

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

DALTON RIVA DE PAULA

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A  
PROBLEMAS DE ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL COM  
ELEMENTOS LINEARES DESCONTÍNUOS

CURITIBA  
2021

DALTON RIVA DE PAULA

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A  
PROBLEMAS DE ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL COM  
ELEMENTOS LINEARES DESCONTÍNUOS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: D.Sc. Luiz Alkimin de Lacerda

CURITIBA  
2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

---

- P324m Paula, Dalton Riva de  
O método dos elementos de contorno aplicado a problemas de elasticidade bidimensional com elementos lineares descontínuos [recurso eletrônico] / Dalton Riva de Paula – Curitiba, 2021.
- Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.  
Orientador: D.Sc. Luiz Alkimin de Lacerda
1. Métodos de elemento de contorno. 2. Elasticidade. I. Universidade Federal do Paraná. II. Lacerda, Luiz Alkimin de. III. Título.

CDD: 620.00151825

---

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS  
EM ENGENHARIA - 40001016030P0

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **DALTON RIVA DE PAULA** intitulada: **O METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL COM ELEMENTOS LINEARES DESCONTÍNUOS**, sob orientação do Prof. Dr. LUIZ ALKIMIN DE LACERDA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 09 de Setembro de 2021.

Assinatura Eletrônica  
09/09/2021 20:42:15.0  
LUIZ ALKIMIN DE LACERDA  
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica  
09/09/2021 20:36:24.0  
AMANDA JAREK  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica  
09/09/2021 22:26:50.0  
JOSÉ ANTONIO MARQUES CARRER  
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica  
10/09/2021 15:01:05.0  
RAPHAEL FERNANDO SCUCIATO  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço aos meus pais, Rivair e Marisa de Paula, que me acompanharam e apoiaram desde o primeiro momento de vida até hoje.

Ao meu orientador, D.Sc Luiz Alkimin, pela orientação inestimável, pela confiança depositada em mim, pela paciência e apoio em todos os momentos, que foi vital para a realização deste trabalho e no meu crescimento acadêmico.

Aos professores e colegas do CESEC-UFPR que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Meu sincero agradecimento a todos!

## RESUMO

Nessa dissertação apresenta-se detalhadamente a formulação bidimensional do Método dos Elementos Contorno (MEC) com o emprego de elementos lineares contínuos e descontínuos de geometria reta para a modelagem de problemas de elasticidade linear. Todo o trabalho segue uma formulação clássica e bem conhecida na literatura. Sabendo-se que o tratamento das integrais impróprias é uma parte característica deste método numérico e que o seu pleno entendimento é um dos principais desafios enfrentados pelos estudantes que iniciam o estudo do MEC, buscou-se trazer uma contribuição para o meio acadêmico no que diz respeito à implementação numérica para cálculo dessas integrais quando elementos lineares são empregados. O resultado deste desenvolvimento é sintetizado em tabelas com expressões que facilitam a implementação desses cálculos em códigos computacionais com a formulação clássica do método. As expressões obtidas foram validadas por meio de simples exemplos numéricos onde pode ser observada uma ótima correlação entre os resultados obtidos com o software comercial Abaqus e expressões analíticas quando disponível e os resultados obtidos com a formulação apresentada.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos de Contorno, Elasticidade Bidimensional, Elementos Lineares Descontínuos.

## ABSTRACT

This dissertation presents in detail the two-dimensional formulation of the Boundary Element Method (BEM) with the use of continuous and discontinuous linear elements of straight geometry for modeling linear elasticity problems. The entire work follows a classic formulation that is well known in the literature. Knowing that the treatment of improper integrals is a characteristic part of this numerical method and that its full understanding is one of the main challenges faced by students starting the study of BEM, we sought to bring a contribution to the academic environment in what it refers to the numerical implementation for calculating these integrals when linear elements are used. The result of this development is synthesized in tables with expressions that facilitate the implementation of these calculations in computational codes with the classic formulation of the method. The expressions obtained were validated through simple numerical examples where an excellent correlation can be observed between the results obtained with the commercial software Abaqus and analytical expressions, when available, and the results obtained with the presented formulation.

**Keywords:** Boundary Elements Method, Two-dimensional Elasticity, Discontinuous Linear Elements.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – PONTO DE COLOCAÇÃO $\xi$ E PONTO CAMPO $x$ NO CONTORNO $\Gamma$ DE UM DOMÍNIO QUALQUER. . . . .	15
Figura 2 – CORPO CÚBICO TRIDIMENSIONAL . . . . .	19
Figura 3 – ELEMENTO DIFERENCIAL TRIANGULAR SOB TENSÕES . . . . .	22
Figura 4 – DOIS ESTADOS AUTO EQUILIBRADOS . . . . .	24
Figura 5 – DOMÍNIO INFINITO $\Omega^*$ E PONTOS FONTE E CAMPO . . . . .	26
Figura 6 – DOMÍNIO AUMENTADO DO PROCESSO LIMITE . . . . .	29
Figura 7 – POSIÇÃO DE $\xi$ NO CONTORNO: (i) PONTOS 'SUAVE' DA GEOMETRIA (ii) PONTO 'NÃO SUAVE' DA GEOMETRIA . . . . .	30
Figura 8 – (i) DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTOS CONTÍNUOS; (ii) DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTOS DESCONTÍNUOS . . . . .	32
Figura 9 – TRANSFORMAÇÃO DE $\Gamma$ PARA $\eta$ . . . . .	33
Figura 10 – POSSÍVEIS CONDIÇÕES DE CONTORNO . . . . .	35
Figura 11 – FAMÍLIA DE ELEMENTOS LINEARES EM UMA MALHA DE DISCRETIZAÇÃO 2D . . . . .	37
Figura 12 – (i) FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO E (ii) FUNÇÕES DE FORMA . . . . .	38
Figura 13 – (i) DISCRETIZAÇÃO DO ELEMENTO CONTÍNUO; (ii) DISCRETIZAÇÃO DO ELEMENTO DESCONTÍNUO (iii) PONTO DE COLOCAÇÃO NO ELEMENTO INTEGRADO] . . . . .	40
Figura 14 – DISTÂNCIAS E NORMAIS NO ELEMENTO . . . . .	40
Figura 15 – EXEMPLO DE INTEGRAÇÃO COM QUATRO PONTOS DE GAUSS . . . . .	43
Figura 16 – ELEMENTO DESCONTÍNUO . . . . .	49
Figura 17 – TODOS OS TIPOS DE ELEMENTOS . . . . .	53
Figura 18 – MAPEAMENTOS LOCAIS NO ELEMENTO - (i) SINGULARIDADE EM $\eta_1$ E (ii) SINGULARIDADE EM $\eta_2$ . . . . .	58
Figura 19 – DISTÂNCIA $r$ - (i) $r_\alpha$ E (ii) $r_\beta$ . . . . .	59
Figura 20 – CHAPA PLANA 6X6 m <sup>2</sup> COM ESPESSURA DESPREZÍVEL . . . . .	63
Figura 21 – TRÊS POSIÇÕES DIFERENTES PARA A DESCONTINUIDADE: $ \eta_1  = \eta_2 = 1/3$ ; $ \eta_1  = \eta_2 = 1/2$ e $ \eta_1  = \eta_2 = 2/3$ . . . . .	64
Figura 22 – PONTOS NO CHAPA PLANA 6X6 m <sup>2</sup> COM ESPESSURA DESPREZÍVEL . . . . .	65
Figura 23 – MODELO ABAQUS: I 16; II 64; III 256 S E IV 784 ELEMENTOS . . . . .	66
Figura 24 – ABAQUS - CAMPO DE DESLOCAMENTOS U1 (m) . . . . .	66
Figura 25 – ABAQUS - CAMPO DE DESLOCAMENTOS U2 (m) . . . . .	67
Figura 26 – ABAQUS - CAMPO DE TENSÕES $\sigma_{11}$ (MN/m) . . . . .	67
Figura 27 – MODELO MEC: I 4; II 8; III 16 E IV 32 ELEMENTOS . . . . .	68
Figura 28 – DESLOCAMENTO EM U1 (m) NO PONTO 1 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	69



Figura 29 – DESLOCAMENTO EM U2 (m) NO PONTO 1 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	69
Figura 30 – DESLOCAMENTO EM U1 (m) NO PONTO 2 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	69
Figura 31 – DESLOCAMENTO EM U2 (m) NO PONTO 2 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	70
Figura 32 – DESLOCAMENTO EM U1 (m) NO PONTO 3 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	70
Figura 33 – DESLOCAMENTO EM U2 (m) NO PONTO 3 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	70
Figura 34 – DESLOCAMENTO EM U1 (m) NO PONTO 4 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	71
Figura 35 – DESLOCAMENTO EM U2 (m) NO PONTO 4 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	71
Figura 36 – DESLOCAMENTO EM U1 (m) NO PONTO 5 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	71
Figura 37 – DESLOCAMENTO EM U2 (m) NO PONTO 5 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	72
Figura 38 – DESLOCAMENTO EM U1 (m) NO PONTO 6 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	72
Figura 39 – DESLOCAMENTO EM U2 (m) NO PONTO 6 PARA DIFERENTES MALHAS . . . . .	72
Figura 40 – TENSÕES $\sigma_{11}$ NA LINHA E (ENGASTE) . . . . .	74
Figura 41 – TENSÕES $\sigma_{11}$ NA LINHA S (SIMETRIA) . . . . .	74
Figura 42 – CHAPA PLANA COM ORIFÍCIO . . . . .	76
Figura 43 – MODELO NO ABAQUS . . . . .	77
Figura 44 – ABAQUS - CAMPO DE TENSÕES $\sigma_{11}$ . . . . .	77
Figura 45 – MODELO NO MEC . . . . .	78
Figura 46 – RESULTADOS EXERCÍCIO 2 - TENSÕES $\sigma_{11}$ NA LINHA V . . . . .	78
Figura 47 – CHAPA PLANA COM TRINCA . . . . .	80
Figura 48 – MODELO DE CHAPA COM TRINCA ABAQUS COM 545 E 895 ELEMENTOS) . . . . .	81
Figura 49 – CAMPO DE DESLOCAMENTOS U2 (ABAQUS COM 895 ELEMENTOS) . . . . .	82
Figura 50 – CAMPO DE TENSÕES $\sigma_{22}$ (ABAQUS COM 895 ELEMENTOS) . . . . .	82
Figura 51 – MODELO DE CHAPA COM TRINCA (MEC COM 38 ELEMENTOS) . . . . .	83
Figura 52 – MODELO DE CHAPA COM TRINCA (MEC COM 46 ELEMENTOS) . . . . .	84
Figura 53 – MODELO DE CHAPA COM TRINCA (MEC COM 59 ELEMENTOS . . . . .	84
Figura 54 – DESLOCAMENTO $u_2$ DE ABERTURA DA TRINCA - COMPARATIVO ENTRE O MEC E O ABAQUS . . . . .	85
Figura 55 – CAMPO DE TENSÕES $\sigma_{22}$ NA PONTA DA TRINCA - COMPARATIVO ENTRE O MEC E O ABAQUS) . . . . .	85

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – FORMULÁRIO DOS COEFICIENTES G - PARTE 1 (O AUTOR) . .	54
Tabela 2 – FORMULÁRIO DOS COEFICIENTES G - PARTE 2 (O AUTOR) . .	55
Tabela 3 – FORMULÁRIO DOS COEFICIENTES G - PARTE 3 (O AUTOR) . .	56
Tabela 4 – FORMULÁRIO DOS COEFICIENTES H PELO SENTIDO DO VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY (O AUTOR) . . . . .	62
Tabela 5 – RESULTADOS OBTIDOS PARA A SUBMATRIZ DIAGONAL ASSOCIADA AO PONTO DE COLOCAÇÃO, CONSIDERANDO O MCR E O VPC . . . . .	64
Tabela 6 – QUANTIDADE DE ELEMENTOS DOS MODELOS I, II, III, E IV .	65
Tabela 7 – DIFERENÇAS PERCENTUAIS DOS DESLOCAMENTOS DO MEC EM RELAÇÃO AO ABAQUS . . . . .	73
Tabela 8 – DIFERENÇAS PERCENTUAIS NO MEC EM RELAÇÃO AO ABAQUS	75
Tabela 9 – TENSÕES ANGULARES EM (MN/m) . . . . .	79
Tabela 10 – PONTOS E PESOS DA QUADRATURA GAUSSIANA UNIDIMENSIONAL . . . . .	93

## LISTA DE SÍMBOLOS

$b$	Forças de corpo
$E$	Módulo de elasticidade do material
$i$ e $j$	Variáveis
$J$	Jacobiano
$L$	Comprimento do elemento
$n$	Normais
$N$	Funções que modelam a geometria reta do elemento
$N'$	Funções de interpolação lineares do elemento descontínuos
$N_E$	Numero de elementos
$N_F$	Numero de Funções de interpolação lineares
$r$	Raio
$r,$	Derivada do Raio
$t$	Forças de superfície
$T$	Derivadas de $U$
$u$	Deslocamentos
$U$	Função de ponderação
$x$	Coordenada variacional
$\alpha$ e $\beta$	Seguimentos do elemento
$\Gamma$	Contorno do problema
$\delta$	Delta de Dirac, delta de Kronecker ou operador
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\varepsilon$	Deformações específicas
$\eta$	Coordenada local

$\eta_\alpha$ e $\eta_\beta$	Coordenadas variacional
$\theta$	Ângulo
$\lambda$ e $\mu$	Constantes de Lamé
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\xi$	Ponto fonte
$\rho$	Distância infinitesimal medida no espaço global $\Gamma$
$\sigma$	Tensor de tensões
$\Omega$	Domínio do problema

## SUMÁRIO

<b>1 – INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
1.1 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
1.2 OBJETIVO	18
1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	18
<b>2 – EQUAÇÕES GOVERNANTES</b>	<b>19</b>
2.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	19
2.2 DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS	20
2.3 RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO	20
2.4 EQUAÇÕES DE NAVIER	21
2.5 MODELOS BIDIMENSIONAIS	21
2.5.1 Estado Plano de Tensões	21
2.5.2 Estado Plano de Deformações	23
<b>3 – FORMULAÇÃO BIDIMENSIONAL DO MEC</b>	<b>24</b>
3.1 TEOREMA DO TRABALHO RECÍPROCO DE BETTI	24
3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL DE DESLOCAMENTOS	25
3.3 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO	28
3.4 DISCRETIZAÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA	31
3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	34
3.6 CÁLCULO NUMÉRICO DE DESLOCAMENTOS E TENSÕES NO DOMÍNIO	35
<b>4 – MODELAGEM COM ELEMENTOS LINEARES RETOS</b>	<b>37</b>
4.1 FUNÇÕES DE FORMA E DE INTERPOLAÇÃO LINEARES	38
4.2 MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES	39
4.3 INTEGRAÇÕES NUMÉRICAS REGULARES	42
4.4 INTEGRAÇÕES COM O PONTO FONTE NO ELEMENTO INTEGRADO	44
4.4.1 COEFICIENTES $H$ - PONTO $\xi \neq$ PONTO $c$	47
4.4.2 COEFICIENTES $H$ COM SINGULARIDADE FORTE	47
4.4.3 COEFICIENTES $G$ COM SINGULARIDADE FRACA	48
<b>5 – INTEGRAÇÕES NO SENTIDO DO VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY EM ELEMENTOS LINEARES CONTÍNUOS E DESCONTÍNUOS</b>	<b>57</b>
<b>6 – EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>63</b>

6.1	CHAPA ENGASTADA SOB TRAÇÃO . . . . .	63
6.2	CHAPA COM ORIFÍCIO SOB TRAÇÃO . . . . .	76
6.3	CHAPA COM TRINCA HORIZONTAL SOB TRAÇÃO . . . . .	80
<b>7</b>	<b>– CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>86</b>
7.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	86
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>88</b>
	<b>ANEXO</b>	<b>91</b>
	<b>ANEXO A – QUADRATURA GAUSSIANA UNIDIMENSIONAL . . . . .</b>	<b>92</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O aperfeiçoamento na engenharia é contínuo e uma das principais forças que impulsionam esse processo é a melhoria no desempenho e durabilidade dos elementos que constituem o objeto de estudo. Nesse sentido, avaliar geometrias e topologias, propriedades dos materiais, ações externas e internas e condições de uso das estruturas de interesse ajudam a compreender o seu comportamento inicial e futuro. Em especial, almeja-se determinar se os elementos resistem às condições críticas de projeto ou garantir as condições adequadas para tanto.

Para modelar e simular o comportamento de um problema físico, diferentes metodologias ou métodos podem ser utilizados, desde modelagens físicas em escala até modelos matemáticos e numéricos. Em particular, no caso de problemas de elasticidade, modelos físicos costumam envolver custos elevados e limitados em abrangência uma vez que as deformações impostas são muitas vezes irreversíveis, exigindo retrabalhos para avaliação de condições alternativas. Portanto, é vantajoso empregar modelos matemáticos e/ou numéricos nesse campo de estudo.

Métodos numéricos podem ser definidos como um conjunto de algoritmos definidos a partir de uma formulação matemática consistente, que busca transformar um problema real com matemática frequentemente complexa em um modelo simplificado que utiliza operações aritméticas menos complexas, e conseqüentemente obtendo soluções aproximadas. Entre os métodos de discretização mais conhecidos na literatura, que resultam em muitos casos na formação de um sistema de equações linear ou não linear a ser resolvido, tem-se:

- Método dos Elementos Finitos (MEF);
- Método dos Elementos Discretos (MED);
- Método dos Volumes Finitos (MVF);
- Método das Diferenças Finitas (MDF);
- Método dos Elementos de Contorno (MEC).

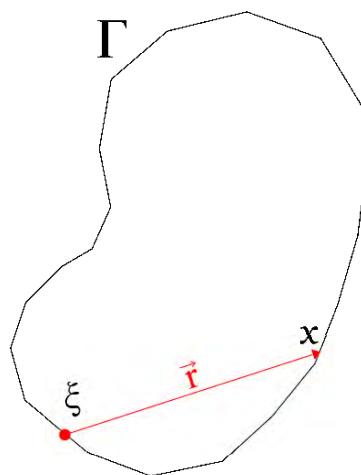
Essa dissertação está direcionada ao estudo de problemas de elasticidade com o emprego do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Como será detalhadamente descrito adiante, trata-se de um método que possibilita a solução do problema por meio da discretização do contorno ou perímetro do modelo. Em problemas bidimensionais a geometria do contorno é uma linha ao passo que em problemas tridimensionais é uma superfície. Deste modo, comparando-se com outros métodos de domínio, como o Métodos de Elementos Finitos (MEF), o MEC envolve uma discretização mais simples, com menor número de pontos ou nós de colocação, tornando o sistema algébrico resultante menor e fácil de ser calculado.

A discretização do contorno pode ser efetuada com diferentes tipos de elementos, que podem ser escolhidos em função do tipo de problema a ser resolvido. Em geral, funções polinomiais são comumente utilizadas para aproximar os deslocamentos e tensões inerentes a um problema elástico. Nesse trabalho um enfoque especial é dado ao emprego de elementos lineares contínuos e descontínuos de geometria reta. Essa escolha é motivada principalmente pela facilidade de implementação e apresentação didática do processo de montagem do sistema de equações.

Por outro lado, o MEC envolve a necessidade de cálculo de integrais impróprias, fato que também o diferencia expressivamente dos demais métodos.

Considere um domínio qualquer como mostrado na Figura 1 limitado por um contorno  $\Gamma$ . A formação do sistema de equações algébricas no MEC é baseada em integrações ao longo desse contorno que é discretizado em elementos. Essas integrações são efetuadas tendo um nó de colocação  $\xi$  como base em um determinado elemento e um processo de “varredura” de todo o contorno (ou elementos do contorno) onde a distância  $r$  entre  $\xi$  e  $x$  é continuamente avaliada. Percebe-se que nesse processo que essa distância  $r$  pode assumir o valor nulo quando o elemento sendo integrado é o que contém  $\xi$ . Será visto que essas integrais envolvem funções que apresentam algum tipo de singularidade em  $r$ , que resultam em integrais impróprias.

FIGURA 1 – PONTO DE COLOCAÇÃO  $\xi$  E PONTO CAMPO  $x$  NO CONTORNO  $\Gamma$  DE UM DOMÍNIO QUALQUER.



FONTE: O Autor

Sabe-se que o tratamento das integrais impróprias é uma parte característica do MEC e que o seu pleno entendimento é um dos principais desafios enfrentados pelos estudantes que iniciam o estudo do método. Assim, buscou-se trazer uma contribuição para o meio acadêmico no que diz respeito à implementação numérica para cálculo dessas integrais com singularidade. O resultado deste desenvolvimento é sintetizado em tabelas



com expressões que facilitam a implementação desses cálculos em códigos computacionais com a formulação clássica do método.

As equações do MEC são montadas em sua maior parte por meio de integrações numéricas. Um método amplamente utilizado e de fácil implementação para a integração numérica é a Quadratura Gaussiana. Os resultados obtidos são amplamente reconhecidos como de elevada precisão quando comparados com métodos de discretização de domínio. Tal característica é muito bem vista em problemas de elasticidade com concentrações de tensão.

Adicionalmente, destaca-se também como uma vantagem do MEC sua aplicação em problemas com domínio infinito ou semi-infinito (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984).

## 1.1 BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os fundamentos básicos do Método dos Elementos do Contorno surgiram em meados do século XIX com a base matemática da teoria do potencial, problemas de valor limite, funções de Green, identidades de Green e equações integrais de Fredholm. Logo de início foi identificada a presença de singularidades nos trabalhos com a teoria do potencial, gerando uma longa discussão acadêmica que se mantém até os dias atuais.

Nos anos 1960 houve o início de um grande salto no desenvolvimento do MEC, em especial devido ao acesso a computadores. Cabe citar os trabalhos de Jaswon (1963a), Jaswon (1963b) e Jaswon (1963c) com métodos diretos e indiretos para problemas de potencial e o trabalho de Kupradze (1965) e Kupradze e Aleksidze (1964) sobre problemas de potencial e elasticidade. Em seguida, Rizzo (1967) desenvolveu a solução numérica para a equação integral de Somigliana.

A partir dos anos 1970, o Brebbia e Cruse uniram forças e criaram um movimento internacional que levou a ampla divulgação do MEC por meio de conferências sobre o método, que ganharam muita expressão nas décadas dos anos 1980 e 1990.

Portanto, o desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno como técnica numérica inicia-se na década de 1960, junto com o desenvolvimento dos computadores, mas sua base matemática vem desde o século XIX. Um histórico detalhado sobre essa evolução é contado no artigo de revisão de Cheng e Cheng (2005).

Para aqueles que estão iniciando no MEC, uma introdução 'amigável' aos fundamentos e técnicas do MEC, incluindo aplicações com códigos computacionais, é encontrada

em livros clássicos como os de Banerjee e Butterfield (1981), Brebbia e Dominguez (1989) e Kane (1994).

Rizzo (1967) menciona as complexidades desta formulação em problemas de elastostática, devido a existência de singularidades ou quase singularidades nas equações fundamentais, uma em ordem logarítmica e outra  $1/r$ . Para este segundo tipo, as singularidades foram usualmente contornadas por meio do artifício do movimento do corpo rígido, mas com o passar do tempo foram propostas várias abordagens alternativas para contornar a questão. Por exemplo, Kutt (1975) propôs o cálculo da parte finita do Valor Principal de Cauchy com somatórios, facilitando a utilização de técnicas numéricas computacionais. Theocaris (1981a) e Theocaris (1981b) contribuíram publicando dois trabalhos sobre a integração de integrais singulares, o primeiro com vários métodos para a solução numérica de equações integrais singulares do tipo Cauchy e um segundo onde são investigados vários problemas matemáticos físicos relacionados ao tema.

Para resolver os problemas com singularidade logarítmica Katsikadelis e Armenakas (1983) propuseram um método computacional de integrais em linha.

Hayami e Brebbia (1987) desenvolveram um método para calcular integrais singulares ou quase singulares sobre uma superfície curva geral que surge em modelos tridimensionais.

Telles (1989) contribuiu sugerindo a utilização da transformação jacobiana quadrática ou cúbica para enfraquecer ou cancelar a singularidade e depois aplicar a regra de Gauss comum para problemas bidimensionais e tridimensionais.

Na avaliação de integrais singulares e hipersingulares os trabalhos que tiveram uma maior atenção foram os publicados por Guiggiani e seus colaboradores como: Guiggiani e Casalini (1987) que propuseram uma técnica de integração analítica utilizando o Valor Principal de Cauchy para elementos contínuos. E na avaliação de integrais hipersingulares nos trabalhos Guiggiani (1992a) e Guiggiani et al. (1992b).

Entre outras literaturas que abordam a avaliação de integrais singulares, tem-se os livros de Doblare (1987), Hall (1988) e Sladek e Sladek (1988), que além de explicações sobre a teoria geral do MEC, abordam em detalhes a regularização e avaliação de integrais singulares e ainda contam com exemplos e aplicações para melhor entendimento do tema.

A aplicação do Método dos Elementos de Contorno em problemas de elasticidade é ampla. Para complementar, citam-se abaixo apenas alguns exemplos de trabalhos dentre um volume enorme de artigos que utilizam o método em diferentes aplicações:

- Modelagem de testes de pressão em poços de petróleo (KEIDEL, 2011);
- Análise de pavimentos de edifícios (BACARJI, 2001);
- Análise de chapas com enrijecedores (WUTZOW, 2003);
- Resolução do problema de segunda ordem em placas delgadas (TAGUTI, 2010).

## 1.2 OBJETIVO

Implementar a formulação clássica do Método dos Elementos de Contorno para problemas de elasticidade bidimensional, com o emprego de elementos lineares contínuos e descontínuos. Ainda, desenvolver tabelas de expressões para cálculo direto das integrais impróprias, possibilitando sua fácil implementação em códigos computacionais em Matlab. Nesse contexto, são apresentadas expressões para o cálculo das integrais com singularidades fracas e integrais fortemente singulares, existentes no sentido do Valor Principal de Cauchy.

## 1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Além deste primeiro capítulo, apresentam-se no segundo capítulo as equações governantes da elasticidade e sua simplificação para problemas bidimensionais. No terceiro capítulo é apresentada a formulação clássica do MEC. No quarto capítulo é introduzido o elemento de contorno linear, contínuo e descontínuo, e todo o processo de cálculo e montagem do sistema de equações algébricas de modo didático. O quinto capítulo é dedicado ao cálculo numérico direto das integrais com singularidade forte, no sentido do Valor Principal de Cauchy. No sexto capítulo são apresentados exemplos numéricos e, por fim, no último capítulo são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

## 2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Para embasar o desenvolvimento deste trabalho é apresentado nesse capítulo, de forma sucinta, a teoria clássica de Elasticidade, baseada nas obras de Timoshenko e Goodier (1970), Brebbia e Dominguez (1989) e Hibbeler (2019), onde se considera um material com comportamento elástico linear, homogêneo, contínuo e isotrópico. Baseado nessas premissas são abordados os principais conceitos e relações matemáticas utilizados em problemas de elasticidade linear no Método dos Elementos de Contorno.

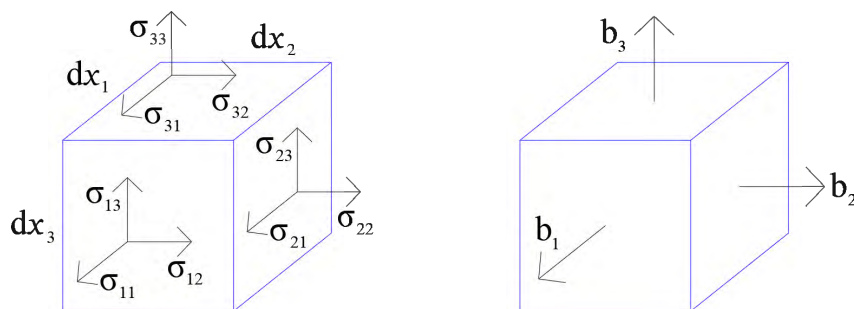
### 2.1 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Considere as componentes do estado de tensões em um ponto de um corpo cúbico tridimensional  $dx_1$ ,  $dx_2$  e  $dx_3$ , como mostra a Figura 2. O primeiro índice subscrito de cada componente de tensão representa a direção da normal ao plano no qual a tensão atua, e o segundo índice subscrito indica a direção na qual a tensão propriamente dita atua. Dezoito componentes de tensões podem ser observadas, mas apenas seis destas são essenciais para descrever o estado de tensões em um ponto no interior do corpo, uma vez que existe uma equivalência nas relações complementares de cisalhamento, que torna  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$  e  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ . A equação de equilíbrio compactada para um sistema tridimensional sujeito a forças externas e de corpo  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  é regida por,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad (1)$$

onde  $x_j$  é a coordenada espacial;  $b_j$  a componente da força de corpo;  $\sigma$  o tensor de tensões;  $i$  e  $j$  variam de 1 até 3 em um espaço tridimensional.

FIGURA 2 – CORPO CÚBICO TRIDIMENSIONAL



FONTE: O Autor

## 2.2 DEFORMAÇÕES ESPECÍFICAS

O estado de deformações em um ponto de um corpo tridimensional pode ser descrito pelas componentes de deformações específicas atuando em um volume elementar tridimensional de lados  $dx_1$ ,  $dx_2$  e  $dx_3$ . As componentes  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  e  $\varepsilon_{33}$  são as deformações específicas longitudinais que provocam mudança no volume, enquanto as componentes  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{13}$  e  $\varepsilon_{23}$  são deformações específicas transversais que mudam a geometria do elemento diferencial. As deformações específicas estão relacionadas às componentes de deslocamentos  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  por meio da seguinte expressão,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

Por meio de diferenciações da Equação (2) e manipulações algébricas obtém-se a equação de compatibilidade das deformações específicas que é dada por,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (3)$$

## 2.3 RELAÇÕES TENSÃO-DEFORMAÇÃO

Seja um corpo sujeito a um carregamento qualquer, as deformações específicas são dadas por,

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})], \quad (4)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})], \quad (5)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})], \quad (6)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{13}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{23}. \quad (7)$$

Por meio das expressões acima, é possível relacionar as tensões em função das deformações específicas, onde se obtém,

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (8)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $\mu$  e  $\lambda$  são as constantes de Lamé e são dadas por,

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{(1 - 2\nu)}. \quad (10)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $E$  é o Módulo de Elasticidade Longitudinal.

## 2.4 EQUAÇÕES DE NAVIER

A equação Navier é a equação governante da elasticidade, que representa o equilíbrio por meio das derivadas dos deslocamentos. Substituindo-se a Equação (2) na Equação (8) obtém-se as tensões em função das derivadas de deslocamentos. Em seguida, substituindo essas relações na equação de equilíbrio (1) e manipulando algebricamente com auxílio das expressões de deformações específicas longitudinais, chega-se à Equação de Navier

$$\mu u_{i,ij} + \frac{2\nu\mu}{(1 - 2\nu)} u_{j,ji} + b_i = 0. \quad (11)$$

## 2.5 MODELOS BIDIMENSIONAIS

### 2.5.1 Estado Plano de Tensões

É possível simplificar as equações descritas para um corpo tridimensional em equilíbrio ao se avaliar casos particulares. Considerando-se uma estrutura plana com

espessura desprezível e sem qualquer componente de carregamento na sua direção 3, perpendicular, as componentes de tensão nessa mesma direção,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  e  $\sigma_{33}$  podem ser consideradas nulas. As componentes de tensão  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12}$  são independentes da direção 3 e avaliadas no plano da espessura da estrutura. Assim, derivam-se as seguintes expressões para as deformações no chamado estado plano de tensões, onde:

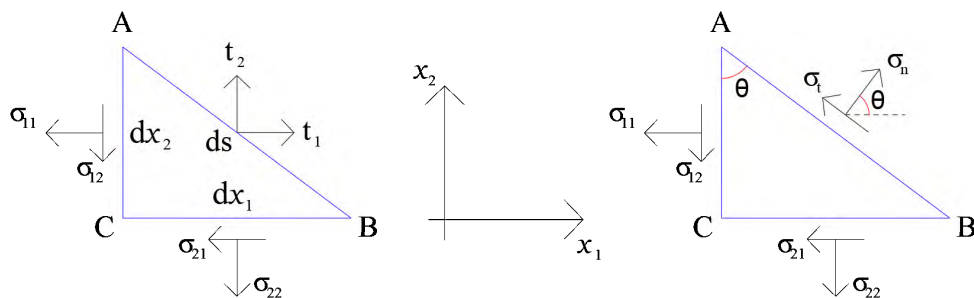
$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}); & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}); \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}); & \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = 0.$$

Se neste espaço bidimensional definido pelo plano principal da estrutura tem-se um elemento diferencial triangular, conforme ilustrado na Figura 3, as componentes da força de superfície  $t_1$  e  $t_2$  atuantes em um plano inclinado com direção normal  $n$  podem ser relacionadas ao campo de tensões conforme a equação,

$$t_i = \sigma_{ij}n_j. \quad (13)$$

FIGURA 3 – ELEMENTO DIFERENCIAL TRIANGULAR SOB TENSÕES



FONTE: O Autor

No mesmo plano inclinado, o campo de tensões normais  $\sigma_n$  e tangenciais  $\sigma_t$  é descrito pelas expressões,

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta, \quad (14)$$

$$\sigma_t = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sen 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta. \quad (15)$$

onde  $\theta$  é o ângulo que define a direção normal ao plano inclinado, conforme indicado na Figura 3.

### 2.5.2 Estado Plano de Deformações

O Estado Plano de Deformações é definido quando o carregamento e a geometria não variam significativamente na direção do eixo longitudinal do corpo tridimensional. Se esta direção for definida como eixo 3, o deslocamento ao longo deste eixo é nulo para qualquer ponto da seção transversal ao eixo e, conseqüentemente, as deformações específicas  $\varepsilon_{33}$ ,  $\varepsilon_{13}$  e  $\varepsilon_{23}$  também são nulas. Assim, tem-se como resultantes no corpo tridimensional as seguintes tensões e deformações específicas,

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}); & \sigma_{13} &= \sigma_{31} = 0 & \sigma_{23} &= \sigma_{32} = 0; \\ \varepsilon_{11} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_{11} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{22} \right); & \varepsilon_{22} &= \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_{22} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{11} \right); & \\ \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{21} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}. \end{aligned} \quad (16)$$

Por meio das expressões para o Estado Plano de Deformações pode-se simular problemas de Estado Plano de Tensões, adotando-se o coeficiente de Poisson,  $\nu'$ , e o módulo de elasticidade,  $E'$ , definidos a seguir como,

$$\nu' = \frac{\nu}{1+\nu}, \quad (17)$$

$$E' = E \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \right]. \quad (18)$$



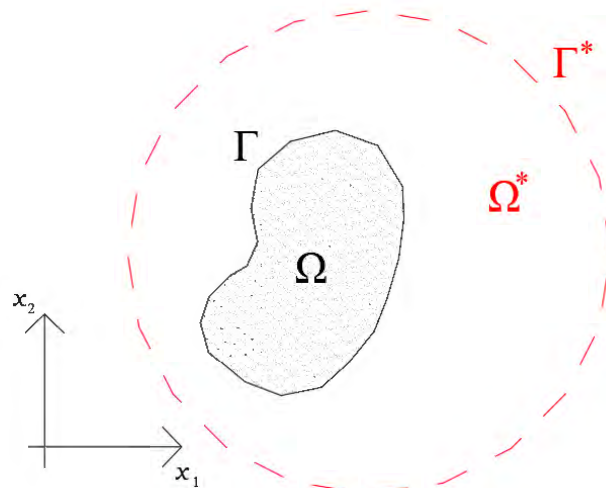
### 3 FORMULAÇÃO BIDIMENSIONAL DO MEC

Existem várias técnicas para se chegar a formulação clássica do Método de Elementos de Contorno para elastostática. Por exemplo, a partir do teorema do trabalho recíproco de Betti, do Método de Resíduos Ponderados, entre outros. Nesse capítulo, apresenta-se a derivação da equação integral de contorno a partir do teorema de Betti. Nesse capítulo apenas abordará conceitos e equações essenciais para compreensão da formulação são trazidos a seguir. Maiores detalhes e abordagens alternativas podem ser observadas nas seguintes obras: Brebbia, Telles e Wrobel (1984), Brebbia e Dominguez (1989), Aliabadi (1991), Katsikadelis (2002) e Scuciato (2007).

#### 3.1 TEOREMA DO TRABALHO RECÍPROCO DE BETTI

A formulação direta do MEC pode ser originada do teorema do trabalho recíproco de Betti para dois estados auto equilibrados (ver Figura 4), onde o estado definido por um domínio  $\Omega$  e seu contorno  $\Gamma$  está contido em outro domínio  $\Omega^*$  e contorno  $\Gamma^*$  de uma região arbitrária.

FIGURA 4 – DOIS ESTADOS AUTO EQUILIBRADOS



FONTE: O Autor

A partir da Equação de Equilíbrio (1), pode-se efetuar sua ponderação com uma função  $u^*$ , que representa o campo de deslocamentos do estado \*, chegando-se na equação,

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = 0, \quad (19)$$

onde as tensões  $\sigma$  e as forças de corpo  $b$  no domínio  $\Omega$  são funções de  $x(x_1, x_2)$ . Realizando-se manipulações algébricas, com uso da regra da derivada de um produto de funções, do teorema da divergência e relações deformação-deslocamento (2), chega-se a expressão que representa o trabalho (tensões multiplicadas pelas deformações específicas),

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega. \quad (20)$$

Substituindo-se as relações tensão-deformação (8) na integral à direita na equação (20), verifica-se que a seguinte relação é válida,

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega. \quad (21)$$

Substituindo-se a equação (21) na equação (20), facilmente se deriva a equação do teorema do trabalho recíproco de Betti,

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega. \quad (22)$$

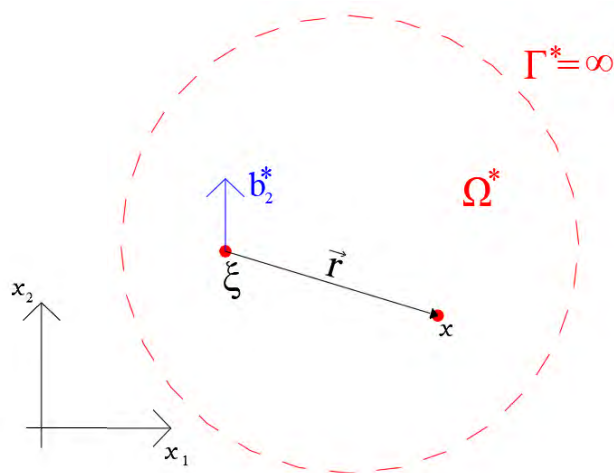
### 3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL DE DESLOCAMENTOS

Para o desenvolvimento da formulação do MEC é usual o emprego de soluções fundamentais, que correspondem às respostas de deslocamento e tensões em um ponto campo  $x$  qualquer de um meio infinito, decorrentes de uma força unitária e concentrada, que representa uma fonte, aplicada num ponto  $\xi$  do mesmo domínio, conforme ilustra a Figura 5. Essa força unitária é matematicamente representada por Delta de Dirac, Katsikadelis (2002),

$$b_i^* = \Delta(\xi, x) e_i, \quad (23)$$

onde  $e_i$  é um versor unitário que indica à direção de aplicação da força unitária. Em um domínio bidimensional, essa força é entendida por unidade de espessura.

FIGURA 5 – DOMÍNIO INFINITO  $\Omega^*$  E PONTOS FONTE E CAMPO



FONTE: O Autor

Sendo o domínio governado pela equação de Navier (11) o campo de deslocamentos  $u^*$  resultante da força aplicada é obtido com a solução da equação,

$$\mu u_{i,jj}^* + \frac{\mu}{1 - 2\nu} u_{j,ji}^* + \Delta(\xi, x) e_i = 0, \quad (24)$$

a solução dessa equação é conhecida como solução fundamental de Kelvin, Brebbia, Telles e Wrobel (1984). Uma vez resolvida, fornece deslocamentos e forças de superfície que podem ser descritas como,

$$u_i^* = U_{ij}(\xi, x) e_j \quad e \quad t_i^* = T_{ij}(\xi, x) e_j, \quad (25)$$

onde  $U_{ij}$  e  $T_{ij}$  são tensores com componentes de deslocamento e de força de superfície, respectivamente, na direção  $j$  no ponto campo  $x$ , resultantes da força unitária aplicada na direção  $i$  no ponto fonte,  $\xi$ .

Existem diferentes técnicas para se derivar as soluções fundamentais, sendo o vetor de Galerkin, Brebbia, Telles e Wrobel (1984), talvez, a mais comum. Em problemas de elasticidade bidimensional as soluções são dadas por,

$$U_{ij}(\xi, x) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \right], \quad (26)$$

$$T_{ij}(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\}. \quad (27)$$

onde  $r = |\xi - x|$  é a distância entre o ponto de colocação  $\xi$  e um ponto campo  $x$  do contorno ou domínio do problema e  $n$  é o vetor normal ao contorno no ponto  $x$ .

Retornando-se à equação integral (22), substituindo  $b_i^*$  dado pela equação (23) e  $u_i^*$  e  $t_i^*$  dados pela equação (25) e aplicando-se as propriedades da função delta de Dirac, obtém-se a equação integral de deslocamentos conhecida como Identidade de Somigliana,

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, x) t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}(\xi, x) u_j(x) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}(\xi, x) b_j(x) d\Omega, \quad (28)$$

nessa equação fica evidenciado que os deslocamentos em qualquer ponto  $\xi$  do domínio do problema estão diretamente relacionados ao campo de deslocamentos e forças de superfície ao longo do contorno  $\Gamma$  e a eventuais forças de domínio.

Por meio da aplicação dos operadores diferenciais das relações tensão-deformação (8) e deformação-deslocamento (2) na equação (28) é possível obter a Identidade de Somigliana para tensões,

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} D_{kij}(\xi, x) t_k(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij}(\xi, x) u_k(x) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij}(\xi, x) b_k(x) d\Omega \quad (29)$$

onde os tensores  $D_{kij}(\xi, x)$  e  $S_{kij}(\xi, x)$  são obtidos a partir de derivadas das soluções fundamentais  $U_{ij}$  e  $T_{ij}$  em relação à direção  $k$  em  $\xi$ , onde,

$$U_{ij,k}(\xi, x) = \frac{-(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)Er} [(3-4\nu) \delta_{ij} r_{,k} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} - \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ik}r_{,j}], \quad (30)$$

$$T_{ij,k}(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r(\eta)}{\partial \eta} [\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + \right. \\ \left. + (1-2\nu)(\delta_{jk} - 2r_{,j}r_{,k})n_{,i} - (1-2\nu)(\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k})n_{,j} + [(1-2\nu)\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}]n_{,k} \right\}, \quad (31)$$

e que, após manipulações algébricas,

$$D_{kij}(\xi, x) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}], \quad (32)$$

$$S_{kij}(\xi, x) = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,i} - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k})] + \right. \\ \left. + 2\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i}r_{,j} + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i) - (1-4\nu)\delta_{ij}n_k \right\}. \quad (33)$$

Assim como para os deslocamentos, as tensões em pontos  $\xi$  do domínio também estão diretamente relacionadas ao campo de deslocamentos e forças de superfície ao longo do contorno  $\Gamma$  e a eventuais forças de domínio. Importante destacar que todos os tensores apresentados,  $U$ ,  $T$ ,  $D$  e  $S$ , dependem exclusivamente de propriedades mecânicas do meio elástico, das localizações dos pontos fonte  $\xi$  e campo  $x$ , bem como da direção  $n$  e suas componentes.

### 3.3 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Viu-se que a equação integral (28) pode ser empregada para obter valores de deslocamento em pontos do domínio  $\Omega$ . Contudo, a aplicação da mesma para avaliar deslocamentos em pontos que pertencem ao contorno  $\Gamma$  requer um cuidado especial, pois envolve a avaliação de integrais impróprias uma vez que a distância  $r$  pode ser nula. Torna-se necessário, portanto, envolvendo um processo de limite.

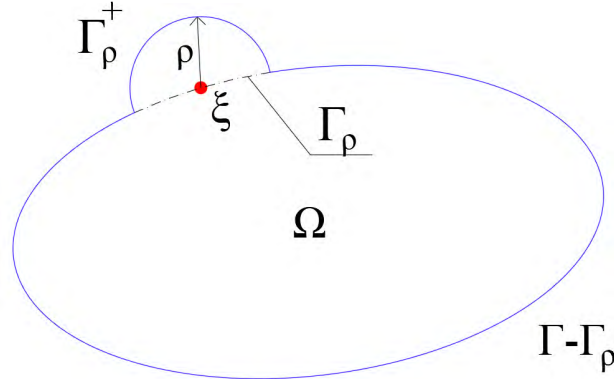
Nesse sentido idealiza-se o domínio  $\Omega$  suplementado por um pequeno domínio circular  $\Omega_\rho$  de raio  $\rho$  centrado no ponto  $\xi$  com contorno  $\Gamma_\rho^+$ , conforme ilustrado na Figura 6. O contorno original  $\Gamma$  é reduzido de  $\Gamma_\rho$  no entorno de  $\xi$ . Observa-se que no limite quando  $\rho \rightarrow 0$  o domínio e o contorno originais são restituídos. No processo limite o contorno aumentado  $\Gamma^A$  é dado por,

$$\Gamma^A = (\Gamma - \Gamma_\rho) + \Gamma_\rho^+, \quad (34)$$

considera-se a aplicação do processo limite à equação (28) sem as forças de domínio, assim,

$$u_i(\xi) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma^A} U_{ij}(\xi, x) t_j(x) d\Gamma - \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma^A} T_{ij}(\xi, x) u_j(x) d\Gamma. \quad (35)$$

FIGURA 6 – DOMÍNIO AUMENTADO DO PROCESSO LIMITE



FONTE: O Autor

A primeira integral no lado direito da Equação (35) é reescrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma^A} U_{ij}(\xi, x) t_j(x) d\Gamma = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\rho} U_{ij}(\xi, x) t_j(x) d\Gamma + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho^+} U_{ij}(\xi, x) t_j(x) d\Gamma, \quad (36)$$

onde os integrandos possuem uma singularidade fraca de ordem  $O(\ln(1/r))$ . Deste modo verifica-se que a integral no primeiro limite no lado direito da equação (36) pode ser calculada numérica e/ou analiticamente, Brebbia e Dominguez (1989). No segundo limite, no lado direito da equação (36), mapeando-se o contorno  $\Gamma_\rho^+$  em coordenadas polares, assim conclui-se que o limite tende a zero, Brebbia e Dominguez (1989).

A segunda integral no lado direito da Equação (35) é reescrita como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma^A} T_{ij}(\xi, x) u_j(x) d\Gamma = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\rho} T_{ij}(\xi, x) u_j(x) d\Gamma + \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho^+} T_{ij}(\xi, x) u_j(x) d\Gamma, \quad (37)$$

onde os integrandos possuem uma singularidade forte de ordem  $O(1/r)$ . A primeira integral do lado direito da equação (36) é imprópria e deve ser calculada no sentido do Valor Principal de Cauchy (VPC), Guiggiani e Casalini (1987). É usual empregar-se técnicas como o Movimento de Corpo Rígido para avaliar indiretamente os resultados dessa integral. Essa técnica, em particular, será apresentada a seguir, assim como o método formal para avaliação direta da integral no sentido do VPC.

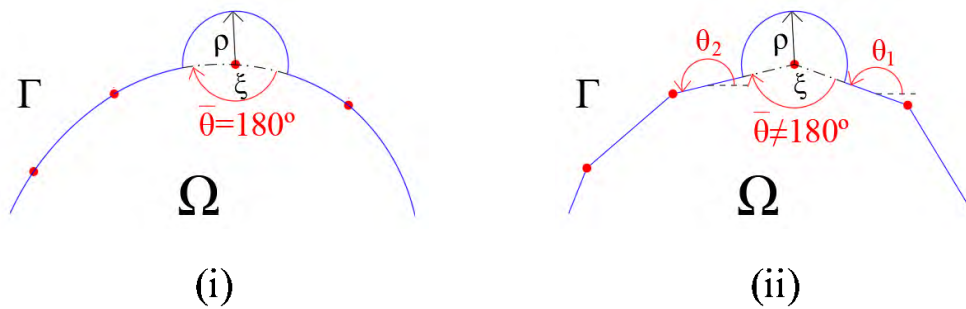
A segunda integral do lado direito da equação (36) é regularizada utilizando-se a expansão do deslocamento  $u_j(\xi)$  em série de Taylor, logo,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho^+} T_{ij}(\xi, x) u_j(x) d\Gamma = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\rho^+} T_{ij}(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi)] d\Gamma \right\} + u_j(\xi) \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho^+} T_{ij}(\xi, x) d\Gamma, \quad (38)$$

onde o primeiro limite no lado direito é nulo devido a continuidade dos deslocamentos, Brebbia, Telles e Wrobel (1984). O segundo limite pode ser calculado analiticamente e resulta no termo  $\alpha_{ij}(\xi) u_j(\xi)$ . Os coeficientes da matriz  $\alpha_{ij}(\xi)$  dependerão do ângulo interno  $\bar{\theta}$  no ponto fonte  $\xi$  no contorno, conforme ilustrado na Figura 7. Se na modelagem geométrica do contorno  $\Gamma$  o ponto  $\xi$  estiver posicionado em um 'contorno suave', isto é, as tangentes ao contorno imediatamente antes e após  $\xi$  são coincidentes (caso i), então  $\alpha_{ij}(\xi) = -\delta_{ij}/2$ . Se o contorno não for suave (caso ii), Hartmann (2004), tem-se,

$$\alpha_{ij}(\xi) = \frac{1}{8\pi(1-\bar{\nu})} \begin{bmatrix} 4(1-\bar{\nu})\bar{\theta} + (\sin 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) & (\cos 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \\ (\sin 2\theta_2 - \cos 2\theta_1) & 4(1-\bar{\nu})\bar{\theta} - (\sin 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \end{bmatrix} \quad (39)$$

FIGURA 7 – POSIÇÃO DE  $\xi$  NO CONTOURNO: (i) PONTOS 'SUAVE' DA GEOMETRIA (ii) PONTO 'NÃO SUAVE' DA GEOMETRIA



FONTE: O Autor

Retornando os resultados dos limites à equação (35), tem-se,

$$C_{ij}(\xi) u_i(\xi) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\xi, x) u_j(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, x) t_j(x) d\Gamma \quad i, j = 1, 2 \quad (40)$$

onde  $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \alpha_{ij}(\xi)$  é uma constante relacionada à geometria do contorno em  $\xi$  e reforçando que a segunda integral deve ser calculada no sentido do Valor Principal de Cauchy.

### 3.4 DISCRETIZAÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA

A solução de problemas complexos com geometrias e carregamentos variados por meio da equação integral de contorno (36) requer o emprego de uma técnica de discretização numérica. O Método dos Elementos de Contorno é a técnica de discretização utilizada e apresentada nesta seção.

Considere o contorno  $\Gamma$  de um domínio elástico, subdividido em  $N_E$  segmentos onde cada segmento é entendido como um elemento do contorno. Cada elemento modela um segmento do contorno e diferentes funções de forma podem ser empregadas para essa finalidade. Assim, pode-se ter elementos de geometria reta, assim como elementos de geometria curva na modelagem do contorno  $\Gamma$ . Ao longo desses segmentos ou elementos de contorno pode-se assumir diferentes aproximações para modelar o comportamento dos deslocamentos e das forças de superfície. É usual adotar funções de interpolação polinomiais para a representação dessas grandezas. Neste trabalho funções polinomiais  $N$  são adotadas para representar a geometria dos elementos de contorno e  $N'$  para representar a variação dos deslocamentos e forças de superfície nos elementos de contorno, conforme descrevem as expressões a seguir,

$$x_i = \sum_{c=1}^{N_G} x_i^c N_c, \quad (41)$$

$$u_i = \sum_{c=1}^{N_F} u_i^c N'_c \quad e \quad t_i = \sum_{c=1}^{N_F} t_i^c N'_c, \quad (42)$$

onde o número de nós geométricos  $N_G$  e o número de nós funcionais  $N_F$  definem as funções de interpolação empregadas em cada caso,  $x_i^c$  são as coordenadas dos nós geométricos e  $u_i^c$  e  $t_i^c$  são os valores nodais de deslocamento e força de superfície do elemento.

A equação integral de contorno discretizada fica, portanto,

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{c=1}^{N_F} \int_{\Gamma_n} T_{ij}(\xi, x) N'_c d\Gamma u_j^{nc} = \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{c=1}^{N_F} \int_{\Gamma_n} U_{ij}(\xi, x) N'_c d\Gamma t_j^{nc} \quad (43)$$

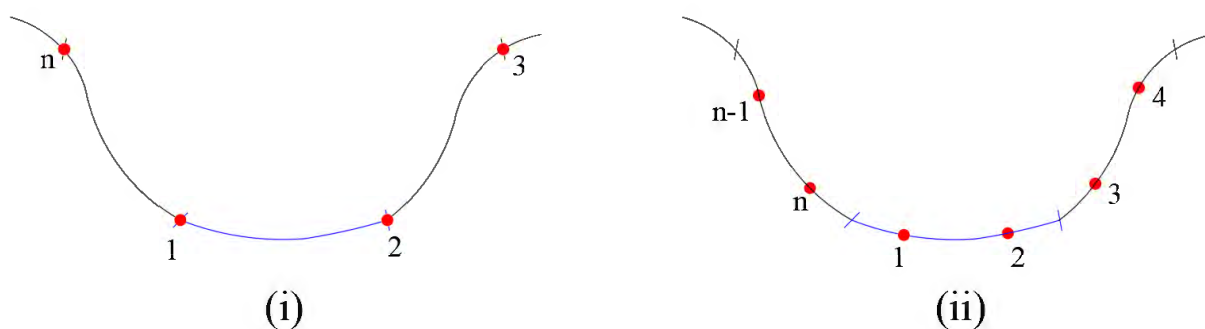


onde  $\Gamma = \sum_{n=1}^{N_E} \Gamma_n$  e o superíndice  $n$  em  $u_i^{nc}$  e  $t_i^{nc}$  indica o elemento ao qual o nó funcional pertence. Essa equação ainda pode ser escrita de maneira mais concisa como,

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{c=1}^{N_F} H_{ij}^{nc}(\xi, x)u_j^{nc} = \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{c=1}^{N_F} G_{ij}^{mc}(\xi, x)t_j^{nc} \quad (44)$$

Como mencionado a discretização pode ser efetuada com diferentes tipos de elementos. A Figura 8 ilustra esquematicamente a discretização de um trecho de contorno com duas estratégias: (i) elementos contínuos e (ii) elementos descontínuos. No primeiro caso, tem-se a presença de nós funcionais nos extremos dos elementos de tal forma que o nó pertence a dois elementos vizinhos. No segundo caso, o nó funcional está deslocado para o interior do elemento e o mesmo pertence exclusivamente a um elemento. Na prática, pode-se adotar uma discretização mista, com elementos contínuos, descontínuos e mesmo com elementos contínuos de um lado e descontínuo de outro.

FIGURA 8 – (i) DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTOS CONTÍNUOS; (ii) DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTOS DESCONTÍNUOS



FONTE: O Autor

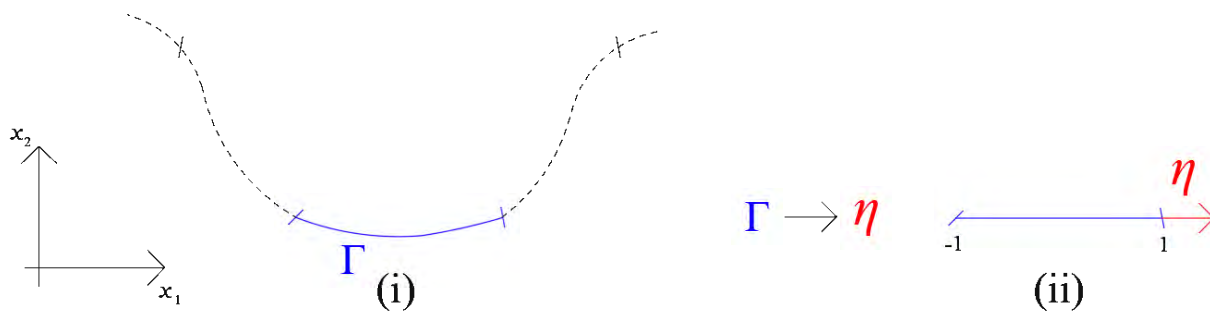
Os termos  $H_{ij}^{nc}(\xi, x)$  e  $G_{ij}^{mc}(\xi, x)$  na equação (44) são resultantes do cálculo das seguintes integrais,

$$H_{ij}^{nc}(\xi, x) = \int_{\Gamma_n} T_{ij}(\xi, x) N_c' d\Gamma \quad (45)$$

$$G_{ij}^{mc}(\xi, x) = \int_{\Gamma_n} U_{ij}(\xi, x) N_c' d\Gamma \quad (46)$$

O cálculo numérico das integrais nas expressões (45) e (46) é facilmente compreendido com o emprego de um mapeamento de coordenadas do sistema global  $\Gamma$  definido no espaço bidimensional  $(x_1, x_2)$  para um sistema local  $\eta$ , conforme ilustrado na Figura 9.

FIGURA 9 – TRANSFORMAÇÃO DE  $\Gamma$  PARA  $\eta$



FONTE: O Autor

As funções de forma e de interpolação dos elementos são definidas nesse novo sistema local  $\eta$  como  $N_c(\eta)$  e  $N'_c(\eta)$ , respectivamente. Como resultado dessa transformação de coordenadas, Kreyszig (1984), surge o Jacobiano dado pela expressão,

$$J(\eta) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2}, \quad (47)$$

lembrando que  $x_1$  e  $x_2$  são dados em função de  $\eta$  conforme a equação (41). Assim, as equações (45) e (46) podem ser reescritas como,

$$H_{ij}^{nc} = \int_{-1}^{+1} T_{ij}(\xi, x(\eta)) N'_c(\eta) J(\eta) d\eta, \quad (48)$$

$$G_{ij}^{nc} = \int_{-1}^{+1} U_{ij}(\xi, x(\eta)) N'_c(\eta) J(\eta) d\eta. \quad (49)$$

Ao se posicionar a fonte (ou carga unitária) em um ponto de colocação do contorno para integrar cada elemento do contorno, observa-se que, exceto pelos elementos que contém o ponto de colocação, as integrações não são impróprias e as integrais em (48) e (49) podem ser calculadas por quadratura de Gauss, como será apresentado no próximo capítulo. No caso das integrais impróprias, tratamentos adequados, analíticos e/ou numéricos são

necessários. Os mesmos também serão abordados nos próximos capítulos em detalhes. Assim, para cada ponto de colocação a carga unitária é aplicada uma vez em cada direção ( $x_1$  e  $x_2$ ), formando-se duas equações que relacionam os deslocamentos horizontal e vertical no ponto de colocação com os deslocamentos e forças de superfície em todos os demais nós funcionais do contorno. Nessas duas equações estão presentes as submatrizes (2x2)  $H_{ij}^{nc}$  e  $G_{ij}^{nc}$ . Com o posicionamento das cargas unitárias em todos os nós funcionais do modelo discretizado, tem-se  $2N_F$  equações que formam o clássico sistema de equações matricial do MEC,

$$Hu = Gt \quad (50)$$

onde as submatrizes diagonais (2x2) de  $H$  contém o termo livre (ver equação (44)),  $H$  possui dimensão  $(2N_F \times 2N_F)$ ,  $u$  deve ser contínuo em cada nó funcional do modelo e possui dimensão  $(2N_F)$ ,  $t$  possui dimensão  $4N_F$  possibilitando que haja descontinuidade na força de superfície em cada nó funcional e  $G$  possui dimensão  $(2N_F \times 4N_F)$ . A ideia de descontinuidade das forças de superfície é apresentada na próxima seção onde as possíveis condições de contorno e a solução do sistema são descritas.

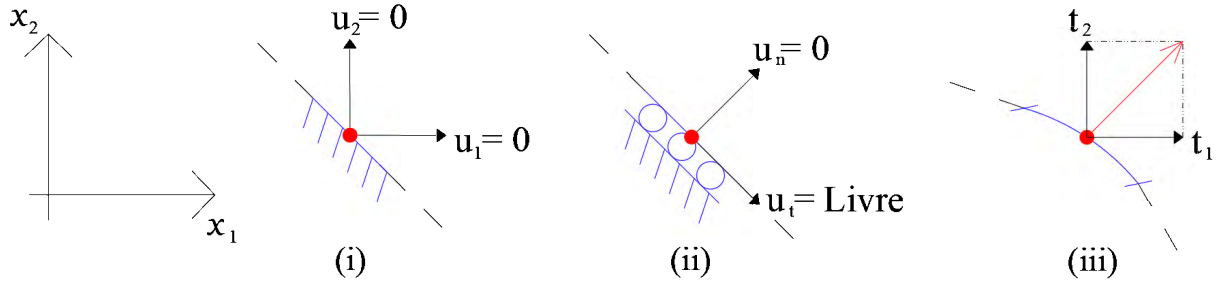
### 3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO E SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Observou-se que a montagem das matrizes do sistema de equações (50) é definida essencialmente pela geometria do problema e pelas características do meio elástico. Mas para a solução do sistema é necessário impor as condições de contorno, que no problema de elasticidade são constituídas por restrições de movimento do modelo e forças de superfície conhecidas.

Na Figura 10 são apresentadas algumas possíveis condições de contorno: (i) engastamento onde há restrição de movimento em qualquer direção, ou seja, os deslocamentos nas direções  $x_1$  e  $x_2$  são nulos e as forças de superfície são incógnitas nessas duas direções; (ii) apoio com liberdade de movimento na direção tangente ao contorno, ou seja, na direção tangente a força de superfície é nula enquanto o deslocamento é incógnito e na direção normal ao contorno a força de superfície é uma reação incógnita enquanto o deslocamento é sabidamente nulo; e (iii) componentes da força de superfícies conhecida nas duas direções.

Portanto, com base no conhecimento das variáveis prescritas e incógnitas em cada nó funcional do contorno, é possível reorganizar o sistema de equações (50) de tal forma que,

FIGURA 10 – POSSÍVEIS CONDIÇÕES DE CONTORNO



FONTE: O Autor

$$Ax = y \quad (51)$$

onde  $x$  é um vetor com dimensão  $2N_F$  com todas as incógnitas nos nós funcionais do modelo,  $A$  é uma matriz de dimensão  $(2N_F \times 2N_F)$  contendo colunas de coeficientes das matrizes  $H$  e  $G$  correspondentes às incógnitas e  $y$  é um vetor independente de dimensão  $2N_F$  contendo o produto de uma matriz de colunas de coeficientes de  $H$  e  $G$  multiplicadas pelos valores conhecidos de deslocamento e força de superfície nos nós funcionais do contorno.

Após a solução do sistema de equações faz-se a reordenação dos resultados do vetor  $x$  e dos valores prescritos de contorno nos vetores de deslocamento  $u$  e força de superfície  $t$ .

### 3.6 CÁLCULO NUMÉRICO DE DESLOCAMENTOS E TENSÕES NO DOMÍNIO

Com os valores dos deslocamentos e forças de superfície do contorno, pode-se encontrar os valores dos deslocamentos e tensões nos pontos internos no domínio  $\Omega$  por meios das equações (28) e (29) discretizadas. Novamente, por simplicidade, na ausência de forças de domínio, as equações discretizadas para o cálculo dos deslocamentos e tensões são, respectivamente,

$$u_j(\xi) = \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{c=1}^{N_F} \int_{\Gamma_n} U_{ij}^{nc}(\xi, x) N'_c d\Gamma t_j^{nc} - \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{c=1}^{N_F} \int_{\Gamma_n} T_{ij}^{nc}(\xi, x) N'_c d\Gamma u_j^{nc} \quad (52)$$

$$\sigma_{ij}(\xi) = \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{c=1}^{N_F} \int_{\Gamma_n} D_{kij}^{nc}(\xi, x) N'_c d\Gamma t_k^{nc} - \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{c=1}^{N_F} \int_{\Gamma_n} S_{kij}^{nc}(\xi, x) N'_c d\Gamma u_k^{nc} \quad (53)$$

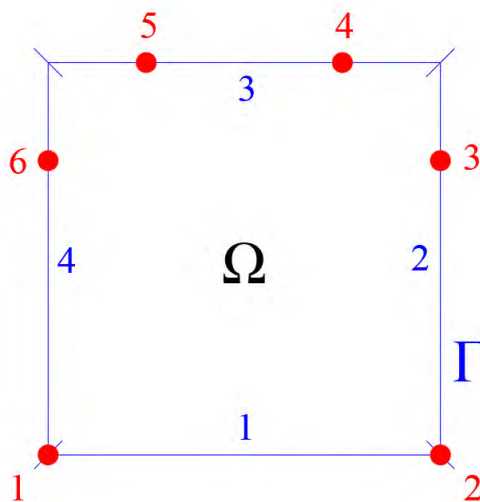
por fim, nota-se que sendo o ponto (fonte) localizado no interior do domínio a distância  $r$  entre o ponto campo  $x$  situado no contorno e a fonte  $\xi$  sempre será maior que zero e, conseqüentemente, não haverá integrações impróprias nas equações (52) e (53), podendo ser calculadas numericamente por simples quadratura Gaussiana.

#### 4 MODELAGEM COM ELEMENTOS LINEARES RETOS

Nesse capítulo apresenta-se a modelagem bidimensional de um meio elástico linear pelo Método dos Elementos Contorno com o emprego de elementos lineares de geometria reta. Diversos aspectos que dizem respeito à modelagem geométrica, ao cálculo para a formação do sistema de equações e à consideração das condições de contorno são detalhados a seguir. Embora seja um assunto relativamente comum na literatura clássica do MEC, buscou-se nesse trabalho trazer uma contribuição para o meio acadêmico no que diz respeito ao cálculo das integrais impróprias das matrizes  $G$  e  $H$  para uma família completa de elementos lineares contínuos e descontínuos. O resultado deste desenvolvimento é sintetizado com uma tabela de expressões que facilitam a implementação desses elementos em códigos computacionais com a formulação clássica do MEC para problemas de elasticidade.

Na Figura 11 apresenta-se um exemplo de domínio quadrado modelado com 4 elementos lineares distintos do ponto de vista da continuidade da grandeza deslocamento no extremo do elemento. A presença do nó funcional no extremo do elemento garante que haja a continuidade de deslocamento entre elementos vizinhos. Essa continuidade é observada entre os elementos 1 e 2 e entre 4 e 1 na malha da Figura 11. Quando o nó funcional está posicionado antes (ou além) da extremidade não há garantia de que o deslocamento interpolado no extremo comum entre dois elementos seja igual. A descontinuidade é observada entre os elementos 2 e 3 e entre 3 e 4. Assim, um elemento como o primeiro dessa ilustração é dito contínuo, como o segundo é dito contínuo-descontínuo, como o terceiro é dito descontínuo e como o quarto é dito descontínuo-contínuo.

FIGURA 11 – FAMÍLIA DE ELEMENTOS LINEARES EM UMA MALHA DE DISCRETIZAÇÃO 2D



FONTE: O Autor

### 4.1 FUNÇÕES DE FORMA E DE INTERPOLAÇÃO LINEARES

Conforme visto no capítulo anterior o cálculo das integrais que formam os coeficientes das matrizes  $H$  e  $G$  é comumente realizados utilizando-se um sistema local de coordenadas (ver eqs (48) e (49)). De forma geral, em um domínio  $\eta$  definido por  $-1 \leq \eta \leq +1$ , a seguintes funções de interpolação lineares em  $\eta$  podem representar a variação linear do deslocamento  $u$  e da força de superfície  $t$  no elemento para qualquer uma das condições de continuidade apresentadas,

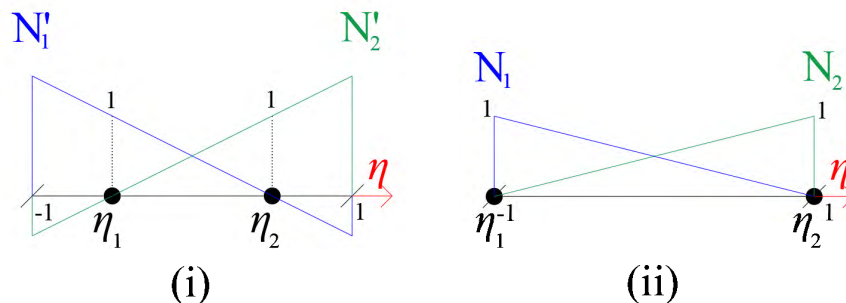
$$\begin{cases} N'_1(\eta) = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} (\eta_2 - \eta) \\ N'_2(\eta) = \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} (-\eta_1 + \eta) \end{cases} \quad (54)$$

onde  $\eta_1$  e  $\eta_2$  representam a posição do primeiro e do segundo nó funcional do elemento, no sistema local  $\eta$ , respectivamente. Se os nós funcionais estão posicionados nos extremos, então  $\eta_1 = -1$  e  $\eta_2 = +1$ , as funções de interpolação  $N'_i(\eta)$  representam o elemento contínuo, e são equivalentes às funções de forma  $N_i(\eta)$ , que são utilizadas para representar a geometria linear do elemento,

$$\begin{cases} N_1(\eta) = \frac{1}{2} (1 - \eta) \\ N_2(\eta) = \frac{1}{2} (1 + \eta) \end{cases} \quad (55)$$

As funções de interpolação e de forma das equações (54) e (55) são ilustradas na Figura 12 (i) e (ii), respectivamente.

FIGURA 12 – (i) FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO E (ii) FUNÇÕES DE FORMA



FONTE: O Autor

Portanto, para a representação linear da geometria do elemento e dos deslocamentos e forças de superfície da família de elementos apresentada, basta inserir nas equações (41) e (42) as expressões (54) e (55),

$$x_i = x_i^1 N_1(\eta) + x_i^2 N_2(\eta) \quad (56)$$

$$u_i(x) = u_i^1 N_1'(\eta) + u_i^2 N_2'(\eta) \quad e \quad t_i(x) = t_i^1 N_1'(\eta) + t_i^2 N_2'(\eta) \quad (57)$$

Nas equações (48) e (49) nota-se a presença do Jacobiano da transformação do sistema global  $\Gamma$  para o sistema local  $\eta$ , que é dado pela equação (47). Após a substituição das derivadas das equações (56) na equação (47), calcula-se o valor do Jacobiano em qualquer ponto  $\eta$  mapeado no elemento. Em particular, para elementos de geometria reta, resulta um valor constante e igual a metade do comprimento  $L$  do elemento,

$$J = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(x_1^2 - x_1^1)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(x_2^2 - x_2^1)\right]^2} = \frac{1}{2}L \quad (58)$$

## 4.2 MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

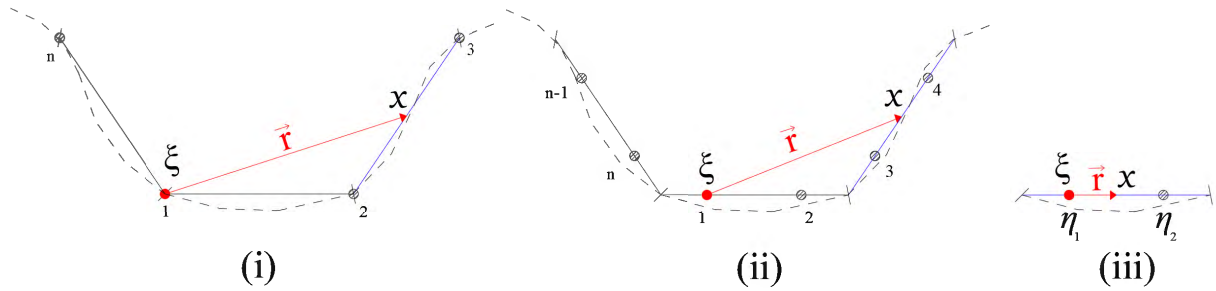
Na formulação clássica do MEC cada equação do sistema é formada a partir da colocação da carga concentrada e unitária em um nó funcional da malha de contorno (fonte de coordenada global  $\xi$ ) e integração de todos os elementos do contorno. Para cada posicionamento da fonte em um modelo bidimensional tem-se duas direções de aplicação da carga unitária e, conseqüentemente, duas equações são formadas. Como visto no Capítulo 3, a integração depende da distância  $r$  entre pontos campo  $x$  do elemento integrado e da fonte  $\xi$ . Na Figura 13 parte desse processo é ilustrada em um modelo bidimensional com elementos lineares contínuos e descontínuos e a “varredura” de integração.

No decorrer das integrações para formação de cada equação, haverá a presença de singularidades fracas ( $O(\ln(r))$ ) e fortes ( $O(1/r)$ ) quando a fonte se encontra no elemento sendo integrado. Essa situação é evidenciada na Figura 13 (iii), onde verifica-se a possibilidade da distância  $r$  ser nula na integração. O cálculo dessas integrais impróprias é abordado a seguir.

A Figura 14 mostra um passo genérico da integração de um elemento de contorno, onde são destacadas a distância  $r$  e suas componentes  $r_1$  e  $r_2$ , as coordenadas geométricas do elemento  $x_i^1$  e  $x_i^2$  e a direção normal  $n$  em um ponto  $x$  do elemento e suas componentes  $n_1$  e  $n_2$ .

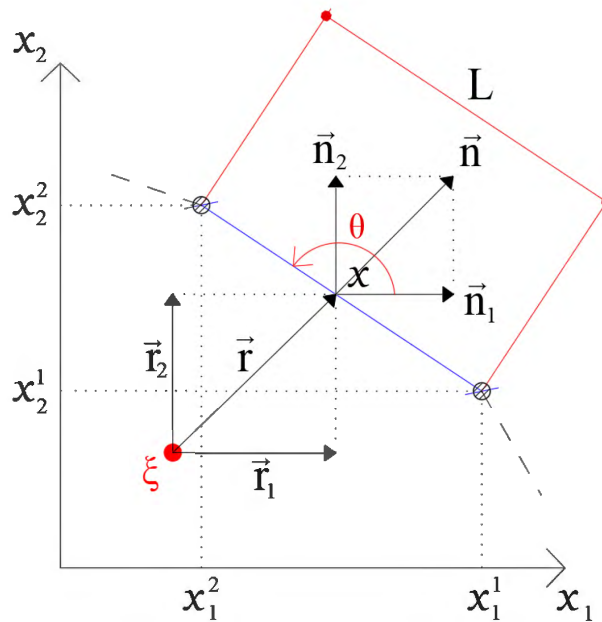


FIGURA 13 – (i) DISCRETIZAÇÃO DO ELEMENTO CONTÍNUO; (ii) DISCRETIZAÇÃO DO ELEMENTO DESCONTÍNUO (iii) PONTO DE COLOCAÇÃO NO ELEMENTO INTEGRADO]



FONTE: O Autor

FIGURA 14 – DISTÂNCIAS E NORMAIS NO ELEMENTO



FONTE: O Autor

As componentes  $r_1$  e  $r_2$ , a distância  $r$  e as derivadas de  $r$  em relação às direções  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente  $r_{,1}$  e  $r_{,2}$  são dadas por,

$$\begin{cases} r_1 = x_1 - x_1^\xi \\ r_2 = x_2 - x_2^\xi \\ r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \\ r_{,1} = \frac{r_1}{r} \\ r_{,2} = \frac{r_2}{r} \end{cases} \quad (59)$$

As componentes  $n_1$  e  $n_2$  são definidas por,

$$n_1 = \text{sen } \theta = \frac{x_2^2 - x_2^1}{L} \quad (60)$$

$$n_2 = \text{cos } \theta = \frac{x_1^2 - x_1^1}{L} \quad (61)$$

sendo  $\theta$  o ângulo indicado na Figura 13, formado entre o eixo do sistema local  $\eta$  e o eixo  $x_1$ . A derivada de  $r$  em relação à direção normal em  $x$  é dada por,

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,1}n_1 + r_{,2}n_2 \quad (62)$$

Para ilustrar a montagem do sistema de equações, considere o modelo apresentado na Figura 11. Tomando a equação (44) por base e posicionando o ponto fonte  $\xi$  no nó funcional 1 com a força unitária na direção  $x_1$ , escreve-se a primeira equação,

$$\begin{aligned} C_{11}u_1^{11} + C_{12}u_2^{11} + & \left( H_{11}^{11}u_1^{11} + H_{12}^{11}u_2^{11} + H_{11}^{12}u_1^{12} + H_{12}^{12}u_2^{12} \right) + \\ & + \left( H_{11}^{21}u_1^{21} + H_{12}^{21}u_2^{21} + H_{11}^{22}u_1^{22} + H_{12}^{22}u_2^{22} \right) + \\ & + \left( H_{11}^{31}u_1^{31} + H_{12}^{31}u_2^{31} + H_{11}^{32}u_1^{32} + H_{12}^{32}u_2^{32} \right) + \\ & + \left( H_{11}^{41}u_1^{41} + H_{12}^{41}u_2^{41} + H_{11}^{42}u_1^{42} + H_{12}^{42}u_2^{42} \right) = \\ & \left( G_{11}^{11}t_1^{11} + G_{12}^{11}t_2^{11} + G_{11}^{12}t_1^{12} + G_{12}^{12}t_2^{12} \right) + \\ & + \left( G_{11}^{21}t_1^{21} + G_{12}^{21}t_2^{21} + G_{11}^{22}t_1^{22} + G_{12}^{22}t_2^{22} \right) + \\ & + \left( G_{11}^{31}t_1^{31} + G_{12}^{31}t_2^{31} + G_{11}^{32}t_1^{32} + G_{12}^{32}t_2^{32} \right) + \\ & + \left( G_{11}^{41}t_1^{41} + G_{12}^{41}t_2^{41} + G_{11}^{42}t_1^{42} + G_{12}^{42}t_2^{42} \right), \end{aligned} \quad (63)$$

onde em vermelho, verde e azul são representados os coeficientes associados às integrações do primeiro e quarto elementos, aos quais o ponto fonte  $\xi = 1$  pertence, e que precisam ser avaliados como integrais impróprias, em princípio. Os demais coeficientes são avaliados como integrais regulares.

A condição de continuidade dos deslocamentos impõe aos nós 1 e 2 as seguintes igualdades:  $u_1^{11} = u_1^{42}$ ,  $u_2^{11} = u_2^{42}$ ,  $u_1^{12} = u_1^{21}$  e  $u_2^{12} = u_2^{21}$ , de tal forma que as 16 componentes de deslocamento desse exemplo podem ser reduzidas a 12, resultando em sobreposição de coeficientes  $H$ , destacados em vermelho verde.

Como as forças de superfície podem ser descontínuas entre elementos, mantém-se as 16 componentes dessa grandeza, sem que haja sobreposição de coeficientes na matriz  $G$ .

Seguindo com o mesmo exemplo, apresenta-se a seguir a equação montada quando o ponto fonte  $\xi$  está posicionado no nó funcional 3, com a força unitária na direção  $x_2$ ,

$$\begin{aligned}
C_{21}u_1^{21} + C_{22}u_2^{21} + (H_{21}^{11}u_1^{11} + H_{22}^{11}u_2^{11} + H_{21}^{12}u_1^{12} + H_{22}^{12}u_2^{12}) + \\
+ (H_{21}^{21}u_1^{21} + H_{22}^{21}u_2^{21} + H_{21}^{22}u_1^{22} + H_{22}^{22}u_2^{22}) + \\
+ (H_{21}^{31}u_1^{31} + H_{22}^{31}u_2^{31} + H_{21}^{32}u_1^{32} + H_{22}^{32}u_2^{32}) + \\
+ (H_{21}^{41}u_1^{41} + H_{22}^{41}u_2^{41} + H_{21}^{42}u_1^{42} + H_{22}^{42}u_2^{42}) = \\
+ (G_{21}^{11}t_1^{11} + G_{22}^{11}t_2^{11} + G_{21}^{12}t_1^{12} + G_{22}^{12}t_2^{12}) + \\
+ (G_{21}^{21}t_1^{21} + G_{22}^{21}t_2^{21} + G_{21}^{22}t_1^{22} + G_{22}^{22}t_2^{22}) + \\
+ (G_{21}^{31}t_1^{31} + G_{22}^{31}t_2^{31} + G_{21}^{32}t_1^{32} + G_{22}^{32}t_2^{32}) + \\
+ (G_{21}^{41}t_1^{41} + G_{22}^{41}t_2^{41} + G_{21}^{42}t_1^{42} + G_{22}^{42}t_2^{42}), \tag{64}
\end{aligned}$$

onde são representados em vermelho e azul os coeficientes associados às integrações do terceiro elemento, que contém o ponto fonte  $\xi = 3$ . Novamente, o cálculo desses coeficientes será abordado com o devido cuidado, ao passo que os demais coeficientes são avaliados como integrais regulares. Como o nó 3 é descontínuo, não há superposição de coeficientes na matriz  $H$  associado ao mesmo.

### 4.3 INTEGRAÇÕES NUMÉRICAS REGULARES

Nas integrações em que o ponto fonte não está localizado no elemento, não ocorrem singularidades nas expressões dos integrandos que contém  $U_{ij}$  (eq. (30)) e  $T_{ij}$  (eq. (31)).

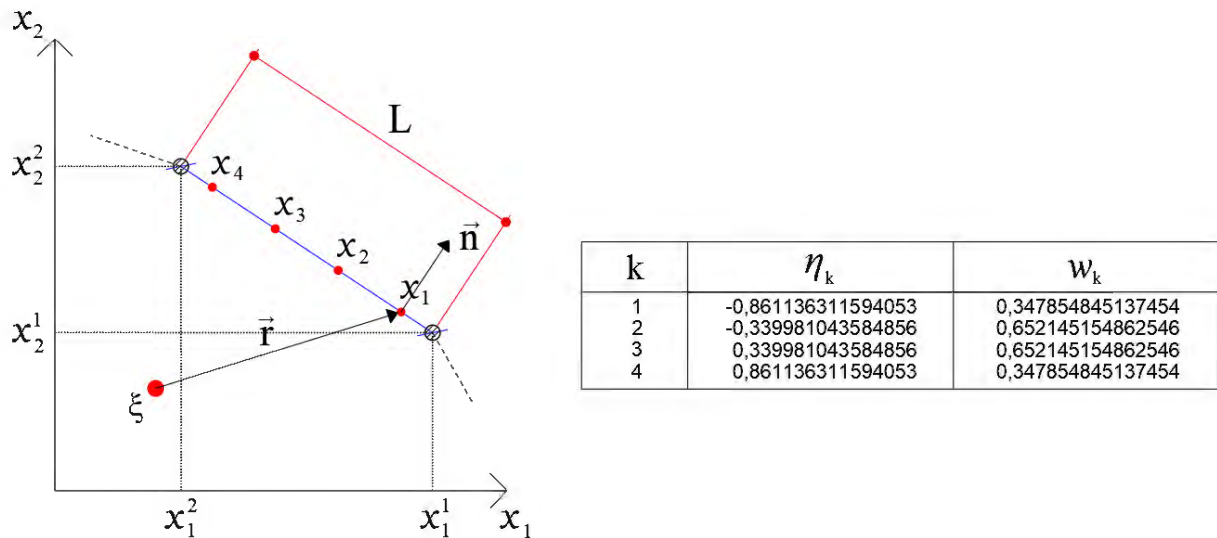
As integrais podem ser calculadas por métodos numéricos. Essa abordagem é normalmente utilizada quando não há solução analítica ou quando a solução é tão complicada que é mais eficiente efetuá-la numericamente. Um dos métodos de integração numérica mais conhecidos é a quadratura de Gauss, que se baseia na aproximação da função a ser integrada por um polinômio, que por sua vez pode ser integrado com exatidão por meio de uma soma finita de ponderações da função em coordenadas conhecidas. Em um intervalo entre  $-1$  e  $+1$  essa aproximação pode ser escrita como,

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{k=1}^{NPG} f(\eta_k) w_k + Erro \tag{65}$$

onde  $f(\eta)$  é a função a ser integrada;  $NPG$  é o número de pontos de Gauss e  $w$  é o peso associado a cada ponto. Quanto maior o número de pontos, maior a ordem do polinômio que pode ser integrado com exatidão e menor é o erro da integração.

Na Figura 15 é mostrado um ponto fonte  $\xi$  a uma certa distância  $r$  (variável) de um elemento de comprimento  $L$  sendo integrado com quatro pontos de Gauss. Nessa mesma ilustração, as coordenadas locais dos pontos de Gauss e os respectivos pesos são tabelados. No Anexo (A) é apresentada uma tabela com variável número de pontos (Brebbia e Dominguez (1989)).

FIGURA 15 – EXEMPLO DE INTEGRAÇÃO COM QUATRO PONTOS DE GAUSS



FONTE: O Autor

Para simplificar a apresentação das integrais dos coeficientes  $H$  e  $G$ , quatro constantes,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  foram introduzidas, assim,

$$A = \frac{(3 - 4\nu)}{8\pi\mu(1 - \nu)}, \quad B = \frac{1}{8\pi\mu(1 - \nu)}, \quad C = \frac{-1}{4\pi(1 - \nu)} \quad e \quad D = (1 - 2\nu), \quad (66)$$

$$U_{ij}(\xi, x) = A \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + B r_{,i} r_{,j}, \quad (67)$$

$$T_{ij}(\xi, x) = C \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} (D \delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j}) + D (n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\}. \quad (68)$$

As equações (48) e (49) estão no formato para cálculo aproximado por quadratura de Gauss com coordenadas  $\eta_k$  e pesos  $w_k$  definidos no intervalo de  $-1$  a  $+1$ . Logo,

$$G_{ij}^{nc} = \sum_{k=1}^{NPG} N'_c(\eta_k) U_{ij}(\xi, x(\eta_k)) \frac{L}{2} w_k \quad (69)$$

$$H_{ij}^{nc} = \sum_{k=1}^{NPG} N'_c(\eta_k) T_{ij}(\xi, x(\eta_k)) \frac{L}{2} w_k \quad (70)$$

No cálculo das integrais (48) e (49) o número de pontos de Gauss define o número de vezes que a distância  $r$  e demais funções são avaliadas e está diretamente associado ao custo computacional para montagem do sistema de equações.

#### 4.4 INTEGRAÇÕES COM O PONTO FONTE NO ELEMENTO INTEGRADO

As integrais com singularidade têm um tratamento especial e distinto tanto para a singularidade fraca presente em coeficientes de  $G$  como para a singularidade forte em coeficientes de  $H$ .

As singularidades fracas são mais facilmente integradas por métodos numéricos ou mesmo calculadas analiticamente em casos particulares. Por outro lado, as integrais com singularidade forte exigem mais atenção, podendo ser resolvidas por artifícios como o Movimento de Corpo Rígido ou por técnicas diretas de integração no sentido do Valor Principal de Cauchy.

A partir do modelo da Figura 11 e utilização da equação (44) com a colocação da fonte em cada nó funcional da malha, monta-se os sistemas de equações com todos os coeficientes  $H_{ij}^{nc}$  e  $G_{ij}^{nc}$  conforme,

$$\begin{array}{c}
 \xi = 1 \\
 \xi = 2 \\
 \xi = 3 \\
 \xi = 4 \\
 \xi = 5 \\
 \xi = 6
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 u_1^{11} = u_1^{42} \quad u_2^{11} = u_2^{42} \quad u_1^{12} = u_1^{21} \quad u_2^{12} = u_2^{21} \quad u_1^{22} \quad u_2^{22} \quad u_1^{31} \quad u_2^{31} \quad u_1^{32} \quad u_2^{32} \quad u_1^{41} \quad u_2^{41} \\
 \left\{ \begin{array}{cccccccccccc}
 H_{11}^{11} + H_{11}^{42} & H_{12}^{11} + H_{12}^{42} & H_{11}^{12} + H_{11}^{21} & H_{12}^{12} + H_{12}^{21} & H_{11}^{22} & H_{12}^{22} & H_{11}^{31} & H_{12}^{31} & H_{11}^{32} & H_{12}^{32} & H_{11}^{41} & H_{12}^{41} \\
 H_{21}^{11} + H_{21}^{42} & H_{22}^{11} + H_{22}^{42} & H_{21}^{12} + H_{21}^{21} & H_{22}^{12} + H_{22}^{21} & H_{21}^{22} & H_{22}^{22} & H_{21}^{31} & H_{22}^{31} & H_{21}^{32} & H_{22}^{32} & H_{21}^{41} & H_{22}^{41} \\
 H_{11}^{11} + H_{11}^{42} & H_{12}^{11} + H_{12}^{42} & H_{11}^{12} + H_{11}^{21} & H_{12}^{12} + H_{12}^{21} & H_{11}^{22} & H_{12}^{22} & H_{11}^{31} & H_{12}^{31} & H_{11}^{32} & H_{12}^{32} & H_{11}^{41} & H_{12}^{41} \\
 H_{21}^{11} + H_{21}^{42} & H_{22}^{11} + H_{22}^{42} & H_{21}^{12} + H_{21}^{21} & H_{22}^{12} + H_{22}^{21} & H_{21}^{22} & H_{22}^{22} & H_{21}^{31} & H_{22}^{31} & H_{21}^{32} & H_{22}^{32} & H_{21}^{41} & H_{22}^{41} \\
 H_{11}^{11} + H_{11}^{42} & H_{12}^{11} + H_{12}^{42} & H_{11}^{12} + H_{11}^{21} & H_{12}^{12} + H_{12}^{21} & H_{11}^{22} & H_{12}^{22} & H_{11}^{31} & H_{12}^{31} & H_{11}^{32} & H_{12}^{32} & H_{11}^{41} & H_{12}^{41} \\
 H_{21}^{11} + H_{21}^{42} & H_{22}^{11} + H_{22}^{42} & H_{21}^{12} + H_{21}^{21} & H_{22}^{12} + H_{22}^{21} & H_{21}^{22} & H_{22}^{22} & H_{21}^{31} & H_{22}^{31} & H_{21}^{32} & H_{22}^{32} & H_{21}^{41} & H_{22}^{41} \\
 H_{11}^{11} + H_{11}^{42} & H_{12}^{11} + H_{12}^{42} & H_{11}^{12} + H_{11}^{21} & H_{12}^{12} + H_{12}^{21} & H_{11}^{22} & H_{12}^{22} & H_{11}^{31} & H_{12}^{31} & H_{11}^{32} & H_{12}^{32} & H_{11}^{41} & H_{12}^{41} \\
 H_{21}^{11} + H_{21}^{42} & H_{22}^{11} + H_{22}^{42} & H_{21}^{12} + H_{21}^{21} & H_{22}^{12} + H_{22}^{21} & H_{21}^{22} & H_{22}^{22} & H_{21}^{31} & H_{22}^{31} & H_{21}^{32} & H_{22}^{32} & H_{21}^{41} & H_{22}^{41} \\
 H_{11}^{11} + H_{11}^{42} & H_{12}^{11} + H_{12}^{42} & H_{11}^{12} + H_{11}^{21} & H_{12}^{12} + H_{12}^{21} & H_{11}^{22} & H_{12}^{22} & H_{11}^{31} & H_{12}^{31} & H_{11}^{32} & H_{12}^{32} & H_{11}^{41} & H_{12}^{41} \\
 H_{21}^{11} + H_{21}^{42} & H_{22}^{11} + H_{22}^{42} & H_{21}^{12} + H_{21}^{21} & H_{22}^{12} + H_{22}^{21} & H_{21}^{22} & H_{22}^{22} & H_{21}^{31} & H_{22}^{31} & H_{21}^{32} & H_{22}^{32} & H_{21}^{41} & H_{22}^{41}
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{c}
 U_1^1 \\
 U_2^1 \\
 U_1^2 \\
 U_2^2 \\
 U_1^3 \\
 U_2^3 \\
 U_1^4 \\
 U_2^4 \\
 U_1^5 \\
 U_2^5 \\
 U_1^6 \\
 U_2^6
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (71)$$



onde  $U_i^j$  são as componentes de deslocamento em cada nó funcional  $j$ , os coeficientes  $H$  destacados em vermelho são aqueles resultantes de integrais com singularidade forte, os destacados em verde são demonstrados a seguir como não singulares e os coeficientes  $G$  destacados em azul são aqueles resultantes de integrais com singularidade fraca. Nota-se com clareza a sobreposição dos coeficientes em  $H$  associados à componentes de deslocamento em nós contínuos (1 e 2, nesse exemplo).

#### 4.4.1 COEFICIENTES $H$ - PONTO $\xi \neq$ PONTO $c$

Na matriz  $H$  da expressão (71) todos os coeficientes destacados em azul correspondem a uma situação comum: ponto fonte pertencendo ao elemento e função de interpolação  $N'_c$  no integrando correspondente ao outro nó funcional (não singular) do elemento. Nesta situação particular é possível demonstrar que a função de interpolação dada pela equação (54) é proporcional à distância  $r$ , cancelando a singularidade do integrando. Ainda, sendo o elemento de geometria reta, tem-se que o termo  $\frac{\partial r}{\partial n}$  da solução fundamental na equação (68) é nulo, então reescreve-se a equação (48) como,

$$H_{ij}^{nc} = \int_{-1}^1 \frac{N'_c}{r} \{CD [n_i r, j - n_j r, i]\} J d\eta. \quad (73)$$

Resolvendo-se a integral quando o ponto de colocação está em  $\eta_1$  e a função de interpolação é  $N'_2$ , tem-se

$$H_{ij}^{n2} = \frac{2}{\eta_2 - \eta_1} \{CD [n_i r, j - n_j r, i]\}. \quad (74)$$

Quando o ponto de colocação está em  $\eta_2$  e a função de interpolação é  $N'_1$ , tem-se

$$H_{ij}^{n1} = -\frac{2}{\eta_2 - \eta_1} \{CD [n_i r, j - n_j r, i]\}. \quad (75)$$

#### 4.4.2 COEFICIENTES $H$ COM SINGULARIDADE FORTE

Na matriz  $H$  da expressão (71) todos os coeficientes destacados em vermelho são submatrizes 2x2 ao longo da diagonal de  $H$  e correspondem a integrais impróprias de



singularidade forte onde o ponto fonte pertence ao elemento e a função de interpolação  $N'_c$  no integrando corresponde ao nó funcional singular do elemento. Essas integrais impróprias devem ser calculadas no sentido do VPC e serão desenvolvidas no próximo capítulo. A esses coeficientes ainda devem ser somados os coeficientes geométricos  $C_{ij}(\xi)$  definidos pela equação (39).

Alternativamente, pode-se efetuar indiretamente o cálculo das submatrizes diagonais  $2 \times 2$  de  $H$ , incluindo os coeficientes  $C_{ij}$ . Para isso, utiliza-se do artifício do Movimento de Corpo Rígido, onde atribui-se um deslocamento unitário a todo o corpo, ora na direção  $x_1$  e ora na direção  $x_2$ . Em ambos os casos, as forças de superfície e o campo de tensões internas são nulos, sendo válida a equação  $Hu = 0$ . Portanto, pode-se isolar os termos da submatriz diagonal em cada equação do sistema, calculando-os em função da soma dos demais coeficientes de cada equação. Matematicamente, esse cálculo é expresso por,

$$\mathbf{H}_{ii} = - \sum_{j=1}^{NNF} \mathbf{H}_{ij} \quad (j \neq i), \quad (76)$$

onde  $\mathbf{H}_{ii}$  representa cada submatriz diagonal e  $NNF$  é o número total de nós funcionais da malha.

#### 4.4.3 COEFICIENTES $G$ COM SINGULARIDADE FRACA

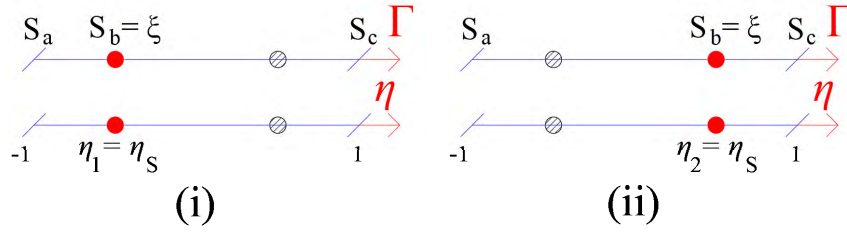
Na matriz  $G$  na expressão (72) observam-se destacados em azul os coeficientes com singularidade fraca. Quando o ponto fonte  $\xi$  coincide com um dos nós funcionais de um elemento  $\Gamma_n$  sendo integrado, uma submatriz ( $2 \times 4$ ) de integrais com singularidade fraca é obtida, como ilustrado a seguir,

$$G_{ij}^{nc} = \int_{-1}^{+1} U_{ij}(\xi, x(\eta)) N'_c(\eta) J(\eta) d\eta = \left\{ \begin{array}{cccc} G_{11}^{n1} & G_{12}^{n1} & G_{11}^{n2} & G_{12}^{n2} \\ G_{21}^{n1} & G_{22}^{n1} & G_{21}^{n2} & G_{22}^{n2} \end{array} \right\} \quad (77)$$

No sistema local  $\eta$  o ponto de colocação  $\xi$  é representado por  $\eta_s$  e pode estar posicionado no primeiro ou no segundo nó funcional como ilustrado na Figura 16, que pode ser generalizada para qualquer tipo de elemento linear dependendo dos valores adotados para  $\eta_1$  (i) e  $\eta_2$  (ii).

No caso particular em que a função  $N'_c = N'_1$  obtém-se o coeficiente  $G_{11}^{n1}$  da submatriz na equação (77). Essa integral é desenvolvida abaixo para a hipótese de uma

FIGURA 16 – ELEMENTO DESCONTÍNUO



FONTE: O Autor

geometria reta até a obtenção da expressão analítica representativa para qualquer tipo de elemento. Tem-se que,

$$G_{n1}^{n1} = \int_{-1}^1 \left[ A \ln \left( \frac{1}{r} \right) + Br_i r_j \right] N_1' \frac{L}{2} d\eta. \quad (78)$$

Se o ponto de colocação  $\eta_s$  estiver em  $\eta_1$ , a distância  $r$  presente no termo logaritmo da equação (78), medida do ponto fonte até um ponto campo nos trechos à esquerda e à direita da singularidade é dada, respectivamente, por,

$$\begin{cases} r(\eta_1, \eta) = \frac{L}{2} (\eta_1 - \eta) & \text{para } -1 < \eta < \eta_1 \\ r(\eta_1, \eta) = \frac{L}{2} (-\eta_1 + \eta) & \text{para } \eta_1 < \eta < 1 \end{cases} \quad (79)$$

Subdividindo-se a integral na equação (78) em dois trechos, anterior e posterior à singularidade, substituindo as equações (79) assim como a expressão de  $N_1'$  e do Jacobiano, expande-se a integral em,

$$\begin{aligned} G_{11}^{n1} = & - \int_{-1}^{\eta_1} A \ln \left( \frac{L}{2} (\eta_1 - \eta) \right) \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} (\eta_2 - \eta) \frac{L}{2} d\eta + \\ & - \int_{\eta_1}^{+1} A \ln \left( \frac{L}{2} (-\eta_1 + \eta) \right) \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} (\eta_2 - \eta) \frac{L}{2} d\eta + \\ & + \int_{-1}^1 Br_i r_j \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} (\eta_2 - \eta) \frac{L}{2} d\eta, \end{aligned} \quad (80)$$

onde a primeira integral do lado direito, designada pelo superíndice  $a$ , é dada por,

$$G_{11}^{n1a} = - \int_{-1}^{\eta_1} A \ln \left( \frac{L}{2} (\eta_1 - \eta) \right) \frac{1}{\eta_2 - \eta_1} (\eta_2 - \eta) \frac{L}{2} d\eta \quad (81)$$

que pode ser simplificada por meio de uma transformação de coordenadas, substituindo o argumento do logaritmo por  $S = \frac{L}{2}(\eta_1 - \eta)$ . Tem-se, portanto,  $d\eta = -\frac{2}{L}dS$  e é possível deduzir que,

$$(\eta_2 - \eta)\frac{L}{2} = (\eta_2 - \eta + \eta_1 - \eta_1)\frac{L}{2} = S + (\eta_2 - \eta_1)\frac{L}{2}, \quad (82)$$

permitindo reescrever a equação (81) como,

$$G_{11}^{m1a} = \frac{-A}{\eta_2 - \eta_1} \left[ \int_{\frac{L}{2}(\eta_1+1)}^0 \ln(S)S \frac{-2L}{L} \frac{L}{2} dS + \int_{\frac{L}{2}(\eta_1+1)}^0 \ln(S) \frac{-2L}{L} \frac{L}{2} (\eta_2 - \eta_1) dS \right], \quad (83)$$

onde os limites das integrais foram transformados de  $[-1; \eta_1]$  para  $[\frac{L}{2}(\eta_1 + 1); 0]$ . A solução analítica dessa integral é dada por,

$$G_{11}^{m1a} = \frac{-AL}{-4\eta_2 + 4\eta_1} \left\{ (\eta_1 + 1)(-\eta_1 + 2\eta_2 + 1) \ln(L(\eta_1 + 1)) + \right. \\ \left. + \eta_1 - \frac{(2\eta_2 - 1) \ln(2)(3\eta_1)}{2} - 2\eta_2 - \frac{1}{2} \right\}, \quad (84)$$

Analogamente, definimos  $P = \frac{L}{2}(-\eta_1 + \eta)$  e  $d\eta = \frac{2}{L}dP$ , de deduzindo também que,

$$(\eta_2 - \eta)\frac{L}{2} = (\eta_2 - \eta + \eta_1 - \eta_1)\frac{L}{2} = -P + (\eta_2 - \eta_1)\frac{L}{2}, \quad (85)$$

reescreve-se a segunda integral da equação (80), designada pelo superíndice  $b$ , como,

$$G_{11}^{m1b} = \frac{A}{\eta_2 - \eta_1} \left[ \int_0^{\frac{L}{2}(-\eta_1+1)} \ln(P)P \frac{2L}{L} \frac{L}{2} dP - \int_0^{\frac{L}{2}(-\eta_1+1)} \ln(P) \frac{2L}{L} \frac{L}{2} (\eta_2 - \eta_1) dP \right], \quad (86)$$

onde os limites das integrais foram transformados de  $[\eta_1; 1]$  para  $[0; \frac{L}{2}(-\eta_1 + 1)]$ , e cuja solução analítica é dada por,

$$G_{11}^{n1b} = \frac{AL}{-4\eta_2 + 4\eta_1} \left\{ (\eta_1 - 1)(-\eta_1 + 2\eta_2 - 1) \ln(-L(\eta_1 - 1)) + \right. \\ \left. + (\eta_1 - 2\eta_2 + 1) \ln(2) + \frac{3\eta_1}{2} - 2\eta_2 + \frac{1}{2} \right\} \quad (87)$$

Por fim, a terceira integral da equação (80), designada pelo superíndice  $c$ , é resolvida analiticamente e resulta em,

$$G_{11}^{n1c} = \frac{BLr_i r_j \eta_2}{\eta_2 - \eta_1}. \quad (88)$$

E a soma das três parcelas (a, b e c) fornece a fórmula final para  $G_{11}^{n1}$ ,

$$G_{11}^{n1} = G_{22}^{n1} = \frac{L}{-4\eta_2 + 4\eta_1} \left\{ A(\eta_1 - 1)(\eta_1 - 2\eta_2 + 1) \ln(-L(\eta_1 - 1)) + \right. \\ \left. - A(\eta_1 + 1)(\eta_1 - 2\eta_2 - 1) \ln(L(\eta_1 + 1)) + \right. \\ \left. - 4A \ln(2)\eta_2 + 2\eta_1 - 4\eta_2 A - 4Br_i r_j \eta_2 \right\}. \quad (89)$$

A formulação da expressão para  $G_{22}^{n1}$  é similar a da  $G_{11}^{n1}$  onde a diferença aparece exclusivamente na terceira parcela que contém o termo  $r_i r_j$ . As expressões analíticas dos coeficientes da diagonal secundária da primeira submatriz (2x2) em (77), também associadas à função  $N'_1$ , são idênticas e equivalem à terceira parcela (iii) das expressões anteriores, uma vez que o delta de Kronecker é nulo com  $i \neq j$ . As mesmas são dadas por,

$$G_{12}^{n1} = G_{21}^{n1} = \frac{BLr_i r_j \eta_2}{\eta_2 - \eta_1}, \quad (90)$$

$$G_{12}^{n2} = G_{21}^{n2} = -\frac{BLr_i r_j \eta_1}{\eta_2 - \eta_1}, \quad (91)$$

As expressões analíticas dos coeficientes da segunda submatriz (2x2) da matriz em (77), associadas à função  $N'_2$ , seguem o mesmo raciocínio para suas deduções. Assim, demonstra-se que

$$G_{11}^{n2} = G_{22}^{n2} = \frac{L}{-4\eta_2 + 4\eta_1} \left\{ A(\eta_1 - 1)^2 \ln(-L(\eta_1 - 1)) + \right. \\ \left. -A(\eta_1 + 1)^2 \ln(L(\eta_1 + 1)) + 4(Br_i r_j + A \ln(2) + A/2)\eta_1 \right\}. \quad (92)$$

E seguindo o mesmo raciocínio, porém para o segundo caso de singularidade no elemento, ou seja,  $\eta_s$  no segundo nó funcional, tem-se novas expressões para a distância  $r$  e as seguintes expressões para os coeficientes da matriz (2x4),

$$\begin{cases} r(\eta_1, \eta) = \frac{L}{2} (\eta_1 - \eta) & \text{para } -1 < \eta < \eta_2 \\ r(\eta_1, \eta) = \frac{L}{2} (-\eta_1 + \eta) & \text{para } \eta_2 < \eta < 1 \end{cases} \quad (93)$$

$$G_{11}^{n1} = G_{22}^{n1} = \frac{-L}{-4\eta_2 + 4\eta_1} \left\{ A(\eta_2 - 1)^2 \ln(-L(\eta_2 - 1)) + \right. \\ \left. -A(\eta_2 + 1)^2 \ln(L(\eta_2 + 1)) + 4(Br_i r_j + A \ln(2) + A/2)\eta_2 \right\}, \quad (94)$$

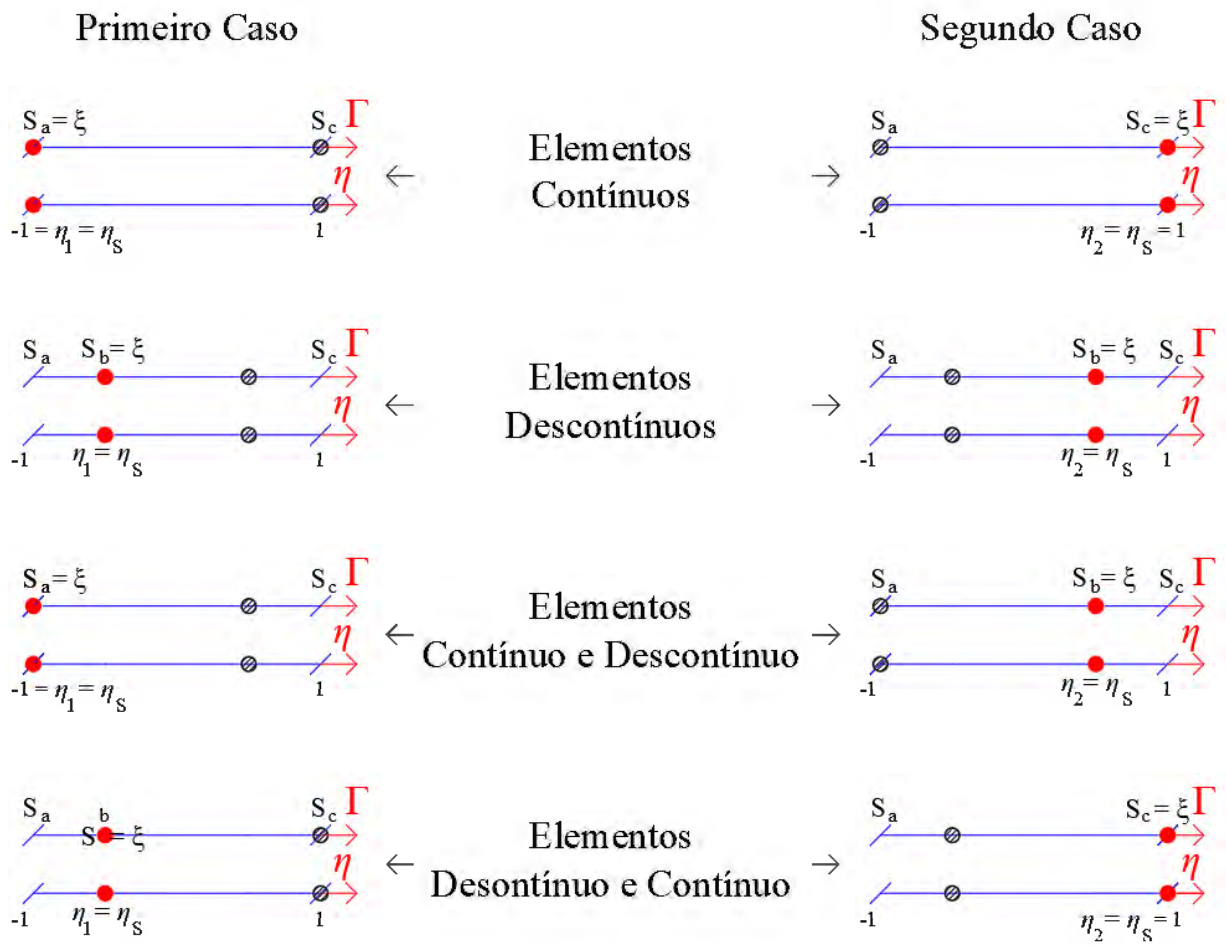
$$G_{12}^{n1} = G_{21}^{n1} = \frac{BLr_i r_j n_1}{n_2 - n_1}, \quad (95)$$

$$G_{12}^{n2} = G_{21}^{n2} = -\frac{BLr_i r_j n_2}{n_2 - n_1}, \quad (96)$$

$$G_{11}^{n2} = G_{22}^{n2} = \frac{L}{-4\eta_2 + 4\eta_1} \left\{ A(\eta_1 - 1)(\eta_1 - 2\eta_2 + 1) \ln(-L(\eta_1 - 1)) + \right. \\ \left. -A(\eta_1 + 1)(\eta_1 - 2\eta_2 - 1) \ln(L(\eta_1 + 1)) + \right. \\ \left. -4A \ln(2)\eta_2 + 2\eta_1 - 4\eta_2 A - 4Br_i r_j \eta_2 \right\}. \quad (97)$$

As fórmulas desenvolvidas são gerais e com a escolha adequada de  $\eta_1$  e  $\eta_2$  conduz a expressões para todos os casos singulares ilustrados na Figura 17. Nas Tabelas 1, 2 e 3 estão apresentadas todas as fórmulas para coeficientes singulares da matriz  $G$  para cada caso.

FIGURA 17 – TODOS OS TIPOS DE ELEMENTOS



FONTE: O Autor

TABELA 1 – FORMULÁRIO DOS COEFICIENTES G - PARTE 1 (O AUTOR)

EXPRESSÕES ANALÍTICAS DOS COEFICIENTES G			
Elementos Contínuos	$\eta_s = \eta_1$	$N'_c = N'_1$	$i = j$ $G_{ij}^{n1} = \frac{-AL(2\ln(L)-3)}{4} + \frac{BLr_i r_j}{2}$
			$i \neq j$ $G_{ij}^{n1} = \frac{BLr_i r_j}{2}$
	$N'_c = N'_2$	$i \neq j$ $G_{ij}^{n2} = \frac{BLr_i r_j}{2}$	
		$i = j$ $G_{ij}^{n2} = \frac{-AL(2\ln(L)-1)}{4} + \frac{BLr_i r_j}{2}$	
	$\eta_s = \eta_2$	$N'_c = N'_1$	$i = j$ $G_{ij}^{n1} = \frac{-AL(2\ln(L)-1)}{4} + \frac{BLr_i r_j}{2}$
			$i \neq j$ $G_{ij}^{n1} = \frac{BLr_i r_j}{2}$
	$N'_c = N'_2$	$i \neq j$ $G_{ij}^{n2} = \frac{BLr_i r_j}{2}$	
Elementos Descontínuos	$\eta_s = \eta_1$	$N'_c = N'_1$	$i = j$ $G_{ij}^{n1} = \frac{L(A(\eta_1-1)(\eta_1-2\eta_2+1)\ln(-L(\eta_1-1))-A(\eta_1+1)(\eta_1-2\eta_2-1)\ln(L(\eta_1+1))-4A\ln(2)\eta_2+(2\eta_1-4\eta_2)A-4Br_i r_j \eta_2)}{(-4\eta_2+4\eta_1)}$
			$i \neq j$ $G_{ij}^{n1} = \frac{BLr_i r_j \eta_2}{(\eta_2-\eta_1)}$
	$N'_c = N'_2$	$i \neq j$ $G_{ij}^{n2} = -\frac{BLr_i r_j \eta_1}{(\eta_2-\eta_1)}$	
		$i = j$ $G_{ij}^{n2} = \frac{L(A(\eta_1-1)^2\ln(-L(\eta_1-1))-A(\eta_1+1)^2\ln(L(\eta_1+1))+4(Br_i r_j + A\ln(2)+A/2)\eta_1)}{(-4\eta_2+4\eta_1)}$	
	$\eta_s = \eta_2$	$N'_c = N'_1$	$i = j$ $G_{ij}^{n1} = \frac{-L(A(\eta_2-1)^2\ln(-L(\eta_2-1))-A(\eta_2+1)^2\ln(L(\eta_2+1))+4(Br_i r_j + A\ln(2)+A/2)\eta_2)}{(-4\eta_2+4\eta_1)}$
			$i \neq j$ $G_{ij}^{n1} = \frac{BLr_i r_j \eta_2}{(\eta_2-\eta_1)}$
	$N'_c = N'_2$	$i \neq j$ $G_{ij}^{n2} = -\frac{BLr_i r_j \eta_1}{(\eta_2-\eta_1)}$	
		$i = j$ $G_{ij}^{nc} = \frac{L(A(\eta_1-1)(\eta_1-2\eta_2+1)\ln(-L(\eta_1-1))-A(\eta_1+1)(\eta_1-2\eta_2-1)\ln(L(\eta_1+1))-4A\ln(2)\eta_2+(2\eta_1-4\eta_2)A-4Br_i r_j \eta_2)}{(-4\eta_2+4\eta_1)}$	

TABELA 2 – FORMULÁRIO DOS COEFICIENTES G - PARTE 2 (O AUTOR)

EXPRESSÕES ANALÍTICAS DOS COEFICIENTES G			
Elementos	$\eta_s = \eta_1$	$N'_c = N'_1$	$i = j \quad G_{ij}^{m1} = \frac{-2AL(\eta_2 \ln(L) - \eta_2 - 1/2)}{(2\eta_2 + 2)} + \frac{2Br_i r_j L \eta_2}{(2\eta_2 + 2)}$
			$i \neq j \quad G_{ij}^{m1} = \frac{2Br_i r_j L \eta_2}{(2\eta_2 + 2)}$
Contínuo		$N'_c = N'_2$	$i \neq j \quad G_{ij}^{m2} = -\frac{2Br_i r_j L \eta_1}{(2\eta_2 + 2)}$
			$i = j \quad G_{ij}^{m2} = \frac{-AL(2 \ln(L) - 1)}{(2\eta_2 + 2)} - \frac{2Br_i r_j L \eta_1}{(2\eta_2 + 2)}$
Descontínuo	$\eta_s = \eta_2$	$N'_c = N'_1$	$i = j \quad G_{ij}^{m1} = \frac{AL(-(\eta_2 - 1)^2 \ln(-L(\eta_2 - 1)) + (\eta_2 + 1)^2 \ln(L(\eta_2 + 1)) - 4\eta_2 \ln(2) - 2\eta_2)}{(-4\eta_2 + 4\eta_1)} + \frac{BLr_i r_j \eta_2}{(\eta_2 - \eta_1)}$
			$i \neq j \quad G_{ij}^{m1} = \frac{BLr_i r_j \eta_2}{(\eta_2 - \eta_1)}$
Elementos	$\eta_s = \eta_1$	$N'_c = N'_2$	$i \neq j \quad G_{ij}^{m2} = -\frac{BLr_i r_j \eta_1}{(\eta_2 - \eta_1)}$
			$i = j \quad G_{ij}^{m2} = \frac{-AL(-(\eta_1 - 1)^2 \ln(-L(\eta_1 - 1)) + (\eta_1 + 1)^2 \ln(L(\eta_1 + 1)) - 4\eta_1 \ln(2) - 2\eta_1)}{(-4\eta_2 + 4\eta_1)} - \frac{BLr_i r_j \eta_1}{(\eta_2 - \eta_1)}$
Descontínuo	$\eta_s = \eta_1$	$N'_c = N'_1$	$i = j \quad G_{ij}^{m1} = \frac{-AL(-(\eta_1 - 1)(\eta_1 - 2\eta_2 + 1) \ln(-L(\eta_1 - 1)) + (\eta_1 + 1)(\eta_1 - 2\eta_2 - 1) \ln(L(\eta_1 + 1)) + 4\eta_2 \ln(2) - 2\eta_1 + 4\eta_2)}{(-4\eta_2 + 4\eta_1)} + \frac{BLr_i r_j \eta_2}{(\eta_2 - \eta_1)}$
			$i \neq j \quad G_{ij}^{m1} = \frac{BLr_i r_j \eta_2}{(\eta_2 - \eta_1)}$
Elementos	$\eta_s = \eta_1$	$N'_c = N'_2$	$i \neq j \quad G_{ij}^{m2} = -\frac{BLr_i r_j \eta_1}{(\eta_2 - \eta_1)}$
			$i = j \quad G_{ij}^{m2} = \frac{-AL(-(\eta_1 - 1)^2 \ln(-L(\eta_1 - 1)) + (\eta_1 + 1)^2 \ln(L(\eta_1 + 1)) - 4\eta_1 \ln(2) - 2\eta_1)}{(-4\eta_2 + 4\eta_1)} - \frac{BLr_i r_j \eta_1}{(\eta_2 - \eta_1)}$
Descontínuo	$\eta_s = \eta_2$	$N'_c = N'_1$	$i = j \quad G_{ij}^{m1} = \frac{AL(2 \ln(L) - 1)}{(-2 + 2\eta_1)} + \frac{2Br_i r_j L \eta_2}{(2 - 2\eta_1)}$
			$i \neq j \quad G_{ij}^{m1} = \frac{2Br_i r_j L \eta_2}{(2 - 2\eta_1)}$
Contínuo	$\eta_s = \eta_2$	$N'_c = N'_2$	$i \neq j \quad G_{ij}^{m2} = -\frac{2Br_i r_j L \eta_1}{(2 - 2\eta_1)}$
			$i = j \quad G_{ij}^{m2} = \frac{-2AL(\eta_1 \ln(L) - \eta_1 + 1/2)}{(-2 + 2\eta_1)} - \frac{2Br_i r_j L \eta_1}{(2 - 2\eta_1)}$



TABELA 3 – FORMULÁRIO DOS COEFICIENTES G - PARTE 3 (O AUTOR)

EXPRESSÕES ANALÍTICAS DOS COEFICIENTES G			
<b>Elementos Descontínuos</b>	$\eta_s = \eta_1 = -\frac{1}{3}$	$N'_c = N'_1$	$i = j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{-AL(-2 \ln(3)+2 \ln(L)-3)}{4} + \frac{BLr_i r_j}{2}$
			$i \neq j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{BLr_i r_j}{2}$
		$N'_c = N'_2$	$i \neq j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{BLr_i r_j}{2}$
	$\eta_s = \eta_2 = \frac{1}{3}$	$N'_c = N'_1$	$i = j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{-AL(-6 \ln(3)+6 \ln(L)-3+8 \ln(2))}{12} + \frac{BLr_i r_j}{2}$
			$i \neq j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{-AL(-6 \ln(3)+6 \ln(L)-3+8 \ln(2))}{12} + \frac{BLr_i r_j}{2}$
		$N'_c = N'_2$	$i \neq j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{BLr_i r_j}{2}$
	$\eta_s = \eta_1 = -\frac{1}{2}$		$i \neq j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{BLr_i r_j}{2}$
		$N'_c = N'_1$	$i = j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{-AL(-2 \ln(3)+2 \ln(L)-3)}{4} + \frac{BLr_i r_j}{2}$
		$N'_c = N'_2$	$i = j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{-AL(-16 \ln(2)+8 \ln(L)-12+3 \ln(3))}{16} + \frac{BLr_i r_j}{2}$
	$\eta_s = \eta_2 = \frac{1}{2}$		$i \neq j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{BLr_i r_j}{2}$
		$N'_c = N'_1$	$i \neq j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{BLr_i r_j}{2}$
		$N'_c = N'_2$	$i = j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{-AL(-16 \ln(2)+8 \ln(L)-4+9 \ln(3))}{16} + \frac{BLr_i r_j}{2}$
$\eta_s = \eta_1 = -\frac{2}{3}$		$i = j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{-AL(-16 \ln(2)+8 \ln(L)-4+9 \ln(3))}{16} + \frac{BLr_i r_j}{2}$	
	$N'_c = N'_1$	$i \neq j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{BLr_i r_j}{2}$	
	$N'_c = N'_2$	$i \neq j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{BLr_i r_j}{2}$	
$\eta_s = \eta_2 = \frac{2}{3}$		$i = j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{-AL(-16 \ln(2)+8 \ln(L)-12+3 \ln(3))}{16} + \frac{BLr_i r_j}{2}$	
	$N'_c = N'_1$	$i = j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{-AL(-8 \ln(2)-8 \ln(3)+8 \ln(L)-12+5 \ln(5))}{16} + \frac{BLr_i r_j}{2}$	
	$N'_c = N'_2$	$i \neq j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{BLr_i r_j}{2}$	
	$N'_c = N'_1$	$i \neq j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{BLr_i r_j}{2}$	
	$N'_c = N'_2$	$i = j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{-AL(-24 \ln(2)+25 \ln(5)-24 \ln(3)+24 \ln(L)-12)}{48} + \frac{BLr_i r_j}{2}$	
	$N'_c = N'_1$	$i = j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{-AL(-24 \ln(2)+25 \ln(5)-24 \ln(3)+24 \ln(L)-12)}{48} + \frac{BLr_i r_j}{2}$	
	$N'_c = N'_2$	$i \neq j$ $G_{ij}^{m1} = \frac{BLr_i r_j}{2}$	
	$N'_c = N'_1$	$i \neq j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{BLr_i r_j}{2}$	
	$N'_c = N'_2$	$i = j$ $G_{ij}^{m2} = \frac{-AL(-8 \ln(2)-8 \ln(3)+8 \ln(L)-12+5 \ln(5))}{16} + \frac{BLr_i r_j}{2}$	

## 5 INTEGRAÇÕES NO SENTIDO DO VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY EM ELEMENTOS LINEARES CONTÍNUOS E DESCONTÍNUOS

Viu-se que a utilização do artifício do Movimento de Corpo Rígido é uma abordagem de simples compreensão e aplicação para a obtenção dos coeficientes das submatrizes diagonais da matriz  $H$ . Como o cálculo depende dos demais coeficientes de cada equação do sistema, só pode ser efetuado ao final, após o cálculo de todas as integrações regulares. Não é exatamente um problema, mas evidentemente “quebra” a sequência lógica de montagem da matriz  $H$ .

Portanto, apresenta-se nesse capítulo uma abordagem de cálculo direto das integrais no sentido do Valor Principal de Cauchy para elementos lineares descontínuos. A solução é baseada na proposta de Guiggiani e Casalini (1987), que detalharam as expressões para um nó contínuo entre elementos vizinhos.

Aqui, o objetivo é obter expressões diretas para cálculo da integral imprópria no lado esquerdo da equação (43), que possui singularidade forte  $O(1/r)$ , ao se empregar elementos descontínuos. A singularidade ocorre quando o ponto fonte  $\xi$  está no primeiro ou segundo nó funcional do elemento  $\Gamma_n$  sendo integrado, como ilustrado na Figura (18). Nos dois possíveis casos vistos na Figura observa-se que  $S$  é uma coordenada definida no espaço  $\Gamma$ , espaço global, onde o nó geométrico inicial do elemento é definido por  $S_a$  e o nó final por  $S_c$ . Em ambos os casos, o nó funcional singular é denominado como nó  $S_b$ . Assim pode-se definir o Valor Principal de Cauchy na integral imprópria de singularidade forte na equação (43) como,

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij}(\xi, x) N'_c(\eta) d\Gamma(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[ \int_{S_a}^{S_b - \rho} T_{ij}(\xi, x) N'_c(\eta) d\Gamma(x) + \int_{S_b + \rho}^{S_c} T_{ij}(\xi, x) N'_c(\eta) d\Gamma(x) \right] \quad (98)$$

onde  $\rho$  é uma distância infinitesimal medida no espaço global  $\Gamma$ . Com a transformação do sistema global para o sistema local  $\eta$ , a equação (98) é reescrita como,

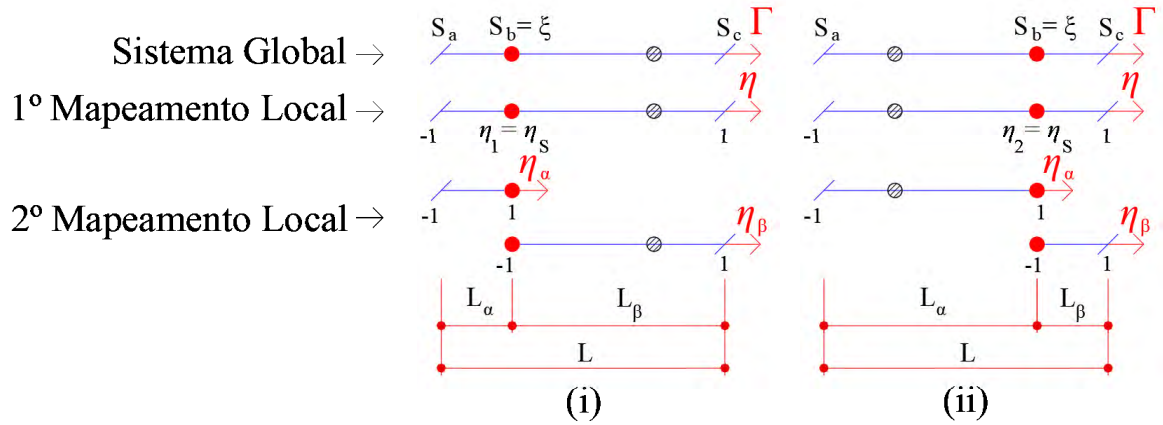
$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N'_c d\Gamma = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{\eta_s - \Delta\rho} T_{ij}(\eta_s, \eta) N'_c(\eta) J(\eta) d\eta + \int_{\eta_s + \Delta\rho}^1 T_{ij}(\eta_s, \eta) N'_c(\eta) J(\eta) d\eta \right] \quad (99)$$

onde  $\Delta\rho$  é uma distância infinitesimal medida no espaço local  $\eta$  e  $\eta_s$  é a coordenada local do ponto singular. Em elementos de geometria reta o Jacobiano  $J(\eta)$  é constante

e igual à  $L/2$ , sendo  $L$  o tamanho do elemento. Em elementos curvos o Jacobiano não é necessariamente constante. Por meio de série de Taylor demonstra-se que  $\Delta\rho = \rho/J(\eta_s)$ .

Antes de seguir com a dedução do VPC é conveniente efetuar um novo mapeamento local, antes e após a singularidade, para cada trecho do elemento, denotados por sistemas  $\eta_\alpha$  e  $\eta_\beta$ , respectivamente, conforme ilustrado na figura 18.

FIGURA 18 – MAPEAMENTOS LOCAIS NO ELEMENTO - (i) SINGULARIDADE EM  $\eta_1$  E (ii) SINGULARIDADE EM  $\eta_2$



FONTE: O Autor

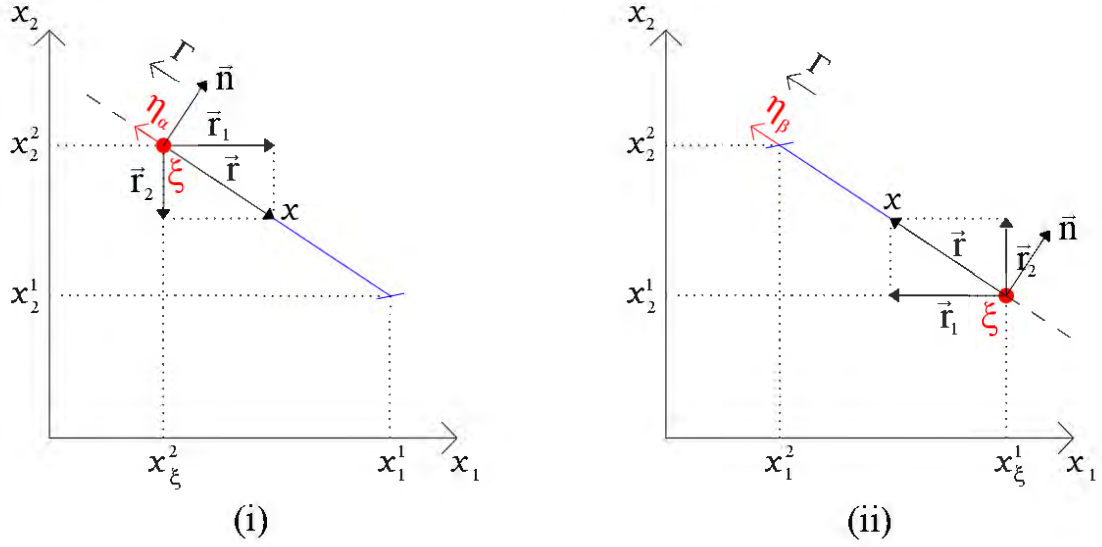
Estes novos sistemas locais estão relacionados com o sistema  $\eta$  por meio de relações lineares,

$$\begin{cases} \eta(\eta_s, \eta_\alpha) = \frac{(\eta_s+1)}{2}\eta_\alpha + \frac{(\eta_s-1)}{2} \\ J_\alpha = \frac{d\eta}{d\eta_\alpha} = \frac{(\eta_s+1)}{2} \\ \eta(\eta_s, \eta_\beta) = -\frac{(\eta_s-1)}{2}\eta_\beta + \frac{(\eta_s+1)}{2} \\ J_\beta = \frac{d\eta}{d\eta_\beta} = -\frac{(\eta_s-1)}{2} \end{cases} \quad (100)$$

onde  $J_\alpha$  e  $J_\beta$  são os Jacobianos da transformação do sistema  $\eta$  para os sistemas  $\eta_\alpha$  e  $\eta_\beta$ , respectivamente. A distância  $r$  medida no elemento a partir do ponto singular  $\eta_s$  é ilustrada na Figura 19 e escrita em função das novas coordenadas locais  $\eta_\alpha$  e  $\eta_\beta$  como,

$$\begin{cases} r_\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) = -\frac{L}{4} [(\eta_s + 1) (\eta_\alpha - 1)] \\ r_\beta(\eta_s, \eta_\beta) = \frac{L}{4} [(1 - \eta_s) (\eta_\beta + 1)] \end{cases} \quad (101)$$

FIGURA 19 – DISTÂNCIA  $r$  - (i)  $r_\alpha$  E (ii)  $r_\beta$



FONTE: O AUTOR

Retornando-se à equação (99) com os novos mapeamentos locais (equações (100) e (101)) e reescrevendo a função singular  $T_{ij}(\eta_s, \eta)$  como  $f_{ij}(\eta_s, \eta)/r(\eta_s, \eta)$ , onde  $f_{ij}$  é uma função analítica, tem-se,

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N'_c d\Gamma = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{1-\Delta\rho_\alpha} \frac{f_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha)}{r_\alpha(\eta_s, \eta_\alpha)} N'_c(\eta_\alpha) J(\eta_\alpha) J_\alpha d\eta_\alpha \right] + \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1+\Delta\rho_\beta}^1 \frac{f_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta)}{r_\beta(\eta_s, \eta_\beta)} N'_c(\eta_\beta) J(\eta_\beta) J_\beta d\eta_\beta \right] \quad (102)$$

onde  $\Delta\rho_\alpha = J_\alpha/\Delta\rho$ ,  $\Delta\rho_\beta = J_\beta/\Delta\rho$  e os superíndices de  $f_{ij}$  apenas indicam o trecho onde a função é definida. Substituindo os valores constantes dos Jacobianos das relações lineares, na equação (102), tem-se,

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N'_c d\Gamma = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{1-\Delta\rho_\alpha} \frac{f_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha)}{r_\alpha(\eta_s, \eta_\alpha)} N'_c(\eta_\alpha) \frac{L(\eta_s + 1)}{2} d\eta_\alpha \right] + \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1+\Delta\rho_\beta}^1 \frac{f_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta)}{r_\beta(\eta_s, \eta_\beta)} N'_c(\eta_\beta) \frac{L(1 - \eta_s)}{2} d\eta_\beta \right] \quad (103)$$

Para compactar a visualização das integrais pode-se adotar uma variável  $h$  definida por,

$$h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) = -f_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) N'_c(\eta_\alpha) \quad (104)$$

$$h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) = f_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) N'_c(\eta_\beta) \quad (105)$$

Assim, após algumas manipulações algébricas, reescreve-se a equação (103) como,

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N'_c d\Gamma = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{1-\Delta\rho_\alpha} \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1+\Delta\rho_\beta}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta \right] \quad (106)$$

Somando e subtraindo a mesma quantidade  $h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1)$  e  $h_{ij}^\beta(\eta_s, -1)$  nas integrais da equação (106), resulta,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} T_{ij} N'_c d\Gamma = & \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1}^{1-\Delta\rho_\alpha} \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1}^{1-\Delta\rho_\alpha} \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha \right] + \\ & + \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-1+\Delta\rho_\beta}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(\eta_s, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta + \int_{-1+\Delta\rho_\beta}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_s, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta \right] \end{aligned} \quad (107)$$

A primeira e a terceira integral do lado direito da equação (107) têm seus limites regularizados com essa operação e podem ser calculadas numericamente. Já a segunda e a quarta integral podem ser avaliadas analiticamente. A condição de existência do Valor Principal de Cauchy exige que  $h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1) = h_{ij}^\beta(\eta_s, -1)$ , resultando,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} T_{ij} N'_c d\Gamma = & \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(\eta_s, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta + \\ & - h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1) \ln |J_\alpha(\eta_\alpha)| + h_{ij}^\beta(\eta_s, -1) \ln |J_\beta(\eta_\beta)| \end{aligned} \quad (108)$$

Logo, a equação (108) demonstra que o Valor Principal de Cauchy pode ser calculado por meio de integrais regulares e fórmulas logarítmicas. Observa-se que as duas integrais regulares estão no formato ideal para aplicação da quadratura de Gauss.

Retornando à matriz  $H$  apresentada na expressão (71) é possível perceber que as submatrizes (2x2) associadas ao nós descontínuos são diretamente calculadas com o emprego da equação (108).

Por outro lado, a expressão final do Valor Principal de Cauchy deve ser ajustada quando o nó funcional passa a ser comum a dois elementos vizinhos, casos  $\eta_1 = -1$  e/ou

$\eta_2 = 1$ , ilustrados na matriz  $H$  em (71) por meio das superposições. Essa dedução foi apresentada em detalhes por Guiggiani e Casalini (1987) com o emprego de funções de interpolação quadráticas. No presente desenvolvimento com funções lineares, nota-se que as partes finitas das integrações em  $\eta_\alpha$  e  $\eta_\beta$  na equação (107), tomadas separadamente, correspondem às parcelas que deverão ser superpostas em integrações de elementos vizinhos para o cálculo do VPC.

Ao migrar  $\eta_1$  para a coordenada local  $-1$ , fica evidente a degeneração do mapeamento em  $\eta_\alpha$ , e a parte finita da integração com  $\eta_s = \eta_1 = -1$  fica,

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N'_1 d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_1, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(\eta_1, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta + h_{ij}^\beta(\eta_1, -1) \ln |J_\beta(\eta_\beta)| \quad (109)$$

Quando a singularidade está no segundo nó funcional do elemento, ao migrar  $\eta_2$  para a coordenada local  $+1$ , fica evidente a degeneração do mapeamento em  $\eta_\beta$ , e a parte finita da integração com  $\eta_s = \eta_2 = +1$  fica,

$$\int_{\Gamma_n} T_{ij} N'_2 d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_2, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(\eta_2, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha - h_{ij}^\alpha(\eta_2, 1) \ln |J_\alpha(\eta_\alpha)|, \quad (110)$$

enfatizando que as partes não finitas das integrações, que se superpõem em um nó contínuo, se cancelam com a condição de existência do VPC.

TABELA 4 – FORMULÁRIO DOS COEFICIENTES H PELO SENTIDO DO VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY (O AUTOR)

FORMULAS		
		$T_{ij}(\eta_s, \eta) = f_{ij}(\eta_s, \eta)/r(\eta_s, \eta)$
	$h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) = -f_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha)$	$h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) = f_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta)N'_c(\eta_\beta)$
	$J_\alpha(\eta_\alpha) = \eta_s + 1$	$J_\beta(\eta_\beta) = 1 - \eta_s$
EXPRESSÕES ANALÍTICAS COEFICIENTES H COM SINGULARIDADE FORTE		
Elementos Contínuos	$\eta_s = \eta_1$	$H_{ij}^{nc} = \int_{\Gamma_n} T_{ij}N'_c d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(\eta_s, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta + h_{ij}^\beta(\eta_s, -1) \ln  J_\beta(\eta_\beta) $
	$\eta_s = \eta_2$	$H_{ij}^{cn} = \int_{\Gamma_n} T_{ij}N'_c d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + -h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1) \ln  J_\alpha(\eta_\alpha) $
Elementos Descontínuos	$\eta_s = \eta_1 = \eta_2$	$H_{ij}^{nc} = \int_{\Gamma_n} T_{ij}N'_c d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(\eta_s, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta +$ $-h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1) \ln  J_\alpha(\eta_\alpha)  + h_{ij}^\beta(\eta_s, -1) \ln  J_\beta(\eta_\beta) $
	$\eta_s = \eta_1$	$H_{ij}^{nc} = \int_{\Gamma_n} T_{ij}N'_c d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(\eta_s, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta + h_{ij}^\beta(\eta_s, -1) \ln  J_\beta(\eta_\beta) $
Elementos Contínuo e Descontínuo	$\eta_s = \eta_2$	$H_{ij}^{nc} = \int_{\Gamma_n} T_{ij}N'_c d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(\eta_s, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta +$ $-h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1) \ln  J_\alpha(\eta_\alpha)  + h_{ij}^\beta(\eta_s, -1) \ln  J_\beta(\eta_\beta) $
	$\eta_s = \eta_1$	$H_{ij}^{nc} = \int_{\Gamma_n} T_{ij}N'_c d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(\eta_s, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(\eta_s, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta +$ $-h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1) \ln  J_\alpha(\eta_\alpha)  + h_{ij}^\beta(\eta_s, -1) \ln  J_\beta(\eta_\beta) $
Elementos Descontínuo e Contínuo	$\eta_s = \eta_2$	$H_{ij}^{nc} = \int_{\Gamma_n} T_{ij}N'_c d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(\eta_s, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + -h_{ij}^\alpha(\eta_s, 1) \ln  J_\alpha(\eta_\alpha) $
	$ \eta_1  = \eta_2 = 1/3$	$H_{ij}^{nc} = \int_{\Gamma_n} T_{ij}N'_c d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(1/3, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(1/3, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(1/3, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(1/3, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta +$ $-h_{ij}^\alpha(1/3, 1) \ln  3/4  + h_{ij}^\beta(1/3, -1) \ln  2/3 $
Elementos Descontínuos	$ \eta_1  = \eta_2 = 1/2$	$H_{ij}^{nc} = \int_{\Gamma_n} T_{ij}N'_c d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(1/2, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(1/2, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(1/2, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(1/2, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta +$ $-h_{ij}^\alpha(1/2, 1) \ln  2/3  + h_{ij}^\beta(1/2, -1) \ln  1/2 $
	$ \eta_1  = \eta_2 = 2/3$	$H_{ij}^{nc} = \int_{\Gamma_n} T_{ij}N'_c d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\alpha(2/3, \eta_\alpha) - h_{ij}^\alpha(2/3, 1)}{\eta_\alpha - 1} d\eta_\alpha + \int_{-1}^1 \frac{h_{ij}^\beta(2/3, \eta_\beta) - h_{ij}^\beta(2/3, -1)}{\eta_\beta + 1} d\eta_\beta +$ $-h_{ij}^\alpha(2/3, 1) \ln  5/3  + h_{ij}^\beta(2/3, -1) \ln  1/3 $

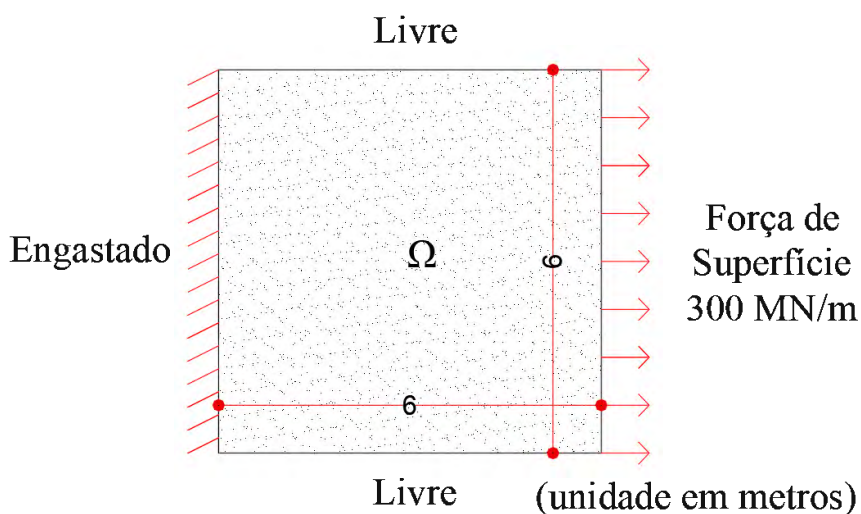
## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesse capítulo são apresentados problemas de elasticidade linear no intuito de validar os desenvolvimentos apresentados nos capítulos 3 a 5. A formulação do MEC com todas as expressões deduzidas foram implementadas no software Matlab da MathWorks (R2020a - Student Edition - 2021) sob a licença número 41002076. Os resultados obtidos nas análises com o MEC são confrontados com resultados numéricos obtidos com o programa computacional Abaqus (Standard Student Edition - 2020), que emprega o Método dos Elementos Finitos e com soluções analíticas, quando disponível. Como a versão utilizada do Abaqus é a estudante, está limitada ao uso de no máximo 1000 nós na malha. Foram empregados elementos lineares tipo Quad (quadrilaterais) e Tri (triangulares) em todos os exemplos analisados com o Abaqus.

### 6.1 CHAPA ENGASTADA SOB TRAÇÃO

Considere uma chapa plana quadrada de aço com  $6 \times 6 \text{ m}^2$  de lado e espessura desprezível. A mesma está completamente engastada de um lado, tracionada de outro por uma força de superfície de  $300 \text{ MN/m}$  e possui duas bordas livres, conforme ilustra a Figura 20. A chapa possui as seguintes propriedades: módulo de elasticidade longitudinal  $E = 200.000 \text{ MPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

FIGURA 20 – CHAPA PLANA  $6 \times 6 \text{ m}^2$  COM ESPESSURA DESPREZÍVEL



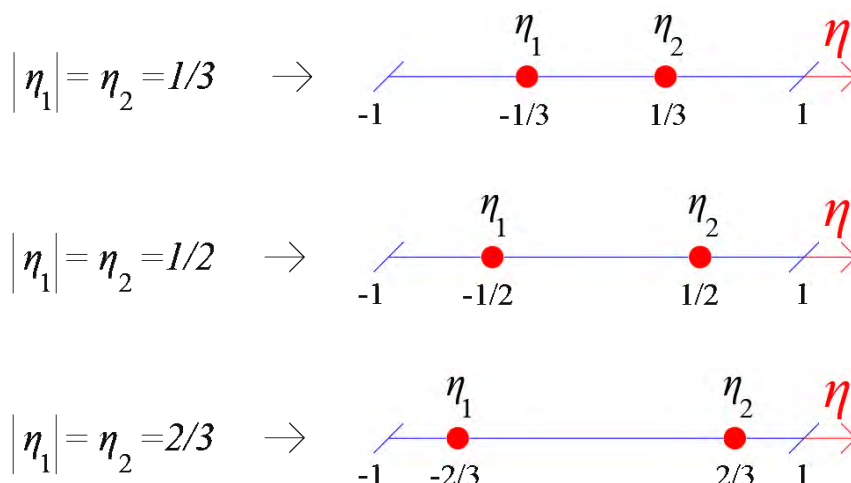
FONTE: O Autor

A chapa foi inicialmente modelada com apenas 4 elementos, um em cada lado do quadrado, no intuito de confirmar a validade das expressões para cálculo da submatriz



diagonal da matriz H no sentido do Valor Principal de Cauchy. Esses resultados são comparados com os valores numéricos obtidos com o emprego do Movimento de Corpo Rígido. Nessa comparação são utilizados elementos lineares descontínuos de geometria reta com 3 posições diferentes para a descontinuidade:  $|\eta_1| = \eta_2 = 1/3$ ,  $|\eta_1| = \eta_2 = 1/2$  e  $|\eta_1| = \eta_2 = 2/3$ , conforme mostra a Figura 21.

FIGURA 21 – TRÊS POSIÇÕES DIFERENTES PARA A DESCONTINUIDADE:  $|\eta_1| = \eta_2 = 1/3$ ;  $|\eta_1| = \eta_2 = 1/2$  e  $|\eta_1| = \eta_2 = 2/3$



FONTE: O Autor

Os resultados obtidos para os coeficientes das submatrizes empregando-se uma integração com 10 pontos de Gauss são apresentados na Tabela 5.

TABELA 5 – RESULTADOS OBTIDOS PARA A SUBMATRIZ DIAGONAL ASSOCIADA AO PONTO DE COLOCAÇÃO, CONSIDERANDO O MCR E O VPC

		MOVIMENTO DE CORPO RÍGIDO		VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY	
$ \eta_1  = \eta_2$		$j = 1$	$j = 2$	$j = 1$	$j = 2$
1/3	$i = 1$	0,499999974	0,128501337	0,500000000	0,128501460
	$i = 2$	-0,128501337	0,500000036	-0,128501460	0,500000000
1/2	$i = 1$	0,499998706	0,050211919	0,500000000	0,050211108
	$i = 2$	-0,050211919	0,500000888	-0,050211108	0,500000000
2/3	$i = 1$	0,500024286	-0,006094173	0,500000000	-0,006096154
	$i = 2$	0,006094173	0,499981373	0,006096154	0,500000000

Observa-se na tabela 5 que o valor 0,5 esperado nas diagonais das submatrizes,

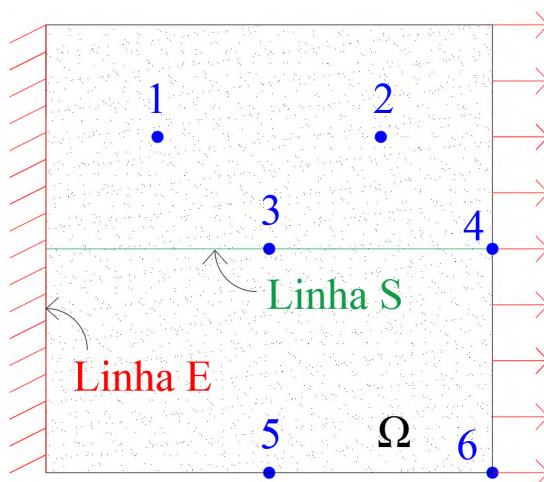
quando  $i = j$ , é indiretamente avaliado na abordagem com o MCR, resultando em valores próximos ao esperado, mas perdendo acurácia da oitava para a quinta casa decimal significativa à medida que os nós funcionais se aproximam do centro do elemento.

Observa-se uma boa concordância entre os valores dos coeficientes da diagonal secundária das submatrizes diagonais ao comparar dados do MCR e do VPC. E a mesma tendência de redução de acurácia citada anteriormente é observada.

Confirmada a validade dos cálculos relacionados às integrações no sentido do VPC, efetuou-se uma análise de convergência dos resultados com modelagens exclusivamente com os 3 tipos de elementos descontínuos lineares.

Nesse sentido, para a mesma chapa quadrada, foram destacados os pontos 1 a 6 e as linhas E (engaste) e S (simetria), indicados na Figura 22, para comparação de resultados dos deslocamentos e tensões entre o MEC e Abaqus. Também foram definidos quatro modelos de discretização com diferentes quantidades de elementos tanto para as análises com o MEC como com o Abaqus (ver Tabela 6).

FIGURA 22 – PONTOS NO CHAPA PLANA 6X6 m<sup>2</sup> COM ESPESSURA DESPREZÍVEL



FONTE: O Autor

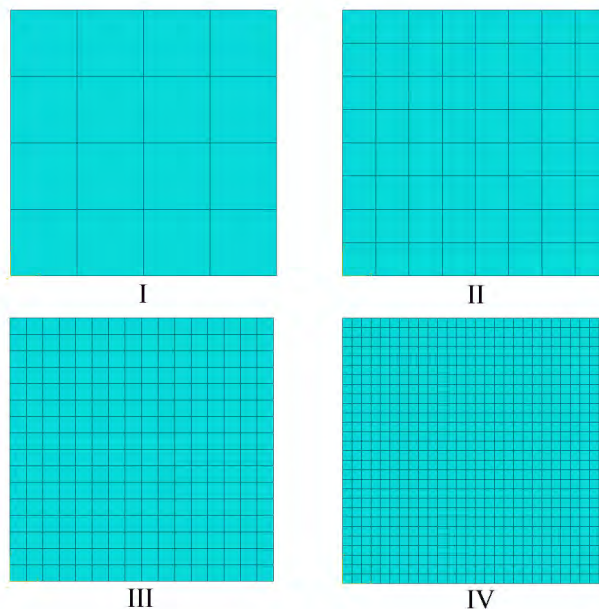
TABELA 6 – QUANTIDADE DE ELEMENTOS DOS MODELOS I, II, III, E IV

MODELOS				
	I	II	III	IV
MEC	4	8	16	32
ABAQUS	16	64	256	784

FONTE: O Autor

Pelo Software Abaqus, os modelos 2D foram elaborados com malhas conforme quantidade de elementos definidos na Tabela 6 e apresentadas na Figura 23.

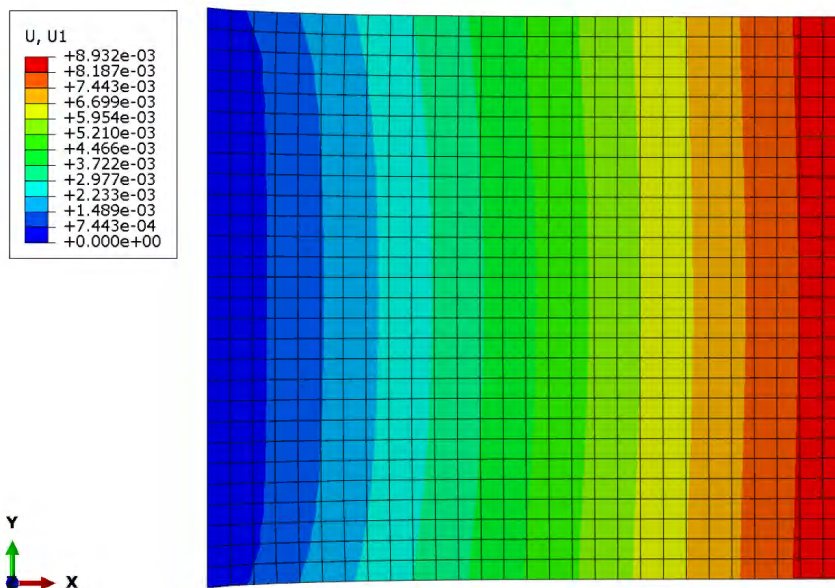
FIGURA 23 – MODELO ABAQUS: I 16; II 64; III 256 S E IV 784 ELEMENTOS



FONTE: O Autor

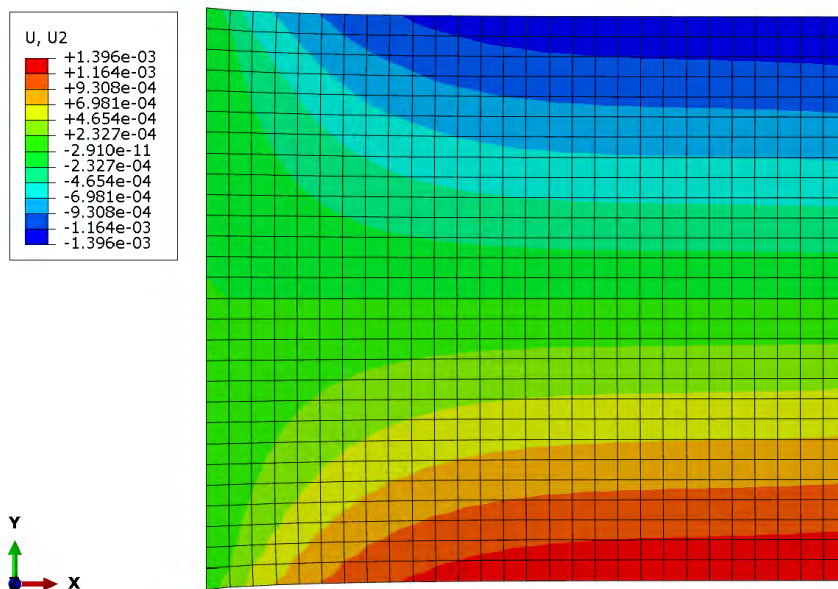
Os campos de deslocamentos e tensões resultantes do modelo mais refinado do Abaqus, com 784 elementos, são mostrados na Figura 24, deslocamentos em  $x_1$ , na Figura 25, deslocamentos em  $x_2$ , e na Figura 26, tensões  $\sigma_{11}$ .

FIGURA 24 – ABAQUS - CAMPO DE DESLOCAMENTOS U1 (m)



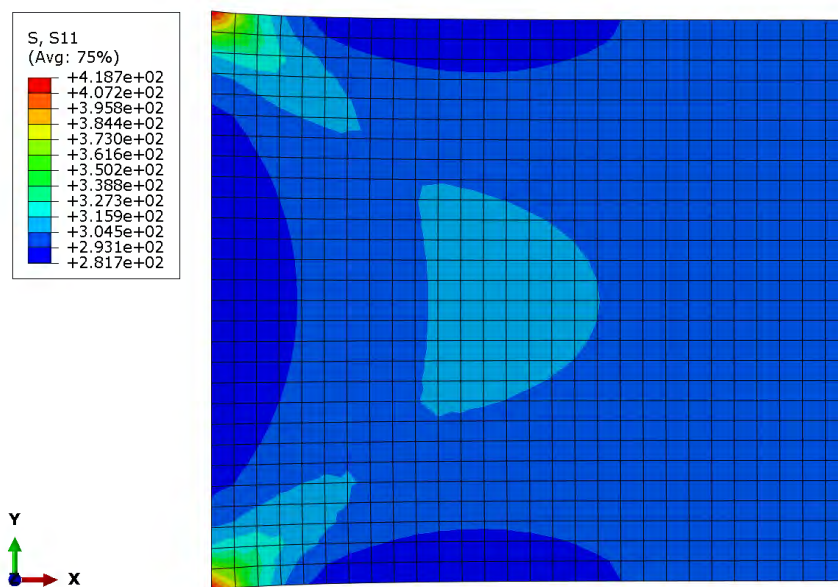
FONTE: O Autor

FIGURA 25 – ABAQUS - CAMPO DE DESLOCAMENTOS U2 (m)



FONTE: O Autor

FIGURA 26 – ABAQUS - CAMPO DE TENSÕES  $\sigma_{11}$  (MN/m)

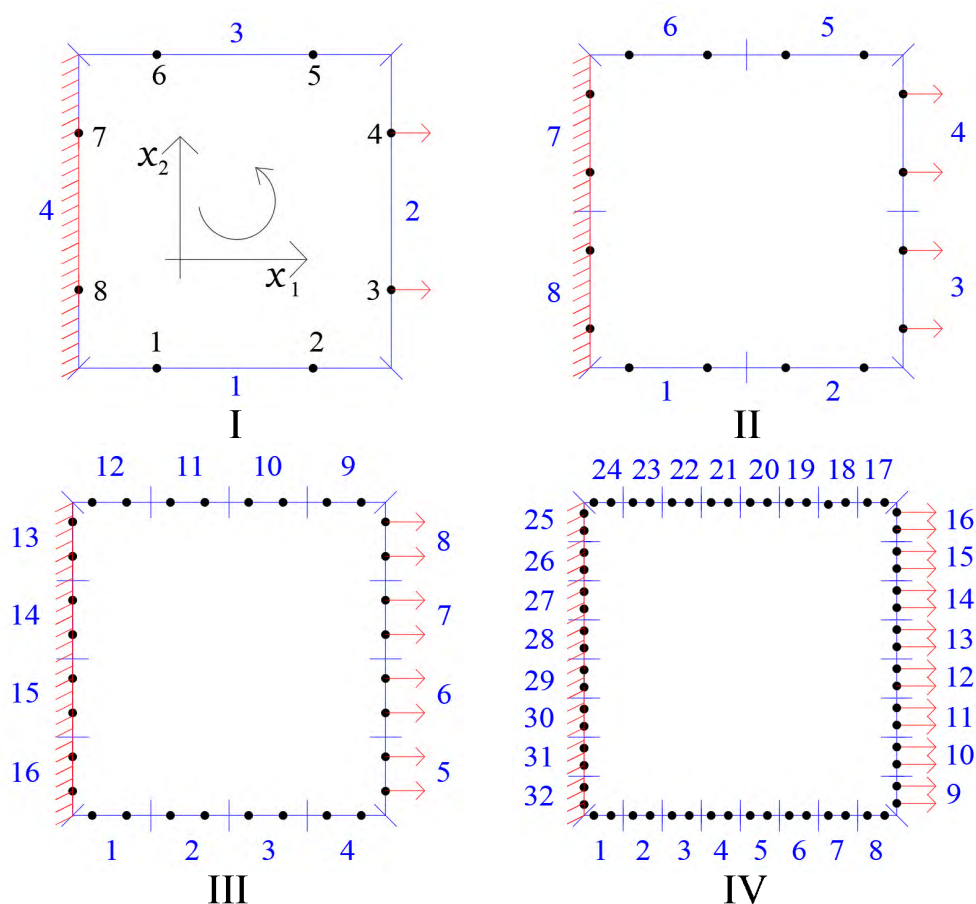


FONTE: O Autor

Com o MEC, a modelagem foi efetuada com numeração dos elementos e nós seguindo o sentido anti-horário, o mesmo das integrações ao longo do contorno. Nesse caso foi iniciada a partir do elemento mais à esquerda no lado inferior, como mostra Figura 27 com I 4; II 8; III 16 e IV 32 elementos. Também se vê as condições de contorno e forças de superfície atribuídas aos nós funcionais, onde no engastamento  $u_1$  e  $u_2$  são nulos e no lado tracionado  $t_1$  é igual 300 MN/m e  $t_2$  é nulo. Nas integrações por quadratura de Gauss foram utilizados 10 pontos.

Os pontos de colocação  $|\eta_1| = \eta_2$  foram definidos como: 1/3, 1/2 e 2/3, em elementos retos e descontínuos, e na situação de estado plano de tensões. Todos os demais modelos seguiram o mesmo critério.

FIGURA 27 – MODELO MEC: I 4; II 8; III 16 E IV 32 ELEMENTOS

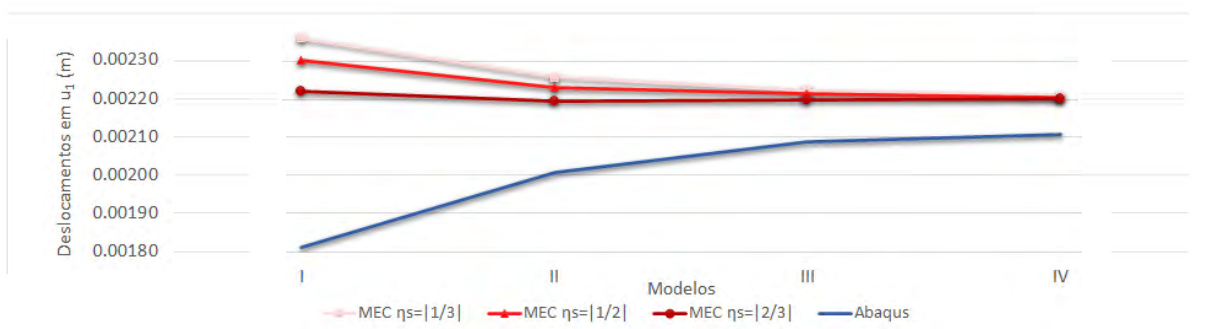


FONTE: O Autor

Os resultados de deslocamentos nos pontos 1 a 6 destacados na Figura 22 com os modelos I, II, III e IV do Abaqus e do MEC com diferentes  $\eta_s$  são comparados da Figura 28 à Figura 39. Nos casos em que os pontos pertencem a dois elementos, é feito a média dos resultados. Na Tabela 8 são apresentados os erros percentuais dos resultados obtidos com o MEC em relação aos resultados obtidos com o Abaqus.

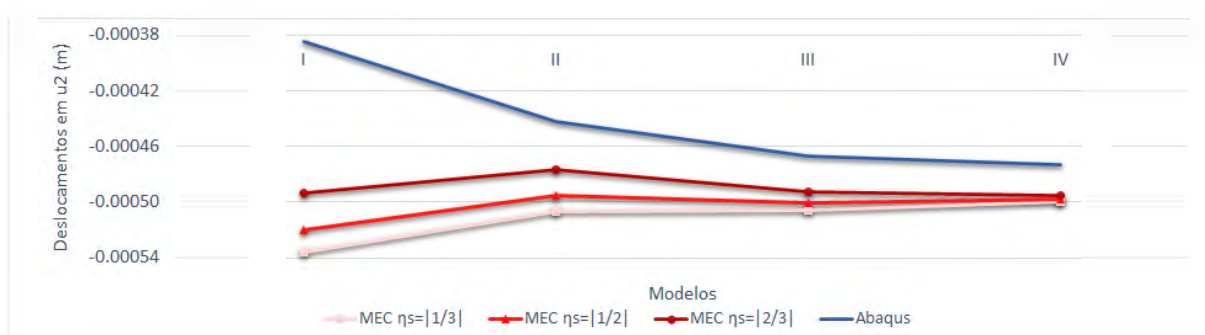


FIGURA 28 – DESLOCAMENTO EM U1 (m) NO PONTO 1 PARA DIFERENTES MALHAS



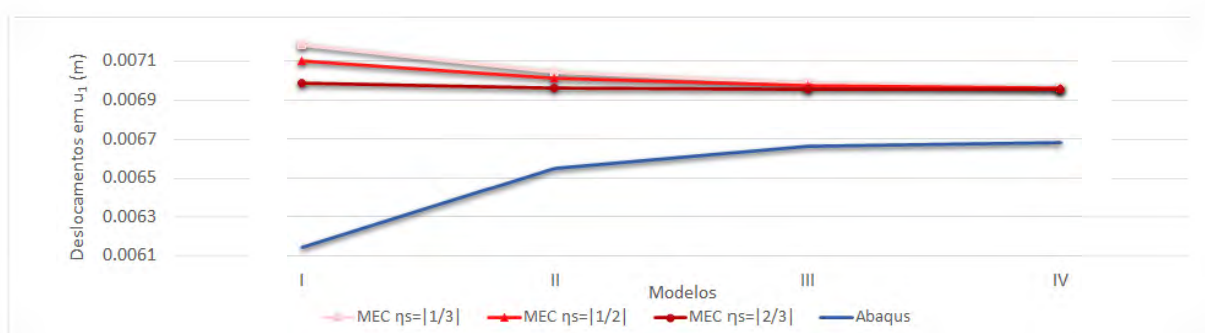
FONTE: O Autor

FIGURA 29 – DESLOCAMENTO EM U2 (m) NO PONTO 1 PARA DIFERENTES MALHAS



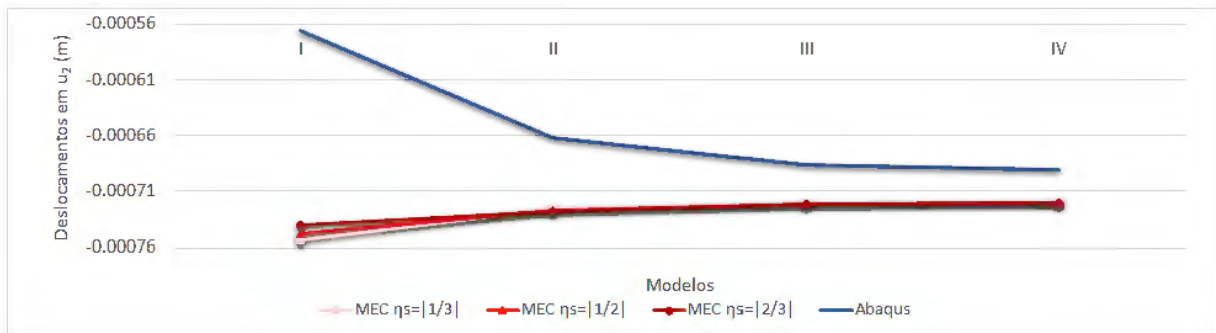
FONTE: O Autor

FIGURA 30 – DESLOCAMENTO EM U1 (m) NO PONTO 2 PARA DIFERENTES MALHAS



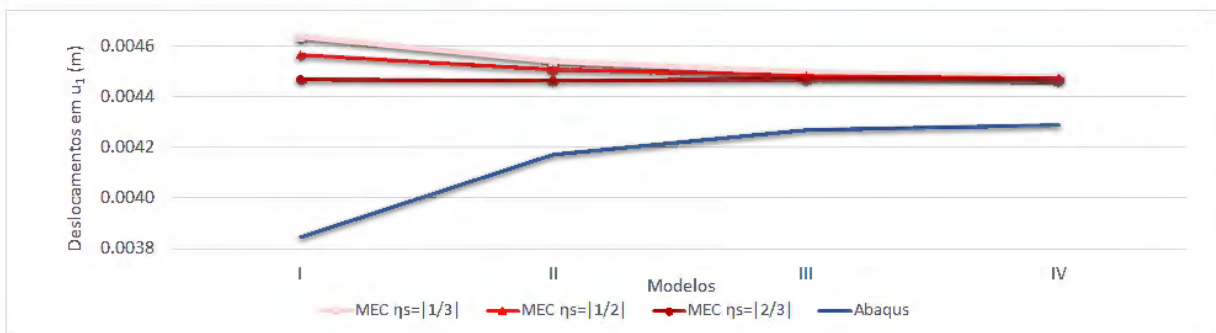
FONTE: O Autor

FIGURA 31 – DESLOCAMENTO EM  $U_2$  (m) NO PONTO 2 PARA DIFERENTES MALHAS



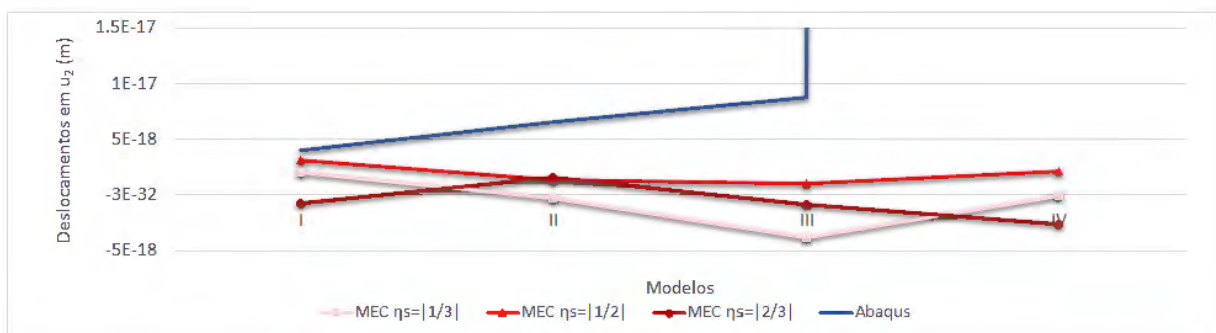
FONTE: O Autor

FIGURA 32 – DESLOCAMENTO EM  $U_1$  (m) NO PONTO 3 PARA DIFERENTES MALHAS



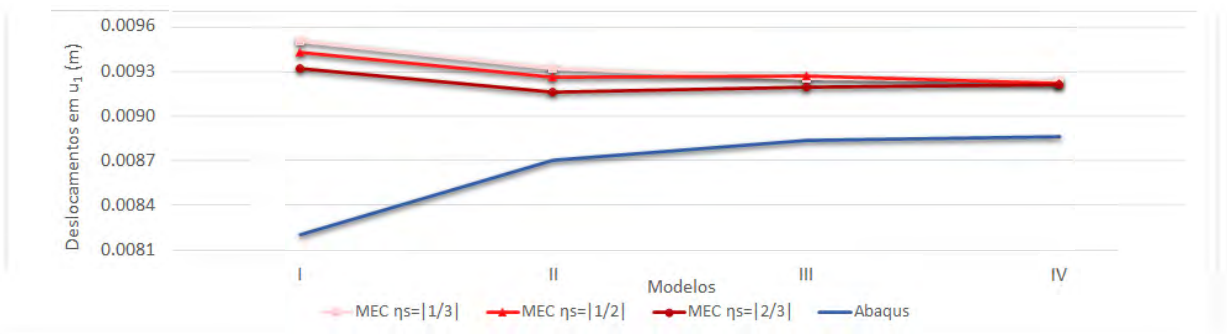
FONTE: O Autor

FIGURA 33 – DESLOCAMENTO EM  $U_2$  (m) NO PONTO 3 PARA DIFERENTES MALHAS



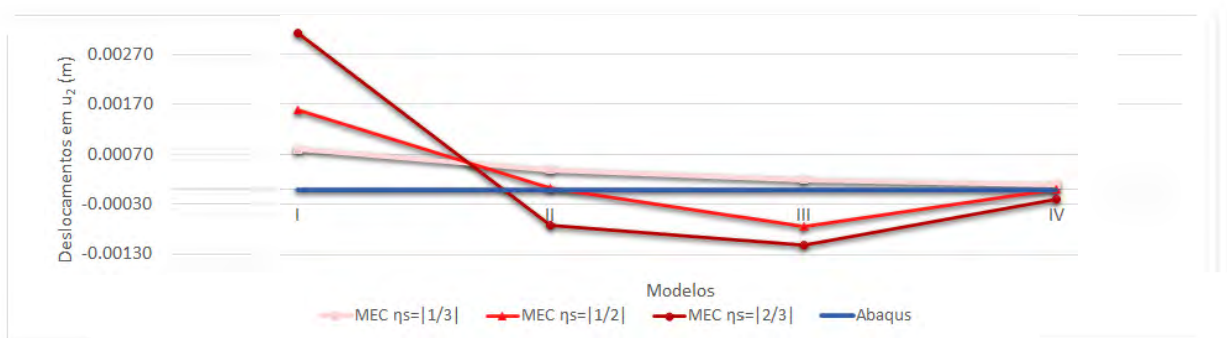
FONTE: O Autor

FIGURA 34 – DESLOCAMENTO EM U1 (m) NO PONTO 4 PARA DIFERENTES MALHAS



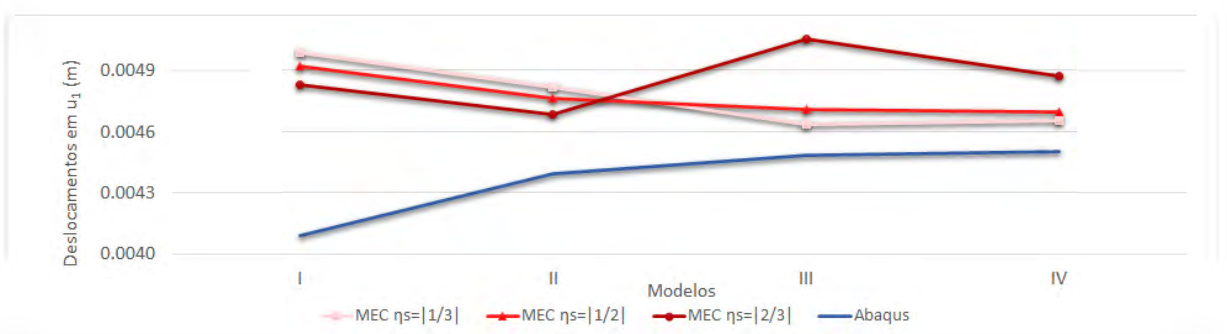
FONTE: O Autor

FIGURA 35 – DESLOCAMENTO EM U2 (m) NO PONTO 4 PARA DIFERENTES MALHAS



FONTE: O Autor

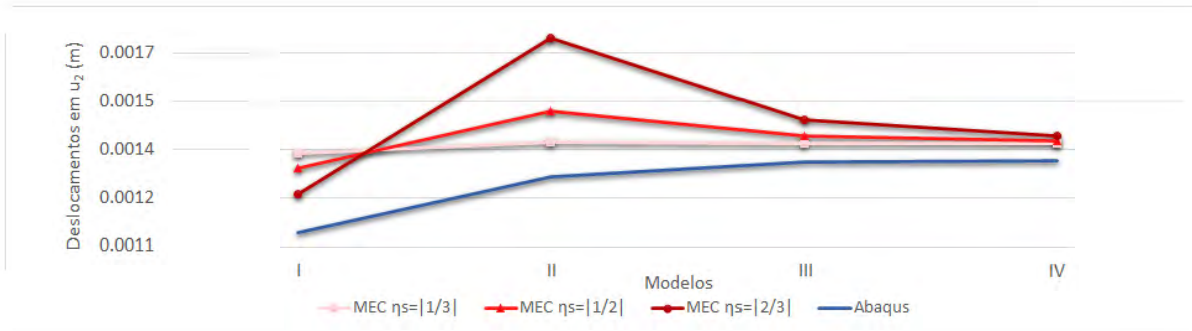
FIGURA 36 – DESLOCAMENTO EM U1 (m) NO PONTO 5 PARA DIFERENTES MALHAS



FONTE: O Autor

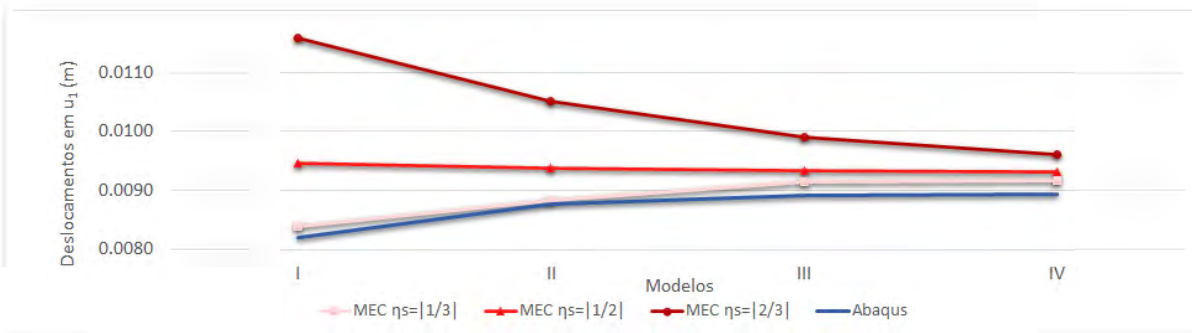


FIGURA 37 – DESLOCAMENTO EM U<sub>2</sub> (m) NO PONTO 5 PARA DIFERENTES MALHAS



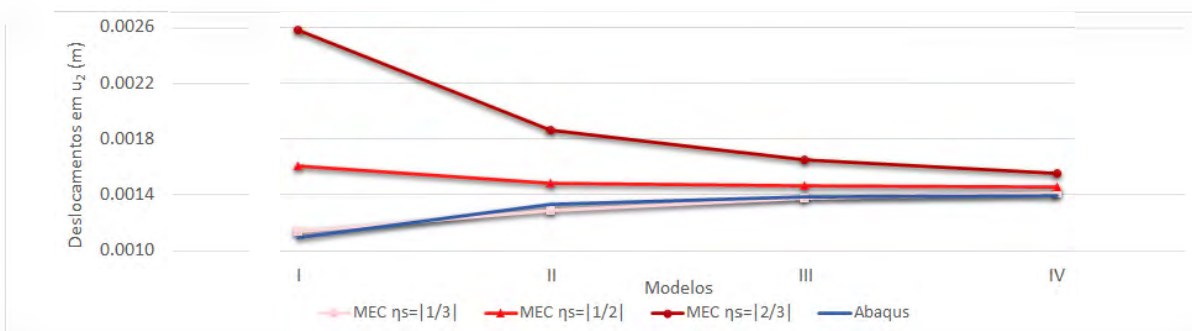
FONTE: O Autor

FIGURA 38 – DESLOCAMENTO EM U<sub>1</sub> (m) NO PONTO 6 PARA DIFERENTES MALHAS



FONTE: O Autor

FIGURA 39 – DESLOCAMENTO EM U<sub>2</sub> (m) NO PONTO 6 PARA DIFERENTES MALHAS



FONTE: O Autor

TABELA 7 – DIFERENÇAS PERCENTUAIS DOS DESLOCAMENTOS DO MEC EM RELAÇÃO AO ABAQUS

DIFERENÇA PERCENTUAIS DOS DESLOCAMENTOS NO MEC EM RELAÇÃO AO ABAQUS							
PONTO	MODELO	$u_1$			$u_2$		
		1/3	1/2	2/3	1/3	1/2	2/3
1	I	30,14	27,05	22,67	39,35	35,23	28,44
	II	12,57	11,33	9,52	14,74	12,11	7,92
	III	6,50	6,03	5,33	8,37	7,24	5,47
	IV	4,85	4,69	4,45	5,71	5,28	4,64
2	I	17,11	15,74	13,80	33,20	32,24	30,78
	II	7,65	7,12	6,36	9,62	9,75	9,96
	III	4,94	4,74	4,45	5,09	5,08	5,08
	IV	4,31	4,23	4,12	4,28	4,26	4,23
3	I	20,44	18,64	16,07	0	0	0
	II	8,70	7,98	6,92	0	0	0
	III	5,26	5,00	4,62	0	0	0
	IV	4,41	4,32	4,18	0	0	0
4	I	15,83	14,92	13,56	0	0	0
	II	7,21	6,48	5,36	0	0	0
	III	4,77	4,92	4,14	0	0	0
	IV	4,39	4,16	4,04	0	0	0
5	I	22,15	20,51	18,20	22,66	18,30	10,99
	II	9,67	8,38	6,57	8,41	16,17	34,28
	III	3,37	5,01	12,67	4,61	6,21	10,01
	IV	3,44	4,33	8,24	4,12	4,55	5,70
6	I	2,27	15,16	41,16	4,34	46,65	136,06
	II	0,64	7,00	19,80	3,42	10,90	39,58
	III	2,69	4,76	11,18	1,06	5,43	18,64
	IV	2,66	4,26	7,49	1,20	4,46	11,00

FONTE: O Autor

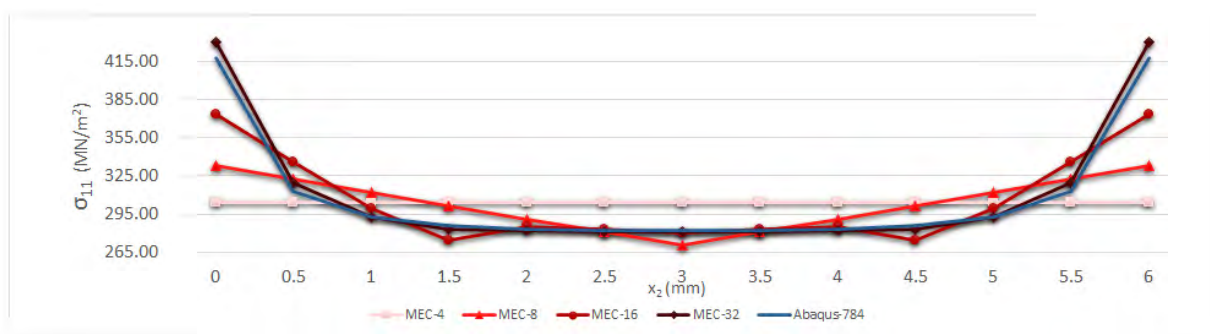
Comparando-se os resultados do MEC e do Abaqus constata-se que quanto mais refinadas as malhas melhor é a aproximação dos resultados. Percebe-se com clareza visual nos gráficos que os resultados de deslocamentos convergem, reduzindo as diferenças relativas entre o MEC e o Abaqus conforme evidenciado na Tabela 7. As diferenças percentuais ao se comparar os modelos tipo I estão na casa das dezenas, a passo que com os modelos IV a diferença reduz para a casa das unidades.

Os resultados dos deslocamentos verticais  $u_2$  dos Pontos 3 e 4 são nulos, mostrando coerência, por estarem na linha central (de simetria) da chapa. No ponto 3 o Abaqus

apresentou um resultado na ordem  $10^{-15}$  com o modelo IV. Embora de uma ordem de grandeza superior em relação aos resultados obtidos com os modelos I, II e III, ainda assim um valor nulo.

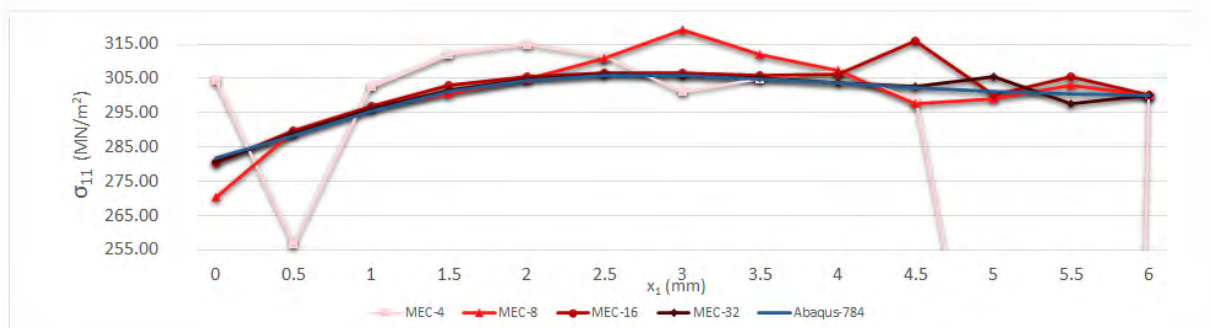
Os resultados de tensões ao longo das linhas do engaste e de simetria destacadas na Figura 22 são comparados na Figura 40 e Figura 41 utilizando-se apenas o modelo IV do Abaqus.

FIGURA 40 – TENSÕES  $\sigma_{11}$  NA LINHA E (ENGASTE)



FONTE: O Autor

FIGURA 41 – TENSÕES  $\sigma_{11}$  NA LINHA S (SIMETRIA)



FONTE: O Autor

Na Tabela 8 percebe-se com clareza a redução dos erros relativos em relação ao modelo IV do Abaqus com o maior refinamento das malhas. As tensões tanto na linha E (engaste) quanto na linha S (simetria) demonstram convergência. Em alguns pontos as malhas mais pobres apresentam um erro relativo menor, porém isso é resultado do cruzamentos da linhas, como mostra os gráficos das Figuras Figura 40 e Figura 41.

No caso particular tipo I do MEC, com a malha mais pobre do MEC com 4 elementos, os resultados das tensões na linha S apresentaram um dado curioso, uma maior divergência em um ponto próximo ao lado direito do modelo, entre  $x_1 = 4,5 m$  e  $x_1 = 6,0$

TABELA 8 – DIFERENÇAS PERCENTUAIS NO MEC EM RELAÇÃO AO ABAQUS

DIFERENÇAS PERCENTUAIS NO MEC EM RELAÇÃO AO ABAQUS								
$x_1$ (m)	LINHA A				LINHA B			
	MODELOS							
	MEC - 4	MEC - 8	MEC - 16	MEC - 32	MEC - 4	MEC - 8	MEC - 16	MEC - 32
0,0	27,28	20,42	10,77	2,91	8,01	4,18	0,54	0,45
0,5	2,77	3,04	7,38	2,03	10,99	0,40	0,43	0,18
1,0	4,15	6,78	6,78	0,18	2,41	0,37	0,43	0,25
1,5	6,53	5,54	4,02	0,96	3,64	0,16	0,65	0,18
2,0	7,48	2,77	0,55	0,42	3,51	0,18	0,42	0,16
2,5	7,89	0,56	0,14	0,41	1,87	1,72	0,31	0,12
3,0	8,01	2,77	0,55	0,45	1,53	4,43	0,28	0,08
3,5	7,89	0,56	0,14	0,41	0,02	2,34	0,31	0,06
4,0	7,48	2,77	0,55	0,42	1,11	1,12	0,85	0,05
4,5	6,53	5,54	4,02	0,96	1,29	1,64	4,46	0,06
5,0	4,15	6,78	2,25	0,18	39,73	0,76	0,38	1,38
5,5	2,77	3,04	7,38	2,30	328,67	0,78	1,72	0,90
6,0	27,28	20,42	10,77	2,91	0,01	0,01	0,01	0,01

FONTE: O Autor

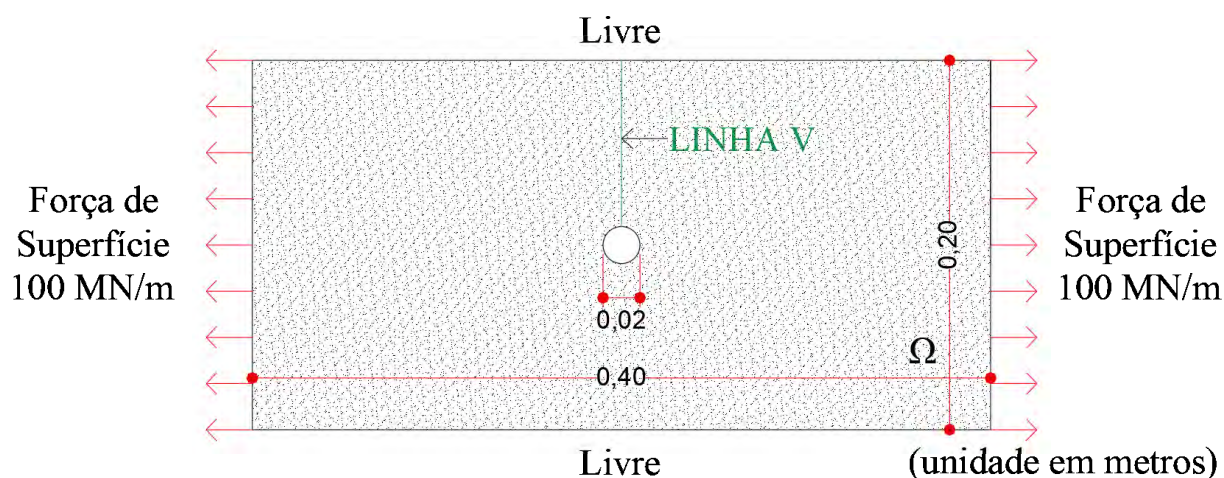
$m$ , também evidenciado no gráfico da Figura 41. O erro reduziu sensivelmente com o maior grau de refinamento.

Os resultados de tensões  $\sigma_{11}$  na linha E (engaste) e na linha S (simetria) utilizando-se a malha tipo IV do MEC, com 32 elementos, apresenta excelente convergência com os resultados do Abaqus.

## 6.2 CHAPA COM ORIFÍCIO SOB TRAÇÃO

Para avaliar o comportamento de uma chapa com um orifício central de raio de 1 cm foi considerada uma chapa plana de aço com dimensão  $0,20 \times 0,40 \text{ m}^2$  e espessura desprezível. A mesma foi submetida a forças de superfície de tração de  $100 \text{ MN/m}$ , conforme ilustra a Figura 42. As seguintes propriedades foram consideradas para o material: módulo de elasticidade longitudinal  $E = 205.000 \text{ MPa}$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

FIGURA 42 – CHAPA PLANA COM ORIFÍCIO



FONTE: O Autor

A solução analítica da tensão normal angular ao redor de um orifício em um problema similar, porém para uma chapa de dimensão infinita é dada por,

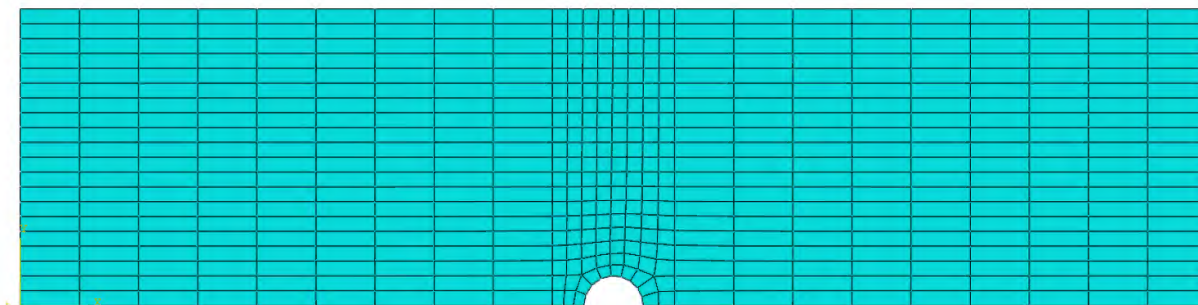
$$\sigma_{\Theta\Theta} = \frac{\sigma_0}{2} \left( 1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_0}{2} \left( 1 + \frac{3r_i^4}{r^4} \right) \cos 2\Theta, \quad (111)$$

onde  $r_i$  é o raio do orifício,  $r$  é a distância do centro do orifício e  $\Theta$  é o ângulo em relação ao sentido da força de superfície.

Devido à limitação de 1000 nós da versão estudante do Abaqus, o modelo foi reduzido para meia chapa,  $0,10 \times 0,40 \text{ m}$ , permitindo refinar a malha de elementos, com um no total de 569 elementos. Para melhorar os resultados os elementos do meio da chapa, onde os deslocamentos serão analisados a densidade de elementos é maior, deixando os elementos quadrados com lado igual a  $0,005 \text{ m}$ , os demais elementos ficaram retangulares com lados  $0,005 \times 0,02 \text{ m}^2$ , como mostra a Figura 43. Na linha de simetria foi imposta a

restrição de deslocamento no sentido  $x_2$  e no ponto central da maior borda externa foi imposta a restrição de movimento no sentido  $x_1$ .

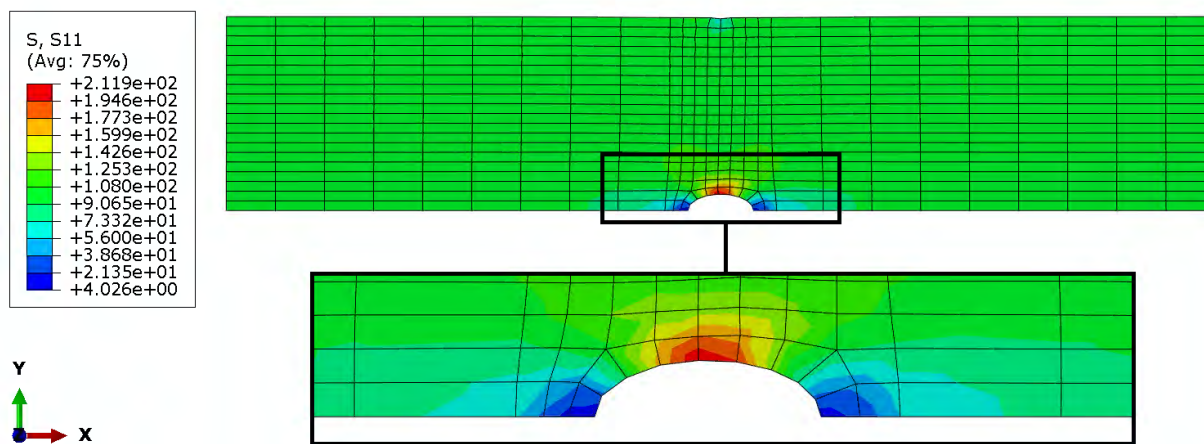
FIGURA 43 – MODELO NO ABAQUS



FONTE: O Autor

O resultado das tensões em  $\sigma_{11}$  do Abaqus é apresentado na Figura 44.

FIGURA 44 – ABAQUS - CAMPO DE TENSÕES  $\sigma_{11}$

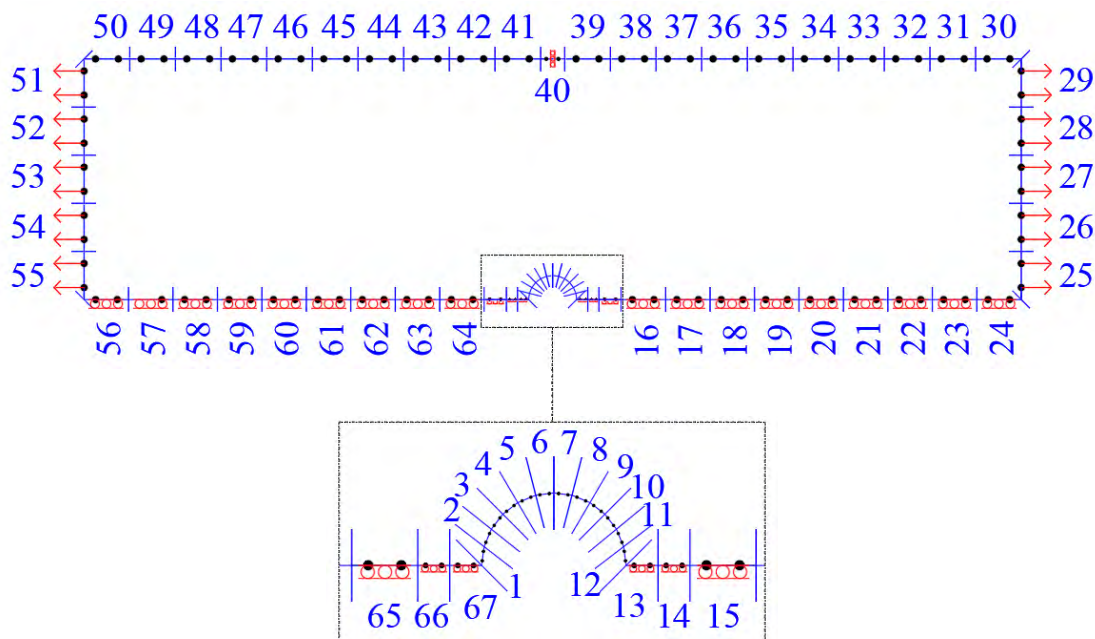


FONTE: O Autor

Na modelagem da chapa plana com o MEC (ver Figura 45) foi considerada também metade da chapa  $0,10 \times 0,40 \text{ m}^2$  e as mesmas restrições de deslocamento empregadas na modelagem com o Abaqus. Ao todo, 67 elementos lineares descontínuos de geometria reta foram utilizados (ver Figura 45). Nesta modelagem de estado plano de tensões com o MEC, os pontos de colocação dos elementos foram localmente definidos como  $|\eta_1| = \eta_2 = 1/2$ .



FIGURA 45 – MODELO NO MEC

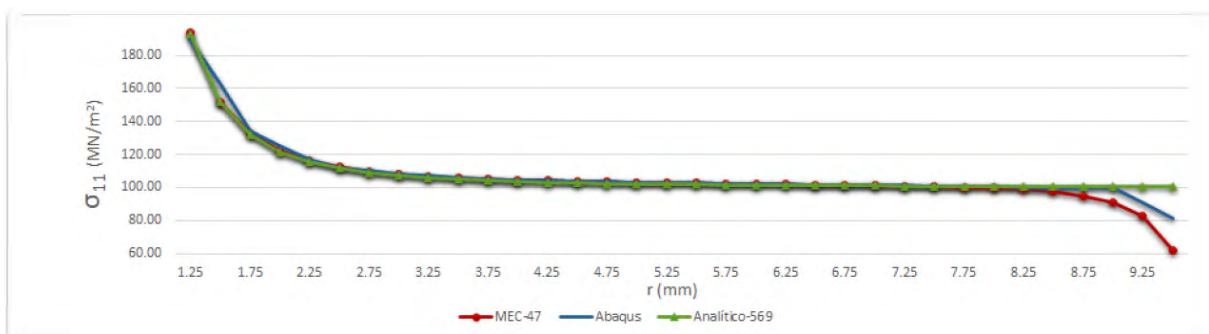


FONTE: O Autor

Os resultados de tensões  $\sigma_{11}$  ao longo da linha V (verde) obtidos com o MEC são comparados com os resultados do Abaqus e com os resultados da expressão analítica para uma chapa de dimensões infinitas, conforme mostra a Figura 46. Os resultados são muito próximos e apenas destoam da resposta analítica próximo à borda da chapa finita, a partir de  $r = 0,09$  m, o que era esperado.

Na Tabela 9 observa-se que quando o raio é 0,0125 m o resultado da solução analítica foi de 193,44 MN/m, do MEC foi de 193,64 MN/m e do Abaqus foi de 189,45 MN/m. O erro em relação à resposta analítica foi de 0,105% no MEC e de 2,06% no Abaqus. Apesar do aparente melhor desempenho do MEC nessa avaliação, o principal ponto a ser destacado é a boa convergência dos resultados.

FIGURA 46 – RESULTADOS EXERCÍCIO 2 - TENSÕES  $\sigma_{11}$  NA LINHA V



FONTE: O Autor

TABELA 9 – TENSÕES ANGULARES EM (MN/m)

TENSÕES ANGULARES EM (MN/m)					
r (m)	Solução analítica	Abaqus	Erro (%)	MEC	Erro (%)
0,0125	193,44	189,45	2,06	193,85	0,43
0,0150	151,85	163,61	7,74	152,50	0,54
0,0175	132,32	134,52	1,66	133,03	0,62
0,0200	121,88	124,96	2,53	122,63	0,68
0,0225	115,73	117,02	1,12	116,51	0,72
0,0250	111,84	112,23	0,35	112,64	0,75
0,0275	109,23	110,34	1,01	110,05	0,77
0,0300	107,41	108,20	0,73	108,23	0,79
0,0325	106,08	107,11	0,97	106,91	0,80
0,0350	105,08	105,95	0,82	105,92	0,80
0,0375	104,31	105,28	0,93	105,15	0,81
0,0400	103,71	104,56	0,82	104,55	0,81
0,0425	103,23	104,14	0,88	104,06	0,80
0,0450	102,83	103,67	0,81	103,66	0,79
0,0475	102,51	103,37	0,84	103,32	0,78
0,0500	102,24	103,06	0,80	103,04	0,76

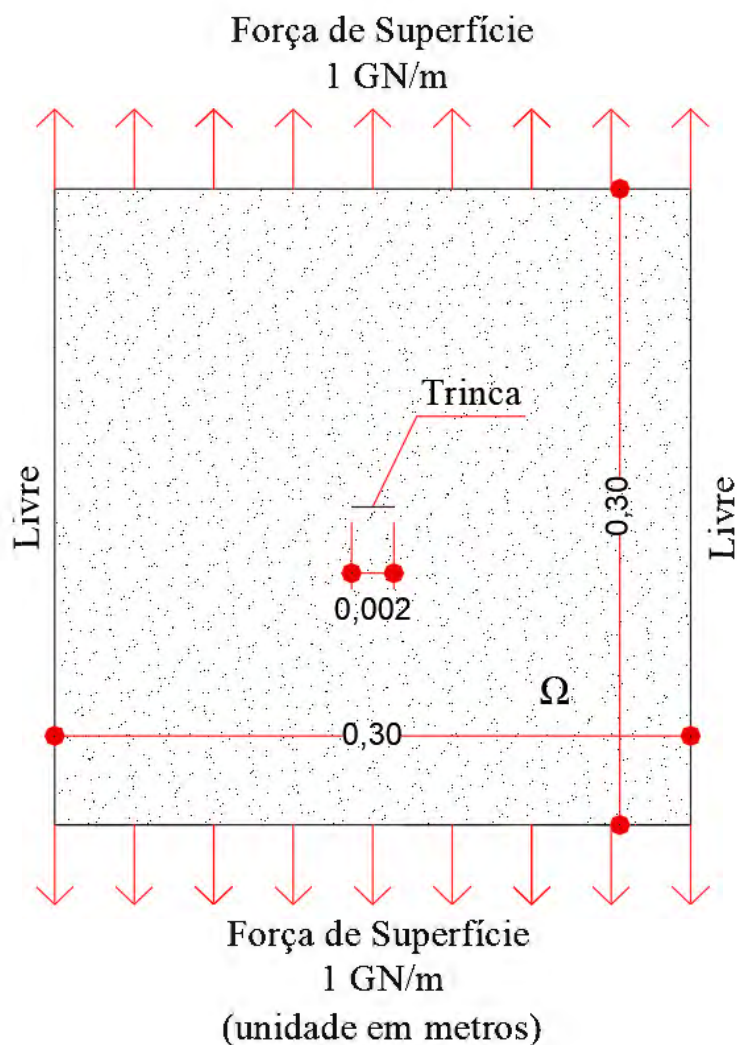
FONTE: O Autor



## 6.3 CHAPA COM TRINCA HORIZONTAL SOB TRAÇÃO

Nesse exemplo foi avaliada uma chapa plana quadrada de aço de dimensão  $0,30 \times 0,30$  m, com espessura desprezível e contendo uma trinca horizontal em seu centro. Em particular, avaliou-se a abertura da trinca e o campo de tensões em sua extremidade com a aplicação de uma força de superfície de tração de  $1 \text{ GN/m}$  ortogonal à trinca, forçando sua abertura. A trinca possui  $0,002$  m, conforme ilustra a Figura 47. As seguintes propriedades foram adotadas para o material da chapa: módulo de elasticidade longitudinal  $E = 200.000$  MPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ .

FIGURA 47 – CHAPA PLANA COM TRINCA



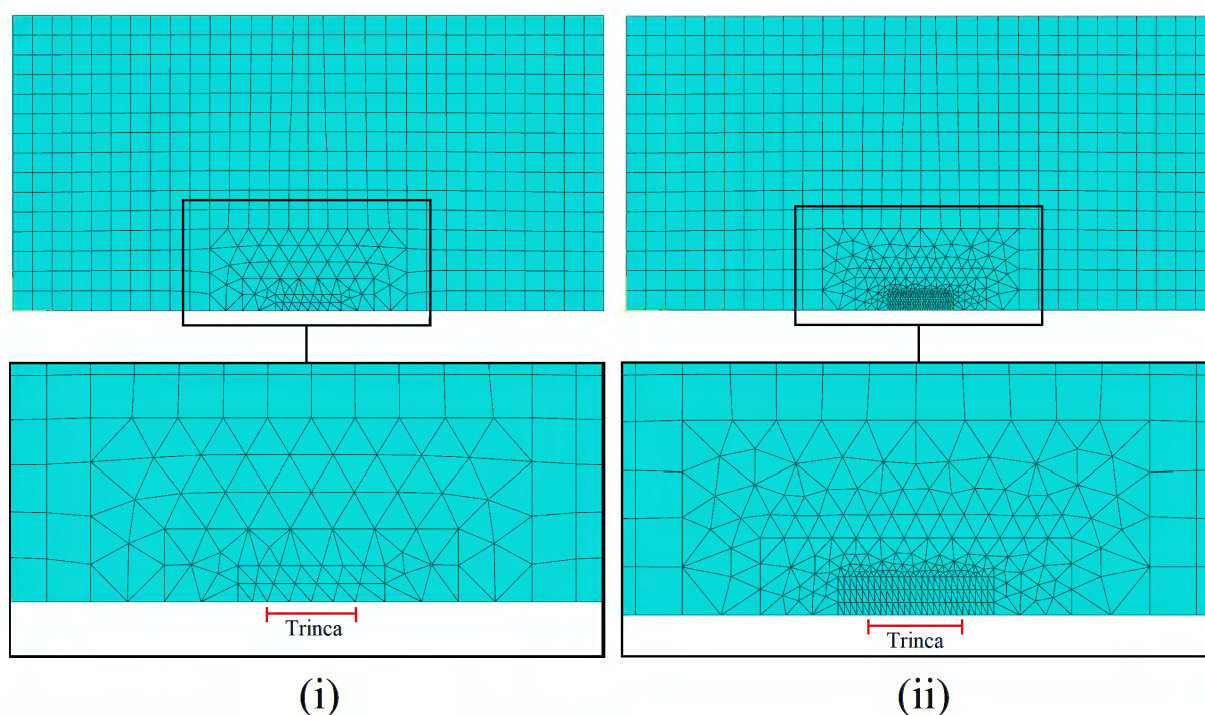
FONTE: O Autor

No Abaqus, a chapa foi avaliada considerando sua simetria em relação ao eixo horizontal de tal forma que somente uma face da trinca fosse modelada. As dimensões da chapa modelada foram de  $0,15 \times 0,30 \text{ m}^2$ , com dois modelos: O primeiro com 545 elementos,

410 elementos tipo Quad e 135 são elementos tipo Tri na região próxima à trinca. E o segundo com 895 elementos finitos, 411 são elementos tipo Quad e 484 são elementos tipo Tri na região próxima à trinca, conforme ilustram (i) e (ii) da Figura 48.

Na linha de simetria foi imposta a restrição de deslocamentos no sentido  $x_2$  exceto no trecho compreendido pela trinca. Na borda externa superior foi considerada a força de superfície de tração no sentido  $x_2$  e a restrição ao movimento na direção  $x_1$  no ponto médio da borda.

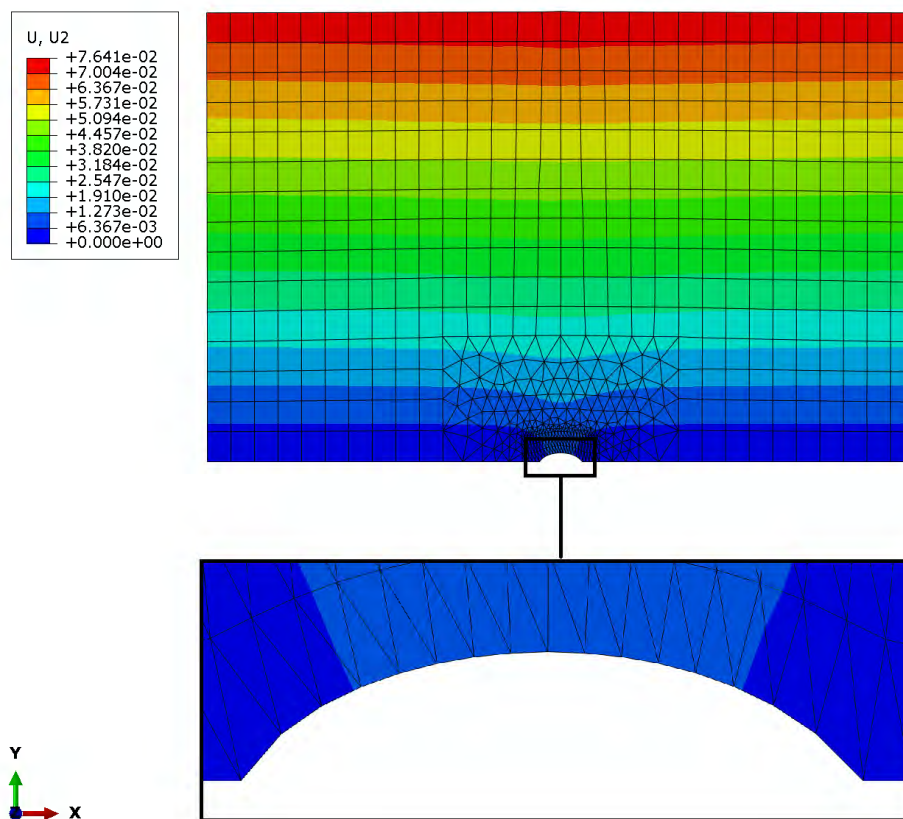
FIGURA 48 – MODELO DE CHAPA COM TRINCA ABAQUS COM 545 E 895 ELEMENTOS)



FONTE: O Autor

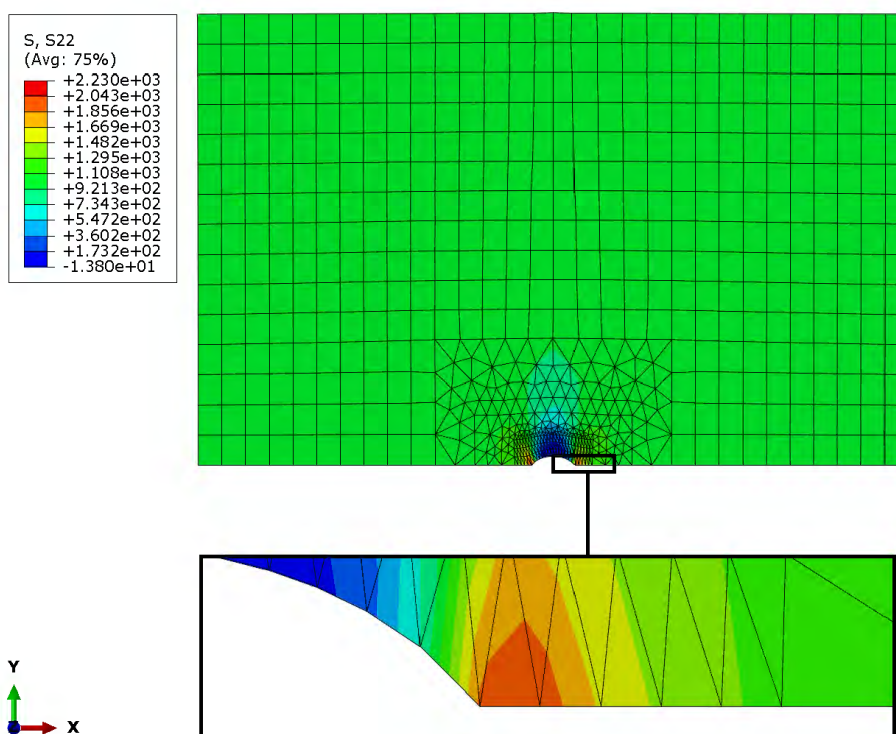
Nas Figuras 49 é referente aos campos de deslocamentos e mostram a deformação da trinca na chapa e Figuras 50 que é campo de tensões mostra o pico de tensão na ponta da trinca, ambos são do resultado do Abaqus com 895 elementos.

FIGURA 49 – CAMPO DE DESLOCAMENTOS U2 (ABAQUS COM 895 ELEMENTOS)



FONTE: O Autor

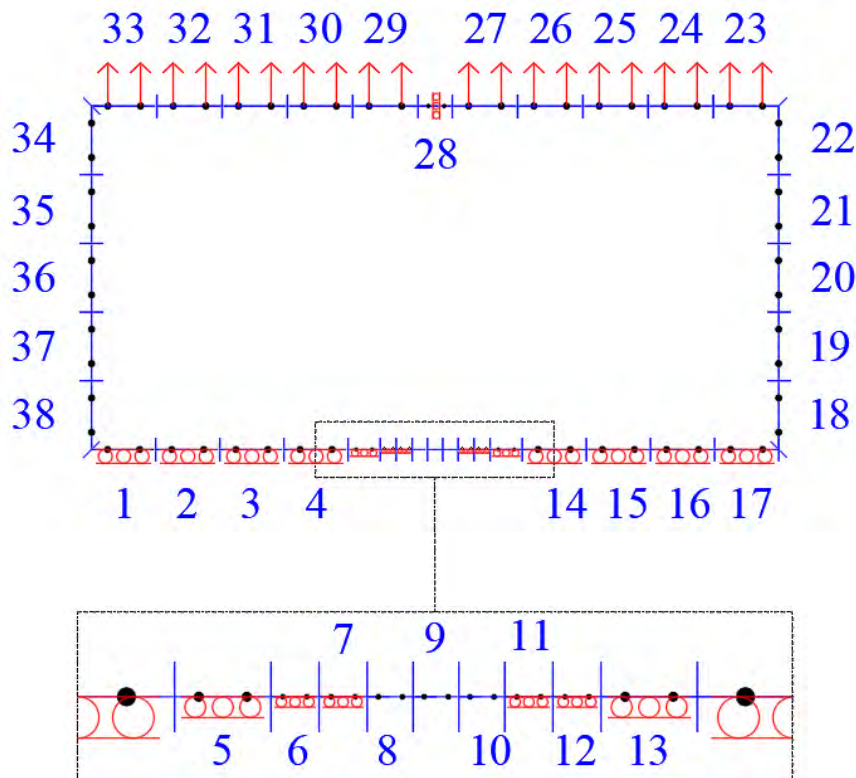
FIGURA 50 – CAMPO DE TENSÕES  $\sigma_{22}$  (ABAQUS COM 895 ELEMENTOS)



FONTE: O Autor

A modelagem da chapa plana com o MEC também foi restrita à metade do modelo, seguindo as mesmas condições de contorno aplicadas na modelagem com o Abaqus. Três discretizações foram empregadas com o MEC contendo 38, 46 e 59 elementos de contorno lineares descontínuos de geometria reta (ver Figuras 51, 52 e 53). Os nós funcionais dos elementos descontínuos nos três casos de discretização foram definidos com  $|\eta_1| = \eta_2 = 1/2$ .

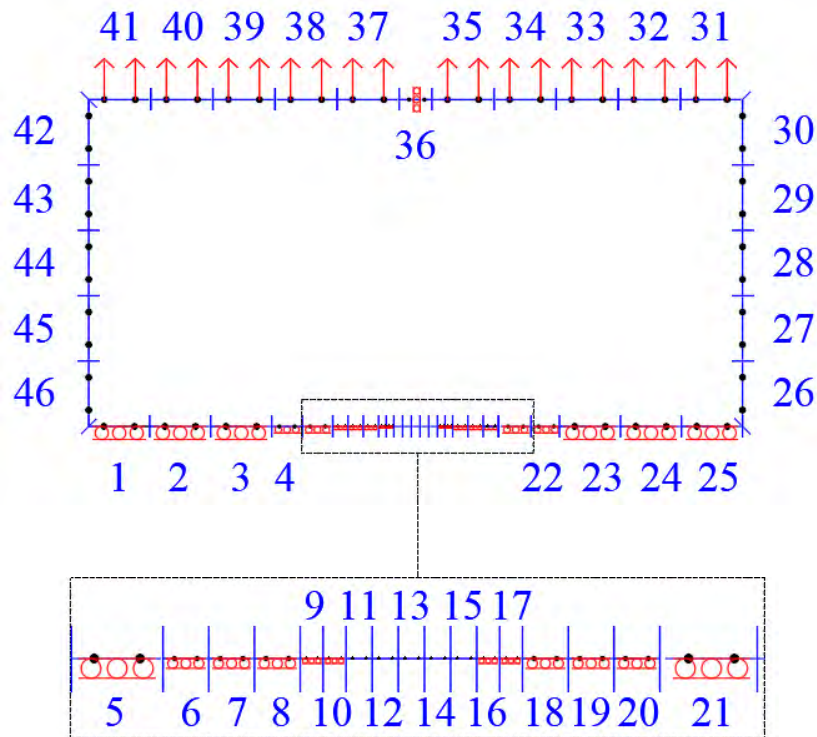
FIGURA 51 – MODELO DE CHAPA COM TRINCA (MEC COM 38 ELEMENTOS)



FONTE: O Autor

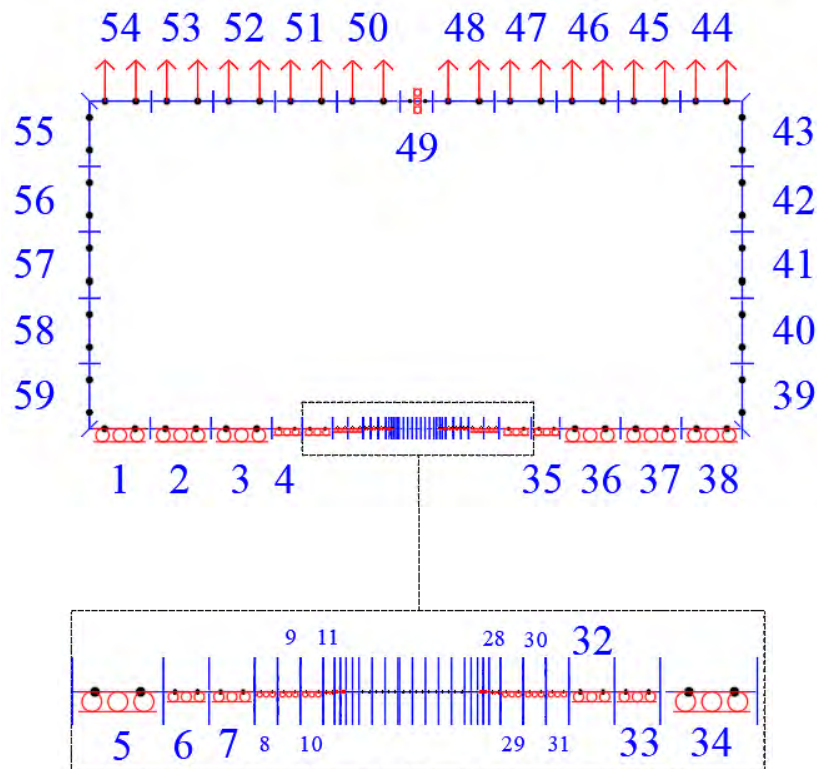


FIGURA 52 – MODELO DE CHAPA COM TRINCA (MEC COM 46 ELEMENTOS)



FONTE: O Autor

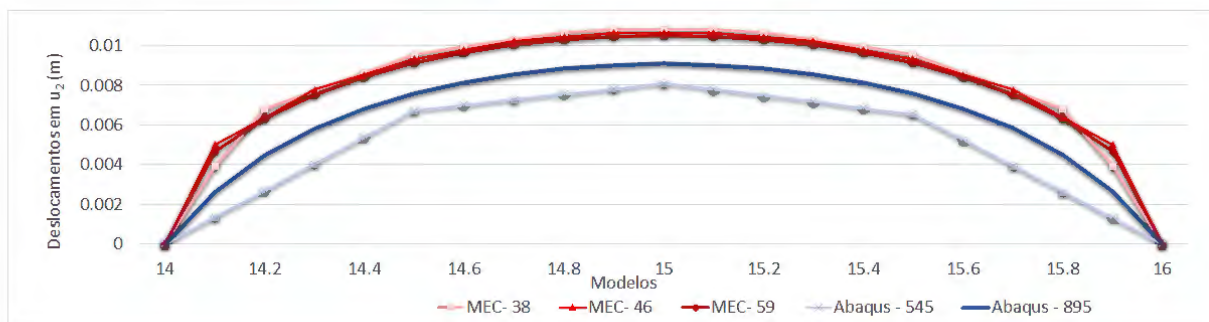
FIGURA 53 – MODELO DE CHAPA COM TRINCA (MEC COM 59 ELEMENTOS)



FONTE: O Autor

Na Figura 54 são apresentados os resultados de deslocamento vertical de abertura da trinca com os modelos MEC e Abaqus. Observa-se uma boa concordância dos resultados, a simetria (visual) da abertura e a convergência dos resultados do MEC com o refinamento da malha e também tiveram pouca variação, já no caso do Abaqus mostra que quanto mais refinado o modelo os resultados tendem ao MEC.

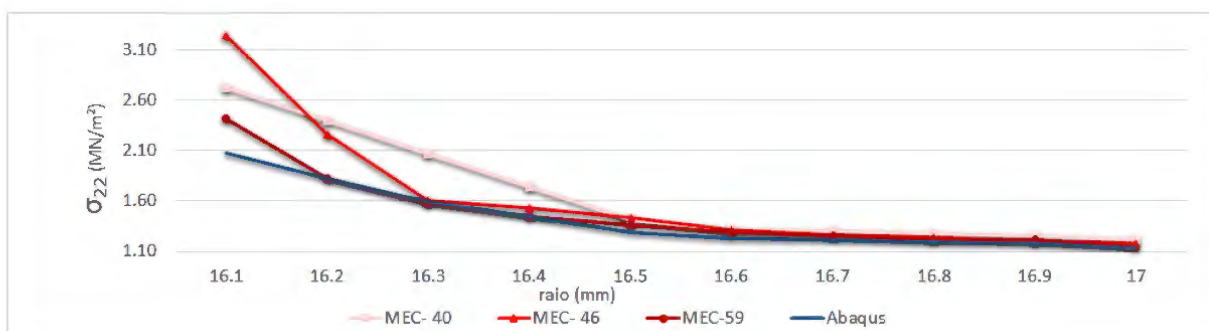
FIGURA 54 – DESLOCAMENTO  $u_2$  DE ABERTURA DA TRINCA - COMPARATIVO ENTRE O MEC E O ABAQUS



FONTE: O Autor

Os resultados das tensões  $\sigma_{22}$  ao longo da linha com a mesma direção da trinca e próximas à sua extremidade são apresentados na Figura 55. Observa-se que, para as três discretizações, os resultados do MEC apresentaram uma boa concordância entre si e que os resultados do ABAQUS convergem para os do MEC. Além disso, a simetria da abertura da trinca pode ser visualizada. Foi desconsiderada a malha do Abaqus com 545 elementos porque ficou poucos pontos na ponta da trinca, impossibilitando a gerar um gráfico coerente.

FIGURA 55 – CAMPO DE TENSÕES  $\sigma_{22}$  NA PONTA DA TRINCA - COMPARATIVO ENTRE O MEC E O ABAQUS)



FONTE: O Autor

## 7 CONCLUSÕES

O método dos elementos de contorno tem sido aplicado com sucesso em diferentes áreas da ciência e um ponto comum a todas as aplicações, inerente ao método, é a necessidade de resolução de integrais impróprias para a formação do sistema de equações durante a solução dos problemas. Conforme apresentado no texto as integrais impróprias podem envolver singularidades fracas ou fortes.

Esse trabalho apresentou de forma didática a formulação clássica do MEC para problemas de elasticidade bidimensional. A solução de integrais impróprias para essa classe de problemas é um assunto conhecido na literatura e o foco do presente trabalho foi trazer uma contribuição clara e didática para a implementação de elementos lineares contínuos e descontínuos de geometria reta e sua integração direta quando a singularidade fraca ou forte se faz presente. Nesse contexto, tabelas com expressões para cálculo das integrais impróprias foram desenvolvidas e apresentadas para essa finalidade. São expressões que podem ser facilmente adaptadas a códigos computacionais clássicos do MEC.

Entre as expressões obtidas para cálculo das singularidades fortes foi possível observar que à medida que os nós funcionais do elemento descontínuo são conduzidos às extremidades do elemento, o mesmo torna-se contínuo e as expressões tornam-se expressões cuja singularidade na avaliação do Valor Principal de Cauchy só é cancelada com a análise conjunta de dois elementos vizinhos.

Grande parte das expressões obtidas foram validadas por meio de exemplos numéricos simples, cujas soluções com o MEC utilizando o Matlab foram confrontadas com soluções numéricas obtidas com o software comercial Abaqus ou com expressões analíticas da elasticidade.

Uma ótima correlação de resultados foi obtida em todos os casos analisados com elementos lineares descontínuos, indicando a correta implementação do código e das expressões derivadas, tanto para as integrações diretas de singularidade fraca (logarítmica) e forte ( $O(1/r)$ ) em substituição ao tradicional movimento de corpo rígido.

Outro fato que pode ser constatado por meio dos exemplos foi a boa convergência dos resultados com o maior refinamento das malhas do MEC.

### 7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As expressões desenvolvidas e implementadas para integrações singulares de elementos lineares retos contínuos e descontínuos trouxeram bons resultados nas aplicações

de elasticidade apresentadas. Mas é perceptível que a aproximação linear em pontos com concentração de tensões requer uma discretização refinada para a obtenção de melhores resultados. Com o objetivo de aprofundar ou ampliar o conhecimento correlacionado ao tema, sugere-se alguns tópicos que podem ser abordados em trabalho futuros, como:

- Desenvolvimento de novas tabelas de expressões para integrações singulares considerando outras ordens de interpolações, por exemplo, com elementos quadráticos ou cúbicos, possibilitando uma melhor aproximação dos resultados com valores esperados e conhecidos na literatura clássica;

- Estender a mesma abordagem de desenvolvimento de expressões práticas à formulação hipersingular, existente nas equações 30 e 31, do MEC para a elasticidade bidimensional, o que exigirá um estudo mais aprimorado sobre as integrações impróprias;

- Investigação sobre o uso de malhas regulares ou irregulares, buscando a criação de regras/sugestões de discretização para a otimização dos resultados.



## REFERÊNCIAS

- ALIABADI, M. H. **Numerical Fratura Mechanics**. Boston - MA: Kluwer Academic, 1991. Citado na página 24.
- BACARJI, E. **Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise De Pavimentos de Edifícios**. 2001. Tese (Doutorado em Engenharia das Estruturas) — Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2001. Citado na página 18.
- BANERJEE, P.; BUTTERFIELD, R. **Boundary Element Methods in Engineering Science**. McGraw-Hill - UK: McGraw-Hill Inc., 1981. Citado na página 17.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements An Introctory Course**. Boston: McGraw-Hill, 1989. Citado 6 vezes nas páginas 17, 19, 24, 29, 43 e 93.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Methods For Electrical Engineers**. berlin Heidelberg, New york, Tokyo: Springer-Verlag, 1984. Citado 4 vezes nas páginas 16, 24, 26 e 30.
- CHENG, A. H.-D.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. **Elsevier**, v. 29, p. 268–302, 2005. Citado na página 16.
- DOBLARE, M. **Computational Aspects of the Boundary Element Method**. Topics in boundary element research, springerverlag. Berlim-Al: Brebbia C.A. (ed.), 1987. Citado na página 17.
- GUIGGIANI, M. Direct evaluation of hypersingular integrals in 2d bem, in: Hackbusch. **W. (ed.), Notes in Numerical Field Mechanics**, v. 33, p. 23–24, 1992a. Citado na página 17.
- GUIGGIANI, M.; CASALINI, P. Direct computation of cauchy principal value integrals in advanced boundary elements. Pisa-It, f. 1711–1720, 1987. Citado 4 vezes nas páginas 17, 29, 57 e 61.
- GUIGGIANI, M. et al. . a general algorithm for the numerical equations. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v. 59, p. 604–614., 1992b. Citado na página 17.
- HALL, W. **Integration Methods for Singular Boundary Element Integrands**. Boundary elements x, vol. 1. South-ampton: Brebbia C.A. (ed.), 1988. Citado na página 17.
- HARTMANN. **Computing C-matrix in non-smooth boundary points**. 7. ed.. ed. São Paulo - SP: Pearson Prentice Hall,, 2004. Citado na página 30.
- HAYAMI, K.; BREBBIA, C. A. A new coordinate transformation method for singular and nearly singular integrals over general curved boundary elements. **Boundary Elements IX**, v. 1, p. 375–399, 1987. Citado na página 17.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. London: Butterworths, 2019. Citado na página 19.
- JASWON, M. Integral equation methods in potential theory i. **Proc R Soc**, v. 275, p. 23–32, 1963a. Citado na página 16.

JASWON, M. Ponter ar. an integral equation solution of the torsion problem. **Proc R Soc**, v. 273, p. 37–46, 1963b. Citado na página 16.

JASWON, M. Symm gt. integral equation methods in potential theory, ii. **Proc R Soc**, v. 275, p. 33–46, 1963c. Citado na página 16.

KANE, J. **Boundary Elements Analysis in Engineering Continuum Mechanics**. Englewood Cliffs - NJ: Prentice Hall, 1994. Citado na página 17.

KATSIKADELIS, J.; ARMENAKAS, A. Numerical evaluation of line integrals with a logarithmic singularity. **AIAA Journal**, v. 23, p. 1135–1137, 1983. Citado na página 17.

KATSIKADELIS, J. T. **Boundary Elements - Theory and applications**. Athens - Greece: Elsevier Science, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

KEIDEL, C. **Aplicação do Método dos Elementos de Contorno na Modelagem de Testes de Pressão em Poços de Petróleo**. Março 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, 2011. Citado na página 18.

KREYSZIG, E. **Matemática superior**. Rio de Janeiro: LTC Editor, 1984. Citado na página 33.

KUPRADZE, V. **Potential methods in the theory of elasticity**. In: **Sneddon IN, Hills R, editors. Israeli program for scientific translations**. Kupradze vd, dynamical problems in elasticity, vol. iii in progress in solid mechanics. Hills R. North-Holland: Sneddon IN, 1965. Citado na página 16.

KUPRADZE, V.; ALEKSIDZE, M. The method of functional equations for the approximate solution of some boundary value problems. **Zh vychisl mat i mat fiz**, v. 4, p. 683–715, 1964. Citado na página 16.

KUTT, H. R. The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. **Numerische Mathematik**, v. 24, p. 205–210, 1975. Citado na página 17.

RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Q. Appl. Math.**, v. 25, p. 83–95, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.

SCUCIATO, R. F. **Estudo Teórico E Implementação Computacional Do Método De Elementos De Contorno Aplicado A Problemas Elastostáticos Lineares Bidimensionais**. 185 f. Dissertação (Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba - PR, 2007. Citado na página 24.

SLADEK, V.; SLADEK, J. **Singular Integrals in Boundary Element Methods**. South-ampton: Computational Mechanics Publications, 1988. Citado na página 17.

TAGUTI, Y. **Método dos Elementos de Contorno na Resolução do Problema de Segunda Ordem em Placas Delgadas**. 2010. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá -SP, 2010. Citado na página 18.

TELLES, J. C. F. A self-adaptive coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 959–973, 1989. Citado na página 17.

THEOCARIS, P. Numerical solution of singular integral equations: Methods. **ASCE Journal of Engineering Mechanics**, v. 107, p. 733–751, 1981a. Citado na página 17.

THEOCARIS, P. Numerical solution of singular integral equations: Applications. **ASCE Journal of Engineering Mechanics**, v. 107, p. 753–771, 1981b. Citado na página 17.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. 3. ed.. ed. New York- NY: Guanabara Dois, 1970. Citado na página 19.

WUTZOW, W. W. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Chapas Com Enrijecedores**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia das Estruturas) — Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2003. Citado na página 18.

ANEXO

**ANEXO A – QUADRATURA GAUSSIANA UNIDIMENSIONAL**

TABELA 10 – PONTOS E PESOS DA QUADRATURA GAUSSIANA UNIDIMENSIONAL

$\eta_k$	$w_k$	$\eta_k$	$w_k$
$k = 2$		$k = 8$	
-0,577350269189626	1,000000000000000	0,960289856497536	0,101228536290376
$k = 3$		0,7996666477413627	0,222381034453374
0,000000000000000	0,888888888888888	0,525532409916329	0,313706645877887
0,774596669241483	0,555555555555555	0,183434642495650	0,362683783378362
$k = 4$		$k = 9$	
0,861136311594053	0,347854845137454	0,000000000000000	0,330239355001260
0,339981043584856	0,652145154862546	0,324253423403809	0,312347077040003
$k = 5$		0,613371432700590	0,26061069640935
0,000000000000000	0,568888888888889	0,836031107326636	0,180648160694857
0,538469310105683	0,47862867045699366	0,968160239507626	0,081274388361574
0,906179845938664	0,236926885056189	$k = 10$	
$k = 6$		0,973906528517172	0,066671344308688
0,238619186083197	0,467913934572691	0,865063366688985	0,149451349150581
0,661209386466265	0,360761573048129	0,679409568299024	0,219086362515982
0,932469514203152	0,171324492379170	0,433395394129247	0,269266719309996
$k = 7$		0,148874338981631	0,295524224714753
0,000000000000000	0,417959183673469	$k = 12$	
0,405845151377397	0,38183005050119	0,981560634246719	0,047175336386512
0,741531185599394	0,279705391489277	0,904117256370475	0,106939325995318
0,949107912342759	0,129484966168870	0,769902674194305	0,160078328543346
		0,587317954286617	0,203167426723066
		0,367831498998180	0,233492536538355
		0,125233408511469	0,249147045813403

FONTE: (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989)