

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ELIAKIM CLEYTON MACHADO

ULTRADIFERENCIABILIDADE EM VARIEDADES COMPACTAS E HIPOELITICIDADE  
GLOBAL DE OPERADORES INVARIANTES

CURITIBA

2021

ELIAKIM CLEYTON MACHADO

ULTRADIFERENCIABILIDADE EM VARIEDADES COMPACTAS E HIPOELITICIDADE  
GLOBAL DE OPERADORES INVARIANTES

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando de Ávila Silva.

CURITIBA

2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

M149u

Machado, Eliakim Cleyton

Ultradiferenciabilidade em variedades compactas e hipoeliticidade global de operadores invariantes [recurso eletrônico] / Eliakim Cleyton Machado. – Curitiba, 2021.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021.

Orientador: Fernando de Avila Silva

1. Funções (Matemática). 2. Teoria das distribuições. 3. Fourier, Operadores integrais de. 4. Variedades (Matemática). I. Universidade Federal do Paraná. II. Silva, Fernando de Avila. III. Título.

CDD: 515.7

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

## ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

No dia vinte e dois de fevereiro de dois mil e vinte e um às 14:00 horas, na sala <https://meet.google.com/kcb-oaoh-rqn>, remoto, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de dissertação do mestrando **ELIAKIM CLEYTON MACHADO**, intitulada: **ULTRADIFERENCIABILIDADE EM VARIEDADES COMPACTAS E HIPOELITICIDADE GLOBAL DE OPERADORES INVARIANTES**, sob orientação do Prof. Dr. FERNANDO DE AVILA SILVA. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: FERNANDO DE AVILA SILVA (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), PAULO LEANDRO DATTORI DA SILVA (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO), GABRIEL CUEVA CANDIDO SOARES DE ARAÚJO (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela APROVAÇÃO. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de mestre está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, FERNANDO DE AVILA SILVA, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

CURITIBA, 22 de Fevereiro de 2021.

Assinatura Eletrônica

22/02/2021 17:12:24.0

FERNANDO DE AVILA SILVA

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

22/02/2021 20:02:42.0

PAULO LEANDRO DATTORI DA SILVA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica

22/02/2021 22:23:20.0

GABRIEL CUEVA CANDIDO SOARES DE ARAÚJO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA -  
40001016041P1

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ELIAKIM CLEYTON MACHADO** intitulada: **ULTRADIFERENCIABILIDADE EM VARIEDADES COMPACTAS E HIPOELITICIDADE GLOBAL DE OPERADORES INVARIANTES**, sob orientação do Prof. Dr. FERNANDO DE AVILA SILVA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 22 de Fevereiro de 2021.

Assinatura Eletrônica

22/02/2021 17:12:24.0

FERNANDO DE AVILA SILVA

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

22/02/2021 20:02:42.0

PAULO LEANDRO DATTORI DA SILVA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica

22/02/2021 22:23:20.0

GABRIEL CUEVA CANDIDO SOARES DE ARAÚJO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

*Dedico este trabalho à minha família.*

## AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, agradeço a todos que demonstraram apoio no momento em que decidi ir em busca do sonho de ser Mestre pela UFPR, pois cada dia foi uma batalha contra minhas próprias limitações, então qualquer incentivo foi fundamental durante a jornada.

À minha mãe, Ana Matilde, por toda a dedicação e amor, por tudo que fez e faz pela família. Sem a senhora, eu jamais teria chegado tão longe.

Ao meu irmão, Junior, por ser o irmão mais velho mais legal que eu conheço. Muito obrigado por ter sido, além de irmão, um grande amigo durante toda a vida.

À minha esposa, Fernanda, que foi minha principal fonte de coragem, inspiração e incentivo a sair da zona de conforto e dar o primeiro passo.

Aos meus sogros, Ovidio e Delci, por todo o apoio que tem nos dado neste período longe de casa e por nos acolher durante as visitas ao sudoeste do Paraná.

À todos os professores do departamento de Matemática da UTFPR de Pato Branco que participaram de minha formação durante a graduação. Em especial ao Professor Carlos pelo incentivo e pelas conversas encorajadoras antes de deixar Pato Branco rumo a Curitiba. Aos professores Fredy, Delfino, Alexandre Reis e Cristina por terem me incentivado desde o primeiro ano de graduação a seguir carreira na pós-graduação (hoje vejo que vocês estavam cobertos de razão e que deveria ter seguido seus conselhos ainda mais cedo).

Aos professores do PPGM-UFPR pelas excelentes aulas que tive a honra de participar: Fernando, Cleber, Olivier, Pedro, Elias e Higídio. Ao Professor Kirilov e ao Wagner por terem me dado a oportunidade de apresentar-lhes uma prévia da dissertação e compartilhado dicas valiosas.

Aos professores Paulo e Gabriel, por terem participado de minha banca de defesa e por todas as correções, dicas e contribuições para o aperfeiçoamento da mesma.

Ao meu orientador, Professor Fernando, por ter me acolhido como orientando, ter proposto o tema e ter me guiado durante toda a construção da dissertação. Serei eternamente grato à sua dedicação em me ajudar a realizar este trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

*“Follow your steps and you will find  
the unknown ways are on your mind...”*

André Matos

## RESUMO

Neste trabalho apresentamos um estudo das classes de funções ultradiferenciáveis dos tipos Roumieu e Beurling definidas sobre variedades compactas e suas respectivas classes de ultradistribuições. Como aplicação, é analisada a hipoeliticidade global de operadores fortemente invariantes em variedades.

**Palavras-chave:** Funções ultradiferenciáveis e ultradistribuições, classes de Roumieu e Beurling, hipoeliticidade global, operadores invariantes, variedades fechadas.

## ABSTRACT

In this work we present the study of classes of ultradifferentiable functions of Roumieu and Beurling types defined on compact manifolds and its respective ultradistributions classes. As an application, we analyze the global hypoellipticity of strongly invariant operators on manifolds.

**Keywords:** Ultradifferentiable functions and ultradistributions, Roumieu and Beurling classes, global hypoellipticity, invariant operators, closed manifolds.

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>15</b>
1.1 Fórmulas binômiais e multi-índices . . . . .	15
1.2 Variedades suaves e espaços de funções sobre variedades . . . . .	16
1.3 Operadores pseudodiferenciais em variedades . . . . .	17
1.4 Análise de Fourier gerada por operadores elícticos . . . . .	19
<b>2 Funções Ultradiferenciáveis em Variedades</b>	<b>23</b>
2.1 A sequência $\mathcal{M}$ . . . . .	23
2.2 A função associada $\mathcal{M}$ . . . . .	25
2.3 O espaço $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . . . . .	28
2.3.1 A classe $\gamma^s(X)$ . . . . .	36
2.4 O espaço $\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ . . . . .	38
<b>3 Ultradistribuições</b>	<b>40</b>
3.1 $\alpha$ -duais . . . . .	40
3.2 O espaço $\Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$ . . . . .	43
3.2.1 O espaço $\Gamma'_{(\mathcal{M})}(X)$ . . . . .	47
<b>4 Hipoeliticidade Global</b>	<b>49</b>
4.1 Operadores invariantes . . . . .	49
4.2 $\mathcal{M}$ -hipoeliticidade global . . . . .	52
4.2.1 O caso Gevrey $\gamma^s(X)$ . . . . .	54
4.3 $(\mathcal{M})$ -hipoeliticidade global . . . . .	54
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>58</b>

# INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos um estudo das classes de funções ultradiferenciáveis dos tipo Roumieu e Beurling definidas sobre variedades compactas e suas respectivas classes de ultradistribuições, conforme a caracterização apresentada por A. Dasgupta e M. Ruzhansky em [3]. Como aplicação deste estudo apresentamos uma análise sobre a hipoeiticidade global de operadores fortemente invariantes em variedades, estendendo então alguns resultados obtidos por A. Kirilov e W. A. A. de Moraes em [10].

Para apresentar uma visão geral dos estudos realizados, considere  $X$  uma variedade fechada, isto é, suave, compacta e sem bordo. Seja  $E$  um operador pseudodiferencial elítico, positivo, de ordem  $\nu \in \mathbb{N}$ . Fixada uma sequência  $\mathcal{M} = \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ , satisfazendo certas condições (conforme Seção 2.1), define-se por  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  o espaço das funções  $\phi \in C^\infty(X)$  para as quais existem constantes  $h > 0$  e  $C > 0$  satisfazendo

$$\|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq Ch^{\nu k} M_{\nu k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (1)$$

Observamos que a caracterização de  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  nos dá a vantagem de não precisarmos nos referir às coordenadas locais para introduzir tais classes. Isto permite apresentar definições análogas para funções analíticas e Gevrey, mesmo se a variedade  $X$  for apenas suave. Por exemplo, tomando  $M_k = k!$ , obtemos a classe  $\Gamma_{\{k!\}}(X)$  das funções suaves  $\phi$  tais que

$$\|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq Ch^{\nu k} (\nu k)!, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2)$$

No caso em que  $X$  e  $E$  são analíticos, ao tomarmos  $M_k = (k!)^s$ , vê-se que  $\Gamma_{\{(k!)^s\}}(X)$  coincide com o espaço das funções Gevrey em  $X$ , para  $s > 1$ , e analíticas quando  $s = 1$ .

Veremos ainda que (1) nos permite estudar diversas propriedades destes espaços em termos da análise de Fourier gerada pelo operador elítico, isto é, analisando-se os coeficientes de Fourier das expansões em séries determinadas pelas autofunções de  $E$ . Por outro lado, ao considerarmos um referencial de campos vetoriais suaves  $\partial_1, \dots, \partial_N$  em  $X$ , prova-se no Teorema 2.1 que  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  se, e somente se, existem  $h > 0$  e  $C > 0$  tais que

$$\|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(X)} \leq Ch^{|\alpha|} M_{|\alpha|},$$

sendo  $\partial^\alpha = \partial_{j_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{j_K}^{\alpha_K}$ , com  $j_r \in \{1, \dots, N\}$ , para cada  $r = 1, \dots, K$ , e  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_K$ , recuperando assim a caracterização clássica de espaços presentes na literatura como, por exemplo, nos trabalhos de H. Komatsu [11, 12, 13].

Após uma detalhada caracterização dos espaços acima, apresentamos resultados obtidos acerca da hipoeiticidade global para uma classe de operadores em  $X$ . Para introduzir uma descrição desta nossa contribuição, citamos duas referências:

- (i) o artigo *Remarks on global hypoellipticity* [7] de S. J Greenfield e N. R. Wallach, no qual é investigada a hipoeliticidade global de operadores definidos em variedades e invariantes com respeito a um operador elítico;
- (ii) o artigo *Global hypoellipticity for strongly invariant operators* [10] de A. Kirilov e W. A. A. de Moraes, onde os autores estudaram a hipoeliticidade global de operadores definidos em variedades e fortemente invariantes com respeito a um operador elítico.

Em ambas as referências, tem-se como objetivo estudar a hipoeliticidade, no sentido  $C^\infty$ , de operadores lineares que comutam com um operador elítico  $E$  fixado. Um operador linear  $P$  que satisfaz tais condições pode ser estudado através da expressão

$$Pf(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \sigma_P(\ell) \widehat{f}(\ell), e_\ell(x) \rangle,$$

sendo  $\sigma_P(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$  os *símbolos matriciais* de  $P$ ,  $\widehat{f}(\ell)$  os *coeficientes de Fourier* de  $f$  e  $e_\ell(x) = (e_\ell^1(x), \dots, e_\ell^{d_\ell}(x)) \in \mathbb{C}^{d_\ell}$ , com  $\{e_\ell^m\}$  uma base de autofunções para o autoespaço  $\mathcal{H}_\ell$  do operador elítico  $E$ .

Tendo como inspiração estes dois trabalhos, considerando um operador linear  $P$  que comuta com  $E$  e satisfaz certas condições, analisamos a validade da implicação

$$u \in \mathcal{D}'(X) \text{ e } Pu \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X) \implies u \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$$

através de um estudo do comportamento dos símbolos matriciais  $\sigma_P(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$ .

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 1, são estabelecidos conceitos, notações e resultados fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, dando ênfase à Seção 1.4 onde é apresentada a análise de Fourier em que toda a teoria se baseia. Em particular, destacam-se a decomposição dos espaços  $L^2(X)$  em função dos autoespaços de um operador elítico e também a construção dos coeficientes de Fourier, conforme a Definição 1.9.

No Capítulo 2 são apresentadas as classes de funções ultradiferenciáveis  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  e  $\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ . A princípio, são fixadas condições sobre a sequência  $\mathcal{M} = \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  e estudadas diversas propriedades da função

$$\mathcal{M}(r) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \log \frac{r^{\nu k}}{M_{\nu k}}, \quad \forall r > 0.$$

Por fim, apresentamos o Teorema 2.2, no qual os elementos de  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  são caracterizados através de estimativas sobre seus coeficientes de Fourier. Um resultado análogo ao Teorema 2.2 para a classe  $\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$  é dado no Teorema 2.4.

No terceiro capítulo, serão estudados os espaços de ultradistribuições. Primeiramente, são construídos os  $\alpha$ -duais, conforme Definições 3.1 e 3.6. Após este passo, são então fixadas as classes das

ultradistribuições  $\Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$  e  $\Gamma'_{(\mathcal{M})}(X)$ . Nos Teoremas 3.3 e 3.4, as distribuições são então caracterizadas em virtude da análise de seus coeficientes de Fourier.

Finalmente, no Capítulo 4, fazemos o estudo da hipoeleticidade global de operadores fortemente invariantes (veja Definição 4.1). Os Teoremas 4.1 e 4.3 exibem condições necessárias e suficientes para a hipoeleticidade em termos do comportamento dos símbolos matriciais de tais operadores.

# Capítulo 1

## PRELIMINARES

Neste capítulo fixamos algumas notações, conceitos e resultados utilizados no desenvolvimento do trabalho.

### 1.1 Fórmulas binômiais e multi-índices

Denotamos por  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais e por  $\mathbb{N}_0$  os inteiros não negativos, isto é,  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Qualquer  $n$ -upla  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  será denominada *multi-índice*. O *comprimento* do multi-índice  $\alpha$ , denotado por  $|\alpha|$ , é o número

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Dado  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , definimos, para qualquer  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ , o número real  $x^\alpha$  pondo

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Em  $\mathbb{R}^n$  define-se o operador  $j$ -ésima derivada parcial  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Quando não houver dúvidas sobre a variável utilizada, escrevemos  $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Para cada  $j = 1, \dots, n$ , temos  $D_j = -i\partial_j$ , com  $i = \sqrt{-1}$ . Dado  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ , define-se

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} \quad \text{e} \quad D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n}.$$

As notações acima ainda podem ser vistas como  $\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  e

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} = (-i\partial_1)^{\alpha_1} \dots (-i\partial_n)^{\alpha_n} = (-i)^{|\alpha|} (\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}) = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha.$$

Se  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  são multi-índices, dizemos que  $\alpha$  é *menor do que ou igual a*  $\beta$  se, e somente se, as todas as componentes de  $\alpha$  são menores do que ou iguais as componentes correspondentes de  $\beta$ , isto é,

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha_j \leq \beta_j, \forall j = 1, \dots, n.$$

O *fatorial* de  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  é definido por

$$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!.$$

Também podemos estender o conceito de *número binomial* para multi-índices:

$$\binom{\alpha}{\beta} := \begin{cases} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)! \beta!}, & \text{se } \alpha \geq \beta \\ 0, & \text{se } \alpha < \beta \end{cases},$$

com  $\alpha - \beta := (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ .

Dados  $N \in \mathbb{N}$  e  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  temos a *fórmula de Newton generalizada*

$$(x_1 + \dots + x_n)^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} x^\alpha, \quad (1.1)$$

também conhecida por *Teorema multinomial*. Tomando  $x_j = 1$ , para todo  $j = 1, \dots, n$ , obtêm-se de (1.1) a identidade

$$n^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!}. \quad (1.2)$$

Por fim, considerando a expansão de Taylor da função exponencial

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R},$$

segue imediatamente que

$$t^k \leq k! e^t, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

## 1.2 Variedades suaves e espaços de funções sobre variedades

Ao longo deste trabalho, a menos de menção contrária, vamos considerar  $X$  uma variedade  $C^\infty$  fechada (compacta e sem bordo) de dimensão  $n$  equipada com um elemento de volume fixo  $dx$ . Seguindo a teoria desenvolvida na Seção 5.2 de [17], lembramos que um *atlas suave sobre  $X$*  é uma família  $\mathcal{H} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ , sendo  $U_\alpha \subseteq X$  um aberto e  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \Omega_\alpha$  é um homeomorfismo sobre o subconjunto aberto  $\Omega_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ , para cada  $\alpha \in \Lambda$ , tal que:

1. Para quaisquer  $U_\alpha, U_\beta$  com  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , as aplicações de transição

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

são difeomorfismos suaves entre abertos de  $\mathbb{R}^n$ .

2. A família  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  é uma cobertura de  $X$ , isto é,

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha = X.$$

O par  $(U, \varphi) \in \mathcal{H}$  é chamado de *carta de coordenada local suave* em  $X$ .

Na sequência são listados alguns espaços que serão frequentemente utilizados neste trabalho.

- $C^\infty(X)$  é o espaço das funções definidas na variedade  $X$  que são infinitamente diferenciáveis. Frequentemente nos referimos a  $C^\infty(X)$  simplesmente como o *espaço das funções suaves* sobre  $X$ .
- Denotamos por  $\mathcal{D}'(X)$  o espaço das distribuições em  $X$ . É possível mostrar que  $\mathcal{D}'(X)$  pode ser identificado com o dual topológico de  $C^\infty(X)$ , sob certas condições (veja a Seção 6.3 de [9] para mais detalhes).
- $L^2(X)$  é o espaço das funções  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  que são mensuráveis e satisfazem

$$\int_X |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Em particular, recordamos que  $L^2(X)$  é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_X f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(X).$$

- $L^\infty(X)$  é o espaço das funções  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  que são mensuráveis e satisfazem

$$\|f\|_{L^\infty(X)} < \infty,$$

sendo  $\|f\|_{L^\infty(X)} := \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|$ .

**Definição 1.1.** Seja  $U \subseteq X$  um subconjunto aberto e  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ . Definimos o **suporte de  $f$**  por  $\text{supp} f := \overline{\{x \in U; f(x) \neq 0\}}$ . Quando  $\text{supp} f$  for compacto, dizemos que  $f$  **tem suporte compacto**. Denotamos o conjunto de todas as funções suaves com suporte compacto em  $U$  por  $C_0^\infty(U)$ .

**Proposição 1.1.** *Seja  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  um espaço de medida tal que  $\mu(X) < \infty$ . Então  $L^\infty(X) \subseteq L^2(X)$  e*

$$\|f\|_{L^2(X)} \leq \|f\|_{L^\infty(X)} \mu(X)^{\frac{1}{2}}.$$

*Demonstração.* Veja referência [6], Proposição 6.12. □

### 1.3 Operadores pseudodiferenciais em variedades

Nesta seção fixaremos algumas notações e resultados referentes a teoria dos operadores pseudodiferenciais em variedades. Para tanto, fazemos um breve resumo sobre operadores diferenciais em  $\mathbb{R}^n$ . Novamente, não apresentamos as demonstrações dos resultados aqui exibidos, sendo que estes podem ser encontrados na Seção 5.2 de [17].

**Definição 1.2** (A Classe de Símbolos  $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ). Dizemos que uma função suave  $\sigma$  definida sobre  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  pertence ao espaço  $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  se satisfaz a estimativa

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha \sigma(x, \xi)| \leq A_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|},$$

para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$  e quaisquer  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , sendo  $A_{\alpha, \beta}$  uma constante que pode depender de  $\alpha$  e  $\beta$ , mas não depende de  $x$  e  $\xi$ . Neste caso, dizemos que  $\sigma$  é um **símbolo de ordem  $m \in \mathbb{R}$** .

**Definição 1.3.** Dado um símbolo  $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , definimos o **operador pseudo-diferencial** com símbolo  $\sigma$ , denotado  $T_\sigma$ , pondo

$$T_\sigma f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x,\xi)} \sigma(x, \xi) \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (1.3)$$

com  $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y,\xi)} f(y) dy$  denotando a transformada de Fourier de  $f$ . A classe dos operadores da forma (1.3) com símbolos em  $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  é denotada por  $\Psi^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Ainda podemos nos referir ao operador  $T_\sigma$  como **operador pseudodiferencial de ordem  $m$**  e  $\Psi^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  como a **classe dos operadores pseudodiferenciais de ordem  $m$** .

Por definição, a classe de símbolos  $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  é localmente invariante por mudanças de variáveis suaves, isto é, se tomarmos uma mudança local da variável  $x$  num símbolo pertencente à classe  $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ , este ainda pertencerá à mesma classe  $S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ . Na Seção 2.5.2 de [17] são encontrados mais detalhes sobre este fato.

**Definição 1.4.** Um símbolo  $\sigma \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  é **elítico** se existem constantes  $C > 0$  e  $n_0 > 0$  tais que

$$|\sigma(x, \xi)| \geq C|\xi|^m, \quad \text{sempre que } |\xi| \geq n_0,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dizemos que o operador pseudodiferencial  $T_\sigma$  é **elítico** se seu símbolo  $\sigma$  for elítico.

**Definição 1.5.** Sejam  $A: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$  um operador linear e  $\phi, \psi \in C^\infty(X)$ . Definimos o operador  $\phi A \psi: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$  pondo

$$(\phi A \psi)u(x) := \phi(x)A(\psi \cdot u)(x), \quad x \in X, u \in C^\infty(X).$$

**Definição 1.6.** Se  $(U, \varphi)$  é uma carta em  $X$ , então para um operador  $A: C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$  definimos  $A_\varphi: C^\infty(\varphi(U)) \rightarrow C^\infty(\varphi(U))$  pondo

$$A_\varphi u := A(u \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}, \quad u \in C^\infty(\varphi(U)).$$

**Definição 1.7.** Dizemos que um operador linear  $A: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$  é um **operador pseudodiferencial de ordem  $m \in \mathbb{R}$**  em  $X$  se, para toda carta  $(U, \varphi)$  em  $X$  e para quaisquer  $\phi, \psi \in C_0^\infty(U)$ , o operador  $(\phi A \psi)_\varphi$  é um operador pseudodiferencial de ordem  $m$  em  $\mathbb{R}^n$ . Como a classe de operadores pseudodiferenciais de ordem  $m$  em  $\mathbb{R}^n$  é difeo-invariante, segue que a classe correspondente em  $X$  é bem definida. Denotamos a classe dos operadores pseudodiferenciais de ordem  $m$  em  $X$  por  $\Psi^m(X)$ .

Ainda no contexto da Definição 1.7, note que, se  $u \in C^\infty(\varphi(U))$ , então

$$(\phi A \psi)_\varphi u = (\phi A \psi)(u \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}.$$

Portanto, se  $x \in \varphi(U)$  e, denotando  $\tilde{x} := \varphi^{-1}(x) \in U$ , temos

$$\begin{aligned} (\phi A \psi)_\varphi u(x) &= ((\phi A \psi)(u \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})(x) \\ &= (\phi A \psi)(u \circ \varphi)(\varphi^{-1}(x)) \\ &= (\phi A \psi)(u \circ \varphi)(\tilde{x}) \\ &= \phi(\tilde{x})A(\psi \cdot (u \circ \varphi))(\tilde{x}). \end{aligned}$$

**Definição 1.8.** Um operador  $A \in \Psi^m(X)$  é **elítico** se  $(\phi A \psi)_\varphi$  for elítico em  $\mathbb{R}^n$ , para toda carta  $(U, \varphi)$  e para quaisquer  $\phi, \psi \in C_0^\infty(U)$ . Denotamos a classe dos operadores pseudodiferenciais elíticos de ordem  $m \in \mathbb{R}$  sobre  $X$  por  $\Psi_e^m(X)$ .

Note que, dados  $T_\sigma \in \Psi^m(X)$  e  $T_\tau \in \Psi^p(X)$ , então  $T_\sigma \circ T_\tau \in \Psi^{m+p}(X)$ . Em particular, se  $T_\sigma$  for elítico, isto é,  $T_\sigma \in \Psi_e^m(X)$ , existe  $T_\rho \in \Psi^{-m}(X)$  tal que

$$T_\sigma \circ T_\rho = I + R \quad \text{e} \quad T_\rho \circ T_\sigma = I + S,$$

sendo  $R$  e  $S$  termos regularizantes tais que  $R, S \in \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \Psi^m(X)$ .

Dizemos que  $T_\rho$  é uma *parametriz* de  $T_\sigma$ . Em particular, segue que

$$T_\sigma \circ T_\rho, T_\rho \circ T_\sigma \in \Psi^0(X).$$

## 1.4 Análise de Fourier gerada por operadores elíticos

Seja  $X$  uma variedade fechada de dimensão  $n$  equipada com um elemento de volume  $dx$ . Considere um operador pseudodiferencial  $E$  elítico e positivo definido de ordem  $\nu \in \mathbb{N}$ , isto é,  $E \in \Psi_{+\nu}^{\nu}(X)$ . Nestas condições, mostra-se que os autovalores de  $E$  formam uma sequência de números reais, digamos  $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , a qual podemos reordenar de modo que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow +\infty.$$

Para cada  $\lambda_j$ , denota-se o autoespaço correspondente por  $\mathcal{H}_j := \ker(E - \lambda_j I) \subseteq L^2(X)$ , o qual consiste de funções suaves devido à eliticidade de  $E$ . Denotamos ainda

- $\mathcal{H}_0 := \ker E$ .
- $\lambda_0 := 0$ .
- $d_j := \dim \mathcal{H}_j$ , para todo  $j \in \mathbb{N}_0$ .

Como  $E$  é elítico,  $E$  é Fredholm, logo  $d_0 < \infty$ . Ainda sobre os autovalores de  $E$  e as dimensões dos autoespaços  $\mathcal{H}_j$ , temos o seguinte resultado:

**Proposição 1.2.** *Sejam  $X$  uma variedade fechada de dimensão  $n$  e  $E \in \Psi_{+e}^\nu(X)$ , com  $\nu \in \mathbb{N}$ . Então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$d_j \leq C(1 + \lambda_j)^{\frac{n}{\nu}}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Ademais, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j(1 + \lambda_j)^{-q} < \infty \iff q > \frac{n}{\nu}. \quad (1.5)$$

*Demonstração.* Veja referência [4], Proposição 2.3. □

Para cada  $j \in \mathbb{N}_0$ , como  $d_j = \dim \mathcal{H}_j < \infty$ , podemos considerar uma base ortonormal  $\{e_j^k\}_{k=1}^{d_j}$  para  $\mathcal{H}_j$ , com respeito ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ , aplicando o processo de Gram-Schmidt se necessário. Pode ser mostrado (ver [19]) que  $L^2(X)$  decompõe-se como a soma direta *hilbertiana* (complemento da soma direta algébrica)

$$L^2(X) = \widehat{\bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j},$$

logo o conjunto  $\mathcal{B} := \{e_j^k; j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k \leq d_j\}$  é uma base ortonormal para  $L^2(X)$ . Então, qualquer  $f \in L^2(X)$  pode ser expressa por

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \langle f, e_j^k \rangle_{L^2} e_j^k,$$

devido à ortonormalidade da base  $\mathcal{B}$ .

**Definição 1.9.** Para cada  $j \in \mathbb{N}_0$  e  $1 \leq k \leq d_j$ , definimos o **coeficiente de Fourier** de  $f \in L^2(X)$ , denotado por  $\widehat{f}(j, k)$ , pondo

$$\widehat{f}(j, k) := \langle f, e_j^k \rangle_{L^2}.$$

**Observação 1.1.** Em particular, podemos reescrever

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \widehat{f}(j, k) e_j^k.$$

**Definição 1.10.** Definimos, para cada  $j \in \mathbb{N}_0$ , o **coeficiente total de Fourier** de  $f \in L^2(X)$  correspondente a  $\mathcal{H}_j$ , denotado por  $\widehat{f}(j)$ , como sendo o vetor coluna

$$\widehat{f}(j) := \begin{pmatrix} \widehat{f}(j, 1) \\ \vdots \\ \widehat{f}(j, d_j) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{d_j}.$$

Para cada  $j \in \mathbb{N}_0$ , definimos a *norma de Hilbert-Schmidt* de  $\widehat{f}(j) \in \mathbb{C}^{d_j}$ , a qual representamos por  $\|\widehat{f}(j)\|_{\text{HS}}$ , como sendo a norma euclidiana clássica de  $\widehat{f}(j)$  em  $\mathbb{C}^{d_j}$ , isto é,

$$\|\widehat{f}(j)\|_{\text{HS}} := \|\widehat{f}(j)\|_{\mathbb{C}^{d_j}} = \sqrt{\langle \widehat{f}(j), \widehat{f}(j) \rangle_{\mathbb{C}^{d_j}}} = \left( \sum_{k=1}^{d_j} |\widehat{f}(j, k)|^2 \right)^{1/2}.$$

A fórmula de Plancherel, frequentemente utilizada, é dada por

$$\|f\|_{L^2(X)}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |\widehat{f}(j, k)|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|\widehat{f}(j)\|_{\text{HS}}^2.$$

Uma consequência imediata é a desigualdade

$$\|\widehat{f}(j)\|_{\text{HS}} \leq \|f\|_{L^2(X)}, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Utilizando a fórmula de Plancherel e a eliticidade do operador  $E$ , obtém-se a seguinte caracterização para funções suaves em termos de seus coeficientes de Fourier e dos autovalores de  $E$  (para mais detalhes, ver referências [4, 5]):

$$f \in C^\infty(X) \iff \forall N, \exists C_N \text{ t.q. } |\widehat{f}(j, k)| \leq C_N \lambda_j^{-N}, \quad \forall j \geq 1, 1 \leq k \leq d_j.$$

Se além de todas as hipóteses sobre  $X$  e  $E$ , estes também forem analíticos, podemos reformular o resultado de Seeley [18] como

$$f \text{ é analítica} \iff \exists L > 0, \exists C \text{ t.q. } |\widehat{f}(j, k)| \leq C \exp(-L\lambda_j^{1/\nu}), \quad \forall j \geq 1, 1 \leq k \leq d_j. \quad (1.6)$$

Nas demonstrações dos próximos capítulos será bastante útil a estimativa dada abaixo, cuja demonstração é dada na referência [5], Lema 8.5.

**Lema 1.1.** *Sejam  $X$  uma variedade fechada e  $E \in \Psi_{+e}^\nu(X)$  um operador elítico. Então*

$$\|e_\ell^k\|_{L^\infty(X)} \leq C \lambda_\ell^{\frac{n-1}{2\nu}}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

Será necessário determinar os coeficientes de Fourier da ação de potências de  $E$  numa função de  $L^2(X)$ , isto é,  $\widehat{E^m \phi}(j, k)$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$  e  $1 \leq k \leq d_j$ , para  $\phi \in L^2(X)$  e  $m \in \mathbb{N}_0$ , bem como relacionar os coeficientes de Fourier de combinações lineares de duas (ou mais) funções em  $L^2(X)$  com os coeficientes das mesmas. O resultado que supre essas necessidades é dado em seguida.

**Lema 1.2.** *Sejam  $\phi, \psi \in L^2(X)$  e  $m \in \mathbb{N}_0$ . Então:*

(i) *vale a igualdade*

$$\widehat{E^m \phi}(j, k) = \lambda_j^m \widehat{\phi}(j, k), \quad \forall j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k \leq d_j;$$

(ii) *para quaisquer  $z, w \in \mathbb{C}$ , vale*

$$(z\widehat{\phi} + w\widehat{\psi})(\ell, j) = z\widehat{\phi}(\ell, j) + w\widehat{\psi}(\ell, j), \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j \leq d_\ell.$$

*Demonstração.* (i) Sejam  $m \in \mathbb{N}_0$  e  $\phi \in L^2(X)$ . Lembrando que  $\mathcal{B} = \{e_\ell^k; j \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k \leq d_j\}$  é uma base ortonormal de  $L^2(X)$ ,  $\phi$  pode ser expressa por

$$\phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{d_\ell} \widehat{\phi}(\ell, r) e_\ell^r,$$

logo

$$E^m \phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{d_\ell} \widehat{\phi}(\ell, r) E^m e_\ell^r = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{d_\ell} \widehat{\phi}(\ell, r) \lambda_\ell^m e_\ell^r.$$

Então, para cada  $j \in \mathbb{N}_0$  e  $k \in \{1, \dots, d_j\}$ , segue que

$$\begin{aligned} \widehat{E^m \phi}(j, k) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \langle E^m \phi, e_j^k \rangle_{L^2} = \left\langle \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{d_\ell} \widehat{\phi}(\ell, r) \lambda_\ell^m e_\ell^r, e_j^k \right\rangle_{L^2} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{d_\ell} \widehat{\phi}(\ell, r) \lambda_\ell^m \langle e_\ell^r, e_j^k \rangle_{L^2} \\ &= \lambda_j^m \widehat{\phi}(j, k), \end{aligned}$$

sendo que a última igualdade ocorre pelo fato de que  $\langle e_\ell^r, e_j^k \rangle_{L^2}$  não se anula somente quando  $\ell = j$  e  $r = k$  e  $\langle e_j^k, e_j^k \rangle_{L^2} = \|e_j^k\|_{L^2(X)}^2 = 1$ , pela ortonormalidade de  $\mathcal{B}$ .

(ii) Utilizando a linearidade do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ , temos

$$\begin{aligned} (z\widehat{\phi} + w\widehat{\psi})(\ell, j) &= \langle z\phi + w\psi, e_\ell^j \rangle_{L^2} \\ &= z\langle \phi, e_\ell^j \rangle_{L^2} + w\langle \psi, e_\ell^j \rangle_{L^2} \\ &= z\widehat{\phi}(\ell, j) + w\widehat{\psi}(\ell, j), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam  $\phi, \psi \in L^2(X)$ ,  $z, w \in \mathbb{C}$  e  $\ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $j \in \{1, \dots, d_\ell\}$ . □

Vamos precisar de algumas relações entre normas e produto interno, as quais são apresentadas nos próximos resultados (Proposições 1.3 e 1.4), cujas demonstrações são facilmente encontradas em [8] ou [14]. Fixado  $m \in \mathbb{N}$ , denotamos o produto interno usual em  $\mathbb{C}^m$  por  $\langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^m}$ .

**Proposição 1.3.** *Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{C}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_{\text{HS}} \|y\|_{\text{HS}}.$$

**Proposição 1.4.** *Para todo  $x \in \mathbb{C}^m$  vale*

$$\|x\|_{\text{HS}} \leq \sum_{j=1}^m |x_j| \leq \sqrt{m} \|x\|_{\text{HS}}. \quad (1.8)$$

# Capítulo 2

## FUNÇÕES ULTRADIFERENCIÁVEIS EM VARIEDADES

Neste capítulo exibimos a construção das classes de funções ultradiferenciáveis conforme definido na referência [3]. A construção e a caracterização destes espaços é dada em termos da expansão em autofunções de um operador elítico em  $X$ .

### 2.1 A sequência $\mathcal{M}$

Estamos interessados em seqüências de números reais positivos  $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  que satisfaçam: existem constantes  $H > 0$  e  $A \geq 1$  tais que

$$(M.0) \quad M_0 = M_1 = 1.$$

$$(M.1) \quad M_{k+1} \leq AH^k M_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0.$$

$$(M.2) \quad M_{2k} \leq AH^{2k} M_k^2, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0.$$

$$(C.L) \quad M_k^2 \leq M_{k-1} M_{k+1}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

A condição (M.2), chamada de *estabilidade*, será útil na caracterização de espaços funcionais. Note ainda que (M.1) e (M.2) são uma versão mais fraca da condição

$$M_k \leq AH^k \min_{0 \leq q \leq k} M_q M_{k-q}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

assumida por Komatsu, a qual garante estabilidade sob aplicação de operadores ultradiferenciais. Na verdade, em [16] Lema 5.3, mostra-se que a condição acima é equivalente a (M.2). A condição (C.L) é chamada de *convexidade logarítmica*, a qual juntamente com (M.0) nos garante que  $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  é uma seqüência não-decrescente.

**Exemplo 2.1.** A seqüência  $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  dada por  $M_k := k!$  satisfaz as propriedades (M.0), (M.1), (M.2) e (C.L), tomando  $A = 1$  e  $H = 2$ .

$$(M.0) \quad M_0 = 0! = 1! = 1.$$

(M.1) Para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ , tem-se

$$\frac{(k+1)!}{k!} = \frac{(k+1)k!}{k!} = k+1 \leq 2^k \implies (k+1)! \leq 2^k k!.$$

(M.2) Provemos por indução em  $k \in \mathbb{N}_0$ . Para  $k = 0$  e  $k = 1$ , a desigualdade é imediata. Suponha que

(M.2) vale para  $k \geq 2$ , ou seja, nossa hipótese de indução é  $\frac{(2k)!}{(k!)^2} \leq 2^{2k}$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2} &= \frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!} = \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(k+1)k!(k+1)k!} = \frac{2(k+1)(2k+1)(2k)!}{(k+1)(k+1)(k!)^2} \\ &\stackrel{\text{(h.i.)}}{\leq} \frac{2(2k+1)}{k+1} 2^{2k} = \frac{2k+1}{k+1} 2^{2k+1} \leq 2 \cdot 2^{2k+1} = 2^{2(k+1)}, \end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade decorre de  $(2k+1)/(k+1) \leq 2$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Portanto, temos que  $(2k)! \leq 2^{2k}(k!)^2$ .

(C.L) Para todo  $k \in \mathbb{N}$ , temos

$$\frac{(k-1)!(k+1)!}{(k!)^2} = \frac{(k-1)!(k+1)k!}{k(k-1)!k!} = \frac{k+1}{k} \geq 1 \implies (k-1)!(k+1)! \geq (k!)^2$$

**Observação 2.1.** Com o objetivo de não mencionar a todo momento que a sequência  $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  satisfaz as propriedades (M.0), (M.1), (M.2) e (C.L), faremos o uso da notação  $\mathcal{M} := \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  para indicar tal fato.

Temos ainda a seguinte propriedade:

**Lema 2.1.** *Seja  $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  uma sequência de números reais positivos satisfazendo a propriedade (M.1). Então, dado  $k \in \mathbb{N}_0$ , sendo  $A \geq 1$  e  $H > 0$  as constantes de (M.1), vale*

$$M_{k+\ell} \leq A^\ell (H^\ell)^k H^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}} M_k, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* Fixado  $k \in \mathbb{N}_0$ , procedemos por indução em  $\ell \in \mathbb{N}$ . Se  $\ell = 1$ , utilizando a propriedade (M.1), temos

$$M_{k+1} \leq AH^k M_k = A^1 (H^1)^k H^{\frac{1(1-1)}{2}} M_k.$$

Suponha agora que a propriedade vale para  $\ell \geq 1$  (hipótese de indução), e mostremos que a mesma vale para  $\ell + 1$ . De fato, utilizando (M.1) e a hipótese de indução (H.I.), temos

$$\begin{aligned} M_{k+(\ell+1)} &= M_{(k+\ell)+1} \stackrel{\text{(M.1)}}{\leq} AH^{k+\ell} M_{k+\ell} \stackrel{\text{(H.I.)}}{\leq} AH^{k+\ell} A^\ell (H^\ell)^k H^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}} M_k \\ &= A^{\ell+1} H^k H^\ell H^{\ell k} H^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}} M_k = A^{\ell+1} (H^{\ell+1})^k H^{\ell + \frac{\ell(\ell-1)}{2}} M_k \\ &= A^{\ell+1} (H^{\ell+1})^k H^{\frac{2\ell + \ell^2 - \ell}{2}} M_k = A^{\ell+1} (H^{\ell+1})^k H^{\frac{\ell + \ell^2}{2}} M_k \\ &= A^{\ell+1} (H^{\ell+1})^k H^{\frac{(\ell+1)((\ell+1)-1)}{2}} M_k, \end{aligned}$$

e segue o desejado. □

Decorre deste resultado que existem constantes  $C := A^\ell H^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}$  e  $h := H^\ell$  tais que

$$M_{k+\ell} \leq Ch^k M_k.$$

**Observação 2.2.** Poderíamos ainda obter esta estimativa aplicando a propriedade (M.1) sucessivamente, isto é,

$$\begin{aligned} M_{k+\ell} &\leq AH^{k+\ell-1}M_{k+\ell-1} \leq AH^{k+\ell-1}AH^{k+\ell-2}M_{k+\ell-2} \\ &= A^2H^{2(k+\ell)-1-2}M_{k+\ell-2} \leq \dots \leq A^\ell H^{\ell(k+\ell)-(1+\dots+\ell)}M_{k+\ell-\ell} \\ &= A^\ell(H^\ell)^k H^{\ell^2-(1+\dots+\ell)}M_k = A^\ell(H^\ell)^k H^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}M_k, \end{aligned}$$

sendo que na última igualdade utilizamos a identidade  $(1 + \dots + \ell) = \frac{\ell(\ell+1)}{2}$ .

**Observação 2.3.** Antes de iniciarmos o estudo de classes de funções definidas em variedades, vamos citar trabalhos e ideias que foram desenvolvidos para funções definidas em  $\mathbb{R}^n$ . Em [11], [12] e [13], foram estudadas classes de funções ultradiferenciáveis em  $\mathbb{R}^n$  associadas à sequência  $\mathcal{M}$ , mais especificamente, o espaço das funções  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tais que para todo subconjunto compacto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  existem constantes  $h > 0$  e  $C > 0$  satisfazendo

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi(x)| \leq Ch^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \quad (2.1)$$

Dado um espaço de funções ultradiferenciáveis satisfazendo (2.1), podemos definir um espaço de ultradistribuições como sendo seu dual topológico. Em [12], mostra-se que sob as condições (M.0), (C.L), (M.1) e a condição adicional  $\sum_{k=1}^\infty \frac{M_{k-1}}{M_k} < \infty$ ,  $u$  é uma ultradistribuição suportada em  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  se, e somente se, existe constantes  $L$  e  $C$  tais que

$$|\tilde{u}(\xi)| \leq C \exp(M(L\xi)), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

e, além disso, para cada  $\epsilon > 0$  existe uma constante  $C_\epsilon > 0$  tal que

$$|\tilde{u}(\zeta)| \leq C_\epsilon \exp(H_K(\zeta) + \epsilon|\zeta|), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

onde

$$\tilde{u}(\zeta) := \langle e^{-i\zeta \cdot x}, u(x) \rangle$$

é a transformada de Fourier-Laplace de  $u$ ,

$$M(r) := \sup_{k \in \mathbb{N}} \log \frac{r^k}{M_k} \quad \text{e} \quad H_K(\zeta) := \sup_{x \in K} \text{Im} \langle x, \zeta \rangle.$$

## 2.2 A função associada $\mathcal{M}$

A fim de introduzir os espaços alvo de nosso trabalho, considere um operador elítico  $E \in \Psi_e^\nu(X)$  e uma sequência  $\mathcal{M} := \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  (sequência de números reais positivos  $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  satisfazendo (M.0), (M.1), (M.2) e (C.L)).

**Definição 2.1.** Fixada uma sequência  $\mathcal{M} := \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ , define-se a **função associada**  $\mathcal{M}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , pondo  $\mathcal{M}(0) := 0$  e

$$\mathcal{M}(r) := \sup_{k \in \mathbb{N}} \log \frac{r^{\nu k}}{M_{\nu k}}, \quad \forall r > 0.$$

**Observação 2.4.**  $\mathcal{M}$  é uma função não-decrescente.

Destacamos algumas propriedades da função  $\mathcal{M}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  nos próximos Lemas.

**Lema 2.2.** Se  $\lambda_\ell$  é um autovalor de  $E$ , então para quaisquer  $q, L > 0$  e  $\delta \in (0, 1)$ , existe  $C > 0$  tal que

$$\lambda_\ell^q e^{-\delta \mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})} \leq C \quad \text{uniformemente em } \ell \geq 1. \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Da definição da função  $\mathcal{M}$ , temos que

$$\lambda_\ell^q e^{-\delta \mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})} \leq \lambda_\ell^q \frac{M_{\nu p}^\delta}{L^{\nu p \delta} \lambda_\ell^{p \delta}}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

pois, para cada  $p \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu}) \geq \log \frac{(L\lambda_\ell^{1/\nu})^{\nu p}}{M_{\nu p}} = \log \frac{L^{\nu p} \lambda_\ell^p}{M_{\nu p}},$$

donde segue que, para  $\delta > 0$ ,

$$-\delta \mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu}) \leq -\delta \log \frac{L^{\nu p} \lambda_\ell^p}{M_{\nu p}} = \log \left( \frac{L^{\nu p} \lambda_\ell^p}{M_{\nu p}} \right)^{-\delta} = \log \frac{M_{\nu p}^\delta}{L^{\nu p \delta} \lambda_\ell^{p \delta}}$$

e, aplicando exp nesta desigualdade e multiplicando por  $\lambda_\ell^q$ , obtemos (2.3). Em particular, usando a desigualdade obtida logo acima com  $p$  satisfazendo  $p\delta \geq q + 1$  se  $L^\nu \lambda_\ell \geq 1$  e  $p = 1$  se  $L^\nu \lambda_\ell < 1$ , segue que

$$\lambda_\ell^q e^{-\delta \mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})} \leq \lambda_\ell^q \frac{M_{\nu p}^\delta}{L^{\nu(q+1)} \lambda_\ell^{q+1}} = \frac{M_{\nu p}^\delta}{L^{\nu(q+1)} \lambda_\ell} \leq C$$

uniformemente em  $\ell \geq 1$ , o que implica em (2.2). □

**Lema 2.3.** Se  $\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{M_{\nu k}}{r^{\nu k}} \neq 0$ , para todo  $r > 0$ , então

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^{\nu k}}{M_{\nu k}} = \left( \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{M_{\nu k}}{r^{\nu k}} \right)^{-1}.$$

*Demonstração.* Por um lado, para todo  $p \in \mathbb{N}$ , temos

$$\frac{1}{\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{M_{\nu k}}{r^{\nu k}}} \geq \frac{1}{\frac{M_{\nu p}}{r^{\nu p}}} = \frac{r^{\nu p}}{M_{\nu p}}$$

e, como a desigualdade acima é válida para todo  $p \in \mathbb{N}$ , segue que

$$\frac{1}{\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{M_{\nu k}}{r^{\nu k}}} \geq \sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{r^{\nu p}}{M_{\nu p}}.$$

Por outro lado, para todo  $k \in \mathbb{N}$ , é verdade que

$$\frac{1}{\sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{r^{\nu p}}{M_{\nu p}}} \leq \frac{1}{\frac{r^{\nu k}}{M_{\nu k}}} = \frac{M_{\nu k}}{r^{\nu k}},$$

o que implica em

$$\frac{1}{\sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{r^{\nu p}}{M_{\nu p}}} \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{M_{\nu k}}{r^{\nu k}} \implies \sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{r^{\nu p}}{M_{\nu p}} \geq \frac{1}{\inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{M_{\nu k}}{r^{\nu k}}}.$$

Das duas desigualdades obtidas, segue o resultado. □

**Lema 2.4.** Para todo  $r > 0$  valem as igualdades

$$\exp(\mathcal{M}(r)) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^{\nu k}}{M_{\nu k}} \quad e \quad \exp(-\mathcal{M}(r)) = \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{M_{\nu k}}{r^{\nu k}}.$$

*Demonstração.* Da definição de  $\mathcal{M}(r)$ ,  $r > 0$ , temos

$$\exp(\mathcal{M}(r)) = \exp\left(\sup_{k \in \mathbb{N}} \log \frac{r^{\nu k}}{M_{\nu k}}\right) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\exp \log \frac{r^{\nu k}}{M_{\nu k}}\right) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^{\nu k}}{M_{\nu k}}.$$

Segue disto que

$$\exp(-\mathcal{M}(r)) = \frac{1}{\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^{\nu k}}{M_{\nu k}}} \stackrel{\text{Lem. 2.3}}{=} \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{\frac{r^{\nu k}}{M_{\nu k}}} = \inf_{k \in \mathbb{N}} r^{-\nu k} M_{\nu k},$$

isto é,

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} r^{-\nu k} M_{\nu k} = \exp(-\mathcal{M}(r)), \quad r > 0. \quad \square$$

**Lema 2.5.** Para quaisquer  $\ell \in \mathbb{N}$  e  $L > 0$ , se  $L_2 := \frac{L}{\sqrt{AH}}$ , sendo  $A$  e  $H$  como em (M.2), então

$$e^{-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})} \leq e^{-\mathcal{M}(L_2\lambda_\ell^{1/\nu})}.$$

*Demonstração.* De fato, temos

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \sup_{p \in \mathbb{N}} \log \frac{(L\lambda_\ell^{1/\nu})^{\nu p}}{M_{\nu p}}\right) = \exp\left(\inf_{p \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{2} \log \frac{(L\lambda_\ell^{1/\nu})^{\nu p}}{M_{\nu p}}\right)\right) \\ &= \inf_{p \in \mathbb{N}} \exp \log \frac{M_{\nu p}^{1/2}}{(L\lambda_\ell^{1/\nu})^{\frac{\nu p}{2}}} = \inf_{p \in \mathbb{N}} \frac{M_{\nu p}^{1/2}}{L^{\frac{\nu p}{2}} \lambda_\ell^{p/2}} \leq \inf_{q \in \mathbb{N}} \frac{M_{2\nu q}^{1/2}}{L^{\nu q} \lambda_\ell^q}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

com a última desigualdade vindo do fato de que  $\inf A \leq \inf B$ , quando  $B \subseteq A$ . Agora, utilizando a propriedade (M.2), existem constantes positivas  $A$  e  $H$  tais que

$$M_{2\nu q} \leq AH^{2\nu q} M_{\nu q}^2.$$

Da desigualdade acima e de (2.4), para todo  $q \in \mathbb{N}$  segue que

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) &\leq \frac{M_{2\nu q}^{1/2}}{L^{\nu q}\lambda_\ell^q} \leq \frac{(AH^{2\nu q}M_{\nu q}^2)^{1/2}}{L^{\nu q}\lambda_\ell^q} = \frac{A^{\frac{1}{2}}H^{\nu q}M_{\nu q}}{L^{\nu q}\lambda_\ell^q} \\ &\leq \frac{A^{\frac{\nu q}{2}}H^{\nu q}M_{\nu q}}{L^{\nu q}\lambda_\ell^q} = \frac{M_{\nu q}}{\frac{L^{\nu q}}{(\sqrt{A})^{\nu q}H^{\nu q}}\lambda_\ell^q} \\ &= \frac{M_{\nu q}}{\left(\frac{L}{\sqrt{AH}}\right)^{\nu q}\lambda_\ell^q} = \frac{M_{\nu q}}{L_2^{\nu q}\lambda_\ell^q}, \end{aligned}$$

para  $L_2 := \frac{L}{\sqrt{AH}}$ . Por fim, como a desigualdade acima vale para todo  $q \in \mathbb{N}$ , tomando o ínfimo, tem-se

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \leq \inf_{q \in \mathbb{N}} \frac{M_{\nu q}}{L_2^{\nu q}\lambda_\ell^q} = \exp\left(-\mathcal{M}(L_2\lambda_\ell^{1/\nu})\right).$$

□

## 2.3 O espaço $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$

Estamos agora em condições de introduzir uma classe análoga à definição de H. Komatsu para uma variedade compacta  $C^\infty$ . Para tanto, considere fixados um operador elítico  $E \in \Psi_e^\nu(X)$  e uma sequência  $\mathcal{M} := \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ . Durante todo o trabalho, sempre vamos assumir algum dos casos:

- Caso Roumieu: Existem constantes  $\ell > 0$  e  $C_\ell > 0$  tais que

$$k! \leq C_\ell \ell^k M_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

- Caso Beurling: Para todo  $\ell > 0$  existe  $C_\ell > 0$  tal que

$$k! \leq C_\ell \ell^k M_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

**Definição 2.2.** A classe das funções ultradiferenciáveis em  $X$  do tipo Roumieu, denotada por  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , é o espaço das funções  $\phi \in C^\infty(X)$  tais que existem constantes  $h > 0$  e  $C > 0$  satisfazendo

$$\|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq Ch^{\nu k} M_{\nu k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.5)$$

**Observação 2.5.** Podemos fazer algumas observações sobre a Definição 2.2.

- (1) A princípio, a notação  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  pode parecer equivocada, uma vez que precisamos de um operador  $E \in \Psi_e^\nu(X)$  para definirmos tal classe. Então deveríamos denotar

$$\Gamma_{E, \mathcal{M}}(X) := \left\{ \phi \in C^\infty(X); \exists h > 0, \exists C > 0 \text{ t.q. } \|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq Ch^{\nu k} M_{\nu k}, \forall k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Entretanto, veremos que  $\Gamma_{E, \mathcal{M}}(X)$  não dependerá da escolha de  $E$ .

- (2) Em (2.5), tomamos  $L^2$ -normas por motivos que ficarão mais claros no decorrer de nosso estudo. Entretanto, o Teorema 2.1 estabelece que podemos utilizar  $L^\infty$ -normas em vez de  $L^2$ -normas, obtendo um resultado equivalente; além disso, no lugar de utilizar apenas potências de um único operador agindo em funções, podemos avaliar a ação de um referencial de campos vetoriais suave em funções de  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ .
- (3) As classes da Definição 2.2 são equivalentes às classes de funções que pertencem aos correspondentes espaços de funções em cartas de coordenadas locais (veja o item (v) do Teorema 2.1). Ademais, a fim de cobrir os casos *analítico* e *Gevrey*, pode-se supor  $X$  e  $E$  analíticos.
- (4) A Definição 2.2 nos dá a vantagem de que não precisamos nos referir às coordenadas locais para introduzir a classe  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . Isso nos permite apresentar definições análogas para funções analíticas e Gevrey, mesmo se a variedade  $X$  é apenas suave. Por exemplo, tomando  $M_k = k!$ , obtemos a classe  $\Gamma_{\{k!\}}(X)$  das funções  $\phi$  tais que

$$\|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq Ch^{\nu k} (\nu k)! \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.6)$$

Se  $X$  e  $E$  forem analíticos, mostraremos no Corolário 2.3 que tal espaço é precisamente o espaço das funções analíticas em  $X$ .

**Observação 2.6.** O caso Beurling é apresentado na Seção 2.3.

O Teorema a seguir resume algumas propriedades essenciais do espaço de funções do tipo Roumieu  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . Tais propriedades formalizam a discussão iniciada na Observação 2.5.

**Teorema 2.1.** *São válidas as seguintes propriedades:*

- (i) O espaço  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  independe da escolha do operador  $E \in \Psi_e^\nu(X)$ , isto é,  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  se, e somente se, (2.5) vale para algum (e conseqüentemente para todo) operador pseudodiferencial elítico  $E \in \Psi_e^\nu(X)$ .
- (ii) Tem-se  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  se, e somente se, existem constantes  $h > 0$  e  $C > 0$  tais que

$$\|E^k \phi\|_{L^\infty(X)} \leq Ch^{\nu k} M_{\nu k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.7)$$

- (iii) Seja  $\partial_1, \dots, \partial_N$  um referencial de campos vetoriais suave em  $X$  (logo  $\sum_{j=1}^N \partial_j^2$  é elítico). Então  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  se, e somente se, existem  $h > 0$  e  $C > 0$  tais que

$$\|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(X)} \leq Ch^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad (2.8)$$

para todo multi-índice  $\alpha$ , sendo  $\partial^\alpha = \partial_{j_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{j_K}^{\alpha_K}$ , com  $1 \leq j_1, \dots, j_K \leq N$  e  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_K$ .

(iv) Tem-se  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  se, e somente se, existem  $h > 0$  e  $C > 0$  tais que

$$\|\partial^\alpha \phi\|_{L^2(X)} \leq Ch^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad (2.9)$$

para todo multi-índice  $\alpha$  como em (iii).

(v) Assuma que  $X$  e  $E$  são analíticos. Então a classe  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  é preservada por mudanças de variáveis analíticas, e conseqüentemente é bem definida em  $X$ . Além disso, em toda carta de coordenada local, esta consiste de funções pertencendo localmente à classe  $\Gamma_{\mathcal{M}}(\mathbb{R}^n)$ .

*Demonstração.* (i) Considere um operador elítico  $E \in \Psi'_e(X)$  e seja  $\phi \in C^\infty(X)$  tal que

$$\|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq Ch^{\nu k} M_{\nu k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (2.10)$$

Mostraremos que se  $P$  é outro operador elítico em  $\Psi'_e(X)$ , então podemos substituir  $E$  por  $P$  em (2.10). Para tanto, para cada  $k \in \mathbb{N}_0$ , denote por  $E^{-k}$  uma parametriz de  $E^k$ . Neste caso, temos

$$E^{-k} \circ E^k = I + R_k, \quad (2.11)$$

sendo  $R_k$  um operador pseudodiferencial regularizante. Segue de (2.11) que

$$P^k \phi = (P^k \circ E^{-k})(E^k \phi) - (P^k \circ R_k)(\phi). \quad (2.12)$$

Note que os operadores  $P^k \circ E^{-k}$  e  $P_k \circ R_k$  tem ordem zero, para cada  $k \in \mathbb{N}_0$ , logo são contínuos em  $L^2(X)$ . Pelo Teorema de Calderon-Vaillancourt, após fazermos algumas adaptações (veja [1] e o Teorema 5.2.23 de [17]), podemos encontrar constantes positivas  $A$  e  $B$ , que não dependem de  $k$  e nem de  $\phi$ , mas somente de um número finito de derivadas dos símbolos de  $E$  e  $P$ , tais que

$$\|(P^k \circ E^{-k})(E^k \phi)\|_{L^2(X)} \leq A^k \|E^k \phi\|_{L^2(X)}$$

e

$$\|(P^k \circ R_k)(\phi)\|_{L^2(X)} \leq B^k \|\phi\|_{L^2(X)}.$$

Assim, utilizando a desigualdade triangular e o fato de que  $\mathcal{M} := \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  é não-decrescente, segue de (2.12) e das estimativas acima que

$$\begin{aligned} \|P^k \phi\|_{L^2(X)} &\leq A^k \|E^k \phi\|_{L^2(X)} + B^k \|\phi\|_{L^2(X)} \\ &\leq A^k Ch^{\nu k} M_{\nu k} + B^k CM_{\nu k} \\ &= C(A^k h^{\nu k} + B^k) M_{\nu k} \\ &\leq C((A^{1/\nu} h_1)^{\nu k} + (B^{1/\nu} h_1)^{\nu k}) M_{\nu k} \\ &\leq 2C \tilde{h}^{\nu k} M_{\nu k} \\ &= C_1 \tilde{h}^{\nu k} M_{\nu k}, \end{aligned}$$

sendo  $h_1 := \max\{h, 1\}$ ,  $C_1 := 2C$  e  $\tilde{h} := \max\{A^{1/\nu}h_1, B^{1/\nu}h_1, 1\}$ .

(ii) Queremos mostrar que (2.5)  $\Leftrightarrow$  (2.7).

(2.7)  $\implies$  (2.5). Por hipótese, existem  $R > 0$  e  $h > 0$  tais que  $\|E^k \phi\|_{L^\infty(X)} \leq Rh^{\nu k} M_{\nu k}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ . Pela Proposição 1.1, existe  $c > 0$  tal que  $\|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq c \|E^k \phi\|_{L^\infty(X)}$ . Combinando estas desigualdades, segue que

$$\|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq c \|E^k \phi\|_{L^\infty(X)} \leq Rch^{\nu k} M_{\nu k} = Ch^{\nu k} M_{\nu k},$$

para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ , sendo  $C := cR$ , e isto implica em (2.5).

(2.5)  $\implies$  (2.7). Seja  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , logo vale (2.5), ou seja, existem  $R > 0$  e  $s > 0$  tais que  $\|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq Rs^{\nu k} M_{\nu k}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ . Se  $\phi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \widehat{\phi}(j, k) e_j^k$ , utilizando (1.7), as Proposições 1.3 e 1.4, a desigualdade triangular, o Lema 1.2 e a fórmula de Plancherel, segue que

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^\infty(X)} &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \widehat{\phi}(j, k) e_j^k \right\|_{L^\infty(X)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |\widehat{\phi}(j, k)| \|e_j^k\|_{L^\infty(X)} \\ &= \sum_{k=1}^{d_0} |\widehat{\phi}(0, k)| \|e_0^k\|_{L^\infty(X)} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |\widehat{\phi}(j, k)| \|e_j^k\|_{L^\infty(X)} \\ &\stackrel{(1.7)}{\leq} \sum_{k=1}^{d_0} |\widehat{\phi}(0, k)| \underbrace{\left( \max_{1 \leq k \leq d_0} \|e_0^k\|_{L^\infty(X)} \right)}_{:=C'} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |\widehat{\phi}(j, k)| \left( C'' \lambda_j^{\frac{n-1}{2\nu}} \right) \\ &= C' \sum_{k=1}^{d_0} |\widehat{\phi}(0, k)| + C'' \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |\widehat{\phi}(j, k)| \lambda_j^{\frac{n-1}{2\nu}} \\ &\stackrel{\text{Pro. 1.4}}{\leq} \underbrace{C' \sqrt{d_0} \|\widehat{\phi}(0)\|_{\text{HS}}}_{:=\tilde{C}} + C'' \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |\widehat{\phi}(j, k)| \lambda_j^{\ell + \frac{n-1}{2\nu} - \ell} \\ &\stackrel{\text{Pro. 1.3}}{\leq} \tilde{C} \|\widehat{\phi}(0)\|_{\text{HS}} + C'' \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} (|\widehat{\phi}(j, k)| \lambda_j^\ell)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \left( \lambda_j^{\frac{n-1}{2\nu} - \ell} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \tilde{C} \|\widehat{\phi}(0)\|_{\text{HS}} + C'' \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |\lambda_j^\ell \widehat{\phi}(j, k)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} \lambda_j^{\frac{n-1}{\nu} - 2\ell} \right)^{1/2} \\ &\stackrel{\text{Lem. 1.2}}{=} \tilde{C} \|\widehat{\phi}(0)\|_{\text{HS}} + C'' \left( \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_j} |\widehat{E^\ell \phi}(j, k)|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{\frac{n-1}{\nu} - 2\ell} \sum_{k=1}^{d_j} 1 \right)^{1/2} \\ &= \tilde{C} \|\widehat{\phi}(0)\|_{\text{HS}} + C'' \left( \sum_{j=1}^{\infty} \|\widehat{E^\ell \phi}(j)\|_{\text{HS}}^2 \right)^{1/2} \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{\infty} d_j \lambda_j^{\frac{n-1}{\nu} - 2\ell} \right)^{1/2}}_{\text{converge por (1.5)}} \\ &\leq \tilde{C} \|\phi\|_{L^2(X)} + C^* \|E^\ell \phi\|_{L^2(X)}, \end{aligned}$$

com  $C^* := C'' \left( \sum_{j=0}^{\infty} d_j \lambda_j^{\frac{n-1}{\nu} - 2\ell} \right)^{1/2}$  e a última desigualdade decorrendo da fórmula de Plancherel e do fato de que a série no último termo converge ao tomarmos  $\ell$  suficientemente grande (devido a (1.5)). Portanto, obtemos

$$\|\phi\|_{L^\infty(X)} \leq \tilde{C}\|\phi\|_{L^2(X)} + C^*\|E^\ell \phi\|_{L^2(X)}. \quad (2.13)$$

Usando (2.13) e a propriedade (M.1) da sequência  $\mathcal{M} = \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  repetidamente, tem-se, para todo  $m \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\begin{aligned} \|E^m \phi\|_{L^\infty(X)} &\leq \tilde{C}\|E^m \phi\|_{L^2(X)} + C^*\|E^{m+\ell} \phi\|_{L^2(X)} \\ &\leq \tilde{C}R s^{\nu m} M_{\nu m} + C^* R s^{\nu(m+\ell)} M_{\nu(m+\ell)} \\ &\leq \tilde{C}R s^{\nu m} M_{\nu m} + C^* R s^{\nu m} s^{\nu \ell} A r^{\nu(m+\ell)-1} M_{\nu(m+\ell)-1} \\ &\leq \tilde{C}R s^{\nu m} M_{\nu m} + C^* R s^{\nu m} s^{\nu \ell} A r^{\nu(m+\ell)-1} A r^{\nu(m+\ell)-2} M_{\nu(m+\ell)-2} \\ &= \tilde{C}R s^{\nu m} M_{\nu m} + C^* R s^{\nu m} s^{\nu \ell} A^2 r^{2\nu(m+\ell)-1-2} M_{\nu(m+\ell)-2} \\ &\vdots \\ &\leq \tilde{C}R s^{\nu m} M_{\nu m} + C^* R s^{\nu m} s^{\nu \ell} A^{\nu \ell} r^{\nu \ell \nu(m+\ell)-1-\dots-\nu \ell} M_{\nu m} \\ &= \tilde{C}R s^{\nu m} M_{\nu m} + C^* R s^{\nu m} s^{\nu \ell} A^{\nu \ell} (r^{\nu \ell})^{\nu m} r^{\nu \ell^2 - (1+\dots+\nu \ell)} M_{\nu m} \\ &= \tilde{C}R s^{\nu m} M_{\nu m} + C^* R (s r^{\nu \ell})^{\nu m} (s A)^{\nu \ell} r^{\nu \ell^2 - (1+\dots+\nu \ell)} M_{\nu m} \\ &\leq \left( \tilde{C}R + C^* (s A)^{\nu \ell} r^{\nu \ell^2 - (1+\dots+\nu \ell)} \right) h^{\nu m} M_{\nu m} \\ &= C h^{\nu m} M_{\nu m} \end{aligned}$$

com  $C := \tilde{C}R + C^* (s A)^{\nu \ell} r^{\nu \ell^2 - (1+\dots+\nu \ell)}$  e  $h := \max\{s, s r^{\nu \ell}\}$ , e isto implica na validade de (2.7).

De maneira totalmente análoga à demonstração feita em (ii), prova-se que são equivalentes (2.8) e (2.9), o que será útil para demonstrarmos os demais itens.

(iii) Aqui, precisamos mostrar que (2.5)  $\Leftrightarrow$  (2.8).

(2.8)  $\Rightarrow$  (2.5). Se mostrarmos que (2.8)  $\Rightarrow$  (2.7), por (ii) teremos (2.8)  $\Rightarrow$  (2.5). Seja  $\phi \in C^\infty(X)$  e suponha que vale (2.8), ou seja, existem  $C > 0$  e  $s > 0$  tais que  $\|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(X)} \leq C s^{|\alpha|} M_{|\alpha|}$ , para todo  $\alpha$ .

Considere o operador elítico  $\mathcal{L} := \sum_{j=1}^N \partial_j^2$ , o qual pertence ao espaço  $\Psi_e^2(X)$ . Então, com  $Y_j \in \{\partial_i\}_{i=1}^N$ , para  $j = 1, \dots, |\alpha|$ , para todo  $x \in X$  e todo  $k \in \mathbb{N}_0$ , utilizando o Teorema multinomial adaptado à não comutatividade de campos vetoriais, podemos fazer a estimativa

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}^k \phi(x)| &= \left| \left( \sum_{j=1}^N \partial_j^2 \right)^k \phi(x) \right| \leq \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} |Y_1^2 \cdots Y_{|\alpha|}^2 \phi(x)| \stackrel{(2.8)}{\leq} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} C s^{2|\alpha|} M_{2|\alpha|} \\ &= C s^{2k} M_{2k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \stackrel{(1.2)}{=} C s^{2k} M_{2k} N^k = C (s\sqrt{N})^{2k} M_{2k} = C h^{2k} M_{2k}, \end{aligned}$$

sendo  $h := s\sqrt{N}$ . Da desigualdade obtida acima, segue que

$$\|\mathcal{L}^k \phi\|_{L^\infty(X)} = \sup_{x \in X} |\mathcal{L}^k \phi(x)| \leq Ch^{2k} M_{2k},$$

para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ , donde vale (2.7), implicando, por (ii), em (2.5). Portanto, segue do item (i) que (2.5) vale para todo operador pseudodiferencial elítico em  $\Psi_e^2(X)$ .

Finalmente, mostremos que  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . Para tanto, note que  $\mathcal{L}^{\nu/2} \in \Psi_e^\nu(X)$ , então segue pelo item (i) que  $\mathcal{L}^{\nu/2}$  também define a classe  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . Ainda pelos itens anteriores, sabe-se que  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  independe da norma tomada (em  $L^2$  ou  $L^\infty$ ). Observe que

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L}^{\nu/2})^k \phi\|_{L^2(X)}^2 &= \|\mathcal{L}^{\nu k/2} \phi\|_{L^2(X)}^2 = \langle \mathcal{L}^{\nu k/2} \phi, \mathcal{L}^{\nu k/2} \phi \rangle \\ &= \langle \phi, \mathcal{L}^{\nu k} \phi \rangle \\ &\leq \|\phi\|_{L^2(X)} \|\mathcal{L}^{\nu k} \phi\|_{L^2(X)} \\ &\leq CA^{2\nu k} M_{2\nu k}. \end{aligned}$$

Pela propriedade (M.2), temos que

$$M_{2\nu k} \leq A' H^{2\nu k} M_{\nu k}^2,$$

e portanto, concluímos que existem  $C' > 0$  e  $h > 0$  tais que

$$\|(\mathcal{L}^{\nu/2})^k \phi\|_{L^2(X)} \leq C' h^{\nu k} M_{\nu k},$$

o que implica em  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ .

**(2.5)  $\implies$  (2.8).** Como (2.8)  $\Leftrightarrow$  (2.9), basta mostrar que (2.5)  $\implies$  (2.9). Seja  $\phi \in C^\infty(X)$  e suponha que vale (2.5), isto é, existem  $C > 0$  e  $s > 0$  tais que  $\|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq Cs^{\nu k} M_{\nu k}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ . Denotando por  $E^{-k}$  uma parametriz de  $E^k$  e por  $R_k$  o termo regularizante tal que  $E^{-k} \circ E^k = I + R_k$ , podemos escrever

$$\partial^\alpha = P_\alpha \circ E^k + Q_{\alpha,k},$$

sendo  $P_\alpha := \partial^\alpha \circ E^{-k}$  e  $Q_{\alpha,k} := \partial^\alpha \circ R_k$ .

Por um argumento análogo ao que utilizamos na demonstração de (i), existem  $H_1 > 0$  e  $H_2 > 0$  tais que  $\|P_\alpha \phi\|_{L^2(X)} \leq H_1^k \|\phi\|_{L^2(X)}$  e  $\|Q_{\alpha,k} \phi\|_{L^2(X)} \leq H_2^k \|\phi\|_{L^2(X)}$ , sempre que  $|\alpha| \leq \nu k$ . Portanto, temos

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^2(X)} &\leq \|(P_\alpha \circ E^k) \phi\|_{L^2(X)} + \|Q_{\alpha,k} \phi\|_{L^2(X)} \\ &\leq H_1^k \|E^k \phi\|_{L^2(X)} + H_2^k \|\phi\|_{L^2(X)} \\ &\leq C' h^{\nu k} M_{\nu k} \end{aligned}$$

com  $C'$  e  $h$  independentes de  $k$  e de  $\alpha$ , donde segue a validade de (2.9) e, conseqüentemente, a de (2.8).

(iv) Queremos mostrar que (2.5)  $\Leftrightarrow$  (2.9). Como (2.5)  $\stackrel{(iii)}{\Leftrightarrow}$  (2.8) e (2.8)  $\Leftrightarrow$  (2.9), segue imediatamente o resultado desejado.

(v) Dada  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , representemos por  $\psi$  alguma localização de  $\phi$  em  $\mathbb{R}^n$ , isto é, existe uma carta de coordenadas  $(U, \varphi)$  tal que  $\psi = \phi \circ \varphi^{-1}$  em  $\varphi(U)$ . Uma vez que vale (2.8), o resultado segue diretamente ao utilizarmos a desigualdade  $M_k \geq Ck!$  e a regra da cadeia (Não vamos nos ater aos detalhes dos cálculos, pois não temos o objetivo de revisitar todas as propriedades e resultados estabelecidos para localizações em variedades; isso pode ser encontrado nas referências [15] e [17]).

□

**Exemplo 2.2.** Este exemplo diz respeito à parte (v) do Teorema 2.1. Note que a classe Gevrey de ordem  $s \geq 1$ ,  $\gamma^s(X)$ , de funções ultradiferenciáveis pode ser vista como  $\gamma^s(X) = \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  com  $\mathcal{M} = \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  tal que  $M_k = (k!)^s$ , para  $s \geq 1$ . Pelo Teorema 2.1, parte (v), este é o espaço das funções Gevrey  $\phi$  em  $X$ , isto é, funções que pertencem às classes Gevrey  $\gamma^s(U)$  em toda carta de coordenada local, ou ainda, tais que existem constantes  $h > 0$  e  $C > 0$  satisfazendo

$$\|\partial^\alpha \psi\|_{L^\infty(U)} \leq Ch^{|\alpha|} (|\alpha|!)^s,$$

para toda localização  $\psi$  de  $\phi$  em  $X$  e para todo multi-índice  $\alpha$ . Se  $s = 1$ , este é o espaço das funções analíticas.

Nosso próximo passo é caracterizar a classe de funções ultradiferenciáveis do tipo Roumieu  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  em termos dos autovalores do operador  $E \in \Psi'_{+e}(X)$  através de estimativas sobre os coeficientes de Fourier. Aqui estamos supondo que  $E$  é positivo definido a fim de utilizar a teoria desenvolvida na seção 1.4. Assumimos que  $E$  e  $X$  são apenas suaves e não necessariamente analíticos (deixaremos explícito quando se fizer necessário assumir analiticidade).

**Teorema 2.2.** *Tem-se  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  se, e somente se, existem constantes  $C > 0$  e  $L > 0$  tais que*

$$\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \geq 1.$$

*Demonstração.* Lembremos que, dada  $\phi \in C^\infty(X)$ , tem-se

$$\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X) \iff \exists C > 0, \exists h > 0 \text{ t.q. } \|E^m \phi\|_{L^2(X)} \leq Ch^{\nu m} M_{\nu m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

**Suficiência:** Seja  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . Queremos provar que, para todo  $\ell \in \mathbb{N}$ , existem  $C > 0$  e  $L > 0$  tais que  $\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right)$ . Dado  $m \in \mathbb{N}_0$ , pela fórmula de Plancherel, temos que

$$\|E^m \phi\|_{L^2(X)}^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\widehat{E^m \phi}(\ell)\|_{\text{HS}}^2.$$

Do Lema 1.2, temos que  $\widehat{E^m \phi}(\ell) = \lambda_\ell^m \widehat{\phi}(\ell)$ ; logo,

$$\|E^m \phi\|_{L^2(X)}^2 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\lambda_\ell^m \widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_\ell^{2m} \|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}}^2.$$

Como  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , existem  $C > 0$  e  $h > 0$  tais que  $\|E^m \phi\|_{L^2(X)} \leq Ch^{\nu m} M_{\nu m}$ , o que nos dá

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_\ell^{2m} \|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}}^2 &= \|E^m \phi\|_{L^2(X)}^2 \leq (Ch^{\nu m} M_{\nu m})^2 \\ \implies \forall \ell \geq 1, (\lambda_\ell^m \|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}})^2 &\leq (Ch^{\nu m} M_{\nu m})^2, \end{aligned}$$

donde obtemos

$$\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq \frac{Ch^{\nu m} M_{\nu m}}{\lambda_\ell^m}, \quad \forall \ell \geq 1. \quad (2.14)$$

Defina  $r := \lambda_\ell^{1/\nu}/h$  e note que de (2.14) podemos fazer

$$\frac{\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}}}{C} \leq \frac{M_{\nu m}}{\left(\frac{\lambda_\ell^{1/\nu}}{h}\right)^{\nu m}} = \frac{M_{\nu m}}{r^{\nu m}},$$

e utilizando o Lema 2.4

$$\frac{\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}}}{C} \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{M_{\nu k}}{r^{\nu k}} \stackrel{\text{Lem. 2.4}}{=} \exp(-\mathcal{M}(r)) = \exp\left(-\mathcal{M}(h^{-1} \lambda_\ell^{1/\nu})\right),$$

o que implica, tomando  $L := h^{-1}$ , que

$$\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C \exp\left(-\mathcal{M}(L \lambda_\ell^{1/\nu})\right),$$

para todo  $\ell \geq 1$ .

**Necessidade:** Seja  $\phi \in C^\infty(X)$ , de modo que existam  $C > 0$  e  $L > 0$  tais que

$$\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C \exp\left(-\mathcal{M}(L \lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Precisamos mostrar  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , ou seja, que existem constantes  $R > 0$  e  $h > 0$  tais que  $\|E^m \phi\|_{L^2(X)} \leq Rh^{\nu m} M_{\nu m}$ , para todo  $m \in \mathbb{N}_0$ . Pela fórmula de Plancherel e por hipótese, temos

$$\begin{aligned} \|E^m \phi\|_{L^2(X)}^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \|\widehat{E^m \phi}(j)\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{2m} \|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m} \|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}}^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m} \left[ C \exp\left(-\mathcal{M}(L \lambda_j^{1/\nu})\right) \right]^2 \\ &= C' \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m} \exp\left(-\mathcal{M}(L \lambda_j^{1/\nu})\right) \exp\left(-\mathcal{M}(L \lambda_j^{1/\nu})\right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

com  $C' = C^2$ .

Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , note que

$$\lambda_j^{2m} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right) = \frac{\lambda_j^{2m}}{\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{(L\lambda_j^{1/\nu})^{\nu k}}{M_{\nu k}}} \leq \frac{\lambda_j^{2m}}{\frac{(L\lambda_j^{1/\nu})^{\nu p}}{M_{\nu p}}} = \frac{\lambda_j^{2m}}{L^{\nu p} \lambda_j^p} M_{\nu p},$$

para todo  $p \in \mathbb{N}$ . Em particular, tomando  $p = 2m + 1$  na desigualdade acima e usando a propriedade (M.2) da seqüência  $\mathcal{M} = \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ , segue que

$$\lambda_j^{2m} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right) \leq \frac{\lambda_j^{2m}}{L^{\nu(2m+1)} \lambda_j^{2m+1}} M_{\nu(2m+1)} \stackrel{(M.2)}{\leq} \lambda_j^{-1} A h^{2\nu m} M_{2\nu m},$$

para  $A, h > 0$ . Voltando em (2.15),

$$\begin{aligned} \|E^m \phi\|_{L^2(X)}^2 &\leq C' \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} A h^{2\nu m} M_{2\nu m} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right) \\ &= C' A h^{2\nu m} M_{2\nu m} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda_j^{-1} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right) \leq \lambda_j^{-1} \frac{M_{\nu p}}{\lambda_j^p L^{\nu p}} = \frac{M_{\nu p}}{L^{\nu p}} \frac{1}{\lambda_j^{p+1}},$$

para todo  $p \in \mathbb{N}$ . De (1.5), sabemos que  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{(1+\lambda_j)^q} < \infty \Leftrightarrow q > \frac{n}{\nu}$ ; então, tome  $p$  grande o suficiente, de modo que para cada  $j \in \mathbb{N}$ , tenhamos

$$\lambda_j^{p+1} \geq \frac{(1+\lambda_j)^q}{d_j} \iff \frac{1}{\lambda_j^{p+1}} \leq \frac{d_j}{(1+\lambda_j)^q}.$$

Logo, pelo teste de comparação, a série  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{p+1}}$  converge.

Voltando em (2.16) e usando a propriedade (M.2) da seqüência  $\mathcal{M} = \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|E^m \phi\|_{L^2(X)}^2 &\leq C' A h^{2\nu m} M_{2\nu m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{M_{\nu p}}{L^{\nu p}} \frac{1}{\lambda_j^{p+1}} \\ &= C' A h^{2\nu m} M_{2\nu m} \frac{M_{\nu p}}{L^{\nu p}} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^{p+1}}}_{=C'' < \infty} \\ &= \frac{C' C'' A M_{\nu p}}{L^{\nu p}} h^{2\nu m} M_{2\nu m} \\ &\leq \tilde{R} h^{2\nu m} M_{\nu m}^2, \end{aligned}$$

o que implica em  $\|E^m \phi\|_{L^2(X)} \leq R h^{\nu m} M_{\nu m}$ , ou seja,  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ .

□

### 2.3.1 A classe $\gamma^s(X)$

A partir do Teorema 2.2 podemos obter a caracterização para a classe Gevrey

$$\gamma^s(X) = \Gamma_{(k!)^s}(X), \quad s \in [1, \infty),$$

em que  $\mathcal{M} = \{(k!)^s\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ . Para verificar isto, mostremos primeiramente que

$$\mathcal{M}(r) \simeq r^{1/s}.$$

De fato, usando a desigualdade  $\frac{t^N}{N!} \leq e^t$ , para  $N \in \mathbb{N}_0$  e  $t \in \mathbb{R}$ , que decorre da expansão de Taylor da função exponencial, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(r) &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \log \frac{r^{\nu k}}{((\nu k)!)^s} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \log \left( \frac{(r^{\nu k})^{1/s}}{(\nu k)!} \right)^s \\ &\leq \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \log \left( \frac{(r^{1/s})^\ell}{\ell!} \right)^s \leq \sup_{\ell \in \mathbb{N}} \log (e^{r^{1/s}})^s \\ &= sr^{1/s}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Por outro lado, temos a desigualdade (veja a fórmula (3.20) de [2])

$$\inf_{p \in \mathbb{N}} (2p)^{2ps} r^{-2p} \leq \exp \left( -\frac{s}{8e} r^{1/s} \right).$$

Analogamente, para quaisquer  $\nu \in \mathbb{N}$  e  $k \geq \nu$ , usando a desigualdade  $(k + \nu)^{k+\nu} \leq (4\nu)^k k^k$ , obtemos a desigualdade (basta seguir a mesma ideia da dedução de (3.20) em [2])

$$\inf_{p \in \mathbb{N}} (\nu p)^{\nu ps} r^{-\nu p} \leq \exp \left( -\frac{s}{4\nu e} r^{1/s} \right).$$

Por fim, utilizando a desigualdade acima e  $p! \leq p^p$ , segue que

$$\begin{aligned} \exp(\mathcal{M}(r)) &= \exp \left( \sup_{k \in \mathbb{N}} \log \frac{r^{\nu k}}{((\nu k)!)^s} \right) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \exp \left( \log \frac{r^{\nu k}}{((\nu k)!)^s} \right) \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{((r^{1/s})^{-\nu k} (\nu k)!)^s} \stackrel{\text{Lem. 2.3}}{=} \frac{1}{\inf_{k \in \mathbb{N}} ((r^{1/s})^{-\nu k} (\nu k)!)^s} \\ &\geq \frac{1}{\inf_{k \in \mathbb{N}} ((r^{1/s})^{-\nu k} (\nu k)^{\nu k})^s} = \frac{1}{\inf_{k \in \mathbb{N}} (r^{-\nu k} (\nu k)^{\nu ks})} \\ &\geq \frac{1}{\exp \left( -\frac{s}{4\nu e} r^{1/s} \right)} = \exp \left( \frac{s}{4\nu e} r^{1/s} \right), \end{aligned}$$

e segue pela monotonicidade da função exponencial que

$$\frac{s}{4\nu e} r^{1/s} \leq \mathcal{M}(r). \tag{2.18}$$

Combinando (2.17) e (2.18), obtemos

$$\frac{s}{4\nu e} r^{1/s} \leq \mathcal{M}(r) \leq sr^{1/s}. \tag{2.19}$$

Podemos então formular uma caracterização para os espaços Gevrey:

**Teorema 2.3.** *Suponha que  $X$  e  $E$  são analíticos e seja  $s \in [1, \infty)$ . Então, temos que  $\phi \in \gamma^s(X)$  se, e somente se, existem constantes  $C > 0$  e  $L > 0$  tais que*

$$\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C \exp(-L\lambda_\ell^{\frac{1}{s\nu}}), \quad \forall \ell \geq 1.$$

*Em particular, para  $s = 1$ , recuperamos a caracterização de funções analíticas dada em (1.6).*

*Demonstração.* A primeira parte da demonstração segue imediatamente do Teorema 2.2 juntamente com o fato de que  $\mathcal{M}(r) \simeq r^{1/s}$  (ver (2.19)) para a classe  $\gamma^s(X)$ ,  $s \geq 1$ . Portanto, basta provar (1.6). Sejam  $X$  uma variedade compacta fechada e  $E$  um operador diferencial analítico, elítico, positivo e de ordem  $\nu$ . Considere  $\{\phi_k\}$  e  $\{\lambda_k\}$  as respectivas autofunções e autovalores de  $E$ , isto é,

$$E\phi_k = \lambda_k\phi_k, \quad \forall k.$$

De acordo com [18], uma função suave  $f = \sum_{j=0}^{\infty} f_j\phi_j$  é analítica se, e somente se, existe uma constante  $C > 0$  tal que, para todo  $k \geq 0$ , temos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{2k} |f_j|^2 \leq ((\nu k)!)^2 C^{2k+2},$$

que pode ser vista como a fórmula de Plancherel

$$\|E^k f\|_{L^2(X)}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{2k} |f_j|^2 \leq ((\nu k)!)^2 C^{2k+2},$$

pois  $f = \sum_j f_j\phi_j$  implica em

$$E^k f = \sum_j f_j E^k \phi_j = \sum_j f_j \lambda_j^k \phi_j \implies \|E^k f\|_{L^2(X)}^2 = \sum_j \lambda_j^{2k} |f_j|^2.$$

Em virtude da Definição 2.2, para a classe de funções analíticas, podemos tomar  $M_k = k!$  e, pelo Teorema 2.2,  $f$  é analítica se, e somente se,

$$\|\widehat{f}(j)\|_{\text{HS}} \leq C \exp(-L\lambda_j^{1/\nu}) \quad \text{ou} \quad |f_j| \leq C' \exp(-L'\lambda_j^{1/\nu}),$$

com  $\mathcal{M}(r) = \sup_p \log \frac{r^{\nu p}}{(\nu p)!} \simeq r$ , considerando (2.19). □

**Observação 2.7.** No Teorema 2.3 assumimos  $X$  e  $E$  analíticos com o objetivo de interpretar o espaço  $\gamma^s(X)$  localmente como um espaço Gevrey, baseando-se na ideia do item (v) do Teorema 2.1.

## 2.4 O espaço $\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$

Finalizamos este capítulo introduzindo as classes de funções do tipo Beurling.

**Definição 2.3.** A classe das funções ultradiferenciáveis em  $X$  do tipo Beurling, denotada por  $\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ , é o espaço das funções  $\phi \in C^\infty(X)$  tais que para cada  $h > 0$  existe uma constante  $C_h > 0$  satisfazendo

$$\|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq C_h h^{\nu k} M_{\nu k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

O Teorema a seguir caracteriza os espaços de funções do tipo Beurling de modo semelhante ao que é feito no Teorema 2.2.

**Teorema 2.4.** *Tem-se  $\phi \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$  se, e somente se, para todo  $L > 0$  existe  $C_L > 0$  tal que*

$$\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C_L \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \geq 1. \quad (2.20)$$

*Demonstração.* A demonstração deste resultado segue as mesmas ideias apresentadas para a prova do Teorema 2.2, fazendo-se as devidas modificações. Sendo assim, mostramos apenas que a estimativa (2.20) é necessária. Para tanto, seja  $L > 0$  qualquer. Fixado  $m \in \mathbb{N}_0$ , pela fórmula de Plancherel, dada  $\phi \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$  temos que

$$\|E^m \phi\|_{L^2(X)}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|\widehat{E^m \phi}(j)\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m} \|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}}^2,$$

donde segue que, para todo  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda_j^{2m} \|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}}^2 \leq \|E^m \phi\|_{L^2(X)}^2 \implies \|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}} \leq \lambda_j^{-m} \|E^m \phi\|_{L^2(X)}.$$

Como  $\phi \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ , existe  $\tilde{C}_L > 0$  tal que

$$\|E^k \phi\|_{L^2(X)} \leq \tilde{C}_L L^{\nu k} M_{\nu k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

logo

$$\|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}} \leq \tilde{C}_L L^{\nu m} M_{\nu m} \lambda_j^{-m} = \tilde{C}_L L^{2\nu m} \frac{M_{\nu m}}{(L\lambda_j^{1/\nu})^{\nu m}} \leq C_L \frac{M_{\nu m}}{(L\lambda_j^{1/\nu})^{\nu m}}$$

o que implica em

$$\frac{\|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}}}{C_L} \leq \frac{M_{\nu m}}{(L\lambda_j^{1/\nu})^{\nu m}},$$

com  $C_L := \tilde{C}_L \cdot \max\{1, L^{2\nu m}\}$ . Portanto, segue que

$$\frac{\|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}}}{C_L} \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \frac{M_{\nu k}}{(L\lambda_j^{1/\nu})^{\nu k}} = \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right),$$

e assim

$$\|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}} \leq C_L \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right), \quad \forall j \geq 1.$$

□

# Capítulo 3

## ULTRADISTRIBUIÇÕES

Neste capítulo estudamos os espaços de ultradistribuições, ou seja, dos funcionais lineares contínuos sobre  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , no caso Roumieu, e sobre  $\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ , no caso Beurling. O principal objetivo é caracterizar tais espaços através dos coeficientes de Fourier (Teoremas 3.3 e 3.4). Para tanto, se faz necessária a construção dos espaços  $\alpha$ -duais, apresentados a seguir.

### 3.1 $\alpha$ -duais

Em primeiro lugar, será apresentada a definição formal do  $\alpha$ -dual do espaço  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  e, em seguida, estabelecemos um resultado que nos dá caracterizações alternativas de elementos do  $\alpha$ -dual.

**Definição 3.1.** O  $\alpha$ -dual do espaço  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  de funções ultradiferenciáveis, denotado por  $[\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$ , é definido como

$$\left\{ v = \{v_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}_0}; \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_\ell} |(v_\ell)_j| |\widehat{\phi}(\ell, j)| < \infty, v_\ell \in \mathbb{C}^{d_\ell}, \forall \phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X) \right\}.$$

Podemos ainda usar a notação  $v(\ell, j) := (v_\ell)_j$  (a  $j$ -ésima coordenada do vetor  $v_\ell \in \mathbb{C}^{d_\ell}$ ) e

$$\|v_\ell\|_{\text{HS}} = \left( \sum_{j=1}^{d_\ell} |v(\ell, j)|^2 \right)^{1/2}.$$

**Observação 3.1.** Cada elemento  $v \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$  é uma seqüência de vetores da forma  $v = \{v_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}_0}$  tal que, para cada  $\ell \in \mathbb{N}_0$ ,  $v_\ell \in \mathbb{C}^{d_\ell}$ . Por exemplo,

$$v_0 = ((v_0)_1, (v_0)_2, \dots, (v_0)_{d_0}) = (v(0, 1), v(0, 2), \dots, v(0, d_0)) \in \mathbb{C}^{d_0}$$

$$v_1 = ((v_1)_1, (v_1)_2, \dots, (v_1)_{d_1}) = (v(1, 1), v(1, 2), \dots, v(1, d_1)) \in \mathbb{C}^{d_1}$$

$$v_2 = ((v_2)_1, (v_2)_2, \dots, (v_2)_{d_2}) = (v(2, 1), v(2, 2), \dots, v(2, d_2)) \in \mathbb{C}^{d_2}$$

⋮

Definimos o *segundo dual* de  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , denotado por  $([\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge)^\wedge$ , como o espaço das seqüências  $w = \{w_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ , com  $w_\ell \in \mathbb{C}^{d_\ell}$ , tais que

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_\ell} |(w_\ell)_j| |(v_\ell)_j| < \infty, \quad \forall v \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge.$$

**Observação 3.2.** Uma discussão acerca do  $\alpha$ -dual para o caso Beurling é apresentada na Seção 3.2.1.

O próximo resultado, e o mais importante desta seção, nos fornece caracterizações alternativas para  $[\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$ .

**Teorema 3.1.** *As afirmações a seguir são equivalentes.*

(i)  $v \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$ .

(ii) Para todo  $L > 0$  tem-se

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \|v_\ell\|_{\text{HS}} < \infty.$$

(iii) Para todo  $L > 0$ , existe  $K = K_L > 0$  tal que

$$\|v_\ell\|_{\text{HS}} \leq K \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right)$$

vale para todo  $\ell \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* (i)  $\implies$  (ii). Dados  $v \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$  e  $L > 0$ , seja  $\phi$  uma função em  $C^\infty(X)$  satisfazendo

$$\widehat{\phi}(\ell, j) = \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_0, 1 \leq j \leq d_\ell.$$

- Afirmação:  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . De fato, por (1.4), existem  $q \in \mathbb{N}$  e  $C > 0$  tais que  $\sqrt{d_\ell} \leq C\lambda_\ell^q, \forall \ell \geq 1$ , então

$$\begin{aligned} \|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} &= \left( \sum_{j=1}^{d_\ell} |\widehat{\phi}(\ell, j)|^2 \right)^{1/2} = \left( \sum_{j=1}^{d_\ell} \left( \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \left\{ \sum_{j=1}^{d_\ell} 1 \right\}^{1/2} = \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \sqrt{d_\ell} \\ &\stackrel{(1.4)}{\leq} C\lambda_\ell^q \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \end{aligned}$$

para todo  $\ell \geq 1$ . Pela estimativa (2.2), temos que  $\lambda_\ell^q \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \leq \tilde{C}$  uniformemente em  $\ell \geq 1$ ; logo,

$$\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C' \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right)$$

vale para todo  $\ell \geq 1$ . Pelo Lema 2.5, para  $L_2 = \frac{L}{\sqrt{AH}}$ , temos que

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \leq \exp\left(-\mathcal{M}(L_2\lambda_\ell^{1/\nu})\right),$$

donde obtemos

$$\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C' \exp\left(-\mathcal{M}(L_2\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \geq 1,$$

o que nos dá  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  pelo Teorema 2.2, e isto prova a afirmação.

Usando a desigualdade (1.8) e o fato de que  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , segue que

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{\ell}^{1/\nu})\right) \|v_{\ell}\|_{\text{HS}} &\leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[ \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{\ell}^{1/\nu})\right) \sum_{j=1}^{d_{\ell}} |v(\ell, j)| \right] \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[ \sum_{j=1}^{d_{\ell}} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{\ell}^{1/\nu})\right) |v(\ell, j)| \right] \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_{\ell}} |\widehat{\phi}(\ell, j)| |v(\ell, j)| < \infty, \end{aligned}$$

com  $< \infty$  vindo da hipótese (i), uma vez que  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  e  $v \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^{\wedge}$ , donde segue a validade de (ii).

**(ii)  $\implies$  (i).** Seja  $v = (v_{\ell})_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ , com  $v_{\ell} \in \mathbb{C}^{d_{\ell}}$ , de modo que

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{\ell}^{1/\nu})\right) \|v_{\ell}\|_{\text{HS}} < \infty,$$

para todo  $L > 0$ . Devemos mostrar que  $v \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^{\wedge}$ , ou seja, que  $\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_{\ell}} |(v_{\ell})_j| |\widehat{\phi}(\ell, j)| < \infty$ , para toda  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . Para tanto, seja  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . Pelo Teorema 2.2, existem  $C > 0$  e  $L > 0$  tais que

$$\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{\ell}^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \geq 1.$$

Então, podemos fazer a seguinte estimativa utilizando a hipótese e a desigualdade de Cauchy-Schwarz (C.S.),

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_{\ell}} |(v_{\ell})_j| |\widehat{\phi}(\ell, j)| &\stackrel{\text{(C.S.)}}{\leq} \sum_{\ell=0}^{\infty} \|v_{\ell}\|_{\text{HS}} \|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \\ &= \|v_0\|_{\text{HS}} \|\widehat{\phi}(0)\|_{\text{HS}} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \|v_{\ell}\|_{\text{HS}} \|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \\ &\leq \underbrace{\|v_0\|_{\text{HS}} \|\widehat{\phi}(0)\|_{\text{HS}}}_{< \infty} + C \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} \|v_{\ell}\|_{\text{HS}} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{\ell}^{1/\nu})\right)}_{< \infty, \text{ por hipótese}} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

donde segue que  $v \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^{\wedge}$ .

**(ii)  $\implies$  (iii).** Esta implicação é imediata devido à convergência da série, que é nossa hipótese.

De fato, se

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{\ell}^{1/\nu})\right) \|v_{\ell}\|_{\text{HS}} < \infty,$$

para todo  $L > 0$ , então existe  $K = K_L > 0$  tal que, para todo  $\ell \geq 1$

$$\exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{\ell}^{1/\nu})\right) \|v_{\ell}\|_{\text{HS}} \leq K,$$

o que implica em

$$\|v_\ell\|_{\text{HS}} \leq K \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \in \mathbb{N},$$

donde segue (iii).

(iii)  $\implies$  (ii). Seja  $v \in \mathbb{C}^{d_\ell}$ ,  $\ell \geq 1$ . Dado  $L > 0$ , tomando  $L_2 := \frac{L}{\sqrt{AH}}$  como no Lema 2.5, temos

que

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \leq \exp\left(-\mathcal{M}(L_2\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad (3.1)$$

e para tal  $L_2$ , segue da hipótese que existe  $K = K_{L_2} > 0$  tal que

$$\|v_\ell\|_{\text{HS}} \leq K \exp\left(\mathcal{M}(L_2\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \iff \exp\left(-\mathcal{M}(L_2\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \|v_\ell\|_{\text{HS}} \leq K. \quad (3.2)$$

Além disso, por (2.4), temos

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \leq \frac{M_{\nu p}^{1/2}}{L^{\frac{\nu p}{2}} \lambda_\ell^{p/2}}, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Por fim, da desigualdade acima, (3.1) e (3.2), segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \|v_\ell\|_{\text{HS}} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \|v_\ell\|_{\text{HS}} \\ &\stackrel{(3.1)}{\leq} \sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \exp\left(-\mathcal{M}(L_2\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \|v_\ell\|_{\text{HS}} \\ &\stackrel{(3.2)}{\leq} K \sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \leq K \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{M_{\nu p}^{1/2}}{L^{\frac{\nu p}{2}} \lambda_\ell^{p/2}} \\ &= K \frac{M_{\nu p}^{1/2}}{L^{\frac{\nu p}{2}}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\ell^{p/2}} < \infty \end{aligned}$$

sendo que a série  $\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\ell^{p/2}}$  converge ao tomarmos  $p$  grande o suficiente, utilizando (1.5) e o critério de comparação.  $\square$

## 3.2 O espaço $\Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$

Finalmente, introduzimos o espaço das ultradistribuições sobre  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ .

**Definição 3.2.** A classe das ultradistribuições sobre  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , denotada por  $\Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$ , é o conjunto de todos os funcionais lineares  $u: \Gamma_{\mathcal{M}}(X) \rightarrow \mathbb{C}$  tais que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $C_\epsilon > 0$  satisfazendo

$$|u(\phi)| \leq C_\epsilon \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \epsilon^{|\alpha|} M_{\nu|\alpha|}^{-1} \sup_{x \in X} |E^{|\alpha|} \phi(x)|, \quad \forall \phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X).$$

**Observação 3.3.** Podemos usar a notação alternativa  $\langle u, \phi \rangle := u(\phi)$ .

**Definição 3.3** (Convergência em  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ ). Considere uma sequência  $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  e uma função  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . Então,  $\phi_m \rightarrow \phi$ , quando  $m \rightarrow \infty$ , se existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \epsilon^{|\alpha|} M_{\nu^{|\alpha|}}^{-1} \sup_{x \in X} |E^{|\alpha|}(\phi_m - \phi)(x)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } m \rightarrow \infty.$$

**Observação 3.4.** Temos ainda que  $u \in \Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$  se, e somente se,  $u(\phi_m) \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ , para toda sequência  $\{\phi_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  convergindo para zero em  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ .

**Definição 3.4.** Definimos os **coeficientes de Fourier** de  $u \in \Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$  pondo

$$\widehat{u}(\ell, k) := u(\overline{e_\ell^k}) \quad \text{e} \quad \widehat{u}(\ell) := \widehat{u}(e_\ell) := \begin{pmatrix} \widehat{u}(\ell, 1) \\ \vdots \\ \widehat{u}(\ell, d_\ell) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{d_\ell},$$

para  $\ell \in \mathbb{N}_0$  e  $1 \leq k \leq d_\ell$ . Define-se ainda

$$\|\widehat{u}(\ell)\|_{\text{HS}} := \left( \sum_{k=1}^{d_\ell} |\widehat{u}(\ell, k)|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_0.$$

**Definição 3.5.** Sejam  $\{u_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$  e  $u \in \Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$ . Dizemos que  $u_\ell$  **converge para  $u$  em  $\Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$**  se  $u_j(\phi)$  converge para  $u(\phi)$  em  $\mathbb{C}$ , para toda  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ .

No que segue, vamos provar que o espaço de ultradistribuições  $\Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$  coincide com o  $\alpha$ -dual  $[\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$ , no sentido de identificação de elementos em cada um dos espaços. Em outras palavras, a partir de qualquer  $v \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$  é possível determinar um elemento de  $\Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$  e, reciprocamente, a partir de qualquer elemento  $v \in \Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$  é possível determinar um elemento de  $[\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$ .

**Teorema 3.2.**  $v \in \Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$  se, e somente se,  $v \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$ .

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ). Seja  $v \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$  arbitrário. Dada uma função  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , vamos definir

$$v(\phi) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \widehat{\phi}(\ell) \cdot v_\ell = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_\ell} \widehat{\phi}(\ell, j)(v_\ell)_j.$$

Pelo Teorema 2.2, como  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , existem constantes  $C > 0$  e  $L > 0$  tais que

$$\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Além disso, pelo Teorema 3.1, tem-se

$$\begin{aligned}
|v(\phi)| &= \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_\ell} \widehat{\phi}(\ell, j)(v_\ell)_j \right| \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_\ell} |\widehat{\phi}(\ell, j)|(v_\ell)_j| \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \|v_\ell\|_{\text{HS}} = \|\widehat{\phi}(0)\|_{\text{HS}} \|v_0\|_{\text{HS}} + \sum_{\ell=1}^{\infty} \|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \|v_\ell\|_{\text{HS}} \\
&\leq \underbrace{\|\widehat{\phi}(0)\|_{\text{HS}} \|v_0\|_{\text{HS}}}_{< \infty} + C \underbrace{\sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right)}_{< \infty, \text{ pelo Teorema 3.1}} \|v_\ell\|_{\text{HS}} < \infty
\end{aligned}$$

o que nos diz que  $v(\phi)$  é bem definido.

Para verificar que  $v$  é contínuo, seja  $\phi_j \rightarrow \phi$  em  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  quando  $j \rightarrow \infty$ , isto é,

$$\sup_{\alpha} \epsilon^{|\alpha|} M_{\nu|\alpha|}^{-1} \sup_{x \in X} |E^{|\alpha|}(\phi_j(x) - \phi(x))| \rightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

Segue que

$$\sup_{\alpha} \epsilon^{|\alpha|} M_{\nu|\alpha|}^{-1} \sup_{x \in X} |E^{|\alpha|}(\phi_j(x) - \phi(x))| = \sup_{\alpha} \epsilon^{|\alpha|} M_{\nu|\alpha|}^{-1} \|E^{|\alpha|}(\phi_j - \phi)\|_{L^\infty(X)} \leq C_j,$$

com  $C_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Isto implica que para todo  $\alpha$

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{|\alpha|} M_{\nu|\alpha|}^{-1} \|E^{|\alpha|}(\phi_j - \phi)\|_{L^\infty(X)} \leq C_j \\
\implies &\|E^{|\alpha|}(\phi_j - \phi)\|_{L^\infty(X)} \leq C_j A^{\nu|\alpha|} M_{\nu|\alpha|},
\end{aligned}$$

com  $C_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$  e  $A := \epsilon^{-1/\nu}$ . Segue da prova do Teorema 2.2 e do Lema 1.2 que

$$\|\widehat{\phi}_j(\ell) - \widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} = \|(\widehat{\phi_j - \phi})(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C'_j \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right),$$

com  $C'_j \rightarrow 0$ . Logo

$$\begin{aligned}
|v(\phi_j) - v(\phi)| &= |v(\phi_j - \phi)| \\
&= \left| \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_\ell} (\widehat{\phi_j - \phi})(\ell, k)(v_\ell)_k \right| \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{d_\ell} |(\widehat{\phi_j - \phi})(\ell, k)|(v_\ell)_k| \\
&\stackrel{\text{(C.S.)}}{\leq} \sum_{\ell=0}^{\infty} \|(\widehat{\phi_j - \phi})(\ell)\|_{\text{HS}} \|v_\ell\|_{\text{HS}} \\
&\leq C'_j \sum_{\ell=0}^{\infty} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \|v_\ell\|_{\text{HS}} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando  $j \rightarrow \infty$ , o que implica em  $v \in \Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$ .

( $\implies$ ). Seja  $v \in \Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$ . Por definição, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $C_\epsilon > 0$  tal que

$$|v(\phi)| \leq C_\epsilon \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \epsilon^{|\alpha|} M_{\nu|\alpha|}^{-1} \sup_{x \in X} |E^{|\alpha|} \phi(x)|, \quad \forall \phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X).$$

Em particular, tomando  $\phi = \overline{e_\ell^j}$  e usando a desigualdade (1.7), segue que

$$\begin{aligned} |v(\overline{e_\ell^j})| &\leq C_\epsilon \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \epsilon^{|\alpha|} M_{\nu|\alpha|}^{-1} \sup_{x \in X} |E^{|\alpha|} \overline{e_\ell^j}(x)| \\ &= C_\epsilon \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \epsilon^{|\alpha|} M_{\nu|\alpha|}^{-1} \sup_{x \in X} |\lambda_\ell^{|\alpha|} \overline{e_\ell^j}(x)| \\ &= C_\epsilon \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \epsilon^{|\alpha|} M_{\nu|\alpha|}^{-1} \lambda_\ell^{|\alpha|} \sup_{x \in X} |\overline{e_\ell^j}(x)| \\ &\stackrel{(1.7)}{\leq} C'_\epsilon \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \epsilon^{|\alpha|} M_{\nu|\alpha|}^{-1} \lambda_\ell^{|\alpha|} \lambda_\ell^{\frac{n-1}{2\nu}} \\ &= C'_\epsilon \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\epsilon^{|\alpha|} \lambda_\ell^{|\alpha|+k}}{M_{\nu|\alpha|}}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

para  $k := \frac{n-1}{2\nu}$ . Usando a propriedade (M.1) da sequência  $\mathcal{M} = \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ , podemos fazer a estimativa (utilizando o Lema 2.1)

$$\begin{aligned} M_{\nu(|\alpha|+k)} &\leq AH^{\nu(|\alpha|+k)-1} M_{\nu(|\alpha|+k)-1} \\ &\leq \dots \\ &\leq A^{\nu k} H^{\nu k \nu (|\alpha|+k) - (1+\dots+\nu k)} M_{\nu|\alpha|} \\ &= A^{\nu k} H^{\nu k \nu |\alpha| + \nu^2 k^2} H^{-(1+\dots+\nu k)} M_{\nu|\alpha|} \\ &= A^{\nu k} h^{\nu k |\alpha| + \nu k^2} H^{f(\nu, k)} M_{\nu|\alpha|}, \end{aligned}$$

com  $h := H^\nu$  e  $f(\nu, k) := -(1 + \dots + \nu k)$  independente de  $\alpha$ . Logo a desigualdade acima implica em

$$\frac{1}{M_{\nu|\alpha|}} \leq \frac{A^{\nu k} H^{f(\nu, k)} h^{\nu k |\alpha| + \nu k^2}}{M_{\nu(|\alpha|+k)}}.$$

Esta desigualdade e (3.3) implicam em

$$\begin{aligned} |v(\overline{e_\ell^j})| &\leq C'_\epsilon \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\epsilon^{|\alpha|+k-k} \lambda_\ell^{|\alpha|+k} A^{\nu k} H^{f(\nu, k)} h^{\nu k |\alpha| + \nu k^2}}{M_{\nu(|\alpha|+k)}} \\ &= \underbrace{C'_\epsilon \epsilon^{-k} A^{\nu k} H^{f(\nu, k)}}_{:= C''_\epsilon} \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{\epsilon^{|\alpha|+k} (h^k)^{\nu(|\alpha|+k)} \lambda_\ell^{|\alpha|+k}}{M_{\nu(|\alpha|+k)}} \\ &= C''_\epsilon \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{(\epsilon^{\frac{1}{\nu}} h^k)^{\nu(|\alpha|+k)} \lambda_\ell^{|\alpha|+k}}{M_{\nu(|\alpha|+k)}} \leq C''_\epsilon \exp\left(\mathcal{M}(L \lambda_\ell^{1/\nu})\right), \end{aligned}$$

com  $L := \epsilon^{1/\nu} h^k$ . Ao mesmo tempo, segue pelo Lema 2.5 que

$$\exp\left(\mathcal{M}(L \lambda_\ell^{1/\nu})\right) \leq \exp\left(\frac{1}{2} \mathcal{M}(L_3 \lambda_\ell^{1/\nu})\right),$$

tomando  $L = \frac{L_3}{\sqrt{AH}}$ .

Por fim, dado  $L_3 > 0$ , tome  $\epsilon > 0$  tal que  $L_3 = \sqrt{AH}\epsilon^{1/\nu}h^k$ , então a desigualdade acima, (1.4) para algum  $q$ , e (2.2) implicam que existe  $C_{L_3} = C'_\epsilon > 0$  satisfazendo

$$\begin{aligned} \|\widehat{v}(e_\ell)\|_{\text{HS}} &= \left( \sum_{j=1}^{d_\ell} |\widehat{v}(e_\ell^j)|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{j=1}^{d_\ell} C'_\epsilon \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right)^2 \right)^{1/2} \\ &= C d_\ell^{1/2} \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \leq C \lambda_\ell^q \exp\left(\frac{1}{2}\mathcal{M}(L_3\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \\ &\leq C \exp\left(\frac{1}{2}\mathcal{M}(L_3\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \exp\left(\frac{1}{2}\mathcal{M}(L_3\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \\ &= C \exp\left(\mathcal{M}(L_3\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \end{aligned}$$

ou seja,  $v \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$  pelo Teorema 3.1. □

Finalmente, podemos caracterizar uma ultradistribuição  $u \in \Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$  em termos de seus coeficientes de Fourier e dos autovalores do operador  $E \in \Psi'_{+e}(X)$ .

**Teorema 3.3.** *Temos que  $u \in \Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$  se, e somente se, para todo  $L > 0$  existe  $K = K_L > 0$  tal que*

$$\|\widehat{u}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq K \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* Basta combinar os Teoremas 3.1 e 3.2. De fato, se por um lado  $u \in \Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$ , segue pelo Teorema 3.2 que  $u \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$ ; logo, pelo Teorema 3.1 (iii), dado qualquer  $L > 0$  existe  $K = K_L > 0$  tal que  $\|\widehat{u}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq K \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right)$ , para todo  $\ell \geq 1$ .

Reciprocamente, se para todo  $L > 0$  existe  $K = K_L > 0$  tal que  $\|\widehat{u}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq K \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right)$ , para todo  $\ell \geq 1$ , segue novamente pelo Teorema 3.1 (iii), que  $u \in [\Gamma_{\mathcal{M}}(X)]^\wedge$ , o que implica pelo Teorema 3.2 que  $u \in \Gamma'_{\mathcal{M}}(X)$ . □

### 3.2.1 O espaço $\Gamma'_{(\mathcal{M})}(X)$

De modo análogo ao que foi feito para as classes do tipo Roumieu, o primeiro passo para o estudo do espaço  $\Gamma'_{(\mathcal{M})}(X)$ , das ultradistribuições do tipo Beurling, é introduzir o espaço  $\alpha$ -dual correspondente,

**Definição 3.6.** O  $\alpha$ -dual do espaço  $\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$  de funções ultradiferenciáveis, denotado por  $[\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)]^\wedge$ , é definido como

$$\left\{ v = \{v_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}_0}; \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_\ell} |(v_\ell)_j| |\widehat{\phi}(\ell, j)| < \infty, v_\ell \in \mathbb{C}^{d_\ell}, \forall \phi \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X) \right\}.$$

Definimos o *segundo dual* de  $\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ , denotado por  $([\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)]^\wedge)^\wedge$ , como o espaço das seqüências  $w = \{w_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ , com  $w_\ell \in \mathbb{C}^{d_\ell}$ , tais que

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_\ell} |(w_\ell)_j| |(v_\ell)_j| < \infty, \quad \forall v \in [\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)]^\wedge.$$

**Definição 3.7.** A classe das **ultradistribuições** sobre  $\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ , denotada por  $\Gamma'_{(\mathcal{M})}(X)$ , é o conjunto de todos os funcionais lineares  $u: \Gamma_{(\mathcal{M})}(X) \rightarrow \mathbb{C}$  tais que existem  $\epsilon > 0$  e  $C > 0$  satisfazendo

$$|u(\phi)| \leq C \sup_{\alpha} \epsilon^{|\alpha|} M_{\nu|\alpha|}^{-1} \sup_{x \in X} |E^{|\alpha|} \phi(x)|, \quad \forall \phi \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X).$$

**Teorema 3.4.** Temos que  $u \in \Gamma'_{(\mathcal{M})}(X)$  se, e somente se, existem  $K > 0$  e  $L > 0$  tais que

$$\|\widehat{u}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq K \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

**Teorema 3.5.** As afirmações a seguir são equivalentes.

(i)  $v \in \Gamma'_{(\mathcal{M})}(X)$ .

(ii)  $v \in [\Gamma_{(\mathcal{M})}(X)]^\wedge$ .

(iii) Existe  $L > 0$  tal que

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right) \|v_\ell\|_{\text{HS}} < \infty.$$

(iv) Existem  $L > 0$  e  $K > 0$  tais que

$$\|v_\ell\|_{\text{HS}} \leq K \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right)$$

vale para todo  $\ell \in \mathbb{N}$ .

# Capítulo 4

## HIPOELITICIDADE GLOBAL

Neste capítulo apresentamos um estudo para a hipoeliticidade global de certos operadores lineares sobre as classes de funções ultradiferenciáveis estudadas nos capítulos anteriores.

### 4.1 Operadores invariantes

Analisamos aqui a classe dos operadores invariantes com respeito ao operador elítico  $E \in \Psi'_{+e}(X)$ , como introduzido por J. Delgado e M. Ruzhansky em [5].

Sejam  $X$  uma variedade compacta suave e  $E \in \Psi'_{+e}(X)$  um operador elítico. Como visto em [5], os espaços  $C^\infty(X)$  e  $\mathcal{D}'(X)$  são caracterizados em termos de seus coeficientes de Fourier da seguinte forma:

$$f \in C^\infty(X) \iff \forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0 \text{ t.q. } \|\widehat{f}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C_N(1 + \lambda_\ell)^{-N}, \quad \forall \ell \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

e

$$u \in \mathcal{D}'(X) \iff \exists N \in \mathbb{N}, \exists C > 0 \text{ t.q. } \|\widehat{u}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C(1 + \lambda_\ell)^N, \quad \forall \ell \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

**Proposição 4.1.** *Seja  $P: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$  um operador linear. Se o domínio do operador adjunto  $P^*$  contém  $C^\infty(X)$ , então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *Para cada  $j \in \mathbb{N}_0$ , temos  $P(\mathcal{H}_j) \subseteq \mathcal{H}_j$ .*
- (ii) *Para cada  $j \in \mathbb{N}_0$  e  $1 \leq k \leq d_j$ , tem-se  $PEe_j^k = EPe_j^k$ .*
- (iii) *Para cada  $\ell \in \mathbb{N}_0$ , existe uma matriz  $\sigma(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$  tal que, para todo  $e_j^k$ , tem-se*

$$\widehat{PEe_j^k}(\ell, m) = \sigma(\ell)_{mk} \delta_{j\ell}, \quad 1 \leq m \leq d_\ell. \quad (4.3)$$

- (iv) *Para cada  $\ell \in \mathbb{N}_0$ , existe uma matriz  $\sigma(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$  tal que*

$$\widehat{P\phi}(\ell) = \sigma(\ell) \widehat{\phi}(\ell), \quad \phi \in C^\infty(X). \quad (4.4)$$

As matrizes  $\sigma(\ell)$  em (4.3) e (4.4) coincidem, logo podemos usar a notação  $\sigma_P(\ell) := \sigma(\ell)$ . Além disso, se  $P$  pode ser estendido a um operador linear contínuo  $P: \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$ , então as propriedades acima também são equivalentes a:

(v)  $PE = EP$  em  $L^2(X)$ .

*Demonstração.* Veja o Teorema 4.1 em [5].

□

Introduzimos agora as classes de operadores fortemente invariantes, conforme definidas em [10].

**Definição 4.1.** Ainda no contexto da Proposição 4.1, diremos que:

- $P$  é **invariante com relação a  $E$**  (ou simplesmente  **$E$ -invariante**) se alguma das propriedades (i)-(iv) for satisfeita.
- A sequência de matrizes  $\sigma_P(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$ , que aparece nas propriedades (iii) e (iv), é o **símbolo matricial de  $P$** .
- $P$  é **fortemente invariante com relação a  $E$**  quando  $P$  puder ser estendido a um operador linear contínuo  $P: \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$  e satisfaz qualquer uma das propriedades (i)-(v).

Para manter nossas notações organizadas, observe que podemos reformular (4.4) como

$$\widehat{P}\phi(\ell) = \sigma_P(\ell)\widehat{\phi}(\ell), \quad \phi \in C^\infty(X) \quad \ell \in \mathbb{N}_0, \quad (4.5)$$

onde, em termos de coordenadas do vetor  $\widehat{P}\phi(\ell)$ ,  $\ell \in \mathbb{N}_0$ , para cada  $m \in \{1, \dots, d_\ell\}$ , temos

$$\widehat{P}\phi(\ell, m) = (\sigma_P(\ell)\widehat{\phi}(\ell))_m, \quad \phi \in C^\infty(X).$$

Com estas notações, note que a ação de qualquer operador  $E$ -invariante  $P$  numa função  $\phi \in C^\infty(X)$  pode ser escrita como

$$P\phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_\ell} \widehat{P}\phi(\ell, m) e_\ell^m = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_\ell} (\sigma_P(\ell)\widehat{\phi}(\ell))_m e_\ell^m$$

o que implica em

$$P\phi(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_\ell} (\sigma_P(\ell)\widehat{\phi}(\ell))_m e_\ell^m(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \sigma_P(\ell)\widehat{\phi}(\ell) \right] e_\ell(x), \quad x \in X,$$

sendo  $e_\ell(x) := (e_\ell^1(x), \dots, e_\ell^{d_\ell}(x)) \in \mathbb{C}^{d_\ell}$  e  $\left[ \sigma_P(\ell)\widehat{\phi}(\ell) \right] e_\ell(x)$  pode ser visto como o produto interno usual em  $\mathbb{C}^{d_\ell}$  entre os vetores  $\sigma_P(\ell)\widehat{\phi}(\ell)$  e  $e_\ell(x)$ , isto é,

$$\left[ \sigma_P(\ell)\widehat{\phi}(\ell) \right] e_\ell(x) := \left\langle \sigma_P(\ell)\widehat{\phi}(\ell), e_\ell(x) \right\rangle_{\mathbb{C}^{d_\ell}}.$$

Em particular, para cada  $e_j^k$ ,

$$Pe_j^k(x) = \sum_{m=1}^{d_j} \sigma_P(j)_{mk} e_j^m(x), \quad x \in X,$$

pois

$$\begin{aligned}
Pe_j^k(x) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_\ell} \left( \sigma_P(\ell) \widehat{e}_j^k(\ell) \right)_m e_\ell^m(x) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_\ell} \left( \sum_{i=1}^{d_\ell} \sigma_P(\ell)_{mi} \widehat{e}_j^k(\ell, i) \right) e_\ell^m(x) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_\ell} \sum_{i=1}^{d_\ell} \sigma_P(\ell)_{mi} \langle e_j^k, e_\ell^i \rangle_{L^2} e_\ell^m(x) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_\ell} \sum_{i=1}^{d_\ell} \sigma_P(\ell)_{mi} \delta_{j\ell} \delta_{ki} e_\ell^m(x) \\
&= \sum_{m=1}^{d_j} \sigma_P(j)_{mk} e_j^m(x).
\end{aligned}$$

Na Proposição 4.1, foi visto que (após reformularmos em (4.5)), para cada  $\ell \in \mathbb{N}_0$  existe uma matriz  $\sigma_P(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell}$  tal que

$$\widehat{P}\widehat{\phi}(\ell) = \sigma_P(\ell)\widehat{\phi}(\ell), \quad \forall \phi \in C^\infty(X). \quad (4.6)$$

Pode ser provado que (4.6) se mantém válida para elementos de  $\mathcal{D}'(X)$ , isto é, se  $P: \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$  é um operador fortemente invariante, então

$$\widehat{P}u(\ell) = \sigma_P(\ell)\widehat{u}(\ell), \quad \forall u \in \mathcal{D}'(X), \forall \ell \in \mathbb{N}_0, \quad (4.7)$$

o que pode ser consultado em [10].

A classe de todos os símbolos matriciais será denotada por  $\Sigma$ , isto é,

$$\Sigma := \{ \sigma; \mathbb{N}_0 \ni \ell \mapsto \sigma(\ell) \in \mathbb{C}^{d_\ell \times d_\ell} \}.$$

Para o estudo da hipoliticidade de um operador, vamos usar as definições dadas em [7] e algumas propriedades sobre números associados a símbolos matriciais.

**Definição 4.2.** Seja  $\sigma \in \Sigma$  um símbolo matricial. Para cada  $\ell \in \mathbb{N}_0$ , definimos

$$m(\sigma(\ell)) := \inf \{ \|\sigma(\ell)v\|_{\text{HS}}; v \in \mathbb{C}^{d_\ell} \text{ e } \|v\|_{\text{HS}} = 1 \}$$

e

$$M(\sigma(\ell)) := \sup \{ \|\sigma(\ell)v\|_{\text{HS}}; v \in \mathbb{C}^{d_\ell} \text{ e } \|v\|_{\text{HS}} = 1 \}.$$

**Observação 4.1.** Sobre a definição acima, destacamos que:

- $M(\sigma(\ell)) = \|\sigma(\ell)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_\ell})}$ .
- $\sigma(\ell)$  é invertível  $\iff m(\sigma(\ell)) \neq 0$ .
- Se  $\sigma(\ell)$  é invertível, então  $M(\sigma(\ell)^{-1}) = m(\sigma(\ell))^{-1}$ .

## 4.2 $\mathcal{M}$ -hipoeliticidade global

Estabelecemos a seguir a noção de hipoeliticidade global considerada neste trabalho e, em seguida, exibimos o resultado que a caracteriza em termos dos símbolos matriciais.

**Definição 4.3.** Um operador  $P: \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$  é dito **globalmente  $\mathcal{M}$ -hipoelítico em  $X$**  quando  $u \in \mathcal{D}'(X)$  e  $Pu \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  implicarem em  $u \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ .

**Teorema 4.1.** *Seja  $P: \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$  um operador fortemente invariante com relação a  $E$ . Então,  $P$  é globalmente  $\mathcal{M}$ -hipoelítico se, e somente se, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $C_\epsilon > 0$  tal que*

$$m(\sigma_P(j)) \geq \exp\left(-\mathcal{M}(\epsilon \lambda_j^{1/\nu})\right), \quad \text{sempre que } j \geq C_\epsilon.$$

*Demonstração. Necessidade:* Considere  $u \in \mathcal{D}'(X)$  tal que  $Pu = \phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . Como precisamos mostrar que  $P$  é globalmente  $\mathcal{M}$ -hipoelítico, precisamos concluir que  $u \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . Para tanto, vamos recorrer à caracterização dada no Teorema 2.2. Por (4.7), temos que

$$\widehat{\phi}(\ell) = \sigma_P(\ell) \widehat{u}(\ell), \quad \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Por hipótese, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $C_\epsilon > 0$  tal que  $m(\sigma_P(j)) \neq 0$ , sempre que  $j \geq C_\epsilon$  ou, equivalentemente, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $C_\epsilon > 0$  tal que  $\sigma_P(j)$  é invertível sempre que  $j \geq C_\epsilon$ ; logo, podemos escrever

$$\widehat{u}(j) = \sigma_P(j)^{-1} \widehat{\phi}(j), \quad j \geq C_\epsilon.$$

Como  $\phi \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , segue pelo Teorema 2.2 que existem  $C > 0$  e  $L_\phi > 0$  tais que

$$\|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C \exp\left(-\mathcal{M}(L_\phi \lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Da desigualdade acima e utilizando o Lema 2.5 com  $\tilde{L}_\phi = \frac{L_\phi}{\sqrt{AH}}$ , para cada  $\ell \in \mathbb{N}$ , temos

$$\begin{aligned} \|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} &\leq C \exp\left(-\mathcal{M}(L_\phi \lambda_\ell^{1/\nu})\right) \\ &= C \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L_\phi \lambda_\ell^{1/\nu})\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\mathcal{M}(L_\phi \lambda_\ell^{1/\nu})\right) \\ &\leq C \exp\left(-\mathcal{M}(\tilde{L}_\phi \lambda_\ell^{1/\nu})\right) \exp\left(-\mathcal{M}(\tilde{L}_\phi \lambda_\ell^{1/\nu})\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Então, tomando  $\epsilon_0 := \tilde{L}_\phi$ , existe  $C_{\epsilon_0} > 0$  tal que, sempre que  $j \geq C_{\epsilon_0}$  vale

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}(j)\|_{\text{HS}} &= \|\sigma_P(j)^{-1} \widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}} \leq \|\sigma_P(j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_j})} \|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}} \\ &= m(\sigma_P(j))^{-1} \|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}} \stackrel{\text{hip.}}{\leq} \exp\left(\mathcal{M}(\tilde{L}_\phi \lambda_j^{1/\nu})\right) \|\widehat{\phi}(j)\|_{\text{HS}} \\ &\stackrel{(4.8)}{\leq} C \exp\left(\mathcal{M}(\tilde{L}_\phi \lambda_j^{1/\nu})\right) \exp\left(-\mathcal{M}(\tilde{L}_\phi \lambda_j^{1/\nu})\right) \exp\left(-\mathcal{M}(\tilde{L}_\phi \lambda_j^{1/\nu})\right) \\ &= C \exp\left(-\mathcal{M}(\tilde{L}_\phi \lambda_j^{1/\nu})\right) \end{aligned}$$

e segue pelo Teorema 2.2 que  $u \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ ; logo,  $P$  é globalmente  $\mathcal{M}$ -hipoelítico.

**Suficiência:** Vamos proceder por contrapositiva, isto é, negando a tese e construindo um elemento  $u \in \mathcal{D}'(X) \setminus \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  para o qual  $Pu \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , contrariando a hipótese de que  $P$  é globalmente  $\mathcal{M}$ -hipoelítico. Suponha que existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que, para todo  $C > 0$  existe  $j > C$  de modo que

$$m(\sigma_P(j)) < \exp\left(-\mathcal{M}(\epsilon_0 \lambda_j^{1/\nu})\right).$$

Em particular, tomando  $C = 1$ , existe  $j_1 > 1$  tal que  $m(\sigma_P(j_1)) < \exp\left(-\mathcal{M}(\epsilon_0 \lambda_{j_1}^{1/\nu})\right)$ ; logo, existe  $v_{j_1} \in \mathbb{C}^{d_{j_1}}$  tal que  $\|v_{j_1}\|_{\text{HS}} = 1$  e  $\|\sigma_P(j_1)v_{j_1}\|_{\text{HS}} < \exp\left(-\mathcal{M}(\epsilon_0 \lambda_{j_1}^{1/\nu})\right)$ . Em seguida, tomando  $C = j_1$ , existe  $j_2 > j_1$  tal que  $m(\sigma_P(j_2)) < \exp\left(-\mathcal{M}(\epsilon_0 \lambda_{j_2}^{1/\nu})\right)$  e, conseqüentemente, existe  $v_{j_2} \in \mathbb{C}^{d_{j_2}}$  com  $\|v_{j_2}\|_{\text{HS}} = 1$  e  $\|\sigma_P(j_2)v_{j_2}\|_{\text{HS}} < \exp\left(-\mathcal{M}(\epsilon_0 \lambda_{j_2}^{1/\nu})\right)$ . Indutivamente, obtemos uma seqüência  $\{v_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  com  $v_{j_k} \in \mathbb{C}^{d_{j_k}}$ ,  $\|v_{j_k}\|_{\text{HS}} = 1$  e

$$\|\sigma_P(j_k)v_{j_k}\|_{\text{HS}} < \exp\left(-\mathcal{M}(\epsilon_0 \lambda_{j_k}^{1/\nu})\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Defina

$$u := \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_{\ell}} \widehat{u}(\ell, m) e_{\ell}^m,$$

de modo que

$$\mathbb{C}^{d_{\ell}} \ni \widehat{u}(\ell) = \begin{cases} v_{j_k}, & \text{se } \ell = j_k \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{se } \ell \neq j_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Por construção, temos que  $\|\widehat{u}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq 1 \leq (1 + \lambda_{\ell})$ , para todo  $\ell \in \mathbb{N}_0$ , o que implica por (4.2) que  $u \in \mathcal{D}'(X)$ . Claramente  $u \notin \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$  (uma vez que  $\Gamma_{\mathcal{M}}(X) \subseteq C^{\infty}(X)$ ), pois  $\|\widehat{u}(j_k)\|_{\text{HS}} = \|v_{j_k}\|_{\text{HS}} = 1$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , ou seja, não é satisfeita a condição (4.1), logo  $u \notin C^{\infty}(X)$ .

Notemos que, como  $\widehat{u}(\ell) = 0$  sempre que  $\ell \neq j_k$ , podemos escrever

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{d_{j_k}} \widehat{u}(j_k, r) e_{j_k}^r.$$

Por fim, vamos mostrar que  $Pu \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ . De fato, sendo  $P$  fortemente invariante, segue da igualdade logo acima que

$$Pu = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{d_{j_k}} \widehat{Pu}(j_k, r) e_{j_k}^r = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{d_{j_k}} (\sigma_P(j_k) \widehat{u}(j_k))_r e_{j_k}^r.$$

Segue de (4.9) que

$$\|\widehat{Pu}(j_k)\|_{\text{HS}} = \|\sigma_P(j_k) \widehat{u}(j_k)\|_{\text{HS}} = \|\sigma_P(j_k)v_{j_k}\|_{\text{HS}} \stackrel{(4.9)}{<} \exp\left(-\mathcal{M}(\epsilon_0 \lambda_{j_k}^{1/\nu})\right), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

logo tomando  $C = 1$  e  $L = \epsilon_0$ , concluímos pelo Teorema 2.2 que  $Pu \in \Gamma_{\mathcal{M}}(X)$ , isto é,  $P$  não é globalmente  $\mathcal{M}$ -hipoelítico, o que contradiz a hipótese.  $\square$

### 4.2.1 O caso Gevrey $\gamma^s(X)$

A partir dos resultados obtidos até o momento, vamos construir um exemplo para uma classe de funções já conhecida, a saber, a classe das funções Gevrey sobre a variedade  $X$ . Relembremos que a classe de funções Gevrey em  $X$  pode ser compreendida como

$$\gamma^s(X) = \Gamma_{(k!)^s}(X), \quad s \in [1, \infty),$$

ao considerarmos a sequência  $\mathcal{M} := \{M_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  com  $M_k = (k!)^s, \forall k \in \mathbb{N}_0$ . Por (2.19), temos que para  $\gamma^s(X)$  a função associada fica  $\mathcal{M}(r) \simeq r^{1/s}$  e que

$$\phi \in \gamma^s(X) \iff \exists C > 0, \exists L > 0 \text{ t.q. } \|\widehat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C \exp(-L\lambda_\ell^{\frac{1}{s}}), \quad \forall \ell \in \mathbb{N}.$$

Portanto, segue do Teorema 4.1 que, a hipoeliticidade global para a classe  $\gamma^s(X)$  é obtida através do seguinte resultado:

**Teorema 4.2.** *Seja  $P: \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$  um operador fortemente invariante em relação a  $E$ . Então  $P$  é globalmente  $\gamma^s$ -hipoelítico se, e somente se, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $C_\epsilon > 0$  tal que*

$$m(\sigma_P(j)) \geq \exp(-\epsilon\lambda_j^{\frac{1}{s}}), \quad \text{sempre que } j \geq C_\epsilon.$$

### 4.3 $(\mathcal{M})$ -hipoeliticidade global

Podemos obter um resultado análogo ao da seção anterior para a classe de funções do tipo Beurling, com as adaptações naturais. Vejamos.

**Definição 4.4.** Um operador  $P: \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$  é **globalmente  $(\mathcal{M})$ -hipoelítico em  $X$**  quando  $u \in \mathcal{D}'(X)$  e  $Pu \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$  implicarem em  $u \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ .

Podemos caracterizar a  $(\mathcal{M})$ -hipoeliticidade global de um operador fortemente invariante  $P$  através de seu símbolo utilizando o Teorema a seguir.

**Teorema 4.3.** *Seja  $P: \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$  um operador fortemente invariante com relação a  $E$ . Então,  $P$  é globalmente  $(\mathcal{M})$ -hipoelítico se, e somente se, existem  $K > 0, r > 0$  e  $C > 0$  tais que*

$$m(\sigma_P(j)) \geq K \exp\left(-\mathcal{M}(r\lambda_j^{1/\nu})\right), \quad \text{sempre que } j \geq C.$$

*Demonstração. Necessidade:* Queremos provar que, se  $u \in \mathcal{D}'(X)$  com  $Pu = \phi \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ , isto implica que  $u \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ . Para tanto, vamos recorrer à caracterização dada pelo Teorema 2.4, ou seja, mostremos que, dado  $L > 0$ , existe  $C_L > 0$  tal que  $\|\widehat{u}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C_L \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_\ell^{1/\nu})\right)$ , para todo  $\ell \geq 1$ . Por (4.7), segue que

$$\widehat{\phi}(\ell) = \sigma_P(\ell)\widehat{u}(\ell), \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_0.$$

Por hipótese, para todo  $j \geq C$

$$m(\sigma_P(j)) \neq 0 \iff \sigma_P(j) \text{ é invertível,}$$

então, para  $j \geq C$ , podemos escrever

$$\hat{u}(j) = \sigma_P(j)^{-1} \hat{\phi}(j),$$

o que implica em

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(j)\|_{\text{HS}} &= \|\sigma_P(j)^{-1} \hat{\phi}(j)\|_{\text{HS}} \leq \|\sigma_P(j)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{d_j})} \|\hat{\phi}(j)\|_{\text{HS}} \\ &= m(\sigma_P(j))^{-1} \|\hat{\phi}(j)\|_{\text{HS}} \stackrel{\text{hip.}}{\leq} \frac{1}{K} \exp\left(\mathcal{M}(r\lambda_j^{1/\nu})\right) \|\hat{\phi}(j)\|_{\text{HS}}, \quad j \geq C. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Como  $\phi \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ , dado  $L' > 0$ , existe  $C_{L'} > 0$  tal que

$$\|\hat{\phi}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq C_{L'} \exp\left(-\mathcal{M}(L'\lambda_\ell^{1/\nu})\right), \quad \forall \ell \geq 1;$$

logo, de (4.10) segue que

$$\|\hat{u}(j)\|_{\text{HS}} \leq \frac{C_{L'}}{K} \exp\left(\mathcal{M}(r\lambda_j^{1/\nu})\right) \exp\left(-\mathcal{M}(L'\lambda_j^{1/\nu})\right). \quad (4.11)$$

Seja  $L > 0$  dado. Então, podemos ter  $r \leq L$  ou  $r > L$ . Vamos analisar cada um dos casos.

- $r \leq L$ : Como  $\exp$  e  $\mathcal{M}$  são funções não-decrescentes, segue que

$$\exp\left(\mathcal{M}(r\lambda_j^{1/\nu})\right) \leq \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right), \quad \forall j.$$

Então, de (4.11),

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(j)\|_{\text{HS}} &\leq \frac{C_{L'}}{K} \exp\left(\mathcal{M}(r\lambda_j^{1/\nu})\right) \exp\left(-\mathcal{M}(L'\lambda_j^{1/\nu})\right) \\ &\leq \frac{C_{L'}}{K} \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right) \exp\left(-\mathcal{M}(L'\lambda_j^{1/\nu})\right). \end{aligned}$$

Escolha  $L' := L\sqrt{AH}$ . Pelo Lema 2.5, temos que

$$\exp\left(-\mathcal{M}(L\sqrt{AH}\lambda_j^{1/\nu})\right) \leq \exp\left(-2\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right), \quad \forall j.$$

Portanto, para todo  $j \geq C$ ,

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(j)\|_{\text{HS}} &\leq \frac{C_L}{K} \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right) \exp\left(-\mathcal{M}(L\sqrt{AH}\lambda_j^{1/\nu})\right) \\ &\leq \frac{C_L}{K} \exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right) \exp\left(-2\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right) \\ &= \frac{C_L}{K} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right), \end{aligned}$$

e segue o desejado.

- $r > L$ : Escolha agora  $L' := r\sqrt{AH}$ . Novamente, pelo Lema 2.5,

$$\exp\left(-\mathcal{M}(r\sqrt{AH}\lambda_j^{1/\nu})\right) \leq \exp\left(-2\mathcal{M}(r\lambda_j^{1/\nu})\right), \quad \forall j.$$

De (4.11) tem-se, para todo  $j \geq C$

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}(j)\|_{\text{HS}} &\leq \frac{C_L}{K} \exp\left(\mathcal{M}(r\lambda_j^{1/\nu})\right) \exp\left(-\mathcal{M}(r\sqrt{AH}\lambda_j^{1/\nu})\right) \\ &\leq \frac{C_L}{K} \exp\left(\mathcal{M}(r\lambda_j^{1/\nu})\right) \exp\left(-2\mathcal{M}(r\lambda_j^{1/\nu})\right) \\ &\leq \frac{C_L}{K} \exp\left(-\mathcal{M}(r\lambda_j^{1/\nu})\right) \\ &\leq \frac{C_L}{K} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right), \end{aligned}$$

donde, novamente, a última desigualdade veio do fato de que  $\exp$  e  $\mathcal{M}$  são funções não-decrescentes.

Portanto, para todo  $L > 0$ , existe  $C_L > 0$  tal que  $\|\widehat{u}(j)\|_{\text{HS}} \leq C_L \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_j^{1/\nu})\right)$ , sempre que  $j \geq C$ , o que implica pelo Teorema 2.4 que  $u \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ .

**Suficiência:** Procederemos por contrapositiva, isto é, negando a tese e construindo um elemento  $u \in \mathcal{D}'(X) \setminus \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$  tal que  $Pu \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ , contradizendo a hipótese de que  $P$  é globalmente  $(\mathcal{M})$ -hipoelítico. Suponha que para quaisquer  $K > 0$ ,  $r > 0$  e  $C > 0$ , pode-se encontrar  $j > C$  tal que

$$m(\sigma_P(j)) < K \exp\left(-\mathcal{M}(r\lambda_j^{1/n_u})\right).$$

Em particular, tomando  $K = C = r = 1$ , existe  $j_1 > 1$  tal que  $m(\sigma_P(j_1)) < \exp\left(-\mathcal{M}(\lambda_{j_1}^{1/\nu})\right)$ . Logo, existe  $v_{j_1} \in \mathbb{C}^{d_{j_1}}$  com  $\|v_{j_1}\|_{\text{HS}} = 1$  e  $\|\sigma_P(j_1)v_{j_1}\|_{\text{HS}} < \exp\left(-\mathcal{M}(\lambda_{j_1}^{1/\nu})\right)$ . Agora, tome  $K = 1$ ,  $C = j_1$  e  $r = 2$ , então existe  $j_2 > j_1$  tal que  $m(\sigma_P(j_2)) < \exp\left(-\mathcal{M}(2\lambda_{j_2}^{1/\nu})\right)$  e, conseqüentemente, existe  $v_{j_2} \in \mathbb{C}^{d_{j_2}}$  com  $\|v_{j_2}\|_{\text{HS}} = 1$  e  $\|\sigma_P(j_2)v_{j_2}\|_{\text{HS}} < \exp\left(-\mathcal{M}(2\lambda_{j_2}^{1/\nu})\right)$ .

Procedendo de forma indutiva, obtemos uma sequência  $\{v_{j_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ , com  $v_{j_k} \in \mathbb{C}^{d_{j_k}}$ ,  $\|v_{j_k}\|_{\text{HS}} = 1$  e

$$\|\sigma_P(j_k)v_{j_k}\|_{\text{HS}} < \exp\left(-\mathcal{M}(k\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

A seguir, vamos definir

$$u := \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_{\ell}} \widehat{u}(\ell, m) e_{\ell}^m,$$

tal que

$$\widehat{u}(\ell) = \begin{cases} v_{j_k}, & \text{se } \ell = j_k \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{se } \ell \neq j_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Temos que  $\|\widehat{u}(\ell)\|_{\text{HS}} \leq 1 \leq (1 + \lambda_{\ell})$ , para todo  $\ell \in \mathbb{N}_0$ , o que implica por (4.2) que  $u \in \mathcal{D}'(X)$ . Além disso, a condição do Teorema 2.4 não é satisfeita, pois  $\|\widehat{u}(j_k)\|_{\text{HS}} = \|v_{j_k}\|_{\text{HS}} = 1$ , o que implica que  $u \notin \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ . Desconsiderando os coeficientes de Fourier que se anulam, reescrevemos

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_{j_k}} \widehat{u}(j_k, m) e_{j_k}^m.$$

Mostremos agora que  $Pu \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ . Como  $P$  é fortemente  $E$ -invariante, temos que

$$Pu = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_{j_k}} \widehat{P}u(j_k, m) e_{j_k}^m = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{d_{j_k}} (\sigma_P(j_k) \widehat{u}(j_k))_m e_{j_k}^m.$$

Segue por (4.12) que

$$\|\widehat{P}u(j_k)\|_{\text{HS}} = \|\sigma_P(j_k) \widehat{u}(j_k)\|_{\text{HS}} = \|\sigma_P(j_k) v_{j_k}\|_{\text{HS}} < \exp\left(-\mathcal{M}(k\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dado qualquer  $L > 0$ , sempre que  $k \geq L$ , como as funções  $\exp$  e  $\mathcal{M}$  são não-decrescentes, temos que

$$\exp\left(\mathcal{M}(L\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right) \leq \exp\left(\mathcal{M}(k\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right) \iff \exp\left(-\mathcal{M}(k\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right) \leq \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right),$$

donde segue que

$$\|\widehat{P}u(j_k)\|_{\text{HS}} < \exp\left(-\mathcal{M}(k\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right) \leq \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right), \quad \forall k \geq L.$$

Portanto, dado  $L > 0$ , existe  $C_L := 1$  tal que  $\|\widehat{P}u(j_k)\|_{\text{HS}} \leq \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right)$ , para todo  $k \geq L$ . Por outro lado, quando  $k < L$ , existe  $C_{L,k} > 0$  tal que

$$\exp\left(-\mathcal{M}(k\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right) \leq C_{L,k} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right).$$

Logo, escolhendo  $C_L := \max\left\{C_{L,k}; \exp\left(-\mathcal{M}(k\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right) \leq C_{L,k} \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right), 1 \leq k < L\right\}$ , temos  $\|\widehat{P}u(j_k)\|_{\text{HS}} \leq C_L \exp\left(-\mathcal{M}(L\lambda_{j_k}^{1/\nu})\right)$ , sempre que  $k < L$ .

Pelo Teorema 2.4, concluímos que  $Pu \in \Gamma_{(\mathcal{M})}(X)$ , o que prova que  $P$  não é globalmente  $(\mathcal{M})$ -hipoelítico, donde segue o resultado.  $\square$

## REFERÊNCIAS

- [1] CALDERON, A.; VAILLANCOURT, R. On the boundedness of pseudo-differential operators. *J. Math. Soc. Japan* 23, 1971.
- [2] DASGUPTA, A.; RUZHANSKY, M. Gevrey functions and ultradistributions on compact Lie groups and homogeneous spaces. *Bull. Sci. Math.* 138, 2014.
- [3] DASGUPTA, A.; RUZHANSKY, M. Eigenfunction expansions of ultradifferentiable functions and ultradistributions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 368, 2016.
- [4] DELGADO, J.; RUZHANSKY, M. Schatten classes on compact manifolds: kernel conditions. *J. Funct. Anal.* 267, 2014.
- [5] DELGADO, J.; RUZHANSKY, M. Fourier multipliers, symbols and nuclearity on compact manifolds. *J. Anal. Math.*, 2015.
- [6] FOLLAND, G. *Real analysis: modern techniques and their applications 2nd ed.* John Wiley & Sons, Inc., 1999.
- [7] GREENFIELD, S. J.; WALLACH, N. R. Remarks on global hypoellipticity. *Trans. Amer. Math. Soc.* 183, 1973.
- [8] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear algebra.* Englewood Cliffs, 1971.
- [9] HORMANDER, L. *The analysis of linear partial differential operators.* Springer-Verlag, 1985. v. 1.
- [10] KIRILOV, A.; MORAES, W. A. A. D. Global hypoellipticity for strongly invariant operators. *J. Math. Anal. Appl.* 486, 2020.
- [11] KOMATSU, H. Ultradistributions. I. Structure theorems and a characterization. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 20, 1973.
- [12] KOMATSU, H. Ultradistributions. II. The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 24, 1977.
- [13] KOMATSU, H. Ultradistributions. III. Vector-valued ultradistributions and the theory of kernels. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 29, 1982.
- [14] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications.* John Wiley & Sons, Inc., 1989.

- [15] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2012.
- [16] PETZSCHE, H. J. Almost analytic extension of ultradifferentiable functions and the boundary values of holomorphic functions. *Math. Ann.* 267, 1984.
- [17] RUZHANSKY, M.; TURUNEN, V. *Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics*. 2010. v. 2.
- [18] SEELEY, R. T. Eigenfunction expansions of analytic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 21, 1969.
- [19] SHUBIN, M. A. *Pseudodifferential operators and spectral theory*. Springer, 2001.