

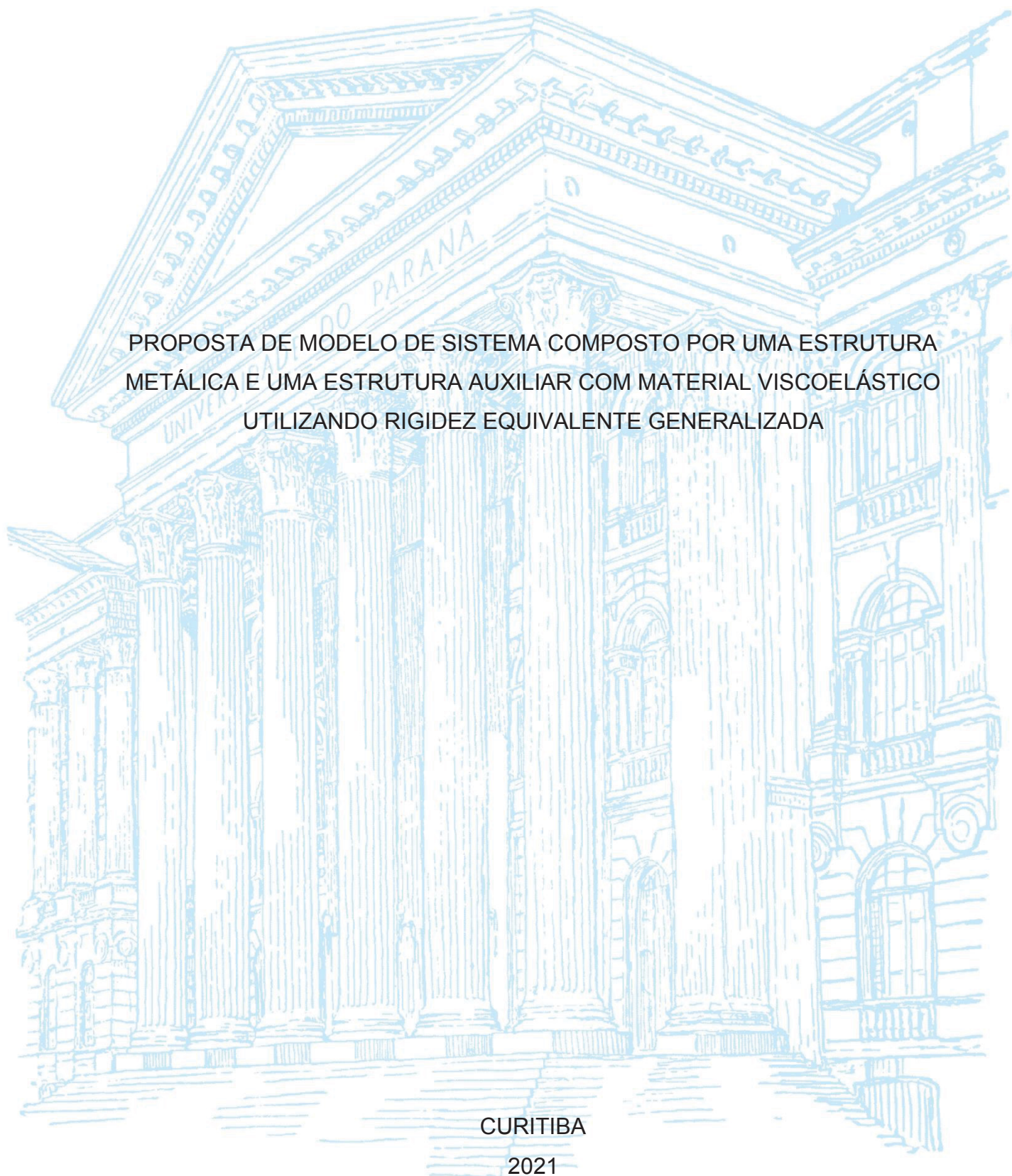
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SAMUEL CAVALLI KLUTHCOVSKY

PROPOSTA DE MODELO DE SISTEMA COMPOSTO POR UMA ESTRUTURA
METÁLICA E UMA ESTRUTURA AUXILIAR COM MATERIAL VISCOELÁSTICO
UTILIZANDO RIGIDEZ EQUIVALENTE GENERALIZADA

CURITIBA

2021



SAMUEL CAVALLI KLUTHCOVSKY

PROPOSTA DE MODELO DE SISTEMA COMPOSTO POR UMA ESTRUTURA
METÁLICA E UMA ESTRUTURA AUXILIAR COM MATERIAL VISCOELÁSTICO
UTILIZANDO RIGIDEZ EQUIVALENTE GENERALIZADA

Dissertação apresentado ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri

CURITIBA

2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

K66p Kluthcovsky, Samuel Cavalli

Proposta de modelo de sistema composto por uma estrutura metálica e uma estrutura auxiliar com material viscoelástico utilizando rigidez equivalente generalizada [recurso eletrônico] / Diogo Cardoso Rego – Curitiba, 2021.

Dissertação - Programa de Pós-Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri

1. Engenharia mecânica. 2. Vigas. 3. Estruturas metálicas. I. Bavastri, Carlos Alberto. II. Universidade Federal do Paraná. III. Título.

CDD 620.1

Bibliotecária: Vilma Machado CRB-9/1563

TERMO DE APROVAÇÃO

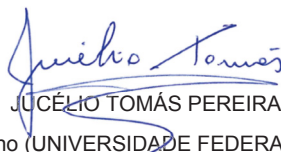
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **SAMUEL CAVALLI KLUTHCOVSKY** intitulada: **PROPOSTA DE MODELO DE SISTEMA COMPOSTO POR UMA ESTRUTURA METÁLICA E UMA ESTRUTURA AUXILIAR COM MATERIAL VISCOELÁSTICO UTILIZANDO RIGIDEZ EQUIVALENTE GENERALIZADA**, sob orientação do Prof. Dr. CARLOS ALBERTO BAVASTRI, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 23 de Agosto de 2021.



CARLOS ALBERTO BAVASTRI
Presidente da Banca Examinadora



JUCÉLIO TOMÁS PEREIRA
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



MARCO ANTONIO LUERSEN
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri, meu orientador, por seus excelentes ensinamentos, que sempre esteve disposto a me auxiliar com paciência, amizade e compreensão. Obrigado pela confiança e pelo incentivo.

Ao Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira, pela sua contribuição e ensinamentos essenciais para o trabalho desenvolvido.

Ao Prof. Dr. Marcos Antônio Luersen, pela disponibilidade e prontidão em participar da banca de defesa.

Ao Grupo de Pesquisa em Vibrações e Som da UFPR por ter me auxiliado durante a graduação e durante o curso de mestrado.

À Universidade Federal do Paraná e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela infraestrutura disponibilizada para o desenvolvimento desta pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

À minha mãe que sempre me apoiou e me ajudou imensamente nesta trajetória.

Aos meus familiares e amigos pelo apoio.

Agradeço a Deus, pela saúde, proteção e disposição.

RESUMO

Neutralizadores dinâmicos são dispositivos simples utilizados para diminuir os níveis de vibração e ruído irradiado em estruturas mecânicas em determinadas faixas de frequência. Estes dispositivos operam inserindo uma elevada impedância mecânica na região de interesse, aplicando forças e/ou momentos de reação e dissipando energia vibratória. Materiais viscoelásticos são usados em controle de vibração em estruturas mecânicas, como placas, prédios esbeltos e linhas de transmissão devido a suas características dinâmicas. Além do elevado fator de amortecimento, a utilização de neutralizadores de múltiplos graus de liberdade (MGL) se mostra favorável para o controle de estruturas com elevada densidade modal, trabalhando em uma banda ampla de frequência. Neste contexto, vigas do tipo sanduíche e *constrained layer* têm se mostrado promissoras como dispositivos de controle, unindo a alta capacidade dissipativa dos materiais viscoelásticos com uma construção simples e de MGL. Em trabalhos anteriores, os modelos de acoplamento dos neutralizadores de MGL consideravam apenas graus de liberdade de deslocamento na base de fixação. Entretanto, estes dispositivos de controle injetam elevada impedância no sistema a controlar, no ponto de fixação destes, não apenas em graus de liberdade de deslocamento, mas também em graus de liberdade de rotação. O objetivo deste trabalho é apresentar uma metodologia para modelar o comportamento dinâmico de um sistema composto por um sistema auxiliar de MGL contendo material viscoelástico fixado a um sistema mecânico, com acoplamento simultâneo de graus de liberdade de deslocamento e rotação. Neste trabalho, o sistema auxiliar estudado é uma viga *constrained layer* com material viscoelástico e de MGL. Este sistema é modelado por meio de um modelo parametrizado de elementos finitos, construído no *software* ANSYS® e representado pela sua rigidez dinâmica na base. A metodologia proposta consiste em modelar o sistema composto através dos parâmetros modais do sistema primário e inserir o comportamento dinâmico do sistema auxiliar na forma de uma matriz de rigidez dinâmica equivalente na base. Como validação da metodologia proposta uma análise numérico-experimental foi realizada. Nesta análise, o sistema primário é uma viga metálica engastada-livre de alumínio à qual são acoplados dois tipos de sistemas auxiliares, sendo o primeiro uma viga metálica, continuação do sistema primário, e o segundo, uma viga do tipo *constrained layer* com material viscoelástico. Para validar numericamente a metodologia proposta, uma simulação do sistema composto completo foi realizada no *software* de elementos finitos Ansys. Neste modelo, as propriedades do material viscoelástico (módulo complexo de elasticidade) foram introduzidas em função da frequência para uma dada temperatura. Os resultados numéricos foram validados experimentalmente. O modelo de rigidez equivalente generalizado proposto foi capaz estimar com acurácia a resposta do sistema composto, apresentando uma redução do tempo computacional da resposta de 25% em relação ao modelo do sistema composto completo em elementos finitos. Desta forma, a metodologia proposta é uma alternativa para ser utilizada no projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos de MGL.

Palavras-chave: Vigas sanduíche. Viga *constrained layer*. Materiais viscoelásticos. Acoplamento de múltiplos graus de liberdade. Controle passivo de vibrações. Elementos finitos.

ABSTRACT

Dynamic neutralizers are simple devices used to minimize the levels of vibration and radiated noise in mechanical structures in certain frequency ranges. These devices operate by inserting a high mechanical impedance in the region of interest, applying reacting forces and/or moments and dissipating vibratory energy. Viscoelastic materials are used in vibration control in mechanical structures such as plates, slender buildings and transmission lines due to their dynamic characteristics. In addition to the high damping factor, the use of multiple degrees of freedom (MGL) neutralizers is favorable for the control of structures with high modal density, working in a wide frequency band. In this context, sandwich and constrained layer beams have shown to be promising as control devices, combining the high dissipative capacity of viscoelastic materials with a simple and MGL construction. In previous works, MGL neutralizer coupling models considering only displacement degrees of freedom in the fixation base have been studied. However, these control devices inject high impedance into the system to be controlled, at their fixation point, not only in displacement degrees of freedom, but also in rotational degrees of freedom. The objective of this work is to present a methodology to model the dynamic behavior of a system composed of an auxiliary MGL system containing viscoelastic material attached to a mechanical system, with simultaneous coupling of displacement and rotation degrees of freedom. In this work, the auxiliary system studied is a MGL constrained layer beam with viscoelastic material. This system is modeled using a finite element parameterized code in ANSYS® software and represented by its dynamic base stiffness. The proposed methodology consists of modeling the composite system through the modal parameters of the primary system and inserting the dynamic behavior of the auxiliary system in the form of an equivalent dynamic stiffness matrix at the base. As validation of the proposed methodology, a numerical-experimental analysis was performed. In this analysis, the primary system is a free-standing aluminum metallic beam to which two types of auxiliary systems are coupled, the first being a metallic beam, continuation of the primary system, and the second, a constrained layer beam with viscoelastic material. To numerically validate the proposed methodology, a simulation of the complete composite system was performed in commercial finite element software. In this model, the properties of the viscoelastic material (complex modulus of elasticity) were introduced as a function of frequency for a given temperature. The numerical results were experimentally validated. The proposed generalized equivalent stiffness model was able to accurately estimate the response of the composite system, showing a reduction in computational time of the response of 25% when compared to the finite element compound system model. Thus, the proposed methodology can be used in the optimal design of MGL viscoelastic dynamic neutralizers.

Keywords: Sandwich beams. Constrained layers. Multiple degrees of freedom coupling. Passive vibration control. Viscoelastic materials. Finite elements.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – FATOR DE PERDA E MÓDULO DINÂMICO COM TEMPERATURA E FREQUÊNCIA CONSTANTES.	28
FIGURA 2 - NOMOGRAMA DE FREQUÊNCIA REDUZIDA DO MATERIAL ISODAMP C-1002.....	29
FIGURA 3 – MODELO DE SISTEMA MECÂNICO DE 1 GRAU DE LIBERDADE.	30
FIGURA 4 - FATORES A E H PARA CADA TIPO DE CARREGAMENTO APLICADO NO MATERIAL VISCOELÁSTICO.	32
FIGURA 5 - MODELO MECÂNICO DE UM SISTEMA DE UM GL COM EXCITAÇÃO NA BASE.....	33
FIGURA 6 - RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE PARA UM SISTEMA DE UM GL VISCOELÁSTICO.	33
FIGURA 7 - MODELO DE NEUTRALIZADOR UTILIZANDO PARÂMETROS GENERALIZADOS EQUIVALENTES PARA $me\Omega$ E $ce\Omega$	34
FIGURA 8 - MODELO DE NEUTRALIZADOR UTILIZANDO O PARÂMETRO GENERALIZADO EQUIVALENTE $ke\Omega$	34
FIGURA 9 – MODELO DE SP COM MGL COM UM NEUTRALIZADOR DE 1 GL ADICIONADO.	40
FIGURA 10 - FLUXOGRAMA GERAL DO CÁLCULO DA RESPOSTA DO SISTEMA COMPOSTO.	42
FIGURA 11 – MODELO DOS SISTEMAS CONSIDERADOS PARA AVALIAÇÃO DA METODOLOGIA, (A) SA METÁLICO, (B) SA CONSTRAIN LAYER.	43
FIGURA 12 - MODELO DO SISTEMA PRIMÁRIO.	44
FIGURA 13 - ELEMENTO SHELL281 DO SOFTWARE ANSYS.....	45
FIGURA 14 - ESQUEMA ILUSTRATIVO DO SISTEMA AUXILIAR METÁLICO.....	46
FIGURA 15 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DO SISTEMA AUXILIAR METÁLICO.....	47
FIGURA 16 - ESQUEMA ILUSTRATIVO DA DEFINIÇÃO DA BASE DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DO SISTEMA AUXILIAR METÁLICO.	48
FIGURA 17 – FLUXOGRAMA DAS ETAPAS EXECUTADAS DENTRO DO AMBIENTE ANSYS APDL.	51
FIGURA 18 – MODELOS MECÂNICOS EQUIVALENTES DO SISTEMA COMPOSTO.	51

FIGURA 19 – ACOPLAMENTO DAS RIGIDEZES EQUIVALENTES K_{eq} NO	
MODELOS DO SISTEMA COMPOSTO.	53
FIGURA 20 – SISTEMA PRIMÁRIO INSTRUMENTADO E FIXADO NA BASE DE	
CONCRETO.....	54
FIGURA 21 – MODELO DO SISTEMA PRIMÁRIO INDICANDO A REGIÃO DE	
AVALIAÇÃO DA RESPOSTA E A REGIÃO DE EXCITAÇÃO.	55
FIGURA 22 – SISTEMA COMPOSTO – VIGA CONTÍNUA METÁLICA.	56
FIGURA 23 - ESQUEMA DO SISTEMA AUXILIAR ACOPLADO AO SISTEMA	
PRIMÁRIO.	57
FIGURA 24 – SISTEMA AUXILIAR DO TIPO VIGA SANDUÍCHE COM MATERIAL	
VISCOELÁSTICO E MASSA DE SINTONIZAÇÃO NA	
EXTREMIDADE LIVRE.....	58
FIGURA 25 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DO SISTEMA AUXILIAR – VIGA	
SANDUÍCHE.	60
FIGURA 26 - ESQUEMA ILUSTRATIVO DA DEFINIÇÃO DA BASE DO MODELO	
DE ELEMENTOS FINITOS DO SISTEMA AUXILIAR.....	61
FIGURA 27 – MODELOS MECÂNICOS EQUIVALENTES DO SISTEMA	
COMPOSTO.	62
FIGURA 28 – MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS DO SISTEMA COMPOSTO.	62
FIGURA 29 – DETALHE NA REGIÃO DE ACOPLAMENTO ENTRE OS SP E O SA	
NO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.	63
FIGURA 30 – SISTEMA PRIMÁRIO INSTRUMENTADO E FIXADO NA BASE DE	
CONCRETO.....	63
FIGURA 31 – MODELO DO SISTEMA PRIMARIO INDICANDO A REGIÃO DE	
MEDIÇÃO E A RIGIÃO DE EXCITAÇÃO.	64
FIGURA 32 – SISTEMA AUXILIAR CONSTRUÍDO.....	65
FIGURA 33 – AVALIAÇÃO DA RESPOSTA DO SA NA CONDIÇÃO LIVRE-LIVRE.	
.....	67
FIGURA 34 – SISTEMA COMPOSTO.	67
FIGURA 35 – SISTEMA COMPOSTO – DETALHE NO SA E NA JUNTA	
PARAFUSADA.....	68
FIGURA 36 – ENGASTE CONTUÍDO.....	70
FIGURA 37 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SP – RECEPTÂNCIA NO PONTO	
1.....	71

FIGURA 38 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SP – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.....	71
FIGURA 39 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.....	72
FIGURA 40 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.....	73
FIGURA 41 – COMPARAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.....	74
FIGURA 42 – COMPARAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.....	74
FIGURA 43 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SP – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.....	75
FIGURA 44 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SP – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.....	76
FIGURA 45 – RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE DO SISTEMA AUXILIAR.	77
FIGURA 46 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA NA BASE DP SA – CONDIÇÃO LIVRE-LIVRE.	78
FIGURA 47 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.....	79
FIGURA 48 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.....	79
FIGURA 49 – COMPARAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.....	80
FIGURA 50 – COMPARAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.....	81
FIGURA 51 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC (INERTÂNCIA) – COMPARAÇÃO ENTRE METODOLOGIAS.	83
FIGURA 52 – COMPARAÇÃO DA RESPOSTA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.	92
FIGURA 53 – COMPARAÇÃO DA RESPOSTA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.	92
FIGURA 54 – MODELO DO SISTEMA AUXILIAR – CL ESTENDIDA ATÉ A BASE DO SA.	95
FIGURA 55 – RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE DO SISTEMA AUXILIAR.	95

FIGURA 56 – RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE DO SISTEMA AUXILIAR.	96
FIGURA 57 – MODELO E DIMENSÕES DO SA.	97
FIGURA 58 – RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE DO SISTEMA AUXILIAR - COMPARAÇÃO.	98
FIGURA 59 – RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE DO SISTEMA AUXILIAR – COMPARAÇÃO (APROXIMAÇÃO).	98
FIGURA 60 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC (INERTÂNCIA) – COMPARAÇÃO ENTRE METODOLOGIAS.	99
FIGURA 61 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC (INERTÂNCIA) – COMPARAÇÃO ENTRE METODOLOGIAS (APROXIMAÇÃO).	100

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – PROPRIEDADES DO SISTEMA PRIMÁRIO	44
TABELA 4 – DIMENSÕES E PROPRIEDADES DO SISTEMA AUXILIAR METÁLICO	45
TABELA 3 – PROPRIEDADES DO SISTEMA PRIMÁRIO	56
TABELA 4 – DIMENSÕES DO SISTEMA AUXILIAR.....	58
TABELA 5 – PROPRIEDADES DO SISTEMA AUXILIAR.....	59
TABELA 6 – AJUSTE NAS PROPRIEDADES DOS SISTEMAS PRIMÁRIOS – MODELO DE ELEMENTOS FINITOS	70
TABELA 7 – DIMENSÕES DO SISTEMA AUXILIAR – EXTENSÃO DO MV	94
TABELA 7 – DIMENSÕES DO SISTEMA AUXILIAR – ESTENSÃO E AUMENTO DA ESPESSURA MV E CL.....	94

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

APDL	- <i>Ansys Parametric Design Language</i>
CL	- <i>Constrained layer</i>
EF	- Elementos finitos
GL	- Graus de liberdade
MK	- Massa-mola
MCK	- Massa-mola-amortecedor
MGL	- Múltiplos graus de liberdade
MV	- Material viscoelástico
ND	- Neutralizador dinâmico
NDV	- Neutralizador dinâmico viscoelástico
PEG	- Parâmetros equivalentes generalizados
SA	- Sistema auxiliar
SC	- Sistema composto
SP	- Sistema primário

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	16
1.1 JUSTIFICATIVA	18
1.2 OBJETIVOS	19
1.2.1 Objetivo geral	19
1.2.2 Objetivos específicos.....	19
2 REVISÃO DE LITERATURA	20
2.1 USO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS PARA CONTROLE DE VIBRAÇÕES.....	20
2.1.1 Uso de MV com Camadas Constritoras e Vigas Sanduíche	21
2.2 NEUTRALIZADORES DINÂMICOS	22
2.2.1 Neutralizadores Dinâmicos de Múltiplos Graus de Liberdade	23
2.3 NEUTRALIZADORES DINÂMICOS UTILIZANDO MATERIAIS VISCOELÁSTICOS	24
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	26
3.1 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS	26
3.2 SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE	30
3.2.1 Modelo Viscoso	30
3.2.2 Modelo Viscoelástico.....	31
3.3 RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE	32
3.4 PARÂMETROS EQUIVALENTES GENERALIZADOS.....	34
3.5 SISTEMA PRIMÁRIO DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE	36
3.6 SISTEMA COMPOSTO COM SISTEMA AUXILIAR DE 1 GL	39
4 MATERIAIS E MÉTODOS	42
4.1 SISTEMA AUXILIAR METÁLICO	43
4.1.1 Sistema Primário	43
4.1.2 Sistema Auxiliar	45
4.1.3 Modelo de Elementos Finitos	46
4.1.4 Cálculo da rigidez dinâmica na base por elementos finitos	47
4.1.5 Sistema Composto	51
4.1.6 Validação Experimental.....	53
4.1.6.1 Sistema Primário	54
4.1.6.2 Sistema Composto	55

4.2 SISTEMA AUXILIAR DO TIPO VIGA SANDUÍCHE COM MATERIAL VISCOELÁSTICO	56
4.2.1 Sistema Primário	56
4.2.2 Sistema Auxiliar	57
4.2.3 Modelo de Elementos Finitos	59
4.2.4 Simulação Numérica das Propriedades do Material Viscoelástico	60
4.2.5 Cálculo da rigidez dinâmica na base por elementos finitos	60
4.2.6 Sistema Composto	61
4.2.7 Validação Experimental.....	63
4.2.7.1 Sistema Primário	63
4.2.8 Sistema Auxiliar – Viga Sanduíche Com Material Viscoelástico	64
4.2.8.1 Simplificações na Configuração Experimental.....	65
4.2.9 Sistema Composto	67
5 RESULTADOS.....	69
5.1 SISTEMA AUXILIAR METÁLICO	70
5.1.1 Sistema Primário	70
5.1.2 Sistema Composto	72
5.1.3 Sistema Composto – Análise Sobre a Influência da Rigidez Dinâmica na Base Angular do SA	73
5.2 SISTEMA AUXILIAR VIGA SANDUÍCHE COM MATERIAL VISCOELÁSTICO ..	75
5.2.1 Sistema Primário	75
5.2.2 Sistema Auxiliar	76
5.2.3 Sistema Composto – SA Com Material Viscoelástico	78
5.2.4 Sistema Composto – Análise Sobre a Influência da Rigidez Dinâmica na Base Angular do SA do Tipo <i>Constrained Layer</i>	80
5.3 TEMPO COMPUTACIONAL	81
5.4 COMPARAÇÃO DA METODOLOGIA PROPOSTA COM A METODOLOGIA DESCRITA POR SILVA (2019).....	82
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	84
6.1 CONCLUSÕES	84
6.2 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	84
REFERÊNCIAS.....	85
APÊNDICE 1 – CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS DO MATERIAL VISCOELÁSTICO EM ELEMENTOS FINITOS.....	89

APÊNDICE 2 – CONCENTRAÇÃO DA RIGIDEZ DINÂMICA DO SISTEMA AUXILIAR EM UM ÚNICO PONTO DO SISTEMA PRIMÁRIO	91
APÊNDICE 3 – ESTUDO SOBRE O AMORTECIMENTO NO SISTEMA AUXILIAR DO TIPO <i>CONSTRAINED LAYER</i>	94
APÊNDICE 4 – COMPARAÇÃO ENTRE DOIS MÉTODOS PARA CÁLCULO DA RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE PARA SISTEMAS AUXILIARES DE MGL	97
ANEXO 1 – PROPRIEDADES DINÂMICAS DA BORRACHA BUTÍLICA BT 806/553	101

1 INTRODUÇÃO

A vibração é caracterizada pelo movimento oscilatório de um sistema, se manifestando na transferência de energia potencial em energia cinética de forma cíclica. Tal comportamento é desencadeado pela ação de carregamentos dinâmicos. Como a maioria dos sistemas mecânicos está sujeita a este tipo de carregamento, seja direta ou indiretamente, é crucial a análise de vibrações nas etapas de projeto.

Alguns fenômenos típicos que provocam elevadas amplitudes de vibração são devido à ressonância, instabilidade dinâmica e autoexcitação. No primeiro, a frequência da força de excitação coincide com alguma frequência natural do sistema e, no segundo, perturbações externas podem provocar crescimento repentino de vibrações sem aviso prévio.

Na vizinhança das frequências naturais o sistema possui uma impedância mecânica baixa, o que pode provocar respostas elevadas mesmo quando sujeito a excitações de baixas amplitudes. Além disso, a excitação pode ter um espectro de banda larga, como o desprendimento de vórtices de von Kármán do fluxo de ar em uma edificação flexível (prédios muito altos) ou linhas aéreas de transmissão de energia elétrica. Em casos como nas linhas de transmissão, a faixa de frequências de excitação eólica pode ser considerada entre 10 e 100 Hz. Nessa faixa, diversas frequências naturais podem ser excitadas.

Em geral, quando se tem uma excitação banda larga e/ou uma densidade modal elevada de uma estrutura, é necessário prever o projeto de sistemas de controle.

Para reduzir a resposta de um sistema em condições de ressonância, usam-se diferentes tipos de controles passivos e ativos/adaptativos. Dentre os controles passivos, pode-se mencionar a adição de amortecimento, isolamento e o uso de neutralizadores dinâmicos (NDs). Os NDs, chamados de sistemas auxiliares, são dispositivos simples que tem como objetivo reduzir os níveis de vibração da estrutura na qual são fixados a valores aceitáveis. Estes dispositivos operam na forma de uma força de reação e dissipação de energia vibratória através de uma injeção elevada de impedância mecânica na estrutura na qual são fixados (BAVASTRI et al., 1997; SUN et al., 2016). De maneira geral, os NDs são constituídos por elementos de massa, rigidez e amortecedor.

A primeira teoria a respeito do uso de neutralizadores foi introduzida por Den Hartog (1956) que estudou modelos simples de um grau de liberdade de neutralizadores. O dispersivo atuava sobre um sistema a controlar do tipo massa-mola (MK), também com 1 GL. O modelo desenvolvido propôs o método dos pontos fixos para obter os parâmetros ótimos do neutralizador do tipo massa-mola amortecedor viscoso MCK. Estes dispositivos do tipo MCK são modelos teóricos e em alguns casos de difícil construção (SILVA, 1991).

Pelo exposto acima, os elementos de mola e amortecedor podem ser substituídos por um único elemento viscoelástico, como descrito por Snowdon (1968). Os neutralizadores dinâmicos viscoelásticos (NDVs) são de fácil construção, baixo custo e podem ser produzidos em grande escala por meio de vulcanização, apresentando bons resultados em controle de vibrações. Além de atuar como mola, o material viscoelástico possui um elevado fator de dissipação de energia, o que o torna vantajoso quando utilizados para controle em ampla faixa de frequência, na qual vários modos estão presentes.

Alguns trabalhos foram publicados nesta linha de pesquisa, aperfeiçoando os métodos matemáticos e o projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos. Dentre eles, é possível destacar o uso destes dispositivos para sistemas girantes (DOUBRAWA, 2008; VOLTOLINI, 2018), no controle de sistemas não lineares (BAVASTRI; FEBBO, 2014; BRONKHORST et al., 2018). Também é possível destacar os estudos de vigas do tipo *constrained layer* com materiais viscoelásticos e elementos piezoelétricos, buscando controle ativo/híbrido de vibrações (BAZ; RO, 1995; TRINDADE et al., 2010; LI; LYU, 2014; IURLOVA et al., 2019).

Estes dispositivos podem ser divididos quanto ao seu modelo de construção: sistemas com um grau de liberdade (GL) e sistemas de múltiplos graus de liberdade (MGL). Dentre os modelos de MGL, destacam-se os dispositivos do tipo viga sanduíche e *constrained layer*. Estes sistemas são compostos por uma viga base, uma camada de material viscoelástico fixadas sobre a viga base e por fim uma camada constritora, geralmente metálica, fixada sobre o material viscoelástico. Através desta construção, a capacidade dissipativa do material viscoelástico é transmitida a viga base através do cisalhamento imposto pela camada constritora. Whitter (1959), Ross, Kerwin e Ungar (1959) e Thron (1965) estudaram estas estruturas afim de identificar o amortecimento estrutural introduzido.

Além da construção do tipo *constrained layer* como meio de introduzir amortecimento, estudos mais recentes utilizam vigas piezoelétricas como camada constritora, como meio de controle ativo de vibrações. Entretanto, são encontrados poucos estudos na literatura avaliando a utilização de vigas sanduíche e do tipo *constrained layer* como NDVS de MGL.

Em sua tese de doutorado, Silva (2019) apresentou uma metodologia para o projeto ótimo de NDVS de MGL, sendo um dos exemplos estudados uma viga sanduíche. No modelo utilizado o acoplamento entre o sistema a se controlar e o NDV de MGL foi realizado por meio de graus de liberdade de deslocamento na etapa de projeto ótimo.

Neste contexto, o presente trabalho propõe expandir os modelos utilizados no trabalho de Silva (2019). Para tanto, busca-se adicionar os graus de liberdade de rotação no acoplamento do sistema a se controlar e do NDV de MGL. É estudada uma metodologia para descrever o comportamento dinâmico de uma estrutura composta por um sistema primário, representando o sistema a controlar, e uma estrutura do tipo *constrained layer*, representando o NDV de MGL. O acoplamento translacional e rotacional representa de forma mais acurada o sistema composto real, e tem como objetivo aperfeiçoar e fortalecer as metodologias utilizadas no projeto ótimo de NDVs de MGL.

1.1 JUSTIFICATIVA

Na área de controle de vibrações, muitas vezes se faz uso de modelos do sistema composto para projetar os neutralizadores dinâmicos ótimos. Neste contexto, é de extrema importância a acurácia e robusteza do modelo do sistema composto, uma vez que este é utilizado como fundação para o dimensionamento dos dispositivos de controle de vibrações.

O presente estudo visa expandir o modelo utilizado por Silva (2019), para simular a resposta dinâmica de sistemas compostos onde o sistema auxiliar possui múltiplos graus de liberdade. Para tanto, além dos graus de liberdade de translação tipicamente utilizados, os graus de liberdade de rotação também são considerados no acoplamento entre os sistemas.

Este modelo tem capacidade de representar o sistema composto real de forma mais fidedigna e possui potencial de aprimorar a teoria de projeto ótimo destes

dispositivos quando utilizada para controle de vibrações. Esta abordagem se mostra oportuna para sistemas primários complexos ou que poucas informações estão disponíveis. Nestes casos, um modelo em elementos finitos do sistema composto é muito complexo e/ou muito custoso computacionalmente para o projeto ótimo do dispositivo de controle.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo deste trabalho é desenvolver e validar experimentalmente uma metodologia para avaliar o comportamento dinâmico de um sistema composto por uma estrutura metálica acoplada a uma estrutura tipo *constrained layer* com material viscoelástico usando rigidez equivalente generalizada e considerando acoplamento translacional e angular.

1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Modelar e validar experimentalmente o comportamento da viga sanduíche com material viscoelástico por elementos finitos através de uma resposta de rigidez dinâmica na base.
- Desenvolver as equações de movimento do sistema composto realizando o acoplamento de graus de liberdade de translação e rotação.
- Validar a metodologia proposta para prever o comportamento dinâmico de um sistema composto contínuo e simplificado (viga metálica engastada-livre e sistema auxiliar de mesma seção transversal, considerado como continuação do SP) através de verificação experimental e numérica.
- Validar a metodologia proposta para prever o comportamento dinâmico de um sistema composto (viga engastada-livre e sistema auxiliar por meio de uma viga composta com material viscoelástico) através de verificação experimental e numérica.

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 USO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS PARA CONTROLE DE VIBRAÇÕES

Materiais viscoelásticos possuem características elásticas e viscosas ao se deformar. Quando submetido a um carregamento, parte da energia de deformação é armazenada de forma elástica e parte é dissipada na forma de calor. Devido à sua alta capacidade de dissipar energia, estes materiais têm sido aplicados amplamente em amortecedores, neutralizadores e isoladores na indústria automotiva, aeronáutica e civil.

Para as técnicas de controle, é essencial um modelo matemático preciso que determine o comportamento dinâmico destes materiais. Devido às suas propriedades reológicas, os modelos são mais complexos que os de materiais puramente elásticos ou puramente viscosos.

Cruz (2004) exemplifica os modelos clássicos utilizados para descrever o comportamento viscoelástico, como o modelo de Kelvin-Voigt e o modelo de Maxwell. Na sua maioria, estes modelos combinam diversos elementos de mola e amortecedores puros em series e/ou paralelo. Segundo Caputo e Mainardi (1966), estes modelos são simples demais para conformar fenomenologicamente ao comportamento viscoelástico.

Dentre as propriedades destes materiais, as de maior interesse no controle de vibrações são o fator de perda e o módulo dinâmico. O primeiro está associado à capacidade de dissipar energia do material, e o segundo representa a energia armazenada mesmo. Essas propriedades dependem da frequência do carregamento e da temperatura de trabalho. Alguns materiais apresentam variações significativas em suas propriedades com uma pequena mudança de temperatura e frequência. Sendo assim, a escolha do material adequado é de extrema importância em situações de controle.

Como demonstrado por Bagley e Torvik (1983), os modelos de derivadas fracionárias são suficientemente precisos para descrever o comportamento viscoelástico linear no domínio da frequência, para grandes variações desta e da temperatura, utilizando poucos parâmetros (ROSSIKHIN; SHITIKOVA, 1998).

A possibilidade de manufatura em larga escala e a simplicidade de construção de neutralizadores com materiais viscoelásticos se torna especialmente interessante

em aplicações onde o uso de um neutralizador é contemplado desde o projeto do sistema. Além do baixo custo de produção, a alta capacidade de dissipação de energia é especialmente desejável no controle em banda larga de frequência (VERBAAN; PETERS; STEINBUCH, 2017)

2.1.1 Uso de MV com Camadas Constritoras e Vigas Sanduíche

Na literatura encontram-se diversos modelos analíticos criados para descrever o comportamento dinâmico destes sistemas. Utilizando esses modelos, as propriedades mecânicas, como o módulo de elasticidade e fator de perda, são identificadas para uma estrutura anisotrópica equivalente em função da frequência.

Um dos primeiros modelos estudados, descrito por Ross, Kevin e Ungar (1959), analisa o comportamento do sistema de multicamadas utilizando um sistema equivalente de apenas uma camada. Este, por sua vez, possui comportamento dinâmico aproximado, e suas propriedades mecânicas são descritas em função da frequência. Dois estudos conduzidos pelos mesmos autores seguem nesta mesma linha (KERWIN, 1959; UNGAR, 1962), utilizando modelos similares. Mais recentemente, Nilsson e Nilsson (2002) estudaram o comportamento de estruturas sanduíche, com núcleos de espuma e do tipo colmeia, levando em consideração muitas das suposições assumidas por trabalhos anteriores. Dentre estas, destacam-se a consideração de efeitos causados pela flexão, cisalhamento e rotação no material multicamadas. Backstrom e Nilsson (2007) estimaram o fator de perda equivalente de vigas sanduíche através da teoria de Bernouli-Euler combinada com parâmetros dependentes da frequência.

Além de modelos analíticos, a utilização de métodos aproximados para abordar estas estruturas complexas também tem sido estudada. Johnson e Kienholz (1981) descrevem as limitações dos modelos analíticos ao descrever geometrias complexas. Por esse motivo, os autores ressaltam a crescente demanda da indústria aeronáutica por modelos em elementos finitos capazes de descrever com acurácia o comportamento de estruturas sanduíche com material viscoelástico.

Zhang e Chen (2006) utilizaram o *software* comercial de elementos finitos ANSYS 7.0 para prever o fator de perda modal de vigas de material compósito com camadas de material viscoelástico. Outros estudos de estruturas do tipo sanduíche

utilizando o *software* ANSYS podem ser encontrados nos trabalhos de Malekzadeh e Sayyidmousavi (2009) e Madenci e Guven (2015).

2.2 NEUTRALIZADORES DINÂMICOS

O primeiro projeto de neutralizador descrito na literatura foi realizado e patenteado por Frahm (1909). O dispositivo foi projetado para controlar o movimento de balanço em navios (roll). Apesar dos bons resultados, o dispositivo foi projetado empiricamente e contava com diversos sistemas de regulagem para sintonização.

O primeiro que modelou um sistema de dois graus de liberdade para o projeto dos parâmetros físicos ótimos de um neutrarizador foi Den Hartog (1956). Essa teoria chamada de pontos fixos considera o sistema primário de um GL do tipo massa mola (MK) e o neutralizador, também de um GL, do tipo MCK. Para esse autor, o neutralizador seria ótimo quando os picos da resposta da massa do sistema a controlar tivessem a mesma amplitude. Posteriormente, estes modelos foram estudados por vários autores, como Harris e Crede (1976), Hunt (1979), entre outros.

Snowdon (1968) foi o primeiro a utilizar modelos viscoelásticos para o projeto de neutralizadores dinâmicos, substituindo o modelo clássico de mola e amortecedor viscoso pelo material. Em seguida, Nashif (1973) estudou o comportamento de materiais viscoelásticos para controle de vibrações com neutralizadores dinâmicos.

Segundo Silva (1991), o modelo MCK com amortecimento viscoso é de difícil construção prática, sendo inviável para sistemas de baixa massa. Além disso, no projeto de um neutralizador simples para um sistema de múltiplos graus de liberdade, Silva (1991) utilizou um conceito de parâmetros equivalentes generalizados (ESPÍNDOLA E SILVA, 1992). Esta abordagem se mostra de grande valor, uma vez que utiliza apenas coordenadas generalizadas do sistema primário para descrever o movimento do sistema composto. Desta forma, os GL adicionados pelo (os) neutralizador (es) no sistema primário não aumentam o número de termos da equação de movimento. Para tanto, as equações de movimento são resolvidas em um subespaço modal do sistema primário. Esta abordagem será descrita em mais detalhes na seção 3.4.

2.2.1 Neutralizadores Dinâmicos de Múltiplos Graus de Liberdade

Tipicamente, os neutralizadores dinâmicos são construídos e modelados como dispositivos com um único GL, atuando no sistema primário em apenas uma direção. Entretanto, em muitos problemas práticos de controle de vibrações, o uso de neutralizadores de MGL pode ser benéfico. Com um projeto adequado, tal abordagem permitiria um controle em uma faixa de frequência maior e/ou outras direções de interesse em apenas um dispositivo.

Para controle de vibrações em linhas de transmissão, um neutralizador amplamente utilizado é conhecido como *Stockbridge Vibration Damper* (patenteado em 1928 por George H. Stockbridge). Este dispositivo consiste de um sistema MK com duas molas compostas por cordoalhas de aço e duas massas de ferro fundido colocadas de forma simétrica ou assimétrica. Como possuem baixo amortecimento, os dispositivos assimétricos utilizam MGL para reduzir a vibração das linhas de transmissão, sujeitas a excitações nas faixas de 10 a 100 Hz. Desde a criação da patente, o dispositivo não passou por nenhuma mudança significativa, e continua sendo amplamente utilizado. Segundo Sun *et al.* (2016), o escorregamento destes dispositivos é uma das falhas mais comuns de linhas de alta tensão. Apesar do grande controle na região de projeto, dispositivos MK não dissipam energia, podendo causar danos na estrutura e/ou no neutralizador.

Além das vantagens no controle, o acoplamento de MGL com a estrutura primaria descreve com maior acurácia o sistema físico, sendo mais realista e possibilitando aproximações melhores. Em virtude da maior complexidade, problemas de otimização de neutralizadores com MGL são mais custosos computacionalmente se comparado a neutralizadores de um GL.

Recentemente, destaca-se o trabalho de Silva (2019), onde uma metodologia para projeto ótimo de neutralizadores de MGL com material viscoelástico foi estudada para controle de banda larga. O problema de otimização foi formulado em volta da resposta do modelo do sistema composto (SC). Este modelo utilizou o conceito de parâmetros equivalentes generalizados expandido para sistemas de MGL.

O autor utilizou o *software* de elementos finitos para extrair as matrizes de massa e rigidez do neutralizador de MGL. Após a extração, a dependência das frequências e temperatura do material viscoelástico foi inserido nestas matrizes e a rigidez equivalente na base foi calculada através da equação de movimento do neutralizador.

2.3 NEUTRALIZADORES DINÂMICOS UTILIZANDO MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Tendo em vista a dificuldade de construção de dispositivos de controle utilizando elementos de rigidez e de amortecimento, materiais viscoelásticos tem sido amplamente utilizados como substitutos. O uso de materiais viscoelásticos se mostram extremamente benéficos em situações onde o espaço disponível e baixo custo de manufatura são fatores limitantes.

Rashid e Nicolescu (2008) descreveram o processo de projeto de um NDV de 1 GL para atenuação de vibrações em operações de usinagem de fresamento. O dispositivo desenvolvido é fixado à peça, tendo foco no controle de processos de manufatura que utilizam serialização de linha e *paletts* para fixação da peça bruta.

Muresan et al. (2014) utilizaram um NDV para controle de vibrações em uma estrutura metálica submetida a excitações sísmicas. O modelo de material viscoelástico utilizado foi o de derivadas fracionárias. Os autores também combinaram o modelo proposto com um controlador ativo de ordem fractal, adicionando redundância e maior capacidade de atenuação no sistema.

Um artigo publicado por Verbaan et al. em 2017 estudou a aplicação de NDVs com materiais viscoelásticos em aplicações para controle de banda larga de frequências. De modo geral, o fator de perda destes materiais diminui em função do aumento da frequência, o que indicaria uma redução na capacidade de dissipação do material em elevadas frequências. Entretanto, o aumento do módulo de armazenamento, também característica de matérias viscoelásticos, contribui de forma positiva para o neutralizador, possibilitando dissipação de energia em diferentes frequências de ressonância. Os autores estudaram um NDV com MV aplicado a estágios de movimento linear de alta precisão, sistemas mecânicos amplamente encontrados em sistemas de medição e manufatura por litografia na indústria de semicondutores.

Dai et al. (2019) compararam NDVs com neutralizadores do tipo MCK, estudando o impacto da variação das propriedades dos materiais viscoelásticos com diferentes frequências de excitação. Os autores também propõem um modelo de projeto de NDVs levando em consideração a possível dessintonização dos dispositivos. Dessa forma, as incertezas na identificação das propriedades

viscoelásticas e na etapa de construção do dispositivo podem ser mitigadas na etapa de projeto.

Além das aplicações como neutralizadores passivos, os materiais viscoelásticos tem sido amplamente estudados desde a década de 90 na área de controle ativo, sendo, por exemplo associados a vigas piezo-elétricas. A construção é similar à de vigas *constrained layer*, entretanto a camada constritora é substituída por uma viga piezoelétrica. Esta, por sua vez, é utilizada para aprimorar a eficácia do amortecimento introduzido pelas estruturas *constrained layer*, beneficiando-se da simplicidade e baixo peso desta configuração. Um exemplo é o estudo elaborado por Baz e Ro (1995) onde a aplicação de ACLD (*Active Constrained Layer Damping*) é estudada para aplicações onde se faz necessário alto amortecimento em uma grande faixa de frequências e diversas temperaturas de operação. Mas estudos desenvolvidos para avaliar o comportamento de camadas de MV fixadas a elementos piezoelétricos podem ser vistos nos trabalhos de Trindade et al. (2001), Li e Lyu (2014), Iurlova et al. (2019) e Trindade et al. (2010).

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No presente capítulo são discutidos os modelos matemáticos necessários para o desenvolvimento da metodologia proposta. Inicialmente são abordados modelos para descrever o comportamento de materiais viscoelásticos, seguido da equação de movimento para sistemas de um grau de liberdade e o conceito de rigidez dinâmica na base. Posteriormente, é descrita a metodologia de parâmetros equivalentes generalizados, a equação de movimento para sistemas de múltiplos graus de liberdade e por fim a utilização de sistemas auxiliares como neutralizadores em sistemas de MGL.

3.1 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Há vários modelos matemáticos clássicos que descrevem o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos. Estes materiais apresentam propriedades tanto viscosas quanto elásticas, capazes de armazenar e dissipar energia mecânica. Entre esses modelos, podem se citar: os modelos de Maxwell, de Kevin-Voigt ou de Zenner descritos por Banks et al. (2010), os quais se baseiam em molas lineares e amortecedores viscosos. Esses modelos, usando de derivadas de ordem inteira, produzem resultados poucos precisos em uma ampla gama de frequências e temperaturas. Surge, assim, a teoria de viscoelasticidade linear relacionando a tensão-deformação de forma mais ampla e geral, com mais parâmetros a identificar, portanto mais modelos elementares combinados, como mostrado na equação 1:

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m D^m \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n D^n \varepsilon(t). \quad (1)$$

O modelo da equação 1, permite representar de forma precisa o comportamento dinâmico destes materiais em uma ampla gama de frequências e temperaturas. Tentando reduzir a quantidade destes parâmetros, e mantendo a acúrcia do modelo, foi introduzida a equação constitutiva destes materiais com base em derivadas de ordem fracionária como descrito por Cruz (2004), equação 2:

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m D^{k_m} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n D^{\alpha_n} \varepsilon(t). \quad (2)$$

Na equação 2, $\sigma(t)$ e $\varepsilon(t)$ são tensão e deformação, respectivamente, e b_m , k_m , E_n , E_0 e α_n são parâmetros do material. D^{α_n} e D^{k_m} são as derivadas de ordem fracionária. Aplicando esta equação constitutiva no modelo de Zenner e aplicando transformada de Fourier é possível obter o módulo de elasticidade complexo $E_c(\Omega)$, e, de forma análoga, o módulo de cisalhamento complexo $G_c(\Omega)$,

$$E_c(\Omega) = \frac{E_0 + E_\infty b_1 (i\Omega)^\beta}{1 + b_1 (i\Omega)^\beta}; \quad (3)$$

$$G_c(\Omega) = \frac{G_0 + G_\infty b_1 (i\Omega)^\beta}{1 + b_1 (i\Omega)^\beta}, \quad (4)$$

onde G_0 representa o valor assintótico inferior do módulo, ou seja, em frequências próximas de zero. Já G_∞ representa o valor assintótico superior do módulo, para frequências tendendo ao infinito, β é a ordem fracionária da derivada e b_1 é a constante relacionada com o tempo de relaxação do material. De forma análoga, E_0 e E_∞ representam valor assintótico do módulo de elasticidade superior e inferior, respectivamente.

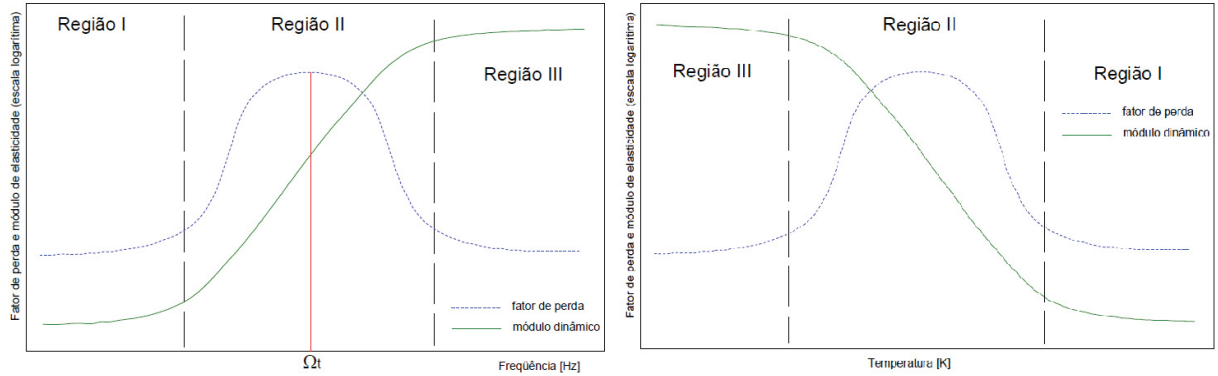
A equação 4 pode ser reduzida utilizando o conceito do fator de perda $\eta_G(\Omega)$, definido como a razão entre a parte imaginária e a parte real do módulo de cisalhamento:

$$G_c(\Omega) = G(\Omega)(1 + i\eta_G(\Omega)). \quad (5)$$

O módulo dinâmico de cisalhamento, G , e o fator de perda, η_G , são funções da frequência e da temperatura, sendo uma característica importante dos materiais viscoelásticos. O módulo de cisalhamento varia proporcionalmente com a frequência e inversamente proporcional com a temperatura. Porém, para uma temperatura constante, o fator de perda cresce até a chamada frequência de transição (Ω_t), e após esse valor o fator de perda tem seu valor diminuído. Da mesma forma, para uma

frequência constante, o fator de perda cresce com a temperatura até atingir a temperatura de transição e após este valor começa a decrescer (Figura 1).

FIGURA 1 – FATOR DE PERDA E MÓDULO DINÂMICO COM TEMPERATURA E FREQUÊNCIA CONSTANTES.



FONTE: O autor (2021).

Os efeitos da temperatura e da frequência de trabalho podem ser combinados através de apenas uma variável, a frequência reduzida. Isto é possível através do princípio de superposição frequência-temperatura, onde, a partir de dados experimentais, obtém-se uma caracterização dinâmica apurada. Este princípio estabelece que as diversas curvas de propriedades dinâmicas podem ser superpostas, através de uma temperatura de referência e através de deslocamentos na frequência, gerando duas curvas fundamentais (G e η_G). Assim, matematicamente, tem-se:

$$G_{R0}(\Omega_{red}) = \frac{T_0 \rho_0}{T \rho} G_R(\Omega, T); \quad (6)$$

$$\eta_{R0}(\Omega_{red}) = \eta_G(\Omega, T), \quad (7)$$

onde $\Omega_{red} = \alpha_T(T)\Omega$ representa a frequência reduzida, α_T o fator de deslocamento, T_0 a temperatura de referência, em escala absoluta, ρ a densidade e ρ_0 a densidade na temperatura de referência.

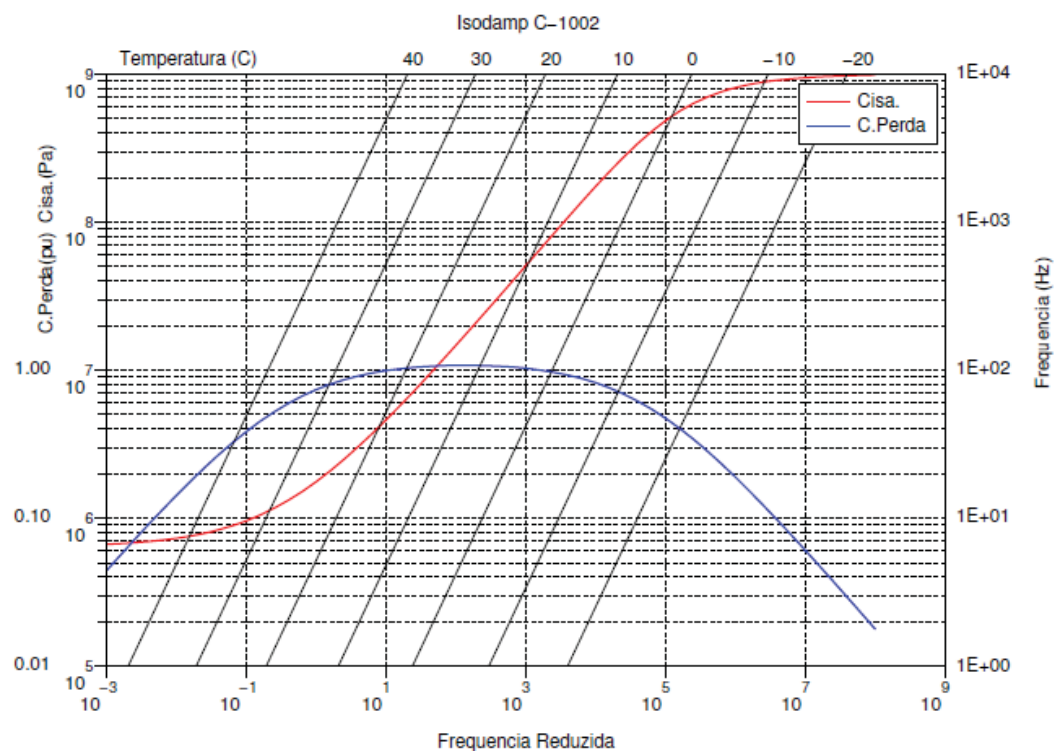
Os valores de α_T são estimados para que as curvas parciais se desloquem na frequência a fim de que as superposições completas sejam alcançadas na temperatura de referência. Este modelo, proposto por Williams, Landel e Ferry (1980), denominado equação WLF é utilizado para estimar α_T :

$$\log_{10} \alpha_T(T) = \frac{-\theta_1(T - T_0)}{\theta_2 + T - T_0}, \quad (8)$$

onde θ_1 e θ_2 são parâmetros característicos de cada material, e determinados experimentalmente.

Desta forma, são determinadas as propriedades dinâmicas e representadas em nomogramas, de forma padronizada, conhecidos como nomogramas de frequência reduzida, conforme a Figura 2. O eixo das abscissas é a frequência reduzida Ω_{red} , representado em escala logarítmica. Um exemplo de nomograma está disposto na figura 2, do material ISODAMP C-1002 fabricado e fornecido pela empresa EAR Specialty Composites.

FIGURA 2 - NOMOGRAMA DE FREQUÊNCIA REDUZIDA DO MATERIAL ISODAMP C-1002.



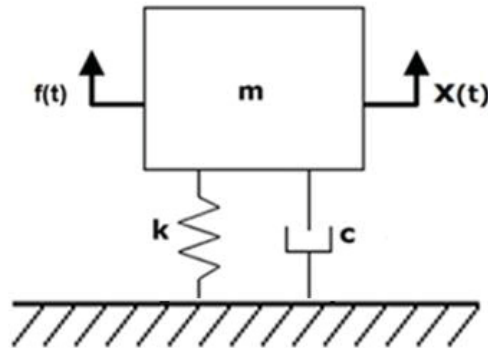
FONTE: EAR Specialty Composites (2008)

3.2 SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE

3.2.1 Modelo Viscoso

Aplicando o diagrama de corpo-livre no sistema mecânico de 1 grau de liberdade descrito na Figura 3, é possível obter a equação de movimento do sistema para uma força qualquer, descrita na equação 9.

FIGURA 3 – MODELO DE SISTEMA MECÂNICO DE 1 GRAU DE LIBERDADE.



FONTE: O autor (2021)

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t). \quad (9)$$

Considerando um regime permanente, pode-se aplicar a transformada de Fourier para obter a equação de movimento no domínio da frequência, como:

$$(-\Omega^2 m + i\Omega c + k)X(\Omega) = F(\Omega). \quad (10)$$

Pode-se definir função de transferência Receptância $H(\Omega)$ como a função de resposta em frequência (FRF) que caracteriza a relação entre a deslocamento e a excitação do sistema, dada por:

$$H(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{-\Omega^2 m + i\Omega c + k}. \quad (11)$$

Além da receptância, também são definidas as relações entre a velocidade e a excitação, mobilidade $Y(\Omega)$, e aceleração e excitação, a inertância $A(\Omega)$. Tanto a mobilidade quanto a inertância podem ser descritas em função da receptância, como:

$$Y(\Omega) = i\Omega H(\Omega) \quad (12)$$

e

$$A(\Omega) = -\Omega^2 H(\Omega). \quad (13)$$

Além disso, são definidas as seguintes relações complementares inversas:

$$\text{Rigidez dinâmica, } K(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{X(\Omega)}; \quad (14)$$

$$\text{Impedância mecânica, } Z(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{i\Omega X(\Omega)}; \quad (15)$$

$$\text{Massa dinâmica, } M(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{\Omega^2 X(\Omega)}. \quad (16)$$

3.2.2 Modelo Viscoelástico

No modelo viscoelástico, a mola e o amortecedor do sistema são substituídos por um único elemento de rigidez com a propriedade complexa $L\bar{G}(\Omega)$ dependente da frequência e da geometria, conforme na Figura 4. No domínio da frequência, a equação de movimento deste sistema é dada por:

$$-\Omega^2 m X(\Omega) + L\bar{G}(\Omega) X(\Omega) = F(\Omega). \quad (17)$$

Neste modelo, a relação da receptância é dada por:

$$H(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{-\Omega^2 m + L\bar{G}(\Omega)}. \quad (18)$$

A rigidez do material viscoelástico deve ser calculada conforme o tipo de carregamento aplicado, definido pelo fator geométrico L . Este fator incorpora a razão entre a área A de material carregada e a espessura h . Para a rigidez à compressão pura K_c , os parâmetros A e h são definidos conforme a figura 4a. Já para a rigidez à

cisalhamento puro K_s , estes parâmetros são definidos como a Figura 4b. Tanto K_c quanto K_s são dados por:

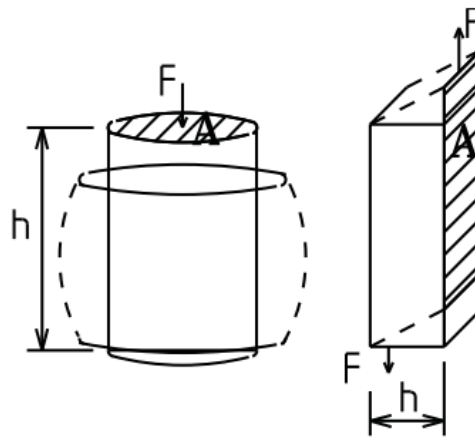
$$K_c = \frac{A}{h} E \cong 3 \frac{A}{h} G \quad (19)$$

e

$$K_s = \frac{A}{h} G. \quad (20)$$

Neste trabalho, o fator de forma não foi considerado devido aos modelos utilizados para descrever o comportamento viscoelástico. Um estudo adicional sobre os fatores de forma pode ser encontrado em Nashif (1973).

FIGURA 4 - FATORES A E H PARA CADA TIPO DE CARREGAMENTO APLICADO NO MATERIAL VISCOELÁSTICO.

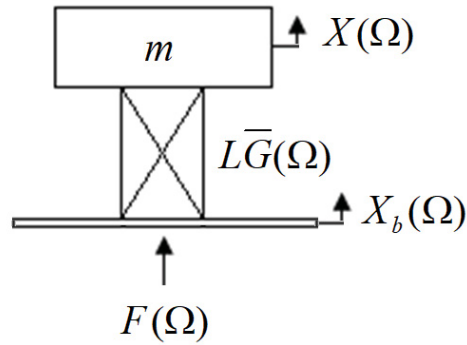


FONTE: Doubrawa (2008).

3.3 RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE

A rigidez dinâmica na base pode ser definida como a relação entre a força aplicada na base e o deslocamento no mesmo ponto (Figura 4).

FIGURA 5 - MODELO MECÂNICO DE UM SISTEMA DE UM GL COM EXCITAÇÃO NA BASE.

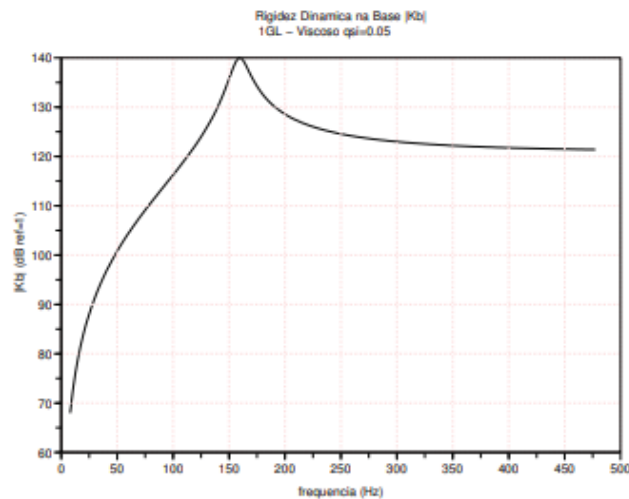


FONTE: O autor (2020).

Por meio do diagrama de corpo-livre, desconsiderando a massa da base, é possível encontrar a equação da rigidez dinâmica na base, descrita na equação 20. Para um sistema da figura 4, a rigidez dinâmica na base possui a forma da curva apresentada na figura 5.

$$K_b(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{X_b(\Omega)} = \frac{(-\Omega^2 m)(L\bar{G}(\Omega))}{-\Omega^2 m + L\bar{G}(\Omega)}. \quad (21)$$

FIGURA 6 - RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE PARA UM SISTEMA DE UM GL VISCOELÁSTICO.



FONTE: Doubrawa (2008).

No entorno da frequência natural, todo sistema de um grau de liberdade possui uma alta impedância mecânica na base. Considerando a base como o sistema a ser controlado, o neutralizador irá aplicar uma elevada força de reação ao

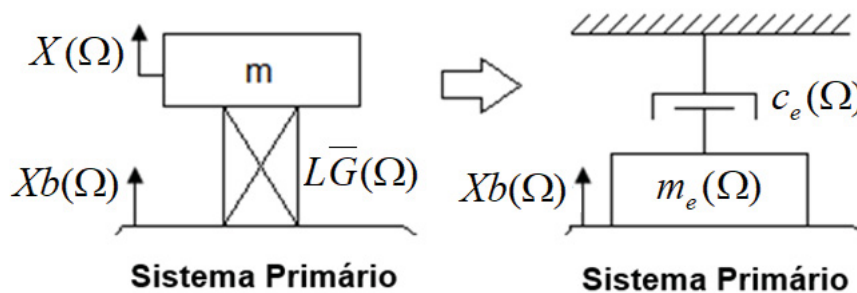
movimento do sistema primário nestas frequências. Este é o princípio de funcionamento de um neutralizador dinâmico.

3.4 PARÂMETROS EQUIVALENTES GENERALIZADOS

Nesta seção a teoria introduzida por Espíndola e Silva (1992) de parâmetros generalizados equivalentes (PEG) é reapresentada. Através dos PEG é possível estabelecer equivalência dinâmica de modelos empregados no projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos.

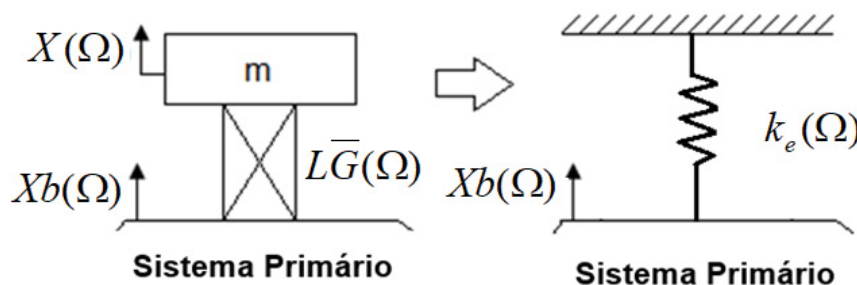
Um sistema clássico de neutralizador de um GL com material viscoelástico é apresentado na Figura 7 e seu modelo com PEG de massa e amortecimento equivalentes. Outra modelo possível é apresentada na Figura 8, onde tem-se apenas uma rigidez equivalente de uma mola com a extremidade fixa.

FIGURA 7 - MODELO DE NEUTRALIZADOR UTILIZANDO PARÂMETROS GENERALIZADOS EQUIVALENTES PARA $m_e(\Omega)$ E $c_e(\Omega)$.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 8 - MODELO DE NEUTRALIZADOR UTILIZANDO O PARÂMETRO GENERALIZADO EQUIVALENTE $k_e(\Omega)$.



FONTE: O autor (2021).

O modelo utilizando PEG não introduz graus de liberdade adicionais no modelo do sistema composto (ESPINDOLA E SILVA, 1992), ficando os mesmos embutidos nos amortecimentos e a massa generalizada equivalentes do neutralizador (ou na rigidez equivalente). Estes parâmetros são funções da frequência do neutralizador. Importante notar aqui que a temperatura foi omitida, por simplicidade e que será considerada constante. É possível desenvolver as equações para $m_e(\Omega)$, $c_e(\Omega)$ e $k_e(\Omega)$ de forma que ambos os sistemas nas Figuras 6 e 7 tenham a mesma impedância mecânica na base. A impedância mecânica e a massa dinâmica na base do neutralizador são definidas respectivamente como:

$$Z_a(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{i\Omega X_b(\Omega)} = \frac{-im_a\Omega L\bar{G}(\Omega)}{m_a\Omega^2 - L\bar{G}(\Omega)}, \quad (22)$$

e

$$M_a(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{-\Omega^2 X_b(\Omega)} = -m_a \frac{\Omega L\bar{G}(\Omega)}{m_a\Omega^2 - L\bar{G}(\Omega)}, \quad (23)$$

além disso, a frequência natural do neutralizador Ω_a é definida como:

$$\Omega_a^2 = \frac{LG(\Omega_a)}{m_a}. \quad (24)$$

Utilizando as seguintes definições: $r(\Omega) = G(\Omega)/G(\Omega_a)$ e $\varepsilon_a = \Omega/\Omega_a$, é possível reescrever a equação da impedância mecânica e da massa dinâmica:

$$Z_a(\Omega) = -im_a\Omega \frac{r(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]}{\varepsilon_a^2 - r(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]} \quad (25)$$

e

$$M_a(\Omega) = -m_a \frac{r(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]}{\varepsilon_a^2 - r(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]}. \quad (26)$$

Realizando o diagrama de corpo livre do modelo equivalente da Figura 6, a impedância mecânica e a massa dinâmica são dadas por:

$$Z_a(\Omega) = i\Omega m_{eq}(\Omega) + c_{eq}(\Omega) \quad (27)$$

e

$$M_a(\Omega) = m_{eq}(\Omega) + \frac{c_{eq}(\Omega)}{i\Omega}. \quad (28)$$

Por comparação entre as equações 21 e 22 temos que:

$$m_{eq}(\Omega) = -m_a \frac{r(\Omega)\{\varepsilon_a^2 - r(\Omega)[1 + \eta^2(\Omega)]\}}{[\varepsilon_a^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega)\eta(\Omega)]^2} \quad (29)$$

e

$$c_{eq}(\Omega) = m_a \Omega_a \frac{r(\Omega)\eta(\Omega)\varepsilon_a^3}{[\varepsilon_a^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega)\eta(\Omega)]^2}. \quad (30)$$

Das equações 28 e 29, a rigidez equivalente generalizada $k_{eq}(\Omega)$ pode ser definida como:

$$k_{eq}(\Omega) = \frac{-\Omega^2 m_a r(\Omega) [\varepsilon_a^2 - r(\Omega)\{1 + \eta^2(\Omega)\}] + i\Omega m_a \Omega_a r(\Omega)\eta(\Omega)\varepsilon_a^3}{[\varepsilon_a^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega)\eta(\Omega)]^2}. \quad (31)$$

3.5 SISTEMA PRIMÁRIO DE MULTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

Para um sistema de n graus de liberdade linear, uma equação que pode ser utilizada para descrever seu comportamento dinâmico é dada por:

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t), \quad (32)$$

onde M representa a matriz de massa, C representa a matriz de amortecimento, K representa a matriz de rigidez, q representam os deslocamentos dos graus de liberdade do sistema e f corresponde a força agindo sobre o sistema. Em vibração livre, quando $f(t) = 0$, e assumindo que o deslocamento q pode ser escrito na forma $q(t) = \phi e^{st}$, o sistema de equações pode ser reescrito como:

$$[s^2 M + sC + K]\phi e^{st} = 0. \quad (33)$$

Como o termo e^{st} sempre é diferente de zero, tem-se:

$$[s^2M + sC + K]\phi = 0. \quad (34)$$

Assumindo que o amortecimento do sistema é considerado viscoso proporcional e, portanto, este possa ser desconsiderado inicialmente, a solução não trivial implica em encontrar as raízes do polinômio de grau $2n$ característico da matriz em colchetes. Tal formulação é a de um problema de autovalores clássico (equação 34). As raízes deste polinômio são chamadas de autovalores s_j e substituindo os autovalores na equação 35 obtêm-se os autovetores associados ϕ_j :

$$K\phi_j = \Omega_j^2 M\phi_j. \quad (35)$$

Conforme demonstrado por Ewins (1984), este problema possui as seguintes propriedades de ortogonalidade:

$$\phi^T M \phi = \text{diag}(m_r) \quad (36)$$

e

$$\phi^T K \phi = \text{diag}(k_r). \quad (37)$$

Assim, é possível ortonormalizar os autovetores da seguinte forma:

$$\psi = \frac{\phi_r}{\sqrt{m_r}}. \quad (38)$$

O sistema de equações de movimento do sistema de MGL também pode ser escrito no domínio da frequência através da transformada de Fourier. Desta forma, a equação 31 pode ser reescrita:

$$[-\Omega^2 M + i\Omega C + K]Q(\Omega) = F(\Omega). \quad (39)$$

onde $Q(\Omega)$ e $F(\Omega)$ são as transformadas de Fourier de $q(t)$ e $f(t)$, respectivamente. Além disso, realizando a seguinte transformação de coordenadas, $Q(\Omega) = \Psi P(\Omega)$, e pré-multiplicando por Ψ^T temos:

$$\Psi^T [-\Omega^2 M + i\Omega C + K] \Psi P(\Omega) = \Psi^T F(\Omega). \quad (40)$$

Simplificando a expressão e utilizando as propriedades de ortonormalidade e considerando amortecimento do tipo viscoso proporcional:

$$[-\Omega^2 I + i\Omega \text{diag}(2\xi_r \Omega_r) + \Lambda] P(\Omega) = \Psi^T F(\Omega). \quad (41)$$

As coordenadas Q representam o sistema físico e as coordenadas P são chamadas de coordenadas generalizadas principais e representam a resposta do sistema no espaço modal do sistema em análise. Com esta transformação é criado o espaço modal, onde ocorre o desacoplamento das equações do sistema. Sendo assim, o problema de múltiplos graus de liberdade se transforma em múltiplos problemas de um grau de liberdade, que podem ser resolvidos individualmente.

Uma vez resolvido o problema no espaço modal, é possível utilizar a transformação de coordenadas para retornar ao espaço de coordenadas físicas e assim obter a resposta do sistema. Pré-multiplicando a equação 40 pelo termo $[-\Omega^2 I + i\Omega \text{diag}(2\xi_r \Omega_r) + \Lambda]^{-1}$ tem-se:

$$P(\Omega) = [-\Omega^2 I + i\Omega \text{diag}(2\xi_r \Omega_r) + \Lambda]^{-1} \Psi^T F(\Omega), \quad (42)$$

como $Q(\Omega) = \Psi P(\Omega)$, pré-multiplicando por Ψ :

$$Q(\Omega) = \Psi [-\Omega^2 I + i\Omega \text{diag}(2\xi_r \Omega_r) + \Lambda]^{-1} \Psi^T F(\Omega). \quad (43)$$

Com as coordenadas generalizadas $Q(\Omega)$ é possível determinar a resposta do sistema no espaço de configurações. Assim, a receptância, definida na equação 11, pode ser reescrita para o sistema de múltiplos graus de liberdade como:

$$Q(\Omega) = H(\Omega) F(\Omega), \quad (44)$$

onde $H(\Omega)$ representa a matriz de receptância no espaço de configuração, de grau n . Seus elementos $H_{ks}(\Omega)$ podem ser calculados individualmente pela relação:

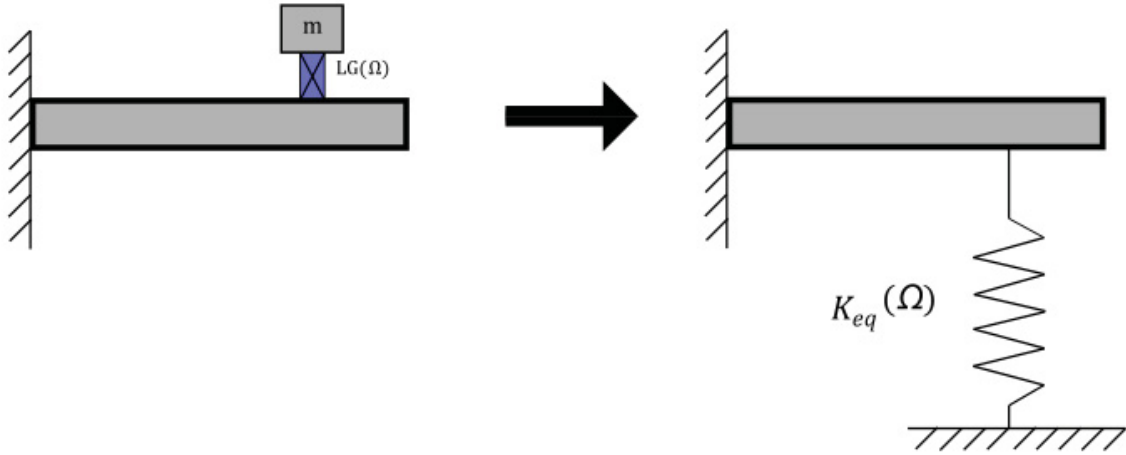
$$H_{ks}(\Omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\Psi_{kr} \Psi_{sr}}{-\Omega^2 + i\Omega 2\xi_r \Omega_r + \Omega_r^2}. \quad (45)$$

onde s representa o ponto de excitação, e k o ponto de avaliação da resposta e n é o número de modos. Através da função de transferência $H_{ks}(\Omega)$ em associação com a equação 44 é possível avaliar a resposta do sistema composto em qualquer coordenada para uma força aplicada no sistema.

3.6 SISTEMA COMPOSTO COM SISTEMA AUXILIAR DE 1 GL

Quando o sistema auxiliar é fixado no sistema primário, o deslocamento da base $X_b(\Omega)$ apresentado na figura 4 torna-se igual ao deslocamento do sistema primário no ponto de fixação. Utilizando a metodologia de parâmetros generalizados equivalentes, o comportamento deste sistema acoplado, chamado de sistema composto (SC), pode ser descrito em função das coordenadas do sistema primário. Um exemplo para uma viga engastada-livre de MGL com um SA de 1 GL é apresentado na Figura 9.

FIGURA 9 – MODELO DE SP COM MGL COM UM NEUTRALIZADOR DE 1 GL ADICIONADO.



FONTE: O autor (2021).

O comportamento do sistema composto pode ser descrito em função das equações de movimento do sistema primário, sendo necessário contabilizar a influência do sistema auxiliar. Utilizando o modelo de rigidez equivalente $k_{eq}(\Omega)$, o sistema composto pode ser modelado modificando a equação 31:

$$[-\Omega^2 M + i\Omega C + \tilde{K}]Q(\Omega) = F(\Omega), \quad (46)$$

onde a matriz $\tilde{K}$ representa a matriz de rigidez do sistema composto. Esta, por sua vez, pode ser obtida inserindo a rigidez concentrada $k_{eq}(\Omega)$ na matriz do sistema primário, no índice correspondente ao grau de liberdade do ponto de fixação. Tal procedimento é descrito através da equação 47.

$$\tilde{K} = K + \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & k_{eq}(\Omega) & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = K + K_{eq}. \quad (47)$$

A equação 45 pode ser utilizada para calcular a resposta do sistema composto a uma força de excitação qualquer, de forma análoga a descrita para sistemas de MGL na seção anterior. Esta metodologia pode ser generalizada para adicionar p sistemas

auxiliares independentes, inserindo as rigidezes concentradas $k_{eq_j}(\Omega)$, com $j = 1$ a p , nas suas respectivas posições na diagonal da matriz K_{eq} .

No exemplo proposto a rigidez $k_{eq}(\Omega)$ poderia ser obtida de forma analítica para sistemas de 1 GL através da equação 30, utilizando dos parâmetros físicos do sistema auxiliar. Entretanto, para o modelo do sistema composto, indefere a origem da rigidez $k_{eq}(\Omega)$, podendo esta provir de modelos analíticos, curvas experimentais ou de modelos em elementos finitos.

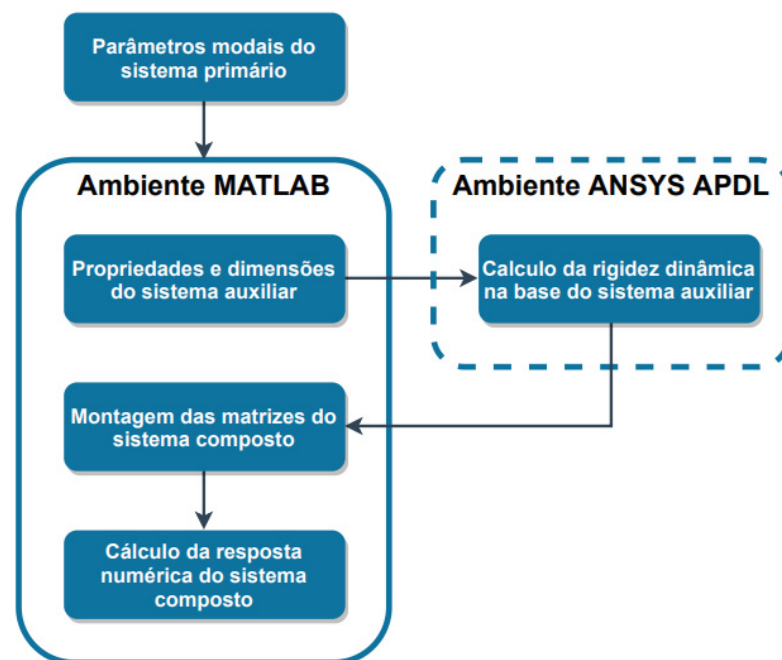
Além disso, o modelo do sistema composto também pode ser expandido para sistemas auxiliares com múltiplos graus de liberdade. Utilizando, por exemplo, modelos de elementos finitos para calcular a rigidez na base, é possível realizar o acoplamento de ambos os sistemas através da matriz $\tilde{K}$ de forma análoga a descrita. No presente trabalho busca-se modelar um sistema composto cujo SA possui MGL e é acoplado nos graus de liberdade de translação e rotação dentro da matriz de rigidez do SC $\tilde{K}$.

No contexto de controle de vibrações, o modelo do sistema composto pode ser inserido em um ambiente de otimização, a fim de minimizar sua resposta a uma excitação qualquer. O vetor projeto da otimização seriam as dimensões físicas do SA, afim de obter a configuração ótima do neutralizador para o sistema primário e faixa de frequência de interesse.

4 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo é exposta a metodologia utilizada para modelar o comportamento do sistema composto. Um fluxograma resumindo as etapas e os ambientes utilizados é apresentado na FIGURA 10.

FIGURA 10 - FLUXOGRAMA GERAL DO CÁLCULO DA RESPOSTA DO SISTEMA COMPOSTO.



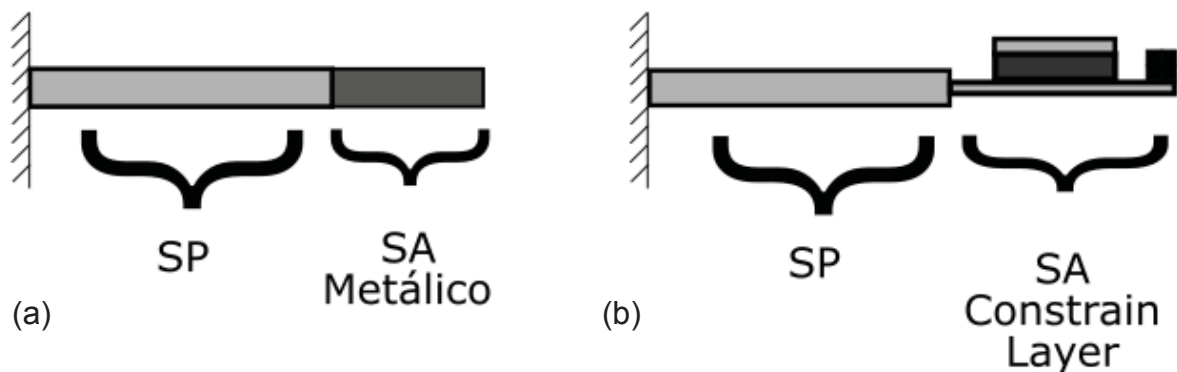
FONTE: O autor (2021).

Inicialmente são obtidos os parâmetros modais do sistema primário via modelo de elementos finitos. Com base nas dimensões e propriedades do sistema primário, a geometria do sistema auxiliar é escolhida e encaminhada para o *software* de elementos finitos ANSYS, versão 18.1, onde sua rigidez dinâmica na base é calculada. Em seguida, através do *software* MATLAB, versão R2018b, a equação do sistema composto é montada utilizando os parâmetros modais do sistema primário e a rigidez dinâmica na base do sistema auxiliar. Através dessa equação, ambos os sistemas foram acoplados e ela pode ser resolvida para calcular a resposta do sistema composto em um ponto qualquer.

Esta metodologia é aplicada para dois sistemas distintos, elevando o grau de complexidade nos modelos dos sistemas auxiliares. Primeiramente, o sistema metálico analisado consiste de uma viga engastada livre, contínua, sendo que uma

parte desta é considerada como sendo o sistema primário e a outra como sendo o sistema auxiliar (FIGURA 11.a). Isto foi realizado para verificar a capacidade da metodologia proposta em um sistema que possui uma continuidade material perfeita. Já no segundo caso, o sistema auxiliar consiste de uma viga sanduíche com material viscoelástico (FIGURA 11.b).

FIGURA 11 – MODELO DOS SISTEMAS CONSIDERADOS PARA AVALIAÇÃO DA METODOLOGIA, (A) SA METÁLICO, (B) SA CONSTRAIN LAYER.



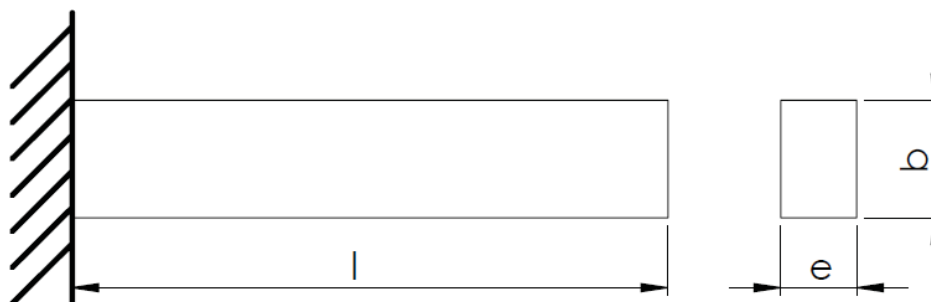
FONTE: O autor (2021).

4.1 SISTEMA AUXILIAR METÁLICO

4.1.1 Sistema Primário

Uma viga engastada-livre foi escolhida como sistema primário, de seção transversal retangular e composição de alumínio 6351 (FIGURA 12). As propriedades do sistema primário estão descritas na TABELA 1.

FIGURA 12 - MODELO DO SISTEMA PRIMÁRIO.



FONTE: O autor (2021).

TABELA 1 – PROPRIEDADES DO SISTEMA PRIMÁRIO

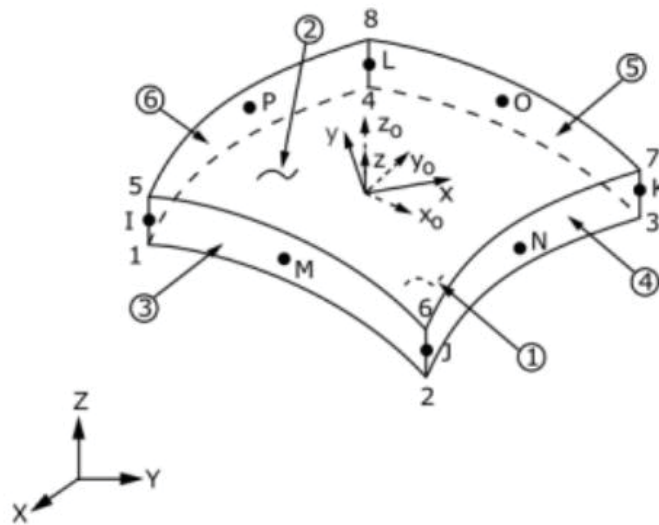
Comprimento (l) [mm]	Largura (b) [mm]	Espessura (e) [mm]	Módulo de Elasticidade [GPa]	Densidade [kg/m ³]	Coefficiente de Poisson
450	50,8	12,65	70	2700	0,33

FONTE: O autor (2021).

Para descrever o comportamento do sistema primário optou-se pela utilização dos autovalores e autovetores associados às frequências naturais e modos de vibração e vetor de amortecimento modal. No contexto deste trabalho, os autovalores e autovetores foram obtidos via *software* comercial de elementos finitos ANSYS e os amortecimentos modais pelo método de meia potência com base na resposta medida experimentalmente.

O modelo do sistema primário em elementos finitos foi construído utilizando elementos de casca SHELL281 (FIGURA 13) com 8 nós e 6 graus de liberdade em cada nó: deslocamento nos eixos x, y e z e rotação ao centro dos eixos x, y e z. A utilização de elementos de casca se deu pela presença dos graus de liberdade de rotação.

FIGURA 13 - ELEMENTO SHELL281 DO SOFTWARE ANSYS.



FONTE: Manual de referência de elementos ANSYS v182 (2018).

Os parâmetros modais foram obtidos através de uma análise modal, avaliando as primeiras 60 frequências naturais e seus respectivos modos de vibrar. A malha do modelo de elementos finitos foi construída com 4 elementos na largura da viga e 40 elementos no comprimento.

4.1.2 Sistema Auxiliar

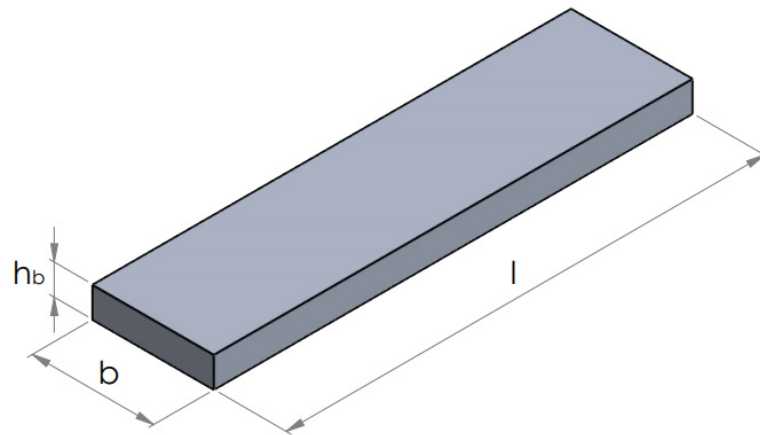
Afim de minimizar as fontes de incerteza, tanto numéricas quanto experimentais, o sistema auxiliar foi considerado como apenas uma viga metálica, com as mesmas propriedades e seção transversal do sistema primário. A posição de acoplamento escolhida foi a extremidade livre do sistema primário, de forma que, considerando um acoplamento perfeito, o sistema composto poderia ser aproximado por uma viga contínua. As dimensões e propriedades do sistema auxiliar (FIGURA 14) estão descritas na Tabela 4.

TABELA 2 – DIMENSÕES E PROPRIEDADES DO SISTEMA AUXILIAR METÁLICO

Comprimento (l) [mm]	Largura (h _b) [mm]	Espessura (b) [mm]	Módulo de Elasticidade [GPa]	Densidade [kg/m ³]	Coefficiente de Poisson
200	50,8	12,65	70	2700	0,33

FONTE: O autor (2021).

FIGURA 14 - ESQUEMA ILUSTRATIVO DO SISTEMA AUXILIAR METÁLICO.



FONTE: O autor (2021).

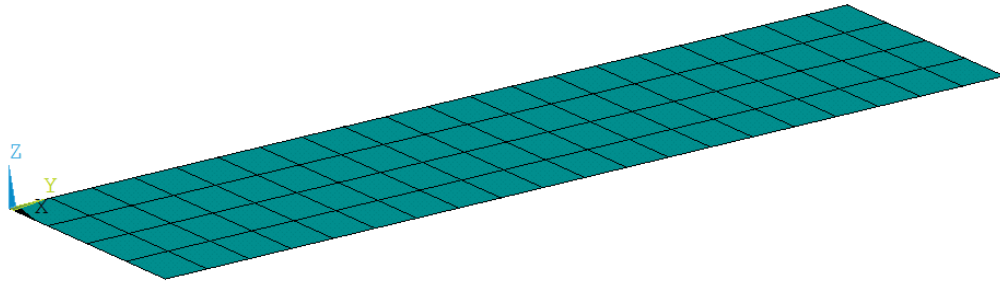
4.1.3 Modelo de Elementos Finitos

Para o modelo numérico de elementos finitos foi utilizado o *software* ANSYS através de sua linguagem de programação paramétrica APDL (*Ansys Parametric Design Language*). Esta linguagem possibilita acesso a diversos recursos exclusivos e possibilita a criação de rotinas que podem ser executadas por outros programas, como o *software* de computação técnica MATLAB.

Tendo em vista essa interação, o modelo de elementos finitos do sistema auxiliar foi construído de forma paramétrica, onde suas propriedades e dimensões são definidas como variáveis. Estas, por sua vez, ficam armazenadas em outro arquivo, que é carregado na memória toda vez que o modelo de elementos finitos é executado.

No sistema auxiliar (FIGURA 15), a viga da base foi modelada utilizando elementos de casca SHELL 281. A malha utilizada também foi de 4 elementos na largura e 20 elementos no comprimento.

FIGURA 15 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DO SISTEMA AUXILIAR METÁLICO.



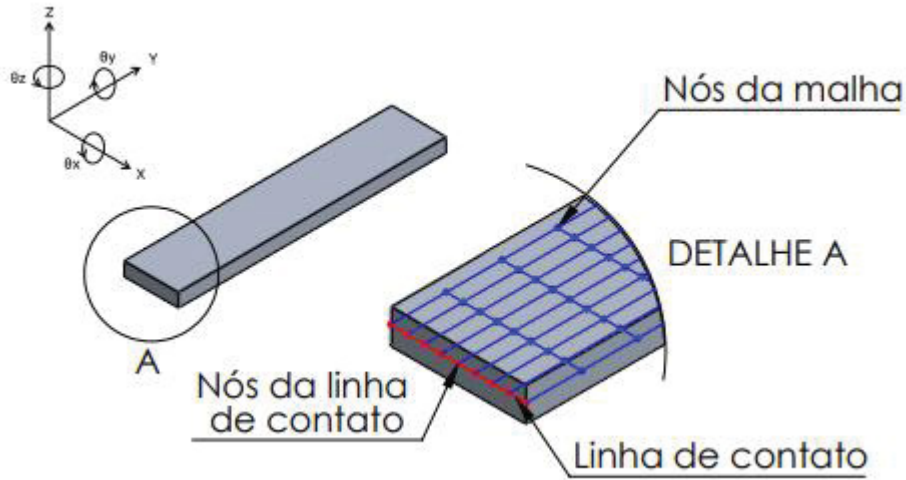
FONTE: O autor (2021).

4.1.4 Cálculo da rigidez dinâmica na base por elementos finitos

Para obter a rigidez dinâmica do sistema auxiliar, os conceitos descritos na seção 3.3 precisaram ser expandidos para sistemas de múltiplos graus de liberdade. A base do sistema mecânico apresentado na seção 3.3 é pontual, sem massa e possui apenas um grau de liberdade. Já para o sistema auxiliar de MGL, a base é contínua, com 6 graus de liberdade e está localizada na região de acoplamento entre os sistemas.

Desta forma, no modelo de elementos finitos, define-se a base para o cálculo da rigidez dinâmica equivalente como os nós inseridos na linha de contato entre o sistema primário e o sistema auxiliar. Estes nós pertencem à malha do sistema auxiliar. A FIGURA 16 apresenta um esquema ilustrativo dos nós da linha de contato em um modelo de elementos finitos do sistema auxiliar metálico com a malha aplicada.

FIGURA 16 - ESQUEMA ILUSTRATIVO DA DEFINIÇÃO DA BASE DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DO SISTEMA AUXILIAR METÁLICO.



FONTE: O autor (2021).

Estes nós da linha de contato são compartilhados entre o sistema primário e o sistema auxiliar, e assumindo uma condição de acoplamento perfeito, possuem os mesmos deslocamentos nodais.

A rigidez dinâmica equivalente na base do modelo em elementos finitos do sistema auxiliar $K_{beq}(\Omega)$ é dada por:

$$K_{beq}(\Omega) = \begin{bmatrix} [K_{eq_1}] & & & 0 \\ & [K_{eq_2}] & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [K_{eq_j}] \end{bmatrix} \quad (48)$$

onde K_{eq_j} é a matriz de rigidez dinâmica equivalente do j -ésimo nó inserido na linha da base. Esta matriz é cheia e possui ordem 6, contendo informações da rigidez equivalente de todos os graus de liberdade. Para o modelo analisado, adotando o sistema de coordenadas apresentado na FIGURA 16, às matrizes K_{eq_j} foram truncadas, contendo apenas as rigidezes dinâmicas nos graus de liberdade da direção de interesse. Sendo assim, apenas os elementos referentes à translação no eixo z e rotação θ_x foram considerados. Com estas simplificações, K_{eq_j} é dada por:

$$\tilde{K}_{eq_j}(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & K_{eq_{zz}} & K_{eq_{z\theta_x}} & \\ & & K_{eq_{\theta_x z}} & K_{eq_{\theta_x \theta_x}} & \\ & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

adicionalmente, aplicando a definição de rigidez dinâmica na base dada pela equação 20, temos que os elementos da matriz K_{eq_j} são:

$$K_{eq_{zz}}(\Omega) = F_{reação_z} / X_z; \quad (50)$$

$$K_{eq_{z\theta_x}}(\Omega) = F_{reação_z} / X_{\theta_x}; \quad (51)$$

$$K_{eq_{\theta_x z}}(\Omega) = M_{reação_{\theta_x}} / X_z; \quad (52)$$

$$K_{eq_{\theta_x \theta_x}}(\Omega) = M_{reação_{\theta_x}} / X_{\theta_x}, \quad (53)$$

onde X_z e X_{θ_x} representam os deslocamentos na direção z e θ_x respectivamente. Os elementos $K_{eq_{zz}}$ e $K_{eq_{\theta_x z}}$ podem ser obtidos aplicando um deslocamento unitário na direção z nos nós da base j e avaliando as forças e momentos de reação nestes nós. Já a aplicação de um deslocamento angular unitário nestes nós resulta nos elementos $K_{eq_{z\theta_x}}$ e $K_{eq_{\theta_x \theta_x}}$. Estes deslocamentos unitários são adicionados como condições de contorno no modelo de elementos finitos, como apresentado na equação 54.

$$X_j(\Omega) = \begin{Bmatrix} X_x \\ X_y \\ X_z \\ X_{\theta_x} \\ X_{\theta_y} \\ X_{\theta_z} \end{Bmatrix}, \quad (54)$$

onde $X_j(\Omega)$ é aplicado em todos os nós da linha da base j . Sendo assim, para avaliar as rigidezes $K_{eq_{zz}}$ e $K_{eq_{\theta_x z}}$ da equação 49, aplicou-se a condição de contorno $X_z(\Omega) =$

1, e nas demais direções a condição de contorno nula, conforme descrito pela equação 55. Já para obter as rigidezes $K_{eq_{z\theta_x}}$ e $K_{eq_{\theta_x\theta_x}}$, aplicou-se a condição de contorno $X_{\theta_x}(\Omega) = 1$ e nas demais direções a condição de contorno nula, conforme descrito pela equação 56. Desta forma, a matriz $\tilde{K}_{eq_j}(\Omega)$ foi obtida avaliando as forças e momentos de reação oriundas destas condições de contorno distintas.

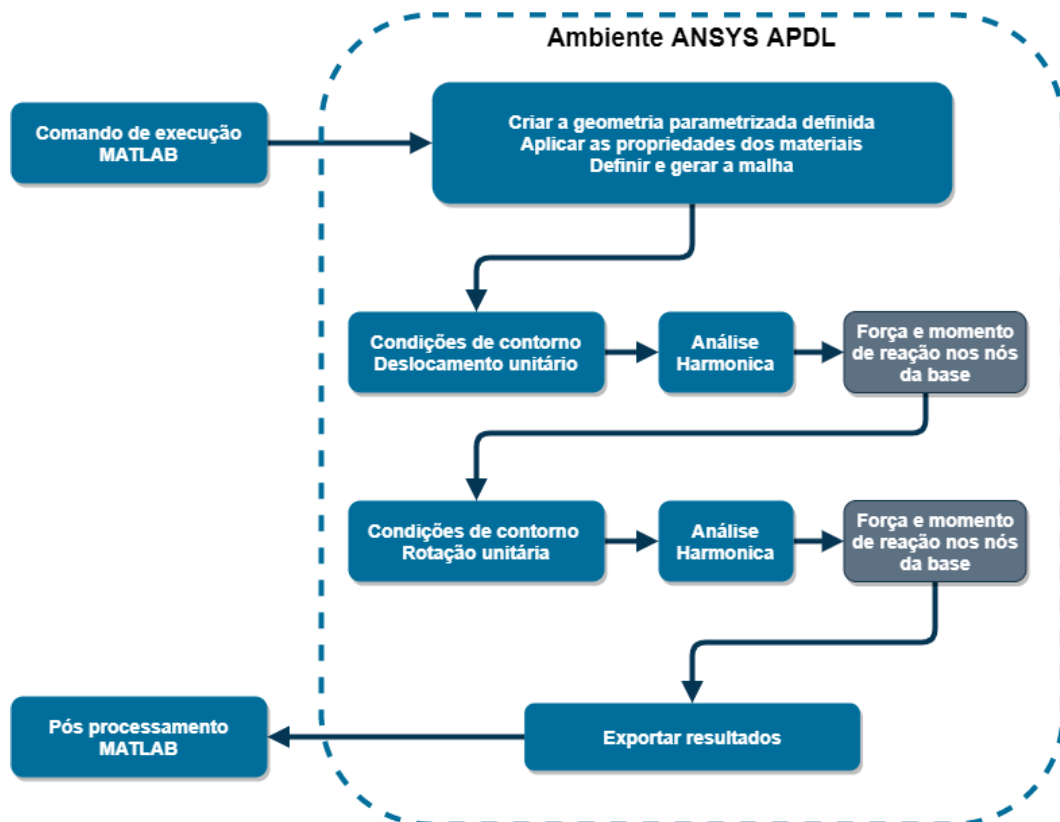
$$X_j(\Omega) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (55)$$

e

$$X_j(\Omega) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (56)$$

Um fluxograma resumindo as etapas executadas dentro da rotina ANSYS APDL é apresentado na FIGURA 17.

FIGURA 17 – FLUXOGRAMA DAS ETAPAS EXECUTADAS DENTRO DO AMBIENTE ANSYS APDL.

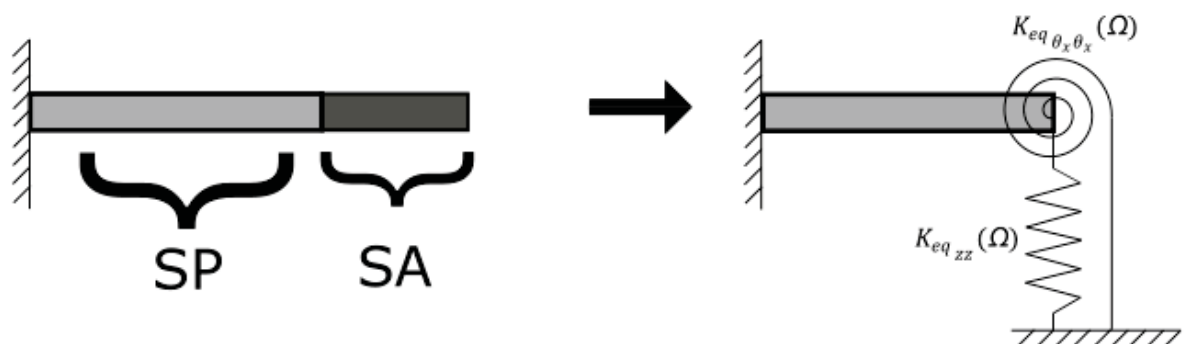


FONTE: O autor (2021).

4.1.5 Sistema Composto

A formulação do sistema composto é responsável por acoplar o sistema primário e o sistema auxiliar, de forma que os sistemas mecânicos descritos na FIGURA 18 sejam equivalentes. Este acoplamento é realizado através das equações de movimento do sistema primário, descritas em função dos parâmetros modais.

FIGURA 18 – MODELOS MECÂNICOS EQUIVALENTES DO SISTEMA COMPOSTO.



FONTE: O autor (2021).

Similar ao desenvolvimento da equação 40 para sistemas auxiliares de 1 grau de liberdade, para múltiplos graus de liberdade, a equação de movimento pode ser descrita como:

$$[-\Omega^2 I + i\Omega \Psi^T C \Psi + \Psi^T K_{SC} \Psi] P_{SC}(\Omega) = \Psi^T F(\Omega), \quad (57)$$

onde I corresponde a matriz identidade do sistema primário, C corresponde à matriz de amortecimento viscoso do sistema primário, K_{SC} corresponde à matriz de rigidez do sistema composto e Ψ corresponde à matriz de autovetores do sistema primário.

A matriz de rigidez do sistema composto pode ser expandida como:

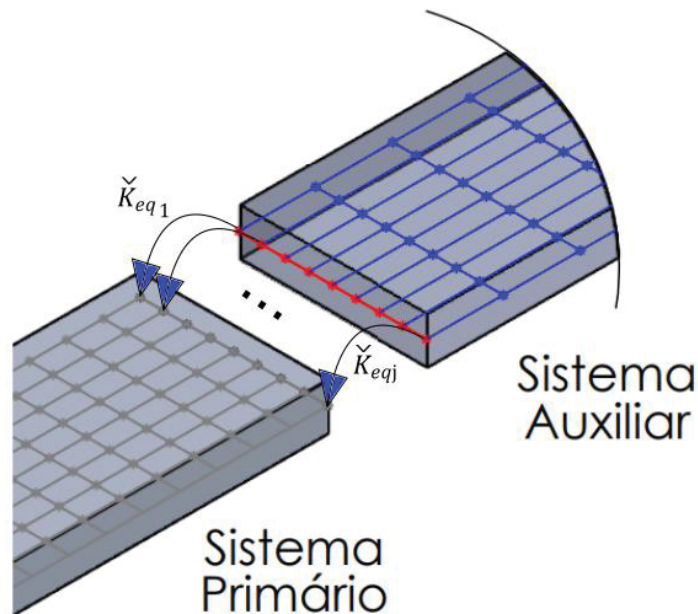
$$\Psi^T K_{SC} \Psi = \Psi^T [K_{SP} + K_{eqSA}] \Psi = \Lambda + \Psi^T K_{eqSA} \Psi. \quad (58)$$

onde Λ corresponde à matriz de autovalores do sistema primário e K_{eqSA} corresponde à matriz responsável por inserir as rigidezes dinâmicas na base do sistema auxiliar. Esta matriz é dada por:

$$K_{eqSA} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & [\tilde{K}_{eq_1}] & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & [\tilde{K}_{eq_j}] & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (59)$$

sendo j o número de nós da base do sistema auxiliar e $\tilde{K}_{eq_j}$ a matriz definida pela equação 48. A matriz K_{eqSA} deve ser montada com cuidado para que as matrizes $[\tilde{K}_{eq_j}]_{6 \times 6}$ sejam inseridas na posição correta conforme a malha utilizada no sistema primário. Esta posição correta dos elementos $\tilde{K}_{eq_j}$ assegura a transferência das rigidezes do SC para o AS, como demonstrado na FIGURA 19.

FIGURA 19 – ACOPLAMENTO DAS RIGIDEZES EQUIVALENTES $\check{K}_{eqj}$ NO MODELOS DO SISTEMA COMPOSTO.



FONTE: O autor (2021).

Esta construção assume que os modelos numéricos do sistema primário e auxiliar foram construídos utilizando o mesmo sistema de coordenadas. Além disso, é necessário que a malha do sistema primário seja gerada com a mesma discretização da malha da base do sistema auxiliar, possibilitando o alinhamento da matriz K_{eqSA} nas equações de movimento do sistema composto. Esta metodologia também assume um acoplamento entre o SC e o SA ideal.

Para efeito de comparação, a resposta do sistema composto foi simulada numericamente através de uma análise harmônica, também no *software* ANSYS. Neste modelo, assumiu-se uma viga contínua com 650 mm de comprimento e utilizando-se as mesmas propriedades, seção transversal e elementos. Apenas a malha foi ajustada, com 4 elementos na largura da viga e 58 elementos no comprimento.

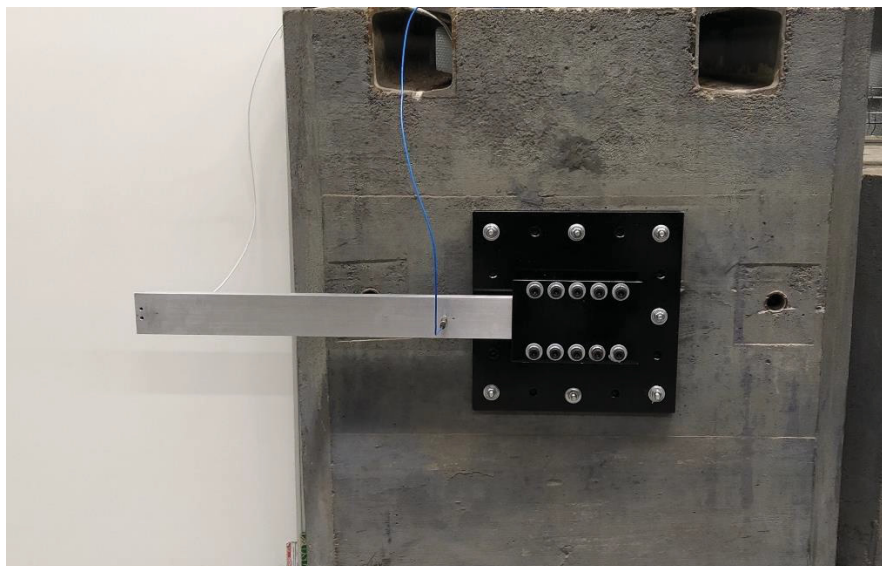
4.1.6 Validação Experimental

A validação experimental foi realizada com os equipamentos e instalações cedidas pelo Laboratório de Vibrações e Som LAVIBS. Foram utilizados equipamentos de medições como paquímetro, martelo de impacto, acelerômetros, analisador de sinais e *software* de aquisição.

4.1.6.1 Sistema Primário

O modelo do sistema primário assume um viga engasta-livre onde o engaste possui características ideais. Esta condição foi aproximada através da fixação da extremidade engastada em um bloco de concreto armado, por meio de juntas parafusadas. O bloco de concreto possui massa aproximada de 2 toneladas e o sistema de engaste foi confeccionado em aço SAE 1020 e utiliza de 19 parafusos ao todo para realizar a fixação. O sistema primário fixado no bloco é apresentado na Figura 20.

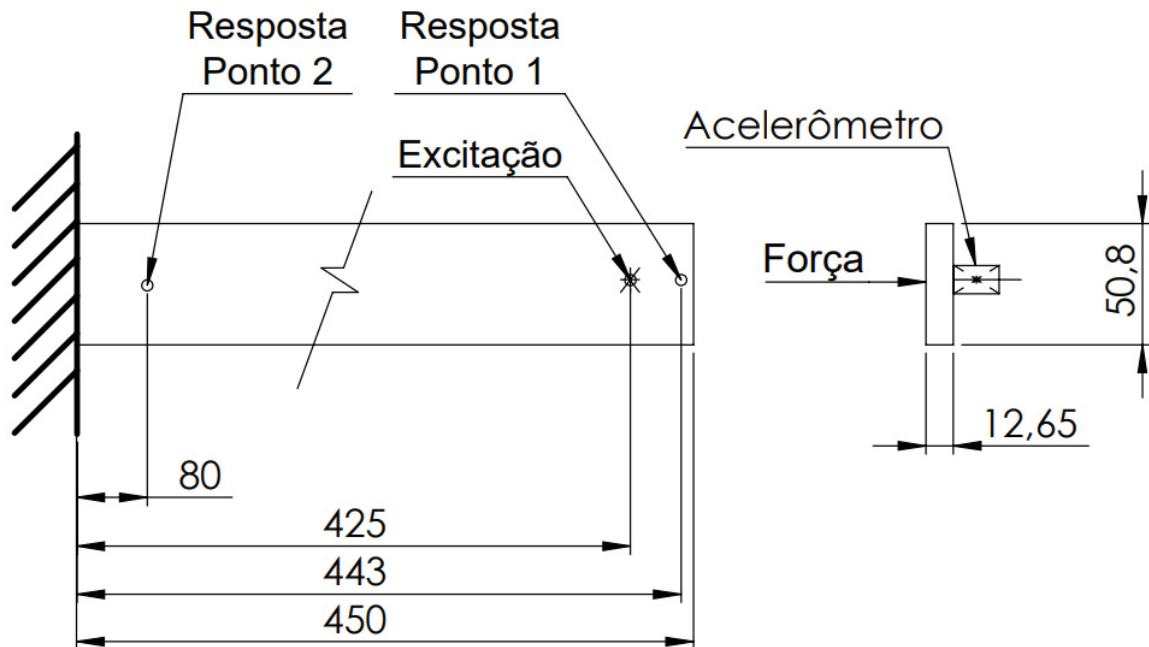
FIGURA 20 – SISTEMA PRIMÁRIO INSTRUMENTADO E FIXADO NA BASE DE CONCRETO.



FONTE: O autor (2021).

As curvas de resposta foram avaliadas na extremidade livre e próximas ao engaste, conforme a Figura 21, através de acelerômetros fabricados pela PCB® PIEZOTRONICS, modelo 32C68. A excitação foi aplicada na mesma região, através de um impacto via martelo instrumentado, também fabricado pela PCB® PIEZOTRONICS, modelo 086C04. Os sinais dos acelerômetros e do martelo foram aquisitados pelo analisador de sinais Photon 2 produzido pela LDS DRACTION, ajustado para faixa de 0 a 1800 Hz com 1800 linhas. Estes equipamentos e configurações foram utilizados para todas as aquisições experimentais.

FIGURA 21 – MODELO DO SISTEMA PRIMÁRIO INDICANDO A REGIÃO DE AVALIAÇÃO DA RESPOSTA E A REGIÃO DE EXCITAÇÃO.

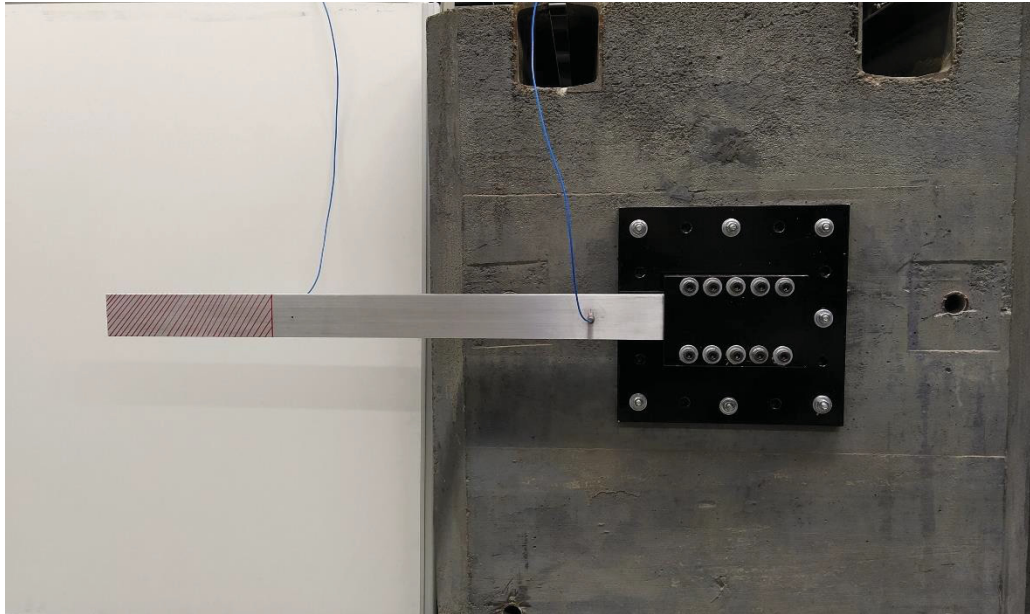


FONTE: O autor (2021).

4.1.6.2 Sistema Composto

O sistema composto é apresentado na FIGURA 22. O ponto de medição de resposta e de excitação utilizados foram os mesmos descritos para o sistema primário. O acoplamento entre o SP e o SA foi considerado ideal, e na verificação experimental, uma viga contínua foi utilizada. A região correspondente ao sistema auxiliar está destacada em hachuras vermelhas.

FIGURA 22 – SISTEMA COMPOSTO – VIGA CONTÍNUA METÁLICA.



FONTE: O autor (2021).

4.2 SISTEMA AUXILIAR DO TIPO VIGA SANDUÍCHE COM MATERIAL VISCOELÁSTICO

4.2.1 Sistema Primário

O sistema primário foi escolhido com uma alta densidade modal, a fim de avaliar o comportamento do modelo proposto em situações onde o sistema auxiliar poderia ser projetado como dispositivo de controle de banda larga. Novamente, uma viga engastada-livre, de seção transversal retangular e composição de alumínio 6351 foi escolhida (FIGURA 12). As propriedades do sistema primário estão descritas na TABELA 03.

TABELA 3 – PROPRIEDADES DO SISTEMA PRIMÁRIO

Comprimento (l) [mm]	Largura (b) [mm]	Espessura (e) [mm]	Módulo de Elasticidade [GPa]	Densidade [kg/m³]	Coefficiente de Poisson
1075	50,8	12,65	70	2700	0,33

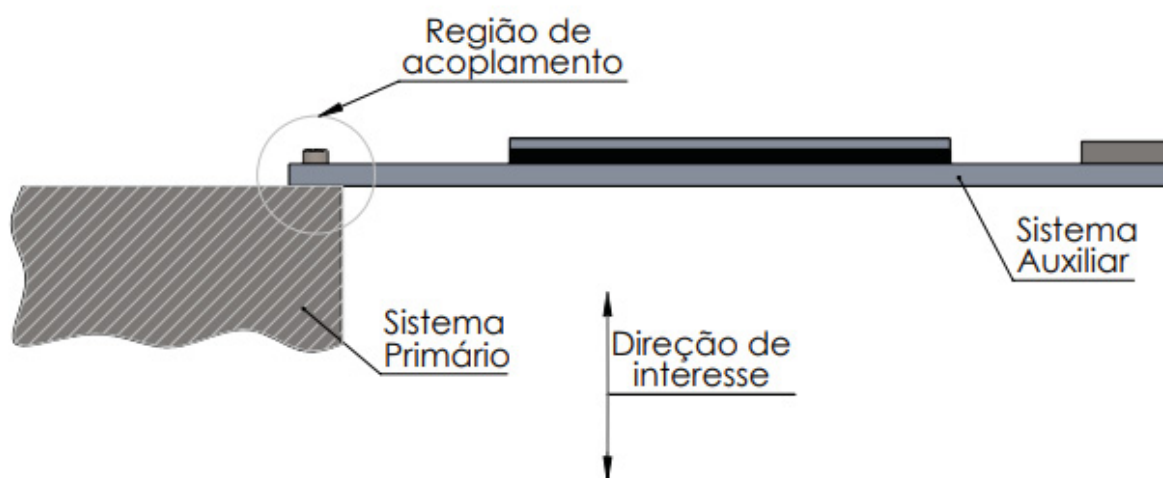
FONTE: O autor (2021).

Seu comportamento foi descrito utilizando os autovalores, autovetores e vetor de amortecimento modal, obtidos via *software* comercial de elementos finitos ANSYS. O modelo de elementos finitos foi construído de forma similar ao sistema primário descrito na subseção 4.1.1, utilizando os mesmos parâmetros e elementos. A malha utilizada para este sistema foi de 8 elementos na largura e 130 elementos no comprimento da viga. A malha mais refinada foi adotada para permitir a compatibilidade de acoplamento entre as equações do sistema composto.

4.2.2 Sistema Auxiliar

O sistema auxiliar em estudo é uma viga sanduíche esbelta a qual uma extremidade é fixada ao sistema primário, denominada base do sistema auxiliar, e a outra extremidade permanece livre (FIGURA 23).

FIGURA 23 - ESQUEMA DO SISTEMA AUXILIAR ACOPLADO AO SISTEMA PRIMÁRIO.

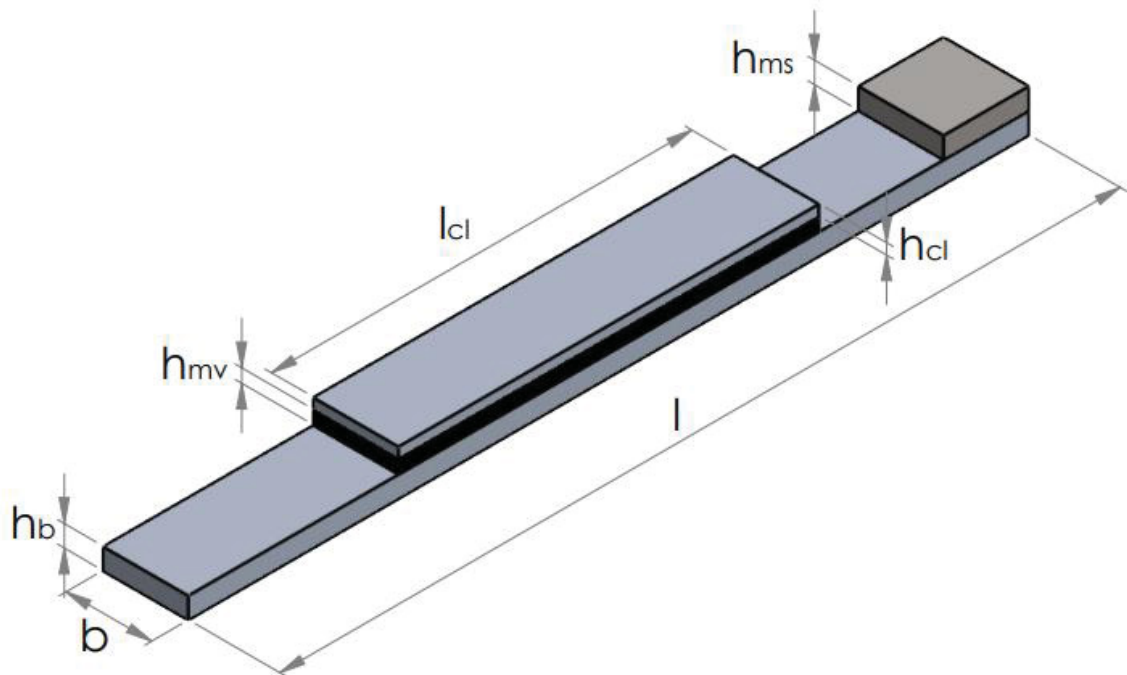


FONTE: O autor (2021).

Para avaliar numericamente o comportamento do sistema auxiliar, foi adotada uma abordagem via modelo de elementos finitos ao invés de uma função analítica, tendo em vista a complexidade geométrica do sistema auxiliar. Com este modelo, buscou-se aplicar a teoria de parâmetros equivalentes generalizados na qual o sistema auxiliar possui múltiplos graus de liberdade, considerando um acoplamento translacional e rotacional.

As dimensões do sistema auxiliar foram escolhidas com base nas propriedades do sistema primário, de forma que suas frequências naturais se encontrassem na faixa de frequência de interesse. Para tanto foi utilizado uma viga de alumínio liga 6351 de seção retangular como estrutura base. A mesma liga de alumínio foi utilizada na camada constritora e para massa de sintonização aço SAE 1020. As dimensões do sistema auxiliar estão descritas na FIGURA 24 e detalhadas na TABELA 4. Na TABELA 5 estão as propriedades mecânicas dos materiais utilizados. O material viscoelástico utilizado foi a borracha butílica BT-806/55, cujas propriedades mecânicas estão descritas no ANEXO 1.

FIGURA 24 – SISTEMA AUXILIAR DO TIPO VIGA SANDUÍCHE COM MATERIAL VISCOELÁSTICO E MASSA DE SINTONIZAÇÃO NA EXTREMIDADE LIVRE.



FONTE: O autor (2021).

TABELA 4 – DIMENSÕES DO SISTEMA AUXILIAR

Dimensão	l	b	h_b	h_{mv}	l_{cl}	h_{cl}	h_{ms}
Valor [mm]	250	25,4	6,35	4,2	125	3,18	6,35

FONTE: O autor (2021).

TABELA 5 – PROPRIEDADES DO SISTEMA AUXILIAR

Propriedade	Módulo de Elasticidade [GPa]	Densidade [kg/m ³]	Coefficiente de Poisson
Viga base e camada constritora	70	2700	0,33
Massa de sintonização	207	7850	0,30

FONTE: O autor (2021).

4.2.3 Modelo de Elementos Finitos

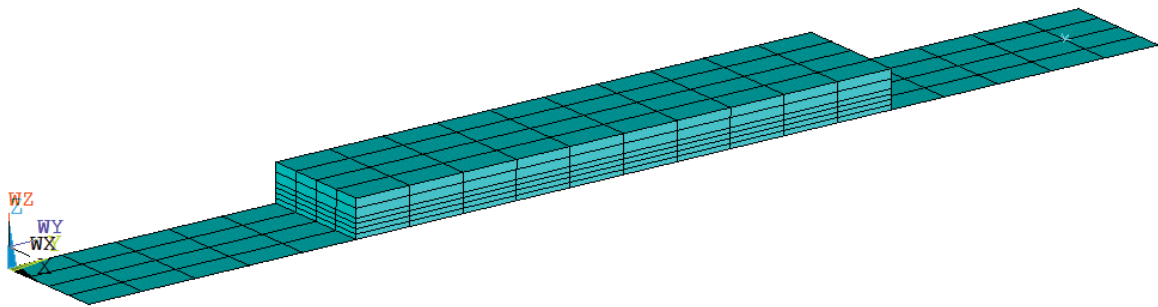
Para o modelo numérico de elementos finitos foi utilizado o *software* ANSYS APDL, possibilitando utilizar recursos necessários para a modelagem do material viscoelástico. No sistema auxiliar (FIGURA 25), a viga da base foi modelada utilizando elementos de casca SHELL 281. Já o material viscoelástico e a camada constritora foram modelados utilizando elementos sólidos de forma hexaédrica SOLID186, com 20 nós e 3 graus de liberdade de translação em cada nó. A massa de sintonização foi modelada como uma inércia concentrada através do elemento de massa pontual MASS21, com 6 graus de liberdade. O acoplamento entre os diferentes corpos foi realizado através de *shared topology*, onde um nó pertence a dois corpos distintos.

Com relação à malha, foram utilizados:

- 4 elementos na largura e 20 no comprimento da viga base;
- 4 elementos na largura, 10 no comprimento e 4 na espessura do material viscoelástico;
- 4 elementos na largura, 10 no comprimento e 2 na espessura da camada constritora;

Uma vez que os elementos sólidos possuem apenas graus de liberdade de translação, os graus de liberdade de rotação não são acoplados aos elementos do material viscoelástico. Segundo Plouin e Balmès (1999), estruturas do tipo sanduíche modeladas em elementos finitos na configuração casca/sólido/casca é aceitável e preferida para núcleos viscoelásticos espessos.

FIGURA 25 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DO SISTEMA AUXILIAR – VIGA SANDUÍCHE.



FONTE: O autor (2021).

4.2.4 Simulação Numérica das Propriedades do Material Viscoelástico

Conforme o modelo de derivadas fracionárias apresentado na seção 3.1, as propriedades mecânicas de materiais viscoelásticos também são dependentes da frequência. Uma vez que o *software* de elementos finitos escolhido não oferece suporte para este modelo, utilizou-se de um recurso destinado a materiais cujas propriedades mecânicas provém de ensaios mecânicos experimentais. Por meio deste recurso, é possível inserir uma gama de propriedades mecânicas discretizadas em função da frequência.

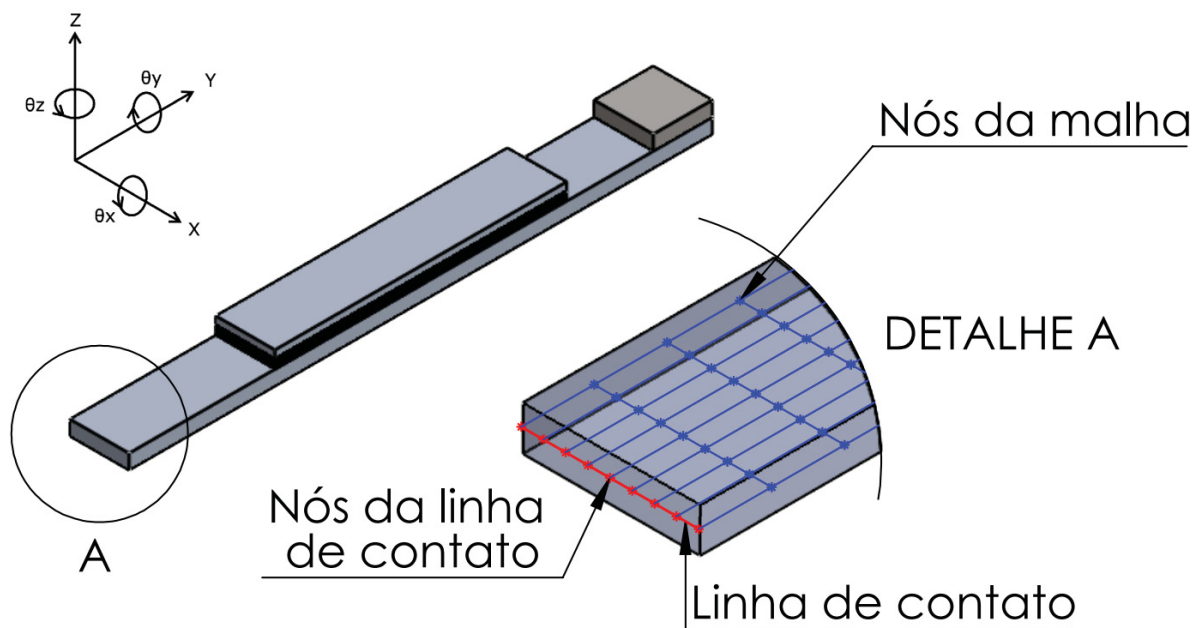
Para caracterização completa do comportamento dinâmico do material viscoelástico, optou-se pela utilização do módulo de cisalhamento complexo e do módulo de elasticidade complexo, definidos pelas equações 4 e 3, respectivamente.

Através dos parâmetros fornecidos pelo fabricante do material viscoelástico é possível calcular ambas propriedades para uma determinada temperatura e frequência. Uma rotina em MATLAB foi criada para gerar um arquivo de texto com estas propriedades discretizadas na frequência na qual o comportamento do sistema auxiliar será avaliado. No presente trabalho, todos os modelos numéricos do material viscoelástico foram avaliados para uma temperatura constante de 15°C. A rotina em ANSYS APDL utilizada para inserir as propriedades do material viscoelástico é apresentada no APÊNDICE 1.

4.2.5 Cálculo da rigidez dinâmica na base por elementos finitos

Para o modelo de elementos finitos define-se a base para o cálculo da rigidez dinâmica equivalente de maneira similar à descrita para o sistema auxiliar metálico. A Figura 26 apresenta um esquema ilustrativo dos nós da linha de contato em um modelo de elementos finitos do sistema auxiliar do tipo viga sanduíche com a malha aplicada.

FIGURA 26 - ESQUEMA ILUSTRATIVO DA DEFINIÇÃO DA BASE DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DO SISTEMA AUXILIAR.



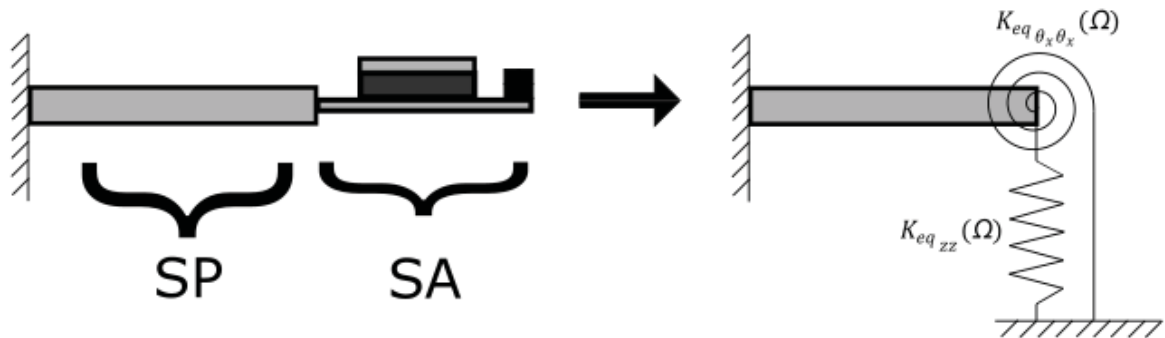
FONTE: O autor (2021).

A rigidez dinâmica equivalente na base do modelo em elementos finitos do sistema auxiliar $K_{beq}(\Omega)$ é obtida de maneira análoga a descrita na subseção 4.1.4, para o sistema auxiliar metálico.

4.2.6 Sistema Composto

A formulação do sistema composto é responsável por acoplar o sistema primário e o sistema auxiliar, de forma que os sistemas mecânicos descritos na FIGURA 27 sejam equivalentes.

FIGURA 27 – MODELOS MECÂNICOS EQUIVALENTES DO SISTEMA COMPOSTO.



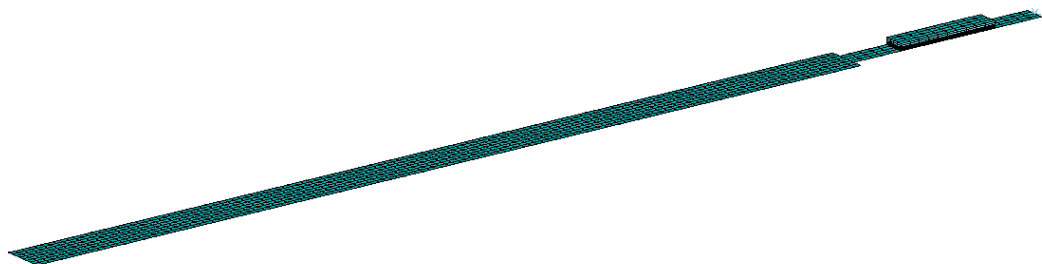
FONTE: O autor (2021).

Similar ao desenvolvimento para o sistema composto metálico da seção 4.1.5, a rigidez dinâmica na base do sistema auxiliar é inserida através da matriz K_{eqSA} , apresentada na equação 59. Novamente é necessário que a malha do sistema primário seja utilizada com a mesma discretização da malha da base do sistema auxiliar, possibilitando a construção da matriz K_{eqSA} . Para os sistemas escolhidos, basta utilizar o dobro de elementos no decorrer da largura do sistema primário.

Caso não seja possível controlar a malha ou o tipo de elemento do sistema primário, seja por complexidade ou origem dos parâmetros modais, uma simplificação estudada para concentrar pontualmente as matrizes $\tilde{K}_{eq_j}$ está descrita no APÊNDICE 2.

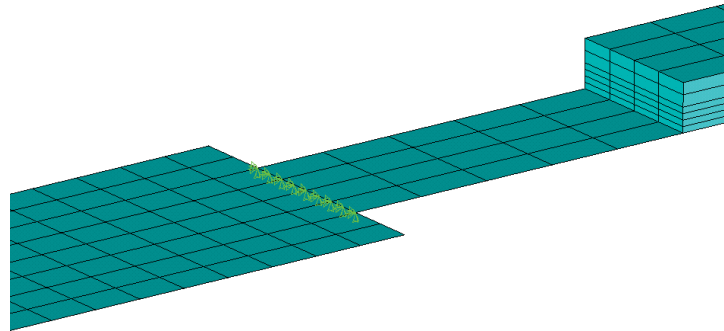
O modelo em elementos finitos (FIGURA 28) do sistema composto foi criado unindo as rotinas utilizadas para gerar os parâmetros modais do SP e para calcular a rigidez equivalente generalizada na base do SA. A mesma malha foi utilizada. Os sistemas foram acoplados via acoplamento dos graus de liberdade (*Coupled Pair*), condição que assume um engaste perfeito entre as estruturas. A região do acoplamento, já com as relações aplicadas é apresentada na FIGURA 29.

FIGURA 28 – MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS DO SISTEMA COMPOSTO.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 29 – DETALHE NA REGIÃO DE ACOPLAMENTO ENTRE OS SP E O SA NO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.



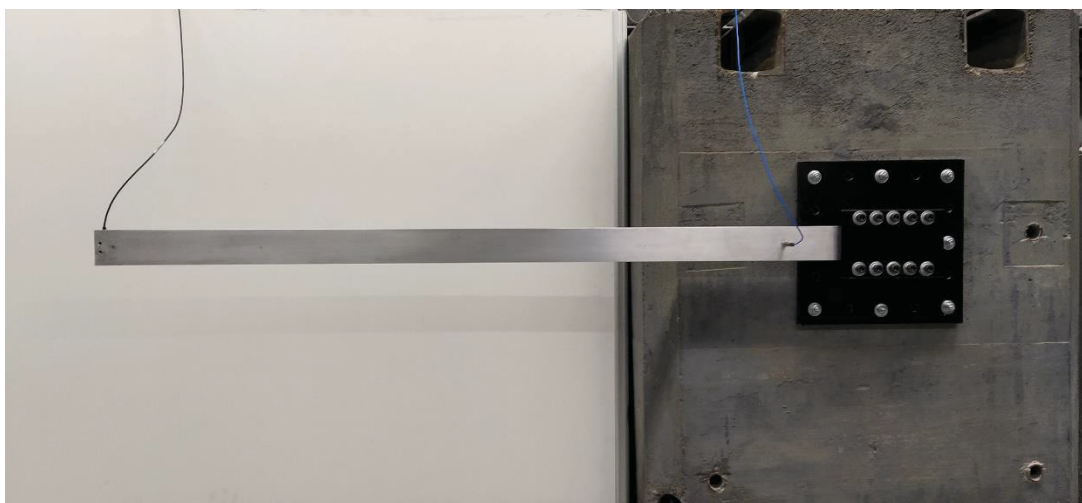
FONTE: O autor (2021).

4.2.7 Validação Experimental

4.2.7.1 Sistema Primário

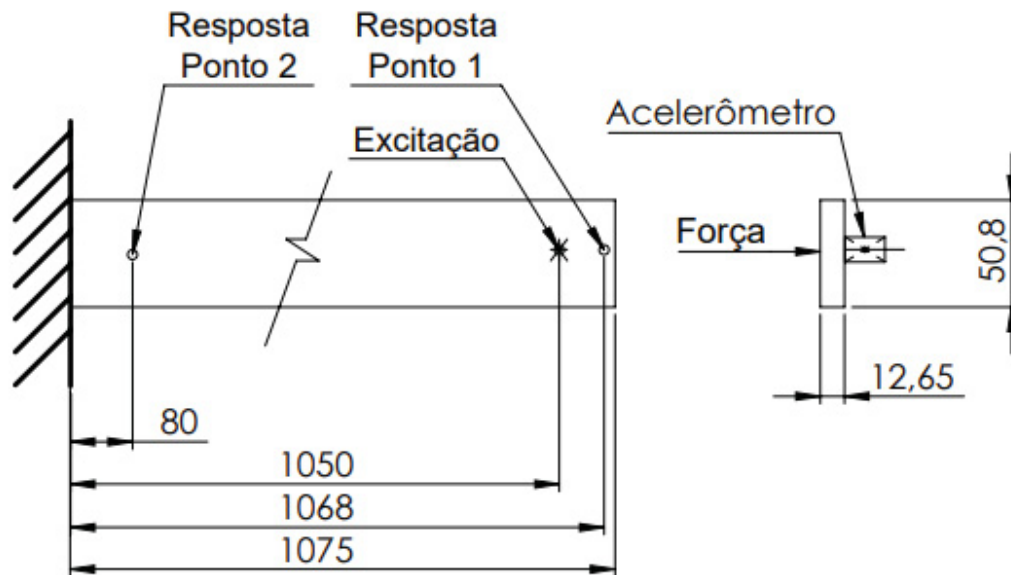
O mesmo método de engaste e equipamentos descritos na seção 4.1.6 foram utilizados. O sistema primário afixado no bloco é apresentado na FIGURA 30, já instrumentado conforme o esquema da FIGURA 31.

FIGURA 30 – SISTEMA PRIMÁRIO INSTRUMENTADO E FIXADO NA BASE DE CONCRETO.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 31 – MODELO DO SISTEMA PRIMARIO INDICANDO A REGIÃO DE MEDIÇÃO E A REGIÃO DE EXCITAÇÃO.



FONTE: O autor (2021).

4.2.8 Sistema Auxiliar – Viga Sanduíche Com Material Viscoelástico

O sistema auxiliar, apresentado na FIGURA 32, foi construído utilizando as dimensões definidas na TABELA 2. Optou-se pela utilização de adesivo de ciano acrilato para fixação do material viscoelástico, camada constritora e da massa de sintonização. Foi utilizado o adesivo Tekbond 793 (Saint-gobain S.A., São Paulo, SP, Brasil).

FIGURA 32 – SISTEMA AUXILIAR CONSTRUÍDO.



FONTE: O autor (2021).

Conforme indicado na região do acoplamento da FIGURA 24, uma junta parafusada foi utilizada para acoplar o SA ao SP. Foram utilizados dois parafusos M4 e a viga base do SA foi estendida para acomodar a junta. A região marcada em vermelho na FIGURA 32 corresponde a área da junta parafusada.

Assumiu-se que a junta parafusada não possuía influência na faixa de frequência considerada. Sendo assim, esta região é particular do modelo construído, não sendo considerada nos modelos numéricos.

4.2.8.1 Simplificações na Configuração Experimental

Na avaliação experimental de curvas de transferência, como por exemplo a rigidez dinâmica, frequentemente opta-se por impor uma força de excitação, regularmente na forma de um impacto, e avaliar a resposta da estrutura. Tal abordagem utiliza equipamentos laboratoriais relativamente simples e de ampla disponibilidade, como acelerômetros e martelos instrumentados.

Entretanto, para sistemas de MGL, obter a rigidez dinâmica na base exige aplicar condições de contorno em todos os graus de liberdade da base.

Utilizando o SA proposto como exemplo, para obter experimentalmente os elementos $K_{eq_{zz}}(\Omega)$ e $K_{eq_{z\theta_x}}(\Omega)$ da equação 48 os seguintes passos devem ser tomados:

- Aplicar as condições de contorno de restrição nos graus de liberdade $X_x, X_y, X_{\theta_y}, X_{\theta_z}$ da base ($X_x = X_y = X_{\theta_y} = X_{\theta_z} = 0$);

- Aplicar a excitação linear F_z na base;
- Avaliar as respostas de translação $X_{F_z z}$ e rotação $X_{F_z \theta_x}$;
- Calcular as respectivas rigidezes através das equações 60 e 61.

Já para a obtenção dos elementos $K_{eq_{\theta_x \theta_x}}(\Omega)$ e $K_{eq_{\theta_x z}}(\Omega)$ seria necessário:

- Aplicar as condições de contorno de restrição nos graus de liberdade $X_x, X_y, X_{\theta_y}, X_{\theta_z}$ da base $X_x = X_y = X_{\theta_y} = X_{\theta_z} = 0$;
- Aplicar a excitação angular M_{θ_x} na base;
- Avaliar as respostas de translação $X_{M_{\theta_x} z}$ e rotação $X_{M_{\theta_x} \theta_x}$;
- Calcular as respectivas rigidezes através das equações 62 e 63:

$$K_{eq_{zz}}(\Omega) = F_z / X_{F_z z}; \quad (60)$$

$$K_{eq_{z\theta_x}}(\Omega) = F_z / X_{F_z \theta_x}; \quad (61)$$

$$K_{eq_{\theta_x z}}(\Omega) = M_{\theta_x} / X_{M_{\theta_x} z}; \quad (62)$$

$$K_{eq_{\theta_x \theta_x}}(\Omega) = M_{\theta_x} / X_{M_{\theta_x} \theta_x}. \quad (63)$$

De forma prática, aplicar as restrições nos deslocamentos $X_x = X_y = X_{\theta_y} = X_{\theta_z} = 0$ sem interferir nas respostas X_z e X_{θ_x} se torna não trivial. Além das dificuldades em construir um mancal que aplique estas condições, ainda seria necessário medir a resposta angular e aplicação do momento, na mesma região do mancal, utilizando de respostas e forças lineares aplicadas com braços de alavanca (EWINS, 1984).

Dada a geometria compacta do sistema auxiliar, a satisfação de todos estes requisitos na região da base se mostrou uma tarefa árdua e que possivelmente acarretaria em demasiadas incertezas.

A fim de simplificar a verificação experimental, optou-se pela avaliação da reposta na base sob as condições de contorno livre-livre. Para tanto, o SA foi pendurado com cabos de aço finos, de massa desprezível, com a direção de interesse paralela a horizontal, conforme ilustrado pela FIGURA 33. Uma excitação na forma de um impacto foi aplicada com o martelo instrumentado, na região correspondente a base, marcada em vermelho. Para efeito de comparação, uma análise numérica utilizando as condições de contorno livre-livre também foi efetuada.

FIGURA 33 – AVALIAÇÃO DA RESPOSTA DO SA NA CONDIÇÃO LIVRE-LIVRE.

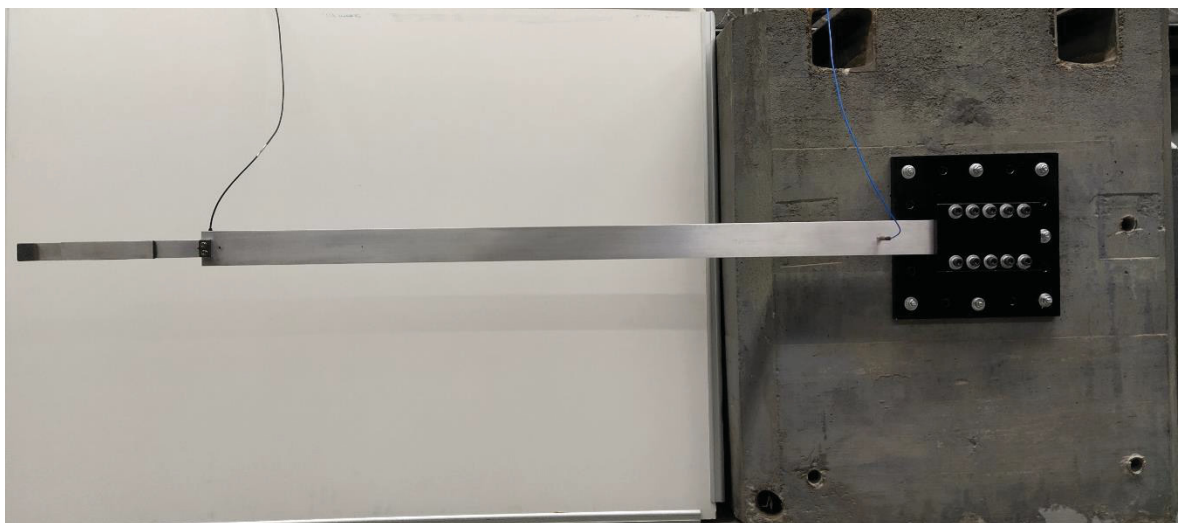


FONTE: O autor (2021).

4.2.9 Sistema Composto

O sistema composto construído é apresentado na Figura 34. O ponto de medição de resposta e de excitação utilizados foram os mesmos descritos para o sistema primário. Utilizou-se uma pequena chapa de aço para distribuir a carga da junta parafusada sobre a base do sistema auxiliar. Foram utilizados dois parafusos de rosca métrica 4x0,75mm e 20mm de comprimento. O acoplamento é detalhado na Figura 35.

FIGURA 34 – SISTEMA COMPOSTO.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 35 – SISTEMA COMPOSTO – DETALHE NO SA E NA JUNTA PARAFUSADA.



FONTE: O autor (2021).

5 RESULTADOS

São apresentados neste capítulo os resultados obtidos através das análises numéricas e das medições experimentais. Busca-se a validação da metodologia utilizando o modelo do sistema composto com rigidez dinâmica equivalente. Para tanto, é realizada a comparação entre as curvas de resposta oriundas deste modelo, de simulações via elementos finitos e medições experimentais.

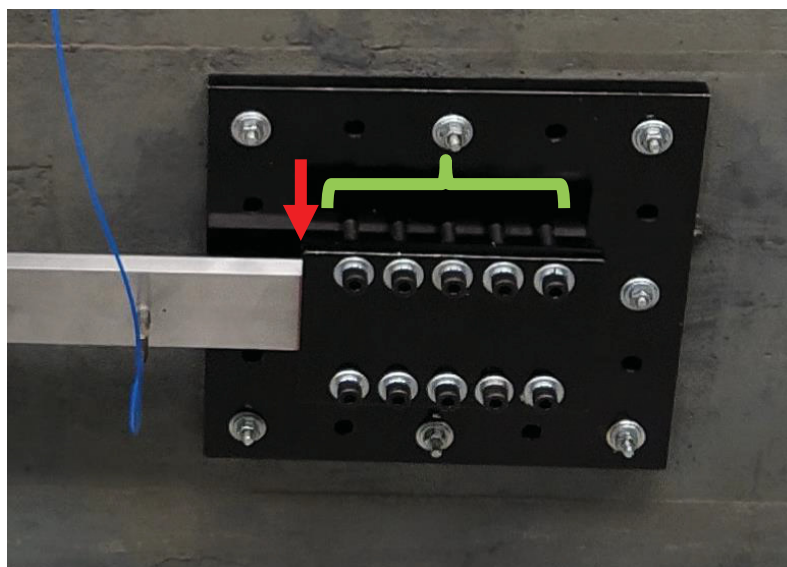
Também é apresentada uma comparação entre as respostas do sistema composto onde a equação de movimento foi montada realizando o acoplamento apenas dos graus de liberdade de translação do SA. Essa análise tem como objetivo avaliar a influência da rigidez dinâmica equivalente angular na resposta do sistema composto. Esta análise é conduzida apenas para o sistema composto metálico contínuo (definido na seção 4.1).

Além disso, é apresentada uma breve comparação com os resultados obtidos por Silva (2019), onde a metodologia proposta foi aplicada ao sistema composto analisado pela autora em sua Tese de Doutorado.

Apesar dos esforços em simular a condição de engaste ideal, posteriormente verificou-se a necessidade de ajustar os modelos em elementos finitos. Verificou-se que as frequências naturais medidas experimentalmente para os dois sistemas estavam abaixo dos valores simulados, indicando que a rigidez do engaste estava influenciando os sistemas medidos.

Para o SP com 450 mm de comprimento, as frequências medidas experimentalmente encontravam-se, na média, 4,5% abaixo dos valores obtidos por elementos finitos. Já para o SP com 1075 mm de comprimento a diferença, na média, era de 2,5% abaixo dos valores simulados. A diferença nas frequências dos sistemas primários levantou a suspeita que a condição de engaste ideal não era introduzida a partir do início do suporte metálico (indicado pela seta vermelha na FIGURA 36), mas sim em alguma região no decorrer do comprimento do suporte (indicado pela chave verde na FIGURA 36).

FIGURA 36 – ENGASTE CONTUÍDO.



FONTE: O autor (2021).

Como forma de ajuste, optou-se por aumentar o comprimento das vigas no modelo de elementos finitos dos sistemas primários em 20 mm, conforme indicado pela TABELA 6. Dessa forma, foi possível reduzir a diferença média entre as frequências naturais medidas experimentalmente e simuladas via elementos finitos para 0,4% no SP de 450 mm e 0,3% no SP de 1075 mm.

TABELA 6 – AJUSTE NAS PROPRIEDADES DOS SISTEMAS PRIMÁRIOS – MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Sistema Primário	Comprimento (l) [mm]	Largura (b) [mm]	Espessura (e) [mm]	Módulo de Elasticidade [GPa]	Densidade [kg/m ³]	Coefficiente de Poisson
Primeiro SP analisado	470	50,8	12,65	70	2700	0,33
Segundo SP analisado	1095	50,8	12,65	70	2700	0,33

FONTE: O autor (2021).

5.1 SISTEMA AUXILIAR METÁLICO

5.1.1 Sistema Primário

As respostas nos pontos 1 e 2, definidos conforme a FIGURA 21, do sistema primário de 450mm de comprimento são apresentadas nas FIGURA 37 e 38,

respectivamente. A curva correspondente a análise numérica via parâmetros modais e a simulação via elementos finitos possuem uma ótima aproximação, conforme esperado.

FIGURA 37 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SP – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.

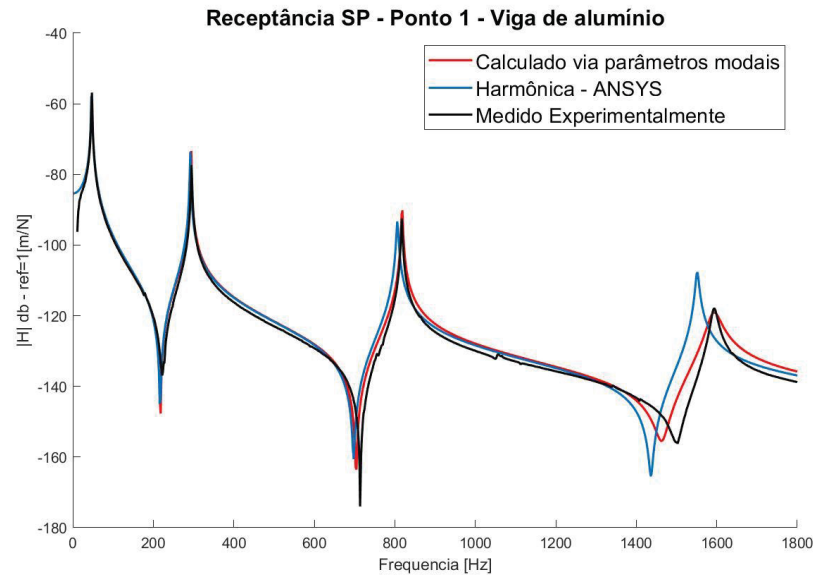
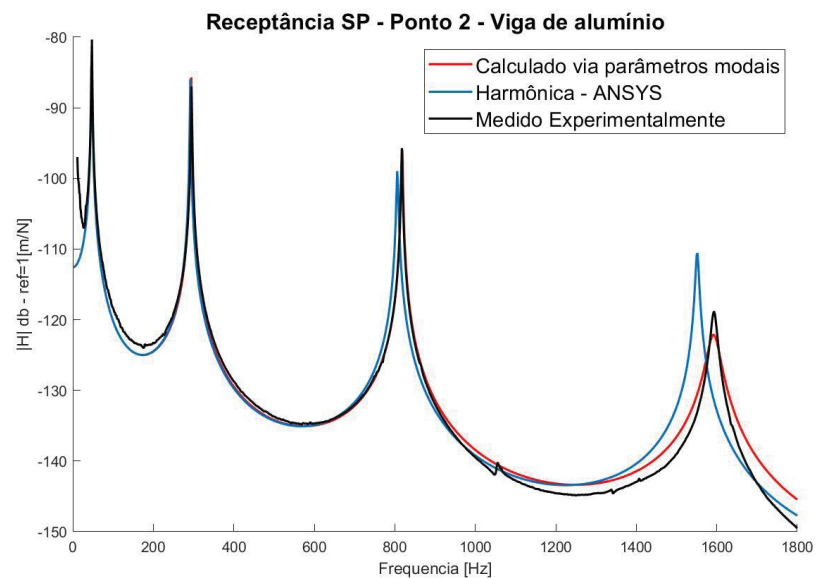


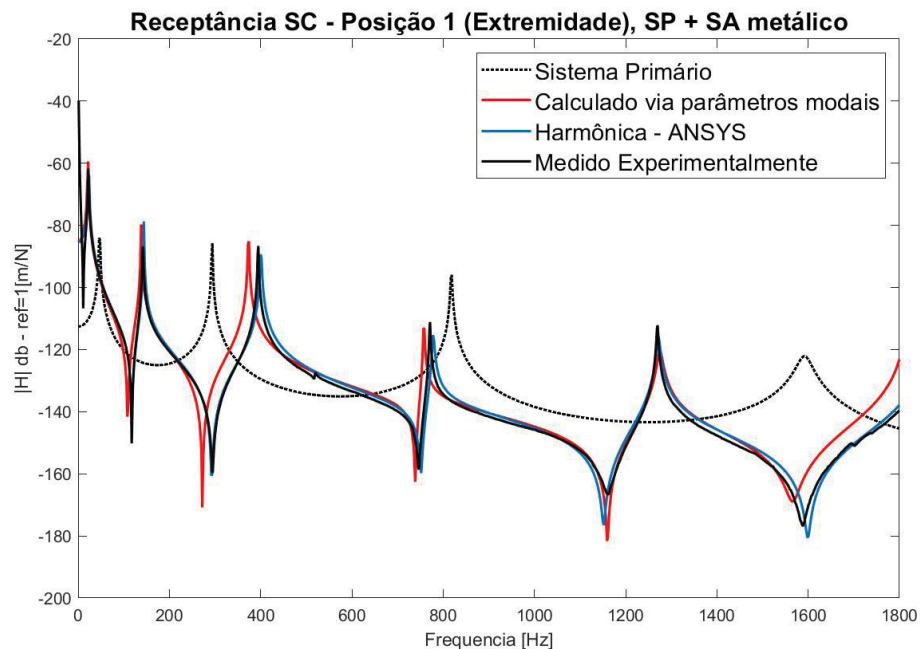
FIGURA 38 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SP – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.



5.1.2 Sistema Composto

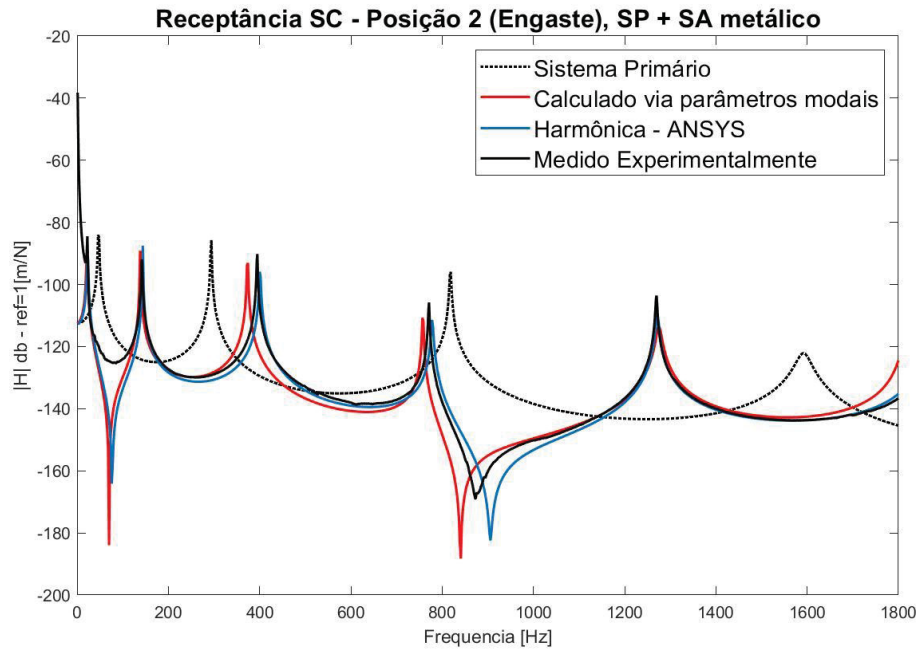
Já as respostas do sistema composto são apresentadas nas figuras 39 e 40, respectivamente. É possível observar a similaridade entre as frequências de ressonância dos modelos distintos. De maneira geral, o modelo do sistema composto via rigidez dinâmica na base gerou uma aproximação satisfatória do comportamento de uma viga metálica contínua, tanto quanto ao modelo numérico via elementos finitos e o modelo experimental.

FIGURA 39 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 40 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.

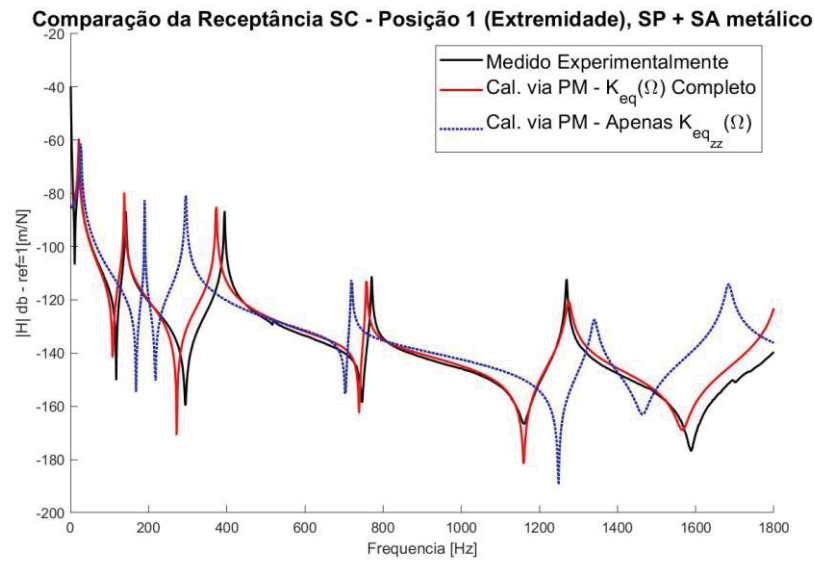


FONTE: O autor (2021).

5.1.3 Sistema Composto – Análise Sobre a Influência da Rigidez Dinâmica na Base Angular do SA

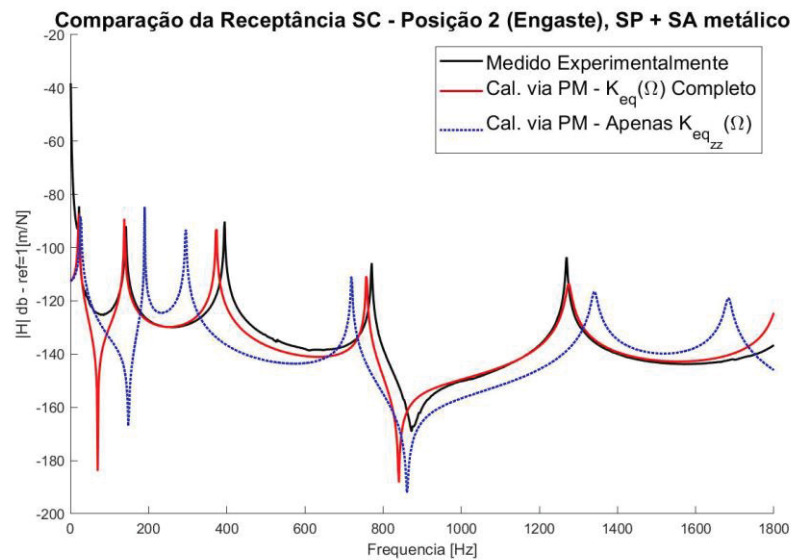
Para efeito de comparação, a resposta do sistema composto também foi avaliada inserindo apenas a rigidez dinâmica equivalente na base translacional do SA, $K_{eq_{zz}}(\Omega)$, apresentada na equação 49. A resposta deste sistema, intitulado “Cal. via PM - apenas $K_{eq_{zz}}(\Omega)$ ” é comparada (FIGURA 41 e 42) com os dados medidos experimentalmente e com a resposta do sistema composto calculada utilizando a matriz da equação 49, ou seja, inserindo $K_{eq_{zz}}(\Omega)$ e $K_{eq_{\theta\theta}}(\Omega)$.

FIGURA 41 – COMPARAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 42 – COMPARAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.



FONTE: O autor (2021).

Para o sistema em questão, fica evidente a influência do acoplamento dos graus de liberdade de rotação. Vale ressaltar que este sistema representa acoplamento perfeito entre o sistema primário e o sistema auxiliar, uma vez que é uma viga contínua.

5.2 SISTEMA AUXILIAR VIGA SANDUÍCHE COM MATERIAL VISCOELÁSTICO

5.2.1 Sistema Primário

As respostas nos pontos 1 e 2 do sistema primário, definidos conforme a FIGURA 31, são apresentadas nas FIGURAS 43 e 44, respectivamente. Vale notar a alta densidade modal na faixa analisada.

FIGURA 43 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SP – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.

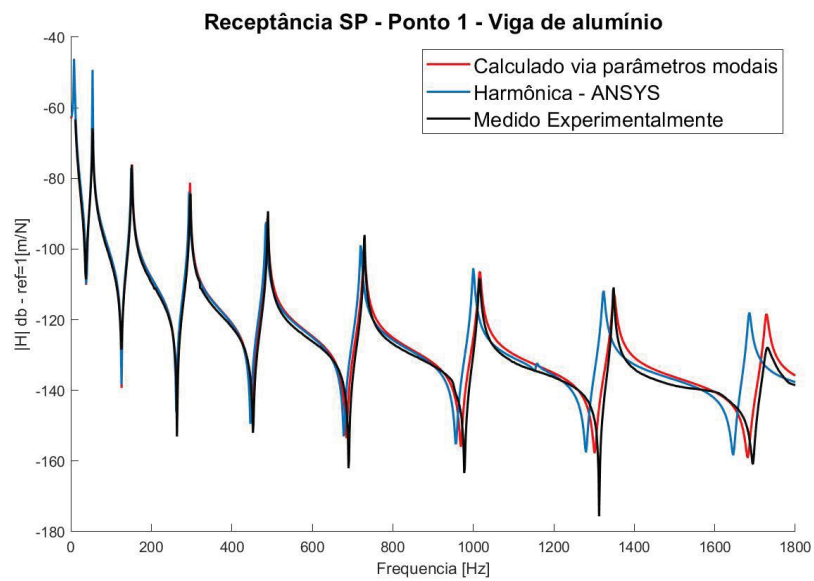
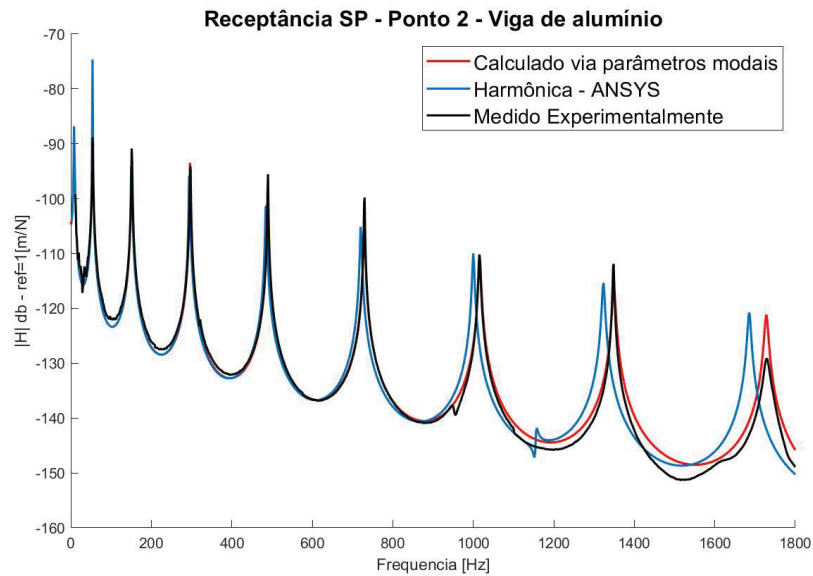


FIGURA 44 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SP – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.

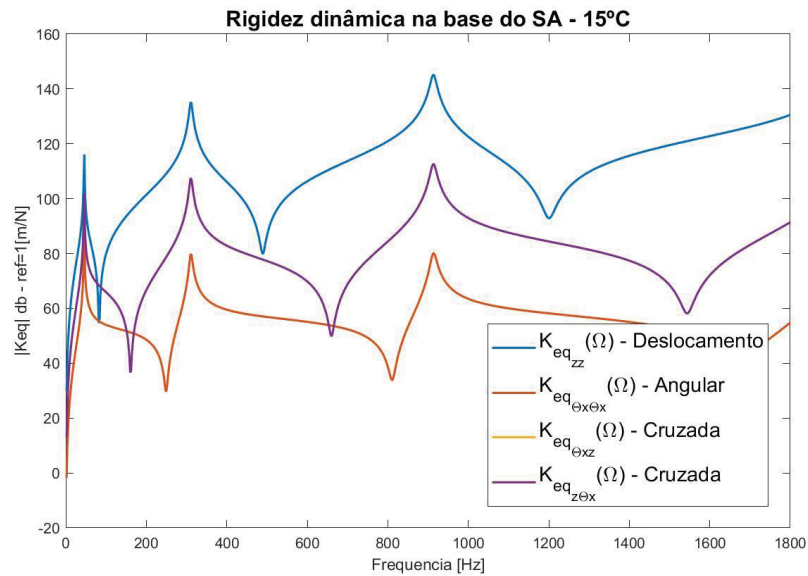


FONTE: O autor (2021).

5.2.2 Sistema Auxiliar

A FIGURA 45 apresenta as rigidezes dinâmicas equivalentes na base do sistema auxiliar, calculadas numericamente. As curvas de rigidez cruzada $K_{eq_{z\theta_x}}$ e $K_{eq_{\theta_x z}}$ estão sobrepostas, sendo a matriz de rigidez equivalente $\tilde{K}_{eq}$ simétrica. Estas grandezas não possuem as mesmas unidades, e estão dispostas no mesmo gráfico apenas para efeito de comparação. Além disso, são apresentados o somatório das rigidezes dinâmicas em todos os nós na base do SA, conforme detalhado APÊNDICE 2.

FIGURA 45 – RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE DO SISTEMA AUXILIAR.



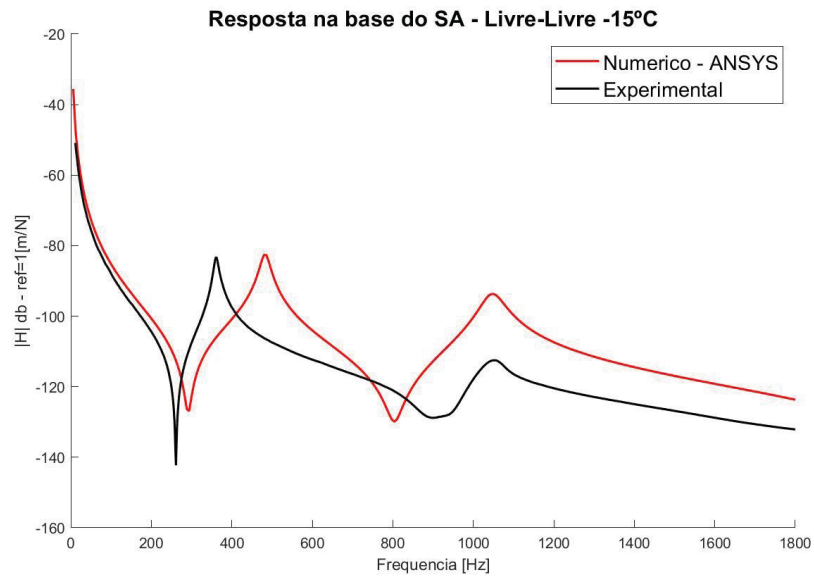
FONTE: O autor (2021).

As regiões com maior rigidez dinâmica representam as regiões que o sistema auxiliar oferece maior impedância mecânica ao movimento do sistema primário. Tendo em vista que a receptância é o inverso da rigidez dinâmica, estas regiões correspondem às frequências de antirressonância do sistema auxiliar de MGL.

Avaliando a rigidez dinâmica na base de sistemas de 1 GL, a frequência de antirressonância também corresponde à frequência de maior rigidez dinâmica na base.

A validação experimental sob condições de contorno livre-livre está disposta na FIGURA 46. Vale ressaltar que estas curvas não representam a rigidez na base para o SA de MGL, tendo como principal objetivo comparar o SA construído com o modelo em elementos finitos. As medições foram realizadas com a temperatura ambiente de 15° C.

FIGURA 46 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA NA BASE DP SA – CONDIÇÃO LIVRE-LIVRE.

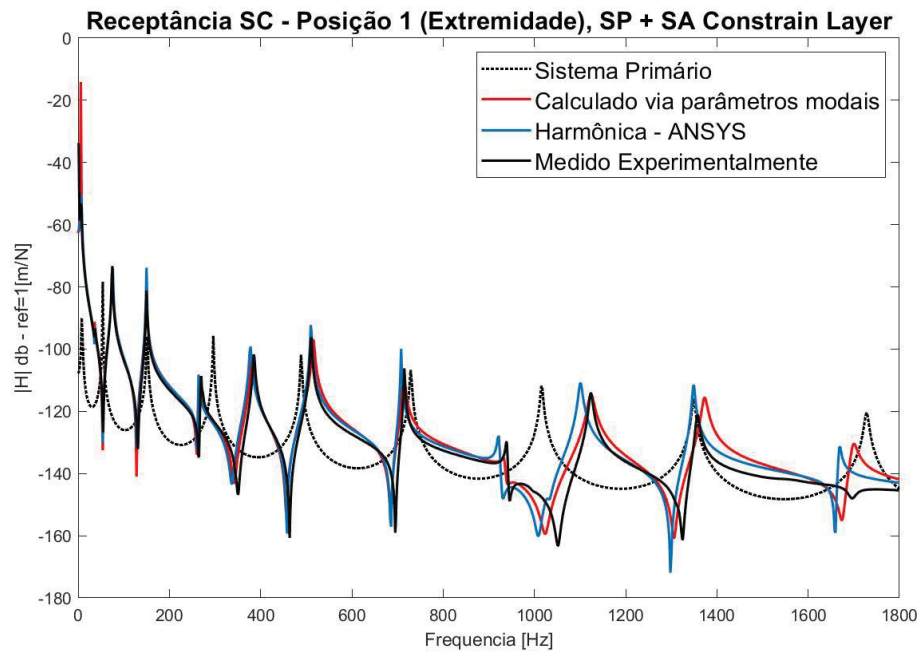


De forma geral, as curvas de resposta apresentam similaridades com relação às frequências dos picos de resposta e a magnitude destes. As diferenças observadas podem ser atribuídas principalmente ao comprimento adicional na base do SA construído, necessário para fixação no SP.

5.2.3 Sistema Composto – SA Com Material Viscoelástico

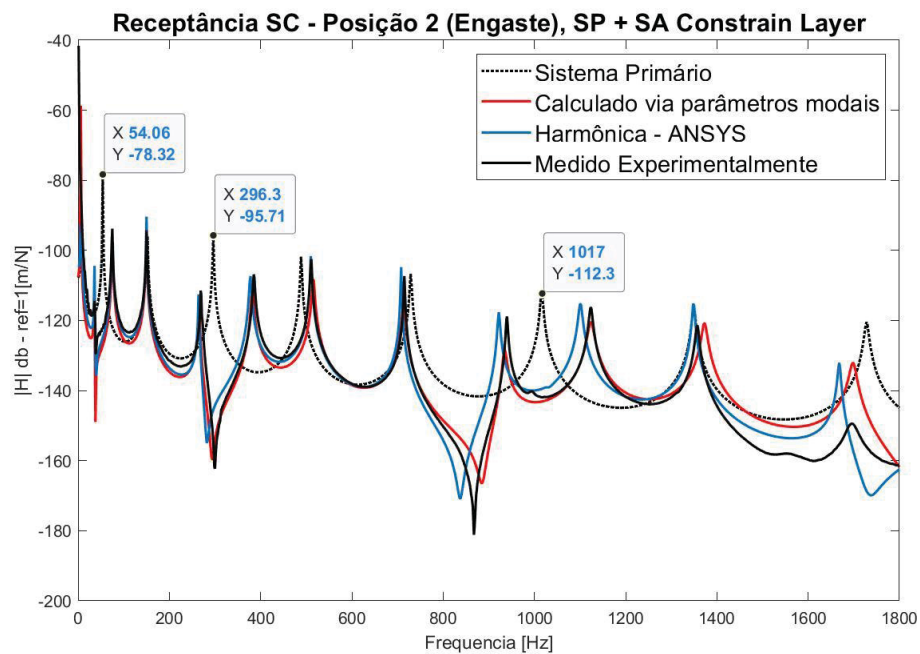
A resposta do sistema composto é apresentada nas FIGURAS 47 e 48. Para efeito de comparação a resposta do SP também é apresentada na curva pontilhada.

FIGURA 47 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 48 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.



FONTE: O autor (2021).

Na FIGURA 46 as 2ª, 4ª e 7ª ressonâncias do sistema primário estão indicadas. Estas frequências naturais do sistema primário estão no entorno das frequências onde o sistema auxiliar possui uma alta rigidez dinâmica. Na resposta do

sistema composto, pode-se verificar que esta elevada rigidez dinâmica manifesta-se inserindo um novo modo de vibrar. Sendo assim, por exemplo, no entorno do 7º modo de vibrar do sistema primário (1015 Hz), o sistema composto apresenta dois modos, um em 940 Hz e outro em 1124 Hz.

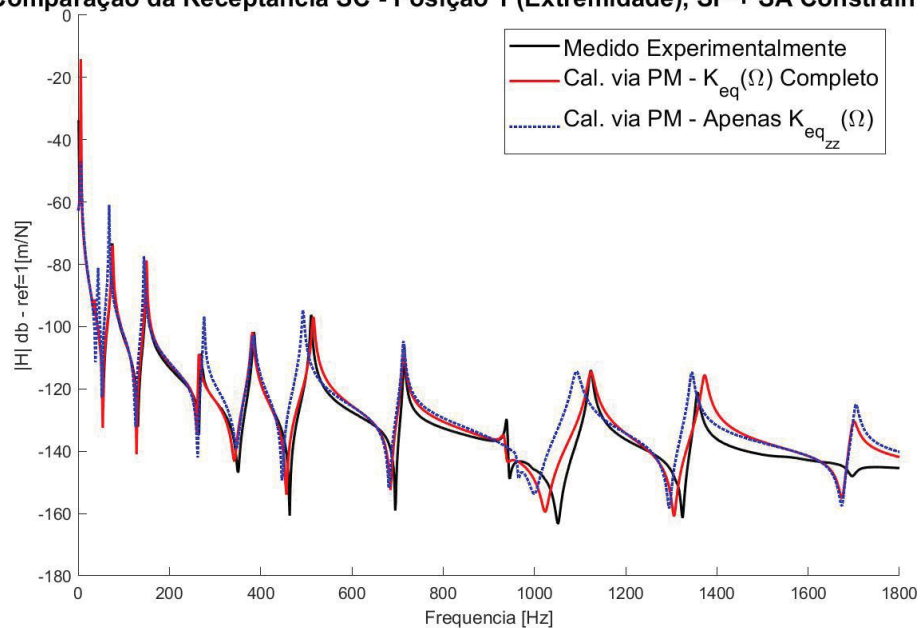
O SA do tipo *constrained layer* proposto e analisado tem como objetivo representar um sistema geral qualquer. Sendo assim, não possui elevado amortecimento. Um estudo sobre diferentes formas de inserir amortecimento no SA é apresentado no APÊNDICE 3.

5.2.4 Sistema Composto – Análise Sobre a Influência da Rigidez Dinâmica na Base Angular do SA do Tipo *Constrained Layer*

Para efeito de comparação, a mesma avaliação utilizando apenas a rigidez dinâmica equivalente na base translacional do SA, $K_{eq_{zz}}(\Omega)$ foi realizada para o sistema composto onde o SA é do tipo *constrained layer* com material viscoelástico. Os resultados estão apresentados nas FIGURAS 49 e 50.

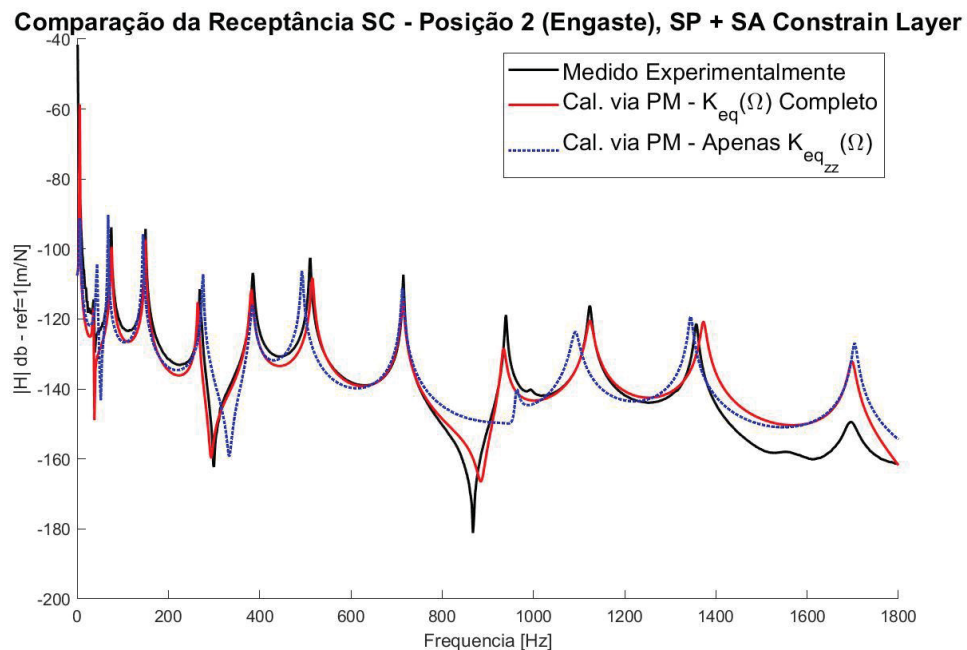
FIGURA 49 – COMPARAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPÇÃO NO PONTO 1.

Comparação da Receptância SC - Posição 1 (Extremidade), SP + SA Constrain Layer



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 50 – COMPARAÇÃO ENTRE AS RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 2.



FONTE: O autor (2021).

Neste sistema, a influência da rigidez dinâmica equivalente na base angular aparenta ser de menor importância quando comparada ao sistema metálico contínuo. Entretanto, ainda é perceptível, aproximando os resultados numéricos do sistema medido experimentalmente. Além disso, o SA do tipo *constrained layer* utilizado possui dimensões consideravelmente inferiores ao ser comparado ao SP.

5.3 TEMPO COMPUTACIONAL

As simulações numéricas foram realizadas em um computador do tipo PC, equipado com um processador Intel® Core™ i5-3450 @3.1Ghz, 8 GB de memória RAM DDR3, placa gráfica Nvidia® GeForce™ 1070 e sistema operacional Windows 10, de arquitetura 64 bits.

A simulação da resposta do sistema composto (com sistema auxiliar do tipo *constrained layer*) utilizando a metodologia de rigidez equivalente necessitou de 409 segundos para avaliar a rigidez dinâmica na base do SA. A montagem e resolução das equações do sistema composto levaram 220 segundos, totalizado 629 segundos para obter a resposta do sistema composto.

Já a simulação da resposta do sistema composto (sistema auxiliar do tipo *constrained layer*) inteiramente no *software* de elementos finitos ANSYS APDL necessitou de 833 segundos.

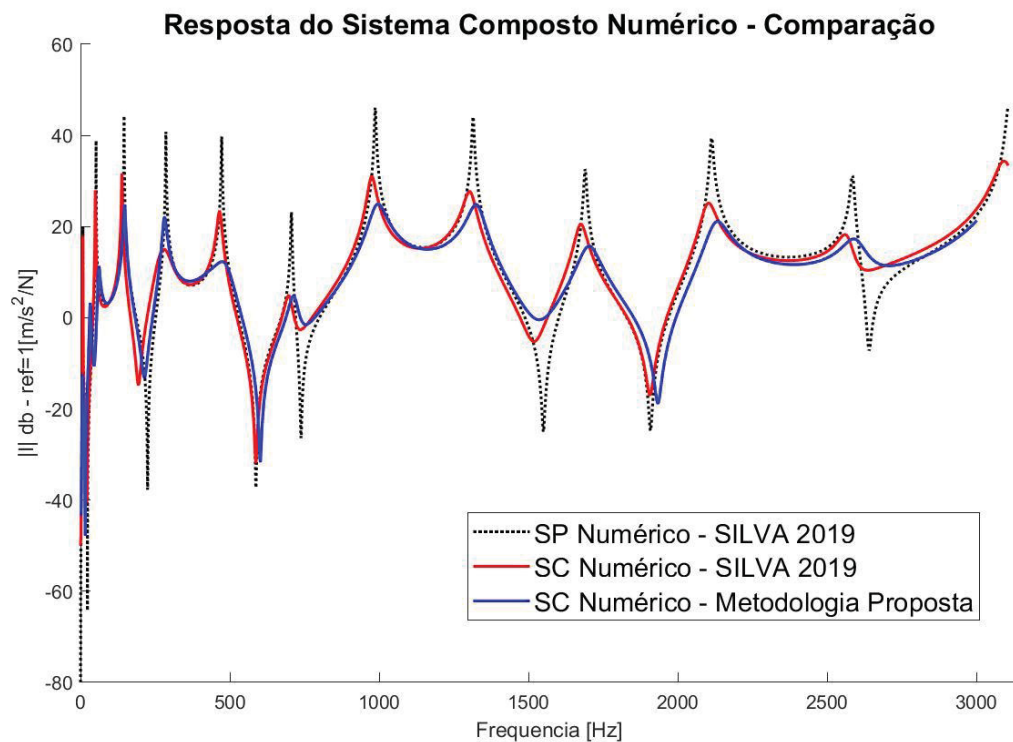
A utilização da metodologia proposta resultou em uma redução de 24,5% no tempo de computação da resposta do sistema composto avaliado.

5.4 COMPARAÇÃO DA METODOLOGIA PROPOSTA COM A METODOLOGIA DESCRITA POR SILVA (2019)

Para efeito de comparação, a metodologia proposta para o cálculo da rigidez dinâmica na base foi comparada com a metodologia utilizada na Tese de Doutorado de Silva (2019), e aplicada ao sistema composto proposto pela autora.

Para tanto, o sistema primário e o sistema auxiliar (SILVA, 2019) foram modelados conforme a metodologia descrita no Capítulo 4. O sistema primário em questão é uma viga engastada-livre de aço e o sistema auxiliar é uma viga do tipo sanduíche com material viscoelástico. A resposta deste sistema composto, comparando os resultados obtidos por Silva (2019) (curva em vermelho) e obtidos pela metodologia proposta neste trabalho (curva de em azul) está apresentada na FIGURA 51.

FIGURA 51 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC (INERTÂNCIA) – COMPARAÇÃO ENTRE METODOLOGIAS.



FONTE: O autor (2021). A curva tracejada e em vermelho foram fornecidas por Silva (2019).

De maneira geral, para o sistema avaliado por Silva (2019), as duas metodologias apresentam resultados numéricos coerentes, tanto para as frequências de ressonância quanto para a magnitude das respostas. Uma análise detalhada dos resultados obtidos na comparação é apresentada no APÊNDICE 4.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 CONCLUSÕES

Através deste trabalho, foi possível desenvolver uma metodologia para avaliar o comportamento dinâmico de um sistema composto por uma estrutura metálica acoplada a uma estrutura tipo *constrained layer* com material viscoelástico usando rigidez equivalente generalizada e considerando acoplamento translacional e angular.

Foi apresentado um modelo para simulação via elementos finitos das propriedades de materiais viscoelásticos e obtenção da matriz de rigidez equivalente generalizada na base para sistemas de múltiplos graus de liberdade.

Através da metodologia proposta, as equações de movimento do sistema composto foram desenvolvidas para dois sistemas distintos, sendo o primeiro composto de uma viga metálica acoplada a outra viga metálica, de mesma seção transversal, e o segundo, uma viga metálica acoplada a uma viga do tipo *constrained layer* com material viscoelástico.

As respostas dos dois sistemas distintos estudados foram validadas numericamente via elementos finitos e experimentalmente. Em ambos os sistemas a metodologia proposta foi capaz de simular com acurácia a resposta dos sistemas compostos.

Além da acurácia do modelo proposto, a abordagem via rigidez equivalente na base se apresenta robusta e apta a ser utilizada no projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos de múltiplos graus de liberdade.

6.2 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para os trabalhos futuros, sugere-se a implementação de uma rotina para projeto ótimo, com o objetivo de definir as dimensões do NDV de MGL para reduzir a resposta do sistema primário definido. Além disso, o acoplamento entre o SC e SA foi considerado ideal, e experimentalmente uma junta parafusada foi utilizada. Sugere-se avaliar diferentes formas de união (juntas rebitadas, colas adesivas, etc) a fim de averiguar a influencia da união no comportamento do sistema composto físico.

REFERÊNCIAS

- BACKSTRÖM, D.; NILSSON, A. C. Modelling the vibration of sandwich beams using frequency-dependent parameters. **Journal of Sound and Vibration**, v.300, p. 589–611, 2007.
- BAGLEY, R. L. e TORVIK, P. J. A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity, **Journal of Rheology**, v. 27, n. 3, p. 201-210, 1983.
- BANKS, H. T.; HU, S.; KENZ, Z. R. **A Brief Review of Elasticity and Viscoelasticity**. Technical report, Center for Research and Scientific Computation, and Department of Mathematics, North Carolina State University, 2010.
- BAVASTRI, C. A., **Redução de Vibrações de Banda Larga em Estruturas Complexas por Neutralizadores Viscoelásticos**, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 1997.
- BAVASTRI, C.; FEBBO, M.; GONÇALVES, V.; e LOPES, E. (2013). Optimum viscoelastic absorbers for cubic nonlinear systems. **Journal of Vibration and Control**, v. 20, n. 10, p.1464–1474, 2014.
- BAZ, A.; RO, J. Optimum Design and Control of Active Constrained Layer Damping. **Journal of Mechanical Design**, v. 117, p. 135-145, 1995.
- BRONKHORST, K. B; FEBBO, M.; LOPES, E. M. O. e BAVASTRI, C.A. Experimental implementation of an optimum viscoelastic vibration absorber for cubic nonlinear systems. **Engineering Structures**, v. 163, p. 323-331, 2018.
- CAPUTO, M. E. e MAINARDI, F. A. New Dissipation Model Based on Memory Mechanism. **Pure and Applied Geophysics**, v. 91, p. 134-147, 1966.
- CRUZ, A. G. M. **Projeto Ótimo de Neutralizadores Viscoelásticos Baseado no Modelo de Derivadas Fracionárias**, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 2004.
- DAI, J.; XU, Z. D.; GAI, P. P. Dynamic analysis of viscoelastic tuned mass damper system under harmonic excitation. **Journal of Vibration and Control**, v. 25, p. 1768–1779, 2019.
- DEN HARTOG, J. P. **Mechanical Vibrations**, McGraw-Hill, New York, 1956.
- DOUBRAWA FILHO, F. J. **Controle de Vibrações Flexionais em Sistemas Girantes utilizando Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos**. Dissertação - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2008.
- ESPÍNDOLA, J. J.; SILVA, H. P. **Modal reduction of vibrations by dynamic neutralizers**. 10th International Modal Analysis Conference, pp. 1367–1373, San Diego, United States of America, 1992.

EWINS, D. J. **Modal Testing: Theory and Practice**, Research Studies Press Ltd., Somerset, England, 1984.

FERREY J. D. **Viscoelastic Properties of Polymers**. New York, USA, 1980.

FRAHM, H. **Device for Damping Vibration of Bodies**, US Patent. No. 989959, 30 October, 1909.

HARRIS, C. M. e CREDE, C. H. **Shock and Vibration Handbook**, McGraw Hill Book Company, New York, EUA, 1976.

HUNT, J. B. **Dynamic Vibration Absorbers**, Mechanical Engineering Publication LTD, London, 1979.

IURLOVA, N.; SEVODINA, N.; OSHMARIN, D.; IURLOV, M. Algorithm for Solving Problems Related to the Natural Vibrations of Electro-viscoelastic Structures with Shunt Circuits Using ANSYS Data. **International Journal of Smart and Nano Materials**, v.10, p. 156–176, 2018.

JOHNSON, C. D.; KIENHOLZ, D. A.; ROGERS, L. C. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layer. **Shock and Vibration Bulletin**, v.51, p. 71–81, 1981.

KERWIN, E. M. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v.31 p. 952–962, 1959.

LI, F. M.; LYU, X. X. Active Vibration Control of Lattice Sandwich Beams Using the Piezoelectric Actuator/Sensor Pairs. **Composites Part B: Engineering**, v. 67, p. 571–578, 2014.

MADENCI, E.; GUVEN, I. **The Finite Element Method and Applications in Engineering Using ANSYS®**, NewYork, USA, 2015.

MALEKZADEH, K.; SAYYIDMOUSAVI, A. Free Vibration Analysis of Sandwich Plates with a Uniformly Distributed Attached Mass, Flexible Core, and Different Boundary Conditions. **Journal of Sandwich Structures & Materials**, v. 12, p.709–732, 2009.

MURESAN, C. I.; DULF, E. H.; PRODAN, O. A fractional order controller for seismic mitigation of structures equipped with viscoelastic mass dampers. **Journal of Vibration and Control**, v. 22, p. 1980–1992, 2014.

NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P. **Vibration Damping**, John Wiley & Sons, Inc., EUA, 1985.

NILSSON, E.; NILSSON, A. Prediction and measurement of some dynamic properties of sandwich structures with honeycomb and foam cores. **Journal of Sound and Vibration**, v.251, p. 409 – 430, 2002.

PLOUIN, A.; BALMÈS, E. **A Test Validated Model of Plates with Constrained Viscoelastic Materials**. 17th International Modal Analysis Conference, v. 1, pp. 194-200, 1999.

RASHID, A.; NICOLESCU, C. M. Design and implementation of tuned viscoelastic dampers for vibration control in milling. **International Journal of Machine Tools and Manufacture**, v. 48, p. 1036–1053, 2008.

ROSSIKHIN, Y. A. e SHITIKOVA, V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges, **Journal of Engineering Mechanics**, v. 124, n. 9, p. 1029–1036, 1998.

ROSS, D.; UNGAR, E.E.; KERWIN, E. M. Damping of Plate Flexural Vibrations by Means of Viscoelastic Laminæ. **Structural Damping, Section III**, ASME, New York. 1959.

SILVA, F. E. C e BAVASTRI, C. A. A methodology for an optimal design of physical parameters, positions, and viscoelastic materials of simple dynamic absorbers for passive vibration control, **Journal of Vibration and Control**, v. 25, n. 6, p. 1133-1147, 2019.

SILVA, H. P. **Controle Modal de Vibrações por Neutralizadores Dinâmicos: Uma Abordagem Generalizada**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 1991.

SILVA, F. E. C. **Projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos com múltiplos graus de liberdade considerando os parâmetros físicos, localização e material viscoelástico**, Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná, Brasil, 2019.

SNOWDON, J. C. **Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems**, John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.

SUN, S.; YANG, J.; LI, W.; DENG, X.; DU, H.; ALICI, G. e YAN, T. An innovative MRE absorber with double natural frequencies for wide frequency bandwidth vibration absorption, **Smart Material and Structures**, v. 25, p. 1-10, 2016.

TRINDADE, M. A.; BENJEDDOU, A.; OHAYON, R. Piezoelectric Active Vibration Control of Damped Sandwich Beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 246, p. 653–677, 2001.

TRINDADE, M. A. Experimental analysis of active-passive vibration control using viscoelastic materials and extension and shear piezoelectric actuators. **Journal of Vibration and Control**, v. 17, p. 917–929, 2010.

VERBAAN, C. A. M.; PETERS, G. W. M.; STEINBUCH, M. The advantage of linear viscoelastic material behavior in passive damper design-with application in broad-banded resonance dampers for industrial high-precision motion stages. **Journal of Sound and Vibration**, v. 386, p. 242–250, 2017.

UNGAR E. E.; KERWIN, E. M. Loss factors of viscoelastic systems in terms of energy concepts. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 34, p. 954–957, 1962.

VOLTOLINI, D.; KLUTHCOVSKY, S. C.; DOUBRAWA FILHO, F. J.; LOPES, E. M. O. e BAVASTRI, C. A. Optimal design of a viscoelastic vibration neutralizer for rotating systems: Flexural control by slope degree of freedom. **Journal of Vibration and Control**, v. 24, n. 16, p. 3525-3537, 2018.

WHITTIER J. A. **The Effect of Configurational Additions Using Viscoelastic Interfaces on the Damping of a Cantilever Beam**. Minnesota, USA, 1959.

ZHANG, S. H.; CHEN, H. L. A study on the damping characteristics of laminated composites with integral viscoelastic layers. **Composites Structures**, v. 74, p. 63–69, 2006.

APÊNDICE 1 – CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS DO MATERIAL VISCOELÁSTICO EM ELEMENTOS FINITOS

A rotina utilizada pelo ANSYS APDL necessita dos dados do módulo complexo de elasticidade em função da frequência. Neste exemplo, este arquivo é do tipo CVS (*Comma-separated values*), nomeado E_comp.csv. As primeiras 7 linhas deste arquivo estão apresentadas abaixo.

Frequencia [Hz],	E real [Pa],	E complexo [Pa]
0,	7161933.3333,	0
2.0022,	8201860.9662,	795881.6376
4.0044,	8549941.6045,	1060963.7356
6.0067,	8805240.1857,	1254970.6737
8.0089,	9014326.5695,	1413597.8945
10.0111,	9194623.8858,	1550194.5945

O manual de referência do ANSYS aconselha utilizar valores de frequências no entorno das frequências de análise do problema dinâmico. É possível optar por escolher o valor mais próximo ou realizar interpolação. Vale ressaltar que durante os testes realizados, se a tabela possuir mais de 300 linhas o aplicativo ANSYS APL é finalizado sem deixar mensagens de erro. Recomenda-se então utilizar menos de 300 valores do módulo complexo de cisalhamento.

Abaixo está descrita a seção da rotina ANSYS APDL responsável pela definição do material viscoelástico, ler e alocar os dados do módulo complexo de cisalhamento. Posteriormente na rotina eles são aplicados através do comando VATT. Nas análises realizadas o vetor de frequências utilizado possuía 900 elementos (variável n_freq), por isso a dimensão da tabela criada é de $3 \times n_freq/3$, ou seja, 3×300 .

```
MP, EX, 2, EMVE_R           !Material Viscoelastico
MP, PRXY, 2, POIMVE
MP, DENS, 2, DMVE
*DIM,tabela, TABLE, n_freq/3, 2, 1, FREQ
*TREAD, tabela, E_comp, cvs,, 1
```

```

*DIM,vetor,ARRAY,n_freq,3
*vfun,vetor(1,1),copy,tabela(0,0)      !Move a coluna para direita
*vfun,vetor(1,2),copy,tabela(0,1)      !Move a coluna para direita
*vfun,vetor(1,3),copy,tabela(0,2)      !Move a coluna para direita
TB,prony,2,,,Experimental               !Criando a tabela de prony experimental
TB, EXPE, 2, , n_freq, EMODULUS         !Definindo dados experimentais como E
*do, uu, 1, n_freq, 1
TBPT, DEFI, vetor(uu,1) , vetor(uu,2), vetor(uu,3)    ! Alocando dados exp
*ENDDO

```

APÊNDICE 2 – CONCENTRAÇÃO DA RIGIDEZ DINÂMICA DO SISTEMA AUXILIAR EM UM ÚNICO PONTO DO SISTEMA PRIMÁRIO

Neste apêndice será estudada uma metodologia para aplicar toda a rigidez dinâmica equivalente do sistema auxiliar em apenas um único ponto do sistema primário. A rigidez dinâmica equivalente na base do modelo em elementos finitos do sistema auxiliar $K_{beq}(\Omega)$ é definida pela equação 48, dada por:

$$K_{beq}(\Omega) = \begin{bmatrix} [K_{eq_1}] & & & 0 \\ & [K_{eq_2}] & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & [K_{eq_j}] \end{bmatrix}, \quad (64)$$

onde K_{eq_j} é a matriz de rigidez dinâmica equivalente do j -ésimo nó inserido na linha da base. Nos sistemas compostos analisados neste trabalho, as malhas dos SPs foram construídas de forma que existisse um nó do SP no mesmo local dos nós na base do SA. Dessa forma, as matrizes K_{eq_j} podem ser inseridas nas equações de movimento do SC. Entretanto, além de dispendiosa, essa abordagem pode oferecer limitações aos modelos de SP, especialmente caso os parâmetros modais não provenham de análises por EF.

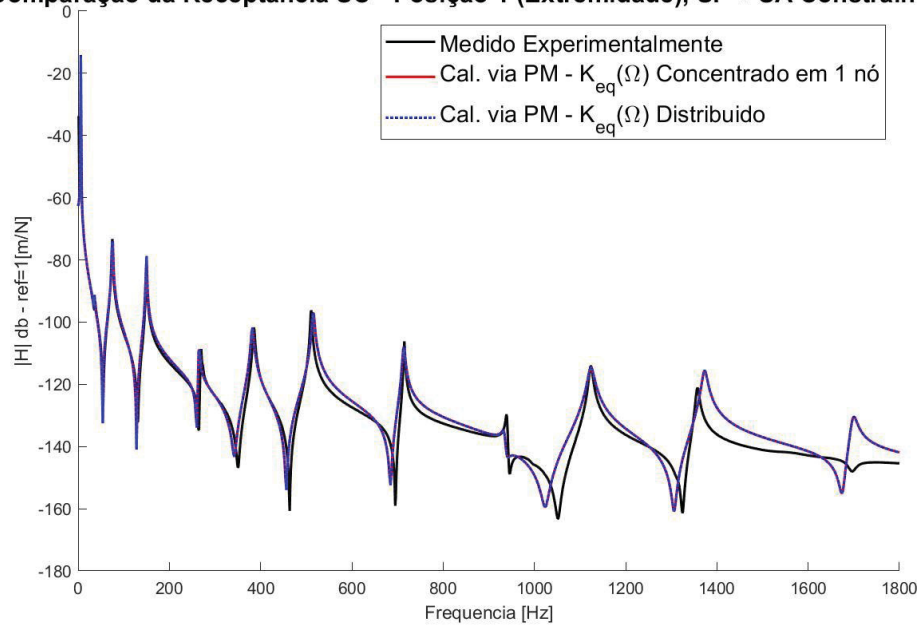
Dessa forma, propõe-se a utilização da matriz concentrada de rigidez equivalente, definida por:

$$\tilde{K}_{eq_c}(\Omega) = \sum_{i=1}^j K_{eq_i}, \quad (65)$$

sendo $\tilde{K}_{eq_c}(\Omega)$ uma matriz de grau 6 e contém as informações de todos os nós da base do SA, tanto de deslocamento quanto angular. Dessa forma, toda a rigidez dinâmica equivalente do SA pode ser inserida em apenas um ponto.

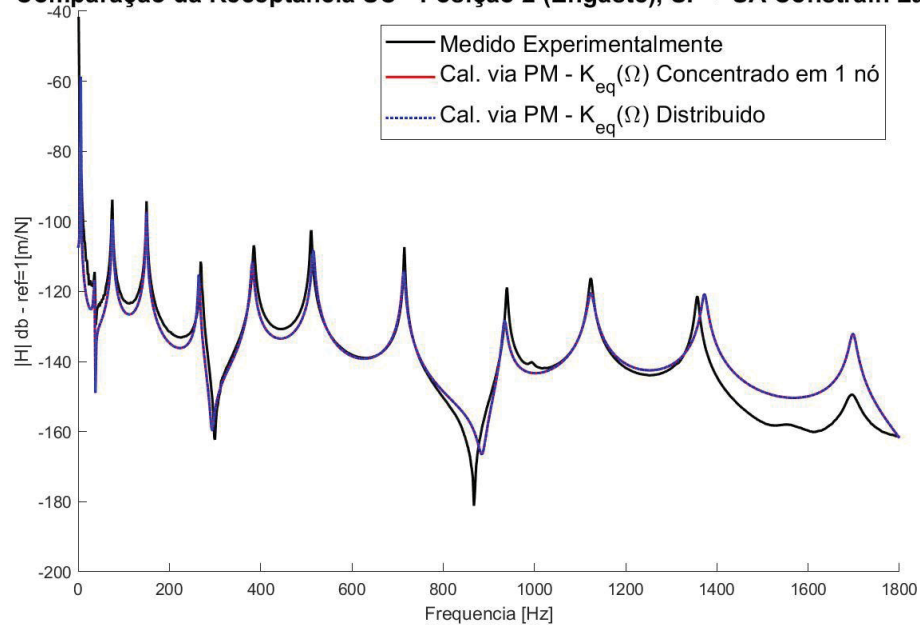
Aplicando essa abordagem para os sistemas descritos no Capítulo 4.2, no qual o SA é uma viga do tipo *constrained layer* com material viscoelástico, temos as respostas do sistema composto no ponto 1 e 2, dispostos nas FIGURAS 52 e 53 respectivamente.

FIGURA 52 – COMPARAÇÃO DA RESPOSTA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.

Comparação da Receptância SC - Posição 1 (Extremidade), SP + SA Constrain Layer

FONTE: O autor (2021).

FIGURA 53 – COMPARAÇÃO DA RESPOSTA DO SC – RECEPTÂNCIA NO PONTO 1.

Comparação da Receptância SC - Posição 2 (Engaste), SP + SA Constrain Layer

FONTE: O autor (2021).

As curvas de resposta dos dois métodos de aplicação da rigidez $K_{beq}(\Omega)$ estão sobrepostas. Este resultado indica que a simplificação para concentrar a rigidez

dinâmica na base em um único ponto do SP não possui efeitos negativos sobre a resposta do SC calculada pelo modelo.

Além disso, a concentração da rigidez dinâmica do SA em apenas um único ponto facilita a apresentação dos resultados. A princípio, o SA possui uma rigidez dinâmica equivalente para cada GL de cada nó na linha da base. Para a malha utilizada, isso resulta em 9 curvas para cada GL. A avaliação e apresentação dessas curvas se mostra convoluta e dispendiosa. Sendo assim, concentrar estas curvas em apenas 1 ponto facilita a análise do SA. Por exemplo, os gráficos de rigidez dinâmica na base apresentados na FIGURA 45 foram construídos utilizando essa simplificação.

APÊNDICE 3 – ESTUDO SOBRE O AMORTECIMENTO NO SISTEMA AUXILIAR DO TIPO *CONSTRAINED LAYER*

A viga do tipo *constrained layer* proposta é de um formato geral, sendo suas dimensões, formato e configuração escolhidas de forma a apresentar um sistema qualquer. Dessa forma, o sistema estudado não apresenta elevado fator de amortecimento.

Entretanto, para casos de controle de vibrações, dependendo das características do sistema primário, muitas vezes um elevado fator de amortecimento é essencial. Neste anexo são consideradas duas formas para se elevar o fator de amortecimento presente na viga de tipo *constrained layer*, sendo estas:

- Estender a camada viscoelástica até a base da viga, região de maior deformação (FIGURA 54, TABELA 7)
- Aumentar a espessura da camada viscoelástica e a rigidez da viga constritora, elevando sua espessura ((FIGURA 54, TABELA 8)

TABELA 7 – DIMENSÕES DO SISTEMA AUXILIAR – EXTENSÃO DO MV

Dimensão	<i>l</i>	<i>b</i>	<i>h_b</i>	<i>h_{mv}</i>	<i>l_{cl}</i>	<i>h_{cl}</i>	<i>h_{ms}</i>
Valor [mm]	250	25,4	6,35	4,2	187,5	3,18	6,35

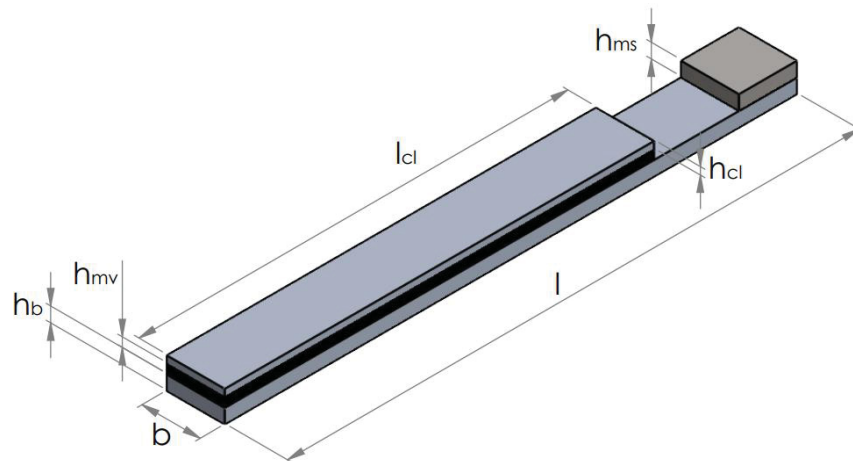
FONTE: O autor (2021).

TABELA 8 – DIMENSÕES DO SISTEMA AUXILIAR – EXTENSÃO E AUMENTO DA ESPESSURA MV E CL

Dimensão	<i>l</i>	<i>b</i>	<i>h_b</i>	<i>h_{mv}</i>	<i>l_{cl}</i>	<i>h_{cl}</i>	<i>h_{ms}</i>
Valor [mm]	250	25,4	6,35	8	187,5	8	6,35

FONTE: O autor (2021).

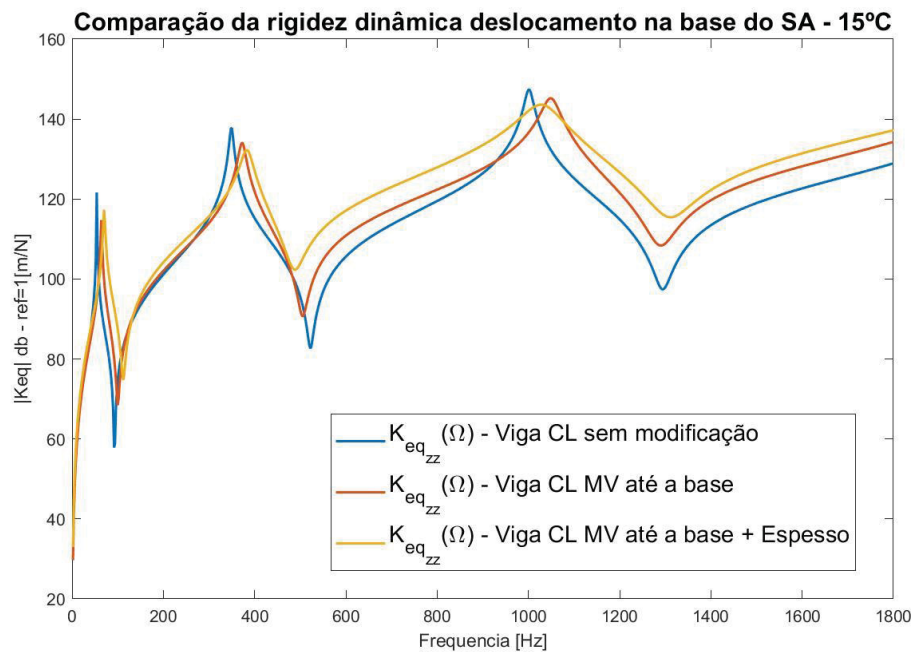
FIGURA 54 – MODELO DO SISTEMA AUXILIAR – CL ESTENDIDA ATÉ A BASE DO SA.



FONTE: O autor (2021).

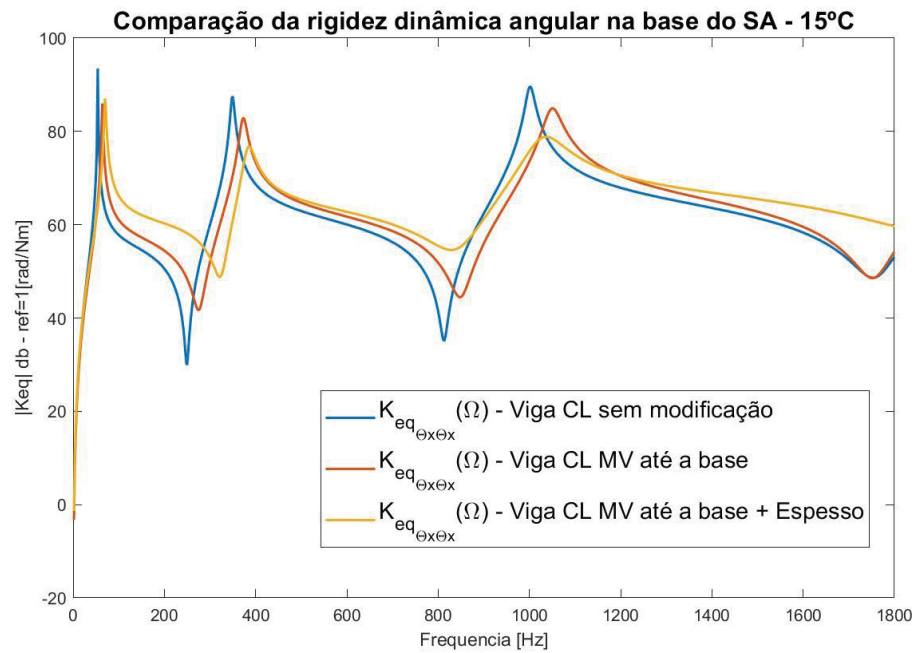
As curvas de rigidez dinâmica equivalente na base para estes sistemas propostos estão apresentadas nas FIGURAS 55 e 56.

FIGURA 55 – RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE DO SISTEMA AUXILIAR.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 56 – RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE DO SISTEMA AUXILIAR.



FONTE: O autor (2021).

Nota-se que ambas as curvas possuem maior amortecimento. Além dessas modificações, a utilização de MVs com diferentes propriedades também pode ser uma abordagem para aumentar o amortecimento destes sistemas.

APÊNDICE 4 – COMPARAÇÃO ENTRE DOIS MÉTODOS PARA CÁLCULO DA RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE PARA SISTEMAS AUXILIARES DE MGL

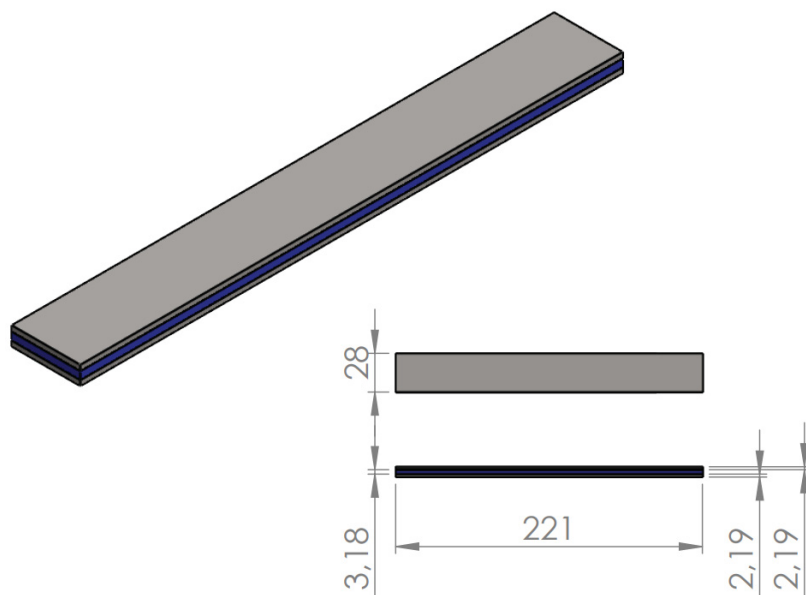
Para efeito de comparação, a metodologia proposta para o cálculo da rigidez dinâmica na base foi comparada com a metodologia utilizada na Tese de Doutorado de Silva (2019), e aplicada ao sistema composto proposto pela autora.

O sistema primário constituído de uma viga em aço 1020 engastada livre foi modelado seguindo as descrições da autora (SILVA, 2019), assim como o modelo do sistema auxiliar do tipo viga sanduíche.

A metodologia descrita no Capítulo 4 foi utilizada para obter a rigidez na base do sistema auxiliar. O sistema primário em questão é uma viga engastada-livre de aço e o sistema auxiliar é uma viga do tipo sanduíche com material viscoelástico (apresentado na FIGURA 57).

A comparação das rigidezes dinâmicas equivalentes na base de ambas as metodologias analisadas é apresentada na FIGURA 58, e uma aproximação para a faixa de frequência de 0-600Hz é apresentada na FIGURA 59. As rigidezes cruzadas foram omitidas para aprimorar a visibilidade.

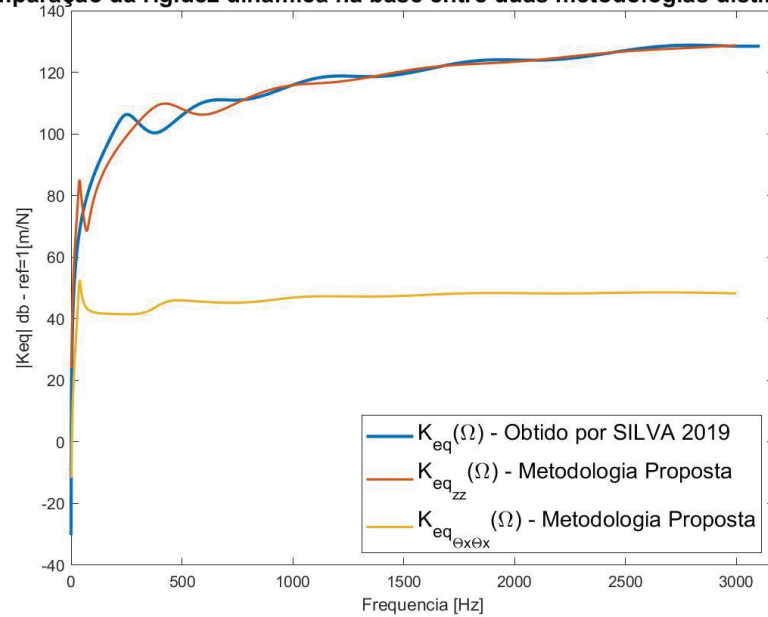
FIGURA 57 – MODELO E DIMENSÕES DO SA.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 58 – RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE DO SISTEMA AUXILIAR - COMPARAÇÃO.

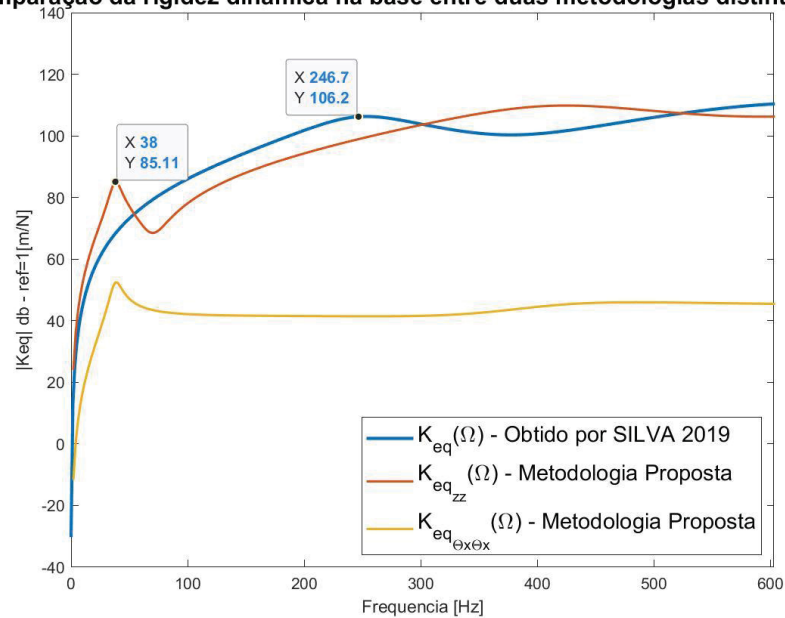
Comparação da rigidez dinâmica na base entre duas metodologias distintas - 25



FONTE: O autor (2021). A curva em azul foi obtida por SILVA 2019.

FIGURA 59 – RIGIDEZ DINÂMICA NA BASE DO SISTEMA AUXILIAR – COMPARAÇÃO (APROXIMAÇÃO).

Comparação da rigidez dinâmica na base entre duas metodologias distintas - 25

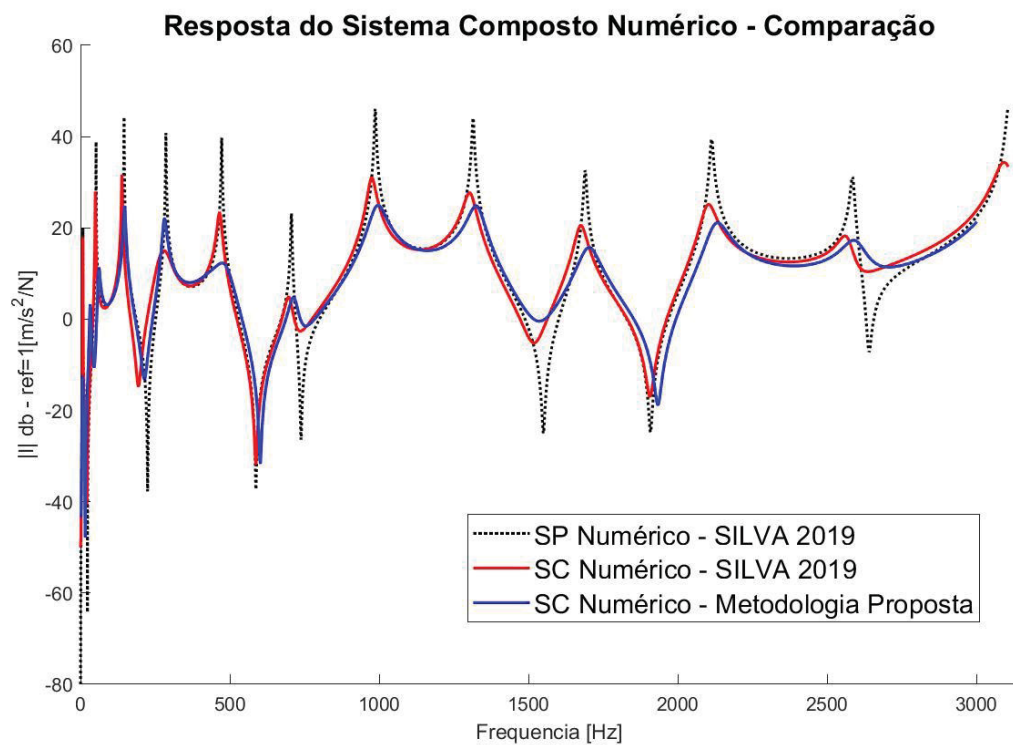


FONTE: O autor (2021). A curva em azul foi obtida por SILVA 2019.

Analisando para uma faixa de frequência menor, a diferença entre as metodologias fica mais evidente. Pode-se verificar um pico de rigidez dinâmica em 38 Hz na metodologia proposta neste trabalho. Entretanto, de forma geral, ambas as curvas estão em concordância.

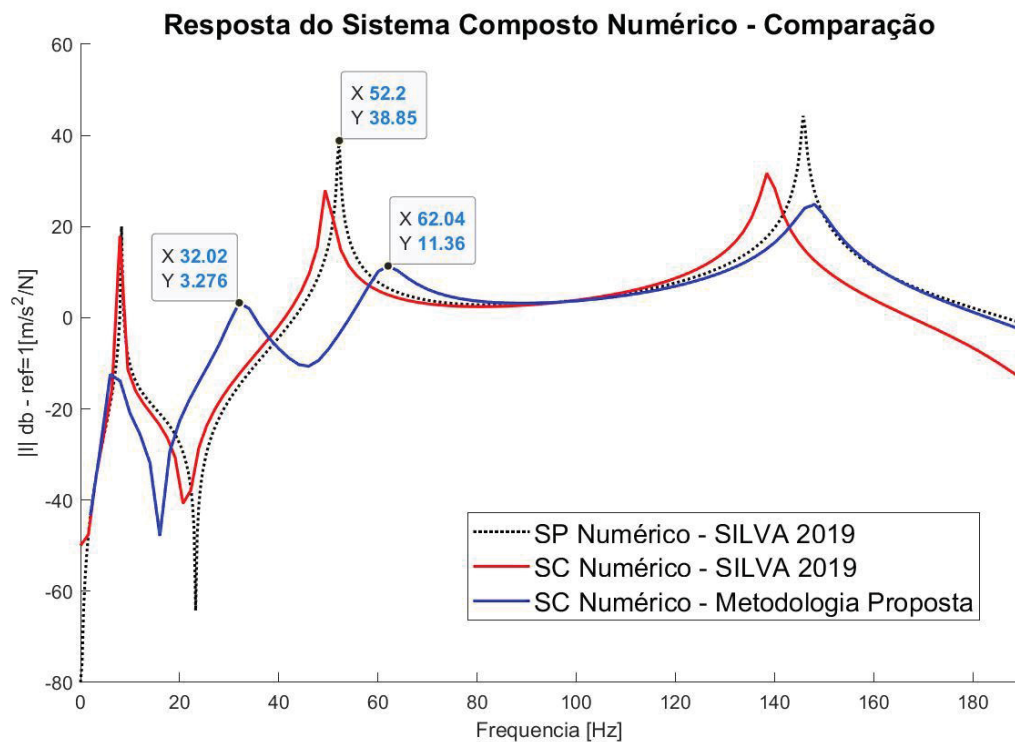
A resposta do sistema composto, comparando os resultados obtidos por Silva (2019) (curva em vermelho) e obtidos pela metodologia proposta neste trabalho (curva de em azul) está apresentada na FIGURA 60, com uma aproximação na FIGURA 61.

FIGURA 60 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC (INERTÂNCIA) – COMPARAÇÃO ENTRE METODOLOGIAS.



FONTE: O autor (2021). A curva tracejada e em vermelho foram fornecidas por SILVA 2019.

FIGURA 61 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO SC (INERTÂNCIA) – COMPARAÇÃO ENTRE METODOLOGIAS (APROXIMAÇÃO).



FONTE: O autor (2021). A curva tracejada e em vermelho foram fornecidas por SILVA 2019.

De maneira geral, para o sistema avaliado por Silva (2019), as duas metodologias apresentam resultados numéricos coerentes. A maior dissimilaridade encontra-se na região do pico de rigidez dinâmica na base, onde a metodologia proposta resulta em dois picos de ressonância na resposta do sistema composto, nas regiões de 32 e 62 Hz.

Sendo assim, a metodologia proposta se apresenta mais robusta em caracterizar o comportamento de sistemas compostos considerando o acoplamento dos graus de liberdade translacionais e angulares.

ANEXO 1 – PROPRIEDADES DINÂMICAS DA BORRACHA BUTÍLICA BT 806/553

ELASTÔMERO BT-806/55 – PROPRIEDADES DINÂMICAS

O modelo adotado é

$$\bar{E}(\omega, T) = \frac{E_L + E_H b_0 [i\alpha_T(T)\omega]^\beta}{1 + b_0 [i\alpha_T(T)\omega]^\beta}$$

onde α_T é dado por

$$\log_{10} [\alpha_T(T)] = \frac{-\theta_1(T - T_0)}{\theta_2 + (T - T_0)}$$

sendo

$$\theta_1 = 7,98, \theta_2 = 81,7, E_L = 7,21 \times 10^6, E_H = 4,57 \times 10^8, \beta = 0,417, b_0 = 0,0223 \text{ e } T_0 = 243.$$

O nomograma correspondente é apresentado abaixo.

