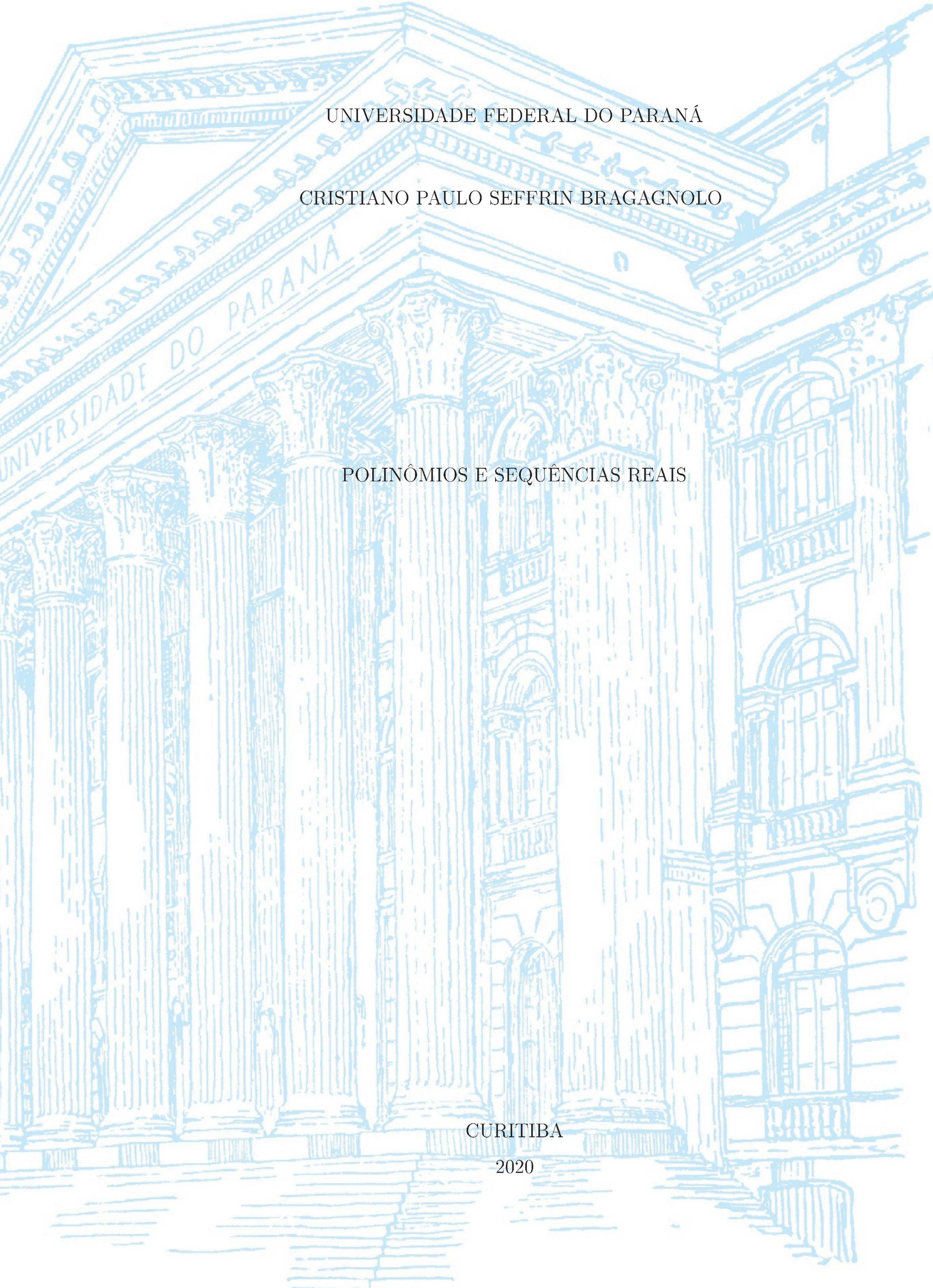


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CRISTIANO PAULO SEFFRIN BRAGAGNOLO

POLINÔMIOS E SEQUÊNCIAS REAIS

CURITIBA

2020

CRISTIANO PAULO SEFFRIN BRAGAGNOLO

POLINÔMIOS E SEQUÊNCIAS REAIS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemátiva. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto.

Coorientador: Prof. Dr. Willian Ribeiro Valencia da Silva.

CURITIBA

2020

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

B813p Bragagnolo, Cristiano Paulo Seffrin
Polinômios e sequências reais [recurso eletrônico] / Cristiano Paulo Seffrin Bragagnolo. – Curitiba, 2020.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2020.

Orientador: Aldemir José da Silva Pinto.
Coorientador: Willian Ribeiro Valencia da Silva.

1. Polinômios. 2. Matemática. I. Universidade Federal do Paraná. II. Pinto, Aldemir José da Silva. III. Silva, Willian Ribeiro Valencia da. IV. Título.

CDD: 510

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **CRISTIANO PAULO SEFFRIN BRAGAGNOLO** intitulada: **Polinômios e Sequências Reais** , sob orientação do Prof. Dr. ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 30 de Outubro de 2020.

Assinatura Eletrônica
09/11/2020 21:03:25.0
ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
09/11/2020 21:23:03.0
DIEGO DAS NEVES DE SOUZA
Avaliador Externo (Instituto Federal Catarinense)

Assinatura Eletrônica
09/11/2020 21:22:04.0
ADRIANA LUIZA DO PRADO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico este trabalho à minha mãe, Lúcia Virgínia Seffrin Bragagnolo, grande incentivadora e colaboradora. Que Deus a tenha, Luz da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades. A Universidade Federal do Paraná, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes. Agradeço também ao meu orientador Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos, aos meus pais pelo amor, incentivo e apoio incondicional e a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

RESUMO

Esta dissertação objetiva a análise de sequências e funções reais. O entendimento destas através de polinômios, suas raízes, soluções a questões e métodos utilizados para se obtê-las serão demonstrados baseando-se em definições e teoremas conhecidos, estes últimos também sendo demonstrados.

Iniciamos com uma introdução histórica a respeito dos polinômios, equações algébricas e suas soluções, destacando a inter-relação entre Geometria e Álgebra. A seguir, introduzimos no Capítulo 2 os conceitos de função e de sequência real, das operações entre sequências, fornecendo um dispositivo prático para a multiplicação de sequências quase nulas. No Capítulo 3, apresentamos o conceito de polinômio com coeficientes reais e exploramos as propriedades dos graus dos polinômios, das operações entre estes e da estrutura de anel do conjunto P dos polinômios. Nos Capítulos de 4 a 6, estudamos a imersão do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais em P e os polinômios na indeterminada X. Em seguida, os Capítulos 7 e 8 são dedicados aos conteúdos de divisibilidade e divisão de polinômios, funções polinomiais e raízes de um polinômio, incluindo a demonstração do Teorema do Resto. Finalizamos com o Capítulo 9, trazendo os tópicos pertinentes às Equações Algébricas, a saber: a decomposição de um polinômio em fatores lineares em $\mathbb{C}$ decorrente do Teorema Fundamental da Álgebra, a multiplicidade das raízes, as Relações de Girard, raízes racionais e raízes complexas de um polinômio, aplicabilidade do Teorema de Bolzano-Cauchy e o Método de Laguerre para a determinação de um intervalo real contendo as raízes de um polinômio.

Palavras-chave: Funções reais. Sequências reais. Polinômios.

ABSTRACT

This dissertation aims to analyze sequences and real functions. The understanding of these through polynomials, their roots, solutions to questions and methods used to obtain them will be proved based on known definitions and theorems, the latter will also be proved.

We begin with a historical introduction about polynomials, algebraic equations and their solutions, highlighting the relationship between Geometry and Algebra. Next, we introduce in Chapter 2 the concepts of function and real sequence, operations between sequences, providing a practical device for the multiplication of almost zero sequences. In Chapter 3, we present the concept of polynomial with real coefficients and explore the properties of the degrees of polynomials, the operations between them and the ring structure of the set P of polynomials. From Chapter 4 to 6, we study the immersion of the set $\mathbb{R}$ of real numbers in P and the polynomials in the indeterminate X. Then, Chapters 7 and 8 are dedicated to the contents of divisibility and division of polynomials, polynomial functions and roots of a polynomial, including the proof of the Theorem of the Rest. We conclude with Chapter 9, bringing the pertinent topics to Algebraic Equations, namely: the decomposition of a polynomial into linear factors in $\mathbb{C}$ due to the Fundamental Theorem of Algebra, the multiplicity of roots, the Girard Relations, rational and complex roots of a polynomial, applicability of the Theorem of Bolzano-Cauchy and the Laguerre Method for determining a real interval containing the roots of a polynomial.

Keywords: Real functions. Real sequences. Polynomials.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. Introdução

Segundo Aragão [1, p.11], o lugar de origem da Matemática, muito provavelmente, foi o vale compreendido entre os rios Tigres e Eufrates, a terra dos sumérios e dos babilônios, inventores da escrita cuneiforme. Contudo, Garbi [5, p.9] indaga: existiria matemática há 500 séculos quando o homem dava forma aos barcos que o levaram à Austrália? Teria o homo habilis há cerca, de dois mil milênios, feito matemática ao quebrar pedras para dar-lhes formas úteis? Por fim, estaria o homem praticando Matemática quando dividia a terra entre os lavradores e a produção entre as pessoas cerca de mil décadas atrás? Freudenthal [4, p.5] acredita na certeza de que a humanidade já fazia cálculos e pensava a respeito de figuras geométricas antes de ter sido inventada a escrita. Os números surgiram com a primeira escrita e logo depois a Matemática já estava altamente desenvolvida.

Nos anos iniciais qualquer jovem apresentado ao mundo acadêmico recebe a tarefa de separar a Matemática em dois grandes grupos: Geometria e Álgebra. Vale frisar que, de acordo com Rooney [7, p.126] é impossível separar a álgebra simples da geometria. As tábuas de argila da Babilônia no Museu Britânico incluem uma série de problemas que atualmente seriam formulados por meio de equações quadráticas ou cúbicas, estas últimas, por exemplo, encontradas em uma tábua de aproximadamente 4.000 anos de idade, que estão relacionadas à projetos de construção envolvendo áreas e volumes, ou seja, a Geometria cria problemas e a Álgebra os soluciona. Tal afirmação é reforçada, por Garbi [5, p.10], que relata a presença no mesmo museu Britânico, de um conjunto de 85 problemas de aritmética e geometria, incluindo todas as suas soluções. Este antigo documento é conhecido por papiro de Ahmes ou Rhind, datado em aproximadamente 1.650 a.C.; em especial, um destes problemas dizia: uma quantidade somada a seus $\frac{2}{3}$, mais a sua metade e mais a sua sétima parte perfaz 33. Qual é essa quantidade?

A origem da palavra "álgebra" está intimamente ligada ao primeiro nome da obra prima intitulada "Al-jabr Wa'l muqabalah" de autoria do matemático e astrônomo Mohamed Ibumusa al-Khowarizmi, elaborada em Bagdá durante a califado de Al-mamum (809-833), segundo Boyer [2, p.155]. Tal livro tratava sobre aritmética e álgebra e posteriormente ganhou uma tradução latina. De acordo com Rooney [7, p.130] a presente obra apresentava, por exemplo, de modo sistemático métodos de resolução para seis tipos de equações, a saber, supracitadas adiante na notação moderna: $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$, $bx + c = ax^2$. Em seguida, usou os trabalhos de Euclides para proporcionar demonstrações usando geometria, sendo assim o primeiro a adotar tal estratégia em equações quadráticas.

Sendo o método dedutivo a espinha dorsal que impulsiona as verdades matemáticas, não seria justo deixar de salientar o papel decisório do matemático grego Tales de Mileto, que segundo Garbi [5, p.14], estudava Matemática por bel prazer e foi um dos primeiros matemáticos a defender a importância das demonstrações dos teoremas.

No campo dos métodos empregados para a resolução de equações, temos primeiramente a regra da falsa posição para equações de primeiro grau, utilizada pelos egípcios. A seguir, os babilônios, completando quadrados, avançaram nas sentenças abertas em forma de igualdade de segundo grau. Nos limiares do século XIII, de acordo com Garbi [5, p.27] um cristão abordava Álgebra pela primeira vez na obra Liber Abaci. Cerca de três séculos mais tarde, uma intriga ferrenha, na Itália, entre os matemáticos Cardano e Tartaglia tornou amplamente conhecido um método para determinado tipo de equações do terceiro grau.

O gosto por ter respostas continuou crescendo cada vez mais e até a solução de sentenças de quarto grau foi alcançada por Ferrari no século XVI. Neste mesmo século, Bombelli coloca os números reais nas cordas bambas com o surgimento das raízes quadradas de números negativos.

Já no século XVII, de acordo com Boyer [2, p.284], Sr. Issac Newton em sua obra intitulada Arithmetica Universalis, contribui de forma inequívoca e definitiva na obtenção das somas de todas as potências das raízes de um polinômio, bem como uma regra para a majoração das raízes positivas dos mesmos. Não menos fantástico, Sr. Newton também nos agraciou com um método para obtenção aproximada das raízes de uma equação algébrica que se baseia no Cálculo Diferencial que, para Garbi [5, p.85], as calculadoras eletrônicas de bolso utilizam. Tal método é largamente conhecido no meio acadêmico como método de Newton e deveria ser ensinado nas séries finais do Ensino Médio.

Passados cerca de dois séculos após Bombeli colocar em xeque os números reais, Leonard Euler decreta que todo número complexo diferente de zero, possui exatamente n raízes, sendo n um número inteiro. Tamanha descoberta, de acordo com Garbi [5, p.111] impulsiona a teoria das equações algébricas como por exemplo, nos casos em que $\Delta < 0$ na Fórmula de Cardano.

Apesar de ser um resultado à parte, fica impossível não mencionar os bastidores de uma descoberta de Euler: $\cos(\alpha)+i\text{sen}(\alpha) = e^{i\alpha}$, donde fazendo $\alpha = \pi$, teremos $e^{i\pi}+1 = 0$, extraordinária equação que reúne os cinco números mais notáveis da Matemática.

Para muitos, inclusive para Boyer [2, p.345] o século XIX é conhecido como Idade de Ouro da Matemática. Em particular, nesta época um menino prodígio, filho de um artesão, chamou a atenção por obter, quase que instantaneamente, a soma $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$. Poucos anos a seguir, o não mais tão menino assim, Carl Fridedrich Gauss defendia sua dissertação de Doutorado intitulada *"Nova Demonstração do Teorema de que toda Função Racional Inteira em uma Variável pode ser Decomposta em Fatores Reais de Primeiro ou Segundo Grau"*. Em especial, tal defesa trazia em seu bojo que independentemente do grau de uma equação polinomial, esta terá ao menos uma raiz complexa.

Aproximadamente na mesma época, artigos escritos por duas mentes matemáticas notáveis ganharam atenção e reconhecimento, tragicamente, muito tempo após suas descobertas. Primeiramente, segundo Garbi [5, p.153], Niels Henrik Abel provou a conjectura atribuída a Paolo Ruffini de que as equações de quinto grau, exceto em casos particulares, não podem ser resolvidas exclusivamente por meio de operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação). Em segundo, ainda mais trágico, Évariste Galois, ao apaixonar-se pela Matemática aos catorze anos, teve suas descobertas chanceladas, várias décadas após sua morte. A saber, antes de atingir a maioridade, já havia escrito vários artigos, e, em especial, pesquisas à respeito das equações algébricas de grau primo bem como a inigualável e exclusiva forma de tratar as equações como "Grupos". A Teoria dos Grupos é um dos pilares da Matemática Moderna com aplicação em diversos campos além da Teoria das Equações, contudo, em relação à esta, podemos afirmar que a descoberta sem precedentes de Galois, permite de forma assertiva, mediante uma equação de grau superior a quatro, saber se a mesma pode ou não ser resolvida algebricamente.

Por fim, replicando a afirmação relatada no início desta seção: de acordo com Rooney [7, p.126] é impossível separar a álgebra simples da geometria, ou seja, a Geometria cria problemas e a Álgebra os soluciona.

Diante desta realidade, podemos exemplificar tal afirmação trazendo à tona um importantíssimo recorte donde a protagonista passa a ser as determinadas técnicas atribuídas à Geometria Analítica, que relaciona com sintonia e maestria as possíveis intersecções de retas com retas, retas com circunferências e circunferências com circunferências com as soluções de sistemas de equações de primeiro e segundo graus bem como operações algébricas entre raízes quadradas.

Foi deste modo que se provou, segundo Garbi [5, p.139], a impossibilidade da duplicação do cubo, a retificação da circunferência assim como a quadratura do círculo utilizando apenas régua e compasso. Aliás, utilizando tais ferramentas, ao longo dos seus precoces 19 anos, Gauss construiu um polígono regular de 17 lados utilizando as raízes da equação $x^{17} - 1 = 0$. Denominando as dezessete raízes de $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{16}$ sendo $R_0 = 1$ a mais óbvia de todas.

Após sucessivas e interessantes manipulações é possível checar que $R_1 + R_{16} = \frac{1}{8}(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2(\sqrt{17}-1)\sqrt{34-2\sqrt{17}}})$, número notável e intrigante assim como toda a história da Álgebra.

2. Funções e Sequências Reais

Para falar sobre polinômios e equações algébricas vamos primeiramente formalizar os tópicos de sequências e funções para que possamos entender o processo de construção passo a passo.

2.1. Definições e Exemplos

Definição 2.1. [3, p.2] Uma *função* f de um conjunto A em um conjunto B é uma regra que a cada elemento x que pertence a A associa um elemento $f(x)$ pertencente ao conjunto B, cujo nome é *valor de f no elemento x*. O conjunto A recebe o nome de *domínio* de f ou *campo de definição da função f*, assim como B é o *contradomínio*. Vale frisar que o valor da função em um determinado elemento é sempre univocamente determinado, bem como $f\colon A \to B$ é a notação da referida função cujo conjunto domínio é A e B o contradomínio.

Além disso, o conjunto dos elementos y de B tais que existe pelo menos um elemento x que pertence ao conjunto A tal que $f(x) = y$ é chamado de imagem de A pela função f, cuja notação é $f(A)$. Alguns exemplos de funções são:

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \ f(x) = 3.$
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \ f(x) = x^3.$
- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \ f(x) = \text{sen}(x^3).$

Definição 2.2. [6, p.209] Uma *sequência real* é qualquer função cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, ou $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, e a imagem é o conjunto $\mathbb{R}$, isto é, uma sequência real é qualquer função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde $x = i \in \mathbb{N}$ representa o domínio da função e $f(x) = a_i$, a imagem.

São exemplos de sequências reais:

- $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, onde $x = i$ representa o domínio da função e $f(x) = a_i = 2i$; a imagem é uma sequência f que associa a cada natural i, o número real $2i$. Assim, f determina o conjunto $\{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), \ldots\}$.
- $\{(0,0), (1,1), (2,8), (3,27), \ldots\}$ é fruto da regra $f(x) = a_i = i^3$, onde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Vale lembrar que, de forma abreviada, podemos representar os exemplos anteriores, respectivamente, por $(0, 2, 4, 6, \ldots) = (2i)_i$ e $(0, 1, 8, 27, \ldots) = (i^3)_i$, sendo $i \in \mathbb{N}$.

Definição 2.3. (Igualdade) Dadas as sequências $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, dizemos que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se, e somente se, $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Isto é, as sequências $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ e $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ são iguais se, e somente se, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ... Por exemplo, as sequências $(a_i)_i = (0, 1, 4, 9, 16, \ldots)$ e $(b_i)_i = (i^2)_i \subseteq \mathbb{N}$ são sequências iguais.

Definição 2.4. (Sequências quase nulas) Uma sequência em que, a partir de certa posição, todos os termos restantes são nulos, é denominada *sequência quase nula*, ou seja, uma sequência real $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é dita quase nula se, e somente se, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = 0$, para todo $i > n$.

Desse modo, a sequência $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é quase nula quando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n+1} = 0$, $a_{n+2} = 0, a_{n+3} = 0, \ldots, a_{n+k} = 0$, onde $k \in \mathbb{N}$. Temos então, no máximo, uma quantidade finita de termos não nulos, incluindo uma quantidade nula de termos não nulos, isto é, todos os termos iguais a 0. De fato, $(0, 0, 0, \ldots)$ e $(1, 3, 5, \ldots, 2k + 1, 0, 0, 0, \ldots)$ são exemplos de sequências reais quase nulas.

2.2. Operações entre Sequências Reais

2.2.1. Adição

Definição 2.5. Dadas as sequências $f = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $g = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$, a *adição* ou *soma* de f e g será a sequência $f + g = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$, onde $c_i = a_i + b_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Notemos, por exemplo, que se $f = (0, 2, 4, 6, \ldots) = (2i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $g = (1, 3, 5, \ldots) = (2i + 1)_{i\in\mathbb{N}}$, então $f + g = (1, 5, 9, \ldots) = (4i + 1)_{i\in\mathbb{N}}$.

2.2.2. Multiplicação

Definição 2.6. Dadas as sequências $f = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $g = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, a *multiplicação* ou o *produto* de f e g será a sequência $f \cdot g = (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, onde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot b_{k-i}$.

Aplicando a definição acima nas sequências $f = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$ e $g = (2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$, teremos $f \cdot g = (1 \cdot 2, 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2, 1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4, 1 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6, 1 \cdot 10 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 6, \ldots) = (2, 8, 20, 40, 70, \ldots)$.

Devido ao papel protagonista que as sequências quase nulas possuem neste trabalho, mostraremos, em especial, o seguinte resultado:

Proposição 2.1. *Em relação às operações entre sequências reais, temos:*

1. *A soma de sequências quase nulas é uma sequência quase nula.*

2. *O produto de sequências quase nulas é uma sequência quase nula.*

Demonstração. 1. Sejam as sequências quase nulas $f = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $g = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Por definição, existem naturais n e m tais que $a_i = 0$ quando $i > n$ e $b_i = 0$ quando $i > m$. Considere $r = \max\{n, m\}$. Assim, se $c_i = a_i + b_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, então $c_i = 0$ quando $i > r$. Portanto $f + g = (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma sequência quase nula.
2. Sejam as sequências quase nulas $f = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $g = (b_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Novamente, por definição, existem naturais n e m tais que $a_i = 0$ quando $i > n$ e $b_i = 0$ quando $i > m$. Considere $r = n + m$. Sabemos que em todo o desenvolvimento de $f \cdot g = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ temos $c_k = \sum a_i \cdot b_j$, com $i + j = k$. Em particular, quando $k > r$, teremos $i + j > n + m$, logo $i > n$ ou $j > m$, o que implica $a_i = 0$ ou $b_j = 0$, fazendo com que $a_i \cdot b_j = 0$, e consequentemente $c_k = 0$. Portanto $f \cdot g$ é uma sequência quase nula. □

2.2.3. Dispositivo Prático para a Multiplicação de Sequências Quase Nulas

Tomando-se as sequências quase nulas $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$, podemos dispor os elementos de cada uma das sequências na linha e na coluna, respectivamente, como visto abaixo:

	b_0	b_1	b_2	...	b_m	0	...
a_0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	...	a_0b_m	0	...
a_1	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	...	a_1b_m	0	...
a_2	a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	...	a_2b_m	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...
a_n	a_nb_0	a_nb_1	a_nb_2	...	a_nb_m	0	...
0	0	0	0		0	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...

É imediato notar, pela definição de multiplicação de sequências (Definição 2.6), que o referido produto $a_i \cdot b_j$, com $i > n$ e $j > m$, será obtido através da soma algébrica de todas as diagonais como está ilustrado a seguir.

	b_0	b_1	b_2	...	b_m	0	...
a_0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	...	a_0b_m	0	...
a_1	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	...	a_1b_m	0	...
a_2	a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	...	a_2b_m	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...
a_n	a_nb_0	a_nb_1	a_nb_2	...	a_nb_m	0	...
0	0	0	0		0	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Aplicando esta ferramenta no exemplo: $f = (3, -1, 2, -1, 0, 0, \ldots)$ e $g = (1, 2, 4, 0, 0, \ldots)$, teremos:

	3	-1	2	-1	0	0	...
1	3	-1	2	-1	0	0	...
2	6	-2	4	-2	0	0	...
4	12	-4	8	-4	0	0	...
0	0	0	0	0	0	0	...
0	0	0	0	0	0	0	...
0	0	0	0	0	0	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Portanto $f \cdot g = (3, 5, 12, -1, 6, -4, 0, 0, \ldots)$.

3. Polinômios com Coeficientes Reais

Definição 3.1. [6, p.216] Considere o conjunto P de todas as sequências reais quase nulas existentes. Definimos como o conjunto dos *polinômios com coeficientes reais* o conjunto P com as operações de adição de multiplicação definidas anteriormente.

3.1. Grau do Polinômio

Definição 3.2. Seja $f = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ um polinômio não nulo. Considere n o número natural tal que $a_n \neq 0$ e $a_i = 0$, para todo $i > n$. Definimos n como o *grau do polinômio* f e o representaremos pela notação $\partial f = n$.

Por exemplo, na sequência real quase nula $f = (1, 1, 2, -4, 0, 0, \ldots)$, notemos que $i = 3$ é o $\max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$, logo $\partial f = 3$. Vale elencar que chamamos de *coeficiente dominante de* f o termo da sequência a_n tal que $n = \partial f$. Neste exemplo, $a_3 = -4$ será o termo dominante.

3.1.1. Teorema dos Graus

Teorema 3.1. (Teorema dos Graus de Polinômios) *Sejam f e g dois polinômios não nulos de graus iguais a n e m, respectivamente. São válidas as seguintes (des)igualdades:*

I) $\partial(f + g) \leq \max\{n, m\}$, *se* $n = m$, *e*

II) $\partial(f + g) = \max\{n, m\}$, *se* $n \neq m$, *com* $(f + g) \neq 0$.

III) $\partial(f \cdot g) = n + m$, *com* $(f \cdot g) \neq 0$.

Demonstração. I) Fazendo $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ e $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots)$, se $m = n$ podemos afirmar que $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, 0, 0, 0, \ldots)$. Neste caso, há dois possíveis cenários:

(1) se $a_n + b_n = 0$, então $\partial(f + g) < n = \max\{n, m\}$, ou

(2) se $a_n + b_n \neq 0$, então $\partial(f + g) = n = \max\{n, m\}$.

Assim, se $m = n$, teremos $\partial(f + g) \leq \max\{n, m\}$.

II) Fazendo $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ e $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots)$, se $m \neq n$, digamos $m > n$ sem perda de generalidade, podemos afirmar que

$$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, b_{n+3}, \ldots, b_m, 0, 0, 0, \ldots).$$

Neste caso, $\partial(f + g) = m = \max\{n, m\}$.

III) Fazendo $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ e $g = (b_0, b_1, \ldots, b_m, 0, \ldots)$, sabemos que

$$f \cdot g = (c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots),$$

como definido na Subseção 2.2.2. Fazendo $k > m + n$ é rápido inferir que $c_k = 0$, apoiado na verdade de que a sequência produto de sequências quase nulas é também quase nula. Somado a isto, temos que $c_{m+n} = \sum_{i+j=m+n} a_i \cdot b_j = a_n \cdot b_m \neq 0$, já que para $i > n$ temos $a_i = 0$ e para $j > m$ temos $b_j = 0$. Tal identidade chancela duas verdades, a saber: $f \cdot g = (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{m+n}, 0, 0, \ldots) \neq 0$ e $\partial(f \cdot g) = n + m$. $\square$

Exemplos: (1) Sejam $f = (1, 3, 4, 7, 0, 0, 0, \ldots)$ e $g = (4, -1, 2, -7, 0, 0, 0, \ldots)$, com $\partial f = \partial g = 3$. Como $f + g = (5, 2, 6, 0, 0, 0, 0, \ldots)$, teremos $\partial(f + g) = 2 \leq 3 = \max\{\partial f, \partial g\}$.

(2) Para os polinômios $f = (1, 3, 4, 7, 0, 0, \ldots)$ e $g = (4, -1, 2, 0, 0, \ldots)$, cujos graus são 3 e 2, respectivamente, temos que $f + g = (5, 2, 6, 7, 0, 0, 0, \ldots)$ possui grau 3 ($= \max\{2, 3\}$).

(3) Considere $f = (5, 2, 1, 0, 0, \ldots)$ e $g = (4, 1, 0, 0, \ldots)$; sabemos que $f \cdot g = (20, 13, 6, 1, 0, 0, \ldots)$, logo é válido que $2 + 1 = 3$, ou seja, $\partial(f \cdot g) = \partial f + \partial g$.

3.2. Propriedades das Operações entre Polinômios

3.2.1. Adição

Denotando os polinômios $f = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $g = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ e $h = (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$, sendo $\partial f = n$, $\partial g = m$ e $\partial h = l$, podemos afirmar que a operação de adição entre eles goza das propriedades: *associativa* e *comutativa*, bem como da existência de *elemento neutro* e de *elemento oposto*.

Associativa

Sem perda de generalidade, façamos $n = m = l$, daí teremos f, g e h representados por
$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, \ldots)$, $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, \ldots)$ e $(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, 0, \ldots)$, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
(f+g)+h &= (a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n, 0+0, \ldots) + (c_0, c_1, \ldots, c_n, 0, \ldots)\\
&= ((a_0+b_0)+c_0, (a_1+b_1)+c_1, \ldots, (a_n+b_n)+c_n), (0+0)+0, \ldots)\\
&= (a_0+(b_0+c_0), a_1+(b_1+c_1), \ldots, a_n+(b_n+c_n), 0+(0+0), \ldots)\\
&= f+(g+h).
\end{aligned}$$

Comutativa

Sem perda de generalidade, façamos $n = m$. Temos f e g representados por

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) \text{ e } (b_0, b_1, \ldots, b_n, 0, \ldots),$$

respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
f+g &= (a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n, 0+0, \ldots)\\
&= (b_0+a_0, b_1+a_1, \ldots, b_n+a_n, 0+0, \ldots)\\
&= g+f.
\end{aligned}$$

Elemento Neutro

Sejam f e g representados por $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots)$ e $(0, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0, 0, \ldots)$, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
f+g &= (a_0+0, a_1+0, a_2+0, \ldots, a_n+0, 0+0, 0+0, \ldots)\\
&= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)\\
&= f.
\end{aligned}$$

Isto é, g é o elemento neutro.

Elemento Oposto

Sejam f e g representados por $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ e $(-a_0, -a_1, \ldots, -a_n, -0, -0, \ldots)$, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} f+g &= (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) + (-a_0, -a_1, \ldots, -a_n, -0, -0, \ldots) \\ &= (a_0 + (-a_0), a_1 + (-a_1), \ldots, a_n + (-a_n), 0 + (-0), 0 + (-0), \ldots) \\ &= (a_0 - a_0, a_1 - a_1, \ldots, a_n - b_n, 0 - 0, 0 - 0, \ldots) \\ &= (0, 0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto é, g é o elemento oposto de f.

3.2.2. Multiplicação

Denotando os polinômios $f = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}, g = (b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $h = (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sendo $\partial f = n, \partial g = m$ e $\partial h = l$, podemos afirmar que a operação de multiplicação entre eles goza das propriedades: *comutativa*, *associativa*, *distributividade em relação à adição* e da existência do *elemento neutro*.

Comutativa

Sejam os polinômios de coeficientes reais f, g e h representados por $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$, $(b_0, b_1, \ldots, b_m, 0, \ldots)$ e $(c_0, c_1, \ldots, c_l, 0, \ldots)$, respectivamente. Lembrando que $f \cdot g = (d_k)_{k\in\mathbb{N}}$, onde $d_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$, temos:

$$\begin{aligned} f \cdot g &= (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots) \\ &= (b_0a_0, b_1a_0 + b_0a_1, b_2a_0 + b_1a_1 + b_0a_2, \ldots, 0, 0, 0, \ldots) \\ &= \sum_{i+j=k} b_i a_j \\ &= g \cdot f = (d_k)_{k\in\mathbb{N}}, \end{aligned}$$

já que $a_ib_j = b_ja_i$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$.

Associativa

Sejam f, g e h representados por $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$, $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, \ldots)$ e $(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_l, 0, 0, \ldots)$, respectivamente, e também $f \cdot g = (d_p)_{p \in \mathbb{N}}$, onde $d_p = \sum\limits_{i+j=p} a_ib_j$. Fazendo $(f \cdot g) \cdot h = (e_r)_{r \in \mathbb{N}}$, com $e_r = \sum\limits_{p+k=r} d_pc_k$, temos:

$$\begin{aligned} e_r &= \sum_{p+k=r} \left(\sum_{i+j=p} a_ib_j \right) c_k = \sum_{p+k=r} \left(\sum_{i+j=p} (a_ib_j)c_k \right) \\ &= \sum_{p+k=r} \left(\sum_{i+j=p} a_ib_jc_k \right) = \sum_{i+j+k=r} a_ib_jc_k. \end{aligned}$$

Da mesma forma, denotando $g \cdot h = (d'_p)_{p \in \mathbb{N}}$, com $d'_p = \sum\limits_{j+k=p} b_jc_k$, e ainda $f \cdot (g \cdot h) = (e'_r)_{r \in \mathbb{N}}$, onde $e'_r = \sum\limits_{i+p=r} a_id'_p$, teremos:

$$\begin{aligned} e'_r &= \sum_{i+p=r} a_i \left(\sum_{j+k=p} b_ic_k \right) = \sum_{i+p=r} \left(\sum_{j+k=p} a_i(b_jc_k) \right) \\ &= \sum_{i+p=r} \left(\sum_{j+k=p} a_ib_jc_k \right) = \sum_{i+j+k=r} a_ib_jc_k. \end{aligned}$$

Distributividade da Multiplicação em relação à Adição

Sem perda de generalidade, façamos $m = l$, donde teremos f, g e h representados por

$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots)$, $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, 0, 0, \ldots)$ e $(c_0, c_1, c_2, \ldots, c_l, 0, 0, 0, \ldots)$, respectivamente. Assim,

$$
\begin{aligned}
f\cdot(g+h) &= \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j + c_j\right) = \sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{j=p+r} a_p(b_r+c_r)\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{j=p+r} (a_pb_r + a_pc_r)\right) = \sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{j=p+r} a_pb_r\right) + \sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{j=p+r} a_pc_r\right)\\
&= f\cdot g + f\cdot h.
\end{aligned}
$$

Elemento neutro

O elemento neutro da multiplicação é tal que o produto entre dois polinômios é um dos mesmos. Sejam $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $1' = (1, 0, 0, \ldots)$ e $g = (c_k)_k = f \cdot 1'$ polinômios de coeficientes reais. Pela operação de multiplicação entre polinômios, temos:

$$
\begin{aligned}
&c_0 = a_0 \cdot 1 = a_0\\
&c_1 = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1 = a_1\\
&c_2 = a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 = a_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Também, pelo dispositivo prático demonstrado na Subseção 2.2.3:

	a_0	a_1	a_2	...	f $1'$
	a_0	a_1	a_2	...	**1**
a_0	0	0	0	0	**0**
a_1	0	0	0	0	**0**
a_2	0	0	0	...	**0**
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Dessa forma, notamos que $c_k = a_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto, $f \cdot 1' = g = f$.

3.3. Estrutura do Conjunto P dos Polinômios

Definição 3.3. Um *anel* consiste em um conjunto A munido de duas operações, a adição denotada por $+$ e a multiplicação denotada por $\cdot$, satisfazendo os seguintes axiomas:

(A1) a adição é associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todos $a, b, c \in A$;

(A2) a adição é comutativa: $a + b = b + a$, para todos $a, b \in A$;

(A3) elemento neutro da adição: existe $0 \in A$ tal que $a + 0 = a$, para todo $a \in A$;

(A4) elemento oposto para a adição: para cada $a \in A$, existe $-a \in A$ tal que $a+(-a) = 0$;

(A5) a multiplicação é associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todos $a, b, c \in A$;

(A6) a multiplicação é distributiva em relação à adição: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, para todos $a, b, c \in A$.

Além disso, se a multiplicação é comutativa, isto é, se

$$a \cdot b = b \cdot a, \ \forall \ a, b \in A,$$

então dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um *anel comutativo*; se existe elemento neutro da multiplicação, isto é, se

$$\exists \ 1 \in A; \ 1 \cdot a = a \cdot 1, \ \forall \ a \in A,$$

então dizemos que $(A, +, \cdot)$ é um *anel com identidade* ou *anel com unidade*.

Dessa forma, concluímos então que o conjunto P, munido das operações $+$ e $\cdot$ definidas anteriormente, é um anel comutativo com unidade.

4. Imersão de $\mathbb{R}$ em P

4.1. Definição da Imersão

Definição 4.1. Considere o conjunto P', subconjunto do conjunto P de polinômios, dado por:

$$P' = \{f = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in P \ : \ a_i = 0, \ \forall i \neq 0\}.$$

Isto é, P' é formado por polinômios da forma $f = (a, 0, 0, 0, \ldots)$, com $a \in \mathbb{R}$. Uma vez que P' é um subconjunto de P, verificaremos a seguir as operações de adição e multiplicação em P'.

Adição

Sejam $g = (b_i)_i \in P'$ e $h = (c_j)_j \in P'$. Então:

$$\begin{aligned} g + h &= (b_0, 0, 0, 0, \ldots) + (c_0, 0, 0, 0, \ldots) \\ &= (b_0 + c_0, 0 + 0, 0 + 0, 0 + 0, \ldots) \end{aligned}$$

Logo $g + h = (d_r)_r \in P'$, onde $d_r = b_r + c_r$ e $d_r = 0$, para todo $r \neq 0$.

Assim, a adição de dois polinômios pertencentes a P' resulta em um terceiro polinômio, também pertencente a P'.

Multiplicação

Sejam $g = (b_i)_i \in P'$ e $h = (c_j)_j \in P'$. Então:

$$g \cdot h = (b_0, 0, 0, 0, \ldots) \cdot (c_0, 0, 0, 0, \ldots).$$

Pelo dispositivo prático de multiplicação (Subseção 2.2.3), chegamos em:

$$\begin{aligned} g \cdot h &= (b_0c_0, 0, 0, 0, \ldots) \\ &= (d_r)_r, \end{aligned}$$

onde $d_r = \sum_{i+j=r} b_ic_j$. Logo $g \cdot h = (d_r)_r \in P'$.

Assim, verificamos que a multiplicação entre dois polinômios pertencentes a P', resulta em um terceiro polinômio também pertencente a P'.

Provando que a adição e a multiplicação de dois polinômios pertencentes a P', resulta em outro polinômio pertencente a P', provamos que P' também é um anel. Sendo então P' um anel, consideremos agora o anel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e façamos o estudo da aplicação $\varphi\colon \mathbb{R} \to P'$, definida por $\varphi(k) = (k, 0, 0, 0, \ldots)$, para cada elemeto k de $\mathbb{R}$. Então φ está bem definida, uma vez que, para cada $k \in \mathbb{R}$, $\varphi(k) \in P'$. Exemplificando:

1) Para o elemento $1 \in \mathbb{R}$, $\varphi(1) = (1, 0, 0, 0, \ldots)$, logo $\varphi(1) \in P'$;

2) Para o elemento $13 \in \mathbb{R}$, $\varphi(13) = (13, 0, 0, 0, \ldots)$, logo $\varphi(13) \in P'$.

Anotamos então o seguinte:

(I) $\varphi\colon \mathbb{R} \to P'$ é uma aplicação bem definida.

Além disso, para qualquer polinômio $(a, 0, 0, \ldots) \in P'$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que, feita a aplicação, temos $\varphi(a) = (a, 0, 0, 0, \ldots)$. Dessa forma, todo elemento de P' é imagem de algum elemento de $\mathbb{R}$. Portanto φ é uma aplicação *sobrejetora.*

Semelhante a este estudo, considerando dois elementos distintos de $\mathbb{R}$, digamos $c, d \in \mathbb{R}$, com $c \neq d$. Fazendo a mesma aplicação φ, teremos que:

$$\varphi(c) = (c, 0, 0, 0, \ldots) \qquad \text{e} \qquad \varphi(d) = (d, 0, 0, 0, \ldots).$$

Como c e d são distintos, então $\varphi(c) \neq \varphi(d)$.

Exemplos:

1) Sejam 4 e $7 \in \mathbb{R}$. Fazendo a aplicação φ:

$$\varphi(4) = (4, 0, 0, 0, \ldots) \qquad \text{e} \qquad \varphi(7) = (7, 0, 0, 0, \ldots),$$

ou seja, $\varphi(4) \neq \varphi(7)$.

2) Considere -3 e $8 \in \mathbb{R}$. Fazendo a aplicação φ:

$$\varphi(-3) = (-3, 0, 0, 0, \ldots) \qquad \text{e} \qquad \varphi(8) = (8, 0, 0, 0, \ldots).$$

Assim, $\varphi(-3) \neq \varphi(8)$.

Nota-se que, dados quaisquer dois elementos distintos de $\mathbb{R}$, associam-se elementos distintos em P', ou seja, para a e $b \in \mathbb{R}$:

$$a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b).$$

Portanto ϕ é uma aplicação injetora e, uma vez que provamos que φ também é sobrejetora, temos:

(II) φ é uma aplicação bijetora.

Dentro dos elementos pertencentes a $\mathbb{R}$, temos que a soma entre dois elementos é também elemento de $\mathbb{R}$, então:

$$a \text{ e } b \in \mathbb{R} \implies a + b \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(a + b) = (a + b, 0, 0, 0, \ldots) = (a, 0, 0, 0, \ldots) + (b, 0, 0, 0, \ldots)$$

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Provamos então que:

(III) φ é compatível com as operações de soma em $\mathbb{R}$ e P'.

Ainda, dados dois elementos pertencentes a $\mathbb{R}$, o produto entre eles pertence a $\mathbb{R}$, portanto:

$$c, d \in \mathbb{R} \implies c \cdot d \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(a \cdot b) = (a \cdot b, 0, 0, 0, \ldots) = (a, 0, 0, 0, \ldots) \cdot (b, 0, 0, 0, \ldots)$$

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Provamos então que:

(IV) φ é compatível com as operações de produto em $\mathbb{R}$ e P'.

Duas estruturas são algebricamente *isomorfas* se existe um mapeamento bijetivo entre elas, o qual é compatível com as operações estruturantes. Se dois objetos são isomorfos, então qualquer propriedade que é preservada por um isomorfismo e que é verdade para um dos objetos, também é verdade para o outro objeto [9, p.3]. Portanto, as observações feitas em **(I)**, **(II)**, **(III)** e **(IV)** permitem concluir que φ é um isomorfismo entre os anéis $\mathbb{R}$ e P' [6, p.225].

Concluído o isomorfismo entre os anéis $\mathbb{R}$ e P', é possível relacionar cada elemento de $\mathbb{R}$ à sua respectiva imagem em P'. Fazendo a identificação $k = (k, 0, 0, 0, \ldots)$, para cada elemento $k \in \mathbb{R}$, temos $\mathbb{R} = P'$. Assim, temos a imersão de $\mathbb{R}$ em P, uma vez que:

$$\left.\begin{array}{r} P' \subset P \\ \mathbb{R} = P' \end{array}\right] \Longrightarrow \mathbb{R} \subset P.$$

Dessa forma, os elementos de $\mathbb{R}$ passam a ser considerados elementos de P, ou seja, os elementos de $\mathbb{R}$ são considerados polinômios.

Os polinômios de $\mathbb{R}$ são ditos constantes. Podemos notar que:

$$\begin{array}{rcll} 0' = (0,0,0,0,\ldots) & \Longrightarrow & 0 = 0' & \text{(elemento neutro da adição)} \\ 1' = (1,0,0,0,\ldots) & \Longrightarrow & 1 = 1' & \text{(elemento neutro da multiplicação)} \\ -3' = (-3,0,0,0,\ldots) & \Longrightarrow & -3 = -3' & \\ 5' = (5,0,0,0,\ldots) & \Longrightarrow & 5 = 5' & \end{array}$$

Nota-se que o grau de um polinômio f constante e não-nulo é zero ($\partial f = 0$), uma vez que $a_0 \neq 0$ e $a_i = 0$, para todo $i > 0$.

4.2. Produto entre um polinômio em $\mathbb{R}$ e outro em P

Sejam os polinômios $f \in \mathbb{R}$ e $g \in P$, tais que $f = (a, 0, \ldots)$ e $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, \ldots)$. O produto entre eles, como visto anteriormente, é dado por $f \cdot g = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde $c_k =$

$\sum_{i+j=k} a_i b_j$. Expandindo o somatório, temos que:

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0.$$

Uma vez que o polinômio f é constante, seu termo de índice 0 é um valor constante, no caso a, e todos os outros termos são nulos, logo:

$$c_k = a \cdot b_k, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \implies f \cdot g = (ab_0, ab_1, ab_2, \ldots, ab_n, 0, 0, 0, \ldots).$$

Portanto a multiplicação entre um polinômio constante pertencente a $\mathbb{R}$ e outro polinômio pertencente a P produz um terceiro polinômio, cujos termos são obtidos pelo produto de cada termo do polinômio pertencente a P pela constante a_0 do polinômio pertencente a $\mathbb{R}$. Além disso, pelo Teorema 3.1, o polinômio resultante terá o mesmo grau do polinômio pertencente a P. Em síntese, temos:

$$\left\{\begin{array}{l} f \in \mathbb{R} \implies f = (a, 0, 0, 0, \ldots) \\ g \in P \implies g = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, 0, 0, \ldots) \end{array}\right. \implies f \cdot g = (c_k)_k,\ k \in \mathbb{N}, \text{ onde } c_k = ab_k. \tag{4.1}$$

Vejamos alguns exemplos:

1) Sejam os polinômios $f \in \mathbb{R}$ e $g \in P$, tais que $f = (4, 0, 0, 0, \ldots)$ e $g = (1, 3, 5, 0, 0, 0, \ldots)$. O polinômio $h = f \cdot g = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ terá o mesmo grau de g, portanto, o último termo não-nulo de h será o de índice igual a ∂g, portanto:

$$h = (c_0, c_1, c_2, 0, 0, 0, \ldots) = (4 \cdot 1, 4 \cdot 3, 4 \cdot 5, 0, 0, 0, \ldots) = (4, 12, 20, 0, 0, 0, \ldots).$$

2) Sejam os polinômios $f \in \mathbb{R}$ e $g \in P$, tais que $f = (3, 0, 0, 0, \ldots)$ e $g = (-6, -2, 5, 7, 0, 0, \ldots)$. O polinômio $h = f \cdot g = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$, onde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, pode ser encontrado pelo dispositivo prático de multiplicação:

	-6	**-2**	**5**	**7**	g f
	-18	-6	15	21	**3**
-18	0	0	0	0	**0**
-6	0	0	0	0	**0**
15	0	0	0	0	**0**
21					

Portanto $h = (-18, -6, 15, 21, 0, 0, 0, \ldots)$.

5. Indeterminada X

Designemos por X, o que chamaremos *indeterminada*.

Definição 5.1. $X = (a_i)_i$, com $i \in \mathbb{N}$, onde $a_1 = 1$ e $a_i \neq 0$, para todo $i \neq 1$.

Ou seja, $X = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ e $\partial X = 1$.

Uma vez definida o que é a indeterminada X, podemos identificar suas potências. Inicialmente temos:

$$X^0 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$$

$$X^1 = (0, 1, 0, 0, \ldots)$$

A partir das quais podemos expandir as outras potências, de forma que:

$$X^2 = X^1 \cdot X^1 = (0, 1, 0, 0, \ldots) \cdot (0, 1, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 1, 0, \ldots)$$

	0	**1**	**0**	**0**	X^1 \ X^1
	0	0	0	0	**0**
0	0	1	0	0	**1**
0	0	0	0	0	**0**
1	0	0	0	0	**0**
0	0	0	0	0	**0**

$$X^3 = X^1 \cdot X^2 = (0, 1, 0, 0, \ldots) \cdot (0, 0, 1, 0, \ldots) = (0, 0, 0, 1, \ldots)$$

	0	**1**	**0**	**0**	X^1 \ X^2
	0	0	0	0	**0**
0	0	1	0	0	**0**
0	0	0	0	0	**1**
0	0	0	0	0	**0**
1	0	0	0	0	**0**

Temos, então, as potências da indeterminada X:

$$\begin{aligned} X^0 &= (1,0,0,0,\ldots) \\ X^1 &= (0,1,0,0,\ldots) \\ X^n &= X^{n-1}\cdot X. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Nota-se pelos exemplos dados, que **a potência n-ésima da indeterminada X** é um polinômio cujo coeficiente de ordem n é igual a 1 e os demais são nulos; demonstremos este resultado:

Teorema 5.1. (n-ésima potência da indeterminada X) *$X^n = (b_k)_k$, com $k \in \mathbb{N}$, onde*

$$\begin{cases} b_n = 1 \\ b_k = 0, \ \forall\ k \neq n. \end{cases}$$

Demonstração. Pela definição 5.1, sabemos que a tese deste teorema é válida para $n = 0$ e $n = 1$. Supomos, então, que $n > 1$ e a tese do teorema é verdadeira para X^{n-1}, onde

$$X^{n-1} = (c_j)_j, \text{ com } j \in \mathbb{N} \text{ e } \begin{cases} c_{n-1} = 1 \\ c_j = 0, \ \forall\ j \neq n-1. \end{cases}$$

Por (5.1), $X^n = X^{n-1}\cdot X$, onde X é dado pela Definição 5.1 e X^{n-1} satisfaz a hipótese de indução. Então:

$$X^n = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}, \text{ onde } b_k = \sum_{i+j=k} a_i c_j.$$

Para $k \neq n$,

$$b_k = a_0c_k + a_1c_{k-1} + \ldots + a_{k-1}c_1 + a_kc_0.$$

Pela Definição 5.1, $a_1 = 1$ e os demais termos são nulos, portanto:

$$b_k = 0\cdot c_k + 1\cdot c_{k-1} + \ldots + 0\cdot c_1 + 0\cdot c_0 = c_{k-1}.$$

Uma vez que $k \neq n$, implica que $k-1 \neq n-1$. Pela hipótese de indução $c_{k-1} = 0$, assim:

$$b_k = 0, \ \forall \ k \neq n. \tag{5.2}$$

Agora, para $k = n$, temos:

$$b_n = a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + \ldots + a_{n-1} c_1 + a_n c_0.$$

Pela hipótese de indução, $a_1 = 1$ e $a_i = 0$, para todo $i \neq 1$, o que implica em:

$$b_n = 0 \cdot c_n + 1 \cdot c_{n-1} + \ldots + 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 = c_{n-1}.$$

Novamente, pela hipótese de indução, temos que $c_{n-1} = 1$, dessa forma:

$$b_n = 1. \tag{5.3}$$

Assim, pelas equações (5.2) e (5.3):

$$X^n = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}, \text{ onde } \begin{cases} b_n = 1 \\ b_k = 0, \ \forall \ k \neq n. \end{cases}$$

□

Vimos anteriormente o produto de um polinômio pertencente a $\mathbb{R}$ e um polinômio qualquer pertencente a P em (4.1). Dessa forma, a multiplicação de um polinômio constante pela indeterminada X leva ao teorema:

Teorema 5.2. (Produto de uma constante pela indeterminada X) $aX^n = (b_k)_k$, *com* $k \in \mathbb{N}$, *onde*

$$\begin{cases} b_n = a \\ b_k = 0, \ \forall \ k \neq n. \end{cases}$$

Podemos também provar este teorema da seguinte forma:

Demonstração. Pelo dispositivo prático da multiplicação, podemos ver que o teorema é verdadeiro para $n = 0$ e $n = 1$. Supondo $n > 1$ e que o teorema seja válido para X^{n-1}, temos:

$$aX^{n-1} = (c_k)_k, \text{ com } k \in \mathbb{N}, \text{ onde } \begin{cases} c_{n-1} = a \\ c_j = 0, \ \forall\ j \neq n-1. \end{cases}$$

Por (5.1), $X^n = X \cdot X^{n-1}$, onde X é dado pela Definição 5.1. Multiplicando os dois lados da igualdade por uma constante a, temos que $aX^n = a \cdot X \cdot X^{n-1} = X \cdot aX^{n-1}$, onde aX^{n-1} é definido pela hipótese de indução. Então:

$$aX^n = (b_k)_k, \text{ com } k \in \mathbb{N}, \text{ onde } b_k = \sum_{i+j=k} a_i c_j.$$

Para $k \neq n$,

$$b_k = a_0 c_k + a_1 c_{k-1} + \ldots + a_{k-1} c_1 + a_k c_0.$$

Pela Definição 5.1, $a_1 = 1$ e os demais termos são nulos, portanto

$$b_k = 0 \cdot c_k + 1 \cdot c_{k-1} + \ldots + 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 = c_{k-1}.$$

Uma vez que $k \neq n$ implica $k - 1 \neq n - 1$. Pela hipótese de indução, $c_{k-1} = 0$, assim:

$$b_k = 0, \ \forall\ k \neq n. \tag{5.4}$$

Agora, para $k = n$, temos:

$$b_n = a_0 c_n + a_1 c_{n-1} + \ldots + a_{n-1} c_1 + a_n c_0.$$

Pela hipótese de indução, $a_1 = 1$ e $a_i = 0$, para todo $i \neq 1$, o que implica

$$b_n = 0 \cdot c_n + 1 \cdot c_{n-1} + \ldots + 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 = c_{n-1}.$$

Novamente pela hipótese de indução, temos que $c_{n-1} = a$, dessa forma,

$$b_n = a. \tag{5.5}$$

Assim, pelas equações (5.4) e (5.5),

$$aX^n = (b_k)_k, \text{ com } k \in \mathbb{N}, \text{ onde } \begin{cases} b_n = a \\ b_k = 0, \ \forall\, k \neq n. \end{cases}$$

$\square$

6. Polinômios na Indeterminada X

Polinômios na indeterminada X também são conhecidos como a forma algébrica de um polinômio. Para defini-los, consideremos um polinômio $f = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que seu grau é $\partial f \leq n$. Uma vez que $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, 0, \ldots)$, e como vimos que a estrutura de polinômios compreende a soma entre elementos deste mesmo conjunto, podemos escrever f como uma soma de polinômios da seguinte forma:

$$f = (a_0 \cdot 1, 0, 0, 0, \ldots) + (0, a_1 \cdot 1, 0, 0, \ldots) + (0, 0, a_2 \cdot 1, 0, \ldots) + \ldots + (0, 0, 0, \ldots, a_n \cdot 1, 0, 0, 0, \ldots).$$

Cada um dos membros da soma pode ser visto, juntamente com a Definição 5.1, como

$$(a_i, 0, 0, 0, \ldots) \cdot X^i.$$

Pelo Teorema 5.2, podemos definir cada polinômio na indeterminada X como

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \tag{6.1}$$

onde f será chamado de *polinômio na indeterminada* X. Pelo Teorema 5.2, o polinômio na forma vista em (6.1) possui grau $\partial f \leq n$, o que implica que o termo de índice n é diferente de 0. Uma vez que polinômios na indeterminada X estão definidos no anel P, as operações de soma e multiplicação são as mesmas, dessa forma, sejam f e g polinômios na indeterminada X, tais que $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ e $g = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$.

(I) Pela definição de somas de polinômios,

$$f + g = \sum_{k=0}^{r} (a_k + b_k) X^k,$$

onde, pelo Teorema 3.1, $r = \max\{\partial f, \partial g\}$.

(II) Pela definição de produto entre polinômios,

$$f \cdot g = \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k,$$

onde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

7. Divisibilidade entre Polinômios

Para definir o critério de divisibilidade, façamos uma comparação com números reais: um número D é divisível por d caso exista q (quociente) tal que $D = d \cdot q$ (o resto da divisão de D por q é 0). Semelhante a isto, sejam f e g polinômios. Dizemos que *f é divisível por g* ou que *g divide f* se, e somente se, existe um polinômio q tal que:

$$f = g \cdot q.$$

Uma vez que temos uma igualdade entre polinômios e, por um lado, temos um produto entre polinômios, o grau de f deve ser o mesmo grau do produto $g \cdot q$ que, pelo Teorema 3.1, é a soma dos graus de g e q, ou seja:

$$\partial f = \partial g + \partial q.$$

Vejamos alguns exemplos:

1) Sejam $f = X^2 - 3X + 2$ e $g = X - 1$. Se g divide f, então existe um polinômio q tal que:

$$f = g \cdot q.$$

Pelo Teorema 3.1, como $\partial f = 2$ e $\partial g = 1$, sabemos que $\partial q = 1$, ou seja, q é da forma $aX + b$. Então:

$$f = g \cdot q = (X - 1) \cdot (aX + b) = aX^2 - aX + bX - b = aX^2 - (a - b)X - b.$$

Pela igualdade de polinômios

$$X^2 - 3X + 2 = aX^2 - (a - b)X - b,$$

temos:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a - b = 3 \\ -b = 2 \end{cases} \implies a = 1 \text{ e } b = -2.$$

Portanto $q = X - 2$.

2) Considere os polinômios $f = X^3 + 15X^2 + 75X + 125$ e $g = X + 5$. Caso f seja divisível por g, temos:

$$f = g \cdot q.$$

O Teorema 3.1 nos garante que $\partial q = 2$, portanto q é da forma:

$$q = aX^2 + bX + c.$$

O produto de g e q é dado por:

$$g \cdot q = (X + 5) \cdot (aX^2 + bX + c).$$

Pela igualdade de polinômios:

$$X^3 + 15X^2 + 75X + 125 = aX^3 + (5a + b)X^2 + (5b + c)X + 5c,$$

temos:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 5a + b = 15 \\ 5b + c = 75 \\ 5c = 125 \end{cases} \implies a = 1, \ b = 10 \text{ e } c = 25.$$

Portanto $q = X^2 + 10X + 25$.

3) Dados os polinômios $f = 3X^4 + 48X^3 + 288X^2 + 768X + 768$ e $g = 3X^2 + 24X + 48$, se f for divisível por g, então:

$$\exists\, q \in P;\ f = g \cdot q$$
$$\partial f = \partial g + \partial q \implies \partial q = 2$$
$$q = aX^2 + bX + c.$$

Assim:

$$f = g \cdot q = 3aX^4 + (24a + 3b)X^3 + (48a + 24b + 3c)X^2 + (48b + 24c)X + 48c$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3a & = & 3 \\ 24a + 3b & = & 48 \\ 48a + 24b + 3c & = & 288 \\ 48b + 24c & = & 768 \\ 48c & = & 768 \end{array}\right. \implies a = 1,\ b = 8 \text{ e } c = 16.$$

Logo $q = X^2 + 8X + 16$.

4) Considere os polinômios $f = 2X^3 - 3X + 4$ e $g = X + 3$. Se g divide f, então:

$$\exists\, q \in P;\ f = g \cdot q$$
$$\partial f = \partial g + \partial q \implies \partial q = 2$$
$$q = aX^2 + bX + c.$$

Portanto:

$$f = g \cdot q = aX^3 + (3a + b)X^2 + (3b + c)X + 3c$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} a & = & 2 & \text{(i)} \\ 3a + b & = & 0 & \text{(ii)} \\ 3b + c & = & -3 & \text{(iii)} \\ 3c & = & 4 & \text{(iv)} \end{array}\right.$$

Pelas equações (i) e (ii),

$$a = 2 \text{ e } b = -6.$$

Pela equação (iv), $c = \frac{4}{3}$, porém, pela equação (iii), $c = 15$, como não é possível que c seja igual a dois valores diferentes, f não é divisível por q.

Assim como foi feito o paralelo com números reais anteriormente, temos o caso mais geral que o apresentado. Seja um número D, podemos escrevê-lo na forma $D = d \cdot q + r$, onde r é o resto da divisão de D por d, ou seja, para a analogia anterior, r seria igual a 0. Generalizando para polinômios, segue o teorema a seguir:

Teorema 7.1. *Dados dois polinômios f e g, sendo $g \neq 0$, existe um, e somente um, par de polinômios (q, r) tal que:*

$$f = g \cdot q + r,$$

onde $\partial r < \partial g$, se $r \neq 0$.

Demonstração. Para provar este teorema, primeiramente vamos supor a existência de dois pares (q_1, r_1) e (q_2, r_2). Supondo que o teorema valha, temos:

$$f = g \cdot q_1 + r_1, \text{ onde } \partial r_1 < \partial g, \text{ se } r_1 \neq 0. \tag{7.1}$$

$$f = g \cdot q_2 + r_2, \text{ onde } \partial r_2 < \partial g, \text{ se } r_2 \neq 0. \tag{7.2}$$

Subtraindo (7.2) de (7.1), temos:

$$f - f = g \cdot q_1 + r_1 - g \cdot q_2 - r_2 \implies 0 = g \cdot (q_1 - q_2) + (r_1 - r_2). \tag{7.3}$$

$$g \cdot (q_1 - q_2) = (r_2 - r_1). \tag{7.4}$$

Por um lado, a partir da igualdade na equação (7.4), sabemos que $\partial[g \cdot (q_1 - q_2)] = \partial[(r_2 - r_1)]$, além disso, pelas equações (7.1) e (7.2), pelo Teorema 3.1 e considerando que

$r_1 \neq r_2$, teremos que:

$$\partial[r_2 - r_1] \leq \max\{\partial r_1, \partial r_2\}.$$

Por outro lado, ainda na equação (7.4) e também pelo Teorema 3.1:

$$\partial[g \cdot (q_1 - q_2)] = \partial g + \partial(q_1 - q_2) \implies \partial[g \cdot (q_1 - q_2)] \geq \partial g.$$

Assim, chegamos a um absurdo. A partir deste resultado infere-se que $r_1 = r_2$, logo

$$g \cdot (q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \implies g \cdot (q_1 - q_2) = 0,$$

porém, por hipótese, $g \neq 0$, logo

$$q_1 - q_2 \implies q_1 = q_2,$$

donde concluímos que **o par** (q, r) **é único**.

Provada a unicidade do par (q, r), que chamaremos q de quociente e r de resto da divisão, agora iremos provar a existência deste par. Partindo da hipótese que $g \neq 0$, digamos que f seja um polinômio identicamente nulo, então:

$$f = g \cdot 0 + 0 \implies \exists\ (q, r) = (0, 0).$$

Supondo $f \neq 0$, temos dois possíveis casos:

Caso (i): $\partial f < \partial g$.

Uma vez que, por hipótese, $g \neq 0$, a igualdade $f = g \cdot q + r$ é satisfeita com o par

$$q = 0 \ \text{ e } \ r = f \implies \exists\ (q, r) = (0, f).$$

Caso (ii): $\partial f \geq \partial g$.

Sejam f e g dois polinômios tais que:

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \quad \text{e} \quad g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i; \quad \partial f = m \quad \text{e} \quad \partial g = n \quad \Longrightarrow \quad m \geq n. \tag{7.5}$$

Por indução, temos: se $m = 0$, então $n = 0$, dessa forma, f e g são polinômios constantes da forma $f = a_0$ e $g = b_0$, então a igualdade $f = g \cdot q + r$ é verdadeira para $q = \dfrac{a_0}{b_0}$ e $r = 0$. Logo:

$$\exists\ (q, r) = \left(\frac{a_0}{b_0}, 0 \right). \tag{7.6}$$

Se $m \neq 0$ e considerando o Teorema 7.1 válido para todo polinômio de grau menor que m, consideremos o polinômio:

$$h = f - a_m b_n^{-1} X^{m-n} g. \tag{7.7}$$

A partir de (7.6):

$$\begin{aligned} h &= (a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots) - a_m b_n^{-1} X^{m-n} \cdot (b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \ldots) \\ &= (a_m X^m + a_{m-1} X^{m-1} + \ldots) - (a_m X^m + a_m b_n^{-1} b_{n-1} X^{m-1} + \ldots) \\ &= (a_{m-1} + a_m b_n^{-1} b_{n-1}) X^{m-1} + \ldots \end{aligned}$$

Uma vez que o teorema é válido para qualquer grau menor que m, então $\partial h < m$. Pela hipótese de indução, existe um par (q_1, r) tal que:

$$h = g \cdot q_1 + r. \tag{7.8}$$

Se $r \neq 0$, então $\partial r < \partial g$, substituindo a equação (7.8) em (7.7):

$$\begin{aligned} g \cdot q_1 + r &= f - a_m b_n^{-1} X^{m-n} g \\ f &= q_1 \cdot g + a_m b_n^{-1} X^{m-n} g + r \end{aligned}$$

$$f = (q_1 + a_m b_n^{-1} X^{m-n}) g + r. \tag{7.9}$$

Dessa forma, considerando $q = q_1 + a_m b_n^{-1} X^{m-n}$, concluímos que:

$$\exists\ (q, r) = (q_1 + a_m b_n^{-1} X^{m-n}, r),$$

com a equação (7.9), se $r \neq 0$, então $\partial r < \partial g$ e o Teorema 7.1 tem suas condições satisfeitas. □

7.1. Determinação do Quociente e Resto

Na divisão entre polinômios onde o grau do polinômio dividendo seja maior ou igual ao grau do polinômio divisor, podemos determinar o polinômio quociente e o polinômio resto. Sejam os polinômios f, g, q e r, tais que, pelo Teorema 7.1,

$$f = g \cdot q + r.$$

Para determinarmos o par de polinômios (q, r), sendo os polinômios f e g da forma:

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i, \quad \partial f = m \ \text{ e } \ g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i, \quad \partial g = n,$$

seja um outro polinômio $q_1 = a_m b_n^{-1} X^{m-n}$ tal que:

$$f = g \cdot q_1 + r_1. \tag{7.10}$$

Pela equação (7.10), se o grau de $\partial r_1 < \partial g$, então o par está determinado com:

$$q = q_1 \ \text{ e } \ r = r_1.$$

Caso $\partial r_1 \geq \partial g$, devemos continuar o procedimento como visto na prova de existência do par (q, r) para o Teorema 7.1, determinando um novo par (q_j, r_j) para cada nova interação:

$$\begin{aligned} r_1 &= g \cdot q_2 + r_2 \\ r_2 &= g \cdot q_3 + r_3 \\ \ldots \\ r_{k-1} &= g \cdot q_k + r_k \\ r_k &= g \cdot q_{k+1} + r_{k+1}. \end{aligned}$$

Este procedimento deve ser feito até que $\partial r_{k+1} < \partial g$, se $r_{k+1} \neq 0$. Dessa forma, somando-se todas as equações, temos:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_k &= g \cdot q_2 + r_2 + g \cdot q_3 + r_3 + \ldots + g \cdot q_k + r_k + g \cdot q_{k+1} + r_{k+1} \\ &= g \cdot (q_2 + q_3 + \ldots + q_k + q_{k+1}) + r_2 + r_3 + \ldots + r_k + r_{k+1}. \end{aligned}$$

Simplificando-se a última equação:

$$r_1 + \cancel{r_2} + \cancel{r_3} + \ldots + \cancel{r_k} = g \cdot (q_2 + q_3 + \ldots + q_k + q_{k+1}) + \cancel{r_2} + \cancel{r_3} + \ldots + \cancel{r_k} + r_{k+1}$$

$$r_1 = g \cdot (q_2 + q_3 + \ldots + q_k + q_{k+1}) + r_{k+1}. \tag{7.11}$$

Assim, substituindo a equação (7.11) na equação (7.10):

$$f = g \cdot q_1 + g \cdot (q_2 + q_3 + \ldots + q_k + q_{k+1}) + r_{k+1}$$

$$f = g \cdot (q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_k + q_{k+1}) + r_{k+1}. \tag{7.12}$$

Uma vez que $\partial r_{k+1} < \partial g$ e $r_{k+1} \neq 0$, o par de polinômios fica determinado por:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_k + q_{k+1} \;\text{ e }\; r = r_{k+1},$$

em conformidade com o Teorema 7.1. Este procedimento pode ser feito de maneira mais prática com o *Método da Chave*, já empregado em números reais:

$$\begin{array}{r|l} f & g \\ \cline{2-2} \underline{-g\,q} & q \\ r & \end{array}$$

Fazendo sucessivas divisões, encontraremos o par (q, r) procurado. Considere f e g:

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i,\ \partial f = m \quad \text{e} \quad g = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i,\ \partial g = n.$$

Pelo Método da Chave, inicialmente escrevemos os polinômios dividendo e divisor na ordem decrescente das potências da indeterminada X:

$$\begin{array}{l|l} a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_0 & b_n X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_0 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Determinamos um par (q_1, r_1) tal que $r_1 = f - g \cdot q_1$, de forma que

$$q_1 = \frac{a_m}{b_n} X^{m-n},$$

para que o produto entre q e g produza um polinômio de mesmo grau de f (Teorema 3.1). Dessa forma:

$$\begin{array}{l|l} a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_0 & b_n X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_0 \\ \cline{2-2} -a_m X^m - a_m b_n^{-1} b_{n-1} X^{m-1} - \ldots - a_m b_n^{-1} b_0 X^{m-n} & \dfrac{a_m}{b_n} X^{m-n} \end{array}$$

Realizando as subtrações:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{a_m X^m} + a_{m-1}X^{m-1} + \ldots + a_0 & b_n X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_0 \\ \cline{2-2} \underline{\cancel{-a_m X^m} - a_m b_n^{-1} b_{n-1} X^{m-1} - \ldots - a_m b_n^{-1} b_0 X^{m-n}} & \dfrac{a_m}{b_n} X^{m-n} \\ (a_m - a_m b_n^{-1} b_{n-1}) X^{m-1} - \ldots + a_0 - (a_m b_n^{-1} b_0) X^{m-n} & \end{array}$$

Assim, é determinado um resto r_1:

$$r_1 = (a_m - a_m b_n^{-1} b_{n-1}) X^{m-1} + \ldots + a_0 - (a_m b_n^{-1} b_0) X^{m-n}.$$

Caso $\partial r_1 < \partial g$, então o par (q, r) está determinado por (q_1, r_1), caso contrário, devemos repetir este último passo determinando um novo par (q_2, r_2), onde

$$r_1 = g \cdot q_2 + r_2,$$

e retomando o Método da Chave até encontrarmos um polinômio resto com grau menor ao do polinômio g. Após isso, fazendo a soma de todos os polinômios quocientes encontrados, determinamos o polinômio quociente resultante e o último polinômio encontrado como resto é o polinômio resto resultante, tal qual visto na equação (7.12).

A seguir temos exemplos do Método da Chave para polinômios:

1) Dados os polinômios $f = 4X^4 + 3X^3 + 6X^2 + 2X - 1$ e $g = X^2 + 2X + 1$, queremos determinar um par (q, r) tal que $f = g \cdot q + r$. Efetuando a divisão pelo método da chave, temos:

$$\begin{array}{r|l} 4X^4 + 3X^3 + 6X^2 + 2X - 1 & X^2 + 2X + 1 \\ \cline{2-2} & 4X^2 \end{array}$$

determinamos um par (q_1, r_1) tal que:

$$r_1 = f - g \cdot q_1$$
$$q_1 = \frac{4X^4}{X^2} = 4X^2.$$

realizando o produto de q_1 por g e subsequente subtração de f, temos:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{4X^4} + 3X^3 + 6X^2 + 2X - 1 & X^2 + 2X + 1 \\ \cline{2-2} -\cancel{4X^4} - 8X^3 - 4X^2 & 4X^2 \\ \cline{1-1} -5X^3 + 2X^2 + 2X - 1 & \end{array}$$

Uma vez que $\partial r_1 > \partial g$, devemos determinar um segundo par (q_2, r_2) tal que:

$$r_1 = g \cdot q_2 + r_2.$$

Novamente, pelo Método da Chave:

$$q_2 = -5X$$

$$\begin{array}{r|l} -\cancel{5X^3} + 2X^2 + 2X - 1 & X^2 + 2X + 1 \\ +\cancel{5X^3} + 10X^2 + 5X & \overline{-5X} \\ \hline 12X^2 + 7X - 1 & \end{array}$$

$$r_2 = 12X^2 + 7X - 1.$$

O polinômio r_2 possui grau igual ao grau de g; seguimos com o Método da Chave:

$$r_2 = g \cdot q_3 + r_3 \;\text{ e }\; q_3 = 12.$$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{12X^2} + 7X - 1 & X^2 + 2X + 1 \\ -\cancel{12X^2} - 24X - 12 & \overline{12} \\ \hline -17X - 13 & \end{array}$$

Vemos que $\partial r_3 < \partial g$, o que indica que este é o polinômio resto resultante. Assim, fazendo:

$$q = q_1 + q_2 + q_3,$$

o par de polinômio (q, r) fica definido por:

$$q = 4X^2 - 5X + 12 \;\text{ e }\; r = -17X - 13.$$

2) Considere os polinômios $f = 15X^5 + 2X^4 + 6X^2 + 9X + 3$ e $g = 3X^2 + X + 3$. Podemos determinar o par de polinômios (q, r) tal que $f = g \cdot q + r$, utilizando o Método da Chave, como no exemplo anterior de maneira mais prática. Uma vez que cada resto cujo grau é maior ou igual ao grau do polinômio divisor g se torna um dividendo da próxima iteração e que o polinômio quociente q será o somatório dos polinômios quocientes parciais, podemos fazer todos os passos em um só Método da Chave de forma concisa:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{15X^5} + 2X^4 + 6X^2 + 9X + 3 & 3X^2 + X + 3 \\ \hline
-\cancel{15X^5} - 5X^4 + 15X^3 & 5X^3 - X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{71}{9} \\
r_1 = -\cancel{3X^4} + 21X^2 + 9X + 3 & q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = q \\
+\cancel{3X^4} + X^3 + 3X^2 & \\
r_2 = \cancel{X^3} + 24X^2 + 9X + 3 & \\
-\cancel{X^3} - \frac{1}{3}X^2 - X & \\
r_3 = \cancel{\frac{71}{3}X^2} + 8X + 3 & \\
-\cancel{\frac{71}{3}X^2} - \frac{71}{9}X - \frac{71}{3} & \\
r_4 = \frac{1}{9}X - \frac{62}{3} &
\end{array}
$$

Assim, o par (q, r) é determinado por:

$$q = 5X^3 - X^2 + \frac{1}{3}X + \frac{71}{9} \quad \text{e} \quad r = -\frac{1}{9}X - \frac{62}{3}.$$

3) Dados os polinômios $f = 6X^4 + 4X^2 + 4X + 2$ e $g = 2X^2 + X + 1$, podemos seguir o Método da Chave como visto no exemplo anterior de uma segunda maneira, também concisa, suprimindo a indeterminada X:

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{6} \quad 4 \quad 4 \quad 2 & 2 \quad 1 \quad 1 \\ \hline
-\cancel{6} \quad -3 \quad -1 & 3 \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{9}{4} \\
r_1 = -\cancel{3} \quad 3 \quad 4 \quad 2 & q_1 + q_2 + q_3 = q \\
\cancel{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2} & \\
r_2 = \cancel{\frac{9}{2}} + \frac{11}{2} + 2 & \\
-\cancel{\frac{9}{2}} - \frac{9}{4} - \frac{9}{4} & \\
r_3 = \frac{13}{4} - \frac{1}{4} &
\end{array}
$$

Para desenvolver desta maneira é recomendável que se alinhe coeficientes de mesma ordem para manter coerência nos cálculos e evitar equívocos. Assim, o par (q, r) é determinado por:

$$q = 3X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{9}{4} \quad \text{e} \quad r = -\frac{13}{4}X - \frac{1}{4}.$$

7.2. Outras Importantes Formas de Divisão

Na divisão de polinômios existem casos específicos que podem receber mais atenção. Um desses casos é quando o polinômio divisor é da forma $X-a$. Sejam os polinômios $f=\sum_{i=0}^{m} a_iX^i$ e $g=X-a$.

Temos que, uma vez que o grau de g é igual 1 e, pelo Teorema 7.1, $r\neq 0$, o Teorema 3.1 nos garante que $\partial r=0$. Isto é, r é um polinômio constante tal que $r=k$, com k sendo um número pertencente ao conjunto dos reais ($\mathbb{R}$), então $f=g\cdot q+r$ e, novamente, pelo Teorema 3.1, $\partial q=\partial f-1$, ou seja, $q=\sum_{i=0}^{m-1} b_iX^i$. Utilizando o método dos coeficientes a determinar, temos:

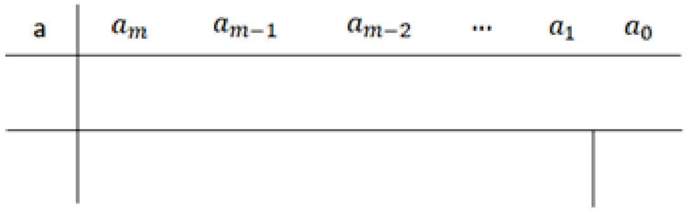
$$\begin{aligned} a_mX^m+a_{m-1}X^{m-1}+\ldots+a_1X+a_0 &= (b_{m-1}X^{m-1}+b_{m-2}X^{m-2}+\ldots+b_1X+b_0)(X-a)+k \\ &= b_{m-1}X^m+(b_{m-2}-ab_{m-1})X^{m-1}+\ldots+(b_1-ab_2)X^2+(b_0-ab_1)X+k-ab_0. \end{aligned}$$

Pela igualdade de polinômios temos:

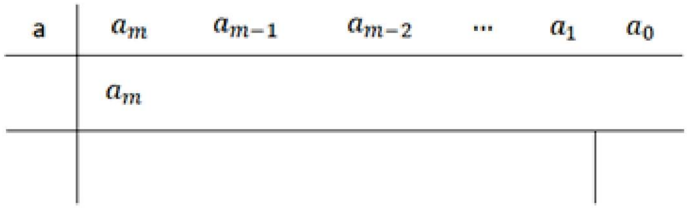
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_m &=& b_{m-1} \\ a_{m-1} &=& b_{m-2}-ab_{m-1} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ a_1 &=& b_0-ab_1 \\ a_0 &=& k-ab_0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b_{m-1} &=& a_m \\ b_{m-2} &=& a_{m-1}+ab_{m-1} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ b_0 &=& a_1+ab_1 \\ k &=& a_0+ab_0 \end{array}\right. \qquad (S_1)$$

O sistema (S_1) mostra os coeficientes do polinômio q e que a constante k, que corresponde ao polinômio resto, vale a_0+ab_0.

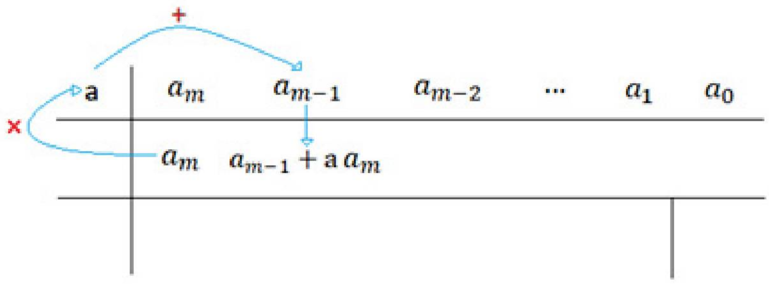
A partir do sistema foi criado um método de resolução de divisões quando o polinômio divisor é da forma $X-a$, conhecido como ***Dispositivo Prático de Briott-Ruffini***, desenvolvido por Charles Auguste Briott e Paolo Ruffini. Este dispositivo é semelhante ao Método da Chave com a indeterminada X suprimida. Inicialmente, temos na coluna em separado o termo independente do polinômio divisor, em seguida, na mesma linha, após o separador da esquerda, temos os coeficientes do polinômio dividendo.



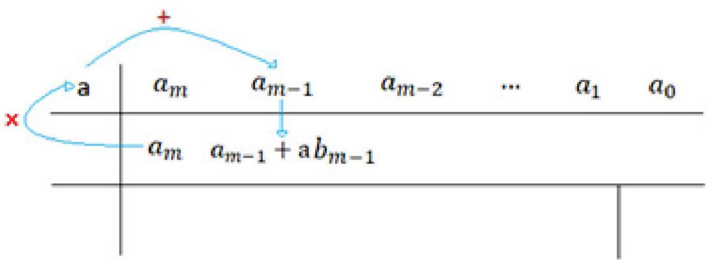
Devemos repetir na segunda linha o primeiro termo do polinômio dividendo:



Multiplica-se a_m pelo termo independente a e somamos com a_{m-1}:



Assim, o termo atual encontrado é $a_{m-1} + aa_m$. Pelo sistema (S_1) temos que $b_{m-1} = a_m$, então podemos fazer a substituição no dispositivo:



Ainda pelo sistema (S_1), vemos que $b_{m-2} = a_{m-1} + ab_{m-1}$, note que o primeiro e o segundo passo encontram, respectivamente, o primeiro e o segundo termos do polinômio quociente:

a	a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	...	a_1	a_0
	a_m	$a_{m-1} + \text{a}b_{m-1}$				
	b_{m-1}	b_{m-2}				

Os passos seguintes seguem multiplicando o termo atual pelo termo independente de g e somando com o próximo termo do polinômio dividendo até chegar ao último termo:

a	a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	...	a_1	a_0
	a_m	$a_{m-1} + \text{a}b_{m-1}$	$a_{m-2} + \text{a}b_{m-2}$			
	b_{m-1}	b_{m-2}				

a	a_m	a_{m-1}	a_{m-2}	...	a_1	a_0
	a_m	$a_{m-1} + \text{a}b_{m-1}$	$a_{m-2} + \text{a}b_{m-2}$	...	$a_1 + \text{a}b_1$	$a_0 + \text{a}b_0$
	b_{m-1}	b_{m-2}	b_{m-3}	...	b_0	k

Dessa forma, podemos usar o *Dispositivo Prático de Briott-Ruffini* em qualquer divisão de polinômios cujo divisor for da forma $X - a$. Seguem exemplos do uso do dispositivo:

1) Sejam os polinômios $f = 5X^4 - 6X^3 + 2X^2 + 7X - 4$ e $g = X - 1$, pelo *Dispositivo Prático de Briott-Ruffini*:

1	5	- 6	2	7	- 4
	5				

1	5	- 6	2	7	- 4
	5	5 - 6			
	5				

1	5	-6	2	7	-4
	5	5-6	-1+2		
	5	-1			

1	5	-6	2	7	-4
	5	5-6	-1+2	1+7	
	5	-1	1		

1	5	-6	2	7	-4
	5	5-6	-1+2	1+7	8-4
	5	-1	1	8	

ou, simplesmente,

1	5	-6	2	7	-4
	5	-1	1	8	4

Assim, o par (q, r) determinado na divisão de f por g é:

$$q = 5X^3 - X^2 + X + 8 \quad \text{e} \quad r = 4.$$

2) Considere os polinômios $f = 2X^5 + 3X^4 + 5X^3 + 40X^2 - 9X + 80$ e $g = X + 3$. Uma vez que o dispositivo leva em conta que o polinômio é da forma $X - a$, então, $g = X - (-3)$, portanto:

-3	2	3	5	40	-9	80
	2	-3	14	-12	27	-1

Dessa forma, o par (q, r) determinado na divisão de f por g é:

$$q = 2X^4 - 3X^3 + 14X^2 - 12X + 27 \ \text{ e } \ r = -1.$$

3) Dados os polinômios $f = 6X^4 - 3X^2 - 5$ e $g = X + 1$, para encontrar o par (q, r) de polinômios pelo *Dispositivo de Briott-Ruffini*, além de notar que o polinômio dividendo deve ser visto como $g = X - (-1)$, observamos que as potências ímpares da indeterminada X não aparecem no polinômio dividendo. Isso significa que seus coeficientes são nulos, portanto:

−1	6	0	−3	0	−5
	6	−6	3	−3	−2

Logo, o par (q, r) é determinado por:

$$q = 6X^3 - 6X^2 + 3X - 3 \ \text{ e } \ r = -2.$$

Outro caso específico na divisão de polinômios que podemos nos firmar é quando o polinômio divisor é da forma $g = bX - a$. Podemos aproximar este caso com o caso anterior, escrevendo o polinômio divisor $g = b\left(X - \frac{a}{b}\right)$. Neste caso ressalva-se que:

$$f = (bX - a) \cdot q + r \quad \Longrightarrow \quad f = b\left(X - \frac{a}{b}\right) \cdot q + r,$$

ou seja, utilizando o *Dispositivo de Briott-Ruffini*, o quociente encontrado deverá ser dividido por b para chegar ao quociente correto; já o polinômio resto estará determinado diretamente.

4) Sejam os polinômios $f = 12X^6 + 5X^5 + 4X^4 + 3X^3 + X^2 - 2X - 1$ e $g = 3X + 2$. Reescrevendo o polinômio divisor como $g = 3\left(X + \frac{2}{3}\right)$ e utilizando o *Dispositivo de Briott-Ruffini*:

$-\frac{2}{3}$	12	5	4	3	1	-2	-1
	12	-3	6	-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{11}{9}$	$\frac{5}{27}$

Dividindo o polinômio quociente encontrado por 3, temos que o par (q, r) de polinômios da divisão de f por g é determinado por:

$$q = 4X^5 - X^4 + 2X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{9}X - \frac{11}{27} \quad \text{e} \quad r = \frac{5}{27}.$$

5) Dados os polinômios $f = X^3 + X - 1$ e $g = 2X - 1$, temos:

$$g = 2X - 1 \implies g = 2\left(X - \frac{1}{2}\right) \implies f = 2\left(X - \frac{1}{2}\right) \cdot q + r.$$

$\frac{1}{2}$	1	0	1	-1
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{8}$

Assim, dividindo por 2 o polinômio quociente encontrado, determinamos o par (q, r):

$$q = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{4}X + \frac{5}{4} \quad \text{e} \quad r = -\frac{3}{8}.$$

Um terceiro caso a ser analisado é quando o polinômio divisor é da forma $g = (X - a)(X - b)$. Se quisermos determinar um par de polinômios (q, r) tal que:

$$f = (X - a)(X - b) \cdot q + r.$$

Dividindo-se f por $(X - a)$, temos os passos seguidos no *Dispositivo de Briott-Ruffini* visto anteriormente e determinamos um par de polinômios (q_1, r_1) tais que:

$$f = (X - a) \cdot q_1 + r_1 \implies r_1 = k_1, \text{ com } k_1 \text{ sendo constante.} \tag{7.13}$$

Fazendo a divisão de q_1 por $(X-b)$:

$$q_1 = (X-b)\cdot q_2 + r_2 \implies r_2 = k_2, \text{ com } k_2 \text{ sendo constante.} \tag{7.14}$$

é da mesma forma utilizada no
Sabendo que q_2 é da mesma forma utilizada no *Dispositivo de Briott-Ruffini*, podemos utilizá-lo novamente. Substituindo a equação (7.14) na equação (7.13):

$$\begin{aligned} f &= (X-a)\cdot[(X-b)\cdot q_2 + k_2] + k_1 \\ f &= (X-a)(X-b)\cdot q_2 + (X-a)\cdot k_2 + k_1. \end{aligned}$$

Portanto, quando o polinômio divisor for da forma $g = (X-a)(X-b)$, utilizamos o *Dispositivo de Briott-Ruffini* duas vezes consecutivas e o par (q, r) é determinado por $(q_2, (X-a)\cdot k_2 + k_1)$, ou seja, o polinômio quociente procurado é o último polinômio encontrado na utilização sucessiva do dispositivo e o polinômio resto procurado é o produto da segunda constante resultante no dispositivo com o primeiro polinômio utilizado no dispositivo, somado à constante anterior.

Expandindo o raciocínio anterior, para cada novo polinômio da forma $X-a$ que exista multiplicando no polinômio divisor, encontraremos uma nova constante k_n. Assim:

$$f = (X-a)(X-b)\ldots(X-w)(X-y)(X-z)\cdot q + r$$

$$q = q_n$$

$$r = k_n(X-a)(X-b)\ldots(X-w)(X-y) + (X-a)(X-b)\ldots(X-w) + \ldots + k_2(X-a) + k_1.$$

Vejamos alguns exemplos:

1) Sejam $f = X^4 + X^3 - 3X^2 + X - 2$ e $g = (X-1)(X+2)$. Dividindo o polinômio f por $(X-1)$, temos:

1	1	1	−3	1	−2
	1	2	−1	0	−2

Desta forma, $q_1 = X^3 + 2X^2 - X$ e $k_1 = -2$, então:

-1	1	2	-1	0
	1	1	-2	2

ou simplesmente

1	1	1	-3	1	-2
-1	1	2	-1	0	$-2 = k_1$
	1	1	-2	$2 = k_2$	
		q			

Como $k_2 = 2$ e $q_2 = X^2 + X - 2$, então o par (q, r) procurado é:

$$r = k_2(X-1) + k_1 = 2(X-1) - 2 = 2X - 4 \quad \text{e} \quad q = X^2 + X - 2.$$

2) Sejam $f = 3X^6 + 2X^5 + 4X^4 + X^3 - X^2 + 6X$ e $g = (X+2)(X+1)(X-1)$. Como visto no final do exemplo anterior, fazendo a divisão com apenas um *Dispositivo de Briott-Ruffini*:

-2	3	2	4	1	-1	6	0
-1							
1							

-2	3	2	4	1	-1	6	0
-1	3	-4	12	-23	45	-84	168
1							

-2	3	2	4	1	-1	6	0
-1	3	-4	12	-23	45	-84	168
1	3	-7	19	-42	87	-171	

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr}
-2 & 3 & 2 & 4 & 1 & -1 & 6 & 0 \\
\hline
-1 & 3 & -4 & 12 & -23 & 45 & -84 & \multicolumn{1}{|r}{168} \\
\hline
1 & 3 & -7 & 19 & -42 & 87 & \multicolumn{1}{|r}{-171} & \\
\hline
 & 3 & -4 & 15 & -27 & \multicolumn{1}{|r}{60} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|rrrrrrl}
-2 & 3 & 2 & 4 & 1 & -1 & 6 & 0 \\
\hline
-1 & 3 & -4 & 12 & -23 & 45 & -84 & \multicolumn{1}{|l}{168 = k_1} \\
\hline
1 & 3 & -7 & 19 & -42 & 87 & \multicolumn{1}{|l}{-171 = k_2} & \\
\hline
 & \multicolumn{4}{l}{\underbrace{3 \quad -4 \quad 15 \quad -27}_{q}} & \multicolumn{1}{|l}{60 = k_3} & &
\end{array}
$$

Assim, o par de polinômios (q, r) é determinado por:

$$r = 60(X + 2)(X + 1) - 171(X + 2) + 168 = 60X^2 + 9X - 54 \quad \text{e} \quad q = 3X^3 - 4X^2 + 15X - 27.$$

8. Função Polinomial em $\mathbb{R}$

Vimos que uma função f de um conjunto A em um conjunto B é uma regra que, a cada elemento x que pertence a A, associa um elemento $f(x)$ pertencente ao conjunto B, cujo nome é valor de f no elemento x [3]. Seja um polinômio qualquer $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$; iremos definir uma função $\overline{f}$, chamada função polinomial associada ao polinômio f, tal que:

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y \doteq \sum_{i=0}^{m} a_i x^i. \end{aligned}$$

A imagem de x pela função $\overline{f}$ será representada por $f(x)$. Dessa forma temos um símbolo para uma sequência real, representada por f, e outro para números reais obtidos através do polinômio f e de x, representado por $f(x)$. Dizemos que o número real $f(x)$ é o *valor da função polinomial* $\overline{f}$ *ao receber o valor* x; ou *o valor de* f *em* x. Vejamos alguns exemplos:

1) Considere o polinômio $f = X^3 + 5X^2 - 12X$. A função polinomial associada a ele é dada por:

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = x^3 + 5x^2 - 12x. \end{aligned}$$

Isso significa que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 5x^2 - 12x$. Dessa forma, podemos definir valores para $f(x)$ substituindo valores em x:

$$x = 0 \implies f(0) = 0^3 + 5 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 = 0$$

$$x = 3 \implies f(3) = 3^3 + 5 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 = 27 + 45 - 36 = 36$$

$$x = 5 \implies f(5) = 5^3 + 5 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 = 125 + 125 - 60 = 190.$$

2) Considere o polinômio $f = 7X^5 + 5X^4 - 7X^3 + X^2 - X + 4$. A função polinomial associada a ele é dada por:

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = 7x^5 + 5x^4 - 7x^3 + x^2 - x + 4. \end{array}$$

Conforme visto no exemplo anterior:

x	**f(x)**
-2	-78
0	4
1	9
2	254

8.1. Princípio da Identidade

Para uma função ser identicamente nula, isto é $f = 0$, é necessário e suficiente que todos seus coeficientes sejam nulos:

$$f(x) = 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Isso é facilmente verificável: seja $f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$; se todos seus coeficientes são nulos, então:

$$f = \sum_{i=0}^{m} 0X^i = 0X^m + 0X^{m-1} + \ldots + 0X + 0$$

$$f = 0$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \sum_{i=0}^{m} 0x^i = 0x^m + 0x^{m-1} + \ldots + 0x + 0 = 0 \end{array}$$

$$f(x) = 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

Reciprocamente, se uma função polinomial é identicamente nula, então o polinômio associado a esta função é o polinômio nulo. Para verificar esta afirmação, temos: se

$$f(x) = 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R},$$

então:

$$\begin{aligned}
x = x_1 \quad &\Longrightarrow \quad f(x_1) = 0 \\
x = x_2 \quad &\Longrightarrow \quad f(x_2) = 0 \\
&\vdots \\
x = x_{n-1} \quad &\Longrightarrow \quad f(x_{n-1}) = 0 \\
x = x_n \quad &\Longrightarrow \quad f(x_n) = 0.
\end{aligned}$$

Isso implica que:

$$f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_{n-1}) = f(x_n) = 0$$

$$\begin{cases}
0 = a_m x_1^m + a_{m-1} x_1^{m-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 \\
0 = a_m x_2^m + a_{m-1} x_2^{m-1} + \ldots + a_1 x_2 + a_0 \\
\vdots \\
0 = a_m x_{n-1}^m + a_{m-1} x_{n-1}^{m-1} + \ldots + a_1 x_{n-1} + a_0 \\
0 = a_m x_n^m + a_{m-1} x_n^{m-1} + \ldots + a_1 x_n + a_0
\end{cases} \qquad (\boldsymbol{S_2})$$

O sistema linear $(\boldsymbol{S_2})$ possui o número de n equações. Note que, cada x é distinto dos demais, então:

$$\begin{bmatrix}
x_1^m & x_1^{m-1} & \cdots & x_1 & 1 \\
x_2^m & x_2^{m-1} & \cdots & x_2 & 1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
x_{n-1}^m & x_{n-1}^{m-1} & \cdots & x_{n-1} & 1 \\
x_n^m & x_n^{m-1} & \cdots & x_n & 1
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, temos uma matriz de Vandermonde, pois cada coluna é uma potência da próxima. Então o determinante dessa matriz é dado por

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

e, como cada x é distinto, esse determinante é não-nulo. Portanto o sistema $(\boldsymbol{S_2})$ admite apenas a solução trivial. Assim,

$$a_m = a_{m-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = 0.$$

Logo, temos a reciprocidade provada:

$$f(x) = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0.$$

8.2. Funções Polinomiais Idênticas

Vimos anteriormente que a igualdade entre polinômios determina que todos seus termos de mesmo índice serão iguais:

Definição 8.1. Dados $f, g \in P$,

$$f = g \quad \Longleftrightarrow \quad a_i = b_i, \ \forall\, i \in \mathbb{N}.$$

Considerando as respectivas funções polinomiais,

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \overline{g}\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i x^i \end{array}$$

elas são idênticas, pois $a_i = b_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

$$\overline{f} = \overline{g} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = g(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Considere duas funções polinomiais $\overline{f}$ e $\overline{g}$ associadas aos polinômios f e g, respectivamente. Se $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então:

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \implies f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \quad \text{e} \quad g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \implies g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

$$\begin{aligned} f(x) = g(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R} &\implies \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ &\implies \sum_{i=0}^{m} a_i x^i - \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ &\implies \sum_{i=0}^{m} (a_i - b_i) x^i = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad (\boldsymbol{i}) \end{aligned}$$

Vemos em $(\boldsymbol{i})$ uma função polinomial identicamente nula; como visto na Definição 8.1, o polinômio associado a ela é o polinômio nulo, ou seja:

$$\sum_{i=0}^{m} (a_i - b_i) x^i = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \implies f - g = 0 \implies f = g. \qquad (\boldsymbol{ii})$$

Assim, pela Definição 8.1 e $(\boldsymbol{ii})$, o Princípio da Identidade de Funções Polinomiais fica definido:

Definição 8.2. $f = g$ se, e somente se, $f(x) = g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

8.3. Raízes de um Polinômio

Vimos que cada polinômio possui uma função polinomial associada a ele. Seja f um polinômio e $f(x)$ sua função associada. Dizemos que todo número real x que leva a função polinomial a ser nula é raiz deste polinômio, ou seja:

Definição 8.3. $x \in \mathbb{R}$ é *raiz* de f se, e somente se, $f(x) = 0$.

Exemplos. 1) Considere o polinômio e sua função associada a seguir: $f = 2X^2 - 10X + 12$ e

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 2x^2 - 10x + 12. \end{aligned}$$

Uma vez que o grau de do polinômio é $\partial f = 2$, sabemos que o mesmo possui duas raízes.

Para encontrá-las, temos:

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

$$2(x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$2(x-2)(x-3) = 0 \qquad (\boldsymbol{iii})$$

Para que a equação $(\boldsymbol{iii})$ seja verdadeira, basta que $x = 2$ ou $x = 3$. Portanto **2** e **3** são raízes de f.

2) Considere o polinômio e sua função associada a seguir: $f = X^3 + 5X^2 + 2X - 8$ e

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = x^3 + 5x^2 + 2x - 8. \end{aligned}$$

Uma vez que o grau de do polinômio é $\partial f = 3$, sabemos que o mesmo possui três raízes. Para encontrá-las, temos:

$$x^3 + 5x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x^3 + x^2 - 2x + 4x^2 + 4x - 8 = 0$$

$$x(x^2 + x - 2) + 4(x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x+4)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$(x+4)(x^2 + 2x - x - 2) = 0$$

$$(x+4)(x-1)(x+2) = 0 \qquad (\boldsymbol{iv})$$

Para que a equação $(\boldsymbol{iv})$ seja verdadeira, basta que $x = -4$ ou $x = -2$ ou $x = 1$. Portanto **-4**, **-2** e **1** são raízes de f.

8.4. Teorema do Resto

Na divisão de polinômios vimos que, dados dois polinômios f e g, com $g \neq 0$, existem polinômios q e r, tais que

$$f = g \cdot q + r.$$

Além disto, f, g, q e r possuem funções polinomiais associadas a eles. Se g for da forma $X - a$, pela Definição 8.3, a será sua raiz. Então:

$$f = (X - a) \cdot q + r$$

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = (x-a)\cdot q(x) + r(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = (x - a) \cdot q(x) + r(x).$$

Fazendo $x = a$:

$$f(a) = (a - a) \cdot q(a) + r(a)$$

$$f(a) = 0 \cdot q(a) + r(a)$$

$$f(a) = r(a).$$

Dessa forma,

Teorema 8.1. (Teorema do resto) *Dados um polinômio f e um número real a, $f(a)$ é igual ao resto da divisão de f pelo polinômio $X - a$.*

O Teorema 8.1 em conjunto com a Definição 8.3 nos levam a conclusão de que, dividindo-se um polinômio f por um polinômio da forma $X - a$, essa divisão será exata se, e somente se, a for raiz de f.

9. Equações Algébricas

Definimos *equação polinomial* ou *equação algébrica* todo polinômio redutível à forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim como visto na Definição 8.3, resolver esta equação equivale a encontrar as raízes do polinômio associado a essa equação. Neste caso, queremos determinar as raízes complexas de um polinômio $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, \ldots)$.

A determinação das raízes complexas de equações algébricas com coeficientes reais se baseia no ***Teorema Fundamental da Álgebra*** que enuncia o seguinte:

Teorema 9.1. (Teorema Fundamental da Álgebra) *Toda equação algébrica de grau $n \geq 1$ admite, ao menos, uma raiz complexa.*

Ou seja,

$$\forall\ f \in P,\ \exists\ \alpha \in \mathbb{C};\ f(\alpha) = 0. \tag{9.1}$$

A demonstração do Teorema 9.1, a qual não será apresentada por fugir ao escopo deste trabalho, se baseia em funções polinomiais com domínio e imagem sendo subconjuntos do conjunto dos números complexos; observa-se um círculo de raio r no *Plano de Argand-Gauss* correspondente ao domínio, aumenta-se esse raio e observa-se se a curva no respectivo plano, a qual corresponde à imagem, passa pela origem.

9.1. Decomposição de Polinômios

Podemos escrever um polinômio f de grau n como o produto de seu coeficiente dominante a_n por n fatores de polinômios de grau 1 da forma $X - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{C}$, ou seja, dado um polinômio e sua função polinomial associada,

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

temos a decomposição:

$$f = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\ldots(X - \alpha_n) \quad \text{e} \quad f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n). \tag{9.2}$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

Para a demonstração, vamos expandir o entendimento da divisão de polinômios quaisquer por polinômios da forma $X - a$ e do Teorema 8.1; ambos os casos foram demonstrados para $a \in \mathbb{R}$, contudo, as definições continuam valendo para $a \in \mathbb{C}$.

Primeiramente, pelo Teorema 9.1, temos

$$\exists\ \alpha_1 \in \mathbb{C} \mid f(\alpha_1) = 0;$$

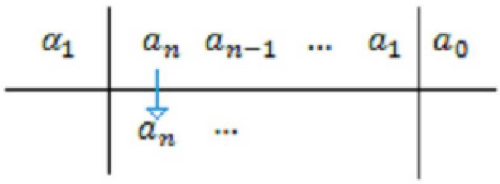
pela divisão de polinômios, temos que

$$f(x) \text{ é divisível por } x - \alpha_1,$$

assim,

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdot q_1(x), \tag{9.3}$$

onde, pelo Teorema 3.1, $q_1(x)$ é uma função polinomial de grau $n - 1$, cujo coeficiente dominante é a_n, como pode ser visto pelo *Dispositivo de Briott-Ruffini*:



Aplicando novamente o Teorema 9.1, agora para o polinômio q_1:

$$\exists\ \alpha_2 \in \mathbb{C} \mid q_1(\alpha_2) = 0 \implies q_1(x) \text{ é divisível por } x - \alpha_2 \implies q_1(x) = (x - \alpha_2) \cdot q_2(x).$$

$$q_1(x) = (x - \alpha_2) \cdot q_2(x), \tag{9.4}$$

onde $q_2(x)$ é uma função polinomial de grau $n - 2$, com coeficiente dominante a_n.

O Teorema 9.1 é aplicado até que se chegue a uma função polinomial constante e igual a a_n, de forma que podemos montar um sistema com as funções polinomiais (9.3), (9.4) e as demais:

$$\begin{cases} f(x) &= (x-\alpha_1)\cdot q_1(x) \\ q_1(x) &= (x-\alpha_2)\cdot q_2(x) \\ & \vdots \\ q_{n-1}(x) &= (x-\alpha_n)\cdot a_n. \end{cases}$$

Substituindo cada uma das funções de forma recursiva, da última até a primeira:

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Podemos provar também que esta decomposição é única para cada polinômio: supondo que a decomposição não seja única, temos:

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n), \tag{9.5}$$

$$f(x) = a_n(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n). \tag{9.6}$$

Por (9.5), temos que cada um dos α_i são raízes de $f(x)$. Tomando um destes ao acaso e substituindo em (9.6), temos:

$$f(\alpha_1) = a_n(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\ldots(\alpha_1-\beta_n),$$

mas como $f(\alpha_1) = 0$,

$$a_n(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)\ldots(\alpha_1-\beta_n) = 0. \tag{9.7}$$

Sabemos que (9.7) será nula se algum $\beta_j = \alpha_1$, pois $a_n \neq 0$. Digamos, sem perda de generalidade, que $\beta_1 = \alpha_1$. Repetindo o passo anterior, tomando outro α_i, temos:

$$f(\alpha_2) = a_n(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)\ldots(\alpha_2-\beta_n) \ \text{ e } \ f(\alpha_2) = 0,$$

isto é,

$$a_n(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)\ldots(\alpha_2 - \beta_n) = 0. \tag{9.8}$$

Semelhante a (9.6), em (9.7) teremos algum $\beta_k = \alpha_2$, que podemos dizer, por simplicidade, $\beta_2 = \alpha_2$.

Dessa forma, teremos igualdades estabelecidas de modo que

$$\exists\ \beta_j \mid \alpha_i = \beta_j,$$

o que nos leva a conclusão de que na verdade (9.4) e (9.5) são decomposições iguais.

Portanto, *a decomposição de polinômios em fatores do 1º grau é única para cada polinômio.*

9.2. Multiplicidade de Raízes

Vimos que todo polinômio pode ser decomposto de forma única em fatores do 1º grau:

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n);$$

cada um dos α_i podem ser distintos entre si ou podemos ter um número de raízes iguais, uma vez que os polinômios $f, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ podem ter raízes iguais. Digamos que um dos números complexos α se repita p vezes:

$$f(x) = a_n\underbrace{(x-\alpha)(x-\alpha)\ldots(x-\alpha)}_{p \text{ vezes}}(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

desta forma, podemos reescrever a decomposição de maneira suprimida

$$f(x) = a_n(x - \alpha)^p(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n).$$

Definição 9.1. Dizemos que α é *raiz múltipla* de $f(x)$, com *multiplicidade* p, se

$$f(x) = a_n(x - \alpha)^p \cdot q(x).$$

O número complexo que aparece apenas uma vez possui **multiplicidade 1** e é chamado de **raiz simples**. Vejamos alguns exemplos:

1) Considere a equação algébrica $x^4 - 3x^3 - 3 + 11x - 6 = 0$. Seu polinômio associado é dado por

$$f = X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 11X - 6.$$

Uma vez que a soma de seus coeficientes é nula, temos que 1 é uma das quatro raízes desta função, o que significa que esta é divisível por $X - 1$. Pelo *Dispositivo de Briott-Ruffini*:

1	1	−3	−3	11	−6
1	1	−2	−5	6	0
	1	−1	−6	0	

Caso fizéssemos a divisão mais uma vez, encontraríamos um resto diferente de 0. Portanto, 1 é raiz de multiplicidade 2. Os coeficientes do último polinômio divisor são vistos na última linha, então podemos reescrever a equação inicial:

$$\begin{aligned} f &= (X-1)\cdot q_1 \\ q_1 &= (X-1)\cdot q_2 \\ q_2 &= X^2 - X - 6 \\ f &= (X-1)^2 \cdot q_2. \end{aligned}$$

Dessa forma, a função polinomial associada é

$$f(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2 - x - 6) = (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (x-3).$$

Assim, as raízes da equação algébrica são 1, -2 e 3, sendo que 1 é de multiplicidade 2, -2 e 3 são raízes simples.

2) Seja a equação algébrica $x^3 - 10x^2 + 29x - 20 = 0$. Seu polinômio associado é

$$f = X^3 - 10X^2 + 29X - 20,$$

assim:

$$X^3 - 10X^2 + 29X - 20$$

$$X^3 - 5X^2 - 5X^2 + 25X + 4X - 20$$

$$X^2(X-5) - 5X(X-5) + 4(X-5)$$

$$(X^2 - 5X + 4)(X-5)$$

$$(X^2 - X - 4X + 4)(X-5)$$

$$(X(X-1) - 4(X-1))(X-5)$$

$$(X-1)(X-4)(X-5).$$

Portanto, a equação algébrica pode ser decomposta em

$$(x-1)(x-4)(x-5) = 0.$$

Logo, as raízes da equação algébrica são 1, 4 e 5, sendo que todas são raízes simples.

3) Dada a equação algébrica $3x^3 + 9x^2 + 9x + 3 = 0$, sabendo que seu polinômio associado é $f = 3X^3 + 9X^2 + 9X + 3$, temos:

$$3X^3 + 9X^2 + 9X + 3$$

$$3(X^3 + 3X^2 + 3X + 1)$$

$$3(X^3 + X^2 + 2X^2 + 2X + X + 1)$$

$$3(X^2(X+1) + 2X(X+1) + X + 1)$$

$$3(X^2 + 2X + 1)(X+1)$$

$$3(X^2 + X + X + 1)(X+1)$$

$$3(X(X+1) + X + 1)(X+1)$$

$$3(X+1)(X+1)(X+1)$$

$$3(X+1)^3.$$

Portanto, a equação algébrica pode ser reescrita como

$$3(x+1)^3 = 0.$$

Assim, -1 é raiz de multiplicidade 3.

4) Considere a equação algébrica $x^3 - 12x^2 + 36X = 0$. Seu polinômio associado é dado por

$$f = X^3 - 12X^2 + 36X.$$

Podemos reescrevê-lo:

$$X(X^2 - 12X + 36)$$
$$X(X^2 - 2X \cdot 6 + 6^2)$$
$$X(X-6)^2.$$

Desta forma, $x(x-6)^2 = 0$. Teremos que 0 é raiz simples e 6 é raiz de multiplicidade 2.

Vimos anteriormente que todo polinômio, e por consequência toda equação algébrica, possui um número de raízes igual ao grau do polinômio e vimos que as raízes têm multiplicidade; assim, podemos chegar a seguinte proposição:

Proposição 9.1. *Toda equação algébrica de grau n admite, no máximo, n raízes distintas.*

9.3. Relação entre os Coeficientes e as Raízes de uma Equação Algébrica

Sabemos que toda equação algébrica pode ser escrita de duas formas:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$
$$a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n) = 0.$$

Assim, temos a identidade:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n). \quad (9.9)$$

É possível estabelecermos uma relação entre os coeficientes da equação e suas raízes. Se efetuarmos os produtos do segundo membro da identidade (9.9), teremos:

$$a_n(x^2 - \alpha_2 x - \alpha_1 x + \alpha_1\alpha_2)(x - \alpha_3)\cdots(x - \alpha_n)$$

$$a_n(x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2)(x - \alpha_3)\cdots(x - \alpha_n)$$

$$a_n(x^3 - \alpha_3 x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3 x + \alpha_1\alpha_2 x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3)\cdots(x - \alpha_n)$$

$$a_n[x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3]\cdots(x - \alpha_n),$$

isto é,

$$a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\cdots(x - \alpha_n) =$$
$$a_n\left[x^n - \left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\right)x^{n-1} + \left(\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j\right)x^{n-2} - \left(\sum_{i<j<k}\alpha_i\alpha_j\alpha_k\right)x^{n-3} + \ldots + (-1)^n(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)\right].$$

Substituindo na identidade (9.9), uma vez que para duas equações serem iguais seus coeficientes de termos de mesma potência devem ser iguais, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} a_n & = & a_n \\ a_{n-1} & = & -a_n\left(\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\right) \\ a_{n-2} & = & a_n\left(\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j\right) \\ & \vdots & \\ a_0 & = & a_n(-1)^n(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n) \end{cases}$$

Chegamos então às seguintes relações:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i & = & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \displaystyle\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j & = & \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ a_{n-2} & = & a_n \left(\displaystyle\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j\right) \\ & \vdots & \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n & = & (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

As relações acima são conhecidas como ***Relações de Girard***. Vejamos algumas aplicações:

1) Considere a equação algébrica $x^2 - 11x + 30 = 0$. Uma vez que o grau da equação é 2, sabemos que temos duas raízes complexas, distintas ou não. Pelas *Relações de Girard*, temos:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{-11}{1} = 11$$
$$\alpha_1\alpha_2 = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n} = (-1)^2 \cdot \frac{30}{1} = 30.$$

Queremos dois números tais que a soma entre eles dê 11 e seu produto seja 30, dessa forma, as raízes da equação são:

$$\alpha_1 = 5 \ \text{ e } \ \alpha_2 = 6.$$

2) Dada a equação $x^3 + 5x^2 - 17x - 21 = 0$, sabendo que -1 e 3 são raízes simples, encontre a terceira raiz da equação. Pelas relações vistas, temos:

$$\begin{aligned} -1 + 3 + \alpha_3 &= -\frac{5}{1} = -5 \\ (-1)\cdot 3 + (-1)\cdot\alpha_3 + 3\cdot\alpha_3 &= \frac{17}{1} = -17 \\ (-1)\cdot 3\cdot\alpha_3 &= -\frac{-21}{1} = 21. \end{aligned}$$

Podemos utilizar qualquer uma das três equações para encontrar a raiz que falta, assim:

$$\alpha_3 = -7.$$

3) Sabendo que -2, 4 e 5 são raízes de uma equação, sendo que -2 possui multiplicidade 2, encontre duas das possíveis equações. Como temos três números, sendo um deles com multiplicidade 2, sabemos que a possível equação possui grau 4. Então:

$$\begin{aligned}
&(x+2)^2(x-4)(x-5) = 0\\
&(x^2+4x+4)(x-4)(x-5) = 0\\
&(x^3-12x-16)(x-5) = 0\\
&x^4-5x^3-12x^2+44x+80 = 0.
\end{aligned}$$

Assim, duas possíveis equações são:

$$x^4-5x^3-12x^2+44x+80 = 0 \;\text{ e }\; 2x^4-10x^3-24x^2+88x+160 = 0.$$

Podemos resolver esse tipo de questão com as relações: para $a_4 = 1$:

$$\begin{aligned}
&-2-2+4+5 = -a_3 \implies a_3 = -5\\
&(-2)\cdot(-2)+(-2)\cdot 4+(-2)\cdot 5+(-2)\cdot 4+(-2)\cdot 5+4\cdot 5 = a_2 \implies a_2 = -12\\
&(-2)\cdot(-2)\cdot 4+(-2)\cdot(-2)\cdot 5+(-2)\cdot 4\cdot 5+(-2)\cdot 4\cdot 5 = -a_1 \implies a_1 = 44\\
&(-2)\cdot(-2)\cdot 4\cdot 5 = a_0 \implies a_0 = 80,
\end{aligned}$$

então,

$$x^4-5x^3-12x^2+44x+80 = 0.$$

Para $a_4 = 2$:

$$-2 - 2 + 4 + 5 = -\frac{a_3}{2} \implies a_3 = -10$$
$$(-2)\cdot(-2) + (-2)\cdot 4 + (-2)\cdot 5 + (-2)\cdot 4 + (-2)\cdot 5 + 4\cdot 5 = \frac{a_2}{2} \implies a_2 = -24$$
$$(-2)\cdot(-2)\cdot 4 + (-2)\cdot(-2)\cdot 5 + (-2)\cdot 4\cdot 5 + (-2)\cdot 4\cdot 5 = -\frac{a_1}{2} \implies a_1 = 88$$
$$(-2)\cdot(-2)\cdot 4\cdot 5 = \frac{a_0}{2} \implies a_0 = 160,$$

então,

$$2x^4 - 10x^3 - 24x^2 + 88x + 160 = 0.$$

4) Determine as raízes da equação $x^5 - x^4 - 29x^3 + 45x^2 + 216x - 432 = 0$, sabendo que uma das raízes tem multiplicidade 3 e outra tem multiplicidade 2.

A equação possui grau 5, portanto sabemos que são cinco raízes. Contudo, uma das raízes tem multiplicidade 3 e a outra 2. Definimos então:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \\ \alpha_4 = \alpha_5. \end{cases}$$

É salutar montarmos as relações da seguinte forma:

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_4 = 1 \\ 3\alpha_1^2 + 6\alpha_1\alpha_4 + \alpha_4^2 = -29 \\ \alpha_1^3 + 6\alpha_1^2\alpha_4 + 3\alpha_1\alpha_4^2 = -45 \\ 2\alpha_1^3\alpha_4 + \alpha_1^2\alpha_4^2 = 216 \\ \alpha_1^3\alpha_4^2 = 432. \end{cases}$$

A quinta relação pode ser utilizada fatorando o termo da esquerda:

$$\alpha_1^3\alpha_4^2 = 2^4 3^3 = 3^3 4^2.$$

Essa igualdade nos leva a duas possíveis soluções:

$$\alpha_1 = 3, \alpha_4 = 4 \ \text{ ou } \ \alpha_1 = 3, \alpha_4 = -4.$$

Uma vez que temos certeza do valor de α_1, podemos utilizar a primeira relação para definirmos a solução:

$$3 \cdot 3 + 2\alpha_4 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_4 = -4.$$

Logo, as raízes da equação são:

$$\alpha_1 = 3 \ \text{ e } \ \alpha_4 = -4.$$

9.4. Raízes não Reais

Vimos alguns casos de raízes complexas inteiras e nulas. No caso de raízes não reais, temos que as mesmas terão a forma $a + bi$, em que a é a parte real e b a parte imaginária. No caso em que tivermos raízes desta forma, o seu conjugado $a - bi$ também será raiz da equação algébrica. Enunciamos e provamos este resultado a seguir:

Teorema 9.2. (Teorema das raízes não reais) *Toda equação algébrica com coeficientes reais que admite como raiz um número não real $a + bi$, também admite seu conjugado $a - bi$ como raiz.*

Demonstração. Considere uma equação algébrica $f(x) = 0$ e suponha que o número complexo $a + bi$, com $b \neq 0$, seja raiz desta equação. Queremos verificar que o complexo conjugado $a - bi$ também é raiz da equação. Caso seja, dizemos que $f(x)$ é divisível por $x - (a - bi)$. Faremos a divisão de $f(x)$ por $[x - (a + bi)][x - (a - bi)]$, então:

$$f(x) = [x - (a + bi)][x - (a - bi)] \cdot q(x) + r(x),$$

e, por hipótese, temos que $f(a + bi) = 0$; isto implica, pelo Teorema 8.1, que:

$$r(a + bi) = 0.$$

Uma vez que a equação do divisor por $[x-(a+bi)][x-(a-bi)]$ tem grau 2, o grau de $r(x)$ tem grau menor que 2, portanto:

$$r(x) = cx + d$$

$$r(a+bi) = c(a+bi) + d = 0$$

$$ca + cbi + d = 0$$

$$ca + d + cbi = 0.$$

Pela igualdade de números complexos, a parte real deve ser nula e a parte imaginária também:

$$\begin{cases} ca + d = 0 \\ cb = 0. \end{cases}$$

Novamente, por hipótese, temos que $b \neq 0$, dessa forma:

$$cb = 0, b \neq 0 \implies c = 0$$

$$ca + d = 0, c = 0 \implies 0 + d = 0 \implies d = 0.$$

Assim,

$$r(x) = cx + d = 0x + 0 = 0.$$

Logo, $f(x)$ é divisível por $[x-(a+bi)][x-(a-bi)]$, por consequência, também é divisível por $[x-(a-bi)]$. $\square$

Imediatamente decorre que:

O número de raízes não reais de uma equação algébrica de coeficientes reais é par.

Caso uma equação algébrica de coeficientes reais tenha grau ímpar, a mesma admite ao menos uma raiz real.

Outra forma de provar este teorema pode ser feita usando conhecimentos em números complexos, como a seguir:

Demonstração. Novamente, temos por hipótese que o número $Z = a+bi$ é raiz da equação algébrica $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, isto é:

$$f(Z) = a_nZ^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \ldots + a_2Z^2 + a_1Z + a_0 = 0. \tag{9.10}$$

Queremos provar que o conjugado de Z, denotado por $\overline{Z} = a - bi$, também é raiz da equação. Aplicando o conjugado dos dois lados da equação (9.10), temos:

$$\overline{a_nZ^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \ldots + a_2Z^2 + a_1Z + a_0} = \overline{0}.$$

A propriedade de soma de conjugado de números complexos nos diz que $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$, então:

$$\overline{a_nZ^n} + \overline{a_{n-1}Z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_2Z^2} + \overline{a_1Z} + \overline{a_0} = \overline{0}.$$

Agora aplicamos a propriedade do produto de conjugados: $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$, portanto:

$$\overline{a_n}\overline{Z^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{Z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_2}\overline{Z^2} + \overline{a_1}\overline{Z^1} + \overline{a_0} = \overline{0}.$$

Números reais são aqueles cuja parte imaginária é nula, portanto, o conjugado de um número real é ele mesmo. Como os coeficientes são todos reais, temos:

$$a_n\overline{Z}^n + a_{n-1}\overline{Z}^{n-1} + \ldots + a_2\overline{Z}^2 + a_1\overline{Z}^1 + a_0 = 0.$$

Assim, $f(\overline{Z}) = 0$. □

9.5. Pesquisa de Raízes Racionais

Um caso em particular para a pesquisa de raízes de uma equação polinomial diz respeito às equações com coeficientes inteiros. Considere uma equação algébrica de coeficientes inteiros:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Partindo da hipótese que $\frac{p}{q}$ seja uma fração irredutível e que seja raiz da equação, então:

$$a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \ldots + a_2(\frac{p}{q})^2 + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Multiplicando esta equação por q^n, temos:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0, \tag{9.11}$$

logo,

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} = -a_0q^n,$$

o que implica:

$$p(a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_2pq^{n-2} + a_1q^{n-1}) = -a_0q^n. \tag{9.12}$$

Uma vez que os coeficientes da equação são números inteiros e p e q também são inteiros, o membro da esquerda na equação (9.12) é divisível por p, pois o mesmo está multiplicado por este fator. Analogamente, o membro da direita também é divisível por p, isto é, a_0q^n é divisível por p. Porém, por hipótese, $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível, ou seja, p e q são primos entre si. Dessa forma, concluímos que a_0 é múltiplo de p.

Por outro lado, voltando à equação (9.11), podemos seguir outro caminho:

$$a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_2p^2q^{n-2} + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = -a_np^n,$$

donde:

$$q(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}) = -a_np^n. \tag{9.13}$$

Novamente, como os coeficientes da equação são números inteiros e p e q também são inteiros, o membro da esquerda na equação (9.13) é divisível por q, pois o mesmo está multiplicado por este fator. Analogamente, o membro da direita também é divisível por q, isto é, $a_n p^n$ é divisível por q. Porém, por hipótese, $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível. Chegamos a conclusão de que a_n é múltiplo de q.

Portanto, fica provado, pela discussaão acima, o ***Teorema das Raízes Racionais***:

Teorema 9.3. (Teorema das raízes racionais) *Se $\frac{p}{q}$ é um número racional irredutível e raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Vale ressaltar que este teorema não garante que a equação polinomial possui raiz racional e nem que encontraremos alguma raiz por este método, mas, caso exista, podemos identificá-las. Decorre, também deste teorema, que:

Se o termo dominante (a_n) for igual a 1, então as raízes racionais da equação, caso existam, são números inteiros.

Toda raiz inteira de uma equação algébrica de coeficientes inteiros é divisor de a_0.

Seguem alguns exemplos:

1) Determinar as raízes da equação $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$. Pelo Teorema 9.3, como a equação possui somente coeficientes inteiros, se $\frac{p}{q}$ for uma raiz, p será divisor de $a_0 = 2$ e q será divisor do termo dominante $a_3 = 3$. Então:

$$\text{divisores de } 2 = \{-2, -1, 1, 2\} \quad \longrightarrow \quad \text{possíveis valores de } p,$$

$$\text{divisores de } 3 = \{-3, -1, 1, 3\} \quad \longrightarrow \quad \text{possíveis valores de } q.$$

Agora montamos as combinações $\dfrac{p}{q}$ para testarmos quais são raízes:

$$\frac{p}{q} = \left\{-2, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 2\right\}.$$

Verifiquemos qual ou quais desses valores são raízes: se $x = -2$, então

$$3\dot{(}-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 2 = 0.$$

Portanto $\mathbf{-2}$ é raiz. Se $x = -1$, então

$$3 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) + 2 = 8 \neq 0.$$

Portanto -1 não é raiz. Se $x = -\dfrac{2}{3}$, então

$$3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 7 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = \frac{20}{3} \neq 0.$$

Portanto $-\dfrac{2}{3}$ não é raiz. Se $x = -\dfrac{1}{3}$, então

$$3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 7 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = \frac{40}{9} \neq 0.$$

Portanto $-\dfrac{1}{3}$ não é raiz. Se $x = \dfrac{1}{3}$, então

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 2 = 0.$$

Portanto $\mathbf{\dfrac{1}{3}}$ é raiz. Se $x = \dfrac{2}{3}$, então

$$3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + 2 = -\frac{8}{9} \neq 0.$$

Portanto $\frac{2}{3}$ não é raiz. Se $x = 1$, então

$$3 \cdot (1)^3 + 2 \cdot (1)^2 - 7 \cdot (1) + 2 = 0.$$

Portanto **1** é raiz.

Uma vez que a equação é de grau 3, a mesma possui três raízes e não é necessário o teste com o valor $x = 2$. Portanto, as raízes da equação são: $\left\{-2, \frac{1}{3}, 1\right\}$.

2) Considere a equação $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0$, determine as raízes desta equação. Pelo Teorema 9.3:

$$\begin{aligned} \text{divisores de } 20 = \{\pm 20, \pm 10, \pm 5, \pm 4, \pm 2, \pm 1\} &\longrightarrow \text{possíveis valores de } p, \\ \text{divisores de } 1 = \{\pm 1\} &\longrightarrow \text{possíveis valores de } q. \end{aligned}$$

Então:

$$\frac{p}{q} = \{\pm 20, \pm 10, \pm 5, \pm 4, \pm 2, \pm 1\}.$$

Verificação das possíveis raízes: se $x = -20$, então

$$(-20)^3 - 8 \cdot (-20)^2 + 21 \cdot (-20) - 20 = -11640 \neq 0.$$

Portanto, -20 não é raiz. Se $x = 20$, então

$$(20)^3 - 8 \cdot (20)^2 + 21 \cdot (20) - 20 = 4821 \neq 0.$$

Portanto, 20 não é raiz. Se $x = -10$, então

$$(-10)^3 - 8 \cdot (-10)^2 + 21 \cdot (-10) - 20 = -2030 \neq 0.$$

Portanto, -10 não é raiz. Se $x = -5$, então

$$(-5)^3 - 8 \cdot (-5)^2 + 21 \cdot (-5) - 20 = -450 \neq 0.$$

Portanto, -5 não é raiz. Se $x = 5$, então

$$(5)^3 - 8 \cdot (5)^2 + 21 \cdot (5) - 20 = 10 \neq 0.$$

Portanto, 5 não é raiz. Se $x = -4$, então

$$(-4)^3 - 8 \cdot (-4)^2 + 21 \cdot (-4) - 20 = -296 \neq 0.$$

Portanto, -4 não é raiz. Se $x = 4$, então

$$(4)^3 - 8 \cdot (4)^2 + 21 \cdot (4) - 20 = 0.$$

Portanto, 4 é raiz. Se $x = -1$, então

$$(-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2 + 21 \cdot (-1) - 20 = -50 \neq 0.$$

Portanto, -1 não é raiz. Se $x = 1$, então

$$(1)^3 - 8 \cdot (1)^2 + 21 \cdot (1) - 20 = -6 \neq 0.$$

Portanto, 1 não é raiz.

Podemos utilizar o *Dispositivo de Briott-Ruffini* para diminuir o grau da equação. Como a equação resultante será de grau 2, as duas raízes desta última serão raízes da equação original:

4	1	−8	21	20
	1	−4	5	0

Dessa forma, as raízes que faltam serão raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Assim, as raízes da equação são $\{4, 2 + i, 2 - i\}$.

3) Sabendo que 2 e $3+2i$ são raízes de uma equação de grau 4, encontre as outras duas raízes sabendo que uma das raízes é inteira e seu termo dominante e termo independente são, respectivamente, 1 e 8.

Pelo Teorema 9.2, se $3+2i$ é raiz da equação, seu conjugado também é, portanto, $3-2i$ é uma das raízes. Para determinar a última raiz, podemos escrever a equação na forma fatorada e expandi-la:

$$1(x-2)[x-(3+2i)][x-(3-2i)](x-x_4)=0$$

$$x^4-(8+x_4)x^3+(25+8x_4)x^2-(26+25x_4)x+26x_4=0.$$

Uma vez que o termo independente é 8, então:

$$26x_4=8 \implies x_4=\frac{4}{13}.$$

Logo, as raízes da equação são $\{\frac{4}{13},2,3+2i,3-2i\}$.

9.6. Pesquisa de Raízes Reais

Sabemos que se um número complexo é raiz de uma equação algébrica constituída de coeficientes reais, o conjugado desse número também será raiz, e vimos também um método para indicar possíveis raízes racionais utilizando o termo dominante e o termo independente. Vale ressaltar que este último método, apesar de não garantir que haja raízes racionais, fornece uma ferramenta que permite encontrá-las, caso existam.

Não é possível a determinação de raízes irracionais de maneira precisa; em geral, usamos *aproximações* que podem ou não auxiliar em sua busca. Um dos métodos de aproximação é o ***Método da Bisseção***. Este método consiste em escolher um intervalo $[a,b]$ do domínio da função algébrica, de forma que a função nos limites do intervalo tenha sinais opostos. Esta escolha se deve ao fato de que, por terem sinais opostos, o gráfico da função passa pelo eixo das abscissas, ou seja, existe pelo menos uma raiz real neste intervalo, como vemos nos gráficos das Figuras 9.1 e 9.2.

9.7. Teorema de Bolzano-Cauchy

O *Método da Bisseção* nos leva ao Teorema de Bolzano-Cauchy:

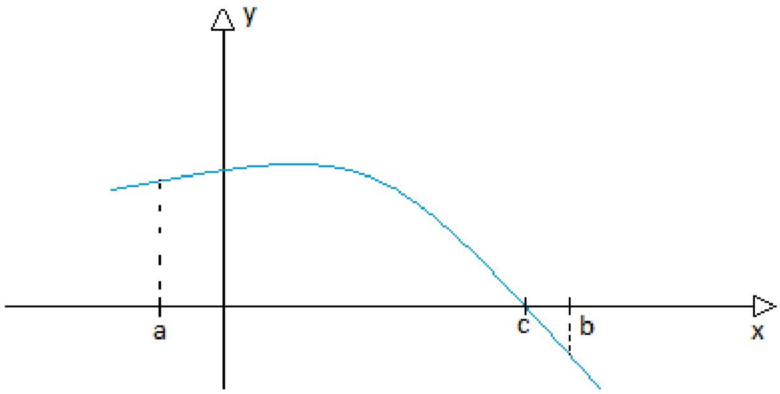


Figura 9.1: Intervalo $]a, b[$ com $f(a)$ e $f(b)$ de sinais opostos e uma raiz real

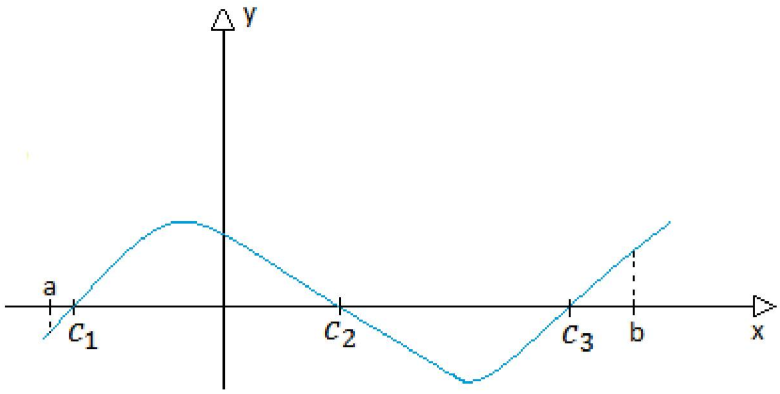


Figura 9.2: Intervalo $]a, b[$ com $f(a)$ e $f(b)$ de sinais opostos e três raízes reais

Teorema 9.4. (Teorema de Bolzano-Cauchy) *Seja* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua no intervalo* $[a, b]$ *tal que* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Então existe* $c \in\ ]a, b[$ *tal que* $f(c) = 0$.

Note que a condição de $f(a)$ e $f(b)$ terem sinais opostos é suficiente para a existência de uma raiz no intervalo $]a, b[$, mas não é necessária, uma vez que se a função tiver valores com mesmo sinal em um intervalo, ainda poderemos ter uma ou mais raízes neste mesmo intervalo, como visto nos gráficos das Figuras 9.3 e 9.4.

Uma vez que se define o intervalo $]a, b[$, com $f(a)$ e $f(b)$ de sinais opostos, escolhemos um valor d_1 pertencente ao intervalo para teste da raiz. Podemos dizer que o limite inferior a é uma aproximação por falta e o limite superior b é uma aproximação por excesso da raiz c, portanto, o erro ε de tais aproximações é menor do que a amplitude do intervalo, isto é, $\varepsilon < |b - a|$. Dessa forma, a melhor aproximação para a escolha de d_1 é o ponto médio entre a e b.

Sendo assim, se $f(d_1) = 0$, então uma das raízes foi encontrada e $c = d_1$. Caso

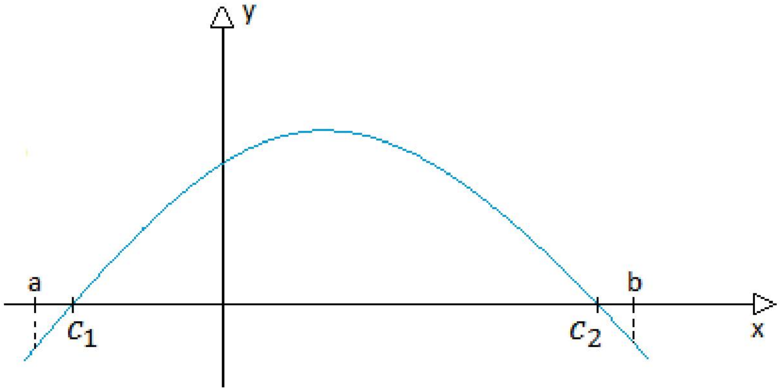


Figura 9.3: Intervalo $]a, b[$ com $f(a)$ e $f(b)$ de sinais iguais e duas raízes reais

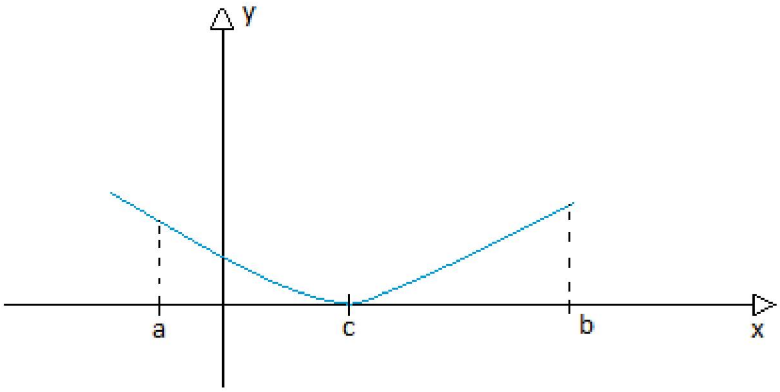


Figura 9.4: Intervalo $]a, b[$ com $f(a)$ e $f(b)$ de sinais iguais e uma raiz real

$f(d_1)$ tenha mesmo sinal que um dos limites do intervalo, d_1 passa a ser o novo limite. Usando a Figura 9.1 como exemplo: se $f(d_1) > 0$, então o novo intervalo a ser testado será $]d_1, b[$, caso contrário, o novo intervalo será $]a, d_1[$.

O processo é repetido; testamos o ponto médio do novo intervalo $\left(d_2 = \dfrac{d_1 + a}{2}\right.$ ou $\left.d_2 = \dfrac{b + d_1}{2}\right)$ e fazemos o mesmo estudo. Note que a determinação dos intervalos nem sempre é obtida facilmente ou pode nem existir, como nos casos em que a raiz possui multiplicidade par (exemplo visto na Figura 9.4).

A maneira mais fácil de determinar o intervalo $]a, b[$ é observando o gráfico da função, porém, para obter o gráfico de uma função polinomial é necessário calcular as raízes de algumas equações. Uma alternativa é obter um intervalo que contenha todas as raízes reais e depois dividí-lo em intervalos menores, para separar e determinar as raízes ou, ao menos, encontrar um valor aproximado com pequeno erro.

9.8. Método de Laguerre

O ***Método de Laguerre*** é ideal para se obter um intervalo que contenha todas as raízes reais. Inicialmente iremos introduzir o conceito de limites.

Definição 9.2. [8, p.115] Seja $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com valores reais, definida em um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$. Neste caso, f é uma função real de variável real. Dizemos que o número real L é o *limite de f quando x se aproxima de um valor $x_0 \in \mathbb{R}$*, e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se para todo $\xi > 0$, há um número correspondente $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \xi$ sempre que $0 < |x - x_0| < \delta$.

Partimos inicialmente de que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

dependendo do sinal do termo dominante a_n de f. Supondo que $a_n > 0$ (caso não seja, multiplica-se ambos os membros da igualdade por -1), então

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

e, da definição de limite,

$$\forall\ M > 0,\ \exists\ S \in \mathbb{R}_+ \mid f(x) > M,\ \forall\ x \geq S.$$

Seja, então, um número real positivo S tal que $f(x) > 0$, para todo $x \geq S$. Isto equivale a dizer que

$$\nexists\ x > S;\ f(x) = 0,$$

ou seja, não há raiz real do polinômio que seja maior que S. Dizemos assim que S é cota superior das raízes reais do polinômio. Se dada equação:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

é tal que $a_i \geq 0$, para todo i, não pode existir $x > 0$ tal que $f(x) = 0$. Logo, se todos os coeficientes da equação forem positivos ou nulos, 0 é uma cota superior de suas raízes reais.

Dividindo o polinômio por $(x - S)$, teremos

$$f(x) = (x - S) \cdot g(x) + r(x),$$

onde $\partial g = n - 1$ e $\partial r < 1$. Por hipótese, temos que $f(x) > 0$, para todo $x \geq S$, o que também é válido para o segundo membro da igualdade:

$$(x - S) \cdot g(x) + r(x) > 0, \ \forall \ x \geq S.$$

Contudo,

$$x \geq S \quad \Longrightarrow \quad x - S \geq 0,$$

e, portanto, certamente

$$(x - S) \cdot g(x) + r(x) > 0,$$

se $g(x) \geq 0$ e $r(x) > 0$.

Podemos dizer que tal afirmação é válida se todos os coeficientes de $g(x)$ são positivos ou nulos e $r(x)$ é número real positivo. Então, para encontrar S, basta efetuar as divisões sucessivas de $f(x)$ por $(x - 1), (x - 2), \ldots$, até que se encontre um valor a tal que todos os coeficientes da divisão por $(x - a)$ sejam positivos; este valor a será a cota superior S procurada.

Para encontrar a cota inferior s (um número real tal que todas as raízes reais da equação sejam maiores que s), observa-se que a equação $f(-x) = 0$ admite como raízes os opostos das raízes de $f(x) = 0$ e, portanto, se um número S' supera todas as raízes de $f(-x) = 0$, seu oposto $s = -S'$ é inferior a todas as raízes reais de $f(x) = 0$.

Portanto, obtemos um intervalo $]s, S[$ que contém todas as raízes reais da equação algébrica e podemos dispor de todas as ferramentas utilizadas até aqui para definir as raízes. Vejamos alguns exemplos:

1) Considere a equação algébrica $x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$. Para determinar suas raízes vimos que, uma vez que os coeficientes são inteiros, temos como possíveis raízes:

$$\frac{p}{q} = 12 \implies \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}.$$

Podemos fazer os testes como visto anteriormente na seção sobre raízes racionais, mas utilizando o *Método de Laguerre* para aprimorar a busca, temos:

1	1	1	−9	−1	20	−12
	1	2	−7	−8	12	0

2	1	1	−9	−1	20	−12
	1	3	−3	−7	6	0

3	1	1	−9	−1	20	−12
	1	4	3	8	44	120

Sendo assim, teremos as raízes reais 1 e 2, e na divisão por $(x - 3)$ encontraremos um polinômio com os coeficientes positivos, então 3 é cota superior. Seguindo, escrevendo a equação $f(-x) = 0$, temos:

$$f(-x) = -x^5 + x^4 + 9x^3 - x^2 - 20x - 12 = 0.$$

Multiplicando por -1:

$$x^5 - x^4 - 9x^3 + x^2 + 20x + 12 = 0.$$

Em seguida, encontrando a cota superior desta última equação, poderemos localizar a cota inferior da equação original:

1	1	−1	−9	1	20	12
	1	0	−9	−8	12	24

2	1	−1	−9	1	20	12
	1	1	−7	−13	−6	0

3	1	−1	−9	1	20	12
	1	2	−3	−8	−4	0

4	1	−1	−9	1	20	12
	1	3	3	13	72	300

Uma vez que os coeficientes deste último polinômio quociente são todos positivos, então -4 é cota inferior. Portanto, as raízes reais da equação $x^5+x^4-9x^3-x^2+20x-12=0$ pertencem ao intervalo $]-4,3[$.

Dessa forma, dispensamos os testes com os valores $\{\pm 6, \pm 12\}$, bem como com os valores -4 e 3, já que nas cotas o polinômio assume um valor negativo ou positivo, portanto não nulo; temos:

$$f(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 - 9(-1)^3 - (-1)^2 + 20(-1) - 12 = -24$$

$$f(-2) = (-2)^5 + (-2)^4 - 9(-2)^3 - (-2)^2 + 20(-2) - 12 = 0$$

$$f(-3) = (-3)^5 + (-3)^4 - 9(-3)^3 - (-3)^2 + 20(-3) - 12 = 0.$$

Note que encontramos -2 e -3 como raízes, o que ficou constatado no *Dispositivo de Briott-Ruffini* e, como todas as raízes reais estão no intervalo $]-4,3[$, encontramos quatro raízes racionais. A quinta e última raiz pode ser encontrada escrevendo a equação em sua forma fatorada, expandindo e igualando à equação original:

$$(x+2)(x+3)(x-1)(x-2)(x-x_5) = x^5+x^4-9x^3-x^2+20x-12$$

$$x^5+(2-x_5)x^4-(7+2x_5)x^3-(8-7x_5)x^2+(12+8x_5)x-12x_5 = x^5+x^4-9x^3-x^2+20x-12$$

donde obtemos $x_5 = 1$.

Determinamos 1 com multiplicidade 2, assim, as raízes da equação são $\{-3, -2, 1, 2\}$.

2) Determinar as raízes da equação $10x^4 - 77x^3 + 140x^2 - 77x + 130 = 0$. Sendo os coeficientes todos inteiros, podemos formar o conjunto de candidatos à raízes:

$$\left\{\pm\frac{1}{10}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{2}{5}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{13}{10}, \pm 2, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{13}{5}, \pm 5, \pm\frac{26}{5}, \pm\frac{13}{2}, \pm\frac{65}{2}, \pm 10, \pm 13, \pm 26, \pm 65, \pm 130\right\}.$$

Como são trinta e seis candidatos, podemos usar o Método de Laguerre para definir um intervalo. Podemos usar os próprios coeficientes da equação para fazer um teste inicial em vez de efetuar divisões sucessivas por $1, 2, \ldots$. Sendo $a_5 = 10$ e $a_4 = -77$, podemos iniciar testando a divisão por $(x - 8)$:

8	10	−77	140	−77	130
	10	3	264	2035	16410

Obtivemos um polinômio quociente com todos os coeficientes positivos, portanto, 8 é cota superior do intervalo. Escrevendo a equação $f(x) = 10x^4 + 77x^3 + 140x^2 + 77x + 130$, vemos que para $x = 0$ teremos um polinômio quociente apenas com coeficientes positivos, assim, 0 é cota inferior. Reduzimos assim consideravelmente para treze possíveis raízes:

$$\left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, 1, \frac{13}{10}, 2, \frac{5}{2}, \frac{13}{5}, 5, \frac{26}{5}, \frac{13}{2}\right\}.$$

Fazendo testes no intervalo $]0, 8[$, temos:

$$f(1) = 130,\ f(2) = 80,\ f(3) = -110,\ f(4) = -306,$$

$$f(5) = -130,\ f(6) = 1036,\ f(7) = 4050.$$

Assim, pelo Teorema 9.4, como $f(2) \cdot f(3) < 0$ e $f(5) \cdot f(6) < 0$, existem uma raiz real no intervalo $]2, 3[$ e outra raiz real no intervalo $]5, 6[$. Logo, os candidatos são:

- No intervalo $]2, 3[$: $\left\{\frac{5}{2}, \frac{13}{5}\right\}$.

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{13}{5}\right) = -20176.$$

- No intervalo $]5,6[$: $f\left(\frac{26}{5}\right) = 0$.

Temos que $\frac{5}{2}$ e $\frac{26}{5}$ são raízes. Para determinar as duas últimas raízes, podemos utilizar o *Dispositivo de Briott-Ruffini* com as raízes encontradas e reduzir o grau do polinômio ao grau 2:

$\frac{5}{2}$	10	−77	140	−77	130
$\frac{26}{5}$	10	−52	10	−52	0
	10	0	10	0	

O polinômio foi reduzido a $10x^2 + 10$, assim, as duas raízes que faltam são $\pm i$. Portanto, as raízes da equação são $\left\{\frac{5}{2}, \frac{26}{5}, -i, i\right\}$.

10. Considerações Finais

Neste referido trabalho tentei de forma cristalina e certeira selar a minha crença de que para ensinar Matemática é preciso estabelecer conexões entre assuntos e temas que acabam muitas vezes sendo trabalhados isoladamente, a saber, a Geometria e a Álgebra, por exemplo.

Não obstante, também promulguei a importância das demonstrações: quando o aluno descobre o porquê de um teorema e/ou um corolário dificilmente esquecerá quando, como e onde deve aplicá-lo. Além disto, a apresentação de um contexto Histórico pôde instigar a capacidade imaginativa fortalecendo assim o processo cognitivo.

Esta obra almejou esforçadamente relatar uma realidade, a meu ver, apaixonante: sempre que acharmos necessário podemos trilhar caminhos alternativos na busca às demonstrações e soluções, isto é, na Matemática nunca existe apenas uma maneira de chegarmos à solução, ao sucesso.

Enfim, acredito ser de grande valia para professores apossarem-se e utilizarem dos métodos citados nesta proposta, podendo tornar o ensino de polinômios e equações algébricas mais atrativo, completo e seguro.

REFERÊNCIAS

[1] Maria José Aragão. História da matemática. Interciência, 2009.

[2] Carl B. Boyer. História da matemática. Blucher Ltda., 2001.

[3] Djairo Guedes de Figueiredo. Análise I. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1996.

[4] Hans Freudenthal. Tópicos de matemática elementar - Polinômios. Zahar, 1975.

[5] Gilberto G. Garbi. O românce das equações algébricas. MAKRON Books do Brasil Editora Ltda., 1997.

[6] Scipione Di Pierro Netto and Célia Contin Góes. Matemática na escola renovada, volume 3. Saraiva, 1972.

[7] Anne Rooney. A história da matemática. M. Books, 2012.

[8] James Stewart. Cálculo, volume 1. Cengage Learning, 2012.

[9] Ėrnest Borisovich Vinberg. A course in Algebra. American Mathematical Society, 2003.