mathbf{A} = A^i \hat{\mathbf{e}}_i = A_i \hat{\mathbf{e}}^i$, tal que o produto escalar de dois vetores, utilizando (A.9), é

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B^i = A^i B_i. \quad (\text{A.17})$$

O produto vetorial é obtido usando (A.3) e (A.4), para a i -ésima componente:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^i = \frac{1}{\sqrt{g}} (A_j B_k - A_k B_j). \quad (\text{A.18})$$

Índices podem ser levantados ou rebaixados com o auxílio das componentes do tensor métrico, $A^i = A_k g^{ki}$ e $A_i = A^k g_{ki}$. Utilizando (A.17), podemos escrever o módulo quadrado de um vetor de uma forma quadrática de suas componentes co ou contravariantes, como

$$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = g_{ij} A^i A^j = g^{ij} A_i A_j, \quad (\text{A.19})$$

Em geral o vetor \mathbf{A} irá representar uma quantidade física, porém devido ao fator \sqrt{g} , as dimensões das componentes co e contravariantes não serão as mesmas do próprio vetor. Para remediar este problema, definimos para sistemas ortogonais as chamadas componentes físicas, um sistema ortogonal é aquele que o tensor métrico é diagonal, ou seja, $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$. As componentes "físicas" são:

$$A_{\langle i \rangle} = \sqrt{g^{ii}} A_i = \sqrt{g_{ii}} A^i, \quad (\text{A.20})$$

o índice repete, mas não soma. Também introduzimos os vetores de base ortonormais, definidos como

$$\hat{\mathbf{e}}_{\langle i \rangle} = \sqrt{g^{ii}} \hat{\mathbf{e}}_i = \sqrt{g_{ii}} \hat{\mathbf{e}}^i, \quad (\text{A.21})$$

onde novamente o índice i não soma, apesar de ser repetido. Estes novos vetores de base satisfazem uma relação de ortonormalidade $\hat{\mathbf{e}}_{\langle i \rangle} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\langle j \rangle} = \delta_{ij}$. Com isso um vetor se escreve como:

$$\mathbf{A} = A_{\langle i \rangle} \hat{\mathbf{e}}_{\langle i \rangle}. \quad (\text{A.22})$$

A.4 Operadores diferenciais vetoriais

O gradiente de função escalar $\Phi(\mathbf{r})$ foi definido em (A.5). O divergente de uma função vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ é

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (A^i \hat{\mathbf{e}}_i) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^i). \quad (\text{A.23})$$

O rotacional de uma função vetorial é

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times (A_i \hat{\mathbf{e}}^i) = A_i \nabla \times \hat{\mathbf{e}}^i + (\nabla A_i) \times \hat{\mathbf{e}}^i \\ &= A_i \nabla \times \nabla x^i + \partial_j A_i \hat{\mathbf{e}}^j \times \hat{\mathbf{e}}^i, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

que pode ser escrito utilizando o símbolo de Levi-Civita ε^{ijk} (este é +1 para uma permutação par, ou -1 para uma permutação ímpar, ou ainda, 0 caso contrário), como isso o rotacional fica

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \partial_i A_j \hat{\mathbf{e}}_k. \quad (\text{A.25})$$

O laplaciano de uma função escalar, de acordo com (A.5) é dado por

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} (\nabla \Phi)^i),$$

ou

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \right). \quad (\text{A.26})$$

E ainda iremos definir o chamado operador de Shafranov [18, 42] em

$$\begin{aligned} \Delta^* \Phi &= g_{33} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \Phi}{g_{33}} \right) \\ &= \nabla^2 \Phi - \frac{1}{g_{33}} \nabla g_{33} \cdot \nabla \Phi, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

ou ainda

$$\Delta^* \Phi = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left(g^{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} + g^{12} \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left(g^{12} \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} + g^{22} \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \right) \right] \right\}. \quad (\text{A.28})$$

APÊNDICE B – SISTEMAS DE COORDENADAS

Neste apêndice nós iremos abordar os sistemas de coordenadas empregados nesse trabalho, utilizando os resultados obtidos no apêndice anterior. Uma descrição mais completa sobre sistemas de coordenadas curvilínea pode ser encontrada em [68, 69].

B.1 Coordenadas cilíndricas

As coordenadas contravariantes são $\{x^1, x^2, x^3\} \rightarrow \{R, Z, \phi\}$ Figura 18, neste sistema a coordenada x^3 é um ângulo, o que é adequado para descrever equilíbrios com simetria rotacional. As superfícies coordenadas são:

$$\begin{cases} x^1 = \text{const.} & \text{cilindros coaxiais com o eixo } z, \\ x^2 = \text{const.} & \text{planos perpendiculares ao eixo } z, \\ x^3 = \text{const.} & \text{planos contendo o eixo } z. \end{cases}$$

O tensor métrico covariante é dado por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

As componentes físicas de um vetor é

$$A_{\langle 1 \rangle} = A_R = A^1, \quad (\text{B.2})$$

$$A_{\langle 2 \rangle} = A_Z = A^2, \quad (\text{B.3})$$

$$A_{\langle 3 \rangle} = A_\phi = rA^3. \quad (\text{B.4})$$

Os vetores de base ortonormais são

$$\hat{\mathbf{e}}_{\langle 1 \rangle} = \hat{\mathbf{e}}_R = \hat{\mathbf{e}}_1, \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\langle 2 \rangle} = \hat{\mathbf{e}}_Z = \hat{\mathbf{e}}_2, \quad (\text{B.6})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\langle 3 \rangle} = \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{R}\hat{\mathbf{e}}_3. \quad (\text{B.7})$$

Os operadores vetoriais são dados a baixo para uma função $\Phi(\mathbf{r})$ e para um vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, o gradiente é

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial R}\hat{\mathbf{e}}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{\partial\Phi}{\partial Z}\hat{\mathbf{e}}_Z, \quad (\text{B.8})$$

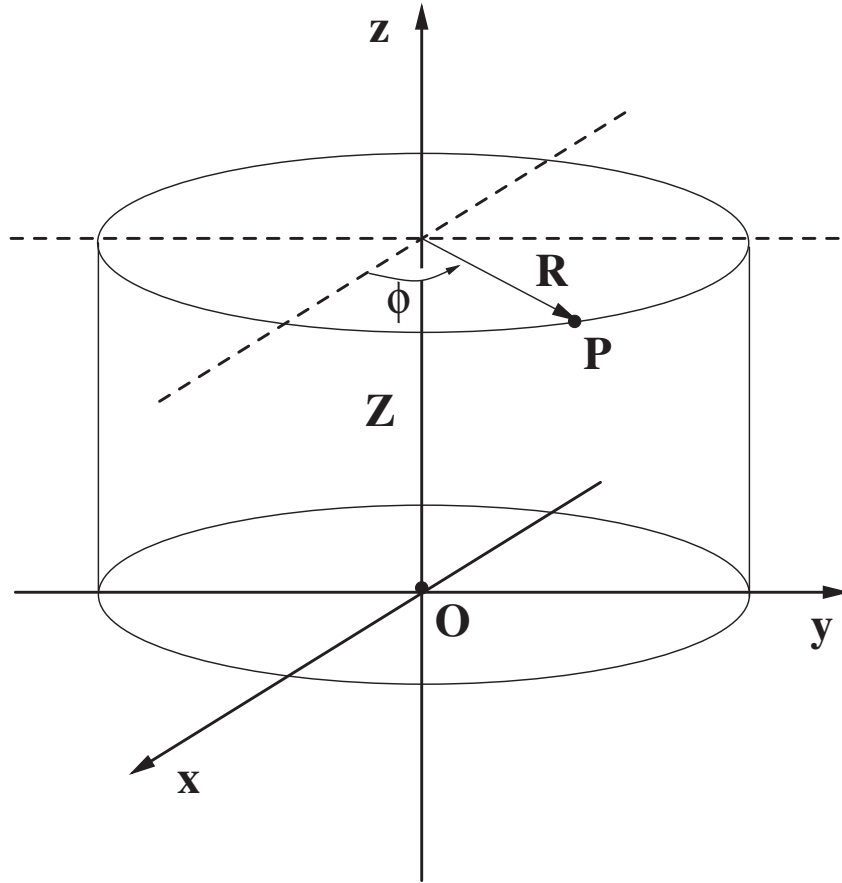


Figura 18 – Esquema das coordenadas cilíndricas. Retirado de [57].

Divergente

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} + \frac{\partial A_Z}{\partial Z}. \quad (\text{B.9})$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial Z} - \frac{1}{R} \frac{\partial A_Z}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_R + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial A_R}{\partial \phi} - \frac{\partial (R A_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{e}}_Z + \left(\frac{\partial A_Z}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial Z} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi. \quad (\text{B.10})$$

Laplaciano

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2}. \quad (\text{B.11})$$

Operador de Shafranov

$$\Delta^* \Phi = R \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2}. \quad (\text{B.12})$$

B.2 Coordenadas esféricas

As coordenadas contravariantes são $\{x^1, x^2, x^3\} \rightarrow \{r, \theta, \phi\}$, Figura 19. As superfícies coordenadas são:

$$\begin{cases} x^1 = \text{const.} & \text{superfícies esféricas de raio } r, \\ x^2 = \text{const.} & \text{superfícies cônicas com vértices na origem,} \\ x^3 = \text{const.} & \text{sempiplanos contendo o eixo } z. \end{cases}$$

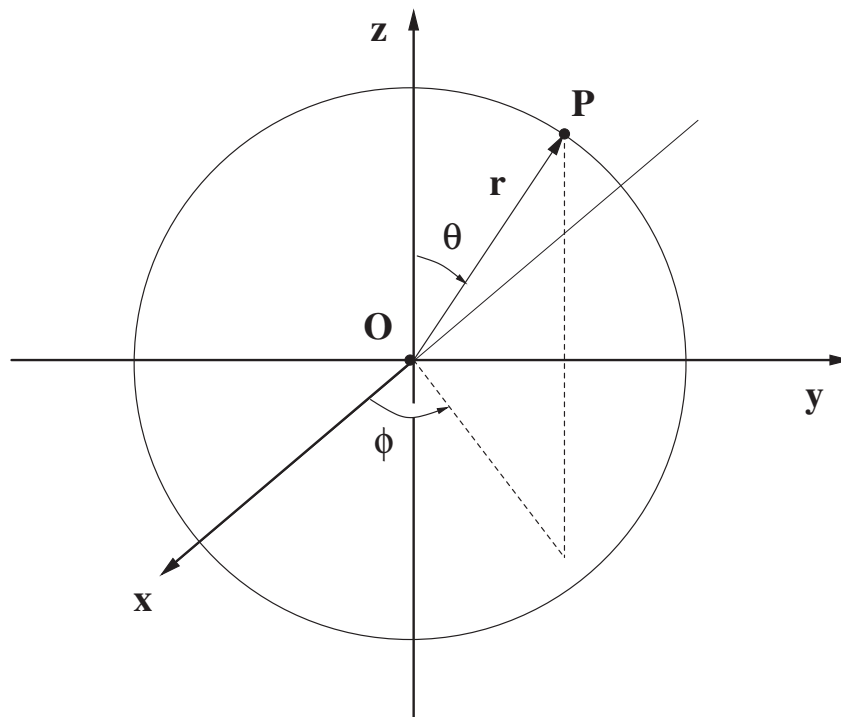


Figura 19 – Esquema das coordenadas esféricas. Retirado de [57].

O tensor métrico covariante é dado por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

As componentes físicas de um vetor é

$$A_{\langle 1 \rangle} = A_r = A^1, \quad (\text{B.14})$$

$$A_{\langle 2 \rangle} = A_\theta = r A^2, \quad (\text{B.15})$$

$$A_{\langle 3 \rangle} = A_\phi = r \text{sen} \theta A^3. \quad (\text{B.16})$$

Os vetores de base ortonormais são

$$\hat{\mathbf{e}}_{\langle 1 \rangle} = \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_1, \quad (\text{B.17})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\langle 2 \rangle} = \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_2, \quad (\text{B.18})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\langle 3 \rangle} = \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (\text{B.19})$$

Os operadores vetoriais são dados a baixo para uma função $\Phi(\mathbf{r})$ e para um vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, o gradiente é

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (\text{B.20})$$

Divergente

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right], \quad (\text{B.21})$$

Rotacional

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_r + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (\text{B.22})$$

Laplaciano

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}, \quad (\text{B.23})$$

Operador de Shafranov

$$\Delta^* \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (\text{B.24})$$

B.3 Coordenadas esferoidal-oblatas

As coordenadas contravariantes são $\{x^1, x^2, x^3\} \rightarrow \{\xi, \eta, \phi\}$, Figura 20. As superfícies coordenadas são:

$$\begin{cases} x^1 = \text{const.} & \text{esferoides oblatos (achatados) com distância focal } 2c, \\ x^2 = \text{const.} & \text{hiperbolóides de revolução,} \\ x^3 = \text{const.} & \text{sempianos contendo o eixo } z. \end{cases}$$

O tensor métrico covariante é dado por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} c^2(\cosh^2 \xi - \sin^2 \eta) & 0 & 0 \\ 0 & c^2(\cosh^2 \xi - \sin^2 \eta) & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \eta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.25})$$

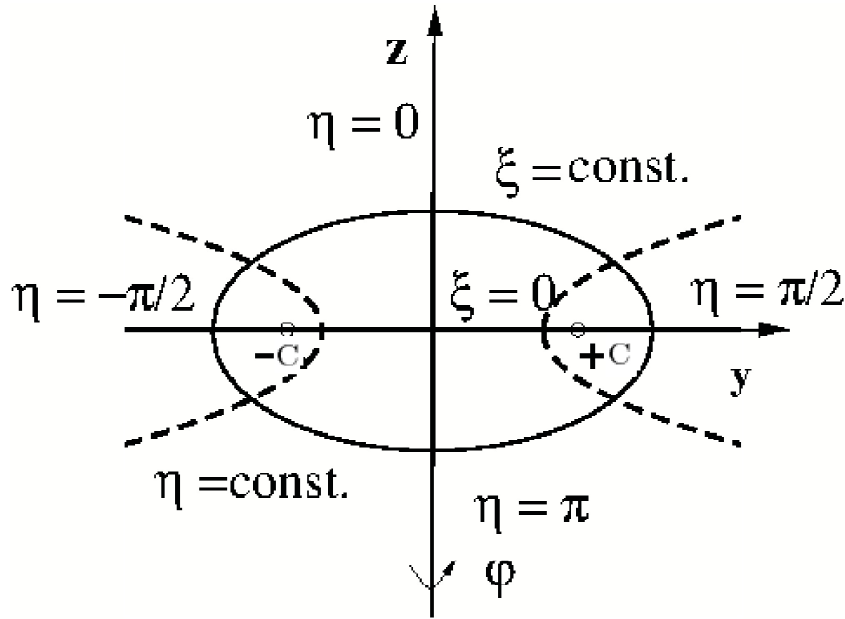


Figura 20 – Esquema das coordenadas esféricas oblatas. Retirado de [57].

As componentes físicas de um vetor é

$$A_{\langle 1 \rangle} = A_{\xi} = c\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta} A^1, \quad (\text{B.26})$$

$$A_{\langle 2 \rangle} = A_{\eta} = c\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta} A^2, \quad (\text{B.27})$$

$$A_{\langle 3 \rangle} = A_{\phi} = c \cosh \xi \operatorname{sen} \eta A^3. \quad (\text{B.28})$$

Os vetores de base ortonormais são

$$\hat{\mathbf{e}}_{\langle 1 \rangle} = \hat{\mathbf{e}}_{\xi} = \frac{1}{c\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta}} \hat{\mathbf{e}}_1, \quad (\text{B.29})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\langle 2 \rangle} = \hat{\mathbf{e}}_{\eta} = \frac{1}{c\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta}} \hat{\mathbf{e}}_2, \quad (\text{B.30})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\langle 3 \rangle} = \hat{\mathbf{e}}_{\phi} = \frac{1}{c \cosh \xi \operatorname{sen} \eta} \hat{\mathbf{e}}_3. \quad (\text{B.31})$$

Os operadores vetoriais são dados a baixo para uma função $\Phi(\mathbf{r})$ e para um vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, o gradiente é

$$\nabla \Phi = \frac{1}{c\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \hat{\mathbf{e}}_{\xi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \hat{\mathbf{e}}_{\eta} \right) + \frac{1}{c \cosh \xi \operatorname{sen} \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_{\phi}, \quad (\text{B.32})$$

Divergente

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{c(\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta)} \left\{ \frac{1}{\cosh \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta} \cosh \xi A_{\xi} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta} \operatorname{sen} \eta A_{\eta} \right) + \frac{1}{c \cosh \xi \operatorname{sen} \eta} \frac{\partial A_{\phi}}{\partial \phi} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{c\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta} \cosh \xi \operatorname{sen} \eta} \left\{ \left(\cosh \xi \frac{\partial}{\partial \eta} (\operatorname{sen} \eta A_\phi) - \sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta} \frac{\partial A_\eta}{\partial \Phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_\xi \right. \\ & + \left. \left(\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta} \frac{\partial A_\xi}{\partial \Phi} - \operatorname{sen} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} (\cosh \xi A_\phi) \right) \hat{\mathbf{e}}_\eta \right\} \\ & + \frac{1}{c(\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta} A_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\sqrt{\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta} A_\xi) \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Laplaciano

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2(\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta)} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \tanh \xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \cot \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{c^2 \cosh^2 \xi \operatorname{sen}^2 \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}, \quad (\text{B.35})$$

Operador de Shafranov

$$\Delta^* \Phi = \frac{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta}{c^2(\cosh^2 \xi - \operatorname{sen}^2 \eta)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\cosh \xi \operatorname{sen} \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) \right]. \quad (\text{B.36})$$

APÊNDICE C – ARTIGOS PUBLICADOS

Anisotropic MHD equilibria in symmetric systems

Cite as: Phys. Plasmas **26**, 042502 (2019); doi: [10.1063/1.5084793](https://doi.org/10.1063/1.5084793)

Submitted: 7 December 2018 · Accepted: 18 March 2019 ·

Published Online: 8 April 2019



View Online



Export Citation



CrossMark

Leonardo C. Souza and Ricardo L. Viana^{a)}

AFFILIATIONS

Universidade Federal do Paraná, Departamento de Física, Curitiba, Paraná 81531-990, Brazil

^{a)} Author to whom correspondence should be addressed: viana@fisica.ufpr.br.

ABSTRACT

Using a method developed by Clemente, it is possible to obtain anisotropic magnetohydrodynamic equilibrium in axially symmetric systems, from a previously known solution of the Grad-Schlüter-Shafranov equation. We generalize this method to symmetric systems described by orthogonal as well as nonorthogonal systems of coordinates. Two examples are presented in cylindrical and spherical geometries, for which we give an exact analytic solution of the anisotropic MHD equilibrium.

Published under license by AIP Publishing. <https://doi.org/10.1063/1.5084793>

I. INTRODUCTION

When there exists a strong magnetic field acting upon a fusion plasma, it may be adequate to replace the isotropic plasma pressure by an anisotropic expression which distinguishes between pressures along and across the magnetic field local direction. Such a distinction can arise, for example, when auxiliary heating methods like neutral-beam injection are used. In a seminal paper, Chew, Goldberger, and Low (CGL)¹ have suggested the use of an anisotropic form for the pressure tensor. The fluid equations obtained with such an anisotropic tensor are now called double adiabatic equations.^{1,3}

The ideal magnetohydrodynamic (MHD) equilibrium equation with the anisotropic pressure tensor in the CGL form has been written by the first time by Mercier and Cotsaftis, who also studied the MHD stability of the resulting equilibrium configurations.⁴ Sestero and Taroni have obtained numerical solutions for toroidal equilibrium with anisotropic pressure in the presence of a vacuum toroidal field.⁵ The dynamics and stability of the axisymmetric and anisotropic plasma-vacuum system have been studied by Fielding and Haas.⁶ Numerical investigations of anisotropic equilibria within the framework of a CGL pressure tensor have been carried out by Cooper and co-workers.^{7,8} Approximate solutions of the anisotropic equilibrium equations have also been obtained.^{9,10}

Clemente¹¹ obtained a method to construct an infinite number of axisymmetric anisotropic MHD equilibria by transforming them to the Grad-Schlüter-Shafranov (GSS) equation describing equilibria with isotropic pressure.^{12–14} This method enabled the obtention of the first analytical solutions for the anisotropic equilibrium¹¹ from two known solutions of the GSS equation, namely a Hill vortex model for field reversed configuration and the Maschke-Hernegger solution in cylindrical coordinates.^{15,16}

The power of the Clemente method can only be fully harnessed, however, if the anisotropic equilibrium equation is expressed in a coordinate system with one ignorable coordinate to play the role of axisymmetry. In this work, we write down such an equation by considering suitable representations for quantities like the transversal flux function and current function, following the steps laid down by previous work on the isotropic MHD equation for symmetric systems.^{17,18} We apply the Clemente method to show how solutions in the anisotropic case can arise from transformations of the isotropic case, whenever the latter has previously known solutions.

We consider in detail two applications of the anisotropic equation: the first, in cylindrical coordinates, is the Solovév solution,¹⁹ which is widely used as a benchmark for numerical codes of equilibrium calculation.²⁰ The other one, in spherical coordinates, uses the solution proposed by Morikawa to the problem of a plasma sphere surrounded by a force-free medium and a spherical conducting shell.²¹ In both cases, we obtain analytical solutions for the anisotropic equation that enable us to calculate the radial profiles of the parallel and perpendicular pressures with respect to the local magnetic field direction.

This paper is organized as follows: in Sec. II, we consider the basic equations and the flux-based quantities to be used in this work. In Sec. III, we present a detailed derivation of the MHD equilibrium equation with anisotropic pressure given by the CGL model. The Clemente method for obtaining solutions of the anisotropic equation is shown in Sec. IV. Section V contains a discussion of the equilibrium equation in cylindrical coordinates, whereas Sec. VI considers spherical coordinates. Our Conclusions are presented in Sec. VII.

II. BASIC EQUATIONS

We start from the ideal MHD equations (SI units, where $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, are used)^{23,24}

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (4)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0, \quad (6)$$

where ρ , s , \mathbf{J} , \mathbf{E} , and \mathbf{B} represent the plasma density, specific entropy, current density, electric field, and magnetic induction, respectively. Here, \mathbf{T} represents the pressure tensor which, for an isotropic plasma, is spherical $\mathbf{T} = p\mathbf{l}$, where p is a scalar pressure and \mathbf{l} is the identity tensor.

The set of ideal MHD equations describing static ($\mathbf{v} = 0$) equilibrium (magnetohydrostatics) is

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (9)$$

A general description of axisymmetric MHD equilibria is obtained per using curvilinear contravariant coordinates (x^1, x^2, x^3) for a system described by the contravariant metric tensor $g^{ij} = \hat{\mathbf{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}^j$, where $\hat{\mathbf{e}}^i = \nabla x^i$ are contravariant basis vectors. Given an arbitrary vector \mathbf{a} with contravariant components (a^1, a^2, a^3) , its covariant components (a_1, a_2, a_3) can be obtained by application of the covariant metric tensor $g_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$, where $\hat{\mathbf{e}}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x^i$ are covariant basis vectors and \mathbf{r} is the position vector.^{25–27}

We suppose the existence of an ignorable coordinate $0 \leq x^3 \leq L$. The magnetic axis is a degenerate flux surface given by the x^3 -coordinate curve, for which $x^1 = a$.^{17,18} If we consider a coordinate surface $x^2 = \text{const.}$ and call S_2 the annulus bounded by the magnetic axis and a coordinate curve x^3 , the transversal flux function can be defined as the magnetic flux through S_2 per unit length in the x^3 direction (Fig. 1)¹⁸

$$\Psi(x^1, x^2) = \frac{1}{L} \int_a^{x^1} dx^1 \int_0^L dx^3 \sqrt{g} B^2, \quad (10)$$

where $g = \det(g_{ij})$. From Eq. (9) and using the symmetry with respect to x^3 , there results

$$B^1(x^1, x^2) = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2}, \quad B^2(x^1, x^2) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1}, \quad (11)$$

such that we can write a representation for the magnetic field

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \times \nabla \Psi + B_3 \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}}, \quad (12)$$

where $\hat{\mathbf{e}}_3$ is the covariant basis vector.

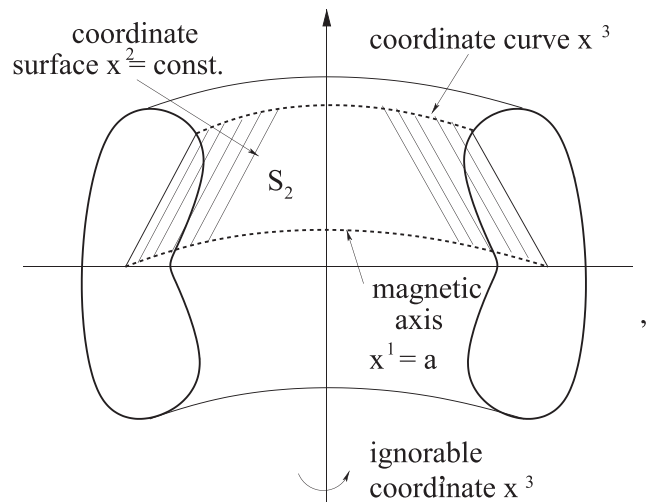


FIG. 1. Schematic figure showing some coordinate surfaces and curves in an axisymmetric system.

Taking the dot product of (12) with $\nabla \Psi$, we have $\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = 0$, i.e., $\Psi(x^1, x^2)$ has a constant value on a given flux surface. The divergence of Ampère's law (8) yields $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ so that, in analogy with the previous case, we can write a representation for the current density, as follows:

$$\mathbf{J} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \times \nabla I + J_3 \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}}, \quad (13)$$

where we define a transverse current flux $I(x^1, x^2)$ in terms of the total current flowing through the surface S_2 per unit length

$$I(x^1, x^2) = I_{axis} + \frac{1}{L} \int_a^{x^1} dx^1 \int_0^L dx^3 \sqrt{g} J^2, \quad (14)$$

where $I_{axis} = I(x^1 = a, x^2)$, in such a way that

$$J^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial I}{\partial x^2}, \quad J^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial I}{\partial x^1}. \quad (15)$$

Writing the magnetic field as $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ in (10) yields $\Psi = -A_3$ so that, similarly with what has been done with Ampère's law (8), we obtain $B_3(x^1, x^2) = -\mu_0 I(x^1, x^2)$.¹⁸ The representation (12) can thus be rewritten as

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \times \nabla \Psi - \mu_0 I \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}}, \quad (16)$$

the square modulus of which is thus

$$|B|^2 = \frac{1}{g_{33}} \left\{ |\nabla \Psi|^2 + \mu_0^2 I^2 \right\}. \quad (17)$$

Substituting (16) in Eq. (8) gives, after dotting with $\hat{\mathbf{e}}_3$, the current density component along the symmetric direction as

$$J_3 = \frac{1}{\mu_0} \Delta^* \Psi - I D, \quad (18)$$

in which we defined a generalized Shafranov operator¹⁷

$$\Delta^* \Psi = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left(g^{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + g^{12} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left(g^{12} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + g^{22} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \right) \right] \right\} \quad (19)$$

and a factor which is nonzero only for nonorthogonal coordinate systems

$$\mathcal{D} = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{23}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right]. \quad (20)$$

Substituting (16) and (13) in the Lorentz force term, we have

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{g_{33}} (J_3 \nabla \Psi + \mu_0 I \nabla I). \quad (21)$$

Taking the dot product with \mathbf{B} yields $\mathbf{B} \cdot \nabla I = 0$, i.e., $I = I(\Psi)$ is also constant on a given flux surface, so that $\nabla I = I' \nabla \Psi$ and

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{g_{33}} \left[\frac{1}{\mu_0} \Delta^* \Psi - ID + \frac{1}{2} \mu_0 (I^2)' \right] \nabla \Psi, \quad (22)$$

where the prime denotes differentiation with respect to Ψ .

III. ANISOTROPIC PRESSURE UNDER MERCIER-COTSAFTIS HYPOTHESES

If there is a strong magnetic field, the plasma responses are generally different at directions parallel and perpendicular to \mathbf{B} , so that we can use the Chew-Goldberger-Low expression^{1,2}

$$\mathbf{T} = p_{\perp} \mathbf{1} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{B^2} = p_{\perp} \mathbf{1} + \frac{1}{\mu_0} \sigma_{-} \mathbf{B}\mathbf{B}, \quad (23)$$

where p_{\parallel} and p_{\perp} are the pressures along and across the magnetic field and we define

$$\sigma_{-} = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{|B|^2 / \mu_0}. \quad (24)$$

From the condition $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, it turns out that

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla p_{\perp} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \nabla \sigma_{-}) + \frac{1}{\mu_0} \sigma_{-} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (25)$$

It is also convenient to define a mean pressure

$$\bar{p} = \frac{1}{2} (p_{\parallel} + p_{\perp}). \quad (26)$$

According Mercier and Cotsaftis, we shall use the following hypotheses⁴

- σ_{-} depends only on $\Psi(x^1, x^2)$,
- \bar{p} depends only on $\Psi(x^1, x^2)$,

such that $\nabla \sigma_{-} = (\sigma_{-})' \nabla \Psi$ and $\nabla \bar{p} = (\bar{p})' \nabla \Psi$. As a result

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \sigma_{-} = (\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi) (\sigma_{-})' = 0. \quad (27)$$

Inserting (27) in (25), there follows that

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 2 \nabla \bar{p} - \nabla p_{\parallel} + \sigma_{-} \nabla \left(\frac{|B|^2}{2\mu_0} \right) + \sigma_{-} \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (28)$$

where we used Ampère's law (8). Substituting (28) into the equilibrium condition (7) gives

$$\nabla \bar{p} - \frac{|B|^2}{2\mu_0} \nabla \sigma_{-} = (1 - \sigma_{-}) \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (29)$$

With the help of Eqs. (17) and (22), we obtain

$$(1 - \sigma_{-}) \left[\Delta^* \Psi - \mu_0 ID + \frac{\mu_0^2}{2} (I^2)' \right] = \frac{1}{2} [|\nabla \Psi|^2 + \mu_0^2 I^2] (\sigma_{-})' - \mu_0 g_{33} \bar{p}'. \quad (30)$$

After some algebra, we finally get an equilibrium equation for anisotropic plasmas with general symmetry with respect to x^3

$$\Delta^* \Psi - \mu_0 ID - \frac{\sigma_{-}'}{2(1 - \sigma_{-})} |\nabla \Psi|^2 = -\frac{1}{2(1 - \sigma_{-})} [\mu_0^2 I^2 (1 - \sigma_{-})]' - \frac{\mu_0 g_{33} \bar{p}'}{1 - \sigma_{-}}, \quad (31)$$

which, in the isotropic limit ($p_{\parallel} = p_{\perp} = \bar{p} = p$), reduces to the Grad-Schlüter-Shafranov equation

$$\Delta^* \Psi - \mu_0 ID = -\frac{\mu_0^2}{2} (I^2)' - \mu_0 g_{33} p'. \quad (32)$$

IV. THE CLEMENTE TRANSFORMATION

In the case $\sigma_{-} \neq 0$, Clemente has devised an ingenious method to solve the anisotropic equilibrium equation once a solution of the corresponding isotropic equilibrium equation is known.¹¹ Let us define the following auxiliary quantity:

$$U(\Psi) = \int_0^{\Psi} d\Phi \sqrt{1 - \sigma_{-}(\Phi)}, \quad (33)$$

so that the chain rule furnishes

$$\frac{d\bar{p}}{dU} = \frac{\bar{p}'}{\sqrt{1 - \sigma_{-}}} \quad (34)$$

and

$$\frac{d}{dU} \left[\frac{(1 - \sigma_{-}) I^2}{2} \right] = \frac{[I^2 (1 - \sigma_{-})]'}{2\sqrt{1 - \sigma_{-}}}. \quad (35)$$

Multiplying Eq. (31) by $\sqrt{1 - \sigma_{-}}$, and using (34) and (35), yields

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \sigma_{-}} \Delta^* \Psi - \mu_0 ID \sqrt{1 - \sigma_{-}} - \frac{\sigma_{-}' \sqrt{1 - \sigma_{-}}}{2(1 - \sigma_{-})} |\nabla \Psi|^2 \\ = -\mu_0^2 \frac{d}{dU} \left[\frac{(1 - \sigma_{-}) I^2}{2} \right] - \mu_0 g_{33} \frac{d\bar{p}}{dU}. \end{aligned} \quad (36)$$

According to definition (19) for the generalized Shafranov operator, a straightforward calculation results in

$$\sqrt{1 - \sigma_{-}} \Delta^* \Psi = \Delta^* U + \frac{\sigma_{-}'}{2(1 - \sigma_{-})^{3/2}} |\nabla U|^2. \quad (37)$$

Similarly, the Laplacian in curvilinear coordinates gives

$$\frac{\sigma'_- \sqrt{1-\sigma_-}}{2(1-\sigma_-)} |\nabla\Psi|^2 = \frac{1}{2} \sigma'_- (1-\sigma_-)^{-3/2} |\nabla U|^2. \quad (38)$$

Substituting (37) and (38) into (36), we obtain an equilibrium equation in terms of the auxiliary function U

$$\Delta^* U - \mu_0 \mathcal{I} \mathcal{D} = -\frac{1}{2} \mu_0^2 \frac{d\mathcal{I}^2}{dU} - \mu_0 g_{33} \frac{d\bar{p}}{dU}, \quad (39)$$

where we have defined a modified current function

$$\mathcal{I} = I\sqrt{1-\sigma_-}. \quad (40)$$

Note that Eq. (39) is formally equivalent to the Grad-Schlüter-Shafranov Eq. (32) provided $I \rightarrow \mathcal{I}$, $p \rightarrow \bar{p}$ and $\Psi \rightarrow U$. Hence, a known solution of the Grad-Schlüter-Shafranov equation can be used to obtain U . Once U is known, we can obtain σ_- by inverting the Clemente transformation (33). We shall limit ourselves to cases, where $|\sigma_-| < 1$. In order to invert (33), we have to make some assumption on the dependence of σ_- with Ψ . We can use a linear dependence as

$$\sigma_- = \sigma_0 + \sigma_1 \Psi, \quad (41)$$

where σ_0 and σ_1 are known constants. Inserting (41) into (33) and integrating, we have

$$\Psi(U) = \frac{1}{\sigma_1} \left\{ 1 - \sigma_0 - \left[(1 - \sigma_0)^{3/2} - \frac{3}{2} \sigma_1 U \right]^{2/3} \right\}. \quad (42)$$

Equation (39), just like the Grad-Schlüter-Shafranov equation, needs the previous specification of the functions $\bar{p}(U)$ and $\mathcal{I}(U)$ as well as adequate boundary conditions. Once we know a solution of Eq. (39) in the form $U(x^1, x^2)$, we use (41) and (42) so as to obtain the corresponding current function

$$I^2 = \frac{\mathcal{I}^2(U(\Psi))}{1 - \sigma_0 - \sigma_1 \Psi}, \quad (43)$$

which is necessary to compute $|B|^2$ from Eq. (17) and the known expression for Ψ . Then we use $|B|^2$ to obtain σ_- from (24). We thus obtain a linear system

$$p_{\parallel} + p_{\perp} = 2p(\Psi), \quad (44)$$

$$p_{\parallel} - p_{\perp} = \frac{|B|^2}{\mu_0} (\sigma_0 + \sigma_1 \Psi), \quad (45)$$

whose solution gives us the pressures along directions parallel and perpendicular to the magnetic field.

V. ANISOTROPIC EQUILIBRIUM EQ. IN CYLINDRICAL COORDINATES

In the cylindrical coordinate system ($x^1 = R$, $x^2 = Z$, $x^3 = \phi$), the ignorable coordinate is $0 \leq \phi < 2\pi$, such that the transversal flux function depends only on R and Z . Since $g = g_{33} = R^2$, the magnetic field and current density given, respectively, by (12), and (13), are

$$\mathbf{B}(R, Z) = \frac{1}{R} \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \times \nabla I - \frac{\mu_0 I}{R} \hat{\mathbf{e}}_{\phi}, \quad (46)$$

$$\mathbf{J}(R, Z) = \frac{1}{R} \hat{\mathbf{e}}_{\phi} \times \nabla I - \frac{1}{\mu_0 R} \Delta^* \Psi \hat{\mathbf{e}}_{\phi}, \quad (47)$$

where $\hat{\mathbf{e}}_{\phi}$ is the orthonormal basis vector and the Shafranov operator (19) is

$$\Delta^* = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}, \quad (48)$$

with $\mathcal{D} = 0$ since the system is orthogonal.

Substituting (48) into (39), we have the equilibrium equation for the auxiliary function $U(R, Z)$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = -\frac{1}{2} \mu_0^2 \frac{d\mathcal{I}^2}{dU} - \mu_0 R^2 \frac{d\bar{p}}{dU} = 0. \quad (49)$$

Solving this equation needs profiles for both \mathcal{I}^2 and \bar{p} as functions of U . Let us consider linear profiles for them, in the form

$$\bar{p}(U) = p_0 - \frac{aB_0}{\mu_0 R_0^2} U, \quad (50)$$

$$\mathcal{I}^2(U) = \mathcal{I}_0^2 - \frac{2bB_0}{\mu_0^2} U, \quad (51)$$

where \mathcal{I}_0 and p_0 are constants, B_0 and R_0 is a characteristic magnetic field intensity and length, respectively, and a and b are real parameters.

The equilibrium Eq. (49) for these profiles reads

$$\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = B_0 \left(a \frac{R^2}{R_0^2} + b \right). \quad (52)$$

In the context of the Grad-Schlüter-Shafranov equation, the solution of (52) was given by Solovév,¹⁹ defining the dimensionless variables $r = R/R_0$ and $z = Z/R_0$

$$U(R, Z) = B_0 R_0^2 \left[\frac{1}{2} (b + r^2) z^2 + \frac{1}{8} (a - 1) (r^2 - 1)^2 \right]. \quad (53)$$

We obtain the solution of the corresponding anisotropic equation by inverting the Clemente transformation. Adopting the linear relation (41) between σ_- and Ψ , we obtain from (42)

$$\Psi(U) = \frac{1}{\sigma_1} \left\{ 1 - \sigma_0 - \left[(1 - \sigma_0)^{3/2} - \frac{3}{2} \sigma_1 B_0 R_0^2 \times \left(\frac{1}{2} (b + r^2) z^2 + \frac{1}{8} (a - 1) (r^2 - 1)^2 \right) \right]^{2/3} \right\}. \quad (54)$$

We simplify matters by choosing $\sigma_0 = 0$ and $\sigma_1 = 1/(B_0 R_0^2)$, so that the normalized flux function $\psi = \Psi \sigma_1$ is

$$\psi(r, z) = 1 - \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} (b + r^2) z^2 + \frac{1}{8} (a - 1) (r^2 - 1)^2 \right) \right]^{2/3}. \quad (55)$$

The magnetic axis is located in the point where the function flux is extremal, this is, at the point $R = R_0$ and $Z = 0$. From Eq. (16), we can calculate the components of the magnetic field, we obtain

$$B_R = -\frac{B_0 z}{r} \frac{(b+r^2)}{\left[1 - \frac{3}{4}(b+r^2)z^2 - \frac{3}{16}(a-1)(r^2-1)^2\right]^{1/3}}, \quad (56)$$

$$B_Z = B_0 \frac{z^2 + [(a-1)(r^2-1)]/2}{\left[1 - \frac{3}{4}(b+r^2)z^2 - \frac{3}{16}(a-1)(r^2-1)^2\right]^{1/3}}, \quad (57)$$

$$B_\phi = \frac{B_0}{r} \frac{\sqrt{1 - b[(b+r^2)z^2 + (a-1)(r^2-1)^2/4]}}{\left[1 - \frac{3}{4}(b+r^2)z^2 - \frac{3}{16}(a-1)(r^2-1)^2\right]^{1/3}}, \quad (58)$$

where we use $B_0 = -\mu_0 \mathcal{I}_0 / R_0$. We can solve the linear system (44) and (45) for the pressures, yielding

$$p_{\parallel} = \frac{2\mu_0 p + |B|^2 \sigma_1 \Psi}{2\mu_0}, \quad (59)$$

$$p_{\perp} = \frac{2\mu_0 p - |B|^2 \sigma_1 \Psi}{2\mu_0}. \quad (60)$$

Finally, we can calculate the pressures along and across the magnetic field. For the case $\mathcal{I} = 0$ in the equatorial plane ($Z = 0$), the pressure yields

$$\begin{aligned} \frac{p_{\parallel, \perp}}{p_0} &= 1 - \beta^{-1} a \frac{(a-1)}{4} (r^2-1)^2 \\ &\pm \frac{\beta^{-1} (a-1)^2 (r^2-1)^2}{4 \left[1 - 3(a-1)(r^2-1)^2/16\right]^{2/3}} \\ &\times \left[1 - \left(1 - 3 \frac{(a-1)}{16} (r^2-1)^2\right)^{2/3}\right], \end{aligned} \quad (61)$$

where p_{\parallel} (p_{\perp}) corresponds to the upper (lower) sign, and the plasma beta is

$$\beta^{-1} = \frac{B_0^2 / 2\mu_0}{p_0}. \quad (62)$$

In Fig. 2, we have the curves of pressure for the equatorial plane for different values of the parameter a and $\beta = 2$. The pressure parallel to the magnetic field is greater than the perpendicular pressure for all cases. We can interpret this as a result of the preferential direction of motion created by the magnetic field. In the center of the cylinder, we have the largest difference between the pressures and both go to the same maximum value at the magnetic axis. The parameter a is greater than one, otherwise the pressure profile \bar{p} would have negative value, having no physical meaning.

The parameter a has a set of possible values, which we choose so that: (i) none of the pressures have negative values and (ii) the solution represents closed magnetic surfaces. We found that the set of values that respect these conditions is $1.0 < a \leq 3.0$. The difference of the parallel and perpendicular pressures is greater in the geometric axis of the cylinder ($r = 0$). In Fig. 3, we show how the difference of the pressures increases with a , for the point $r = 0.0001$, what can also be seen by comparing Figs. 2(a) and 2(c).

VI. SPHERICAL COORDINATES

In this section, we consider spherical coordinates ($x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$), with $0 \leq \varphi < 2\pi$ as the ignorable coordinate and, since this

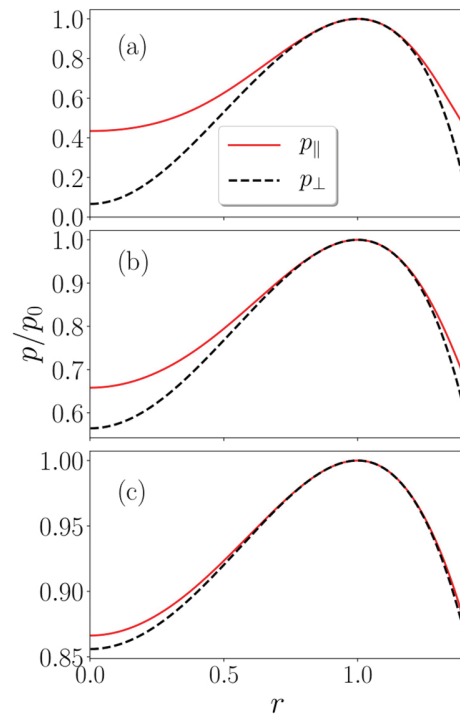


FIG. 2. Radial profiles of normalized parallel (full lines) and perpendicular (dash lines) pressures for $\beta = 2$ and (a) $a = 3$, (b) $a = 7/3$, and (c) $a = 5/3$.

system is orthogonal, $\mathcal{D} = 0$. The metric tensor is such that $g_{33} = r^2 \sin^2 \theta$ and $g = r^4 \sin^2 \theta$. Hence, the equilibrium Eq. (39) reads

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = -\frac{\mu_0^2}{2} \frac{d\mathcal{I}^2}{dU} - \mu_0 r^2 \sin^2 \theta \frac{d\bar{p}}{dU}. \quad (63)$$

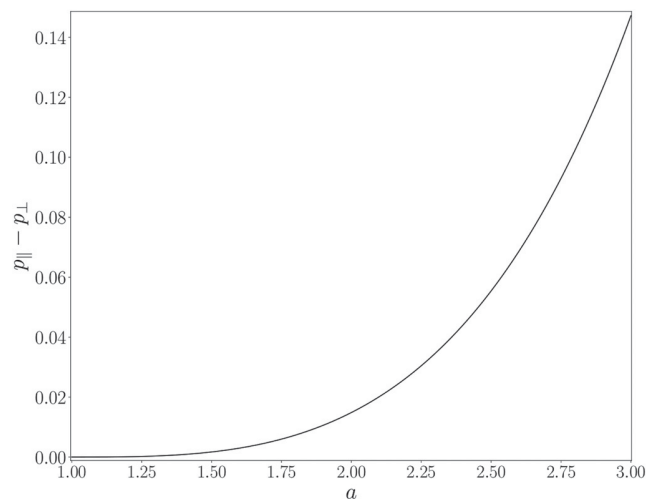


FIG. 3. Difference of pressures as a function of the parameter a for the cylindrical solution.

We consider essentially the same profiles proposed by Morikawa²¹ in his study of a spherical plasma ($0 \leq r \leq a$) surrounded by a force-free medium ($a \leq r < 1$) and a spherical conducting shell at $r = 1$. In this section, we shall consider that the radial distances are normalized by the radius of the conducting shell. For the plasma region

$$\bar{p}(U) = p_0 + \frac{\kappa^2}{\mu_0} U, \tag{64}$$

$$\mathcal{I}^2(U) = \mathcal{I}_0^2 + \frac{\lambda^2}{\mu_0^2} U^2, \tag{65}$$

and, for the force-free medium

$$\bar{p}(U) = 0, \tag{66}$$

$$\mathcal{I}^2(U) = \mathcal{I}_0^2 + \frac{\lambda^2}{\mu_0^2} U^2, \tag{67}$$

where κ and λ are both positive constants, as p_0 and \mathcal{I}_0 . In the force-free medium, we have $p_{\perp} = p_{\parallel} = 0$, such that \bar{p} vanishes identically.

The equilibrium Eq. (63) for the plasma region is

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \lambda^2 U = -\kappa^2 r^2 \sin^2 \theta, \tag{68}$$

and for the force-free medium, the corresponding equation is obtained by making $\kappa = 0$ in (68), that is, the homogeneous equation for (68). The solution given by Morikawa²¹ can be written as

$$U_1(r, \theta) = \left[A \left(\frac{\sin \lambda r}{\lambda r} - \cos \lambda r \right) - \frac{\kappa^2 r^2}{\lambda^2} \right] \sin^2 \theta, \tag{69}$$

$$U_2(r, \theta) = \left[C \left(\frac{\sin \lambda r}{\lambda r} - \cos \lambda r \right) + D \left(\frac{\cos \lambda r}{\lambda r} + \sin \lambda r \right) \right] \sin^2 \theta, \tag{70}$$

where U_1 is the solution for the plasma medium, U_2 for the force-free medium, and A , C , and D are the integration constants.

The pressure must vanish at the plasma boundary ($r = a$), so that (73) gives

$$A = \frac{\kappa^2 a^2 / \lambda^2}{(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a}. \tag{71}$$

Another boundary condition is that $U_2 = 0$ at the spherical conducting shell at $r = 1$, which leads to the transcendental equation $\tan \lambda = \lambda$, whose first positive roots are denoted $\lambda_1 \approx 4.493$ and $\lambda_2 \approx 7.725$. We choose $\lambda = \lambda_2$ so as to have a single magnetic axis inside the plasma region $0 < r < a$. The boundary condition $U_2(r = a, \theta) = 0$ for $C \neq 0$ and $D = 0$ leads to a similar equation, namely, $\tan \lambda a = \lambda a$, which fixes the plasma radius as $a = \lambda_1 / \lambda_2 = 0.5816$.²¹

Moreover, λ may assume any value in the interval $0 \leq \lambda \leq \lambda_2$. In the isotropic case, Morikawa showed that the limit $\lambda \rightarrow 0$ is a solution known in hydrodynamics as the Hill vortex model,²¹ which is a useful model for field-reversed configurations and spheromak equilibria.²² The limit $\lambda \rightarrow \lambda_2$ gives us a force-free medium. Finally imposing that $\partial U / \partial r$ is continuous across the plasma boundary gives the remaining integration constant

$$C = \frac{\kappa^2 a^2}{\lambda^2 \lambda_1 \sin \lambda_1} \left[\frac{\lambda a \sin \lambda a}{(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a} - 3 \right], \tag{72}$$

which also fixes the value of κ as a function of λ . The final solution reads

$$U_1(r, \theta) = C \lambda_1 \sin \lambda_1 \times \frac{a^2 [(\sin \lambda r / \lambda r) - \cos \lambda r] - r^2 [(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]}{\lambda a \sin \lambda a - 3 [(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]} \sin^2 \theta, \tag{73}$$

$$U_2(r, \theta) = C \left(\frac{\sin \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r \right) \sin^2 \theta. \tag{74}$$

Making use of the Clemente transformation for the linear dependence of σ_{-} and Ψ given by (42), we obtain the anisotropic solutions for the plasma and force-free regions, with $\sigma_0 = 0$, given, respectively, by

$$\Psi_1(r, \theta) = \frac{1}{\sigma_1} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{3}{2} \sigma_1 C \lambda_1 \sin \lambda_1 \times \frac{a^2 [(\sin \lambda r / \lambda r) - \cos \lambda r] - r^2 [(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]}{\lambda a \sin \lambda a - 3 [(\sin \lambda a / \lambda a) - \cos \lambda a]} \times \sin^2 \theta \right]^{2/3} \right\}. \tag{75}$$

$$\Psi_2(r, \theta) = \frac{1}{\sigma_1} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{3}{2} \sigma_1 C \left(\frac{\sin \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r \right) \sin^2 \theta \right]^{2/3} \right\}. \tag{76}$$

In Fig. 4, we show for the plasma region, the magnetic surfaces in the isotropic and anisotropic cases, when $\lambda = \lambda_2$ (the solution being similar in both plasma and force-free regions). The flux function in

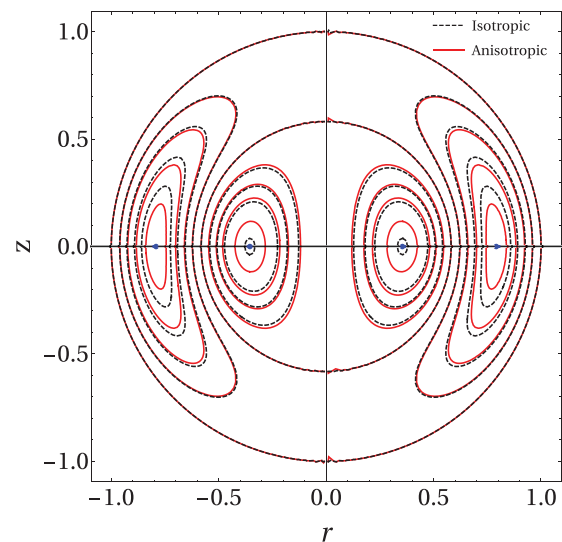


FIG. 4. Flux surfaces for the isotropic (dashed black lines) and anisotropic (full red lines) solutions with $\lambda = \lambda_2$. We indicate the positions of the magnetic axes by the blue dots.

the plasma region has a maximum at the magnetic axis $r = r_0$, given by solving the transcendental equation

$$\frac{a^2}{r_0} \left(\cos \lambda r_0 - \frac{\sin \lambda r_0}{\lambda r_0} + \lambda r_0 \sin \lambda r_0 \right) = 2r_0 \left(\frac{\sin \lambda a}{\lambda a} - \cos \lambda a \right). \tag{77}$$

Making use of the same procedure as in Sec. V, we calculate the parallel and perpendicular pressures corresponding to the plasma region, our results being shown in Fig. 5 for the equatorial plane $\theta = \pi/2$. In this calculation, we defined $p_0 = C^2/\mu_0$ and choose $C = 1/\sigma_1$ and $\mathcal{I}_0\mu_0 = C$. In the same way as in the cylindrical case discussed in the Sec. V, p_{\parallel} is larger than p_{\perp} . Moreover the difference between p_{\parallel} and p_{\perp} increases as λ approaches λ_2 , i.e., when we move towards the force-free case.

From Eq. (16), we obtained the components of the magnetic field, such that its radial component is always zero in the equatorial plane $\theta = \pi/2$ and the radial profiles of the poloidal (θ) and toroidal (ϕ) components are shown in Figs. 6 and 7, respectively, and compared with the isotropic case. We observed that for small radii, the poloidal component in the anisotropic case is slightly larger than for the isotropic case, but after the magnetic axis position, the anisotropic result is slightly smaller. Moreover, we observe that at the magnetic axis radius there is also a poloidal field reversal. The difference between iso and anisotropic values increases very little with λ .

On the other hand, for the toroidal field component, the anisotropic result is always lower than that for the isotropic one. The difference is most pronounced at $r \approx 0.3$ and decreases as we approach $r = 0$ and $r = a$. There are no field reversals in both cases.

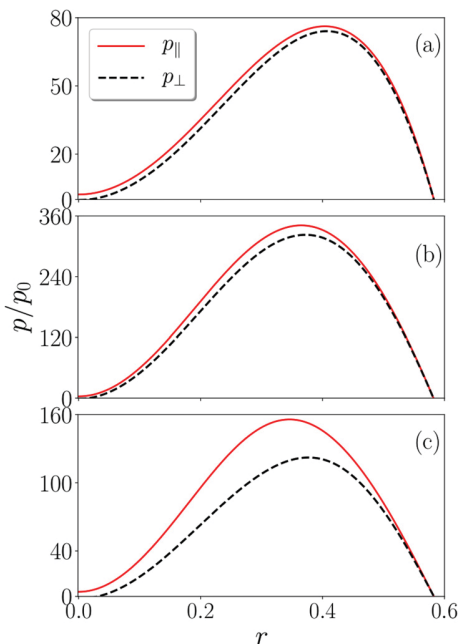


FIG. 5. Radial profiles of the parallel (full lines) and perpendicular (dashed lines) normalized pressures for (a) $\lambda = 3.0$, (b) $\lambda = 7.0$, and (c) $\lambda = 7.5$.

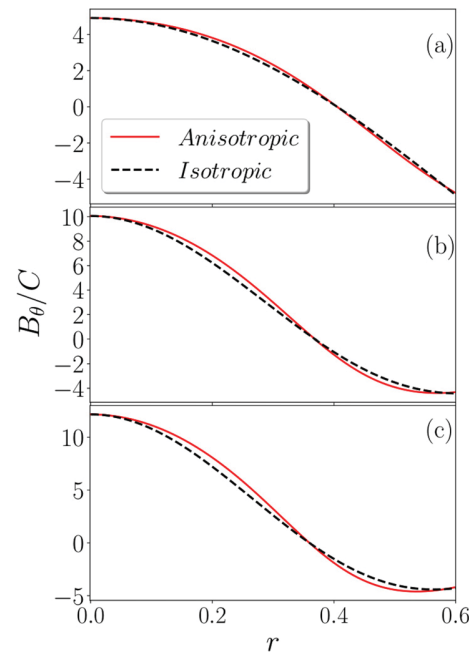


FIG. 6. Radial profiles of the poloidal magnetic field component for the anisotropic (full lines) and isotropic cases (dashed lines), where (a) $\lambda = 3.0$, (b) $\lambda = 7.0$, and (c) $\lambda = 7.5$.

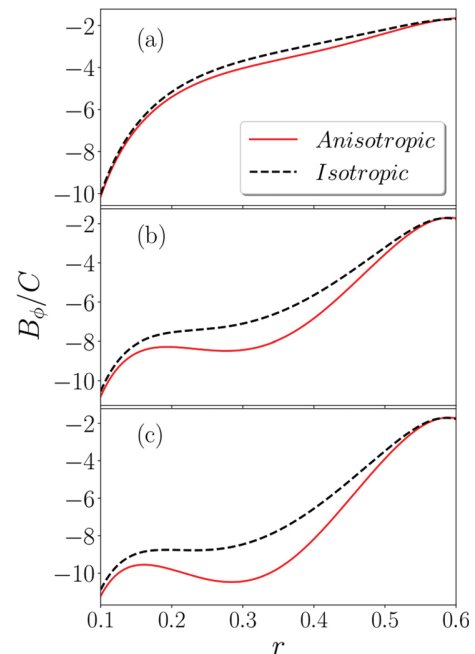


FIG. 7. Radial profiles of the toroidal magnetic field component for the anisotropic (full lines) and isotropic cases (dashed lines), where (a) $\lambda = 3.0$, (b) $\lambda = 7.0$, and (c) $\lambda = 7.5$.

The previous results refer to the plasma region. In the force-free medium, the components of the field are given by

$$B_{r,2}(r, \theta) = -\frac{2C \cos \theta}{r^2} \frac{\sin \lambda_2 r / \lambda_2 r - \cos \lambda_2 r}{\left[1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \left(\frac{\sin \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r\right)\right]^{1/3}}, \quad (78)$$

$$B_{\theta,2}(r, \theta) = \frac{C \sin \theta}{r^2} \frac{\cos \lambda_2 r - \sin \lambda_2 r / \lambda_2 r + \lambda_2 r \sin \lambda_2 r}{\left[1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \left(\frac{\sin \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r\right)\right]^{1/3}}, \quad (79)$$

$$B_{\phi,2}(r, \theta) = \frac{-C}{r \sin \theta} \frac{\sqrt{1 + \lambda^2 \sin^4 \theta (\sin \lambda_2 r / \lambda_2 r - \cos \lambda_2 r)^2}}{\left[1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \left(\frac{\sin \lambda_2 r}{\lambda_2 r} - \cos \lambda_2 r\right)\right]^{1/3}}. \quad (80)$$

VII. CONCLUSIONS

In this paper, we further developed a technique to study MHD equilibria of symmetric systems with anisotropic pressure, to orthogonal as well as nonorthogonal coordinate systems. It is possible to obtain a solution of the anisotropic case from a known solution of the equilibrium equation in the isotropic case using a transformation due to Clemente, viz., Eq. (33).

We applied this technique to the case of a cylindrical plasma with linear profiles for pressure and current. We obtained that the parallel pressure is greater than the perpendicular pressure in all radial positions except at the magnetic axis, where this difference vanishes. Moreover, the position of the magnetic axis itself does not change for the iso and anisotropic cases.

Second, we consider the case of spherical coordinates, where we suppose a linear profile for the pressure and a quadratic profile for current. In the isotropic case, the solution has a tunable parameter whose variation enables us to go from a Hill vortex solution to a force-free medium. The parallel pressure is also larger than the perpendicular pressure in the plasma region, and they are no longer equal at the magnetic axis. The difference of parallel and perpendicular pressures increases as we change parameters so as to move towards a force-free medium.

In the spherical case, the poloidal magnetic field shows a reversal of sign at the position of the magnetic axis. Moreover, when compared to the poloidal component of the magnetic field of the isotropic case, the intensity is slightly larger in the anisotropic solution before the magnetic axis position and slightly smaller after the magnetic axis. The toroidal magnetic field does not show sign reversal, and the difference between the iso and anisotropic solutions is relatively small near the center and the plasma boundary, being more appreciable around the magnetic axis. This difference also increases as we change parameters so as to approach the force-free case.

In summary, the method we described in this paper can be applied to any coordinate system for which the equilibrium equation has a closed-form, analytical solution. Even though there are few such solutions, they can be nevertheless be used for benchmarking fully numerical solutions of the anisotropic equilibrium equation.

ACKNOWLEDGMENTS


This work was supported by grants from CNPq (Brazilian Government Agency).

REFERENCES

- ¹G. F. Chew, M. L. Goldberger, and F. E. Low, *Proc. R. Soc. London* **236**, 112 (1956).
- ²W. M. Stacey, *Fusion Plasma Physics* (John Wiley and Sons, 2012).
- ³I. B. Bernstein, E. A. Frieman, M. D. Kruskal, and R. M. Kulsrud, *Proc. R. Soc. London, Ser. A Math. Phys. Sci.* **244**, 17 (1958).
- ⁴C. Mercier and M. Cotsaftis, *Nucl. Fusion* **1**, 121 (1961).
- ⁵A. Sestero and A. Taroni, *Nucl. Fusion* **16**, 164 (1976).
- ⁶P. J. Fielding and F. A. Haas, *Nucl. Fusion* **19**, 855 (1979).
- ⁷W. A. Cooper, G. Bateman, D. B. Nelson, and T. Kammash, *Nucl. Fusion* **20**, 985 (1980).
- ⁸W. A. Cooper, *Phys. Fluids* **26**, 1830 (1983).
- ⁹E. R. Salberta, *Phys. Fluids* **30**, 2796 (1987).
- ¹⁰H. M. Risz, *J. Plasma Phys.* **38**, 209 (1987).
- ¹¹R. A. Clemente, *Nucl. Fusion* **33**, 963 (1993).
- ¹²H. Grad and H. Rubin, "Hydromagnetic equilibria and force-free fields," in *Proceedings of the 2nd UN Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy* (IAEA, Geneva, 1958), Vol. 31, p. 190.
- ¹³R. Lüst and A. Schlüter, *Z. Naturforsch.* **12a**, 85 (1957).
- ¹⁴V. D. Shafranov, "Plasma equilibrium in a magnetic field," in *Reviews of Plasma Physics*, edited by M. A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1966), Vol. 2.
- ¹⁵E. K. Maschke, *Plasma Phys.* **15**, 535 (1973).
- ¹⁶F. Hergner, "Controlled fusion and plasma physics," in *Proceedings of the 5th European Conference, Grenoble* (Centre d'Études Nucléaires, Grenoble, 1972), Vol. 1, p. 26.
- ¹⁷J. W. Edenstrasser, *J. Plasma Phys.* **24**, 299 (1980).
- ¹⁸M. Y. Kucinski and I. L. Caldas, "MHD equilibrium equation in symmetric systems," e-print [arXiv:1103.5063](https://arxiv.org/abs/1103.5063).
- ¹⁹L. S. Solovév, *Sov. Phys. JETP* **26**, 400 (1968).
- ²⁰T. Takeda and S. Tokuda, *J. Comput. Phys.* **93**, 1 (1991).
- ²¹G. K. Morikawa, *Phys. Fluids* **12**, 1648 (1969).
- ²²S. P. Auerbach and W. C. Condit, *Nucl. Fusion* **21**, 927 (1981).
- ²³J. P. Freidberg, *Ideal MHD* (Cambridge University Press, 2014).
- ²⁴T. Neukirch, *Introduction to the Theory of MHD Equilibria* (CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015).
- ²⁵S. P. Hirshman, "Curvilinear coordinates for magnetic confinement geometries," Report No. ORNL/TM-8393 (Oak Ridge National Laboratory, 1982).
- ²⁶L. E. Zakharov and V. D. Shafranov, "Evolution of equilibrium of toroidal plasma," in *Plasma Physics*, edited by B. B. Kadomtsev (Mir, Moscow, 1981).
- ²⁷W. D. D'haeseleer, W. N. G. Hitchon, J. D. Callen, and J. L. Shohet, *Flux Coordinates and Magnetic Field Structure* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991).



Anisotropic Axisymmetric MHD Equilibria in Spheroidal Coordinates

Leonardo C. Souza¹ · Ricardo L. Viana¹ 

Received: 29 October 2019 / Published online: 28 January 2020
© Sociedade Brasileira de Física 2020

Abstract

When subjected to a strong magnetic field, plasmas can exhibit anisotropy in the directions parallel and perpendicular to the field. The magnetohydrodynamics (MHD) equilibrium equation under the hypothesis of Chew, Goldberger, and Low of an anisotropic pressure tensor is solved analytically, using a previously known solution of the isotropic case in oblate spheroidal coordinates. The effects of the anisotropy on the magnetic fields and on the current density are investigated, and the radial profiles of the pressures along and across the magnetic field are studied.

Keywords Magnetohydrodynamics · MHD equilibrium · Plasma anisotropy

1 Introduction

One of the basic hypotheses of magnetohydrodynamics (MHD) is that collisions among plasma particles are so frequent that it is possible to use a fluid description, i.e., the mean collision time should be very low, compared to a characteristic time of the plasma discharge [1]. However, if the plasma is immersed in a strong magnetic field, as it is often the case in fusion applications, particle gyration with a small Larmor radius can justify a fluid approach, even if the collisionality is not so high as usually required [2].

In this case, the particle motion is quite different along in directions parallel and perpendicular to the strong magnetic field: whereas in the parallel direction we have the fast guiding center motion, in the perpendicular direction the dominant motion is the $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift. Since the latter has the same velocity for both electrons and positive ions, the average kinetic energy will be different in these directions.

This anisotropy under a strong magnetic field has been described by Chew, Goldberger, and Low (CGL) in the form of a diagonal pressure tensor with different components in directions parallel and perpendicular to the field [3]. Using an approximation scheme to solve the corresponding Boltzmann equation, different energy equations have been derived

along parallel and perpendicular directions, the so-called double-adiabatic equations [4]. This approach has been used for a long time in the description of fusion plasmas subjected to heating through neutral-beam injection (NBI), ion cyclotron resonance heating (ICRH), and electron cyclotron resonance heating (ECRH) [5, 6], and also applied to space plasmas, like in the study of the interaction between solar wind and Earth's magnetosheath [7].

The starting point in magnetic confinement theory lies in obtaining physically acceptable ideal MHD equilibria [8]. In the case of asymmetric toroidal configurations, this usually means solving the Grad-Shafranov-Schlüter (GSS) equation in the case of isotropic plasmas [9–11]. The corresponding problem for anisotropic plasmas was first addressed by Mercier and Cotsaftis, who derived a MHD equilibrium equation using the CGL form of the pressure tensor, also studying the MHD stability of the resulting equilibrium configurations [12]. The Mercier-Cotsaftis equation reduces to GSS equation as the plasma becomes isotropic [13].

The Mercier-Cotsaftis equation has been investigated for deriving anisotropic toroidal equilibria both numerically [14–16] and using analytical approximations [17–19]. In 1993, Clemente introduced an integral transform on the flux function which enables us to rewrite the anisotropic Mercier-Cotsaftis equation in the form of a GSS equation [20]. If one knows a solution of the latter, for specified current and pressure profiles, it is formally possible to invert the transformation and obtain a corresponding solution for the anisotropic case. In the same paper, Clemente has obtained a solution for the anisotropic equation for

✉ Ricardo L. Viana
viana@fisica.ufpr.br

¹ Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-990, Curitiba, Paraná, Brazil

cylindrical coordinates starting from a known analytical solution for the isotropic case [21, 22]. Recently, we generalized Clemente’s approach for an arbitrary curvilinear coordinate system and applied the formalism to solutions in cylindrical and spherical geometries [23].

Compact toroid configurations, like spheromaks, are an alternative to the tokamak in magnetic confinement research, having the main advantage of not needing external toroidal coils or a toroidal vessel [24]. The oblate configuration (oblimak), of which the spheromak is a limiting case, has been shown to be stable in the MHD limit [25]. For these reasons, the study of the MHD equilibrium in spheroidal-oblate (and closely related prolate) coordinates is of relevance as well as the effects of anisotropy in the magnetic field and current density [26, 27].

Our work can be of interest also for the description of field-reversed configurations (FRC) like the C-2U and C-2W experiments at Tri Alpha Energy, the latter being currently the world’s largest FRC device in operation [28, 29]. Such configurations have high beta values (ca 0.9), with poloidal axisymmetric magnetic field, with practically no toroidal component. These machines require only solenoidal coils placed outside a simply connected vacuum vessel, and the edge layer outside of the FRC separatrix provides a natural divertor for magnetic field line exhaustion [28]. The combination of geometry simplicity and high magnetic efficiency makes FRCs interesting configurations for future fusion reactors. In particular, the issue of anisotropic equilibria arises in this context, since the FRC plasma in C-2W is produced by neutral beam injection [29].

In this work, we write down the anisotropic equilibrium equation in spheroidal oblate coordinates by considering suitable representations for quantities like the transversal flux function and current function. We then use the method introduced by Clemente [20] to show how anisotropic solutions can be obtained from a transformation of the isotropic solution, whenever the latter is previously known. With the anisotropic solution, we calculate the radial profiles of the parallel and perpendicular pressures with respect to the local magnetic field direction, and study the effect of anisotropy in the magnetic field and current density of the plasma.

This paper is organized as follows: In Section 2, we present the basic equations of the present model and their form in spheroidal coordinates. Section 3 considers a solution of the isotropic case and its adaptation for anisotropic equilibria through application of the Clemente transform. The properties of the corresponding solution are displayed in Section 4, and the last section is devoted to our conclusions.

2 Basic Equations

When subjected to a strong magnetic field, the motion of plasma particles has distinct features along distances parallel and perpendicular to the field. The resulting anisotropy can be characterized by different pressures along parallel and perpendicular directions, denoted by p_{\parallel} and p_{\perp} , respectively [3]. The corresponding pressure tensor reads

$$\mathbb{T} = p_{\perp} \mathbb{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{B^2}, \tag{1}$$

where \mathbf{B} is the magnetic field and \mathbb{I} is the unit tensor, such that the ideal MHD equation of motion (conservation of linear momentum) reads [30]

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] = -\nabla \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left[\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{B^2} \mathbf{B} \right], \tag{2}$$

where ρ is the mass density, \mathbf{V} is the fluid velocity, and μ_0 is the vacuum magnetic permeability (MKSA units are used). The parallel and perpendicular pressures satisfy the so-called double-adiabatic equations [4]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}}{\rho B} \right) = 0, \tag{4}$$

which play the role of energy conservation equations in the CGL theory.

The set of ideal MHD equations describing static equilibria are thus the $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ limit of the equation of motion (2) as well as Ampère’s law and the magnetic Gauss’ law:

$$\nabla \cdot \mathbb{T} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \tag{5}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{7}$$

where \mathbf{J} is the current density. In the presence of gravitational and stationary rotation, it would be necessary to include also the double adiabatic (3)–(4), situations which are not considered in the present paper, but which have been already investigated [31–33].

From these equations, there follows that

$$\nabla p_{\perp} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \nabla \sigma_{-}) + \frac{1}{\mu_0} \sigma_{-} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \tag{8}$$

where we defined the anisotropy factor

$$\sigma_{-} = \frac{p_{\parallel} - p_{\perp}}{|\mathbf{B}|^2 / \mu_0}. \tag{9}$$

It will be convenient to introduce the quantity

$$\bar{p} = \frac{1}{2}(p_{\parallel} + p_{\perp}), \tag{10}$$

which should not be confused with the usual average pressure which, in the anisotropic case, is [20]

$$\langle p \rangle = \frac{1}{3}\text{Tr}\mathbf{T} = \frac{1}{3}(2p_{\perp} + p_{\parallel}). \tag{11}$$

Axisymmetric anisotropic MHD equilibria can be described in a general framework using curvilinear coordinates, which enables us to readily adapt the equations to a convenient coordinate system, depending on the boundary conditions required. Let us consider contravariant coordinates (x^1, x^2, x^3) for a system described by the contravariant metric tensor $g^{ij} = \hat{\mathbf{e}}^i \cdot \hat{\mathbf{e}}^j$, where $\hat{\mathbf{e}}^i = \nabla x^i$ are contravariant basis vectors. We suppose the existence of an ignorable coordinate $0 \leq x^3 \leq L$, such that physical quantities like pressure and magnetic field do not depend on x^3 in axisymmetric configurations.

Considering a coordinate surface $x^2 = \text{const.}$ and the annulus S_2 bounded by the magnetic axis and a coordinate curve x^3 , the transversal flux function can be defined as the magnetic flux through S_2 per unit length in the x^3 direction [34]

$$\Psi(x^1, x^2) = \frac{1}{L} \int_a^{x^1} dx'^1 \int_0^L dx^3 \sqrt{g} B^2, \tag{12}$$

where $g = \det(g_{ij})$ and $x^1 = a$ denote the magnetic axes. Similarly, we define a transverse current flux in terms of the total electric current flowing through the surface S_2 per unit length

$$I(x^1, x^2) = I_{\text{axis}} + \frac{1}{L} \int_a^{x^1} dx'^1 \int_0^L dx^3 \sqrt{g} J^2, \tag{13}$$

where $I_{\text{axis}} = I(x^1 = a, x^2)$. In terms of these quantities, the magnetic field and current density can be written as [36]

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \times \nabla \Psi - \mu_0 I \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}}, \tag{14}$$

$$\mathbf{J} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}} \times \nabla I + J_3 \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{g_{33}}. \tag{15}$$

Taking the dot product of (14) with $\nabla \Psi$, we have $\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = 0$; i.e., $\Psi(x^1, x^2)$ is a surface function. There follows that any surface function f is of the general form $f(\Psi(x^1, x^2))$. Calculating the right side of (5) and taking the dot product with \mathbf{B} yields $\mathbf{B} \cdot \nabla I = 0$; i.e., $I = I(\Psi)$ is also a surface quantity, hence

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\frac{1}{g_{33}} \left[\frac{1}{\mu_0} \Delta^* \Psi - ID + \frac{1}{2} \mu_0 (I^2)' \right] \nabla \Psi. \tag{16}$$

where the prime denotes differentiation with respect to Ψ and in which we defined the Shafranov operator [34]

$$\Delta^* \Psi = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left[\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left(g^{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + g^{12} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \left(g^{12} \frac{\partial \Psi}{\partial x^1} + g^{22} \frac{\partial \Psi}{\partial x^2} \right) \right] \right\}, \tag{17}$$

and

$$\mathcal{D} = \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{g_{23}}{g_{33}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{g_{13}}{g_{33}} \right) \right]. \tag{18}$$

which vanishes identically for orthogonal coordinate systems.

Mercier and Cotsaftis assumed that both σ_- and \bar{p} should be surface functions, i.e. [12]

$$\bar{p} = \bar{p}(\Psi) \Rightarrow \nabla \bar{p} = \bar{p}' \nabla \Psi, \tag{19}$$

$$\sigma_- = \sigma_-(\Psi) \Rightarrow \nabla \sigma_- = \sigma_-' \nabla \Psi, \tag{20}$$

where the primes denote differentiation with respect to Ψ . Note that $\langle p \rangle$, given by (11) is not a surface function. Moreover, (19) may be the only possibility compatible with configurations in which the boundary surface is a rigid and conducting wall [20]. Using this information in (8), we have

$$\left(\bar{p}' - \frac{B^2}{2\mu_0} \sigma_-' \right) \nabla \Psi = (1 - \sigma_-) \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \tag{21}$$

Now substituting (16) for the Lorentz force into the above equation, there results an anisotropic equilibrium equation written in terms of surface quantities only

$$\begin{aligned} \Delta^* \Psi - \mu_0 I \mathcal{D} - \frac{\sigma_-'}{2(1 - \sigma_-)} |\nabla \Psi|^2 \\ = -\frac{1}{2(1 - \sigma_-)} [\mu_0^2 I^2 (1 - \sigma_-)]' - \frac{\mu_0 g_{33} \bar{p}'}{1 - \sigma_-}, \end{aligned} \tag{22}$$

In the isotropic limit, we have $p_{\parallel} = p_{\perp} = p$, such that $\sigma = 0$ and $\bar{p} = p$, and we recover the usual Grad-Schlüter-Shafranov equation in curvilinear coordinates [34]

$$\Delta^* \Psi - \mu_0 I \mathcal{D} = -\frac{1}{2} \mu_0^2 (I^2)' - \mu_0 g_{33} p'. \tag{23}$$

It is possible to map the anisotropic (22) to a corresponding isotropic (23) by a convenient integral transform introduced by Clemente [20]. Hence, once an equilibrium solution is known for the latter, we can obtain an infinite number of solutions for the anisotropic equation by inverting this transformation. This method was used in cylindrical and spherical coordinates to generate axisymmetric anisotropic equilibria for different profiles of the appropriate surface quantities [20, 23]. The Clemente transformation consists on defining the function

$$U(\Psi) = \int_0^{\Psi} d\Phi \sqrt{1 - \sigma_-(\Phi)}, \tag{24}$$

such that it is necessary that $\sigma_- < 1$ which, incidentally, also satisfies one of the local necessary stability criteria derived by Mercier and Cotsaftis [12]. Moreover, in order to avoid other instabilities, it is necessary that $\sigma > -1$ [20, 37], such that our choices must be so as to respect the condition $|\sigma_-| < 1$.

Let us define the new function

$$\mathcal{I} = I\sqrt{1 - \sigma_-}, \tag{25}$$

such that (22), combined with (24), yields [23]

$$\Delta^*U - \mu_0\mathcal{I}\mathcal{D} = -\frac{1}{2}\mu_0^2\frac{d\mathcal{I}^2}{dU} - \mu_0g_{33}\frac{d\bar{p}}{dU}, \tag{26}$$

which is formally identical to (23), provided that $U \rightarrow \Psi$ and $\mathcal{I} \rightarrow I$. The corresponding solution can be found for the anisotropic case by inverting the integral transformation (24), what can only be performed if we make some a priori assumption on the dependence of σ_- with Ψ . This is equivalent to assume a profile for the surface function $\sigma_-(\Psi)$, in the same way as we do with $\mathcal{I}(\Psi)$ and $\bar{p}(\Psi)$ to solve (22).

In this work, we will use two different choices, namely

$$\sigma_{-1} = \sigma_0\Psi_1, \tag{27}$$

$$\sigma_{-2} = \tanh^2(\sigma_0\Psi_2), \tag{28}$$

where σ_0 is a positive constant subjected to the constraints $|\sigma_{-1,2}| < 1$. Inserting (27) and (28) into (24), a direct integration yields

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sigma_0} \left[1 - \left(1 - \frac{3\sigma_0}{2}U \right)^{2/3} \right], \tag{29}$$

$$\Psi_2 = \frac{2}{\sigma_0} \tanh^{-1} \left[\tan \left(\frac{\sigma_0 U}{2} \right) \right]. \tag{30}$$

The procedure for deriving axisymmetric anisotropic equilibria is thus as follows: initially, we specify the profiles for the surface functions $\mathcal{I}(U)$ and $\bar{p}(U)$. With them, we write the equilibrium (26) in a given coordinate system, with the appropriate boundary conditions, if any. After solving this equation, we obtain $U(x^1, x^2)$ and, using (29) or (30) for example, we obtain the desired equilibrium $\Psi(x^1, x^2)$.

Once we have Ψ , the current function is obtained from (25) as well as the ‘‘average’’ pressure $\bar{p} = \bar{p}(U(\Psi))$. Both are used to determine $|\mathbf{B}|^2$ using

$$|\mathbf{B}|^2 = \frac{1}{g_{33}} \left(|\nabla\Psi|^2 + \mu_0^2 I^2 \right). \tag{31}$$

Finally, combining (9) and (10), we have the system

$$p_{\parallel} - p_{\perp} = \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \sigma_-(\Psi), \tag{32}$$

$$p_{\parallel} + p_{\perp} = 2\bar{p}(\Psi), \tag{33}$$

whose solution yields the profiles of p_{\parallel} and p_{\perp} .

3 Anisotropic Equilibria in Spheroidal Coordinates

A number of configurations of magnetically confined plasmas of the compact torus type, like spheromaks, can be described by prolate spheroids. In the astrophysical context, the equilibrium of fluid masses can be conveniently analyzed by using oblate spheroids. Both coordinate systems are closely related and we first give the necessary formulae for oblate coordinates.

We considered the symmetric axis of the plasma as the z -axis, such that the oblate spheroidal coordinates ($x^1 = \xi, x^2 = \eta, x^3 = \phi$) are defined by

$$x = c \cosh \xi \sin \eta \cos \phi, \tag{34}$$

$$y = c \cosh \xi \sin \eta \sin \phi, \tag{35}$$

$$z = c \cosh \xi \cos \eta. \tag{36}$$

where ($0 \leq \xi \leq \infty, 0 \leq \eta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$) and $2c$ is the distance between the two foci. Then

$$\sqrt{g} = c^3 (\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta) \cosh \xi \sin \eta, \tag{37}$$

and the covariant tensor component is $g_{33} = c^2 \cosh^2 \eta \sin^2 \eta$. Since the nondiagonal elements are zero, this is an orthogonal system, such that $\mathcal{D} = 0$. It is straightforward to consider prolate spheroidal coordinates by making the transformations $i \cosh(x) \rightarrow \sinh(x), i \sinh(x) \rightarrow \cosh(x)$ and $-ic \rightarrow c$ [35].

We assume that the plasma boundary is represented by a spheroid $\xi = \xi_0$. The semimajor and semiminor axes are denoted by $a = c \cosh \xi_0$ and $b = c \sinh \xi_0$ respectively. Since the axisymmetric surface quantities do not depend on ϕ , the equilibrium equation for the auxiliary function $U(\xi, \eta)$ is, according to (22) [36]

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\cosh \xi \sin \eta} \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\cosh \xi \sin \eta} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \\ & = -\frac{c^2 (\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)}{\cosh \xi \sin \eta} \left[\frac{\mu_0^2}{2} (\mathcal{I}^2)' + \mu_0 c^2 \cosh^2 \xi \sin^2 \eta \bar{p}' \right]. \end{aligned} \tag{38}$$

In order to solve this equation, we need to specify profiles for \mathcal{I} and \bar{p} as functions of U . Let us consider the following profiles

$$\bar{p} = p_0 + \frac{\alpha U}{\mu_0 c^4}, \tag{39}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 = \text{const.} \tag{40}$$

where p_0 and α are positive constants. The solution of the corresponding equilibrium equation has been obtained by Kaneko, Chiyoda, and Hirota and reads [26]

$$U(\xi, \eta) = -\frac{8\alpha U_0}{15} \frac{P'_3(i \sinh \xi_0) \cosh^2 \xi \sin^2 \eta}{\cosh^2 \xi_0 \sinh^2 \xi_0} \left[1 - \frac{\cosh \xi}{\cosh \xi_0} + \frac{P'_3(\cos \eta)}{6} \left(\frac{\cosh \xi}{\cosh \xi_0} - \frac{P'_3(i \sinh \xi)}{P'_3(i \sinh \xi_0)} \right) \right] \tag{41}$$

where $\xi_0 = \tanh^{-1}(b/a)$, U_0 is the value of $U(\xi, \eta)$ at the magnetic axis, $P_3(x)$ stands for the Legendre polynomial of order 3, and the primes denote differentiation with respect to the argument. A similar solution was considered by Kaneko, Kamitani, and Takimoto to investigate MHD equilibrium and stability of a spheromak with a spheroidal plasma-vacuum interface [27].

With the aid of (29) and (30), and by choosing $\sigma_0 = 1/(2U_0\alpha)$, it is possible to invert the Clemente transform so as to obtain the corresponding anisotropic solutions. In Fig. 1, we display the flux contours corresponding to $u = \text{const.}$ solutions (dashed curve), $\psi_1 = \text{const.}$ (dot-dashed curve) and $\psi_2 = \text{const.}$ (solid curve), where $u = \sigma_0 U$, $\psi_1 = \sigma_0 \Psi_1$ and $\psi_2 = \sigma_0 \Psi_2$. Since $U = U(\Psi)$, the magnetic axis position

$$r_{\text{axis}} = \frac{\cosh \xi_0}{\sqrt{2}}, \quad z_{\text{axis}} = 0$$

is the same for both isotropic and anisotropic solutions, hence there are no expected magnetic axis shifts nor bifurcations. The two anisotropic solutions derived from U have similar characteristics, the corresponding values being the same at the plasma boundary, which has an oblate

spheroidal shape as required. The quantitative differences between the two solutions are most pronounced near the magnetic axis.

Using the anisotropic solution Ψ , we solved (32)–(33) in order to obtain p_{\parallel} and p_{\perp} , whose radial profiles (in the equatorial plane $\eta = \pi/2$) are shown in Fig. 2 for the two choices of σ_{-} used to invert Clemente transform (the subscripts 1 and 2 denote the solutions (29) and (30), respectively). We normalize both pressures using $p_0 = \alpha^2 U_0 / \mu_0 c^4$.

For both choices of σ_{-} , it turns out that the parallel pressure is always larger than the perpendicular pressure, except at the separatrix (plasma boundary) and the magnetic axis, where they are equal. This difference is due to the anisotropy caused by an intense magnetic field, for which the motion along field lines is unbounded, whereas the perpendicular motion is strongly constrained, what favors the parallel direction. The different choices of σ_{-} yield different anisotropic equilibria but with similar qualitative properties.

From (14) and (15), we calculated the magnetic field and current density, respectively. The radial components B_{ξ} and J_{ξ} are both zero at the equatorial plane ($\eta = \pi/2$). In Fig. 3a, we show the radial profile of the poloidal field B_{η} at the equatorial plane, normalized to the quantity $B_0 = \alpha U_0 / c^2 = \mu_0 \mathcal{I}_0 / c$. As in Fig. 1, we use dashed lines to indicate the isotropic solution, whereas full and dot-dashed lines are used for anisotropic solutions using the two different choices for σ_{-} . In both cases, there is a field reversal at the magnetic axis position, the solution (30) being closer to the isotropic solution, but with the same essential features. The toroidal field B_{ϕ} is depicted in Fig. 3b, showing no sign reversals and approaching

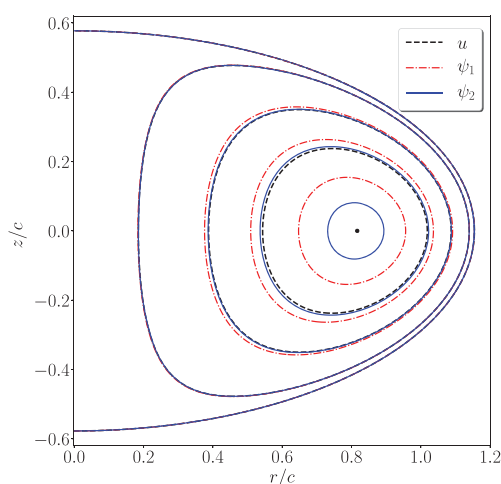


Fig. 1 (color online) Constant flux contours corresponding to the isotropic solution (black dashed curve), and two anisotropic solutions obtained from it, with σ_{-1} (red dot-dashed curve) and σ_{-2} (blue solid curve). The plasma boundary is an oblate spheroid with $b/a = 1/2$

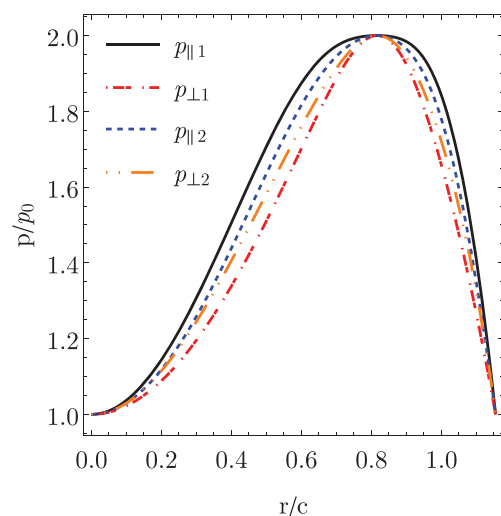
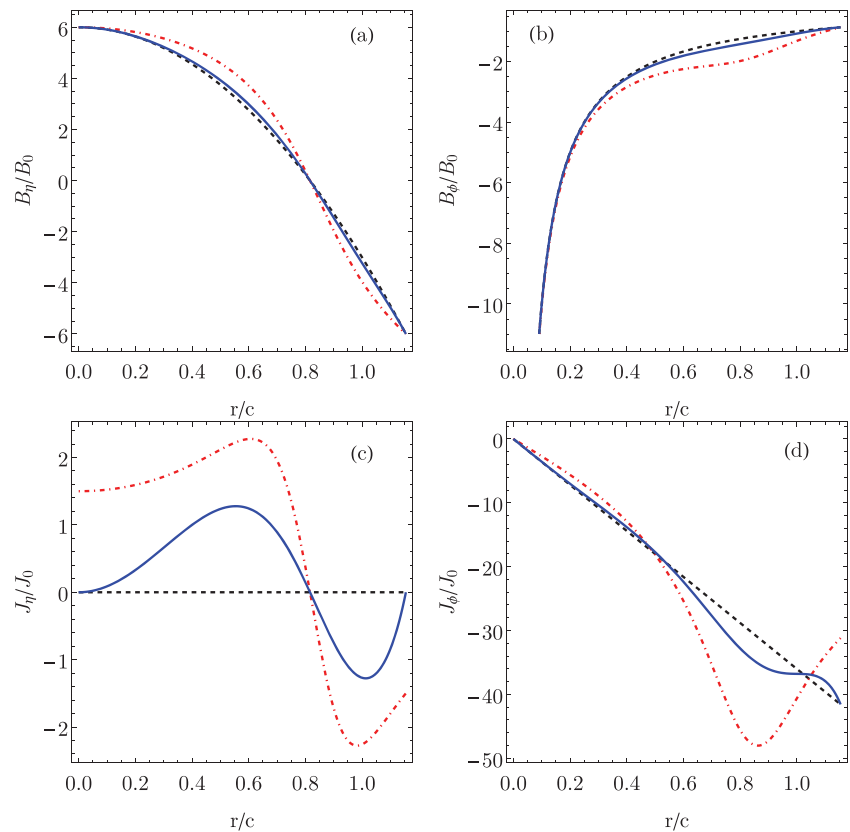


Fig. 2 (color online) Radial profile of the normalized parallel (solid and dashed) and perpendicular (dot-dashed) pressures, for the two choices of σ_{-} and $b/a = 1/2$

Fig. 3 (color online) Radial profiles (in the equatorial plane) for **a** poloidal field, **b** toroidal field, **c** poloidal current, and **d** toroidal current. Dashed lines are used for the isotropic case, and dot-dashed and full lines for the two anisotropic solutions obtained



zero at the plasma boundary. We see again that (30) provides a solution closer to the isotropic case, whereas (29) shows slight differences for r/c between 0.4 and 1.1, approximately.

The radial profiles of the corresponding poloidal and toroidal current densities are depicted in Fig. 3c and d, respectively, normalized by $J_0 = I_0/c^2$. In this case, the anisotropy creates a poloidal current which does not exist in the isotropic case, presenting a sign reversal at the magnetic axis, which leads to a similar change for the corresponding magnetic field. The toroidal current density component has a curious behavior: in the isotropic case, it is monotonically decreasing towards the plasma boundary in a practically linear fashion. The anisotropic solutions, on the other hand, exhibit a nonmonotonic behavior, especially in the vicinity of the magnetic axis. In particular, one of the solutions increases near the boundary, whereas the other decreases like its isotropic counterpart.

4 Conclusions

Anisotropic effects are expected in both fusion and astrophysical plasmas when strong magnetic fields are present. The existence of ideal MHD equilibria with axisymmetry

and anisotropic effects (using CGL pressure tensor) has been long recognized, but the corresponding equation is relatively difficult to solve. When the hypotheses (19)–(20) are satisfied, it is possible to introduce an integral transform which maps the anisotropic equilibrium equation into an isotropic one. If a solution of the latter is known, it is possible to obtain an infinite number of anisotropic solutions by inverting this transformation, what requires an additional hypothesis.

In the isotropic version of the MHD equilibrium equation (Grad-Schlüter-Shafranov), it is necessary to specify the pressure profile $p(\Psi)$. The anisotropic version of the equilibrium equation, according to the CGL pressure tensor, introduces two different pressures, namely p_{\perp} and p_{\parallel} , which doubles the number of profiles needed. Instead of specifying profiles for them, in (19)–(20), we rather specify profiles for σ_{-} and \bar{p} , which are actually linear combinations of p_{\perp} and p_{\parallel} .

In this paper, we applied this methodology to axisymmetric toroidal equilibria described by oblate spheroidal coordinates. We start from an analytical solution derived by Kaneko et al. [26, 27] and used two different functions to invert the integral transform, obtaining two different anisotropic equilibria with oblate spheroidal boundary. A simple transformation enables one to consider prolate

spheroids as well. We also consider the latter possibility, but the results were essentially the same as for oblate spheroids.

Our two choices for the anisotropic equilibria produce similar results: the pressure in the direction parallel to the magnetic field is always larger than that in the perpendicular direction, except at the plasma boundary and magnetic axis. This is a natural consequence of the different behaviors of gyrating particles in both directions: strong magnetic fields lead to small Larmor radii, which constrains perpendicular motion, whereas the parallel motion is unbounded. There is no magnetic axis shift due to anisotropy as well. Our results are in accordance with previous solutions by Clemente [20] and ourselves [23]. The magnetic field components are slightly changed when passing from isotropic to anisotropic solutions, but the poloidal current density exhibits a signal reversal in the anisotropic case (for both solutions considered) which is absent in the isotropic case.

It would be possible, for example, to make a modelling of FRCs using the type of solutions developed in this work. For example, Clemente [20] has used a Hill vortex model in order to describe a FRC plasma with ellipsoidal separatrix with semi-axes a and b [38]. Our solution, on the other way, has just one parameter, namely $\xi_0 = \tanh^{-1}(b/a)$, which fits the axis ratio.

The efforts to obtain analytical solutions of anisotropic equilibria are worth from two points of view. Firstly these solutions can be used for benchmarking computer codes to solve equilibrium equation. Moreover, analytical solutions are always helpful for parametric studies of MHD stability and transport. The relative freedom in choosing the anisotropic equilibrium makes this method a powerful tool to generate such analytical solutions.

Funding Information This work has been financially supported by grants from CNPq (Brazilian Government Agency).

References

1. D.R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory* (Wiley, New York, 1983)
2. H.J. Lee, *Fundamentals of Plasma Physics* (World Scientific, Singapore, 2019)
3. G.F. Chew, M.L. Goldberger, F.E. Low, Proc. R. Soc. London **236**, 112 (1956)
4. R.M. Kulsrud, MHD Description of Plasma in Handbook of Plasma Physics, vol. I, ch. 1.4, ed. by M.N. Rosenbluth, R.Z. Sagdeev (Publishing Company, North-Holland, 1983)
5. V.D. Pustovitov, Plasma Phys. Contr. Fusion **52**, 065001 (2010)
6. A. Fasoli et al., Nucl. Fusion **47**, S264 (2007)
7. N.V. Erkaev, H.K. Biernat, D.F. Vogl, C.J. Farrugia, Adv. Space Res. **28**, 873 (2001)
8. J.P. Freidberg, Rev. Mod. Phys. **54**, 801 (1982)
9. H. Grad, H. Rubin, Hydromagnetic equilibria and force-free fields. in *Proceedings of the 2nd UN Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol. 31 (IAEA, Geneva, 1958), p. 190
10. R. Lüst, A. Schlüter, Z. Naturforschung **12a**, 85 (1957)
11. V.D. Shafranov, Plasma equilibrium in a magnetic field. in *Reviews of Plasma Physics*, ed. by M.A. Leontovich, Vol. 2 (Consultants Bureau, New York, 1966)
12. C. Mercier, M. Cotsaftis, Nucl. Fusion **1**, 121 (1961)
13. H. Grad, Phys. Fluids **10**, 137 (1967)
14. A. Sestero, A. Taroni, Nucl. Fusion **16**, 164 (1976)
15. W.A. Cooper et al., Nucl. Fusion **20**, 985 (1980)
16. W.A. Cooper, Phys. Fluids **26**, 1830 (1983)
17. P.J. Fielding, F.A. Haas, Nucl. Fusion **19**, 855 (1979)
18. E.R. Salberta et al., Phys. Fluids **30**, 2796 (1987)
19. H.M. Rizk, J. Plasma Phys. **38**, 209 (1987)
20. R.A. Clemente, Nucl. Fusion **33**, 963 (1993)
21. E.K. Maschke, Plasma Phys. **15**, 535 (1973)
22. F. Hernegger. in *Controlled Fusion and Plasma Physics (Proc. 5th Eur. Conf. Grenoble, 1972)*, Vol. 1 (Centre d'Études Nucléaires, Grenoble, 1972), p. 26
23. L.C. Souza, R.L. Viana, Phys. Plasmas **26**, 042502 (2019)
24. T.R. Jarboe, Plasma Phys. Contr. Fusion **36**, 945 (1984)
25. M.N. Rosenbluth, M.N. Bussac, Nucl. Fusion **19**, 489 (1979)
26. S. Kaneko, K. Chiyoda, I. Hirota, J. Phys. Soc. Japan **52**, 2016 (1983)
27. S. Kaneko, A. Kamitani, A. Takimoto, J. Phys. Soc. Japan **54**, 3347 (1985)
28. H. Gota et al., Nucl. Fusion **57**, 116021 (2017)
29. H. Gota et al., Nucl. Fusion **59**, 112009 (2019)
30. J.A. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*, 3rd edn. (Springer, New York, 1994)
31. R.A. Clemente, Plasma Phys. Contr. Fusion **36**, 707 (1994)
32. R.A. Clemente, R.L. Viana, Plasma Phys. Contr. Fusion **41**, 567 (1999)
33. R.A. Clemente, R.L. Viana, Braz. J. Phys. **29**, 457 (1999)
34. J.W. Edenstrasser, J. Plasma Phys. **24**, 299 (1980)
35. P.M. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, vol. II, ch. 10* (McGraw-Hill, New York, 1953)
36. R.L. Viana, Int. J. Theor. Phys. **37**, 2657 (1998)
37. H. Grad. in *Magneto-Fluid and Plasma Dynamics Symposia in Applied Mathematics*, Vol. 18 (American Mathematical Society, Providence, 1967), p. 162
38. S.P. Auerbach, W.C. Condit, Nucl. Fusion **21**, 927 (1981)

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.