

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANDERSON LANGONE SILVA

ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE UM NEUTRALIZADOR DE VIBRAÇÕES
VISCOELÁSTICO PARA SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES COM MÚLTIPLOS
GRAUS DE LIBERDADE

CURITIBA

2021

ANDERSON LANGONE SILVA

ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE UM NEUTRALIZADOR DE VIBRAÇÕES
VISCOELÁSTICO PARA SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES COM MÚLTIPLOS
GRAUS DE LIBERDADE

Dissertação apresentada como requisito parcial
à obtenção do grau de Mestre em Engenharia
Mecânica, no Curso de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, da
Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof Carlos Alberto Bavastri, DSc
Coorientador: Prof Marcus V. M. Varanis, DSc

CURITIBA

2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S586a

Silva, Anderson Langone

Análise numérica e experimental de um neutralizador de vibrações viscoelástico para sistemas mecânicos não lineares com múltiplos graus de liberdade [recurso eletrônico] / Anderson Langone Silva. – Curitiba, 2021.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2021.

Orientador: Carlos Alberto Bavastrí – Coorientador: Marcus V. M. Varanis.

1. Sistemas não-lineares. 2. Análise numérica. 3. Vibração. 4. Materiais viscoelásticos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Bavastrí, Carlos Alberto. III. Varanis, Marcus V. M.. IV. Título.

CDD: 629.8

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ANDERSON LANGONE SILVA** intitulada: **ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DE UM NEUTRALIZADOR DE VIBRAÇÕES VISCOELÁSTICO PARA SISTEMAS MECÂNICOS NÃO-LINEARES COM MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE**, sob orientação do Prof. Dr. CARLOS ALBERTO BAVASTRI, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 20 de Agosto de 2021.



CARLOS ALBERTO BAVASTRI
Presidente da Banca Examinadora



JOSÉ MANOEL BALTHAZAR

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO)



EDUARDO MÁRCIO DE OLIVEIRA LOPES

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico esta dissertação aos meus pais, que me auxiliaram e apoiaram durante o seu desenvolvimento, à minha noiva, que me apoiou durante esta jornada, e a todos que, de alguma forma, me incentivaram e contribuíram para o resultado final aqui apresentado.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri, por sua excelente orientação e disposição em compartilhar seu vasto conhecimento. Pela paciência e empenho dispensados à mim e meus colegas.

Ao meu coorientador Prof. Dr. Marcus Varanis, que me orienta desde a graduação, transmitindo valiosos ensinamentos na área de processamento de sinais, pelo companheirismo e dedicação à este trabalho.

Ao Prof. Dr. Eduardo M. O. Lopes, pela sua participação na banca avaliadora e por diversas valiosas contribuições dadas para o desenvolvimento deste trabalho e seu aprimoramento.

Ao Prof. Dr. José Manoel Balthazar, pela sua participação na banca avaliadora e por acompanhar o trabalho atentamente, sempre nos disponibilizando informações detalhadas sobre modelos matemáticos e fenômenos não lineares.

Ao Prof. Dr. Eduardo Batista, que disponibilizou o sistema para a medição da rotação dos motores e auxiliou na execução de vários experimentos. Certamente os resultados não seriam os mesmos se não houvessem os dados de rotação dos motores.

Ao Prof. Dr. Samuel da Silva, por ter participado da banca avaliadora do exame de qualificação desta dissertação. Suas contribuições foram deveras importantes para o desenvolvimento desta dissertação e obtenção dos resultados finais.

Aos colegas do Laboratório de Vibrações e Som (LAVIBS), que me acolheram na UFPR e me auxiliaram em diversas etapas deste trabalho, dentre os quais não poderia deixar de citar: Eduardo Fantin, Frederico Jahnert, José Eduardo Gubaua, Maurizio Barghouthi, Samuel Kluthcovsky, Vinicius Consolin Smarzarro, Thiago da Silva e Thiago Lopes Quevedo. Obrigado pelas conversas e apoio!

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PGMEC-UFPR) por propiciar as condições necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

À todos que de alguma forma incentivaram e contribuíram para a realização desta dissertação.

RESUMO

O controle passivo de vibrações por meio de Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos (NDV) tem apresentado excelentes resultados no controle em banda larga de frequências. Estudos previamente desenvolvidos mostram que sua aplicação em sistemas não lineares causa a linearização dos mesmos. Neste trabalho é realizada uma investigação acerca do efeito Sommerfeld de forma numérica e experimental, em sistemas lineares e não lineares, com o objetivo de suprimir a ocorrência do fenômeno e de outras características não lineares. Seu controle é realizado por meio da adição de Neutralizadores Dinâmicos (ND), projetados de forma ótima por meio de uma metodologia proposta, baseada em Parâmetros Equivalentes Generalizados (PEG). Os estudos são realizados em sistemas compostos por uma viga, descrita pelo modelo de Euler-Bernoulli, com um motor de corrente contínua não ideal acoplado. As equações governantes do movimento do sistema são obtidas por meio do método dos modos assumidos, onde se considera que o sistema é submetido a grandes deflexões, gerando um modelo matemático não linear. São projetados diferentes NDs, considerando o sistema primário linear e não linear. O desempenho dos dispositivos projetados é avaliado sob as diferentes considerações, verificando-se sua influência no sistema não linear com múltiplos graus de liberdade. Os resultados mostram que a utilização de NDs é eficiente quanto ao controle do sistema não linear, mesmo quando o sistema primário é considerado linear no projeto do ND.

Palavras-chaves: Sistemas não lineares. Não linearidade geométrica. Efeito Sommerfeld. Controle passivo. Neutralizador dinâmico viscoelástico.

ABSTRACT

Passive vibration control through Viscoelastic Dynamic Neutralizers (NDV) has shown excellent results in the broadband frequency control. Previously developed studies shown that its application in nonlinear systems causes their linearization. In this work an investigation is carried out on the Sommerfeld effect in a numerical and experimental way, in linear and nonlinear systems, with the objective of suppressing the occurrence of the phenomenon and other nonlinear characteristics. Its control is performed by adding Dynamic Neutralizers (DN), optimally designed using a proposed methodology, based on Generalized Equivalent Parameters (GEP). The studies are carried out in systems composed of a beam modeled by the Euler-Bernoulli model with a nonideal DC motor coupled. The motion governing equations for the system are obtained through the method of the assumed modes, where it is considered that the system is subjected to large deflections, resulting on a nonlinear mathematical model. Different DN are designed considering the primary system linear and nonlinear. The performance of the devices are evaluated under different considerations, evaluating their influence on the nonlinear system with multiple degrees of freedom. The results show that the use of DN is efficient in controlling the nonlinear system, even when the primary system is considered linear in the DN design.

Key-words: Nonlinear systems. Geometric nonlinearity. Sommerfeld Effect. Passive control. Viscoelastic dynamic neutralizer.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| FIGURA 1 – Sistema composto e equivalente obtido por meio de parâmetros equivalentes generalizados, PEG: 1a Sistema composto por uma viga e um sistema massa-mola e 1b sistema equivalente, obtido por meio de PEG. | 21 |
| FIGURA 2 – 2a Viga biengastada em condição de equilíbrio e 2b sob grandes deflexões. | 24 |
| FIGURA 3 – Sistema viscoso com 1 GDL: 3a Representação física e 3b diagrama de corpo livre. | 28 |
| FIGURA 4 – Sistema viscoelástico com 1 GDL: 4a Representação física e 4b diagrama de corpo livre. | 29 |
| FIGURA 5 – Sistema em análise: 5a Sistema completo, motor apoiado sobre uma viga engastada-livre, e 5b diagrama de corpo livre da massa desbalanceada. | 36 |
| FIGURA 6 – Sistema de 1 GDL com ND acoplado: 6a Sistema físico, 6b Sistema equivalente obtido por PEG utilizando $k_{eq}(\Omega)$ e 6c Sistema equivalente obtido por PEG utilizando $m_{eq}(\Omega)$ e $c_{eq}(\Omega)$ | 38 |
| FIGURA 7 – Fluxograma do processo realizado para a obtenção das CRF do modelo. | 43 |
| FIGURA 8 – Fluxograma do processo proposto para a otimização de NDs para sistemas não lineares. | 44 |
| FIGURA 9 – Sistema eletro-mecânico utilizado nos experimentos do efeito Sommerfeld. | 45 |
| FIGURA 10 – Aparato experimental para a instrumentação do sistema durante a operação do motor. | 46 |
| FIGURA 11 – FRF do sistema linear equivalente, $k = 300$ e $s = 50$ mm. | 48 |
| FIGURA 12 – Respostas do sistema não linear: 12a Curvas amplitude-frequência e 12b curva de resposta na frequência, CRF. | 49 |
| FIGURA 13 – CRF do sistema primário e composto, com os dois neutralizadores propostos. | 50 |
| FIGURA 14 – CRF do sistema não linear com controle no primeiro modo: (a) Controle com ND dinâmico projetado para o sistema linear e (b) controle com ND dinâmico projetado para o sistema não linear. | 50 |
| FIGURA 15 – CRF do sistema composto com os NDs projetados para o controle do segundo modo. | 51 |

| | |
|--|----|
| FIGURA 16 – CRF do sistema não linear com controle no segundo modo: (a) Controle com ND dinâmico projetado para o sistema linear e (b) controle com ND dinâmico projetado para o sistema não linear. | 52 |
| FIGURA 17 – CRF do sistema com ND projetado para o controle simultâneo dos dois primeiros modos. | 53 |
| FIGURA 18 – CRF do sistema não linear com controle simultâneo nos dois primeiros modos: (a) Controle com ND dinâmico projetado para o sistema linear e (b) controle com ND dinâmico projetado para o sistema não linear. | 53 |
| FIGURA 19 – Resultados numéricos para o sistema não linear durante a ocorrência do efeito Sommerfeld: (a) Sinal temporal de deslocamento, (b) sinal temporal de rotação do motor e (c) WSST do sinal de deslocamento. | 56 |
| FIGURA 20 – Resultados numéricos para o sistema não linear com controle passivo: (a) Sinal temporal de deslocamento, (b) sinal temporal de rotação do motor e (c) WSST do sinal de deslocamento. | 57 |
| FIGURA 21 – WSST dos sinais de deslocamento para o sistema não linear controlado: (a) Controle com o ND projetado para o sistema linear equivalente e (b) com o ND projetado para o sistema não linear. | 58 |
| FIGURA 22 – Função de resposta em frequência do sistema ensaiado, obtida com excitação a 140 mm e medição da resposta a 520 mm do engaste. | 59 |
| FIGURA 23 – Resultados experimentais: Sinais temporais de aceleração, 23a, e de rotação do motor, 23b, e 23c WSST do sinal de aceleração. | 60 |
| FIGURA 24 – Resultados numéricos: Sinais temporais de aceleração, 24a, rotação do motor, 24b, e 24c WSST do sinal de aceleração. | 61 |
| FIGURA 25 – NDV projetado para o controle do sistema: 25a Dispositivo desenvolvido e 25b dispositivo acoplado ao sistema primário. | 62 |
| FIGURA 26 – Resultados experimentais obtidos com e sem o controle passivo. | 62 |
| FIGURA 27 – FRF do sistema composto (sistema eletromecânico com NDV acoplado), obtida com excitação em 140 mm e medição da resposta a 520 mm do engaste. | 63 |
| FIGURA 28 – Resultados experimentais do sistema composto: Sinais temporais de aceleração, 28a, e de rotação do motor, 28b, e 28c WSST do sinal de aceleração. | 64 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| TABELA 1 – Parâmetros ótimos obtidos nas otimizações dos NDs nas abordagens propostas. | 54 |
| TABELA 2 – Resultados obtidos nas abordagens realizadas para o controle do sistema não linear. | 55 |
| TABELA 3 – Fatores de amortecimento aproximados para os modelos matemáticos utilizados. | 59 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CRF Curva resposta na frequência

DC *Direct current* (corrente contínua)

FDM *Fused deposition modeling* (modelagem por deposição de material fundido)

FFT *Fast Fourier transform* (transformada rápida de Fourier)

FRF Função resposta em frequência

GDL Grau de liberdade

MEF Método dos elementos finitos

ND Neutralizador dinâmico

NDV Neutralizador dinâmico viscoelástico

PEG Parâmetros equivalentes generalizados

TONL Técnicas de otimização não linear

TPF Teoria dos pontos fixos

WSST *Wavelet synchrosqueezed transform*

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|------------------|---|
| m_a | Massa do ND de 1 GDL |
| k_a | Rigidez do ND de 1 GDL |
| c_a | Coefficiente de amortecimento do ND de 1 GDL |
| $K_b(\Omega)$ | Rigidez dinâmica na base do sistema |
| Ω_a | Frequência natural do ND isolado |
| ϵ | Frequência adimensional, com relação à Ω_a |
| ξ_a | Fator de amortecimento do ND |
| $m_{eq}(\Omega)$ | Massa equivalente do ND |
| $c_{eq}(\Omega)$ | Amortecimento equivalente do ND |
| $G_c(\Omega)$ | Módulo de cisalhamento complexo do material viscoelástico, função da frequência |
| G_0 | Valor assintótico de $G_c(\Omega)$, quando Ω tende a 0 |
| G_∞ | Valor assintótico de $G_c(\Omega)$, quando Ω tende a ∞ |
| $b_{1,\alpha}$ | Variáveis características do material viscoelástico |
| L | Fator de forma do elemento viscoelástico |
| A | Área do elemento viscoelástico sob cisalhamento |
| h | Espessura do elemento viscoelástico |
| $\eta(\Omega)$ | Fator de perda do material viscoelástico, função de Ω |
| T | Energia cinética de um sistema mecânico |
| V | Energia potencial de um sistema mecânico |
| $w(x, t)$ | Deslocamento transversal de uma viga contínua, função de t e x |
| $\phi(x)$ | Funções de teste para o método dos modos assumidos |
| $q(t)$ | Coordenadas generalizadas do sistema para o método dos modos assumidos |

| | |
|----------------------|--|
| m_c | Massa concentrada |
| x_m | Localização da massa concentrada na viga |
| l | Comprimento da viga |
| ρ | Densidade do material da viga |
| k_c | Rigidez de uma mola pontualmente acoplada ao sistema |
| x_k | Localização da mola concentrada na viga |
| E | Módulo de elasticidade do material da viga |
| I | Momento de inércia da seção transversal da viga |
| $\bar{\delta}W_f(t)$ | Trabalho das forças virtuais externas ao sistema |
| $f(x, t)$ | Força distribuída, função de x e t |
| $f_c(t)$ | Força concentrada, função de t |
| x_f | Ponto de aplicação da força externa concentrada |
| $\bar{\delta}W_c(t)$ | Trabalho das forças virtuais referentes ao amortecimento |
| c_d | Coeficiente de amortecimento distribuído |
| c_c | Coeficiente de amortecimento pontual |
| x_c | Ponto de acoplamento do amortecedor pontual |
| $\bar{\delta}W(t)$ | Trabalho total das forças virtuais |
| M | Matriz de massa |
| C | Matriz de amortecimento |
| K | Matriz de rigidez |
| Q | Vetor de forças externas |
| M_f | Momento fletor resultante na viga |
| κ | Curvatura da viga |
| N | Força normal resultante n seção transversal da viga |
| ϵ | Deformação axial resultante na viga |
| $u(x)$ | Deslocamento axial da viga, função de x |

| | |
|----------------------|---|
| V_{axial} | Energia potencial referente à deformação axial |
| Ψ | Autovetores das matrizes M e K ortonormalizados pela matriz de massa. Modos de vibrar |
| Λ | Matriz de autovalores do sistema |
| I_t | Inércia total do rotor não ideal |
| m_u | Massa desbalanceada do motor não ideal |
| x_m | Localização do motor na viga |
| e | Raio de desbalanceamento do rotor |
| θ | Ângulo formado pela massa desbalanceada com o eixo x |
| $T_m(t)$ | Torque instantâneo do motor, função de t |
| T_0 | Torque máximo do motor DC |
| Ω_f | Velocidade final do motor, em rad/s |
| $\theta(t)$ | Posição angular do rotor, em rad/s , função de t |
| $M_{eq}(\Omega)$ | Matriz de massa equivalente generalizada descrita no sistema primário, função de Ω |
| $C_{eq}(\Omega)$ | Matriz de amortecimento equivalente generalizado descrita no sistema primário, função de Ω |
| \mathbf{N}_p | Vetor de forças de restauração não lineares do sistema com múltiplos GDL |
| $\mathcal{F}(\cdot)$ | Transformada de Fourier |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 17 |
| 1.1 | OBJETIVOS | 18 |
| 1.1.1 | Objetivo geral | 18 |
| 1.1.2 | Objetivos específicos | 19 |
| 1.2 | ESTRUTURA DO TEXTO | 19 |
| 2 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 20 |
| 2.1 | CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES | 20 |
| 2.2 | SISTEMAS NÃO LINEARES | 23 |
| 2.2.1 | Efeito Sommerfeld | 25 |
| 3 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 27 |
| 3.1 | PARÂMETROS EQUIVALENTES GENERALIZADOS - PEG | 27 |
| 3.1.1 | Determinação dos PEG para um neutralizador viscoso | 27 |
| 3.1.2 | Determinação dos PEG para um neutralizador viscoelástico | 29 |
| 3.2 | MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS | 31 |
| 3.2.1 | Método dos modos assumidos aplicado a uma viga sob pequenas deflexões | 31 |
| 3.2.2 | Modos assumidos considerando a deformação axial | 33 |
| 3.2.3 | Motor não ideal acoplado a uma viga | 36 |
| 3.3 | ACOPLAMENTO DE NDS A SISTEMAS DISCRETOS UTILIZANDO A METODOLOGIA DE PEG | 37 |
| 3.3.1 | Acoplamento de NDs a sistemas modelados pelo método dos modos assumidos | 39 |
| 4 | METODOLOGIA | 41 |
| 4.1 | PROJETO ÓTIMO DE NDS | 41 |
| 4.2 | MODOS ASSUMIDOS | 42 |
| 4.2.1 | Obtenção da CRF para sistemas não lineares | 42 |
| 4.2.2 | Projeto ótimo de NDs para sistemas não lineares com múltiplos GDL | 43 |
| 4.3 | ABORDAGEM EXPERIMENTAL DO EFEITO SOMMERFELD | 44 |
| 5 | RESULTADOS | 48 |
| 5.1 | MODOS ASSUMIDOS | 48 |
| 5.1.1 | Resposta do sistema não linear | 48 |
| 5.1.2 | Controle ótimo do primeiro modo de vibrar | 49 |
| 5.1.3 | Controle ótimo do segundo modo de vibrar | 51 |
| 5.1.4 | Controle ótimo simultâneo dos dois primeiros modos de vibrar | 52 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| | | 16 |
| 5.1.5 | Análise dos resultados | 53 |
| 5.2 | ANÁLISE NUMÉRICA DO EFEITO SOMMERFELD EM UM SISTEMA NÃO LINEAR CONTROLADO POR ND | 55 |
| 5.3 | IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE DO EFEITO SOMMERFELD: ABORDA- GEM EXPERIMENTAL | 58 |
| 6 | CONCLUSÕES | 65 |
| 6.1 | TRABALHOS FUTUROS | 66 |
| | REFERÊNCIAS | 68 |

1 INTRODUÇÃO

Sistemas mecânicos sujeitos à cargas dinâmicas vibram em maior ou menor intensidade, dependendo de seus parâmetros físicos. A maior parte das estruturas e equipamentos apresentam vibrações de pequenas amplitudes, logo, é comum descrevê-los por meio de modelos lineares, o que resulta em boas aproximações.

Sob esta consideração, é possível resolver grande parte dos problemas de engenharia. Porém, a crescente necessidade de gerar sistemas mais leves, seja por requisitos técnicos ou financeiros, gera estruturas cada vez mais flexíveis, e, com isso, os sistemas passam a responder com grandes amplitudes de vibração, provocando não linearidades.

Diferentemente dos sistemas lineares, os não lineares podem apresentar respostas dos mais diversos tipos, inclusive não harmônicas e caóticas, o que muitas vezes é indesejado na aplicação do sistema. Portanto, é de suma importância considerar as não linearidades envolvidas no sistema para prever suas respostas e desenvolver metodologias para o controle das grandes amplitudes de vibração.

Diferentes técnicas podem ser empregadas para o controle de sistemas não lineares, sendo que muito tem sido estudado sobre o controle ativo de vibrações em sistemas não lineares. Algumas técnicas de controle vêm apresentando grande eficácia, como em Beltrán-Carbajal e Silva-Navarro (2014), onde aplicam-se técnicas de controle ativo para o controle de vibrações multifrequência em um sistema do tipo Duffing, e em Tuset e Balthazar (2013), no qual são utilizadas as técnicas *nonlinear feedforward control* e *state feedback control* com o objetivo de obter uma trajetória pré-definida no espaço de fase.

Porém, em diversas ocasiões, o controle ativo não é viável, seja devido à ausência de fontes de energia ou mesmo por requisitos de projeto, sendo necessário recorrer às técnicas de controle passivo. Nesta abordagem, são desenvolvidos pequenos dispositivos que, quando acoplados a um sistema dito primário, reduzem a vibração do sistema em uma frequência ou em uma faixa de frequências, por meio da adição de uma elevada impedância mecânica ao sistema. Tais dispositivos são chamados de Neutralizadores Dinâmicos, ND.

Em Snowdon (1959), propõe-se o uso de materiais viscoelásticos para a elaboração de NDs para o controle de vibrações. Em Bavastri (1997), é proposto o uso de materiais viscoelásticos para o desenvolvimento de NDs, os quais são projetados para o controle de vibrações em uma ampla faixa de frequências por meio de técnicas de otimização não-linear, TONL. Tais materiais, por possuírem uma elevada capacidade

de dissipação de energia vibratória, propiciam consideráveis reduções na amplitude da resposta.

Além das aplicações no controle de sistemas lineares, foi apresentada uma metodologia, em Bronkhorst (2017), para a identificação e o projeto de um neutralizador dinâmico viscoelástico, NDV, para um sistema não linear com um grau de liberdade. Nesse estudo, o sistema primário foi modelado com rigidez cúbica devido à disposição dos elementos elásticos. Os parâmetros físicos do sistema foram estimados por meio de TONL e os parâmetros do NDV foram otimizados de forma que a função de transmissibilidade fosse minimizada. Além disso, observou-se que a inserção do NDV no sistema o linearizou, fazendo com que o sistema deixasse de exibir diferentes respostas em subida e descida.

Em Habib e Kerschen (2016), propõe-se um método para o projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos não lineares para sistemas primários também não lineares. Foi observado que o ND deve possuir sua não linearidade com o mesmo formato matemático do sistema primário, o chamado princípio da similaridade. Os resultados obtidos com a metodologia proposta são satisfatórios e coerentes com a Teoria dos Pontos Fixos.

Diversos trabalhos se concentram em propor metodologias de controle para sistemas não lineares de um grau de liberdade, porém muitas aplicações reais consistem de sistemas de múltiplos graus de liberdade. O Grupo de Pesquisa em Vibrações e Som em Sistemas Mecânicos (GVIBS), da UFPR, atua no desenvolvimento de metodologias para o projeto ótimo de NDs pra sistemas com múltiplos graus de liberdade a mais de duas décadas. Neste trabalho propõe-se uma extensão da metodologia já existente no grupo para a sua aplicação em sistemas não lineares, também com múltiplos graus de liberdade, por meio da aplicação de NDVs para o controle passivo de vibrações em sistemas não lineares com múltiplos graus de liberdade, em uma ampla faixa de frequências.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

Este trabalho tem por objetivo propor uma metodologia para o controle passivo de vibrações em sistemas não lineares com múltiplos graus de liberdade, GDL, utilizando neutralizadores dinâmicos viscoelásticos lineares, analisando-se também a eficácia do uso de ND para o controle do efeito Sommerfeld, pelas vias numéricas e experimental.

1.1.2 Objetivos específicos

O objetivo geral deste trabalho pode ser detalhado nos seguintes objetivos específicos:

- Propor um modelo não linear para o sistema em estudo;
- Obter soluções para o sistema por meio de métodos numéricos;
- Projetar NDs para o controle das características não lineares do sistema;
- Analisar numericamente a influência dos NDs na dinâmica do sistema;
- Comparar os resultados obtidos e avaliar a eficiência dos dispositivos projetados.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

Nesta seção, fez-se uma contextualização sobre os tópicos abordados neste trabalho, com a apresentação de seus objetivos. No Capítulo 2, há uma breve revisão bibliográfica, apresentando os avanços realizados quanto ao controle passivo de vibrações e a modelagem não linear de sistemas mecânicos.

Já no Capítulo 3 é apresentada a fundamentação teórica para o desenvolvimento deste trabalho, como os modelos matemáticos utilizados, baseados no método dos modos assumidos. Também se propõe uma metodologia geral para o projeto de neutralizadores, por meio da teoria dos parâmetros equivalentes generalizados, PEG.

No Capítulo 4 apresenta-se a metodologia utilizada para a realização deste trabalho, bem como os experimentos realizados. O Capítulo 5 traz os resultados obtidos e realiza-se uma breve discussão acerca dos mesmos.

No Capítulo 6 faz-se as considerações finais acerca dos resultados obtidos, assim como são destacados alguns pontos que devem ser analisados detalhadamente em trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo apresentam-se alguns dos principais estudos sobre os seguintes assuntos: neutralizadores dinâmicos de um grau de liberdade, controle passivo em banda larga de frequências e sistemas mecânicos não lineares com um ou múltiplos graus de liberdade.

2.1 CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES

Diversos métodos podem ser empregados com o objetivo de reduzir a amplitude de vibração de sistemas mecânicos, como modificações estruturais, inserção de amortecimento externo ou o uso de neutralizadores dinâmicos. As alterações estruturais ou a adição de amortecimento externo nem sempre são viáveis devido a requisitos de projeto, sendo, em muitos casos, a inserção de dispositivos secundários para o controle de vibração a opção mais factível. Tais dispositivos, chamados de neutralizadores dinâmicos, possuem pequenas dimensões e massa em comparação com o sistema primário.

Utilizando tal princípio, Den Hartog (1985) analisa os efeitos da adição de um sistema secundário de um GDL a um sistema de um GDL não amortecido, com o intuito de avaliar a redução da amplitude de vibração do sistema primário. São avaliados sistemas secundários com e sem amortecimento viscoso e conclui-se que sistemas secundários não amortecidos são extremamente eficientes para o controle de vibrações em sua frequência natural, enquanto que sistemas secundários amortecidos possibilitam a redução de vibração em uma ampla faixa de frequências.

Nesse modelo, mostra-se que dois pontos da função de resposta em frequência, FRF, do sistema composto, cuja resposta é medida no sistema primário considerado não amortecido, não se alteram, permanecendo fixos com a variação do amortecimento do sistema secundário. Matematicamente prova-se que o desempenho máximo do neutralizador é atingido quando as amplitudes dos dois pontos fixos são iguais, devido a escolha adequada da frequência natural do ND. Essa metodologia, conhecida como teoria dos pontos fixos, TPF, é a base para o projeto de neutralizadores dinâmicos para sistemas a controlar com um ou mais GDL.

Apesar da TPF apresentar ótimos resultados em sistemas com pouco amortecimento, percebe-se que no caso de sistemas primários com amortecimento considerável ocorre uma dessintonização do neutralizador, isto é, os pontos fixos não possuem a mesma amplitude. Logo, o dispositivo não apresenta desempenho máximo. Isso acontece porque a TPF é válida apenas quando o sistema primário possui amortecimento

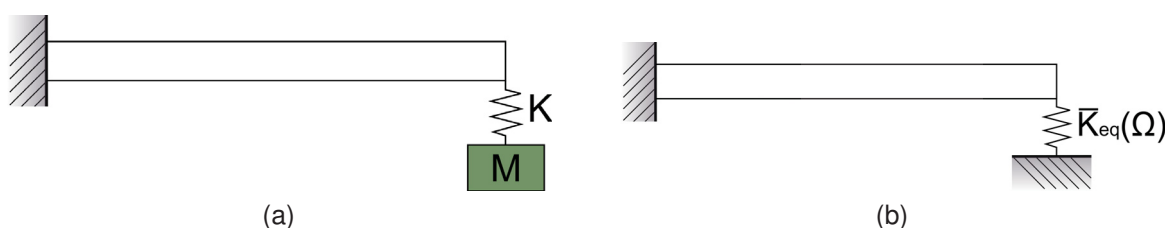
nulo.

Uma outra abordagem possível, insensível à presença de amortecimento no sistema primário, é propor um problema de otimização cujo objetivo é minimizar o ponto de máxima amplitude da FRF (BAVASTRI, 1997; PICCIRILLO; TUSSET; BALTHAZAR, 2019). Observa-se que esta metodologia obtém resultados equivalentes à TPF, resultando em picos de iguais amplitudes, independente do amortecimento do sistema a controlar.

Como mencionado, o amortecimento é fundamental para o controle passivo de vibrações em banda larga de frequências, porém a fabricação de neutralizadores viscosos com grandes fatores de amortecimento se mostra complexa, requerendo a adição de amortecedores externos. Com o objetivo de contornar tal problema, Snowdon (1959) propõe a substituição dos elementos de mola e amortecedor do neutralizador por um elemento viscoelástico. Os materiais viscoelásticos destacam-se por possuírem grandes fatores de dissipação de energia e, por isso, são adequados ao controle de vibrações em banda larga de frequências, o que, em sistemas de múltiplos GDL, propicia o controle simultâneo de diversos modos de vibrar por meio de poucos dispositivos.

O projeto de dispositivos para estruturas complexas não é trivial, uma vez que suas equações de movimento são longas, tornando a adição de diversos sistemas secundários uma tarefa árdua. Para contornar tal problema, Espíndola e Silva (1992) propõem o conceito de Parâmetros Equivalentes Generalizados, PEG, no qual o sistema composto é descrito apenas em função das coordenadas generalizadas do sistema primário. Por meio desta metodologia, um sistema vibratório qualquer é simplificado em parâmetros equivalentes que podem ser facilmente adicionados ao sistema primário, como uma mola com rigidez complexa ou uma massa e um amortecedor viscoso. Na FIGURA 1 se observa o processo realizado tomando-se como exemplo um sistema composto por uma viga com um sistema massa-mola na sua extremidade livre, FIGURA 1a, e, após a aplicação da técnica de PEG, o sistema massa-mola adicional pode ser considerado apenas como uma mola complexa ligando a extremidade da viga ao solo, FIGURA 1b, simplificando as equações de movimento do sistema composto.

FIGURA 1 – Sistema composto e equivalente obtido por meio de parâmetros equivalentes generalizados, PEG: 1a Sistema composto por uma viga e um sistema massa-mola e 1b sistema equivalente, obtido por meio de PEG.



FONTE: O autor (2020).

Essa metodologia é largamente utilizada para o projeto de neutralizadores dinâmicos dos mais diversos tipos, como neutralizadores viscosos, viscoelásticos, eletromecânicos e hidráulicos (VIEIRA, 2019; BAVASTRI et al., 2007). Em Bavastrri (1997) utiliza-se a técnica de PEG para o projeto de NDVs para sistemas complexos, com base em seus parâmetros modais, obtidos por meio do método dos elementos finitos e de respostas experimentais. Nesse trabalho os NDVs são projetados de maneira ótima por meio de TONL.

Além dos parâmetros físicos do ND, sua localização no sistema primário possui grande influência na resposta do sistema composto. Por isso alguns autores têm desenvolvido técnicas para a obtenção da posição ótima do ND no sistema primário, como Méndez, Cunha Jr e Gomes (2006) e da Silva (2005). Em Silva (2019) apresenta-se uma metodologia para o projeto de NDVs com múltiplos graus de liberdade, na qual, além de serem otimizados os parâmetros físicos do neutralizador, otimizam-se também sua posição no sistema primário e seu material.

Há também outras metodologias utilizadas para o controle de vibrações por meio do uso de materiais viscoelásticos, com aplicações na indústria automotiva e aeroespacial. Essas metodologias, bem como uma revisão quanto aos modelos de materiais viscoelásticos podem ser encontrados em Rade et al. (2019) e Wong, Fan e Cheng (2018).

Apesar dos grandes avanços realizados nesta área, grande parte da literatura se concentra no projeto de NDs para sistemas lineares, sendo que poucos trabalhos são voltados ao controle passivo de sistemas não lineares. Alguns trabalhos foram realizados neste sentido, como Bronkhorst (2017), no qual é feita a identificação de um sistema não linear cúbico e seu controle por meio de um NDV projetado de forma ótima. Como resultado, observou-se que a adição do dispositivo causou a linearização do sistema. Habib e Kerschen (2016) propõem uma metodologia para o projeto de NDs para sistemas não lineares. Nesse trabalho, propõe-se a utilização do princípio da similaridade, de forma que o ND possua a mesma não linearidade polinomial do sistema primário. Essa técnica apresentou resultados coerentes com a TPF, exercendo um excelente controle sobre o sistema.

Apesar dos resultados serem satisfatórios, tais metodologias foram aplicadas somente à sistemas primários de um GDL. Em aplicações práticas, como cabos suspensos e grandes estruturas, temos sistemas não lineares de múltiplos graus de liberdade e nem sempre é possível simplificá-los para sistemas de um GDL. Portanto, faz-se necessário o desenvolvimento de metodologias para o controle passivo de vibrações em sistemas não lineares com múltiplos GDL.

2.2 SISTEMAS NÃO LINEARES

Os sistemas não lineares descrevem os fenômenos de maneira mais realista, pois não são limitados a determinadas faixas de operação (SAVI, 2006). Apesar da descrição mais realista, tais modelos são consideravelmente mais complexos do que os modelos lineares, necessitando de abordagens diferentes e ferramentas matemáticas mais elaboradas para a obtenção de respostas e sua interpretação.

De maneira geral, as não linearidades apresentam-se de duas formas distintas: não linearidades físicas e geométricas. A não linearidade física é relacionada ao material, devido a relações não lineares entre tensão e deformação, enquanto a não linearidade geométrica caracteriza-se pelo movimento, devido às condições de contorno e grandes deslocamentos (SAVI, 2006).

Muitos estudos são realizados analisando sistemas relativamente simples, como pêndulos simples, osciladores de Duffing e de Van der Pol, ligas com memória de forma, dentre vários outros. Apesar destes sistemas serem representados por equações simples e concisas, apresentam uma dinâmica extremamente rica, com a ocorrência de diversos fenômenos que não são observados em sistemas lineares, como bifurcações, sensibilidade às condições iniciais, caos e acoplamentos modais.

É comum abordar sistemas não lineares considerando suas não linearidades concentradas em determinados pontos, de forma a permitir a elaboração de um sistema equivalente composto por massa, amortecedor, mola linear e elemento não linear. Exemplos de não linearidades concentradas são uma mola não linear na extremidade de uma viga (NOËL; KERSCHEN, 2013) e uma conexão parafusada (PACINI; ROETTGEN; ROHE, 2020).

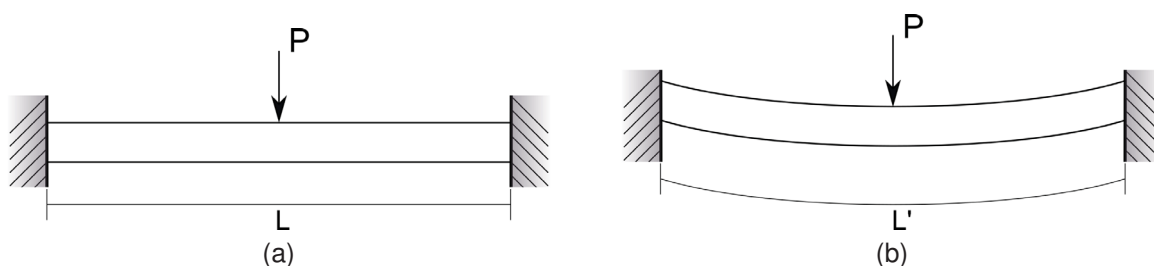
Além dos casos citados, diversos trabalhos fazem o uso de não linearidades concentradas para a modelagem de sistemas danificados. Por meio da série de Volterra, Scussel e Silva (2017) propõem um método de identificação para sistemas não lineares baseado somente na resposta do sistema, sem que seja necessário conhecimento sobre o sinal de excitação. Em Shiki, Silva e Todd (2017) e Villani, Silva e Cunha Jr (2017) são propostas metodologias para o prognóstico de dano em sistemas não lineares utilizando técnicas baseadas na série de Volterra para a identificação do sistema. Observa-se que o uso deste tipo de não linearidades proporcionam uma excelente ferramenta para o prognóstico de danos.

Com o uso de não linearidades pontuais é possível modelar e obter soluções para diversos problemas de engenharia. Porém, em muitas aplicações práticas, nota-se que sistemas que deveriam ser lineares se comportam de forma não linear devido à ocorrência de grandes deslocamentos. Desta forma, em determinadas ocasiões, faz-se necessário a utilização de modelos matemáticos que considerem não linearidades

distribuídas.

Para sistemas que apresentam não linearidade geométrica, devido a grandes deflexões, uma solução possível é descrever a dinâmica do sistema por meio da dinâmica do contínuo, sem simplificar as equações para pequenos deslocamentos, levando em conta a mudança na geometria do sistema devido às deformações sofridas, que conduzem a relações deformação-deslocamento não lineares (ANASTASIO; MARCHE-SIELLO et al., 2019). Tome-se, por exemplo, uma viga biengastada sob a qual atua uma carga perpendicular, como ilustrado na FIGURA 2a. A atuação da força irá ocasionar na deformação da viga, o que, devido a suas condições de contorno, ocasionará no aumento do seu comprimento, tal como mostrado na FIGURA 2b, levando a não linearidades geométricas. O modelo contínuo geometricamente não linear considera as alterações na geometria do elemento durante o carregamento, para a obtenção de resultados mais realísticos.

FIGURA 2 – 2a Viga biengastada em condição de equilíbrio e 2b sob grandes deflexões.



FONTE: O autor (2019).

Diversos trabalhos abordam modelos contínuos geometricamente não lineares, como modelos para vigas nas mais diversas condições de contorno, além de cabos, treliças e placas, dentre outros elementos (NAYFEH; PAI, 2008; MALATKAR, 2003; LACARBONARA, 2013; AMABILI; PAIDOUSSIS, 2003; WAGG; NEILD, 2016). Mesmo com a complexidade e custo computacional sendo fatores limitantes a sua ampla utilização, alguns trabalhos utilizam tal metodologia para a descrição de sistemas físicos experimentais (MALATKAR, 2003; ANASTASIO; DIETRICH et al., 2020).

Além disso, vários autores vêm dedicando-se a criar metodologias de análise por meio do método dos elementos finitos, possibilitando analisar sistemas não lineares de maneira menos complexa. Em Sonnevile, Cardona e Brüls (2014) propõe-se um modelo baseado no método dos elementos finitos para uma viga geometricamente não linear. O modelo proposto foi aplicado a diferentes exemplos numéricos, estáticos e dinâmicos, obtendo sucesso em todos os casos. Em Sampaio, Paccola e Coda (2015) propõe-se uma metodologia alternativa para a análise de placas compósitas por meio do método dos elementos finitos. Em De Borst et al. (2012) é apresentada uma metodologia *open-source* em Python para diversos problemas utilizando o método dos

elementos finitos. Além disso, diversos *softwares* comerciais de análise por meio do método dos elementos finitos possuem suas ferramentas próprias para a análise de sistemas não lineares.

Em Anastasio, Dietrich et al. (2020), comparam-se diferentes metodologias para a modelagem de sistemas com não linearidades distribuídas. Foram utilizadas as metodologias implementadas nos *softwares* Abaqus e Ansys, a metodologia proposta por Sonnevile, Cardona e Brüls (2014) e um modelo obtido por dinâmica do contínuo, proposto por Nayfeh e Pai (2008). Os resultados foram comparados e foi observado que os modelos propostos por Sonnevile, Cardona e Brüls (2014) e Nayfeh e Pai (2008) apresentam resultados equivalentes, enquanto que as metodologias implementadas em ambos os *softwares* apresentaram resultados divergentes.

Apesar da existência de diferentes metodologias para a análise de sistemas geometricamente não lineares, e de algumas divergirem quanto aos resultados, tais métodos descrevem a dinâmica de elementos estruturais de forma mais realista. Isso possibilita a simulação dos mais diferentes fenômenos que possam vir a ocorrer em sistemas reais.

2.2.1 Efeito Sommerfeld

Dentre os fenômenos particulares aos sistemas não lineares, o efeito Sommerfeld se destaca. Foi observado pela primeira vez em Sommerfeld (1902) e posteriormente seu estudo foi matematicamente aprofundado em Kononenko (1969). Sua ocorrência se dá durante operações não estacionárias de motores acoplados à suportes flexíveis, como, por exemplo, um motor fixo na extremidade livre de uma viga engastada-livre, não possuindo torque suficiente para ultrapassar as frequências de ressonância do sistema.

Neste caso, a não linearidade se dá devido a uma interação não ideal entre o motor e o suporte, uma vez que a vibração do suporte possui influência sobre a rotação do motor assim como o motor gera uma excitação ao suporte. Durante a ressonância, como o motor não possui torque suficiente para sua transposição, sua rotação permanece estagnada, mesmo com o fornecimento de mais energia ao motor, ao passo que a energia em excesso é transferida ao suporte, o qual a utiliza para aumentar a amplitude de vibração. Caso o sistema não obtenha energia suficiente para a transposição da ressonância, a amplitude de vibração aumenta a níveis muito elevados, podendo resultar na ruptura do suporte. Após a obtenção da energia necessária, o motor apresenta um grande aumento de rotação, reduzindo a amplitude de vibração nas mesmas proporções.

Diversos trabalhos abordam sistemas não ideais e o efeito Sommerfeld, como é o caso de Bolla et al. (2007), Felix e Balthazar (2009), Gonçalves et al. (2014) e Varanis

et al. (2019). Em Varanis et al. (2019) é realizada a caracterização do efeito Sommerfeld no plano tempo-frequência por meio de técnicas baseadas na transformada wavelet e em Balthazar et al. (2004) é feita uma vasta revisão de literatura quanto a fontes de energia não ideais.

Caso o sistema apresente o efeito Sommerfeld durante sua operação, é de suma importância propor um método para o seu controle, evitando eventos catastróficos. Uma alternativa viável é a inserção de um neutralizador dinâmico amortecido ao sistema, de forma a controlar a faixa de frequências na qual ocorre o efeito Sommerfeld.

Apesar do efeito Sommerfeld ser um fenômeno não linear, sua ocorrência não depende do suporte elástico ser não linear, mas de que a fonte de excitação seja não ideal, isto é, de potência limitada. Isso se verifica em Mereles et al. (2019), onde utiliza-se um modelo linear e contínuo de viga engastada livre na qual são adicionados dois motores não ideais, com potência limitada, e o efeito Sommerfeld ocorre como esperado.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresenta-se o modelo de parâmetros equivalentes generalizados para sistemas com um grau de liberdade viscosos e viscoelásticos e o método dos modos assumidos, considerando pequenas e grandes deflexões. Também é abordado o acoplamento de um motor não ideal a um sistema vibratório, onde há a ocorrência do efeito Sommerfeld.

3.1 PARÂMETROS EQUIVALENTES GENERALIZADOS - PEG

Os PEG são parâmetros que possibilitam a elaboração de modelos simplificados equivalentes ao modelo em estudo, composto pelo sistema primário e o ND. Embora algumas informações dinâmicas referentes ao ND se percam, como o seu deslocamento, a simplificação obtida com sua aplicação é de fato significativa, preservando toda sua influência no sistema primário.

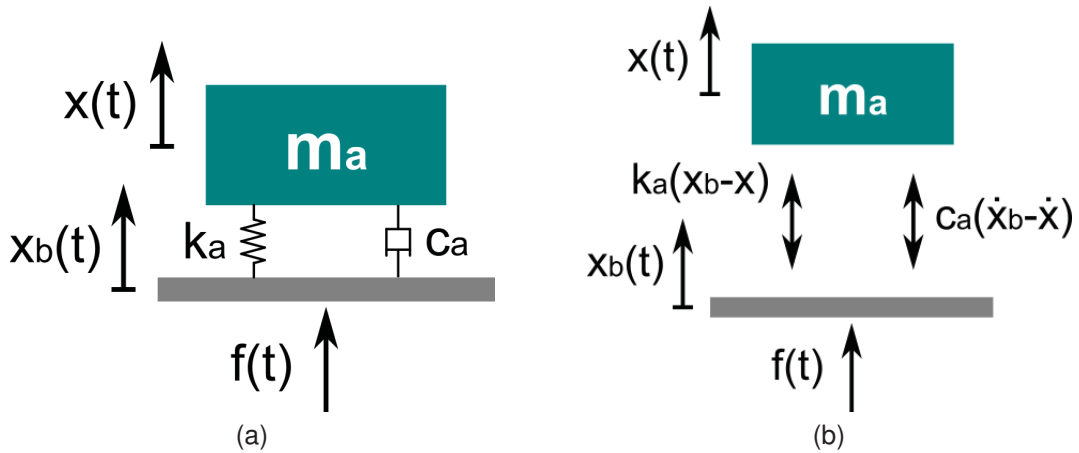
A priori, qualquer sistema vibratório pode ser descrito por meio de seus PEG para a sua adição a um sistema primário. Neste capítulo serão descritos os procedimentos para obtenção dos PEG de sistemas com um GDL viscosos e viscoelásticos, no qual os elementos de rigidez e amortecimento são substituídos por um elemento viscoelástico. Para este fim, o material viscoelástico é descrito pelo modelo de derivadas fracionárias, conhecido como modelo de quatro parâmetros, e é considerado termoreologicamente simples. Há uma extensa bibliografia na qual trata-se destes materiais. Um estudo aprofundado sobre o modelo utilizado e as características dos materiais viscoelásticos pode ser encontrado em Bavastrri et al. (2007), Sousa (2015), CINIELLO (2016), Jones (2001) e Nashif, Jones e Henderson (1985).

Na Seção 3.1.1 apresenta-se a formulação de PEG para um sistema de um grau de liberdade viscoso, equanto que na Seção 3.1.2 apresenta a formulação para sistemas com 1 GDL viscoelásticos. Posteriormente será apresentada uma metodologia para o projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos por meio de TONL.

3.1.1 Determinação dos PEG para um neutralizador viscoso

O sistema aqui considerado é constituído por uma massa m_a apoiada sobre um elemento de mola, com rigidez k_a , e um amortecedor, com constante de amortecimento c_a . O sistema em questão, bem como seu diagrama de corpo livre, é apresentado na FIGURA 3.

FIGURA 3 – Sistema viscoso com 1 GDL: 3a Representação física e 3b diagrama de corpo livre.



FONTE: O autor (2020).

As equações que regem o movimento deste sistema são apresentadas nas Equações 3.1 e 3.2, conforme o diagrama de corpo livre apresentado na FIGURA 3b. Para esta análise, a massa da base é considerada desprezível.

$$k_a (x_b(t) - x(t)) + c_a (\dot{x}_b(t) - \dot{x}(t)) = m_a \ddot{x}(t) \quad (3.1)$$

$$f(t) - k_a (x_b(t) - x(t)) - c_a (\dot{x}_b(t) - \dot{x}(t)) = 0 \quad (3.2)$$

Aplicando a transformada de Fourier às Equações 3.1 e 3.2, obtém-se:

$$(k_a + i\Omega c_a) (X_b(\Omega) - X(\Omega)) = -\Omega^2 m_a X(\Omega) \quad (3.3)$$

$$F(\Omega) - (k_a + i\Omega c_a) (X_b(\Omega) - X(\Omega)) = 0 \quad (3.4)$$

Isolando $X(\Omega)$ na Equação 3.3 e substituindo em 3.4 obtém-se a Equação 3.5, que fornece a rigidez dinâmica na base do sistema.

$$K_b(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{X_b(\Omega)} = \frac{-\Omega^2 m_a (i\Omega c_a + k_a)}{-\Omega^2 m_a + i\Omega c_a + k_a} \quad (3.5)$$

$K_b(\Omega)$ é uma das grandezas generalizadas e pode ser utilizada para a adição de um ND a um sistema primário como uma mola com rigidez complexa. Trabalhando algebricamente a equação acima, e considerando $\Omega_a^2 = k_a/m_a$, $\epsilon = \Omega/\Omega_a$ e $\xi_a = c/(2m_a\Omega_a)$, pode-se definir os parâmetros de massa equivalente, $m_{eq}(\Omega)$, e amortecimento equivalente, $c_{eq}(\Omega)$, como seguem (BAVASTRI et al., 2007):

$$m_{eq}(\Omega) = -m_a \frac{\epsilon^2 - [1 + (2\xi_a\epsilon)^2]}{(\epsilon^2 - 1)^2 + (2\xi_a\epsilon)^2} \quad (3.6)$$

$$c_{eq}(\Omega) = m_a \Omega_a \frac{2\xi_a\epsilon^4}{(\epsilon^2 - 1)^2 + (2\xi_a\epsilon)^2} \quad (3.7)$$

3.1.2 Determinação dos PEG para um neutralizador viscoelástico

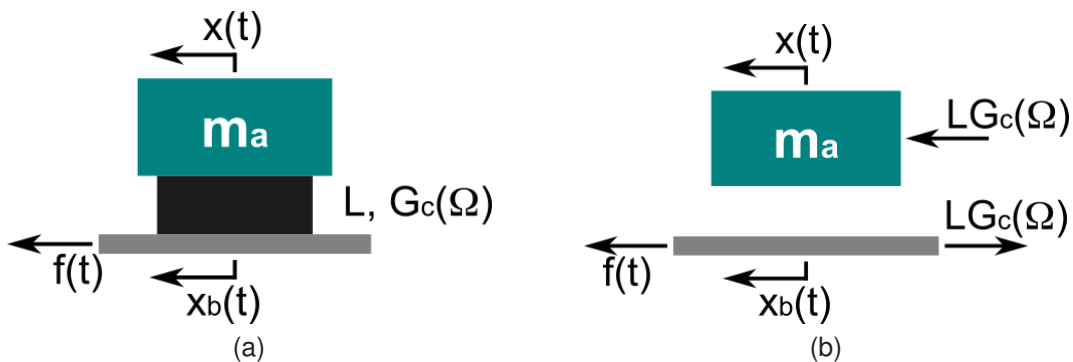
O sistema aqui considerado também é constituído por uma massa m_a apoiada sobre um elemento viscoelástico trabalhando sob cisalhamento. O material viscoelástico é caracterizado pelo seu módulo de cisalhamento complexo, o qual é obtido por meio do modelo de derivadas fracionárias, conhecido como modelo de quatro parâmetros, e pode ser expresso conforme a Equação 3.8, para uma determinada temperatura fixa. Os efeitos da variação da temperatura sobre o módulo de cisalhamento complexo do material viscoelástico podem ser adicionados ao modelo por meio da equação de Williams-Landel-Ferry (VOLTOLINI et al., 2018), porém, para esta análise, a temperatura é considerada fixa.

$$G_c(\Omega) = \frac{G_0 + G_\infty b_1 (i\Omega)^\alpha}{1 + b_1 (i\Omega)^\alpha} \quad (3.8)$$

O elemento viscoelástico é caracterizado pelo seu fator de forma, L , dado pela Equação 3.9, onde A é a área do elemento sob cisalhamento e h é a sua espessura. O sistema aqui analisado é excitado pela base, como representado na FIGURA 4.

$$L = \frac{A}{h} \quad (3.9)$$

FIGURA 4 – Sistema viscoelástico com 1 GDL: 4a Representação física e 4b diagrama de corpo livre.



FONTE: O autor (2019).

As equações que regem o movimento deste sistema são apresentadas nas Equações 3.10 e 3.11, conforme o diagrama de corpo livre apresentado na FIGURA 4b. Para esta análise, a massa da base é considerada desprezível.

$$LG_c(\Omega) (x_b(t) - x(t)) = m_a \ddot{x}(t) \quad (3.10)$$

$$f(t) - LG_c(\Omega) (x_b(t) - x(t)) = 0 \quad (3.11)$$

Aplicando a transformada de Fourier às Equações 3.10 e 3.11, obtém-se:

$$LG_c(\Omega) (X_b(\Omega) - X(\Omega)) = -m_a\Omega^2 X(\Omega) \quad (3.12)$$

$$F(\Omega) - LG_c(\Omega) (X_b(\Omega) - X(\Omega)) = 0 \quad (3.13)$$

Isolando $X(\Omega)$ na Equação 3.12 e substituindo em 3.13 obtém-se a Equação 3.14, que fornece a rigidez dinâmica na base do sistema.

$$K_b(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{X_b(\Omega)} = \frac{-m_a\Omega^2 LG_c(\Omega)}{-m_a\Omega^2 + LG_c(\Omega)} \quad (3.14)$$

$K_b(\Omega)$ é uma das grandezas generalizadas e pode ser utilizada para a adição de um ND a um sistema primário, por exemplo. O módulo $G_c(\Omega)$ também pode ser representado por:

$$G_c(\Omega) = G(\Omega) (1 + i\eta(\Omega)), \quad (3.15)$$

onde $G(\Omega)$ é a parte real do módulo de cisalhamento complexo e $\eta(\Omega)$ é a razão entre as partes imaginária e real, dada pela Equação 3.16.

$$\eta(\Omega) = \frac{\Im(G_c(\Omega))}{\Re(G_c(\Omega))} \quad (3.16)$$

Substituindo a Equação 3.15 em 3.14 e multiplicando e dividindo pelo módulo de seu denominador, obtém-se:

$$K_b(\Omega) = \frac{-m_a\Omega^2 LG(\Omega) [(-m_a\Omega^2 LG(\Omega)) + \eta^2(\Omega) LG(\Omega)]}{[-m_a\Omega^2 + LG(\Omega)]^2 + [LG(\Omega)\eta(\Omega)]^2} - i\Omega \frac{m_a\Omega LG(\Omega) [-LG(\Omega)\eta(\Omega) + \eta(\Omega)(-m_a\Omega^2 + LG(\Omega))]}{[-m_a\Omega^2 + LG(\Omega)]^2 + [LG(\Omega)\eta(\Omega)]^2} \quad (3.17)$$

Por comparação com a rigidez na base para um sistema massa-amortecedor, obtém-se os seguintes parâmetros equivalentes:

$$m_{eq}(\Omega) = \frac{-m_a LG(\Omega) [(-m_a\Omega^2 LG(\Omega)) + \eta^2(\Omega) LG(\Omega)]}{[-m_a\Omega^2 + LG(\Omega)]^2 + [LG(\Omega)\eta(\Omega)]^2} \quad (3.18)$$

$$c_{eq}(\Omega) = -\frac{m_a\Omega LG(\Omega) [-LG(\Omega)\eta(\Omega) + \eta(\Omega)(-m_a\Omega^2 + LG(\Omega))]}{[-m_a\Omega^2 + LG(\Omega)]^2 + [LG(\Omega)\eta(\Omega)]^2} \quad (3.19)$$

As Equações 3.18 e 3.19 podem ser algebricamente manipuladas para sua simplificação, obtendo as Equações 3.20 e 3.21, onde $\Omega_a^2 = \frac{LG(\Omega_a)}{m}$ é a frequência natural do sistema, $r(\Omega) = \frac{G(\Omega)}{G(\Omega_a)}$ e $\epsilon = \frac{\Omega}{\Omega_a}$.

$$m_{eq}(\Omega) = \frac{m_a r(\Omega) [-\epsilon^2 + r(\Omega) (1 + \eta^2(\Omega))]}{[-\epsilon^3 + r(\Omega)]^2 + [r(\Omega)\eta(\Omega)]^2} \quad (3.20)$$

$$c_{eq}(\Omega) = -\frac{m_a \Omega_a r(\Omega) \eta(\Omega) \epsilon^3}{[-\epsilon^3 + r(\Omega)]^2 + [r(\Omega)\eta(\Omega)]^2} \quad (3.21)$$

3.2 MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS

Nesta seção, é apresentado o método dos modos assumidos, metodologia amplamente aplicada na discretização de sistemas mecânicos utilizando as energias cinética, potencial e o trabalho virtual das forças não conservativas por meio do princípio estendido de Hamilton. Tal técnica permite a adição de massas, molas e amortecedores pontuais de forma simples, sem a necessidade de obter soluções para equações diferenciais complexas.

Na seção 3.2.1 apresenta-se a teoria clássica do método dos modos assumidos, a qual resulta em modelos lineares, bem como a adição de componentes pontuais ao sistema. Já na seção 3.2.2 faz-se uma expansão da metodologia clássica para vigas biengastadas submetidas à grandes deflexões. Adicionalmente, na seção 3.2.3, propõe-se um modelo de motor não-ideal acoplado a uma viga, para o estudo do efeito Sommerfeld.

3.2.1 Método dos modos assumidos aplicado a uma viga sob pequenas deflexões

Segundo Meirovitch (2010), pode-se obter as equações de movimento de um sistema qualquer discretizando as energias cinéticas, potenciais e o trabalho das forças virtuais por meio da equação de Lagrange, dada pela Equação 3.22.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.22)$$

O movimento de um sistema contínuo pode ser descrito por

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t), \quad (3.23)$$

onde $\phi(x)$ são funções de teste escolhidas por conveniência, neste caso os modos de vibrar assumidos para o sistema, e $q(t)$ são as coordenadas generalizadas.

A energia cinética de um sistema composto por uma viga com uma massa concentrada m_c no ponto x_m é dada por

$$T(t) = \frac{1}{2} \left[\int_0^l \rho A \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx + m_c \left(\frac{\partial w(x_m, t)}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (3.24)$$

donde, realizando a expansão proposta em Equação 3.23, obtém-se

$$T(t) = \frac{1}{2} \left[\int_0^l \rho A \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \dot{q}_i(t) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \dot{q}_j(t) dx + m_c \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x_m) \dot{q}_i(t) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x_m) \dot{q}_j(t) \right], \quad (3.25)$$

que pode ser reorganizada da seguinte forma:

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^l \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx + m_c \phi_i(x_m) \phi_j(x_m) \right] \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t). \quad (3.26)$$

Já a energia potencial, considerando uma mola com rigidez k_c acoplada ao ponto x_k , é dada por

$$V = \frac{1}{2} \left[\int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx + k_c w(x_k, t)^2 \right], \quad (3.27)$$

donde, novamente realizando a expansão proposta na Eq. 3.23, obtém-se

$$V = \frac{1}{2} \left[\int_0^l EI \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i''(x) q_i(t) dx \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j''(x) q_j(t) + k_c \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i''(x_k) q_i(t) \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j''(x_k) q_j(t) \right], \quad (3.28)$$

que pode ser reorganizada como

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^l EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx + k_c \phi_i''(x_k) \phi_j''(x_k) \right] q_i(t) q_j(t). \quad (3.29)$$

As forças não conservativas são adicionadas ao modelo por meio da teoria do trabalho das forças virtuais. As forças não conservativas presentes neste modelo são compostas pelas forças externas e de amortecimento.

Primeiramente considera-se a existência de cargas distribuídas e concentradas externas ao sistema, o que resulta em

$$\bar{\delta} W_f(t) = \int_0^l [f(x, t) + f_c(t) \delta(x - x_f)] \delta w(x, t) dx, \quad (3.30)$$

onde $f(x, t)$ representa uma força distribuída no comprimento da viga e $f_c(t)$ é um força concentrada aplicada no ponto x_f .

Novamente aplicando a expansão proposta na Eq. 3.23, obtém-se

$$\bar{\delta} W_f(t) = \int_0^l \sum_{i=1}^{\infty} [f(x, t) + f_c(t) \delta(x - x_f)] \phi_i(x) dx \delta q_i(t), \quad (3.31)$$

que pode ser reorganizada como

$$\bar{\delta} W_f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_0^l f(x, t) \phi_i(x) dx + f_c(t) \phi_i(x_f) \right] \delta q_i(t). \quad (3.32)$$

Quanto ao amortecimento do sistema, ele pode ser convenientemente adicionado após a determinação da equação de movimento, assumindo que os coeficientes de amortecimento são proporcionais às características correspondentes de massa e rigidez. Alternativamente, de posse dos coeficientes de amortecimento, as forças associadas podem ser inseridas no sistema junto às forças não conservativas.

Considerando a existência de forças de amortecimento distribuídas e concentradas, a soma das forças não conservativas referentes ao amortecimento é dada por

$$\bar{\delta} W_c(t) = \int_0^l [c_d + c_c \delta(x - x_c)] \dot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx, \quad (3.33)$$

que após a realização da expansão proposta na equação 3.23, e reorganizada, se torna

$$\bar{\delta}W_c(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^l c_d \phi_i(x) \phi_j(x) dx + c_c \phi_i(x_c) \phi_j(x_c) \right] \dot{q}_i(t) \delta q_j(t). \quad (3.34)$$

Desta forma o trabalho virtual total das forças não conservativas, constituído pelas forças externas e de amortecimento, é dado por

$$\bar{\delta}W(t) = \bar{\delta}W_f(t) + \bar{\delta}W_c(t). \quad (3.35)$$

Aplicando as equações da energia cinética, Equação 3.26, da energia potencial, Equação 3.29, e das forças não-conservativas, Equação 3.35, na equação de Lagrange, Equação 3.22, e manipulando obtém-se a equação de movimento para o sistema, Equação 3.36.

$$[M]\ddot{\mathbf{q}} + [C]\dot{\mathbf{q}} + [K]\mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad (3.36)$$

Na Equação 3.36, M é matriz de massa, C é a matriz de amortecimento, K é a matriz de rigidez e \mathbf{Q} é o vetor de forças externas, cujos elementos são dados, respectivamente, por:

$$M_{i,j} = \int_0^l \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx + m_c \phi_i(x_m) \phi_j(x_m), \quad (3.37)$$

$$C_{i,j} = \int_0^l c_d \phi_i(x) \phi_j(x) dx + c_c \phi_i(x_c) \phi_j(x_c), \quad (3.38)$$

$$K_{i,j} = \int_0^l EI \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx + k_c \phi_i''(x_k) \phi_j''(x_k) \quad (3.39)$$

e

$$Q_i = \int_0^l f(x, t) \phi_i(x) dx + f_c(t) \phi_i(x_f). \quad (3.40)$$

3.2.2 Modos assumidos considerando a deformação axial

Para uma viga sob grandes deflexões sabe-se que sua energia potencial, devido a uma deformação sofrida, é dada por

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l M_f \kappa dx + \frac{1}{2} \int_0^l N \epsilon dx, \quad (3.41)$$

onde o primeiro termo refere-se à energia de deformação por flexão e o segundo é referente à energia de deformação devido ao alongamento da viga.

Para uma viga cujas extremidades são fixas a uma distância l , ou seja, $u(0) = u(l) = 0$, sua flexão gera uma deformação axial. Mostra-se que a deformação axial para uma viga com extremidades restritas é dada por

$$\epsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2, \quad (3.42)$$

onde o primeiro termo refere-se à deformação devido ao deslocamento axial e o segundo é referente à deformação axial ocasionada pela flexão da viga.

A deformação axial gerada na viga devido à flexão gera uma força normal N , dada por

$$N = EA\epsilon = EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right]. \quad (3.43)$$

Integrando a força normal para $0 \leq x \leq l$ obtém-se

$$N = \frac{EA}{l} \left[u(l) - u(0) + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right] \quad (3.44)$$

que, pela aplicação das condições de contorno, torna-se

$$N = \frac{EA}{2l} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (3.45)$$

Agora é possível calcular a parcela da energia potencial da viga referente a deformação axial, posto que

$$V_{axial} = \frac{1}{2} \int_0^l N \epsilon dx = \frac{1}{4} \int_0^l N \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx, \quad (3.46)$$

$$V_{axial} = \frac{EA}{8l} \int_0^l \left[\int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right] \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (3.47)$$

Logo a energia potencial total de uma viga prismática com as extremidades restritas é dada por

$$V = V_{flex} + V_{axial} = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EA}{8l} \int_0^l \left[\int_0^l \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right] \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx. \quad (3.48)$$

Avaliando apenas o termo referente à deformação axial, tem-se que

$$V_{axial} = \frac{1}{8} \frac{EA}{l} \int_0^l \left[\int_0^l \left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi'_i(x) q_i(t) \right)^2 dx \right] \left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi'_i(x) q_i(t) \right)^2 dx \quad (3.49)$$

$$V_{axial} = \frac{1}{8} \frac{EA}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l \left[\int_0^l \phi'_i(x)^2 dx \right] \phi'_i(x)^2 dx q_i(t)^4 \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial V_{axial}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^l \left[\int_0^l \phi'_i(x)^2 dx \right] \phi'_i(x)^2 dx q_i(t)^3. \quad (3.51)$$

Após a aplicação das equações de Lagrange, o primeiro termo da Equação 3.48 resulta na matriz de rigidez linear, já apresentada anteriormente. Já o segundo termo resulta em um vetor de forças de restauração não lineares, obtido realizando a expansão de $w(x, t)$ proposta anteriormente. Ele é tal que

$$N_{l_i}(q) = \frac{EA}{2l} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^l \left[\int_0^l \phi'_k(x) \phi'_m(x) dx \right] \phi'_j(x) \phi'_i(x) dx q_k(t) q_i(t)^2. \quad (3.52)$$

Assim, a equação de movimento do sistema se torna

$$[M]\ddot{\mathbf{q}} + [K]\mathbf{q} + \mathbf{N}_I(\mathbf{q}) = 0, \quad (3.53)$$

onde imediatamente se pode adicionar amortecimento proporcional ao sistema e forças externas. As forças de restauração não lineares aqui consideradas apresentam-se na forma de não linearidades cúbicas, juntamente com acoplamento entre os modos de vibrar, como observado na Equação 3.52.

A solução do problema dos autovalores para as matrizes $[M]$ e $[K]$ resulta na obtenção dos parâmetros modais para o sistema obtido, $[\Psi]$ e $[\Lambda]$, onde os autovetores $[\Psi]$ são ortonormalizados pela matriz de massa, $[M]$.

Propõe-se uma transformação de coordenadas fazendo-se

$$\mathbf{q} = [\Psi]\mathbf{p}, \quad (3.54)$$

o que resulta em

$$[M][\Psi]\ddot{\mathbf{p}} + [K][\Psi]\mathbf{p} + \mathbf{N}_I([\Psi]\mathbf{p}) = 0, \quad (3.55)$$

que, após a pré-multiplicação por $[\Psi]^T$, fornece

$$[\Psi]^T[M][\Psi]\ddot{\mathbf{p}} + [\Psi]^T[K][\Psi]\mathbf{p} + [\Psi]^T\mathbf{N}_I([\Psi]\mathbf{p}) = 0. \quad (3.56)$$

Como $[\Psi]$ é ortonormalizado pela matriz de massa, as transformações realizadas nas matrizes $[M]$ e $[K]$ resultam em

$$[\Psi]^T[M][\Psi] = [I] \quad (3.57)$$

$$[\Psi]^T[K][\Psi] = [\Lambda]. \quad (3.58)$$

Logo, a nova equação de movimento do sistema é

$$[I]\ddot{\mathbf{p}} + [\Lambda]\mathbf{p} + \mathbf{N}_p(\mathbf{p}) = 0. \quad (3.59)$$

No caso do sistema possuir amortecimento proporcional e estar sob a influência de forças externas, tem-se que

$$[I]\ddot{\mathbf{p}} + [C_d]\dot{\mathbf{p}} + [\Lambda]\mathbf{p} + \mathbf{N}_p(\mathbf{p}) = \Psi^T \{F_n(t)\}, \quad (3.60)$$

onde

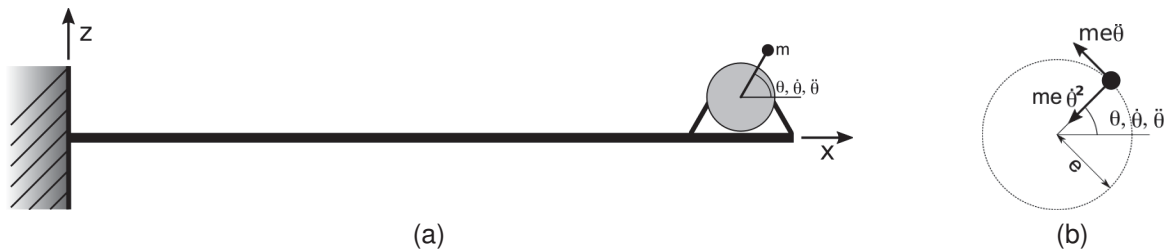
$$F_n(t) = \int_0^l F(x, t)\phi_n(x)dx. \quad (3.61)$$

3.2.3 Motor não ideal acoplado a uma viga

Em alguns casos, o acoplamento de um motor a um sistema vibratório causa fenômenos não lineares, como é o caso de motores ditos não ideais (KONONENKO, 1969; BALTHAZAR et al., 2004; GONÇALVES et al., 2014). Nesses casos faz-se necessário considerar a influência da vibração da viga na máquina rotativa, por meio da inserção de uma equação que descreva seu movimento.

Desta forma, considera-se um sistema mecânico composto por uma viga engastada-livre com um motor acoplado em sua extremidade livre, conforme mostra-se na FIGURA 5a.

FIGURA 5 – Sistema em análise: 5a Sistema completo, motor apoiado sobre uma viga engastada-livre, e 5b diagrama de corpo livre da massa desbalanceada.



FONTE: O autor (2020).

A equação de movimento da parte mecânica deste sistema pode ser facilmente descrita por meio do método dos modos assumidos, conforme apresentado para sistemas lineares na seção 3.2.1 e para sistemas não lineares na seção 3.2.2, resultando na Equação 3.36.

A equação de movimento do motor é dada por (MERELES et al., 2019; BALTHAZAR et al., 2004; GONÇALVES et al., 2014)

$$I_t\ddot{\theta} = T_m(t) - m_u e \frac{\partial^2 w(x_m, t)}{\partial t^2} \cos \theta, \quad (3.62)$$

onde I_t é a inércia total do rotor, m_u é a massa desbalanceada, x_m é o ponto de acoplamento do motor à viga, e é o raio de desbalanceamento, θ é o ângulo formado

pela massa desbalanceada com o eixo x e $T_m(t)$ é o torque instantâneo do motor, dado por

$$T_m(t) = T_0 \left(1 - \frac{\dot{\theta}(t)}{\Omega_f} \right), \quad (3.63)$$

onde T_0 é o torque máximo do motor e Ω_f é a velocidade final do mesmo.

A força pontual exercida pelo motor na viga, devido ao desbalanceamento, é dada por

$$F_c(t) = m_u e \left(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta \right) \delta(x - x_m), \quad (3.64)$$

de forma que o vetor de forças generalizadas no espaço de modos assumidos Q é composto por

$$Q_i = \phi_i(x_m) m_u e \left(\dot{\theta}^2 \sin \theta - \ddot{\theta} \cos \theta \right), \quad (3.65)$$

e a equação de movimento completa para o sistema eletromecânico considerando uma viga linear é dada por

$$\begin{cases} [M]\ddot{\mathbf{q}} + [C]\dot{\mathbf{q}} + [K]\mathbf{q} = \mathbf{Q} \\ I_t \ddot{\theta} + m_u e \Phi(x_m)^T \mathbf{q} \cos \theta = T_m, \end{cases} \quad (3.66)$$

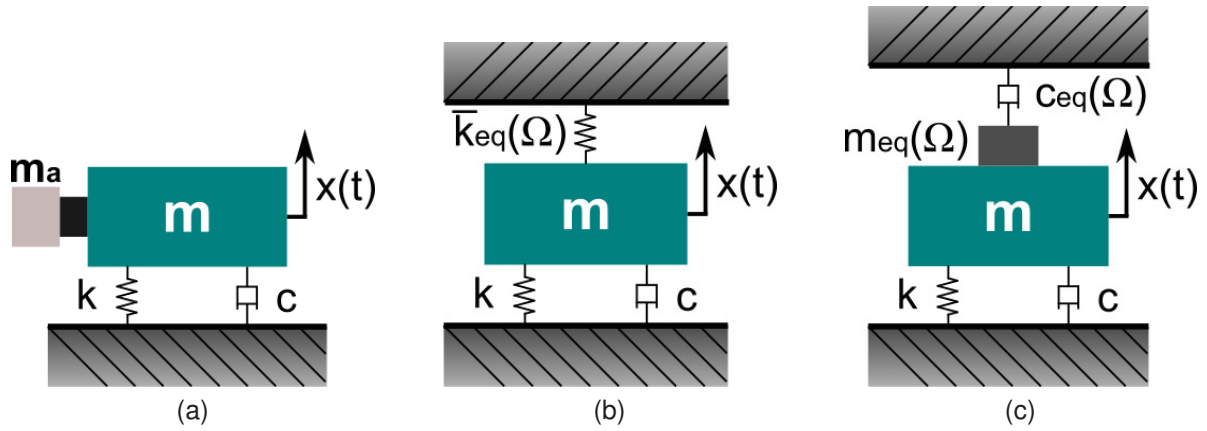
onde $\Phi(x_m)$ é o vetor coluna dos modos assumidos avaliados na posição do acoplamento do motor, x_m .

O sistema mecânico pode ser caracterizado por meio de sua FRF, a qual pode ser obtida por meio da aplicação da transformada de Fourier à equação de movimento, e a resposta temporal do sistema pode ser obtida por meio do método de Runge-Kutta. Procedimentos similares podem ser realizados para o acoplamento do motor DC em vigas consideradas não lineares, resultando em equações semelhantes.

3.3 ACOPLAMENTO DE NDS A SISTEMAS DISCRETOS UTILIZANDO A METODOLOGIA DE PEG

Considera-se um sistema mecânico com 1 GDL que deve ser controlado em uma determinada faixa de frequências, cujos limites são Ω_l e Ω_h , e possui os parâmetros físicos m , c e k , conforme mostra-se na FIGURA 6. O sistema primário é controlado por meio de um NDV e o sistema composto é modelado por meio da teoria dos PEG. Desta forma, pode-se obter a resposta do sistema composto sem que seja necessário escrever as equações de movimento para todo o sistema, apenas aplicando seus parâmetros equivalentes ao sistema já conhecido, como nas figuras 6b e 6c.

FIGURA 6 – Sistema de 1 GDL com ND acoplado: 6a Sistema físico, 6b Sistema equivalente obtido por PEG utilizando $k_{eq}(\Omega)$ e 6c Sistema equivalente obtido por PEG utilizando $m_{eq}(\Omega)$ e $c_{eq}(\Omega)$



FONTE: O autor (2019).

As equações para os casos mostrados nas FIGURAS 6b e 6c são apresentadas, respectivamente, nas Equações 3.67 e 3.68.

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + [k + k_{eq}(\Omega)]x = f(t) \quad (3.67)$$

$$[m + m_{eq}(\Omega)]\ddot{x}(t) + [c + c_{eq}(\Omega)]\dot{x}(t) + kx = f(t) \quad (3.68)$$

Aplicando a transformada de Fourier e reorganizando as equações obtém-se as FRFs do sistema, para os dois modelos equivalentes.

$$H(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{-\Omega^2 m + i\Omega c + k + k_{eq}(\Omega)} \quad (3.69)$$

$$H(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = \frac{1}{-\Omega^2 [m + m_{eq}(\Omega)] + i\Omega [c + c_{eq}(\Omega)] + k} \quad (3.70)$$

Uma vez determinada a FRF do sistema, deve-se determinar a razão μ , Equação 3.71, entre as massas do neutralizador e do sistema primário, sendo que, para maior desempenho, ela deve possuir valor entre 0.1 e 0.25, no caso de sistemas com um GDL (DEN HARTOG, 1985).

$$\mu = \frac{m_a}{m} \quad (3.71)$$

Para sistemas lineares com múltiplos graus de liberdade descritos por modelos provenientes do MEF, são realizados procedimentos semelhantes para o acoplamento de NDs e a equação de movimento no domínio da frequência para o sistema com um

ou mais NDs acoplados é dada na Equação 3.72 (SILVA, 2019), onde, no caso de amortecimento proporcional, $\Psi^T C \Psi = [2\xi_i \Omega_i]$, I é a matriz identidade e Λ é a matriz de autovalores e Ψ é a matriz dos autovetores.

$$\{-\Omega^2 [I + \Psi^T M_{eq}(\Omega) \Psi] + i\Omega [\Psi^T C \Psi + \Psi^T C_{eq}(\Omega) \Psi] + \Lambda\} \Psi^T Q(\Omega) = \Psi^T F(\Omega) \quad (3.72)$$

As matrizes $M_{eq}(\Omega)$ e $C_{eq}(\Omega)$ agregam os parâmetros equivalentes dos neutralizadores e não são diagonalizáveis por Ψ , porém os produtos resultantes, $M_a(\Omega)$ e $C_a(\Omega)$, são predominantemente diagonais (SILVA, 2019), o que resulta em

$$H(\Omega) = \Psi \{-\Omega^2 [I + M_a(\Omega)] + i\Omega [[2\xi_i \Omega_i] + C_a(\Omega)] + \Lambda\}^{-1} \Psi^T. \quad (3.73)$$

3.3.1 Acoplamento de NDs a sistemas modelados pelo método dos modos assumidos

Seja um sistema qualquer discretizado pelo método dos modos assumidos, cuja equação de movimento no domínio da frequência é

$$\{-\Omega^2 [M] + i\Omega [C] + [K]\} \mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{Q}(\Omega), \quad (3.74)$$

e deseja-se aplicar o controle passivo de vibrações. Partindo-se da premissa de que o ND será adicionado ao sistema por meio de seus parâmetros equivalentes generalizados, mais precisamente por meio de $m_{eq}(\Omega)$ e $c_{eq}(\Omega)$, então as matrizes referentes ao ND no sistema composto serão dadas por

$$M_{eq_{i,j}}(\Omega) = m_{eq}(\Omega) \phi_i(x_a) \phi_j(x_a) \quad (3.75)$$

$$C_{eq_{i,j}}(\Omega) = c_{eq}(\Omega) \phi_i(x_a) \phi_j(x_a). \quad (3.76)$$

Desta forma, a equação de movimento do sistema composto, com o ND acoplado, se torna

$$\{-\Omega^2 \{[M] + [M_{eq}(\Omega)]\} + i\Omega \{[C] + [C_{eq}(\Omega)]\} + [K]\} \mathbf{X}(\Omega) = \mathbf{Q}(\Omega). \quad (3.77)$$

Para simplificação, pode-se realizar uma transformação de coordenadas por meio dos modos de vibrar ortonormalizados do sistema primário, sem o ND, resultando em:

$$\{-\Omega^2 \{[I] + [M_a(\Omega)]\} + i\Omega \{[2\xi_i \Omega_i] + [C_a(\Omega)]\} + [\Lambda]\} \mathbf{P}(\Omega) = [\Psi]^T \mathbf{Q}(\Omega). \quad (3.78)$$

Vale salientar que a transformação proposta ortonormaliza as matrizes do sistema primário, mas não as referentes aos PEG do ND.

O mesmo procedimento pode ser realizado para adicionar um ou mais NDs caso o sistema primário seja não linear, já que as equações para a obtenção das

matrizes dos parâmetros equivalentes são as mesmas. Desta forma, a equação de movimento para um sistema composto cujo sistema primário é não linear é dada por (vide Equação 3.60, na seção 3.2.2)

$$\{-\Omega^2\{[I] + [M_a(\Omega)]\} + i\Omega\{[2\xi_i\Omega_i] + [C_a(\Omega)]\} + [\Lambda]\} \mathbf{P}(\Omega) + \mathcal{F}(\mathbf{N}_p(\mathbf{p}(t))) = [\Psi]^T \mathbf{Q}(\Omega), \quad (3.79)$$

onde \mathbf{N}_p é o vetor de forças de restauração não lineares e $\mathcal{F}(\cdot)$ representa a transformada de Fourier.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentam-se os procedimentos realizados para a execução desta pesquisa. Na seção 4.1 realiza-se uma discussão acerca do projeto ótimo de NDs para sistemas com múltiplos GDL, lineares e não lineares. Na seção 4.2 apresenta-se o modelo utilizado para as simulações numéricas, bem como os procedimentos realizados para a obtenção das CRFs e o projeto ótimo de NDs para o sistema não linear estudado. Na seção 4.3 faz-se algumas considerações quanto ao efeito Sommerfeld e seu controle por meio de um ND de forma experimental.

Todas as simulações numéricas realizadas no escopo deste trabalho foram realizadas em um *notebook* HP com processador Intel Core i7-7500U com frequência de *clock* de 2,90 GHz, 12 Gb de memória RAM e sistema operacional Windows 10 Home 64 bits. Todas simulações realizadas no domínio do tempo foram realizadas utilizando a implementação do algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem utilizando um integrador de quinta ordem presente no *software* MathWorks Matlab.

4.1 PROJETO ÓTIMO DE NDS

O objetivo ao projetar um ND é reduzir a amplitude de vibração do sistema ao mínimo possível. Para sistemas com um GDL há técnicas clássicas para o projeto de NDs, como é o caso da TPF. No caso de sistemas com múltiplos GDL pode-se recorrer a processos de otimização numérica, de modo a minimizar a função objetivo de forma iterativa e da melhor maneira possível.

Para o processo de otimização, fixa-se a massa do ND previamente, por meio da definição da razão μ . Para vigas com múltiplo graus de liberdade costuma-se utilizar a massa do ND como 10% a 25% da massa do sistema de um GDL equivalente ao primeiro modo de vibrar, ou seja, entre 2% e 11% da massa total da viga, para vigas em balanço e bi-engastadas.

Determinada a razão μ e, por consequência, m_a , determinam-se os demais parâmetros do ND, como a rigidez k_a e o fator de amortecimento ξ_a para NDs viscosos e a frequência natural Ω_a no caso dos NDVs. Estes parâmetros, junto com o ponto de acoplamento do ND ao sistema primário, x_a , compõem o vetor projeto, \mathbf{x} .

Para que o dispositivo possua máxima eficiência, o vetor projeto \mathbf{x} pode ser determinado a partir do seguinte problema de otimização:

$$\min f_{obj}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

onde

$$f_{obj}(\mathbf{x}) = \|H_{k,s}(\Omega)\|_{\Omega_l \leq \Omega \leq \Omega_h}, \quad (4.2)$$

com o vetor projeto, \mathbf{x} , restrito a

$$\mathbf{x}^l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^u. \quad (4.3)$$

A partir de tal metodologia pode-se determinar os parâmetros ótimos de um ou mais NDs para operarem em qualquer faixa de frequência do sistema primário. Uma abordagem mais detalhada quanto ao projeto de NDs para sistemas lineares com múltiplos GDL pode ser vista em Silva (2019).

Para sistemas não lineares são realizados os mesmos procedimentos, sendo que, como o sistema é não linear, o objetivo é minimizar a curva de resposta na frequência, CRF, a qual pode ser obtida de forma analítica aproximada ou numérica.

4.2 MODOS ASSUMIDOS

O modelo não linear proposto por meio do método dos modos assumidos foi aplicado numericamente a uma viga biengastada com dimensões 3 x 40 x 708 mm, de aço ASTM A-36. Por questões de simplificação, apenas os dois primeiros modos de vibrar foram considerados, porém mais modos também podem ser considerados sem a necessidade de alterações no método.

Desta forma, foram obtidas as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do sistema, além do vetor de forças de restauração não lineares. Quanto ao amortecimento, foi considerado que o sistema possui amortecimento proporcional, com parâmetros $\alpha = 3$ e $\beta = 2 \times 10^{-6}$, assim como em Malatkar (2003).

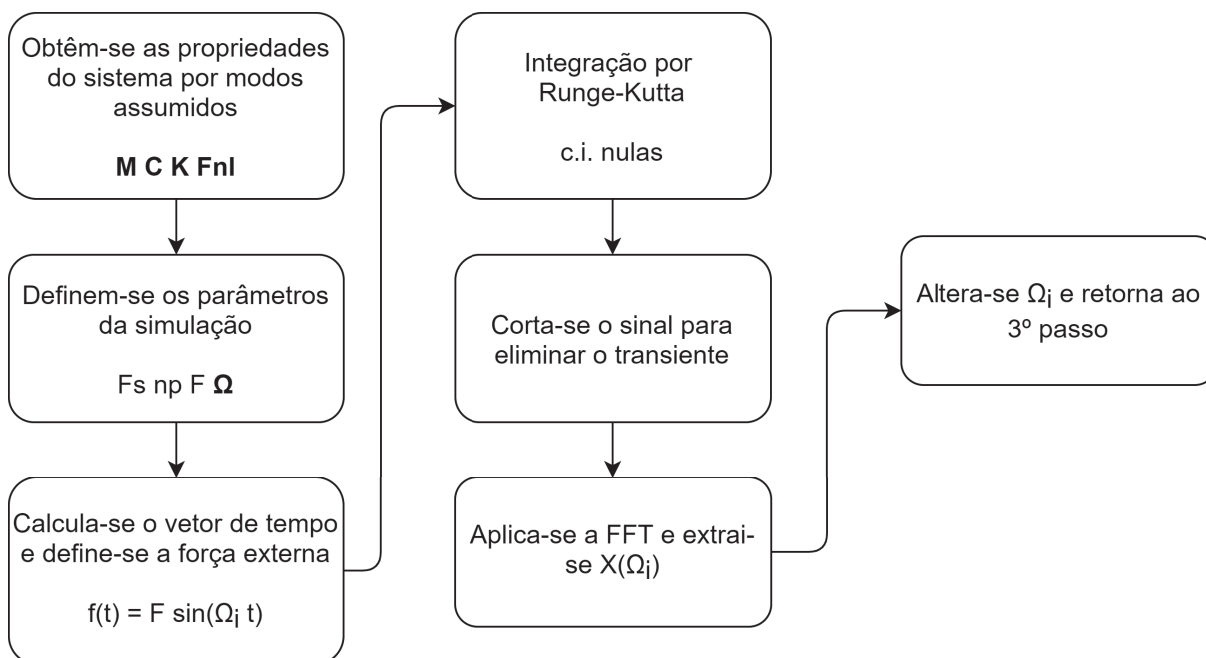
4.2.1 Obtenção da CRF para sistemas não lineares

A obtenção das CRFs do sistema não linear estudado foi realizada por meio de simulações numéricas utilizando o método de Runge-Kutta. A resposta do sistema foi simulada para cada frequência de interesse utilizando condições iniciais nulas, para uma janela de tempo suficientemente grande, de forma a uma boa parcela do sinal apresentar regime permanente.

Então foi aplicada a transformada rápida de Fourier, FFT, somente à parcela permanente do sinal para a obtenção da amplitude da resposta do sistema na frequência de excitação. Desta forma obtém-se uma resposta completa, sem as simplificações necessárias para a aplicação dos métodos de perturbação. Em contrapartida, como se faz necessário obter a resposta do sistema para uma janela de tempo relativamente grande, a obtenção da curva de resposta na frequência para o sistema é mais lenta.

Para sistemas simples e com poucos GDL a obtenção não é tão demorada, porém o tempo de simulação aumenta consideravelmente para sistemas mais complexos.

FIGURA 7 – Fluxograma do processo realizado para a obtenção das CRF do modelo.



FONTE: O Autor (2021)

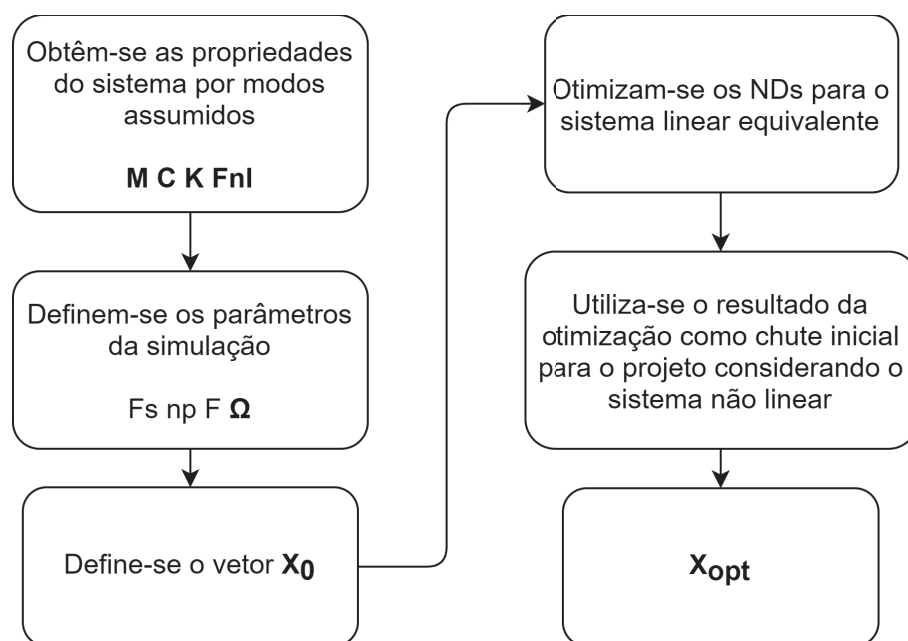
Foram obtidas CRFs para o sistema em estudo utilizando a metodologia desenvolvida, na faixa de frequências de 20 a 120 Hz, o que contempla os dois primeiros modos de vibrar. Além disso foram considerados diferentes níveis de excitação externa, entre 1 e 20 N, do tipo senoidal. Com o objetivo de analisar apenas a parcela do sinal no regime permanente, foram utilizados 150 períodos da força externa para a faixa de frequências em torno do primeiro modo, 20 a 60 Hz, e 300 períodos para a faixa de frequências em torno do segundo modo, 60 a 120 Hz. O vetor de tempo foi construído com uma frequência de amostragem de 1000 Hz.

4.2.2 Projeto ótimo de NDs para sistemas não lineares com múltiplos GDL

A inserção de NDs no sistema em estudo neste trabalho é facilmente realizada por meio de seus PEG, que são adicionados ao sistema por meio do método dos modos assumidos, como massas e amortecedores equivalentes. O projeto ótimo dos parâmetros dos NDs é realizado via otimização não linear, minimizando a CRF do sistema. O objetivo da otimização é minimizar a norma da resposta do sistema em uma determinada faixa de frequências. Este é um processo iterativo que necessita da avaliação da função objetivo diversas vezes. Como a obtenção da CRF é relativamente demorada, a convergência da otimização também é demorada.

Para reduzir o tempo de otimização, optou-se por realizar primeiro o projeto ótimo dos NDs para o sistema linear equivalente, pois a avaliação da função objetivo para o caso linear é totalmente algébrica e a otimização converge rapidamente (em termos de tempo). Então os parâmetros ótimos obtidos para o ND do sistema linear equivalente são utilizados como “chute” inicial na otimização do caso não linear.

FIGURA 8 – Fluxograma do processo proposto para a otimização de NDs para sistemas não lineares.



FONTE: O Autor (2021)

Por conveniência optou-se por trabalhar com um ND viscoso, composto por massa, mola e amortecedor. Os PEG utilizados para modelar este e outros tipos de NDs são indicados em Bavastri et al. (2007).

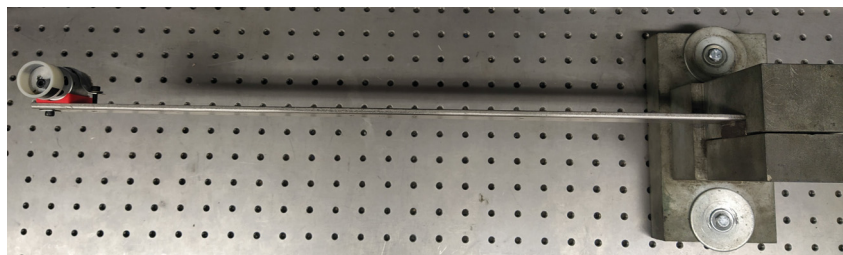
Foram realizados alguns testes para avaliar a eficiência da metodologia proposta para o controle passivo de vibrações por meio de neutralizadores dinâmicos. Optou-se por realizar o controle do primeiro e do segundo modo de vibrar, separadamente e simultaneamente, por meio dos dispositivos ótimos projetados para o sistema não linear e para o sistema linear equivalente.

4.3 ABORDAGEM EXPERIMENTAL DO EFEITO SOMMERFELD

O efeito Sommerfeld tem sido amplamente explorado na literatura, devido a sua complexidade e beleza dinâmica. Aqui realiza-se um esforço para propor uma alternativa efetiva para o seu controle por meio de NDs. Desta forma, foi proposto um aparato experimental para a investigação do efeito Sommerfeld em sistemas mecânicos, o qual é apresentado na FIGURA 9 e consiste em uma viga engastada-livre com

um motor DC em sua extremidade livre. A viga é retangular, de aço inox e possui espessura de 4,8 mm, largura de 37 mm e comprimento de 540 mm. A massa do motor desbalanceado é 0,085 Kg e o desbalanceamento foi realizado com 6,59 g a 15 mm do eixo de rotação.

FIGURA 9 – Sistema eletro-mecânico utilizado nos experimentos do efeito Sommerfeld.



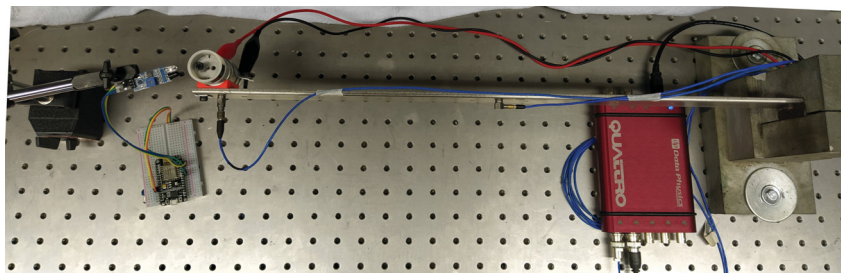
FONTE: O autor (2020);

Foram propostos dois modelos numéricos para a descrição do sistema mecânico proposto: por meio do MEF, utilizando o software Ansys, e pelo método dos modos assumidos. No modelo pelo MEF foram utilizados 54 elementos BEAM3, não contemplando os graus de liberdade torcionais, já que os fenômenos analisados são predominantemente nos modos de vibrar translacionais. Já no método dos modos assumidos, todas as avaliações das equações pertinentes foram realizadas numericamente, utilizando incremento espacial de 1×10^{-5} m, com integração numérica trapezoidal na avaliação das integrais e o método das diferenças finitas para a avaliação das derivadas. Em ambos os modelos numéricos foram considerados os quatro primeiros modos de vibrar e os seus parâmetros foram calibrados com base em respostas experimentais, medindo-se a FRF do sistema mecânico.

A obtenção das FRF experimentais foi realizada por meio de ensaios de impacto, utilizando o analisador DataPhysics Quattro, um martelo de impacto PCB Piezotronics, modelo 086C04, e um acelerômetro 32C68, também PCB Piezotronics. A excitação foi realizada a 140 mm do engaste e a resposta foi medida a 520 mm do engaste.

Também foram realizados ensaios durante a partida do motor desbalanceado. Para este experimento, o aparato experimental utilizado é mostrado na FIGURA 10. Foram utilizados dois acelerômetros, modelos 32C68 e 32C65, PCB Piezotronics, e o analisador DataPhysics Quattro para a aquisição dos sinais de aceleração. Já para a instrumentação da rotação do motor, foi desenvolvido um sistema baseado no microcontrolador ESP8266, utilizando sensores infravermelhos. Foi fabricado um *encoder* por meio de FDM (*Fused Deposition Modeling*) para a medição da rotação junto aos sensores infravermelhos.

FIGURA 10 – Aparato experimental para a instrumentação do sistema durante a operação do motor.



FONTE: O autor (2020).

Também foram realizadas simulações temporais de forma numérica, por meio do modelo linear obtido pelo método dos modos assumidos. Nesta abordagem, foi utilizado o método de Runge-Kutta para a solução das equações diferenciais. A simulação foi realizada para um intervalo de tempo de 16 s, com frequência de amostragem de 2048 Hz. Desta simulação foram extraídos para análise os mesmos sinais adquiridos experimentalmente.

Após a execução dos experimentos, identificou-se a ocorrência do efeito Sommerfeld durante a passagem pelo segundo modo de vibrar, 72 Hz. Foi realizado, assim, o projeto ótimo de um NDV para o controle do sistema em torno desta frequência.

O projeto foi realizado no software LAVIBS-ND, o qual utiliza a teoria dos PEG, TONL e os parâmetros modais do sistema a controlar para o projeto do dispositivo. O software foi alimentado com os parâmetros modais do sistema, isto é, modos de vibrar, frequências naturais e fatores de amortecimento modais, os quais foram obtidos do modelo de elementos finitos calibrado para o sistema. No software há a opção de otimizar a localização do ND, porém optou-se por acoplar o ND à extremidade livre da viga por uma questão de facilidade de projeto. Também optou-se, por uma questão de disponibilidade do grupo, pelo uso de borracha butílica para o projeto do dispositivo. Suas propriedades são apresentadas em Voltolini et al. (2018).

A escolha do uso dos parâmetros modais do modelo de elementos finitos foi feita pelo fato de que o *software* as utiliza para o projeto dos NDs. Além disso, as informações de todo o sistema podem ser aproximadas medindo-se a resposta de apenas poucos pontos. Porém tais parâmetros também podem ser obtidos de outras formas, como através de experimentos.

Como resultado, o *software* retornou a massa total do dispositivo e sua frequência natural. Devido à pequena massa do dispositivo e a limitação de tamanho necessária para a viabilidade do projeto, já que o dispositivo necessita ser pequeno devido às dimensões da viga, optou-se por fabricar um NDV do tipo pendular. Um amplo estudo sobre NDVs, pendulares e simples, é encontrado em Espíndola, Bavastri et al. (2010).

O projeto foi realizado no software LAVIBS-ND, por meio dos parâmetros modais do sistema, extraído do modelo em MEF. Por conveniência, a posição de acoplamento do NDV não foi otimizada, optando-se por acoplá-lo à extremidade livre da viga. Os experimentos já mencionados foram refeitos com o intuito de verificar a eficácia do dispositivo projetado no controle do fenômeno estudado.

Neste capítulo foi apresentada a metodologia desenvolvida para a investigação numérica de sistemas não lineares com múltiplos GDL, por meio de respostas no domínio do tempo e de CRF. Também foi apresentada uma metodologia para o projeto ótimo de NDs para sistemas não lineares com múltiplos graus de liberdade, baseada na metodologia já citada. Além disso, detalhou-se os procedimentos realizados para investigação experimental do efeito Sommerfeld, bem como seu controle por meio de um NDV. No capítulo seguinte serão apresentados os resultados destes tópicos.

5 RESULTADOS

Neste capítulo apresentam-se os resultados obtidos, com a respectiva discussão acerca dos mesmos. Na Seção 5.1 apresentam-se os resultados da investigação numérica em sistemas não lineares com múltiplos GDL e seu controle por meio de ND. Na Seção 5.2 apresentam-se os resultados obtidos na identificação e controle experimental do efeito Sommerfeld, contemplando a identificação do sistema e a caracterização do efeito Sommerfeld, no domínio do tempo e no plano tempo-frequência.

5.1 MODOS ASSUMIDOS

Aqui são apresentados os resultados obtidos para a metodologia proposta para o controle de sistemas não lineares com múltiplos graus de liberdade. Primeiro foi realizada uma análise linear preliminar. As frequências naturais obtidas para os dois primeiros modos foram 31,25 e 86,15 Hz, respectivamente. Na FIGURA 11 apresenta-se a FRF do sistema linear equivalente.

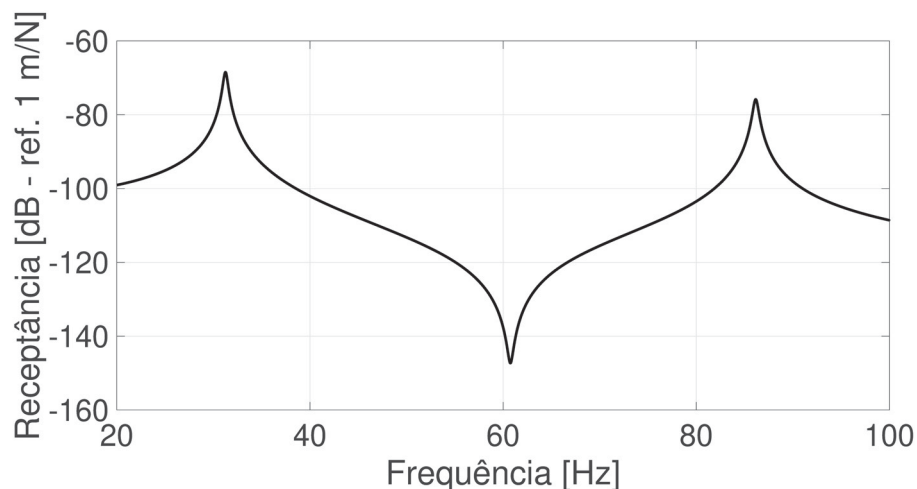


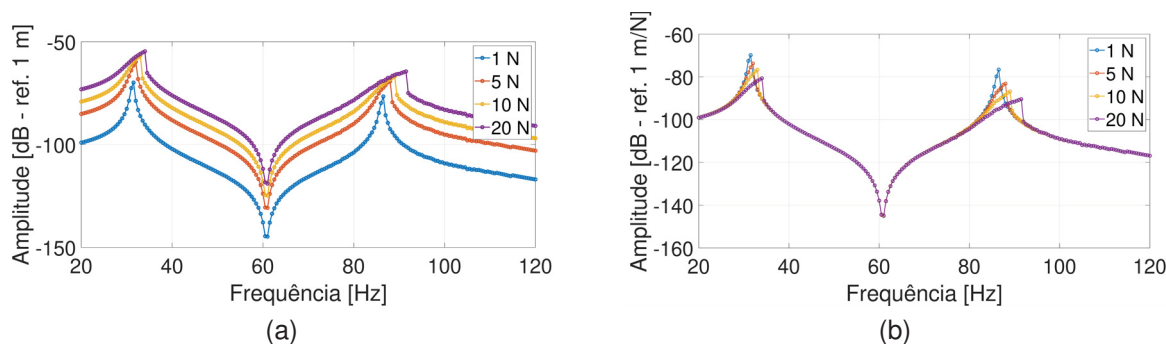
FIGURA 11 – FRF do sistema linear equivalente, $k = 300$ e $s = 50$ mm.

5.1.1 Resposta do sistema não linear

As respostas do sistema não linear sob análise foram obtidas por meio da metodologia já exposta e seus resultados são apresentados nesta seção. Na FIGURA 12a apresentam-se as curvas amplitude-frequência do sistema em análise para diversas amplitudes de excitação. Nota-se o enrijecimento do sistema por meio do aumento da frequência de salto. Na FIGURA 12b são apresentadas as CRF do sistema para as mesmas amplitudes de excitação. Nesta representação é possível observar de maneira mais intuitiva o enrijecimento do sistema, pois conforme ocorre o aumento da amplitude de excitação a razão entre a resposta e a excitação diminui, além da mudança da

frequência de salto. Também se nota que onde a amplitude de vibração é menor há congruência entre as curvas, inclusive com a curva linear, FRF.

FIGURA 12 – Respostas do sistema não linear: 12a Curvas amplitude-frequência e 12b curva de resposta na frequência, CRF.



FONTE: O autor (2019).

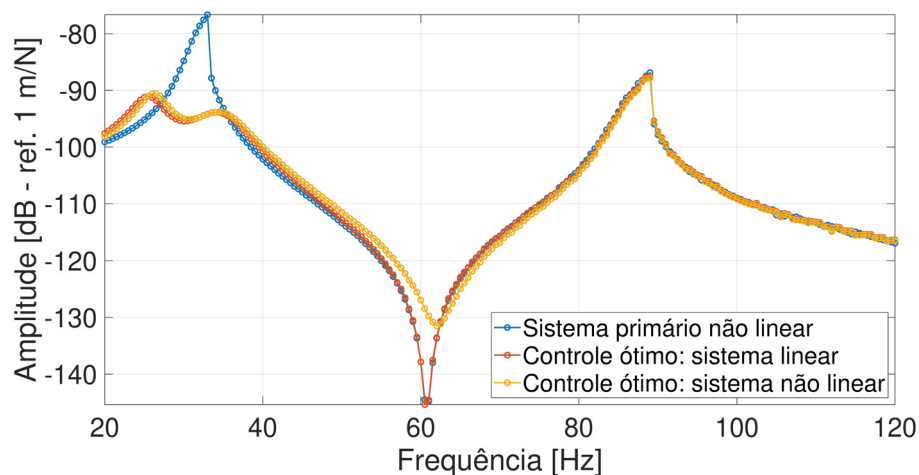
5.1.2 Controle ótimo do primeiro modo de vibrar

Projetou-se um ND viscoso para operar somente no primeiro modo de vibrar da estrutura, cuja frequência de ressonância é 31,25 Hz. Para tanto desejou-se minimizar a resposta do sistema no intervalo de 20 a 60 Hz. Primeiramente foi realizado um projeto para determinar um dispositivo ótimo para o controle do primeiro modo de vibrar do sistema linear equivalente. Os parâmetros ótimos encontrados foram $\Omega_a = 28,59$ Hz, $\xi_a = 0,17$ e $x_a = 0,35$ m e o processo de otimização durou 6 segundos.

Após a otimização do ND para o sistema linear equivalente foi realizada a otimização do mesmo para o sistema não linear proposto. Os parâmetros ótimos encontrados foram $\Omega_a = 29,70$ Hz, $\xi_a = 0,16$ e $x_a = 0,41$ m e o algoritmo levou aproximadamente 10 horas até convergir, utilizando os mesmos parâmetros anteriores.

Para validação foram comparadas as CRF do sistema para os três casos, sistema não linear sem neutralizador, com o neutralizador ótimo para o sistema linear equivalente e com o neutralizador ótimo para o sistema não linear. Os resultados correspondentes são mostrados na FIGURA 13.

FIGURA 13 – CRF do sistema primário e composto, com os dois neutralizadores propostos.

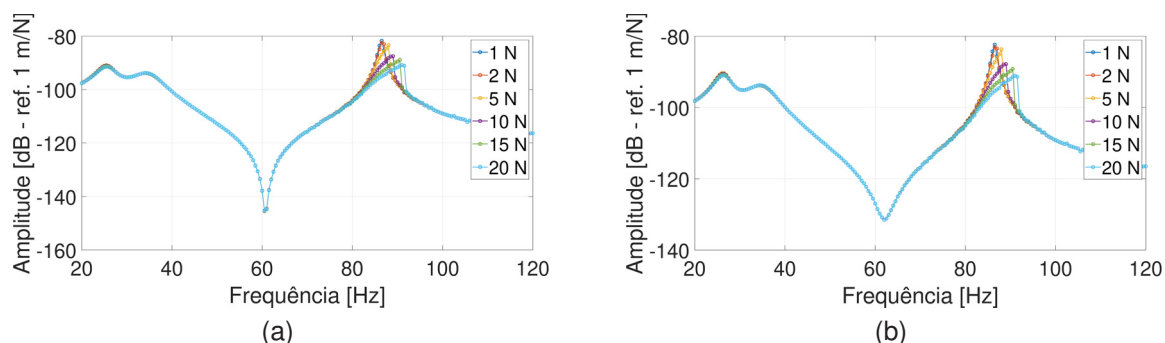


FONTE: O autor (2021).

Observa-se que o ND projetado para o sistema linear foi levemente mais eficiente do que o projetado especificamente para o sistema não linear, sendo que ambos obtiveram bons resultados, proporcionando uma redução na faixa de 14 dB de pico a pico. Além disso, o segundo modo de vibrar teve sua amplitude levemente afetada pelo ND, entre 0,6 e 0,9 dB, o que se deve à otimização não ter posicionado o ND no centro da viga, o que é evidenciado no caso do projeto para o sistema não linear.

Foi ainda realizada uma segunda análise quanto à eficiência do ND avaliando sua resposta a diferentes níveis de excitação externa entre 1 e 20 N. Os resultados obtidos são apresentados na FIGURA 14.

FIGURA 14 – CRF do sistema não linear com controle no primeiro modo: (a) Controle com ND dinâmico projetado para o sistema linear e (b) controle com ND dinâmico projetado para o sistema não linear.



FONTE: O autor (2021).

Por meio dos gráficos acima pode-se observar que ambos os dispositivos reduzem consideravelmente a natureza não linear do sistema na faixa de controle, já que a razão entre a amplitude da resposta e a amplitude da força externa se man-

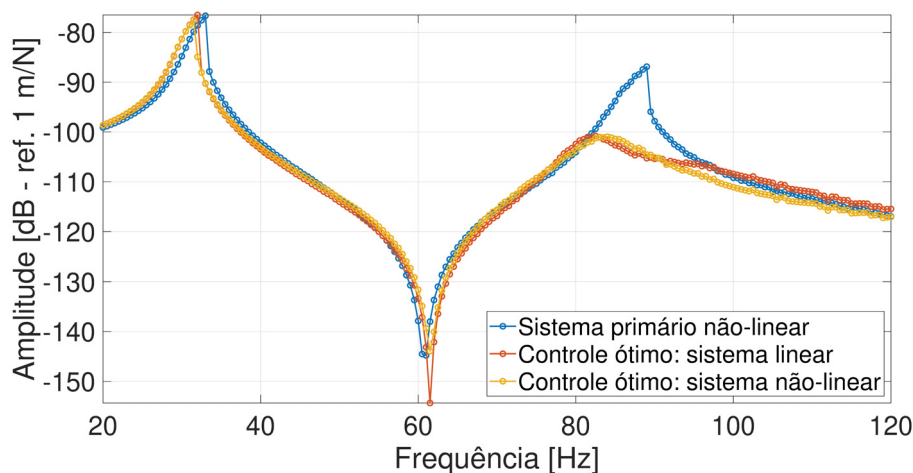
têm aproximadamente constante para as amplitudes testadas no entorno da primeira frequência natural. Este fenômeno ocorre pois o acoplamento do ND ao sistema primário reduz consideravelmente a sua amplitude de vibração e, como é sabido, as forças de restauração não lineares deste tipo de sistemas são desprezíveis quando sob pequenas deflexões. Eventualmente, para amplitudes de vibração maiores, o sistema voltará a exibir um comportamento não linear.

5.1.3 Controle ótimo do segundo modo de vibrar

Para o projeto do ND viscoso relativo ao controle do segundo modo de vibrar, 86,15 Hz, buscou-se minimizar a CRF no intervalo de 65 a 120 Hz. Como realizado anteriormente, primeiro otimizou-se o ND para o sistema linear equivalente para então utilizá-lo como “chute” inicial na minimização da resposta do sistema não linear.

O processo de otimização do ND para o sistema linear equivalente durou cerca de 10 segundos e os parâmetros ótimos obtidos foram: $\Omega_a = 86,83$ Hz, $\xi_a = 0,15$ e $x_a = 0,21$ m. Já a otimização do ND para o sistema não linear levou cerca de 22 horas para convergir ao resultado e os parâmetros ótimos obtidos para este caso são: $\Omega_a = 65,00$ Hz, $\xi_a = 0,53$ e $x_a = 0,21$ m. Os resultados obtidos para os dois dispositivos projetados são apresentados na FIGURA 15.

FIGURA 15 – CRF do sistema composto com os NDs projetados para o controle do segundo modo.

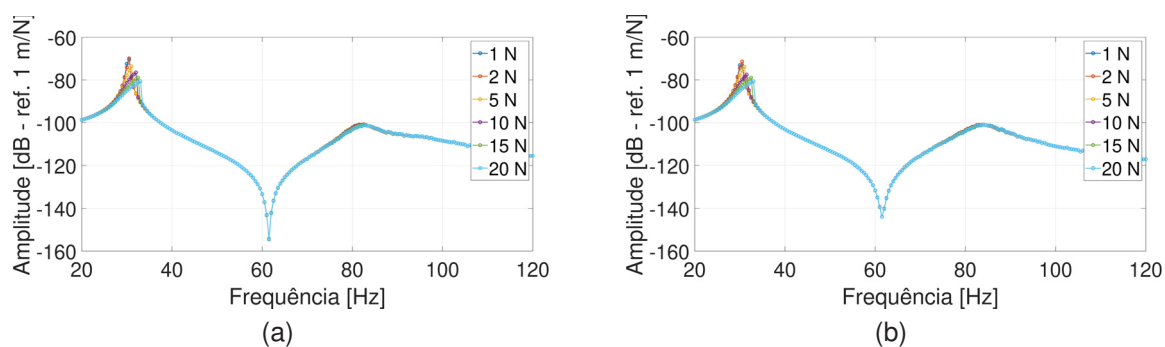


FONTE: O autor (2021).

Observa-se que, apesar dos parâmetros ótimos obtidos para este caso serem bem diferentes, ambos os ND apresentaram resultados muito parecidos, sendo que a redução na amplitude de vibração do segundo modo foi muito próxima para ambos os casos, 13,19 dB de pico a pico. O primeiro modo foi levemente afetado, de forma a elevar a amplitude da CRF e causar uma leve redução na frequência de ressonância, o que era esperado, já que uma massa foi adicionada ao sistema.

Novamente foi verificado o comportamento do sistema composto para excitações na faixa de 1 a 20 N. Os resultados obtidos são apresentados na FIGURA 16.

FIGURA 16 – CRF do sistema não linear com controle no segundo modo: (a) Controle com ND dinâmico projetado para o sistema linear e (b) controle com ND dinâmico projetado para o sistema não linear.



FONTE: O autor (2021).

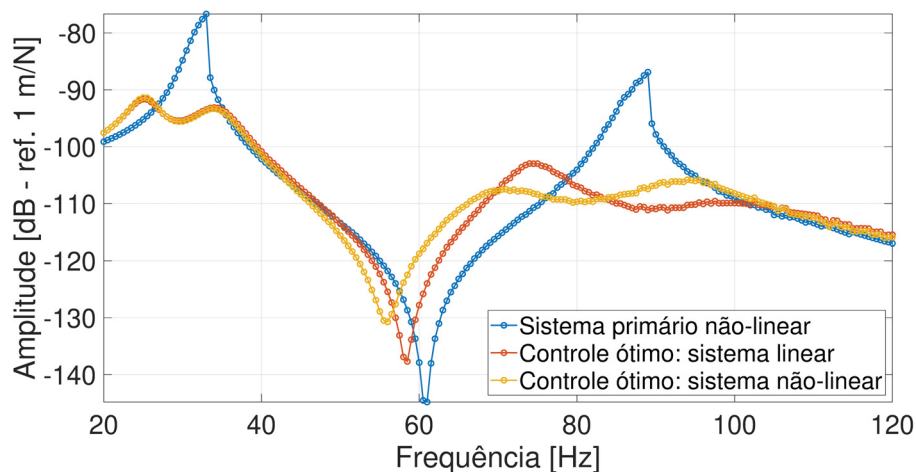
Como no caso do controle do primeiro modo de vibrar, também se observa que o segundo modo de vibrar apresenta um comportamento aproximadamente linear. No caso do ND projetado para o sistema não linear observa-se um comportamento mais linearizado.

5.1.4 Controle ótimo simultâneo dos dois primeiros modos de vibrar

Neste estudo de caso pretende-se avaliar a eficiência da metodologia proposta quanto à otimização em uma banda de frequência mais ampla, abrangendo os dois modos de vibrar considerados anteriormente. Para tanto foi necessário utilizar dois NDs viscosos devido à discrepância entre as frequências naturais. Neste caso optou-se por minimizar a CRF na faixa de 20 a 120 Hz.

A otimização dos parâmetros ótimos para o sistema linear equivalente durou cerca de 40 segundos e os resultados foram: $\Omega_a = [28,07 \ 86,02]$ Hz, $\xi_a = [0,17 \ 0,15]$ e $x_a = [0,35 \ 0,18]$ m. Por outro lado, como esperado, a otimização dos parâmetros para o sistema não linear teve uma convergência bem mais lenta, durando cerca de 29 horas. Para este caso os parâmetros ótimos obtidos foram: $\Omega_a = [28,19 \ 75,41]$ Hz, $\xi_a = [0,16 \ 0,16]$ e $x_a = [0,38 \ 0,20]$ m. Os resultados obtidos são apresentados na FIGURA 17.

FIGURA 17 – CRF do sistema com ND projetado para o controle simultâneo dos dois primeiros modos.

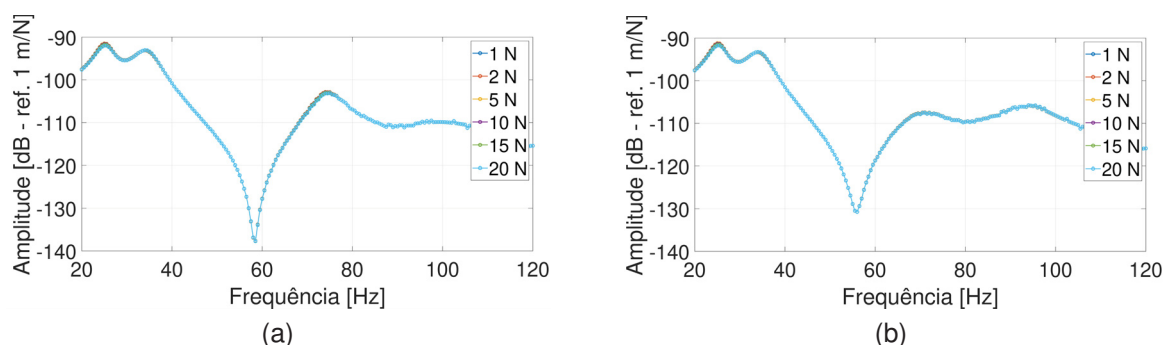


FONTE: O autor (2021).

Observa-se nos gráficos que a redução na amplitude do primeiro modo é muito próxima em ambas as abordagens, com os NDs projetados para o sistema linear equivalente e para o sistema não linear, em torno de 15 dB de pico a pico. Já no caso do segundo modo de vibrar há uma diferença maior entre as abordagens, sendo que o projeto específico para o sistema não linear apresentou uma maior eficiência, 20 dB frente a 16 dB para o ND projetado para o sistema linear equivalente.

Quanto à questão da linearização do sistema ocasionada pelo ND, verifica-se na FIGURA 18 que há uma maior eficiência quando o ND é projetado para o sistema não linear. Isso também foi observado no caso do segundo modo de vibrar.

FIGURA 18 – CRF do sistema não linear com controle simultâneo nos dois primeiros modos: (a) Controle com ND dinâmico projetado para o sistema linear e (b) controle com ND dinâmico projetado para o sistema não linear.



FONTE: O autor (2021).

5.1.5 Análise dos resultados

Nas tabelas abaixo apresenta-se uma comparação entre os resultados obtidos. Na TABELA 1 compara-se os parâmetros ótimos obtidos nas otimizações, bem como o

tempo de otimização para cada caso. É possível observar que enquanto os parâmetros relacionados ao primeiro modo de vibrar não sofrem grande alteração quando otimizados para o sistema linear equivalente ou para o sistema não linear, aqueles referentes ao segundo modo de vibrar sofrem grandes alterações, principalmente tratando-se da frequência natural do ND, que se apresenta menor do que a esperada.

TABELA 1 – Parâmetros ótimos obtidos nas otimizações dos NDs nas abordagens propostas.

| Modos a controlar | Sistema | Parâmetros ótimos | | | Tempo de otimização |
|-------------------|---------------------|-------------------|-------------|-----------|---------------------|
| | | Ω_a [Hz] | ξ_a [-] | x_a [m] | |
| 1º modo | ND sist. linear | 29,5942 | 0,1699 | 0,3579 | 6s |
| | ND sist. não linear | 29,6986 | 0,1644 | 0,4170 | 9h52min22 |
| 2º modo | ND sist. linear | 86,8312 | 0,1518 | 0,2123 | 10s |
| | ND sist. não linear | 65,0000 | 0,5273 | 0,2085 | 22h10min19 |
| 1º e 2º modo | ND sist. linear | 28,0681 | 0,1662 | 0,3554 | 40s |
| | | 86,0204 | 0,1476 | 0,1849 | |
| | ND sist. não linear | 28,1862 | 0,1611 | 0,3784 | 1d5h17min7 |
| | | 75,4145 | 0,1653 | 0,2014 | |

Na Tabela 2 são apresentadas as reduções obtidas na amplitude da CRF para cada abordagem realizada. Observa-se que, para o controle dos dois primeiros modos de vibrar separadamente, não há uma grande vantagem em utilizar o ND projetado para o sistema não linear, já que o tempo necessário para a otimização de seus parâmetros, por meio da metodologia proposta, é muito maior do que o necessário para otimizar o ND para o sistema linear equivalente, e não há diferença significativa entre o desempenho das duas abordagens.

Já se tratando do controle simultâneo dos dois modos de vibrar, há uma maior eficiência quando utiliza-se o ND projetado para o sistema não linear, o qual apresenta uma redução 4 dB maior do que o dispositivo projetado para o sistema linear equivalente, 20 dB frente a 16 dB. Porém o tempo para a convergência dos parâmetros ótimos do ND para o sistema não linear é muito maior do que o necessário para o sistema linear equivalente, havendo a necessidade de analisar as vantagens e desvantagens para cada caso.

TABELA 2 – Resultados obtidos nas abordagens realizadas para o controle do sistema não linear.

| Modos a controlar | Sistema | Amplitude [dB] | | Redução [dB] | |
|-------------------|------------------------|----------------|---------|--------------|---------|
| | | 1º modo | 2º modo | 1º modo | 2º modo |
| – | Primário não linear | -76,66 | -86,89 | – | – |
| 1º modo | ND p/ sist. linear | -90,6 | -87,55 | -13,94 | -0,66 |
| | ND p/ sist. não linear | -91,05 | -87,83 | -14,39 | -0,94 |
| 2º modo | ND p/ sist. linear | -76,51 | -100,08 | 0,15 | -13,19 |
| | ND p/ sist. não linear | -76,54 | -100,09 | 0,12 | -13,20 |
| 1º e 2º modo | ND p/ sist. linear | -91,36 | -103 | -14,7 | -16,11 |
| | ND p/ sist. não linear | -91,63 | -107,7 | -14,97 | -20,81 |

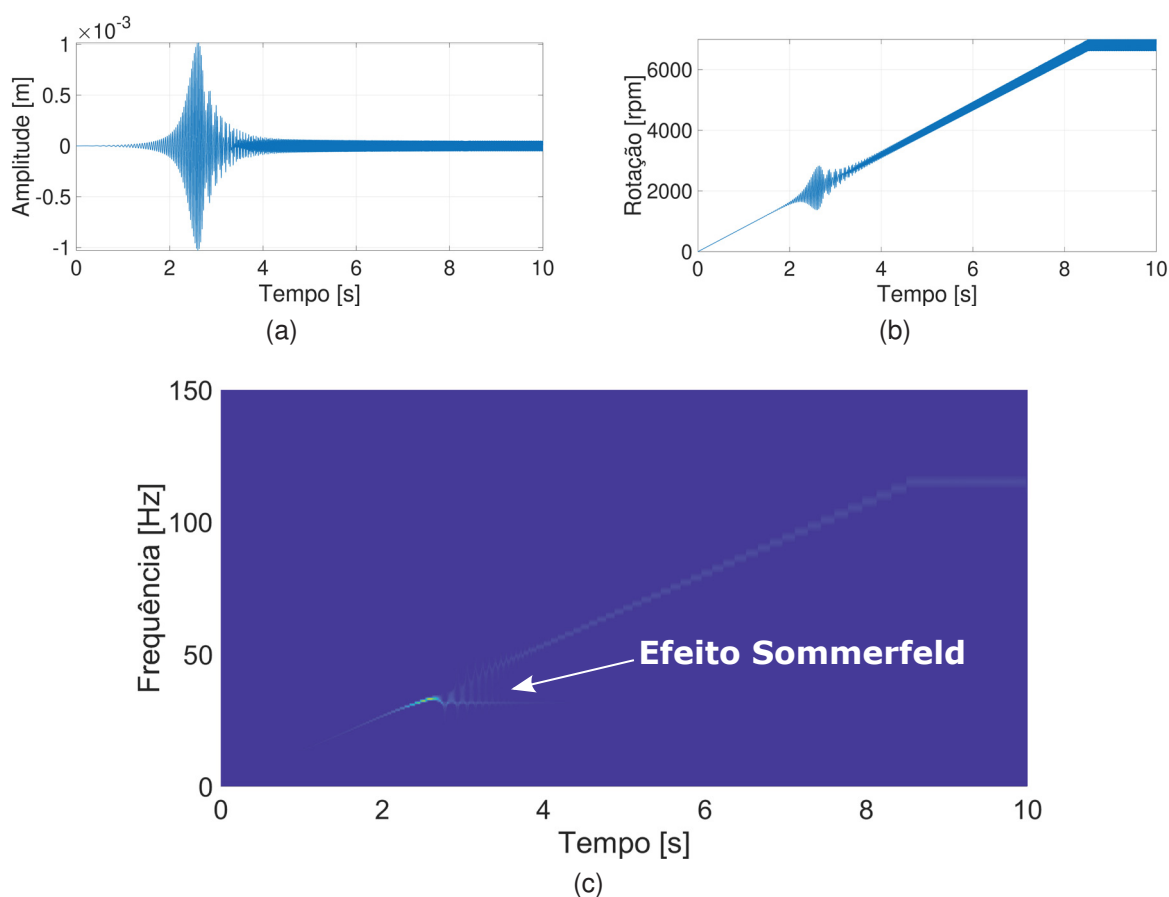
Nota: A otimização dos ND para o sistema não linear e a amplitude da CRF foram obtidas considerando a seguinte excitação: $F = 10 \sin(\Omega t)$

5.2 ANÁLISE NUMÉRICA DO EFEITO SOMMERFELD EM UM SISTEMA NÃO LINEAR CONTROLADO POR ND

Com o intuito de avaliar os efeitos do acoplamento de um ND a um sistema não linear durante a partida de um motor não-ideal, foram realizadas simulações numéricas levando em consideração o sistema de viga bi-engastada previamente analisado. Foi adicionado um motor não ideal ao centro da viga, com as mesmas propriedades do motor utilizado anteriormente, porém foi considerado que sua massa é desprezível, apenas por questões de simplificação.

A simulação foi realizada para um intervalo de tempo de 10 segundos com frequência de amostragem de 1000 Hz e foi considerado todo o caráter não linear do modelo proposto na seção 3.2.3. Os resultados da simulação são apresentados na FIGURA 19. Pode-se notar a presença do efeito Sommerfeld nos resultados obtidos, evidenciado pela dificuldade na passagem pela primeira frequência de ressonância na curva de rotação do motor e no plano tempo-frequência, obtido por meio da Wavelet synchrosqueezed transform, WSST. A WSST é uma transformada tempo-frequência, com a qual é possível identificar, com bastante precisão, transientes no sinal analisado, ou seja, é possível identificar as mudanças nas componentes dominantes do sinal. Neste caso, podemos analisar que a amplitude de vibração aumenta em um determinado momento, devido ao padrão de cores mais quentes entre dois e quatro segundos. Também se verifica que em determinado momento a frequência do sinal se mantém constante, o que indica a ocorrência do efeito Sommerfeld (VARANIS et al., 2019).

FIGURA 19 – Resultados numéricos para o sistema não linear durante a ocorrência do efeito Sommerfeld: (a) Sinal temporal de deslocamento, (b) sinal temporal de rotação do motor e (c) WSST do sinal de deslocamento.

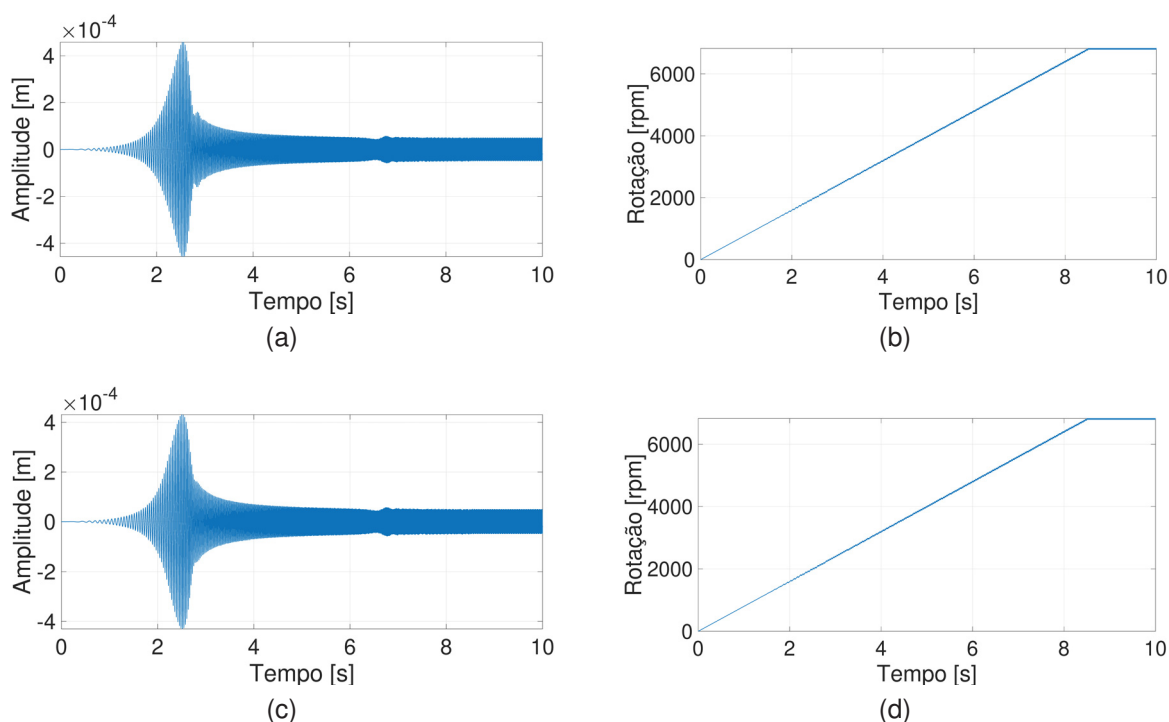


FONTE: O autor (2021).

Como o fenômeno afeta o primeiro modo de vibrar, optou-se por reduzir a amplitude de vibração associada a este modo por meio de um ND. Duas abordagens foram realizadas: utilizando um ND ótimo para o sistema linear equivalente e um ND ótimo para o sistema não linear.

Como anteriormente foi considerado que a massa do motor é desprezível, podem ser utilizados os NDs já otimizados, pois o sistema continua o mesmo, apesar da força não linear atuante. Os resultados obtidos para o sistema controlado são apresentados na FIGURA 20.

FIGURA 20 – Resultados numéricos para o sistema não linear com controle passivo: (a) Sinal temporal de deslocamento, (b) sinal temporal de rotação do motor e (c) WSST do sinal de deslocamento.

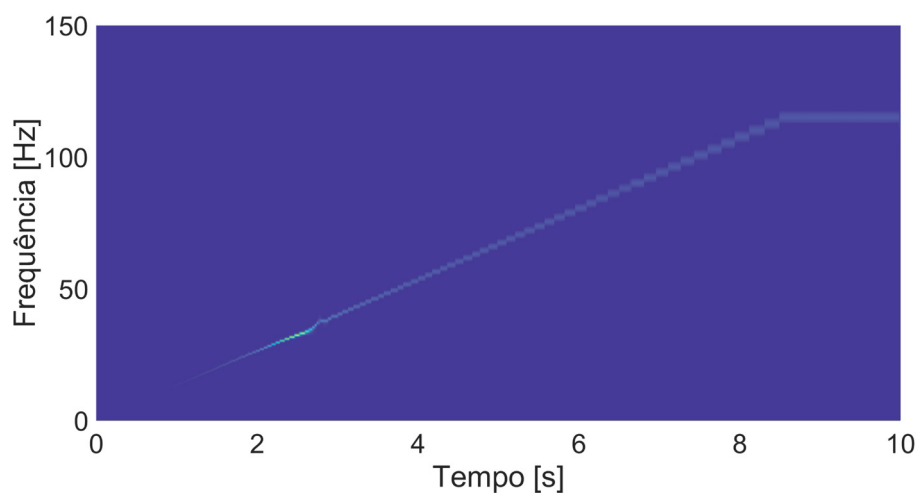


FONTE: O autor (2019).

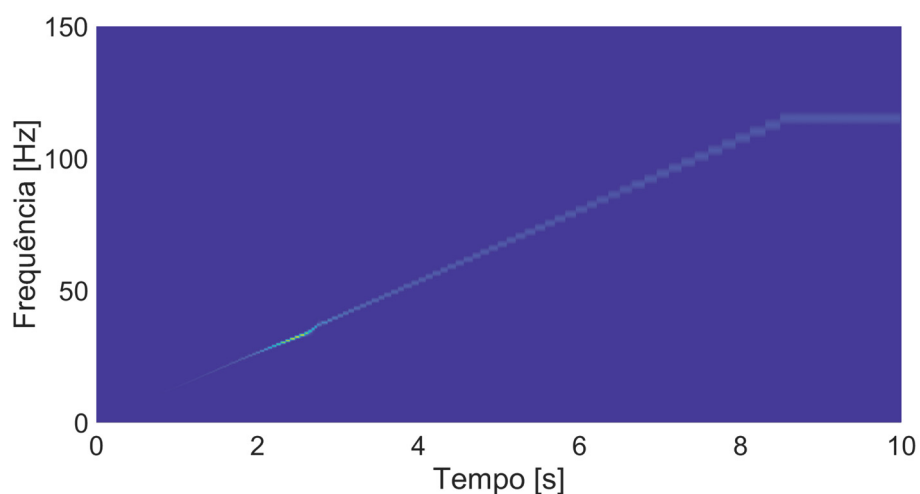
Apenas analisando as curvas de amplitude apresentadas nas FIGURAS 20(a) e 20(c) pode-se observar que a amplitude de vibração durante a ressonância foi consideravelmente reduzida, de $1,01 \times 10^{-3}$ m no caso sem controle para $1,11 \times 10^{-4}$ m utilizando o ND projetado para o sistema linear e $1,05 \times 10^{-4}$ m quando utilizado o ND projetado para o sistema não linear. Apesar de ambos dispositivos apresentarem reduções na amplitude muito próximas, é possível notar que o segundo dispositivo proporciona uma passagem pela ressonância mais suave, com uma menor oscilação durante a zona de batimento. Além disso, observa-se nas curvas de rotação do motor, FIGURAS 20(b) e 20(d), que o motor não teve dificuldades durante a passagem pela frequência de ressonância.

Por meio da análise dos planos tempo-frequência das duas abordagens realizadas também se observa que não há dificuldades na passagem pela ressonância, sem apresentar o fenômeno de captura da ressonância. Os planos tempo-frequência são apresentados na FIGURA 21.

FIGURA 21 – WSST dos sinais de deslocamento para o sistema não linear controlado: (a) Controle com o ND projetado para o sistema linear equivalente e (b) com o ND projetado para o sistema não linear.



(a)



(b)

FONTE: O autor (2021).

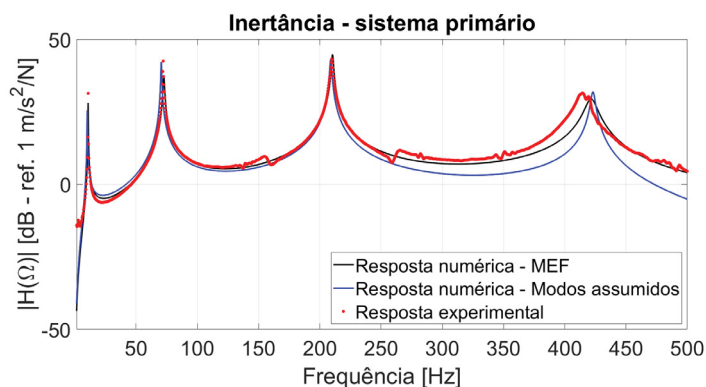
5.3 IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE DO EFEITO SOMMERFELD: ABORDAGEM EXPERIMENTAL

Nesta seção apresentam-se os resultados acerca do controle do efeito Sommerfeld em uma viga engastada-livre por meio de ND. Primeiramente, foi realizada uma avaliação da FRF do sistema para a identificação das suas frequências naturais. O sistema também foi modelado por meio do MEF e do método dos modos assumidos. Os resultados obtidos, experimentalmente e numericamente, são mostrados na FIGURA 22.

TABELA 3 – Fatores de amortecimento aproximados para os modelos matemáticos utilizados.

| Modelo | ξ_1 | ξ_2 | ξ_3 | ξ_4 |
|-----------------|--------------------|--------------------|----------------------|----------------------|
| MEF | 5×10^{-3} | 7×10^{-3} | 7×10^{-3} | $3,5 \times 10^{-3}$ |
| Modos assumidos | 4×10^{-3} | 6×10^{-3} | $3,5 \times 10^{-3}$ | 4×10^{-3} |

FIGURA 22 – Função de resposta em frequência do sistema ensaiado, obtida com excitação a 140 mm e medição da resposta a 520 mm do engaste.

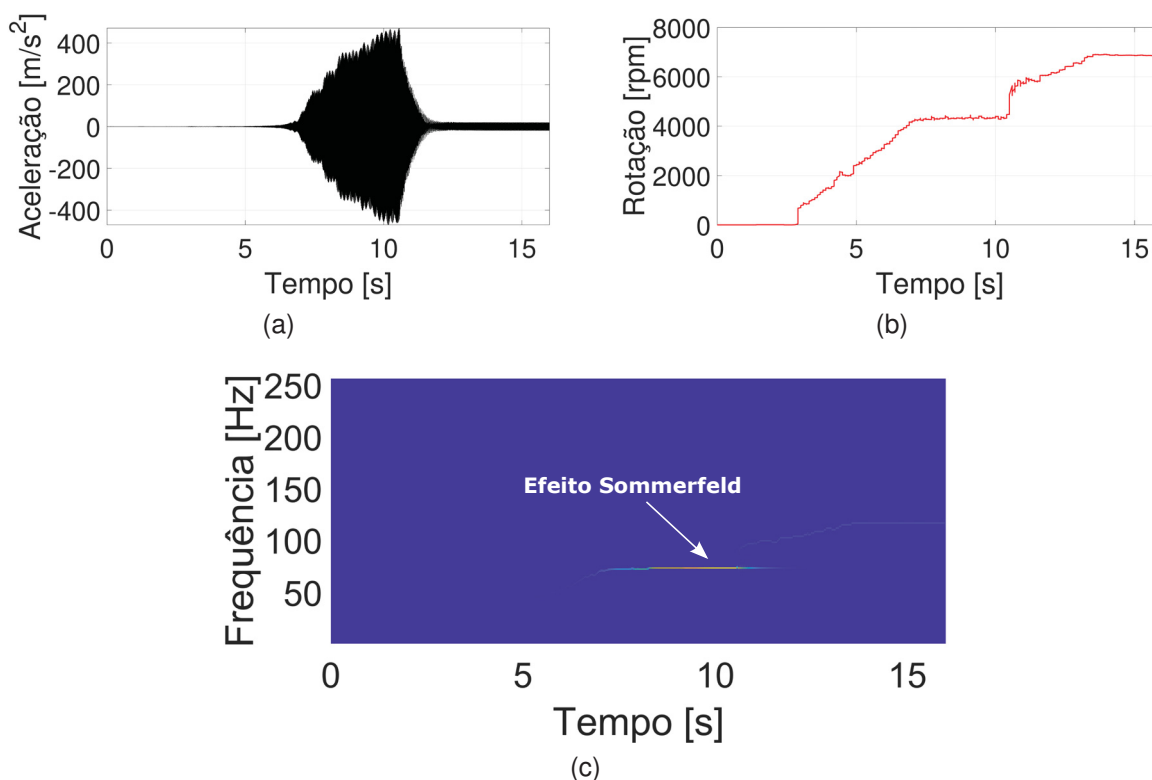


FONTE: O autor (2020).

Como observado na FIGURA 22, foi obtido um bom ajuste entre as curvas experimentais e numéricas. Na TABELA 3, apresentam-se os valores de fatores de amortecimento utilizados para o ajuste obtido. Importante salientar que houve divergências entre as respostas experimentais e numéricas devido à desconsideração dos modos de vibrar torcionais nos modelos matemáticos, que não são necessários para as análises realizadas neste trabalho.

Nos experimentos realizados na partida do motor DC foi identificado o efeito Sommerfeld, tanto por meio do sinal de aceleração, rotação e da WSST do sinal de aceleração, os quais são apresentados na FIGURA 23. Tanto por meio da análise do sinal de rotação, quanto pela WSST do sinal de aceleração da viga, foi observado que o efeito Sommerfeld ocorre na segunda frequência natural do sistema mecânico, 72 Hz. Na análise por meio da WSST, observa-se a estagnação da frequência dominante no sinal e aumento da amplitude de vibração, evidenciado devido ao padrão de cores mais quentes. Estas características também foram observadas em Varanis et al. (2019) e Mereles et al. (2019).

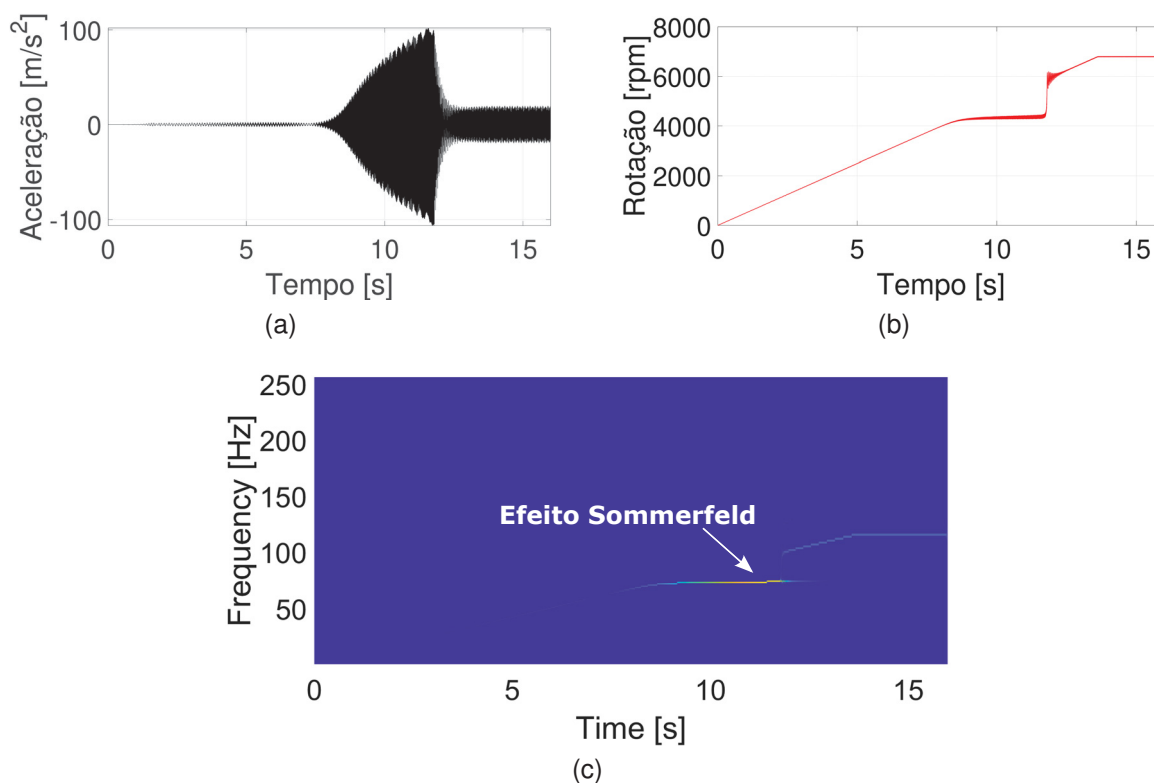
FIGURA 23 – Resultados experimentais: Sinais temporais de aceleração, 23a, e de rotação do motor, 23b, e 23c WSST do sinal de aceleração.



FONTE: O autor (2020).

Também foram realizadas simulações temporais de forma numérica, por meio do modelo linear obtido pelo método dos modos assumidos. O mesmo fenômeno foi observado, como pode ser visto na FIGURA 24, porém com menor amplitude máxima de vibração. Isso se deve ao fato do modelo ser linear, aproximado para pequenas amplitudes de vibração.

FIGURA 24 – Resultados numéricos: Sinais temporais de aceleração, 24a, rotação do motor, 24b, e 24c WSST do sinal de aceleração.

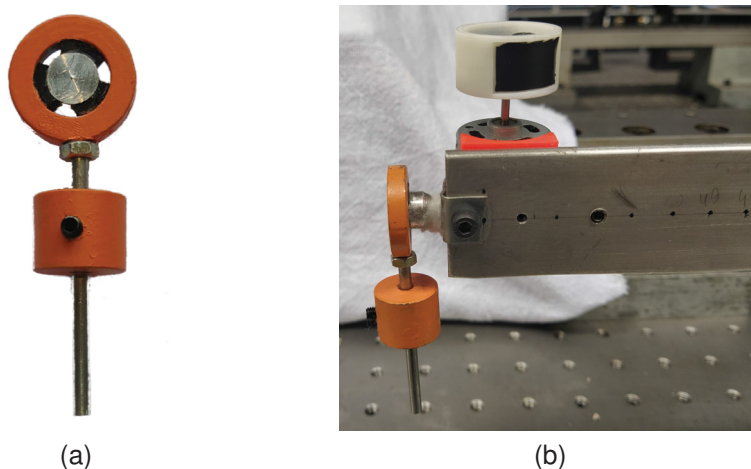


FONTE: O autor (2020).

Após identificada a ocorrência do efeito Sommerfeld e a frequência na qual o mesmo ocorre, foi projetado um NDV de forma a atuar durante a ocorrência do fenômeno. Os parâmetros ótimos obtidos para o NDV por meio do *software* LAVIBS-ND foram $m_a = 0,044$ kg e $\Omega_a = 60,31$ Hz. Como informado anteriormente, a posição não foi otimizada, fixando o NDV na extremidade livre da viga.

O dispositivo foi fabricado de forma a possibilitar a alteração do seu momento de inércia, proporcionando assim um ajuste fino da sua frequência natural. A FIGURA 25a mostra o dispositivo finalizado, enquanto que na FIGURA 25b apresenta-se o dispositivo acoplado à extremidade livre da viga por meio de adesivo instantâneo.

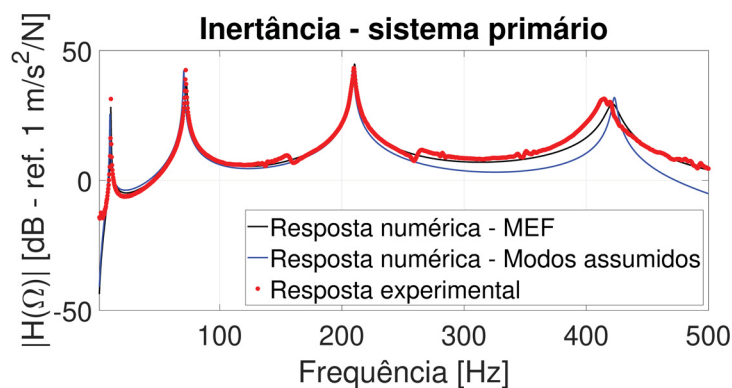
FIGURA 25 – NDV projetado para o controle do sistema: 25a Dispositivo desenvolvido e 25b dispositivo acoplado ao sistema primário.



FONTE: O autor (2020).

Os experimentos já realizados anteriormente foram repetidos, desta vez com o NDV acoplado ao sistema. O resultado obtido experimentalmente é apresentado na FIGURA 26. Observa-se que a redução na amplitude do segundo modo superou a prevista. Experimentalmente foi observada uma redução pico a pico de 28 dB na amplitude de vibração de pico a pico, enquanto era prevista uma redução de 25 dB.

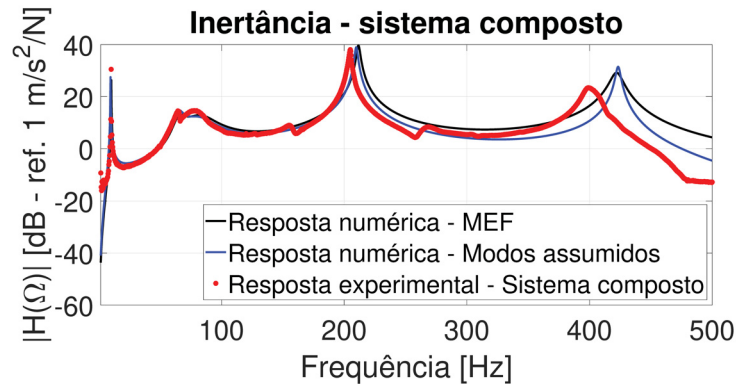
FIGURA 26 – Resultados experimentais obtidos com e sem o controle passivo.



FONTE: O autor (2021).

Na FIGURA 27, mostram-se as FRF obtidas para o sistema composto, experimentalmente e numericamente. O modelo de modos assumidos não se apresenta totalmente sintonizado, já que o NDV foi projetado com base no modelo do MEF. Porém mesmo assim o resultado obtido pelo método dos modos assumidos é bastante próximo ao observado experimentalmente.

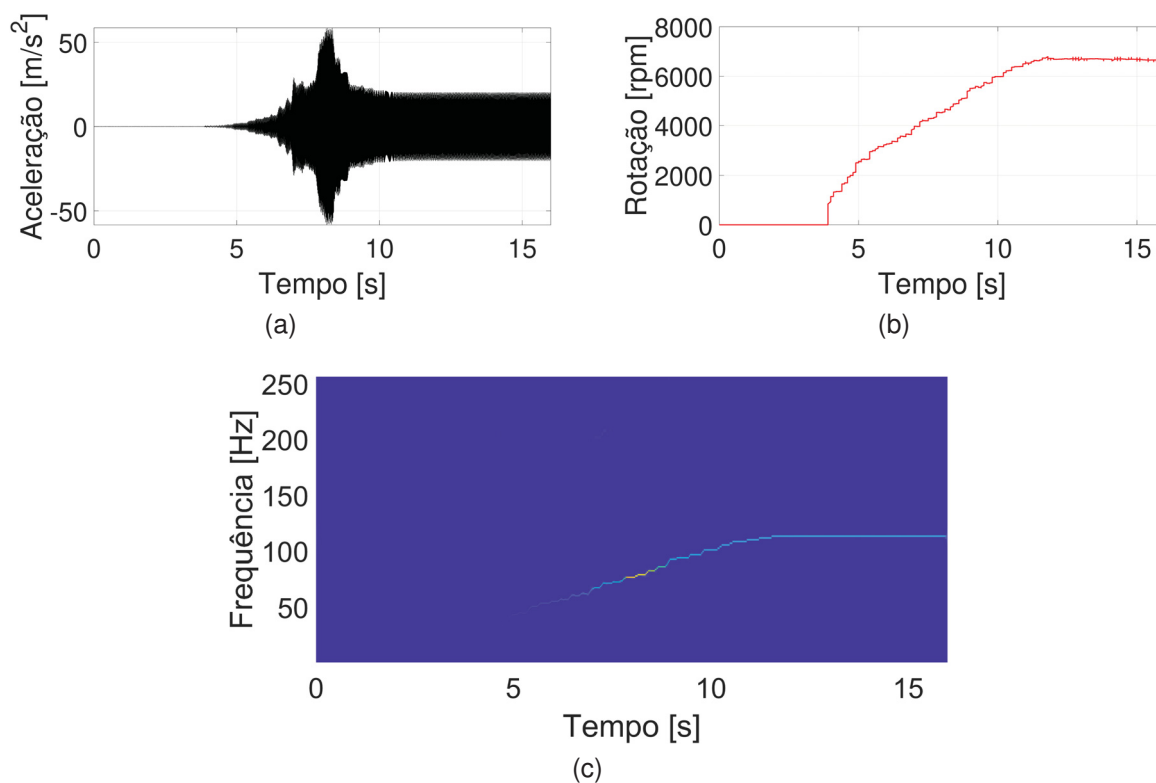
FIGURA 27 – FRF do sistema composto (sistema eletromecânico com NDV acoplado), obtida com excitação em 140 *mm* e medição da resposta a 520 *mm* do engaste.



As pequenas dimensões do dispositivo tornam sua montagem delicada. As dimensões dos elementos viscoelásticos não são precisas e os mesmos ficaram impregnados de adesivo instantâneo durante a sua colagem, o que afeta seu desempenho. Porém, mesmo nessas condições, o dispositivo se mostrou muito eficiente.

Após a caracterização do novo sistema por meio da FRF, foram realizados novos ensaios durante a partida do motor DC. Com o acoplamento do NDV ao sistema, o motor não teve dificuldades na passagem pela ressonância do sistema, eliminando a ocorrência do efeito Sommerfeld. Os resultados são apresentados na FIGURA 28.

FIGURA 28 – Resultados experimentais do sistema composto: Sinais temporais de aceleração, 28a, e de rotação do motor, 28b, e 28c WSST do sinal de aceleração.



FONTE: O autor (2020).

Observa-se que tanto no sinal de rotação do motor, quanto na WSST do sinal de aceleração, a aceleração do motor é constante e sua rotação não fica estagnada em momento algum. Além disso, a amplitude máxima de vibração durante a operação do motor foi reduzida em quase 10 vezes.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho apresenta-se uma abordagem para o projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos para sistemas não lineares com múltiplos graus de liberdade. Para tanto é proposto um modelo matemático por meio do método dos modos assumidos para descrever o comportamento não linear do sistema mecânico, a saber, uma viga duplamente engastada. Os neutralizadores dinâmicos são inseridos ao sistema primário por meio da técnica dos parâmetros equivalentes generalizados, utilizando as grandezas de massa e amortecimento equivalentes.

Para o cálculo numérico das curvas de resposta na frequência dos sistemas, tanto do sistema primário quanto do sistema composto, utiliza-se o método de Runge-Kutta e, para o projeto ótimo dos neutralizadores dinâmicos, busca-se minimizar a curva de resposta na frequência utilizando o método de Nelder-Mead, em um problema de otimização com restrições. Também para o projeto ótimo dos neutralizadores, primeiro otimiza-se um dispositivo para o sistema linear equivalente, com o intuito de reduzir o tempo de otimização, pois o processo utilizado para a obtenção da resposta do sistema não linear é lento, cerca de 10 minutos por curva amplitude-frequência.

Foram realizadas simulações considerando a inserção de neutralizadores dinâmicos, projetados para controlar o primeiro e o segundo modo de vibrar do sistema, isoladamente e simultaneamente, considerando o sistema linear e não linear. Em todos os casos analisados observou-se que, apesar de haver diferenças entre os parâmetros ótimos encontrados, a eficiência dos dispositivos em controlar o sistema não linear, reduzindo sua amplitude de vibração e características não lineares, são muito semelhantes.

Sabe-se que sistemas com rigidez polinomial, tal como a viga considerada, apresentam maiores características não lineares quando sob maiores amplitudes de movimento. Logo, as características não lineares anteriormente presentes na resposta do sistema são reduzidas após o seu controle, aqui eficientemente realizado por meio de neutralizadores dinâmicos viscosos.

O tempo necessário para a otimização dos dispositivos com base no sistema não linear é muito maior do que quando se considera o sistema linear equivalente e o dispêndio temporal não é compensado com significativo aumento de desempenho. Assim sendo, não se faz vantajoso, em situações desse tipo, utilizar o sistema não linear para o seu projeto, ao menos não utilizando a metodologia proposta para a obtenção das curvas amplitude-frequência do sistema. Porém, cabe enfatizar que, em todos os casos estudados, o controle do sistema não linear é eficazmente realizado, reduzindo a

amplitude de vibração em excelentes razões e reduzindo consideravelmente o caráter não linear da resposta do sistema.

Outra contribuição desta dissertação é quanto à utilização de neutralizadores dinâmicos para o controle do efeito Sommerfeld. Primeiramente investiga-se o fenômeno de forma experimental em uma estrutura do tipo viga prismática, excitada por um motor DC desbalanceado. Nesta abordagem propõe-se o controle do fenômeno por meio de um neutralizador dinâmico viscoelástico, projetado com base em um modelo linear aproximado obtido por meio do método dos elementos finitos, com o objetivo de reduzir a amplitude de vibração na faixa de frequência de ocorrência do efeito Sommerfeld.

Por meio da análise da FRF do sistema observou-se que, após a aplicação do controle passivo, a amplitude máxima na faixa de frequência de interesse ao controle foi reduzida em 26 dB, conforme estimado pelo modelo matemático. Tanto numericamente quanto experimentalmente, observa-se que o fenômeno é totalmente controlado, reduzindo a amplitude de vibração da viga em 10 vezes durante a operação do motor.

As simulações realizadas também apontaram para o controle do efeito Sommerfeld e a redução da amplitude de vibração. Nas simulações também foi possível observar que o modelo utilizado para o acoplamento não linear do motor à estrutura apresentou uma excelente aproximação, descrevendo o fenômeno de captura da ressonância de forma fidedigna ao observado experimentalmente.

Em um segundo momento foi realizada uma análise numérica do efeito Sommerfeld em uma viga biengastada. Neste caso, o sistema foi modelado por meio da teoria exposta na dissertação, ou seja, não linear com múltiplos graus de liberdade.

Foram projetados dois dispositivos para o controle do fenômeno, um considerando o sistema linear equivalente e outro considerando o modelo não linear proposto. Em ambos os casos, a abordagem proposta mostrou-se muito eficiente e o fenômeno foi igualmente controlado.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros, sugere-se que o modelo não linear proposto seja validado experimentalmente. É provável que os coeficientes que determinam o caráter não linear do modelo não condigam com o sistema real, pois diversos estudos mostram que os coeficientes obtidos por modelos semelhantes ao proposto são superestimados, além de também ser observado um comportamento típico de sistemas com rigidez quadrática. A partir de um modelo matemático experimentalmente calibrado, convém realizar novos projetos de neutralizadores dinâmicos para o controle do sistema e avaliar seu desempenho em um sistema real.

Durante a otimização dos dispositivos para o sistema não linear, observou-se que o tempo consumido para a avaliação da CRF, utilizando a metodologia proposta é alto. Logo, é importante rever essa metodologia, de modo que o tempo utilizado para a obtenção da CRF seja menor.

Em trabalhos futuros, também se propõe uma investigação mais ampla quanto ao uso de NDVs para o controle de sistemas não lineares com múltiplos graus de liberdade. Como seu uso permite realizar o controle em banda larga de frequências de maneira mais eficiente, novas possibilidades podem ser abertas quanto a sistemas não lineares.

REFERÊNCIAS

- AMABILI, M.; PAIDOUSSIS, M. P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. **Appl. Mech. Rev.**, v. 56, n. 4, p. 349–381, 2003.
- ANASTASIO, D.; DIETRICH, J. et al. Dynamics of Geometrically-Nonlinear Beam Structures, Part 1: Numerical Modeling. In: 37TH IMAC, A CONFERENCE AND EXPOSITION ON STRUCTURAL DYNAMICS. **Nonlinear Structures and Systems**. Edição: G. Kerschen, M. R. W. Brake e L. Renson. Cham: Springer, 2020. v. 1, p. 213–216.
- ANASTASIO, D.; MARCHESIELLO, S. et al. Subspace-based identification of a distributed nonlinearity in time and frequency domains. In: **Nonlinear Dynamics**. Cham: Springer, 2019. v. 1. P. 283–285.
- BALTHAZAR, J.M. et al. A review on new vibration issues due to non-ideal energy sources. In: UDWADIA, F. E.; WEBER, H.I.; LEITMANN, G. **Dynamical Systems and Control**. Boca Raton: CRC Press, 2004. P. 237–258.
- BAVASTRI, C. A. **Redução de Vibrações de Banda Larga em Estruturas Complexas por Neutralizadores Viscoelásticos**. 1997. F. 169. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis (SC).
- BAVASTRI, C. A. et al. Modelo geral de neutralizadores dinâmicos para controle passivo de vibrações e ruído: Parâmetros equivalentes generalizados. In: XXVIII CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA. **Anais do XXVIII Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia**. Porto: [s.n.], 2007.
- BELTRÁN-CARBAJAL, F.; SILVA-NAVARRO, G. Active vibration control in Duffing mechanical systems using dynamic vibration absorbers. **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, n. 14, p. 3019–3030, 2014.
- BOLLA, M. R. et al. On an approximate analytical solution to a nonlinear vibrating problem, excited by a nonideal motor. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 50, n. 4, p. 841–847, 2007.
- BRONKHORST, K. B. **Identificação e controle passivo ótimo de um sistema não linear de um grau de liberdade com rigidez cúbica usando neutralizadores dinâmicos viscoelásticos**. 2017. F. 99. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba (PR).

- CINIELLO, A. P. D. **Aplicação do Cálculo Fracionário na Identificação do Módulo de Relaxação de Materiais Viscoelásticos no Domínio do Tempo**. 2016. F. 155. Dissertação (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba (PR).
- DA SILVA, C. T. **Projeto e localização ótimos de sistemas de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos usando algoritmos genéticos**. 2005. F. 150. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba (PR).
- DE BORST, R. et al. **Nonlinear finite element analysis of solids and structures**. Chichester: John Wiley & Sons, 2012.
- DEN HARTOG, J. P. **Mechanical vibrations**. New York: McGraw-Hill, 1985.
- ESPÍNDOLA, J. J.; SILVA, H. P. Modal reduction of vibrations by dynamic neutralizers. In: INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, 10. **Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference**. San Diego, California: Society for Experimental Mechanics, 1992. P. 1367–1373.
- ESPÍNDOLA, J. J. de; BAVASTRI, C. A. et al. On the passive control of vibrations with viscoelastic dynamic absorbers of ordinary and pendulum types. **Journal of the Franklin Institute**, Elsevier, v. 347, n. 1, p. 102–115, 2010.
- FELIX, J. L. P.; BALTHAZAR, J. M. Comments on a nonlinear and nonideal electromechanical damping vibration absorber, Sommerfeld effect and energy transfer. **Nonlinear Dynamics**, v. 55, n. 1-2, p. 1–11, 2009.
- GONÇALVES, P. J. P. et al. The dynamic behavior of a cantilever beam coupled to a non-ideal unbalanced motor through numerical and experimental analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 333, n. 20, p. 5115–5129, 2014.
- HABIB, G.; KERSCHEN, G. A principle of similarity for nonlinear vibration absorbers. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 332, p. 1–8, 2016.
- JONES, D. I. G. **Handbook of viscoelastic vibration damping**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.
- KONONENKO, V. O. **Vibrating systems with a limited power supply**. London: Iliffe, 1969.
- LACARBONARA, W. **Nonlinear structural mechanics: theory, dynamical phenomena and modeling**. Rome: Springer Science & Business Media, 2013.
- MALATKAR, P. **Nonlinear vibrations of cantilever beams and plates**. 2003. Tese (PhD em Engenharia Mecânica) – Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.
- MEIROVITCH, L. **Fundamentals of vibrations**. [S.l.]: Waveland Press, 2010.

- MÉNDEZ, Y. A. D.; CUNHA JR, S. S. da; GOMES, G. F. Parâmetros e Localização Ótima de Neutralizadores Dinâmicos de Vibrações em Placas Usando Algoritmos Genéticos. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 9. **Anais do Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**. Fortaleza (CE): Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas, 2006.
- MERELES, A. et al. Mathematical Modelling of a Cantilever Beam Driven by Two Unbalanced Electric Motors. In: 25TH INTERNATIONAL CONGRESS ON MECHANICAL ENGINEERING. **Proceedings of the 25th International Congress on Mechanical Engineering**. Uberlândia (MG): Brazilian Society of Mechanical Sciences e Engineering, 2019.
- NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P. **Vibration damping**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1985.
- NAYFEH, A. H.; PAI, P. F. **Linear and nonlinear structural mechanics**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2008.
- NOËL, J. P.; KERSCHEN, G. Frequency-domain subspace identification for nonlinear mechanical systems. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 40, n. 2, p. 701–717, 2013.
- PACINI, B. R.; ROETTGEN, D. R.; ROHE, D. P. Investigating Nonlinearity in a Bolted Structure Using Force Appropriation Techniques. In: 37TH IMAC, A CONFERENCE AND EXPOSITION ON STRUCTURAL DYNAMICS. **Nonlinear Structures and Systems**. Edição: G. Kerschen, M. R. W. Brake e L. Renson. Cham: Springer, 2020. v. 1, p. 169–171.
- PICCIRILLO, V.; TUSSET, A. M.; BALTHAZAR, J. M. Optimization of Dynamic Vibration Absorbers Based on Equal-peak Theory. **Latin American Journal of Solids and Structures**, SciELO Brasil, v. 16, n. 4, 2019.
- RADE, D. A. et al. Passive vibration control using viscoelastic materials. In: **NONLINEAR Structural Dynamics and Damping**. [S.l.]: Springer, 2019. P. 119–168.
- SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. **Composite Structures**, Elsevier, v. 119, p. 799–814, 2015.
- SAVI, M. A. **Dinâmica não-linear e caos**. Rio de Janeiro: Editora E-papers, 2006.
- SCUSSEL, O.; SILVA, S. da. The harmonic probing method for output-only nonlinear mechanical systems. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 39, n. 9, p. 3329–3341, 2017.
- SHIKI, S. B.; SILVA, S. da; TODD, M. D. On the application of discrete-time Volterra series for the damage detection problem in initially nonlinear systems. **Structural Health Monitoring**, v. 16, n. 1, p. 62–78, 2017.

- SILVA, F. E. C. **Projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos com múltiplos graus de liberdade considerando os parâmetros físicos, localização e material viscoelástico**. 2019. F. 154. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba (PR).
- SNOWDON, J. C. Steady-State Behavior of the Dynamic Absorber. **The Journal of the Acoustical Society of America**, ASA, v. 31, n. 8, p. 1096–1103, 1959.
- SOMMERFELD, A. Beiträge zum dynamischen ausbau der festigkeitslehe. **Physikal Zeitschr**, v. 3, p. 266–286, 1902.
- SONNEVILLE, V.; CARDONA, A.; BRÜLS, O. Geometrically exact beam finite element formulated on the special Euclidean group SE (3). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 268, p. 451–474, 2014.
- SOUSA, T. L. de. **Identificação de propriedades mecânicas de materiais viscoelásticos no domínio do tempo considerando influências da temperatura e da pressão**. 2015. F. 143. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba (PR).
- TUSSET, A. M.; BALTHAZAR, J. M. On the Chaotic Suppression of Both Ideal and Non-ideal Duffing Based Vibrating Systems, Using a Magnetorheological Damper. **Differential Equations and Dynamical Systems**, v. 21, n. 1, p. 105–121, 2013.
- VARANIS, M. et al. Remarks on the Sommerfeld effect characterization in the wavelet domain. **Journal of Vibration and Control**, v. 25, n. 1, p. 98–108, 2019.
- VIEIRA, J. C. B. **Controle passivo de vibrações em estruturas esbeltas usando neutralizador dinâmico hidráulico**. 2019. F. 90. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba (PR).
- VILLANI, L. G. G.; SILVA, S. da; CUNHA JR, A. Damage detection in an uncertain nonlinear beam. **Procedia engineering**, Elsevier, v. 199, p. 2090–2095, 2017.
- VOLTOLINI, D. R. et al. Optimal design of a viscoelastic vibration neutralizer for rotating systems: Flexural control by slope degree of freedom. **Journal of Vibration and Control**, v. 24, n. 16, p. 3525–3537, 2018. DOI: 10.1177/1077546317752797.
- WAGG, D.; NEILD, S. A. **Nonlinear vibration with control: For Flexible and Adaptive Structures**. London: Springer, 2016.
- WONG, W. O.; FAN, R. P.; CHENG, F. Design optimization of a viscoelastic dynamic vibration absorber using a modified fixed-points theory. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Acoustical Society of America, v. 143, n. 2, p. 1064–1075, 2018.