

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR

VANDERTONE SANTOS MACHADO

APLICAÇÃO DA MATRIZ DE RECORRÊNCIA COM MICROESTADOS
PARA O ESTUDO DO COMPORTAMENTO CAÓTICO DO CIRCUITO DE
CHUA.

CURITIBA

2021

VANDERTONE SANTOS MACHADO

APLICAÇÃO DA MATRIZ DE RECORRÊNCIA COM MICROESTADOS
PARA O ESTUDO DO COMPORTAMENTO CAÓTICO DO CIRCUITO DE
CHUA.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná - UFPR, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Professor Dr. Thiago de Lima Prado.

CURITIBA

2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

M149a Machado, Vandertone Santos
Aplicação da matriz de recorrência com microestados para o estudo do comportamento caótico do circuito de Chua [recurso eletrônico] / Vandertone Santos Machado. – Curitiba, 2021.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2021.

Orientador: Thiago de Lima Prado.

1. Comportamento caótico nos sistemas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Prado, Thiago de Lima. III. Título.

CDD: 003.857

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA - 40001016020P4

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de VANDERTONE SANTOS MACHADO intitulada: "Aplicação da matriz de recorrência com microestados para o estudo do comportamento caótico do circuito de Chua", sob orientação do Prof. Dr. THIAGO DE LIMA PRADO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa. A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 28 de Maio de 2021.

Assinatura Eletrônica

28/05/2021 13:45:37.0

THIAGO DE LIMA PRADO

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

28/05/2021 13:56:37.0

GILBERTO CORSO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE)

Assinatura Eletrônica

28/05/2021 12:00:29.0

MARCUS WERNER BEIMS

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Centro Politécnico - Prédio do Setor de Ciências Exatas - 1º Andar - CURITIBA - Paraná - Brasil

CEP 81531-980 - Tel: (41) 3361-3096 - E-mail: posgrad@fisica.ufpr.br

Documento assinado eletronicamente de acordo com o disposto na legislação federal Decreto 8539 de 08 de outubro de 2015.

Gerado e autenticado pelo SIGA-UFPR, com a seguinte identificação única: 94222

Para autenticar este documento/assinatura, acesse <https://www.prppg.ufpr.br/siga/visitante/autenticacaoassinaturas.jsp>
e insira o código 94222

AGRADECIMENTOS

Agradeço sobre tudo a *Deus*, pelo dom da vida, saúde e por me dar a força e disposição necessárias para enfrentar as dificuldades ocorridas durante a elaboração deste trabalho.

Agradeço também a meu orientador Prof. Dr. Thiago de Lima Prado por me dar esta oportunidade (apesar das dificuldades apresentadas), pela orientação, discussões e especialmente pela paciência apresentada durante este percurso.

Agradeço aos Prof's. Dr's. Ricardo Luiz Viana, Giovani Lopes Vasconcelos e Sérgio Roberto Lopes, pelo empenho no ensino, de maneira brilhante, nas disciplinas da pós-graduação.

Agradeço a UFPR por poder trabalhar nesta renomada instituição.

Agradeço ao Departamento de Engenharia Elétrica da UFPR, por poder utilizar os equipamentos e instrumentos, necessários para a realização deste trabalho.

Agradeço a minha esposa, filhos e em especial a meus netos, pelos momentos maravilhosos que nos proporcionaram durante este trabalho.

- 1. No princípio era o Verbo, e o Verbo estava com Deus, e o Verbo era Deus.*
- 2. Ele estava no princípio com Deus.*
- 3. Todas as coisas foram feitas por ele, e sem ele nada do que foi feito se fez.*
- 4. Nele estava a vida, e a vida era a luz dos homens.*
- 5. E a luz resplandece nas trevas, e as trevas não prevaleceram contra ela.*

João 1:1-5

RESUMO

O comportamento caótico está presente em diversos sistemas dinâmicos naturais, aplicados na engenharia, física, biologia, economia, meteorologia, entre outras. Sua observação e análise nem sempre é simples, devido a dificuldades práticas e técnicas. Pensando nisso, Leon Chua desenvolveu um circuito eletrônico simples, que apresenta um comportamento caótico, e que pode ser estudado via experimento laboratorial e simulado numericamente. Mesmo sendo um circuito simples, o sistema de Chua, apresenta um conjunto de possibilidades para o seu comportamento dinâmico, abrangendo pontos de equilíbrio, bifurcações, oscilações periódicas e atratores estranhos. Seu estudo por meio de Gráficos de Recorrência (*Recurrence Plot* - **RP**) proporciona informações relevantes para uma descrição apropriada de sua dinâmica. No entanto, uma das dificuldades encontradas no **RP**, é a escolha apropriada do raio tolerância ε . Particularmente neste trabalho temos como um dos focos avaliar a escolha do mesmo. Existem muitos métodos listados na literatura que são dedicados a esse tipo de estudo. Aqui propomos utilizar um método recentemente publicado: o método de *Entropia através de microestados*, comparando o sistema de Chua a outras técnicas listadas na literatura. Através das *Medidas de Quantificação de Recorrência* - **RQA**, faremos uma análise particular do circuito de Chua, onde vamos comparar os resultados experimentais e simulados. Tal estudo é importante para a aplicação ampla da metodologia, seja em sistemas simulados ou experimentais.

Palavras-chave: Circuito de Chua, Caos, Gráficos de Recorrência, Entropia de microestado, e Medidas de Quantificação de Recorrência.

ABSTRACT

Chaotic behavior is present in several natural dynamical systems, applied in engineering, physics, biology, economics, meteorology, among others. Its observation and analysis is not always simple, due to practical and technical difficulties. With this in mind, Leon Chua developed a simple electronic circuit, which presents a chaotic behavior, and which can be studied via laboratory experiment and numerically simulated. Even being a simple circuit, the Chua system presents a set of possibilities for its dynamic behavior, including points of equilibrium, bifurcations, periodic oscillations and strange attractors. Its study through Recurrence Plots (*Recurrence Plot* - **RP**) provides relevant information for an appropriate description of its dynamics. However, one of the difficulties encountered in **RP** is the proper choice of the tolerance radius ε . Particularly in this work, we have as one of the focuses to evaluate its choice. There are many methods listed in the literature that are dedicated to this type of study. Here we propose to use a recently published method: the *Entropy through microstates* method, comparing the Chua system to other techniques listed in the literature. Through the *Recurrence Quantification Measures* - **RQA**, we will make a particular analysis of the Chua circuit, where we will compare the experimental and simulated results. Such study is important for the wide application of the methodology, whether in simulated or experimental systems.

Keywords: Chua's Circuit, Chaos, Recurrence Graphs, Microstate Entropy, and Recurrence quantifiers.

Lista de Figuras

1	Evolução da série temporal do sistema de Lorenz, com parâmetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$.	16
2	Gráfico do atrator caótico de Lorenz no espaço de fases com parâmetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$.	17
3	Gráficos do Mapa Logístico, iterações para diferentes valores de μ . (a) $\mu = 2, 9$, (b) $\mu = 3, 0$, (c) $\mu = 3, 7$, (d) $\mu = 4, 0$.	18
4	Curva do diagrama de bifurcação do mapa logístico, com μ variando de 2 ao valor máximo 4.	18
5	Trajetoória no espaço de fase em um espaço tri-dimensional, onde o ponto $x(0)$ inicial, representa o sistema no tempo t_0 e $x(t)$ o ponto para o sistema que evoluiu após um tempo t . Retirado de (1).	19
6	Trajetoórias no espaço de fase. (a) O atrator é um ponto na origem, (b) O atrator é a curva tracejada fechada ou ciclo limite. Retirado de (1).	20
7	Evolução temporal de duas trajetórias de um sistema a partir de condições iniciais infinitesimalmente próximas e que se afastam após um tempo t . Retirado de (2).	21
8	Evolução de um volume infinitesimal no espaço de fase. Uma pequena esfera, com diâmetro d_0 , após t iterações, torna-se um elipsóide devido à deformação local. Retirado de (3).	22
9	Ilustração de uma Seção de Poincaré. Retirado de (1).	23
10	Gráficos das três componentes do Mapa de Towel com 200 pontos. Com parâmetros $a = 3,8$, $b = 0,2$ e $c = 3,78$ e pontos iniciais $x(0) = 0,085$, $y(0) = -0,121$ e $z(0) = 0,075$.	24
11	Projeções em 2 e 3 dimensões do Mapa de Towel.	24
12	Distância entre as trajetórias $\vec{x}_i$ (linha cheia) e $\vec{x}_j$ (linha tracejada). Neste caso, enquanto as distâncias forem menores que o raio limite ε , os pontos das trajetórias serão ditos recorrentes. Retirado de (4).	25
13	Topologias características dos gráficos de recorrência. (a) Homogêneo, (b) Periódico, (c) Deriva (ou drift) e (d) Descontínuo. Retirado de (4).	28
14	Atratores reconstruídos a partir da série temporal para o Sistema de Lorenz. Os tempos de atraso (a) $\tau = 3$, (b) $\tau = 10$, (c) $\tau = 30$ e (d) $\tau = 50$.	34
15	Exemplo de RP série temporal com seis elementos. Pixels pretos (brancos) denotam um par de pontos recorrentes (não recorrentes). Os quadrados tracejados vermelhos representam matrizes (2 x 2) de microestados de recorrência selecionados aleatoriamente no RP . Retirado de (5).	36
16	(a) Circuito de Chua e (b) a característica $V_R - i_R$ com 5 segmentos de retas para o resistor não linear $\mathfrak{R}$. O comportamento caótico pode ser observado apenas nos 3 segmentos com inclinação negativas. Retirado de (6).	38
17	Esquema eletrônico do Circuito de Chua.	40
18	Simbologia utilizada no esquema eletrônico do circuito de Chua. (a) Resistor, (b) Resistor variável, (c) Capacitor, (d) Amplificador Operacional (Amp Op) e (e) aterramento.	40
19	Curva $i_D(V_{C1})$ do diodo de Chua, onde são representadas as regiões de operação do circuito com inclinações negativas m_1 e m_0 .	40
20	Diodo de Chua constituído por dois amplificadores operacionais e seis resistências R_1 a R_6 .	41
21	Circuito simulador do indutor eletrônico constituído por dois amplificadores operacionais, quatro resistores R_7 a R_{10} e um capacitor C_3 .	42
22	Montagem do circuito Chua em um <i>protoboard</i> .	43

23	(a) Osciloscópio Tectronix modelo TBS 1052B 50MHz – 1GS/s e (b) RCL Minipa modelo MX-1010, utilizado para medição dos valores reais dos componentes.	44
24	Montagem do experimento para obtenção das séries temporais do circuito de Chua. Vemos as pontas de prova do osciloscópio, sobre os capacitores C_1 e C_2	44
25	Cuvas obtidas com a variação de R_0	45
26	Aspecto (V_{C1} x V_{C2}) das curvas dos capacitores C_1 (curva amarela) e C_2 (curva azul), gravada pelo osciloscópio.	45
27	Identificação dos resistores utilizados no circuito. (a) 100 Ω , (b) 220 Ω , (c) 1000 Ω , (d) 2200 Ω , (e) 3300 Ω e (f) 22000 Ω respectivamente.	46
28	Resitores variáveis (a) $R_0(0 - 5k\Omega)$ e (b) $R_{10}(0 - 10k\Omega)$. Capacitores (c) $C_1 = 10nF$ e (d) $C_2 = C_1 = 100nF$	47
29	C.I. LM-324, contendo quatro amplificadores operacionais em seu encapsulamento.	47
30	Expoente de Lyapunov para o Mapa de Towel. Em $a \approx 3,52$ é a transição do regime caótico para o hipercaótico. Figura fornecida pelo Prof. Thiago de Lima Prado.	49
31	Curvas das componentes x, y, z para o Mapa de Towel.	50
32	RP's para a componente - x do Mapa de Towel, com os valores (a) 10% do diâmetro máximo, (b) 10% RR e (c) Entropia máxima.	50
33	RP's para a componente - y do Mapa de Towel, com os valores (a) 10% do diâmetro máximo, (b) 10% RR e (c) Entropia máxima.	51
34	RP's para a componente - z do Mapa de Towel, com os valores (a) 10% do diâmetro máximo, (b) 10% RR e (c) Entropia máxima.	51
35	Curvas e RP para o Mapa de Towel. (a) e (b) $a = 1,0$ e (c) e (d) $a = 3,0$	53
36	Curvas das tensões V_{C1} , V_{C2} sobre os capacitores e i_L corrente do indutor, para circuito de Chua.	54
37	Atratores do circuto de Chua. Em (a) atrator em 3-dimensões(V_{C1} , V_{C2} e i_L) e (b) atrator 2-dimensões(V_{C1} e V_{C2}).	54
38	Gráfico das variáveis do circuito de Chua simulado, com 1.000 pontos, para a tensão sobre o capacitor C_1 . As curvas mostram (a) série original, com aplicação de ruído a nível de (b) 0,3, (c) 0,5 e (d) 0,7.	55
39	RP para a série do circuito de Chua simulado, com 1.000 pontos, para a tensão sobre o capacitor C_1 . Os RP mostram (a) a série original e (b) 0,3 de ruído, (c) 0,5 de ruído e (d) 0,7 de ruído.	56
40	Gráfico das curvas do circuito de Chua simulado, para os capacitores C_1 e C_2 , com adição de 0,7 de ruído.	56
41	RP para a série do circuito de Chua simulado V_{C1} , com 0,7 de ruído.	57
42	RP para a série do circuito de Chua simulado V_{C2} , com 0,7 de ruído.	57
43	Gráfico do circuito de Chua experimental para as tensões elétricas V_{C1} e V_{C2} sobre os capacitores C_1 e C_2 repectivamente.	59
44	RP para a série do circuito de Chua experimental, para a tensão V_{C1} sobre o capacitor C_1 . Os RP mostram: (a) 10% do diâmetro máximo, (b) taxa de recorrência RR de 10% e (c) Método da Entropia Máxima.	59
45	RP para a série do circuito de Chua experimental, para a tensão V_{C2} sobre o capacitor C_2 . Os RP mostram: (a) 10% do diâmetro máximo, (b) taxa de recorrência RR de 10% e (c) Método da Entropia Máxima.	60

Lista de Tabelas

1	Valores nominais e reais dos componentes utilizados no circuito. C_1 capacitor de poliéster 10nF - 10%, C_3 e C_2 capacitores metalizados 100nF - 10%. Os resistores em (Ω), são de 1/8 W - 5%. Os resistores R_0 e R_{10} são variáveis.	46
2	Valores dos raios limite - ε , para o Mapa de Towel, com parâmetro $a = 3, 2$, para uma série com 400 pontos. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10%RR e (c) Entropia Máxima. . . .	49
3	Valores dos RQA , para a componente x do Mapa de Towel. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10%RR e (c) Entropia Máxima.	52
4	Valores dos RQA , para a componente y do Mapa de Towel. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10% RR e (c) Entropia Máxima.	52
5	Valores dos RQA , para a componente z do Mapa de Towel. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10% RR e (c) Entropia Máxima.	52
6	Parâmetros do circuito de Chua calculados, utilizados na simulação do mesmo.	55
7	Valores dos RQA , para a curva simulada de V_{C1} , com adição 0,7 de ruído. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10%RR e (c) Entropia Máxima.	58
8	Valores dos RQA , para a curva simulada de V_{C2} , com adição 0,7 de ruído. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10%RR e (c) Entropia Máxima.	58
9	Valores dos RQA , para a curva experimental V_{C1} . (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10%RR e (c) Entropia Máxima.	60
10	Valores dos RQA , para a curva experimental V_{C2} . (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10%RR e (c) Entropia Máxima.	60

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	BREVE HISTÓRICO	12
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	14
2	PRINCÍPIOS DE SISTEMAS DINÂMICOS E CAOS	15
2.1	TÓPICOS DE SISTEMAS DINÂMICOS	15
2.2	ESPAÇO DE FASE	17
2.3	ATRADORES	19
2.4	EXPOENTE DE LYAPUNOV	20
2.5	SEÇÃO DE POINCARÉ	23
2.6	MAPA DE TOWEL	23
3	GRÁFICOS DE RECORRÊNCIA - RP	25
3.1	DEFINIÇÃO	25
3.2	LIMIAR DE TOLERÂNCIA ("THRESHOLD") - ϵ	26
3.3	ESTRUTURAS EM RP's	27
3.4	ANÁLISE DE QUANTIFICAÇÃO DE RECORRÊNCIA	28
3.4.1	MEDIDA BASEADA NA DENSIDADE DE RECORRÊNCIA	29
3.4.2	MEDIDA BASEADAS NAS LINHAS DIAGONAIS	29
3.4.3	MEDIDA BASEADAS NAS LINHAS VERTICAIS	30
3.5	RECONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE FASE	31
3.5.1	ESTIMATIVA DA DIMENSÃO DE IMERSÃO	32
3.5.2	ESTIMAÇÃO DO ATRASO DE IMERSÃO	33
3.6	BREVE DISCUSSÃO ACERCA DO RUÍDO	35
3.7	ENTROPIA DE MICROESTADOS DE RECORRÊNCIAS	36
4	CIRCUITO DE CHUA	38
4.1	DIODO DE CHUA	40
4.2	INDUTOR ELETRÔNICO	41
4.3	MONTAGEM DO CIRCUITO	43
5	ANÁLISE DOS DADOS SIMULADOS E EXPERIMENTAIS	48
5.1	ANÁLISE DO MAPA DE TOWEL.	48
5.2	ANÁLISE DOS GRÁFICOS DO CIRCUITO DE CHUA	53
6	CONCLUSÕES	61
	Referências	62

1 INTRODUÇÃO

1.1 BREVE HISTÓRICO

O conceito de recorrência surgiu no final do século XIX, com o trabalho de Henry Poincaré (1845-1912) (7). Neste trabalho, contendo 300 páginas, Poincaré estudou o problema de três corpos. Diversos teoremas foram desenvolvidos durante este trabalho, entre eles o conhecido *Teorema de Recorrência de Poincaré*. O objetivo era determinar as trajetórias dos corpos a partir das suas condições iniciais. Poincaré teve que lidar com equações diferenciais não lineares, cujas soluções analíticas são muito difíceis, ou mesmo impossíveis de serem encontradas. Poincaré enfrentou este problema de um modo que não era usual para a época. Ele percebeu que as propriedades qualitativas das soluções poderiam ser investigadas, sem que as soluções das equações diferenciais fossem determinadas explicitamente. Então ele adotou uma abordagem qualitativa, utilizando técnicas geométricas e topológicas (8). Topologia (do grego *topos*, "lugar", e *logos*, "estudo") é o ramo da matemática que estuda os espaços topológicos, ou estudo das propriedades que são preservadas por meio de deformações, torções e alongamento de objetos, sendo considerado como uma extensão da geometria (9).

Décadas depois, após muitos estudos em sistemas atmosféricos, no ano de 1963, Edward Norton Lorenz, publicou o artigo "Deterministic Nonperiodic Flow" sobre um sistema de baixa dimensão (3 dimensões) que exibia comportamento caótico (10); o mesmo tipo de comportamento previsto por Poincaré na análise do problema de três corpos. Com o auxílio de um computador, ao tratar com o modelo de Rayleigh-Bernard para a convecção de fluidos, observou que uma pequena variação nas condições iniciais acarretava grandes variações na evolução do sistema. Em 1979 Lorenz publicou no jornal dos meteorologistas um artigo com o título de: "Previsibilidade: o bater de asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas?". Esse trabalho acabou sendo conhecido como "efeito borboleta" (11). Iniciava-se então o moderno estudo do caos, cujas ideias básicas haviam sido lançadas por Poincaré. O caos é uma das inúmeras possibilidades de comportamento de um sistema não-linear. As equações simplificadas e as curvas que descrevem o sistema de Lorenz são apresentadas no Capítulo 2. De modo geral, sistemas caóticos são observados na natureza, nas mais diversas áreas do conhecimento tais como: crescimento populacional, sistemas turbulentos, na engenharia, biologia, física e outras áreas.

Mais tarde, baseando-se no Teorema da Recorrência de Poincaré (12), Eckman *et al.* (1987) (13), desenvolveram uma nova ferramenta para a análise de sistemas dinâmicos estacionários e não estacionários, que ficou conhecido como *Gráfico de Recorrência (RP)*. Os **RP**'s têm sido utilizados na análise de séries temporais experimentais, como as encontradas em circuitos eletrônicos, (14; 15; 16); na variabilidade da frequência cardíaca (VFC), (17; 18), neurociências, (19; 20); mercado financeiro, (21; 22); astrofísica, (23; 24) e outros.

Entretanto muitos dos estudos têm caráter quase exclusivamente teórico, uma vez que a implementação experimental de um sistema caótico pode apresentar muitas dificuldades, como limitações de espaço, exatidão, custo, entre outros. Por exemplo um experimento atmosférico requer equipamentos caros e sofisticados dispostos em grandes espaços e tempo de amostragem grande; enquanto uma montagem como o circuito eletrônico de Chua pode ser montado facilmente em um laboratório, a baixo custo e num espaço pequeno, dentre outras vantagens.

O estudo de sistemas caóticos teve um grande avanço através do desenvolvimento de um circuito

eletrônico que apresentava experimentalmente a existência do caos. O evento que levou à descoberta deste circuito aconteceu no laboratório do Prof. T. Matsumoto da Universidade Waseda, quando da visita do Prof. Leon Chua da Universidade de Berkeley, entre outubro de 1983 a janeiro de 1984. O Prof. Matsumoto elaborou um circuito eletrônico construído para simular as equações de Lorenz. Infelizmente, no experimento faltava um componente não-linear e a simulação não foi satisfatória. Este componente era a chave para construir um circuito caótico autônomo. Somente dois sistemas autônomos de equações diferenciais ordinárias eram geralmente aceitos como sendo caóticos: O sistema de Lorenz e o sistema Rössler.(6). Chua propôs a Matsumoto um circuito autônomo muito simples, composto de quatro componentes lineares passivos, sendo um indutor, dois capacitores e um resistor, e um componente não-linear ativo que é conhecido como diodo de Chua. Ele tem como princípio de funcionamento uma fonte de corrente dependente de tensão e um resistor de resistência negativa. O circuito possuía uma dinâmica mais complexa do que aquela exibida pelos atratores de Lorenz ou de Rössler, podendo apresentar uma grande variedade de estruturas para diferentes valores de parâmetros. Em seu artigo de 1984, o primeiro a respeito do circuito sugerido por Chua, intitulado *A Chaotic Attractor from Chua's Circuit*, o Prof. Matsumoto mostra os resultados das simulações feitas com o circuito e o atrator observado. Neste artigo o Prof. Matsumoto chamou o circuito desenvolvido de *circuito de Chua*, nome que adotaremos em nosso trabalho. (25).

Posteriormente Zhong Guo Qin e Farhard Ayrom, do laboratório de Eletrônica não linear de Berkeley, foram os primeiros pesquisadores a documentar experimentalmente o caos no circuito de Chua (26). Neste trabalho estudaremos o circuito desenvolvido por Leon Chua. No entanto, substituiremos o indutor físico por um indutor eletrônico, o que torna o circuito de Chua robusto e mais estável (27).

Em nosso estudo obteremos as curvas experimentais do circuito de Chua e também suas curvas em simulações numéricas. Faremos as simulações utilizando os parâmetros retirados do circuito. Também serão obtidas as curvas experimentais do comportamento caótico do mesmo. Utilizamos para nossas simulações a linguagem Python(ver.3.8), a linguagem Julia(ver1.5.2). Também fizemos uso dos programas do pacote *Dynamical Systems*, que é uma biblioteca de software Julia para sistemas dinâmicos, dinâmica não linear, caos determinístico e análise de série temporal não linear (28). Também recebemos alguns programas em Julia, utilizados em nosso trabalho, fornecidos pelo Prof. Thiago de Lima Prado, sem os quais não conseguiríamos alguns dos gráficos aqui apresentados. De posse dos dados, analisaremos os **RP's** e **RQA's** das curvas obtidas por simulação numérica e das séries experimentais das tensões elétricas obtidas nos capacitores C_1 e C_2 do circuito de Chua.

Nosso principal objetivo neste estudo é encontrar estruturas de **RP's** através de métodos já consagrados na literatura e comparar com o método, relativamente novo, da *Entropia de microestados de recorrências*, verificando que as estruturas apresentadas são preservadas. Os métodos tradicionais necessitam que encontremos primeiramente a distância limite para a confecção do **RP** de uma série de dados. Este limite deve ser escolhido de modo que o **RP** forneça dados adequados sobre o sistema analisado. Podemos encontrar muitas sugestões para tal escolha (Capítulo 3.5). Um desenvolvimento histórico mais completo sobre sistemas dinâmicos pode ser encontrado em (8; 29).

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho é dividido da seguinte forma:

Capítulo 1 - Neste capítulo, alguns fatos históricos sobre a ideia de recorrência e sua importância na análise de sistemas dinâmicos, são apresentados. Além disso, discutimos um pouco sobre o surgimento de teorias que levaram ao conceito do caos e de um circuito eletrônico que simula um comportamento caótico, conhecido como circuito de Chua e sua importância no estudo do comportamento caótico. Existem muitos outros fatos históricos, mas apresentamos apenas os mais relevantes para nosso estudo.

Capítulo 2 - Apresentaremos princípios de sistemas dinâmicos e da teoria do caos, fornecendo uma pequena introdução ao assunto, possibilitando uma visão geral dos mesmos. Definiremos sistemas dinâmicos contínuos e discretos apresentando exemplos. Em seguida daremos o significado de espaço de fases e sua utilidade na compreensão do comportamento de sistemas dinâmicos. Discutiremos brevemente algo sobre atratores, fornecendo uma ideia de seu significado e tipos. Será apresentada a ferramenta do expoente de Lyapunov apresentando sua aplicação em sistemas caóticos. Será feita também uma aplicação da seção de Poincaré, substituindo a evolução temporal por um mapeamento discreto. Por fim, descreveremos o Mapa de Towel, que é o sistema com menor dimensão possível em um sistema discreto que apresenta hipercaos.

Capítulo 3 - Trataremos sobre os gráficos de recorrência. Daremos sua definição. Discutiremos sobre um dos parâmetros mais importantes para os **RP**'s, que é o limite de tolerância(threshold) e como encontrá-lo. Mencionaremos quais são as estruturas de um **RP**. Apresentaremos os quantificadores de recorrência (**RQA**) e algumas de suas medidas mais importantes. Analisaremos a Entropia de microestados da matriz de recorrência, que é uma ferramenta nova, para a análise de **RP**. Faremos uma comparação com outros métodos para a determinação de **RP**'s, verificando que tal ferramenta não altera suas estruturas.

Capítulo 4 - Aqui apresentaremos um dos objetos de nosso estudo, o circuito de Chua. Uma introdução ao funcionamento do circuito será apresentada, bem como as equações que descrevem o seu comportamento e seus parâmetros. Analisaremos o diodo de Chua, que é um componente não linear e o indutor eletrônico, que será substituto do indutor físico. Apresentaremos o circuito por nós montado, seus componentes, equipamentos e instrumentos utilizados na montagem e nas obtenções das curvas caóticas que o circuito pode fornecer.

Capítulo 5 - Neste capítulo serão apresentadas todas as análises efetuadas para o mapa de Towel, utilizando as ferramentas clássicas e o método da Entropia máxima. Feito isso, trabalharemos com o circuito de Chua, onde construiremos **RP**'s para as séries temporais obtidas experimentalmente e simuladas via equações diferenciais, analisando suas características.

Capítulo 6 - Apresentaremos as conclusões do trabalho, sua utilidade e perspectivas futuras.

2 PRINCÍPIOS DE SISTEMAS DINÂMICOS E CAOS

Os primeiros trabalhos sobre fenômenos complexos de um sistema, mais tarde conhecido como caos, iniciaram-se no final século XIX (1890) com o trabalho do matemático e físico teórico francês, Henri Poincaré, nos seus estudos sobre a dinâmica das órbitas no problema de três corpos. Algumas órbitas mostraram-se não periódicas, nem se aproximavam de um ponto fixo e nem aumentavam indefinidamente.

A Teoria do Caos é uma disciplina científica, focalizada no estudo dos sistemas não-lineares complexos. Seu estudo iniciou-se a partir do artigo “Deterministic Nonperiodic Flow”, escrito por Edward Lorenz em 1963 (10). Entretanto, um grande impulso para o surgimento formal do “caos” como uma ciência de fenômenos não lineares aconteceu na segunda metade da década de 70 com a publicação do artigo *Period Three Implies Chaos* de James A. York e Tien-Yien Li em 1975 (30; 31; 29). Podemos aplicar a Teoria do Caos em diversos campos científicos: física (32), biologia (33), economia (21), engenharia (34), entre outros.

O comportamento caótico quando observado ao acaso, parece errático ou até mesmo aleatório, e parecendo possuir muitos graus de liberdade. Porém, o caos pode estar presente até em sistemas muito simples com pelo menos 3 graus de liberdade. Graus de liberdade é um termo utilizado para referenciar a quantidade mínima de variáveis reais necessárias para determinar completamente o estado físico de um dado sistema dinâmico. Um sistema que pode apresentar comportamento caótico é descrito por equações diferenciais determinísticas, não lineares e autônomas (não dependentes explicitamente do tempo), além de apresentar alta sensibilidade às condições iniciais, com divergência exponencial de trajetórias em uma (ou mais) direções do espaço.

2.1 TÓPICOS DE SISTEMAS DINÂMICOS

Podemos definir um sistema dinâmico como um modelo matemático determinístico, normalmente representado por um conjunto de equações diferenciais, que determina a evolução do sistema em função do tempo. Nesse caso, o tempo pode ser caracterizado como uma variável contínua ou discreta. Para o caso do tempo (t) ser uma variável contínua, o sistema será representado por meio de equações diferenciais, que convencionalmente é chamado de *fluxo* do sistema. Já quando o tempo (t) for discreto, o sistema será denominado como *mapa* (1).

Um sistema dinâmico em que o tempo é uma variável contínua, pode ser descrito como um sistema de n equações diferenciais ordinárias, autônomas, de primeira ordem, dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx^{(1)}}{dt} = F_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} = F_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}), \\ \vdots \\ \frac{dx^{(n)}}{dt} = F_n(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}). \end{cases} \quad (1)$$

ou de forma mais compacta, utilizando notação vetorial, como:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)]. \quad (2)$$

onde $\vec{x}$ é um vetor n -dimensional e $\vec{F}$ uma função da variável $\vec{x}$. As equações em [1] representam um sistema dinâmico uma vez que, para um estado inicial $\vec{x}(0)$, podemos, em princípio, resolvê-las numericamente e obter o estado $\vec{x}(t)$ do sistema para qualquer $t > 0$.

Como exemplo de sistema dinâmico contínuo, podemos citar o modelo dinâmico meteorológico dado pelo sistema de Lorenz (10), que é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x - y), \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y, \\ \dot{z} = xy - \beta z. \end{cases} \quad (3)$$

onde os parâmetros σ , ρ e β são constantes do modelo. Na Fig. 1 apresentamos as curvas do sistema de Lorenz, para $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ e para $\rho = 28$. Podemos observar o comportamento caótico exibido pelas mesmas. Já na Fig. 2, vemos a estrutura do atrator de Lorenz.

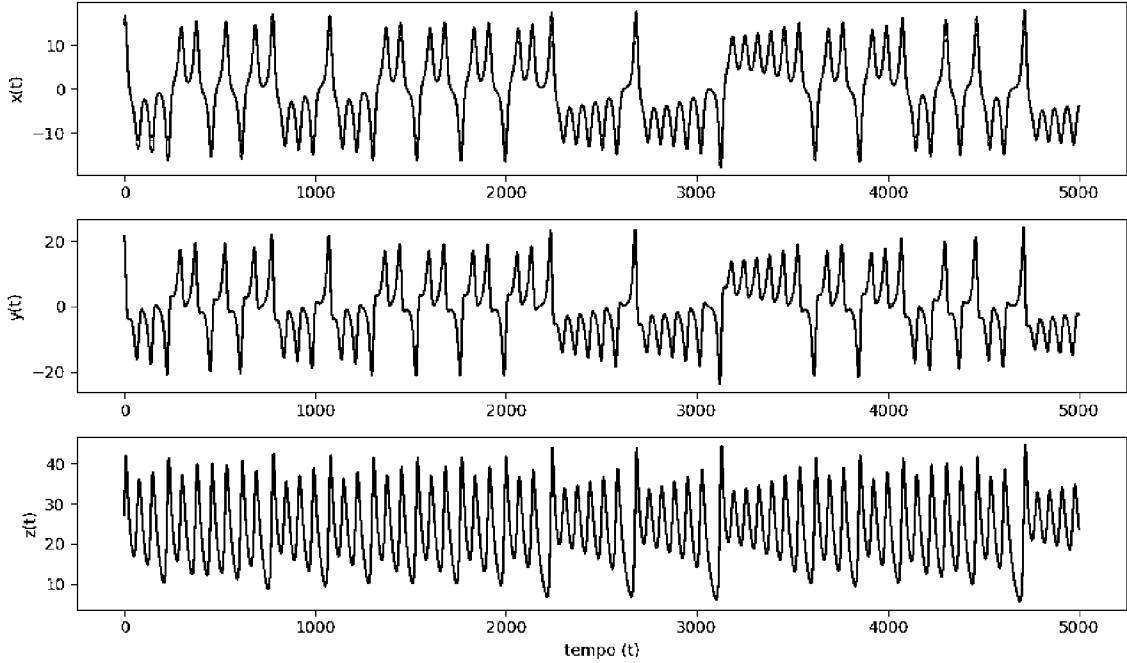


Figura 1: Evolução da série temporal do sistema de Lorenz, com parâmetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$.

Para o caso de sistemas discretos, o tempo t é um número inteiro positivo, ou seja, $n \in \mathbb{Z}_+$. Neste caso as equações que definem o sistema dinâmico são conhecidas como equações de diferenças (finitas) a qual fornece somente informações de um estado presente $n + 1$ em função de um estado passado n , contudo, nada pode ser afirmado sobre os estados intermediários entre esses pontos. Um sistema dinâmico discreto, genericamente é descrito por,

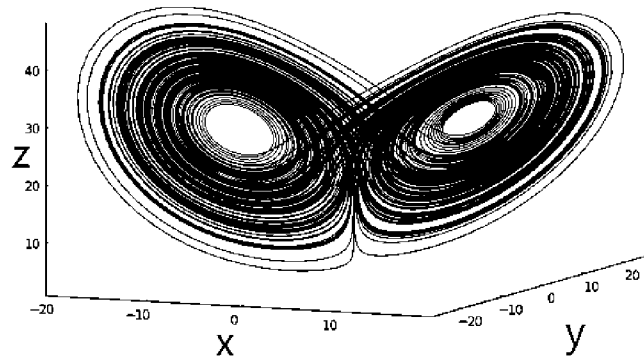


Figura 2: Gráfico do atrator caótico de Lorenz no espaço de fases com parâmetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$.

$$\vec{x}_{n+1} = f(\vec{x}_n). \quad (4)$$

Como exemplo de sistema discreto, podemos citar o Mapa Logístico, que é um sistema unidimensional e unimodal, descrito pela seguinte equação:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n). \quad (5)$$

onde μ é um parâmetro do sistema com intervalo definido por $0 \leq \mu \leq 4,0$. A Fig. 3, mostra as curvas geradas pelo mapa logístico para 3 (três) diferentes valores do parâmetro μ , como função do número de iterações n .

Na Fig. 4, vemos o diagrama de bifurcação para o mapa logístico. Bifurcações são mudanças abruptas na dinâmica do movimento qualitativo do atrator em um valor crítico do parâmetro de controle. Isso pode acontecer devido à mudança de estabilidade de pontos de equilíbrio, que podem ser criados ou destruídos (35). Bifurcações são importantes, pois fornecem informações sobre as transições e instabilidades quando alguns parâmetros são variados.

2.2 ESPAÇO DE FASE

Um conceito fundamental na dinâmica não-linear é o de *Espaço de Fase ou Estado*. Podemos dizer que espaço de fase ou estado é um espaço abstrato, no qual se realiza o estudo qualitativo de um sistema dinâmico (8). As dimensões do espaço são as variáveis desse sistema. Portanto, um espaço N - dimensional é formado pelos eixos coordenados $x_1, x_2, \dots, x_N$, em que $N \in \mathbb{N}^*$. Representa-se cada estado por um ponto cujas coordenadas são $x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)$, onde t é a variável tempo.

Os pontos que sucessivamente especificam o estado desse sistema dependem das suas condições iniciais e do modo como as iterações do mesmo evoluem. A Fig. 5 mostra o caminho seguido por um sistema dinâmico tri-dimensional, à medida que evolui com o tempo. Podemos observar que a trajetória do sistema parte do ponto $x(0)$, no tempo inicial t_0 e chega ao ponto $x(t)$, em um tempo t posterior, descrevendo uma curva no espaço de fase. Num espaço de fase não desenhamos apenas uma órbita em particular, mas o conjunto de todas as órbitas possíveis do sistema. Esta abordagem não foca apenas no comportamento de uma solução em particular, mas em obter informação qualitativa

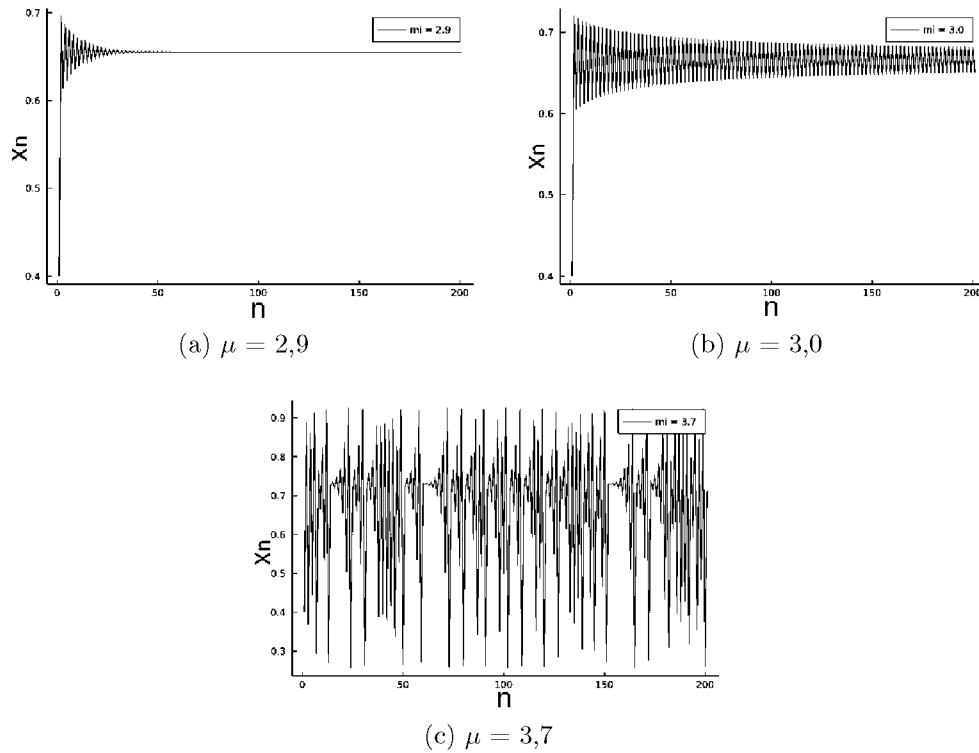


Figura 3: Gráficos do Mapa Logístico, iterações para diferentes valores de μ . (a) $\mu = 2,9$, (b) $\mu = 3,0$, (c) $\mu = 3,7$, (d) $\mu = 4,0$.

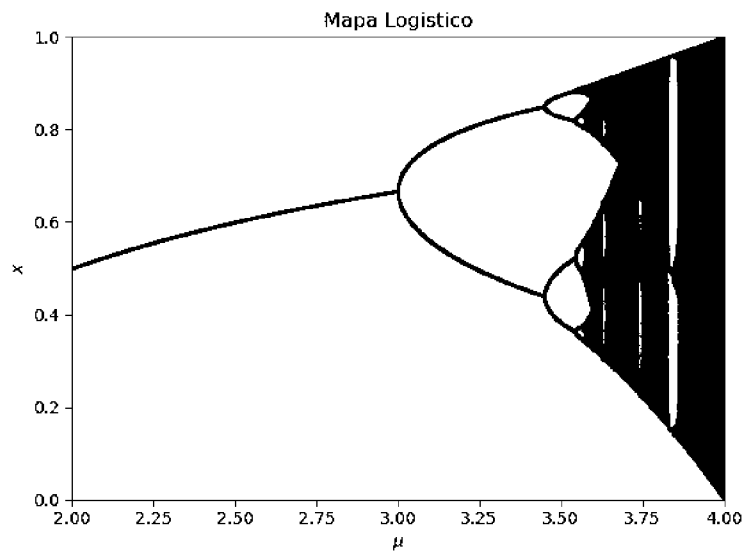


Figura 4: Curva do diagrama de bifurcação do mapa logístico, com μ variando de 2 ao valor máximo 4.

sobre o comportamento global do sistema.

O espaço de fase é uma ferramenta útil na compreensão do comportamento dos sistemas dinâmicos, sejam eles integráveis ou não integráveis. Em particular, quando o sistema dinâmico é não integrável (não admite solução algébrica), podemos simular sua evolução temporal, realizando uma integração numérica, representando essa evolução no espaço de fase. As projeções gráficas dos espaços de fase são ferramentas de análise qualitativas que permitem apenas identificar se o sistema é ou não periódico. Essa identificação é possível pois sistemas periódicos possuem em seu espaço de fase, uma

curva fechada denominada ciclo limite, caso contrário podem ser não periódicos (36).

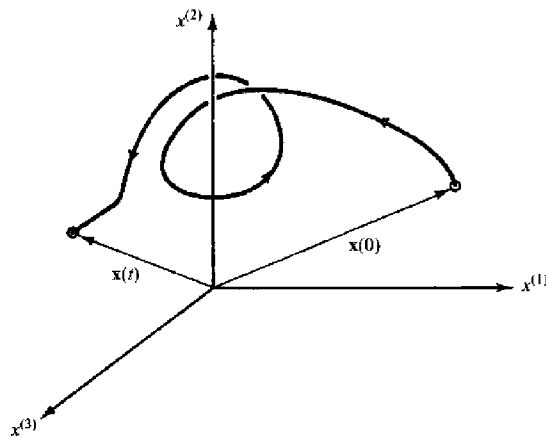


Figura 5: Trajetória no espaço de fase em um espaço tri-dimensional, onde o ponto $x(0)$ inicial, representa o sistema no tempo t_0 e $x(t)$ o ponto para o sistema que evoluiu após um tempo t . Retirado de (1).

2.3 ATRATORES

Um sistema será dissipativo se, tomando um volume em condições iniciais no espaço de fase, este volume diminui com o passar do tempo, tal que $V(0) > V(t)$, neste caso o divergente do fluxo será negativo e o sistema será não conservativo. Por outro lado, quando há preservação do volume no espaço de fases, o sistema será conservativo. Então um conceito importante em dinâmica são os sistemas dissipativos pois têm como característica a presença de conjuntos atrativos ou atratores no espaço de fase. Sistemas dinâmicos conservativos não possuem atratores.

Como exemplo de um atrator, considere o oscilador harmônico amortecido, descrito pela seguinte equação,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \nu \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (6)$$

Uma trajetória típica no espaço de fase ($x^{(1)} = y, x^{(2)} = \frac{dy}{dt}$) é vista na Fig. 6-a. Vemos que, com o passar do tempo, a órbita entra em espiral na origem, e isso é verdade para qualquer condição inicial. Assim, neste caso, a origem $x^{(1)} = x^{(2)} = 0$, é considerada o atrator do sistema dinâmico.

Outro exemplo, a figura 6-b, mostra o caso de um ciclo limite (curva em linha tracejada). A condição inicial, ponto α , externo ao ciclo limite, a trajetória faz uma espiral convergindo para o ciclo limite, circulando em movimento periódico num tempo $t \rightarrow \infty$. De modo semelhante um ponto β , interno ao ciclo limite, produz uma órbita que espirala para fora, aproximando-se assintoticamente da curva tracejada. Assim, neste caso, a curva fechada tracejada é o atrator. Um exemplo de uma equação exibindo um atrator de ciclo limite é a equação de *van der Pol*,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (y^2 - \eta) \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0. \quad (7)$$

Esta equação foi introduzida na década de 1920 como um modelo para um circuito oscilador de tubo de vácuo simples.

Em um sistema tridimensional de tempo contínuo e autônomo (não dependentes explicitamente do

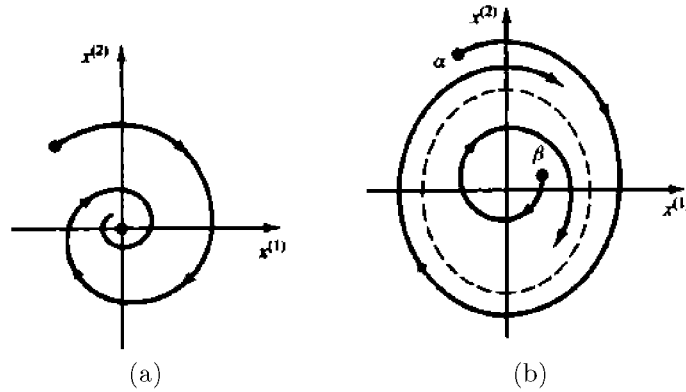


Figura 6: Trajetórias no espaço de fase. (a) O atrator é um ponto na origem, (b) O atrator é a curva tracejada fechada ou ciclo limite. Retirado de (1).

tempo) o formato do atrator pode ser do tipo: (1; 8)

- *ponto de equilíbrio*: é uma solução do sistema cujo comportamento dinâmico independe do tempo, ou seja, é um ponto no espaço de fase para o qual a trajetória do sistema convergirá.
- *ciclo-limite ou atrator periódico*: é um conjunto de valores para o qual o comportamento do sistema converge, exibindo um comportamento periódico (movimento regular);
- *superfície toroidal ou atrator quase-periódico*: exibe um comportamento quase periódico com duas frequências fundamentais independentes. O comportamento quase-periódico sugere uma situação dinâmica na qual órbitas nunca se fecham sobre si mesmas, entretanto, sem apresentar dependência sensível às condições iniciais;
- *atrator caótico*: é um atrator que apresenta um comportamento aperiódico, e dependência sensível às condições iniciais, ou seja, a distância entre duas trajetórias cresce exponencialmente, mas o atrator ocupa um volume finito no espaço de fases.

Sistemas dinâmicos caóticos apresentam a característica de possuir divergência exponencial de trajetórias próximas, ou sensibilidade às condições iniciais. Para medir esta taxa de afastamento entre trajetórias são utilizados os expoentes de Lyapunov, descritos a seguir.

2.4 EXPOENTE DE LYAPUNOV

Sistemas dinâmicos que apresentam um comportamento caótico, possuem dependência sensível às suas condições iniciais.

Como exemplo, mostramos duas trajetórias iniciais descritas por $\vec{x}_1(t_0)$ e $\vec{x}_2(t_0)$ infinitesimalmente próximas, como visto na Fig.7. Imaginemos que a medida que o sistema evolui, as trajetórias se afastam, gerando órbitas $\vec{x}_1(t)$ e $\vec{x}_2(t)$. O *expoente de Lyapunov* - λ , quantifica a taxa exponencial com que as trajetórias se afastam uma da outra (expoentes positivos) ou de convergência (expoentes negativos), sendo assim uma medida da previsibilidade ou imprevisibilidade do sistema (37). Os sinais

dos expoentes de Lyapunov fornecem uma imagem qualitativa da dinâmica de um sistema.

Um expoente de Lyapunov negativo máximo, implica que as órbitas tendem assintoticamente a um ponto fixo. Já um expoente nulo significa que as órbitas estão sobre uma curva fechada (órbita periódica). Para um expoente positivo temos que as órbitas estão sobre um atrator caótico. A existência de ao menos um expoente de Lyapunov positivo para um sistema, o define como sendo caótico, caracterizando desta forma uma divergência exponencial no tempo entre trajetórias vizinhas (37; 38).

Mapas unidimensionais são caracterizados por um único expoente de Lyapunov, que é positivo para o caos, zero para uma órbita marginalmente estável e negativo para uma órbita periódica. Em situações, onde sistemas dinâmicos com mais de uma dimensão, teremos mais de um expoentes de Lyapunov. Se dois destes expoentes forem positivos, teremos então o chamado hipercaos (ex., Mapa de Towel, descrito no Capítulo 2.6).

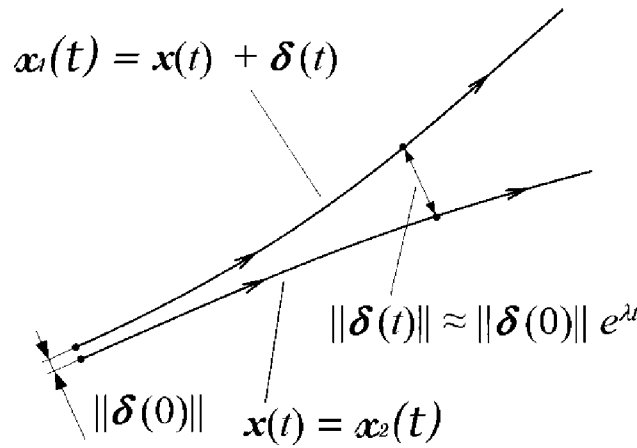


Figura 7: Evolução temporal de duas trajetórias de um sistema a partir de condições iniciais infinitesimalmente próximas e que se afastam após um tempo t . Retirado de (2).

Da Fig. 7, vemos que a separação entre as órbitas após t iterações é dada por $|\delta(t)| \approx |\delta(0)| e^{\lambda t}$, onde $|\delta(0)|$ é a separação inicial antes da primeira iteração (39). O *expoente de Lyapunov* - λ pode ser escrito, observando que,

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right| = \frac{1}{t} \ln \left| \frac{f^t(x_0 + \delta_0) - f^t(x_0)}{\delta_0} \right| = \frac{1}{t} \left| (f^{(t)})' x(0) \right|, \quad (8)$$

onde tomamos o limite $\delta(0)$ tendendo a zero.

O termo no logaritmo pode ser expandido através da regra da cadeia, resultando em

$$(f^{(t)})'(x(0)) = \prod_{i=0}^{t-1} f'(t_i). \quad (9)$$

Substituindo a Eq.9 na expressão de λ , Eq.8 e fazendo $t \rightarrow \infty$, chegamos a expressão para o *expoente de Lyapunov* para uma órbita inicializada em $x(0)$,

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln |f'(x_i)| \right\}. \quad (10)$$

Considere uma trajetória do sistema dinâmico, que esteja evoluindo a partir de uma condição inicial. Considere também uma vizinhança desta trajetória, que pode ser definida pelo volume $V(t_0)$ e diâmetro d_0 de uma hiperesfera no tempo t_0 , conforme visto na Fig.8. Com o passar do tempo o volume da esfera sofrerá alterações, uma vez que o raio é relacionado às trajetórias do sistema. O volume no instante inicial, t_0 , é $V(t_0)$. O sistema será conservativo se $V(t) = V(t_0)$ para todo $t \geq t_0$ ou

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j = 0.$$

Se o sistema for dissipativo, $V(t) < V(t_0)$, para todo $t \geq t_0$ ou

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j < 0.$$

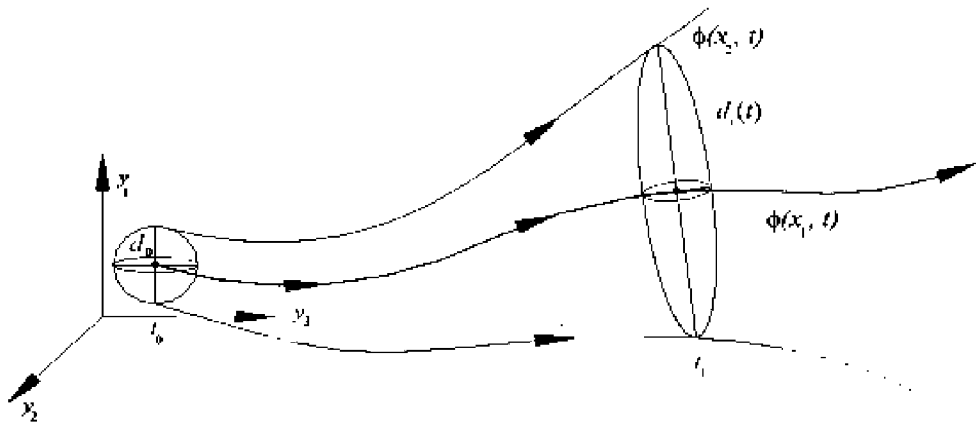


Figura 8: Evolução de um volume infinitesimal no espaço de fase. Uma pequena esfera, com diâmetro d_0 , após t iterações, torna-se um elipsóide devido à deformação local. Retirado de (3).

Podemos classificar os tipos de atratores de acordo com os sinais que os expoentes de Lyapunov podem assumir. Para um sistema com três equações diferenciais, como o circuito Chua por ex., teremos:

- *ponto de equilíbrio*: $\lambda(-, -, -)$;
- *ciclo-limite ou atrator periódico*: $\lambda(0, -, -)$;
- *superfície toroidal ou atrator quase periódico*: $\lambda(0, 0, -)$;
- *atrator caótico*: $\lambda(+, 0, -)$.

Maiores detalhes sobre os Expoentes de Lyapunov podem ser encontrados em (37; 40).

2.5 SEÇÃO DE POINCARÉ

Soluções para as Eq.2 possuem expressões analíticas, somente em situações particulares bem definidas, onde o *fluxo* é integrável. Porém, geralmente o *fluxo* não é integrável e precisamos estudar cada solução, considerando sua trajetória no espaço de fase. Podemos simplificar a tarefa utilizando a técnica chamada *Método da Seção de Poincaré*, onde o sistema dinâmico a tempo contínuo pode ser reduzido a um sistema dinâmico a tempo discreto(41). A Fig.9 ilustra um exemplo para a Seção de Poincaré, onde vemos um espaço tridimensional e o plano S .

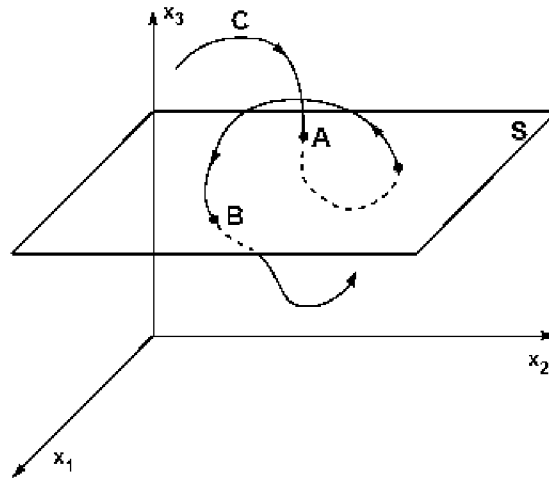


Figura 9: Ilustração de uma Seção de Poincaré. Retirado de (1).

Uma vez que a solução para a Eq.2 é única, o ponto A determina a posição do ponto B e assim sucessivamente, se houverem mais pontos. Cada ponto funciona como ponto inicial para o seguinte, obtemos assim um arranjo de pontos sobre a seção de Poincaré (plano S), que como podemos ver na Fig. 9, é um gráfico em duas dimensões.

Podemos resumir três razões para o uso da seção de Poincaré em: primeiro passamos de um fluxo no $\mathbb{R}^3$, para um mapeamento no plano, reduzindo o número de coordenadas. Segundo o tempo é discretizado e as equações diferenciais são substituídas por equações a diferenças finitas. Estas equações são substancialmente mais simples para se resolver. Finalmente, a quantidade de dados a serem manipulados é reduzida.

A Seção de Poincaré substitui uma evolução contínua por um mapeamento de tempo discreto. Se o fluxo representado pelas Eq.2 é um sistema dissipativo, de modo que os volumes no espaço de fase se contraem, as áreas no plano S , também se contraem. De modo semelhante, se o fluxo tem um atrator, suas características também são encontradas na Seção de Poincaré.

2.6 MAPA DE TOWEL

O mapa da toalha dobrada é um mapeamento hipercaótico devido a Rössler (42). É famoso por ser um mapeamento que possui as menores dimensões possíveis necessárias para hipercaos, tendo dois expoentes de Lyapunov positivos e um negativo. O nome vem do fato de que quando plotado, sua estrutura gráfica assemelha-se a uma toalha dobrada, em todas as projeções. A Fig.10 mostra as curvas das três componentes do Mapa de Towel, o qual é gerado pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax(1 - x_t) - 0,05(y_t + 0,35)(1 - 2z_t), \\ y_{t+1} = 0,1[(y_t + 0,35)(1 - 2z_t)](1 - 1,9x_t), \\ z_{t+1} = cz_t(1 - z_t) + by_t. \end{cases} \quad (11)$$

onde a , b e c são parâmetros do modelo.

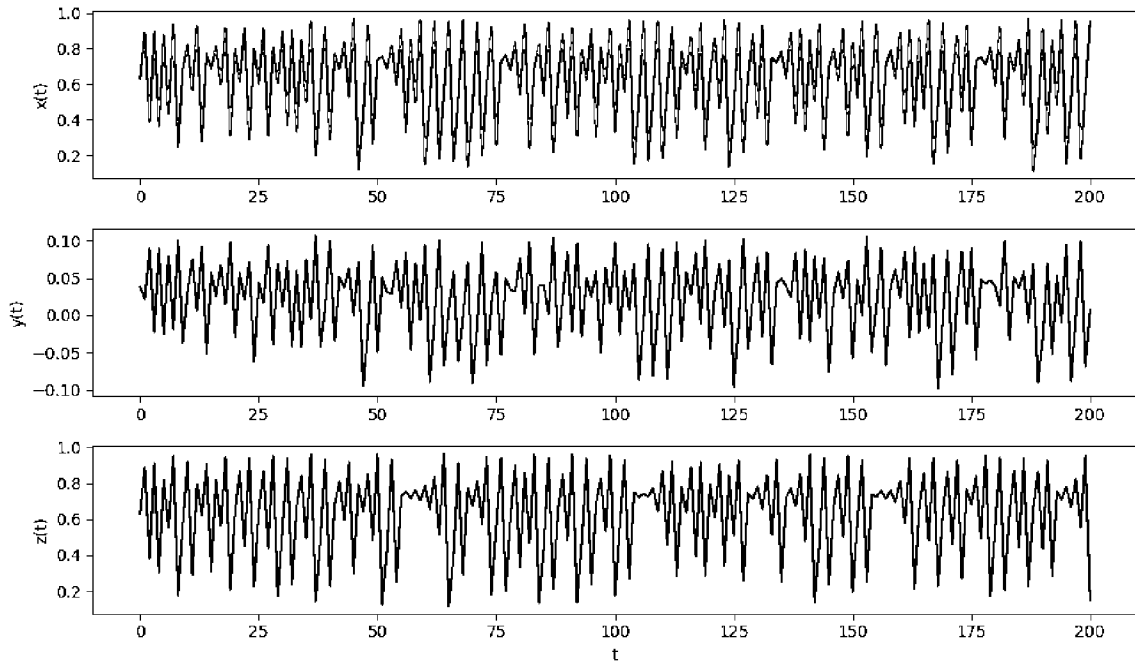


Figura 10: Gráficos das três componentes do Mapa de Towel com 200 pontos. Com parâmetros $a = 3,8$, $b = 0,2$ e $c = 3,78$ e pontos iniciais $x(0) = 0,085$, $y(0) = -0,121$ e $z(0) = 0,075$.

Na Fig. 11 vemos o Mapa de Towel em duas e três dimensões. Podemos observar o formato de toalha dobrada, característico deste mapa.

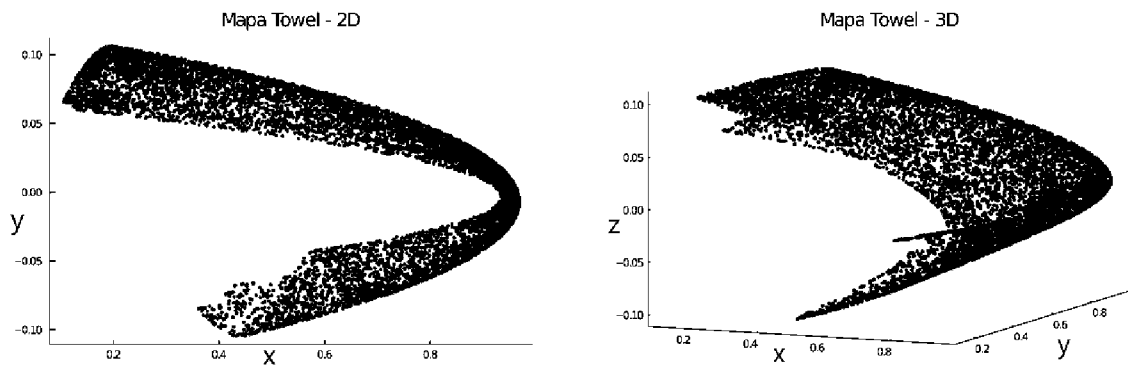


Figura 11: Projeções em 2 e 3 dimensões do Mapa de Towel.

3 GRÁFICOS DE RECORRÊNCIA - RP

3.1 DEFINIÇÃO

Como mencionado anteriormente, a ideia de recorrência foi introduzida por Henri Poincaré em 1890. Entretanto, esta ferramenta matemática somente pode ser aplicada efetivamente após o desenvolvimento dos computadores. Em 1987, Eckmann *et al.*, (13), introduziram o método dos gráficos de recorrência (**RP**), que é amplamente utilizado para a visualização de comportamentos recorrentes no espaço de fase de sistemas dinâmicos. O **RP** essencialmente pode ser descrito por uma matriz binária quadrada $\mathbf{R}_{i,j}$, como:

$$\mathbf{R}_{i,j} = \Theta(\varepsilon - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \quad \mathbf{R} \in \vec{x}_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (12)$$

onde:

- N - é o número de pontos medidos $\vec{x}_i$ presentes na série;
- $\Theta(\cdot)$ - é a função de Heaviside (isto é, $\Theta(x) = 0$, se $x < 0$, e $\Theta(x) = 1$ caso contrário);
- ε - é limiar de tolerância, ou raio de vizinhança ("threshold") no ponto x_i ;
- $\|\cdot\|$ - é uma norma.

Cada ponto de trajetória do espaço de fase $\{\vec{x}_i\}_{i=1}^N$ é testado para ver se está próximo de outro ponto $\vec{x}_j$ da trajetória, ou seja, se a distância entre esses dois pontos é menor do que um limite especificado ε , como visto na Fig. 12. Neste caso, o ponto é dito ser recorrente e é representado por um ponto preto. Caso contrário, o ponto não é recorrente e é representado por um ponto branco. Isso pode ser descrito como uma matriz binária $N \times N$.

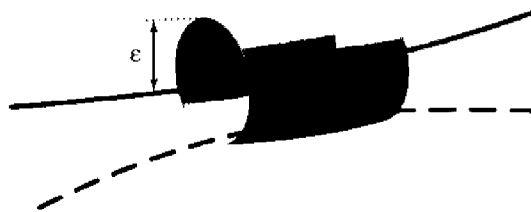


Figura 12: Distância entre as trajetórias $\vec{x}_i$ (linha cheia) e $\vec{x}_j$ (linha tracejada). Neste caso, enquanto as distâncias forem menores que o raio limite ε , os pontos das trajetórias serão ditos recorrentes. Retirado de (4).

Para estados recorrentes, ou seja, para estados que estão em uma vizinhança ε , temos que:

$$\vec{x}_i \approx \vec{x}_j \Leftrightarrow \mathbf{R}_{i,j} = 1.$$

O **RP** pode ser observado plotando a matriz de recorrência, Eq. 12, e usando cores diferentes para suas entradas binárias, ou seja, traçar um ponto preto nas coordenadas (i, j) , se $R_{i,j} = 1$, e um ponto

branco, se $R_{i,j} = 0$. Ambos eixos do **RP** são eixos dependentes de tempo t e mostram para a direita e para cima (convenção).

Como $R_{i,i} = 1 \mid_{i=1}^N$ por definição, o **RP** tem sempre uma linha diagonal principal preta, a linha de identidade (**LOI**). Além disso, o **RP** é simétrico, por definição, em relação a diagonal principal, ou seja, $R_{i,j} = R_{j,i}$.(4).

3.2 LIMIAR DE TOLERÂNCIA ("THRESHOLD") - ε .

A distância limite, ou raio de vizinhança ε é um parâmetro essencial para um **RP**. Portanto devemos dar especial atenção à sua escolha. Se ε for escolhido muito pequeno, talvez não haverá quase estados recorrentes, não apresentando então, nada sobre a estrutura de recorrência subjacente. Por outro lado, se ε for escolhido muito grande, quase todos os pontos podem ser recorrentes e podem incluir também pontos na vizinhança que são pontos consecutivos simples na trajetória. Este efeito é chamado de movimento tangencial e torna as estruturas diagonais dos **RP**'s mais espessas e longas do que realmente são. Portanto, temos que encontrar um meio-termo para o valor de ε . Além disso, se a séries temporal apresentar ruído, podemos ter que escolher um limite um pouco maior, porque o ruído distorceria qualquer estrutura existente no **RP**. Em um limite mais alto, a estrutura da série pode ser preservada.

Listamos alguns métodos usados para encontrar o valor do limite ε , tal como expresso por Marwan *et al.* (4)

1. Uma pequena fração do diâmetro máximo do espaço de fase, que não deve exceder 10% da média ou o diâmetro máximo do espaço de fase.(43).
2. Outra possibilidade é escolher ε de acordo com a densidade do ponto de recorrência, ou taxa de recorrência (*recurrence rate* - RR) do **RP**, buscando uma região de escala na densidade do ponto de recorrência. No entanto, isso pode não ser adequado para dados não estacionários. Para este caso foi proposto escolher ε de forma que a densidade do ponto de recorrência seja de aproximadamente 1% (44). No entanto para Hang Ding *et al.*, em seus estudos, indicaram que o valor do RR , depende da fonte de dados e de diferentes variáveis **RQA**. Em seu trabalho verificaram que, por exemplo, para o Sistema de Lorenz, 10% RR , resulta em melhor poder de resolução do DET (determinismo), pois para um RR de 1% a dispersão é significativamente maior, o que degrada o poder de determinação de DET (45).
3. Outro critério para a escolha de ε leva em consideração que a medição de um processo é uma composição do sinal real e algum ruído observacional com desvio padrão σ . A fim de obter resultados semelhantes aos de um sistema sem ruído, ε deve ser escolhido de modo que seja cinco vezes maior do que o desvio padrão do ruído observado, ou seja, $\varepsilon > 5\sigma$. Esse critério é válido para uma ampla classe de processos. No entanto, devemos conhecer o ruído, que na prática é muito difícil, se não impossível (46).
4. Outro recurso é a utilização da matriz de microestados de recorrência, onde encontramos a Entropia Máxima e o limiar ε correspondente (5).

Salientamos que a escolha de ε depende fortemente do sistema considerado em estudo. Um método pode ser adequado para um determinado sistema, mas não para outro. Neste trabalho estaremos

utilizando para o cálculo de ε , os métodos descritos nos ítems (a), (b) e (d). Para o ítem (b) adotaremos o valor de 10% para RR , pois o valor de 1% RR , não se mostrou adequado para as séries que iremos trabalhar.

3.3 ESTRUTURAS EM RP's

O objetivo dos **RP's** é fornecer uma visualização sobre o espaço de fase, sendo mais útil no caso de sistemas com alta dimensão. Os **RP's** mostram impressões visuais importantes sobre a evolução temporal dessas trajetórias, pois padrões típicos em **RP's** estão ligados a um comportamento específico do sistema. Segundo Eckmann *et al.* (13), esses padrões visuais podem ser divididos em duas categorias: de *larga escala*-topológicos e de *pequena escala* - textura.

Os padrões de larga escala fornecem uma visão global do comportamento do sistema. São eles:

→ *Homogêneo* - o tempo característico de cada linha é pequeno se comparado ao tempo total abrangido pelo **RP**. Seu gráfico é caracterizado por séries estocásticas. Fig13-a;

→ *Periódico* - sistema periódico e quase periódico apresentam como característica a presença de linhas diagonais totalmente preenchidas (ou quase) e paralelas a diagonal principal. Fig13-b;

→ *Deriva(drift)* - é um sistema com parâmetros de variação lenta, ou seja, sistemas não estacionários. O RP “empalidece” conforme se afasta da LOI (Line Of Identity). Fig13-c;

→ *Descontínuo* - caracteriza-se por apresentar tanto períodos estáveis quanto períodos turbulentos, causando áreas ou faixas brancas. Permite encontrar e avaliar facilmente eventos extremos e raros usando a frequência de suas recorrências. Fig13-d;

Padrões de *pequena escala* podem ser classificadas em pontos únicos, linhas diagonais, verticais e horizontais, além disso, até linhas curvas podem ocorrer (4; 47):

→ *Pontos* - ocorrem pontos de recorrência únicos e isolados se os estados são raros, se persistirem por um período muito pequeno ou que flutuem fortemente;

→ *Linha diagonal* - uma linha diagonal $\mathbf{R}_{i+k,j+k} \equiv l|_{k=0}^{l-1}$ (l comprimento da linha diagonal) ocorre quando um seguimento da trajetória existe em paralelo a outro segmento para l unidades de tempo. Uma linha diagonal de comprimento l é então definida por,

$$(1 - \mathbf{R}_{i-l,j-1})(1 - \mathbf{R}_{i+l,j+l}) \prod_{k=0}^{l-1} \mathbf{R}_{i+k,j+k} = l. \quad (13)$$

→ *Linha vertical (horizontal)* - uma linha vertical (horizontal) $\mathbf{R}_{i,j+k} \equiv l|_{k=0}^{v-l}$ (v comprimento da linha vertical) marca um intervalo de tempo em que um estado não muda ou muda lentamente. Define-se uma linha vertical como,

$$(1 - \mathbf{R}_{i,j-1})(1 - \mathbf{R}_{i,j+v}) \prod_{k=0}^{v-1} \mathbf{R}_{i,j+k} = v. \quad (14)$$

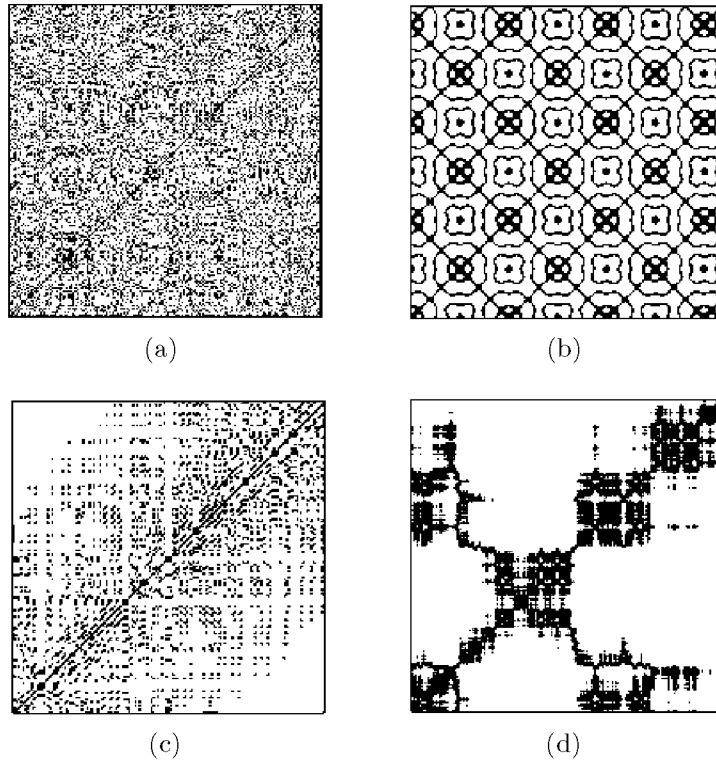


Figura 13: Topologias características dos gráficos de recorrência. (a) Homogêneo, (b) Periódico, (c) Deriva (ou drift) e (d) Descontínuo. Retirado de (4).

O estado fica preso por algum tempo. Este é um comportamento típico de estados laminares (intermitência).

→ *Linhas curvas* - são linhas com inclinação variável. A forma de uma linha curvada depende da relação entre os seguimentos de trajetórias próximas.

As linhas diagonais e verticais são a base para uma análise quantitativa dos **RP**'s.

3.4 ANÁLISE DE QUANTIFICAÇÃO DE RECORRÊNCIA

Além dos gráficos produzidos pelos **RP**'s, várias medidas de complexidade que quantificam estruturas de pequena escala nos **RP**'s, foram propostos e são conhecidas como *Recurrence Quantification Analysis* (**RQA**) (48). Essas medidas são baseadas na densidade de pontos que definem recorrência e nas estruturas de linha diagonal e vertical do **RP**. Um cálculo dessas medidas em pequenas janelas, as submatrizes do **RP** movendo-se ao longo da linha diagonal principal (*line of identity* - *LOI*) em um **RP** ($\mathbf{R}_{i,i} = 1$), produz o comportamento dependente do tempo dessas variáveis (4). Alguns estudos baseados em medidas **RQA** mostram que eles são capazes de identificar pontos de bifurcação, especialmente transições de ordem para o caos (49). As estruturas verticais no **RP** estão relacionadas com estados de intermitência e laminar. Essas medidas que quantificam as estruturas verticais permitem também detectar transições caos-caos (50).

3.4.1 MEDIDA BASEADA NA DENSIDADE DE RECORRÊNCIA

A medida mais simples do **RQA** é a taxa de recorrência (RR) ou percentual de recorrência, que é uma medida da densidade de pontos de recorrência no **RP**.

$$RR(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \mathbf{R}_{i,j}(\varepsilon). \quad (15)$$

A taxa de recorrência varia entre 0 (quando não há pontos de recorrência) e 1 (quando todos os pontos são recorrentes).

3.4.2 MEDIDA BASEADAS NAS LINHAS DIAGONAIS

O *determinismo* é uma medida de previsibilidade do sistema, que está relacionado ao tamanho das diagonais do **RP**, sendo tipicamente pequeno para um sistema estocástico (diagonais menores que um determinado valor, l_{min}) e grande para um sistema periódico (diagonais iguais ou maiores que um determinado valor, l_{min}). Definimos *DET* como,

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N l P(l)}{\sum_{l=1}^N l P(l)}. \quad (16)$$

onde l_{min} é uma diagonal mínima, cujo valor padrão é 2 (dois), l é o comprimento da linha diagonal, N a dimensão do gráfico de recorrência e $P(l)$ a probabilidade da existência de linhas diagonais com comprimento l .

O tamanho médio L das linhas diagonais, determina o tempo médio em que dois segmentos de trajetória permanecem evoluindo de forma similar, ou uma linha diagonal de comprimento l significa que um segmento da trajetória está bastante próximo durante l intervalos de tempo para outro segmento da trajetória em um tempo diferente. Esta medida é obtida por:

$$L = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N l P(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P(l)}. \quad (17)$$

Outra medida **RQA** baseada na linha diagonal, é a mais longa diagonal de um dado **RP**, a L_{max} , definida como,

$$L_{max} = \max \left(\{l_i\}_{i=1}^{N_l} \right), \quad (18)$$

e relacionada a L_{max} , temos a divergência dada por

$$DIV = \frac{1}{L_{max}} \quad (19)$$

em que $N_l = \sum_{l \geq l_{min}} P(l)$. Essas medidas estão relacionadas à divergência exponencial da trajetória do espaço de fase. Quanto mais rápido os segmentos de trajetória divergem, mais curtas são as linhas diagonais e maior é a medida DIV .

A entropia de informação refere-se à entropia de Shannon da probabilidade $p(l) = P(l)/N_l$ para encontrar uma linha diagonal de comprimento l_{min} **RP**

$$ENTR = - \sum_{l=l_{min}}^N p(l) \ln [p(l)]. \quad (20)$$

Essa entropia reflete a complexidade do **RP** em relação às linhas diagonais, por exemplo, para um ruído não correlacionado, o valor de $ENTR$ é bastante pequeno, indicando sua baixa complexidade.

3.4.3 MEDIDA BASEADAS NAS LINHAS VERTICAIS

O número total de linhas verticais de comprimento v no **RP** é então dado pelo histograma

$$P(v) = \sum_{i,j=1}^N (1 - R_{i,j})(1 - R_{i,j+v}) \prod_{k=0}^{v-1} R_{i,j+k}, \quad (21)$$

sendo esta usada em outras medidas.

Chamamos de laminaridade a porcentagem de pontos de recorrência que formam linhas verticais e horizontais, sendo definida da seguinte como:

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{min}}^N v P(v)}{\sum_{v=1}^N v P(v)}. \quad (22)$$

O cálculo da LAM é realizado para aqueles v que excedem um comprimento mínimo v_{min} para diminuir a influência do movimento tangencial. Para mapas, geralmente $v_{min} = 2$ é um valor apropriado. LAM representa a ocorrência de estados laminares no sistema sem descrever a duração dessas fases laminares. Têm-se que a LAM diminuirá se o **RP** consiste em mais pontos de recorrência únicos do que estruturas verticais.

O comprimento médio das estruturas verticais, ou tempo de aprisionamento TT , estima o tempo médio que o sistema permanecerá em um determinado estado, e é chamado de tempo de captura. O tempo de captura é descrito por:

$$TT = \frac{\sum_{v=v_{min}}^N v P(v)}{\sum_{v=v_{min}}^N P(v)} \quad (23)$$

onde $P(v)$ é um histograma de linha vertical no comprimento de v ; $v_{min} = 2$.

Existem outras medidas de **RQA**, tais como $TREND$ tendência de recorrências, $V_{máx.}$ comprimento máximo de estruturas verticais, $VENTR$ entropia de estruturas verticais, $NMPRT$ número

do tempo de recorrência mais provável e outras, que aqui não serão apresentadas, devido ao escopo do trabalho, mas podem ser encontradas em (18; 51).

3.5 RECONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE FASE

De modo geral, um experimento não mede todas as variáveis de estado de um sistema e com frequência temos apenas uma variável que evolui no tempo, representado por uma série temporal $x(t)$, descrevendo a trajetória do sistema dinâmico. Para identificar as propriedades da dinâmica subjacente, devemos analisar o sistema dinâmico a partir dessa série temporal, o que é realizado a partir de técnicas de reconstrução do espaço de estado. A ideia por trás da reconstrução do espaço de estado, está apoiada no fato de que a história temporal de um sinal $x(t)$ contém informações sobre variáveis de estado não observáveis que podem ser usadas para prever um estado presente $x(t)$. A reconstrução do espaço de estado é baseada no "*Teorema da imersão (embedding) de Takens*" (52). Este teorema permite reconstruir um estado m -dimensional similar ao espaço de estado inicial, a partir de uma única variável de estado, que é a variável medida.

O espaço reconstruído deve preservar as propriedades invariantes do sistema dinâmico subjacente, tais como, a dimensão do atrator e os expoentes de Lyapunov(3).

Podemos enunciar o Teorema do seguinte modo: seja uma série temporal de tamanho N (suficientemente grande) e livre de ruído; $x(1), x(2), \dots, x(N)$, obtida em uma das variáveis de um sistema dinâmico determinístico. O espaço de fase deste sistema pode ser reconstruído por um grupo de vetores, chamados coordenadas de atraso ou defasadas. Então o vetor reconstruído, obtido de amostras atrasadas é:

$$X(n) = x(n), x(n + \tau), x(n + 2\tau), \dots, x[n + (m - 1)\tau], \quad (24)$$

$X(n)$ representa a dinâmica reconstituída na imersão, onde $x(n)$ é a amostra da série temporal no tempo discretizado, representado por um número inteiro n , m é a dimensão de imersão (embedding dimension) e τ é o atraso de imersão (embedding delay). A dimensão de imersão é escolhida de tal modo que $m \geq 2D_a + 1$, sendo D_a a dimensão do atrator. Se assim não ocorrer, o atrator dobra sobre si mesmo como uma projeção e pontos inicialmente distantes, tornam-se próximos provocando uma distorção na estatística da medida invariante associada ao atrator reconstruído. Devemos observar que nos casos reais as séries temporais são finitas, apresentam ruído e a dimensão fractal do atrator é desconhecida. Por exemplo, o sistema Lorenz tem um *atrator estranho* com dimensão fractal igual a 2,06 e assim sua dimensão de imersão pelo Teorema de Takens deveria ser pelo menos 6. Porém, utilizando-se dimensões de imersão igual a 3, conseguimos construir um atrator que reproduz as principais características do atrator original do sistema de Lorenz (39). O conceito de *atrator estranho* foi introduzido por Ruelle e Takens em 1971, quando trabalhavam em estudos sobre a natureza do fenômeno de turbulência. O termo "estranho" é utilizado para diferenciar de um atrator que é um ponto de equilíbrio, um ciclo limite ou um toro (53).

Os resultados de Takens garantem que o atrator reconstruído e o original são difeomórficos, ou seja, duas variedades diferenciáveis dizem-se difeomorfas se existir uma aplicação entre essas variedades que seja diferenciável, invertível e a sua inversa seja diferenciável. Assim, a determinação dos parâmetros de imersão do tempo de atraso τ e dimensão m , é de extrema importância para a identificação dos

invariantes geométricos. Podemos encontrar uma variedade de métodos para avaliar estes parâmetros de imersão.

3.5.1 ESTIMATIVA DA DIMENSÃO DE IMERSÃO

A dimensão de imersão geralmente é diferente da dimensão exata (e desconhecida) do espaço de estados, $m = D_a + 1$, em que D_a significa a parte inteira da dimensão do atrator D . O Teorema de Takens garante que o atrator imerso no espaço de estado m -dimensional é desdobrado (unfolded) sem qualquer auto-interseções. A condição $m \geq 2D_a + 1$ é suficiente, mas não necessária, e um atrator pode ser reconstruído em imersão tão baixa quanto $D_a + 1$, (54). Existem alguns métodos utilizados para determinar a dimensão mínima de imersão D_a :

1. *O método da saturação de algum invariante geométrico do sistema*: Este método baseia-se na tentativa de encontrar um valor assintótico de alguma invariante do sistema dinâmico em função do valor da dimensão de imersão. Assim, quando o invariante geométrico calculado estabilizar em um determinado valor, este valor será para a dimensão de imersão é o menor valor para o qual aquele invariante estabiliza. Uma desvantagem deste método é a necessidade de um tempo computacional muito grande e de uma série temporal sem ruídos (55).
2. *A decomposição em valores singulares (SVD)*: Este método é baseado na diagonalização da matriz de covariância dos vetores de reconstrução, identificando os seus autovalores. O número de autovalores não-nulos é um valor estimado da dimensão mínima (56).
3. *O método dos falsos vizinhos (False Nearest Neighbors - FNN)*: O método foi desenvolvido na busca de uma dimensão mínima onde não ocorrem cruzamentos da órbita consigo mesma. Deste modo, a partir da projeção do sistema em uma determinada dimensão, verifica-se se um vizinho é “verdadeiro” ou “falso”, comparando com uma projeção em uma dimensão maior. Desta forma, um falso vizinho é um ponto do sinal que só corresponde a um vizinho devido à observação das órbitas em um espaço muito pequeno de $D < m$. Quando o espaço está imerso em uma dimensão $D \geq m$, todos os pontos vizinhos de todas as órbitas são vizinhas verdadeiras, (57).
4. *Método dos vizinhos médios (AFN)*: Este método é uma extensão da técnica dos falsos vizinhos, sendo aplicado em séries temporais estocásticas ou determinísticas. Este método também é pouco sensível ao tamanho da série em questão. O procedimento consiste em explorar o comportamento da estrutura do atrator à medida que se aumenta o valor de m , a partir de 1. Se m é muito pequeno, o atrator apresenta auto-interseções da trajetória do atrator no espaço de estados. Nestes casos, pontos próximos no atrator são vizinhos exatos devido a dinâmica do sistema, ou falsos vizinhos devido às auto-interseção. Em dimensões maiores, nas quais as auto-interseções são desfeitas, os falsos vizinhos são revelados visto que eles vão se distanciando. O objetivo do método é encontrar um limiar para m , tal que não existam falsos vizinhos no atrator reconstruído a partir desta dimensão de imersão (58).

Existem outros métodos para determinação da dimensão de imersão, como o método das falsas margens próximas (*FSN*) (59), método dos campos verdadeiros (60) e o de geração de rede de funções de base Radial (61).

Detalharemos o bem conhecido método dos falsos vizinhos - *FNN*. Matematicamente os falsos vizinhos próximos podem ser determinados da seguinte forma: tomamos um vetor com apenas uma coordenada $x(t)$ e então encontramos o vizinho mais próximo para cada ponto da série, $x^r(t_r)$. Utilizaremos então dois critérios para definir se dois pontos são realmente vizinhos próximos ou não. Basta que um dos critérios afirme que temos um falso vizinho para incluí-lo na contagem dos falsos vizinhos. As distâncias Euclidianas entre $x(t)$ e $x^r(t_r)$, que para tempos discretizados, o tempo t é representado por um número inteiro n , ou seja, $x(n)$ e $x^r(n_r)$, são dadas por,

$$r_D^2(n, r) = \sum_{k=0}^{D-1} [x(n + k\tau) - x^r(n_r + k\tau)]^2. \quad (25)$$

Aumentando a dimensão de D para $D + 1$, as distâncias entre $x(n)$ e $x^r(n_r)$ são alteradas, devido às novas coordenadas, obtemos então,

$$r_{D+1}^2(n, r) = r_D^2(n, r) + [x(n + (D - 1)\tau) - x^r(n_r + (D - 1)\tau)]^2. \quad (26)$$

Quando as distâncias entre $x(n)$ e $x^r(n_r)$ aumentam, na passagem da dimensão D para a dimensão $D + 1$, significa que os r -ésimos vizinhos próximos estão se separando (falsos vizinhos). A dimensão mínima de imersão é encontrada quando as distâncias param de crescer, não havendo mais falsos vizinhos. A condição para decidir se os vizinhos são falsos é dada por,

$$\left[\frac{r_{D+1}^2(n, r) - r_D^2(n, r)}{r_D^2(n, r)} \right]^{1/2} = \frac{|x(n + (D - 1)\tau) - x^r(n_r + (D - 1)\tau)|}{r_D(n, r)} > R_{tol}, \quad (27)$$

onde R_{tol} é um parâmetro de controle e que para $R_{tol} \geq 10$ os falsos vizinhos são claramente identificados, sendo que o número de vizinhos necessariamente tem de ser 1, $r = 1$.

Esta condição é necessária porém não suficiente. O segundo critério compara a distância entre dois pontos em $(D + 1)$ -dimensões com o tamanho do atrator, dado pelo desvio padrão da série temporal. Se a distância entre os pontos da $(D + 1)$ -ésima dimensão for maior que duas vezes o tamanho do atrator, os pontos são falsos vizinhos. Estabelecendo-se assim este segundo critério da seguinte forma,

$$\frac{r_{D+1}(n)}{R_a} > 2, \quad R_a^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [x(n) - \bar{x}]^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n). \quad (28)$$

3.5.2 ESTIMAÇÃO DO ATRASO DE IMERSÃO

A reconstrução de um atrator com coordenadas de atraso temporal não é um processo automático. A escolha apropriada do atraso τ é importante para o sucesso da reconstrução. Se τ for escolhido muito pequeno, as coordenadas de atraso de um vetor $X(n)$, Eq. 24, de um dado vetor y_n são quase iguais uma a outra. Deste modo, o extremo de cada vetor y_n no espaço de coordenadas de atraso se encontrará próximo de uma diagonal de tal forma que o atrator reconstruído, fica esticado ao longo desta diagonal, ficando obscurecido pelo ruído. Porém, se τ for muito grande, as coordenadas estarão muito distantes umas das outras e consequentemente a correlação entre elas é muito baixa, causando perda de informação (62; 63). Para determinar o τ mais adequado ao problema de modelagem de sistemas dinâmicos, usa-se um critério de medida de independência mais geral, tal como a informação

ganha em bits sobre $x(t - \tau)$, dada a medida $x(t)$. Esta medida é conhecida como *informação mútua* (64), e o primeiro mínimo no gráfico desta grandeza em função de τ , é frequentemente sugerida como uma boa estimativa para τ (54).

A expressão para o cálculo da informação mútua é baseada na entropia de Shannon. Dentro de um intervalo de dados de uma série temporal, é criado um histograma para a distribuição de probabilidade dos dados. Denotando-se por P_i como a probabilidade que o sinal assuma um valor dentro da i th caixa (bin) do histograma e, assume-se $P_{ij}(\tau)$ como sendo a probabilidade que $x(t)$ esteja na caixa i e $x(t + \tau)$ esteja na caixa j . Então a informação mútua para um atraso no tempo τ é definido como,

$$I(\tau) = \sum_{i,j} P_{ij}(\tau) \ln[P_{ij}(\tau)] - 2 \sum_i P_i \ln[P_i]. \quad (29)$$

Como exemplo, a Fig. 14 mostra o efeito do atraso para o Sistema de Lorenz, onde as condições iniciais são $x_0 = 0.0$, $y_0 = 10.0$ e $z_0 = 0.0$, com parâmetros $\sigma = 10.0$, $\rho = 28.0$ e $\beta = 8/3$.

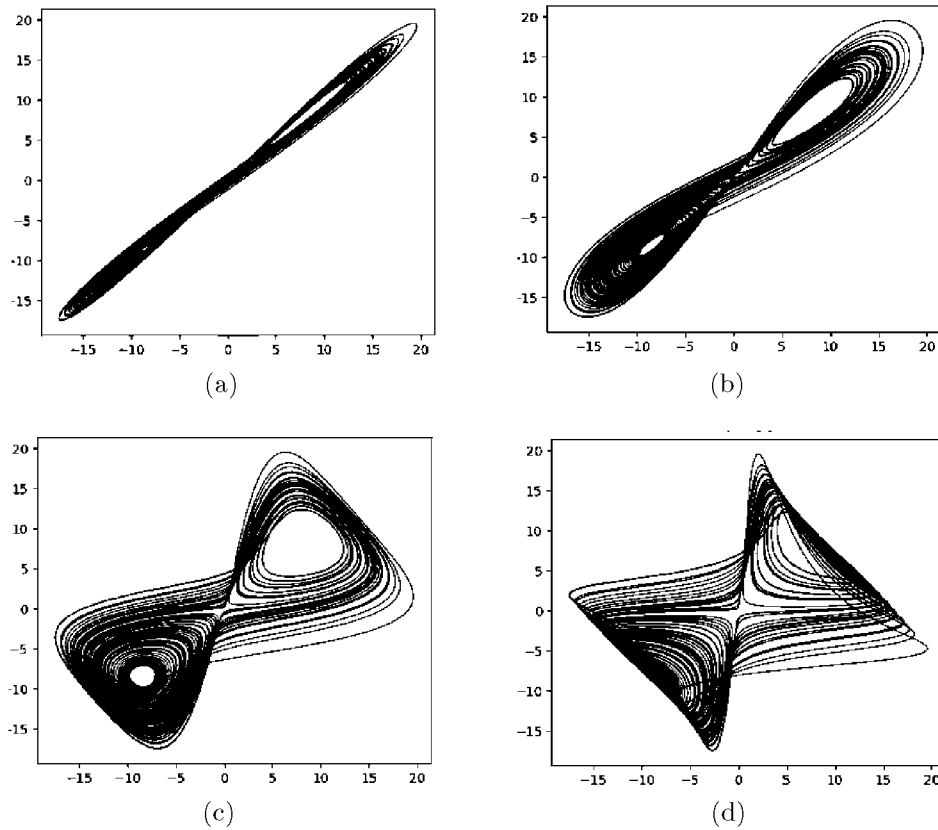


Figura 14: Atratores reconstruídos a partir da série temporal para o Sistema de Lorenz. Os tempos de atraso (a) $\tau = 3$, (b) $\tau = 10$, (c) $\tau = 30$ e (d) $\tau = 50$.

Podemos ver pela Fig. 14 que para um valor de $\tau = 3$, o atrator ficou “achatado”, representando que as amostras da série temporal $X(n)$, estando muito próximas, não fornecem informações sobre a dinâmica do sistema de Lorenz. No caso do atrator onde $\tau = 10$, o atrator reconstruído assemelha-se bastante ao resultado obtido para o sistema original. Para a situação em que $\tau = 30$, o atrator apresenta indícios de deformação que ficam mais evidentes no caso de $\tau = 50$. Neste caso as abas da figura começam a se dobrar sobre si mesmas.

3.6 BREVE DISCUSSÃO ACERCA DO RUÍDO

A presença de ruídos em dados obtidos experimentalmente é algo inevitável e dependendo do nível, pode encobrir informações importantes para identificar o sistema dinâmico associado a evolução temporal, tornando o seu estudo uma tarefa complexa. Podemos definir ruído como o conjunto das influências não-sistemáticas sobre o comportamento de um sistema, não estando compreendido no modelo determinístico (previsível) desse sistema (65). A contaminação por ruído pode acarretar interpretações incorretas dos resultados, principalmente quando desejamos realizar uma previsão. É importante ressaltar que podemos ter pelo menos duas classes de ruído capazes de afetar nossos cálculos e nossas interpretações. Temos o ruído dinâmico que pode afetar a evolução do sistema, isto é, quando o ruído entra na equação diferencial. Também temos o ruído observacional, que afeta as variáveis já produzidas pelo sistema, as variáveis de posição.

O circuito de Chua, que será discutido nesse trabalho, é um dispositivo eletrônico e está sujeito ao aparecimento de ruído experimental. Em eletrônica, ruído diz respeito a qualquer corrente ou tensão indesejada, que observamos na medida de um sinal elétrico proveniente de um sensor, componente ou que esteja presente na transmissão de sinal eletrônico (66). O ruído diminui a precisão dos resultados, e por este motivo é inconveniente. Diversas formas de ruído são intrínsecas aos sensores e estão sempre presentes, porém devemos dar atenção especial a elas principalmente quando a amplitude do sinal que estamos medindo tem a mesma ordem de grandeza da componente indesejada. É fácil determinar a forma da onda do sinal desejado quando o ruído representa 1% da amplitude total da saída do sensor, porém se esta porcentagem assumir valores altos, pode ser impossível distinguir os dois tipos de sinais, inviabilizando a medida correta do sinal desejado.

Existem várias fontes de ruído, dentre as quais vale destacar as fontes interferentes causadas pelo homem (fontes externas) e as fontes intrínsecas que são oriundas da própria existência do dispositivo. As primeiras, podem ser removidas com técnicas de blindagem, já as segundas podem ser estudadas através de estatística e teorias da probabilidade. Mesmo conhecendo e removendo totalmente as formas de ruído externas, ao realizar uma medida, ainda será possível encontrar diversas formas de ruído. Vale destacar neste caso que resistores, transistores, contatos, etc ainda causam interferências. O ruído gerado por estes dispositivos é randômico e intrínseco ao sistema, ou seja, não podemos removê-lo, muito menos prever quando e com qual amplitude irá ocorrer. O que podemos fazer é estudar de forma estatística (67).

Tanto o ruído dinâmico quanto o ruído observacional podem ser aditivos ou multiplicativos. Para efeito de análise, o ruído dinâmico não será considerado, uma vez que é muito pequeno. Entretanto, consideraremos que os termos das séries temporais possuem contaminação por ruídos observacionais aditivos, ou seja

$$x_r = x_i + r_i,$$

onde x_r é a série com adição de ruído, x_i componentes da série original sem ruído e r_i , são as componentes do ruído aleatório, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Com base nisso geraremos uma série aleatória para a simulação de um ruído. Faremos então o acréscimo do ruído em cada termo de cada série temporal. Lembrando que o valor aleatório não pode ser muito grande, pois pode destruir completamente a informação do sinal original, (68).

3.7 ENTROPIA DE MICROESTADOS DE RECORRÊNCIAS

Trata-se de um quantificador (recentemente desenvolvido) de entropia de séries temporais não lineares com base em propriedades mais gerais do espaço de recorrência, não limitando-se apenas em suas periodicidades no tempo ou no espaço pontuais. Pretende ser útil na análise de propriedades não lineares do sinal, particularmente em caos onde a aferição do expoente de Lyapunov do sistema, seja um tanto difícil para ser estimado. É um quantificador de recorrência com base na definição formal de entropias do sistema, que faz uso de pequenas matrizes quadradas de $N \times N$ elementos definidos como microestados de recorrência, ou seja, tendo um **RP**, selecionamos nele amostras aleatórias de microestados. As amostras de microestado do **RP** permitem definir um conjunto de microestados e, se tivermos um conjunto suficientemente grande de microestados, refletirá de maneira satisfatória os padrões de recorrência na dinâmica das séries temporais.

A Fig.15 mostra, como exemplo, um **RP** de uma série com seis elementos, onde 1(um) representa um estado recorrente(pixel preto) e 0(zero) um estado não recorrente (pixel branco) para matrizes de microestados 2×2 .

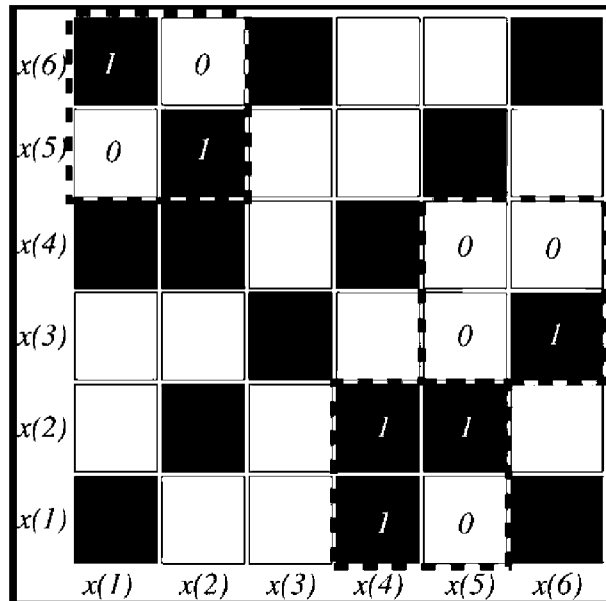


Figura 15: Exemplo de **RP** série temporal com seis elementos. Pixels pretos (brancos) denotam um par de pontos recorrentes (não recorrentes). Os quadrados tracejados vermelhos representam matrizes (2×2) de microestados de recorrência selecionados aleatoriamente no **RP**. Retirado de (5).

De modo geral, o número de microestados para um dado N é descrito como $N^* = 2^{N^2}$. Por exemplo, para $N = 2$ temos $N^* = 16$. Se definirmos n_i como o número de vezes que um microestado i é observado em $\tilde{N}$ amostras, então vem que $P_i = \frac{n_i}{\tilde{N}}$ é a probabilidade relacionada ao microestado i . Podemos definir uma entropia do **RP** associadas às probabilidades de ocorrência de microestados como:

$$S(N^*) = - \sum_{i=1}^{N^*} P_i \ln P_i. \quad (30)$$

Apesar de N^* crescer rapidamente em função de N , apenas um número restrito de microestados é efetivamente populado. Uma grande vantagem desta nova metodologia, usando a Eq 30, sobre a

entropia definida pela Eq. 20, é a possibilidade de computar informações sobre todos os microestados possíveis. Pode-se estimar o valor máximo da entropia $S(N^*)$, onde todos o microestados povoados são igualmente prováveis. Neste caso $P_i = 1/N^*$, teremos então para a entropia (5),

$$S(N^*)_{max.} = \ln N^* = N^2 \ln 2. \quad (31)$$

4 CIRCUITO DE CHUA

A primeira publicação sobre o circuito de Chua foi realizada pelo professor Matsumoto em 1984, após uma visita do professor Leon Chua à Universidade de Waseda. Neste trabalho, Matsumoto relata a observação de atratores caóticos gerados durante a simulação de um circuito autônomo simples de terceira ordem proposto por Chua. A motivação para a criação deste circuito surgiu da ideia de montar um circuito capaz de reproduzir os sistemas de Lorenz e Rössler, o que levou Chua a propor um circuito autônomo físico que tivesse dois ou três pontos de equilíbrio instáveis, dois terminais para resistores passivos, um indutor, capacitores, e apenas um terminal duplo para um resistor não linear. Assim como projetar qualquer circuito para satisfazer um determinado conjunto de especificações, o circuito de Chua foi projetado usando um procedimento de síntese sistemática passo a passo. Diversas configurações foram propostas, mas a presença de um “sub circuito” ressonante LC , oferece uma vantagem, uma vez que seu mecanismo oscilatório é frequentemente um precursor de caos. Em um de seus trabalhos Chua descreve o procedimento adotado por ele na escolha da quantidade mínima dos componentes, da topologia do circuito e da característica da curva $i(V)$ do dispositivo não-linear. O circuito de Chua é um sistema dinâmico de fácil implementação em laboratório, com baixo nível de ruído e modelado facilmente por equações diferenciais, tornando o mesmo, um excelente modelo para estudos teóricos e experimentais (6). A Fig. 16 mostra o esquema elétrico do circuito escolhida por L. O. Chua.

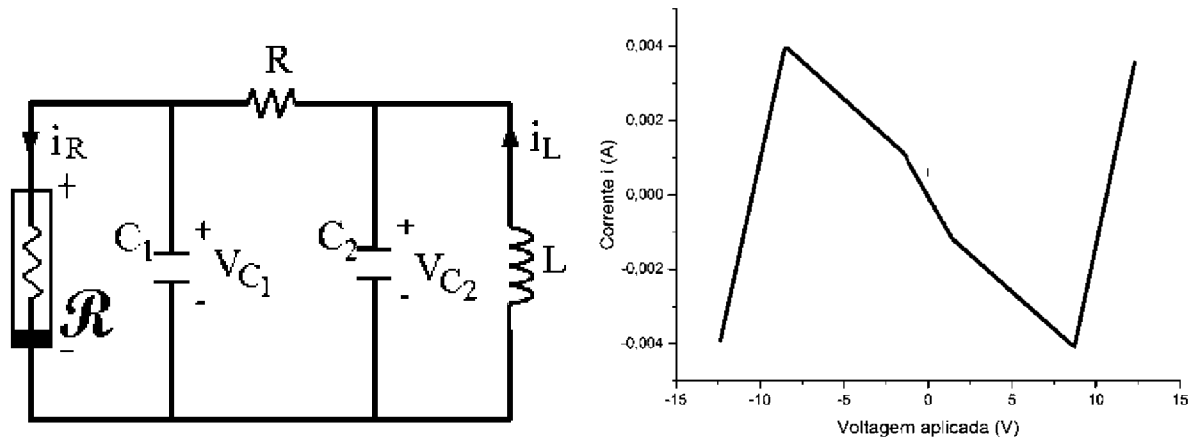


Figura 16: (a) Circuito de Chua e (b) a característica $V_R - i_R$ com 5 segmentos de retas para o resistor não linear $\mathcal{R}$. O comportamento caótico pode ser observado apenas nos 3 segmentos com inclinação negativas. Retirado de (6).

Podemos encontrar na literatura, algumas variações para o circuito chua. No circuito por nós montado e analisado, substituímos o indutor de fio por um indutor eletrônico (27). A Fig. 17 mostra o circuito de Chua composto de dois capacitores (C_1 e C_2), com o indutor eletrônico (L), um resistor linear variável (R_0) e um resistor não linear (que é o próprio diodo chua), e os respectivos valores dos componentes eletrônicos usados. Se aplicarmos as leis de *Kirchhoff* às três malhas do sistema, vamos obter as seguintes equações diferenciais (69):

$$\frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{V_{C2} - V_{C1}}{RC_1} - \frac{i_D}{C_1}, \quad (32)$$

$$\frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{RC_2} - \frac{i_L}{C_2}, \quad (33)$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{-V_2}{L}, \quad (34)$$

onde V_{C_1} e V_{C_2} são as tensões sobre os capacitores, i_L é a corrente que circula pelo indutor e i_D é a corrente que circula pelo diodo Chua. A corrente característica do diodo Chua i_D , mostrado na Fig.19 é obtida por:

$$i_D = m_0 V_1 + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(|V_1 + B_p| - |V_1 - B_p|). \quad (35)$$

onde m_1 e m_0 , são as inclinações negativas apresentadas pelo diodo de Chua e B_p são os pontos de transição do comportamento do circuito.

Estas equações diferenciais podem ser simplificadas, escolhendo adequadamente variáveis paramétricas, permitindo a redução do número de parâmetros sem mudar a dinâmica do sistema. As Eq.'s 36 assim obtidas são adimensionais e simplificam muito os cálculos computacionais.

As variáveis e parâmetros são:

$$\begin{cases} x = \frac{V_{C_1}}{B_p}, & y = \frac{V_{C_2}}{B_p}, & z = \frac{i_L R}{B_p}, \\ \alpha = \frac{C_2}{C_1}, & \beta = \frac{C_2 R^2}{L}, & \tau = \frac{t}{C_2 R}, \\ a_1 = Rm_1, & a_0 = Rm_0. \end{cases} \quad (36)$$

As equações Eq.32, Eq.33, Eq.34 e Eq.35 podem se reescritas respectivamente como:

$$\dot{x} = \alpha[y - x - i_D(x)], \quad (37)$$

$$\dot{y} = x - y + z, \quad (38)$$

$$\dot{z} = -\beta y, \quad (39)$$

$$i_D(x) = a_0 x + \frac{1}{2}(a_1 - a_0)(|x + 1| - |x - 1|). \quad (40)$$

onde a_0 e a_1 dependem de m_1 e m_0 , conforme visto nas Eq's. 36.

Na Fig. 18 vemos a denominação dos símbolo utilizados no esquema do circuito eletrônico de Chua.

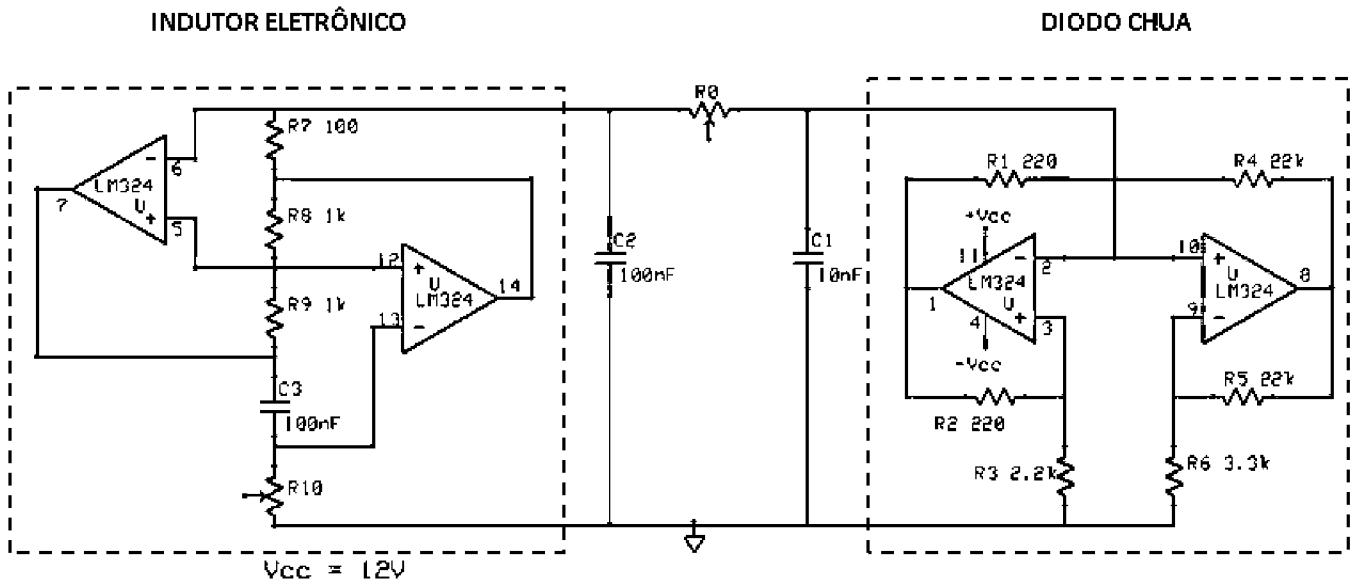


Figura 17: Esquema eletrônico do Circuito de Chua.

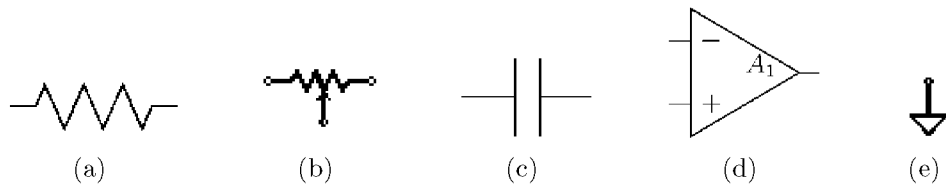


Figura 18: Simbologia utilizada no esquema eletrônico do circuito de Chua. (a) Resistor, (b) Resistor variável, (c) Capacitor, (d) Amplificador Operacional (Amp Op) e (e) aterramento.

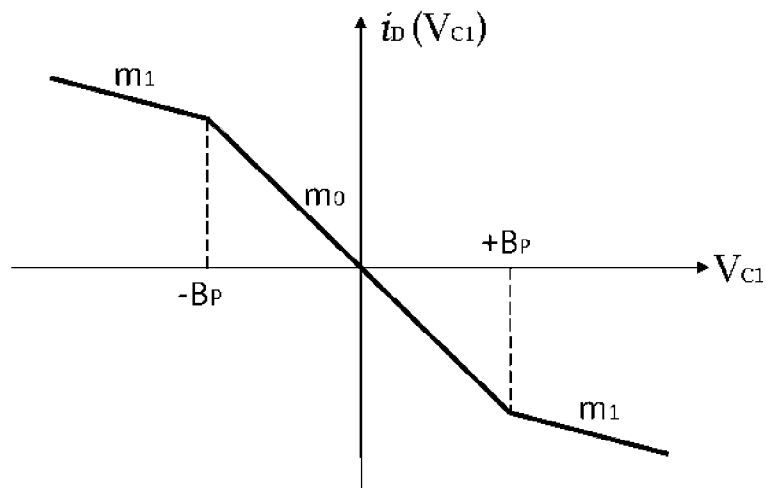


Figura 19: Curva $i_D(V_{C1})$ do diodo de Chua, onde são representadas as regiões de operação do circuito com inclinações negativas m_1 e m_0 .

4.1 DIODO DE CHUA

Podemos observar pela Fig.17 e abaixo na Fig.20, que o diodo de Chua é composto por dois amplificadores operacionais (Amp Op) LM324 (como alternativa podemos usar o C.I. TL074) e seis resistências $R_1 - R_6$.

Para a análise do funcionamento do diodo Chua, devemos determinar os parâmetros m_0 , m_1 e B_p ,

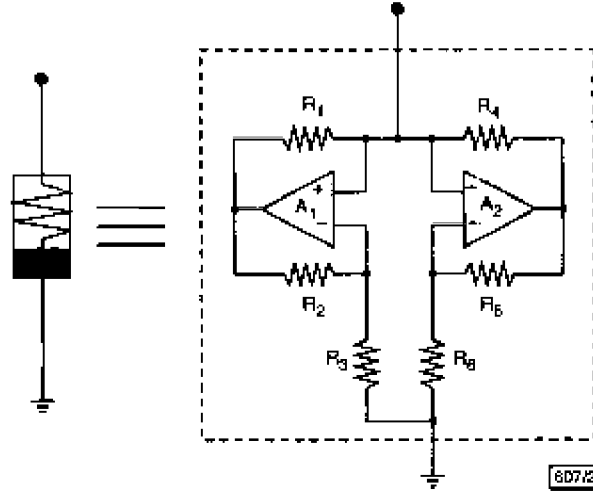


Figura 20: Diodo de Chua constituído por dois amplificadores operacionais e seis resistências R_1 a R_6 .

vide Fig.19. Para tanto são utilizados conceitos de eletricidade e teoria de amplificadores operacionais. As equações usadas para os cálculos destes parâmetros são

$$m_0 = - \left(\frac{R_2}{R_1 \cdot R_2} + \frac{R_5}{R_4 R_5} \right), \quad (41)$$

$$m_1 = \left(\frac{1}{R_4} - \frac{R_1}{R_2 R_3} \right), \quad (42)$$

$$B_p = V_{CC} \left(\frac{R_3}{R_3 + R_2} \right). \quad (43)$$

Cálculos detalhados podem ser encontrados em (70; 71; 72).

4.2 INDUTOR ELETRÔNICO

O indutor eletrônico é um circuito do tipo *gyrator* construído como um transformador de impedância (73) e é composto por dois amplificadores operacionais (Amo Op) e quatro resistores R_7 a R_{10} e um capacitor C_3 , Fig.17. O circuito de Chua exibe um espectro de banda larga, ou seja, podemos obter vários valores de frequência de oscilação, mas a maioria da densidade de potência é concentrada aproximadamente em torno da frequência determinado pelo sub-circuito ressonante composto por L e C_2 . A frequência de oscilação, conhecida como frequência ressonante é dada pela Eq.44. Para nosso caso, a frequência ressonante foi de aproximadamente 3.118,58 Hz.

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}}. \quad (44)$$

Oscilações caóticas lentas são desejáveis em muitas situações onde computadores são empregados para medir os dados do circuito, calcular expressões complexas com base nesses dados e tomar alguma ação de controle, ou para executar algum arquivo ou saída gráfica. Para diminuirmos a frequência das oscilações do circuito de Chua é necessário utilizarmos elementos de armazenamento de energia no sistema cada vez maiores, ou seja, devemos aumentar os valores das capacitâncias C_1 , C_2 e sobretudo a indutância de L . Diminuindo a frequência das oscilações das séries para uma taxa de aquisição de

dados fixa obteremos mais ciclos e mais pontos por ciclo.

Podemos encontrar capacitores com grande variedade de valores, porém o mesmo não pode ser dito para os indutores. Para obtermos valores adequados de indutores, devemos levar em consideração a relação entre o número e tamanho das espiras e a sua indutância. Indutores comerciais de valores altos têm uma resistência interna R_L muito alta, possuem baixa precisão e que variam com a temperatura, podem sofrer influências eletromagnéticas externas, além do tamanho, que pode ser exagerado para o circuito. Para contornar este problema foi proposto por L.A.B. Tôrres (27) a implementações de um indutor eletrônico, Fig.21.

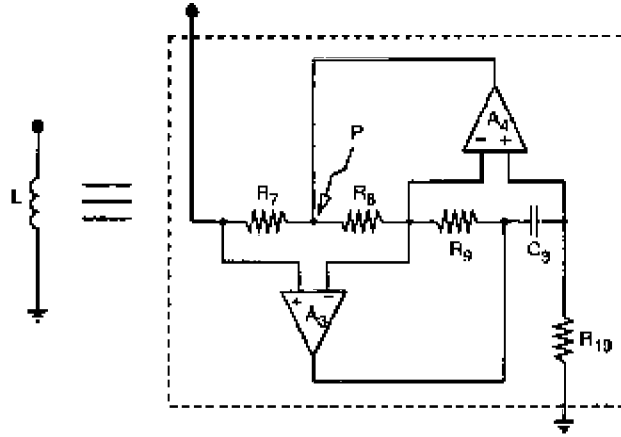


Figura 21: Circuito simulador do indutor eletrônico constituído por dois amplificadores operacionais, quatro resistores R_7 a R_{10} e um capacitor C_3 .

Segundo Torres, o circuito do indutor eletrônico funciona como um indutor real, para os valores de frequências entre 10^2 e 10^5 Hz, além de mostrar que o ganho desse circuito em baixas frequências é muito pequeno, indicando um baixo valor para a resistência interna do circuito do indutor eletrônico, que é de vital importância para o circuito de Chua. O circuito do indutor eletrônico, de fato, então se comporta como um indutor com valor de indutância calculado pela Eq.45.

$$L = \frac{R_7 \cdot R_9 \cdot R_{10}}{R_8} C_3. \quad (45)$$

A corrente que circula no indutor i_L , pode ser determinada, medindo-se a tensão elétrica V_p no nó marcado com a letra P na Fig. 21e usando a expressão

$$i_L = \frac{(V_p - V_{C_2})}{R_7}.$$

É importante notar que usando esta abordagem, é possível adquirir o vetor de estado completo apenas por medição de tensões (71).

4.3 MONTAGEM DO CIRCUITO

Nosso primeiro passo neste projeto foi escolher um circuito que representasse o Circuito de Chua. Encontramos algumas variações do circuito, mas optamos por aquele que mais comumente estava sendo utilizado nos diversos artigos consultados, por exemplo, (27; 74; 75) e outros. As principais diferenças encontradas, estavam no uso do indutor real e no valor dos capacitores, que necessitavam de associações para encontrar o valor da capacitância adequado.

Optamos por usar um indutor eletrônico e capacitores com valores comerciais, pois possuíamos à nossa disposição todos os componentes, além dos instrumentos e equipamentos necessários para a montagem do circuito. Como tínhamos à nossa disposição, no lugar de quatro amplificadores operacionais (Amp Op) separados, utilizamos apenas um CI, cujo encapsulamento apresenta internamente, os quatro Amp Op necessários para a montagem do circuito.

Primeiramente tentamos reproduzir o circuito com os dados e parâmetros encontrados em alguns artigos e estudos consultados, porém não conseguimos obter os resultados apresentados entre experimento e a simulação. Quando obtínhamos uma boa simulação, o circuito experimental não apresentava curvas compatíveis. Os valores apresentados pelos parâmetros α , β , a_0 e a_1 , na literatura consultada, proporcionavam figuras adequadas nas simulações, mas não eram reproduzidas nos experimentos. Fizemos diversos testes com o circuito experimental, variando os resistores R_0 e R_{10} , até encontrarmos valores que reproduziram o comportamento caótico típico do circuito Chua. Através das Eq.'s 36, 41, 42 e 45 calculamos os parâmetros necessários para o circuito simulado. Assim conseguimos bons resultados entre o circuito experimental e o circuito simulado. Os dados serão apresentados no capítulo seguinte.

A Fig. 22 mostra a montagem do circuito Chua em um *protoboard*. Vemos claramente que é um circuito muito simples, com poucos componentes, fáceis de serem encontrados no comércio de componentes eletrônicos e o principal: de fácil construção.

A divisão pela linha tracejada em vermelho, mostra a divisão do circuito em diodo Chua e indutor eletrônico e como ficaram as disposições dos respectivos componentes. Todos componentes estão ligados ao C.I. LM324, no centro do *protoboard*.

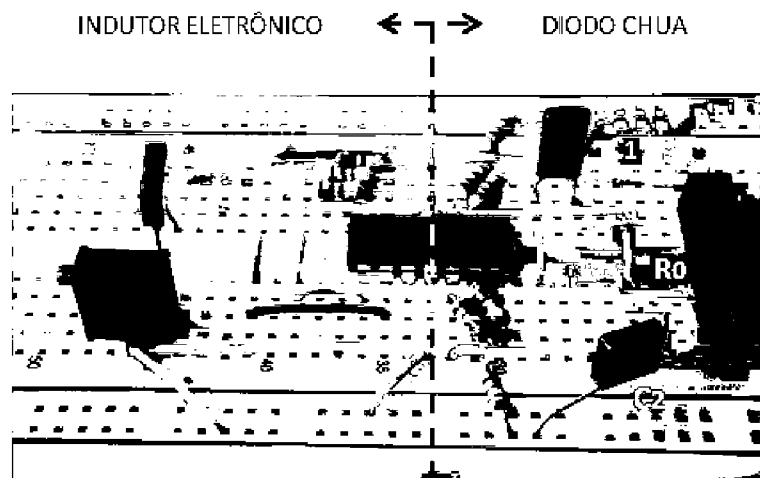


Figura 22: Montagem do circuito Chua em um *protoboard*.

Na Fig. 23 vemos o osciloscópio Tectronix TBS 1052B 50MHz – 1GS/s, utilizado para a obtenção das curvas do circuito de Chua e o RCL Minipa modelo MX-1010 para a medição dos valores dos

componentes.

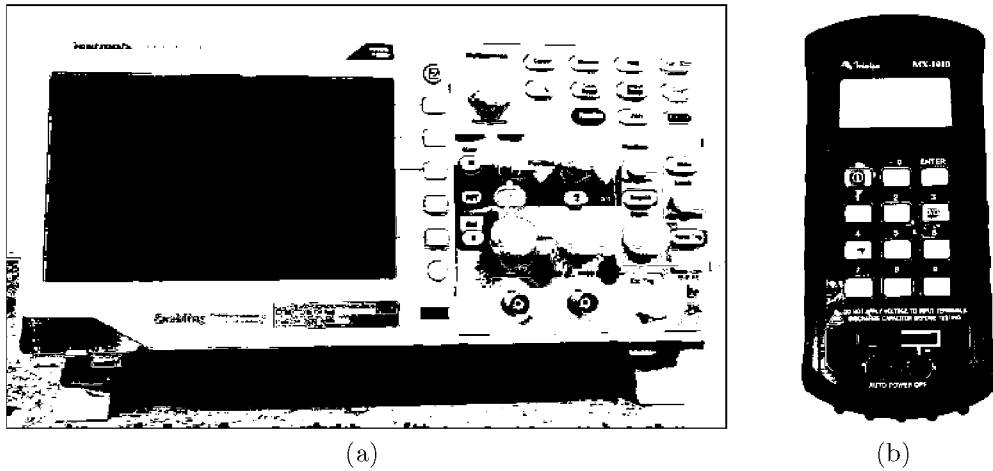


Figura 23: (a) Osciloscópio Tectronix modelo TBS 1052B 50MHz – 1GS/s e (b) RCL Minipa modelo MX-1010, utilizado para medição dos valores reais dos componentes.

A Fig. 24 mostra a montagem do circuito e o equipamento utilizado (Fig. 23 - (a)). As pontas de prova do osciloscópio são colocadas sobre os capacitores C_1 e C_2 , obtendo assim os valores das tensões elétricas sobre os mesmos. O comportamento caótico é obtido, quando variamos o resistor R_0 , visto na Fig.22. O resistor variável R_{10} possibilita encontrarmos valores diversos para o indutor eletrônico, conforme a Eq. 45. Logicamente não temos muita liberdade de escolha para L , uma vez que o indutor deve trabalhar em conjunto com o diodo de Chua. Na Fig. 25 observamos a tela do osciloscópio enquanto o resistor R_0 estava sendo variado. É possível ver como a curva ($V_{C1} \times V_{C2}$) gerada, mudava com a variação dos parâmetros do circuito. A Fig 26 mostra o aspecto das curvas gravadas, das tensões sobre cada um dos capacitores.

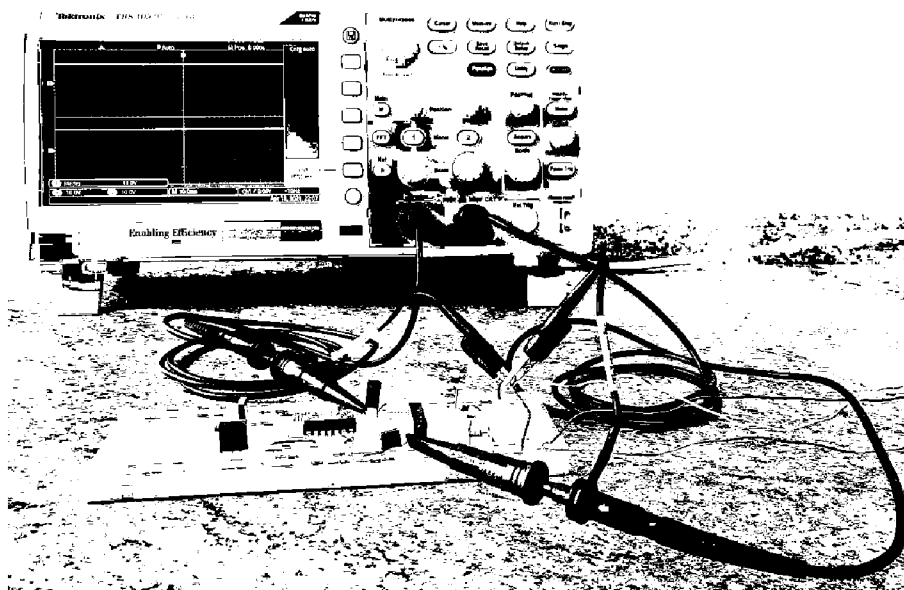


Figura 24: Montagem do experimento para obtenção das séries temporais do circuito de Chua. Vemos as pontas de prova do osciloscópio, sobre os capacitores C_1 e C_2 .

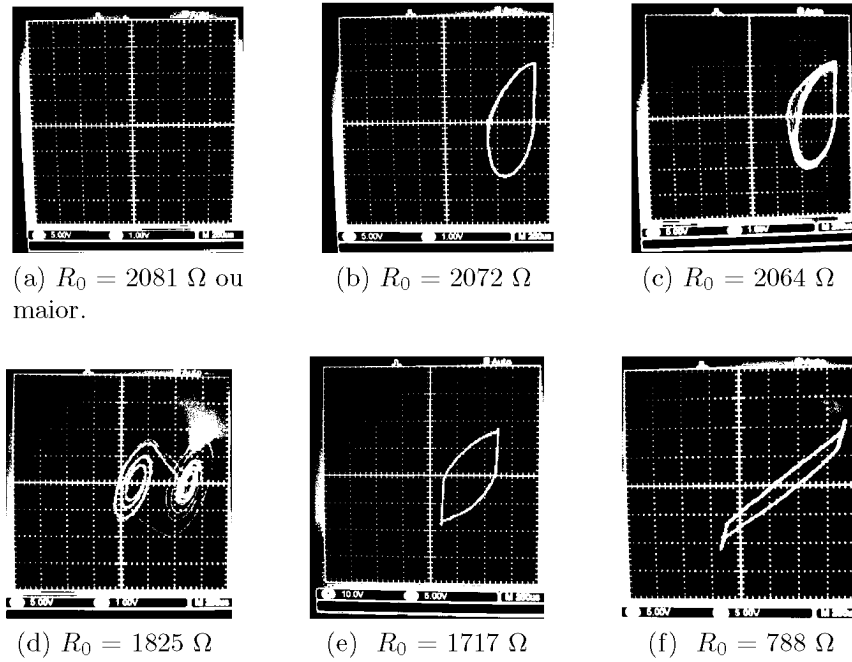


Figura 25: Cuvas obtidas com a variação de R_0 .

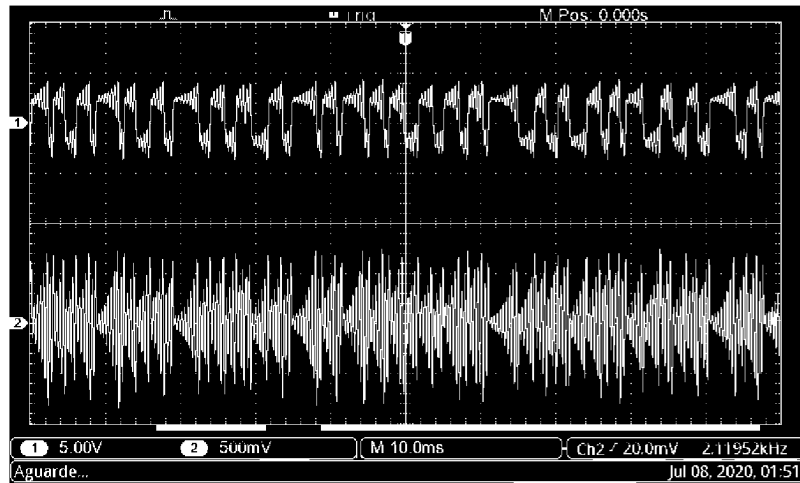


Figura 26: Aspecto ($V_{C1} \times V_{C2}$) das curvas dos capacitores C_1 (curva amarela) e C_2 (curva azul), gravada pelo osciloscópio.

Na Tabela 1, são mostrados os valores de todos os componentes utilizados na montagem do circuito de Chua. Apresentamos os valores nominais e os respectivos valores medidos. Os resistores R_0 e R_{10} , são variáveis e os valores na tabela, foram os utilizados para a obtenção do comportamento caótico do circuito, tanto na simulação quanto no experimento.

Todos os resistores são de $1/8W$ - 5% e os capacitores são de 10% de tolerância. Para efetuarmos as medições dos valores dos componentes, utilizamos um RCL Minipa modelo MX-1010, Fig.23 - (b), que fornece uma ótima precisão nas medidas realizadas. Como tínhamos a nossa disponibilidade uma boa quantidade de componentes, pudemos escolher aqueles que apresentavam a menor variação em relação ao valor nominal do mesmo. Por ex., pegamos diversos capacitores com capacitância de $10nF$ e fizemos as medições um por um, até encontrar o de valor mais próximo ao valor nominal do componente testado.

Tabela 1: Valores nominais e reais dos componentes utilizados no circuito. C_1 capacitor de poliéster 10nF - 10%, C_3 e C_2 capacitores metalizados 100nF - 10%. Os resistores em (Ω), são de 1/8 W - 5%. Os resistores R_0 e R_{10} são variáveis.

Componentes	Valor nominal	Valor medido	Variação - %
R_0	-	1880,0	-
R_1	220	218,1	-0,86
R_2	220	216,7	-1,50
R_3	2200	2186,0	-0,64
R_4	22000	21800,0	-0,91
R_5	22000	21800,0	-0,91
R_6	3300	3250,0	-1,52
R_7	100	100,3	0,30
R_8	1000	990,0	-1,00
R_9	1000	997,0	-0,30
R_{10}	-	2282,0	-
C_1	$1,0 \cdot 10^{-8}$	$1,012 \cdot 10^{-8}$	0,0
C_2	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$1,050 \cdot 10^{-7}$	0,0
C_3	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$1,077 \cdot 10^{-7}$	0,0

A Fig.27 aparecem os resistores utilizados no circuito.

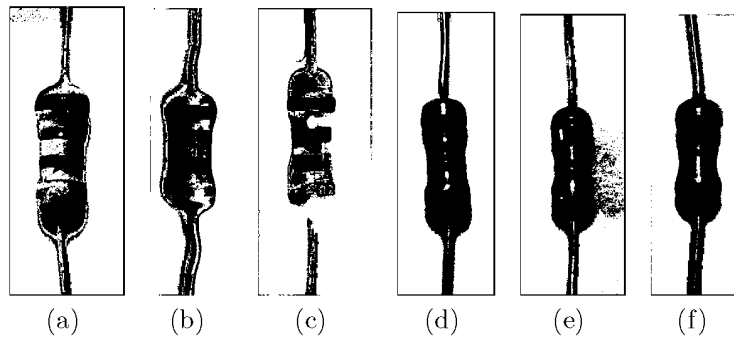


Figura 27: Identificação dos resistores utilizados no circuito. (a) 100 Ω , (b) 220 Ω , (c) 1000 Ω , (d) 2200 Ω , (e) 3300 Ω e (f) 22000 Ω respectivamente.

Na Fig.28 vemos os resistores variáveis utilizados no diodo Chua(0–5k Ω) e no indutor eletrônico(0–10k Ω), também os capacitores 10nF e 100nF utilizados no circuito Chua.

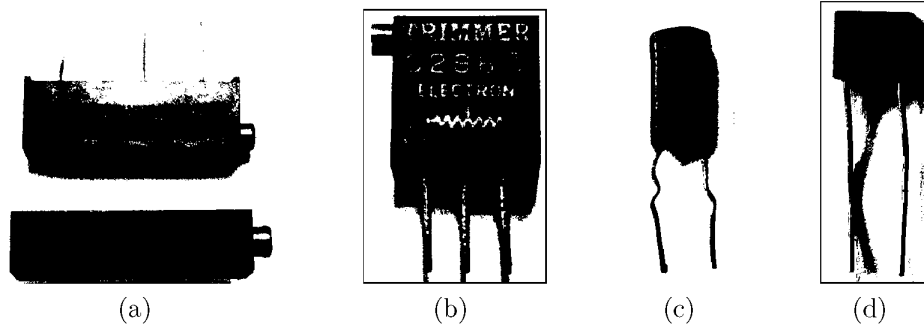


Figura 28: Resistores variáveis (a) $R_0(0 - 5k\Omega)$ e (b) $R_{10}(0 - 10k\Omega)$. Capacitores (c) $C_1 = 10nF$ e (d) $C_2 = C_1 = 100nF$.

Além disso utilizamos o C.I. LM-324, que contém dentro de seu encapsulamento 4(quatro) Amplificadores Operacionais, Fig. 29.

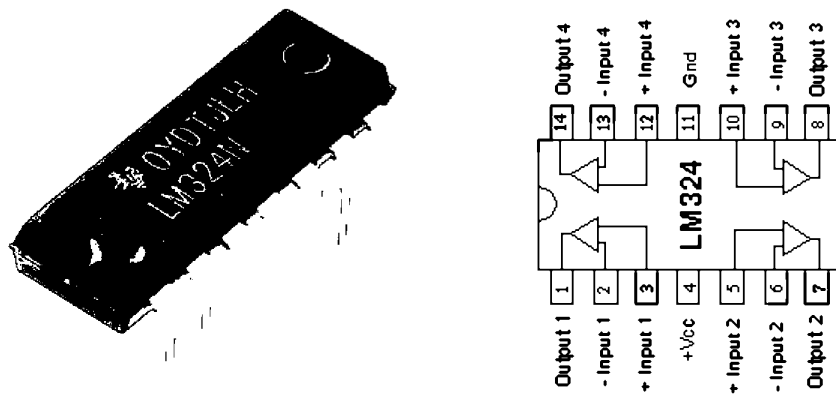


Figura 29: C.I. LM-324, contendo quatro amplificadores operacionais em seu encapsulamento.

5 ANÁLISE DOS DADOS SIMULADOS E EXPERIMENTAIS

Nos Capítulos 2 e 3, apresentamos aspectos teóricos sobre sistemas dinâmicos e caos, gráficos de recorrência, quantificadores de recorrência e outras definições. No Capítulo 4, apresentamos o circuito de Chua e seu funcionamento e as equações que descrevem o comportamento caótico, sem nos preocuparmos com suas deduções, pois já existem muitos trabalhos disponíveis que o fazem, como referenciado nos Capítulos 4.1 e 4.2. Mostramos a montagem do circuito, equipamentos e instrumentos utilizados para o funcionamento e medições do circuito, Capítulo 4.3.

Começaremos nossa análise pelo Mapa de Towel, que é um sistema dinâmico discreto com três componentes e que apresenta regime caótico e hipercaótico. Mostraremos então as curvas e evoluções temporais além de seus respectivos **RP**'s. Utilizando os métodos do capítulo 3, itens (1) e (2), calcularemos a raio limite - ε . Estes cálculos serão complementados utilizando o método da matriz de microestados, item (4). Nosso objetivo é comparar os métodos consagrados na literatura com o método da Entropia máxima de microestados de recorrência, mostrando que as estruturas visuais dos **RP**'s devem se preservar. Tal avaliação servirá como base para o estudo do circuito de Chua. Analisaremos os dados fornecidos pelos **RQA**'s, tais como *RR*, *DET*, *ENTR*, *TREND* e *LAM*, para as diferentes escolhas do raio limite ε .

Seguiremos o mesmo princípio para a análise do circuito de Chua simulado e experimental, pois o mesmo é de relevante importância, uma vez que são poucos os casos simples em que têm-se equivalências diretas entre experimentação e simulação em sistemas caóticos.

Mostraremos os gráficos das curvas do circuito e seus respectivos **RP**'s. Faremos isso para as séries simuladas com diferentes níveis de ruído e por fim os dados das séries experimentais. Também apresentaremos os **RQA**'s obtidos. O estudo será centrado nas estruturas apresentadas pelos **RP**'s do circuito de Chua, pois tais estruturas geradas deverão ser preservadas.

5.1 ANÁLISE DO MAPA DE TOWEL.

O Mapa de Towel, descrito no Capítulo 2.6, pelas Eq.'s 11, será plotado em séries com 1000 pontos, para alguns valores do parâmetro a . Pela Fig.30, observamos o gráfico dos expoentes de Lyapunov para o Mapa de Towel, onde podemos ver que, aproximadamente, a partir de $a = 3,52$, aparecem dois expoentes de Lyapunov positivos, manifestando a partir deste ponto o comportamento hipercaótico do mapa.

Para não entrarmos na região de hipercaos, utilizaremos valores do parâmetro a abaixo deste valor crítico. Adotamos três valores diferentes para o parâmetro a . Para $a = 3,2$, exibiremos as curvas, **RP**'s e **RQA**'s, para as três componentes x , y , e z do mapa. Apresentaremos também os gráficos para $a = 3,0$ e $a = 1,0$, porém somente para a componente x , a fim de mostrar como a dinâmica do mapa e, em consequência seus gráficos, variam com a mudança do parâmetro a .

Inicialmente calcularemos os raios limites por dois métodos distintos, fazendo o mesmo para o método de microestados. Assim podemos analisar as estruturas dos **RP**'s gerados.

Na tabela 2 temos os valores calculados para o raio limite - ε e o obtido pela Entropia Máxima. Para os itens (a) e (b) da tabela, foram utilizamos os métodos apresentados no itens (1) e (2) do

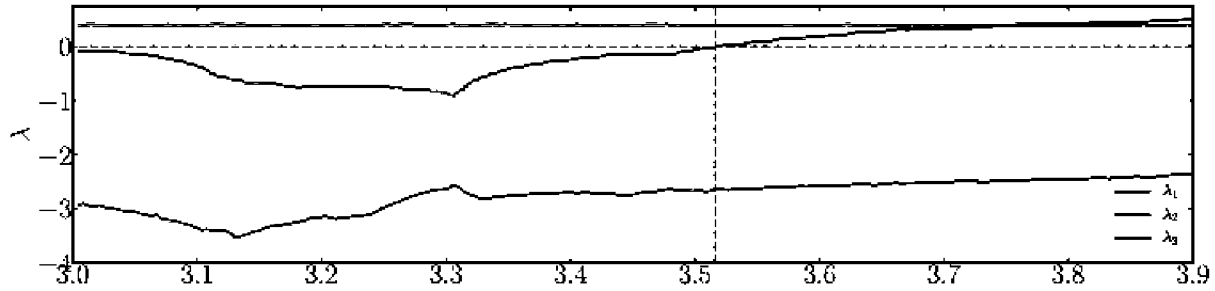


Figura 30: Expoente de Lyapunov para o Mapa de Towel. Em $a \approx 3,52$ é a transição do regime caótico para o hipercaótico. Figura fornecida pelo Prof. Thiago de Lima Prado.

Capítulo 3.2, respectivamente. Frisamos mais uma vez que para o item (b) adotamos o critério de taxa de recorrência fixa, neste caso de 10%, pois para o tradicional uso de 1% da RR os gráficos gerados apresentam poucos pontos recorrentes. Neste caso o **RP** apresenta um aspecto bastante ruidoso, sendo então qualitativamente pouco significativo.

Tabela 2: Valores dos raios limite - ε , para o Mapa de Towel, com parâmetro $a = 3,2$, para uma série com 400 pontos. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10% RR e (c) Entropia Máxima.

	x	y	z
(a)	0,0351	0,0081	0,0806
(b)	0,0055	0,0022	0,036
(c)	0,06009	0,7400	0,3800

Vemos pela tabela que os valores de ε para o item (c) mostra-se maior que os outros dois métodos, uma vez que achada a Entropia Máxima encontramos o respectivo raio limite. Os valores calculados pela taxa de recorrência de 10%, mostra-se a menor de todas. O seu **RP** mostrará uma menor quantidade de pontos recorrentes e provavelmente teremos alguma perda de informação. Já pelo item (a), teremos um **RP** com quantidade razoável de informações, sendo um método de simples implementação e pode ser usado como um "parâmetro inicial", para comparação com outros métodos, embora não se tenha um conceito bem estabelecido para sua escolha.

A Fig.31 mostra os gráficos das curvas do Mapa de Towel com valor do parâmetro $a = 3,2$. As curvas das três componentes, apresentam uma aparência aleatória/caótica e visualmente não oferecem informação objetiva. Neste caso, é relevante observar os resultados obtidos a partir dos quantificadores de recorrências associados.

As Fig.32, 33 e 34, mostram os **RP**, para os valores de ε calculados em (a) 10% do diâmetro máximo, (b) 10% RR e (c) pelo método da Entropia máxima.

Vemos que na Fig.32 temos estruturas semelhantes para cada um dos **RP**'s obtidos por diferentes escolhas do raio de tolerância. A diferença está na quantidade de pontos recorrentes presentes em cada gráfico. Os raios limites para os gráficos (a) e (b) são menores que aquele obtido pelo método da Entropia Máxima(EM). Na tabela 3 vemos que a taxa de recorrência é maior para o item (a) bem como para o DET . Vemos que LAM para todos os casos é zero ou muito pequena, significando que a maioria dos pontos recorrentes não formam estruturas verticais, independentemente de qual dos métodos apresentados tenha sido efetuado para a escolha do raio de tolerância. Podemos ver que pelo método do item (c) a complexidade, medida pela $ENTR$, apresentou-se maior que nos outros

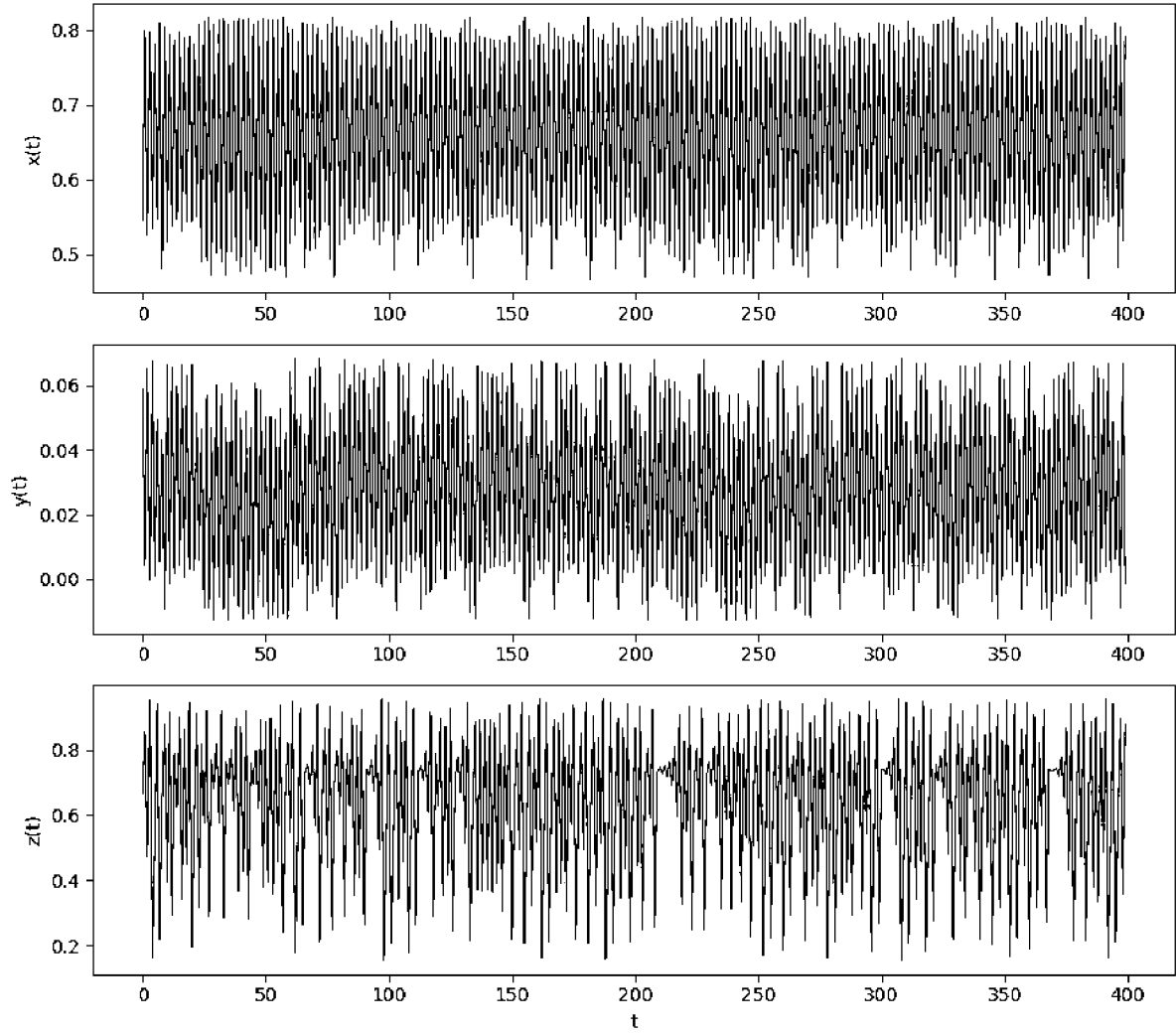


Figura 31: Curvas das componentes x, y, z para o Mapa de Towel.

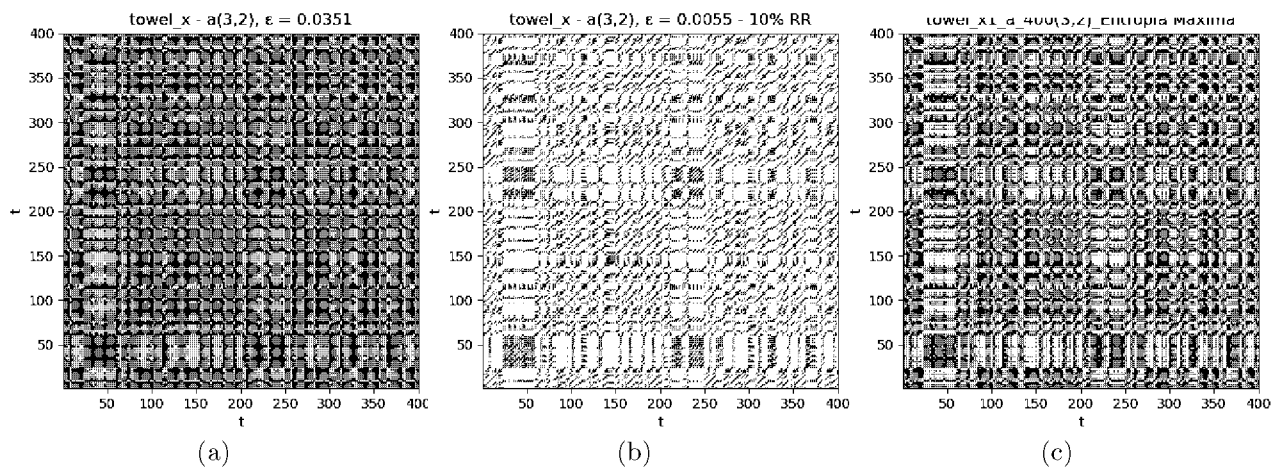


Figura 32: **RP's** para a componente - x do Mapa de Towel, com os valores (a) 10% do diâmetro máximo, (b) 10%RR e (c) Entropia máxima.

métodos. Não houve uma grande diferença entre os métodos dos 10% do diâmetro de fase e o método da *EM*.

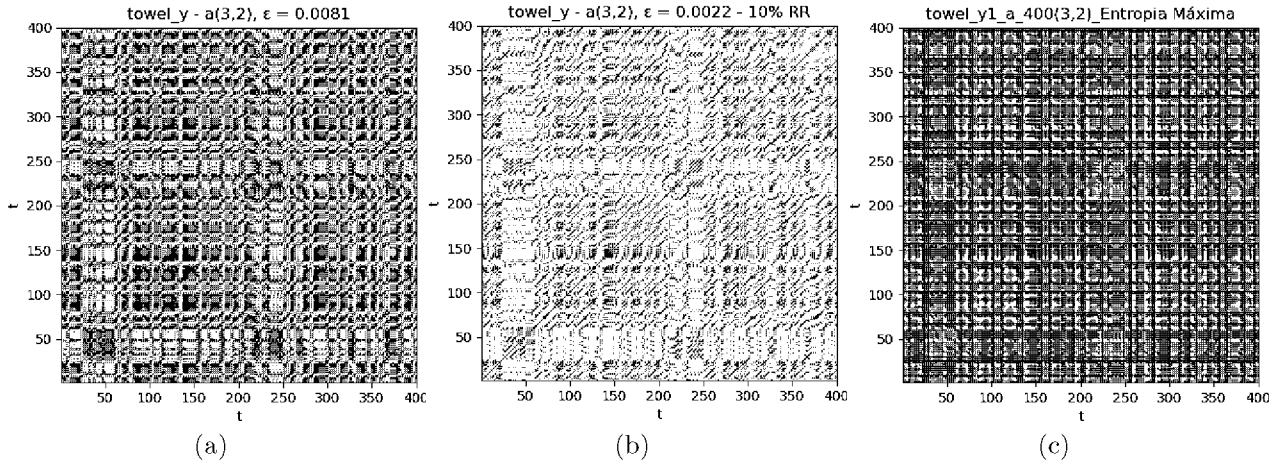


Figura 33: **RP's** para a componente - y do Mapa de Towel, com os valores (a) 10% do diâmetro máximo, (b) 10%RR e (c) Entropia máxima.

Em comparação, na Fig.33 vemos que o gráfico (c) apresenta uma quantidade muito maior de recorrências que aqueles dos itens (a) e (b). Na tabela4 claramente vemos que a taxa de recorrência do item (c), EM é substancialmente maior que os outros itens. Isso é devido a Entropia no seu ponto máximo associar um raio limite maior(ver tabela 2). Vemos que os DET , a previsibilidade do sistema, estão muito próximos nos itens (a) e (c), indicando que ambos possuem uma certa periodicidade. Já devido ao menor número de recorrências, o gráfico do item (b), também apresenta uma menor previsibilidade, parecendo ter um comportamento mais estocástico. Notamos que para o item (c), existe um índice de laminaridade, indicando que devido a um número maior de pontos recorrentes, começam aparecer estruturas verticais, que não foram detectadas nos itens (a) e (b). Para a componente- y a $ENTR$ apresentou um valor maior no item (a), mostrando que não deve haver alguma relação entre o raio limite, RR ou DET . O que chama muito a atenção é a maior diagonal apresentada no item (c), mostrando neste caso, que a divergência dos segmentos da trajetória é muito menor a aquelas apresentadas nos itens (a) e (b).

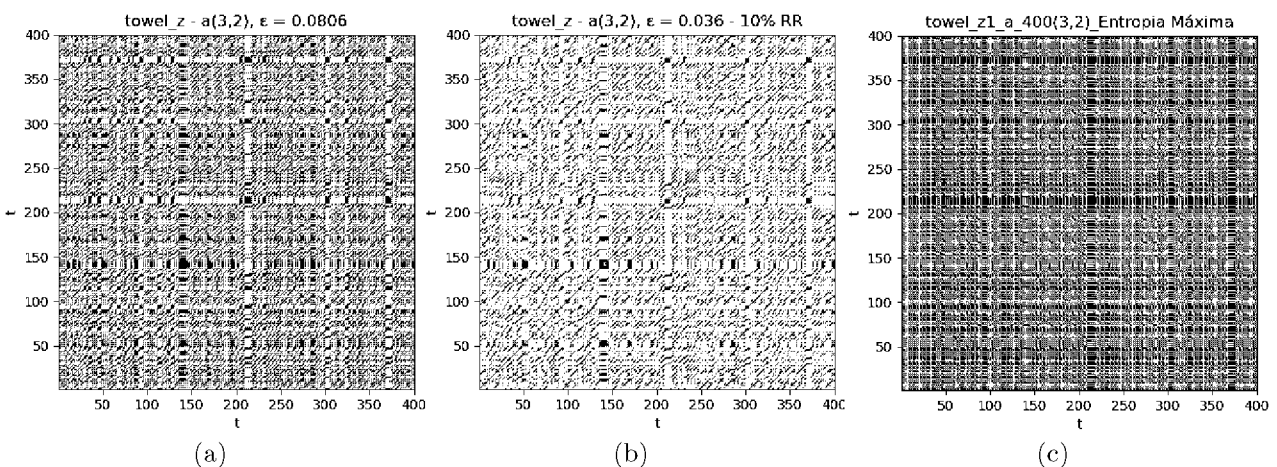


Figura 34: **RP's** para a componente - z do Mapa de Towel, com os valores (a) 10% do diâmetro máximo, (b) 10%RR e (c) Entropia máxima.

Pela Fig.34, observamos que, mesmo em face do contraste entre eles, as estruturas aparentemente

se mantém. Vemos que nos itens (a) e (b) as linhas verticais, horizontais e os espaços em branco entre elas são facilmente comparáveis. Para o item (c) esses espaços já se apresentam preenchidos, pois o gráfico gerado possui uma densidade de pontos recorrentes muito maior que os gerados pelos outros métodos. Porém, podemos observar as estruturas semelhantes entre eles. Analisando a tabela 5 a taxa de recorrência é maior para a *EM*, levando a um *DET* também maior. Neste caso, a componente *z*, apresenta estruturas verticais e horizontais para os três métodos, como vemos na tabela através do quantificador *LAM*. A *ENTR* neste caso, também é maior para o item(c).

Na sequência temos, respectivamente, as tabelas 3, 4 e 5 que apresentam os **RQA**'s referentes aos gráficos das Fig.'s 32, 33 e 34 das componentes *x*, *y* e *z* do Mapa de Towel.

Tabela 3: Valores dos **RQA**, para a componente *x* do Mapa de Towel. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10% *RR* e (c) Entropia Máxima.

RQA	(a)	(b)	(c)
<i>RR</i>	0,3983	0,1024	0,2991
<i>DET</i>	0,8885	0,6618	0,7901
<i>ENTR</i>	1,9318	1,5734	2,1264
<i>L_{máx}</i>	39,00	28,00	33,00
<i>LAM</i>	0,0	0,0	0,0

Tabela 4: Valores dos **RQA**, para a componente *y* do Mapa de Towel. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10% *RR* e (c) Entropia Máxima.

RQA	(a)	(b)	(c)
<i>RR</i>	0,2812	0,1007	0,7221
<i>DET</i>	0,8103	0,50	0,8235
<i>ENTR</i>	2,0110	1,3728	1,7047
<i>L_{máx}</i>	34,0	30,00	398,0
<i>LAM</i>	0,0	0,0	0,7094

Tabela 5: Valores dos **RQA**, para a componente *z* do Mapa de Towel. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10% *RR* e (c) Entropia Máxima.

RQA	(a)	(b)	(c)
<i>RR</i>	0,2078	0,1023	0,5813
<i>DET</i>	0,7641	0,7134	0,9027
<i>ENTR</i>	1,8202	1,6869	2,0997
<i>L_{máx}</i>	31,0	29,00	35,0
<i>LAM</i>	0,0757	0,0344	0,6446

Como ilustração apresentamos na Fig.35 as curvas e os **RP** do Mapa de Towel para o parâmetro $a = 1,0$ e $a = 3,0$. Percebemos que as curvas têm uma grande variação em sua forma, quando da variação do parâmetro a .

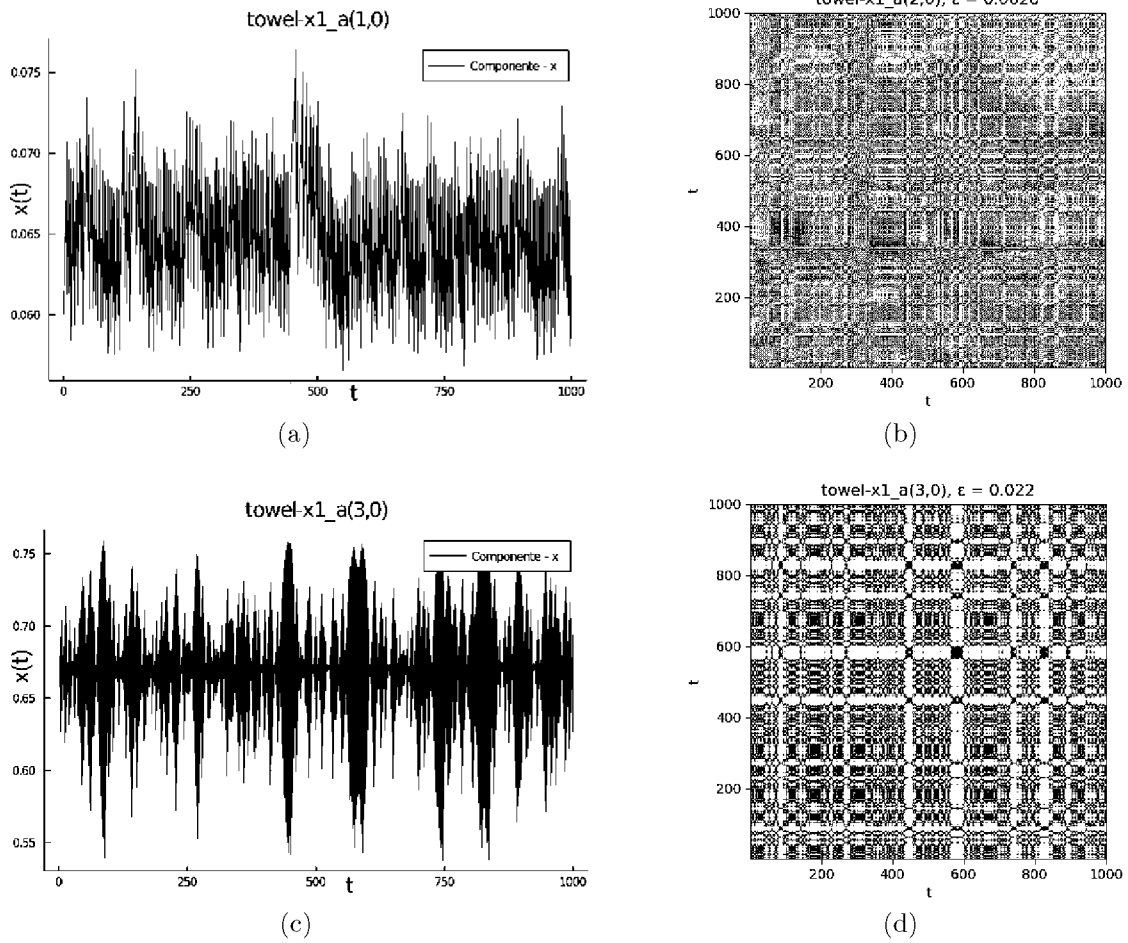


Figura 35: Curvas e **RP** para o Mapa de Towel. (a) e (b) $a = 1,0$ e (c) e (d) $a = 3,0$

5.2 ANÁLISE DOS GRÁFICOS DO CIRCUITO DE CHUA

A parte mais importante deste trabalho será desenvolvida nesta seção. Estudaremos de maneira mais profunda o circuito de Chua. Apresentaremos os cálculos dos parâmetros utilizados na simulação numérica do circuito de Chua. Estes parâmetros que determinam curvas com comportamento caótico, são retirados inteiramente dos valores dos componentes que compõem um arranjo específico do circuito de Chua.

De início, apresentamos a Fig. 36 onde aparecem as curvas para o circuito de Chua, no caso curvas simuladas. Na Fig.37 mostra-se as curvas em três e duas dimensões do circuito, onde aparecem os atratores gerados pelo comportamento caótico do mesmo.

Como já mencionado, substituímos o indutor físico por um indutor eletrônico, cujo valor pode ser ajustado pelo resistor variável R_{10} , ver Fig.17. Fizemos diversas simulações e adotamos, empiricamente, um valor para este indutor $L = 24,83mH$. Poderíamos adotar outro valor e mesmo assim o circuito de Chua, regulando o resistor variável R_0 , apresentaria as curvas e o atrator que caracterizam este sistema. A título de exemplo, Kennedy (72) utilizou como valor de indutor $L = 18mH$, enquanto Albuquerque e outros (76) adotaram o valor de $L = 42,3mH$.

Com os valores encontrados na tabela 1, e as com a utilização das Eqs.36, 41, 42 e 45, calculamos todos os parâmetros necessários na simulação do circuito de Chua. A tabela 6 mostra os valores

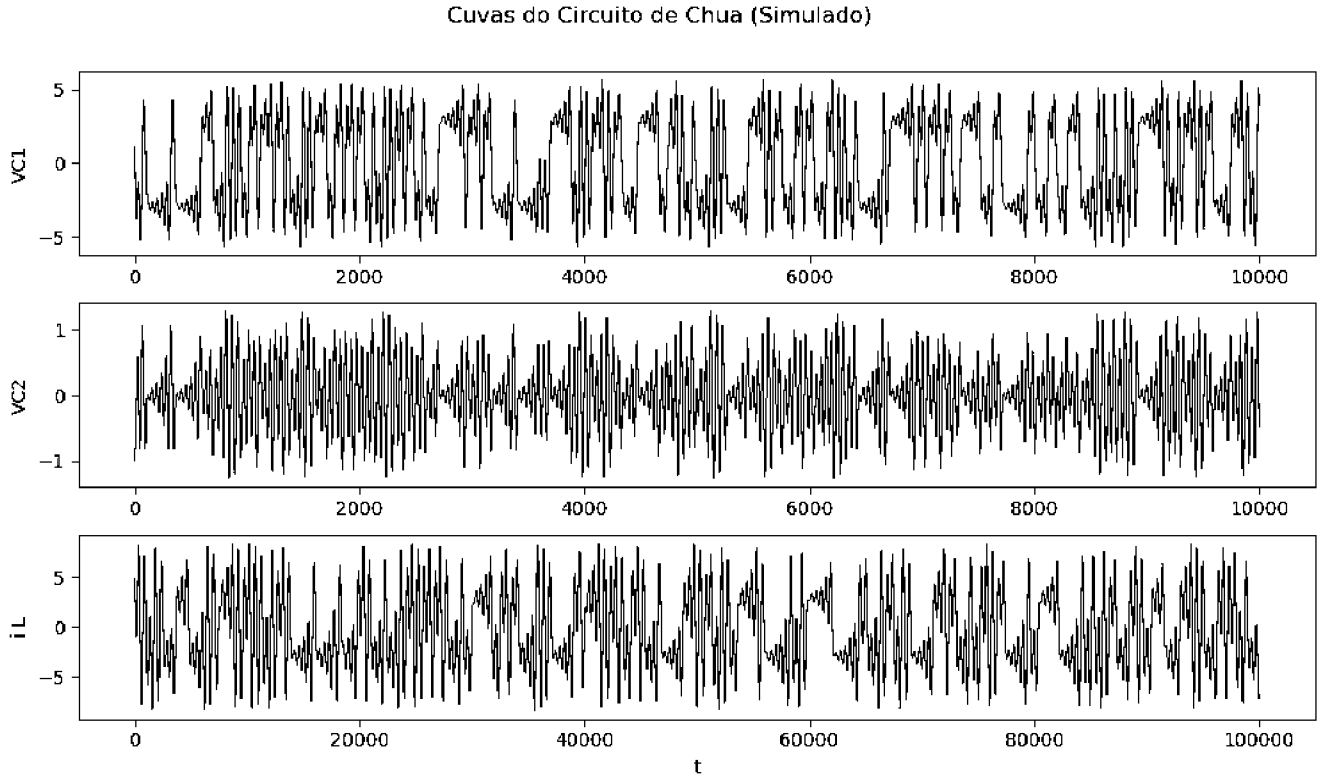


Figura 36: Curvas das tensões V_{C1} , V_{C2} sobre os capacitores e i_L corrente do indutor, para circuito de Chua.

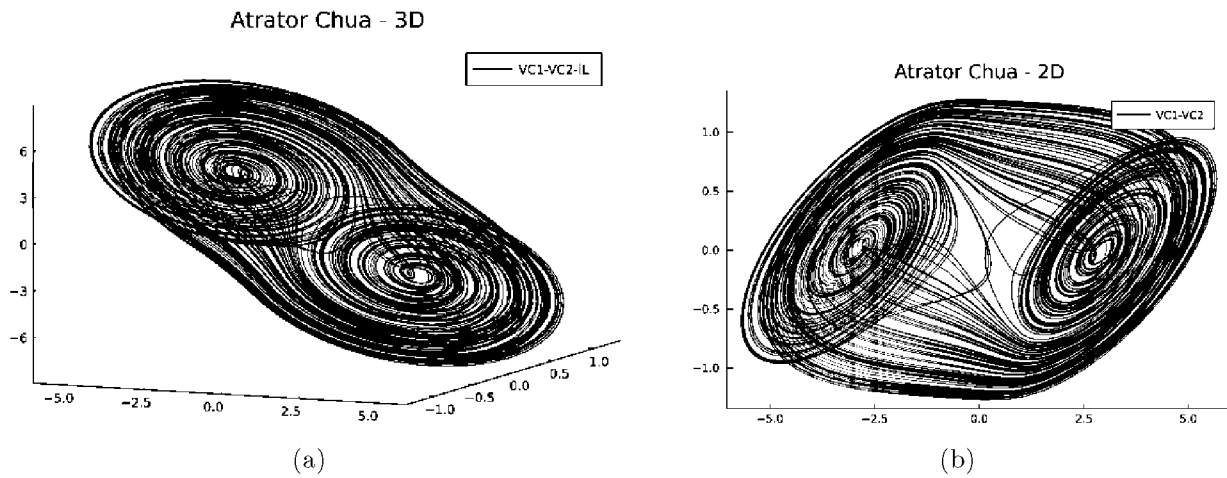


Figura 37: Atratores do circuito de Chua. Em (a) atrator em 3-dimensões (V_{C1} , V_{C2} e i_L) e (b) atrator 2-dimensões (V_{C1} e V_{C2}).

calculados. Estes parâmetros devem fornecer curvas simuladas e experimentais semelhantes. Logicamente os dados experimentais apresentam algum tipo de ruído, desconhecido, que podem ter muitas origens. Adicionaremos um ruído aleatoriamente, gerado uniformemente, à série temporal gerada pelo circuito simulado. Aplicamos valores diferentes para a adição de ruído na série simulada, afim de tentar encontrar um **RP** mais próximo daquele obtido pelos dados experimentais.

A título de ilustração, apresentamos na Fig. 38 seguinte, uma série simulada para a tensão V_{C1} sobre o capacitor C_1 , do circuito de Chua, com 1.000 pontos, para facilitar a visualização do efeito da aplicação do ruído na série original. Os valores adicionados ao sinal original são de 0,3, 0,5 e

Tabela 6: Parâmetros do circuito de Chua calculados, utilizados na simulação do mesmo.

L	$24,83 \text{ mH}$
β	14,96
α	10,83
m_0	$-7,622 \cdot 10^{-4}$
a_0	-1,433
m_1	$-4,154 \cdot 10^{-4}$
a_1	-0,7793

0,7, do ruído, pois as curvas do Chua temos uma amplitude de aproximadamente 10. Tais valores se justificam, pois a série de ruído gerada é pequena. Podemos notar, ao observar as curvas, o efeito do ruído na série, no entanto a adição do ruído não afeta significativamente o formato das curvas. Na sequência, vemos a Fig.39 onde estão representados os **RP** da série vista na Fig38.

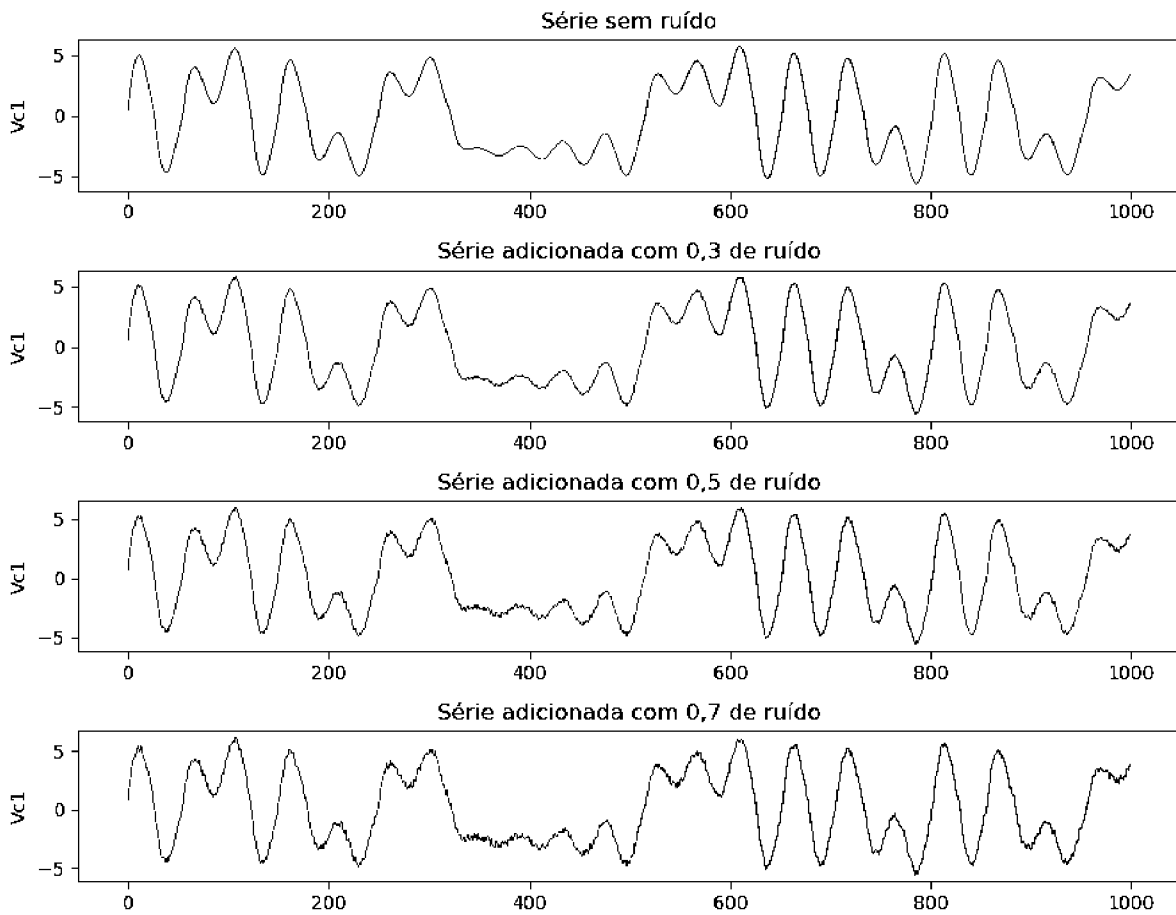


Figura 38: Gráfico das variáveis do circuito de Chua simulado, com 1.000 pontos, para a tensão sobre o capacitor C_1 . As curvas mostram (a) série original, com aplicação de ruído a nível de (b) 0,3, (c) 0,5 e (d) 0,7.

Na Fig.38 vimos como o ruído pode afetar a curva simulada. Uma vez que a forma geral da curva não sofreu alteração, adotamos o valor de 0,7 de ruído para adição à série original. Mostramos então na Fig.40, as curvas do circuito de Chua simuladas, para os capacitores C_1 e C_2 , com a adição deste ruído. Em seguida na Fig.41 e Fig.42 aparecem os **RP**'s das séries simuladas com ruído, para os capacitores C_1 e C_2 respectivamente.

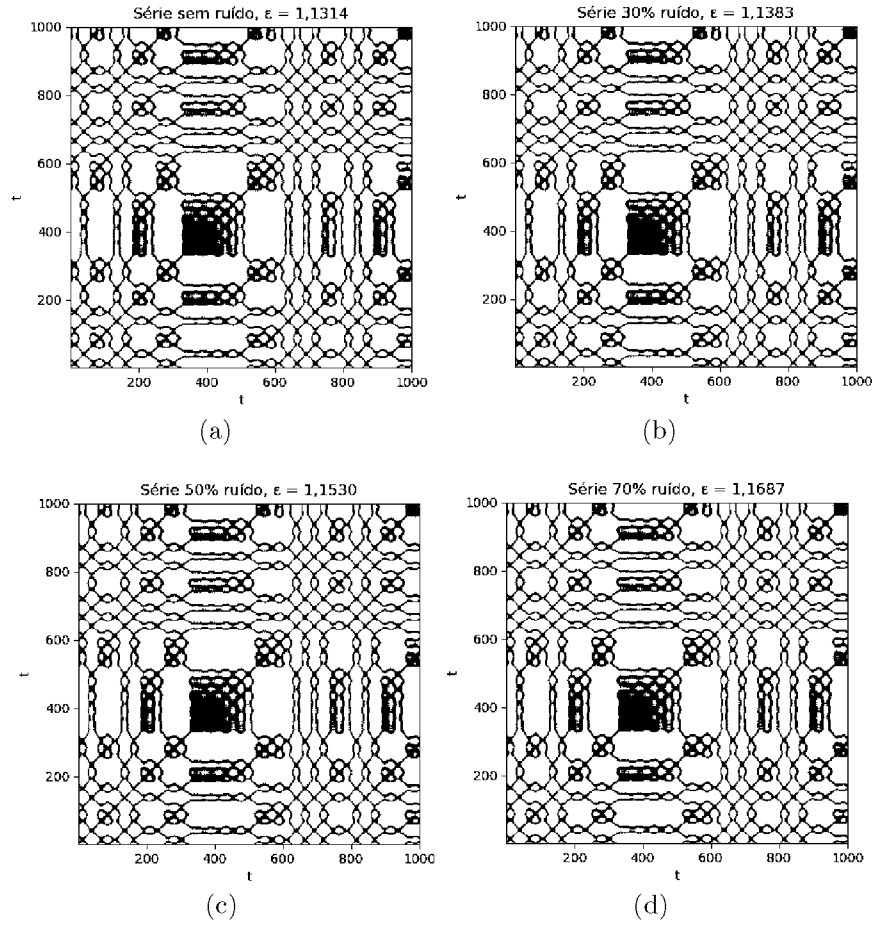


Figura 39: **RP** para a série do circuito de Chua simulado, com 1.000 pontos, para a tensão sobre o capacitor C_1 . Os **RP** mostram (a) a série original e (b) 0,3 de ruído, (c) 0,5 de ruído e (d) 0,7 de ruído.

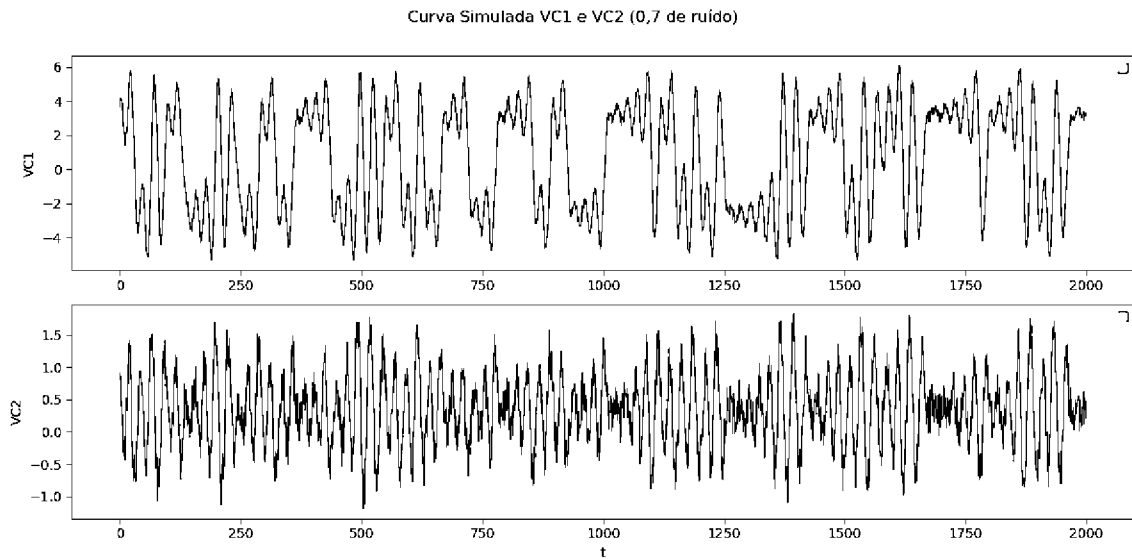


Figura 40: Gráfico das curvas do circuito de Chua simulado, para os capacitores C_1 e C_2 , com adição de 0,7 de ruído.

Nas tabelas 7 e 8 podemos ver os **RQA**'s referentes aos **RP**'s mostradas nas Fig.41 e 42, respectivamente.

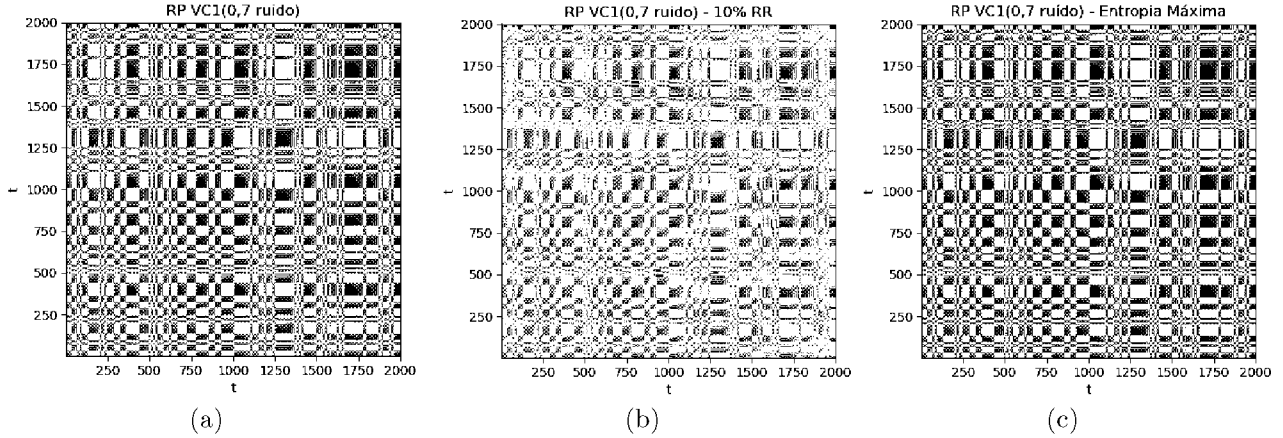


Figura 41: **RP** para a série do circuito de Chua simulado V_{C1} , com 0,7 de ruído.

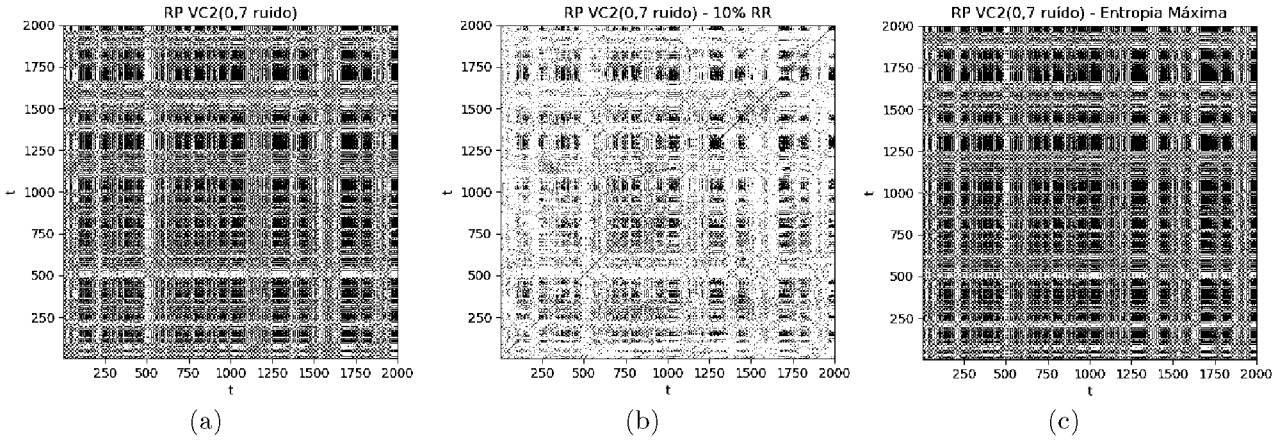


Figura 42: **RP** para a série do circuito de Chua simulado V_{C2} , com 0,7 de ruído.

Podemos ver que os **RP**'s apresentados na Fig.41, por inspeção visual, são muito semelhantes. Os itens (a) e (c) desta figura são praticamente iguais. O item (b) possui um número de recorrência menor que os outros itens, manifesto em um aspecto mais claro, porém a estrutura é a mesma. A tabela 7 confirma os dados visuais. Vemos que a RR , o DET , para os itens (a) e (c), possuem valores próximos devido a semelhança no raio de tolerância aferido, assim, neste caso em particular, ambas as metodologias de escolha de raio de tolerância se mostraram equivalentes, mas isso nem sempre ocorre. O valor de $L_{máx}$ da maior diagonal do **RP**, nos informa que a divergência exponencial da trajetória do espaço de fase é muito pequeno para o item (c).

Agora analisando a Fig.42, referente a série V_{C2} , também podemos ver a semelhança dos **RP**'s. Da tabela 8 podemos tirar mais algumas informações. O item (c) da tabela, o método da Entropia Máxima possui a maior taxa de recorrência, pois quando a entropia atinge seu máximo, temos tipicamente uma taxa de recorrência por volta de 50% para muitos sistemas. A previsibilidade dada por DET acaba sendo maior também para o item (c).

Para ambos os casos existem estruturas verticais e horizontais, como mostra os valores da LAM . Em face dos gráfico e dos valores dos **RQA**'s apresentados, podemos concluir que as estruturas das séries simuladas do circuito de Chua mantiveram suas estruturas preservadas.

Na Fig.43 vemos as curvas experimentais das tensões sobre os capacitores C_1 e C_2 , obtidas do

Tabela 7: Valores dos **RQA**, para a curva simulada de V_{C1} , com adição 0,7 de ruído. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10% RR e (c) Entropia Máxima.

RQA	(a)	(b)	(c)
RR	0,2385	0,1004	0,2796
DET	0,9513	0,6718	0,9728
$ENTR$	2,0718	1,3060	2,2904
$L_{máx}$	179,0	35,0	343,0
LAM	0,9801	0,7963	0,9872

Tabela 8: Valores dos **RQA**, para a curva simulada de V_{C2} , com adição 0,7 de ruído. (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10% RR e (c) Entropia Máxima.

RQA	(a)	(b)	(c)
RR	0,2824	0,1006	0,4135
DET	0,7318	0,3410	0,8650
$ENTR$	1,3575	0,6015	1,8714
$L_{máx}$	23,0	11,0	47,0
LAM	0,8297	0,4386	0,9127

circuito de Chua. As curvas apresentam um aspecto suave, pois o osciloscópio nos fornece a possibilidade de trabalharmos com valores médios, eliminando picos acentuados que podem surgir durante as medições. As séries medidas possuem 100.000 pontos, mas apresentamos as curvas com 2.000 pontos, por uma questão de visualização. Mostramos nas Figs. 44 e 45 os **RP**'s para o Chua experimental. Os **RP**'s, como antes efetuados, foram calculados para o raio limite de 10% do diâmetro máximo do espaço de fase, para uma taxa de recorrência de 10% e pelo método da Entropia Máxima. Assim como para as curvas simuladas, as experimentais, visualmente falando, possuem **RP**'s para V_{C1} e V_{C2} semelhantes. Como constatado nas Fig.'s 44 e 45.

Os **RQA**'s para V_{C1} , na tabela 9, vemos que os itens (a) e (c) apresenta valores muito próximos. A medida de entropia $ENTR$ nos diz que a série apresenta um nível de complexidade do **RP** semelhantes nos dois métodos. Podemos perceber a existência de estruturas de linhas verticais e horizontais. Podemos ver que a divergência também mostrou-se igual para estes itens, observando o valor de $L_{máx}$. O item (b) apresenta nível de divergência praticamente igual aos demais.

Já para a tabela 10 as diferenças entre o itens são mais acentuadas. Vemos que as estruturas de linhas verticais e horizontais também estão presentes para os três casos. Observamos que a RR e DET para o item (c) é maior, em virtude da entropia no ponto máximo resultar em um raio limite maior. No entanto a divergência para (a) e (c) são iguais. Novamente, o método da taxa recorrência fixa em 10% mostra-se divergente dos outros dois.

Se olharmos para os dados obtidos pelas tabelas 7, valores retirados dos dados simulados, com a tabela 9, valores de dados experimentais, vemos uma certa semelhança entre elas, principalmente entre as RR e DET apresentadas. Notamos que a série experimental apresenta uma LAM semelhante a série simulada, indicando a presença de estruturas verticais e horizontais em ambas tabelas.

Comparando as tabelas 8 e 10 vemos que a maior discrepância aparece por conta da maior linha diagonal, a $L_{máx}$, que para os dados experimentais são muito maiores que os simulados, mostrando que a série experimental tem uma divergência menor que aqueles obtidos por simulação.

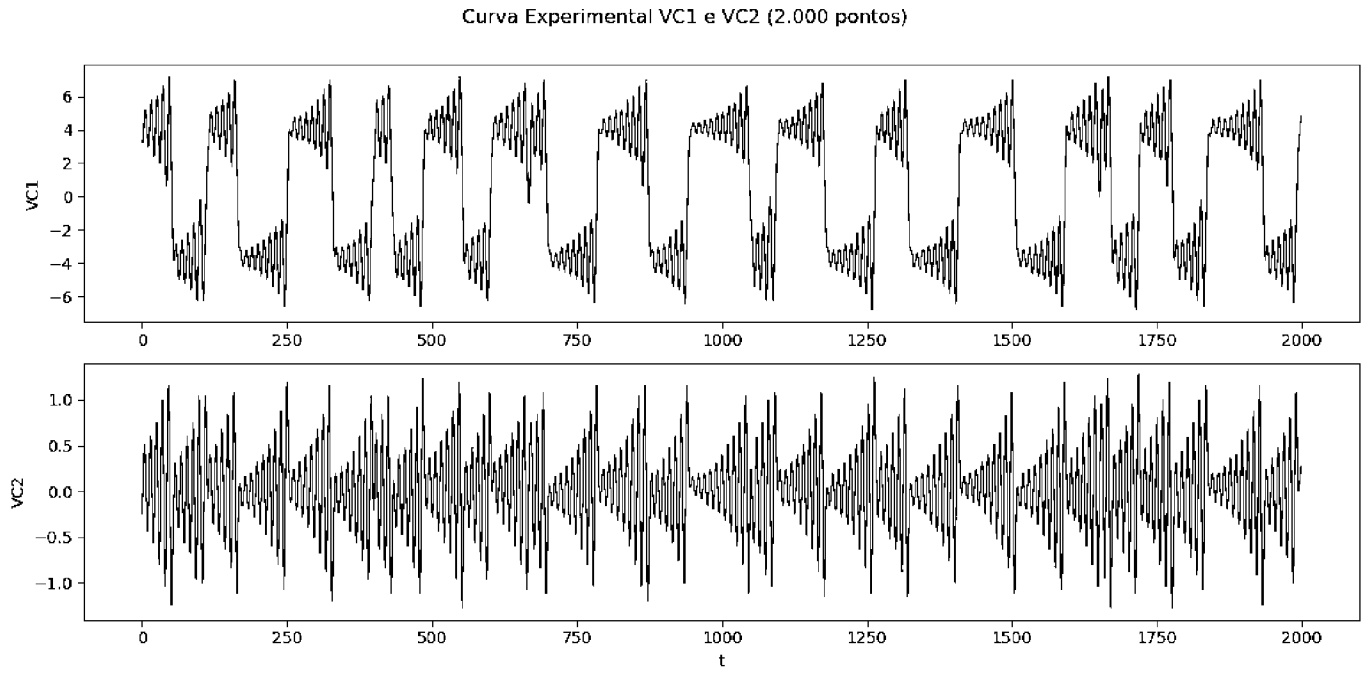


Figura 43: Gráfico do circuito de Chua experimental para as tensões elétricas V_{C1} e V_{C2} sobre os capacitores C_1 e C_2 repectivamente.

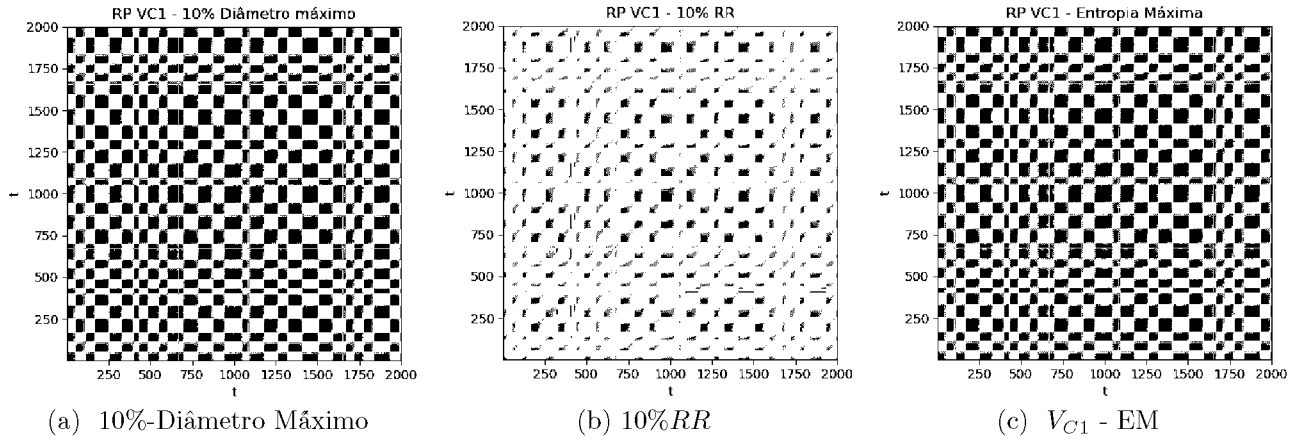


Figura 44: **RP** para a série do circuito de Chua experimental, para a tensão V_{C1} sobre o capacitor C_1 . Os **RP** mostram: (a) 10% do diâmetro máximo, (b) taxa de recorrência RR de 10% e (c) Método da Entropia Máxima.

As tabelas 9 e 10 registram os **RQA**'s referentes as séries experimentais representadas por V_{C1} e V_{C2} , cujos **RP**'s são mostrados nas Fig.'s 44 e 45 respectivamente.

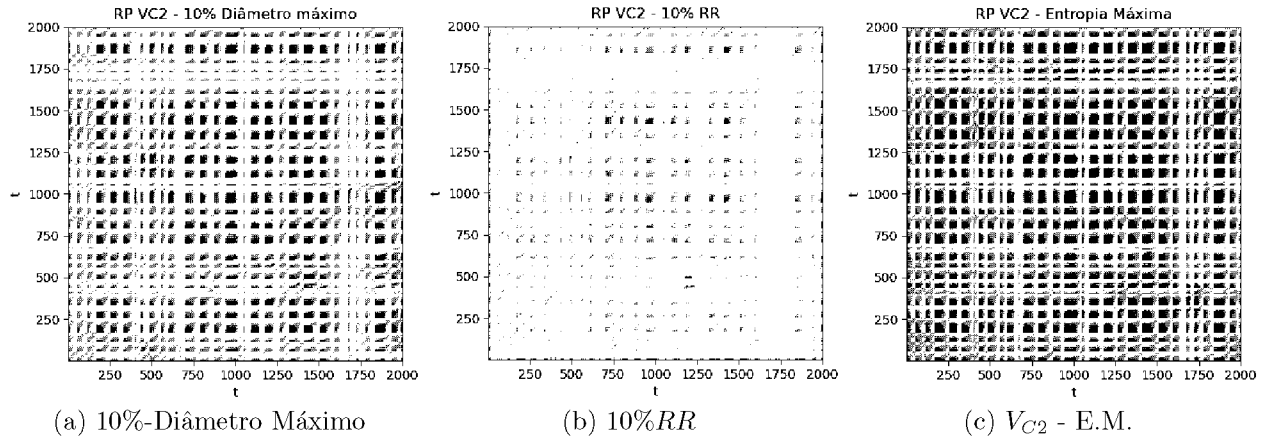


Figura 45: **RP** para a série do circuito de Chua experimental, para a tensão V_{C2} sobre o capacitor C_2 . Os **RP** mostram: (a) 10% do diâmetro máximo, (b) taxa de recorrência RR de 10% e (c) Método da Entropia Máxima.

Tabela 9: Valores dos **RQA**, para a curva experimental V_{C1} . (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10% RR e (c) Entropia Máxima.

RQA	(a)	(b)	(c)
RR	0,2829	0,1094	0,2946
DET	0,9315	0,5262	0,9432
$ENTR$	1,7000	1,2635	1,7270
$L_{máx}$	228,0	226,0	228,0
LAM	0,9855	0,69333	0,9895

Tabela 10: Valores dos **RQA**, para a curva experimental V_{C2} . (a) 10% do diâmetro do espaço de fase, (b) 10% RR e (c) Entropia Máxima.

RQA	(a)	(b)	(c)
RR	0,2955	0,0971	0,3789
DET	0,6589	0,2593	0,7783
$ENTR$	1,3485	1,2556	1,4209
$L_{máx}$	229,0	91,0	229,0
LAM	0,8174	0,3850	0,9067

6 CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho foi aplicar e comparar um método recentemente desenvolvido para descrever sistemas dinâmicos e sua análise teórica e experimental. Para que isso fosse possível, teríamos que encontrar um sistema que pudesse fornecer tanto dados simulados, quanto experimentais. O sistema ideal para isso foi encontrado no circuito de Chua. O circuito de Chua é um circuito eletrônico que apresenta diversos regimes dinâmicos, inclusive, caos. Sua implementação experimentalmente mostrou-se simples, embora equiparações entre dados simulados e dados experimentais relativo a definições paramétricas, mostraram-se um desafio razoável.

Como balizador inicial, trabalhamos com um sistema discreto de três componentes que é Mapa de Towel. Este mapa caracteriza-se por ser o sistema com menor dimensão a apresentar o comportamento hipercaótico. Aplicamos a nova metodologia de matriz de recorrência com microestados ao mapa, para encontrarmos os **RP**'s gerados pelo mesmo, e avaliar o funcionamento de diferentes ferramentas utilizadas para encontrar os raios de tolerância em sua análise. Pudemos verificar pelos **RP**'s e pelos **RQA**'s associados que as estruturas geradas mantêm suas características gerais, embora diferentes opções de escolha de raios de tolerância tenham sido empregadas. Neste sentido, considerando particularmente os **RP**'s e uma análise qualitativa, as diferentes propostas aqui apresentadas de escolha de ε constantes na literatura são semelhantes. Mas para uma avaliação quantitativa, a escolha do raio de tolerância apresentou diferenças substanciais. Por isso é importante fazermos uma escolha adequada do mesmo. Uma vez estabelecida a aplicabilidade do método de microestados, no caso do Mapa de Towel, partimos para sua aplicação ao circuito de Chua.

De posse de todos os parâmetros calculados e que mais assemelhavam-se aos dados obtidos experimentalmente, fizemos as simulações do circuito obtendo as séries necessárias. Com as séries simuladas acrescentamos um ruído aleatório para verificar o seu comportamento. Aplicamos o método de microestados para verificar se este era compatível com outros que já são estabelecidos na literatura a mais tempo. Isso era necessário, pois as séries obtidas experimentalmente apresentam algum tipo de ruído e a comparação entre os dados experimentais e simulados poderiam apresentar equivalência apenas na presença de ruído adicionados aos dados simulados.

Fazendo as mesmas análises descritas para o circuito de Chua, obtivemos resultados equivalentes, tanto para as séries simuladas como as experimentais. Essa equivalência nos quantificadores ao definir a entropia máxima de microestados no caso da experimentação e simulação é relevante, uma vez que poucos são os casos em que tal equivalência pode ser atestada. É uma ferramenta que poderá ter uma grande aplicação em estudos de sistemas caóticos. Muitos métodos têm sido desenvolvidos para encontrar um raio de tolerância ideal, porém muito deles são trabalhosos e complicados. Neste sentido, a entropia de microestados e sua maximização é relativamente simples, tanto conceitualmente quanto na sua aplicação, e como discutido e apresentado no presente trabalho, apresenta coerência em seus resultados ao ser aplicado em dados experimentais e simulados.

Tal ferramenta aqui discutida e aplicada, pode ser expandida, por exemplo, para o estudo do circuito de Chua com ruído eletrônico adicionado experimentalmente, em problemas de sincronização de dois circuito de Chua e mesmo comparando com outros métodos, mais complicados, para a obtenção de raios limites ótimos.

Referências

- [1] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [2] George Datseris. DynamicalSystems.jl:Lyapunov Exponents. <https://juliadynamics.github.io/DynamicalSystems.jl/latest/chaos/lyapunovs/1>, 2018. [Acessado em 12-março-2021].
- [3] Marcelo Amorin Savi. *Dinâmica não-linear e caos*. Editora E-papers, 2006.
- [4] Norbert Marwan, M Carmen Romano, Marco Thiel, and Jürgen Kurths. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics reports*, 438(5-6):237–329, 2007.
- [5] Gilberto Corso, Thiago de Lima Prado, Gustavo Zampier dos Santos Lima, Jürgen Kurths, and Sergio Roberto Lopes. Quantifying entropy using recurrence matrix microstates. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 28(8):083108, 2018.
- [6] L.O. Chua. The genesis of chua’s circuit. *Archiv fur Elektronik und Ubertragungstechnik*, 46:250–257, 1992.
- [7] Henri Poincaré. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta mathematica*, 13(1):A3–A270, 1890.
- [8] Luiz H. A. Monteiro. *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2002.
- [9] James R Munkres. *Topology (A first course) Prentice Hall Inc*. Englewood Cliffs, New Jersey. MIT. p, 2000.
- [10] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [11] Edward Lorenz. Predictability: Does the flap of a butterfly wings in brazil set of a tornado in texas. *Proceedings American Association for the Advancement of Science in Washington*, 1979.
- [12] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Number 54. Cambridge university press, 1997.
- [13] Eckmann J. P. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters*, 5:973–977, 1987.
- [14] Reason L. Machete and Irene M. Moroz. Recurrence analysis of a moore-spiegel electronic circuit. 2005.
- [15] E.J. Ngamga, A. Buscarino, M. Frasca, G. Sciuto, Jürgen Kurths, and L Fortuna. Recurrence-based detection of the hyperchaos-chaos transition in an electronic circuit. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 20(4):043115, 2010.
- [16] L. Premalatha and P. Vanajaranjan. Use of recurrence plot analysis for detecting chaos and noise in nonlinear switching circuits. *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, 15(03):409–436, 2006.

-
- [17] Jean-Pierre Eckmann, S Oliffson Kamphorst, David Ruelle, et al. Recurrence plots of dynamical systems. *World Scientific Series on Nonlinear Science Series A*, 16:441–446, 1995.
 - [18] Jianbo Gao and Huaqing Cai. On the structures and quantification of recurrence plots. *Physics Letters A*, 270(1-2):75–87, 2000.
 - [19] Nitza Thomasson, Thomas J Hoepfner, Charles L Webber Jr, and Joseph P Zbilut. Recurrence quantification in epileptic eegs. *Physics Letters A*, 279(1-2):94–101, 2001.
 - [20] Tuan D Pham, Karin Wårdell, Anders Eklund, and Göran Sallerud. Classification of short time series in early parkinson s disease with deep learning of fuzzy recurrence plots. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 6(6):1306–1317, 2019.
 - [21] Newton Paulo Bueno. Algumas evidências da presença de não-linearidades compatíveis com caos determinístico no ibovespa na década de 1990. *Economia Aplicada*, 6(3):555–575, 2002.
 - [22] Adriano Pereira Guilherme et al. Análise do Índice bovespa pelo método dos gráficos de recorrência. 2008.
 - [23] NV Zolotova and DI Ponyavin. Phase asynchrony of the north-south sunspot activity. *Astronomy & Astrophysics*, 449(1):L1–L4, 2006.
 - [24] N Asghari, C Broeg, Ludmila Carone, R Casas-Miranda, JC Castro Palacio, I Csillik, R Dvorak, F Freistetter, G Hadjivantsides, H Hussmann, et al. Stability of terrestrial planets in the habitable zone of gl 777 a, hd 72659, gl 614, 47 uma and hd 4208. *Astronomy & Astrophysics*, 426(1):353–365, 2004.
 - [25] Takashi Matsumoto. A chaotic attractor from chua’s circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 31(12):1055–1058, 1984.
 - [26] G.Q. Zhong and Farhad Ayrom. Experimental confirmation of chaos from chua’s circuit. *International journal of circuit theory and applications*, 13(1):93–98, 1985.
 - [27] LAB Torres and L.A. Aguirre. Inductorless chua’s circuit. *Electronics Letters*, 36(23):1915–1916, 2000.
 - [28] George Datseris. Dynamicalsystems.jl: A julia software library for chaos and nonlinear dynamics. *Journal of Open Source Software*, 3(23):598, mar 2018.
 - [29] David Aubin and Amy Dahan Dalmedico. Writing the history of dynamical systems and chaos: longue durée and revolution, disciplines and cultures. *Historia mathematica*, 29(3):273–339, 2002.
 - [30] Tien-Yien Li and James A Yorke. Period three implies chaos. In *The Theory of Chaotic Attractors*, pages 77–84. Springer, 2004.
 - [31] Brian R. Hunt, Judy A. Kennedy, Tien-Yien Li, and Helena E. Nusse. *The theory of chaotic attractors*. Springer Science & Business Media, 2013.
 - [32] Robert G. Harrison and Dhruba J. Biswas. Chaos in light. *Nature*, 321(6068):394–401, 1986.

-
- [33] Robert M. May and Roy M. Anderson. Commentary transmission dynamics of hiv infection. *Nature*, 326(137):10–1038, 1987.
 - [34] Simon Haykin and Jose Principe. Making sense of a complex world [chaotic events modeling]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 15(3):66–81, 1998.
 - [35] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2013.
 - [36] Marcelo Amorim Savi. Caos em sistemas mecânicos. *Revista Militar de Ciência e Tecnologia*, 14(4):5–18, 1997.
 - [37] Alan Wolf, Jack B. Swift, Harry L Swinney, and John A. Vastano. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(3):285–317, 1985.
 - [38] Elif Derya Übeyli. Detecting variabilities of ecg signals by lyapunov exponents. *Neural computing and applications*, 18(7):653–662, 2009.
 - [39] S. H. Strogatz. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering, 2000.
 - [40] Masaki Sano and Yasuji Sawada. Measurement of the lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Physical review letters*, 55(10):1082, 1985.
 - [41] Pierre Bergé, Yves Pomeau, and Christian Vidal. *L'ordre dans le chaos: vers une approche déterministe de la turbulence*. Hermann, 1988.
 - [42] O. E. Rossler. An equation for hyperchaos. *Physics Letters A*, 71(2-3):155–157, 1979.
 - [43] Gabriel M. Mindlin and R. Gilmore. Topological analysis and synthesis of chaotic time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 58(1-4):229–242, 1992.
 - [44] Joseph P. Zbilut, Nitza Thomasson, and Charles L. Webber. Recurrence quantification analysis as a tool for nonlinear exploration of nonstationary cardiac signals. *Medical engineering & physics*, 24(1):53–60, 2002.
 - [45] Stuart e Wilson Stephen Ding, Hang e Crozier. Otimização do limiar de distância euclidiana na aplicação da análise de quantificação de recorrência para estudos de variabilidade da frequência cardíaca. *Caos, Solitons Fractals*, 38(5):1457–1467, 2008.
 - [46] Marco Thiel, M. Carmen Romano, Jürgen Kurths, Riccardo Meucci, Enrico Allaria, and F Tito Arecchi. Influence of observational noise on the recurrence quantification analysis. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 171(3):138–152, 2002.
 - [47] Norbert Marwan. *Encounters with neighbours: current developments of concepts based on recurrence plots and their applications*. Norbert Marwan, 2003.
 - [48] Joseph P. Zbilut and Charles L. Webber Jr. Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots. *Physics letters A*, 171(3-4):199–203, 1992.

-
- [49] L.L. Trulla, A. Giuliani, J.P. Zbilut, and C.L. Webber Jr. Recurrence quantification analysis of the logistic equation with transients. *Physics Letters A*, 223(4):255–260, 1996.
 - [50] Norbert Marwan, Niels Wessel, Udo Meyerfeldt, Alexander Schirdewan, and Jürgen Kurths. Recurrence plot based measures of complexity and their application to heart-rate-variability data. *Physical review E*, 66(2):026702, 2002.
 - [51] Norbert Marwan and Charles Webber. *Mathematical and Computational Foundations of Recurrence Quantifications*, pages 3–43. 07 2015.
 - [52] Floris Takens. Detectando atratores estranhos em turbulência. In *Sistemas dinâmicos e turbulência, Warwick 1980*, pages 366–381. Springer, 1981.
 - [53] D Ruelle. F. takens on the nature of turbunence. *Commun. Math. Phys*, 82:137–151, 1971.
 - [54] Dimitris Kugiumtzis and Nils D. Lillekjendlie, Bjoern e Christophersen. Séries temporais caóticas: Parte 1: estimativa de algumas propriedades invariantes no espaço de estados. 15(4):205–224, 1994.
 - [55] Peter Grassberger and Itamar Procaccia. Characterization of strange attractors. *Physical review letters*, 50(5):346, 1983.
 - [56] David S. Broomhead and Gregory P. King. Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 20(2-3):217–236, 1986.
 - [57] Matthew B. Kennel, Reggie Brown, and Henry D.I. Abarbanel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical review A*, 45(6):3403, 1992.
 - [58] Liangyue Cao. Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 110(1-2):43–50, 1997.
 - [59] Henry D.I. Abarbanel, T.A. Carroll, L.M. Pecora, J.J. Sidorowich, and L. Sh. Tsimring. Predicting physical variables in time-delay embedding. *Physical Review E*, 49(3):1840, 1994.
 - [60] Daniel T Kaplan and Leon Glass. Direct test for determinism in a time series. *Physical review letters*, 68(4):427, 1992.
 - [61] Ryu Katayama, Kaihei Kuwata, Yuji Kajitani, and Masahide Watanabe. Embedding dimension estimation of chaotic time series using self-generating radial basis function network. *Fuzzy sets and systems*, 71(3):311–327, 1995.
 - [62] José Maria Pires de Menezes Júnior. Ferramentas para análise de sistemas caóticos de tempo discreto: Um breve tutorial. 15(1):4–15, 2017.
 - [63] Adriana Campanharo, Elbert Macau, and Fernando M. Ramos. Detectando a presença de caos em uma série temporal. *SBMAC [Online]*, 2009.

-
- [64] Andrew M. Fraser and Harry L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical review A*, 33(2):1134, 1986.
- [65] Karla Fedrizzi Machado. Módulo de auto-localização para um agente exploratório usando filtro de kalman. 2003.
- [66] James John Brophy. *Basic electronics for scientists*. McGraw-Hill, 1990.
- [67] Henry W Ott and Henry W Ott. *Noise reduction techniques in electronic systems*, volume 442. Wiley New York, 1988.
- [68] Wilson Salustiano Júnior and Hugo L.D. de S. Previsão em sistemas dinâmicos caóticos com ruído. 2020.
- [69] Sérgio Haffner and Luís A Pereira. Análise de circuitos elétricos para engenharia. 2007.
- [70] Marcelo Wendling. Amplificadores operacionais. *Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá- Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho-UNESP, Guaratinguetá*, 2010.
- [71] Emilson Ribeiro Viana Junior. Espaços de parâmetros para um circuito caótico experimental. 2010.
- [72] Michael Peter Kennedy. Robust op amp realization of chua's circuit. *Frequenz.*, 46(3):66–80, 1992.
- [73] Realização de giradores usando amplificadores operacionais e seu uso na síntese de rede ativa rc. In *Anais da Instituição de Engenheiros Eletricistas*, volume 116. IET, 1969.
- [74] Valentin Siderskiy, A Mohammed, and Vikram Kapila. Chua's circuit for experimenters using readily available parts from a hobby electronics store. In *122nd ASEE Annual Conf. & Exposition. – Seattle: American Society for Engineering Education*, pages 26–384, 2015.
- [75] Gauruv Gandhi, Bharathwaj Muthuswamy, and Tamas Roska. Chua's circuit for high school students. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12, 2007.
- [76] Holokx A. Albuquerque, Rero M. Rubinger, and Paulo C. Rech. Self-similar structures in a 2d parameter-space of an inductorless chua's circuit. *Physics Letters A*, 372(27-28):4793–4798, 2008.