

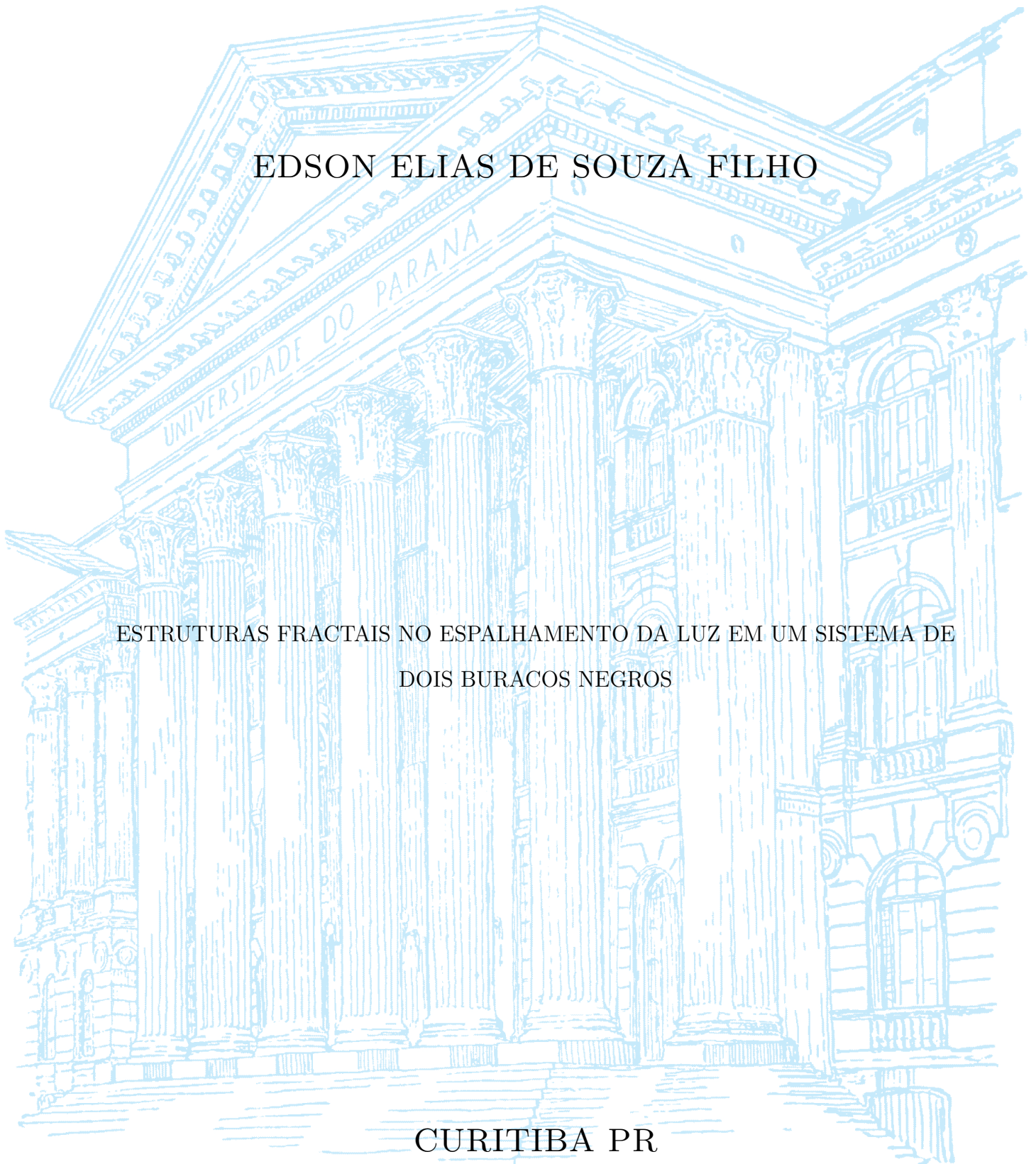
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDSON ELIAS DE SOUZA FILHO

ESTRUTURAS FRACTAIS NO ESPALHAMENTO DA LUZ EM UM SISTEMA DE
DOIS BURACOS NEGROS

CURITIBA PR

2021



EDSON ELIAS DE SOUZA FILHO

ESTRUTURAS FRACTAIS NO ESPALHAMENTO DA LUZ EM UM
SISTEMA DE DOIS BURACOS NEGROS

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Física no Programa de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Área de concentração: *Física dos Fluidos e Plasmas*.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana.

CURITIBA PR
2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S729e Souza Filho, Edson Elias de
Estruturas fractais no espalhamento da luz em um sistema de dois buracos negros [recurso eletrônico] / Edson Elias de Souza Filho. – Curitiba, 2021.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2021.

Orientador: Ricardo Luiz Viana.

1. Buracos negros (Astronomia). 2. Relatividade geral (Física). I. Universidade Federal do Paraná. II. Viana, Ricardo Luiz. III. Título.

CDD: 530.11

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **EDSON ELIAS DE SOUZA FILHO** intitulada: "**Estruturas fractais no espalhamento da luz em um sistema de dois buracos negros**", sob orientação do Prof. Dr. RICARDO LUIZ VIANA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 23 de Julho de 2021.

Assinatura Eletrônica

24/07/2021 15:47:05.0

RICARDO LUIZ VIANA

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

24/07/2021 17:07:24.0

FELIPE BARBEDO RIZZATO

Presidente da Banca Examinadora Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL)

Assinatura Eletrônica

26/07/2021 07:40:37.0

EDSON DENIS LEONEL

Presidente da Banca Examinadora Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL) Avaliador Externo (UNIVERSIDADE EST. PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO)

Assinatura Eletrônica

24/07/2021 15:37:00.0

JOSÉ DANILO SZEZECH JÚNIOR

Presidente da Banca Examinadora Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL) Avaliador Externo (UNIVERSIDADE EST. PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO) Avaliador Interno (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA)

Assinatura Eletrônica

24/07/2021 15:45:39.0

GILBERTO MEDEIROS KREMER

Presidente da Banca Examinadora Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL) Avaliador Externo (UNIVERSIDADE EST. PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO) Avaliador Interno (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA) Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

None of us know for sure what's out there. That's why we keep looking. Keep your faith. Travel hopefully. The universe will surprise you, constantly.

The Doctor.

*Earth below us, drifting, falling, floating weightless.
Calling, calling home.*

*Peter Schilling - Major Tom
(Coming Home).*

Aos meus pais
As minhas irmãs
A Davis McComb
A Maria Olivia

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Minha mãe pelo amor e pelo suporte, por mesmo após tempos difíceis, o amor venceu. Agradeço ao meu Pai (em memória), por todo o amor que você me deu em todos esses anos que pude estar com você, nunca esquecerei de você. Agradeço as minhas irmãs, mesmo distantes estamos sempre apoiando um ao outro, principalmente a Marcelle minha irmã, melhor amiga e confidente.

Agradeço ao meu orientador que nesses 4 anos me deu o incentivo e o suporte necessário para chegar onde estou, foi paciente e direto quando necessário, muito obrigado por ter me acolhido. Agradeço a Amanda Mathias, sua ajuda e mentoria foram essenciais em todo o desenvolvimento dessa pesquisa, me guiando em áreas que eu não estava familiarizado e abrindo portas para novas descobertas.

Agradeço ao meu companheiro, Davis McComb pelo amor e suporte, te conhecer foi uma das melhores coisas que aconteceram comigo, muitas vezes eu me encontrava perdido e você estava lá para me apoiar, sei que a distância foi difícil, mas em nenhum momento eu parei de pensar em você.

Agradeço a Maria Olivia, eu não estaria aqui sem você, confidente, amiga, aquela que me ajuda a fugir um pouco das preocupações e medos, são quase 20 anos juntos nessa jornada e eu não mudaria nada. Agradeço a Sílvia Nunes, pela amizade, apoio e por confiar mais em mim que eu mesmo. Agradeço a Gabriela Menezes e Taíse Gouvêa pelos anos de amizade e apoio em tudo. Agradeço a Adriane Reis amiga de doutorado e para vida, sua presença durante esses quatro anos fizeram toda a diferença, desde o dia que sentamos juntos no restaurante universitário e não trocamos uma palavra. Aos amigos que fiz no programa de pós-graduação do paraná: Jani, Eduardo, Karlison, João, Kaike e outros agradeço por todos os momentos divertidos e conversas sem sentido nesses quatro anos.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro nesses quatro anos.

RESUMO

O interesse em sistemas binários de buracos negros está associado as recentes descobertas de ondas gravitacionais. Propomos, neste trabalho, estudar o movimento dos fótons ao entrar em um sistema de dois buracos negros. Separados por uma certa distância onde seus campos gravitacionais não são influenciados um pelo outro, o movimento dos raios de luz na vizinhança de um buraco negro passa a ser considerado como o resultado da ação de cada buraco negro separadamente. Usando essa aproximação, a dinâmica é reduzida a um mapa de duas dimensões. Escolhemos fazer o estudo sobre diferentes buracos negros classificados por características com a massa e carga. O primeiro passo é obter analiticamente a equação que descreve o movimento em torno de um dos buracos negros, seguido da construção do mapa e por último sua iteração. Dando continuidade utilizamos o método da incerteza para calcular a dimensão, seguido pelo cálculo da entropia informacional para quantificar a fractalidade do sistema.

Palavras-chave: Dinâmica não-linear, Relatividade Geral, Buracos negros.

ABSTRACT

The enthusiasm in binary system are associated with the recent discoveries on gravitational waves. We propose to study the movement of photons as they enter a system of two supermassive black holes. Settled apart by a certain distance where their gravitational fields does not influence the other, the motion of the light rays in the neighborhood of one black hole can be considered to be the result of the action of each black hole separately. Using this approximation, the dynamics is reduced to a two-dimensional map. We chose to do the study on different types of black holes, classified by characteristics like mass and charge. The first step is to obtain analytically the equation that describes the surrounding movement of the black holes, followed by the construction of the map and lastly to iterate the map. Moving forward, we used the uncertain method to find the dimension, followed by the information entropy to quantify the fractality of the system.

Keywords: Nonlinear dynamics, General Relativity, Black Holes.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Primeira imagem da sombra de um buraco negro. A imagem mostra a luz sendo desviada pelo campo gravitacional do buraco negro M87.	14
1.2	O aglomerado de galáxias Abell 370, localizado a cerca de 4 bilhões de anos-luz de distância, contém centenas de galáxias. Emaranhados entre as galáxias estão arcos de luz azul de aparência misteriosa. Estas são, na verdade, imagens distorcidas de galáxias remotas atrás do aglomerado. . . .	15
2.1	Representação gráfica da mudança das curvas, do tipo tempo para o tipo espaço, ao se atravessar a barreira limite em r_s . As linhas azuis representam as geodésicas de entrada e as vermelhas as geodésicas de saída.	22
2.2	Representação gráfica de um buraco negro de Schwarzschild.	22
2.3	Representação gráfica de um buraco negro de Reissner-Nordström.	23
3.1	Anéis de Einstein encontrados no aglomerado de galaxias SDSS J0146-0929	27
3.2	Representação da deflexão da luz. O raio vindo do infinito encontra um corpo massivo, assim desviando de sua trajetória original em um ângulo $\Delta\varphi$.	30
4.1	Movimento no espaço de fase e definição da superfície de Poincaré. Onde a trajetória atravessa a superfície.	40
4.2	Representação da superfície de Poincaré por ciclo de período 2.	43
4.3	Esquema das curvas instáveis (V^i) e estáveis (V^e) em um ponto x_0 de uma sela caótica. A linha tracejada representa uma trajetória próxima ao ponto hiperbólico x_0	46
4.4	Representação dos pontos homoclínicos fig. a) e do emaranhado homoclínicos fig. b)	48
4.5	Variedades estáveis (azul) e instáveis (vermelho) do mapa padrão com constante $K = 1$ demonstrando as selas caóticas, ou seja os pontos onde. . .	49
5.1	Divisão do quadrado.	51
5.2	O triângulo de Sierpinski.	52
5.3	Esquema do conjunto de Cantor.	53
5.4	Esquema do método da incerteza. Uma condição inicial na Bacia A afastado da fronteira por mais do que ϵ , essa condição é dita determinada. Já a condição inicial situada na Bacia B está próxima à fronteira, dizemos então que essa condição é indeterminada.	55
5.5	a) Bacias referentes ao mapa de Hénon $F(x, y) = (0.7 - x^2 + 0.9y, x)$, (representados pelas cores: branca, preta e cinza). b) A variedade instável é sobreposta as bacias, mostrando que ela cruza as 3 bacias.	59

6.1	Espalhamento da luz no sistema binário para construção do mapa. A linha preta é a trajetória da luz.	62
6.2	Exemplos de órbitas periódicas possíveis do sistema onde a) é obtida a partir dos pontos fixos $(b_{esc}, 0)$ e b) quando $b_{n+1} = -b_n$ e $\phi_{n+1} = -\phi$. c) é um exemplo de órbita com apenas um buraco negro	63
6.3	Bacias de escape total, onde o eixo horizontal representa os valores das condições iniciais do ângulo de escape ϕ e o eixo vertical as condições iniciais do parâmetro de impacto b . As cores representam as saídas conforme o sistema evolui, onde vermelho e azul para um dos buracos negros, verde para o infinito e branco para quando nunca escapa. A cor branco, neste caso, não é possível ser visualizada.	64
6.4	Bacias de escape para $\phi = 0$ e $\phi = \pi$ com 10^6 condições iniciais. Representação das bacias em função do parâmetro de impacto b . A função $g(b)$ é definida 1 se a órbita com condições iniciais $\phi = (0, \pi)$ e $b_0 = b$ caem no primeiro buraco negro, -1 se cai no outro e 0 se escapa para infinito, mesmo que $g(b)$ tenha valores discretos, os pontos estão conectados para melhor visualização. Gráficos a), b) e c) possuem $\phi = 0$, onde b) e c) são a primeira e segunda magnificação respectivamente. Gráficos d), e) e f) possuem $\phi = \pi$, onde e) e f) são a primeira e segunda magnificação.	65
6.5	Representação das variedades e da sela caótica para a órbita no caso do mapa de espalhamento com $D = 15$, com $n_c = 40$ iterações e $\varepsilon = 0.5$. a) a variedade estável, b) a variedade instável e c) a sela caótica	66
6.6	Bacia de escape para o mapa de espalhamento com distância $D = 15$. As cores da bacia são as mesmas referentes a figura 6.3. A curva em preto é dada pela variedade instável 6.5 b)	67
6.7	Gráfico do expoente de incerteza γ . A relação $\log f(\epsilon) \times \log \epsilon$, onde variamos o raio ϵ de 10^{-1} até 10^{-10} para 10^5 condições iniciais. O declive da reta fornece o expoente de incerteza, pelo método da incerteza e com ele é possível encontrar o valor da dimensão fractal. a) é referente a $\phi = 0$ e b) $\phi = \pi$	68
6.8	Saídas do sistema para variação de D em $\phi = 0$. Onde em a) $D = 5.0$, b) $D = 7.5$, c) $D = 10.0$, d) $D = 12.5$, e) $D = 17.5$ e f) $D = 20.0$. Plotamos as barras horizontais conforme as saídas representadas na forma da função $g(b)$	69
6.9	Saídas do sistema para variação de D em $\phi = \pi$. Onde em a) $D = 5.0$, b) $D = 7.5$, c) $D = 10.0$, d) $D = 12.5$, e) $D = 17.5$ e f) $D = 20.0$. Plotamos as barras horizontais conforme as saídas representadas na forma da função $g(b)$	70
6.10	Saídas do sistema para $D = 12.5$. As barras horizontais representam as bacias de escape como função do parâmetro de impacto b ; Em $\phi = 0$ em a), com magnificações em b) e c); e $\phi = \pi$ em d) e suas magnificações em e) e f). Plotamos as barras horizontais conforme as saídas representadas na forma da função $g(b)$	71
6.11	Entropia do sistema, para $\phi = 0$, conforme a distância entre os buracos negros aumenta, onde a) é a entropia da bacia e b) a entropia da fronteira.	72

6.12	Entropia do sistema, para $\phi = \pi$, conforme a distância entre os buracos negros aumenta, onde a) é a entropia da bacia e b) a entropia da fronteira.	72
6.13	Saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = 0$. Plotamos a função $g(b)$ em função da variação de b conforme variamos o valor da carga Q . Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$...	73
6.14	Primeira aproximação das saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = 0$. Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$...	74
6.15	Segunda aproximação das saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = 0$. Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$...	74
6.16	Saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = \pi$. Plotamos a função $g(b)$ em função da variação de b conforme variamos o valor da carga Q . Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$...	75
6.17	Primeira aproximação das saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = 0$. Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$...	75
6.18	Segunda aproximação das saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = 0$. Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$...	76
6.19	Representação da dimensão fractal conforme a mudança do valor de carga Q . Em a) $\phi = 0$, b) $\phi = \pi$, a linha vermelha é utilizada para melhor visualização da mudança do valor da dimensão...	77
6.20	Representação da entropia em $\phi = 0$ conforme a mudança do valor de carga Q . Em a) Entropia da bacia e b) Entropia da fronteira, a linha vermelha é utilizada para melhor visualização da mudança do valor da dimensão...	78
6.21	Representação da entropia em $\phi = \pi$ conforme a mudança do valor de carga Q . Em a) Entropia da bacia e b) Entropia da fronteira, a linha vermelha é utilizada para melhor visualização da mudança do valor da dimensão...	79
6.22	Representação da bacia de escape em $\phi = 0$ para diferentes valores de γ onde a) $\gamma = 0.6$, b) $\gamma = 0.7$, c) $\gamma = 0.8$ e d) $\gamma = 0.9$...	79
6.23	Representação da bacia de escape em $\phi = \pi$ para diferentes valores de γ onde a) $\gamma = 0.6$, b) $\gamma = 0.7$, c) $\gamma = 0.8$ e d) $\gamma = 0.9$...	80
6.24	Entropia da bacia (S_b) e da fronteira (S_{bb}) em $\phi = 0$ para diferentes valores de γ ...	80
6.25	Entropia da bacia (S_b) e da fronteira (S_{bb}) em $\phi = \pi$ para diferentes valores de γ ...	81

LISTA DE TABELAS

6.1	Tabela com os valores de dimensão referente a $\phi = 0$, mostrando seus valores originais e os das suas magnificações.	68
6.2	Tabela com os valores de dimensão referente a $\phi = \pi$, mostrando seus valores originais e os das suas magnificações.	68
6.3	Tabelas com os valores das entropias para $\phi = 0$, com suas respectivas magnificações. Onde S_b é a entropia da bacia e S_{bb} é a entropia da fronteira da bacia.	68
6.4	Tabelas com os valores das entropias para $\phi = \pi$, com suas respectivas magnificações. Onde S_b é a entropia da bacia e S_{bb} é a entropia da fronteira da bacia.	69

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	CONCEITOS BÁSICOS DA RELATIVIDADE GERAL	19
2.1	Equações de campo	19
2.1.1	Espaço-tempo de Minkowski	19
2.1.2	Equação de Einstein	20
2.1.3	Equação de Einstein-Maxwell.	20
2.2	Buracos Negros.	21
2.2.1	Espaço-tempo de Buracos Negros	21
3	LENTES GRAVITACIONAIS	25
3.1	Eventos históricos	25
3.2	Formalismo do lenteamento.	27
3.3	Desenvolvimento Analítico	31
3.3.1	Expansão do ângulo de deflexão	32
3.3.2	Os coeficientes da expressão aproximada para o ângulo de deflexão	32
3.4	Ângulo de deflexão nas métricas de buracos negros	35
3.4.1	Ângulo de deflexão na métrica de Reissner-Nordström	35
3.4.2	Ângulo de deflexão na métrica de Schwarzschild	36
3.4.3	Ângulo de deflexão na métrica de J-N-W	37
4	CONCEITOS BÁSICOS DE SISTEMAS DINÂMICOS	38
4.1	Sistemas Hamiltonianos	39
4.1.1	Mecânica Hamiltoniana	39
4.1.2	Fluxo Hamiltoniano	41
4.2	Sistemas dinâmicos discretos	43
4.2.1	Mapas bidimensionais	43
4.3	Caos.	46
4.3.1	Caos em mapas	46
4.3.2	Pontos homoclínicos	47
4.3.3	Mapa padrão	48
5	FRACTAIS.	50
5.1	Conceitos Básicos	50
5.1.1	Auto Similaridade	50
5.1.2	Construindo Fractais	52

5.2	Dimensão fractal	54
5.2.1	Dimensão de contagem de caixa	54
5.3	Bacias de Escape.	54
5.4	Dimensão de contagem de caixas em bacias fractais	55
5.4.1	Método da incerteza.	56
5.5	Entropia da bacia: conceitos e definição.	56
5.6	Propriedade de Wada	58
6	SISTEMAS BINÁRIOS DE BURACOS NEGROS	60
6.1	Obtenção do mapa de espalhamento.	60
6.2	Iterações do mapa de espalhamento	63
6.2.1	Buracos negros de Schwarzschild	63
6.2.2	Variação da distância D no mapa de Schwarzschild	69
6.2.3	Buracos Negros de Reissner-Nordström	73
6.2.4	Na métrica Janis-Newman-Winicour.	77
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS.	82
	Referências	84
	Apêndice A: Conceitos matemáticos da Relatividade Geral.	92
A.1	Variedade.	92
A.2	Curvas e Vetores	92
A.2.1	Curvas	92
A.2.2	Vetores	93
A.3	Tensores	94
A.4	Campo tensorial	94
A.5	Operações tensoriais.	95
A.6	Comutador	95
A.7	Transporte Paralelo	96
A.8	Derivada de Lie	97
A.9	Derivada covariante	98
A.10	Geodésica.	98
A.11	Geodésica Afim	99
A.12	Tensor de Riemann	99
A.13	Métrica	99
A.14	Tensor de Curvatura.	101
A.15	Formalismo lagrangiano.	102
	Apêndice B: Publicações	103

1 INTRODUÇÃO

A Relatividade Geral (RG) de 1915 [1], associa o campo gravitacional com à geometria do espaço-tempo. Existem diversos testes feitos diariamente para analisar a veracidade da RG [2, 3]. Testes de campo forte são muito importantes para descrição de objetos como estrelas de nêutron, buracos negros e o universo primordial [4].

Com o crescente interesse da astronomia em observar objetos a grandes distâncias que antes eram dados como impossíveis de se observar, criou-se o conjunto global de rádio telescópios, o *Event Horizon Telescope* (EHT), que consiste em interferômetros bem longos (VLBI). Em 2017 o foco inicial se deu em observar o centro de galáxias, como a Via-Láctea e a galáxia Messier 87 (M87). O principal objetivo era poder visualizar acontecimento como lenteamento gravitacional, anéis de Einstein e a sombra do buraco negro em candidatos de buracos negros supermassivos que residem no centro de galáxias.

Em 10 de abril de 2019, a colaboração EHT apresentou a primeira imagem do horizonte de evento de um candidato a buraco negro supermassivo no centro da galáxia M87 [5, 6, 7, 8, 9]. A imagem obtida (figura 1.1) mostra um anel assimétrico brilhante que envolve uma região escura, a sombra do buraco negro. Imagem essa que corresponde com as expectativas gerais do comportamento de um buraco negro de Kerr [10].

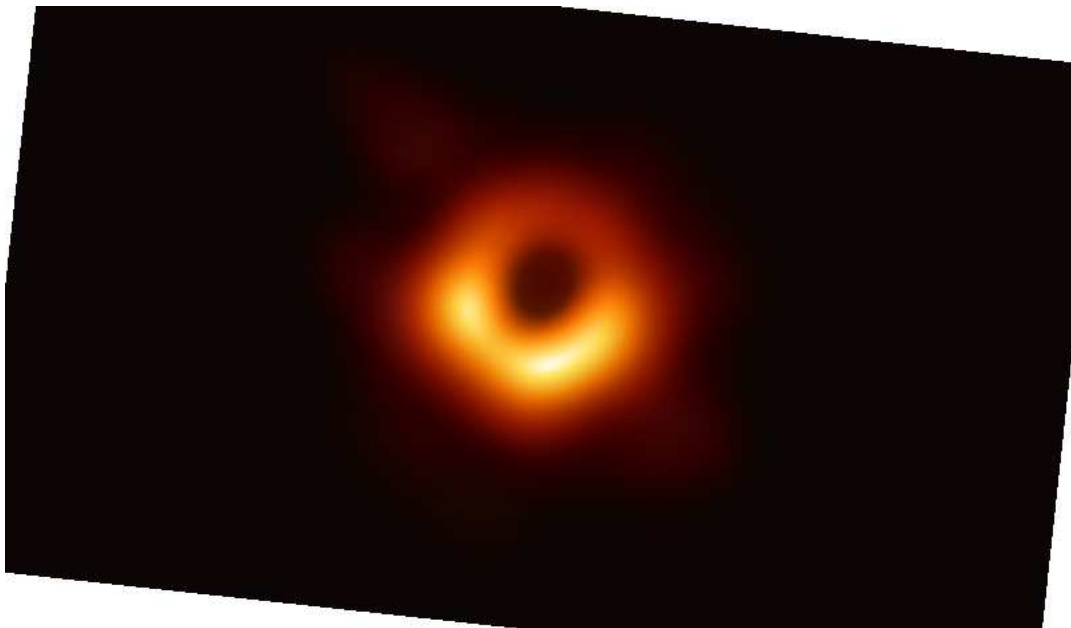


Figura 1.1: Primeira imagem da sombra de um buraco negro. A imagem mostra a luz sendo desviada pelo campo gravitacional do buraco negro M87. Fonte: [11].

Esses resultados confirmam a existência de buracos negros no universo, algo essencial a relatividade geral. A imagem é de fato a detecção do efeito de lenteamento gravitacional [12], ou seja, a deflexão da luz por um objeto massivo, a figura 1.2 mostra

exemplos de lenteamento gravitacional no universo. Como demonstrado pela Relatividade Geral, objetos massivos (como buracos negros) geram curvaturas no espaço-tempo, ou seja, quando um raio de luz encontra esse objeto ele sofre um desvio do seu caminho original. A imagem do buraco negro denominado M87* mostra as órbitas instáveis da luz que ao redor do buraco negro. Fótons que vão além dessa região estão destinados a cair no buraco negro, atravessando o horizonte de evento e nunca escapando.



Figura 1.2: O aglomerado de galáxias Abell 370, localizado a cerca de 4 bilhões de anos-luz de distância, contém centenas de galáxias. Emaranhados entre as galáxias estão arcos de luz azul de aparência misteriosa. Estas são, na verdade, imagens distorcidas de galáxias remotas atrás do aglomerado. Fonte: [13].

Um sistema binário de buracos negros, ou seja, um sistema em que há dois buracos negros orbitando um ao outro, é de grande interesse na ciência da Relatividade Geral, principalmente ao se tentar estudar ondas gravitacionais. Ondas gravitacionais obtidas diretamente das equações de Einstein são formadas quando dois objetos massivos, em órbita um do outro, causam ondas no espaço-tempo, ondas essas que carregam informação sobre o sistema. O primeiro sistema binário de buracos negros foi descoberto em 2015 pelo experimento LIGO ao se detectar diretamente pela primeira vez ondas gravitacionais [14]. Desde então sistemas binários de buracos negros tem sendo observados como fontes de ondas gravitacionais com frequência pela colaboração LIGO-Virgo [15, 16, 17]

Os resultados atuais sobre sistemas binários de buracos negros são uma inspiração para o estudo da geometria de sistemas dinâmicos desses sistemas. Não existe uma solução analítica para esse problema. Para a análise é preciso se fazer uma simulação do trajeto da luz em conjunto de simulações numéricas não-lineares das equações de campo da relatividade geral.

A teoria de sistemas dinâmicos está preocupada principalmente na descrição do comportamento a longo tempo. Em geral, sistemas dinâmicos podem ser descritos através do espaço de fase, um espaço onde pontos descrevem o estado do sistema a qualquer instante de tempo, demonstrando também a evolução temporal dos pontos no espaço de fase [18, 19].

J. H. Poincaré (1854-1912) foi o primeiro a descrever um problema desse tipo, o problema de três corpos (o problema geral com mais de três corpos continua em aberto até hoje), ele publicou uma versão ampliada e corrigida dos seus resultados, o qual é um dos trabalhos mais fundamentais para dinâmica não-linear [20]. Esse trabalho tem como base o movimento a estabilidade do movimento de corpos no sistema solar.

Diversos trabalhos foram pioneiros na descrição de problemas de caos quando tratando dos sistemas descritos pela Relatividade Geral. Dettman *et al.* publicou diversos trabalhos utilizando buracos negros como fonte de caos [21, 22]. Contopoulos utilizou os sistemas binários como exemplos naturais de espalhamento caótico [23, 24, 25]. Existem diversos outros trabalhos que envolvem buracos negros, sistemas binário e caos [26, 27, 28].

Motivado pelos resultados da dinâmica em relação a sistemas binários de buraco negro, a primeira imagem do horizonte de evento de um buraco negro e o foco atual no estudo dos efeitos de lenteamento gravitacional em sistemas binários de buracos negros. A geometria desses sistemas binários observados pelo conjunto LIGO-VIRGO não é conhecida analiticamente nas soluções das equações de Einstein. Para encontrar o efeito de lenteamento é necessário utilizar simulações numéricas não-lineares traçando o raio de luz.

Um dos primeiros estudos sobre o lenteamento gravitacional em um sistema binário de buracos negros foi feito por Bohn *et al.* [29]. Ele considerou o que um observador veria na região do sistema binário conforme eles orbitam, espiralizam e se fundem. Recentemente Shippley [30] e Daza *et al.* [31] fizeram um estudo semelhante na solução de Majumdar-Papapetrou [32, 33], solução essa que descreve um sistema binário de buracos negros estáticos e com carga (Reissner-Nordström), porém a carga é extrema, ou seja, o valor da carga é equivalente ao valor da massa dos buracos negros.

Propomos uma análise qualitativa do movimento de partículas na presença de dois buracos negros estáticos e esféricos em um sistema binário idealizado, ou seja, sem considerar certos efeitos do sistema como a rotação dos buracos negros em relação ao seu centro de massa, o surgimento de ondas gravitacionais e a interação do campo gravitacional dos buracos negros entre si. Conseguimos fazer isso ao distanciar os buracos negros de tal forma que seus campos gravitacionais não afetam um ao outro, ou seja, o raio de luz vindo do infinito é desviado por um dos buracos negros e pode em seguida escapar para a região contendo o outro buraco negro.

Ao fazer a análise da influência do campo gravitacional do buraco negro no raio de luz utilizamos o desenvolvimento analítico feito por [34] para lenteamento gravitacional que pode ser aplicado a qualquer buraco negro estático com simetria esférica. Neste trabalho demonstramos os resultados para as métricas, ou seja, as componentes que descrevem as características do espaço-tempo, quando tratando de buracos negros essas características são a massa, carga e momento angular, propriedades essas descritas pelo teorema de buraco negro “sem cabelo” [35]. As métricas que utilizamos nesse trabalho são as de Schwarzschild [36], Reissner-Nordström [37] e a métrica de Janis-Newman-Winicour [38].

As equações da relatividade geral podem ser descritas como um sistema hamiltoniano, sistemas esses que ao discretizarmos o tempo pode ser escrito na forma de um mapa [39, 18]. No nosso caso avançamos no estudo proposto anteriormente por De Moura

e Letelier [40] onde os autores, descreveram o sistema binário utilizando um mapa. Esse mapa foi anteriormente proposto por [41] aplicado ao espalhamento de partículas por dois corpos. Porém, há no comportamento da luz o surgimento de não uniformidade e por consequência o aparecimento de estruturas fractais.

Um conjunto de dimensões não inteiras, ou fractais, foi popularizado por Benoit Mandelbrot [42], resumindo, fractais são conjuntos complexos com uma dimensão não inteira, ou seja, eles apresentam uma auto-similaridade estatística em uma ampla variedade de escalas. Fractais se tornaram populares, não só pela sua beleza, mas por serem onipresentes na natureza [43]. Diversos estudos já foram feitos com foco em fractais pelo grupo de dinâmica não-linear da Universidade Federal do Paraná, mas aplicado em física de plasmas [44, 45, 46, 47, 48].

A análise dessas estruturas nos fornece informações da evolução de sistemas dinâmicos que descrevem fenômenos físicos, pois carregam informações fundamentais sobre a incerteza intrínseca na predição de seu comportamento futuro. Em sistemas dinâmicos as estruturas fractais estão conectadas a evolução do sistema e as incertezas que surgem no movimento. As trajetórias caóticas são sensíveis às condições iniciais e uma pequena perturbação pode fazer com que a órbita da trajetória dinâmica escape através de uma saída diferente, o que dificulta a predição do futuro do sistema.

Em sistemas hamiltonianos, as trajetórias das partículas escapam para regiões bem definidas no espaço de fase, desse modo podemos determinar bacias de escape, ou saída. A bacia de escape é formada por uma região do espaço de fase definida pelo conjunto de condições iniciais que escapam ou deixam determinada região do espaço de fase sem ter antes atingido outra saída. Neste trabalho as saídas possíveis são definidas como cair em um buraco negro, cair no outro buraco negro ou escapar para o infinito. Nosso interesse é analisar as estruturas fractais nas bacias de escape e na fronteira de bacias.

Quando há mais de uma saída, as bacias associadas a essas saídas são separadas por fronteiras de bacias. Essa fronteira pode ser uma curva suave ou uma curva fractal. Um ponto x , que pertence a essa fronteira, é um ponto na fronteira quando um conjunto ao redor de x se intersecta a mais de uma bacia. Então a fronteira da bacia é definida pelo conjunto de pontos que tem essa característica.

Para quantificarmos a fractalidade das bacias e da fronteira da bacia medimos a complexidade da fronteira fractal que é dado pela dimensão fractal. Existem diversos métodos de definir a dimensão fractal, neste trabalho nos atentamos ao método da incerteza [49, 50]. E, para verificarmos o quanto essas bacias estão entrelaçadas, aplicamos o método proposto por Daza [51], para o cálculo da entropia da bacia e entropia da fronteira da bacia.

Esta tese está organizada de forma a apresentar primeiramente a Relatividade Geral e o comportamento da luz em um campo gravitacional forte e em seguida apresentando sistemas dinâmicos e fractais e os seus métodos de análise. Destacamos que neste trabalho utilizamos ponto(.) como o símbolo do marcador decimal.

No primeiro capítulo apresentamos a Relatividade Geral. Começando pela descrição da geometria diferencial e suas componentes, seguido pelo movimento de partículas no espaço-tempo, a equação desenvolvida por Einstein e por último a descrição de diferentes buracos negros.

No capítulo 2 discutimos o efeito de lentes gravitacionais, sua descoberta e definição. Apresentamos o desenvolvimento matemático e um desenvolvimento analítico para o ângulo de deflexão da luz.

No capítulo 3 apresentamos o conceito de sistemas dinâmicos, com foco em sistemas hamiltonianos, onde oferecemos um breve resumo da mecânica hamiltoniana e o conceito de fluxo hamiltoniano. Também discutimos sistemas discretos e o conceito de mapa e suas características.

No capítulo 4 discutimos sobre fractais, da sua história e descrição, oferecemos exemplos de fractais, conceitos de construção e os métodos de análise como o método da incerteza e a entropia.

No capítulo 5 utilizamos o conhecimento desenvolvido nos capítulos anteriores na construção de sistema binários para métricas com simetria esférica e estáticos. Utilizamos as métricas de Schwarzschild, Reissner-Nordström e Janis-Newman-Winicour. Iteramos o mapa e apresentamos os resultados obtidos.

Por fim, no capítulo 6 apresentamos as conclusões e perspectivas futuras.

2 CONCEITOS BÁSICOS DA RELATIVIDADE GERAL

Em sua essência, às duas teorias de Einstein (Relatividade Especial de 1905 e a Relatividade Geral de 1915 [1]) são as teorias modernas para o espaço e tempo, que substituíram os conceitos de espaço e tempo absoluto de Newton pelo conceito de espaço-tempo.

Como todos os processos físicos acontecem no espaço e tempo, as leis da física devem ser compatíveis com respeito as teorias do espaço e tempo. Se há uma mudança no plano de fundo, a física deve ser adaptada a essa mudança.

Originalmente, em física, relatividade significava a abolição do espaço absoluto. E isso é o que às duas teorias de Einstein conseguiram descrever: Relatividade Especial (RE) e a Relatividade Geral (RG), uma teoria do espaço-tempo curvo, a qual acabou com o espaço absoluto newtoniano na ideia de onipresença e a não-influência do movimento uniforme ou repouso e em conjunto Einstein rompeu o conceito de tempo absoluto.

Antes de adentrarmos as ideias apresentadas pela Relatividade Geral, uma revisão breve da descrição matemática da Relatividade Geral pode ser vista no Apêndice A. Desenvolvida como conhecemos hoje por volta do século XIX por Gauss, Lebachevski e Bólyai e seus estudos em geometria curvas bi-dimensionais e por final por Riemann, que generalizou o estudo para n -dimensões. Nessa geometria há a possibilidade de se ir além das ideias definidas pela geometria Euclidiana, como os ângulos internos de um triângulo podem diferir de 180° e o perímetro de um círculo de 2π .

2.1 Equações de campo

2.1.1 Espaço-tempo de Minkowski

Definimos o espaço plano como a variedade quadri-dimensional dotada de uma métrica (A.56) plana com assinatura -2 . Como a métrica é plana, existe um sistema de coordenadas em que ela é diagonal com elementos ± 1 . Usamos a convenção de letras latinas para falar de dimensão de 0 a 3. Essas coordenadas especiais são chamadas coordenadas de Minkowski e o elemento de linha é dado por

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.1)$$

ou na forma tensorial

$$ds^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b. \quad (2.2)$$

A métrica η_{ab} será utilizada somente para descrever o espaço-tempo de Minkowski, onde $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. É possível reescrever a métrica em outro sistema de coordenada,

escolheremos coordenadas esféricas já que a utilizaremos ao decorrer deste trabalho, obtemos então

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b, \quad g_{ab} = \text{diag}(-1, 1, r^2, r^2 \cos^2 \theta) \quad (2.3)$$

onde $x^a = (t, r, \theta, \phi)$.

2.1.2 Equação de Einstein

Uma das maiores realizações na Relatividade Geral se dá pela equação de campo de Einstein que conecta a dinâmica do espaço-tempo com a matéria presente no espaço-tempo. Podemos obter a equação de campo por um princípio de mínima ação dado como

$$S = \int \left(\frac{1}{16\pi} R + \mathcal{L}_M \right) \sqrt{-\det(g)} d^4x, \quad (2.4)$$

onde o primeiro termo da integral é chamado lagrangiana de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional e \mathcal{L}_M é a lagrangiana da matéria, que descreve qualquer campo de matéria presente no espaço-tempo, $\det(g)$ é o determinante da métrica e R o escalar de Ricci (A.73). Variando a ação (2.4) fornece a equação de campo de Einstein

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (2.5)$$

onde $G_{ab} = R_{ab} - 1/2(Rg_{ab})$ é o tensor de Einstein (A.74), e T_{ab} é o tensor energia-momento. A equação de campo é uma equação diferencial para determinar o tensor métrico para um dado tensor energia-momento ou o contrário (dado o tensor métrico, definimos o tensor energia-momento) dependendo em que direção vemos a equação.

Tomando o traço da equação (2.5) com relação à métrica, podemos escrever o escalar de Ricci como $-R = 8\pi T$, onde $T = T^a_a$. Substituindo R em G_{ab} obtemos

$$R_{ab} = 8\pi \left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right). \quad (2.6)$$

Quando $T_{ab} = 0$ dizemos ser uma solução de vácuo, podemos escrever a equação de campo do vácuo como $G_{ab} = 0$. A solução mais simples é conhecida como espaço-tempo de Minkowski que descreve um espaço-tempo vazio. O espaço-tempo do buraco negro de Schwarzschild é outro exemplo de soluções de vácuo [36], ele descreve a geometria do espaço-tempo ao redor de um objeto massivo.

2.1.3 Equação de Einstein-Maxwell

As equações de Einstein-Maxwell podem ser obtidas ao utilizar o tensor de Einstein-Maxwell na forma $\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2} F_{ab} F^{ab}$ na ação (2.5), onde F_{ab} é o tensor de Faraday, um tensor anti-simétrico de rank 2 que contém o campo eletromagnético. A equação de Euler-Lagrange para essa ação nos fornece

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac} F_b^c - \frac{1}{4} g_{ab} F^{cd} F_{cd} \right), \quad (2.7)$$

$$\nabla_b F^{ab} = \mu_0 J^a, \quad \nabla_b * F^{ab} = 0, \quad (2.8)$$

onde $\nabla * F$ é o tensor dual eletromagnético, J^a é a 4-corrente, livre de divergência $\nabla_a J^a = 0$. Na ausência de fontes ($J^a = 0$), a equação (2.7) é $\nabla_b F^{ab} = 0$.

É possível também escrever as componentes do tensor de Faraday em função do potencial A_a na forma

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a. \quad (2.9)$$

Tomando traço do tensor energia-momento eletromagnético é fácil ver que $T = 0$. Utilizando a equação de campo reversa (2.7), obtemos

$$R_{ab} = 8\pi T_{ab} = 2(F_{ac}F^{cb} - \frac{1}{4}g_{ab}F^{cd}F_{cd}). \quad (2.10)$$

2.2 Buracos Negros

Um buraco negro é uma região do espaço onde a atração gravitacional é tão intensa que nada, nem mesmo a luz, consegue escapar dela. Sendo cercado por uma superfície chamada horizonte de evento, em seu interior existe o que denominamos de singularidade, uma região onde a noção de espaço-tempo deixa de ser válida.

Consequências diretas das soluções da relatividade geral, podemos classificar buracos negros pelas suas características: massa, carga e momento angular. Existem quatro tipos principais de soluções Schwarzschild [36] que possui simetria esférica, são estáticos e são caracterizados apenas pela massa; Reissner-Nordström [37, 52] que também possuem simetria esférica, são estáticos e são caracterizados pela massa e carga; Kerr [10] possuem simetria axial e são caracterizados pela massa e momento angular; Kerr-Newman [53] simetria axial e tem todas as características massa, carga e momento angular.

2.2.1 Espaço-tempo de Buracos Negros

Métrica de Schwarzschild

Utilizando a equação de Einstein no vácuo é possível chegar ao elemento de linha da geometria de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta - \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.11)$$

A região $r > 2M$ é chamada de região exterior, as coordenadas t e r são do tipo tempo e espaço respectivamente. Podemos ver imediatamente que a solução (2.11) é independente de t , logo $\partial_t g_{ab} = 0$, onde ∂_t é chamado de vetor de Killing, logo o exterior do buraco negro é estacionário. Na verdade, ∂_t é uma hiper-superfície ortogonal da família de hiper-superfícies $t = \text{constante}$, ou seja, a solução é estática. Birkhoff demonstrou que para uma solução esférica simétrica no exterior ela é estática [54]. A região interna do buraco negro é dada por $0 < r < 2M$.

O chamado horizonte de evento é a região que define a barreira onde as partículas não conseguem mais voltar, ou seja, curvas do tipo tempo ou nulo ao atravessarem essa barreira entram numa região dominada por curvas do tipo espaço, como pode ser vista na figura 2.1. Essa região sela para um observador externo, eventos no buraco negro, em Schwarzschild essa região está em $r = 2M$, chamado também de raio de Schwarzschild (denominado com r_s). Ao analisarmos a equação (2.11) aparentemente quando $r = 2M$ temos uma singularidade do espaço-tempo, porém é possível remover essa singularidade

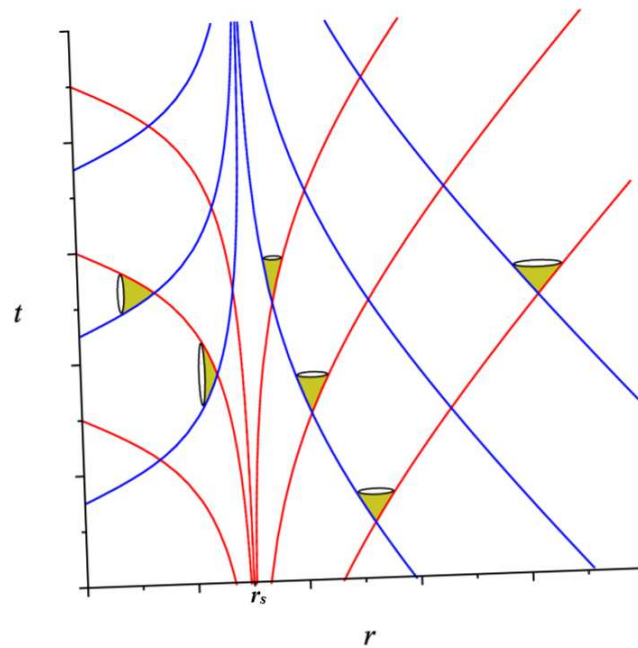


Figura 2.1: Representação gráfica da mudança das curvas, do tipo tempo para o tipo espaço, ao se atravessar a barreira limite em r_s . As linhas azuis representam as geodésicas de entrada e as vermelhas as geodésicas de saída. Fonte: [55]

por uma mudança de coordenadas. Porém, em $r = 0$ existe uma singularidade física, sendo essa irremovível. É possível confirmar esses resultados ao analisarmos o invariante escalar do tensor de Riemann $R_{abcd}R^{abcd} = 48M^2r^{-6}$, quando $r \rightarrow 0$ a equação diverge. Uma representação pode ser vista na figura 2.2.

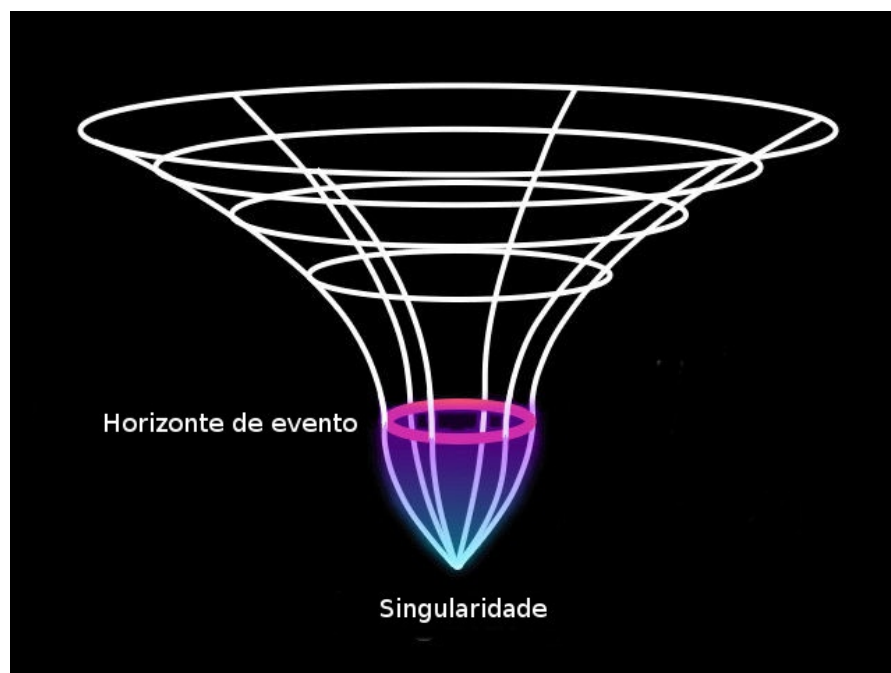


Figura 2.2: Representação gráfica de um buraco negro de Schwarzschild. Fonte: [56]

Métrica de Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordström obtida através da equação de Einstein-Maxwell, na forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta - \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.12)$$

onde q é a carga e se $q = 0$ recaímos na métrica de Schwarzschild. De forma direta é perceptível que a métrica é esfericamente simétrica, estática e assintoticamente plana. Existe outro teorema de Birkhoff afirmando que qualquer solução esfericamente simétrica das equações de Einstein-Maxwell deve ser estática e assintoticamente plana [54].

Conforme o elemento de linha (2.12), ele se torna degenerado quando analisamos a relação entre a carga e a massa [57]: $|q| < M$ então há dois horizontes de eventos em $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - q^2}$. O exterior r_+ é quantitativamente similar ao espaço-tempo de Schwarzschild com $r_+ = 2M$, porém diferente do que acontece em Schwarzschild, o objeto que entra nessa região tem a opção de seguir uma trajetória do tipo tempo e atravessa o segundo horizonte de evento $r = r_-$ e cair na singularidade física $r = 0$. A superfície $r = r_-$ é um horizonte interno. Alternativamente, o observador pode seguir uma geodésica do tipo tempo e atravessar a superfície $r = r_-$, onde não cai na singularidade $r = 0$ e atravessam novamente a superfície $r = r_-$. Isso é possível devido à característica tipo tempo da singularidade $r = 0$.

Resumindo uma partícula que atravesse da região exterior, que chamaremos de I, ao atravessar para região II não consegue voltar para região I. Ao adentrar à região II, a partícula é direcionada à região III e para singularidade. Na região III a partícula já não está mais direcionada para singularidade, ou seja, não necessariamente ela vai cair na singularidade. Uma representação pode ser vista na figura 2.3.

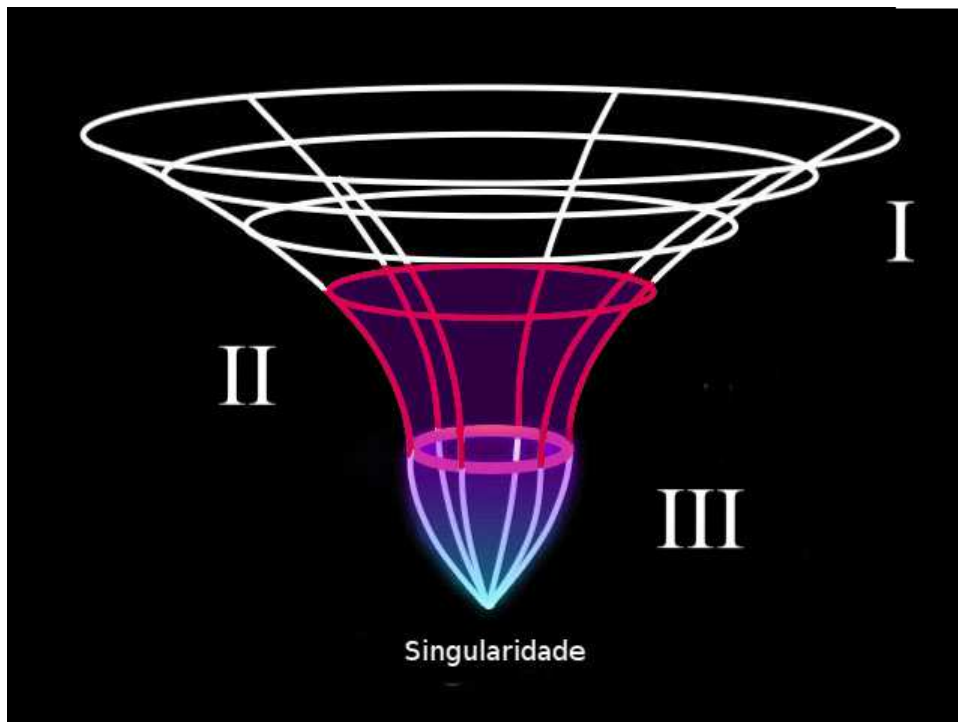


Figura 2.3: Representação gráfica de um buraco negro de Reissner-Nordström. Fonte: Adaptado de [58]

Para $|q < M|$, tudo se comporta quando r é positivo, ou seja, o elemento de linha é não singular para todos os valores de r exceto em $r = 0$. Já em $|q \geq M|$ a singularidade central em $r = 0$ é visível para o mundo exterior, chamada singularidade nua.

Métrica de Janis-Newman-Winicour

Apresentado em 1968 por James, Newman e Winicour [38], a solução das equações de Einstein utilizando um campo escalar sem massa Φ ($R_{ab} = \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi$, $\nabla_a \nabla^a \Phi = 0$). A solução com simetria esférica coincide com o limite exterior de Schwarzschild ($r > 2M$), porém a esfera se torna apenas um ponto, ou seja, o objeto não é mais descrito diretamente pela massa. Não existe um motivo quanto ao estudo de buracos negros para escolhermos esse buraco negro em vez do de Schwarzschild, já que os autores provaram que as propriedades geométricas se mantêm, mas quando se trata de estudos do comportamento na região do horizonte de evento, a métrica permite que a análise seja feita muito mais próxima do horizonte de evento.

O elemento de linha é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^\gamma dt^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{-\gamma} dr^2 - \left(1 - \frac{1}{r}\right)^{1-\gamma} r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.13)$$

onde

$$\Phi(r) = \frac{q}{2\sqrt{M^2 + q^2}} \ln \left(1 - \frac{1}{r}\right), \quad (2.14)$$

e

$$\gamma = \frac{M}{\sqrt{M^2 + q^2}}. \quad (2.15)$$

O horizonte de evento neste caso é dado por $r = 2\sqrt{M^2 + q^2}$, essa métrica admite que o horizonte de evento superior ao definido pela métrica de Reissner-Nordström quando $q < M$.

Com a base da relatividade geral definida, apresentamos a seguir o efeito de lentes gravitacionais, efeito esse que surgiu apresentado durante a formulação da relatividade geral e que foi de grande importância para a aceitação da mesma.

3 LENTES GRAVITACIONAIS

Lenteamento Gravitacional consiste no fenômeno onde a radiação eletromagnética é defletida ao passar pelo campo gravitacional de um objeto massivo [12]. Bem antes da criação da teoria da Relatividade Geral de Einstein, já se suspeitava que a gravidade influenciava o comportamento da luz. Porém, apenas após Einstein ter formulado a teoria da Relatividade Geral que o efeito foi descrito de forma determinada.

Podemos classificar primeiramente o efeito considerando a “força” do campo gravitacional do objeto. Se o campo é dito fraco, a relatividade geral é reduzida a aproximações newtonianas. Um desenvolvimento desse estudo foi feito por Schneider *et al.* no contexto astrofísico [59]. Se a análise é feita de forma a utilizar o espaço-tempo, neste caso os raios seguem geodésicas nulas no espaço quadri-dimensional, o qual é solução da Relatividade Geral de Einstein (capítulo 2). Neste trabalho estamos interessados no fenômeno forte, esse efeito permite, pelas propriedades das imagens geradas, investigar regiões extremamente próximas do objeto investigado, principalmente se esse objeto for um buraco negro. Outra possibilidade é comparar os resultados do lenteamento forte na Relatividade Geral de Einstein com teorias alternativas na forma de confrontar suas predições.

Neste capítulo, apresentamos primeiramente a base histórica de lentes gravitacionais, incluindo o desenvolvimento histórico para o efeito fraco. Na sessão 3.2 falaremos do efeito forte e seu desenvolvimento matemático para a deflexão. Na sessão 3.3 falaremos sobre o desenvolvimento da solução analítica proposta por Bozza [34].

3.1 Eventos históricos

Na primeira edição de seu livro em 1704 Sir Isaac Newton fez o primeiro questionamento sobre a luz ser desviada por objetos [60]. Demorou até 1783 para John Michell reviver essa ideia, ao escrever a Henry Cavendish sobre um método de como se obter a massa de estrelas medindo a redução da velocidade da luz conforme ela se propaga da estrela até à terra. Propondo a ideia de objetos em que a gravidade era de tal forma que fariam com que a luz voltassem para dentro desse objeto e também que seria possível encontrar tais objetos escuros ao analisar o comportamento de estrelas ao redor dele [61]. Cavendish então impulsionado pelas ideias passadas a ele calculou, por 1784, a deflexão da luz por um corpo, assumindo a teoria corpuscular da luz e a gravitação de Newton, porém ele nunca publicou esse trabalho, sendo obtido somente após a sua morte [62].

Ao mesmo tempo, Pierre-Simon Laplace em 1796, independente da descoberta de Michell, propôs que a velocidade de uma partícula teste pode escapar do campo gravitacional de um objeto esférico de massa M e raio R , se sua velocidade inicial for maior que a velocidade de escape $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$, onde G é a constante gravitacional de Newton. Essa velocidade aumenta o quanto mais compacto o objeto for e ela atinge a velocidade

da luz c quando o raio é menor que $R_s \approx 2.95 \frac{M}{M_\odot} km$ onde M_\odot é a massa do sol. Então, como Michell, ele descobriu que a força atrativa de um corpo compacto poderia ser tão grande que nem a luz conseguiria escapar dele e o objeto seria totalmente preto [63].

Em 1801 J. Soldner publicou um artigo que investigava um erro ao se calcular a posição angular de estrelas causado pela deflexão da luz. Motivado por Laplace, ele calculou a órbita de um corpo com velocidade constante c que passa perto de uma massa esférica M com parâmetro de impacto r [64]. Considerando a partícula começando a uma grande distância da massa esférica, ela é defletida por um ângulo α , considerando apenas pequenos ângulos, o ângulo é dado por

$$\alpha \simeq \frac{2GM}{c^2 r}, \quad (3.1)$$

neste caso o valor da deflexão da luz é dito Newtoniano e corresponde com os resultados de Cavendish.

Já em 1911, Einstein, desconhecendo as descobertas de Soldner, obteve o mesmo valor para o ângulo de deflexão a partir do princípio de equivalência e assumindo uma métrica euclidiana [65]. Einstein acreditou que seria de grande interesse dos astrônomos investigar mais a fundo esse efeito. Um grupo na Alemanha se interessou pelo trabalho e foi marcada uma expedição para investigar o eclipse total do sol na Rússia, porém, pouco tempo após a expedição chegar na Rússia, Primeira Guerra Mundial começou e a expedição foi capturada pelos russos [66].

Com a equação da Relatividade Geral completa, ele conseguiu obter a equação completa do ângulo de deflexão [67].

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 r} = \frac{R_s}{r}. \quad (3.2)$$

Em 29 de maio de 1919 em Sobral no Ceará um grupo de astrônomos mediram o ângulo de deflexão durante um eclipse solar [68]. O que trouxe a grande fama a Einstein, mesmo que com resultados não muito precisos, o cálculo newtoniano podia ser descartado, estabelecendo assim a Relatividade Geral de Einstein como sendo uma teoria fundamental da gravitação.

Testes sobre Relatividade Geral são feitos constantemente, como a detecção da deflexão da luz por rádio interferômetros [69], em campos fracos em geral [3].

Com o grande sucesso da observação de 1919, novas descobertas foram feitas. O. J. Lodge foi o primeiro a utilizar o termo lente. Ele discutiu sobre qual seria a dependência radial que o índice de refração deve ter para fornecer a mesma deflexão da luz que a gravidade. Isso incluiu a ideia de que a atmosfera solar deveria variar com o inverso da distância, o que parecia impossível; mas esse era o jeito em que a tensão do éter deveria variar para causar a gravitação [70].

A. S. Eddington foi o primeiro a apontar a possível existência de múltiplas imagens caso sistema esteja suficientemente alinhado [68]. Porém, em 1924, O. Chwolson publicou um artigo em que ele considerava um plano de estrelas mais distantes e a deflexão causada por essas estrelas produziria imagens secundárias. Essa segunda imagem se fundiria visualmente a estrela, impossibilitando separá-las ao observar por telescópios, mas seu espectro seria a superposição das duas imagens [71]. Chwolson também apresentou a ideia em que se a estrela frontal e a estrela no plano distante estiverem perfeitamente alinhadas, um efeito como anéis surgiriam ao redor da estrela. Esse efeito é conhecido como "Anéis de Einstein", um exemplo pode ser visto na figura 3.1.



Figura 3.1: Anéis de Einstein encontrados no aglomerado de galáxias SDSS J0146-0929. Fonte: [72].

Em 1937 Zwicky [73] sugeriu que a observação de múltiplas imagens através da deflexão da luz poderia não só ser observado como eles podem ser descobertos. Ele estimou que o ângulo de deflexão causado por uma nebulosa poderia ser utilizado como ferramenta para testes da Relatividade Geral ao utilizar a ampliação de lentes gravitacionais. Isso permitiria ver nebulosas a distâncias maiores do que as permitidas por telescópios e também permitiria determinar a massa de nebulosas ao utilizar a deflexão da luz ao redor dela.

Após 30 anos em que lentes gravitacionais ficaram dormentes no meio científico, em 1963 com o crescimento da rádio astronomia, foram descobertos e identificados os quasares “quasi-stellar radio sources” [74]. De aparência pontual, espectro proeminente, desvio para o vermelho levando a estar a uma grande distância e sua grande luminosidade, tornaram os quasares fontes ideais para lentes gravitacionais.

Ao mesmo tempo, o trabalho de Zwicky foi sendo renascido. Klimov [75], Liebes [76] e Refsdal [77] independentemente reabriram a discussão. Trazendo realizações principalmente por Refsdal, o qual fez o uso de lentes gravitacionais para medir a constante de Hubble [78].

Em 1979 foi então que Walsh *et al.* [79] descobriu o primeiro sistema binário de quasares, e foi confirmado que, na verdade, era apenas um quasar, onde duas imagens foram produzidas por efeito de lentes gravitacionais. Sendo a primeira detecção de lentes gravitacionais desde 1919 em Sobral. Firmando assim o grande interesse em lentes gravitacionais e diversas descobertas observacionais foram feitas [80].

3.2 Formalismo do lenteamento

Nessa seção desenvolvemos o formalismo matemático que descreve o lenteamento gravitacional. Seguindo o desenvolvimento apresentado por Weinberg [81]. Partindo da

noção do movimento livre de uma partícula num campo gravitacional estático e isotrópico, considerando $c = 1$, definimos um elemento de linha geral obtida no capítulo 2 na forma

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.3)$$

Da equação (A.66) obtendo os componentes não nulos da conexão afim, escrevemos as equações da geodésica (A.67):

$$\frac{dr^2}{d\lambda^2} + \frac{B'(r)}{2B(r)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{r}{B(r)} \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 - r \frac{\sin^2\theta}{B(r)} \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 + \frac{A'(r)}{2B(r)} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2 \cot\theta \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} = 0, \quad (3.6)$$

$$0 = \frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{A'(r)}{A(r)} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0. \quad (3.7)$$

Como o campo é isotrópico, considerando a órbita como confinada no plano equatorial, ou seja,

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (3.8)$$

com isso a equação (3.5) é satisfeita e desconsideramos θ como uma variável dinâmica. Dividindo (3.6) e (3.7) por $d\phi/d\lambda$ e $dt/d\lambda$, respectivamente, obtemos

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ \ln \frac{d\phi}{d\lambda} + \ln r^2 \right\} = 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ \ln \frac{dt}{d\lambda} + \ln A \right\} = 0. \quad (3.10)$$

Isso nos fornece duas constantes de movimento. Uma que vai ser absorvida na definição de λ . Normalizando λ então (3.10) é

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{A(r)}, \quad (3.11)$$

como $A(r)$ é aproximado a uma unidade, λ é a coordenada t . A outra constante é obtida de (3.9) e faz o papel do momento angular por unidade de massa

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = J = \text{constante}. \quad (3.12)$$

Inserindo (3.8), (3.11) e (3.12) em (3.4) obtemos

$$0 = \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{B'(r)}{2B(r)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - \frac{J^2}{r^3 B(r)} + \frac{A'(r)}{2B(r)A^2(r)}. \quad (3.13)$$

Multiplicando esta equação por $2B(r)dr/d\phi$, reescrevemos na forma

$$\frac{d}{d\lambda} \left\{ B(r) \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{A(r)} \right\} = 0.$$

E a última constante de movimento é

$$B(r) \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{A(r)} = -E = \text{constante}, \quad (3.14)$$

O tempo próprio τ (A.58), pode ser determinado das equações (3.3), (3.8), (3.11), (3.12) e (3.14), encontramos

$$d\tau^2 = E d\lambda^2, \quad (3.15)$$

a relação $d\tau/d\lambda$ tem de ser constante por isso os valores de E são

$$E > 0 \quad \text{para partículas}, \quad (3.16)$$

$$E = 0 \quad \text{para fótons}. \quad (3.17)$$

Estamos interessados no formato da órbita, ou seja, em r como função de ϕ . A órbita pode ser obtida diretamente ao eliminar $d\lambda$ da equação (3.12) e (3.14)

$$\frac{B(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 A(r)} = -\frac{E}{J^2}, \quad (3.18)$$

e a solução pode ser obtida da quadratura

$$\phi = \pm \int \frac{B(r)^{1/2} dr}{r^2 \left(\frac{1}{J^2 A(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}}. \quad (3.19)$$

Considerando uma partícula vindo do infinito aproximando um objeto massivo, por exemplo, o sol (Figura 3.2), no infinito $A(\infty) = B(\infty) = 1$, o movimento tem velocidade constante V e segue uma reta. Os parâmetros que descrevem o movimento são

$$b \simeq r(\phi - \phi_\infty),$$

$$-V \simeq \frac{dr}{dt},$$

onde b é o parâmetro de impacto e ϕ_∞ é a direção incidente. Satisfazendo a equação de movimento no infinito com $A = B = 1$, as constantes de movimento são

$$J = bV^2, \quad (3.20)$$

$$E = 1 - V^2. \quad (3.21)$$

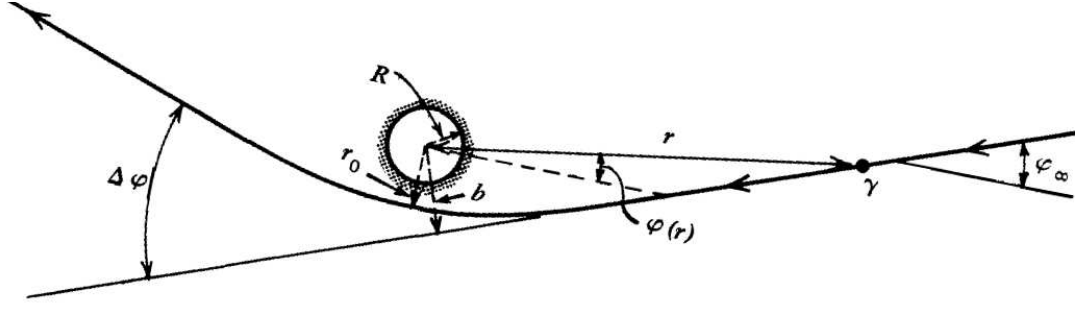


Figura 3.2: Representação da deflexão da luz. O raio vindo do infinito encontra um corpo massivo, assim desviando de sua trajetória original em um ângulo $\Delta\phi$. Fonte: Adaptado de [81]

A órbita é então escrita por (3.19)

$$\phi = \phi_{\infty} + \int \frac{B(r)^{1/2} dr}{\frac{r^2}{bV^2} \left(\frac{1}{A(r)} - 1 + V^2 - \frac{b^2 V^4}{r^2} \right)^{1/2}}, \quad (3.22)$$

onde b pode ser reescrito ao analisarmos o ponto de distância mínima r_0 , na equação (3.19) $d\phi/dt = 0$, logo utilizando a equação (3.20) obtemos

$$b = \frac{r_0}{V^2} \left(\frac{1}{A(r_0)} - 1 + V^2 \right)^{1/2}. \quad (3.23)$$

A mudança total em ϕ , conforme r diminui do infinito para seu valor mínimo r_0 e depois aumenta novamente para infinito, é equivalente ao dobro da mudança de infinito até r_0 . E se a trajetória fosse uma linha reta essa mudança teria um valor equivalente a π , logo a deflexão da órbita de uma linha reta é escrita como

$$\Delta\phi = 2|\phi(r_0) - \phi_{\infty}| - \pi. \quad (3.24)$$

Para a luz podemos reescrever a equação (3.22), onde $V = 1$, denominaremos a deflexão da luz pela letra grega α e reescrevendo $r^2 = C(r)$, notação essa que carregaremos durante esse trabalho.

$$\alpha = 2|\phi(r_0) - \phi_{\infty}| - \pi, \quad (3.25)$$

onde

$$\phi(r) - \phi_{\infty} = \int_r^{\infty} \frac{B(r)^{1/2} dr}{\frac{C(r)}{b} \left(\frac{1}{A(r)} - \frac{b^2}{C(r)} \right)^{1/2}}, \quad (3.26)$$

neste caso a equação (3.23), para o parâmetro de impacto b , é reescrita na forma

$$b = \sqrt{\frac{C(r_0)}{A(r_0)}}. \quad (3.27)$$

É possível substituir a métrica de Schwarzschild ou Reissner-Nordström nos termos $A(r)$ e $B(r)$ e as integrais são integrais elípticas. Na seção 3.3 iremos falar sobre outro método de se obter o ângulo de deflexão.

Resultado de Einstein para o ângulo de deflexão

Para exemplificar um caso particular, utilizamos o resultado obtido na equação (3.26) recorrendo à expansão de Robertson [82] para os termos $A(r)$ e $B(r)$ na forma

$$A(r) = 1 + 2\gamma \frac{M}{r} + \dots$$

$$B(r) = 1 - 2\frac{M}{r} + \dots$$

A equação da deflexão da luz (3.26) toma a forma

$$\phi(r) - \phi_\infty = \int_r^\infty \frac{dr}{r \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}} \left[1 + \frac{\gamma M}{r} + \frac{Mr}{r_0(r+r_0)} + \dots \right]$$

a integral é elemental e fornece o resultado

$$\phi(r) - \phi_\infty = \sin^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right) + \frac{M}{r_0} \left(1 + \gamma - \gamma \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2} - \sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}} \right) + \dots$$

Para a primeira ordem M/r_0 , o ângulo de deflexão, para a Relatividade Geral ($\gamma = 1$) é

$$\alpha = \frac{4M}{r_0} \tag{3.28}$$

resultado esse que é exatamente o qual comentamos anteriormente na equação (3.2), onde nesse caso utilizamos $c = G = 1$.

3.3 Desenvolvimento Analítico

Na sessão anterior vimos como partículas, principalmente a luz, se comporta ao encontrar o campo gravitacional de corpos massivos. Se esse corpo for definido então como buracos negros, o efeito de lente gravitacional é do tipo forte. Diversos estudos em lenteamento em buracos negros foram feitos entre eles, no ano 2000 Virbhadra e Ellis [83] desenvolveram uma nova equação para lentes gravitacionais, resultando no surgimento do lenteamento forte.

Esse estudo utilizou como lente um buraco negro de Schwarzschild no centro da nossa galaxia aplicando um processo numérico. Em seguida Frittelli *et al.* [84], propôs a definição da equação da lente sem referência do espaço de fundo, construindo assim uma equação exata para o espaço-tempo de Schwarzschild. O estudo de um lenteamento generalizado para o espaço-tempo esféricamente simétrico e estático foi primeiramente estudado por Bozza [85] e depois por Tsukamoto [86].

3.3.1 Expansão do ângulo de deflexão

Seguiremos os passos feitos por Bozza em [85, 34] para chegar ao ângulo de deflexão analiticamente. Partimos de um elemento de linha genérico do espaço-tempo esfericamente simétrico e estático dado por

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.29)$$

Como vimos o ângulo de deflexão é dado pela equação (3.25), reescrevendo a notação na forma

$$\alpha(r_0) = I(r_0) - \pi, \quad (3.30)$$

onde $I(r_0)$ é a integral (3.26) e r_0 é a distância mínima de aproximação.

Bozza mostra então que nessa integral existe uma divergência logarítmica que permite reescrever o ângulo de deflexão na forma

$$\alpha(b) = -\bar{a} \ln\left(\frac{b}{b_m} - 1\right) + \bar{c} + O(b - b_m), \quad (3.31)$$

onde \bar{a} e \bar{c} dependem das funções da métrica avaliadas no raio da fotosfera r_m que pode ser obtido da equação (3.14) ao definirmos o potencial efetivo na forma $V_{eff} = A(r)C(r)/C(r)^2$, o seu extremo $dV_{eff}/dr = 0$, ou equivalentemente

$$\frac{C'(r)}{C(r)} = \frac{A'(r)}{A(r)}, \quad (3.32)$$

a raiz positiva nos fornece o raio da fotosfera r_m . O parâmetro de impacto b é dado pela solução da equação (3.27)

$$b = \sqrt{\frac{C(r_0)}{A(r_0)}}. \quad (3.33)$$

3.3.2 Os coeficientes da expressão aproximada para o ângulo de deflexão

Vimos que o ângulo de deflexão deve tomar a forma da equação (3.31), dando continuidade vamos determinar os coeficientes \bar{a} e \bar{c} . Definimos duas novas variáveis:

$$y = A(r), \quad (3.34)$$

$$z = \frac{y - y_0}{1 - y_0}, \quad (3.35)$$

onde $y_0 = A_0$. A integral (3.26) passa a ser escrita como,

$$I(r_0) = \int_0^1 K(z, r_0) f(z, r_0) dz, \quad (3.36)$$

onde,

$$K(z, r_0) = \frac{2\sqrt{By}}{CA'}(1 - y_0)\sqrt{C_0}, \quad (3.37)$$

$$f(z, r_0) = \frac{1}{\sqrt{y_0 - [(1 - y_0)z + y_0] \frac{C_0}{C}}}. \quad (3.38)$$

A função $K(z, r_0)$ é regular para todos os valores de z e r_0 , enquanto $f(z, r_0)$ diverge em $z \rightarrow 0$. Para obtermos a ordem da divergência da integral, expandimos o argumento da raiz quadrada em $f(z, r_0)$ até a segunda ordem em z .

$$f(z, r_0) \sim f_0(z, r_0) = \frac{1}{\sqrt{\zeta z + \beta z^2}}, \quad (3.39)$$

onde

$$\zeta = \frac{1 - y_0}{C_0 A'_0} (C'_0 y_0 - C_0 A'_0), \quad (3.40)$$

$$\beta = \frac{(1 - y_0)}{2C_0^2 A_0^3} [2C_0 C'_0 A_0'^2 + (C_0 C'_0 - 2C_0'^2) - C_0 C'_0 y_0 A_0'']. \quad (3.41)$$

No instante em que ζ for não nulo, a ordem principal da divergência para f_0 é $z^{-1/2}$, que pode ser integrado e resulta em uma quantidade finita. Porém, quando ζ for nulo a divergência é z^{-1} fazendo a integral divergir.

Se examinamos a forma de ζ , observamos que o mesmo se anula em $r_0 = r_m$, onde r_m vem dado pela equação (3.32). Para resolvermos a integral, a dividimos em duas partes

$$I(r_0) = I_D(r_0) + I_R(r_0), \quad (3.42)$$

onde

$$I_D(r_0) = \int_0^1 K(0, r_m) f_0(z, r_m) dz, \quad (3.43)$$

contém a divergência e

$$I_R(r_0) = \int_0^1 g(z, r_0) dz, \quad (3.44)$$

com

$$g(z, r_0) = K(z, r_0) f(z, r_0) - K(0, r_m) f_0(z, r_m), \quad (3.45)$$

sendo a integral sem a divergência.

A integral I_D pode ser resolvida exatamente como

$$I_D(r_0) = K(0, r_m) \frac{2}{\sqrt{\beta}} \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\zeta + \beta}}{\sqrt{\zeta}}, \quad (3.46)$$

onde os componentes são desenvolvidos como

$$\zeta = \frac{2\beta_m A'_m}{1 - y_m} (r_0 - r_m) + O(r_0 - r_m)^2, \quad (3.47)$$

$$\beta_m = \frac{C_m (1 - y_m)^2 (C_m'' y_m - C_m A''(r_m))}{2y_m^2 C_m^2}, \quad (3.48)$$

e com isso podemos escrever

$$I_D(r_0) = -a \ln \left(\frac{r_0}{r_m} - 1 \right) + c_D + O(r_0 - r_m), \quad (3.49)$$

com

$$a = \frac{K(0, r_m)}{\sqrt{\beta_m}}, \quad (3.50)$$

$$c_D = \frac{K(0, r_m)}{\sqrt{\beta_m}} \ln \left(\frac{2(1 - y_m)}{A'_m r_m} \right). \quad (3.51)$$

Para encontrarmos o valor correto do coeficiente c da equação (3.31), temos que adicionar a equação (3.51) ao outro termo que vem da parte regular da integral. Analisando agora o termo I_R e assim conseguimos escrever.

$$I_R(r_0) = \int_0^1 g(z, r_m) dz + O(r_0 - R_m), \quad (3.52)$$

onde

$$c_R = I_R(r_m), \quad (3.53)$$

sendo esse o termo que precisamos, podemos então escrever o coeficiente c considerando o termo $-\pi$ que vem do ângulo de deflexão,

$$c = -\pi + c_D + c_R. \quad (3.54)$$

O termo c_R pode ser facilmente calculado para qualquer buraco negro com simetria esférica, já que a integral não possui divergência.

A partir da equação (3.25), o parâmetro de impacto mínimo é

$$b_m = \sqrt{\frac{C_m}{y_m}}, \quad (3.55)$$

expandindo b em termos da distância à fotosfera

$$b - b_m = d(r_0 - r_m), \quad (3.56)$$

onde

$$d = \frac{C_m'' y_m - C_m A_m''}{4\sqrt{y_m^3 C_m}} = \beta_m \sqrt{\frac{y_m}{c^3}} \frac{C_m'^2}{(1 - y_m)^2}. \quad (3.57)$$

Escrevemos então o ângulo de deflexão como função de b

$$\alpha(b) = -\bar{a} \ln \left(\frac{b}{b_m} - 1 \right) + \bar{c}, \quad (3.58)$$

$$\bar{a} = \frac{a}{2} = \frac{K(0, r_m)}{2\sqrt{\beta_m}}, \quad (3.59)$$

$$\bar{c} = c + \frac{a}{2} \ln \frac{C_r^2}{b_m} = -\pi + b_r + \bar{a} \ln \frac{2\beta_m}{y_m}. \quad (3.60)$$

Com isso concluímos a discussão sobre a forma do ângulo de deflexão em um campo gravitacional forte. A seguir aplicaremos esse desenvolvimento no espaço-tempo de buraco negros já discutidos na seção 2.2.

3.4 Ângulo de deflexão nas métricas de buracos negros

Como vimos anteriormente, a métrica de Schwarzschild descreve o campo gravitacional de um objeto massivo com simetria esférica e estático. E a métrica de Reissner-Nordström um objeto também esfericamente simétrico e estático, porém com a adição de carga q . Demonstramos que quando a carga q vai a zero ela recai na métrica de Schwarzschild, por isso faremos o desenvolvimento do ângulo de deflexão, a princípio, na métrica de Reissner-Nordström e ao final ao levar a carga a zero obteremos os resultados para Schwarzschild e por último a métrica de campo escalar Janis-Newman-Winicour.

3.4.1 Ângulo de deflexão na métrica de Reissner-Nordström

Da equação (2.12)

$$A(r) = 1 - \frac{1}{R} + \frac{Q^2}{R^2}, \quad (3.61)$$

$$B(r) = \left(1 - \frac{1}{R} + \frac{Q^2}{R^2}\right)^{-1}, \quad (3.62)$$

$$C(r) = R^2, \quad (3.63)$$

onde reescrevemos sem perda de generalização

$$R = \frac{r}{2M}, \quad Q = \frac{q}{2M}. \quad (3.64)$$

Satisfazendo as condições que definimos no desenvolvimento do ângulo de deflexão, porém como definimos $R = r/2M$ por simplificação, sabemos que quando $Q \geq 0.5$ não há horizonte e violações de causalidade aparecem [87, 88]. Então restringiremos $Q < 0.5$ para todas as análises que faremos.

Os coeficientes ζ (3.47) e β (3.48) são

$$\zeta = \left(2 - \frac{3}{R_0} + \frac{4Q^2}{R_0^2}\right) \frac{R_0 - Q^2}{R_0 - 2Q^2}, \quad (3.65)$$

$$\beta = \left(\frac{3}{R_0} - 1 - \frac{9Q^2}{R_0^2} + \frac{8Q^4}{R_0}\right) \frac{R_0(R_0 - Q^2)^2}{(R_0^3 - 2Q^2)}. \quad (3.66)$$

O raio da fotosfera pode ser obtido da equação (3.32), com resultado

$$R_m = \frac{3}{4} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{32Q^2}{9}}\right), \quad (3.67)$$

o que nos leva a

$$\beta_m = \left[-9 + 32Q^2 - 144Q^4 + 512Q^6 + \sqrt{9 - 32Q^2} \cdot (3 + 16Q^2 - 80Q^4)\right] [9(Q - 4Q^3)]^{-2}. \quad (3.68)$$

O termo regular c_R neste caso não pode ser calculado analiticamente, mas podemos expandir a integral (3.52) em potências de Q e avaliar os coeficientes um por um. Obtemos

$$c_R = c_{R,0} + c_{r,2}Q^2 + O(Q^4), \quad (3.69)$$

encontrando para $c_{R,0}$

$$c_{R,0} = 2 \ln [6 (2 - \sqrt{3})] = 0.9496, \quad (3.70)$$

e a correção quadrática em Q fornece o coeficiente

$$c_{R,2} = \frac{8}{9} \left\{ \sqrt{3} - 4 + \ln [6 (2 - \sqrt{3})] \right\} = -1.5939. \quad (3.71)$$

Seguindo então o desenvolvimento, escrevemos os coeficientes para a fórmula do ângulo de deflexão

$$\bar{a} = \frac{R_m \sqrt{R_m - 2Q^2}}{\sqrt{(2 - R_m)R_m^2 - 2Q^2 R_m + 8Q^4}}, \quad (3.72)$$

$$\bar{c} = -\pi + c_R + \bar{a} \ln \left\{ 2(R_m - Q^2)^2 \cdot \frac{[(3 - R_m)r_m^2 - 9Q^2 R_m + 8Q^4]}{(R_m - 2Q^2)^3 (R_m^2 - R_m + Q^2)} \right\}, \quad (3.73)$$

$$b_m = \frac{(3 + 9\sqrt{9 - 32Q^2})^2}{4\sqrt{2}\sqrt{2 - 8Q^2 + \sqrt{9 - 32Q^2}}}. \quad (3.74)$$

Chegamos, enfim, às componentes do ângulo de deflexão que pode ser calculado fornecendo o valor da carga e os parâmetros de impactos.

3.4.2 Ângulo de deflexão na métrica de Schwarzschild

Para obter o ângulo de deflexão em Schwarzschild podemos reduzir a métrica de Reissner-Nordström tomando o valor da carga igual a zero. Obtendo assim

$$\bar{a} = 1, \quad (3.75)$$

$$\bar{c} = -0.4002 \quad (3.76)$$

$$b_m = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \quad (3.77)$$

E o ângulo de deflexão para Schwarzschild toma a forma

$$\alpha(b) = -\ln \left(\frac{b}{b_m} \right) + \ln [216(7 - 4\sqrt{3})] - \pi. \quad (3.78)$$

3.4.3 Ângulo de deflexão na métrica de J-N-W

Como definimos os termos da métrica no capítulo 2, a métrica permite uma maior aproximação do horizonte de evento do buraco negro, quando comparada a métrica de Reissner-Nordström. Os termos para o ângulo de deflexão são

$$\bar{a} = 1, \quad (3.79)$$

$$\bar{c} = -\pi + c_R + 2 \ln \frac{[(2\gamma + 1)^\gamma - (2\gamma - 1)^\gamma]^2 (2\gamma + 1)}{2\gamma^2 (2\gamma - 1)^{2\gamma-1}}, \quad (3.80)$$

onde $c_R = 0.9496 - 0.1199(\gamma - 1)$.

$$b_m = \frac{(2\gamma + 1)^{\gamma+\frac{1}{2}}}{2(2\gamma - 1)^{\gamma-\frac{1}{2}}}. \quad (3.81)$$

Neste caso a métrica admite uma fotosfera mais próxima do horizonte de evento quando $\gamma > \frac{1}{2}$, ou seja, quando $q < M$.

4 CONCEITOS BÁSICOS DE SISTEMAS DINÂMICOS

A dinâmica não-linear é um ramo da matemática que estuda a evolução temporal governada por equações. Em muitos fenômenos naturais e sociais há uma certa dificuldade em prever o seu estado final, sendo essa uma característica intrínseca do próprio fenômeno. Esse efeito encontrado na natureza traz grandes questionamentos, não só sobre objetos naturais como: qual a causa da formação de cristais e flocos de neve simétricos? Ou questionamentos mais matemáticos como: como podemos encontrar trajetórias caóticas? Existe simetria local no caos? Para obter a resposta é preciso o estudo da dinâmica não-linear.

Sistemas dinâmicos são geralmente descritos por equações diferenciais. A princípio o estudo de equações diferenciais consistia em buscar soluções analíticas. Além da dificuldade muitas vezes de se obter a forma analítica de equações não-lineares, o comportamento dinâmico de sistemas nem sempre pode ser determinado de forma analítica. O estudo de sistemas dinâmicos cresceu no final do século *XIX* e fez grandes contribuições para se entender diversos fenômenos da dinâmica não-linear. Os sistemas dinâmicos podem ser descritos como processos contínuos ou discretos no tempo.

A ciência, a dinâmica não-linear é de grande importância, tendo como exemplos na física: atmosfera terrestre, fluidos, plasmas [48, 47] e também em campos gravitacionais [31, 89]; biologia: sistemas neurais [90], processos bioquímicos, ciências sociais, espalhamento de doenças [91], flutuação de preços, bolsa de valores; e outros [92].

O nosso trabalho será baseado no estudo de sistemas discretos no tempo, porém, de modo a complementação teórica, vamos apresentar os sistemas Hamiltonianos, onde discutimos o básico da mecânica hamiltoniana e suas derivações, a noção de fluxo e suas propriedades. Em seguida descrevemos os sistemas discretos na forma de mapas e suas propriedades. Sistemas de tempo contínuo podem ser visto com mais detalhes em [39].

Um pouco de história

Não há soluções exatas para sistemas compostos por três componentes ou mais, porém é possível recorrer a métodos numéricos para se resolver equações de movimento de partículas.

A mecânica celeste impulsionada pelas descobertas feitas por Sir. Isaac Newton e a lei de movimento de Kepler permitiu obter previsões do comportamento de planetas, estrelas e cometas. No entanto, a descoberta de comportamentos irregulares e imprevisíveis abalou a confiança nos métodos anteriores. Mesmo que as equações de um sistema caótico estejam corretas, de um ponto de vista físico, as previsões podem estar comprometidas por características matemáticas do sistema.

No fim do século *XIX* foi criado um concurso com prêmio em dinheiro para aquele que conseguisse resolver certos problemas matemáticos, um deles a estabilidade do movimento dos corpos do sistema solar. Poincaré forneceu então sua monografia descrevendo o problema de três corpos e ganhou o prêmio (o problema geral com mais de três corpos continua em aberto até hoje). Poincaré, chamado agora de o pai da dinâmica não linear, publicou uma versão ampliada e corrigida dos seus resultados, um dos trabalhos mais fundamentais para dinâmica não-linear [20].

4.1 Sistemas Hamiltonianos

As equações de Newton são equações determinísticas e descrevem corretamente o movimento de partículas num referencial inercial, mas às vezes partículas se comportam de tal forma que é impossível utilizar as equações newtonianas. Lagrange escreveu um método de se resolver equações de movimento, conhecida como equação de Lagrange (ver A.15). A parte do desenvolvimento de Lagrange existe outra formulação utilizando a função hamiltoniana. Originada por Sir. William Rowan Hamilton em 1833.

4.1.1 Mecânica Hamiltoniana

Na mecânica lagrangiana (a qual vimos aplicada ao caso da relatividade geral no capítulo 2), as coordenadas são tratadas como variáveis temporais. Na mecânica hamiltoniana as variáveis são as coordenadas generalizadas e o momento generalizado p_i , onde a posição de um sistema pode ser determinado em qualquer tempo t . Por exemplo, podemos escrever as coordenadas q_1, q_2, q_3, \dots definindo a posição de um sistema dinâmico e suas primeiras derivadas $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots$ definem suas velocidades generalizadas. Definimos a transformada da Lagrangiana na forma da Hamiltoniana

$$H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L \quad (4.1)$$

onde $\dot{q}_i = dq_i/dt$ e L a Lagrangiana. E as equações de Hamilton são

$$\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (4.2)$$

Na descrição Hamiltoniana, a dinâmica do sistema é descrita em termos do espaço de fase que pode ser representado geometricamente, normalmente esse espaço de fase é descrito como $2n$ -dimensional criado por n coordenadas generalizadas e n momenta.

Precisamos definir a sessão da superfície de Poincaré, pois essa é essencial para o entendimento de fluxo hamiltoniano. Um sistema autônomo com 2 graus de liberdade, o espaço de fase é quadri-dimensional, como pode ser visto na figura 4.1, escolhemos uma superfície bi-dimensional no espaço de fase e denominando seus lados como esquerdo e direito. Estudando interseções sucessivas da trajetória com a superfície. As interseções são geradas cada vez que a trajetória passa pela superfície seguindo uma certa direção.

Se a trajetória está em uma superfície de energia tri-dimensional $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = H_0$ no espaço de fase quadri-dimensional, as equações de movimento determinam qualquer uma das quatro variáveis, digamos que p_2 escrito em termos das outras três.

$$p_2 = p_2(p_1, q_1, q_2). \quad (4.3)$$

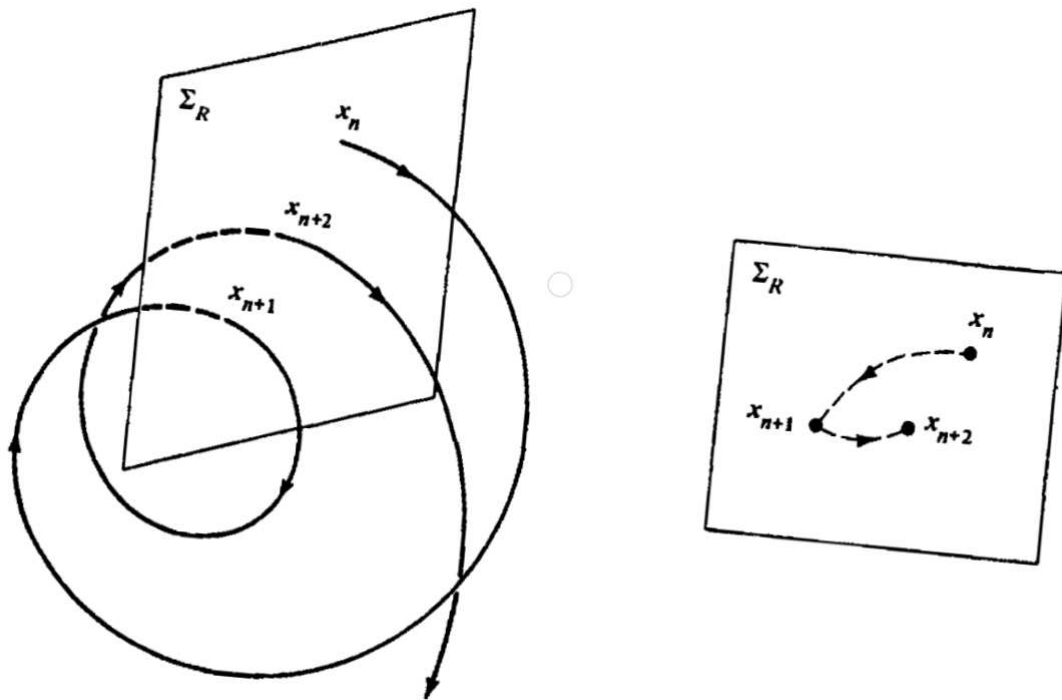


Figura 4.1: Movimento no espaço de fase e definição da superfície de Poincaré. Onde a trajetória atravessa a superfície. Fonte:[93].

Consideramos então a projeção da trajetória em um volume tri-dimensional (p_1, q_1, q_2) . Se o movimento é limitado, então a superfície do plano $q_2 = \text{const}$ nesse volume pode ser atravessada pela trajetória diversas vezes. O plano, formado pela coordenada q_1 e seu momento canônico p_1 , é uma escolha conveniente para a seção de superfície.

Se plotarmos as sucessivas interações do movimento com a seção de superfície, elas iram acontecer em qualquer lugar dentro dessa área limitada do plano. Se além de H_0 , existe uma constante de movimento

$$I(p_1, p_2, q_1, q_2) = \text{const}, \quad (4.4)$$

então as equações (4.3) e (4.4) podem ser combinadas, obtendo assim

$$p_1 = p_1(q_1, q_2). \quad (4.5)$$

Assim as sucessivas vezes em que o movimento atravessa a seção de superfície deve ser uma curva única, $q_2 = \text{const}$. Podemos assim determinar a existência das constantes de movimento ao analisarmos a interseção da trajetória com a seção de superfície. Estabelecida a sua existência, curvas suaves podem ser estudadas no objetivo de obter a estabilidade local e outras informações.

Devemos destacar que uma superfície particular de seção (p_1, q_1) é apenas o espaço de fase, do sistema hamiltoniano original, reduzido. Logo a área que limita a curva fechada na seção de superfície é conservada conforme a superfície é atravessada. Essa propriedade é de extrema importância quando trabalhamos com mapeamento. Podemos demonstrar, escrevendo relações diferenciais de forma geral escrevendo a hamiltoniana em função de uma posição inicial x e um momento inicial y : os elementos de área correspondentes são

semelhantes, ou seja $dqdp = dx dy$, uma transformação de coordenada arbitrária pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} q &= H_q(x, y), \\ p &= H_p(x, y), \end{aligned} \quad (4.6)$$

logo a relação entre as áreas é dada por

$$dqdp = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_p}{\partial x} & \frac{\partial H_q}{\partial y} \\ \frac{\partial H_p}{\partial y} & \frac{\partial H_q}{\partial x} \end{vmatrix} dx dy. \quad (4.7)$$

A matriz é o determinante do Jacobiano J , como a condição é que a área se preserva então o determinante $J = 1$.

4.1.2 Fluxo Hamiltoniano

A solução de um sistema de equações diferenciais são curvas geométricas que descrevem o fluxo num espaço \mathbb{R}^n . Discutiremos as propriedades dinâmicas do fluxo gerado pelos vetores de campo Hamiltoniano num espaço de fase.

Um sistema de equações diferenciais no \mathbb{R}^{2n} corresponde a n graus de liberdade de um sistema é dito ser o fluxo hamiltoniano. O vetor campo hamiltoniano $X_H(x)$ é derivado da função hamiltoniana H , dado por

$$X_H(x) \equiv \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right). \quad (4.8)$$

O fluxo acontece em uma variedade de energia limitada e todas as órbitas depois de um certo tempo voltam a vizinhança do ponto inicial.

Sistemas integráveis e não-integráveis

O aspecto mais crucial de qualquer sistema é sua integrabilidade. Um sistema integrável é o sistema onde as curvas, ou seja, a geometria do fluxo no seu espaço contido, pode ser determinado com precisão. A questão é quando sistemas hamiltonianos serão integráveis. Quando seu grau de liberdade for igual às constantes de movimento então o sistema é dito integrável, por exemplo, todo sistema Hamiltoniano com apenas um grau de liberdade, a qual a função hamiltoniana H é analítica, é integrável. Além de que se as equações de movimento hamiltonianas lineares em coordenadas e momento generalizados, são integráveis. Logo se é possível separar a equação de movimento em sistemas desacoplados de um grau de liberdade, o sistema é integrável.

Já se temos mais graus de liberdade do que constantes de movimento o sistema é dito não-integrável. Geralmente a trajetória de um sistema integrável com n -graus de liberdade se move numa superfície toroidal n -dimensional no espaço de fase $2n$ -dimensional. Agora se no espaço de fase a trajetória de movimento é delimitada por um constante de movimento, a dimensão da superfície é reduzida.

Por exemplo, em sistema hamiltoniano que possui k constantes de movimento, está na superfície dimensional $(2n - k)$, a trajetória será sempre restrita a essas superfícies, chamada toro invariante. Logo sistemas com mais de um grau de liberdade pode ser não

integrável. Se o sistema hamiltoniano com 2 graus de liberdade é integrável isso significa que existem exatamente duas constantes de movimento, a trajetória do sistema se move em uma superfície bi-dimensional ($2 \times 2 - 2 = 2$) de um toro depositado num espaço de fase quadri-dimensional, com isso a trajetória do sistema é dita periódica ou quase-periódica e não apresenta nenhum comportamento caótico.

Agora se o sistema é não-integrável por conta de alguma perturbação, as constantes de movimento do sistema não são mais constantes exceto a energia, já que em sistemas hamiltonianos a energia é conservada. Logo as trajetórias do sistema estão contidas a movimento na superfície tri-dimensional ($2 \times 2 - 1 = 3$) no espaço de fase quadri-dimensional. As trajetórias não são mais periódicas e apresentam movimento caótico. Conforme a não-integrabilidade aumenta mais as trajetórias do sistema se movem para fora do toroide e assim elas podem se mover no espaço de fase sem qualquer restrição. Lembrando que para ser não integrável, o sistema deve ter pelo menos dois graus de liberdade o que implica num espaço de fase quadri-dimensional.

Pontos fixos em sistemas hamiltonianos $\dot{x} = \partial_y H(x, y)$, $\dot{y} = \partial_x H(x, y)$ são dados por

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} = 0. \quad (4.9)$$

A hamiltoniana H é conservada ao longo de qualquer caminho no espaço do sistema e fornece a forma das trajetórias do fluxo gerado pelo campo vetorial Hamiltoniano X_H , os pontos fixos do sistema fornecem a dinâmica local na sua vizinhança. Se conhecemos a Hamiltoniana H de um sistema, podemos obter os pontos fixos diretamente.

Antes de demonstrarmos como determinar os pontos fixos precisamos destacar alguns pontos. Se a origem é um foco do sistema hamiltoniano (4.9) então a origem não é nem um máximo, nem um mínimo local da função Hamiltoniana $H(x, y)$. Qualquer ponto crítico de um sistema hamiltoniano analítico (4.9) pode ser um centro ou uma sela. Se (x_0, y_0) for um ponto de sela para (4.9) também será para $H(x, y)$ e se for um máximo ou mínimo local da função $H(x, y)$ será um centro para (4.9).

Supondo que um ponto crítico do sistema hamiltoniano é a origem. Temos $(\partial H(0, 0)/\partial x) = 0$, $(\partial H(0, 0)/\partial y) = 0$. A linearização do sistema na origem pode ser escrito na forma

$$\dot{x} = Jx \quad (4.10)$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H(0, 0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 H(0, 0)}{\partial y \partial y} \\ -\frac{\partial^2 H(0, 0)}{\partial x \partial x} & -\frac{\partial^2 H(0, 0)}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

O traço de $J = 0$ e o $\det J = \frac{\partial^2 H(0, 0)}{\partial x \partial x} \frac{\partial^2 H(0, 0)}{\partial y \partial y} - \left(\frac{\partial^2 H(0, 0)}{\partial x \partial y} \right)^2$. Os pontos críticos na origem são pontos de sela da função $H(x, y)$ se, e somente se, também são pontos de sela do sistema Hamiltoniano. Agora a origem é um ponto de sela do sistema hamiltoniano se e somente se for uma sela do sistema linearizado (4.10), ou seja, $\det J < 0$. Também se o traço $\text{tr} J = 0$ e $\det J > 0$ a origem é o centro ou o foco para o sistema.

Agora se o ponto crítico $(0, 0)$ não-degenerado é um máximo ou mínimo local do Hamiltoniano $H(x, y)$ e $\det J > 0$ então a origem não será o foco para o sistema hamiltoniano (4.9), ou seja, a origem é o centro do sistema.

Existe um método de descrever sistemas dinâmicos ao se discretizar o tempo no sistema utilizando mapas. Na próxima seção descrevemos mapas e suas características.

4.2 Sistemas dinâmicos discretos

Como vimos anteriormente, Poincaré introduziu uma solução para a análise do movimento de partículas, a chamada seção de Poincaré. A ideia é que num espaço de fase N , escolhamos uma superfície dentro desse espaço. Deixando o sistema evoluir, cada vez que a trajetória do sistema passar por essa superfície um ponto é marcado, figura 4.2. A superfície é chamada de seção de Poincaré e os pontos de interseções sucessivas formam o mapa de Poincaré.

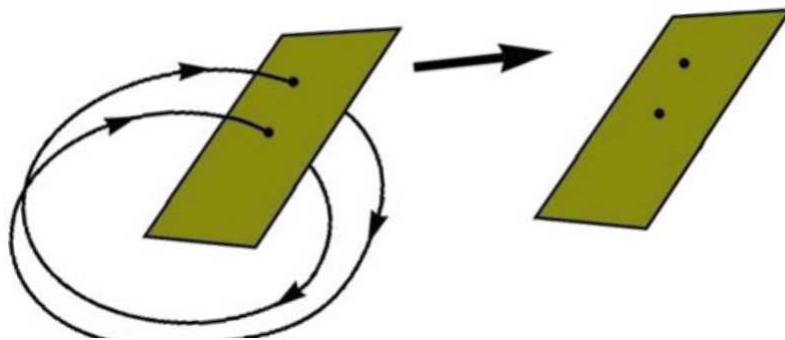


Figura 4.2: Representação da superfície de Poincaré por ciclo de período 2. Fonte:[39]

O mapa então descreve o fluxo contínuo das trajetórias de forma discreta. Todas as propriedades do sistema se mantêm ao utilizarmos mapas discretos. Uma órbita no mapa, se for periódica, será caracterizada como um ponto. É possível por um meio de uma transformação, discretizante do tempo, reescrever o sistema hamiltoniano na forma de um mapa, exemplos podem ser vistos em [39, 94, 95].

4.2.1 Mapas bidimensionais

Iniciando o estudo em mapas bidimensionais não-lineares, mapas bidimensionais lineares podem ser vistos com mais detalhes em [18]. Daremos apenas foco no caso não linear, já que faz parte do estudo deste trabalho.

A forma geral do mapa bidimensional não linear é

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n). \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são funções quaisquer em seus argumentos e podem ser escritas na forma matricial

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{w}_n), \quad (4.13)$$

que pode ser escrita na forma exponencial

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{F}^{[n]}(\mathbf{w}). \quad (4.14)$$

O campo vetorial é definido na forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Um ponto fixo na forma vetorial é escrito na forma

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{F}(\mathbf{w}^*), \quad (4.16)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} x^* &= f(x^*, y^*), \\ y^* &= g(x^*, y^*). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para analisar os pontos fixos, podemos linearizar o mapa $\mathbf{F}(x, y)$ na vizinhança do ponto \mathbf{w}^* . Para saber o tamanho dessa vizinhança, consideramos um círculo de raio ϵ , onde

$$\epsilon \ll |\mathbf{w}|^* = \sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2}. \quad (4.18)$$

Considerando pequenos desvios do ponto fixo (x^*, y^*) na forma

$$\begin{aligned} x_n &= x^* + (\delta x)_n, \\ y_n &= y^* + (\delta y)_n. \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde os incrementos são da ordem de ϵ . Para dar continuidade é necessário expandir às funções em série de Taylor em torno do ponto fixo, mantendo até a primeira ordem. O mapa linearizado pode ser escrito na forma

$$(\delta \mathbf{w})_{n+1} = \mathbf{J}(\mathbf{w}^*)(\delta \mathbf{w})_n, \quad (4.20)$$

onde

$$\mathbf{J}(\mathbf{w}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial g}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

é a matriz jacobiana, o qual os elementos devem ser as derivadas calculadas no ponto fixo (x^*, y^*) . O ponto fixo do mapa linearizado (4.20) é a origem $\Delta \mathbf{w}^* = 0$, o qual a estabilidade deve ser estudada obtendo se os autovalores da matriz jacobiana (4.21), os autovalores são a raiz da equação de segundo grau $\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade, encontramos então os autovalores

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{2}\right)^2}, \quad (4.22)$$

onde $\tau = \text{Tr} \mathbf{J}$ é o traço da matriz.

Os pontos fixos podem ser classificados como estáveis ou instáveis. Se $|\tau| < 2$ os autovalores são complexos conjugados e o ponto fixo x^* é estável, onde pequenos desvios do mesmo levam a órbitas elípticas ao redor do ponto fixo. Caso $|\tau| > 2$ então os autovalores são reais e recíprocos, o ponto fixo será instável e pequenos desvios do ponto fixo levam a órbitas hiperbólicas que se afastam do mesmo.

Em um mapa bidimensional as órbitas periódicas de período 2 são obtidas quando dois vetores $\{w_0^*, w_1^*\}$ tal que um mapeia o outro na forma

$$w_1 = F(w_0), \quad w_0 = F(w_1), \quad (4.23)$$

e os pontos da órbita são pontos fixos na segunda iterada

$$w_{0,1}^* = F^{[n]}(w_{0,1}^*). \quad (4.24)$$

Uma órbita de período m é um conjunto de ponto $\{w_0^*, w_1^*, \dots, w_{m-1}^*\}$ que satisfazem

$$w_{i+1}^* = F(w_i^*), \quad (i = 0, 1, 2 \dots m - 2), \quad (4.25)$$

$$w_0^* = F(w_{m-1}^*). \quad (4.26)$$

No caso de pontos hiperbólicos, é necessário um pouco mais de discussão, quando obtemos os autovalores vemos que eles definem duas direções no plano de fase. Essas direções são invariantes, no sentido em que, ao colocarmos uma condição inicial sobre uma delas, os pontos subsequentes obtidos pela aplicação do mapa permanecem sobre elas. A direção estável $E^s(x^*)$ é determinada pelo autovetor correspondente ao autovalor com módulo menor que 1 ($|\lambda_s| < 1$), enquanto a direção instável $E^u(x^*)$ é determinado pelo autovetor correspondente ao autovalor com módulo maior que 1 ($|\lambda_s| > 1$).

Se a condição inicial sobre a direção estável E^s , as iterações subsequentes se aproximam do ponto fixo quando $n \rightarrow \infty$. Já se o ponto está sobre a direção instável E^u , as iterações se afastam do ponto fixo. Se o mapa for inversível, então podemos dizer que as iterações inversas M^{-1} se aproximam do ponto fixo quando $n \rightarrow \infty$.

Com exceção dos pontos sobre a direção estável, os demais afastam-se do ponto fixo, razão pelo qual este é instável.

Curvas invariantes

As direções invariantes estáveis (E_s) e instáveis (E_u) do sistema, são obtidas com referência ao mapa linearizado no ponto $J(x^*)$. Porém, para os mapas não linearizados podemos definir curvas invariantes estáveis e instáveis na forma:

- **Curva invariante estável (V^s)** : se $w_0 \in V^s$ então $w_n \in V_s$ para todo n , e

$$F^{[n]}(w_0) \rightarrow w^*, \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.27)$$

- **Curva invariante instável (V^s)**: se $w_0 \in V^u$ então $w_n \in V_u$ para todo n , e

$$F^{[-n]}(w_0) \rightarrow w^*, \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.28)$$

Podemos tratar essas curvas de forma semelhante às direções definidas anteriormente, desde que o ponto fixo seja hiperbólico. Relação essa definida pelo Teorema das Variedades Invariantes: *para um mapa $F(v)$ com um ponto fixo w^* , existem curvas invariantes estáveis e instáveis tangentes às direções invariantes estáveis e instáveis no ponto fixo, e com as mesmas dimensões.* Deste modo num ponto de sela, as curvas invariantes se interceptam transversalmente e são tangentes às respectivas direções. Uma representação dessas curvas podem ser vistas na figura 4.3, contendo o ponto x_0 .

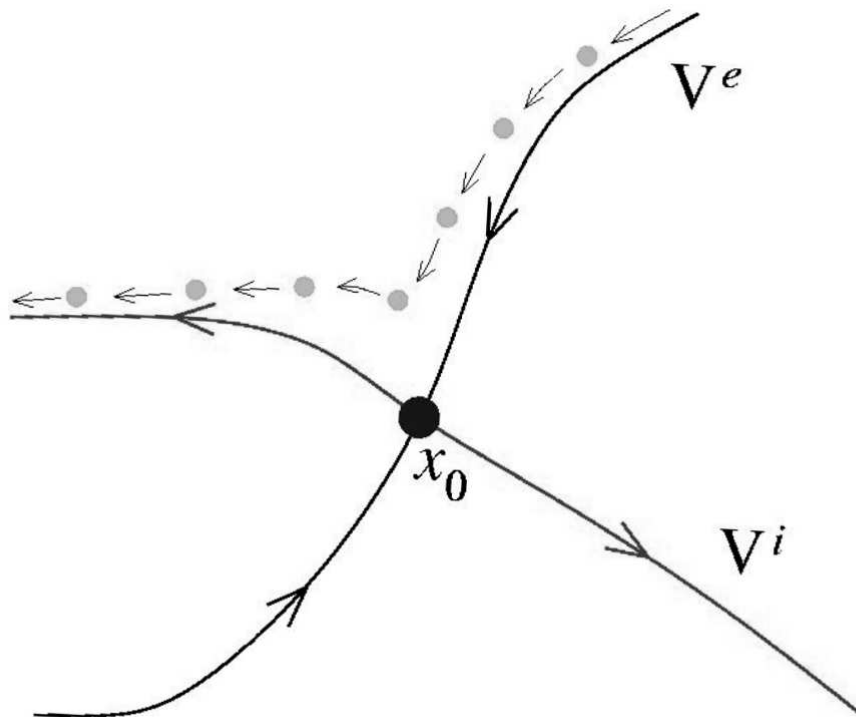


Figura 4.3: Esquema das curvas instáveis (V^i) e estáveis (V^e) em um ponto x_0 de uma sela caótica. A linha tracejada representa uma trajetória próxima ao ponto hiperbólico x_0 . Fonte:[96].

4.3 Caos

Entendemos caos como a presença de um comportamento irregular e sua dependência sensível às condições iniciais. Podemos dizer então que um processo iniciado com condições iniciais diferentes diverge exponencialmente com o tempo. Quando o sistema determinístico exibe a presença de caos, surgem problemas quando se pretende prever o comportamento futuro do sistema, já que duas condições iniciais, ligeiramente diferentes, podem estar no limite de incerteza onde não conseguimos diferenciar.

Importante destacar que embora o processo gerado por essas condições iniciais próximas divirjam com o tempo, essa divergência só é significativa a partir de um limite chamado tempo de predição. É possível fazer previsões confiáveis até esse tempo de predição característico do sistema, mesmo quando o sistema é caótico. O próprio sistema de N-corpos de Poincaré é um exemplo de sistema caótico, ainda que se tenham soluções caóticas para esse problema, o tempo de predição é grande o suficiente para permitir bons resultados.

4.3.1 Caos em mapas

Anteriormente descrevemos um mapa bi-dimensional qualquer, porém na forma geral temos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, f_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, f_n). \end{aligned} \tag{4.29}$$

O estado do sistema num dado tempo discreto n é representado por um ponto no plano de fase (x_n, y_n) . Uma órbita no plano de fase é uma sequência de pontos gerados pelo mapa (4.29) a partir de uma dada condição inicial (x_0, y_0) . É instrutivo seguir a evolução de um conjunto de condições iniciais. O mapa $\mathbf{F}(w)$ é uma transformação de coordenadas no plano de fase

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}), \quad (4.30)$$

de forma que dois elementos de área em tempos sucessivos estarão relacionados por

$$dx_{n+1}dy_{n+1} = |\mathbb{J}|dx_ndy_n,$$

onde

$$\mathbb{J} = \det \mathbf{J}, \quad (4.31)$$

como (4.21), de forma que todo o desenvolvimento anterior é válido.

4.3.2 Pontos homoclínicos

Se p é um ponto fixo, como vimos anteriormente, pelo teorema das variedades invariantes, as curvas instáveis e estáveis são tangentes às direções estáveis e instáveis, respectivamente, no ponto fixo p . Poincaré mostrou no seu trabalho que essas curvas não só se cruzam nos pontos fixos mas também nos chamados pontos homoclínicos e heteroclínicos [20].

Pontos homoclínicos são interseções transversais das curvas invariantes estáveis e instáveis que saem de um mesmo ponto fixo como visto na figura 4.4 a).

Um ponto homoclínico que pertence simultaneamente às curvas instáveis e estáveis, sendo essas curvas invariantes, imagens consecutivas dos pontos devem também pertencer a ambas as curvas, assim todas as imagens de um ponto homoclínico também serão pontos homoclínicos. Suas imagens diretas F^n e inversas F^{-n} também são pontos homoclínicos.

A existência de um ponto homoclínico implica em um número infinito destes pontos, eles se aproximam assintoticamente do ponto fixo ao longo das curvas invariantes. Para isso acontecer, no entanto, as curvas invariantes devem realizar voltas, formando uma imagem conhecida como emaranhado homoclínico fig. 4.4 b). Poincaré mostrou que, se um pequeno círculo for selecionado com centro em um ponto homoclínico haverá infinitos pontos homoclínicos dentro desse círculo, não importa o quão pequeno o raio do círculo.

Importante destacar que pontos homoclínicos não representam pontos fixos ou órbitas periódicas. No entanto, cada ponto homoclínico é um ponto de acumulação para uma família com infinitas órbitas periódicas. Como no emaranhado há um número infinito de pontos homoclínicos e na consequência haverá um infinito número de pontos periódicos.

Como afirmamos anteriormente pontos homoclínicos são pontos que interceptam as variedades, um conjunto desses pontos é chamado de sela caótica, como os pontos mapeiam um ao outro a sela é formada por um número infinitamente grande de pontos instáveis. Na verdade, como veremos, a sela caótica é uma estrutura fractal.

Para se encontrar as variedades invariantes da sela caótica existem diversos métodos no nosso caso utilizamos o método do regador, onde dividimos o espaço de fase em uma malha fina de pontos. Para cada condição inicial analisamos o tempo de escape, ou seja, o número de iterações do mapa que leva para uma órbita correspondente deixar a região do espaço de fase [97]. A variedade estável é formada pelo conjunto de condições iniciais com valor maior que comprimento de conexão n_c , e a variedade instável são as

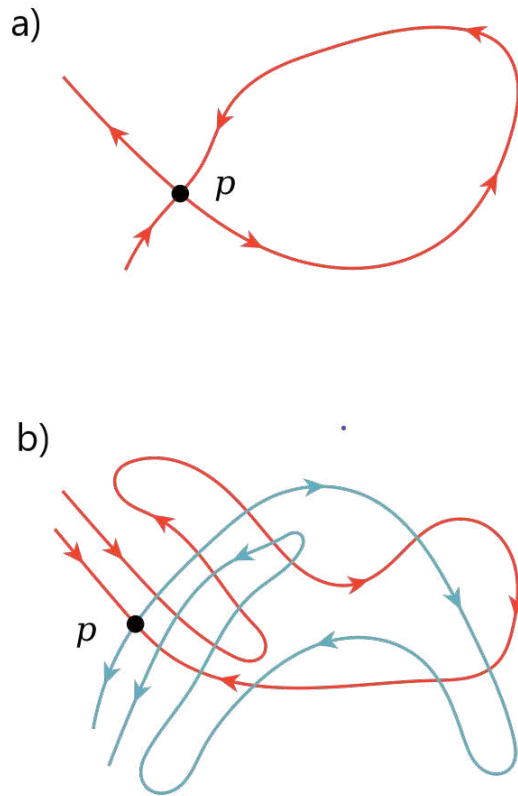


Figura 4.4: Representação dos pontos homoclínicos fig. a) e do emaranhado homoclínicos fig. b)

últimas iterações antes de escapar do espaço de fase [98]. As selas caóticas são as condições iniciais cujo comprimento de conexão $\bar{n} = \epsilon n_c$, onde $0 < \epsilon < 1$. Os valores de n_c e ϵ , para uma melhor resolução dos resultados, devem ser escolhidos na forma de testes e erros, mas os resultados numéricos não são diretamente afetados por eles.

4.3.3 Mapa padrão

Vamos exemplificar as informações anteriores utilizando o mapa padrão, ou também conhecido como mapa de Chirikov-Taylor [99]

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + K \sin \theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + J_{n+1} \quad \text{mod } 2\pi \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $K > 0$ é uma constante, e a prescrição $\text{mod } 2\pi$ significa que devemos sempre assegurar que $0 \leq \theta < 2\pi$ em cada iteração do mapa. Pela forma particular do mapa temos que J também deve ser considerado $\text{mod } 2\pi$. Logo o plano de fase do mapa é um toro bidimensional ($J \times \theta$).

Para $K = 0$ o mapa representa um sistema integrável

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n = J_0, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + J_0 \quad \text{mod } 2\pi \end{aligned} \quad (4.33)$$

Se J_0 é um múltiplo racional de 2π , na forma $2\pi(m/n)$, onde m e n são inteiros primos entre si. Após n iterações temos

$$\theta_n = \theta_0 + 2\pi n \frac{m}{n} = \theta_0 \quad \text{mod } 2\pi, \quad (4.34)$$

é um ponto fixo de período n do mapa. Partindo da condição inicial (J_0, θ_0) teremos os n pontos

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_0 + 2\pi \frac{m}{n} \quad \text{mod } 2\pi, \\ \theta_2 &= \theta_0 + 4\pi \frac{m}{n} \quad \text{mod } 2\pi. \end{aligned}$$

No plano de fase $J \times \theta$ estes n pontos estão alinhados numa reta $J_0 = \text{cte}$. Por exemplo, um ponto fixo de período $n = 1$ terá um único ponto (já que $\theta = 2\pi = 0$).

As variedades estáveis e instáveis para o mapa padrão pode ser vistos na fig. 4.5 para $K = 1$ com intervalo $-\pi < \theta < \pi$. Onde é possível ver alguns pontos de sela onde as variedades de encontram.

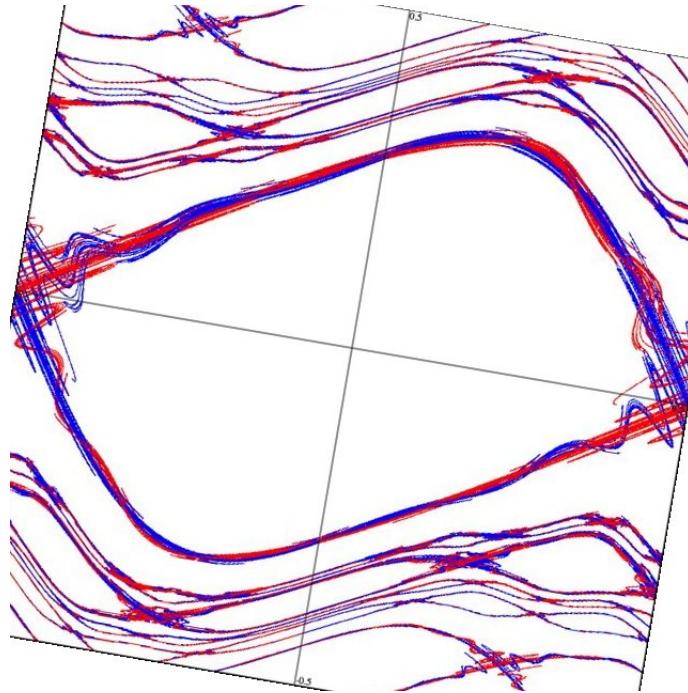


Figura 4.5: Variedades estáveis (azul) e instáveis (vermelho) do mapa padrão com constante $K = 1$ demonstrando as selas caóticas. Fonte: [100]

Com sistemas hamiltonianos e sistemas discretos descritos, temos base teórica suficiente para avançar a grande descoberta do fenômeno diretamente conectado a presença de caos, o efeito fractal, obviamente a literatura de sistemas dinâmicos e caos é extremamente vasta, mas tomamos a liberdade de descrever apenas o que é necessário para o desenvolvimento deste trabalho. No próximo capítulo descrevemos o que são fractais, categorias de fractais e métodos de análise do mesmo.

5 FRACTAIS

A natureza é constituída de objetos irregulares e com formas diversas, com a descoberta da geometria euclidiana, se tornou possível descrever características como comprimento, área e volume de objetos quadrados, cúbicos, triangulares, etc., porém alguns padrões formados ainda não deixavam claro como definir conceitos como comprimento, etc. Em 1975 Mandelbrot [101] introduziu uma nova geometria, chamada geometria de fractais, criada para encontrar ordem em formas e processos caóticos, mais especificamente descreve os fractais, sendo estruturas geométricas complexas ricas na natureza. Antes de Mandelbrot, fractais eram tratados como objetos sem forma, por isso rejeitados de estudos mais profundos.

A maioria dos fractais na natureza são auto-similares, ou seja, uma pequena parte de sua estrutura geométrica é magnificada, e estruturas semelhantes são obtidas. Auto-similaridade nem sempre está associada a geometria do objeto, onde a forma é o importante, mas pode ser também estatística, onde o grau de irregularidades ou fragmentos são os mesmos em todas as escalas.

Outra diferença entre a geometria Euclidiana e a geometria de fractais é a dimensão do objeto. Na geometria Euclidiana a dimensão é sempre um inteiro, já em objetos fractais a dimensão é normalmente na forma fracionária. Perímetro e área de fractais não são definidos, já que seus valores mudam conforme a magnificação, isso significa que o objeto não pode ser tratado como objetos regulares. Como exemplos de fractais na natureza temos: árvores, flocos de neve, conchas, raios, couve-flor e brócolis, mas temos também fractais que surgem com a evolução do tempo, costa de oceanos, a superfície da lua, nuvens, veias e o pulmão, todos esses descritos pela geometria de fractais. Como sabemos orbitas caóticas são altamente irregulares por isso fractais são úteis no estudo dessas órbitas, sendo o foco deste trabalho.

Neste capítulo detalhamos fractais e a auto-similaridade, mostrando alguns exemplos de construção de fractais. Apresentamos o conceito de bacias de escape e os métodos de quantificar a fractalidade: O método da incerteza para se obter a dimensão fractal e o método da entropia informacional.

5.1 Conceitos Básicos

5.1.1 Auto Similaridade

Auto similaridade é a base de se descrever a geometria fractal, basicamente o conceito é uma extensão do conceito matemático e físico. Dois objetos são ditos similares se a forma, indiferente do seu tamanho, são iguais. Normalmente o método de se confirmar a similaridade é através de uma transformação. Transformações de similaridade são combinações de translação, rotação e escala. Por exemplo, um quadrado ao ser dividido

em quatro partes iguais, ao se fazer uma magnificação em um desses quatro quadrados, se obtém o quadrado original (Fig. 5.1).

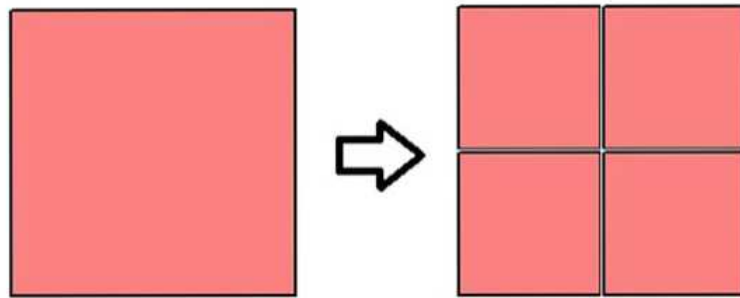


Figura 5.1: Divisão do quadrado. Fonte: [39]

Auto-similaridade não significa que a visão magnificada é exatamente igual a do objeto original, mas sim que o padrão é o mesmo em todas as escalas. Por isso é comum objetos fractais, físicos, biológicos, etc. terem processos de auto similaridade diferentes. Classificamos cada uma das auto similaridade.

Auto-similaridade no Espaço

Se o objeto ou processo dinâmico em grandes estruturas é obtido por repetições menores da estrutura, então a similaridade exibida é dita auto-similaridade no espaço. A resolução da medida é fornecida pelo comprimento do espaço a ser analisado e dentro desse comprimento a área do objeto é obtida, para resoluções mais finas a área do objeto aumenta. Por exemplo, em sistemas biológicos as artérias e as veias nas retinas e os tubos no pulmão possuem auto-similaridade espacial.

A auto-similaridade espacial foi descoberta por Mandelbrot em 1967 [42], baseado na medida do comprimento da costa britânica. A medida foi primeiramente considerada por Lewis Fry Richardson um meteorologista britânico, ele tentou medir a comprimento da costa britânica utilizando pequenos segmentos de linha do mesmo tamanho, indo de ponta a ponta ao longo da costa. Ele observou que o comprimento da costa aumentava cada vez que o comprimento do segmento de linha era diminuído. Deste modo, cada vez que a medida era feita em resoluções mais finas, ou segmentos menores incluíam na medida, baías e penínsulas menores. A medida da costa varia conforme o comprimento do segmento de linha que o mede, sendo assim descrita pela geometria fractal.

Auto-similaridade no tempo

Se o padrão de pequenas flutuações em um processo que ocorre num tempo pequeno é repetido em grandes flutuações num tempo grande, então a auto-similaridade do processo é encontrada em termos do tempo. O sinal elétrico gerado pela contração do coração, o volume com que a respiração acontece no pulmão, são alguns exemplos de auto-similaridade no tempo.

Auto-similaridade estatística

Quando propriedades estatísticas como variação, média, correlação, etc. de pequenos pedaços são exatamente iguais às propriedades de pedaços maiores, então a auto-similaridade é dita estatística. Consideremos um conjunto de nuvens, elas são enrugadas

por natureza, é natural pensar que partes menores do conjunto ao serem magnificadas perdem suas características enrugadas, mas isso é falso. Não importa o quanto mais se faça a magnificação, as nuvens continuam parecendo a mesma. A auto-similaridade não pode ser aferida por inspeção visual, mas suas propriedades estatísticas são invariantes. Turbulência em fluidos tem auto-similaridade estatística.

Fractais matemáticos

Fractais estão presentes em toda a natureza. Diferente dos fractais naturais e os fractais matemáticos é que os matemáticos são fractais perfeitos, onde cada cópia menor é a cópia exata da original. Por exemplo, o triângulo \mathcal{S} (Fig.5.2), ao aumentar um ponto do triângulo, a mesma imagem é obtida. Isso é possível ao se escolher uma escala de aproximação.

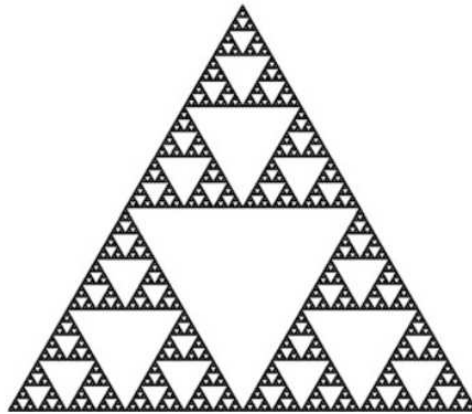


Figura 5.2: O triângulo de Sierpinski. Fonte: [39]

É necessário esclarecer que fractais são objetos auto-similares, porém nem todos os objetos auto-similares são fractais. O exemplo de um quadrado ao ser dividido em 4 partes menores e cada parte menor em outras menores, iguais à imagem original, logo ele é auto-similar, porém não é fractal, é um objeto geométrico regular, que possui propriedades euclidianas.

5.1.2 Construindo Fractais

Fractais matemáticos podem ser construídos utilizando funções matemáticas, daremos um exemplo utilizando o conjunto de Cantor, porém outros exemplos podem ser vistos em [39].

Conjunto de Cantor

O conjunto de cantor foi criado pelo matemático alemão Georg Cantor no ano de 1883 como um exemplo de um conjunto perfeito sem densidade [102]. A “priori” o conjunto de Cantor não parece ser fractal, porém é um dos modelos mais importantes.

Ele é construído então ao se definir um conjunto infinito de pontos no intervalo unitário $[0, 1]$. Seja o intervalo $S_0 = [0, 1]$. Removendo dele o conjunto aberto de terços, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, produzindo assim um par de conjuntos fechados S_1 . Em seguida removendo o conjunto aberto de terços dos intervalos remanescentes produz um novo conjunto S_2 e o processo segue infinitamente. A uma certa dificuldade na visualização do conjunto de

Cantor por ele ser feito de infinitos números de pedaços infinitesimais, separados por espaços de diferentes tamanhos, mas um exemplo pode ser visto na figura 5.3.

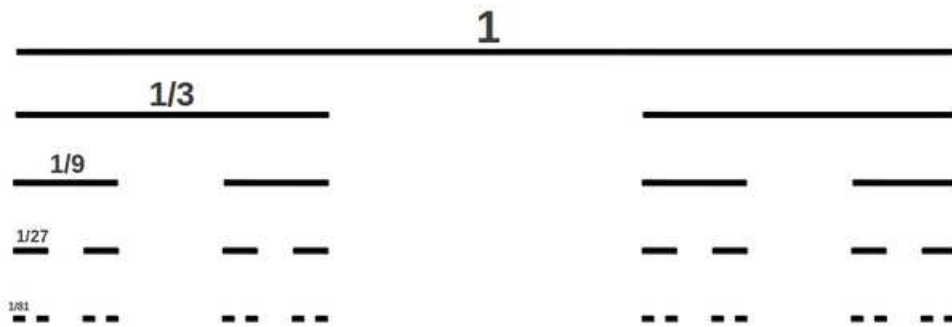


Figura 5.3: Esquema do conjunto de Cantor. Fonte: [103]

A sequência de subintervalos S_0, S_1, S_2 , etc. são dados na ordem

$$\begin{aligned}
 S_0 &= [0, 1] \\
 S_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
 S_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

O comprimento L do conjunto de Cantor em S_0 é 1, em S_1 é $2/3$ e em S_2 se torna $(2/3)^2$, logo no n -ésimo estado o comprimento será $(2/3)^n$, valor esse que acaba tendendo a zero conforme n vai a infinito, dizemos então que o conjunto de Cantor é incalculável.

Geralmente a construção de fractais auto similares podem ser relacionados a transformações afins, transformações essas que combinam translação, rotação, dilatação e reflexão, sendo possível descrever círculos em elipses, quadrados em paralelogramos, etc. Para a construção do conjunto de Cantor a transformação afim $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $T_1 : x \rightarrow \frac{1}{3}x$, $T_2 : x \rightarrow \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$. Se começarmos com o intervalo fechado $A_0 = [0, 1]$, sob as transformações teremos $A_1 = T_1[0, 1] \cup T_2[0, 1] = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. e assim sucessivamente. Escrevemos então as principais características do conjunto de cantor:

- O conjunto possui estruturas em escalas arbitrariamente pequenas;
- É auto-similar;
- É totalmente desconectada, ou seja, não possui densidade;
- É matematicamente perfeito;
- Tem medida zero e consiste em uma quantidade incontável de pontos.

Temos então um exemplo de como se construir um fractal matemático entre diversos outros exemplos existentes como *curva de von Koch*, *Conjunto de Julia*, *Poeira de Cantor* e muitos outros. O foco no conjunto de cantor é por sua simplicidade.

A seguir daremos um foco maior em fractais causados por órbitas caóticas e a quantificação de fractais, ou seja, métodos de se confirmar que um sistema é fractal primeiro analisando a dimensão e depois pela entropia.

5.2 Dimensão fractal

Ao se trabalhar com fractais uma das coisas mais importantes é se obter a dimensão fractal do sistema, nela está contida informações sobre a propriedade geométrica do objeto. A dimensão fornece uma medida quantitativa da fractalidade do objeto, ou seja, sua auto-similaridade e escala. Existem três diferentes classificações de medidas de dimensão: fractal, topológica e a embutida. Daremos foco a primeira, as outras duas podem ser vistas com detalhes em [39].

A dimensão fractal descreve a propriedade que o objeto tem de preencher o espaço. O valor da dimensão fractal fornece a quantidade de pequenos pedaços obtidos ao se olhar para pequenas escalas. Melhor colocando, mede a relação de pedaços pequenos com pedaços grandes e também entre outros pedaços pequenos. Um valor alto da dimensão significa que ao se olhar pequenas escalas, uma abundância de pedaços pequenos é revelada. Na dimensão fractal existem diversos métodos que preenchem o espaço de modo diferente, neste trabalho daremos foco a dimensão de contagem de caixa.

5.2.1 Dimensão de contagem de caixa

Também chamado de dimensão de capacidade, a dimensão de contagem de caixa é altamente utilizado pela facilidade de sua aplicação. O conceito foi introduzido em 1930. Para encontrar a dimensão, a ideia é definir uma escala ϵ e irregularidades de tamanho menor que ϵ são ignoradas, ϵ é definido como o tamanho das caixas e essas são utilizadas para cobrir o objeto desejado. O número de caixas necessárias para cobrir o objeto é dado por $N(\epsilon)$ é uma dependência direta em ϵ quanto menor o valor ϵ . logo existira uma maior quantidade de caixas. Existe então a relação de potência $N(\epsilon) \propto (1/\epsilon)^d$, onde o expoente d é a dimensão de contagem de caixas. Formalmente definimos a dimensão como

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}. \quad (5.1)$$

Como exemplo no conjunto de Cantor, sabemos que ele é construído por conjuntos S_n , cada S_n consiste em 2^n intervalos de comprimento $(1/3)^n$. Se $\epsilon = (1/3)^n$. Para todo o conjunto de cantor ser preenchido precisamos de todos os intervalos 2^n , logo $N(\epsilon) = 2^n$, então

$$\begin{aligned} \ln N(\epsilon) &= -d \ln \epsilon, \\ d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\epsilon)}{1/\epsilon}, \\ d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n}, \\ d &= \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309. \end{aligned}$$

5.3 Bacias de Escape

Em sistemas hamiltonianos abertos, como discutimos no capítulo 4, existem condições iniciais, as quais, geram órbitas que eventualmente deixam o sistema. O

conjunto de condições que seguem escapam para uma determinada saída, formam a bacia de escape. Um sistema pode ter n bacias, caso existam n saídas.

O conceito de bacias pode ser visto com grande detalhe em [104], porém aplicado a sistema com atratores.

Estamos interessados também na estrutura da região que separa essas bacias. Por exemplo, na figura 5.4 demonstramos duas bacias de escape. Essa separação pode ser suave ou fractal. Quando ela é suave as condições iniciais da fronteira, não tendem para nenhuma saída, logo são um conjunto invariante diante da ação do sistema.

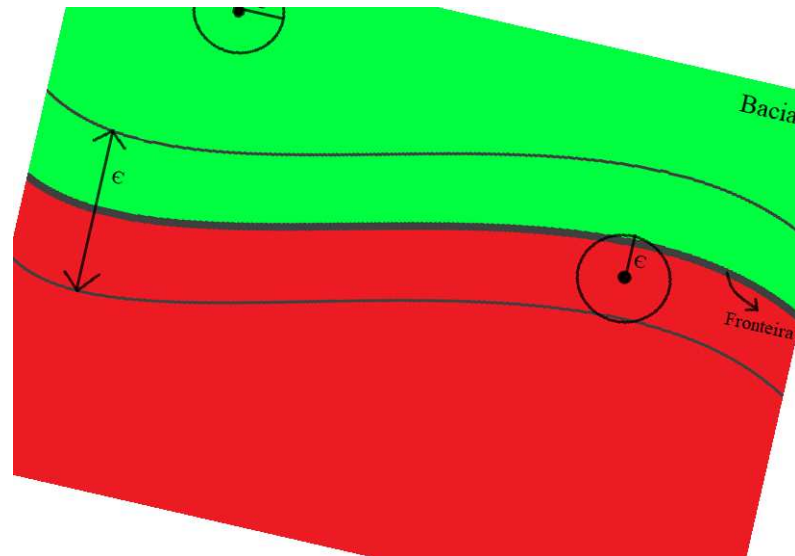


Figura 5.4: Esquema do método da incerteza. Uma condição inicial na Bacia A afastado da fronteira por mais do que ϵ , essa condição é dita determinada. Já a condição inicial situada na Bacia B está próxima à fronteira, dizemos então que essa condição é indeterminada.

Supondo que existem diversas situações finais para um sistema e a precisão da técnica utilizada fixa as condições iniciais com um raio ϵ . Neste caso, não existirá nenhum problema quando tentamos prever o comportamento futuro de cada condição inicial com uma distância ϵ de distância da fronteira de Bacias. Dada essa situação, as condições iniciais mais afastadas são ditas como determinadas, ou seja, todas as outras condições iniciais no alcance ϵ pertencem a mesma bacia. Porém, nada pode ser dito sobre o estado final das condições iniciais que estão mais próximas de ϵ do que da fronteira, e essas são ditas como indeterminadas.

5.4 Dimensão de contagem de caixas em bacias fractais

McDonald *et al.* [50] demonstraram ser possível descrever as fronteiras de bacias ao analisar a chamada fração de condições indeterminadas.

Caso a fronteira seja suave, a fração de condições iniciais indeterminadas $f(\epsilon)$ é linearmente proporcional ao raio associado as condições iniciais, $f(\epsilon) \propto \epsilon$. Ou como pode ser visto na figura 5.4, se traçamos um limite superior e inferior à fronteira com valor igual ao raio associado ϵ , qualquer condição inicial dentro dessa faixa pode ir a outra bacia caso haja uma perturbação ϵ .

Se espaço de fase é infinito, precisamos reduzir o espaço a uma certa região finita que contenha a fronteira. Neste caso o valor de $f(\epsilon)$ vai depender dessa região escolhida.

McDonald [50] mostrou que existe uma relação de potência entre $f(\epsilon)$ e ϵ , $f(\epsilon) \propto \epsilon^\gamma$, onde γ é conhecido como expoente de incerteza sendo definido entre 0, quando a curva é fractal dita crivada [105] e 1, quando a curva é suave, ou seja, todas as condições são determinadas.

A dimensão de incerteza d do conjunto fractal conectado as condições iniciais é obtido por $d = N - \gamma$, onde N é a dimensão do espaço de fase [19, 106]. A dimensão da incerteza é definido no limite $d \in [N - 1, N]$.

5.4.1 Método da incerteza

Esse método foi a princípio demonstrado por [49]. O objetivo é analisar como a fração de incerteza $f(\epsilon)$ varia com o raio associado a medida ϵ . Existem dois métodos para se classificar as condições iniciais como determinadas ou indeterminadas, vamos detalhar o método utilizado, o segundo pode ser visto em [107].

O método que utilizaremos no nosso trabalho é baseado em computar o estado final das órbitas, calculando a saída para uma condição inicial x_0 . Encontrando as condições iniciais $(x_0 + \epsilon)$ e $(x_0 - \epsilon)$ para um valor de ϵ pequeno, e se todos coincidirem esse ponto é dado como determinado, se não o ponto é dito indeterminado.

As condições iniciais x_0 são escolhidas de forma aleatória e isso é necessário para que a estimativa da fração de incerteza $f(\epsilon)$ para cada ϵ seja suficientemente precisa. Se esse processo é então repetido para um alto número de valores de ϵ , obtemos a dependência de $f(\epsilon)$ com ϵ . Se plotamos $\ln f(\epsilon)$ por $\ln \epsilon$, o declive vai ser igual a $N - d$ (onde d é a dimensão de incerteza e N é a dimensão do espaço de fase), d é obtido dessa definição como

$$f(\epsilon) \propto \epsilon^\gamma \rightarrow f(\epsilon) \propto \epsilon^{N-d} \rightarrow \log f(\epsilon) = (N - d) \log \epsilon + \text{cte} \quad (5.2)$$

Com isso obtemos a dimensão fractal d , a seguir falamos sobre outro método de analisar os fractais que é a entropia.

5.5 Entropia da bacia: conceitos e definição

Daza *et al.* [51] propuseram um método natural de se caracterizar a incerteza da bacia e da fronteira de bacia, chamada entropia da bacia. Diferente da dimensão fractal que comentamos antes, o cálculo da entropia é mais rápido de se obter, já que não depende do uso de diferentes escalas para o raio ϵ .

A ideia consiste em construir uma grade no espaço de fase e através dessas discretização uma parte do espaço de fase é obtido onde cada elemento pode ser considerado como uma variável. Aplicando a definição de entropia de Gibbs ao resultado das medidas qualitativas associada as saídas do sistema, a discretização sugerida surge naturalmente em simulações numéricas ou experimentos.

A diferença desse método para o método da incerteza apresentado anteriormente é que se todas as bacias possuem a mesma razão de volume ocupado, o expoente de incerteza falha ao determinar a incerteza associada, já a entropia consegue distinguir cada uma delas. A seguir apresentamos o conceito matemático e computacional para se obter a entropia

Vamos analisar um sistema com N_A saídas para um dado parâmetro em uma certa região Ω do espaço de fase. Discretizamos Ω pelo número de caixas com o qual pode ser dividido. Em um espaço de fase, para fazermos essa divisão, montamos uma grade de caixas

de tamanho linear ϱ . Se o espaço é unidimensional essa caixa será uma matriz coluna $1 \times \varrho$, já se for bidimensional $\varrho \times \varrho$.

Construindo uma aplicação $C : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$ que relaciona cada condição inicial com as suas respectivas saídas, vamos nos referir a essa aplicação como a *cor*. Cada caixa contém a princípio diversas trajetórias, cada um levando a uma cor nomeadas de 1 a N_A .

Na prática, só podemos utilizar um número finito de trajetórias nas caixas, isso corresponderia ao número de vezes que o experimento foi repetido, ou o número de trajetórias computadas numa simulação numérica.

Mesmo limitados pela resolução de ε , a informação que as trajetórias nas caixas nos fornecem pode ser usada para fazer uma hipótese sobre a incerteza associada a caixa. Considerando que as cores na caixa são distribuídas randomicamente, até certas proporções, podemos associar a probabilidade para cada cor j na caixa i como p_{ij} , a qual é avaliada por estatísticas computacionais sobre as trajetórias dentro de cada caixa.

Considerando que as trajetórias na caixa são independentes em um sentido estatístico, a entropia de Gibbs para cada caixa i é dado por

$$S_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \ln \left(\frac{1}{p_{ij}} \right), \quad (5.3)$$

onde $m_i \in [1, N_A]$ é o número de cores dentro de cada caixa i e a probabilidade p_{ij} de cada cor j é determinada simplesmente pelo número de trajetórias que levam aquela cor dividida pelo número total de trajetórias na caixa.

Escolhemos não sobrepor as caixas, então a entropia de toda a grade é calculada pela adição da entropia associada a cada uma das N caixas

$$S = \sum_{i=1}^N S_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \ln \left(\frac{1}{p_{ij}} \right). \quad (5.4)$$

É importante destacar que quando o número de caixas aumenta com a redução de ε , isso traz um efeito: quando se reduz a escala da caixa a entropia aumenta. Para evitar esse efeito, consideramos a entropia relativa ao número total de caixas e definimos a variável

$$S_b = \frac{S}{N} \quad (5.5)$$

do qual nos chamamos entropia da bacia. Uma interpretação dessa quantidade é associada ao nível de incerteza da bacia, variando de 0 (uma das saídas) até $\ln N_A$.

Estamos mais interessados na incerteza da fronteira da bacia, já que queremos saber se a fronteira é fractal. Com esse objetivo podemos restringir o cálculo da entropia da bacia às caixas que caem na fronteira, assim calculando a entropia apenas para aquelas caixas N_b a qual contém mais de uma cor,

$$S_{bb} = \frac{S}{N_b} \quad (5.6)$$

onde S é calculado na mesma forma que já descrevemos. Denominamos esse número entropia da fronteira da bacia, por que quantifica a incerteza referente apenas a fronteira. A natureza dessa quantidade S_{bb} difere da entropia da bacia S_b . Onde S_b é sensível ao tamanho das bacias para haver uma distinção entre as diferentes bacias com fronteira suave, S_{bb} não consegue fazer está distinção.

Mas esse novo conceito é importante, e vamos dar um exemplo do porquê. Supondo que temos várias bacias separadas por fronteiras suaves. Então, cada caixa na fronteira vai ter apenas duas cores, exceto algumas poucas bacias que podem conter três ou mais cores. Se pegarmos um número suficiente de caixas na fronteira, o efeito das caixas que contém mais de duas cores vai ser negligenciável para o cálculo da entropia da fronteira da bacia S_{bb} .

O valor máximo possível para S_{bb} que uma fronteira suave pode ter é $\ln(2)$, ou seja, todas as caixas na fronteira são proporcionais (probabilidade $p_i = 1/2$). Considerando um número suficiente de caixas na fronteira, podemos afirmar que se a entropia da fronteira da bacia for maior que $\ln(2)$, então a fronteira é fractal, sendo expresso por

$$S_{bb} > \ln(2) \Rightarrow \gamma < 1 \quad (5.7)$$

Essa relação é suficiente, porém não necessariamente uma condição de certeza, algumas bacias não passam nesse teste, como as bacias com duas saídas [108].

Até aqui construímos a base teórica e matemática sobre fractais. No próximo capítulo aplicamos o estudo da Relatividade Geral ao problema de sistemas dinâmicos e a formação de fractais, propondo um sistema binário de buracos negros e estudando o movimento de partículas eletromagnéticas ao adentrar esse sistema.

5.6 Propriedade de Wada

Uma coleção de 3 ou mais conjuntos satisfazem a chama propriedade de Wada, se cada ponto na fronteira de qualquer bacia está na fronteira de *todas* as bacias. Esses conjuntos são extremamente difíceis de se visualizar, o primeiro exemplo de um conjunto com essas propriedades foi demonstrado por Yoneyama em 1917 os chamados lagos de Wada [109].

Kennedy and Yorke [110] mostraram ser comum em sistemas dinâmicos o aparecimento de bacias de Wada em um sistema com três ou mais saídas. Se um ponto p é um ponto de fronteira de $N \geq 3$ bacias, então p é dito um ponto de Wada. Se todos os pontos de uma bacia B são pontos Wada, a bacia é dita bacia de Wada. No mesmo trabalho Kennedy e Yorke discutem que o mapa de Poincaré de um pêndulo forçado com quatro atratores apresentam propriedade de Wada [110].

Quando há múltiplas saídas estão presentes no espaço de fase, normalmente queremos determinar a qual bacia um ponto pertence. Se a fronteira da bacia é complicada o suficiente, uma pequena incerteza nas condições iniciais pode resultar em uma incerteza bem maior no resultado do sistema. No caso em que a fronteira da bacia é Wada, se tem um nível maior de indeterminação e uma sensibilidade maior na dependência das condições iniciais, mesmo o sistema sendo totalmente determinístico.

Em 1996, Nusse e Yorke [104] estabeleceram que uma variedade que cruza três ou mais bacias no espaço de fase pode ser utilizada como prova da existência de fronteira Wada. Eles afirmam “Se há varias órbitas hiperbólicas periódicas acessíveis e cada uma de suas variedades instáveis cruzam todas as bacias então a fronteira da bacia é Wada”. O método envolve em calcular as variedades instáveis de um ponto de sela localizado exatamente na fronteira da bacia e sobrepor as bacias e assim visualizar se a variedade cruza todas as bacias, uma melhor desenvolvimento pode ser visto em [104]. A existência das bacias de Wada num espaço de fase marca a presença de caos em sistemas dinâmicos não lineares, na figura 5.5 vemos o método aplicado ao mapa de Hénon [111].

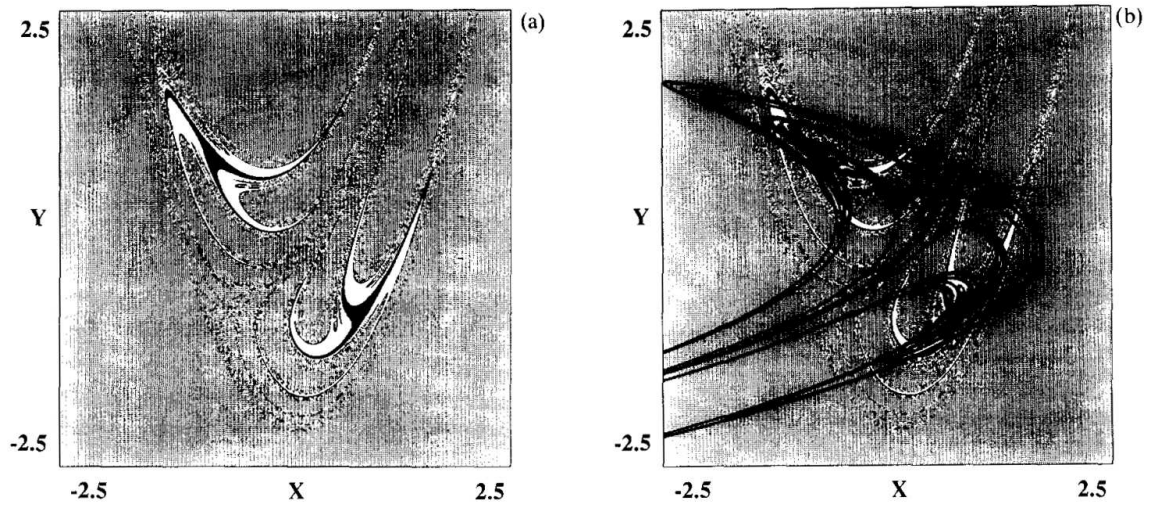


Figura 5.5: *a*) Bacias referentes ao mapa de Hénon $F(x, y) = (0.7 - x^2 + 0.9y, x)$, (representandos pelas cores: branca, preta e cinza). *b*) A variedade instável é sobreposta as bacias, mostrando que ela cruza as 3 bacias. Fonte: [111]

6 SISTEMAS BINÁRIOS DE BURACOS NEGROS

6.1 Obtenção do mapa de espalhamento

Após analisarmos as propriedades de espalhamento em um único buraco negro no capítulo 3, consideramos agora um sistema com dois buracos negros de mesma massa M . Mesmo sendo um sistema de grande interesse, não existe uma solução exata das equações de Einstein que descreva exatamente esse problema. Por isso colocamos os dois buracos negros a uma distância D muito maior que o raio de Schwarzschild (R_s). A essa distância efeitos gravitacionais de interação podem ser ignorados.

Em um sistema real o sistema levaria os buracos negros a rotacionarem em relação ao centro de massa, porém sua velocidade de rotação é menor que a velocidade da luz. Nós consideramos os dois objetos como sendo fixos no espaço, sem trazer grandes problemas ao sistema.

Há três aproximações envolvidas: as trajetórias dos raios de luz perto de um buraco negro não é afetado pelo campo gravitacional do outro. A rotação do sistema ao redor do centro de massa pode ser descartada. A não produção de efeitos gravitacionais como ondas gravitacionais.

- O campo gravitacional de um buraco negro não é afetado pelo outro:

Considerando um parâmetro de impacto b , onde apenas raios de luz com b na ordem de b_{esc} não escapam diretamente para infinito, esses são os raios importantes para a dinâmica. Se a distância do buraco negro mais próximo for da ordem de b_{esc} , que é da ordem de M (a massa do buraco negro). Podemos estimar de forma grosseira que o campo gravitacional do buraco negro é da ordem de $M/b_{esc} \sim 1$. Já o campo gravitacional do outro buraco negro é da ordem de M/D , e então a correção do termo de campo gravitacional dado pela presença do buraco negro mais distante é $\sim M/D$ que vai a zero quando $D \rightarrow \infty$.

- A rotação do sistema de buracos negros ao redor do seu centro de massa:

Esse efeito faz com que o eixo definido pelo centro de massa rotacione um ângulo no tempo Δt que leva para o raio de luz atravessar a distância D que separa os dois buracos negros, onde $\Delta t \approx D$ ($c = 1$). A frequência de rotação ω pode ser aproximado pela lei de Kepler $\omega^2 \sim M/D^3$. O ângulo θ é então definido pela equação

$$\theta = \omega \Delta t \sim \left(\frac{M}{D} \right)^{(1/2)} \quad (6.1)$$

Para grandes distâncias $\theta \rightarrow 0$, e a aproximação é justificada.

- A correção da relatividade geral

Sendo a mais difícil das aproximações de se entender diretamente, podemos apresentar uma ideia. Considerando a taxa de variação de \bar{D} da distância D causada pela perda de energia do sistema ao se emitir ondas gravitacionais, [112] mostra que essa variação da distância pode ser escrita na ordem de $(M/D)^3$ ao utilizar a lei de Kepler anterior para reescrever a equação de potência relacionada a perda de energia do sistema. Definindo ΔD como sendo a variação de D no tempo que leva para a luz atravessar a distância entre os buracos negros, então definimos

$$\frac{\Delta D}{D} \sim \left(\frac{M}{D}\right)^3 \quad (6.2)$$

logo se $D \rightarrow \infty$ podemos desconsiderar a influência da emissão de ondas gravitacionais. Outras contribuições relativísticas relacionadas ao movimento de partículas não são restritos ao movimento de D , não é inesperado que elas tenham contribuições de mesma ordem.

Mesmo com algumas aproximações, o sistema simplificado mantém características do sistema real. Em um buraco negro, órbitas nunca escapam quando o parâmetro de impacto é tal que o espalhamento é no mínimo de π . Isso faz com que a equação para o ângulo de deflexão (3.58) forneça a equação do máximo do parâmetro de impacto b na forma

$$b_{esc} = b_m \left[\exp\left(\frac{\bar{c} - \pi}{\bar{a}}\right) + 1 \right]. \quad (6.3)$$

Propondo uma aproximação em que $D \gg R_s$, para encontrar as fronteiras de bacias, nós consideramos que a luz é espalhada por cada um dos buracos negros separadamente, onde o outro buraco negro está tão distante que não influencia o primeiro. Após o primeiro espalhamento o raio alcança o segundo buraco negro, dependendo da sua trajetória de escape. Se for espalhado novamente, ele pode retornar ao primeiro buraco negro e assim suscetivamente. Como tratamos separadamente, podemos utilizar as equações definidas no capítulo 3 para encontrar o ângulo de deflexão de cada buraco negro em função do parâmetro de impacto incidente.

Com essas aproximações reduzimos o sistema a um mapa de duas dimensões, como desenvolvido anteriormente por Troll [41] e Lai [113]. Devemos também considerar que as órbitas estão confinadas no plano que contém os dois buracos negros.

Supondo que temos um raio escapando do primeiro buraco negro com parâmetro de impacto b_n e ângulo de escape ϕ_n com respeito a simetria, como pode ser visto na figura 6.1. Como os buracos negros estão afastados, o parâmetro de impacto b_{n+1} com respeito ao outro buraco negro é dado pelo segmento l . Usamos a convenção que valores positivos de b estão direcionados ao buraco negro da esquerda e raios com b negativo estão direcionados a direita. Essa definição é com respeito ao buraco negro que o raio está incidindo, depois de cada iteração a orientação é revertida. Obtemos então $l = b_n + D \sin \phi$. O mapa é escrito como

$$b_{n+1} = b_n + D \sin \phi_n, \quad (6.4)$$

$$\phi_{n+1} = \pi + \phi_n - \alpha(b_{n+1}). \quad (6.5)$$

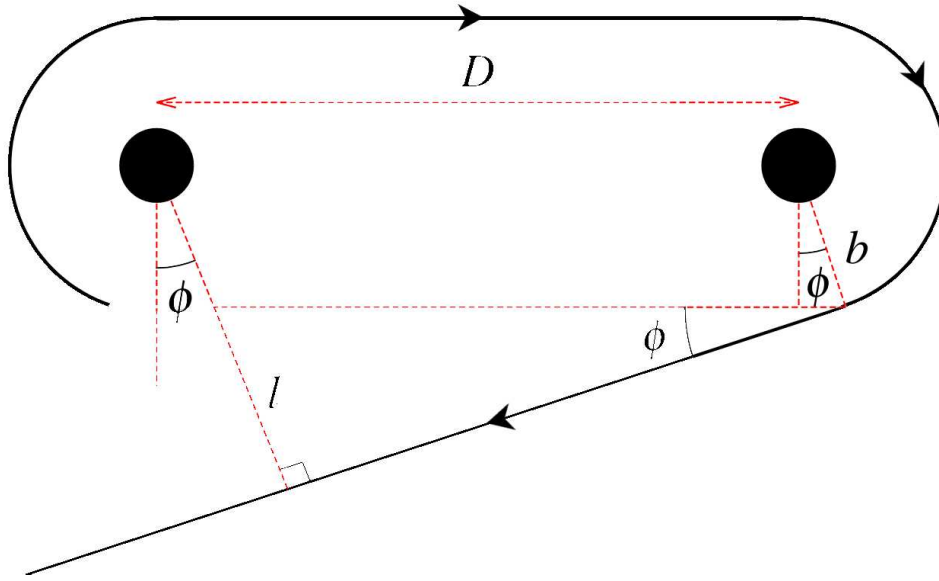


Figura 6.1: Espalhamento da luz no sistema binário para construção do mapa. A linha preta é a trajetória da luz.

O mapa (6.4, 6.5) só é válido no intervalo de parâmetro de impacto $b_m < b < b_{esc}$. A matriz Jacobiana do mapa (6.4, 6.5) é

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & D \cos \phi_n \\ -\alpha'(b_{n+1}) & 1 - D\alpha'(b_{n+1}) \cos \phi_n \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

o seu determinante é igual à unidade, tal que o mapa preserva a área. Correspondente a Hamiltoniana tempo-contínua

$$H(b, \phi, n) = \pi b - \int^b db' \alpha(b') + D\delta_1(n) \cos \phi, \quad (6.7)$$

onde,

$$\delta_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - m) = 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \cos(2\pi qn), \quad (6.8)$$

é a função periódica delta de Dirac.

Os pontos fixos são $\phi_{1,2}^* = (0, \pi)$ e $b_{1,2}^* = (b_{esc})$. Os autovalores da matriz jacobiana (6.6) são os pontos

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{2}\right)^2}, \quad (6.9)$$

onde,

$$\tau = 2 - D\alpha'(b_{n+1}) \cos \phi_n, \quad (6.10)$$

é o traço da matriz jacobiana.

Os pontos fixos são estáveis enquanto $\tau < 2$. O ponto $(b_{esc}, 0)$ é estável se $0 < D\alpha'(b_{esc}) < 4$, onde o outro ponto fixo (b_{esc}, π) é estável se $-4 < D\alpha'(b_{esc}) < 0$. Em qualquer um dos casos a trajetória do raio de luz é tal que $b_{n+1} = -b_n$. Como $\alpha' < 0$ e $D > 0$ o ponto fixo $\phi = 0$ é sempre instável e como $|\alpha'(b_{esc})| > (4/D)$ o outro ponto

fixo $\phi = \pi$ é instável, as órbitas periódicas que representam esses pontos fixos estão representados na figura 6.2.

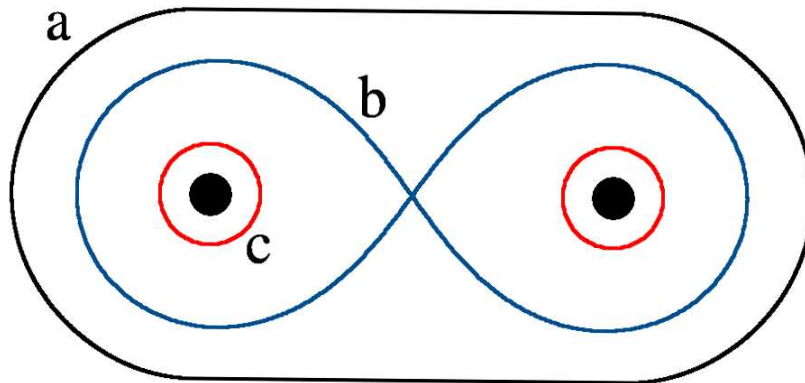


Figura 6.2: Exemplos de órbitas periódicas possíveis do sistema onde a) é obtida a partir dos pontos fixos $(b_{esc}, 0)$ e b) quando $b_{n+1} = -b_n$ e $\phi_{n+1} = -\phi$. c) é um exemplo de órbita com apenas um buraco negro

6.2 Iterações do mapa de espalhamento

6.2.1 Buracos negros de Schwarzschild

Até agora fizemos todo o desenvolvimento do sistema proposto, além dos métodos que utilizaremos para o estudo. É de suma importância lembrar que o efeito consiste em um modelo idealizado, mas que mantém algumas características da dinâmica de um sistema real. Tendo isso em mente, a seguir, vamos destacar todos os resultados que obtivemos para o caso em que os buracos negros são buracos negros de Schwarzschild, ou seja, na métrica o valor da carga Q é igual a zero.

Destacamos anteriormente os termos do ângulo de deflexão e o próprio ângulo no capítulo 3, seção 3.4. Conseguimos obter, da equação (6.3), o limite superior do parâmetro de impacto b

$$b_{esc} = 2.6733.$$

Como já definimos as condições iniciais levam as saídas e o conjunto disso é chamado de bacia, estamos interessados em obter a bacia do sistema.

Iterando o mapa

O próximo passo é iterar o mapa que definimos anteriormente (6.4) e (6.5) com distância $D = 15$. Para iteração dividimos o sistema em 10^4 pontos, com $10^4 \times 10^4$ condições iniciais. Para cada uma dessas condições iniciais salvamos a saída: se o ponto na iteração $|b_n| < b_m$, isso significa que o raio cai em um dos buracos negros e se $|b_n| > b_{esc}$ ele escapa para o infinito. Já os limites do ângulo de escape são os já esperados, 0 a 2π .

Definimos as saídas como -1 se o raio cai em um buraco negro (Vermelho), 1 se cai no outro (Azul), 0 se escapa para o infinito (Verde) e 2 caso o fóton nunca escape do sistema (Branco).

Vemos na figura 6.3 que o padrão formado não nos fornece exatamente o que esperávamos, o padrão é contínuo, tirando em certas regiões específicas por isso para

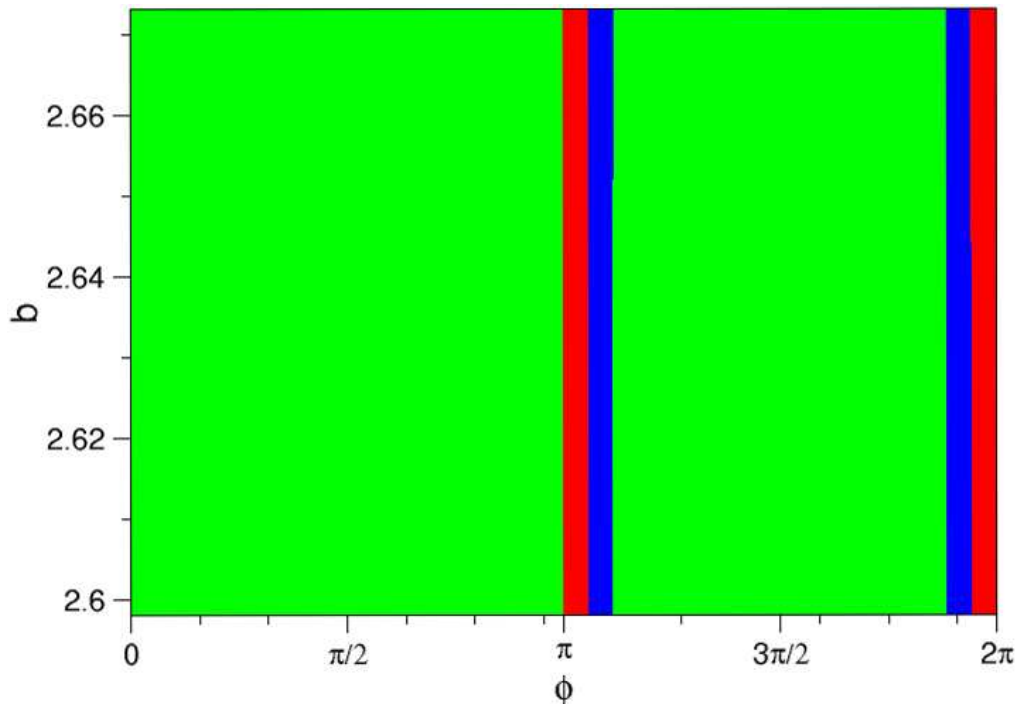


Figura 6.3: Bacias de escape total, onde o eixo horizontal representa os valores das condições iniciais do ângulo de escape ϕ e o eixo vertical as condições iniciais do parâmetro de impacto b . As cores representam as saídas conforme o sistema evolui, onde vermelho e azul para um dos buracos negros, verde para o infinito e branco para quando nunca escapa. A cor branco, neste caso, não é possível ser visualizada.

analisarmos o surgimento de fractais preferimos não utilizar essa variação total. O próximo etapa é então focar nos pontos de órbitas instáveis $\phi = 0$ e $\phi = \pi$.

Esses pontos são importantes, pois em sistemas hamiltonianos abertos essas órbitas correspondem as singularidades do espalhamento, ou seja, a informação da dinâmica caótica do sistema. Elas também carregam a informação em relação à absorção dos fótons pelos buracos negros já que eles estão na fronteira entre serem absorvidas ou espalhadas, formando a fronteira do buraco negro.

Análise unidimensional

Partimos para uma análise mais interna das condições iniciais, onde variamos o valor de b em 10^6 pontos, mantendo o valor do ângulo de escape ϕ fixo, ou seja $\phi = \text{cte}$, reduzindo o sistema a uma dimensão.

O primeiro valor de ϕ que vamos analisar é $\phi_0 = 0$. Na figura 6.4 a) há vários intervalos em que a saída é a mesma, intercalado por limites de b em que a saída varia rapidamente. Se b_0 está em uma dessas regiões, o destino do raio de luz é incerto. A figura 6.4 b) e c) mostram as magnificações nas regiões de variação rápida, exceto pela escala é possível ver que o padrão é bastante semelhante ao anterior. Do mesmo modo iteramos o mapa, desta vez utilizando $\phi_0 = \pi$. Na figura 6.4 d) podemos ver o novo padrão formado, onde o fóton escapa rapidamente para infinito, as magnificações nas regiões de rápida variação são vistas nas figuras 6.4 e) e f) mostrando uma repetição dessa região.

É perceptível da descrição de fractais, definida no capítulo 5, que o sistema é auto-similar, já que regiões menores repetem a estrutura maior. Há, porém, uma abundância de regiões regulares, regiões estas que estão misturadas em todas as escalas com a região fractal, onde o destino do raio de luz é extremamente incerto.

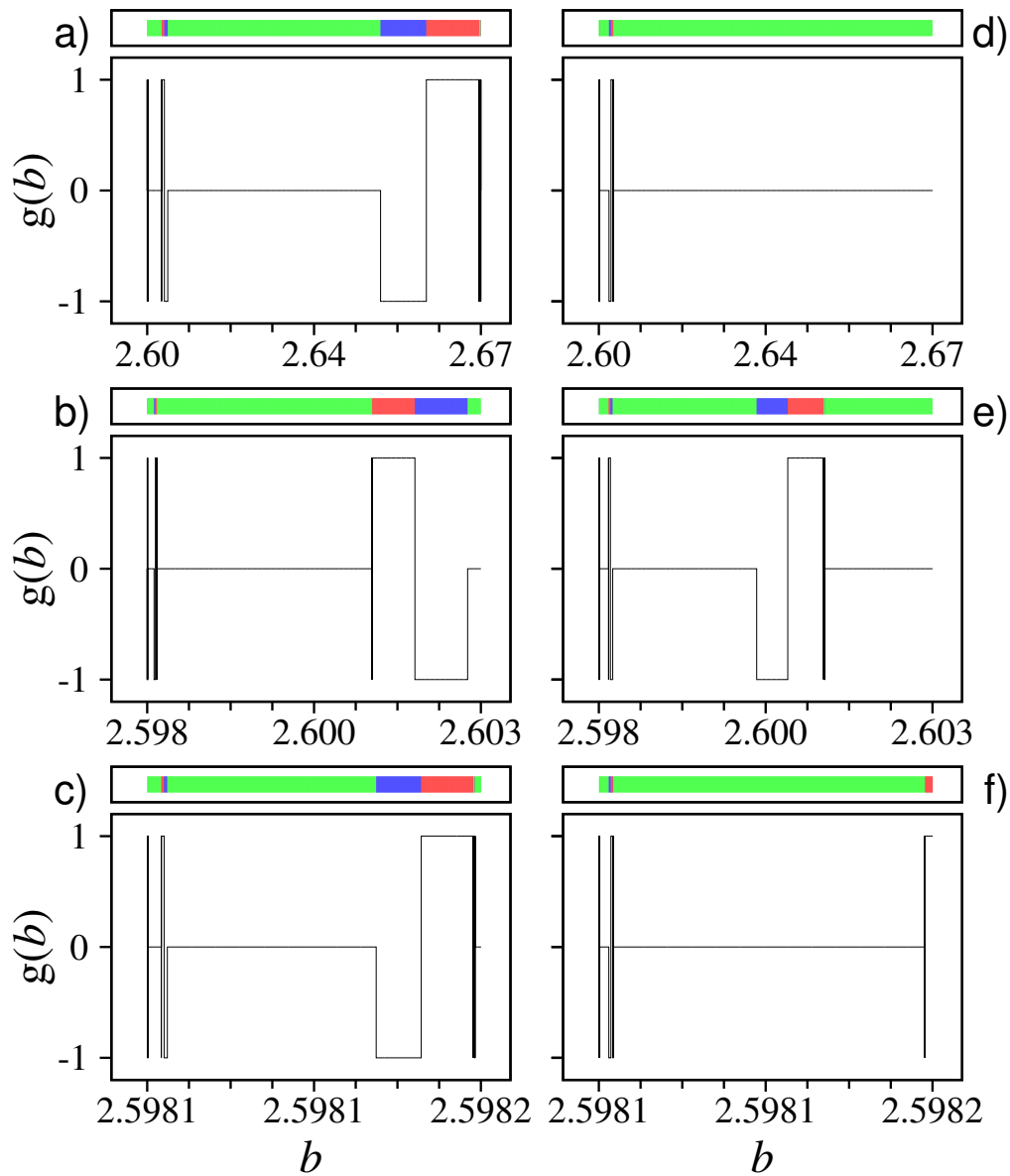


Figura 6.4: Bacias de escape para $\phi = 0$ e $\phi = \pi$ com 10^6 condições iniciais. Representação das bacias em função do parâmetro de impacto b . A função $g(b)$ é definida 1 se a órbita com condições iniciais $\phi = (0, \pi)$ e $b_0 = b$ caem no primeiro buraco negro, -1 se cai no outro e 0 se escapa para infinito, mesmo que $g(b)$ tenha valores discretos, os pontos estão conectados para melhor visualização. Gráficos a), b) e c) possuem $\phi = 0$, onde b) e c) são a primeira e segunda magnificação respectivamente. Gráficos d), e) e f) possuem $\phi = \pi$, onde e) e f) são a primeira e segunda magnificação.

Análise das Variedades

Seguindo a análise de caos do sistema utilizamos as definições de variedades definidas no capítulo 4, apresentamos na figura 6.5 a aproximação numérica da sela caótica como resultado da interseção entre as variedades estáveis e instáveis do sistema. Utilizamos uma grade $10^3 \times 10^3$ condições iniciais, gravamos essas condições iniciais com um tempo de escape maior do que $n_c = 40$.

As condições iniciais constituem uma aproximação as condições iniciais da variedade estável 6.5 a) e na outra condição os pontos finais da trajetória relacionadas as condições iniciais, são aproximações para a variedade instável 6.5 b). Os pontos no meio dessas trajetórias ($\bar{n} = 0.5n_c = 20$) são a representação da sela caótica 6.5 c).

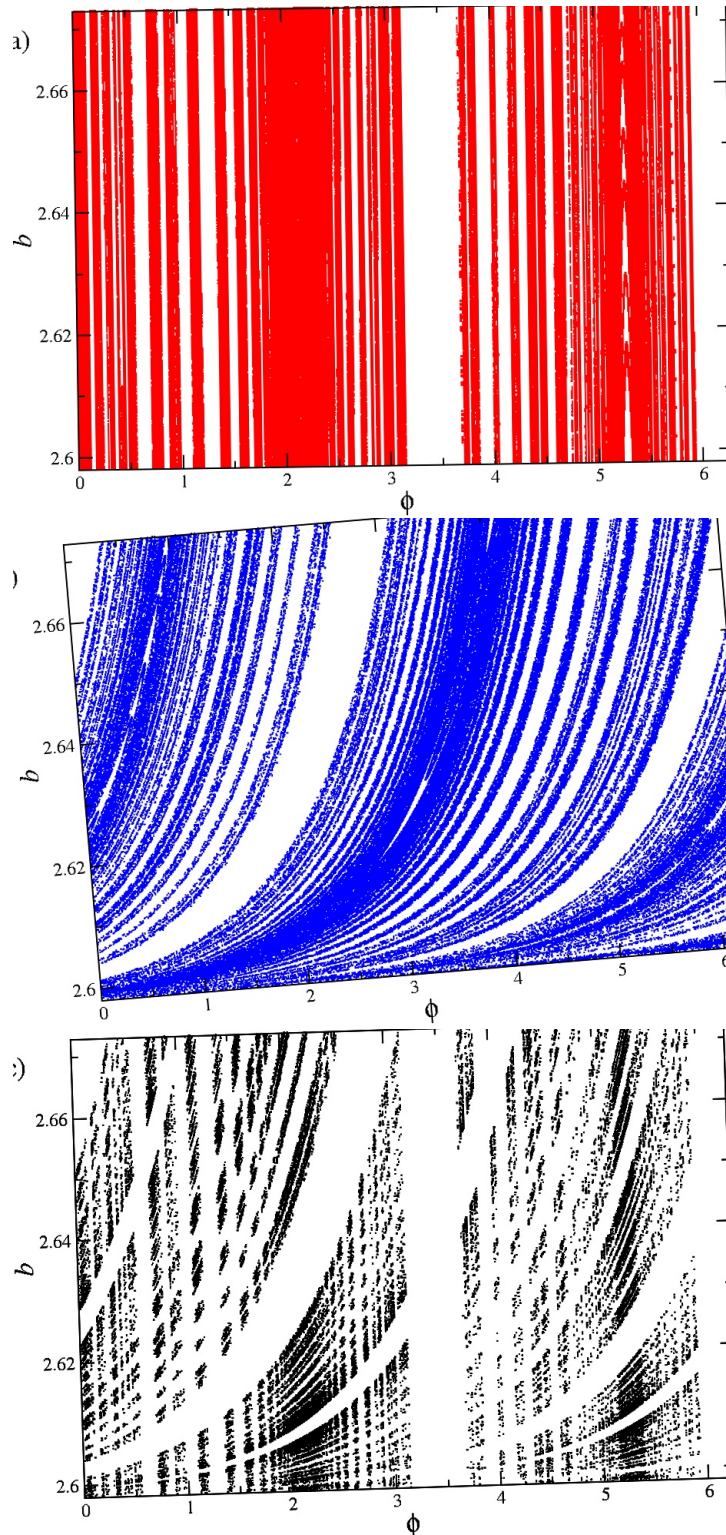


Figura 6.5: Representação das variedades e da sela caótica para a órbita no caso do mapa de espalhamento com $D = 15$, com $n_c = 40$ iterações e $\varepsilon = 0.5$. a) a variedade estável, b) a variedade instável e c) a sela caótica

Análise das propriedades Wada

Como vimos também no capítulo 5 ao analisar o cruzamento das variedades instáveis com as bacias é possível determinar se um sistema tem propriedade Wada,

a figura 6.6 mostra esse cruzamento. Nosso sistema mesmo que simples, possui essa característica, ou seja, esse caso possui uma incerteza conectada a sensibilidade do estado final do sistema.

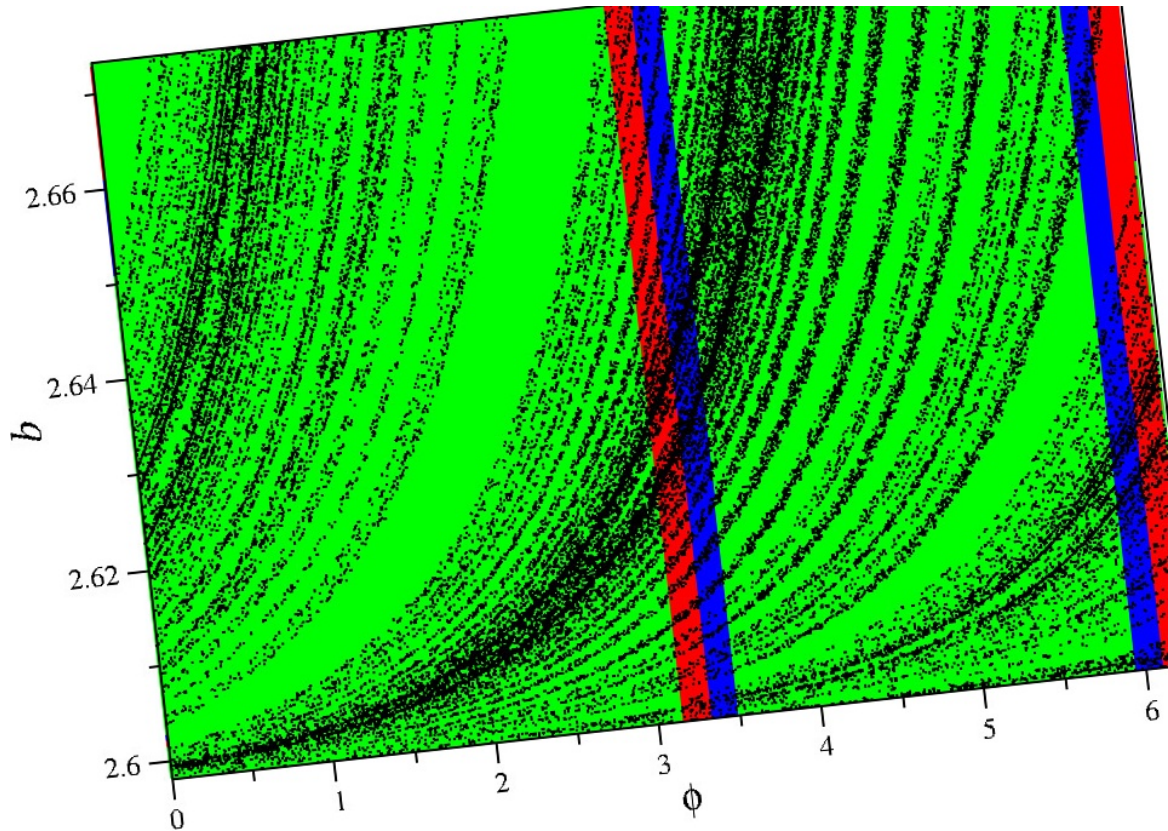


Figura 6.6: Bacia de escape para o mapa de espalhamento com distância $D = 15$. As cores da bacia são as mesmas referentes a figura 6.3. A curva em preto é dada pela variedade instável 6.5 b)

Dimensão fractal

Para analisar a sensibilidade das condições iniciais utilizamos do método da incerteza para obter a dimensão fractal definida na seção 5.4 do capítulo 5.

Demonstramos então na figura 6.7 os resultados obtidos pelo método da incerteza para $\phi = 0$ e $\phi = \pi$. Em seguida tabelamos os valores das dimensões para as primeiras e segundas magnificações:

A dimensão do espaço de fase neste caso é de $N = 1$, o que implica em se $d \neq$ inteiro (0 ou 1) as bacias são fractais. Não obtivemos nenhum valor inteiro para dimensão, o que garante que a bacia tem características fractais.

Variamos o raio ϵ de 10^{-1} até 10^{-10} , porém eliminamos os termos onde a média de $f(\epsilon)$ eram nulos ou estavam muito fora da reta, pelos gráficos sempre temos 6 valores, isso se deu de forma natural ao analisarmos os valores obtidos.

Os valores da dimensão, primeira magnificação e segunda magnificação estão apresentados nas tabelas 6.1 e 6.2.

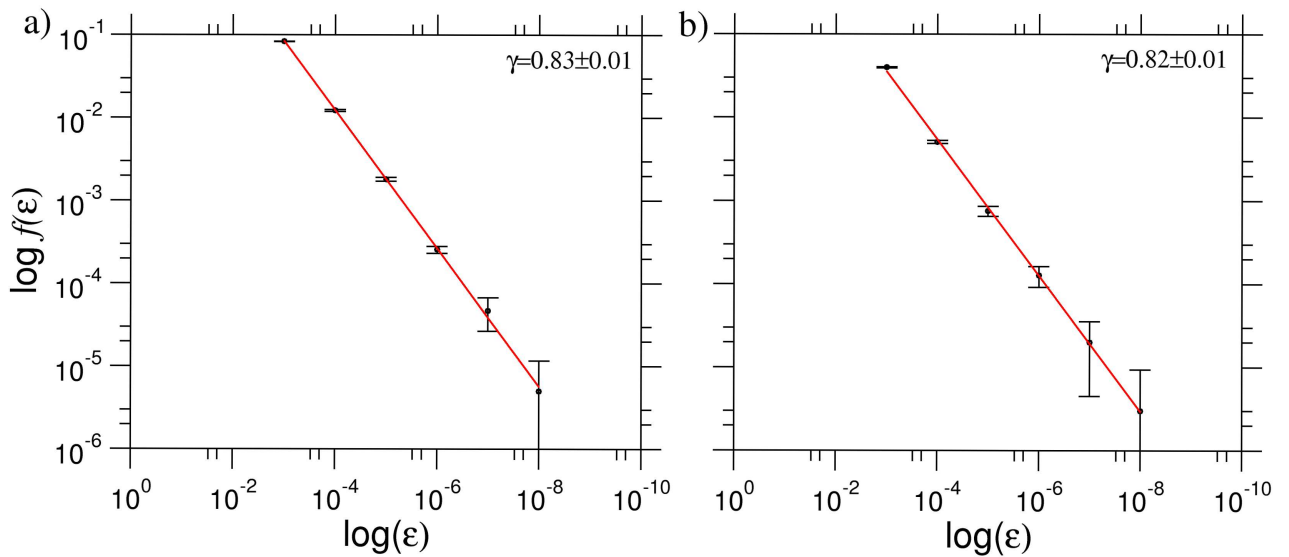


Figura 6.7: Gráfico do expoente de incerteza γ . A relação $\log f(\epsilon) \times \log \epsilon$, onde variamos o raio ϵ de 10^{-1} até 10^{-10} para 10^5 condições iniciais. O declive da reta fornece o expoente de incerteza, pelo método da incerteza e com ele é possível encontrar o valor da dimensão fractal. a) é referente a $\phi = 0$ e b) $\phi = \pi$.

$\phi = 0$			
	Original	1ª Magnificação	2ª Magnificação
d	0.17 ± 0.01	0.15 ± 0.01	0.21 ± 0.02

Tabela 6.1: Tabela com os valores de dimensão referente a $\phi = 0$, mostrando seus valores originais e os das suas magnificações.

$\phi = \pi$			
	Original	1ª Magnificação	2ª Magnificação
d	0.18 ± 0.01	0.16 ± 0.01	0.22 ± 0.01

Tabela 6.2: Tabela com os valores de dimensão referente a $\phi = \pi$, mostrando seus valores originais e os das suas magnificações.

Entropia da bacia

Dando seguimento utilizamos a análise da entropia para certificar a fractalidade da bacia e da fronteira da bacia. Utilizando o método descrito na seção 5.5, sabemos ser possível afirmar que um sistema é fractal quando o valor da entropia da fronteira da bacia é maior que $\ln(2)$, tabelamos os valores da entropia da bacia e da fronteira da bacia referentes a $\phi = 0$ e $\phi = \pi$. Os valores das tabelas 6.3 e 6.4 foram obtidos ao iterarmos cada condição inicial por um número máximo de 10^4 , variando a divisão das caixas em matrizes colunas com tamanho $\varrho = (4, 5, 8, 10)$ e obtendo sua média e desvio padrão.

$\phi = 0$			
	Original	1ª Magnificação	2ª Magnificação
$S_b (\times 10^{-5})$	9.03 ± 3.20	7.21 ± 2.50	9.10 ± 3.03
S_{bb}	0.92 ± 0.08	0.94 ± 0.10	0.94 ± 0.08

Tabela 6.3: Tabelas com os valores das entropias para $\phi = 0$, com suas respectivas magnificações. Onde S_b é a entropia da bacia e S_{bb} é a entropia da fronteira da bacia.

	$\phi = \pi$		
	Original	1ª Magnificação	2ª Magnificação
$S_b (\times 10^{-5})$	5.70 ± 2.02	8.75 ± 2.85	7.31 ± 2.25
S_{bb}	0.91 ± 0.09	0.91 ± 0.10	0.87 ± 0.13

Tabela 6.4: Tabelas com os valores das entropias para $\phi = \pi$, com suas respectivas magnificações. Onde S_b é a entropia da bacia e S_{bb} é a entropia da fronteira da bacia.

Ao analisarmos os valores obtidos para a entropia da fronteira, é perceptível que estamos acima de $\ln(2)$, logo temos mais uma confirmação que o sistema é fractal.

6.2.2 Variação da distância D no mapa de Schwarzschild

Nosso próximo passo foi verificar como o sistema se comportaria ao modificarmos a distância D entre os buracos negros de Schwarzschild, sabemos que essa distância precisa ser muito maior que o raio de Schwarzschild R_s , mas para compreender a sua influência direta no comportamento introduzimos um valor mínimo em $D = 5.0$ e um valor máximo $D = 20.0$.

As figuras 6.8 e 6.9 mostram a representação das saídas para cada valor de D em $\phi = 0$ e $\phi = \pi$, onde em a) $D = 5.0$, b) $D = 7.5$, c) $D = 10.0$, d) $D = 12.5$, e) $D = 17.5$, f) $D = 20.0$. Perceptível que deixamos de fora nessa análise primaria a representação de $D = 15$ já que seu resultado está explicito na figura 6.4.

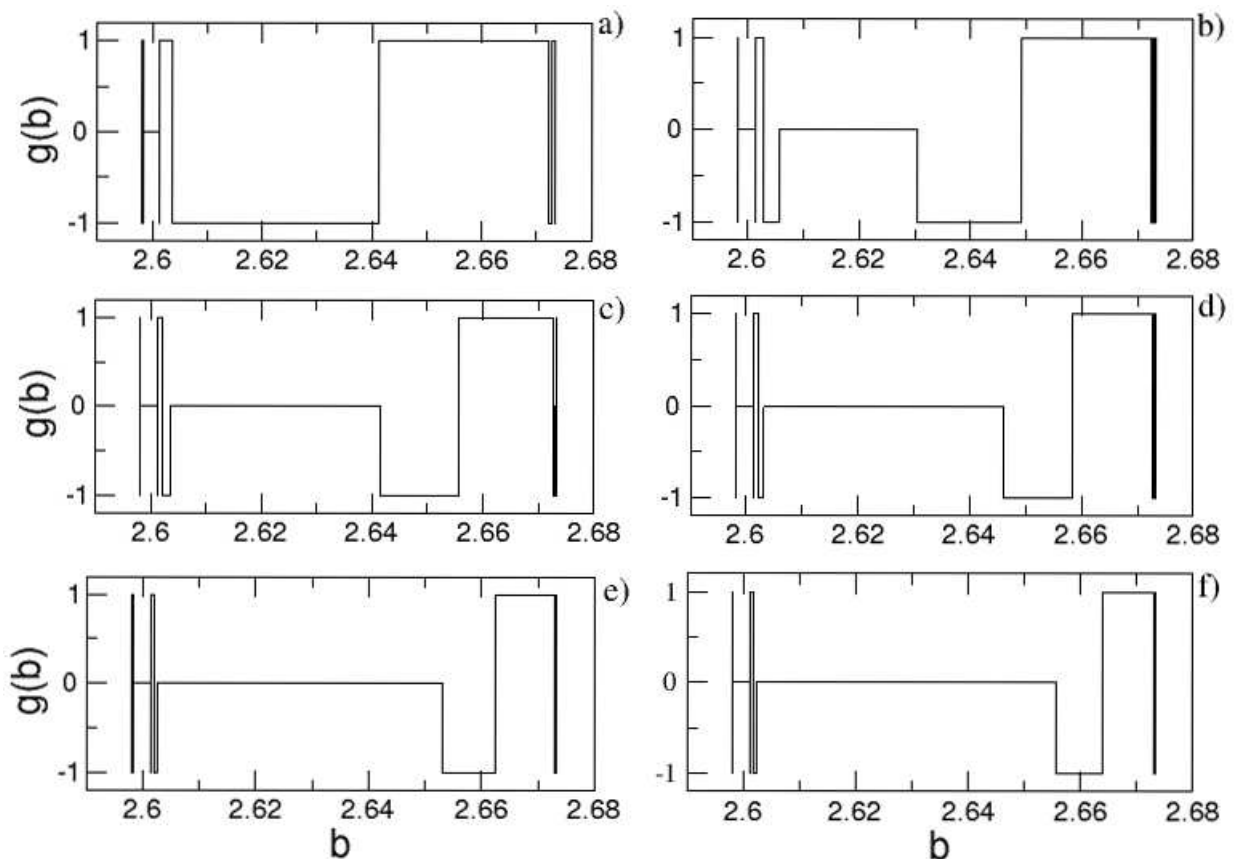


Figura 6.8: Saídas do sistema para variação de D em $\phi = 0$. Onde em a) $D = 5.0$, b) $D = 7.5$, c) $D = 10.0$, d) $D = 12.5$, e) $D = 17.5$ e f) $D = 20.0$. Plotamos as barras horizontais conforme as saídas representadas na forma da função $g(b)$.

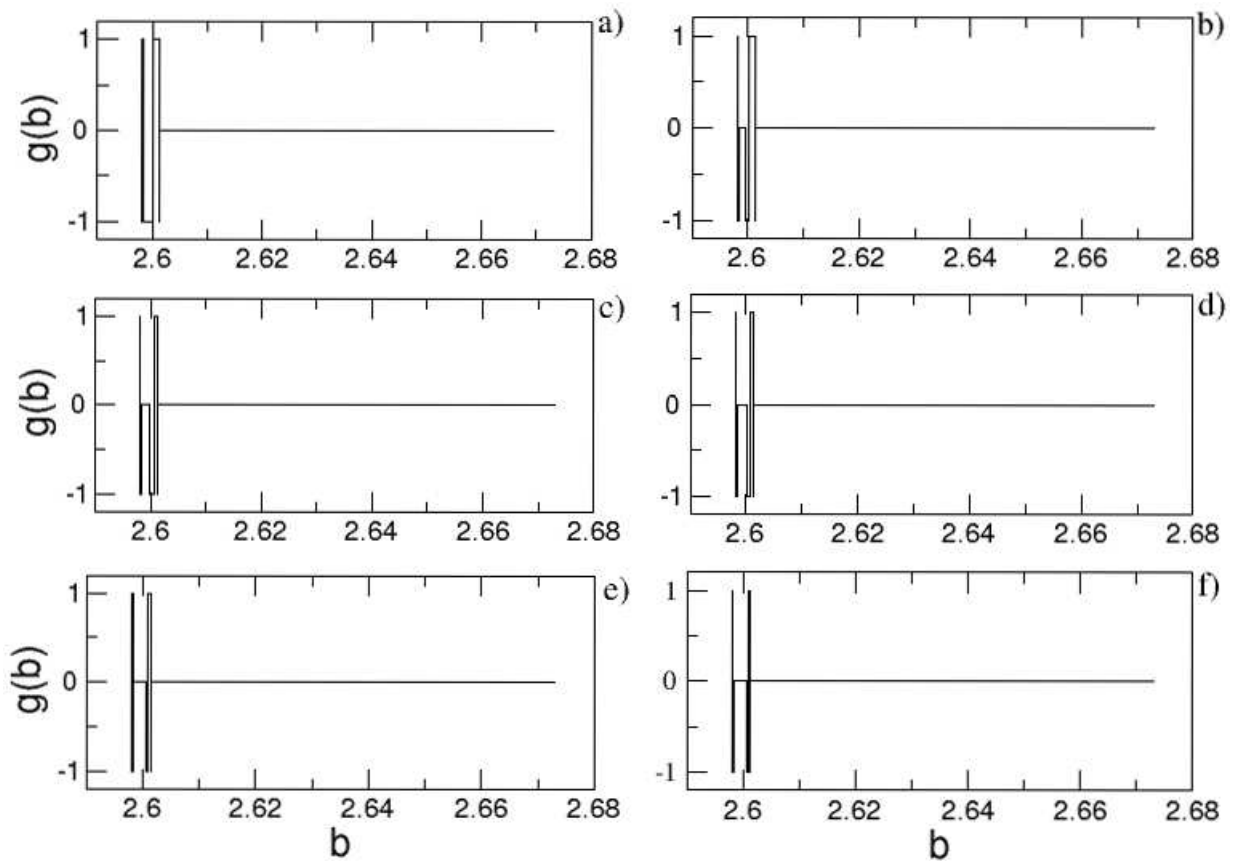


Figura 6.9: Saídas do sistema para variação de D em $\phi = \pi$. Onde em a) $D = 5.0$, b) $D = 7.5$, c) $D = 10.0$, d) $D = 12.5$, e) $D = 17.5$ e f) $D = 20.0$. Plotamos as barras horizontais conforme as saídas representadas na forma da função $g(b)$.

A influência de D em distâncias pequenas como $D = 5$ e $D = 10$ o fóton cai muito mais facilmente nos buracos negros, após isso a estrutura visual se mantém a de $D = 15$, apenas deslocando a região caótica levemente e aumentando a oportunidade que o fóton tem de escapar para infinito, isso conforme a distância D aumenta. Na figura 6.10 mostramos as regiões caóticas e suas magnificações em $D = 12.5$, onde a), b) e c) são as saídas em $\phi = 0$ e d), e) e f) as saídas em $\phi = \pi$.

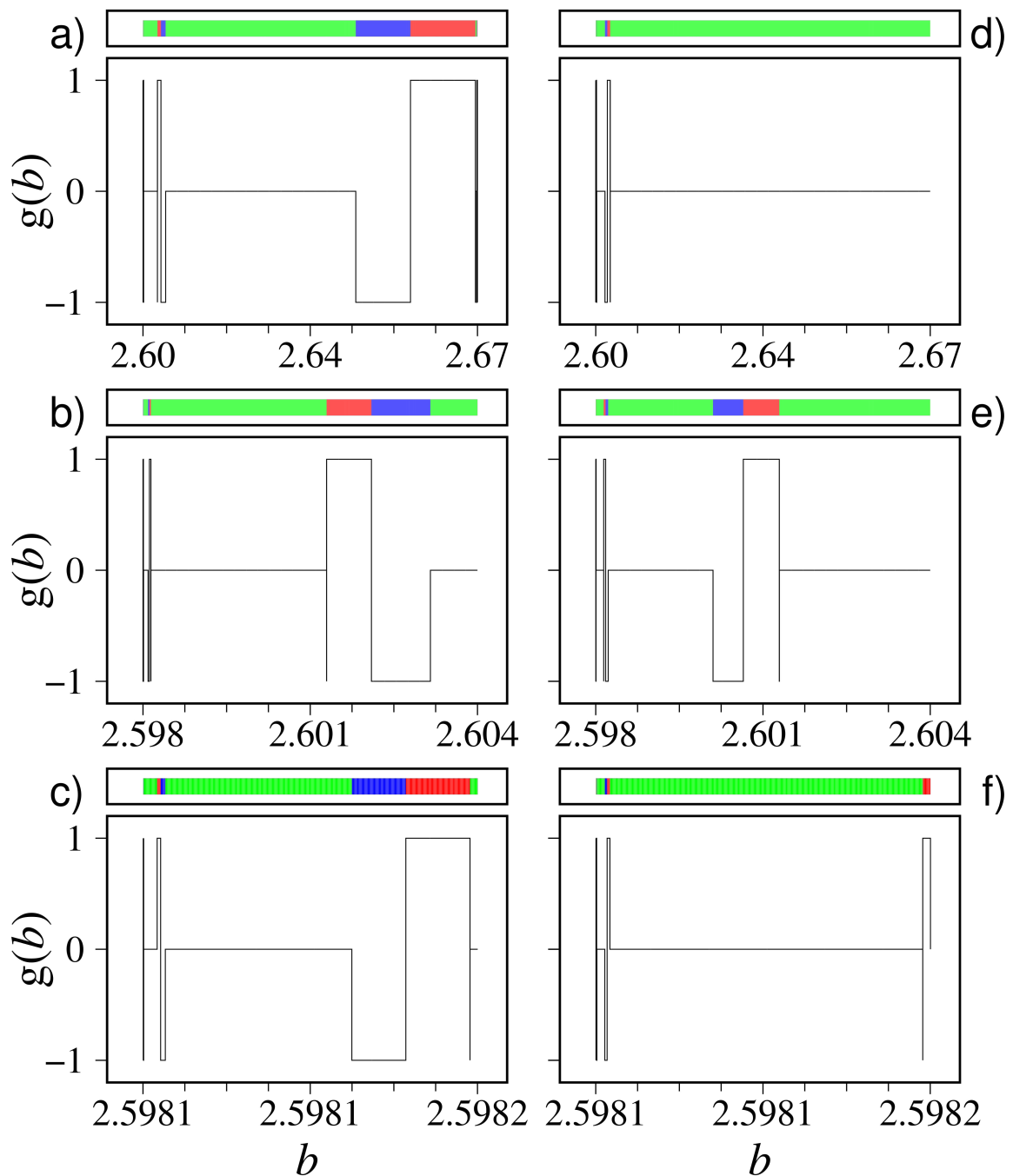


Figura 6.10: Saídas do sistema para $D = 12.5$. As barras horizontais representam as bacias de escape como função do parâmetro de impacto b ; Em $\phi = 0$ em a), com magnificações em b) e c); e $\phi = \pi$ em d) e suas magnificações em e) e f). Plotamos as barras horizontais conforme as saídas representadas na forma da função $g(b)$.

Análise da entropia

Novamente como ferramenta de certificar a fractalidade do sistema utilizamos neste caso somente ao estudo da entropia, obtendo com isso o valor referente a entropia da bacia e da fronteira da bacia. Esse valor sendo comparado então ao limite inferior $\ln(2)$ nos mostrou que o sistema é fractal. Nas figuras 6.11 e 6.12 evidenciamos os valores das entropias conforme a distância D aumenta.

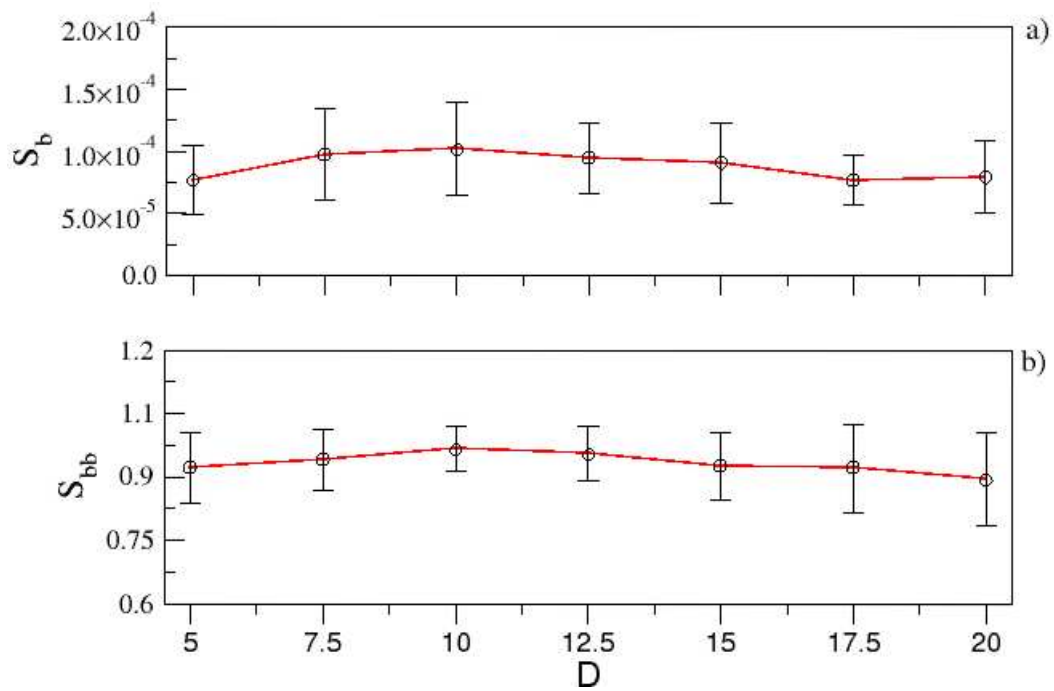


Figura 6.11: Entropia do sistema, para $\phi = 0$, conforme a distância entre os buracos negros aumenta, onde a) é a entropia da bacia e b) a entropia da fronteira.

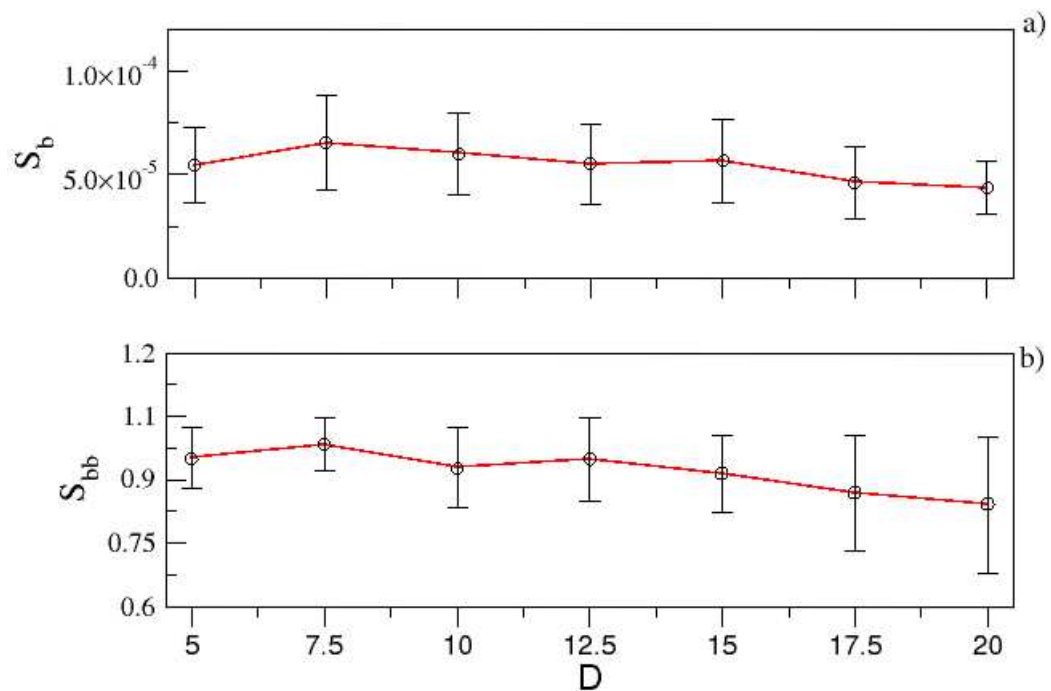


Figura 6.12: Entropia do sistema, para $\phi = \pi$, conforme a distância entre os buracos negros aumenta, onde a) é a entropia da bacia e b) a entropia da fronteira.

Como uma característica geral percebemos que a complexidade da bacia diminui conforme D aumenta, isso se dá pelas aproximações que definimos na seção 6.2. Isso significa que a bacia se torna progressivamente menos misturada conforme a distância aumenta. Em uma distância *infinita*, o sistema é tratado como o definido no capítulo 3.

6.2.3 Buracos Negros de Reissner-Nordström

Até agora trabalhamos apenas com um sistema de buracos negros sem carga, ou seja, na métrica de Schwarzschild. O estudo de sistemas binários de buracos negros com carga extrema (carga igual à massa) foi feito em profundidade por Shippley e Dolan [89] e Daza *et al.* [31], onde eles utilizam a métrica de majundar-papapetrou [114], métrica essa que descreve sistemas binários de buracos negros mantendo características como momento angular.

Nosso objetivo é analisar sistemas mais simples e obter as características desse sistema. Ao utilizarmos o desenvolvimento proposto na seção 6.2 em conjunto com o desenvolvimento do capítulo 3, conseguimos focar em sistemas com carga menor do que a massa sem se preocupar em resolver integrais, obtendo assim um teste qualitativo do comportamento da luz em sistema binário de buracos negros com carga.

Definimos a variação da carga em $Q = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.49$, iteramos o sistema o mapa dividindo o sistema em 10^4 pontos para 10^6 condições iniciais do parâmetro de impacto b e analisamos a função $g(b)$ referente as saídas, do mesmo modo feito anteriormente para $Q = 0$.

O resultado das iterações para $\phi = 0$ podem ser vistos na figura 6.13 e as magnificações nas figuras 6.14 e 6.15. Incluímos os resultados obtidos anteriormente com $Q = 0$ por motivo de comparação. $g(b)$ é a função indicativa da saída. É possível observar que o padrão característico observado anteriormente não é modificado, mas o valor dos limites do parâmetro de impacto b variam conforme a carga aumenta, isso nos diz que quanto maior a carga, mais próximo do buraco negro o raio de luz passa.

A mesma análise foi feita para $\phi = \pi$, os resultados são apresentados nas figuras 6.16, 6.17 e 6.18, onde novamente observamos uma mudança nos limites do parâmetro de impacto b conforme a carga aumenta.

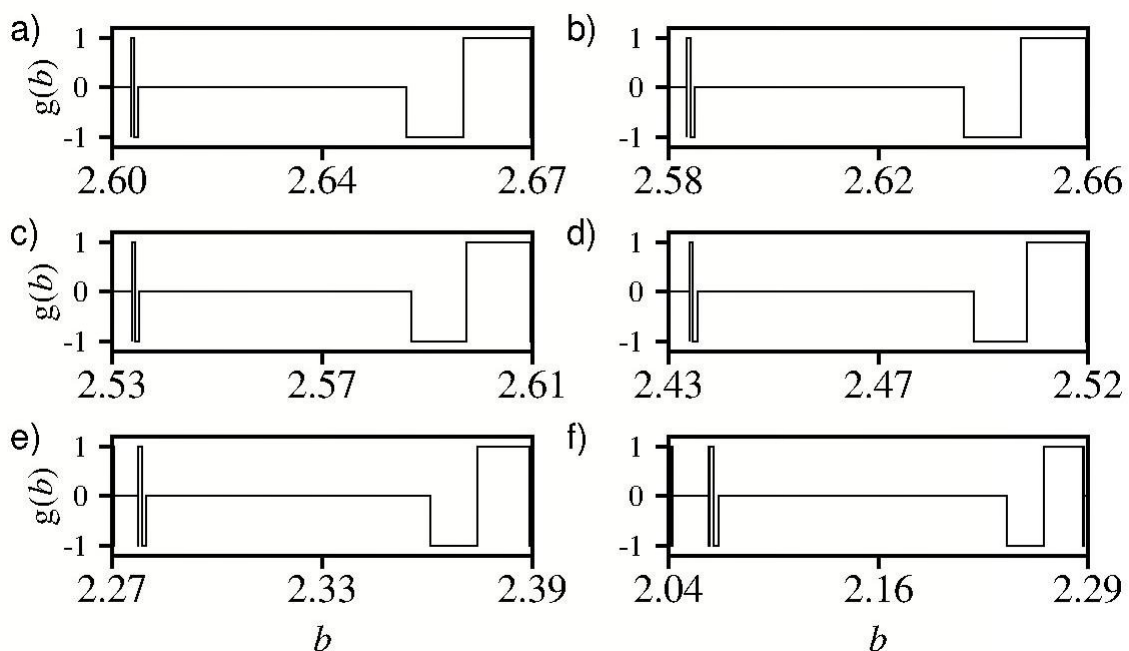


Figura 6.13: Saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = 0$. Plotamos a função $g(b)$ em função da variação de b conforme variamos o valor da carga Q . Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$.

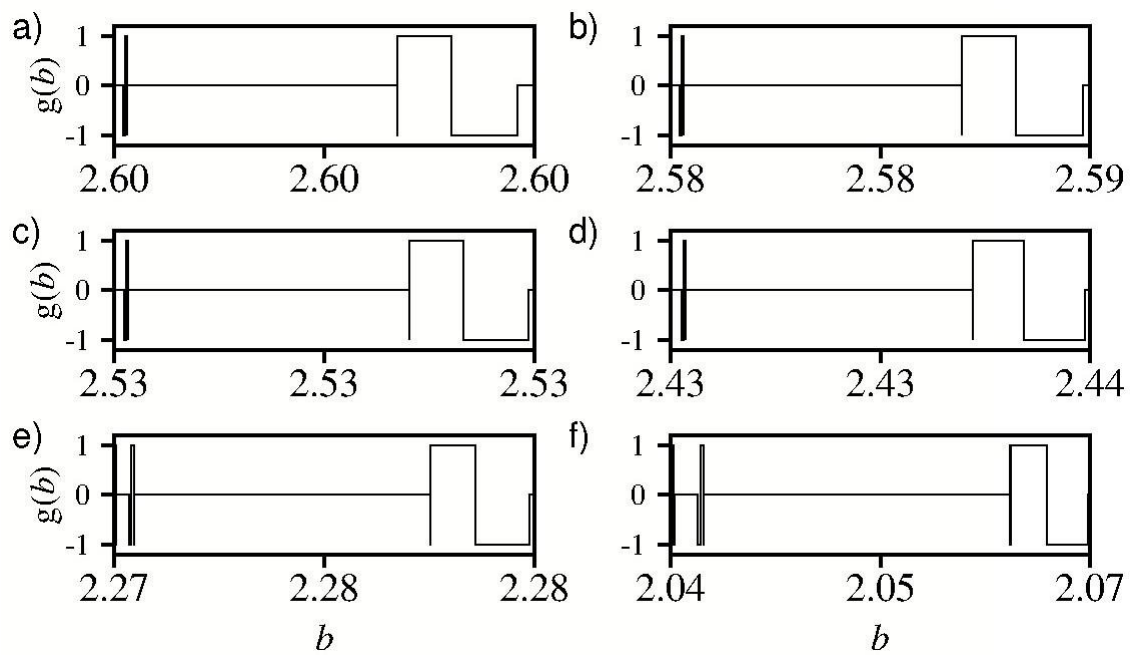


Figura 6.14: Primeira aproximação das saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = 0$. Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$.

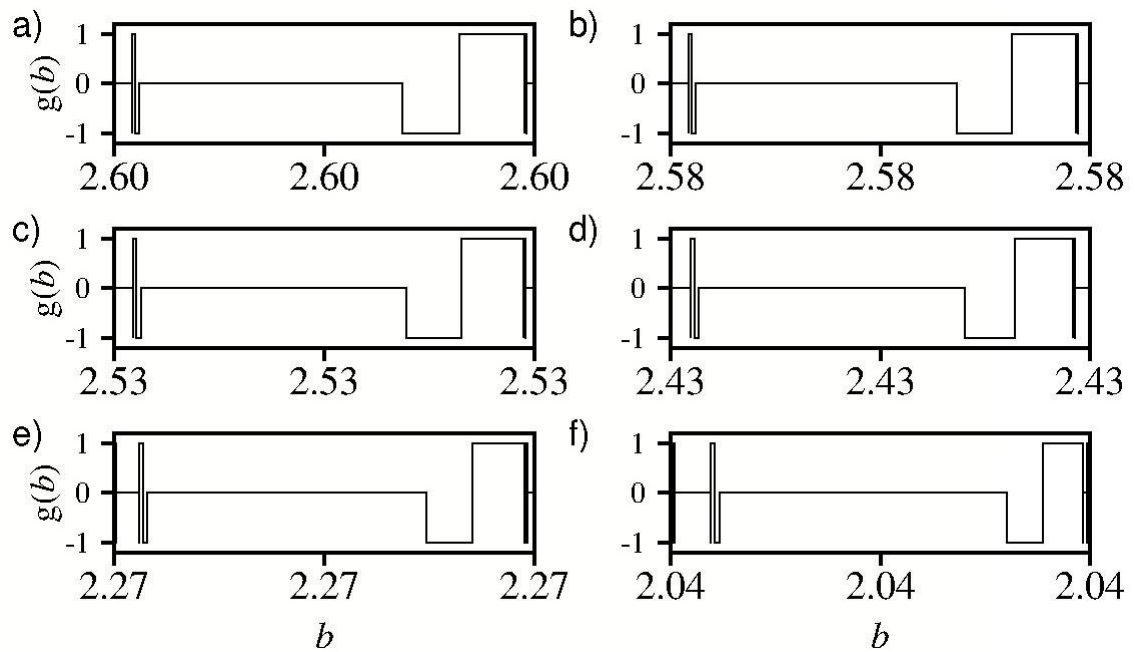


Figura 6.15: Segunda aproximação das saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = 0$. Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$.

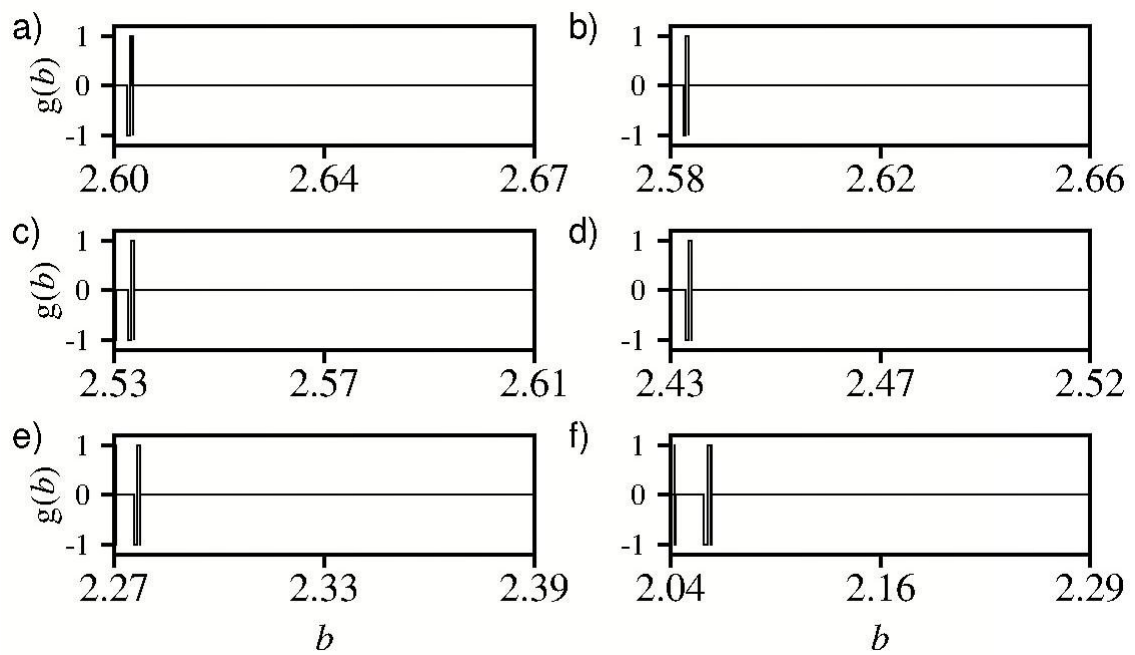


Figura 6.16: Saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = \pi$. Plotamos a função $g(b)$ em função da variação de b conforme variamos o valor da carga Q . Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$.

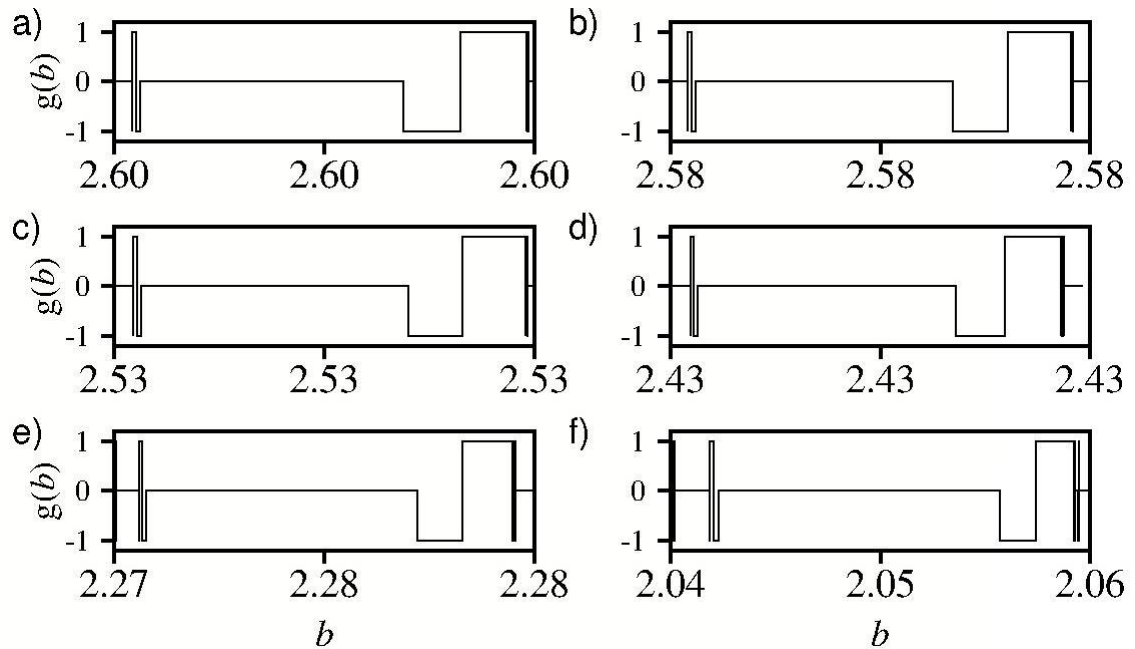


Figura 6.17: Primeira aproximação das saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = 0$. Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$.

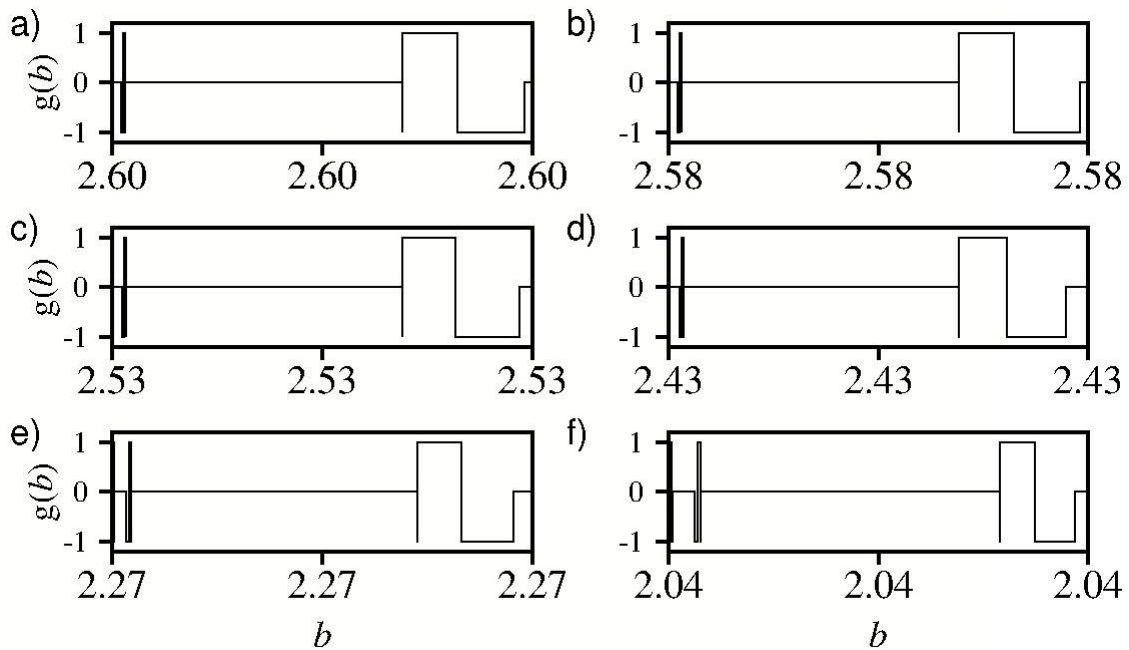


Figura 6.18: Segunda aproximação das saídas do sistema com variação de Carga Q para $\phi = 0$. Em a) $Q = 0$, b) $Q = 0.1$, c) $Q = 0.2$, d) $Q = 0.3$, e) $Q = 0.4$ e f) $Q = 0.49$.

Voltando ao efeito de lentes gravitacionais Eiroa *et al.* [115] mostrou que em buracos negros de Reissner-Nordström as imagens produzidas pelo lenteamento eram mais intensas do que as produzidas pelo buraco negro de Schwarzschild. A posição angular dessas imagens diminuem, conforme a carga aumenta. A posição angular pode ser diretamente relacionada ao parâmetro de impacto, logo o resultado que obtivemos está em acordo com os resultados disponíveis na literatura.

Análise da dimensão e da entropia

Seguimos os passos apresentados no capítulo 5 e já utilizados no caso de Schwarzschild, encontramos a entropia e a dimensão do sistema. A figura 6.19 mostra o comparativo dos valores de dimensão obtidos para cada valor de carga. O valor máximo da dimensão em $\phi = 0$ acontece quando $Q = 0.4$, já em $\phi = \pi$ acontece quando $Q = 0.49$.

Todos os valores de dimensão encontrados confirmam que o sistema se mantém fractal conforme a variação da carga, próximo passo naturalmente é estudar a entropia. As figuras 6.20 e 6.21 mostram os valores de entropia da bacia e da fronteira da bacia para cada valor de carga Q em $\phi = 0$ e em $\phi = \pi$ respectivamente.

A entropia nos dois sistemas são semelhantes no modo que se comportam conforme a carga aumenta. A entropia da fronteira sofre um leve aumento até o máximo em $Q = 0.4$ e depois cai ao chegar em $Q = 0.49$. Lembramos que neste caso mantemos o sistema com valores de carga abaixo do valor crítico de $Q = 0.5$ onde a carga toma valor semelhante ao da massa. O sistema é confirmado como sendo fractal e todos os testes foram compatíveis para chegar a essa afirmação.

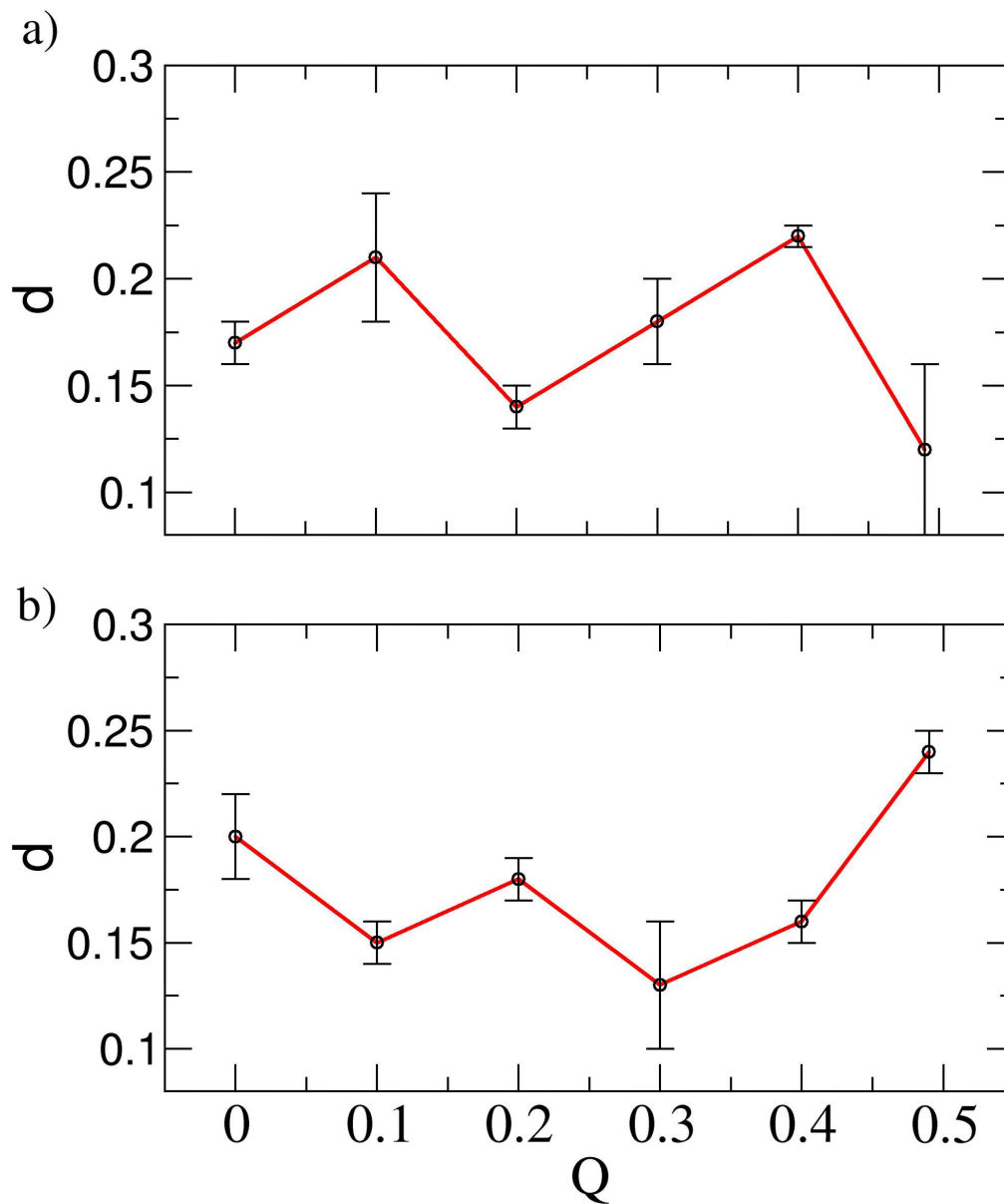


Figura 6.19: Representação da dimensão fractal conforme a mudança do valor de carga Q . Em a) $\phi = 0$, b) $\phi = \pi$, a linha vermelha é utilizada para melhor visualização da mudança do valor da dimensão.

6.2.4 Na métrica Janis-Newman-Winicour

Como descrevemos no capítulo 2, a métrica de Janis-Newman-Winicour, permite análises mais próximas do horizonte de evento. O parâmetro de impacto do fóton ao encontrar o buraco negro pode ser menor que o obtido anteriormente em Schwarzschild ou Reissner-Nordström. As figuras 6.22 e 6.23 apresentam as saídas do conforme o sistema evolui para os ângulos de escape $\phi = 0$ e $\phi = \pi$ respectivamente.

O valor mínimo do parâmetro de impacto b em a) 0.6 é bem menor que o obtido em Schwarzschild, mesmo que o padrão de escape seja semelhante visualmente a Schwarzschild e Reissner-Nordström, assim essa métrica seria ideal para obter um melhor entendimento da influência do campo gravitacional extremo na região do horizonte de evento.

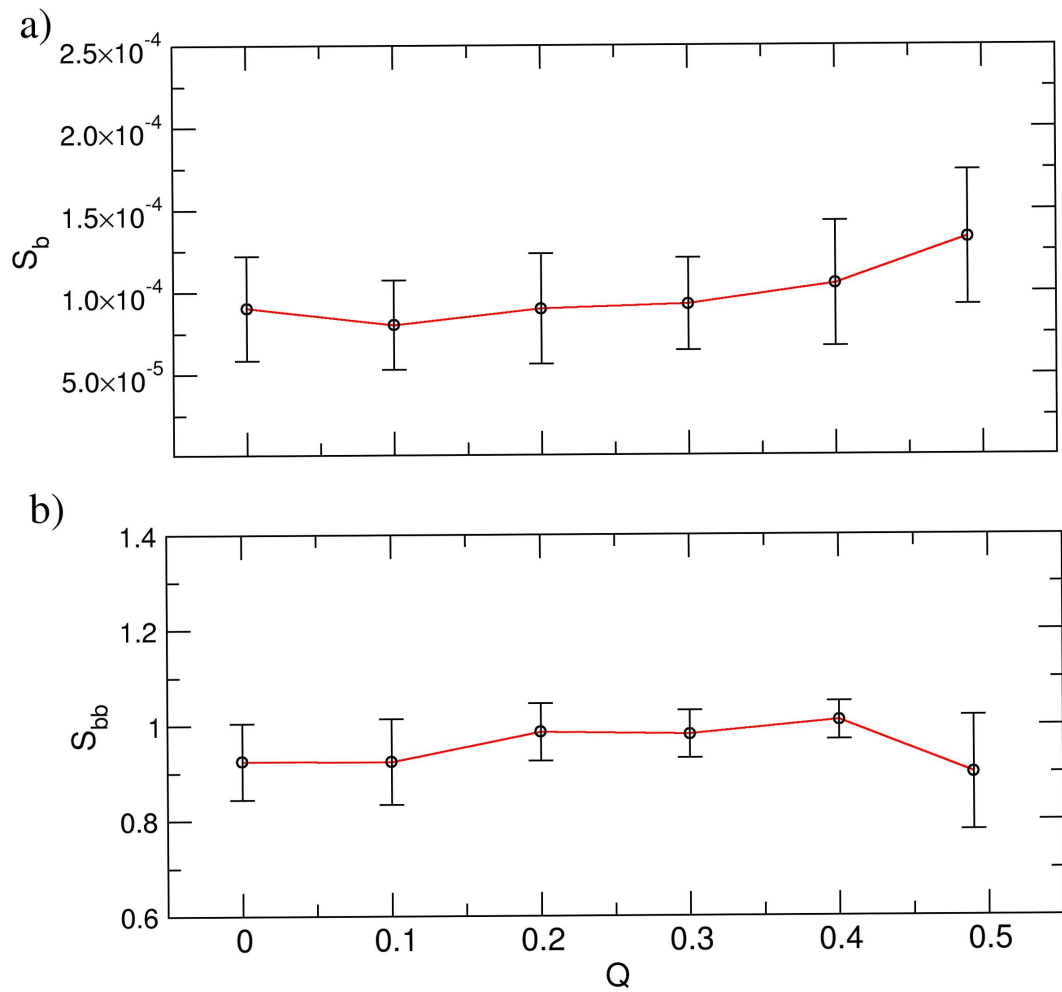


Figura 6.20: Representação da entropia em $\phi = 0$ conforme a mudança do valor de carga Q . Em a) Entropia da bacia e b) Entropia da fronteira, a linha vermelha é utilizada para melhor visualização da mudança do valor da dimensão.

Análise da entropia

Apresentadas nas figuras 6.24 e 6.25 as entropias das bacias e das fronteiras para cada valor de γ com $\phi = 0$ e $\phi = \pi$ respectivamente. É perceptível que o valor da entropia da fronteira (gráfico *b*) nas duas figuras) é maior que $\ln(2)$, vale destacar também que na figura 3.32 *b*) o valor referente a $\gamma = 0.9$ não apresenta incerteza para as configurações padrões utilizadas em todo esse trabalho.

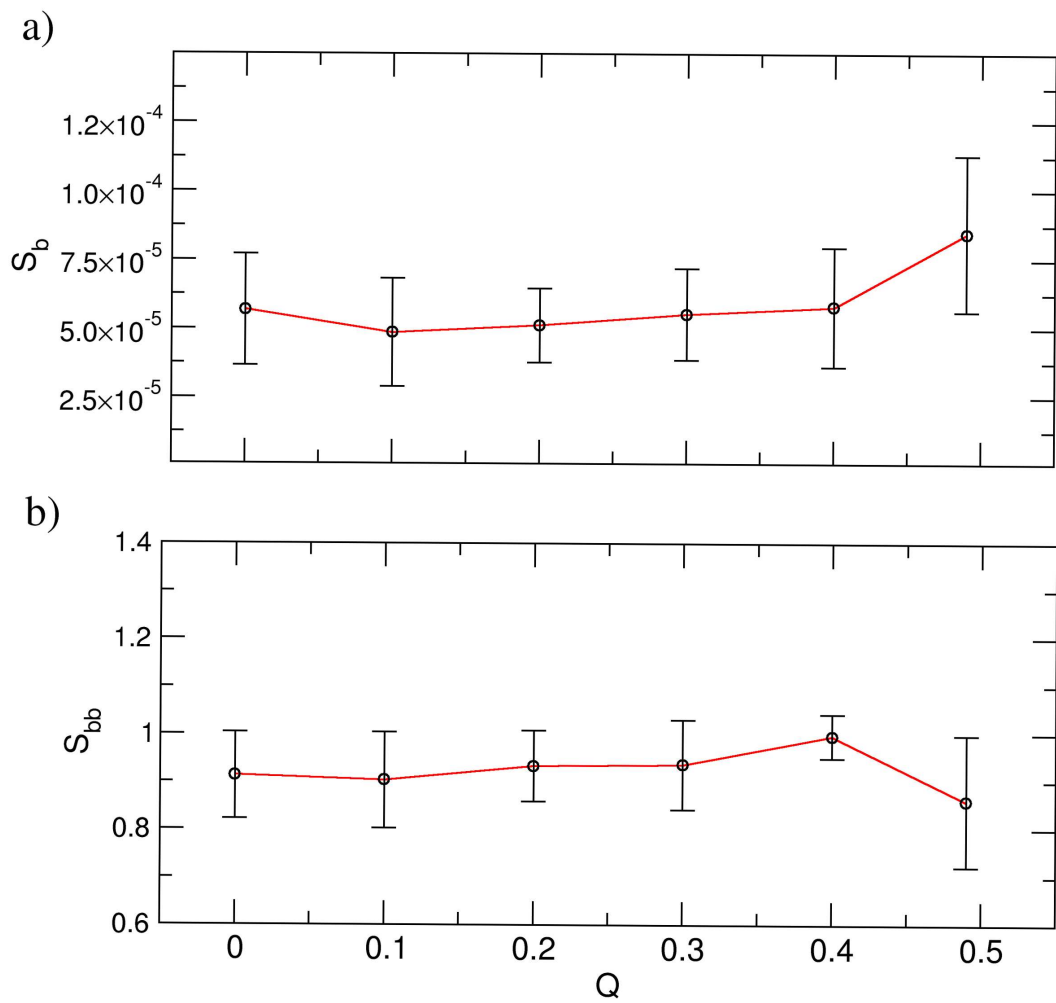


Figura 6.21: Representação da entropia em $\phi = \pi$ conforme a mudança do valor de carga Q . Em a) Entropia da bacia e b) Entropia da fronteira, a linha vermelha é utilizada para melhor visualização da mudança do valor da dimensão.

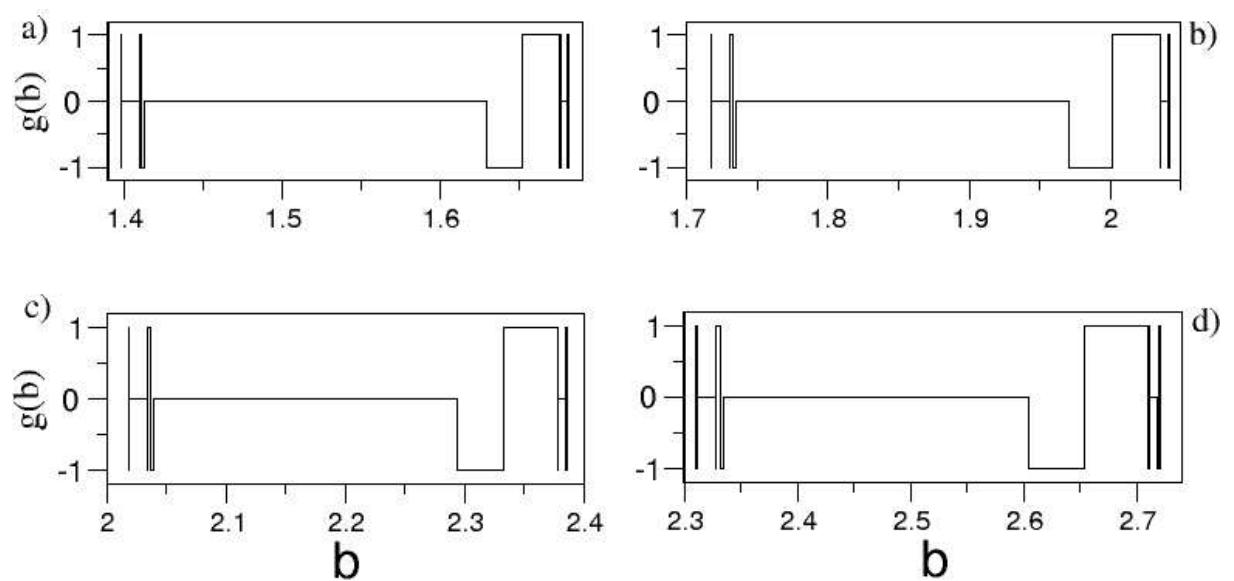


Figura 6.22: Representação da bacia de escape em $\phi = 0$ para diferentes valores de γ onde a) $\gamma = 0.6$, b) $\gamma = 0.7$, c) $\gamma = 0.8$ e d) $\gamma = 0.9$.

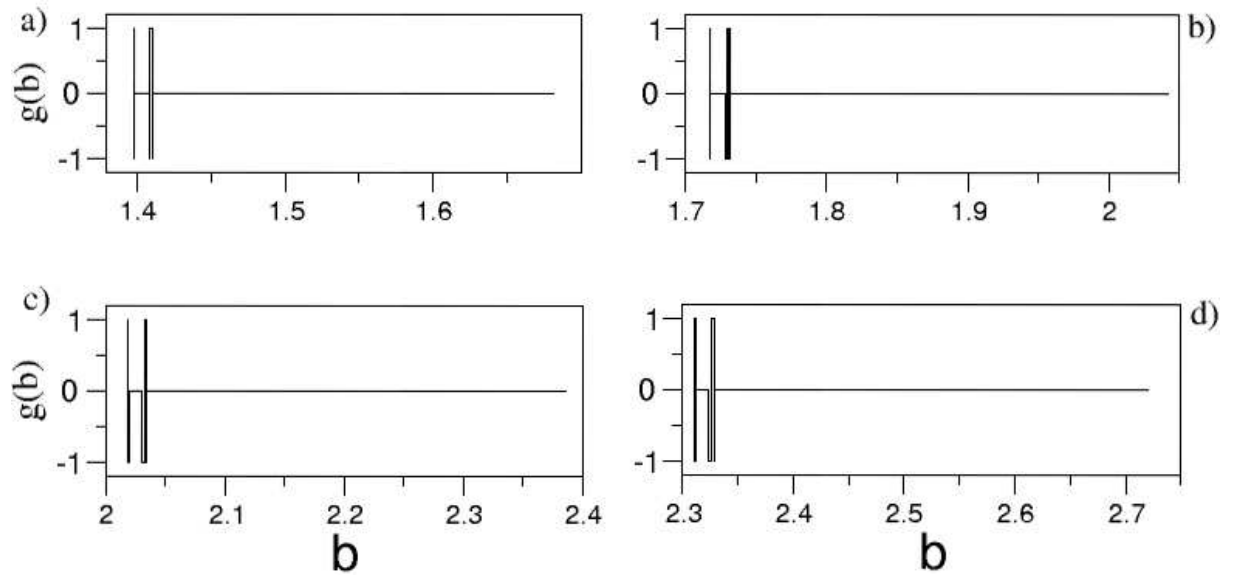


Figura 6.23: Representação da bacia de escape em $\phi = \pi$ para diferentes valores de γ onde a) $\gamma = 0.6$, b) $\gamma = 0.7$, c) $\gamma = 0.8$ e d) $\gamma = 0.9$.

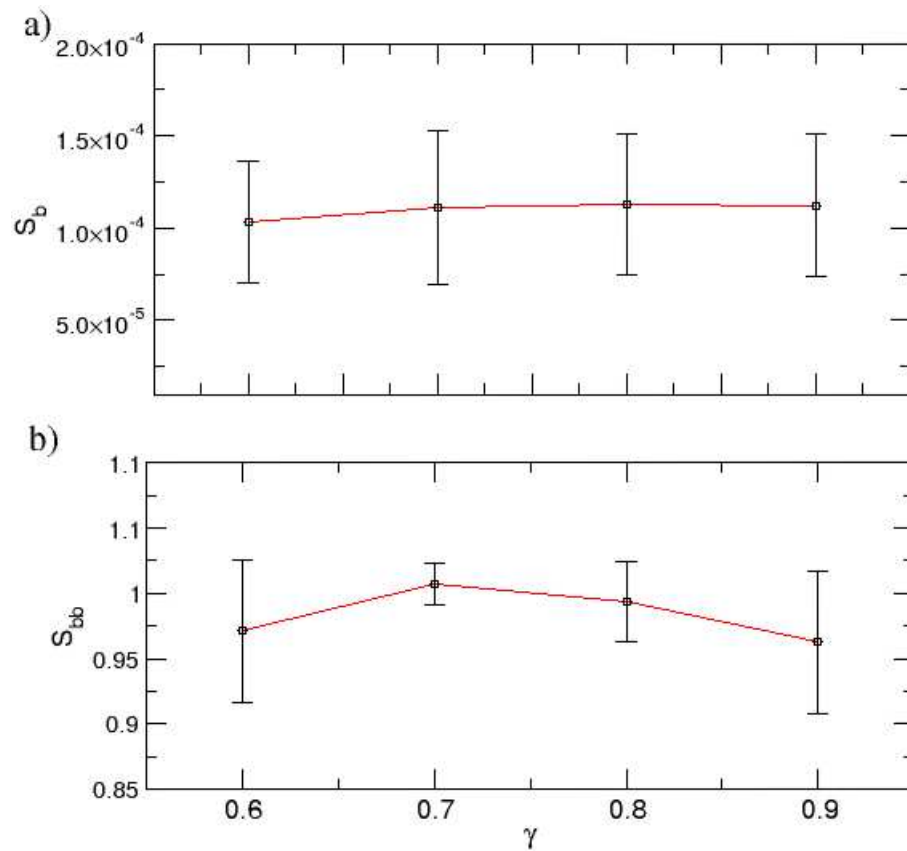


Figura 6.24: Entropia da bacia (S_b) e da fronteira (S_{bb}) em $\phi = 0$ para diferentes valores de γ .

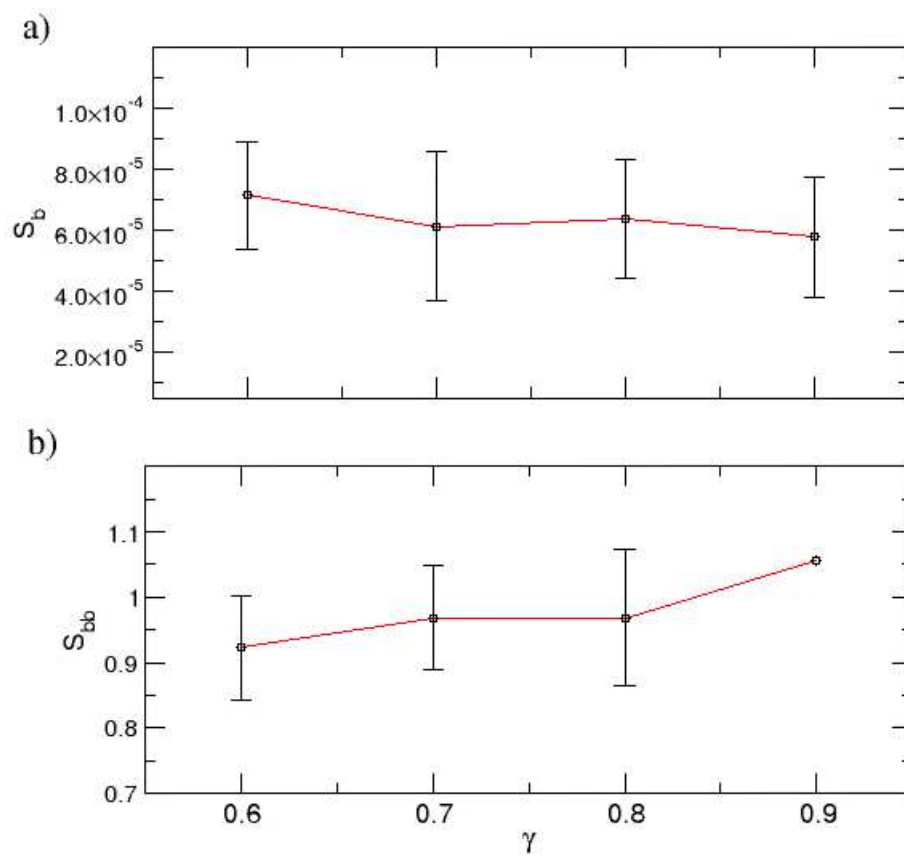


Figura 6.25: Entropia da bacia (S_b) e da fronteira (S_{bb}) em $\phi = \pi$ para diferentes valores de γ .

7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS.

Neste trabalho propomos um sistema contendo dois buracos negros em que o campo gravitacional de um não influenciava o campo gravitacional do outro. Eles estão distribuídos de forma que um raio de luz vindo do infinito e sentindo o campo gravitacional de um dos buracos negros é desviado e enviado em uma certa direção, se essa direção tem um certo ângulo, o raio de luz sente o campo gravitacional do segundo buraco negro e é novamente desviado. Sistemas binários de buracos negros são fontes de ondas gravitacionais, importantes para o estudo do universo.

Analisamos qualitativamente o efeito do comportamento da luz ao encontrar o sistema de dois buracos negros. Por questão da complexidade do sistema, simplificamos certas propriedades. Porém, mesmo ao ser simplificado, é esperado que o sistema mantenha certas propriedades na influência do movimento.

Para esse trabalho propomos três tipos diferentes de sistemas e variações, a princípio, estudando o caso em que temos dois buracos negros de Schwarzschild. Em seguida variamos a distância entre os buracos negros. Utilizamos também o sistema onde os dois buracos negros são do tipo Reissner-Nordström, ou seja, buracos negros que possuem carga elétrica como uma de suas características, neste caso mantivemos a carga em valores abaixo do dito sistema extremo (carga igual à massa). Por último utilizamos a métrica de Janis-Newman-Winicour, métrica essa que elimina a massa e carga do sistema permitindo assim uma maior aproximação ao limite exterior do buraco negro. Diferente dos trabalhos já encontrados na literatura, utilizamos um método analítico para descrever o caminho da luz em cada buraco negro.

Utilizando de um mapa de escape que descreve perfeitamente a interação do raio de luz com os dois buracos negros. Iterando esse mapa em uma grade de condições iniciais e analisamos às três (3) saídas possíveis. A princípio o padrão formado ao se ter um ramo de condições iniciais era aparentemente contínuo e não deixou claro a existência de caos. Por isso focamos em regiões em que as informações de possível surgimento de caos eram mais claras, ou seja, fixamos uma das variáveis do sistema, reduzindo ele a um sistema unidimensional.

Ao reduzimos o sistema unidimensional, focamos o estudo as órbitas instáveis do sistema. O ângulo de escape ϕ , nessas órbitas, é fixo em $\phi = 0$ e $\phi = \pi$. Descobrimos regiões em que a variação de saída era muito rápida e com isso dando uma incerteza de que caminho o raio de luz seguia. A incerteza de estado final está diretamente conectada a movimentos caóticos. E sabemos que estruturas fractais só aparecem devido à dinâmica caótica.

Uma magnificação nessas regiões, é perceptível que o padrão se repete e novamente uma nova região de variação rápida surgia. Fazendo outra magnificação, novamente o padrão se repetia. Isso confirma que o efeito que nos propomos a estudar é fractal.

Uma grande propriedade para saber se os sistemas dinâmicos possuem caos é a propriedade de Wada. Ao se analisar se as variáveis instáveis cruzam todas as bacias, indicando que o sistema possui propriedade Wada. Quando analisamos esse efeito para Schwarzschild, ficou claro que as propriedades estavam presente.

Como método de quantificar a fractalidade do sistema utilizamos o método da incerteza, ao se analisar a incerteza das condições iniciais com relação a sua bacia de escape se obtém a dimensão fractal. Verificamos que todos os valores de dimensão fractal obtidos forneceram valores não inteiros. Afirmando novamente que o efeito tem características fractais.

Mesmo o cálculo da dimensão sendo suficiente para terminarmos a análise qualitativa do sistema, já que queremos saber o surgimento de estruturas fractais. Existe um método muito mais rápido de se obter as características fractais, o método da entropia. Este método foi utilizado em alguns casos apresentados neste trabalho.

Esse método divide as saídas em matrizes (caixas) e analisa a probabilidade de cada saída nesse caixa e assim obtendo a entropia informacional. O método da entropia diz que o sistema é fractal quando o valor da entropia da fronteira da bacia for maior que $\ln(2)$. Nossos resultados, em todos os casos aplicados, foram satisfatórios, pois todos deram acima do valor de controle esperado.

O comportamento da luz em sistemas binários de buracos negros esféricos e estáticos com diferentes características de definição (massa e carga) possuem movimento caótico e apresentam propriedades fractais. Trabalhamos com o caso simplificado em que eliminamos certos efeitos gravitacionais, mas se espera que ao se adicionar essas propriedades o efeito se mantenha ou amplifique.

Perspectivas de trabalho incluem :

- Considerar outras métricas, estáticas e com simetria esférica, que possam ser aplicadas ao método analítico que utilizamos criado por [34] e também métricas mais complexas que só podem ser resolvidas pela integral do ângulo de deflexão.
- Investigar se existem outros mapas que permitam manter as características da relatividade geral como ondas gravitacionais e momento angular, seja acrescentando uma perturbação ao mapa ou reescrevendo-o.
- Testar o efeito e seus resultados quando aplicado a teoria alternativas da Relatividade Geral.

Referências

- [1] A. Einstein. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916.
- [2] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. A determination of the deflection of light by the sun’s gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 220:291–333, 1920.
- [3] C. M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Reviews in Relativity*, 17(1):4, 2014.
- [4] D. Psaltis. Probes and tests of strong-field gravity with observations in the electromagnetic spectrum. *Living Reviews in Relativity*, 11(1):9, 2008.
- [5] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(L1):1, 2019.
- [6] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 event horizon telescope results. ii. array and instrumentation. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(L2):1, 2019.
- [7] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 event horizon telescope results. iii. data processing and calibration. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(L3):1, 2019.
- [8] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 event horizon telescope results. iv. imaging the central supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(L4):1, 2019.
- [9] The Event Horizon Telescope Collaboration. First M87 event horizon telescope results. v. physical origin of the asymmetric ring. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(L5):1, 2019.
- [10] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, 11:237–238, 1963.
- [11] Event horizon telescope. <https://eventhorizontelescope.org/press-release-april-10-2019-astronomers-capture-first-image-black-hole>. acesso: 04/2021.
- [12] V. Perlick. Gravitational lensing from a spacetime perspective. *Living Reviews in Relativity*, 7(1):9, 2004.
- [13] A lot of galaxies need guarding in this nasa hubble view. <https://hubblesite.org/contents/news-releases/2017/news-2017-20.html>. acesso: 06/2021.

- [14] B. P. Abbott et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116:061102, 2016.
- [15] B. P. Abbott et al. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, 119(16):161101, 2017.
- [16] B. P. Abbott et al. Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. *The Astrophysical Journal*, 848(2):L12, 2017.
- [17] B. P. Abbott et al. Binary black hole mergers in the first advanced ligo observing run. *Physical Review X*, 6(4):041015, 2016.
- [18] K. T Alligood, T.D Sauer, and J. A Yorke. *Chaos. An Introduction to Dynamical Systems*. Springer, 1996.
- [19] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [20] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, volume 3. Gauthier-Villars, 1899.
- [21] C. P. Dettmann, N. E. Frankel, and N. J. Cornish. Fractal basins and chaotic trajectories in multi-black-hole spacetimes. *Physical Review D*, 50:R618–R621, 1994.
- [22] C. P. Dettmann, N. E. Frankel, and N. J. Cornish. Chaos and fractals around black holes. *Fractals*, 3(01):161–181, 1995.
- [23] G. Contopoulos. Periodic orbits and chaos around two black holes I. *Proceedings of the Royal Society A*, 431, 1990.
- [24] G. Contopoulos. Periodic orbits and chaos around two black holes II. *Proceedings of the Royal Society A*, 435, 1991.
- [25] G. Contopoulos. *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [26] J. Levin. Gravity waves, chaos, and spinning compact binaries. *Physical Review Letters*, 84(16):3515–3518, 2000.
- [27] J.J. Levin. Chaos may make black holes bright. *Physical Review D*, 60:064015, 1999.
- [28] D. Hobill, A. Burd, and Coley A. A. *Deterministic Chaos in General Relativity*. Springer, 1994.
- [29] A. Bohn, W. Thrope, F. Hébert, K. Henriksson, D. Bunandar, M. A. Scheel, and N. W. Taylor. What does a binary black hole merger look like? *Classical and Quantum Gravity*, 32(6):065002, 2015.
- [30] J. O. Shipley and S. R. Dolan. Binary black hole shadows, chaotic scattering and the cantor set. *Classical and Quantum Gravity*, 33(17):175001, 2016.
- [31] Á. Daza, J. O. Shipley, S. R. Dolan, and M. A. F. Sanjuán. Wada structures in a binary black hole system. *Physical Review D*, 98:084050, 2018.

- [32] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2 edition, 2003.
- [33] P.S. Letelier and S.R. de Oliveira. Double kerr-nut spacetimes: spinning strings and spinning rods. *Physics Letters A*, 238(2):101 – 106, 1998.
- [34] V. Bozza. Gravitational lensing in the strong field limit. *Physical Review D*, 66:103001, 2002.
- [35] N. Gürlebeck. No-hair theorem for black holes in astrophysical environments. *Physical Review Letter*, 114:151102, 2015.
- [36] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, pages 189–196, 1916.
- [37] H. Reissner. Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie. *Annalen der Physik*, 355(9):106–120, 1916.
- [38] A. I. Janis, E. T. Newman, and J. Winicour. Reality of the schwarzschild singularity. *Physical Review Letters*, 20:878–880, 1968.
- [39] G. C. Layek. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Springer, New Delhi, 2015.
- [40] A. P. S. de Moura and P. S. Letelier. Scattering map for two black holes. *Physical Review E*, 62:4784–4791, 2000.
- [41] G. Troll. A devil's staircase into chaotic scattering. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 50(2):276 – 296, 1991.
- [42] B. Mandelbrot. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156(3775):636–638, 1967.
- [43] J. Aguirre, R. L. Viana, and M. A. F. Sanjuán. Fractal structures in nonlinear dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81:333–386, 2009.
- [44] S. H. C. Marcos, S. R. Lopes, and R. L. Viana. Boundary crises, fractal basin boundaries, and electric power collapses. *Chaos, Solitons and Fractals*, 15(2):417 – 424, 2003.
- [45] S. Camargo, S. R. Lopes, and R. L. Viana. Extreme fractal structures in chaotic mechanical systems: riddled basins of attraction. *Journal of Physics: Conference Series*, 246:012001, 2010.
- [46] R. L. Viana, E. C. Da Silva, T. Kroetz, I. L. Caldas, M. Roberto, and Sanjuán M. A. F. Fractal structures in nonlinear plasma physics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 369:371–395, 2011.
- [47] A.C. Mathias, T. Kroetz, I.L. Caldas, and R.L. Viana. Chaotic magnetic field lines and fractal structures in a tokamak with magnetic limiter. *Chaos, Solitons and Fractals*, 104:588 – 598, 2017.

- [48] A.C. Mathias, R.L. Viana, T. Kroetz, and I.L. Caldas. Fractal structures in the chaotic motion of charged particles in a magnetized plasma under the influence of drift waves. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 469:681 – 694, 2017.
- [49] C. Grebogi, S. W. McDonald, E. Ott, and J. A. Yorke. Final state sensitivity: An obstruction to predictability. *Physics Letters A*, 99(9):415–418, 1983.
- [50] S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Fractal basin boundaries. *Physica. D, Nonlinear Phenomena*, 17(2):125–153, 1985.
- [51] A. Daza, A. Wagemakers, B. Georgeot, D. guéry odelin, and M. Sanjuán. Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Scientific Reports*, 6:3146, 2016.
- [52] G. Nordström. On the Energy of the Gravitation field in Einstein’s Theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 20:1238–1245, 1918.
- [53] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence. Metric of a rotating, charged mass. *Journal of Mathematical Physics*, 6(6):918–919, 1965.
- [54] G. Birkhoff and R. E. Langer. *Relativity and Modern Physics*. Harvard University Press, 1923.
- [55] C. A. C. Quinzacara and P. Salgado. Black hole for the Einstein-Chern-Simons gravity. *Physical Review D*, 85:124026, 2012.
- [56] Review of the universe. <https://universe-review.ca/F05-galaxy02.htm>. acesso: 04/2021.
- [57] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press, 1983.
- [58] Charged black holes: The reissner-nordström geometry. <https://jila.colorado.edu/~ajsh/bh/rn.html>. acesso: 04/2021.
- [59] P. Schneider, C. S. Kochanek, and J. Wambsganss. *Gravitational Lensing Strong, Weak and Micro*. Springer, 2006.
- [60] I. Newton, G. Burnet, S. Smith, B. Walford, and J. Elan. *Opticks: or, A treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light.: Also, two treatises of the species and magnitude of curvilinear figures*. Printed for Sam. Smith. and Benj. Walford. Printers to the Royal Society, at the Princes Arms in St. Pauls Church-yard., 1704.
- [61] S. Schaffer. John michell and black holes. *Journal for the History of Astronomy*, 10(1):42–43, 1979.
- [62] H. Cavendish, J. Maxwell, Thorpe. E., and J. Larmor. *The Scientific Papers of the Honourable Henry Cavendish, F. R. S. 2 Volume Set*. Cambridge University Press, 2011.

- [63] P.-S. Laplace. *Exposition du système du monde*. Cambridge University Press, 1799.
- [64] J. Soldner. Über die ablenkung eines lichtstrahls von seiner geradlinigen bewegung durch die attraktion eines weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht. *Annalen der Physik*, 370(15):593–604, 1921.
- [65] A. Einstein. Über den einfluß der schwerkraft auf die ausbreitung des lichtetes. *Annalen der Physik*, 340(10):898–908, 1911.
- [66] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [67] A. Einstein. Erklärung der Perihelionbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsber. preuss.Akad. Wiss*, 47:831–839, 1915.
- [68] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. IX. a determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 220(571-581):291–333, 1920.
- [69] S. S. Shapiro, J. L. Davis, D. E. Lebach, and J. S. Gregory. Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979-1999. *Physical Review Letters*, 92:121101, 2004.
- [70] O. Lodge. Gravitation and light. *Nature*, 104(2613):334–334, 1919.
- [71] O. Chwolson. Über eine mögliche form fiktiver doppelsterne. *Astronomische Nachrichten*, 221(20):329–330, 1924.
- [72] Hubble finds an einstein ring. <https://www.nasa.gov/image-feature/goddard/2018/hubble-finds-an-einstein-ring>. acesso: 04/2021.
- [73] F. Zwicky. Nebulae as gravitational lenses. *Physical Review*, 51:290–290, 1937.
- [74] M. Schmidt. 3c 273 : A star-like object with large red-shift. *Nature*, 197(4872):1040–1040, 1963.
- [75] Yu. G. Klimov. The Deflection of Light Rays in the Gravitational Fields of Galaxies. *Soviet Physics Doklady*, 8:119, 1963.
- [76] S. Liebes. Gravitational lenses. *Physical Review*, 133:B835–B844, 1964.
- [77] S. Refsdal and H. Bondi. The Gravitational Lens Effect . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 128(4):295–306, 1964.
- [78] S. Refsdal. On the Possibility of Determining Hubble's Parameter and the Masses of Galaxies from the Gravitational Lens Effect . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 128(4):307–310, 1964.
- [79] D. Walsh, R. F. Carswell, and R. J. Weymann. 0957 + 561 a, b: twin quasistellar objects or gravitational lens? *Nature*, 279(5712):381–384, 1979.
- [80] J. Wambsganss. Gravitational lensing in astronomy. *Living Reviews in Relativity*, 1(1):12, 1998.

- [81] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, 1972.
- [82] H. P. Robertson. Kinematics and World-Structure. *Astrophysical Journal*, 82:284, November 1935.
- [83] K. S. Virbhadra and G.F. R. Ellis. Schwarzschild black hole lensing. *Physical Review D*, 62:084003, 2000.
- [84] S. Frittelli, T. P. Kling, and E. T. Newman. Spacetime perspective of schwarzschild lensing. *Physical Review D*, 61:064021, 2000.
- [85] V. Bozza, S. Capozziello, G. Iovane, and G. Scarpetta. Strong field limit of black hole gravitational lensing. *General Relativity and Gravitation*, 33(9):1535–1548, 2001.
- [86] N. Tsukamoto. Deflection angle in the strong deflection limit in a general asymptotically flat, static, spherically symmetric spacetime. *Physical Review D*, 95:064035, 2017.
- [87] C. Brandon. Global structure of the kerr family of gravitational fields. *Physical Review*, 174:1559–1571, 1968.
- [88] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2011.
- [89] J. O. Shipley. *Strong-field gravitational lensing by black holes*. PhD thesis, Sheffield U., 2019.
- [90] A. S. Reis, K. C. Iarosz, F. A. S. Ferrari, I. L. Caldas, A. M. Batista, and R. L. Viana. Bursting synchronization in neuronal assemblies of scale-free networks. *Chaos, Solitons Fractals*, 142:110395, 2021.
- [91] E. L. Brugnago, R. M. da Silva, C. Manchein, and M. W. Beims. How relevant is the decision of containment measures against covid-19 applied ahead of time? *Chaos, Solitons Fractals*, 140:110164, 2020.
- [92] Steven H Strogatz. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics. *Biology, Chemistry and Engineering*, page 1, 1994.
- [93] A. Lichtenberg and M. Leiberman. *Regular and Chaotic Dynamics*, volume 38. Springer-Verlag New York, 1992.
- [94] S. Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2003.
- [95] B. Davies. *Exploring chaos: Theory and experiment*. CRC Press, 2018.
- [96] C. A. Mathias. *Estruturas fractais em sistemas hamiltonianos caóticos com aplicações em física de plasmas*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2017.
- [97] Eduardo G. Altmann, Jefferson S. E. Portela, and Tamás Tél. Leaking chaotic systems. *Reviews of Modern Physics*, 85:869–918, May 2013.

- [98] L. Poon, J. Campos, E. Ott, and C. Grebogi. Wada basin boundaries in chaotic scattering. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 06(02):251–265, 1996.
- [99] B. V Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics reports*, 52(5):263–379, 1979.
- [100] J. D. Meiss. Visual explorations of dynamics: The standard map. *Pramana*, 70(6):965–988, 2008.
- [101] B. B Mandelbrot. Stochastic models for the earth’s relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 72(10):3825–3828, 1975.
- [102] Joseph W Dauben. Georg cantor and the origins of transfinite set theory. *Scientific American*, 248(6):122–131, 1983.
- [103] Conjunto de cantor. <https://www.pngegg.com/es/png-eukeu>. Acesso: 04/2021.
- [104] H E. Nusse and J. A. Yorke. Wada basin boundaries and basin cells. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 90(3):242–261, 1996.
- [105] R. L. Viana. Riddled basins in complex physical and biological systems. *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences*, 1(1), 2009.
- [106] E. Ott. A scaling law: How an attractor’s volume depends on noise level. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 16(1):62 – 78, 1985.
- [107] Y. Lau, J. M. Finn, and E. Ott. Fractal dimension in nonhyperbolic chaotic scattering. *Physical Review Letters*, 66:978–981, 1991.
- [108] A. Daza, B. Georgeot, D. Guéry-Odelin, A. Wagemakers, and M. A. F. Sanjuán. Chaotic dynamics and fractal structures in experiments with cold atoms. *Physical Review A*, 95:013629, 2017.
- [109] K. Yoneyama. Theory of continuous set of points. *Tohoku Mathematical Journal*, 12:43, 1917.
- [110] J. Kennedy and J. A. Yorke. Basins of wada. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 51(1):213–225, 1991.
- [111] M. Hénon. *A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor*, pages 94–102. Springer New York, New York, NY, 2004.
- [112] R. C. Hilborn. Gravitational waves from orbiting binaries without general relativity. *American Journal of Physics*, 86(3):186–197, 2018.
- [113] Ying-Cheng Lai and Celso Grebogi. Converting transient chaos into sustained chaos by feedback control. *Physical Review E*, 49(2):1094, 1994.
- [114] S. D. Majumdar. A class of exact solutions of einstein’s field equations. *Physical Review*, 72(5):390, 1947.

- [115] E. F. Eiroa, G. E. Romero, and D. F. Torres. Reissner-nordström black hole lensing. *Physical Review D*, 66(2):024010, 2002.
- [116] R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Comparative Pathobiology - Studies in the Postmodern Theory of Education. Clarendon Press, 1992.
- [117] N.A. Lemos. *Mecânica Analítica*. Livraria da Física, 2007.

Apêndice A: Conceitos matemáticos da Relatividade Geral

Seguimos o desenvolvimento feito por D'Inverno [116] para evidenciar a base geométrica da Relatividade Geral, considerando que consideramos as constantes c da velocidade da luz e a constante gravitacional de Newton G iguais a 1.

A.1 Variedade

Uma variedade é algo que localmente se parece com um pedaço n -dimensional do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Se compararmos uma 2-esfera S^2 com o espaço euclidiano \mathbb{R}^2 , eles diferem, porém, um pedaço de S^2 se parece bastante com um pedaço de \mathbb{R}^2 . Como S^2 é "compacto", i.e., finito, enquanto \mathbb{R}^2 é uma propriedade global, ou seja, segue infinitamente.

Utilizaremos então uma variedade \mathbf{M} n -dimensional como sendo o conjunto de pontos, onde cada ponto possui um conjunto de n **coordenadas** (x^1, x^2, \dots) , e cada coordenada varia ao longo de um subconjunto dos reais, que pode variar de $-\infty$ a $+\infty$. Podemos interpretar essas coordenadas como distâncias ou ângulos no espaço euclidiano.

O importante sobre variedade é que ocasionalmente não é possível descrever toda a variedade utilizando um sistema não-degenerado de coordenadas, ou seja, um sistema que atribui um único conjunto de n -coordenadas para cada ponto. Em alguns casos é mais simples utilizar um sistema com pontos degenerados. Por exemplo, o plano polar (R, ϕ) tem uma degeneração no ponto de origem, pois ϕ é indeterminado, mas podemos evitar a degeneração utilizando coordenadas cartesianas. Em outras situações, não temos escolhas, por exemplo: é possível mostrar que não existe sistema de coordenadas que abranja todo a 2-esfera S^2 sem ter degenerescência. Trabalhamos neste caso com o sistema de coordenadas que abrangem apenas uma parte da variedade, chamada de cartas. Um conjunto de cartas que abrangem uma variedade é chamada de atlas.

A.2 Curvas e Vetores

A.2.1 Curvas

Dada uma variedade, uma curva é uma função diferenciável. Definindo essa função como tendo um grau de liberdade e dependendo apenas de um parâmetro, podemos fazer exatamente como no espaço euclidiano de 2- ou 3-dimensões, definindo uma curva parametrizada como:

$$x^a = x^a(u) \quad (a = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{A.1})$$

onde u é o parâmetro e x^1, x^2, \dots, x^n são as n funções de u . Similarmente um subespaço ou superfície de m dimensões ($m < n$), tem m graus de liberdade e depende de m parâmetros, temos então:

$$x^a = x^a(u^1, u^2, \dots, u^m) \quad (a = 1, 2, \dots, m), \quad (\text{A.2})$$

Se particularmente $m = n - 1$, o subespaço é chamado de hiper-superfície, nessa caso

$$x^a = x^a(u^1, u^2, \dots, u^{n-1}) \quad (a = 1, 2, \dots, m), \quad (\text{A.3})$$

os $n - 1$ parâmetros podem ser então eliminados fornecendo assim uma equação que conecta as coordenadas.

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Então, podemos dizer que uma curva é uma função diferenciável $x^a(u)$ do $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, que associa a cada valor do parâmetro $u \in \mathbb{R}$ sobre as curvas, as coordenadas $x^a \in \mathbb{R}^n$ de um ponto P do espaço de dimensão n , onde os índices a assumem n valores.

A.2.2 Vetores

Vetor é um elemento do espaço vetorial, considerando um ponto P com coordenadas x^a . Utilizando a noção de operadores de diferenciação associados às tangentes a uma curva. O vetor tangente a uma curva no ponto P , que forma um espaço vetorial n pode ser escrita como

$$\mathbf{V} = V^a \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad (\text{A.5})$$

os operadores de diferenciação atuam numa função escalar teste $f(x^a)$ fornecendo a sua derivada no ponto P . O conjunto de n vetores $e_a \equiv \partial/\partial x^a$ pode ser entendido como uma base particular desse espaço vetorial constituídas de vetores tangentes às linhas de coordenadas x^a no ponto P e V^a como as componentes do vetor \mathbf{V} nesta base, ou seja, podemos escrever $V = V^a e_a$.

Se definirmos V em outra base como $\partial/\partial x'^a$. O vetor antigo pode ser escrito em função da nova base como

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial x'^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x'^b}, \quad (\text{A.6})$$

o índice a é dito livre e toma qualquer valor de 1 a n , já o índice b se repete e é chamado de índice mudo e pode ser mudado por qualquer outro índice não utilizado. Os componentes V'^a do vetor V da nova base estão relacionados a antiga base por

$$V'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} V^b, \quad (\text{A.7})$$

conhecido como a lei de transformação de um vetor. A transformação da base fica

$$e'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} \frac{\partial}{\partial x^b} = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} e_b, \quad (\text{A.8})$$

é importante notar que como a base se transforma contrariamente às componentes os vetores tangentes podem também ser chamados de vetores contravariantes. A forma covariante dos vetores envolve a transformação inversa $\frac{\partial x^b}{\partial x'^a}$, onde podemos definir então

$$V'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} V_b. \quad (\text{A.9})$$

A.3 Tensores

Vamos generalizar a definição (A.7) para maiores ordens, então um Tensor de ordem 2 é um conjunto de quantidade n^2 associado ao ponto P , descrito por V^{ab} no sistema de coordenadas x^a , ele se transforma da seguinte forma

$$V'^{ab} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} V^{cd}. \quad (\text{A.10})$$

Um exemplo dessa quantidade é dada pelo produto Y^a e Z^b , dois vetores contravariantes. A construção de tensores de ordens maiores segue o mesmo princípio. Podemos definir o tensor covariante como

$$V'_{ab} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} V_{cd}. \quad (\text{A.11})$$

Já tensores mistos podem ser definidos de forma direta, por exemplo, um tensor de ordem 3 com um índice contravariante e 2 covariantes satisfaz

$$V'^a_{bc} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} V^d_{ef}, \quad (\text{A.12})$$

se o tensor misto tem p índices covariantes e q índices contravariantes, dizemos que ele tem valência (p,q) . Ilustrando a importância do uso de tensores, imagine um sistema coordenada em que dois tensores iguais X_{ab} e Y_{ab} existem. Multiplicando os pelas matrizes de transformação $\partial x^a/\partial x'^c$ e $\partial x^b/\partial x'^d$ a soma implica que

$$\frac{\partial x^a}{\partial x'^c} \frac{\partial x^b}{\partial x'^d} X_{ab} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^c} \frac{\partial x^b}{\partial x'^d} Y_{ab}, \quad (\text{A.13})$$

$$X'_{cd} = Y'_{cd}. \quad (\text{A.14})$$

Em outras palavras a equação (A.13) possui outros sistemas de coordenadas. Um tensor que funciona em um sistema de coordenada funciona em todos os sistemas de coordenadas. Tensores são independentes do sistema de coordenada.

A.4 Campo tensorial

Podemos definir então a noção de campo tensorial. Se um tensor é um conjunto de quantidades definidas em um ponto da variedade, o campo tensorial é a associação, sobre uma região da variedade, de um tensor de mesma valência para cada ponto da região.

$$P \rightarrow T_{b\dots}^{a\dots}(P), \quad (\text{A.15})$$

onde $T_{b\dots}^{a\dots}(P)$ é o valor do tensor em P . O campo tensorial pode ter certas características dependendo se as suas componentes em todos os sistemas de coordenadas são funções contínuas ou diferenciáveis. O campo tensorial pode ser dito suave se sua componentes são diferenciáveis em todas as ordens (matematicamente: C^∞).

Nesse trabalho trataremos na maioria das vezes de campos tensoriais, mas iremos nos referir-lhes apenas por tensores, onde escreveremos na forma $T_{b\dots}^{a\dots}$.

A.5 Operações tensoriais

Um jeito simples de saber se uma quantidade é um tensor é analisar o jeito com que ele se comporta sobre uma transformação de coordenadas. Podemos deduzir diretamente da lei de transformação que a soma de dois tensores do mesmo tipo dão um novo tensor também do mesmo tipo

$$V_{bc}^a = Y_{bc}^a + Z_{bc}^a, \quad (\text{A.16})$$

o mesmo funciona para subtração e multiplicação escalar. Um tensor de índice 2 é dito simétrico quando $V_{ab} = V_{ba}$, nesse caso ele possui apenas $\frac{1}{2}n(n+1)$ termos independentes. Simetria é uma propriedade tensorial, o mesmo funciona para termos contravariantes. O tensor é dito antissimétrico se $V_{ab} = -V_{ba}$, o qual possui $\frac{1}{2}n(n-1)$ termos independentes. A notação para os termos é:

simétrico

$$V_{(ab)} = \frac{1}{2}(V_{ab} + V_{ba}),$$

antissimétrico

$$V_{[ab]} = \frac{1}{2}(V_{ab} - V_{ba}).$$

Por exemplo, com três índices:

$$V_{[abc]} = \frac{1}{6}(V_{abc} - V_{acb} + V_{cab} - V_{cba} + V_{bca} - V_{bac}). \quad (\text{A.17})$$

É possível multiplicar dois tensores de diferentes ordem (p_1, q_1) e (p_2, q_2) o resultado será um tensor de ordem $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$:

$$V_{bcd}^a = Y_b^a Z_{cd}. \quad (\text{A.18})$$

Dado um tensor misto de ordem (p, q) , é possível formar um tensor de ordem $(p-1, q-1)$ ao se fazer uma contração nos índices, ou seja, ter um índice contravariante e um covariante igual, isso é possível ao se multiplicar pelo delta de Kronecker.

$$\delta_b^a = \begin{cases} 1 \rightarrow a = b; \\ 0 \rightarrow a \neq b. \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

$$\delta_b^a V_{bcd}^a = V_{acd}^a = Y_{bc}. \quad (\text{A.20})$$

A.6 Comutador

Daqui para frente utilizaremos a notação para o sistema de coordenada como

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a} \quad (\text{A.21})$$

ou seja a equação (A.5) é reescrita na forma

$$V = V^a \partial_a,$$

então aplicado a uma função f

$$Vf = (V^a \partial_a) f = V^a (\partial_a f). \quad (\text{A.22})$$

O comutador ou colchetes de lie é um novo campo vetorial formado por outros dois vetores na forma

$$[V, Y] = (VY - YV). \quad (\text{A.23})$$

Seja se $Z = [V, Y]$ operando sobre uma função arbitrária f

$$\begin{aligned} Zf &= [V, Y]f \\ &= (VY - YV)f = V(Yf) - Y(Vf) \\ &= V(Y^a \partial_a f) - Y(V^a \partial_a f) \\ &= V^b \partial_b (Y^a \partial_a f) - Y^b \partial_b (V^a \partial_a f) \\ &= (V^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b V^a) \partial_a f - V^a Y^b (\partial_b \partial_a f - \partial_a \partial_b f), \end{aligned}$$

como assumimos a comutação ($\partial_b \partial_a = \partial_a \partial_b$), o último termo vai a zero. Como a função f é arbitrária podemos reescrever o comutador como:

$$[V, Y]^a = Z^a = V^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b V^a. \quad (\text{A.24})$$

Outras propriedades do comutador são simples de se obter

$$[V, V] \equiv 0, \quad (\text{A.25})$$

$$[V, Y] \equiv -[Y, V], \quad (\text{A.26})$$

$$[V, [Y, Z]] + [Z, [V, Y]] + [Y, [Z, V]] \equiv 0, \quad (\text{A.27})$$

sendo essa ultima conhecida como identidade de Jacobi.

A.7 Transporte Paralelo

A noção de derivada é a comparação de dois objetos em pontos diferentes. Como os objetos geométricos em pontos diferentes de um espaço curvo pertencem a espaços vetoriais diferentes, é preciso que o transporte, ou seja, levar um objeto de um ponto a outro no espaço curvo, seja definido.

Uma transformação de ponto onde transportamos um objeto no ponto P para um ponto Q é dado por

$$v^a = v^a + \delta_u V^a(v), \quad (\text{A.28})$$

diferenciando

$$\frac{\partial v'^a}{\partial v^b} = \delta_b^a + \delta_u \partial_b V^a, \quad (\text{A.29})$$

onde δu é um parâmetro. Antes de utilizar essa noção em campos tensoriais é preciso falar sobre a conexão afim, temos então um vetor avaliado no ponto Q com coordenadas $v^a + \delta v^a$, próximo ao ponto P

$$V(v + \delta v) = V^a(v) + \delta v^b \partial_b V^a, \quad (\text{A.30})$$

reescrevendo $\delta v^b \partial_b V^a = \delta V^a(v)$

$$\delta V^a(v) = V^a(v)(v + \delta v) - V^a(v), \quad (\text{A.31})$$

esse termo não é tensorial, mas podemos construir de um jeito em que uma parte seja, para isso assumimos que o vetor paralelo varia em uma pequena quantidade $-\Gamma^a_{bc} V^b \delta x^c$, logo

$$V^a(v) + \delta V^a(v) - [V^a(x) - \Gamma^a_{bc} V^b \delta x^c] = \delta V^a(v) + \Gamma^a_{bc} V^b \delta x^c, \quad (\text{A.32})$$

introduzimos então um conjunto n^3 de funções na variedade, falaremos mais a frente como esse termo se transforma. Considerando agora um campo tensorial T^{ab} , utilizamos a transformação (A.11) e a noção de transporte (A.29)

$$\begin{aligned} T'^{ab}(v') &= \frac{\partial v'^a}{\partial v^c} \frac{\partial v'^b}{\partial v^d} T^{cd}(v) \\ &= T^{ab}(v) + [\partial_c V^a T^{cb} + \partial_d V^b T^{ad}(v)], \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

e o primeiro termo obedece à transformação

$$T^{ab}(v') = T^{ab}(x^c + \delta_u V^c(v)) = T^{ab}(x) + \delta_u V^c \partial_c T^{ab}. \quad (\text{A.34})$$

A.8 Derivada de Lie

Definimos a derivada de Lie que consiste em comparar o tensor no ponto $Q(T^{ab}(v'))$ com o tensor que foi levado do ponto P ao ponto $Q(T'^{ab})$, a derivada nomeada por $L_x T^{ab}$ é

$$L_v T^{ab} = \lim_{\delta_u \rightarrow 0} \frac{T^{ab}(v') - T'^{ab}(v')}{\delta_u}, \quad (\text{A.35})$$

utilizando as equações (A.33) e (A.34) reescrevemos na forma

$$L_v T^{ab} = V^c \partial_c T^{ab} - T^{ac} \partial_c V^b - T^{cb} \partial_c V^a. \quad (\text{A.36})$$

A derivada de Lie segue certas propriedades sendo elas

- Linearidade

$$L_v(\lambda Y^a + \mu Z^a) = \lambda L_v Y^a + \mu L_v Z^a. \quad (\text{A.37})$$

- A regra de Leibniz

$$L_v(Y^a Z_{bc}) = Y^a(L_v Z_{bc}) + (L_x Y^a) Z_{bc}. \quad (\text{A.38})$$

- A derivada de um tensor de tipo (p, q) é um tensor (p, q) .
- Comuta com contração

$$\delta_b^a L_v T^a_b = L_v T^a_a. \quad (\text{A.39})$$

- Derivada de um escalar

$$L_x \phi = V \phi = V^a \partial_a \phi. \quad (\text{A.40})$$

- Derivada de um campo vetorial contravariante

$$L_v Y^a = [V, Y]^a = V^b \partial_b Y^a - Y^b \partial_b V^a. \quad (\text{A.41})$$

- Derivada de um campo vetorial covariante

$$L_v Y^a = V^b \partial_b Y_a + Y_b \partial_a V^b. \quad (\text{A.42})$$

- Derivada de um tensor

$$L_v T_{b\dots}^{a\dots} = V^c \partial_c T_{b\dots}^{a\dots} - T_{b\dots}^{c\dots} \partial_c V^a - \dots + T_{c\dots}^{a\dots} \partial_b V^c + \dots \quad (\text{A.43})$$

A.9 Derivada covariante

Utilizaremos uma nova notação para descrever a derivada covariante $\nabla_c V^a$, onde utilizando a mesma noção da diferença entre o vetor $V^a(Q)$ e o vetor paralelo em Q : $V^a(P)$, usando a equação (A.32) e da equação (A.35), na forma limite:

$$\nabla_c V^a = \lim_{\delta v^c \rightarrow 0} \frac{1}{\delta v^c} \{V^a(v + \delta v) - [V^a - \Gamma^a_{bc} V^b \delta x^c]\}, \quad (\text{A.44})$$

que pode ser reescrito utilizando (A.30)

$$\nabla_c V^a = \partial_c V^a - \Gamma^a_{bc} V^b, \quad (\text{A.45})$$

se $\nabla_c V^a$ é um tensor $(1, 1)$, então Γ^a_{bc} se transforma na forma

$$\Gamma'^a_{bc} = \frac{\partial v'^a}{\partial v^d} \frac{\partial v^e}{\partial v'^b} \frac{\partial v^f}{\partial v'^c} \Gamma^d_{ef} - \frac{\partial v'^a}{\partial v^d} \frac{\partial^2 v^d}{\partial v'^b \partial v'^c}. \quad (\text{A.46})$$

Logo a derivada covariante obedece à regra de Leibniz

$$\nabla_c V_a = \partial_c V_a - \Gamma^b_{bc} V_b, \quad (\text{A.47})$$

para tensores

$$\nabla_c T_{b\dots}^{a\dots} = \partial_c T_{b\dots}^{a\dots} + \Gamma^a_{dc} T_{b\dots}^{d\dots} + \dots - \Gamma^d_{bc} T_{d\dots}^{a\dots} - \dots \quad (\text{A.48})$$

A soma de duas conexões não é uma conexão ou um tensor, porém a subtração de duas conexões é um tensor $(1, 2)$, por isso a parte anti-simétrica de Γ^d_{bc} , ou $T^a_{bc} = \Gamma^d_{bc} - \Gamma^d_{cb}$ é chamado de torção, se a torção some, isso nos diz que o tensor é simétrico, ou seja $\Gamma^d_{bc} = \Gamma^d_{cb}$. Nesse trabalho vamos nos restringir apenas a conexões simétricas.

A.10 Geodésica

Geodésica é um conceito de grande importância o qual nos diz como as partículas se movem na variedade. A princípio o conceito de geodésica é visto como um conceito de a curva de mínima distância no espaço-tempo curvo. Mostramos o desenvolvimento formal da

geodésica, encontramos a equação da geodésica e apresentaremos o formalismo lagrangiano. Novamente utilizaremos o desenvolvimento a princípio em tensores de primeira ordem (vetores), sempre fazendo a conexão com tensores de ordem maiores.

A.11 Geodésica Afim

Geodésica afim é uma curva privilegiada em que o vetor tangente se propaga paralelo a si mesmo, ou seja, em qualquer ponto em que o vetor paralelo se propagar ele é proporcional ao vetor tangente, matematicamente é dado por

$$\frac{D}{Du} \left(\frac{dv^a}{du} \right) = \nabla_v V^a = \lambda V^a, \quad (\text{A.49})$$

onde D/Du é a derivada absoluta. Se λ for parametrizado de um jeito em que ele some (ou seja, o vetor tangente é igual a si mesmo), então o parâmetro u se torna um parâmetro privilegiado, adotando por convenção como s .

$$\nabla_v V^a = 0, \quad (\text{A.50})$$

que termo a termo se escreve como

$$\frac{d^2 v^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds} = 0. \quad (\text{A.51})$$

A.12 Tensor de Riemann

A derivada covariante não é comutativa, diferente da derivada parcial. Dado um tensor, definimos o comutador como sendo

$$\nabla_c \nabla_b T^a_{b\dots} - \nabla_b \nabla_c T^a_{b\dots} \quad (\text{A.52})$$

utilizando da transformação (A.45), podemos escrever

$$\nabla_d \nabla_c V^a = \partial_d (\partial_c V^a + \Gamma^a_{bc} V^b) + \Gamma^a_{ed} (\partial_c V^e + \Gamma^e_{bc} V^b) - \Gamma^e_{cd} (\partial_e V^a + \Gamma^a_{be} V^b), \quad (\text{A.53})$$

similarmente podemos obter $\nabla_c \nabla_d V^a$, ao subtrairmos as equações e assumindo que $\partial_c \partial_d V^a = \partial_d \partial_c V^a$, obtemos o resultado

$$\nabla_d \nabla_c V^a - \nabla_c \nabla_d V^a = R^a_{bcd} V^b + (\Gamma^e_{cd} - \Gamma^e_{dc}) \nabla_e V^a, \quad (\text{A.54})$$

onde

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd} \Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc} \Gamma^a_{ed}, \quad (\text{A.55})$$

voltaremos a falar do tensor de Riemann após definirmos a métrica.

A.13 Métrica

Trabalhando com uma variedade denominada Rimanniana, variedade essa dotada de uma quantidade chamada métrica. Definida como um tensor covariante de ranking 2, a

métrica pode ser utilizada para definir a distância e o comprimento de vetores o intervalo infinitesimal entre dois pontos v^a e $v^a + dv^a$ é definido por

$$ds^2 = g_{ab}dv^a dv^b, \quad (\text{A.56})$$

o que nos fornece o quadrado da distância infinitesimal conhecida como elemento de linha e g_{ab} é denominado a forma da métrica. O quadrado da norma de um vetor V^a é dado por

$$V^2 = g_{ab}V^a V^b, \quad (\text{A.57})$$

a métrica pode ser dita definida, e é classificada como sendo do tipo tempo $V^2 > 0$, tipo espaço $V^2 < 0$ ou se a métrica é dita indefinida, ou seja, existem vetores que são ortogonais a eles mesmos chamados vetores nulos $V^2 = 0$. O determinante da métrica é dado por $g = \det g_{ab}$. Se a métrica é não singular ($g \neq 0$), o inverso de g_{ab} é g^{ab} onde $g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c$.

Para métricas do tipo tempo, o tempo próprio τ é a medida do tempo ao longo de uma curva γ dado por

$$\tau = \int_{\gamma} \sqrt{-g_{ab}v^a v^b} du. \quad (\text{A.58})$$

O tempo próprio é independente da escolha de parametrização e para métricas do tipo nulo é dito que o tempo próprio é nulo. Considerando agora uma curva do tipo tempo com parametrização $v^a = v^a(u)$, dividindo (A.56) por $(d/du)^2$, obtemos

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = g_{ab} \frac{dv^a}{du} \frac{dv^b}{du}. \quad (\text{A.59})$$

O intervalo s entre dois pontos P_1 e P_2 é dado por

$$s = \int_{P_2}^{P_1} ds = \int_{P_2}^{P_1} \frac{ds}{du} du = \int_{P_2}^{P_1} \left(g_{ab} \frac{dv^a}{du} \frac{dv^b}{du} \right)^{\frac{1}{2}} du. \quad (\text{A.60})$$

Definimos uma geodésica do tipo tempo entre dois pontos P_1 e P_2 onde a distância entre os dois pontos (ou quaisquer outros pontos)

$$g_{ab} \frac{d^2 v^b}{du^2} + \{bc, a\} \frac{dv^b}{du} \frac{dv^c}{du} = \left(\frac{d^2 s}{du^2} / \frac{ds}{du} \right) \frac{dv^a}{du}, \quad (\text{A.61})$$

onde o termo entre chaves é chamado de Símbolo de Christoffel de primeira ordem e é definido em termo de derivadas na forma

$$\{bc, a\} = \frac{1}{2}(\partial_b g_{ac} + \partial_a g_{bc} - \partial_c g_{ab}), \quad (\text{A.62})$$

multiplicando por g^{ad} , obtemos o Símbolo de Christoffel de segunda ordem

$$\left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\} = g^{ad} \{bc, a\} = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{ac} + \partial_a g_{bc} - \partial_c g_{ab}). \quad (\text{A.63})$$

A geodésica então é reescrita como

$$\frac{d^2 v^b}{du^2} + \left\{ \begin{matrix} a \\ bc \end{matrix} \right\} \frac{dv^b}{du} \frac{dv^c}{du} = \left(\frac{d^2 s}{du^2} / \frac{ds}{du} \right) \frac{dv^a}{du}. \quad (\text{A.64})$$

Em geral, ao compararmos (A.64) e (A.51) percebemos que a geodésica métrica e a geodésica afim coincidem, logo

$$\Gamma^a_{bc} = \left\{ \begin{array}{c} a \\ bc \end{array} \right\}, \quad (\text{A.65})$$

e

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{ac} + \partial_a g_{bc} - \partial_c g_{ab}). \quad (\text{A.66})$$

Segue da equação anterior que a conexão é simétrica. A partir de agora trabalharemos apenas com a conexão da métrica, definida pela equação (A.66). No caso em que temos geodésicas do tipo nulo, ou seja, $ds = 0$ a geodésica é escrita na forma

$$\frac{d^2 v^b}{du^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dv^b}{du} \frac{dv^c}{du} = 0. \quad (\text{A.67})$$

Esse resultado é importante para nós, pois mais a frente trabalharemos com geodésicas nulas para obter a trajetória da luz no espaço curvo.

A.14 Tensor de Curvatura

Voltamos então a definição do tensor de Riemann que começamos anteriormente e definiremos o tensor de curvatura ou tensor de Riemann-Christoffel dado pela equação (A.55)

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd} \Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc} \Gamma^a_{ed}, \quad (\text{A.68})$$

onde agora Γ^a_{bc} é definida pela equação (A.66). O tensor de curvatura possui algumas características como

- anti-simetria no último termo

$$R^a_{bcd} = -R^a_{bdc}, \quad (\text{A.69})$$

- obedece à identidade

$$R^a_{bcd} + R^a_{dbc} + R^a_{cdb} \equiv 0. \quad (\text{A.70})$$

- Abaixando os índices, o tensor, obedece à identidade de Bianchi

$$\nabla_a R_{debc} + \nabla_c R_{deab} + \nabla_b R_{deca} = 0, \quad (\text{A.71})$$

Outros tensores podem ser definidos utilizando o tensor de curvatura. O tensor de Ricci

$$R_{ab} = R^c_{acb} = g^{cd} R_{dacb}, \quad (\text{A.72})$$

e o escalar de Ricci

$$R = g^{ab} R_{ab}. \quad (\text{A.73})$$

E com o (A.72) e (A.73) formam o tensor de Einstein

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R. \quad (\text{A.74})$$

A.15 Formalismo lagrangiano

É possível obter a equação da geodésica (A.51) utilizando o cálculo variacional e o princípio de mínima ação de Hamilton [117]. Partindo da funcional de ação lagrangiana L

$$L = \sqrt{g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b}, \quad (\text{A.75})$$

onde a notação $\dot{x} = dx/d\lambda$. A ação entre dois pontos em uma curva que os conecta é dado por

$$s[x(\lambda)] = \int L d\lambda. \quad (\text{A.76})$$

A geodésica é definida como a curva que liga os pontos, onde é estacionária sob pequenas variações (i.e., $\delta s = 0$), a solução consiste das equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^a} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^a} \right) = 0. \quad (\text{A.77})$$

Inserindo (A.75) na equação (A.77), obtemos a geodésica (A.49). Forçando uma parametrização chegamos à equação (A.64). Existem características que precisam ser comentadas. É muito mais fácil resolver a equação para L^2 para evitar a raiz quadrada, já que a lagrangiana não é única, ou seja, é válido utilizar qualquer equação que tenha como resultado a mesma equação de Euler-Lagrange.

Em casos em que a métrica é indefinida, o intervalo entre os pontos em uma curva seja zero, ou seja, a geodésica nula é uma geodésica em que o intervalo entre quaisquer dois pontos é zero. Isso significa então que na equação (A.75) $L = 0$, resultado esse que será de grande interesse nesse trabalho.

Apêndice B: Publicações

- Artigo 1 (Pag. 103)- Fractal structures in the deflection of light by a pair of Schwarzschild black holes reuni os resultados referente a dinâmica de um raio de luz em sistema binário de buracos negros de Schwarzschild, o artigo foi publicado na Indian Academy of Sciences Conference Series em dezembro de 2020.
- Artigo 2 (Pag. 114) - Fractal structures in the deflection of light by a pair of charged black holes avança o estudo anterior ao descrever a dinâmica de um raio de luz em um sistema binário de buracos negros de Reissner-Norsdröm, o artigo foi publicado na Chaos, Solitons and Fractals em junho de 2021.



Fractal structures in the deflection of light by a pair of Schwarzschild black holes

E. E. DE SOUZA FILHO¹, A. C. MATHIAS¹, I. L. CALDAS² and R. L. VIANA^{1,*}

¹ Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brazil

² Departamento de Física Aplicada, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo, Brazil

*Corresponding author. E-mail: viana@fisica.ufpr.br

Abstract. The deflection of light by the strong gravitational field produced by a pair of supermassive Schwarzschild black holes is considered from the point of view of an open conservative nonlinear dynamical system. From an approximate solution of the geodesic equation we obtained a two-dimensional map describing the impact parameter and scattering angle just before the light deflection by each black hole. Since the system is typically non-integrable, there is a parameter range for which chaotic area-filling orbits occur. The dynamics underlying those chaotic orbits involves a number of fractal structures related to the existence of a non-attractive invariant chaotic set. The outcome of a typical light ray approaching the system can be either diverged to infinity or falling into one of the black holes. Non-typical light rays can orbit around the black hole pair as periodic orbits. We identified the corresponding escape basins and their fractal boundaries, using two approaches: the computation of the uncertainty exponents and the corresponding basin and basin boundary entropies. We also exhibited the so-called Wada property showing qualitative pieces of evidence of this property.

Keywords. Black holes; fractal structures; fractal basins; Wada basins.

PACS Nos 05.45.-a; 05.45.Ac; 04.70.Bw

1. Introduction

In general relativity we represent dynamics as geodesic motion in a curved space [1]. In this sense, if the curvature is negative there is sensitive dependence on initial conditions, which is a necessary condition for chaotic motion, although there are other conditions which must be verified like mixing of trajectories and compactness [2]. Fractal structures are quite common in chaotic systems, like chaotic attractors, basin boundaries, invariant manifolds, and so on [3]. In particular, open chaotic systems present a variety of fractal structures caused by the existence of an invariant non-attracting chaotic manifold, the so-called strange saddle [4].

One outstanding example is the chaotic scattering of particles, for which the presence of a strange saddle is responsible for a fractal distribution of scattered particles [5]. The presence of fractal structures in open non-integrable Hamiltonian systems with chaotic motion has been described in many situations of physical interest, like the motion of a star around a galactic centre [6, 7], open billiards [8, 9], drift motion of magnetically

confined charged plasma particles [10], magnetic field lines in tokamaks [11], among others.

Supermassive cosmic objects, like black holes, generate space-time curvature, which leads to the deviations of the light rays, as they trace out null geodesics in the curved geometry [12]. Binary black holes rotate around their centre of mass and their existence has been confirmed by the observation of gravitational waves by LIGO Scientific Collaboration [13]. In such systems it is usually the case where the relative velocities are much smaller than c , and it is possible to approximate them as fixed in space.

The null geodesics equations describing the light ray scattering by a pair of black holes are non-integrable and constitute an open conservative dynamical system for which chaotic motion is possible [14]. One such example is the Majumdar–Papapetrou binary black hole, where a system of two charged black holes are in static equilibrium due to its electrostatic repulsion [15, 16]. The presence of fractal structures in this system, due to the chaoticity of geodesic motion, has been investigated by many researchers [17, 18].

The basic fractal structure to be investigated in a binary black hole system is the escape basin, which is the set of initial conditions leading to one of the three possible outcomes for a light ray when it encounters such a system: falling into the first or the second black hole or escaping to infinity. Such escape basins are very important in astrophysical investigations, since they are actually the so-called shadows of a black hole. A shadow is a region in the observer's sky which cannot be illuminated by distant light sources due to the blockage of a black hole [19]. Daza and coworkers have investigated escape basins in a Majumdar–Papapetrou binary black hole, showing that the escape basin boundaries are not only just fractal but also display the stronger Wada property: any boundary point belongs to the boundary of at least two other basins [14].

The investigation of fractal exit basins in the Majumdar–Papapetrou binary black hole system needs the numerical integration of the geodesic equations for a light ray in the form of a Hamiltonian system. An alternative approach was proposed by de Moura and Letelier and consists of obtaining a two-dimensional map describing the scattering of light rays by a system of two static Schwarzschild black holes [20]. The black holes are supposed so far apart from each other that the light ray motion in the neighbourhood of one black hole is not appreciably affected by the other black hole. In this way the action of each black hole on light rays can be studied separately using the exact solution for Schwarzschild black holes [21]. In Ref. [20] the fractality of the escape basin boundary was evidenced through numerical computation of the uncertainty dimension.

In this paper we continue the investigation opened by the scattering map derived in Ref. [20], through two lines of further development. Firstly we consider a general approach which enables us to describe each black hole using a spherically symmetric metric, using an approximation for the scattering angle by each black hole and combining it with the second black hole to obtain a scattering map similar to that derived by de Moura and Letelier but with a different dependence of the scattering angle on the impact parameter [22]. The second contribution of our work is to characterise the fractality of the escape basin using not only the uncertainty method to compute the escape fractal basin boundary dimension, but also the recently developed notion of basin entropy, which is a measure of final-state uncertainty related to the fractality of the escape basin boundary [23]. Moreover we also include numerical evidence of the Wada property in the escape basins generated by the scattering map.

This paper is organised as follows: in the first section we outline the basic formulas for the scattering of a light ray by a spherically symmetric black hole. In section 2

we outline the approximate solution of the geodesics equation for the light ray deflection under the gravitational field of two Schwarzschild black holes. Section 3 is devoted to a description of the two-dimensional scattering map describing the light ray deflection due to the binary black hole system, also discussing some of its dynamical properties. Section 4 contains a description of the corresponding escape basins. Section 5 deals with the characterisation of escape basin using the uncertainty dimension, which is a measure of the fractality of such structures, as well as the basin entropy and basin boundary entropy related to them. The presence of the Wada property in the escape basins is examined in section 6. The last section contains our conclusions.

2. Basic equations

We use a four-dimensional space-time metric $g_{\mu\nu}$ with signature $(+, -, -, -)$, as well as Einstein's summation convention for repeated indexes. We use units where $c = G = 1$. In a curved space-time, light rays follow geodesics, whose equation is [1, 12]

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0, \quad (1)$$

where we consider a metric for a symmetrically spherical and static space-time with length element

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - C(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2)$$

where $A(r)$, $B(r)$ and $C(r)$ define the metric produced by the black hole.

Choosing $\theta = \pi/2$ for convenience, and introducing a parameter λ , the following general equation for the geodesics is obtained:

$$A(r) \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 - B(r) \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - C(r) \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0. \quad (3)$$

Both the energy E and angular momentum J are constants of motion, given by

$$E = A(r) \frac{dt}{d\lambda}, \quad (4)$$

$$J = C(r) \frac{d\phi}{d\lambda}, \quad (5)$$

such that (3) is rewritten in the form

$$A(r) B(r) \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = E^2, \quad (6)$$

where we define the effective potential

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{A(r) B(r)}{[C(r)]^2} J^2. \quad (7)$$

The photosphere radius r_m is an extremum of the effective potential (i.e., $(dV_{\text{eff}}/dr)_{r_m} = 0$).

If we consider a photon approaching the black hole from infinity with impact parameter b , the following equation for the geodesics is obtained:

$$\frac{A(r)B(r)}{[C(r)]^2} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{[U(r)]^2} = \frac{1}{b^2}, \tag{8}$$

where $[U(r)]^{-2} = A(r)/C(r)$. After approaching the black hole with a minimum distance r_0 the photon is deflected and emerges out in other direction. This distance is called the critical impact parameter and, from (8), it is given by

$$b_m = \sqrt{\frac{C(r_0)}{A(r_0)}} \equiv \sqrt{\frac{C_0}{A_0}}. \tag{9}$$

On substituting (9) back into (8) it turns out that the angle of deflection is

$$\alpha = I(r_0) - \pi, \tag{10}$$

where

$$I(r_0) = \int_{r_0}^{\infty} dr \sqrt{\frac{B(r)}{C(r)} \left[\frac{A_0}{A(r)} \frac{C(r)}{C_0}\right]^{-1/2}}. \tag{11}$$

In the limit of strong gravitational fields we can expand (11) so as to obtain [22]

$$\begin{aligned} \alpha(r_0) &= -a \ln\left(\frac{r_0}{r_m}\right) + c + O(r_0 - r_m) \\ \alpha(b) &= -\tilde{a} \ln\left(\frac{b}{b_m} - 1\right) + \tilde{c} + O(b - b_m), \end{aligned} \tag{12}$$

where a , \tilde{a} , c , and \tilde{c} depend on the functions A , B , and C , evaluated at the photosphere radius r_m . Similar to (9) we have $b_m = \sqrt{C(r_m)/A(r_m)}$.

The evaluation of the expansion coefficients must be done carefully since the integral (11) diverges at r_0 . In order to do so, we rewrite (11) as [22]

$$I(r_0) = \int_0^1 dz f(z, r_0) R(z, r_0), \tag{13}$$

where we define auxiliary variables

$$y = A(r), \quad y_0 = A_0, \quad z = \frac{y - y_0}{1 - y_0}, \tag{14}$$

and the following functions

$$R(z, r_0) = \frac{2\sqrt{B y C_0}}{C A'} (1 - y_0), \tag{15}$$

$$f(z, r_0) = \left\{ y_0 - [(1 - y_0)z + y_0] \frac{C_0}{C} \right\}^{-1/2}. \tag{16}$$

We remark that $R(z, r_0)$ is regular for all values of z and r_0 , whereas $f(z, r_0)$ diverges for $z \rightarrow 0$. Expanding the integrand of (16) up to second order terms we have

$$f(z, r_0) \approx f_0(z, r_0) = \sqrt{\frac{1}{\gamma z + \beta z^2}}, \tag{17}$$

where

$$\gamma = \frac{1 - y_0}{C_0 A'_0} (C'_0 y_0 - C_0 A'_0), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(1 - y_0)}{2C_0^2 A_0^3} \left[2C_0 C'_0 A_0'^2 + (C_0 C'_0 - 2C_0'^2) \right. \\ &\quad \left. - C_0 C'_0 y_0 A_0''_0 \right], \end{aligned} \tag{19}$$

and the primes denote differentiation with respect to the argument.

Proceeding in this way we obtain the desired coefficients of the expansions in (12), as follows:

$$\tilde{a} = \frac{a}{2} = \frac{R(0, r_m)}{2\sqrt{\beta_m}}, \tag{20}$$

$$\tilde{c} = -\pi + c_r + \tilde{a} \ln\left(\frac{2\beta_m}{y_m}\right), \tag{21}$$

where $\beta_m = \beta(r_m)$ and c_r is the real part of the integral (13).

In this paper we shall consider Schwarzschild black holes with mass M , such that these functions are given by the following expressions [21]:

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \tag{22}$$

$$B(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = \frac{1}{A(r)}, \tag{23}$$

$$C(r) = r^2. \tag{24}$$

Schwarzschild black holes have one event horizon, given by the radius where the metric diverges, corresponding to $r = 2M$. Without loss of generality we may set $2M = 1$. For the Schwarzschild metric the coefficients (18) and (19) are given, respectively, by

$$\alpha = 2 - \frac{3}{r_0}, \tag{25}$$

$$\beta = \frac{3}{r_0} - 1. \tag{26}$$

Using (22)–(24) in (7) and computing the extremum of the effective potential results that the radius of the photosphere is $r_m = 3/2$, in such a way that (19) gives $\beta_m = 1$. From these results, the coefficients (20) and (21) of the expansion for the deflection angle (12) are

given by

$$\tilde{a} = 1, \quad (27)$$

$$\tilde{c} = -\pi + b_m + \ln 6 \approx -0.4002, \quad (28)$$

$$b_m = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2.5981, \quad (29)$$

$$c_r = 2 \ln[6(2 - \sqrt{3})] \approx 0.9496. \quad (30)$$

The scattering of a light ray by a single black hole can now be understood in terms of the possible values of the corresponding impact parameter b . A light ray comes from infinity and approaches the black hole with impact parameter b and whose direction makes a deflection angle α given by (10). If $b < b_m \approx 2.5981$ the light ray falls into the black hole and disappears. On the other hand, for this light ray not to escape back to infinity it is necessary that its impact parameter b be such that the deflection angle α be at least π . Hence we additionally have $b < b_{\text{esc}}$, where $\alpha(b_{\text{esc}}) = \pi$. Using (12), (27), and (28) this means that

$$b_{\text{esc}} = b_m \left[\exp\left(\frac{\tilde{c} - \pi}{\tilde{a}}\right) + 1 \right] \approx 2.67332. \quad (31)$$

As a result, for a light ray deflected by a single black hole not to escape to infinity or to collide with a black hole, the impact parameter must belong to the narrow interval $b_m < b < b_{\text{esc}}$.

3. The scattering map

After deriving the equations for the deflection of a light ray by a single black hole, we now consider a system of two identical black holes separated by a distance D with the same mass $M = 1/2$ (figure 1). Such binary systems rotate around their centre of mass [24] and their existence has been confirmed by the observation of gravitational waves from a binary black hole merging

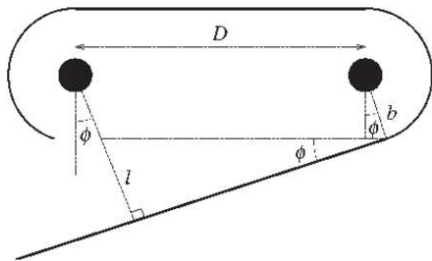


Figure 1. Schematic figure showing the basic geometrical elements involved in the scattering map for the light ray deflection by a pair of black holes.

by LIGO Scientific Collaboration [13]. In such systems it is usually the case where the relative velocities are much smaller than c , and it is possible to approximate them as fixed in space.

Unlike the case of a single black hole treated in the previous section, such a system has no exact solution of field equations. In spite of this, if the distance D between the black holes is much higher than their Schwarzschild radius ($r_0 = 2M = 1$) then the nonlinear interaction between their gravitational fields can be neglected. In this case we consider the deflection of light from each black hole in a separate way using the expressions previously found for the Schwarzschild metric. In other words, in the light scattering by a given black hole the effect of another black hole is neglected. Both approximations are discussed in detail in Ref. [20]. In particular, these approximations may not hold if we consider the scattering of massive test particles.

The line connecting the two black holes will be the axial symmetry axis. We shall assume that light rays have zero angular momentum in this direction. As a result, the light rays are constrained to move in the plane containing the two black holes [24]. The basic geometry involved in the light scattering by the binary black hole is depicted in figure 1: a light ray comes from infinity and approaches the first black hole with impact parameter b and whose direction makes an angle ϕ with the axial symmetry line.

For this light ray not to escape back to infinity it is necessary that $b < b_{\text{esc}}$, where b_{esc} is given by (31). Conversely, for the light ray not to fall to the first black hole the impact parameter must satisfy $b > b_m$. If the light ray is not deflected to infinity by the first black hole, then it goes to the other black hole and is deflected again. If not deflected to infinity it returns to the vicinity of the first black hole, and so on.

Instead of considering the detailed trajectories of the null geodesics corresponding to the light rays, it is often more convenient to define discretized variables (b_n, ϕ_n) , corresponding respectively to the values of the impact parameter and angle with respect to the axial symmetry line in the neighbourhood of the n th scattering. Even (odd) values of n correspond to the first (second) black hole. Using such discrete time intervals the differential equations for light scattering reduce to a two-dimensional discrete-time map [20]

$$b_{n+1} = b_n + D \phi_n, \quad (32)$$

$$\phi_{n+1} = \pi + \phi_n - \alpha(b_{n+1}), \quad (\text{mod } 2\pi) \quad (33)$$

where $\alpha(b)$ is given by (12). Some sign conventions are essential in this description: positive values of b imply that the light ray goes from black hole 1 to 2 (from 'left' to 'right' in figure 1), and negative values otherwise; whereas positive values of ϕ correspond to

counterclockwise rotations. In Ref. [20] this map was obtained from a different function $\alpha(b)$ resulted from the exact solution of Schwarzschild metric [21]. Our choice for $\alpha(b)$, on the other hand, resulted from a different procedure, which can be applied to any spherically symmetric and static black hole [22].

The Jacobian matrix of the scattering map (32) and (33) is

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & D \cos \phi_n \\ -\alpha'(b_{n+1}) & 1 - D \alpha'(b_{n+1}) \cos \phi_n \end{pmatrix} \quad (34)$$

whose determinant is equal to unity, such that the scattering map (32) and (33) is an area-preserving mapping, corresponding to the following continuous-time Hamiltonian:

$$H(b, \phi, n) = \pi b - \int^b db' \alpha(b') + D \delta_1(n) \cos \phi, \quad (35)$$

where

$$\delta_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - m) = 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \cos(2\pi qn), \quad (36)$$

is a periodic delta function (Dirac comb).

The fixed points of the scattering map are $\phi_{1,2}^* = 0, \pi$ and $b_{1,2}^* = b_{\text{esc}}$. The eigenvalues of the Jacobian matrix (34) at these points are

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{2}\right)^2}, \quad (37)$$

where

$$\tau = 2 - D \alpha'(b_{n+1}) \cos \phi_n \quad (38)$$

is the trace of Jacobian matrix. These fixed points are stable provided $|\tau| < 2$. It turns out that the point $(b_{\text{esc}}, 0)$ is stable if $0 < D \alpha'(b_{\text{esc}}) < 4$, whereas the other fixed point (b_{esc}, π) is stable if $-4 < D \alpha'(b_{\text{esc}}) < 0$. In either case the light ray trajectory is such that $b_{n+1} = -b_n$. Since $\alpha'(b_{\text{esc}}) < 0$ and $D > 0$ the fixed point at $\phi = 0$ is always unstable (a hyperbolic saddle). If, in addition, we have $|\alpha'(b_{\text{esc}})| > (4/D)$ the other fixed point at $\phi = \pi$ is also unstable.

For $D \neq 0$ the Hamiltonian (35) is generally non-integrable. On the other hand, by physical grounds, if the light deflection by one black hole must be independent of the existence of the other black hole, then we must assume that D is typically a large number. In such case both fixed points are unstable and we expect a sizeable area-filling chaotic orbit in the phase space (b, ϕ) .

4. Escape basins

The deflection of light by a system of binary black holes is an example of open dynamical system, i.e., a system for which trajectories (light rays) eventually escape from a given phase space region. If there are more than one way by which trajectories can escape, then it is relevant to identify the sets of initial conditions that generate trajectories escaping through a given exit. This set is called the escape basin corresponding to that exit [5]. In the case of two or more exits we may identify the boundary which separates those escape basins, called escape basin boundary. It has been long known that conservative dynamical systems presenting chaotic dynamics have fractal escape basins and fractal escape basin boundaries [3].

In order to plot the escape basins corresponding to the scattering map (32) and (33), we choose a set of initial conditions (b_0, ϕ_0) and iterate them to find out to which basin they belong. We divide the phase space region $\Omega = \{0 \leq \phi_0 \leq 2\pi, b_m < b_0 < b_{\text{esc}}\}$ in a large number of points and iterate the map (32) and (33) for each of these initial conditions, recording the final outcome for each point. Depending on its initial conditions, after a number of map iterations, a light ray may fall into one black hole (**A**), into the other black hole (**B**), or escapes towards infinity (**C**). All outcomes can be considered as exits since we stop iterating the map once a light ray falls into a black hole. Accordingly, we denote the corresponding escape basins to be $\mathcal{B}(\mathbf{A})$, $\mathcal{B}(\mathbf{B})$ and $\mathcal{B}(\mathbf{C})$.

Figure 2 is a representative example of the escape basins for the scattering map (32) and (33) when $D = 15$, which is a value large enough to ensure that each black hole deflects light rays in an independent fashion. We used a grid of $10^4 \times 10^4$ initial conditions over the phase space region Ω and iterate each initial condition

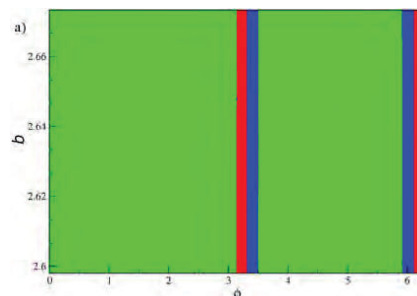


Figure 2. Escape basins for the scattering map when $D = 15$. Green points represent initial conditions generating orbits that escape to infinity. Red and blue points are the escape basins for black holes **A** and **B**, respectively.

by a maximum of 10^4 times. An orbit falls into a black hole whenever $b_n < b_m \approx 2.5981$ for a given escape time $n = \bar{n} < 10^4$. If \bar{n} is even (odd) we know that the light ray falls into black hole **A** (**B**) and the corresponding initial condition is painted red (blue). If the orbit goes to infinity ($b_n > b_{\text{esc}} \approx 2.67332$) for a given $n = \bar{n} < 10^4$ the corresponding initial condition is painted green. The red, blue, and green regions are thus numerical approximation for the exit basins $\mathcal{B}(\mathbf{A})$, $\mathcal{B}(\mathbf{B})$ and $\mathcal{B}(\mathbf{C})$, respectively. There is a measure zero set of unstable periodic orbits which never escape and, since $D < \infty$, we cannot rule out orbits within very tiny periodic islands which do not escape at all, but whose effect in the exit basins would be negligible.

Since the labelling of black holes **A** and **B** is immaterial, their escape basins would be symmetric, i.e. they must have the same size. On the other hand, figure 2 shows that the dominant basin is that of infinity (**C**). The sequence of red and blue regions, however, has a fine structure that cannot be seen in figure 2, but requires further magnifications. This characterisation is also possible by defining a function $g(b)$ such that [20]

$g(b) = 1$, if the orbit falls into black hole **A**, $g(b) = -1$, if it falls into **B**, and $g(b) = 0$ if the orbit escapes to infinity.

In order to investigate the escape basin boundary for the regions in figure 2 we analyse two regions in the vicinity of the points with $\phi_0 = 0$ and $\phi_0 = \pi$. For both regions, we divide the impact parameter interval $b_m < b < b_{\text{esc}}$ into 10^6 points. The corresponding escape basins are plotted in (a) and (d), respectively, as a horizontal bar with green, red and blue stripes. We also plotted the corresponding function $g(b)$ below the bars. In figures 3b and e we show magnifications of two intervals of figures 3a and d, respectively, and figures 3c and f are further magnifications. These zoomings clearly show that there are regions for which there are pieces of the three escape basins in all scales. This self-similarity is a signature of the fractality of the basins as well as of its basin boundary.

Since some regions of different escape basins are intertwined in arbitrarily fine scales it is extremely difficult, if not impossible at all, to predict the final outcome of a light ray, given its initial condition being always

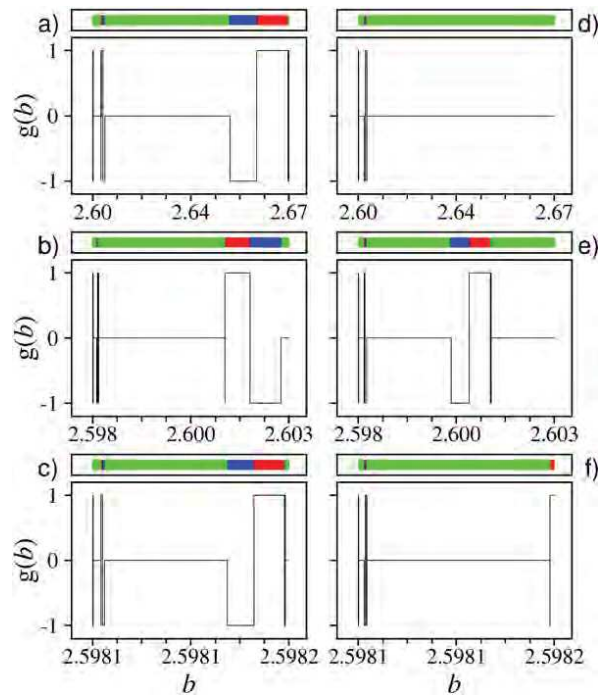


Figure 3. The horizontal bars represent the escape basins as a function of the impact parameter b for $\phi_0 = 0$ in (a), with magnifications in (b) and (c); and $\phi_0 = \pi$ in (d), with magnifications in (e) and (f). The colour code is the same as in figure 2. We plot, below the horizontal bars, the corresponding values of the function $g(b)$ (see text for details).

known up to a given uncertainty. One of the observable consequences of the existence of fractal structures in phase space is final-state sensitivity, i.e. small uncertainties in the initial conditions may lead to large uncertainties with respect to the future behaviour of the system [25].

The nature of the complicated structure of the escape basins displayed in figure 3 can be understood by considering the invariant chaotic set underlying the chaotic region in phase space. Let P be an unstable periodic point of the map embedded in the chaotic region, with its stable and unstable manifolds. The unstable and stable manifolds are sets of points which asymptote to the periodic orbit under forward and backward iterations of the map, respectively. The intersection of the stable and unstable manifolds of an infinite number of unstable periodic orbits, called a chaotic saddle, is a non-attracting invariant chaotic set with a dense chaotic orbit [4]. Initial conditions belonging to this chaotic saddle remain in the chaotic region, unless portions of the saddle cross the escape regions [26].

In order to get the invariant manifolds of the chaotic saddle we used the sprinkler method, which starts by partitioning the phase space region into a fine mesh of points. For each initial condition we compute the escape time, i.e. the number of map iterations it takes for the corresponding orbit to leave the phase space region [27]. The stable manifold is formed by initial conditions set with a connection length larger than some specified value n_c , and the unstable manifold are their last iterations before leaving the phase space region [28]. The chaotic saddles are those initial conditions with a given connection length $\bar{n} = \xi n_c$, where $0 < \xi < 1$. To get the manifolds the values of n_c and ξ must be chosen after trial and error, but the numerical results seem not to be substantially affected by them [27].

Figure 4c shows a numerical approximation of the chaotic saddle resulting from the intersection of the stable and unstable manifolds illustrated in figures 4a and b, respectively. Starting from a grid of $10^3 \times 10^3$ initial conditions, we record those initial conditions with an escape time larger than $n_c = 40$. Such initial conditions constitute an approximation to the stable manifold of the chaotic saddle (figure 4a). On the other hand, the end points of the trajectories related to the recorded initial conditions (i.e., the orbit points for those trajectories after $n_c = 40$ map iterations), are an approximation to the unstable manifold of the saddle (figure 4b). The points from the middle of these trajectories ($\bar{n} = 0.5n_c = 20$) are thus representations for the chaotic saddle (figure 4c).

The connection between escape basin boundary and invariant manifold structure is similar to that exist for basins of attraction, and it is based on the fact that the

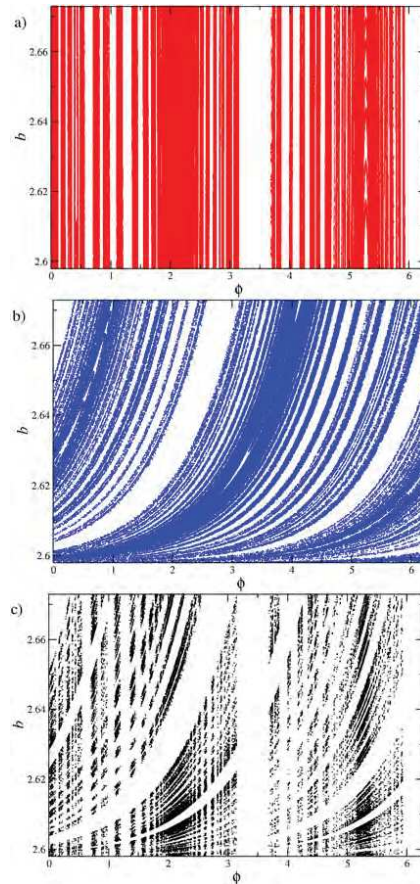


Figure 4. (a) Stable and (b) unstable manifold and (c) chaotic saddle for a chaotic orbit in the case of the scattering map for $D = 15$. The sprinkler method is used with $n_c = 40$ iterations and $\xi = 0.5$.

basin boundary is the closure of the stable manifold of a saddle periodic orbit P belonging to the chaotic saddle, under the map \mathbf{F} (in our case, the scattering map (32) and (33)) [25]. We show this situation schematically in figure 5: let S to be a segment of the escape basin boundary to intercept the unstable manifold of P . The backward images of this segment, like $\mathbf{F}^{-1}(S)$ and $\mathbf{F}^{-2}(S)$ (figure 5) are smoothly deformed, becoming also increasingly elongated and accumulate at the stable manifold of P . This occurs because the intersections between the unstable manifold and the basin boundary converge exponentially fast according to the corresponding eigenvalue of the tangent map $\mathbf{DF}(P)$; and

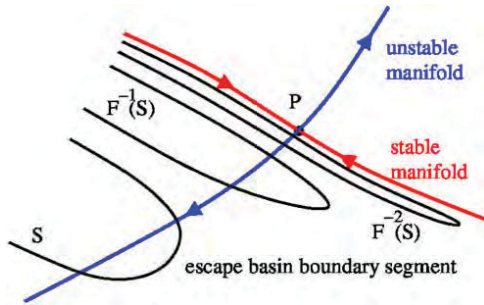


Figure 5. Schematic figure showing the accumulation of escape basin filaments at the stable manifold of a chaotic saddle.

the length of the lobes formed by the backward image increases to preserve areas [4].

Hence, if the segment S crosses the unstable (or stable) manifold of the chaotic saddle, the escape basin boundary is fractal. In the next section, we characterise quantitatively the fractal behaviour of the escape basin boundary using appropriate numerical diagnostics.

5. Uncertainty fraction and basin entropies

In this work we present two different quantitative characterisation of the escape basin boundary. The first is the computation of the box-counting dimension of the escape basin boundary by the uncertainty fraction method [25, 29] and the second is the determination of the so-called basin entropy and basin boundary entropy to quantify the degree of uncertainty due to the fractality of the escape basin boundary [23, 30]. The concept of uncertainty dimension has been long introduced in the literature of dissipative dynamical system for estimating the box-counting dimension of the basin boundary between two basins of attraction [25, 29]. It was also applied in open Hamiltonian (conservative) systems, for the boundary between escape basins [5].

We compute the uncertainty dimension of the escape basin boundary numerically by using the following method: we randomly pick up a large number of initial conditions b_0 in the interval $[b_m, b_{\text{esc}}]$ for $\phi_0 = cte$, and for each one of them we iterate the map (32) and (33) a certain number of times, finding out its outcome and therefore to which basin the corresponding initial condition belongs.

For each initial condition (ϕ_0, b_0) we choose $(\phi_0, b_0 \pm \epsilon)$, where $\epsilon \ll 1$ is the uncertainty upto which the initial condition is known, and we again iterate the map until this perturbed initial condition escapes. Whenever the three points do

not belong to the same escape basin, the condition b_0 is labelled as ϵ -uncertain initial condition. After a number ($N_0 = 10^3$) of initial conditions are tested the fraction $f(\epsilon)$ of ϵ -uncertain initial conditions is computed. These steps are repeated 10 times for each ϵ , which varied from 10^{-1} to about 10^{-10} . The fraction of uncertain initial conditions $f(\epsilon)$ is expected to increase with ϵ as a power-law $f(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha$, where α is the so-called uncertainty exponent [25, 29].

The uncertainty dimension d quantifies the final-state uncertainty of the points belonging to basin boundary. Let d_p be the dimension of the phase space region to be considered, and let $N(\delta)$ be the minimum number of d_p -dimensional boxes of length δ necessary to cover the boundary. The box-counting dimension of the latter is

$$d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)}, \quad (39)$$

such that $N(\delta)$ scales as δ^{-d} for small enough δ [3]. If we set $\delta = \epsilon$, the volume of the uncertain region in the phase space will be $N(\epsilon)$ times the volume of the d_p -dimensional cubes, which is ϵ^{d_p} . Since the initial conditions are uniformly chosen over the phase space region, the uncertain fraction is of the order of the total volume $N(\epsilon)\epsilon^{d_p} = \epsilon^{(d_p-d)}$. Thus, the uncertainty exponent results in $\alpha = d_p - d$. A rigorous analysis would show that the uncertainty dimension d coincides with the box-counting dimension of the escape basin boundary [29].

Since we set $\phi_0 = \text{const}$, we are considering a phase space cross section with $d_p = 1$, such that $\alpha = 1 - d$, in such a way that a smooth boundary with $d = 0$ has $\alpha = 1$, whereas $0 < \alpha < 1$ characterises a fractal basin boundary [25, 29]. We computed the uncertainty exponent for the escape basin boundary depicted in figures 3a–f for $\phi_0 = 0$ and $\phi_0 = \pi$. We have chosen these magnifications to cover chiefly fractal pieces of the boundary, and we obtained for the corresponding uncertainty dimensions for $\phi_0 = 0$ and $\phi_0 = \pi$ the values $d = 0.19 \pm 0.02$ and $d = 0.21 \pm 0.02$, respectively.

As the uncertainty exponent α is small, the fraction of ϵ -uncertain initial conditions is increasingly independent of the uncertainty ϵ itself. This means that the escape basin boundaries become so convoluted that virtually any attempt to decrease the fraction of uncertain conditions may be in vain.

An alternative measure of the unpredictability is to evaluate the area of each escape basin and the fraction it occupies of a given phase space area, whose ratio has been called basin stability by Menck *et al.* [31, 32]. It is understood that larger basins would be more stable, in the sense that small deviations of an initial condition would less probably result in uncertainty. Another approach to quantify the degree of final-state

uncertainty of a given basin is the computation of the so-called basin entropy [23, 30].

Let us consider the general case of N_A exiting in the phase space region Ω for an open system, and cover this region with a box grid of size ϵ . Each box contains an infinitely large number N of initial conditions, each of them leading to an escaping trajectory through a given exit labelled as $j = 1, 2, \dots, N_A$. We assign a probability p_{ij} that an initial condition in the i th box leads to an escape through the j th exit. Depending on the chosen box, the corresponding initial conditions may exit to a limited number of exits $m_i \leq N_A$. In the language of statistical mechanics m_i is the number of accessible microstates of the system [23].

Summing over the total number of microstates, the Gibbs entropy of the i th box is [30]

$$S_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \log \left(\frac{1}{p_{ij}} \right), \quad (40)$$

such that the entropy related to the whole grid is obtained by summing the contribution of each box $S = \sum_{i=1}^N S_i$. The basin entropy results by normalising this value $S_b = S/N$. If we restrict the computation of the basin entropy only to the N_b boxes containing points of the boundary, we obtain the so-called boundary basin entropy $S_{bb} = S/N_b$.

In order to get an intuitive idea of the meaning of basin entropy let us consider two limiting situations: if we have a single exit ($N_A = 1$) the corresponding probability is equal to unity and hence $S_b = 0$, i.e. no uncertainty at all. The opposite situation consists of completely randomised basins with N_A equiprobable escapes, for which $p_{ij} = 1/m_i$, which gives $S_b = \log N_A$ as the upper bound of the basin entropy.

The basin boundary entropy S_{bb} measures the complexity of the basin boundary. Moreover, there is a threshold value of S_{bb} that separates basins with smooth boundaries from those with fractal boundaries. For example, suppose that our basins were separated by a smooth boundary. The number of boxes in the boundary will be negligible for the computation of the basin entropy in the boundary S_{bb} , since there are many more boxes with just one basin. Thus, the maximum possible value of S_{bb} that a smooth boundary can have is $\ln 2$, which would be a pathological case where every box in the boundary contains equal proportions of two basins. Therefore, if $S_{bb} > \ln 2$, the basin boundary is said to be fractal, but this is a sufficient but not necessary criterion for fractality, though, since some fractal basins do not fulfil this condition [10, 11, 30, 33].

We applied those concepts to the escape basins of figure 3, by computing the corresponding values of the basin entropy and basin boundary entropy. We varied the

grid of phase space Ω considering 250×250 , 200×200 , 125×125 and 100×100 boxes, with 16, 25, 64, 100 initial conditions per box, respectively. For each grid point we computed a maximum number of 10^4 iterations of the map and exclude from the statistics those initial conditions leading to orbits that do not escape during this maximum iteration time.

Denoting by n_A , n_B and n_C the number of points escaping the system by asymptoting to the exits **A** (light ray falling on a black hole), **B** (light ray falling on the other black hole) and **C** (light ray going to infinity), respectively, the corresponding probabilities are given by

$$p_A = \frac{n_A}{n_A + n_B + n_C}, \quad p_B = \frac{n_B}{n_A + n_B + n_C},$$

$$p_C = \frac{n_C}{n_A + n_B + n_C}, \quad (41)$$

and the entropy for each box is, from (40),

$$S = -p_A \log p_A - p_B \log p_B - p_C \log p_C. \quad (42)$$

The values of the basin entropy and basin boundary entropy of the region in figure 3 centred at $\phi_0 = 0$ are, respectively, $S_b = (8.44 \pm 3.16) \times 10^{-5}$ and $S_{bb} = 0.94 \pm 0.09$. For the region in figure 3 centred at $\phi_0 = \pi$ the corresponding values are $S_b = (7.34 \pm 2.42) \times 10^{-5}$ and $S_{bb} = 0.93 \pm 0.08$. For the two cases of ϕ_0 the value of basin entropy S_b is low, thanks to the fact that most boxes considered in this region contains initial conditions that escape through a single exit. The statistics become relatively poor and the dispersions are relatively large. However, the entropy of the boundary of basin S_{bb} obeys the inequality $S_{bb} > \ln 2$, i.e. the basin boundary is indeed fractal, as the uncertainty dimension has already pointed out.

6. Wada escape basin boundaries

If, for two basins the boundary is a fractal curve, one may ask what this would mean for three or more exit basins. The answer lies in the so-called Wada property: if the boundary between two basins is smooth, three of such basins have only one common boundary point. However, if the boundary is fractal there may be an infinite number of such common points [34].

Let B be an escape basin. It has a boundary point P if every open neighbourhood of P intersects the basin B and at least another basin. The set of all boundary points of that basin is defined as the corresponding basin boundary. The boundary point P is called a Wada point if every open neighbourhood of P intersects at least three different basins [35]. A basin boundary is said to possess the Wada property if every boundary point of B is a Wada point, such that the boundary of such a basin is a Wada escape basin boundary. A necessary (but not

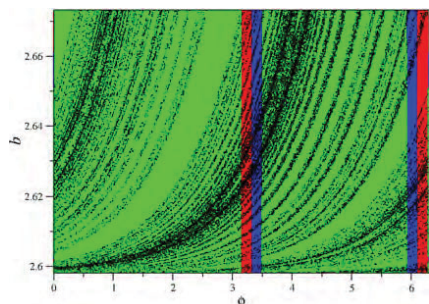


Figure 6. Escape basins of the scattering map for $D = 15$. The colour code for the basins is the same as in figure 2. The black curve is a segment of the unstable manifold of a periodic orbit embedded in the chaotic region.

sufficient) condition for the Wada property to exist is that the unstable manifold of an unstable periodic orbit P belonging to this boundary must intersect every escape basin [36, 37].

The Wada boundaries have important physical consequences, since in this case any boundary point turns to be arbitrarily close to points of all escape basins [38]. Hence it is not possible to say with certainty to which basin will the trajectory asymptote to, even if we could improve the uncertainty. This is a case of extreme final-state sensitivity.

In order to check the validity of condition for the Wada property in our system, in figure 6 we plot (in black) a segment of the unstable manifold of some periodic orbit embedded in the chaotic region together with the escape basin. It is clearly seen that such manifold intercepts points of the blue, red and green basins. The successive magnifications of the escape basin, previously plotted in figure 3 show that stripes of all basins coexist in increasingly finer scales, suggesting that at least some of the boundary points have the Wada property. Thus, if any but not all boundary points do, then we have only partial fulfilment of this property.

7. Conclusions

The scattering of light rays by a binary black hole system is an outstanding example of open Hamiltonian systems. Being a non-integrable Hamiltonian system, one expects the presence of many dynamical features, like invariant tori, periodic islands, homoclinic points and chaotic motion. On the other hand, being an open system the chaotic motion is typically transient, since the fate of an incident light ray is either to escape to infinity or fall into one of the black holes. In these cases, one is interested to obtain the respective exit basin, or

the set of initial conditions leading to a given outcome. In non-integrable open Hamiltonian systems, the exit basins and their common boundary are fractal structures, chiefly due to the presence of a non-attractive invariant set called chaotic saddle.

In this paper we considered the light ray scattering by a binary black hole system from the point of view of an open Hamiltonian system, focusing on the fractal structures present in the chaotic dynamics. The equations of general relativity for a light ray in the gravitational field of a binary Schwarzschild black hole system were integrated approximately to obtain a discrete-time map, which exhibits chaotic dynamics for a wide range of its parameters (the most important being the distance between black holes). The chaotic dynamics here is transient, though, for the light rays can either escape to infinity or fall into one of the black holes.

The fractal exit basin boundaries for these systems were investigated by computing the so-called uncertainty exponent, which yields a numerical estimate of the fractal dimension of the exit basin boundary. Moreover, the chaotic saddle responsible for the latter has been evidenced numerically. In most of the cases analysed the escape basin boundary dimension has been found to be about 0.20. Another quantitative characterisation of the fractal exit basin boundaries is the basin entropy, which measures the uncertainty of the final-state when more than one outcome exists for a typical trajectory.

The basin entropy, which is basically the information entropy related to the probability of going to a given basin, has been found to vary according to the magnification used to represent the exit basins. The basin boundary entropy, however, which takes into account only the intervals containing basin boundary points, shows consistently uniform values, compatible with the basin boundary dimension of 0.20 obtained through a different method.

Finally, in the present paper we described the Wada property, which is typical for systems with three or more basins with a fractal basin boundary. The Wada property means that every boundary point is such that an arbitrarily small neighbourhood centred at that point contains points of the three (or more) basins. It is actually an extreme form of final-state uncertainty. We have verified the presence of the Wada property by showing that the unstable manifold of some periodic orbit embedded in the chaotic saddle intercepts all three basins. If this intersection occurs once, it will occur an infinite number of times.

In summary, we have studied some fractal structures present in the chaotic motion of a light ray under the gravitational field of two Schwarzschild black holes, a problem which is classically non-integrable and

has a non-attractive chaotic invariant set responsible for chaotic transient dynamics. Such fractal structures are responsible for various signatures of the so-called chaotic scattering, which is a phenomenon ubiquitous in non-integrable open Hamiltonian systems. Further investigation in the footsteps of the present paper will take into account black holes with charge, for which the Reissner–Nordström metric must be used instead. The general procedure outlined in this paper, which is an approximate solution of the equations of motion, can be used to take into account this metric with charge effects.

The strong lensing effect caused by the black holes' gravitational field generate an infinite number of images of the light source. These images are directly related to the regions whereby the photon escapes out to infinity. From our results concerning the escape basins of the open Hamiltonian system represented by the scattering map, we see that the escape regions have a larger area than those regions for which the photon is captured by the black holes. Moreover we consider the effects of each black hole individually, without taking into account the influence of the other black hole. Hence we do not expect any drastic changes in the analysis of the images due to the lensing effect in the case of two black holes investigated in this paper.

Acknowledgements

The authors acknowledge useful suggestions by Prof. G. M. Kremer (Curitiba) and the valuable help of Mr Eduardo L. Brugnago. This work was supported by grants from the Brazilian Government Agencies CAPES, CNPq (Proc. 301019/2019-3) and São Paulo Research Foundation (FAPESP, Brazil), under Grant No. 2018/03211-6.

References

- [1] S Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (Wiley, New York, 1972)
- [2] C P Dettmann, N E Frankel and N J Cornish, *Fractals* **3**, 161 (1995)
- [3] J Aguirre, R L Viana and M A F Sanjuán, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 333 (2009)
- [4] A Péntek, Z Toroczkai, T Tél, C Grebogi and J A Yorke, *Phys. Rev. E: Stat. Phys., Plasmas, Fluids, Relat. Interdiscip. Top.* **51**, 4076 (1995)
- [5] S Bleher, C Grebogi, E Ott and R Brown, *Phys. Rev. A* **38**, 930 (1988)
- [6] J Aguirre, J C Vallejo and M A F Sanjuán, *Phys. Rev. E: Stat., Nonlinear, Soft Matter Phys.* **64**, 066208 (2001)
- [7] R Barrio, F Blesa and S Serrano, *Europhys. Lett.* **82**, 10003 (2008)
- [8] E G Altmann, J C Leitão and J V Lopes, *Chaos* **22**, 026114 (2012)
- [9] M Hansen, D da Costa, I L Caldas and E D Leonel, *Chaos Solitons Fractals* **106**, 355 (2018)
- [10] A C Mathias, R L Viana, T Kroetz and I L Caldas, *Phys. A* **469**, 681 (2017)
- [11] A C Mathias, T Kroetz, I L Caldas and R L Viana, *Chaos Solitons Fractals* **104**, 588 (2017)
- [12] C Misner, K S Thorne and J A Wheeler, *Gravitation* (W H Freeman, New York, 1973)
- [13] B P Abbot *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016)
- [14] A Daza, J O Shipley, S R Dolan and M A F Sanjuán, *Phys. Rev. D* **98**, 084050 (2018)
- [15] S D Majumdar, *Phys. Rev.* **72**, 390 (1947)
- [16] A Papapetrou, *Proc. R. Ir. Acad., Sect. A* **51**, 191 (1947)
- [17] G Contopoulos, *Astron. Astrophys.* **231**, 41 (1990)
- [18] G Contopoulos, H E Kandrup and D Kauffman, *Phys. D* **64**, 310 (1993)
- [19] P V P Cunha and C A R Herdeiro, *Gen. Relat. Gravit.* **50**, 42 (2018)
- [20] A P S de Moura and P S Letelier, *Phys. Rev. E: Stat. Phys., Plasmas, Fluids, Relat. Interdiscip. Top.* **62**, 4784 (2000)
- [21] S Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, Oxford, 1998)
- [22] V Bozza, *Phys. Rev. D* **66**, 103001 (2002)
- [23] A Daza, A Wagemakers, B Georgeot, D Guéry-Odelin and M A F Sanjuán, *Sci. Rep.* **6**, 31416 (2016)
- [24] S L Shapiro and S A Teukosky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* (Wiley, New York, 1983)
- [25] S W McDonald, C Grebogi, E Ott and J A Yorke, *Phys. D* **17**, 125 (1985)
- [26] G-H Hsu, E Ott and C Grebogi, *Phys. Lett. A* **127**, 199 (1988)
- [27] E G Altmann, J S E Portela and T Tél, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 869 (2013)
- [28] L Poon, J Campos, E Ott and C Grebogi, *Int. J. Bifurcation Chaos* **6**, 251 (1996)
- [29] C Grebogi, S W McDonald, E Ott and J A Yorke, *Phys. Lett. A* **99**, 415 (1983)
- [30] A Daza, B Georgeot, D Guéry-Odelin, A Wagemakers and M A F Sanjuán, *Phys. Rev. A* **95**, 013629 (2017)
- [31] P J Menck, J Heitzig, N Marwan and J Kurths, *Nat. Phys.* **9**, 89 (2013)
- [32] P Menck, J Heitzig, J Kurths and H J Schellnhuber, *Nat. Commun.* **5**, 3969 (2014)
- [33] M Mugnaine, A C Mathias, M S Santos, A M Batista, J D Szezech Jr and R L Viana, *Phys. Rev. E* **97**, 012214 (2018)
- [34] J Kennedy and J A Yorke, *Phys. D* **51**, 213 (1991)
- [35] H E Nusse and J A Yorke, *Science* **271**, 1376 (1996)
- [36] H E Nusse and J A Yorke, *Phys. D* **90**, 242 (1996)
- [37] Z Toroczkai, G Károlyi, A Péntek, T Tél, C Grebogi and J A Yorke, *Phys. A* **239**, 235 (1997)
- [38] J Kennedy and J A Yorke, *Phys. D* **51**, 213 (1991)



Contents lists available at ScienceDirect
Chaos, Solitons and Fractals
 Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena
 journal homepage: www.elsevier.com/locate/chaos



Fractal structures in the deflection of light by a pair of charged black holes



Edson E. de Souza Filho*, Amanda C. Mathias, Ricardo L. Viana**

Physics Department, Federal University of Paraná, Curitiba, PR, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:
 Received 4 February 2021
 Revised 24 May 2021
 Accepted 2 June 2021

Keywords:
 Black holes
 Fractal structures
 Fractal basin

ABSTRACT

The deflection of light by a pair of black holes can be considered an open conservative non-linear dynamic system. The basis of our approach is our understanding of strong gravitational lensing and the geodesic movement of light. We obtain a two-dimensional map that sets out the impact parameter and the escape angle when the light gets deflected by each black hole. Being a non-integrable system, the chaotic area-filling orbits occur in a specific parameter range. Fractal structures are related to the existence of a non-attractive invariant chaotic set. This can be seen in the dynamics of these chaotic orbits. The light-ray that enters the system has two potential defined outcomes. Either the light ray can diverge to infinity or it will fall into one of the two black holes. We describe the escape basins and their boundaries, adopting two methods: firstly the corresponding basin and basin boundary entropies and secondly the computation of the uncertainty exponents.

© 2021 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Fractal structures are quite common in chaotic systems. Examples are chaotic attractors, basin boundaries, invariant manifolds and others [1]. It is important to note that open chaotic systems present a variety of fractal structures. The so-called strange saddle is caused by the existence of an invariant non-attracting chaotic manifold [2]. Geodesic motions in a curved space are used to describe the dynamics in General Relativity. If the curvature is negative, then there is a sensitive dependence to the initial conditions. This is a necessary condition for chaotic motion, although there are other conditions [3].

The presence of fractal structures in open non-integrable Hamiltonian systems with chaotic motion has been described in many physical manners. Examples include the motion of a star around a galactic center [4,5], open billiards [6,7], drift motion of magnetically confined charged plasma particles [8], magnetic field lines in Tokamaks [9], amongst others.

Cosmic objects such as black holes, produce space-time curvature which leads to the deflection of the light ray as it trace out null geodesics in curved space-time [10]. Systems of binary black holes have been confirmed by the observation of gravitational waves by LIGO Scientific Collaboration [11]. In such systems,

where the relative velocities are much lower than the light velocity c , you can consider them as fixed in space.

The null geodesics equations describing the light ray scattering by a pair of black holes are non-integrable and constitute an open conservative dynamical system. This form of chaotic motion is possible [12]. One such example is the Majumdar-Papapetrou binary black hole which occurs when a system of two charged black holes are in static equilibrium due to their electrostatic repulsion [13,14]. Many authors [15,16] have investigated the presence of fractal structures in this system, caused by the chaoticity of geodesic motion [15,16].

The escape basin is a basic fractal structure. It can be investigated in a binary black hole system, which is the array of initial conditions that point to one of three possible outcomes. The light ray can fall in the first black hole; fall into the second black hole or escape to infinity. Escape basins are very important in astrophysical investigations. They are actually the so-called shadows of a black hole. A shadow is a region in the observer's sky which cannot be illuminated by distant light sources due to the blockage of a black hole [17]. Daza and others have studied escape basins in a Majumdar-Papapetrou binary black hole [12,13]. They show that the escape basin boundaries are not just fractal but also display the stronger Wada property: any boundary point belongs to the boundary of at least two other basins.

The investigation of fractal exit basins proposed by de Moura and Letelier produces a two-dimensional map. It describes the scattering of light rays by a system of two static Schwarzschild black holes [18]. This is different from the Majumdar-Papapetrou binary

* Corresponding author.

** Principal corresponding author.

E-mail addresses: eesouza@fisica.ufpr.br (E.E. de Souza Filho), viana@fisica.ufpr.br (R.L. Viana).

black hole system, which requires a numerical integration of the geodesic equations. de Moura's proposal comprises a system where the black holes are supposedly so far apart from each other, that one black hole doesn't affected the other black hole. In this way, the influence of each black hole on the light rays can be studied separately using the exact solution for Schwarzschild black holes [18].

In this paper we advance the investigations by considering a system of charged black holes. The charge is important, as charged black holes are said to be the final stage of the collapse of magnetized stars. It is known that black holes in the universe are ruled by the Kerr-Newman metric. We can simplify the system, as the rotation breaks the spherical symmetry and introduces avoidable complications in the calculations. So a general approach enables us to describe each black hole using a spherically symmetrically metric (Reissner-Nordström).

We can use this approximation for the scattering angle by a black hole and combine it with a second black hole to obtain a scattering map similar to that obtained by de Moura and Letelier. However in our case the scattering angle is defined by an analytical method [19]. The second step in our work is to characterize the fractality of the escape basin using the recently developed notion of basin entropy. This is a measure of final state uncertainty related to the fractality of the escape basin boundary [20]. We also use the well-know uncertainty method to obtain the fractal dimension.

This paper is organized as follows: In Section 1 we lay out the basic equations for the scattering of a light ray by a spherically symmetric black hole. In Section 2 we outline the approximate solution of the geodesics equation for the light ray deflection under the gravitational field of two Reissner-Nordström black holes. Section 3 is devoted to the detailing of the two-dimensional scattering map describing the light ray deflection due to the binary black hole system and also discusses some of its dynamical properties. Section 4 contains a description of the corresponding escape basins. Section 5 deals with the characterization of the escape basins using the basin entropy and basin boundary entropy related to them, together with the uncertainty dimension, which is a measure of the fractality of such structures. The last Section contains our Conclusions.

2. Basic equations

In this work, we use the notion of gravitational lensing, which is the deflection of light by a gravitational field. In this case, the lens or gravitational body is a black hole. We define how the light behaves in the vicinity of a black hole using a space-time metric $g_{\mu\nu}$ with signature $(-, +, +, +)$ and constants $c = G = 1$. The light rays follow the geodesic

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0, \tag{1}$$

adopting the summation notation and considering a metric for a symmetrically spherical and static space-time with length element,

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{2}$$

where $A(r)$, $B(r)$ and $C(r)$ define the metric produced by the black hole.

If a photon approaches the black hole from infinity with impact parameter b , then the substitution of (2) into (1) gives the following general equation for the geodesics

$$\frac{A(r)B(r)}{[C(r)]^2} \left[\frac{d(\phi)}{dr} \right]^2 + \frac{1}{[V(r)]^2} = \frac{1}{b^2}, \tag{3}$$

where $[U(r)]^{-2} = A(r)/C(r)$. After approaching the black hole with a minimum distance r_0 the photon is deflected and emerges out

in another direction. From (3) this distance is called the critical impact parameter

$$b_c = \left(\frac{C(r_0)}{A(r_0)} \right)^{1/2} \equiv \left(\frac{C_0}{A_0} \right)^{1/2}. \tag{4}$$

On substituting (4) back into (3) it turns out that the angle of deflection is $\alpha = -\pi + I(r_0)$, where

$$I(r_0) = \int_{r_0}^{\infty} dr \left(\frac{B(r)}{C(r)} \right)^{1/2} \left(\frac{A_0}{A(r)} \frac{C(r)}{C_0} \right)^{-1/2}. \tag{5}$$

In the limit of strong gravitational fields [19], we can expand (5) and use the relation between b and r_0 so as to obtain

$$\alpha(b) = -\bar{a} \ln \left(\frac{b}{b_m} - 1 \right) + \bar{c}, \tag{6}$$

where a , \bar{a} , c , and \bar{c} depend on the functions A , B , and C , evaluated at the photosphere radius r_m . Similarly to (4) we have $b_m = [C(r_m)/A(r_m)]^{1/2}$.

The evaluation of the coefficients in (6), must be done carefully since the integral (5) diverges at r_0 . In order to do so, we rewrite (5) as

$$I(r_0) = \int_0^1 dz f(z, r_0) R(z, r_0), \tag{7}$$

where we define auxiliary variables

$$y = A(r), \quad y_0 = A_0, \quad z = \frac{y - y_0}{1 - y_0}, \tag{8}$$

and the following functions

$$N(z, r_0) = \frac{2(B y C_0)^{1/2}}{C A'} (1 - y_0), \tag{9}$$

$$f(z, r_0) = \left\{ y_0 - [(1 - y_0)z + y_0] \frac{C_0}{C} \right\}^{-1/2}. \tag{10}$$

Observe that $N(z, r_0)$ is regular for all values of z and r_0 , where $f(z, r_0)$ diverges for $z \rightarrow 0$. Expanding the integrand of (10) up to second order terms we have

$$f(z, r_0) \approx f_0(z, r_0) = \left(\frac{1}{\gamma z + \beta z^2} \right)^{1/2}, \tag{11}$$

where

$$\gamma = \frac{1 - y_0}{C_0 A'_0} (C'_0 y_0 C_0 A'_0), \tag{12}$$

$$\beta = \frac{(1 - y_0)}{2 C_0^2 A_0^3} [2 C_0 C'_0 A_0'^2 + (C_0 C'_0 - 2 C_0'^2) - C_0 C'_0 y_0 A_0''_0]. \tag{13}$$

Proceeding in this way, we obtain the desired coefficients, namely

$$\bar{a} = \frac{a}{2} = \frac{N(0, r_m)}{2\sqrt{\beta_m}}, \tag{14}$$

$$\bar{c} = c_r + \bar{a} \ln \left(\frac{2\beta_m}{y_m} \right) - \pi, \tag{15}$$

where $\beta_m = \beta(r_m)$ and c_r is the real part of the integral (7).

In this paper, we shall consider Reissner-Nordström black holes, where these functions are given, in a suitable system of units [21], by

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \tag{16}$$

$$B(r) = \frac{1}{A(r)}, \tag{17}$$

$$C(r) = r^2. \tag{18}$$

The Reissner-Nordström metric has two event horizons described by the radii where it diverges, at $r_{\pm} = \frac{3}{4}\{2M \pm [(2M)^2 - \frac{32Q^2}{9}]^{1/2}\}$. Without loss of generality we will rewrite

$$R = \frac{r}{2M}, \quad Q = \frac{q}{2M}. \tag{19}$$

When $Q \geq 0.5$ there is no event horizon and causality violations appears [22,23], so in this work we are going to use only values of $Q < 0.5$.

For the Reissner-Nordström metric, the coefficients (12) and (13) are given, respectively, by

$$\alpha = \left(2 - \frac{3}{R_0} + \frac{4Q^2}{R_0^2}\right) \frac{R_0 - Q^2}{R_0 - 2Q^2}, \tag{20}$$

$$\beta = \left(\frac{3}{R_0} - 1 - \frac{9Q^2}{R_0^2} + \frac{8Q^4}{R_0}\right) \frac{R_0(R_0 - Q^2)^2}{(R_0^3 - 2Q^2)}. \tag{21}$$

The positive radius of the photosphere (equal to the radius of the event horizon) is

$$R_m = \frac{3}{4} \left[1 + \left(1 - \frac{32Q^2}{9}\right)^{1/2}\right], \tag{22}$$

in such a way that

$$\beta_m = [-9 + 32Q^2 - 144Q^4 + 512Q^6 + (9 - 32Q^2)^{1/2} \times (3 + 16Q^2 - 80Q^4)][9(Q - 4Q^3)]^{-2}. \tag{23}$$

The regular term c_R can't be directly analyzed, however we can expand it in terms of Q , giving

$$c_R = c_{R,0} + c_{R,2}Q^2 + O(Q^4), \tag{24}$$

the first term is

$$c_{R,0} = 2 \ln\{6[2 - (3)^{1/2}]\} = 0.9496, \tag{25}$$

and the quadratic correction in Q is

$$c_{R,2} = \frac{8}{9} \left\{ (3)^{1/2} - 4 + \ln\left[6\left(2 - (3)^{1/2}\right)\right] \right\} = -1.5939. \tag{26}$$

From these results, it is straightforward to show that the coefficients (14)-(15) of the expansion for the deflection angle (6) are given by

$$\tilde{a} = \frac{R_m(R_m - 2Q^2)^{1/2}}{[(2 - R_m)R_m^2 - 2Q^2R_m + 8Q^4]^{1/2}}, \tag{27}$$

$$\tilde{c} = -\pi + c_R + \tilde{a} \ln \left\{ 2(R_m - Q^2)^2 \times \frac{[(3 - R_m)R_m^2 - 9Q^2R_m + 8Q^4]}{(R_m - 2Q^2)^3(R_m^2 - R_m + Q^2)} \right\}, \tag{28}$$

$$b_m = \frac{[3 + 9(9 - 32Q^2)^{1/2}]^2}{4(2)^{1/2}[2 - 8Q^2 + (9 - 32Q^2)^{1/2}]^{1/2}}. \tag{29}$$

The scattering of a light ray by a single black hole can now be understood in terms of the impact parameter. A light ray comes from infinity and approaches the black hole with impact parameter b and the direction makes an angle ϕ with the reference axis. If

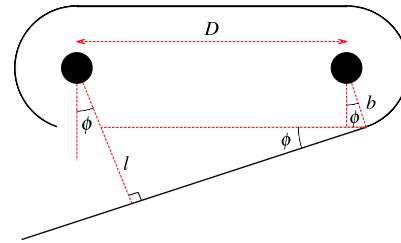


Fig. 1. Scattering map: the trajectory of a light of a light ray on the binary black hole system.

$b < b_m$, then the light ray falls into the black hole and disappears. On the other hand, for this light ray not to escape back to infinity, it is necessary that the impact parameter b be such that the scattering angle α is at least π . We thus impose $b > b_{esc}$, where $\alpha(b_{esc}) = \pi$. Using (6) this means that

$$b_{esc} = b_m \left[\exp\left(\frac{\tilde{c} - \pi}{\tilde{a}}\right) + 1 \right]. \tag{30}$$

3. The scattering map

In this work, we make use of a system of two identical black holes with equal mass. Binary systems rotate around their center of mass and the LIGO Scientific Collaboration has confirmed the existence of this by the observation of gravitational waves from the merging of two black holes [11]. In such systems, it is possible to consider their relative velocity as fixed in space because it is much smaller than c .

When working with a such a system, there is no exact solution of field equations, unlike the case of a single black hole treated in the previous Section. But the non-linear interaction between their gravitational fields can be neglected if the distance D between the black holes is bigger than their Schwarzschild radius $2M$.

In this case, we consider the deflection of light from each black hole in a separate way using the expressions previously found for the Reissner-Nordström metric. In other words, the scattering of light by a given black hole ignores the effect of the other black hole. Similar approximations for the Schwarzschild metric are discussed in detail in Ref. [18]. In particular, they may not hold if we consider the scattering of massive test particles.

The axial symmetry axis is the line connecting the two black holes. Assume that the light rays have zero angular momentum in this direction. The light rays are constrained to move in the plane containing the two black holes. Fig. 1 shows the basic geometry involved in the light scattering by the system. Coming from infinity, a light ray approaches the first black hole with impact parameter b in a direction that makes an angle ϕ with the axial symmetry axis. So for this light ray not to escape back to infinity, it is necessary that $b > b_{esc}$, where b_{esc} is given by (30).

We don't want the light ray to fall in the first black hole as soon as they meet, so the impact parameter must be $b < b_m$. If the light ray is not deflected to infinity by the first black hole, it goes to the other black hole and is again deflected. If not deflected to infinity, it returns to the vicinity of the first black hole, and so on.

For convenience we define discrete variables (b_n, ϕ_n) to be the impact parameter and escape angle respectively. With reference to the symmetry axis in the neighborhood of the n th scattering. Odd (Even) values of n correspond to the second (first) black hole. Using such definitions the differential equations for light scattering reduce to a discrete map.

$$b_{n+1} = b_n + D\phi_n, \tag{31}$$

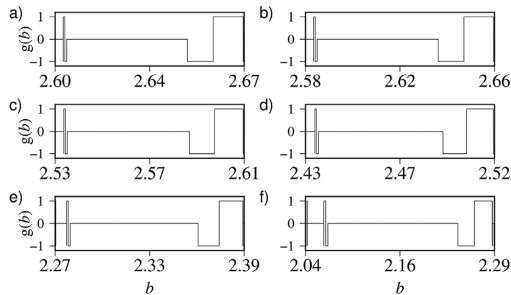


Fig. 2. For $\phi = 0$, we vary the charge from 0 to 0.49 and we plot the corresponding values of the function $g(b)$ (see text for details), a) for 0, b) for 0.1, c) for 0.2, d) for 0.3, e) for 0.4 and f) for 0.49.

$$\phi_{n+1} = \pi + \phi_n - \alpha(b_{n+1}), \text{ mod } 2\pi \quad (32)$$

called the scattering map [18]. Some sign conventions are essential: positive values of b imply that the light ray goes from black hole 1 to 2 (from “right” to “left” in Fig. 1), and negative values signify the opposite; whereas positive values of ϕ correspond to counterclockwise rotations.

4. Escape basins

Our system of black holes fits the model of open dynamical systems whereby trajectories in that system will eventually escape from the phase space region. As there are different ways that the light ray can escape from the two black holes system, we can analyze the initial conditions that make the particles escape through a given exit. This set of initial conditions is called the escape basins. When we have two or more exits, we can point out the boundary that divides the basins [24]. It is long known that conservative dynamical systems with chaotic dynamics have fractal escape basins and fractal escape basin boundaries [1].

To obtain the escape basins we use the scattering map (31)–(32). We isolate the phase space region $\iota = \{0 \leq \phi_0 \leq 2\pi, b_m < b_0 < b_{esc}\}$ in an extensive number of points (a set of initial conditions (b_0, ϕ_0)). We iterate the map and observe which exit they escape to, saving the outcome for each point.

After a number of map iterations, the light ray may fall into one black hole (A), into the other black hole (B), or escapes in the direction of infinity (C). This depends on the initial conditions. All outcomes can be treated as exits. We stop iterating the map once a light ray goes into one of the exits. Accordingly, we denote the corresponding escape basins to be $B(A)$, $B(B)$ and $B(C)$.

Labeling the black holes A and B is immaterial, because their escape basins would be symmetric, i.e. they have the same size. As well it is expected that the dominant basin will be the infinity one (C). Following the analyses requires further magnifications as sequences of exits can't be observed. In order to better understand the exits, we define a function $g(b)$ such that $g(b) = 1$. If the orbit falls into black hole A, $g(b) = -1$, if it falls into B, and $g(b) = 0$ if the orbit escapes to infinity [18].

As we are working with the Reissner-Nordström metric, we want to see how the basin will behave when we have different charge values. As we defined previously, the charge has a limit of $Q \leq 0.5$. Analyzing two regions, defined as $\phi_0 = 0$ and $\phi_0 = \pi$. For the impact parameter we divided $b_m < b < b_{esc}$ in to 10^6 points. For $\phi_0 = 0$ we vary the value of Q from 0 to 0.49. Iterating the map for each value, we plot the escape basin in Fig. 2 a) to f), the

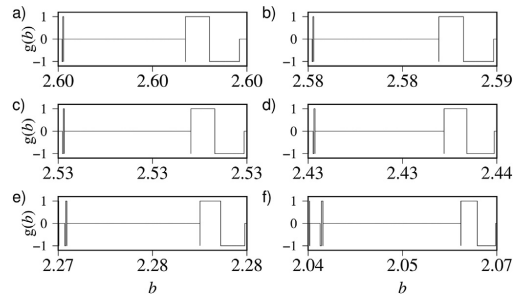


Fig. 3. First approximation for $\phi_0 = 0$ which correspond to the charge value of a) for 0, b) for 0.1, c) for 0.2, d) for 0.3, e) for 0.4 and f) for 0.49.

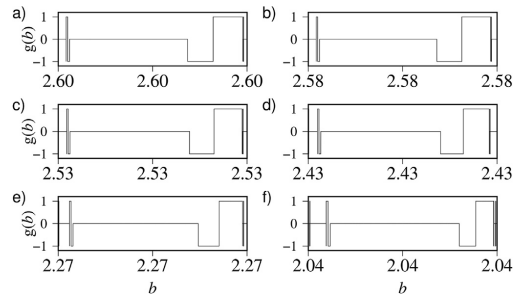


Fig. 4. Second approximation for $\phi_0 = 0$ which correspond to the charge value of a) for 0, b) for 0.1, c) for 0.2, d) for 0.3, e) for 0.4 and f) for 0.49.

pattern maintains the same visual appearance for each charge, but the range of b changes. To assess if the basins are fractals, we make an approximation in the zone where there is a rapid variation of escape direction. So Fig. 3 shows us the respective first approximation. The pattern repeats itself from Fig. 2 with little difference. We take another approximation in Fig. 3 to obtain Fig. 4. Again the pattern is the same as Figs. 2 and 3. For $\phi_0 = \pi$ the results are similar.

That shows us that the system is fractal. For this analysis of the escape basins the metric of Reissner-Nordström is visually indistinguishable to the Schwarzschild. The difference comes from the fact that the particle passes closer to the black hole as the charge increases (b range goes from 2.6 to 2.04).

This can be explained looking at the impact parameter definition as detailed in [25]. It shows that in the study of gravitational lensing $b = D_{ol}\theta$ where θ is the position of the formed image. D_{ol} is the distance between the observer and the lens. We use a black hole as gravitational lens as a base for our study. If the image position results decrease as the charge is increased then the impact parameter results will behave similarly.

5. Dimension and entropy

Given the complex nature of this boundary, we analyze the fractality of the system using two quantitative characterizations of the escape basin boundary. First we determinate the basin entropy and basin boundary entropy. Next we compute the uncertainty exponent of the escape basin boundary by using the uncertainty fraction method.

In this work, we use the proposed method of basin entropies, which quantifies the degree of uncertainty due to the fractality

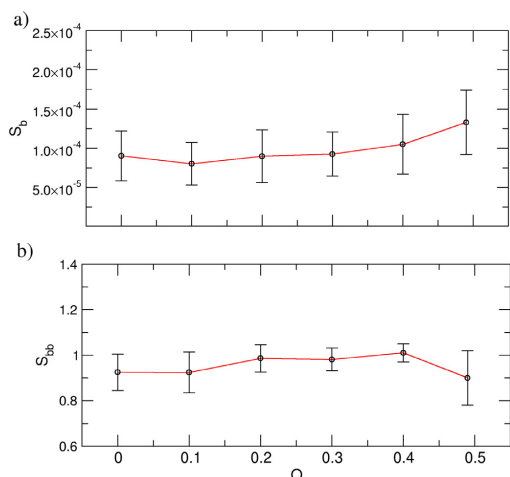


Fig. 5. The basin entropy S_b and the basin boundary entropy S_{bb} for each charge Q when $\phi_0 = 0$.

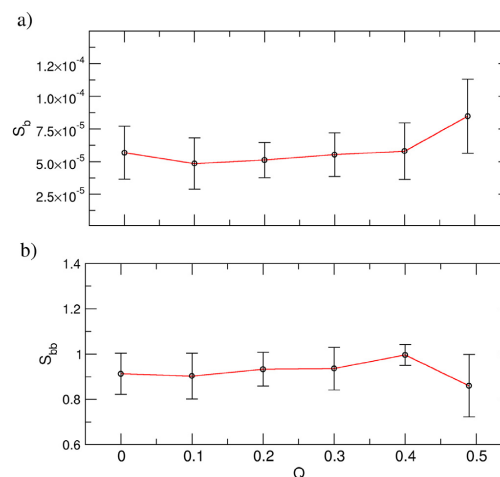


Fig. 6. The basin entropy S_b and the basin boundary entropy S_{bb} for each charge Q when $\phi_0 = \pi$.

of basin. The basic idea of this method is as follows: for a single basin or unique exit, the corresponding probability is equal to unity ($p_A = 1$), hence the basin entropy is zero ($S_b = 0$). This means zero uncertainty, whereas for N_A equiprobable basins or exits, the corresponding probability is $p_A = 1/N_A$, thus the basin entropy is $S_b = \ln N_A$. This gives a completely randomized basin structure.

The basin boundary entropy S_{bb} , quantifies the complexity of the basin boundary. There are also limit situations that separate basins with smooth boundaries from those with fractal boundaries. Suppose that the basins were separated by a smooth boundary, then the maximum value possible is $S_{bb} = \ln 2$. This would be a case of only two basins, where every box computed in the boundary contains equal proportions. If $S_{bb} > \ln 2$, the basin boundary is fractal. This is a sufficient but not a necessary criterion for fractality, i.e., there are fractal boundaries even if $S_{bb} < \ln 2$.

We computed the basin entropies of $\phi_0 = 0$ and $\phi_0 = \pi$. We considered boxes with 4, 5, 8 and 10 initial conditions per box and then we iterated each initial condition for a maximum number of 10^4 iterations of the map. We excluded from the statistics those initial conditions leading to orbits that do not escape. For $\phi_0 = 0$ and $\phi_0 = \pi$, we computed the probabilities of points into each box corresponding to the exits A, B and C. Thus, the entropy entropy for each box is

$$S = -p_A \log p_A - p_B \log p_B - p_C \log p_C. \quad (33)$$

Then, the total basin entropy is the summation of the basin entropy of each box divided by the total number of boxes N : $S_b = S/N$ and the basin boundary entropy is $S_{bb} = S_{bb}/N_b$, where N_b is the number of boxes that containing points of the boundary.

Fig. 5 show the results. For each value of charge Q for $\phi_0 = 0$ then (a) shows the basin entropy and (b) the basin boundary entropy of the escape basin. Fig. 6 show the results of S_b in (a) and S_{bb} in (b) corresponding to the case $\phi = \pi$. The results suggests that the basin entropy and the basin boundary entropy take on the same values for each value of charge Q , within the uncertainty of our measurements.

The corresponding values are $S_b(\phi_0 = 0) = 9.846 \times 10^{-5} \pm 3.330 \times 10^{-5}$ and $S_b(\phi_0 = \pi) = 5.90 \times 10^{-5} \pm 2.00 \times 10^{-5}$ for the

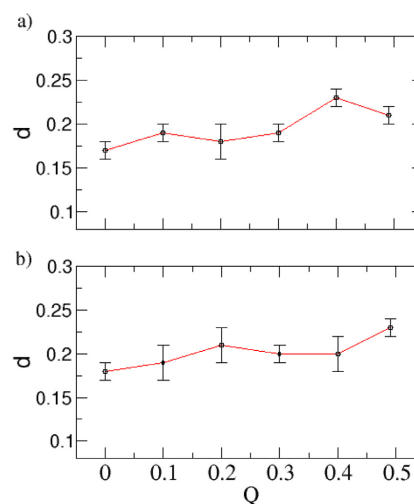


Fig. 7. Dimensions of each basin as the charge Q changes for a) $\phi_0 = 0$ and b) $\phi_0 = \pi$.

basin entropy. $S_{bb}(\phi_0 = 0) = 0.954 \pm 0.070$ and $S_{bb}(\phi_0 = \pi) = 0.923 \pm 0.090$ for the basin boundary entropy. For $\phi_0 = 0$ and $\phi_0 = \pi$ the value of S_b is low, and accordingly, $S_{bb} > S_b$, since the number of boxes containing the boundary is generally less than the total number of boxes. However, $S_{bb} > \ln 2$, i.e. the basin boundary is fractal for two cases.

As a general trend, the degree of complexity of the basin increases with the charge of the black holes Q . We can observe in Fig. 5b) that the basin boundary entropy increases as the charge goes from 0 to 0.4 and suffers a decrease afterwards for $Q = 0.49$. The same happens in Fig. 6b). The increase of basin entropies

means that their structures become progressively more mixed as the charge of the black holes increases.

To go further and confirm the fractality of the system we computed the uncertainty dimension of the escape basin boundary by using the uncertainty fraction method. The uncertainty dimension d quantifies the final-state uncertainty of the points belonging to basin boundary. Thus, we obtained the fraction of uncertain initial conditions $f(\epsilon)$ varying the uncertainty (ϵ) for the two cases of ϕ_0 varying the charge Q . After this, we obtain the uncertainty exponent (α). Since $\alpha = K - d$, where $K = 1$, in our case, a smooth boundary with $d = 0$, has $\alpha = 1$, whereas $0 < \alpha < 1$ characterizes a fractal boundary.

We computed the uncertainty dimension of the escape basin boundary for $\phi_0 = 0$ and $\phi_0 = \pi$, the results being shown in Fig. 7a) and b), respectively. The variable parameter is the charge Q . The maximum dimension value for $\phi_0 = 0$ occurs in $Q = 0.4$ and has $d = 0.218 \pm 0.005$. The corresponding maximum dimension value for $\phi_0 = \pi$ occurs in $Q = 0.49$ and has $d = 0.244 \pm 0.012$. This therefore suggests that the escape basin boundaries are fractals and consistent with the results obtained for the basin entropies.

6. Conclusion

A system of two black holes yields important information about how the behavior of the universe. Investigating gravitational waves is key to unlocking this information and so analysis of binary systems is crucial. We studied how light behaves when enters a system of two black holes. The distance between the black holes is such, that the system is simplified and we can analyze the behavior in each black hole separately. Reissner-Nordström black holes are static and have the charge as one of their characteristics making it closer to a real black hole. In this work, we varied the charge from 0 (Schwarzschild) to 0.49 which is the limit for a Reissner-Nordström black hole with event horizon.

The black holes behave as a system but work individually. Strong gravitational lensing allows us to describe the light movement by a two-dimension map. We chose two fixed points for the escape angle. We ran the map giving the initial conditions for the parameter of impact. The light ray can escape in three directions; into the first black hole, into the second black hole or escaping to infinity.

We plotted the escape for each initial condition and analyzed the patterns exhibited. We observed zones where the region of escape varies rapidly and where chaos exists. We did an approximation exactly at the chaos zones and saw that the pattern repeats itself. Another approximation gives the same results. This indicates that the system is fractal.

It is important to highlight that all the plots have the same structure as the Schwarzschild case, but with a different range of the impact parameter. This is explained by the lensing study that shows that the position of the images produced by Reissner-Nordström black holes are closer to each other than the Schwarzschild. As the charge increases, they get closer and closer. The impact parameter is proportional to the image position and so we can see that as the charge increases then the impact parameter decreases.

We considered two approaches to confirm the fractal characteristic of the system. Firstly, we considered the entropy method where if the value of the basin boundary is greater than $\ln 2$, then the system is fractal, giving us a parameter of comparison. For every case proposed, our results show that the basin boundary is greater than $\ln 2$. Secondly, we considered the dimension where $d = 0$ is smooth and $d = 1$ total fractal. Our results again confirm that the system is fractal and that the small value of d results from having a very smooth area where the light ray escapes to infinity.

In this paper, we analyzed the binary Reissner-Nordström black hole system. If we iterate a two-dimension map, varying the charge values, then we discovered that the system has fractal characteristics and that there is no major difference structurally from Reissner-Nordström to Schwarzschild when within the given parameters for a black hole with event horizon to exist.

Declaration of Competing Interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

CRediT authorship contribution statement

Edson E. de Souza Filho: Conceptualization, Data curation, Formal analysis, Investigation, Methodology, Resources, Software, Supervision, Validation, Visualization, Writing - original draft. **Amanda C. Mathias:** Data curation, Formal analysis, Investigation, Validation, Visualization, Writing - original draft. **Ricardo L. Viana:** Conceptualization, Funding acquisition, Methodology, Project administration, Resources, Supervision, Validation, Visualization.

Acknowledgments

The author acknowledges the valuable help of Adriane da S. Reis, Eduardo L. Brugnago and Davis McComb. This document is the result of the research project funded by the [Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES](#) [(Proc. 88882.344169/2015-01), (Proc. 88887.320059/2019-00)], [Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq](#) (Proc. 301019/2019-3).

References

- [1] Aguirre J, Viana RL, Sanjuán MAF. Fractal structures in nonlinear dynamics. *Rev Mod Phys* 2009;81:333–86. doi:10.1103/RevModPhys.81.333.
- [2] Péntek A, Toroczkai Z, Tél T, Grebogi C, Yorke JA. Fractal boundaries in open hydrodynamical flows: Signatures of chaotic saddles. *Phys Rev E* 1995;51:4076–88. doi:10.1103/PhysRevE.51.4076.
- [3] Dettmann CP, Frankel NE, Cornish NJ. Fractal basins and chaotic trajectories in multi-black-hole spacetimes. *Phys Rev D* 1994;50:R618–21. doi:10.1103/PhysRevD.50.R618.
- [4] Aguirre J, Vallejo JC, Sanjuán MAF. Wada basins and chaotic invariant sets in the Hénon-Heiles system. *Phys Rev E* 2001;64:066208. doi:10.1103/PhysRevE.64.066208.
- [5] Barrio R, Blesa F, Serrano S. Fractal structures in the Hénon-Heiles hamiltonian. *EPL* 2008;82(1):10003. doi:10.1209/0295-5075/82/10003.
- [6] Altmann EG, Leitão JC, Lopes JV. Effect of noise in open chaotic billiards. *Chaos* 2012;22(2):026114. doi:10.1063/1.3697408.
- [7] Hansen M, da Costa DR, Caldas IL, Leonel ED. Statistical properties for an open oval billiard: an investigation of the escaping basins. *Chaos Solitons Fractals* 2018;106:355–62. doi:10.1016/j.chaos.2017.11.036.
- [8] Mathias AC, Viana RL, Kroetz T, Caldas IL. Fractal structures in the chaotic motion of charged particles in a magnetized plasma under the influence of drift waves. *Physica A* 2017;469(C):681–94. doi:10.1016/j.physa.2016.11.049.
- [9] Mathias A, Kroetz T, Caldas I, Viana R. Chaotic magnetic field lines and fractal structures in a tokamak with magnetic limiter. *Chaos Solitons Fractals* 2017;104:588–98. doi:10.1016/j.chaos.2017.09.017.
- [10] Misner CW, Thorne KS, Wheeler JA. *Gravitation*. WH Freeman and Co San Francisco; 1973. ISBN 0716703440,978-0716703440
- [11] Abbott BP, Abbott R, Abbott TD, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys Rev Lett* 2016;116:061102. doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102. LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration
- [12] Daza A, Shipley JO, Dolan SR, Sanjuán MAF. Wada structures in a binary black hole system. *Phys Rev D* 2018;98:084050. doi:10.1103/PhysRevD.98.084050.
- [13] Majumdar SD. A class of exact solutions of Einstein's field equations. *Phys Rev* 1947;72:390–8. doi:10.1103/PhysRev.72.390.
- [14] Papapetrou A. A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge-distribution. *Proc R Irish Acad Sect A* 1945;51:191–204.
- [15] Contopoulos G. Asymptotic curves and escapes in hamiltonian systems. *Astron Astrophys* 1990;231(1):41–55.
- [16] Contopoulos G, Kandrup HE, Kaufmann D. Fractal properties of escape from a two-dimensional potential. *Physica D* 1993;64(1):310–23. doi:10.1016/0167-2789(93)90262-Y.

- [17] Cunha PVP, Herdeiro CAR. Shadows and strong gravitational lensing: a brief review. *Gen Relativ Gravitation* 2018;50(4):42. doi:10.1007/s10714-018-2361-9.
- [18] de Moura APS, Letelier PS. Scattering map for two black holes. *Phys Rev E* 2000;62:4784–91. doi:10.1103/PhysRevE.62.4784.
- [19] Bozza V. Gravitational lensing in the strong field limit. *Phys Rev D* 2002;66:103001. doi:10.1103/PhysRevD.66.103001.
- [20] Daza A, Wagemakers A, Georgeot B, Guéry-Odelin D, Sanjuán MAF. Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Sci Rep* 2016;6(1):31416. doi:10.1038/srep31416.
- [21] Chandrasekhar S. *The mathematical theory of black holes*. OUP Oxford, Oxford; 1998.
- [22] Carter B. Global structure of the kerr family of gravitational fields. *Phys Rev* 1968;174:1559–71. doi:10.1103/PhysRev.174.1559.
- [23] Hawking S, Ellis GFR. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Cambridge; 1973.
- [24] Bleher S, Grebogi C, Ott E, Brown R. Fractal boundaries for exit in hamiltonian dynamics. *Phys Rev A* 1988;38:930–8. doi:10.1103/PhysRevA.38.930.
- [25] Eiroa EF, Romero GE, Torres DF. Reissner-Nordström black hole lensing. *Phys Rev D* 2002;66:024010. doi:10.1103/PhysRevD.66.024010.