

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GUILHERME AUGUSTO PIANEZZER

MÉTODO PARA A OBTENÇÃO DAS PROPRIEDADES EFETIVAS DO
CONCRETO SOB A AÇÃO DA REAÇÃO ÁLCALI-SÍLICA

CURITIBA

2018

GUILHERME AUGUSTO PIANEZZER

MÉTODO PARA OBTENÇÃO DAS PROPRIEDADES EFETIVAS DO
CONCRETO SOB AÇÃO DA REAÇÃO ÁLCALI-SÍLICA.

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Programação Matemática, linha de pesquisa em Análise Numérica do PPGMNE, do Departamento de Matemática, Setor de Ciências Exatas e do Departamento de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como parte das exigências para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Liliana Madalena Gramani

Co-Orientador: Prof. Dr. Eloy Kaviski

CURITIBA

2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

P581m

Pianezzer, Guilherme Augusto

Método para obtenção das propriedades efetivas do concreto sob ação da reação álcali-silica / Guilherme Augusto Pianezzer. – Curitiba, 2018.

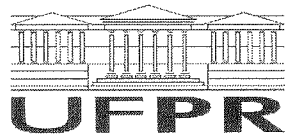
Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,
Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2018.

Orientador: Lílana Madalena Gramani – Coorientador: Eloy Kaviski.

1. Concreto. 2. Homogeneização (Equações diferenciais). 3. Materiais de construção – Testes. 4. Reação álcali-silica. I. Universidade Federal do Paraná. II. Gramani, Lílana Madalena. III. Kaviski, Eloy. IV. Título.

CDD: 620.136

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS
EM ENGENHARIA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **GUILHERME AUGUSTO PIANEZZER** intitulada: **MÉTODO PARA OBTENÇÃO DAS PROPRIEDADES EFETIVAS DO CONCRETO SOB AÇÃO DA REAÇÃO ALCALI-SILICA**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 27 de Agosto de 2018.

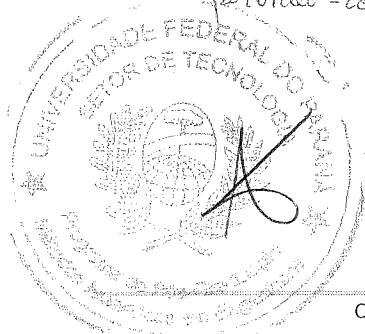
LILIANA MADALENA GRAMANI
Presidente da Banca Examinadora

WELLINGTON MAZER
Avaliador Externo

FÁBIO ANDRÉ NEGRI BALBO
Avaliador Externo *por video-conferência*

ADILANDRI MÉRCIO LOBEIRO
Avaliador Externo
por video - conferência

ANSELMO CHAVES NETO
Avaliador Interno



A você, paciente leitor.

O interesse que tenho em acreditar numa coisa não é prova da
existência dessa coisa.

Voltaire

RESUMO

O concreto, quando afetado pela umidade, se torna sujeito à reações químicas indesejadas como a reação álcali-sílica. Tal reação se inicia em sua camada mesoscópica (camada intermediária entre a camada macroscópica e a camada microscópica) e se propaga pelo material a medida que os anos passam. Com isto, o material sofre danificação e posteriormente fissuração, o que ocasiona mudança em suas propriedades mecânicas efetivas. Considerando os artigos publicados na literatura até o início de 2018, observa-se que o modelo de danificação para o concreto causado pela reação alcali-sílica ainda não é satisfatório. Essa tese buscou apresentar uma nova metodologia para previsão da perda de rigidez do concreto, a partir de modelos de homogeneização que consideram os agregados graúdos e o gel formado pela reação química como inclusões para a utilização dos métodos, além da associação com um modelo de difusão para o comportamento do gel. Ao longo do trabalho, serão discutidos os métodos mais atuais de homogeneização, como o método de Mori-Tanaka e o método autoconsistente, além de métodos clássicos como o método de Reuss e de Voigt que são considerados como limites inferiores e superiores para a previsão da rigidez. Tais métodos de homogeneização podem ser utilizados para simulação do comportamento destes parâmetros ao longo do tempo, pois foram vinculados a um modelo de desenvolvimento e criação do gel. Os resultados mostram que a metodologia proposta apresenta uma estimativa para o cálculo das propriedades efetivas do concreto sob a ação da reação álcali-sílica. A proposta desta tese é, portanto, utilizar a modelagem da reação em termos de concentração de gel ao longo do tempo para associá-la a um modelo de homogeneização - como a homogeneização pelo método de Mori-Tanaka - para prever o comportamento das propriedades efetivas ao longo do tempo.

Palavras-chave: Reação Álcali-Sílica, Método de Mori-Tanaka, Danificação de materiais, Teoria de homogeneização, Concreto.

ABSTRACT

Concrete, caused by moisture, becomes subject to a series of undesired reactions as an alkali-silica solution which is a reaction that begins in the mesoscopy scale and propagates through the material as the years pass. By doing so, the material suffers damage, which is significant in its effective properties. So far, no model of damage to the individual being performed by the alkali-silica reaction has been developed in a satisfactory way. This thesis sought to present a new methodology to predict the loss of rigidity of the model, in view of the homogenization modeling that the large aggregates and the geometry model the behavior of the gel. Along the work, it is discussed methods of homogenization, the method of Mori-Tanaka and the self-consistent method, besides methods on the board and method of Reuss the rigidity and method of Reuss. Such homogenization methods can be used to model the functions over time, since they were linked to a model of development and creation of gel. The results show that the proposed analysis is an estimate for the calculation of the effective properties of the concrete under the action of the alkali-silica reaction.

Keywords: Alkali-Silica Reaction, Mori-Tanaka Method, Materials Damage, Homogenization Theory, Concrete.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1– VETOR DESLOCAMENTO PARA UMA PARTÍCULA P (LAI, 2010).	27
FIGURA 2.2– DESLOCAMENTO ENTRE DOIS ELEMENTOS PRÓXIMOS P E Q (LAI, 2010)	28
FIGURA 2.3– CORPO SOBRE A AÇÃO DE FORÇAS EXTERNAS (TIMOSHENKO, 1951).	34
FIGURA 2.4– TETAEDRO PARA VERIFICAÇÃO QUE O TENSOR DE TENSÕES DE CAUCHY É UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR (LAI, 2010).	35
FIGURA 2.5– RETÂNGULO INFINITESIMAL PARA ANÁLISE DA SIMETRIA DO TENSOR DE TENSÕES (LAI, 2010).	37
FIGURA 2.6– ELEMENTO DE VOLUME REPRESENTATIVO (CAVALCANTE,2008)	46
FIGURA 2.7– MATERIAL SUJEITO A UMA TENSÃO PRESCRITA. ADAPTADO DE (LI; WANG, 2008)	53
FIGURA 2.8– HOMOGENEIZAÇÃO PROPOSTA POR ESHELBY. ADAPTADO DE (LI;WANG, 2008)	54
FIGURA 2.9– MATERIAL SUJEITO A UMA DEFORMAÇÃO PRESCRITA. ADAP- TADO DE (LI;WANG,2008)	55
FIGURA 2.10 HOMOGENEIZAÇÃO PROPOSTA POR ESHELBY. ADAPTADO DE (LI;WANG,2008)	56
FIGURA 3.1– CAPTION FOR LOF	63
FIGURA 3.2– CAPTION FOR LOF	64
FIGURA 3.3– PROCESSO DA MICROFISSURA ATÉ O ROMPIMENTO DO MA- TERIAL (RASSY, 2012)	66
FIGURA 3.4– FORMAÇÃO, EXPANSÃO DO GEL E FISSURA DO AGREGADO E PASTA DO CIMENTO (BALBO <i>et al.</i> , 2014)	67
FIGURA 3.5– REAÇÃO ALCALI-SÓLICA	68
FIGURA 4.1– ALGORITMO ESTRUTURADO PARA CONCEPÇÃO DO MODELO.	69

FIGURA 4.2- FLUXOGRAMA PARA GERAÇÃO DOS AGREGADOS	73
FIGURA 4.3- ELEMENTO REPRESENTATIVO DO CONCRETO COM 60% DE SUA COMPOSIÇÃO COMO AGREGADOS GRAÚDOS.	74
FIGURA 4.4- MÓDULO DE ELASTICIDADE PARA DIFERENTES VALORES DE CONCENTRAÇÃO DE AGREGADOS.	83
FIGURA 4.5- CONCENTRAÇÃO DOS REAGENTES E PRODUTOS ENVOLVI- DOS NA REAÇÃO.	85
FIGURA 4.6- DISTRIBUIÇÃO DE CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 1 ANO. ...	85
FIGURA 4.7- MODELAGEM REALIZADA NA TESE.	86
FIGURA 4.8- CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 1 ANO.	88
FIGURA 4.9- CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 3 ANOS.	89
FIGURA 4.10 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 5 ANOS.	90
FIGURA 4.11 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 7 ANOS.	90
FIGURA 4.12 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 9 ANOS.	91
FIGURA 4.13 ELASTICIDADE EFETIVA DO MATERIAL PARA $F_{AG} = 30\%$	92
FIGURA 4.14 MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO DE MORI-TANAKA APLICADO PARA $F_{AG} = 30\%$	93
FIGURA 4.15 DANIFICAÇÃO DO MATERIAL AO LONGO DO TEMPO $F_{AG} = 50\%$. 93	
FIGURA 4.16 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 1 ANO.	94
FIGURA 4.17 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 3 ANOS.	95
FIGURA 4.18 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 5 ANOS.	95
FIGURA 4.19 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 7 ANOS.	96
FIGURA 4.20 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 9 ANOS.	96
FIGURA 4.21 DANIFICAÇÃO DO MATERIAL AO LONGO DO TEMPO $F_{AG} = 40\%$. 97	
FIGURA 4.22 ELASTICIDADE EFETIVA DO MATERIAL PARA $F_{AG} = 40\%$	98
FIGURA 4.23 MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO DE MORI-TANAKA APLICADO PARA $F_{AG} = 40\%$	98
FIGURA 4.24 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 1 ANO.	99

FIGURA 4.25 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 3 ANOS.	100
FIGURA 4.26 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 5 ANOS.	100
FIGURA 4.27 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 7 ANOS.	101
FIGURA 4.28 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 9 ANOS.	101
FIGURA 4.29 DANIFICAÇÃO DO MATERIAL AO LONGO DO TEMPO $F_{AG} = 30\%$	102
FIGURA 4.30 ELASTICIDADE EFETIVA DO MATERIAL PARA $F_{AG} = 30\%$	102
FIGURA 4.31 MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO DE MORI-TANAKA APLICADO PARA $F_{AG} = 30\%$	103
FIGURA 4.32 DANIFICAÇÃO QUÍMICA COMPARATIVA	103
FIGURA 4.33 CONCENTRAÇÃO DE GEL APÓS 1 ANO.	104

LISTA DE TABELAS

TABELA 6 – VARIÁVEIS ENVOLVIDAS NO MODELO DE VOIGT.	47
TABELA 9 – RESULTADO DA ANÁLISE GRANULOMÉTRICA UTILIZADO (WRIGGERS, MOFTAH, 2006)	71

LISTA DE SÍMBOLOS

E	Coeficiente de Elasticidade
\mathbf{E}	Tensor de coeficiente de Elasticidade
\mathbf{E}_0	Tensor de coeficiente de Elasticidade Inicial ou das deformações infinitesimais
D	Danificação
$\mathbf{r}(t)$	Posição de uma partícula no instante t
$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$	Posição de uma partícula
t_0	Tempo inicial
e_1, e_2, e_3	Base do espaço vetorial
P	Partícula
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$	Deslocamento da partícula x no instante de tempo t
∇	Gradiente
θ	Ângulo entre dois vetores
\mathbf{C}	Tensor de deformação de Cauchy-Green
\mathbf{t}_n	Vetor de tensões
\mathbf{F}	Força
m	Massa
A	Área

ν	Coeficiente de Poisson
\mathbf{M}	Momento angular
\mathbf{p}	Momento linear
\mathbf{T}	Tensor das tensões de Cauchy
G	Módulo de Elasticidade Transversal
\mathbf{M}_a	Torque
σ	Vetor de Tensões
\mathbf{S}	Tensor de elasticidade
λ	Primeira constante de Lamé
μ	Segunda constante de Lamé
Ω	RVE - Elemento Representativo do Concreto
$\partial\Omega$	Superfície do RVE
f_i	Fração Volumétrica da inclusão
f_m	Fração Volumétrica da matriz
\mathbf{C}_i	Tensor de elasticidade da inclusão
\mathbf{C}_m	Tensor de elasticidade da matriz
\mathbf{C}_h	Tensor de elasticidade efetivo ou homogeneizado
A_p	Área de material
A	Área total do elemento representativo do concreto

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
1.1 JUSTIFICATIVA	19
1.2 OBJETIVOS	21
1.2.1 Objetivo Geral	21
1.2.2 Objetivos Específicos	21
1.3 ESTRUTURA DA TESE	22
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE TÉCNICAS DE HOMOGENEIZAÇÃO	23
2.1 MODELAGEM DOS CONSTITUINTES	25
2.2 TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO	45
2.2.1 Modelo de Voigt	47
2.2.2 Modelo de Reuss	48
2.2.3 Tensões e deformações médias	48
2.2.4 Princípio de equivalência de Eshelby	52
2.3 TENSORES DE CONCENTRAÇÃO	57
2.4 MÉTODO AUTO-CONSISTENTE	59
2.5 MÉTODO DE MORI-TANAKA	60
3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE O CONCRETO E A REAÇÃO ÁLCALI-SÍLICA	62
3.1 CONCRETO	62
3.1.1 Argamassa	63
3.1.2 Agregados Graúdos	64
3.2 CONCRETO AFETADO PELA REAÇÃO ÁLCALI-AGREGADO	66
3.2.1 Reação álcali-sílica	67
4 MATERIAIS, MÉTODOS E RESULTADOS ENCONTRADOS	69

4.1	RESULTADOS ENCONTRADOS SEM A PRESENÇA DO GEL	74
4.1.1	Homogeneização pelo Método de Voigt	77
4.1.2	Homogeneização pelo Método de Reuss	79
4.1.3	Homogeneização pelo Método Auto-Consistente	80
4.1.4	Homogeneização pelo Método de Mori-Tanaka	82
4.1.5	Resultados para outras concentrações de agregados	83
4.2	APLICAÇÃO DOS MÉTODOS COM A PRESENÇA DO GEL	84
4.3	RESULTADOS ENCONTRADOS	86
4.3.1	Resultados para $f_{ag} = 50\%$	87
4.3.2	Resultados para $f_{ag} = 40\%$	94
4.3.3	Resultados para $f_{ag} = 30\%$	99
4.4	CASO COMPARATIVO PARA DIVERSOS VALORES DE F_{AG}	103
5	CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	105
5.1	CONCLUSÕES	105
5.2	TRABALHOS FUTUROS	106
	REFERÊNCIAS	107

1 INTRODUÇÃO

Entre as estruturas essenciais nos países, as usinas hidrelétricas, geradoras de energia renovável, se apresentam como chave para o desenvolvimento econômico. As principais, como a Usina Hidrelétrica de Itaipu ou a Usina Hidrelétrica de Tucuruí possuem barragens construídas, onde o principal material envolvido é o concreto (RASSY, 2012). Para o uso nestes casos, a escolha deste material se deve ao fato de que apresenta características favoráveis em relação a outros materiais, como a resistência à compressão, a durabilidade, a facilidade com que as mais diversas formas estruturais sejam geradas e o baixo consumo de energia relativo aos diversos materiais que poderiam ser utilizados.

Entretanto, o concreto, quando afetado pela umidade, se torna sujeito à reações químicas indesejadas como a Reação Álcali-Agregado (WRIGGERS, MOFTAG, 2006). Tal reação se inicia na camada mesoscópica¹ e se propaga pelo material a medida que os anos passam. Com isto, o material sofre mudanças em suas propriedades efetivas o que dificulta a simulação em projetos estruturais realistas.

Essa mudança nas propriedades mecânicas efetivas de um material é descrito na literatura como danificação, o qual é causada pelos mais diversos fatores, como a própria carga a qual o material está submetido, reações químicas indesejadas, além de outros fatores externos. Para o caso do módulo de elasticidade, parâmetro que mede a rigidez de um material sólido, a danificação é apresentada como uma variável D que afeta diretamente essa grandeza, em função de um módulo de elasticidade inicial E_0 obtido sem a ação da danificação.

Os modelos de previsão de danificação, como é o caso daquele apresentado em

¹ A escala mesoscópica está entre a escala microscópica: 10^{-6} m a 10^{-4} m e a escala macroscópica, tendo suas dimensões definidas entre 10^{-4} m e 10^{-2} m

(RASSY, 2012) fazem simulações para a variável dano, ou como é o caso do modelo de Mazars para danificação de materiais sujeitos a cargas permanentes. Além disto, estudos sobre a danificação de materiais a partir desta variável estão presentes na literatura. (JIE; XIAODAN, 2010) descrevem a teoria de danificação para a análise de estruturas não lineares. Tal teoria é baseada no princípio de energia livre de Helmholtz e a variável dano é simulada numericamente para cada célula específica. (PITUBA; PROENCA, 2005) apresentaram aspectos relativos a formulação teórica e a simulação numérica de modelos constitutivos para o concreto, em especial tratando a danificação pelo modelo de Mazars e pelo modelo de La Borderie para o concreto submetido a carregamento axial. Entretanto, tal método não se mostrou adequado para a simulação da reação álcali-agregado, visto que ainda não foi descrito uma possível contribuição para esta grandeza em termos de uma danificação química (BALBO *et al.*, 2014). Ou seja, quando a danificação acontece por vias físicas tais modelos tem se mostrado satisfatórios, mas não é o caso quando outros tipos de fatores estão envolvidos.

A reação alcali-agregado acontece quando os álcalis presentes no concreto reagem com agregado reativo formando um gel que, na presença de água, se expande preenchendo os vazios encontrados no concreto. Tal gel absorve água e se expande, levando a formação de microfissuras que se propagam até a danificação do material. (BALBO *et al.*, 2014) desenvolveram um modelo teórico que representa a evolução da reação álcali-sílica (RAS). Tal modelo foi composto por duas etapas, onde na primeira etapa são estudadas as reações químicas que dão origem ao gel deletério proveniente da RAS, através de uma análise a partir de um sistema de equações diferenciais específico, que é resolvido para obter a quantidade de gel gerada a medida que o tempo passa. Na segunda etapa, (BALBO *et al.*, 2014) criaram um modelo de difusão para o gel para obter a distribuição da concentração de gel depois de um longo período de tempo.

A reação alcali-sílica ocorre quando o concreto está sujeito a umidade e seus efeitos levam a ampliação da danificação do concreto ao passar do tempo. Em usinas

hidrelétricas, além de outras estruturas sujeitas a umidade, este é um problema recorrente que leva ao desenvolvimento de fissuras e efeitos indesejáveis, como a falha mecânica de estruturas.

O estudo da reação álcali-sílica foi realizado anteriormente por (BAZANT; STEFFENS, 2000) relatando em seu artigo, que estudos sobre a modelagem matemática da reação ainda estão em falta, de maneira que desenvolveu um dos primeiros modelos de simulação para a reação. Para isso fez uma análise da cinética da reação química através de um modelo de difusão e analisou a influência do tamanho e formato dos agregados na velocidade da reação.

(COMI; FEDELE; PEREGO, 2009) desenvolveram um modelo químico e térmico para prever a danificação causada no concreto pela reação álcali-sílica. Neste caso, utilizaram cálculos sobre a variável dano através de modelos próprios para a tensão total aplicados para um elemento representativo do concreto na mesoescala.

Portanto, quando analisado o concreto de usinas hidrelétricas, além de estar submetido a um alto carregamento e a um elevado nível de tensões tangenciais, a presença de umidade leva a geração de um gel formada pela reação alcali-agregado. Ao analisar os poucos trabalhos publicados sobre o tema (BAZANT; STEFFENS, 2000), (COMI; FEDELE; PEREGO, 2009), (COMBY-PEIROT *et al.*, 2009), verifica-se que o concreto afetado por este gel ainda não foi simulado adequadamente, quanto mais utilizando uma técnica de homogeneização que leve em conta a evolução dele ao longo do tempo.

A teoria de homogeneização tem sido uma aliada para prever o comportamento de estruturas complexas. Os métodos de homogeneização descritos na literatura, como é o caso de (LI, WANG, 2008), permitem fazer previsões sobre as propriedades efetivas do material estudado partindo dos componentes (compósitos) que formam o material. Através de algumas informações, como tipo, formato e quantidade dos constituintes, além de suas propriedades, pode-se encontrar resultados para, neste caso, as propriedades efetivas do concreto.

Assim sendo, seria realmente necessário realizar uma modelagem de danificação a partir desta variável dano auxiliar para prever o desenvolvimento das propriedades efetivas? Um modelo de homogeneização, que considere o gel formado pela reação álcali-sílica como um constituinte, pode ser capaz de prever o desenvolvimento das propriedades efetivas do material a medida que o tempo passa?

Entre outros trabalhos, (DASCALU; BILBIE; AGIASOFITOU, 2007) apresentaram um artigo descrevendo como construir um modelo de danificação micro-mecânico para descrever o efeito do tamanho dos agregados nos sólidos. Este modelo foi desenvolvido em duas escalas e descreveu o comportamento geral das propriedades elásticas de alguns materiais.

As técnicas de homogeneização também estão sendo exaustivamente refinadas. A técnica de Mori-Tanaka utiliza o tensor de Eshelby para diversos tipos de inclusões. (HUANG; ZOU; ZHENH, 2009), apresenta a expressão de um tensor para um inclusão não-circular em duas dimensões. Problemas específicos necessitam de diversos tipos de tensores que explicitam o tipo de material utilizado.

Um dos autores que contribuíram ao desenvolvimento das teorias de comportamento elástico de materiais multifásicos foi (HASHIN; SHTRIKMAN, 1963), o qual utilizou princípios variacionais para estimar os valores mínimos e máximos do módulo de elasticidade do material.

O método de Mori-Tanaka é um método de homogeneização que pode ser utilizado para prever outras propriedades efetivas, como foi o caso publicado em (STRANSKY *et al.*, 2011). Tais autores utilizaram o método para estimar a condutividade térmica de alguns materiais isotrópicos.

Alguns modelos apresentam o desenvolvimento do gel ao longo do tempo, como é o caso (BALBO *et al.*, 2014) que simula como o gel se desenvolve. Assim, com este tipo de trabalho realizado, é possível utilizá-lo como entrada para um modelo de previsão da danificação geral presente no concreto.

Entre 2015 e 2018, outras simulações foram desenvolvidas. (TIMOTHY; NGUYES;

MESCHKE, 2015) apresentaram um modelo computacional desenvolvido em multi-escala considerando a influência da topologia dos poros e a presença de microfaturas no elemento representativo do concreto. O objetivo dos autores foi avaliar a propagação de fraturas ao longo do material. (REZAKHANI; ALNAGGAR; CUSATIS, 2016), os autores desenvolveram um modelo considerando o modelo LDPM (Lattice Discrete Particle Model) o qual representa o concreto no nível dos agregados graúdos. De acordo com as conclusões dos autores, foi possível verificar que os métodos de homogeneização replicam de forma correta o comportamento real do material homogeneizado, inclusive quando considera-se a reação alcali-sílica. Mais recentemente, em 2018, (AURELIA *et al.*, 2018) apresentaram um modelo para prever o módulo de elasticidade considerando a homogeneização em várias camadas para mostrar que a perda do módulo de elasticidade ocorre em função da densidade do gel formado pela reação. O modelo proposto pelos autores super estimou os valores de elasticidade homogeneizada do material.

A proposta desta tese é, portanto, utilizar a modelagem da reação em termos de concentração de gel ao longo do tempo para associá-la a um modelo de homogeneização - como a homogeneização pelo método de Mori-Tanaka - para prever o comportamento das propriedades efetivas ao longo do tempo.

1.1 JUSTIFICATIVA

A escolha da temática da tese se deve ao interesse do grupo de pesquisa em trabalhar com o desenvolvimento de modelos computacionais que permitam simular o comportamento do concreto de usinas hidrelétricas sob a ação da reação álcali-agregado, o qual deteriora o material ao longo do tempo. O projeto de pesquisa, 'Envelhecimento do Concreto em Usinas Hidrelétricas' atua desde 2012 e conta com colaboradores da Universidade Federal do Paraná e da Universidade Federal do Pará e tem como objetivo investigar formas com as quais os concretos presentes em Usinas Hidrelétricas se degradam ao longo do tempo.

(RASSY, 2012) apresentou um método de análise da heterogeneidade do concreto a partir de modelos computacionais desenvolvidos com o método de Galerkin livre de elementos. Em seu estudo, possuía como objetivo prever as propriedades mecânicas macroscópicas do material resultante a partir das fases individuais e dos arranjos geométricos. Para este trabalho, considerou o concreto como um material composto formado por duas fases (na escala mesoscópica), a saber: agregados graúdos e argamassa. Em seguida, analisou a danificação do material a partir do modelo de Mazars e tirou conclusões acerca da perda de rigidez do material.

Como resultado, tal trabalho foi capaz de apresentar caminhos preferenciais de rachaduras durante a evolução da danificação. Entretanto, tal modelo foi construído a partir de valores arbitrários para as quantidades de argamassa e agregados graúdos presentes no concreto, os quais devem ser utilizados para a geração do elemento representativo do concreto - elemento necessário a simulação via homogeneização. (PIANEZZER, 2013) e (PIANEZZER *et al.*, 2013) apresentaram uma técnica que permite gerar o posicionamento e a quantidade dos agregados graúdos presentes no elemento representativo do concreto (RVE) a partir da leitura da curva granulométrica. Os autores apresentam como gerar tal elemento a partir de agregados graúdos aproximados por elipses. Para isto, foi utilizado um algoritmo de detecção de colisão computacional entre elipses para o posicionamento destes agregados no domínio computacional do concreto e em seguida foi analisado o resultado em termos do teste de carregamento axial semelhante ao desenvolvido por (RASSY, 2012).

Com isto, o modelo inicial gerado em 2012 teve uma contribuição que define mais uma característica real de cada simulação, visto que as características específicas do material utilizado pra cada uma das barragens não fazia parte da simulação até o momento. Com o avanço dos trabalhos em 2013, foi possível tornar a simulação mais real e adaptável para cada caso estudado.

Em paralelo, (BALBO *et al.*, 2014) desenvolveram um modelo para formação e difusão do gel formado pela reação álcali-sílica no concreto. O estudo apresentou um mo-

delo baseado em cinética química e equações de difusão para obter a concentração de gel depois de um longo período de tempo em um elemento representativo do concreto. Para realizar esta simulação, referenciou-se aos trabalhos de (BAZANT; STEFFENS, 2000), (COMBY-PEIROT *et al.*, 2009) e (COMI; FEDELE; PEREGO, 2009).

Será possível fazer previsões sobre a danificação do concreto presente em usinas hidrelétricas - previsões tais necessárias para evitar tragédias que poderiam ocorrer caso tal estrutura colapsasse. Com tais previsões os engenheiros responsáveis pela conservação das usinas hidrelétricas podem estimar zonas prováveis de risco para que se possa realizar operações de reforço e reparo.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver um método para obtenção das propriedades efetivas do concreto sob ação da reação alcali-sílica, a partir de um modelo de homogeneização.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Descrever os modelos de Voigt e de Reuss para estimativa máxima e mínima para o tensor de elasticidade do material
- Desenvolver um modelo de homogeneização considerando a presença de agregados graúdos (inclusão), argamassa e gel (matriz) como constituintes.
- Vincular o modelo de homogeneização à um modelo de evolução do gel formado pela reação alcali-agregado de maneira que seja possível descrever a evolução das propriedades efetivas ao longo do tempo. Tal modelo é feito por meio de modelagem de difusão.
- Analisar o processo de danificação a partir da mudança das propriedades efetivas do concreto ao longo do tempo.

- Descrever os métodos de homogeneização atuais, entre eles o método auto-consistente e o método de Mori-Tanaka

1.3 ESTRUTURA DA TESE

Esta tese está dividida em cinco capítulos.

O segundo capítulo traz as fundamentações teóricas sobre os métodos de homogeneização, a saber: Método de Voigt, Método de Reuss, Método Auto-consistente e o Método de Mori-Tanaka. Com os métodos de homogeneização ainda é necessário realizar uma simulação clássica dos materiais. Entretanto, esta simulação passa a acontecer em camadas menores nas quais os materiais possuem algum tipo de isotropia. Assim, no capítulo seguinte será discutido como realizar a simulação de um material da forma clássica. Com isso, serão apresentados os conceitos fundamentais por trás dos métodos de homogeneização.

Estas técnicas de homogeneização serão aplicadas para o caso do concreto de usinas hidrelétricas submetidas a altas umidades, onde a reação álcali-sílica é um fator evidente. Para fundamentar este estudo, o terceiro capítulo apresenta uma fundamentação teórica sobre o concreto e seus componentes: argamassa e agregados graúdos. Além disso, apresenta a fundamentação teórica envolvida na reação álcali-sílica, envolvendo principalmente as simulações de sua evolução ao longo do tempo.

A proposta da tese foi integrar a simulação da evolução da reação álcali-sílica a um modelo eficiente de homogeneização que permita prever a evolução da danificação ao longo do tempo. Esta proposta está apresentada no quarto capítulo deste material.

O quinto capítulo apresenta os principais resultados alcançados, principalmente aqueles referentes à danificação do concreto ao longo do tempo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE TÉCNICAS DE HOMOGENEIZAÇÃO

A proposta deste capítulo é descrever os fundamentos necessários para a modelagem adequada do concreto afetado pela reação álcali-silica. Para isso, utilizou-se como fundamento (LI; WANG, 2008) que é a base para este estudo. Como os constituintes seguem as leis da Mecânica do Contínuo, serão desenvolvidos, detalhadamente, os pressupostos específicos desta teoria.

Analisar as propriedades de materiais heterogêneos é um desafio que tem sido contornado com a utilização de técnicas de homogeneização, as quais buscam descrever as relações existentes entre as propriedades conhecidas em escalas menores, conhecidas como microescalas, daquelas que ocorrem em escalas maiores, conhecidas como macroescalas (WRIGGERS, MOFTAH, 2006) .

Como aponta (LI; WANG, 2008), na natureza praticamente não existem materiais perfeitamente homogêneos. Entretanto, de maneira geral, mesmo possuindo microestruturas complexas, o comportamento estatístico destas estruturas pode determinar as respostas médias que surgem na macroescala.

Para o uso e o entendimento dos métodos de homogeneização é necessário observar que os materiais compósitos analisados são tratados como modelos contínuos com dois níveis de análise: a estrutura microscópica (que é a microescala nessa tese) e a macroscópica (que é a macroescala). Geralmente, as propriedades do material na microescala são conhecidas, enquanto busca-se, através dessas, determinar o comportamento do material na macroescala (WRIGGERS, MOFTAH, 2006).

Os métodos de homogeneização, os quais representam a teoria das propriedades efetivas, partem do princípio de que as relações constitutivas na escala macroscópica podem ser adquiridas através do comportamento médio dos constituintes na microes-

cala, os quais, por sua vez, são governados pelas leis físicas apropriadas para cada nível de estudo. Por exemplo, ao modelar materiais próprios da nano mecânica através de técnicas de homogeneização, deve-se simular as propriedades dos constituintes através das leis físicas próprias desta camada, que são, no caso, as leis da Mecânica Quântica. Mas ao tratar de materiais próprios da micromecânica, os constituintes são simulados a partir das leis da Mecânica do Contínuo ou da Mecânica Clássica.

Assim, os métodos de homogeneização não evitam a modelagem física do material. Entretanto, como visto, o fazem de outra maneira: a abordagem se trata de representar uma estrutura heterogênea por uma estrutura homogênea equivalente. Para facilitar e unificar a linguagem utilizada por aqueles que lidam com a teoria determinou-se que a escolha do termo micro ou macro escala é uma escolha matemática, de maneira que não está associada a nenhum comprimento de escala específico (LI; WANG, 2008). No caso de simulação de materiais próprios da nano mecânica, como um metal, 1mm pode ser considerado como a macro escala, enquanto a micro escala se refere a constituintes de tamanhos que podem ser na escala de nm, por exemplo. Ainda, ao se estudar o comportamento de barragens, 10^3 m pode representar a macro escala e 10^{-2} m a microescala.

As primeiras propostas de simulação foram feitas por Voigt em 1887 e Reuss em 1929. Seus modelos teóricos são simplificados, mas além de permitirem ampliar o entendimento dos fundamentos envolvidos nos métodos de homogeneização, atualmente eles são consagrados na literatura como limite superior e inferior, respectivamente, para o verdadeiro valor das propriedades efetivas.

Modelos mais refinados estão sendo utilizados para cada simulação. Em comum, tais modelos usam o tensor de Eshelby, determinado pelo Eshelby (1957), ao buscar determinar o campo elástico de uma inclusão elipsoidal em um sólido elástico quando uma inclusão sofre deformação homogênea uniforme. Dentro da teoria das propriedades efetivas este tensor é utilizado através de outras técnicas para determinar o comportamento do material que possui diversas inclusões. Entre estas técnicas, serão

tratados o método auto-consistente e o método de Mori-Tanaka.

Além disto, para a compreensão das técnicas de homogeneização escolhidas, serão descritos tais métodos a partir dos pressupostos que o justificam.

2.1 MODELAGEM DOS CONSTITUINTES

Para a utilização das técnicas de homogeneização é necessário modelar os constituintes a partir das leis físicas adequadas para aquela escala. Na menor escala em que o material será analisado neste trabalho, seus constituintes são tratados como um meio contínuo de maneira que a teoria que descreve o comportamento deles é a Mecânica do Contínuo.

Para descrever um corpo nessa situação serão considerados partículas que juntas representam o material. Cada partícula é descrita por um vetor posição, o qual a localiza em relação a um sistema de referências. Por notação,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (2.1.1)$$

indica a posição de uma partícula no instante t . Entretanto, esta descrição, advinda da Mecânica Clássica, não é satisfatória para descrever um corpo formado por infinitas partículas. Por este motivo, o caminho de cada partícula é descrita por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1.2)$$

que permite escrever a posição \mathbf{x} de cada partícula em função do tempo e da posição \mathbf{X} que ela se encontrava no instante t_0 . Tais posições continuam vinculadas a um sistema de referências, de maneira que:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad (2.1.3)$$

e

$$\mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3, \quad (2.1.4)$$

onde $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ representam a base do espaço vetorial, o qual permite gerar, por combinação linear, qualquer vetor do mesmo. Assim, outra notação de apresentar tais coordenadas é descrever que uma partícula possui coordenadas $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ no instante inicial t_0 e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ no instante t .

Na literatura, tais coordenadas são conhecidas como coordenadas materiais. Além da posição das partículas, há o interesse de descrever a variação ao longo do tempo de outras grandezas, sejam escalares, vetoriais e tensoriais. Essas descrições dependem das posições específicas de cada partícula, pois, por exemplo, a temperatura ou a tensão de um corpo nem sempre é a mesma em todos os pontos. Essa descrição pode ser realizada de duas maneiras distintas: a partir das coordenadas materiais, por isto chamada descrição material, no qual a grandeza T é:

$$T = T(X_1, X_2, X_3, t), \quad (2.1.5)$$

ou a partir das coordenadas espaciais, onde

$$T = T(x_1, x_2, x_3, t). \quad (2.1.6)$$

Pode-se alternar entre as descrições, a partir da Equação 2.1.2. Neste trabalho serão utilizadas as coordenadas materiais, visto que as coordenadas espaciais geralmente são utilizadas para a modelagem de fluidos.

Para descrever a deformação a qual um corpo está sujeito, deve-se verificar a existência do campo de deslocamento. Quando uma partícula muda sua posição, em alguns casos o interesse é verificar informações sobre a variação e a taxa de variação desta posição. Neste caso, se \mathbf{X} denota a posição inicial da partícula e $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ a posição final, então:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \quad (2.1.7)$$

onde \mathbf{u} representa a variação da posição de cada partícula, ou seja, seu deslocamento. A Figura 2.1 representa um esquema da variação da posição da partícula ao longo do tempo, indicando o vetor posição e o vetor deslocamento.

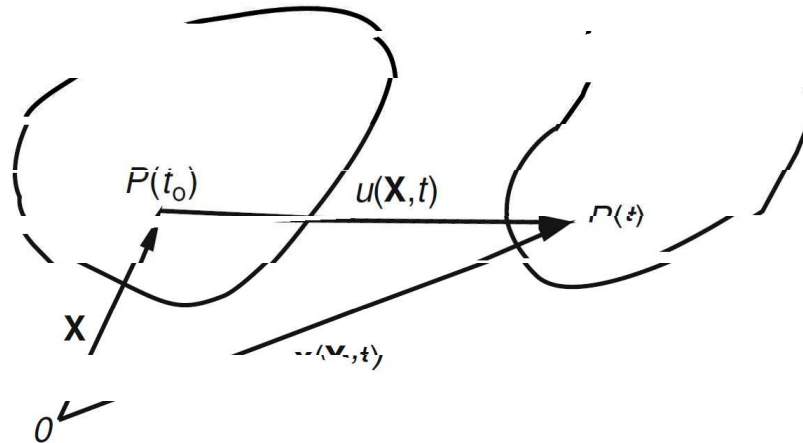


FIGURA 2.1: Vetor deslocamento para uma partícula P (LAI, 2010).

Assim, conhecendo as devidas posições, determinam-se os deslocamentos. Em especial, em Engenharia Estrutural há o interesse em saber se dois pontos quaisquer do corpo preservam seu afastamento ao longo do tempo, em outras palavras, deve-se determinar as deformações as quais o corpo está sujeito. A Figura 2.2 mostra, esquematicamente, esta problemática indicando o deslocamento de dois elementos próximos ao longo do tempo.

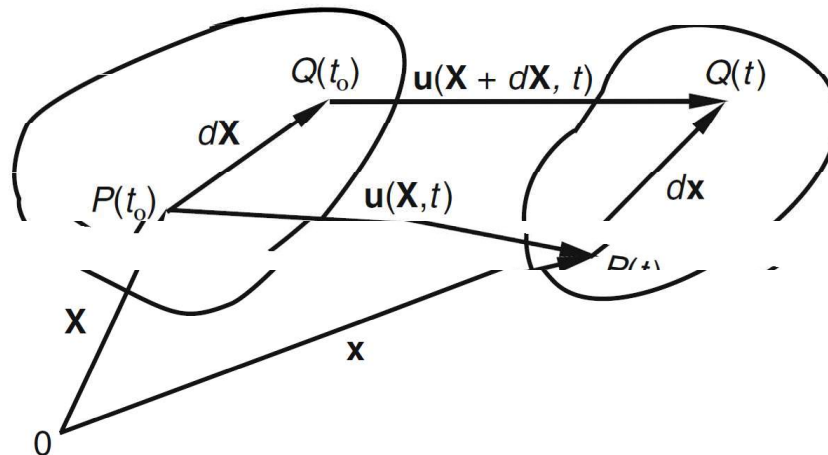


FIGURA 2.2: Deslocamento entre dois elementos próximos P e Q (LAI, 2010)

Reescrevendo a Equação 2.1.7, pode-se determinar

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1.8)$$

indicando a posição futura de uma partícula qualquer. Na Figura 2.2, para a medida de afastamento, considera-se uma partícula Q próxima de P de tal maneira que no instante t_0 sua posição $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ passou a ser $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$. Também pela Equação 2.1.7, pode-se escrever:

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t). \quad (2.1.9)$$

E assim, subtraindo da Equação 2.1.9 a Equação 2.1.8, obtém-se:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (2.1.10)$$

Como o gradiente de uma função vetorial é um tensor de segunda ordem que descreve a mudança da grandeza, pode-se reescrever a Equação 2.1.10 como

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla \mathbf{u})d\mathbf{X}. \quad (2.1.11)$$

Este tensor, $\nabla \mathbf{u}$, de segunda ordem, é chamado de gradiente do deslocamento e mede a variação do deslocamento entre os corpos. Na forma matricial, em coordenadas retangulares, pode-se escrever (LAI, 2010):

$$[\nabla \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}, \quad (2.1.12)$$

pois $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$.

Para representar adequadamente o comportamento de um corpo, utiliza-se o tensor das tensões, o qual é obtido diretamente dos resultados anteriores. Como visto,

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla \mathbf{u})d\mathbf{X}, \quad (2.1.13)$$

o qual pode ser reescrito como

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})d\mathbf{X}. \quad (2.1.14)$$

Como $d\mathbf{x}$ representa o afastamento entre a partícula P e a Q , então seu módulo ds representa o comprimento deste afastamento. dS representa o comprimento deste afastamento para $d\mathbf{X}$. Assim sendo, ao se realizar o produto escalar de $d\mathbf{x}$ por $d\mathbf{x}$, obtém-se ds^2 . Isso acontece, pois, para qualquer vetor \mathbf{u} e \mathbf{v} , o produto escalar é definido como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta, \quad (2.1.15)$$

onde θ representa o ângulo entre os vetores. E portanto,

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = |d\mathbf{x}| |d\mathbf{x}| \cos \theta = ds^2, \quad (2.1.16)$$

que, pela Equação 2.1.14, escreve-se:

$$d\mathbf{x}.d\mathbf{x} = [(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})d\mathbf{X}].[(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})d\mathbf{X}] = d\mathbf{X}.\mathbf{C}.d\mathbf{X}, \quad (2.1.17)$$

que relaciona os comprimentos analisados. Equivalente à Equação 2.1.17 é a equação 2.1.18:

$$ds^2 = d\mathbf{X}.\mathbf{C}.d\mathbf{X}, \quad (2.1.18)$$

onde o tensor de deformação de Cauchy-Green, dado por

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})^T(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}), \quad (2.1.19)$$

descreve a relação procurada.

Para a modelagem dos constituintes que está sendo proposta, será utilizado como hipótese o fato de que eles estão sujeitos a deformações infinitesimais, ou seja, deformações muito pequenas. Essa suposição é adequada para a simulação proposta, visto que a reação álcali-silica e seus efeitos de danificação levam vários anos para se tornarem significativos.

Assim sendo, pode-se escrever, a partir da Equação 2.1.19 que:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})^T(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}) = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T + (\nabla\mathbf{u})^T(\nabla\mathbf{u}), \quad (2.1.20)$$

o qual, dentro da suposição discutida, pode ser simplificado dado que $(\nabla\mathbf{u})^T(\nabla\mathbf{u}) \rightarrow 0$.

Assim,

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T. \quad (2.1.21)$$

Um alongamento unitário, também conhecido como deformação específica em Engenharia, representa uma variação no comprimento em relação ao comprimento original. De maneira análoga, ε_{22} e ε_{33} representam o alongamento unitário para um elemento originalmente na direção x_2 e x_3 , respectivamente.

Deste resultado, chama-se $\mathbf{E} = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$ como o tensor das deformações infinitesimais, o qual pode ser escrito na forma matricial a partir da Equação 2.1.12, como

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}. \quad (2.1.22)$$

Para o tensor de deformação infinitesimal \mathbf{E} , cada elemento possui uma interpretação física. Assim, \mathbf{E} pode ser resumido pela seguinte notação:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.1.23)$$

Além disto, a Equação 2.1.22 mostra que o tensor \mathbf{E} é simétrico. Nessa equação, ε_{ii} representa a deformação específica longitudinal ou normal e γ_{ij} representa a deformação específica transversal ou tangencial. Por conta disto, Voigt (VOIGT, 1910) apresentou uma notação simplificada para representar este tensor, de maneira que pode ser representado por um vetor ε , onde

$$\varepsilon = \left[\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{23} \right]^T. \quad (2.1.24)$$

Essa escolha simplifica, de maneira considerável, alguns resultados futuros que serão apresentados. Para obter as interpretações físicas, considera-se, primeiramente, dois elementos $d\mathbf{X}^{(1)}$ e $d\mathbf{X}^{(2)}$, que, devido ao movimento, se tornam $d\mathbf{x}^{(1)}$ e $d\mathbf{x}^{(2)}$. Assim, de maneira equivalente ao desenvolvido na Equação 2.1.17 e com as mesmas simplificações pode-se escrever que

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)}(\mathbf{I} + 2\mathbf{E})d\mathbf{X}^{(2)}, \quad (2.1.25)$$

ou seja,

$$d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = d\mathbf{X}^{(1)} d\mathbf{X}^{(2)} + 2d\mathbf{X}^{(1)} \mathbf{E} d\mathbf{X}^{(2)}. \quad (2.1.26)$$

Para $d\mathbf{X}^{(1)} = d\mathbf{X}^{(2)} = d\mathbf{X} = dS\mathbf{n}$, pode-se reescrever a Equação 2.1.26, como:

$$ds^2 = dS^2 + 2dS^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}), \quad (2.1.27)$$

onde \mathbf{n} é um vetor unitário descrevendo a direção do afastamento. Como

$$ds^2 - dS^2 = (ds - dS)(ds + dS) \approx (ds - dS)2dS, \quad (2.1.28)$$

já que

$$ds \approx dS, \quad (2.1.29)$$

então, reescreve-se a Equação 2.1.27 como

$$\frac{ds^2 - dS^2}{2dS^2} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}, \quad (2.1.30)$$

ou ainda,

$$\frac{ds - dS}{dS} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}. \quad (2.1.31)$$

Para cada direção escolhida ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ou \mathbf{e}_3), encontra-se, portanto, o significado físico de $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ e ε_{33} . Assim, a Equação 2.1.31 mostra que, por exemplo, para a direção \mathbf{e}_1 , ε_{11} representa o alongamento unitário para um elemento originalmente na direção x_1 .

Os outros componentes do tensor das deformações infinitesimais, podem ser interpretados considerando dois elementos, tais que $d\mathbf{X}^{(1)} = dS_1 \mathbf{m}$ o qual se torna $d\mathbf{x}^{(1)}$ com comprimento ds_1 e $d\mathbf{X}^{(2)} = dS_2 \mathbf{n}$ o qual se torna $d\mathbf{x}^{(2)}$ com comprimento ds_2 . \mathbf{m} e

\mathbf{n} são tais que são perpendiculares entre eles (LAI, 2010).

Neste caso, a Equação 2.1.26 pode ser reescrita como

$$ds_1 \cdot ds_2 \cdot \cos \theta = dS_1 \cdot dS_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2dS_1 \cdot dS_2 \mathbf{m} \cdot \mathbf{En}, \quad (2.1.32)$$

onde θ representa o ângulo entre os vetores após a deformação. Ainda, como este ângulo θ costuma ser próximo de $\frac{\pi}{2}$, visto que lida-se com pequenas deformações, então utiliza-se $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$ como parâmetro que mede a pequena diminuição de ângulo entre os elementos. Este parâmetro, na Engenharia, é conhecido como deformação de cisalhamento. Pela Equação 2.1.32, escreve-se:

$$ds_1 \cdot ds_2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = 2dS_1 \cdot dS_2 \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{En} \quad (2.1.33)$$

e como $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin(\gamma)$, então

$$\sin \gamma = 2 \frac{dS_1}{ds_1} \cdot \frac{dS_2}{ds_2} \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{En}. \quad (2.1.34)$$

Ainda pela hipótese de pequenas deformações, pode-se simplificar a Equação 2.1.16, obtendo:

$$\gamma \approx 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{En}. \quad (2.1.35)$$

Isto pode ser feito, visto que $\sin \gamma \approx \gamma$ e $\frac{dS_1}{ds_1} \approx \frac{dS_2}{ds_2} \approx 1$.

Interpreta-se que $2\gamma_{12}$ representa a diminuição do ângulo entre dois elementos, inicialmente encontrados na direção x_1 e x_2 , assim como $2\gamma_{13}$ e $2\gamma_{23}$ o faz para elementos encontrados na direção x_1 e x_3 , e x_2 e x_3 , respectivamente.

Para a modelagem se tornar adequada, ainda é necessário caracterizar as tensões que agem sobre o material. Geralmente um corpo sofre deformações indevidas por estar sujeito a forças internas e externas que causam este efeito no material. Para conceituar algumas grandezas, deve-se considerar o método das seções, o qual pode

ser ilustrado na Figura 2.3 .

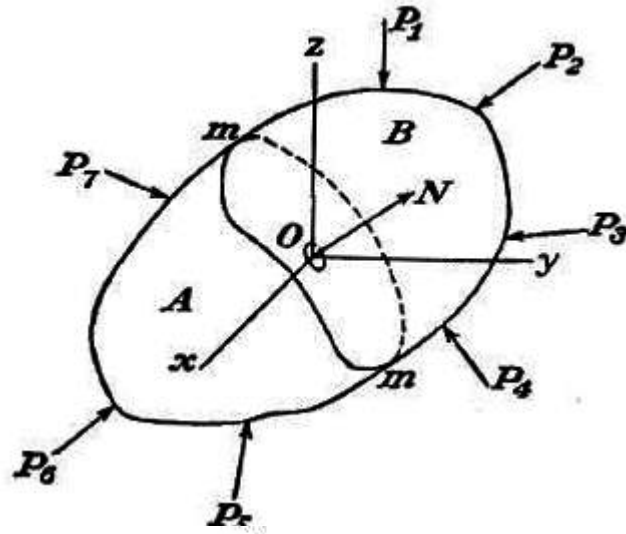


FIGURA 2.3: Corpo sobre a ação de forças externas (TIMOSHENKO, 1951).

Para isto, divide-se um corpo a partir de uma seção mm' que passa por um ponto O . Suponha que este corpo está sujeito a diversas forças externas, como na Figura 2.3, P_1, P_2, \dots, P_7 . Nesse caso, pode-se analisar apenas uma parte do corpo, por exemplo A , para concluir que, P_1, P_2, P_3, P_4 causam uma resultante de forças em A , dado por ΔF . Essa resultante existe para o caso em que A é tratado a partir de um diagrama de corpo livre e age sobre uma área ΔO que contém O . Com isso, define-se o vetor de tensões como sendo a razão entre ΔF e ΔO quando $\Delta O \rightarrow 0$, ou seja,

$$\sigma_{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta O \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta O}. \quad (2.1.36)$$

Tal tensão varia para cada parte do material e para a direção da seção infinitesimal escolhida, controlada pelo seu vetor normal \mathbf{n} . Assim,

$$\sigma = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}). \quad (2.1.37)$$

Deve-se determinar as tensões específicas para cada parte do corpo visto que tensões diversas causam efeitos de deformação variados. Entretanto este trabalho é facilitado, visto que a segunda Lei de Newton permite que seja escrito

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}, \quad (2.1.38)$$

o qual \mathbf{T} é chamado de tensor das tensões de Cauchy. Tal tensor representa uma matriz de transformação linear, o qual pode ser verificado ao se observar o tetraedro da Figura 2.4.

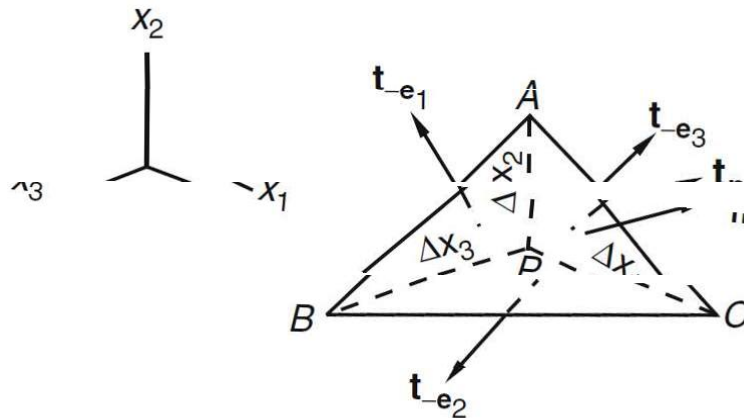


FIGURA 2.4: Tetraedro para verificação que o tensor de tensões de Cauchy é uma transformação linear (LAI, 2010).

Neste caso, identifica-se que cada face do sólido está sujeita a uma tração específica. Assim, ao multiplicar tal valor pela área associada, encontra-se a força aplicada, de maneira que pode-se utilizar a Segunda Lei de Newton para escrever:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{t}_{-e_1}\Delta A_1 + \mathbf{t}_{-e_2}\Delta A_2 + \mathbf{t}_{-e_3}\Delta A_3 + \mathbf{t}_{e_n}\Delta A_n, \quad (2.1.39)$$

onde ΔA representa a área da face respectiva. Sendo que a massa é dada pelo produto da densidade pelo volume, pode-se concluir, que para um tetraedro infinitesimal, $m \cdot \mathbf{a} \rightarrow 0$ mais rapidamente que o lado esquerdo da Equação 2.1.39. Assim,

$$\mathbf{t}_{-e_1}\Delta A_1 + \mathbf{t}_{-e_2}\Delta A_2 + \mathbf{t}_{-e_3}\Delta A_3 + \mathbf{t}_{e_n}\Delta A_n = 0. \quad (2.1.40)$$

Ainda, considerando o vetor normal em termos de suas componentes dado por $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$, pode-se escrever $\Delta A_1 = n_1\Delta A_n$; $\Delta A_2 = n_2\Delta A_n$ e $\Delta A_3 = n_3\Delta A_n$. De maneira que, pela condição de equilíbrio de corpos rígidos, a Equação 2.1.40 se torna:

$$\mathbf{t}_n = n_1 \mathbf{t}_{e_1} + n_2 \mathbf{t}_{e_2} + n_3 \mathbf{t}_{e_3}. \quad (2.1.41)$$

Como $\mathbf{t}_n = \mathbf{T}\mathbf{n}$, então:

$$T(n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3) = n_1 \mathbf{T}\mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{T}\mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{T}\mathbf{e}_3, \quad (2.1.42)$$

o que mostra que \mathbf{T} é uma transformação linear, já que vale a propriedade

$$T(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{T}\mathbf{a} + \beta \mathbf{T}\mathbf{b}, \quad (2.1.43)$$

para qualquer vetor \mathbf{a} , \mathbf{b} e escalares α, β . Este é um resultado que facilita a determinação das tensões em relação a qualquer superfície (representado pelo vetor normal \mathbf{n}). Isso se deve ao fato que, para compreender completamente as tensões, basta conhecer a transformação realizada para os vetores de base do espaço vetorial, visto que qualquer vetor \mathbf{n} pode ser escrito em termos dos vetores de base.

O tensor das tensões de Cauchy, \mathbf{T} , guarda, em seus componentes, informações sobre como realizar a transformação dos vetores de base. Como notação, usa-se:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.1.44)$$

O tensor das tensões também é um tensor simétrico. Isso se deve ao princípio de conservação do momento angular. Tal grandeza é definida como:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (2.1.45)$$

no qual \mathbf{r} representa o vetor posição da partícula (em relação a um ponto de referência) e \mathbf{p} representa seu momento linear. O momento angular se conserva em alguns casos específicos. Para confirmar este fato, deve-se verificar quando o momento angular não

sofre variação, ou seja, quando $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0$. Então, pela Equação 2.1.45, tem-se que:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (2.1.46)$$

pela regra do produto para a derivada do produto de duas funções. Ainda, como $\mathbf{p} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, então:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\frac{d\mathbf{r}}{dt} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0, \quad (2.1.47)$$

pois, por definição, $|\mathbf{u} \times \mathbf{u}| = 0$. Então, a Equação 2.1.46 nos mostra que:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N}, \quad (2.1.48)$$

já que, pela segunda Lei de Newton, a força \mathbf{F} é dada por, $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ e, por definição torque é dado por, $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Assim, mostra-se que o princípio do momento angular é válido, de maneira que \mathbf{M} se conserva se a resultante dos torques é nula em relação a um eixo de referência. Para a simetria do tensor das tensões, calcula-se o momento angular em relação a um eixo passando através de um ponto A de um retângulo infinitesimal, como mostra a Figura 2.5.

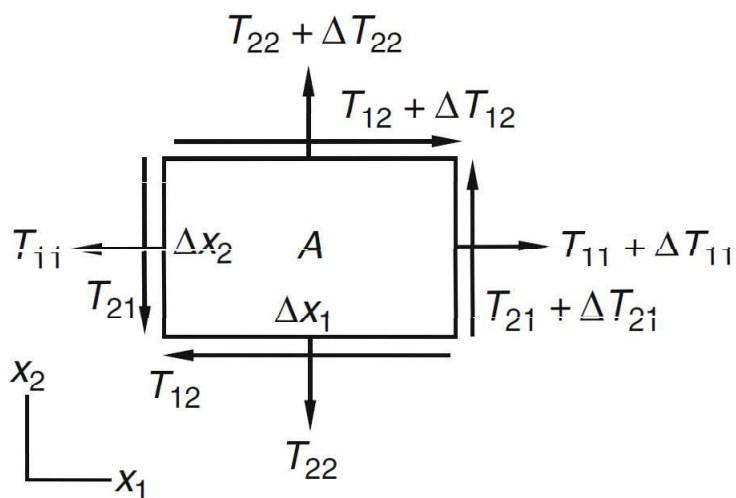


FIGURA 2.5: Retângulo infinitesimal para análise da simetria do tensor de tensões (LAI, 2010).

Neste caso representado, pode-se escrever o torque resultante como

$$\sum \mathbf{M}_A = T_{21} \Delta x_2 \Delta x_3 \frac{\Delta x_1}{2} + (T_{21} + \Delta T_{21}) \Delta x_2 \Delta x_3 \frac{\Delta x_1}{2} - T_{12} \Delta x_1 \Delta x_3 \frac{\Delta x_2}{2} - (T_{12} + \Delta T_{12}) \Delta x_1 \Delta x_3 \frac{\Delta x_2}{2}. \quad (2.1.49)$$

Para o caso em que $\Delta T_{21} \rightarrow 0$ e $\Delta T_{12} \rightarrow 0$, escreve-se a Equação 2.1.49 como

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = (T_{21} - T_{12}) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (2.1.50)$$

e pelo princípio da conservação do momento angular,

$$(T_{21} - T_{12}) \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = 0, \quad (2.1.51)$$

fazendo com que $T_{21} = T_{12}$. De maneira análoga, para o eixo de rotação paralelo aos outros eixos obtém-se $T_{13} = T_{31}$ e, finalmente, $T_{23} = T_{32}$. Assim, o tensor das tensões também pode ser simplificado pela notação de Voigt (VOIGT, 1910) onde,

$$\sigma = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{22} & T_{33} & T_{12} & T_{13} & T_{23} \end{bmatrix}^T. \quad (2.1.52)$$

Como cada elemento do vetor de tensões, σ , reaparece em vários modelos, utiliza-se, também, a seguinte notação (TIMOSHENKO, 1951):

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \tau_{12} & \tau_{13} & \tau_{23} \end{bmatrix}^T. \quad (2.1.53)$$

Neste caso, σ_{11} representa a tensão que ocorre na direção x_1 , enquanto σ_{22} e σ_{33} na direção x_2 e x_3 , respectivamente. Esta tensão, também chamada de tensão normal pode ser de tração, no caso em que seu valor é positivo, e compressão, no caso em que é negativo. τ_{12} representa a tensão de cisalhamento normal ao plano definido pela normal x_1 e na direção x_2 , enquanto vale o equivalente para τ_{13} e τ_{23} para suas respectivas direções.

Conhecendo informações sobre o vetor de tensões e o de deformação, deve existir uma relação de dependência entre eles, visto que ambas as grandezas estão relacionadas. A Lei de Hooke generalizada, portanto, descreve a relação existente entre os elementos do vetor de deformações infinitesimais e os elementos do vetor de tensões, de acordo com a Equação 2.1.54.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.1.54)$$

Ou na forma tensorial:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.1.55)$$

C_{ijkl} são as componentes do tensor \mathbf{C} de elasticidade (ou matriz de rigidez), o qual é de quarta ordem e possui, a princípio, 81 componentes. Como o tensor das tensões é simétrico, como visto, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. A Lei de Hooke nos mostra que, para $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ e para $\sigma_{ji} = C_{jikl} \varepsilon_{kl}$, então, $C_{ijkl} = C_{jikl}$. De maneira similar, o tensor das deformações é simétrico, então $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$. Assim, para $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ e $\sigma_{ji} = C_{ijlk} \varepsilon_{lk}$ e $C_{ijkl} = C_{ijlk}$. Desta maneira, restam-se 36 componentes independentes que formam o tensor de elasticidade. A lei de Hooke, com as simplificações assumidas, assume a forma de:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j. \quad (2.1.56)$$

A simetria da matriz de rigidez é válida para o caso de um material hiperelástico, de maneira que

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & Sim & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.1.57)$$

Sendo a matriz C invertível, então é possível definir o tensor de flexibilidade, S , sendo:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j. \quad (2.1.58)$$

Ou na forma tensorial:

$$\varepsilon = \mathbf{S} : \sigma. \quad (2.1.59)$$

Tais grandezas que definem as propriedades do material analisado estão relacionados com o coeficiente de Young, coeficiente de Poisson e primeiro e segundo parâmetros de Lamé.

O módulo de Young, ou módulo de elasticidade longitudinal, fornece uma medida do alongamento de um elemento na direção x_i gerado por uma tensão normal na mesma direção conforme a Equação 2.1.60 (TIMOSHENKO, 1951).

$$\varepsilon_{x_i} = \frac{\sigma_{x_i}}{E}. \quad (2.1.60)$$

Sua unidade no Sistema Internacional de Unidades é em unidades de pressão (Pa). Tal propriedade varia para cada material, onde o Magnésio possui valores próximos de 45 GP, o tungstênio 400 GPa e o concreto formado por agregados leves na faixa de 14 a 21 GPa. O concreto convencional possui um valor na faixa de 20 a 28 GPa.

O coeficiente de Poisson existe para descrever a contração lateral que um elemento sofre quando se estende na direção x_i . Esta contração na direção x_j está relacionada com a tensão em x_i por

$$\varepsilon_{x_j} = -\nu \frac{\sigma_{x_i}}{E}, \quad (2.1.61)$$

ν representa o coeficiente de Poisson.

A primeira constante de Lamé λ está relacionado com o módulo de Young E e o módulo de Poisson

$$\nu$$

através da Equação 2.1.62

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (2.1.62)$$

Tal escolha é realizada para simplificar a matriz de rigidez nos casos de isotropia que serão discutidos no 3 .

Por fim, o segundo parâmetro de Lamé, μ , está relacionado com E e ν através de

$$\mu = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (2.1.63)$$

Tais parâmetros podem ser determinados experimentalmente ou encontrados na literatura para cada material analisado. Com eles, é possível determinar o tensor constitutivo para materiais que possuam alguma propriedade simplificadora, como os diversos tipos de isotropia que serão abordados na sequência. Um material isotrópico, ao contrário do anisotrópico, é aquele cuja propriedades mecânicas são as mesmas independentes da direção analisada.

O material final analisado, o concreto sujeito a ação da reação alcali-sílica, é considerado um material anisotrópico. Entretanto, uma das suposições utilizadas neste trabalho é que os constituintes não possuem isotropia que permitem os descrevê-los

diretamente a partir dos parâmetros de Engenharia. Entretanto, os materiais das microescalas serão considerados isotrópicos. Por conta disto, discute-se os 4 tipos de isotropia que podem ser utilizados para a simulação dos constituintes.

Como pode ser observado na Equação 2.1.57, a matriz de rigidez é um tensor simétrico que possui 21 constantes elásticas que devem ser determinadas para o caso anisotrópico. Casos mais simplificados, dependem em explorar a simetria do material para verificar quais constantes são equivalentes ou nulas. Se considerar o plano de simetria x_2x_3 , cuja normal está na direção de \mathbf{e}_1 , então a transformação de reflexão dada pela matriz da Equação 2.1.64:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1.64)$$

muda os vetores de base, de maneira que qualquer ponto transformado sofra uma reflexão em relação ao plano dado.

No caso em que existe apenas um plano de simetria, o caso chamado de sólido elástico linearmente monoclinico, bastam 13 coeficientes elásticos independentes para descrevê-los. Ao aplicar a transformação Q da equação 2.1.64, chega-se, para o caso em que existe simetria a um plano cuja normal é \mathbf{e}_1 à:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & Sim & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.1.65)$$

Em relação às propriedades dos materiais, pode-se escrever o tensor de flexibilidade S como sendo:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & \eta_{41}/G_4 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & \eta_{42}/G_4 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & \eta_{43}/G_4 & 0 & 0 \\ \eta_{14}/E_1 & \eta_{24}/E_2 & \eta_{34}/E_3 & 1/G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_5 & \mu_{65}/G_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{56}/G_5 & 1/G_6 \end{bmatrix}. \quad (2.1.66)$$

Se o material possui dois planos perpendiculares de simetria, então é considerado um sólido elástico linear ortotrópico. Neste caso, 9 constantes elásticas são necessárias para a descrição. Considerando dois planos de simetria, com normais \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , respectivamente, e considerando a existência de duas transformações de simetria que devem preservar as componentes elásticas, então, neste caso,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & Sim & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.1.67)$$

Em relação às constantes de Engenharia, o tensor de flexibilidade para o caso de um sólido elástico linear ortotrópico é:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.1.68)$$

Outra simetria existente é o caso do material elástico transversalmente isotrópico, onde dado um plano qualquer, qualquer plano perpendicular a ele é um plano de simetria. Assim, 5 constantes elásticas são suficientes para descrever o material e:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{Sim} & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & 1/2(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}. \quad (2.1.69)$$

Neste caso, os coeficientes necessários são E_1 e E_3 ; ν_{13} e ν_{21} e G_{13} . O tensor de flexibilidade em relação às constantes de Engenharia é dado por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_1 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_1 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.1.70)$$

Por fim, o sólido elástico linearmente isotrópico pode ser determinado a partir de duas constantes elásticas. Qualquer mudança de base preserva as propriedades mecânicas do material. Assim, a matriz de rigidez e de flexibilidade para este caso são dados pela Equação 2.1.71 e pela Equação 2.1.72.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ Sim & & & & 1/2(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ & & & & & 1/2(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}, \quad (2.1.71)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}. \quad (2.1.72)$$

Para escrever estes 4 casos de tensores no caso em que possuam eixos de simetria diferentes que os planos x_2x_3 , basta utilizar uma base de um espaço vetorial auxiliar que recaia em um dos casos descritos acima e, em seguida, encontrar a matriz de mudança de base para descrever outros eixos de simetria.

Assim, pode-se descrever as propriedades mecânicas dos constituintes. Mais informações sobre os constituintes se encontram no capítulo 3.

2.2 TEORIA DA HOMOGENEIZAÇÃO

Para os materiais que são anisotrópicos, a determinação das suas propriedades efetivas pode ser determinado através da teoria de homogeneização. Segundo esta, as propriedades dos materiais nas escalas maiores podem ser explicadas a partir das propriedades de seus constituintes. A resposta que o material terá depende da elasticidade dos constituintes, suas quantidades, seus formatos, suas orientações entre tantas outras características.

No caso em que os constituintes estão distribuídos de maneira aleatória no domínio do material, pode-se utilizar um RVE ou elemento representativo do material que simula estatisticamente uma amostra da microestrutura do material (LI; WANG, 2008).

O RVE é visto como um volume de material heterogêneo, no qual é grande o suficiente para que possa representar estatisticamente o material, ou, em outras palavras, contém uma amostra representativa de todas as heterogeneidades que ocorrem no meio. Como notação, Ω indica o RVE e $\partial\Omega$ indica sua superfície.

A análise a partir do RVE trata, então, de dois níveis de análise: a macro e a micro escala. A Figura 2.6 ilustra as diferenças entre um material observado a partir da macro escala, onde este possui características homogêneas, do mesmo material observado na micro escala, onde este passa a apresentar componentes como inclusões ou mesmo vazios que justificam sua heterogeneidade.

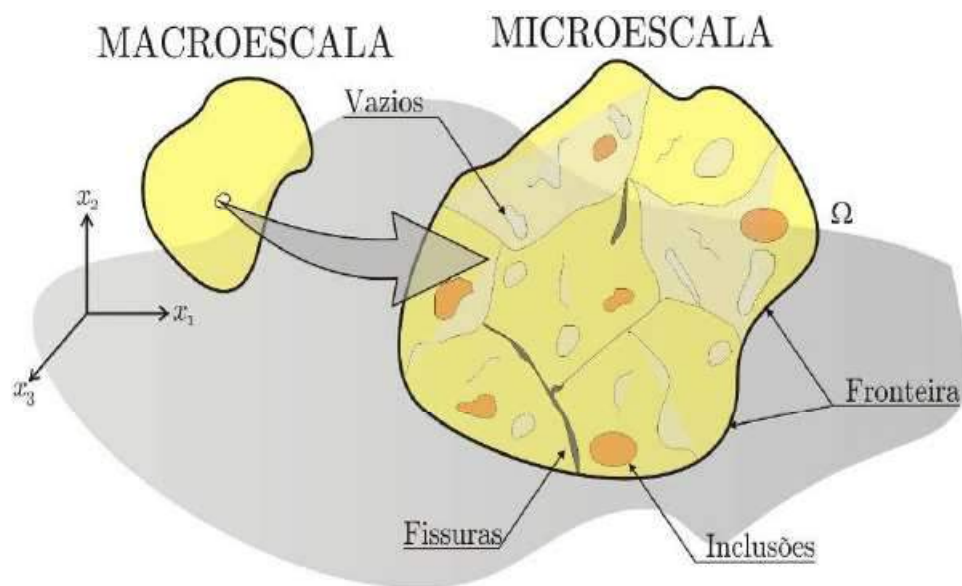


FIGURA 2.6: Elemento de volume representativo (CAVALCANTE,2008)

O termo macro escala e micro escala dizem respeito a termos específicos da teoria da homogeneização, não se referindo a tamanhos específicos, como é o termo mesoscópico, microscópico ou macroscópico. A teoria de homogeneização desenvolvida nesta fundamentação teórica considera, então, a existência de duas escalas: a macro e a micro, mas são termos válidos para a teoria matemática, equivalente para

qualquer par de escalas desenvolvida.

Os primeiros modelos desenvolvidos foram o modelo de Voigt e o modelo de Reuss (LAI; RUBIN; KREMPL, 2010), considerados hoje como limites superior e inferior, respectivamente, da medida das propriedades efetivas. Na sequência, o método de Eshelby foi essencial para o desenvolvimento das teorias. Os métodos mais atuais, como o método de Mori-Tanaka e o método autoconsistente (LAI; RUBIN; KREMPL, 2010) utilizam um dos resultados encontrados no método de Eshelby para desenvolver suas metodologias.

2.2.1 Modelo de Voigt

O resultado encontrado por Voigt foi publicado em 1887 e foi realizado com o intuito de descobrir se, a partir das propriedades dos componentes que formam o material, seria possível caracterizar este material.

Voigt realizou a primeira abordagem, assumindo que o material compósito se comportaria como um conjunto de barras feitas a partir dos materiais da matriz e da inclusão e sujeitos a uma deformação uniforme aplicada nas extremidades do compósito. Assim, é assumida uma deformação longitudinal uniforme no compósito, o que implica deformações iguais em cada fase do compósito (ARNALDO, 2008).

Como deixou de considerar vários aspectos da microestrutura, como a forma ou a orientação das inclusões, seu modelo depende de poucas variáveis, os quais são listados no Quadro 6.

TABELA 6: Variáveis envolvidas no modelo de Voigt.

Variável	Significado
f_i	Fração volumétrica da inclusão
f_m	Fração volumétrica da matriz
C_i	Tensor de elasticidade da inclusão
C_m	Tensor de elasticidade da matriz
C^h	Tensor de elasticidade efetivo ou homogeneizado

A escolha das variáveis é tal que $f_i + f_m = 1$ representa a totalidade do material. Como o modelo de Voigt representa uma construção em paralelo, nos quais ambos os

materiais estão sujeitos à mesma deformação, então:

$$C^h = f_i C_i + f_m C_m. \quad (2.2.1)$$

Este primeiro modelo é um dos mais simples esquemas de homogeneização do material compósito. A utilidade deste modelo reside no fato de que atualmente representa um limite superior (Limite superior de Voigt) para o valor do módulo de elasticidade de um material compósito, de maneira que representa valores superestimados para esta informação.

2.2.2 Modelo de Reuss

Quase meio século após a publicação dos trabalhos de Voigt, Reuss também publicou um modelo para a determinação de propriedades de materiais compósitos. Seu modelo é concebido por um conjunto de barras paralelas, constituídos pelos materiais da matriz e da inclusão, e que, submetido a uma tensão normal aplicada nas extremidades do compósito, remete a uma igualdade de tensões em cada fase do compósito. O modelo de Reuss, portanto, é descrito pela Equação 2.2.2

$$C^h = [f_i C_i^{-1} + f_m C_m^{-1}]^{-1}. \quad (2.2.2)$$

Esta equação utiliza os mesmos parâmetros de entrada que o modelo de Voigt e a importância do cálculo de C^h neste modelo é que conduz a valores subestimados para as estimativas de rigidez elástica. Assim, o modelo de Reuss é considerado o limite inferior para o valor do módulo de elasticidade de um material compósito.

2.2.3 Tensões e deformações médias

Como notação nas teorias de homogeneização seguintes, utiliza-se C e S para o tensor de elasticidade e de flexibilidade da matriz M , respectivamente. Utiliza-se C^I e S^I no caso das inclusões e \bar{C} , \bar{S} para os tensores homogeneizados. Também define-se

a média de uma grandeza genérica $(.)$ como sendo:

$$\langle . \rangle_M = \frac{1}{M} \int_M (.) dV, \quad (2.2.3)$$

para uma grandeza definida na matriz.

$$\langle . \rangle_\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_\Omega (.) dV, \quad (2.2.4)$$

para uma grandeza definida na inclusão.

$$\langle . \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V (.) dV, \quad (2.2.5)$$

para uma grandeza definida na matriz.

Define-se a fração de volume para a inclusão como sendo

$$f_I = \frac{\Omega}{V} \quad (2.2.6)$$

e para a matriz:

$$f_M = \frac{\Omega}{V}, \quad (2.2.7)$$

equivalente ao escrito no método de Voigt e de Reuss. No caso da tensão média ao longo do RVE, pela equação 2.2.5, passa a ser definida como

$$\langle \sigma \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV, \quad (2.2.8)$$

mas, como $V = M \cup \Omega$, então

$$\langle \sigma \rangle_V = \frac{1}{V} \int_{M \cup \Omega} \sigma dV, \quad (2.2.9)$$

o qual pode ser reescrito como

$$\langle \sigma \rangle_V = \frac{1}{V} \left(\frac{M}{M} \int_M \sigma dV + \frac{\Omega}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma dV \right), \quad (2.2.10)$$

ou ainda,

$$\langle \sigma \rangle_V = f_M \langle \sigma \rangle_M + f_I \langle \sigma \rangle_{\Omega}, \quad (2.2.11)$$

equivalente a

$$f_M \langle \sigma \rangle_M = \langle \sigma \rangle_V - f_I \langle \sigma \rangle_{\Omega}, \quad (2.2.12)$$

que, pela Lei de Hooke generalizada se torna:

$$f_M \langle \sigma \rangle_M = \bar{\mathbf{C}} : \langle \varepsilon \rangle_V - f_I \mathbf{C}^I : \langle \varepsilon \rangle_{\Omega}. \quad (2.2.13)$$

Além disso, pode-se definir a deformação média ao longo do RVE, também com o uso da equação 2.2.5, como sendo:

$$\langle \varepsilon \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon dV = \frac{1}{V} \int_{M \cup \Omega} \varepsilon dV = \frac{1}{V} \left(\frac{M}{M} \int_M \varepsilon dV + \frac{\Omega}{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon dV \right), \quad (2.2.14)$$

de maneira que

$$\langle \varepsilon \rangle_V = f_M \langle \varepsilon \rangle_M + f_I \langle \varepsilon \rangle_{\Omega}. \quad (2.2.15)$$

Neste caso,

$$f_M \langle \varepsilon \rangle_M = \langle \varepsilon \rangle_V - f_I \langle \varepsilon \rangle_{\Omega}, \quad (2.2.16)$$

equivalente, pela Lei de Hooke generalizada à:

$$f_M \langle \varepsilon \rangle_M = \bar{\mathbf{S}} : \langle \varepsilon \rangle_V - f_I \mathbf{S}^I : \langle \sigma \rangle_{\Omega}. \quad (2.2.17)$$

Além disto,

$$f_M \langle \sigma \rangle_M = f_M \mathbf{C} : \langle \varepsilon \rangle_M, \quad (2.2.18)$$

que pela Equação 2.2.16:

$$f_M \langle \sigma \rangle_M = \mathbf{C} : (\langle \varepsilon \rangle_V - f_I \langle \varepsilon \rangle_\Omega). \quad (2.2.19)$$

Esta última equação, combinada com a Equação 2.2.13:

$$\bar{\mathbf{C}} : \langle \varepsilon \rangle_V - f_I \mathbf{C}^I : \langle \varepsilon \rangle_\Omega = \mathbf{C} : \langle \varepsilon \rangle_V - \mathbf{C} : f_I \langle \varepsilon \rangle_\Omega, \quad (2.2.20)$$

ou seja,

$$(\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{C}) : \langle \varepsilon \rangle_V = f_I (\mathbf{C}^I - \mathbf{C}) : \langle \varepsilon \rangle_\Omega. \quad (2.2.21)$$

Por fim, unindo

$$f_M \langle \varepsilon \rangle_M = f_M \mathbf{S} : \langle \sigma \rangle_M = \mathbf{S} : (\langle \sigma \rangle_V - f_I \langle \sigma \rangle_\Omega), \quad (2.2.22)$$

com a Equação 2.2.17, chega-se à

$$\bar{\mathbf{S}} : \langle \sigma \rangle_V - f_I \mathbf{S}^I : \langle \sigma \rangle_\Omega = \mathbf{S} : (\langle \sigma \rangle_V - f_I \langle \sigma \rangle_\Omega), \quad (2.2.23)$$

ou seja,

$$(\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}) : \langle \sigma \rangle_V = f_I (\mathbf{S}^I - \mathbf{S}) : \langle \sigma \rangle_\Omega, \quad (2.2.24)$$

A Equação 2.2.21 e a Equação 2.2.24 são relações determinantes para o avanço das teorias apresentadas na sequência.

2.2.4 Princípio de equivalência de Eshelby

O princípio de equivalência de Eshelby é um método de homogeneização e por isto tem como objetivo estabelecer uma relação entre as propriedades do material na macroescala e as distribuições heterogêneas na microescala.

A idéia básica de Eshelby é substituir o RVE heterogêneo analisado por um equivalente homogêneo, de maneira que o campo de tensões e deformações em ambos os casos sejam equivalentes mecanicamente. Então, supõe-se que o sólido está sujeito a uma tração, conhecida em seu contorno, $\mathbf{t} = n \cdot \boldsymbol{\sigma}^0$. Como há perturbação por conta das heterogeneidades, então as tensões e deformações no interior do sólido serão dadas por

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \boldsymbol{\sigma}^o + \boldsymbol{\sigma}^p(x), \quad (2.2.25)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^p(x). \quad (2.2.26)$$

Como $\boldsymbol{\sigma}^0$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ representam a tensão e a deformação prescritas, respectivamente, então vale a Lei de Hooke generalizada, para as propriedades da matriz. Ou seja, $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}^0$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}^0$. No interior do sólido, as propriedades mudam de maneira que, no primeiro caso, em que a tensão é prescrita:

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \begin{cases} \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^p(x)), & x \in M \\ \mathbf{C}^I : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^p(x)), & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.2.27)$$

E ainda,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \mathbf{S} : (\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^p(x)), & x \in M \\ \mathbf{S}^I : (\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^p(x)), & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.2.28)$$

A Figura 2.7 mostra que um sólido possui uma deformação sob a ação de uma

tensão específica que varia de acordo com cada componente do material. Assim, existe um tensor de elasticidade para cada componente envolvido.

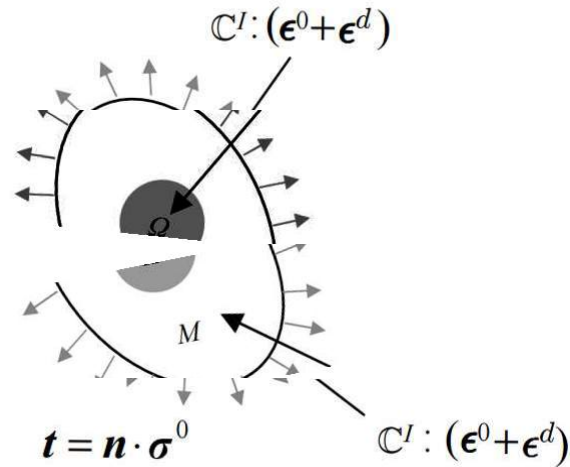


FIGURA 2.7: Material sujeito a uma tensão prescrita. Adaptado de (LI; WANG, 2008)

A proposta é reescrever o campo de deformação utilizando

$$\epsilon^*(x) = \begin{cases} 0, & x \in M \\ \epsilon^*, & x \in \Omega \end{cases} . \quad (2.2.29)$$

Desta maneira, pode-se escrever as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \mathbf{C} : (\epsilon(x) - \epsilon^*(x)) \\ &= \begin{cases} \mathbf{C} : (\epsilon^0 + \epsilon^p(\mathbf{x})), & x \in M \\ \mathbf{C} : (\epsilon^0 + \epsilon^p(x) - \epsilon^*), & x \in \Omega \end{cases} . \\ &= \begin{cases} \mathbf{C} : (\epsilon^0 + \epsilon^p(x)), & x \in M \\ \mathbf{C}^I : (\epsilon^0 + \epsilon^p(x)), & x \in \Omega \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

A Figura 2.8 ilustra o modelo equivalente por homogeneização, o qual substitui a existência dos dois ou mais componentes por um material equivalente em termos do seu coeficiente de elasticidade.

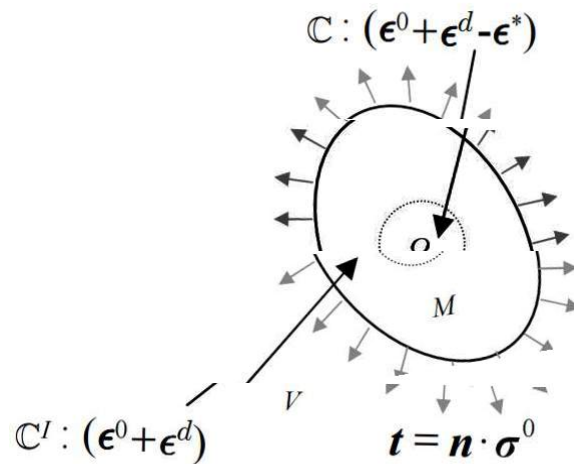


FIGURA 2.8: Homogeneização proposta por Eshelby. Adaptado de (LI;WANG, 2008)

Reescrevendo a Equação 2.2.30 com o uso da Equação 2.2.25

$$\sigma(x) = \mathbf{C} : (\epsilon(x) - \epsilon^*(x)). \quad (2.2.31)$$

Ou ainda,

$$\sigma^0 + \sigma^p(x) = \mathbf{C} : (\epsilon^0 + \epsilon^p(x) - \epsilon^*(x)). \quad (2.2.32)$$

Então,

$$\sigma^p(x) = \mathbf{C} : (\epsilon^p(x) - \epsilon^*(x)). \quad (2.2.33)$$

Também pode-se reescrever a Equação 2.2.30 de maneira que

$$\mathbf{C}^I : (\epsilon^0 + \epsilon^d) = \mathbf{C} : (\epsilon^0 + \epsilon^p - \epsilon^*). \quad (2.2.34)$$

E, em termos do tensor de flexibilidade:

$$\epsilon^p(x) = \mathbf{S} : \sigma^p(x) + \epsilon^*(x). \quad (2.2.35)$$

No caso em que o deslocamento na fronteira é conhecido, ou seja,

$$\mathbf{u}(x) = \boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot x, \forall x \in \partial V, \quad (2.2.36)$$

a Figura 2.9 mostra a situação que pode ser descrita a partir de uma perturbação no campo de tensões. Ela é equivalente a figura 2.7 para o tensor de flexibilidade. Veja que para os dois componentes distintos, o tensor muda e sua resposta ao deslocamento prescrito também se altera.

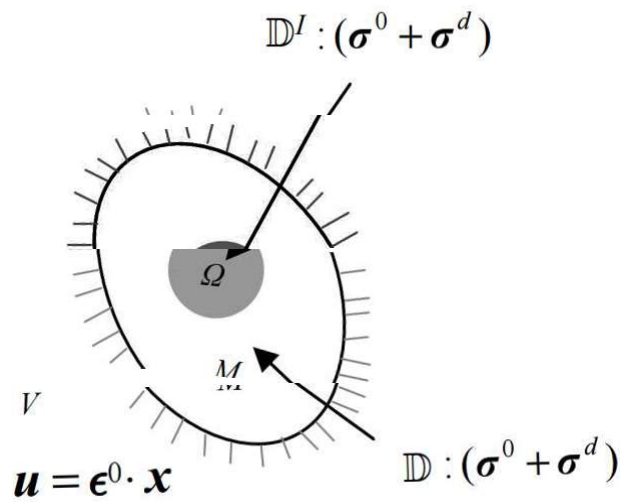


FIGURA 2.9: Material sujeito a uma deformação prescrita. Adaptado de (LI;WANG,2008)

Neste caso,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(x) = \begin{cases} \mathbf{S} : (\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^p(x)), & x \in M \\ \mathbf{S}^I : (\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^p(x)), & x \in \Omega \end{cases}, \quad (2.2.37)$$

considerando uma distribuição de tensões tal que

$$\boldsymbol{\sigma}^*(x) = \begin{cases} 0, & x \in M \\ \boldsymbol{\sigma}^*, & x \in \Omega \end{cases}, \quad (2.2.38)$$

e

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(x) = \begin{cases} \mathbf{S} : (\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^P(x)) \\ \mathbf{S} : (\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^P(x) - \boldsymbol{\sigma}^*) \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{S} : (\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^P(x)), & x \in M \\ \mathbf{S}^I : (\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^P(x)), & x \in \Omega \end{cases}. \quad (2.2.39)$$

Esta homogeneização proposta está representada na Figura 2.10, o qual representa um material representativo substituído com mesmas condições do material compósito.

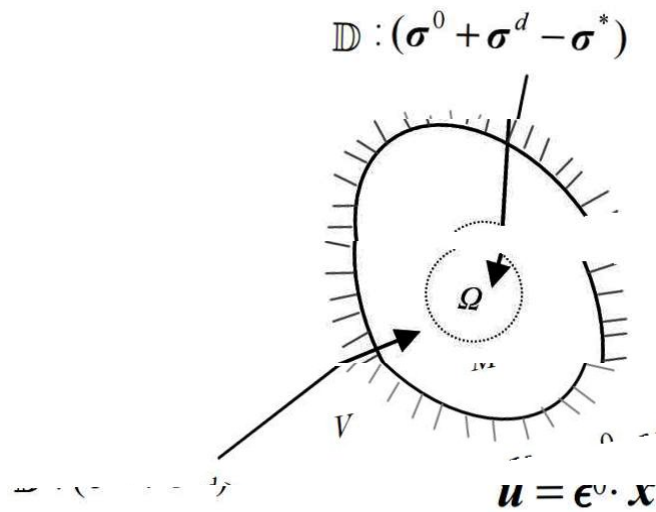


FIGURA 2.10: Homogeneização proposta por Eshelby. Adaptado de (LI;WANG,2008)

Assim, reescrevendo a Equação 2.2.39 com o uso da 2.2.25:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{S} : (\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^P(x) - \boldsymbol{\sigma}^*) \quad (2.2.40)$$

se torna:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^P(x) = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}^P(x) - \boldsymbol{\sigma}^*, \forall x \in V. \quad (2.2.41)$$

Ou ainda,

$$\boldsymbol{\sigma}^P(x) = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^P(x) + \boldsymbol{\sigma}^*. \quad (2.2.42)$$

Comparando a Equação 2.2.42 com a Equação 2.2.35, chega-se às seguintes identidades:

$$\boldsymbol{\sigma}^*(x) + \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^*(x) = 0 \quad (2.2.43)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*(x) + \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}^*(x) = 0. \quad (2.2.44)$$

Eshelby imaginou a relação existente entre a forma contraída e a forma transformada da inclusão através de um tensor, chamado de tensor de Eshelby (ESHELBY, 1957, 1959):

$$e^* = \mathbf{E}e^{eq}. \quad (2.2.45)$$

Este tensor de quarta ordem varia de acordo com várias propriedades da inclusão, como o tamanho, a forma e as constantes elásticas. Para alguns casos específicos este tensor já foi descrito. Por exemplo, para uma inclusão esférica, o tensor de Eshelby possui sua expressão dada por (WEIBERGER; CAI; BARNETT, 2004):

$$E_{ijkl} = \frac{5\nu - 1}{15(1 - \nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{4 - 5\nu}{15(1 - \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (2.2.46)$$

onde δ_{ij} representa o delta de Kronecker o qual retorna o valor 1 no caso em que os índices são iguais e 0 no caso em que os índices são diferentes.

2.3 TENSORES DE CONCENTRAÇÃO

Sendo \mathbf{A}^I dado por:

$$\mathbf{A}^I = (\mathbf{C} - \mathbf{C}^I)^{-1} : \mathbf{C}, \quad (2.3.1)$$

pode-se escrever a relação entre a deformação média e a deformação no interior da inclusão através da expressão:

$$\langle \varepsilon \rangle_{\Omega} = \mathbf{A}^I : \varepsilon^*. \quad (2.3.2)$$

Considerando uma quantidade pequena de inclusões, pode-se realizar uma simplificação em relação às interações existentes entre as inclusões. Nesse caso, como no método de Eshelby, pode-se escrever a relação entre as deformações como mostrado na Equação 2.2.45. Além disso,

$$\varepsilon^* = (\mathbf{A}^I - \mathbf{E})^{-1} : \varepsilon^0, \quad (2.3.3)$$

desta forma, a Equação 2.3.2 pode ser reescrita:

$$\langle \varepsilon \rangle_{\Omega} = \mathbf{A}^I : \varepsilon^* = \mathbf{A}^I : (\mathbf{A}^I - \mathbf{E})^{-1} : \varepsilon^0 = \Upsilon : \varepsilon^0. \quad (2.3.4)$$

Υ dado por $\mathbf{A}^I : (\mathbf{A}^I - \mathbf{E})^{-1}$ é um tensor chave na teoria da homogeneização conhecido como um tensor das concentrações.

Além disso, sendo \mathbf{B}^I dado por:

$$\mathbf{B}^I = (\mathbf{S} - \mathbf{S}^I)^{-1} : \mathbf{S}, \quad (2.3.5)$$

escreve-se a relação entre a tensão média e a tensão na inclusão como sendo:

$$\langle \sigma \rangle_{\Omega} = \mathbf{B}^I : \sigma^* \quad (2.3.6)$$

e escreve-se

$$\sigma^* = (\mathbf{B}^I - \mathbf{E}^{-1})^{-1} : \sigma^0, \quad (2.3.7)$$

e a Equação 2.3.6 pode ser reescrita por:

$$\langle \sigma \rangle_{\Omega} = \mathbf{B}^I : \sigma^* = \mathbf{B}^I : (\mathbf{B}^I - \mathbf{E}^{-1})^{-1} : \sigma^0 = \Phi : \sigma^0, \quad (2.3.8)$$

onde Φ é dado por $\mathbf{B}^I : (\mathbf{B}^I - \mathbf{E}^{-1})^{-1}$ sendo um tensor das concentrações dos modelos.

2.4 MÉTODO AUTO-CONSISTENTE

Neste caso de homogeneização, considera-se que a interação entre as inclusões e a fronteira do RVE podem ser desprezadas. Pode-se desenvolver o resultado para o caso em que as tensões ou as deformações são prescritas na fronteira do RVE.

No caso em que as tensões são prescritas, mostrou-se que a equação básica que rege a homogeneização é a Equação 2.2.24, dada por:

$$(\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}) : \langle \sigma \rangle_V = f_I (\mathbf{S}^I - \mathbf{S}) : \langle \sigma \rangle_{\Omega}. \quad (2.4.1)$$

Como, em termos dos tensores de concentração, vale a Equação 2.3.6, então reescreve-se como:

$$(\bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}) : \sigma^0 = f_I (\mathbf{S}^I - \mathbf{S}) : \Phi : \sigma^0, \quad (2.4.2)$$

a qual ainda pode ser reescrita para determinar o tensor efetivo de flexibilidade homogeneizado de maneira explícita:

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + f_I (\mathbf{S}^I - \mathbf{S}) : \Phi, \quad (2.4.3)$$

que em termos do tensor de Eshelby:

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S} - f_I \mathbf{S} : (\mathbf{B} - \mathbf{E}^{-1})^{-1}. \quad (2.4.4)$$

No caso em que os compósitos se apresentarem em $n + 1$ fases, pode-se generalizar a expressão determinada para encontrar o tensor de flexibilidade homogeneizado

(LI; WANG, 2008):

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S} - \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha} \mathbf{S} : (\mathbf{B}^{\alpha} - \mathbf{E}^{-1})^{-1}. \quad (2.4.5)$$

A Equação 2.4.5 representa o esquema de homogeneização para distribuição de inclusões diluídas no caso em que as tensões na fronteira são conhecidas. Se, ao invés disso, o deslocamento na fronteira do RVE for conhecido, então utiliza-se a Equação 2.2.21 combinada com a Equação 2.3.4,

$$(\bar{\mathbf{C}} - \mathbf{C}) : \boldsymbol{\varepsilon}^0 = f_I (\mathbf{C}^I - \mathbf{C}) : \boldsymbol{\Upsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}^0, \quad (2.4.6)$$

que na forma explícita:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + f_I (\mathbf{C}^I - \mathbf{C}) : \boldsymbol{\Upsilon}. \quad (2.4.7)$$

e em termos do tensor de Eshelby:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - f_I \mathbf{C} : (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}. \quad (2.4.8)$$

No caso em que os compósitos se apresentarem em $n + 1$ fases, pode-se generalizar a expressão determinada para encontrar o tensor de elasticidade homogeneizado (LI; WANG, 2008):

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha} \mathbf{C} : (\mathbf{A}^{\alpha} - \mathbf{E})^{-1}. \quad (2.4.9)$$

2.5 MÉTODO DE MORI-TANAKA

O método de Mori-Tanaka é um dos métodos de homogeneização mais populares atualmente. Tal método considera as interações entre as inclusões e a forma das inclusões para deduzir a expressão para o cálculo do tensor de elasticidade efetivo.

Tal método considera uma inclusão por vez, e calcula as novas propriedades efetivas para cada caso. Assim, ao realizar este processo, chega-se a Equação 4.1.20.

$$\bar{\mathbf{C}} = [(f_m \mathbf{C} + f_i \mathbf{C}_i : \Upsilon) : (f_m \mathbf{I} + f_i \Upsilon)]^{-1}, \quad (2.5.1)$$

que descreve o método de Mori-Tanaka e também utiliza como parâmetros os tensores de elasticidade da matriz e da inclusão, além do tensor de concentração calculado no método auto-consistente.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA SOBRE O CONCRETO E A REAÇÃO ÁLCALI-SÍLICA

O material simulado nesta tese é o concreto presente em barragens de usinas hidrelétricas, que está sujeito à uma umidade maior que o concreto de outras estruturas. Concreto sob umidade se torna sujeito a reações químicas indesejadas, como a reação álcali-sílica que danifica, ao longo do tempo, este material.

Para descrever as propriedades efetivas do material, é necessário conhecer propriedades de cada um dos seus componentes como forma, quantidade e tensores de elasticidade.

Assim, este capítulo apresenta as características básicas dos constituintes do concreto: argamassa e agregados graúdos, os quais são definidos pela ABNT NBR NM 248:2003 e discutidos na seção seguinte.

Após esta fundamentação, este capítulo traz informações sobre a reação álcali-sílica e sobre os modelos atuais de simulação de sua evolução.

3.1 CONCRETO

Para esta discussão será diferenciado o concreto básico do concreto afetado pela reação alcali-agregado. O concreto básico é composto por argamassa e agregados graúdos.

Para realizar a homogeneização deste tipo de concreto pode-se considerar os agregados graúdos como inclusões na matriz (argamassa) e estes agregados podem ser aproximados por inclusões elípticas. Portanto, para aplicar os métodos de homogeneização basta ter conhecimento sobre o tensor de elasticidade dos constituintes e a proporção de cada um destes presentes na mistura, além do formato predominante.

3.1.1 Argamassa

A NBR 13281 (TÉCNICAS, 2005), define argamassa como sendo uma mistura homogênea entre agregados miúdos, aglomerantes inorgânicos e água, como mostra a Figura 3.1. No concreto, cerca de 50% a 52% de sua composição é argamassa.

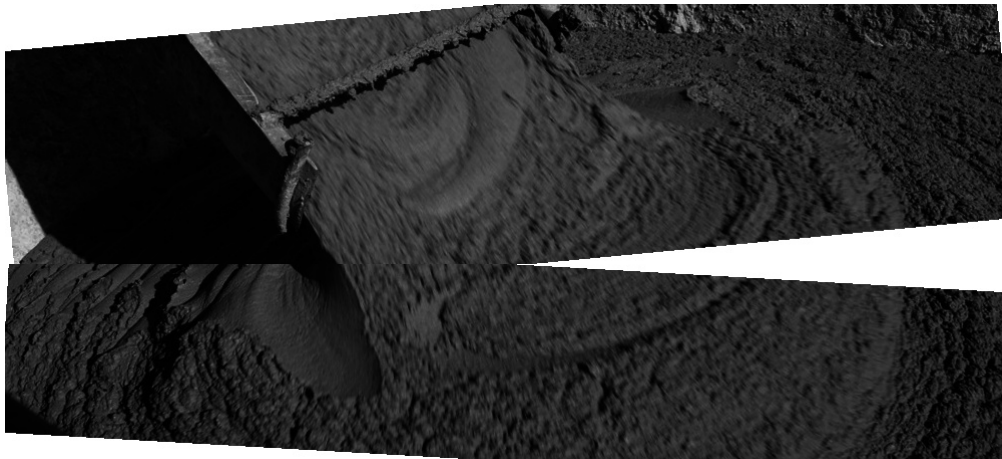


FIGURA 3.1: Argamassa, constituinte do concreto Fonte: (Quality, 2015)¹

Para a simulação computacional, a argamassa será considerada como um material isotrópico que possui propriedades que podem ser determinadas a partir de vias experimentais. Como base de valores numéricos, serão utilizados os valores encontrados em (RASSY, 2012) para o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson.

Neste caso, seu módulo de elasticidade E será de $3 \cdot 10^4$ MPa e seu coeficiente de Poisson ν de $3 \cdot 10^{-1}$. Com estas informações, pode-se escrever o tensor constitutivo da argamassa, C_{ar} dada por:

$$C_{ar} = \begin{bmatrix} 6,7 \cdot 10^4 & 1,7 \cdot 10^4 & 1,7 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,7 \cdot 10^4 & 6,7 \cdot 10^4 & 1,7 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,7 \cdot 10^4 & 1,7 \cdot 10^4 & 6,7 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,5 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,5 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

¹Disponível em: <http://www.quality-concretos.com/resources/Quality%20site%2036.jpg>

3.1.2 Agregados Graúdos

Para a formação de concreto de usinas hidrelétricas, além de argamassa são utilizados agregados obtidos de jazidas perto dos grandes centros de distribuição. Para evitar gastos desnecessários com o deslocamento, geralmente utilizam-se materiais advindos da própria região. Como cada região possui especificidades em relação ao tipo de agregados encontrados, cada simulação se torna única para o tipo de material utilizado.

O tipo de agregado graúdo utilizado se baseia em rochas que podem ser classificadas, quanto à sua gênese em: rochas ígneas, rochas sedimentares e rochas metamórficas. (SBRIGHI, 2011). Para estruturas que demandam um alto nível de exigência técnica, escolhe-se utilizar as rochas ígneas, pois devida à sua composição mineralógica, textura e estrutura tendem a produzir microestruturas mais densas e compactas.

Representam rochas ígneas o basalto, o granito, o diabásio, entre outras. Além deste nome, também são conhecidas como rochas magmáticas por serem originadas pela consolidação do magma. Para esta tese foram utilizados como referência propriedades efetivas da brita basáltica.

A Figura 3.2 mostra um exemplo de brita basáltica, extraída da pedreira de Ibiporã - PR.

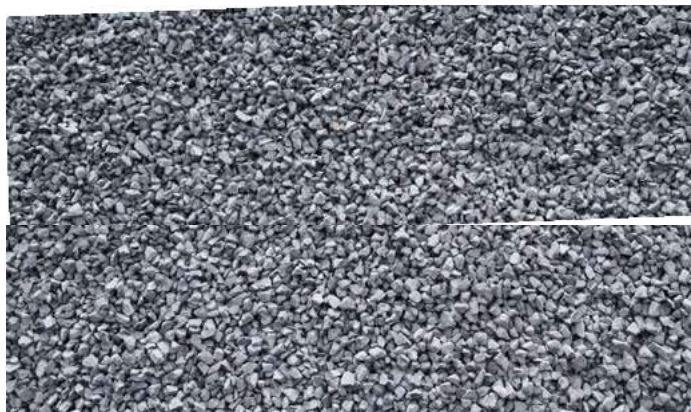


FIGURA 3.2: Brita basáltica, constituinte do concreto. Fonte: (Pedreira Guaravera)²

²Disponível em: <http://www.pedreiraguaravera.com.br/imagens/img-produto-brita12.jpg>. Acesso em:

Estes tipos de agregados citados são considerados como agregados naturais. Entretanto, trabalhos recentes indicam modelos de simulação computacional para agregados reciclados, como entulho de construções ou demolições e como garrafas PET.

O agregado graúdo, considerado como componente do concreto neste trabalho, se difere do agregado miúdo pela suas dimensões. Essa classificação, discriminada pela norma ABNT NBR 7211:2011, é realizada através de um teste de peneiramento tais que os grãos considerados como agregados graúdos passam pela peneira com abertura de malha de $76mm$ e são barrados na peneira com abertura de malha de $4,75mm$. Este ensaio é realizado de acordo com a ABNT NBR NM 248:2003, com peneiras padronizadas pela norma ABNT NBR ISO 3310-1:2010 (SBRIGHI, 2011).

Para a simulação computacional, os agregados graúdos também serão considerados como um material isotrópico que possui propriedades que podem ser determinadas a partir de vias experimentais. Como base de valores numéricos, serão utilizados os valores encontrados em (RASSY, 2012) para o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson.

Neste caso, seu módulo de elasticidade E será de 5.10^4 MPa e seu coeficiente de Poisson ν de $1,3.10^{-1}$. Com estas informações, pode-se escrever o tensor constitutivo dos agregados graúdos, C_{ag} dada por:

$$C_{ag} = \begin{bmatrix} 5,3.10^4 & 7,6.10^3 & 7,6.10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 7,6.10^3 & 5,3.10^4 & 7,6.10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 7,6.10^3 & 7,6.10^3 & 5,3.10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,3.10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,3.10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,3.10^4 \end{bmatrix}. \quad (3.1.2)$$

3.2 CONCRETO AFETADO PELA REAÇÃO ÁLCALI-AGREGADO

(CHARWOOD; SOLYMAR, 1994) mostra que existe um grande número de usinas hidrelétricas de concreto afetadas pela reação álcali-agregado. Essa reação produz uma expansão do concreto que leva a uma perda de resistência, a distorções e a fissuras.

Uma simulação computacional do concreto presente em usinas hidrelétricas poderia ser realizada considerando a presença apenas de argamassa e agregados graúdos. Entretanto, esta simulação se tornará mais realista ao considerar a presença do gel que se forma, ao longo do tempo, fruto da reação álcali-agregado. Considerando este material como um terceiro constituinte do concreto, pode-se escrever uma nova metodologia para encontrar as propriedades efetivas do material.

Esta reação resulta na formação de um gel que tem a propriedade de absorver água, o que o leva a uma expansão e a formação de microfissuras (YURTDAS *et al.*, 2013). Tais microfissuras são responsáveis pela evolução da danificação, a partir de sua propagação até a possível fissura do material. A Figura 3.3 ilustra essa evolução.

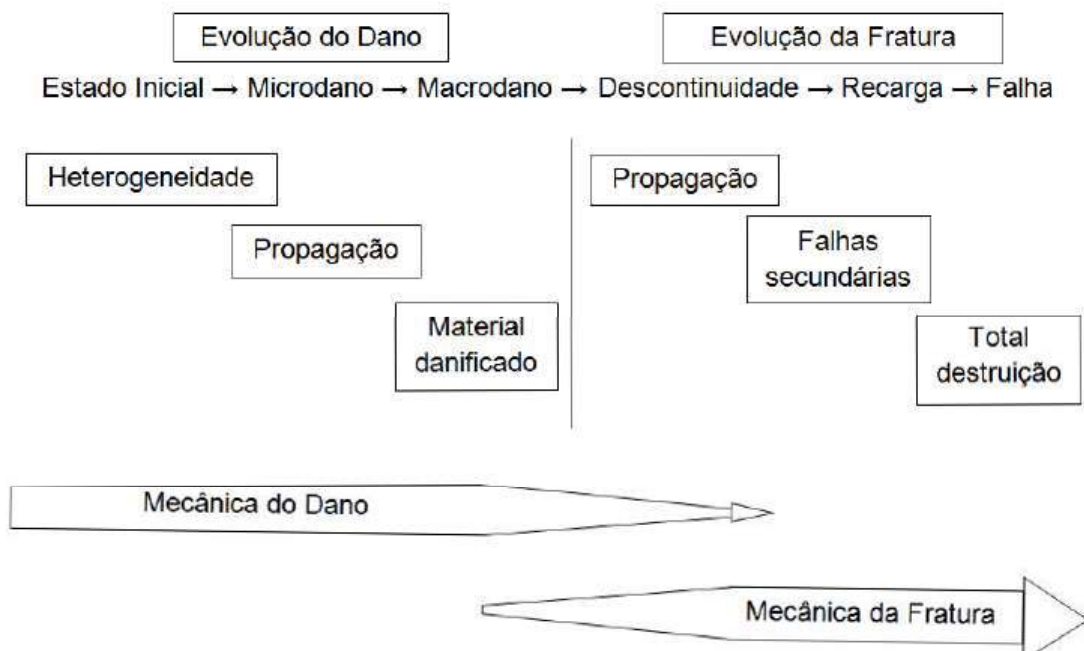


FIGURA 3.3: Processo da microfissura até o rompimento do material (RASSY, 2012)

3.2.1 Reação álcali-sílica

Os estudos referentes a patologias do concreto, como a reação álcali-agregado, são realizados desde 1940. Podem-se citar os seguintes trabalhos: (GLASSER, 1979), (HOBBS, 1981), (GLASSER; KATAOKA, 1982), (DRON; BRIVOT, 1992), (PE-SAVENTO *et al.*, 2012) e (BALBO *et al.*, 2014).

Entre as reações álcali-agregado existentes, existe uma reação específica conhecida como reação álcali-sílica a qual ocorre quando há agregado reativo, juntamente com a disponibilidade de álcalis provenientes do cimento Portland e também um alto grau de umidade. Esta umidade é responsável por tornar disponíveis os álcalis e hidroxilas que por sua vez quebram as ligações do tipo siloxano e silanol que estão presentes no agregado reativo. Esta quebra leva a formação de um gel que absorve água e expande (BALBO *et al.*, 2014).

Um esquema do processo pode ser visto na Figura 3.4 que apresenta a formação do gel, que por sua vez expande e causa as fissuras.

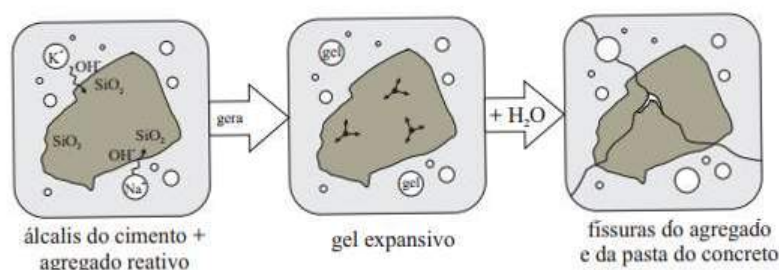
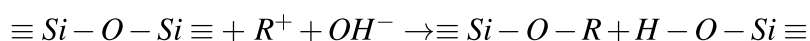


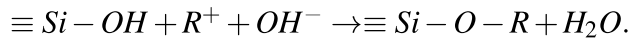
FIGURA 3.4: Formação, expansão do gel e fissura do agregado e pasta do cimento (BALBO *et al.*, 2014)

Como descrito em (BALBO *et al.*, 2014), a reação álcali-sílica consiste inicialmente dos íons hidroxilas OH^- que reagem com a superfície do agregado, rompendo as ligações do tipo siloxano $\equiv Si - O - Si \equiv$, formando ligações do tipo silanol $\equiv Si - OH$.



Nesta reação, R^+ denota os íons alcalinos sódio Na^+ e potássio K^+ . Na sequência, os íons hidroxila continuam o ataque, desta vez nas ligações do tipo silanol, de acordo

com:



O gel álcali-sílico $\equiv Si - O - R \equiv$ é formado nestas etapas.

Os parâmetros utilizados para a geração e difusão do gel são exemplificados na seção seguinte.

O modelo de desenvolvimento teórico da reação alcali-sílica pode ser observado na Figura 3.5

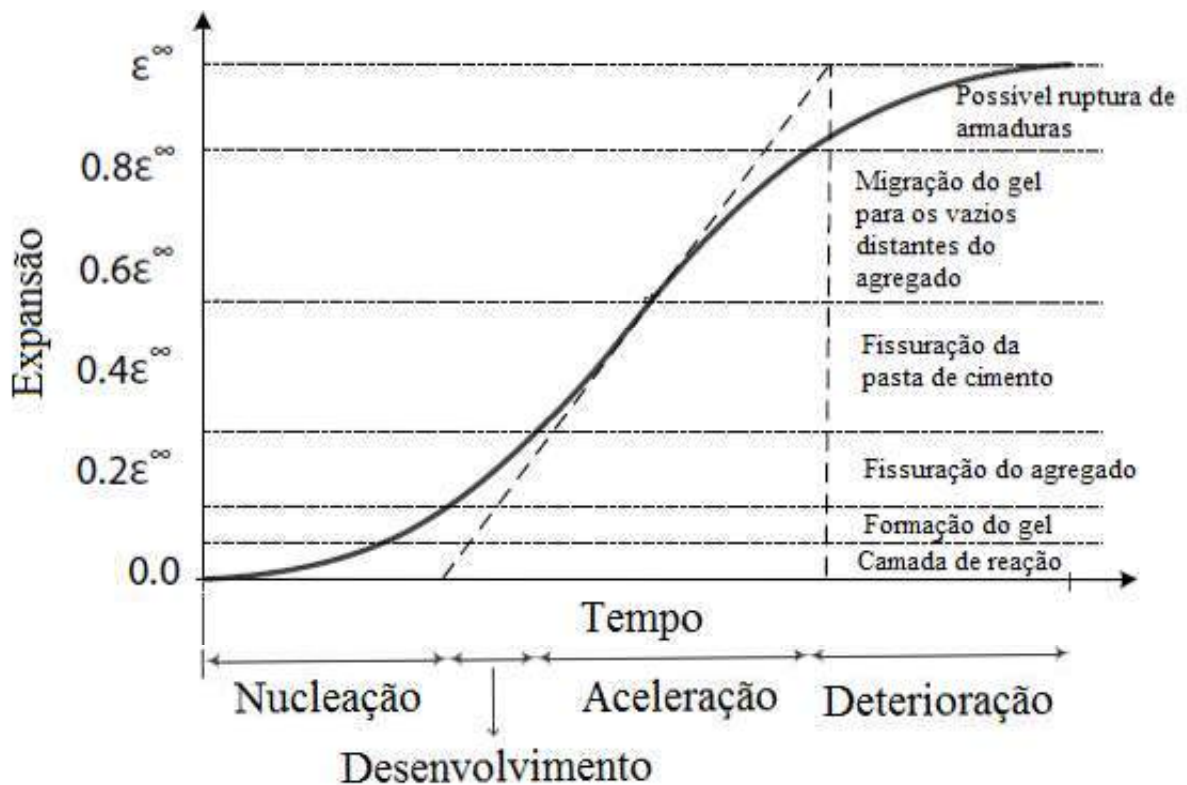


FIGURA 3.5: Mecanismo da reação álcali-sílica Fonte: (Deschenes, 2009)

A formação do gel ocorre após a camada de Nucleação da reação, quando atinge a quantidade necessária de elementos químicos. Na sequência é dada a formação do gel que se acelera e passa a fissurar o agregado. A partir daí, o processo de expansão se intensifica levando a fissuração da pasta de cimento até que os gel migre para os vazios distantes do agregado possibilitando a ruptura da estrutura.

4 MATERIAIS, MÉTODOS E RESULTADOS ENCONTRADOS

Este capítulo busca formalizar o que foi realizado ao longo do trabalho. O objetivo foi desenvolver um novo método para obtenção das propriedades efetivas do concreto sob ação da reação álcali-sílica, a partir de um modelo de homogeneização.

A Figura 4.1 apresenta as informações e modelagens que são utilizadas para prever as propriedades efetivas do concreto.

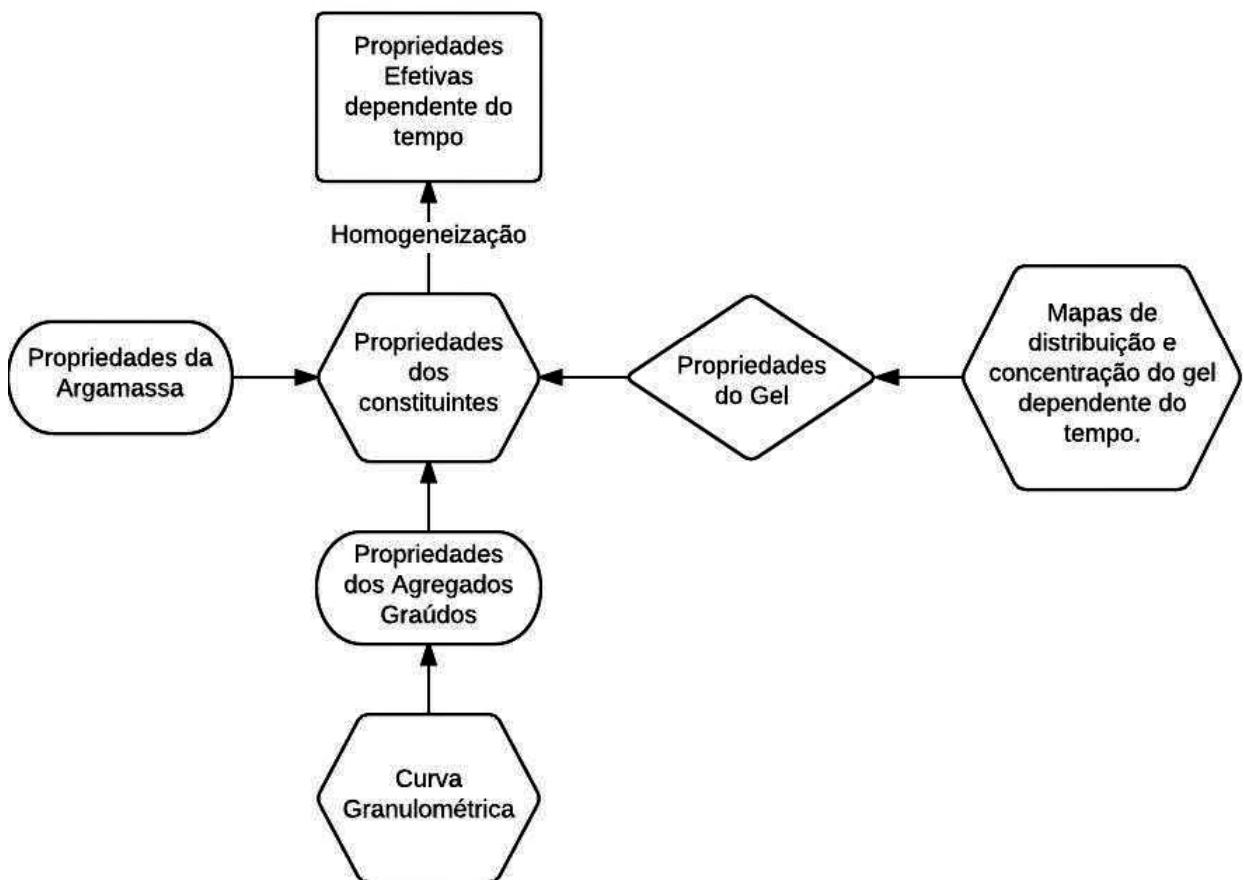


FIGURA 4.1: Algoritmo estruturado para concepção do modelo.

Como pode ser observado na Figura 4.1, as técnicas de homogeneização usam as propriedades dos constituintes para prever este resultado. Estas propriedades são obtidas de diversas maneiras para cada caso, sendo que os casos aqui são: propriedades da argamassa, dos agregados graúdos e do gel.

Para se determinar as propriedades da argamassa, considera-se como simplificação que este material se comporta como um material isotrópico. Por ser assim, o tensor de elasticidade que define suas propriedades elásticas pode ser definido a partir do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson. Estes parâmetros podem ser determinados experimentalmente ou encontrados na literatura, como discutidos no Capítulo 3.

Da mesma forma, as propriedades dos agregados graúdos podem ser determinadas aproximando-as por algum tipo de isotropia, entre aquelas discutidas no Capítulo 2. Estes dois vínculos apresentados, propriedades da argamassa e dos agregados graúdos, trazem à simulação características básicas do tipo de material utilizado. Entretanto, até o que foi apresentado, não temos informações satisfatórias que caracterizem as peculiaridades dos materiais utilizados em cada região. Como afirmado no capítulo anterior, cada barragem das usinas hidrelétricas são construídas com materiais próprios de maneira que existem diferenças fundamentais entre cada uma destas.

Este vínculo com o tipo de material utilizado é fornecido pela curva granulométrica. Essa é uma função de distribuição de partículas do solo. Todos os solos contêm partículas de diferentes tamanhos em proporções variadas. Essa função pode ser obtida por peneiramento, para amostras secas ou através do processo de sedimentação dos sólidos no meio líquido. O objetivo do peneiramento é separar os sólidos, em um solo, baseado em tamanhos. Para isso, utiliza-se uma série de peneiras de abertura de malha conhecidas que ao ser utilizada, determina a porcentagem em massa retida ou passante de cada peneira (NORMA ABNT NBR 7211:2011).

Estudar o solo a partir da sua curva granulométrica permite um melhor aproveitamento de cada material para utilização. Os agregados graúdos, presentes no concreto,

também podem ser estudados a partir de sua curva granulométrica. Para a criação do concreto de cimento, agregados finos requerem menos cimento para cobrir os vazios vistos na mesoestrutura, diminuindo a quantidade de água necessária por unidade de volume no concreto, diminuindo sua permeabilidade e aumentando a resistência ao deixá-lo menos exposto a reações químicas indesejáveis. O concreto utilizado em estradas requer um agregado que apresente uma curva granulométrica com agregados bem graduados, fazendo com que a quantidade de cimento utilizado seja menor (PINTO, 2008).

O cálculo das tensões que influenciam no comportamento do concreto em nível mesoscópico requer a geração de uma estrutura de agregados graúdos, onde a forma, o tamanho e a distribuição dos agregados simulam um concreto real do ponto de vista estatístico. Segundo (WRIGGERS, MOFTAH, 2006), a geração da configuração aleatória de partículas agregadas deve satisfazer as características básicas do material real. Com este objetivo, a distribuição deve ser tal que as partículas sejam o máximo possível macroscopicamente homogêneas no espaço. Assim, a curva granulométrica utilizada nesse trabalho é escolhida a partir de agregados graúdos de uma reserva, cuja distribuição segue uma certa curva representativa do material e além disso aloca cada partícula seguindo alguma regra de posicionamento. Para este trabalho, a geração dos agregados é realizada ao aproximar cada agregado como elipses na representação 2-D e elipsóides na representação 3-D.

A distribuição do tamanho dos agregados, dado pela sua curva granulométrica, foi representada por uma lista de valores discretos para cada abertura da peneira. A Tabela 9 a seguir.

TABELA 9: Resultado da análise granulométrica utilizado (WRIGGERS, MOFTAH, 2006)

d - Abertura da peneira (mm)	P(d) - Porcentagem total Retida (%)
12.70	0
9.50	23
4.75	74
2.36	100

Sendo $P(d)$ a porcentagem total retida na peneira de diâmetro d , pode-se calcular

a área de material reservado para a seção específica entre duas peneiras:

$$A_p[d_s, d_{s+1}] = \frac{P(d_{s+1}) - P(d_s)}{P(d_{max}) - P(d_{min})} a_p A, \quad (4.0.1)$$

no qual $A_p[d_s, d_{s+1}]$ é a área de material reservado para a seção específica entre as peneiras d_s e d_{s+1} , A é a área total do elemento representativo do concreto e a_p é a fração de área que os agregados ocupam. a_p é um parâmetro importante do método que pode ser estabelecido a partir de algumas grandezas físicas do concreto, como densidade e massa (PIANEZZER, 2014).

Os agregados graúdos foram gerados em formato elíptico. Os parâmetros que definem as elipses para esta simulação são θ , que representa o ângulo que o semi-eixo maior faz com a reta que une o centro das duas elipses, A_i e B_i que são respectivamente o semi-eixo maior e o semi-eixo menor, C_i é o centro da elipse i . Cada elipse gerada é armazenada através de 5 componentes. Duas componentes com a posição do centro, uma com o tamanho do semi-eixo maior, outra do semi-eixo menor e uma última componente com o ângulo que o semi-eixo maior faz com o sistema de referência. O posicionamento dos agregados é feito de acordo com o fluxograma da Figura 4.2

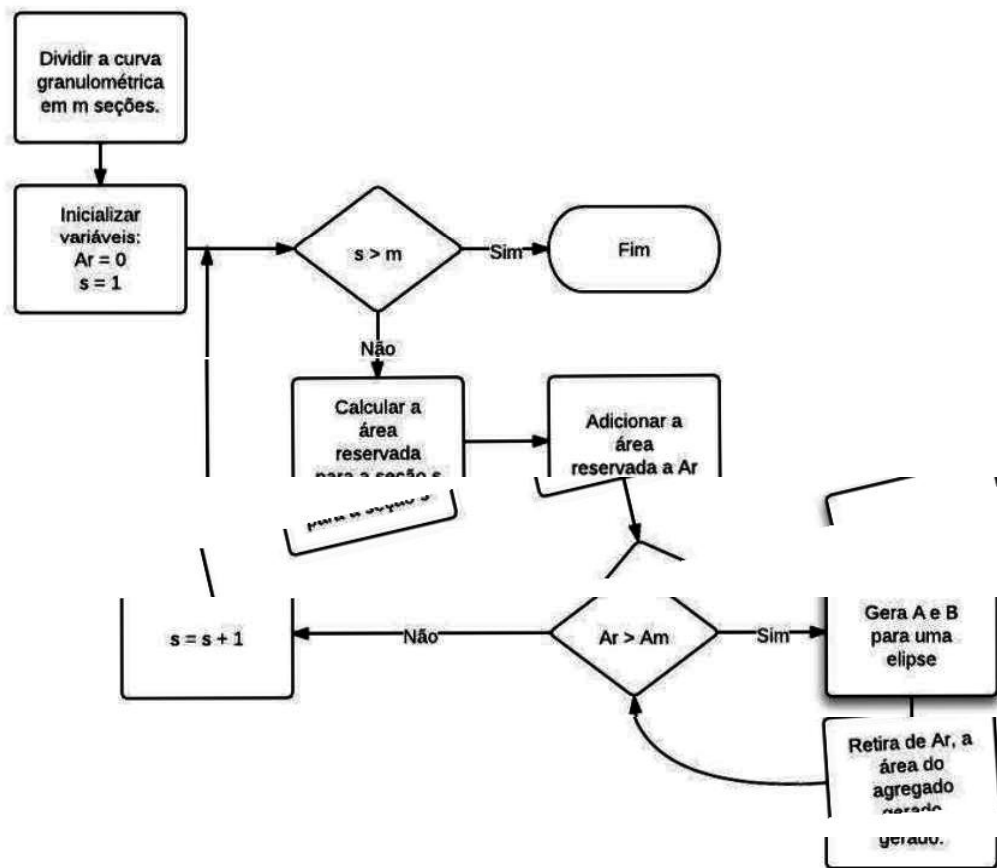


FIGURA 4.2: Fluxograma para geração dos agregados

No fluxograma da 4.2, A_r representa a área restante para a geração de agregados e A_m representa o agregado de área máximo que a seção s comporta. Portanto, enquanto houver espaço reservado para a criação do agregado elíptico de tamanho máximo daquela seção, o algoritmo irá posicionar um agregado. Para o posicionamento dos agregados são consideradas duas hipóteses: Primeiramente, os agregados devem estar inteiramente contidos no domínio do concreto. Em segundo lugar, não deve existir intersecção entre os agregados.

Para detectar as colisões entre os diversos agregados foi desenvolvido um procedimento que, ao adicionar um novo agregado na matriz de argamassa, verificou se havia intersecção entre os elementos. Considerou-se a elipse representada como:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0 \quad (4.0.2)$$

onde A representa uma matriz simétrica 3×3 que guarda os coeficientes da equação geral da elipse, e x representa o vetor coluna 3D das coordenadas homogêneas de um ponto no espaço euclidiano de dimensão 2. Escreve-se qualquer elipse, definindo a matriz A como combinação dos seus parâmetros. Para realizar um teste computacionalmente eficiente, foi usado como base o trabalho de (CHOI; WANG; LIU, 2005), nos quais os autores demonstraram que a existência ou não de colisão, entre duas elipses, pode ser determinada a partir do estudo dos sinais das raízes da equação característica.

O algoritmo gerador dos agregados foi implementado na linguagem Visual Basic .Net na plataforma Visual Studio .Net. O algoritmo para posicionamento dos agregados foi implementado no software MATLAB versão R2010. Um exemplo do elemento representativo gerado para $a_p = 60\%$ pode ser visto na Figura 4.3. O tamanho do concreto utilizado foi fixado em 10.000mm^2 , de forma quadrada com lados 100mm .

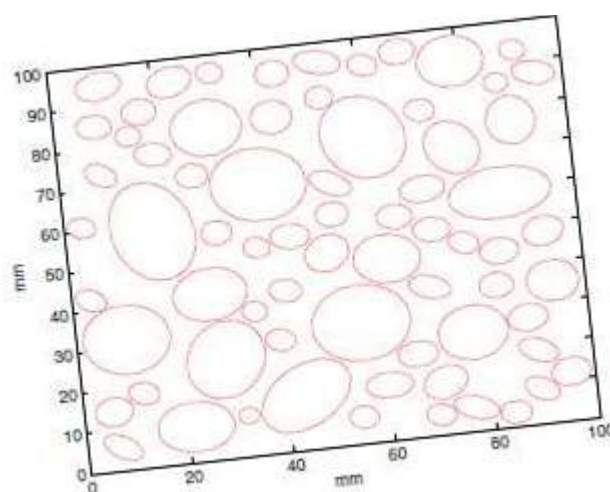


FIGURA 4.3: Elemento representativo do concreto com 60% de sua composição como agregados graúdos.

4.1 RESULTADOS ENCONTRADOS SEM A PRESENÇA DO GEL

As técnicas de homogeneização permitem prever as propriedades efetivas de um material compósito a partir das propriedades de seus constituintes: matriz e inclusão. Foram definidas algumas técnicas de homogeneização, entre estas o método de Voigt,

de Reuss, auto-consistente e o de Mori-Tanaka.

Para ilustrar como utilizar estas técnicas será discutido nesta seção como realizar a homogeneização para um problema simples composto duas fases.

Para isso, suponha a existência de um material compósito composto de duas fases. Como exemplo será utilizado o concreto na mesoescala (sem a influência da reação álcali-sílica) formado por argamassa (matriz) e agregados graúdos (inclusões). Este material é composto de duas fases. A ideia básica das técnicas de homogeneização é que não são conhecidas informações confiáveis sobre as propriedades do material final: o concreto. Isso pode acontecer por diversos motivos, e o principal aqui considerado, é o fato que o concreto se comporta como um material anisotrópico. Além disso, para aplicar as técnicas de homogeneização, assume-se que essa anisotropia se deve ao comportamento das suas fases.

A simplificação assumida pelas técnicas de homogeneização é que em algum nível de análise, são conhecidas as propriedades dos materiais estudados. No exemplo descrito aqui, é assumido que são conhecidas as propriedades da matriz e da inclusão estudados. Esse conhecimento pode ser derivado a partir do modelo clássico e de hipóteses como os diversos tipos de isotropia apresentados.

Para determinar os tensores que definem cada componente do material, assumiu-se como módulo de elasticidade $\mathbf{E} = 5 \times 10^4$ MPa e coeficiente de Poisson de $\nu = 1.3 \times 10^{-1}$, obtidos da literatura (RASSY, 2012). Estes valores podem ser determinados na literatura ou experimentalmente através de testes específicos para tal. Além disso, para este exemplo, assumiu-se que as inclusões se comportam como isotrópicas. Isso significa que o tensor de flexibilidade será definido por:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}. \quad (4.1.1)$$

Para os dados do problema,

$$\mathbf{S}_{ag} = \begin{bmatrix} 2,00 \times 10^{-5} & -2,60 \times 10^{-6} & -2,60 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ -2,60 \times 10^{-6} & 2,00 \times 10^{-5} & -2,60 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ -2,60 \times 10^{-6} & -2,60 \times 10^{-6} & 2,00 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7,69 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,69 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,69 \end{bmatrix}. \quad (4.1.2)$$

Como o tensor de flexibilidade e o tensor de elasticidade são inversos, foi possível inverter o tensor para caracterizar a inclusão pela Equação 4.1.3.

$$\mathbf{C}_{ag} = \begin{bmatrix} 5,30 \cdot 10^4 & 7,60 \cdot 10^3 & 7,60 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 7,60 \cdot 10^3 & 5,30 \cdot 10^4 & 7,60 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 \\ 7,60 \cdot 10^3 & 7,60 \cdot 10^3 & 5,30 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,30 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,30 \cdot 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,30 \cdot 10^4 \end{bmatrix}. \quad (4.1.3)$$

De maneira equivalente foi realizada a caracterização da argamassa. Como dados de referência foi utilizado módulo de elasticidade de $\mathbf{E} = 3,00 \times 10^4 \text{MPa}$ e coeficiente de Poisson de $\nu = 3,00 \times 10^{-1}$. O tensor de flexibilidade encontrado para a argamassa obtido

foi:

$$\mathbf{S}_{ar} = \begin{bmatrix} 3,33 \times 10^{-5} & -1,00 \times 10^{-5} & -1,00 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ -1,00 \times 10^{-5} & 3,33 \times 10^{-5} & -1,00 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ -1,00 \times 10^{-5} & -1,00 \times 10^{-5} & 3,33 \times 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,50 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,50 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,50 \times 10^4 \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

e invertendo o tensor:

$$\mathbf{C}_{ar} = \begin{bmatrix} 4,00 \cdot 10^4 & 1,70 \cdot 10^4 & 1,70 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,70 \cdot 10^4 & 4,00 \cdot 10^4 & 1,70 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,70 \cdot 10^4 & 1,70 \cdot 10^4 & 4,00 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,00 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,00 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,00 \cdot 10^5 \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

Foi considerado como valor para a fração volumétrica da inclusão 15%, o que conduz a 85% para o valor da fração volumétrica da matriz. Esses valores foram utilizados a título de exemplo.

4.1.1 Homogeneização pelo Método de Voigt

Como apresentado, o método de Voigt representa um limite superior para o valor do tensor de elasticidade efetivo do material compósito. Conhecendo as informações extraídas da inclusão e da matriz, o modelo de Voigt encontra o tensor homogeneizado através de:

$$\bar{\mathbf{C}} = f_{ag}\mathbf{C}_{ag} + f_{ar}\mathbf{C}_{ar}, \quad (4.1.6)$$

no qual f_{ag} e f_{ar} representam a fração volumétrica de agregado e argamassa, respectivamente. Para os dados obtidos no exemplo, o tensor de homogeneização estimado se torna:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 4,20 \cdot 10^4 & 1,56 \cdot 10^4 & 1,56 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,56 \cdot 10^4 & 4,20 \cdot 10^4 & 1,56 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,56 \cdot 10^4 & 1,56 \cdot 10^4 & 4,20 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,43 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,43 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,43 \cdot 10^5 \end{bmatrix}, \quad (4.1.7)$$

ao utilizar como fração de volume de agregados o valor de 15%. Ao inverter o tensor de elasticidade, pode-se encontrar uma estimativa para o tensor de flexibilidade, dado por:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 2,98 \cdot 10^{-5} & -8,09 \cdot 10^{-6} & -8,09 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ -8,09 \cdot 10^{-6} & 2,98 \cdot 10^{-5} & -8,09 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ -8,09 \cdot 10^{-6} & -8,09 \cdot 10^{-6} & 2,98 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,91 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,91 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,91 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}. \quad (4.1.8)$$

A inversão da matriz foi realizada utilizando o software MatLab. A partir do tensor de flexibilidade pode-se determinar uma estimativa para o módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson de $\mathbf{E} = 3,35 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ e $\nu = 2,71 \cdot 10^{-1}$, respectivamente.

4.1.2 Homogeneização pelo Método de Reuss

O método de Reuss representa um limite inferior para o valor do tensor de elasticidade efetivo do material compósito. Conhecendo as informações extraídas da inclusão e da matriz, o modelo de Reuss encontra o tensor homogeneizado através de:

$$\bar{\mathbf{C}} = [f_{ag}\mathbf{C}_{ag}^{-1} + f_{ar}\mathbf{C}_{ar}^{-1}]^{-1}. \quad (4.1.9)$$

Para os dados obtidos no exemplo, o tensor de homogeneização estimado se torna:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 4,09 \cdot 10^4 & 1,61 \cdot 10^4 & 1,61 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,61 \cdot 10^4 & 4,09 \cdot 10^4 & 1,61 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,61 \cdot 10^4 & 1,61 \cdot 10^4 & 4,09 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,16 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,16 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,16 \cdot 10^5 \end{bmatrix}. \quad (4.1.10)$$

Ao inverter o tensor de elasticidade, pode-se encontrar uma estimativa para o tensor de flexibilidade, dado por:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 3,14 \cdot 10^{-5} & -8,86 \cdot 10^{-6} & -8,86 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ -8,86 \cdot 10^{-6} & 3,14 \cdot 10^{-5} & -8,86 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ -8,86 \cdot 10^{-6} & -8,86 \cdot 10^{-6} & 3,14 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8,65 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8,65 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8,65 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}. \quad (4.1.11)$$

A partir do tensor de flexibilidade pode-se determinar uma estimativa para o mó-

dulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson de $3,19 \times 10^4 MPa$ e $2,84 \times 10^{-1}$, respectivamente.

4.1.3 Homogeneização pelo Método Auto-Consistente

Para essa homogeneização é necessário calcular o tensor de Eshelby para inclusões circulares. Neste caso este tensor é calculado através da expressão:

$$E_{ijkl} = \frac{5\nu - 1}{15(1 - \nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{4 - 5\nu}{15(1 - \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.1.12)$$

Com os valores fornecidos pelas Equações 4.1.3 e 4.1.5, o tensor de Eshelby é dado por:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4,87 \times 10^{-1} & -2,68 \times 10^{-2} & -2,68 \times 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ -2,68 \times 10^{-2} & 4,87 \times 10^{-1} & -2,68 \times 10^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ -2,68 \times 10^{-2} & -2,68 \times 10^{-2} & 4,87 \times 10^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,57 \times 10^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,57 \times 10^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,57 \times 10^{-1} \end{bmatrix}. \quad (4.1.13)$$

Além disso, é necessário calcular os tensores de concentração para então encontrar os tensor de elasticidade e de flexibilidade. Como:

$$\mathbf{A}_{ag} = (\mathbf{C}_{ar} - \mathbf{C}_{ag})^{-1} : \mathbf{C}_{ar}. \quad (4.1.14)$$

No caso descrito neste exemplo, temos que, ao substituir a Equação 4.1.3 e a Equação 4.1.5:

$$\mathbf{A}_{ag} = \begin{bmatrix} 3,57 & 4,60 & 4,60 & 0 & 0 & 0 \\ 4,60 & 3,57 & 4,60 & 0 & 0 & 0 \\ 4,60 & 4,60 & 3,57 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,06 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,06 \end{bmatrix} \quad (4.1.15)$$

e o tensor de concentração é dado por:

$$\Upsilon = \mathbf{A}_{ag} : (\mathbf{A}_{ag} - \mathbf{E})^{-1}. \quad (4.1.16)$$

Neste caso, pela Equação 4.1.15 e pela Equação 4.1.13:

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} 7,89 \times 10^{-1} & 1,23 \times 10^{-1} & 1,23 \times 10^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 1,23 \times 10^{-1} & 7,89 \times 10^{-1} & 1,23 \times 10^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 1,23 \times 10^{-1} & 1,23 \times 10^{-1} & 7,89 \times 10^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,32 \end{bmatrix} \quad (4.1.17)$$

e o tensor de elasticidade homogeneizado pelo método é finalmente, dado por:

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_{ar} + f_{ag}(\mathbf{C}_{ag} - \mathbf{C}_{ar}) : \Upsilon, \quad (4.1.18)$$

ou seja, com fração volumétrica de 15% e com o uso do resultado obtido nas Equações 4.1.3, 4.1.5 e 4.1.17, obtém-se:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 4,12 \times 10^4 & 1,70 \times 10^4 & 1,70 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,70 \times 10^4 & 4,12 \times 10^4 & 1,70 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,70 \times 10^4 & 1,70 \times 10^4 & 4,12 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,00 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,00 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,00 \times 10^5 \end{bmatrix}, \quad (4.1.19)$$

o que indica um módulo de elasticidade de $3,23 \times 10^4 \text{MPa}$ e um coeficiente de Poisson de $2,79 \times 10^{-1}$.

4.1.4 Homogeneização pelo Método de Mori-Tanaka

O esquema de homogeneização pelo método de Mori-Tanaka apresenta a seguinte estimativa para o tensor de elasticidade:

$$\bar{\mathbf{C}} = [(f_{ar} \mathbf{C}_{ar} + f_{ag} \mathbf{C}_{ag} : \mathbf{\Upsilon}) : (f_{ar} \mathbf{I} + f_{ag} \mathbf{\Upsilon})]^{-1}. \quad (4.1.20)$$

Assim, utilizando como base o tensor de concentração que é o mesmo utilizado no método auto-consistente (Equação 4.1.17), sendo \mathbf{I} a matriz identidade e tendo as informações sobre as propriedades dos constituintes (Equações 4.1.3 e 4.1.5), obtém-se o tensor das propriedades efetivas dado por:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 4,13 \times 10^4 & 1,59 \times 10^4 & 1,59 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,59 \times 10^4 & 4,13 \times 10^4 & 1,59 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 1,59 \times 10^4 & 1,59 \times 10^4 & 4,13 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,29 \times 10^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,29 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,29 \times 10^5 \end{bmatrix} \quad (4.1.21)$$

e como tensor de flexibilidade:

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 3,09 \cdot 10^{-5} & -8,59 \cdot 10^{-6} & -8,59 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ -8,59 \cdot 10^{-6} & 3,09 \cdot 10^{-5} & -8,59 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ -8,59 \cdot 10^{-6} & -8,59 \cdot 10^{-6} & 3,09 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,04 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,04 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,04 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}, \quad (4.1.22)$$

o que indica um módulo de elasticidade de $3,24 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ e um coeficiente de Poisson de $2,78 \cdot 10^{-1}$.

4.1.5 Resultados para outras concentrações de agregados

Para este exemplo, também foram executados casos em que a concentração de agregados no volume do concreto eram diferentes. Foram realizados testes com concentrações de 5% a 45%, intervalo de valores comuns encontrados nos problemas reais. Os resultados obtidos foram distribuídos em um gráfico como mostra a Figura

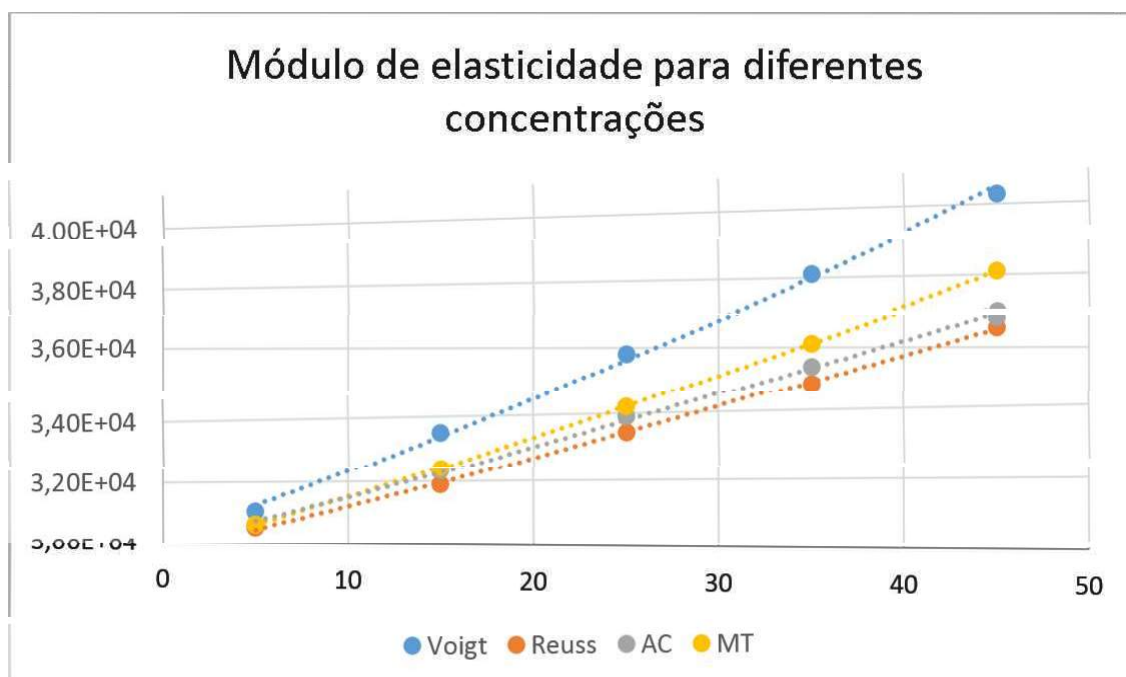


FIGURA 4.4: Módulo de elasticidade para diferentes valores de concentração de agregados.

Neste gráfico pode-se notar o comportamento que o método proposto por Voigt e por Reuss possuem em relação a serem um limite superior e inferior, respectivamente. Para o caso dado, o método auto-consistente e o método de Mori-Tanaka obtiveram resultados adequados em relação aos dois métodos padrões.

Os resultados mostram que o aumento do teor de agregados aumento o módulo de elasticidade, como era de se esperar.

4.2 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS COM A PRESENÇA DO GEL

Um RVE com um valor diferente de concentração de agregados também possui uma concentração diferente de espaços vazios, local predominante onde inicia-se a reação álcali-sílica. Por conta disto, este RVE foi utilizado para determinar a evolução da formação de gel ao longo do tempo.

O comportamento do gel formado pela reação alcali-sílica foi separada em duas fases, a geração do gel e um modelo difusivo. A geração do gel depende da concentração dos reagentes presentes no concreto, como discutido na seção 3.2.1. Como hipótese simplificadora para este modelo, considerou-se as concentrações de íons hidroxila e álcalis como constantes ao longo do tempo, o que caracterizou a reação como uma reação de pseudo-primeira ordem. Considerou-se a velocidade com que a sílica é consumida proporcional ao produto das concentrações de íons hidroxila, álcalis e sílica presentes em um instante de tempo t . Também considerou-se que a concentração de silanol ao longo do tempo é proporcional à sua formação na primeira etapa da reação química e pelo consumo na segunda etapa. Os resultados utilizados na primeira fase podem ser observados na Figura 4.5

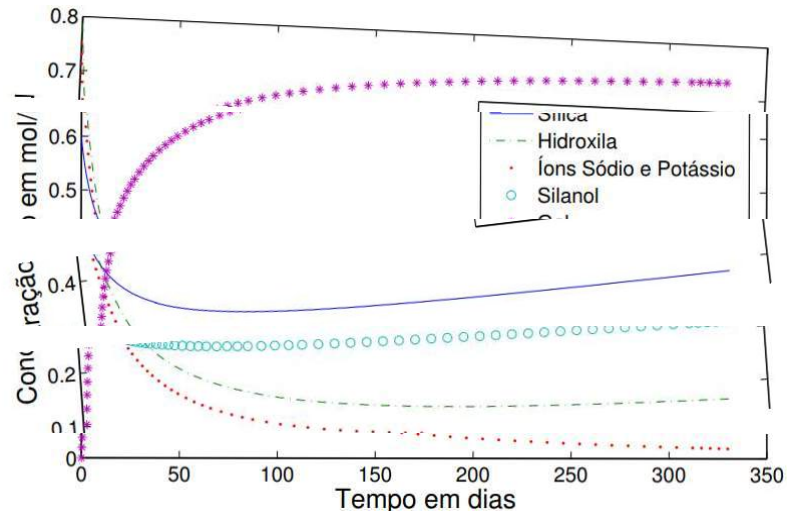


FIGURA 4.5: Concentração dos reagentes e produtos envolvidos na reação.

A segunda parte do modelo para o gel foi a sua difusão feita a um nível mesoscópico, considerando, principalmente, a região próxima ao agregado. Essa concentração, ao longo do tempo pode ser observada em um exemplo dado na Figura 4.6.

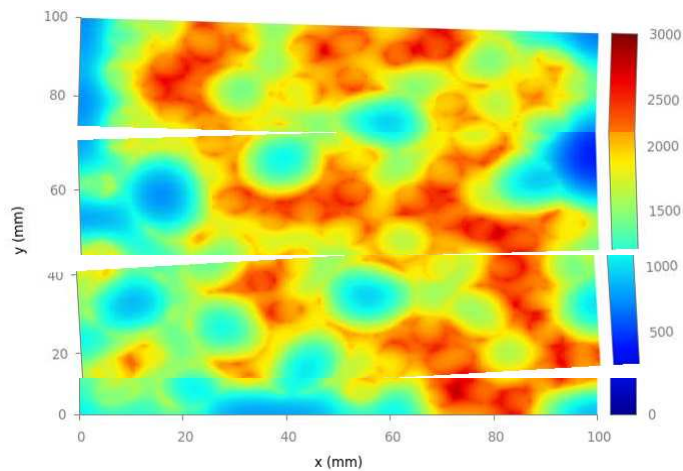


FIGURA 4.6: Distribuição de concentração de gel após 1 ano.

Com os resultados para a geração do elemento representativo do concreto a partir da curva granulométrica, o modelo gerador de gel e seu modelo difusivo, foi possível realizar um modelo de evolução das propriedades efetivas ao longo do tempo, que é o interesse maior desta tese, junto com a previsão da danificação química. Como o modelo, descrito no Capítulo 3, de evolução do gel gerado pela reação álcali-sílica é dependente do tempo e difusivo, o modelo de homogeneização gerado também é dependente do tempo.

O método proposto pode ser observado na Figura 4.7

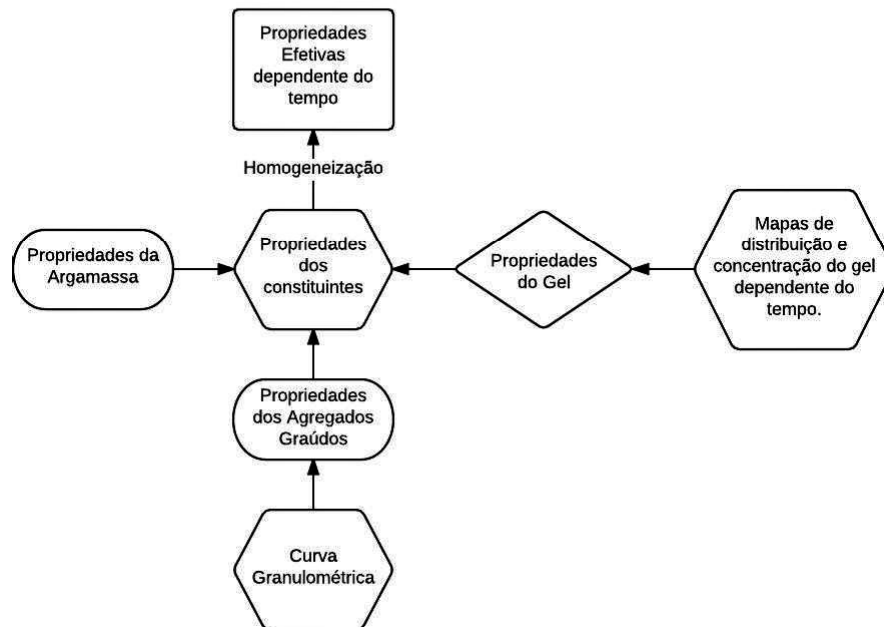


FIGURA 4.7: Modelagem realizada na tese.

Os resultados principais encontrados serão apresentados na seção seguinte.

4.3 RESULTADOS ENCONTRADOS

A programação do método proposto foi feita utilizando o software MatLab, o qual possui funções já implementadas para as principais funções matemáticas necessárias, principalmente aquelas referentes à inversão de matrizes necessárias para comparar o tensor de elasticidade e o tensor de flexibilidade.

Para executar os testes, foram selecionados elementos representativos do concreto com diversas faixas de concentração volumétrica de agregado. No caso, foram selecionados os resultados realizados para a faixa de 30%, 40% e 50%.

Em cada caso, utilizou-se o RVE com cada porcentagem para gerar um modelo de difusão e geração para o comportamento do gel. Esse modelo serviu como entrada

para as propriedades que o gel possuía ao longo do tempo do modelo de homogeneização. Em todos os casos, o modelo de homogeneização elaborado foi tratado para a argamassa, os agregados graúdos e a presença de gel.

O modelo de homogeneização a partir da técnica de Mori-Tanaka e do Método Auto-Consistente permitiu prever o valor real do tensor de elasticidade do material homogeneizado, ou seja, do concreto sob ação da reação alcali-sílica. Como a geração e difusão do gel são dependentes da variável tempo, o modelo de homogeneização também se tornou vinculado ao tempo.

As técnicas de homogeneização de Reuss e de Voigt permitiram assegurar que o resultado da homogeneização converge dentro de um intervalo esperado, visto que tais métodos representam limites superiores e limites inferiores do tensor homogeneizado do material final.

Vejamos o desenvolvimento realizado e os resultados encontrados para cada um desses casos. Ao final, foi realizada uma análise em função de qualquer valor de concentração volumétrica de agregados.

4.3.1 Resultados para $f_{ag} = 50\%$

Para a concentração $f_{ag} = 50\%$, no qual metade do elemento representativo de concreto é argamassa e a outra metade são agregados graúdos, foram utilizados os mapas de concentração de gel que serão discutidos nas figuras seguintes.

Considerou-se, como hipótese simplificadora, que no instante inicial não havia a presença de gel. A medida que o tempo passa, a geração de gel diminui as propriedades efetivas do material, no caso, os valores efetivos do tensor de elasticidade. No caso em que isso acontece, ocorre danificação do material final.

A escolha do modelo se deu a cada ano, devido às características do modelo de geração e difusão do gel adotados como entrada do programa. O mapa de concentração de gel para 1 ano pode ser visto na Figura 4.8. Nesse momento, ainda não existe

uma danificação real do material. Ao observar o gráfico de danificação, pode-se ver pouca influência da ação do gel ao longo do primeiro ano, representada por pouco ou quase nenhum valor pontual de gel.

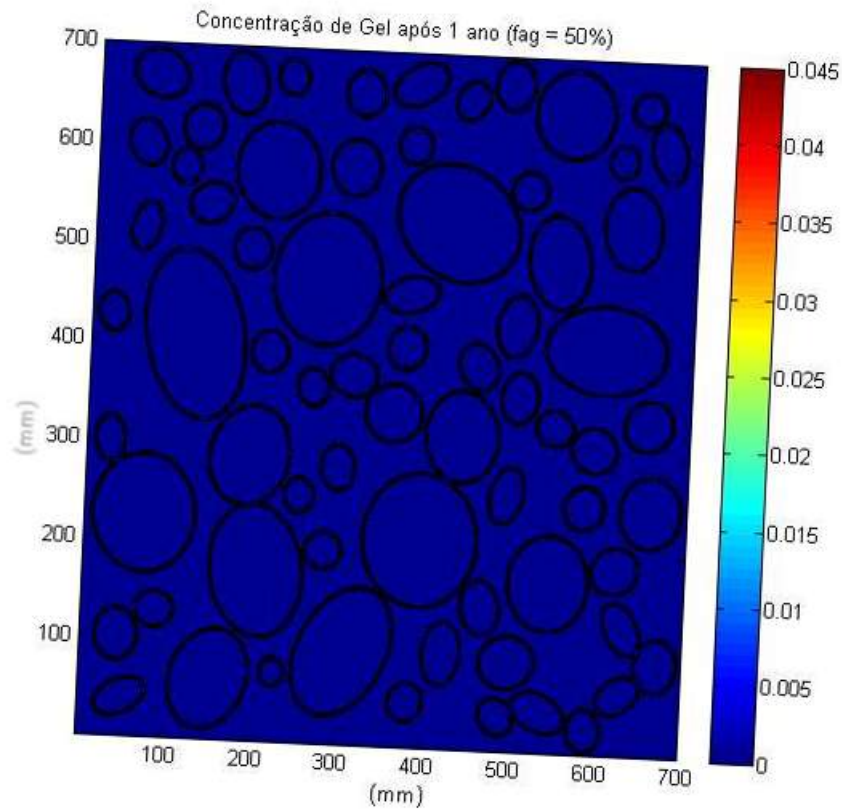


FIGURA 4.8: Concentração de gel após 1 ano.

Após 3 anos, como mostra a Figura 4.9 pode-se notar uma grande quantidade de gel que foi gerada nas camadas externas dos agregados graúdos. Também pode-se notar que esse gel já se difundiu, em partes, ao longo do RVE, visto que esse é gerado na fronteira dos agregados graúdos mas possui, visivelmente, valores mais externos. Como o gel ocupa o local que deveria existir argamassa, existe uma danificação. No resultado para a danificação, é possível verificar esse fator.

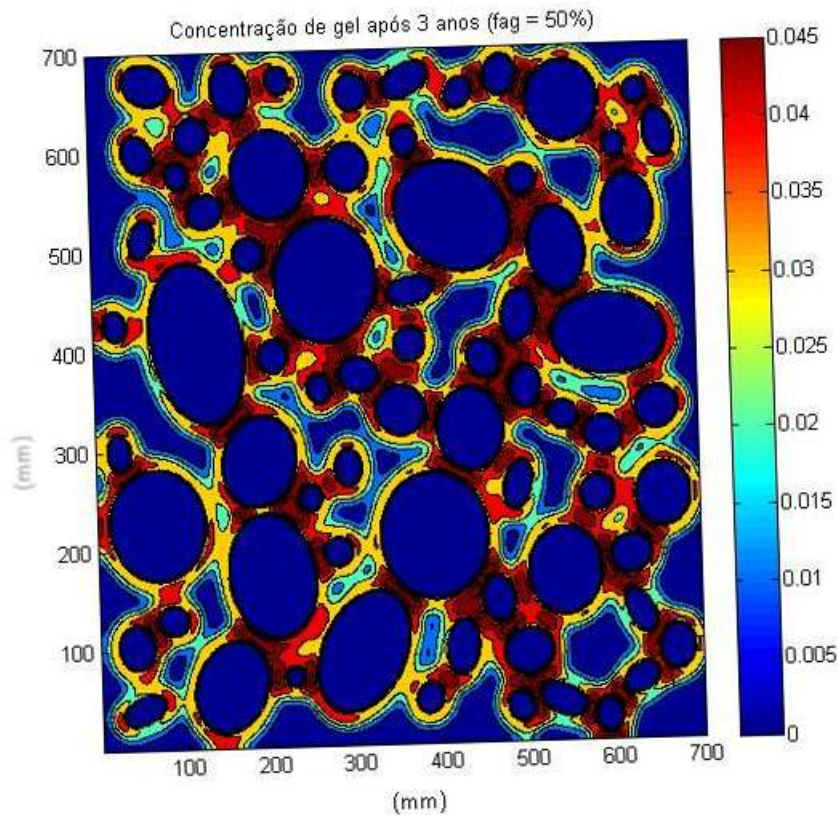


FIGURA 4.9: Concentração de gel após 3 anos.

Com 5 anos, como mostra a Figura 4.10, a quantidade de gel formada ainda é significativa, visto que continua se formando na fronteira dos agregados graúdos e continua se difundindo para fora do RVE. O modelo de difusão associado ao modelo de geração de gel já começa a mostrar indícios de que o gel deixa o RVE. Esse resultado é visto, devido aos parâmetros utilizados para os compostos limitantes: sílica e silanol, os quais foram definidos no Capítulo 3.

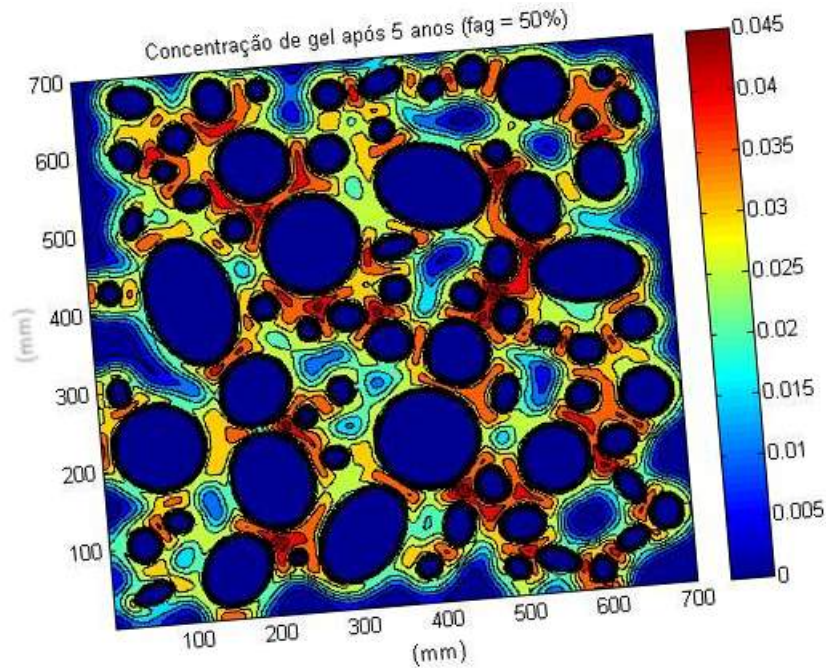


FIGURA 4.10: Concentração de gel após 5 anos.

Após 7 anos, a Figura 4.11 mostra que o processo de geração de gel e o processo de difusão ainda acontecem favorecendo a danificação do material.

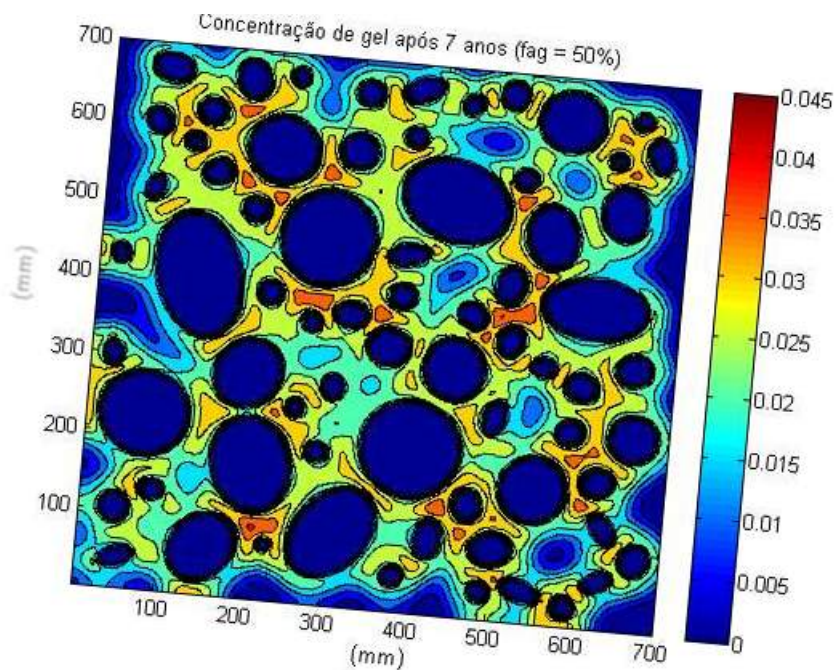


FIGURA 4.11: Concentração de gel após 7 anos.

Por fim, ao longo de 9 anos, a Figura 4.12 mostra a entrada utilizada no final do processo.

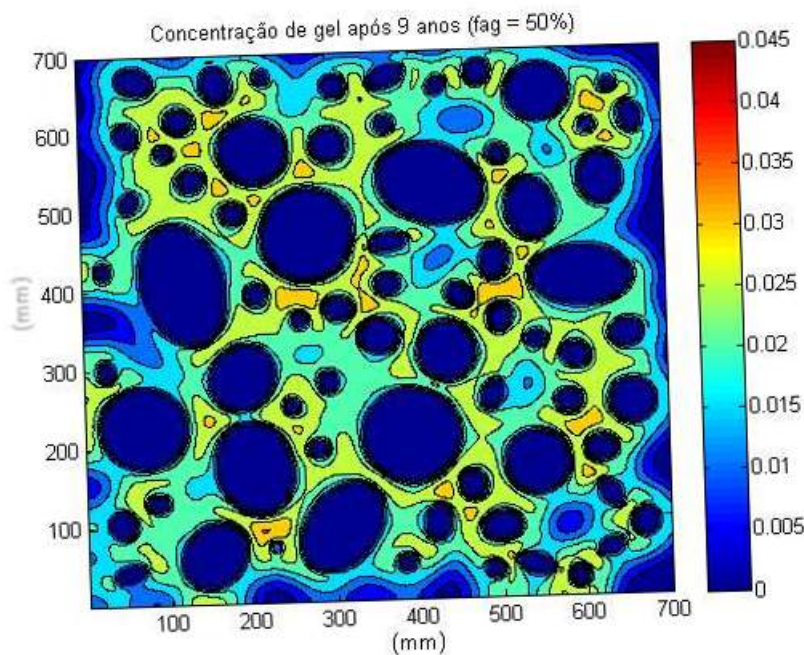


FIGURA 4.12: Concentração de gel após 9 anos.

Com esses dados referente a quantidade de gel formado pela reação alcali-sílica, além das propriedades do constituinte, foi desenvolvido um programa que realiza os métodos de homogeneização. Entre os métodos escolhidos, foram utilizados o Método de Reuss, o Método de Voigt, o Método de Mori-Tanaka e o Método Auto-Consistente.

Todos esses métodos calcularam o valor do tensor de elasticidade e, a partir dele, calcularam o valor do Módulo de Elasticidade em MPa. De acordo com a Figura 4.13, pode-se observar o resultado encontrado sem a influência do gel.

Deve-se observar que esse resultado é obtido quando considera-se um RVE composto apenas de argamassa e agregados graúdos e uma técnica de homogeneização considerando apenas duas fases.

Na mesma figura, é possível observar a influência do gel ao longo do tempo. Nota-se que entre o início da modelagem e o segundo ano, pouca influência ocorreu devido à presença do gel, considerando que pouco gel foi gerado no início desse processo. Devido a disponibilidade de compostos químicos, a reação se acelera após o primeiro ano e, a medida realizada para o segundo ano nos mostra que existe uma queda significativa no valor efetivo do Módulo de Elasticidade do material compósito.

É importante notar que o Módulo de Elasticidade previsto pelo Método de Voigt e pelo Método de Reuss se apresentaram como um limite superior e um limite inferior, respectivamente, do resultado encontrado pelos métodos mais atuais. Isso representa um intervalo de confiança de que os resultados estão convergindo para um valor seguro para essa previsão numérica. Também é possível notar que o Método Auto-Consistente e o Método de Mori-Tanaka possuem estimativas próximas para o valor efetivo do material.

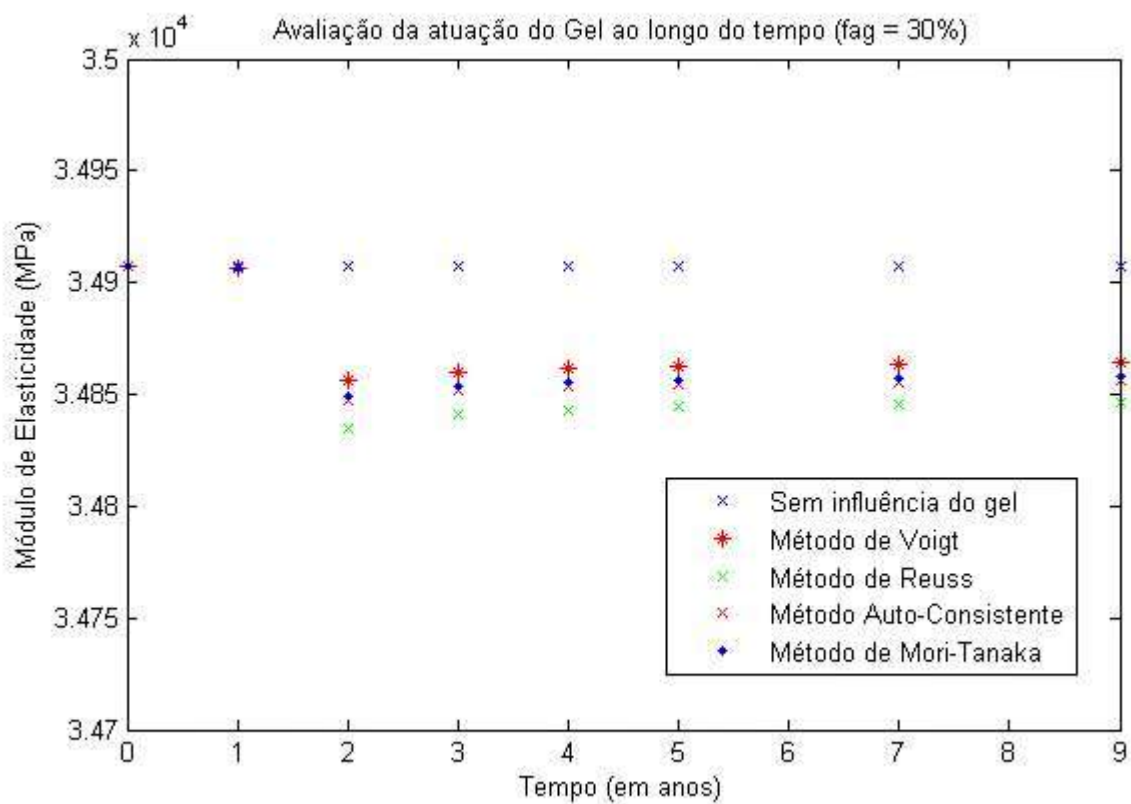


FIGURA 4.13: Elasticidade efetiva do material para $f_{ag} = 30\%$.

Para simplificar a visualização, a Figura 4.14 apresenta uma comparação do Módulo de Elasticidade efetivo para uma concentração de agregados iniciais de 50% no caso do Método de Mori-Tanaka com e sem a presença de gel. Pode-se notar que o gel altera, consideravelmente, o valor esperado do módulo de elasticidade, indicando que as modelagens atuais não devem desconsiderar este fenômeno.

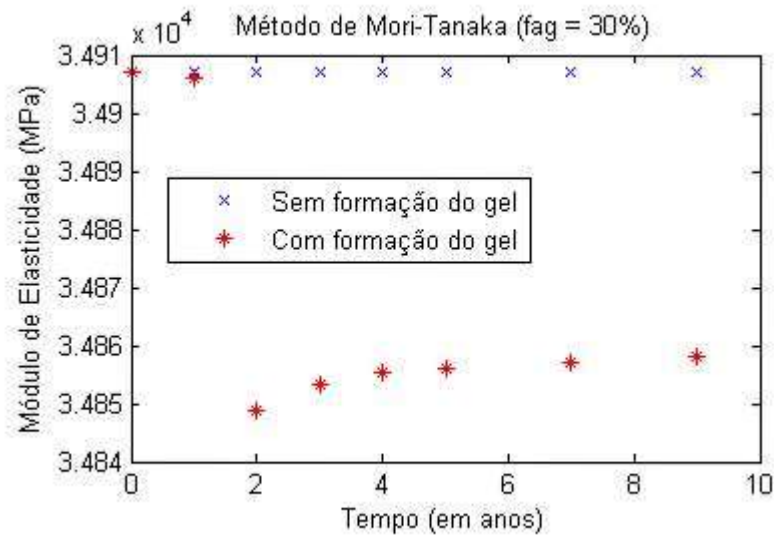


FIGURA 4.14: Método de homogeneização de Mori-Tanaka aplicado para $f_{ag} = 30\%$.

Com o tensor de elasticidade definido, foi possível determinar a danificação realizada ao longo do tempo.

A Figura ?? mostra a variável Dano Químico determinada. Tal variável pode ser determinada para períodos de tempo diferenciados, sendo nesse caso considerado o período entre 0 e 9 anos e precisa ser considerada em modelagens de estruturas que sofrem tal reação.

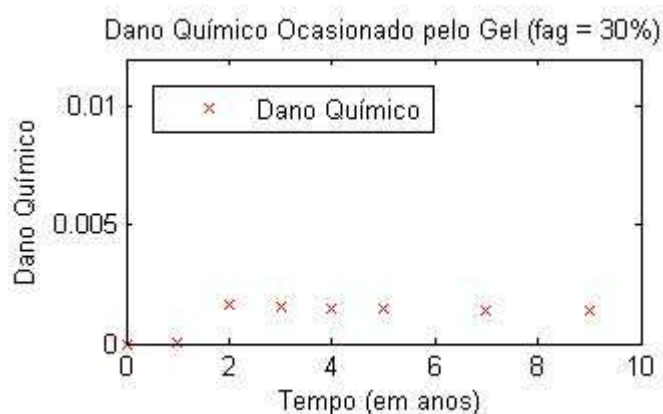


FIGURA 4.15: Danificação do material ao longo do tempo $f_{ag} = 50\%$.

Essa modelagem também foi realizada para $f_{ag} = 40\%$ e $f_{ag} = 30\%$, os quais podem ser observados nas próximas seções.

4.3.2 Resultados para $f_{ag} = 40\%$

De forma análoga, foram realizadas simulações utilizando um elemento representativo de concreto com $f_{ag} = 40\%$. De forma equivalente, considerou-se que no instante inicial não havia a presença de gel. Após 1 ano, o modelo de difusão utilizado como entrada para o programa de homogeneização pode ser visto na Figura 4.16.

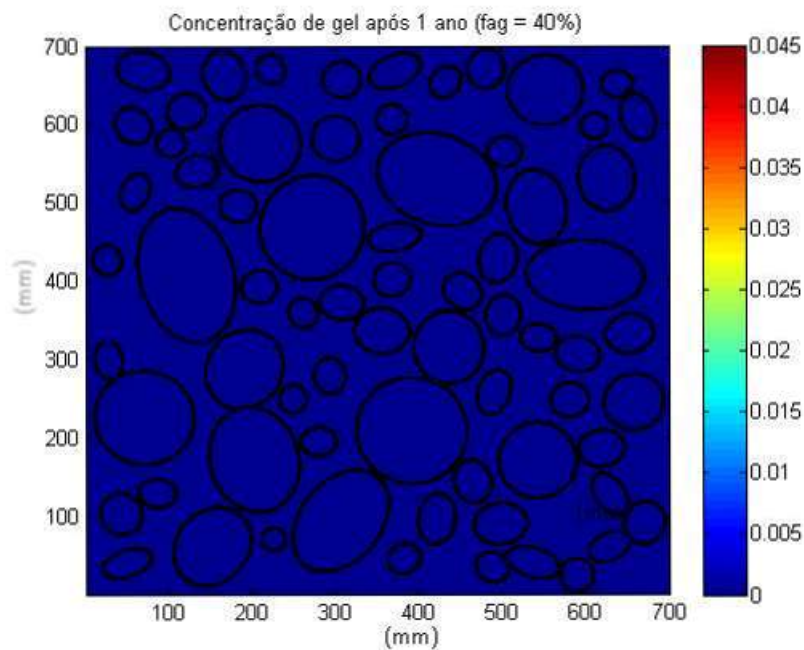


FIGURA 4.16: Concentração de gel após 1 ano.

Após 3 anos, a presença de gel já é notável, como pode ser observado na Figura 4.17.

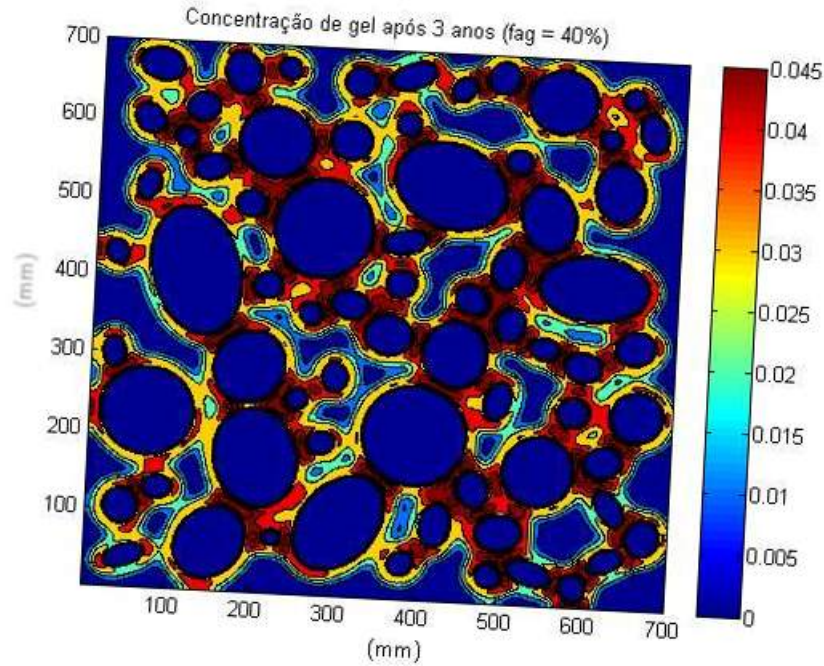


FIGURA 4.17: Concentração de gel após 3 anos.

Após 5 anos, os componentes químicos que geram o gel começam a se reduzir, desacelerando a produção nova de gel. Esse resultado pode ser visto na Figura 4.18.

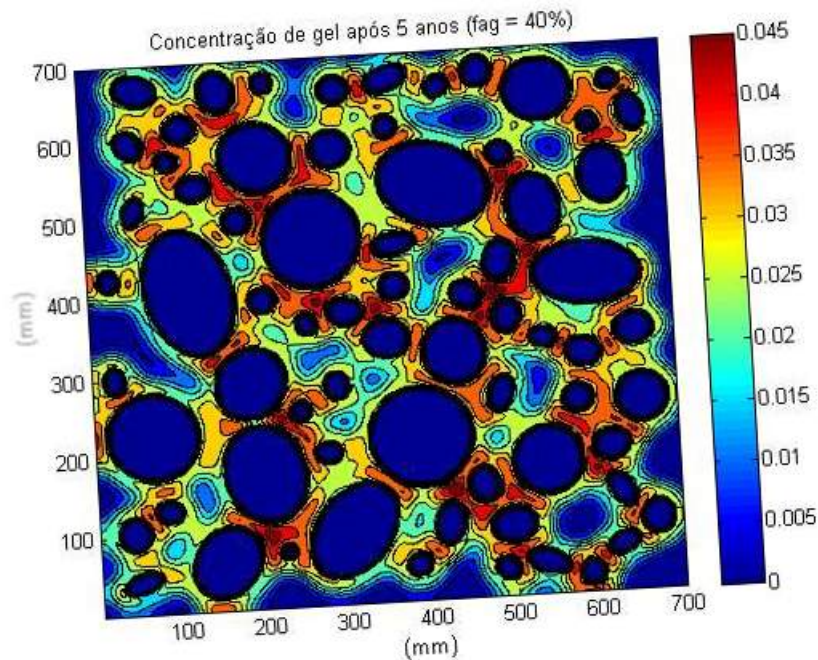


FIGURA 4.18: Concentração de gel após 5 anos.

Após 7 anos, como mostra a Figura 4.19, o modelo de difusão espalha o gel formado ao longo do RVE.

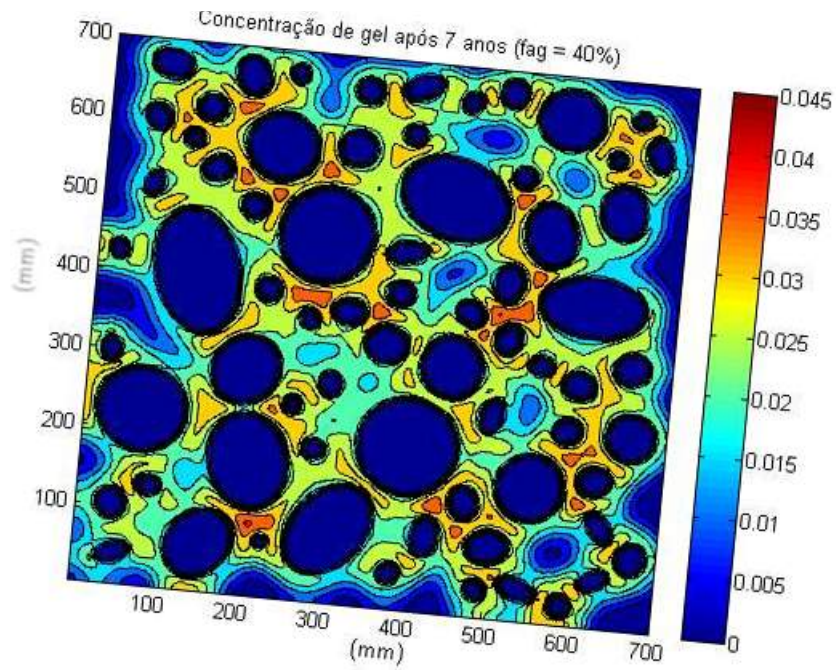


FIGURA 4.19: Concentração de gel após 7 anos.

Após 9 anos, o resultado utilizado de entrada foi o mapa de concentração de gel da Figura 4.20.

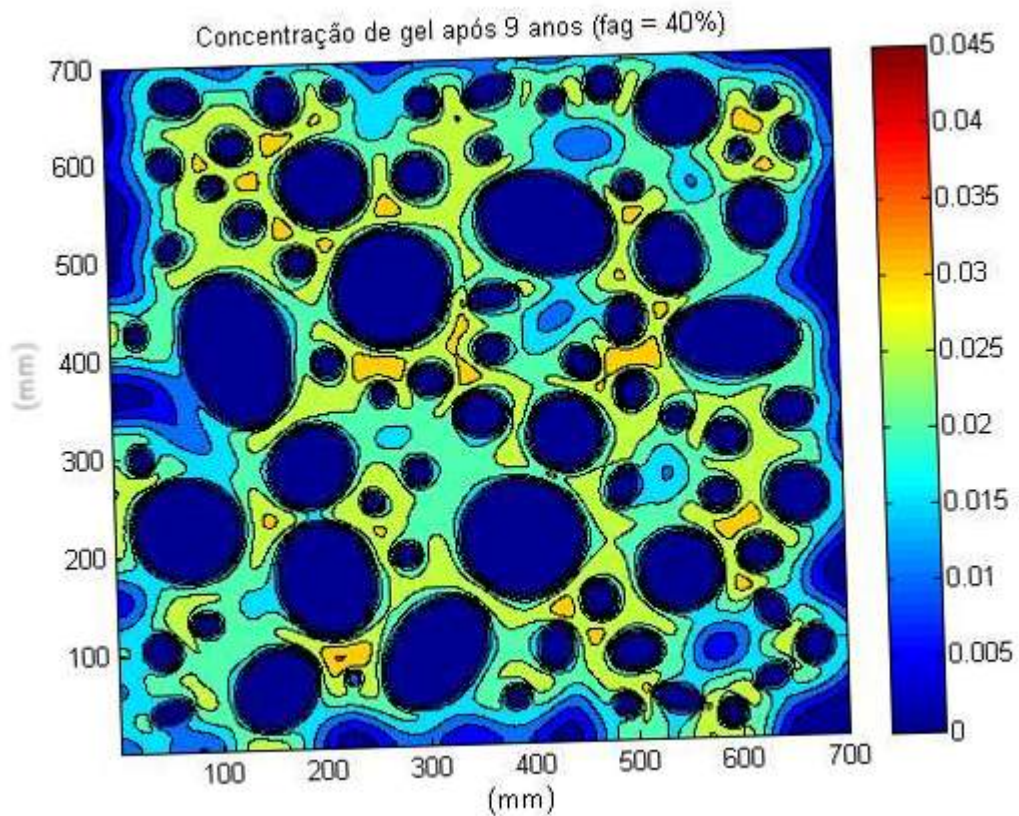


FIGURA 4.20: Concentração de gel após 9 anos.

A danificação do material para $f_{ag} = 40\%$ pode ser vista na Figura 4.21. Veja que, assim como no caso anterior, existe uma danificação que precisa ser considerada nas modelagens de estruturas de concreto.

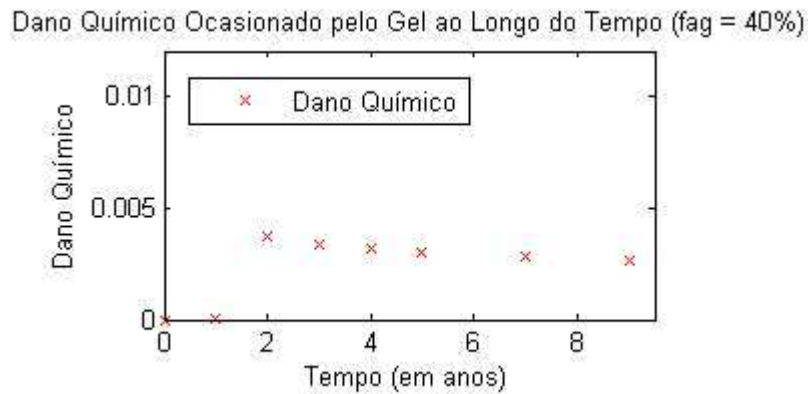


FIGURA 4.21: Danificação do material ao longo do tempo $f_{ag} = 40\%$.

A elasticidade efetiva do material é apresentada na Figura 4.22. Nessa Figura, também foi realizado o algoritmo para os 4 métodos propostos.

O método de Voigt e o método de Reuss são os limites superior e inferior do resultado, indicando um intervalo de confiança para os métodos mais atuais. Os métodos atuais, Auto-Consistente e Mori-Tanaka apresentam resultados próximos para os o Módulo de Elasticidade Efetivo.

Os resultados também mostram uma queda do Módulo de Elasticidade logo após os dois primeiros anos, devido ao maior aumento na concentração de gel.

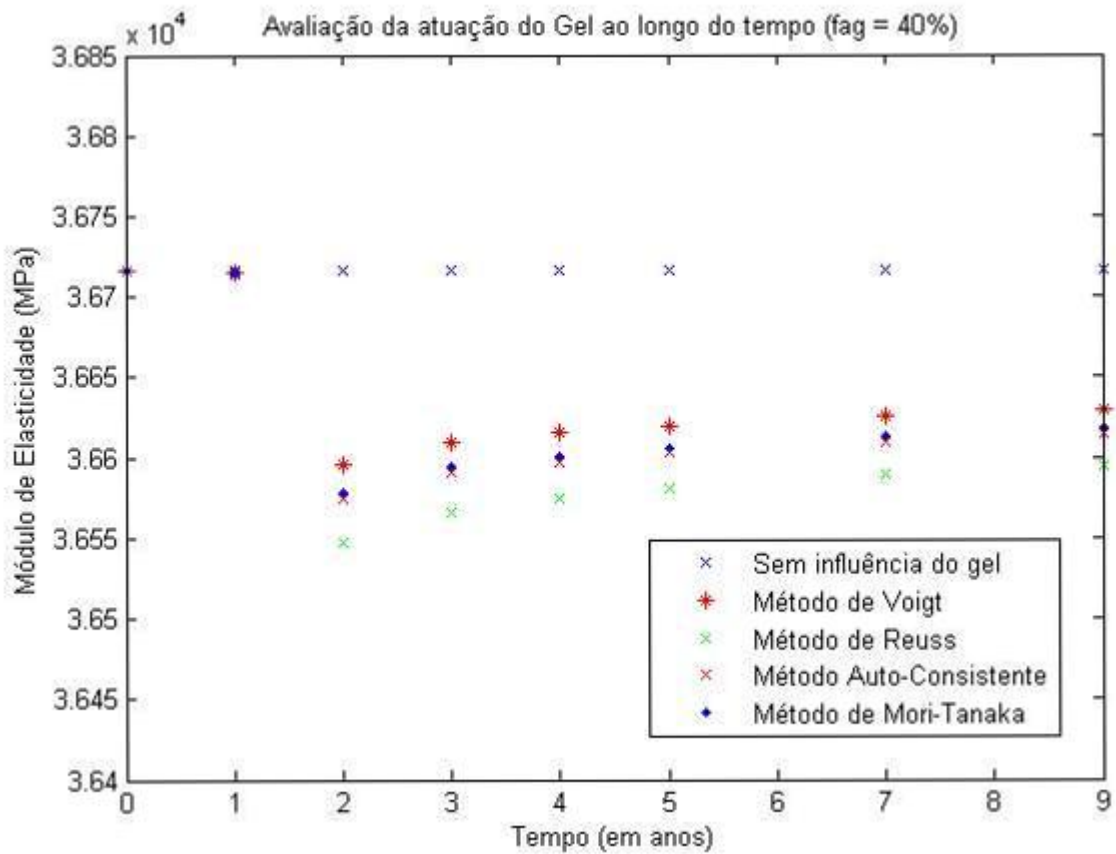


FIGURA 4.22: Elasticidade efetiva do material para $f_{ag} = 40\%$.

Para facilitar a visualização, também foi gerada a Figura 4.23 apresentando o resultado com e sem a presença do gel apenas para a homogeneização pelo Método de Mori-Tanaka.

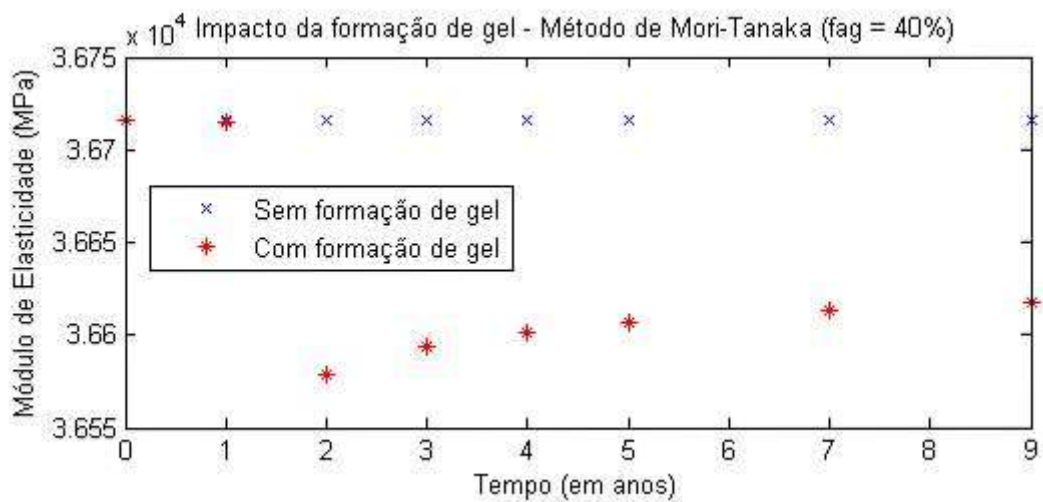


FIGURA 4.23: Método de homogeneização de Mori-Tanaka aplicado para $f_{ag} = 40\%$.

Também foram gerados, valores para $f_{ag} = 30\%$, os quais se encontram na próxima seção.

4.3.3 Resultados para $f_{ag} = 30\%$

Para o elemento representativo de concreto composto de 30% de agregados graúdos e 70% de argamassa, foram utilizados os mapas de concentração para os diversos anos.

Após 1 ano, pode-se observar na Figura 4.24.

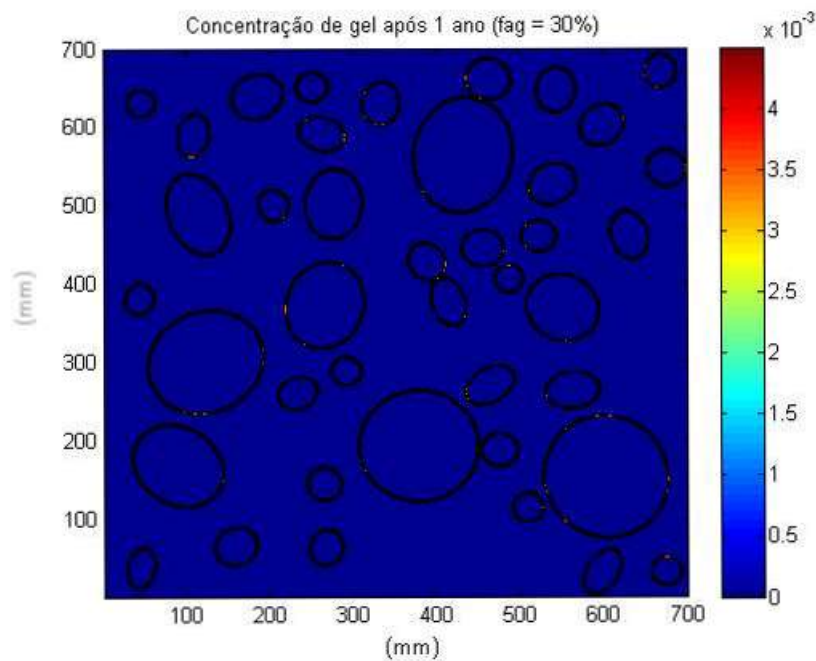


FIGURA 4.24: Concentração de gel após 1 ano.

Após 3 anos, o resultado encontra-se na Figura 4.25.

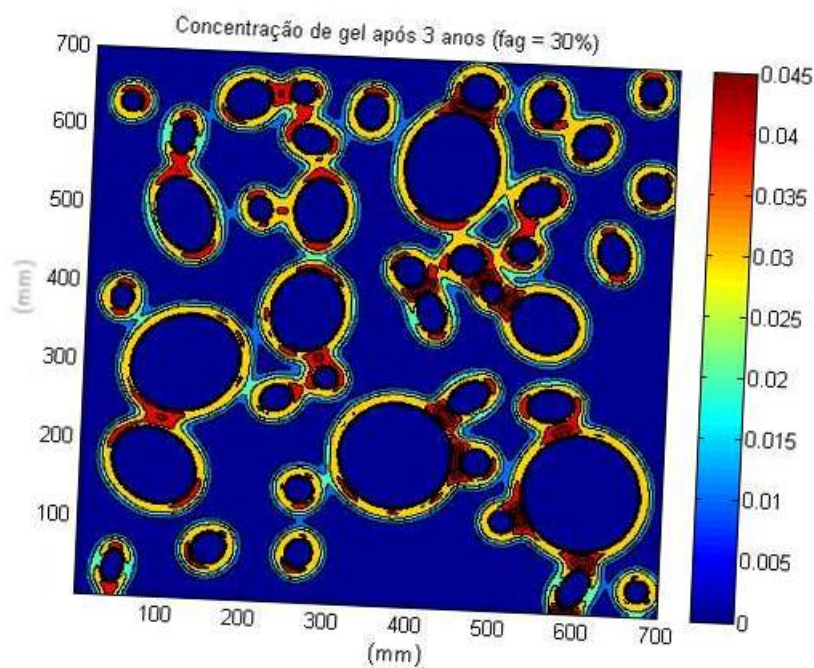


FIGURA 4.25: Concentração de gel após 3 anos.

Após 5 anos, 7 anos e 9 anos, o resultado encontra-se na Figura 4.26, Figura 4.27 e Figura 4.28, respectivamente.

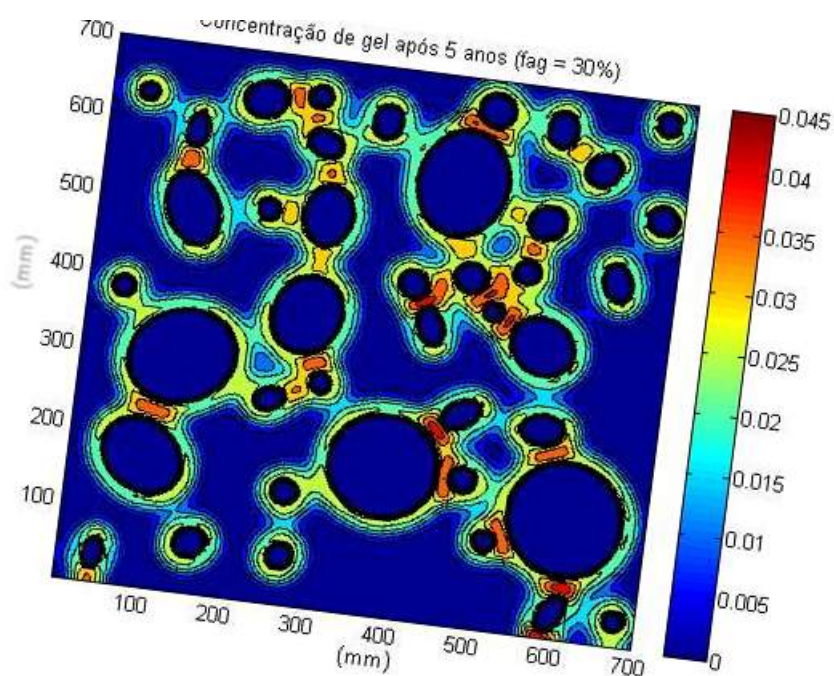


FIGURA 4.26: Concentração de gel após 5 anos.

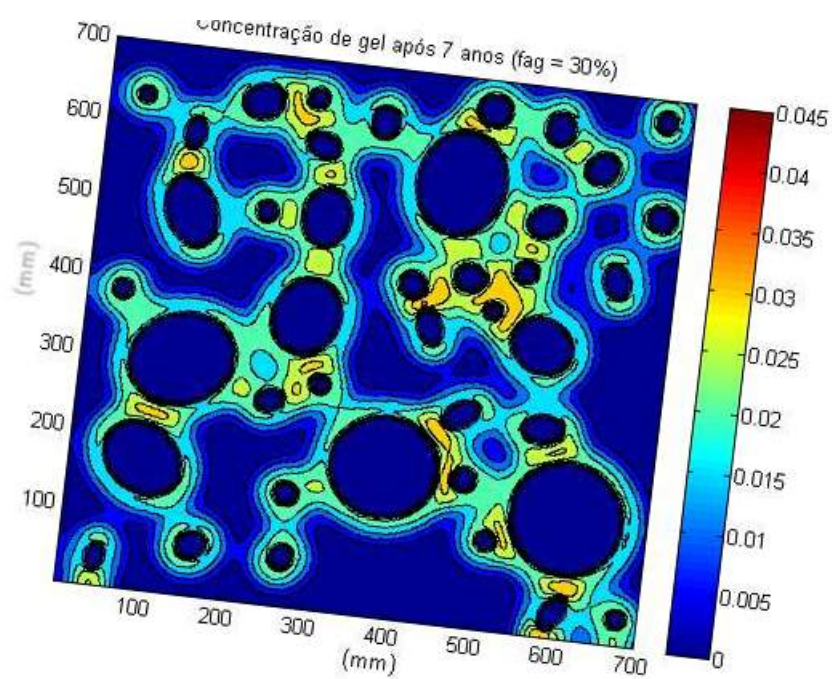


FIGURA 4.27: Concentração de gel após 7 anos.

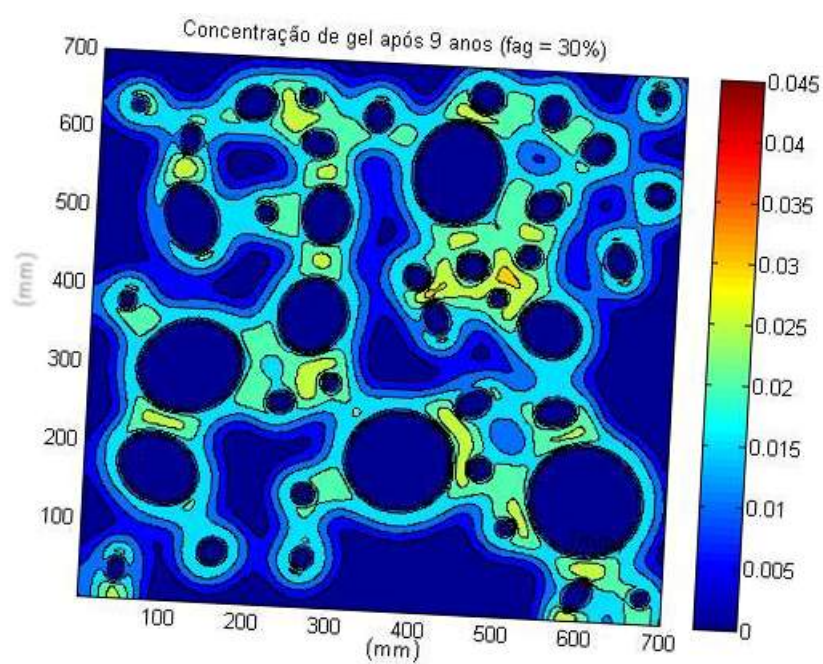


FIGURA 4.28: Concentração de gel após 9 anos.

A danificação do material pode ser observada na Figura 4.29.

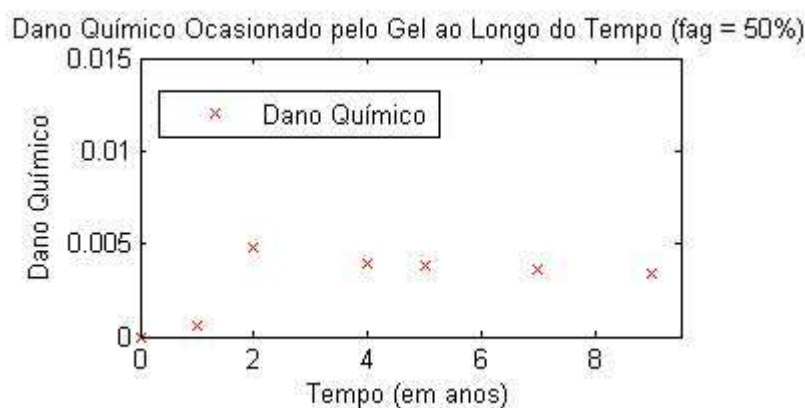


FIGURA 4.29: Danificação do material ao longo do tempo $f_{ag} = 30\%$.

A elasticidade efetiva do material pelos 4 métodos propostos, além do comparativo sem a influência do gel pode ser observado na Figura 4.30.

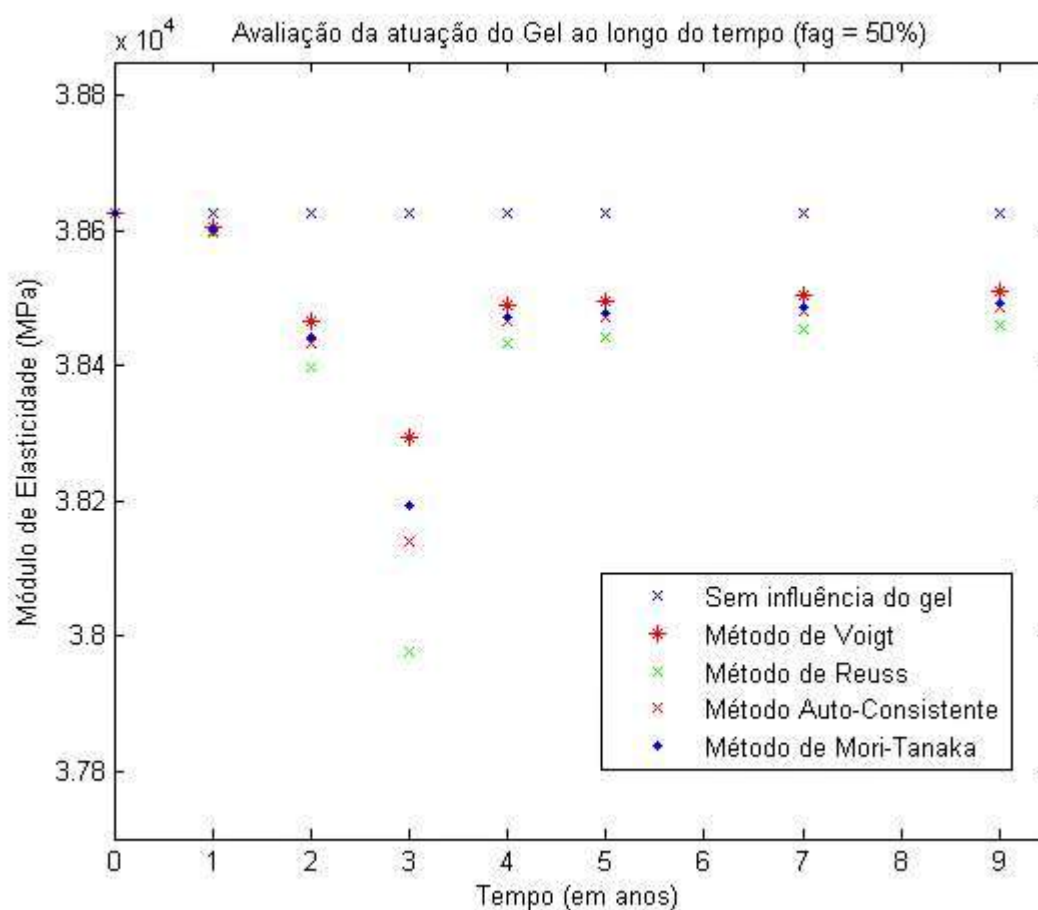


FIGURA 4.30: Elasticidade efetiva do material para $f_{ag} = 30\%$.

O resultado encontrado considerando apenas o Método de Mori-Tanaka para com-

parar a presença ou não do gel é mostrada na Figura 4.31.

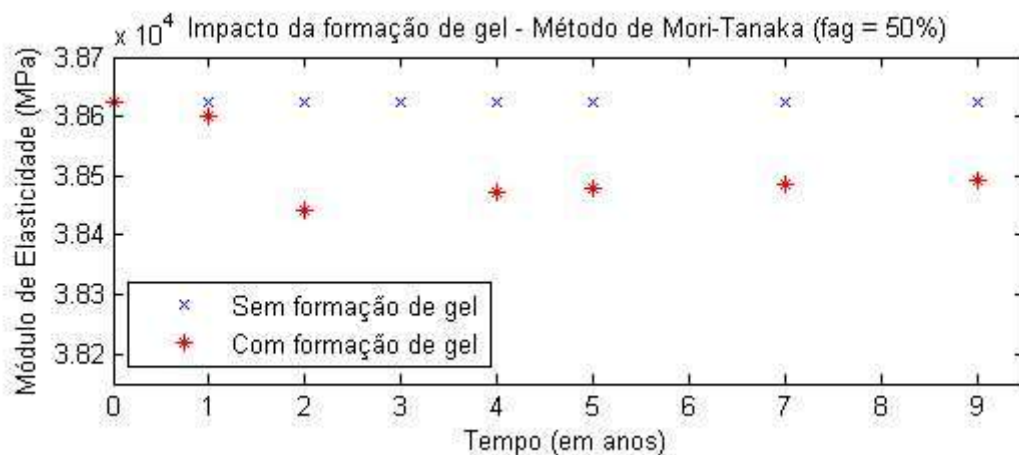


FIGURA 4.31: Método de homogeneização de Mori-Tanaka aplicado para $f_{ag} = 30\%$.

4.4 CASO COMPARATIVO PARA DIVERSOS VALORES DE F_{AG} .

Para ilustrar a presença do gel na danificação total do material, foram realizados estudos de caso comparativo para diversos valores de f_{ag} .

A figura 4.32 mostra os resultados de danificação comparados. Observe que a danificação gerada em um RVE com um valor maior de agregados graúdos também é maior. Esse resultado se deve, pois, em um material com mais agregados graúdos existe uma disponibilidade maior de materiais necessários para ocorrer a reação álcali-sílica.

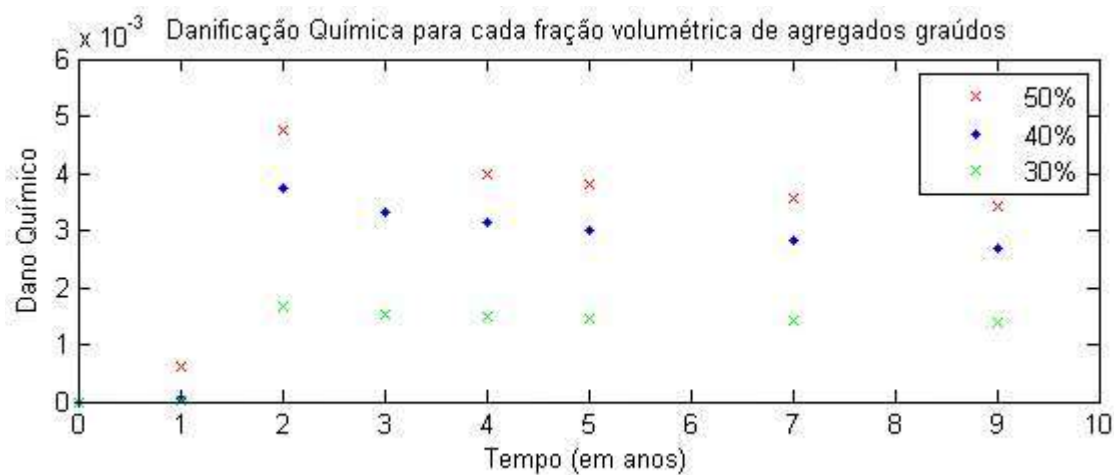


FIGURA 4.32: Danificação Química comparativa

Por outro lado, a Figura 4.33 apresenta o Módulo de Elasticidade Homogeneizado, medido em MPa, para diversos valores de concentração de agregado.

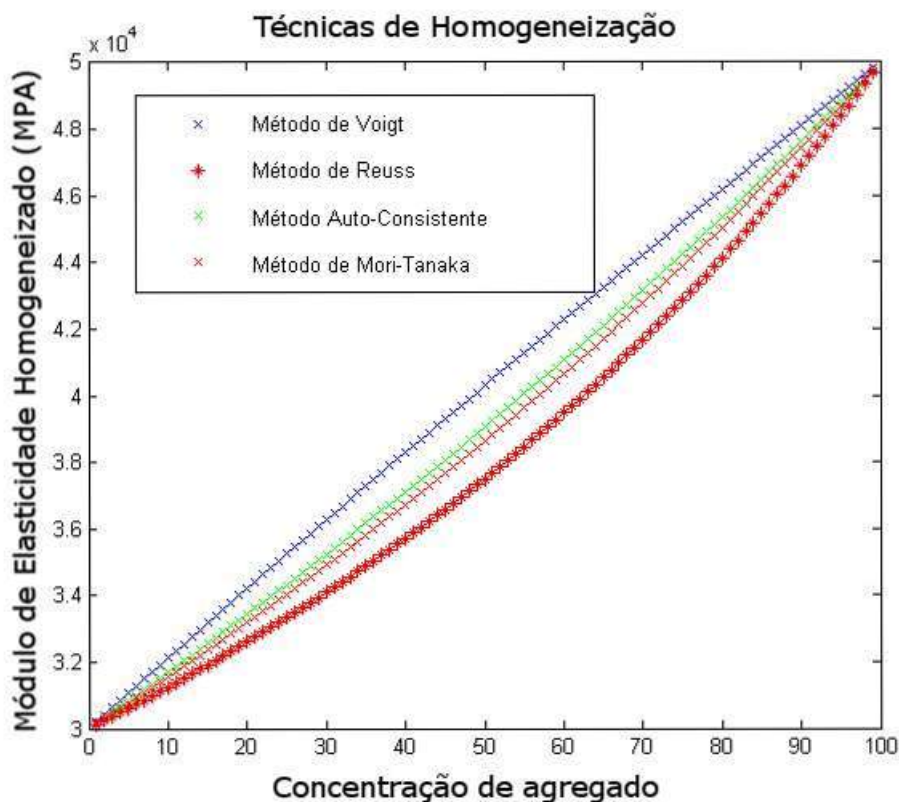


FIGURA 4.33: Concentração de gel após 1 ano.

A Figura 4.33, inicialmente, apresenta o Método de Voigt e de Reuss como limite superior e inferior, respectivamente, para o valor efetivo do material, trazendo confiabilidade para o resultado encontrado pelos métodos mais atuais.

Pode-se notar, também, que para valores muito baixos de agregados, o tensor homogeneizado do material final se aproxima do valor estabelecido para a argamassa, visto que esse seria um material composto apenas de argamassa.

De forma equivalente, um valor muito alto de agregados, tem como módulo de elasticidade homogeneizado um valor muito próximo do valor real para os próprios agregados, visto que se trataria de um concreto formado apenas de agregados.

A medida que a concentração de agregados aumenta, pode-se notar uma variação no valor do Módulo de Elasticidade Homogeneizado.

5 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

5.1 CONCLUSÕES

Com a temática desenvolvida nesse trabalho, foi possível cumprir os objetivos de pesquisa propostos. O objetivo geral de desenvolver um novo método para obtenção das propriedades efetivas do concreto sob ação da reação alcali-sílica foi realizado a partir do modelo de homogeneização associado ao modelo de geração e difusão de gel e ao modelo de geração do elemento representativo do concreto com agregados elípticos. Com esse modelo desenvolvido, é possível prever a danificação real que estruturas sofrem quando estão sob atuação desta reação química.

A proposta aqui indicou as associações que são realizadas para gerar o resultado do tensor homogeneizado. Entre os modelos específicos, desenvolveu-se um modelo de homogeneização considerando a presença de agregados graúdos, argamassa e gel como constituintes. A hipótese simplificadora de isotropia para essas camadas de análise permitiu realizar a homogeneização do material. O modelo foi capaz de representar o efeito das reações relacionadas à reação alcali-sílica, relacionando os produtos da reação com a danificação do concreto.

Também foi proposto vincular o modelo de homogeneização a um modelo de evolução do gel formado pela reação álcali-sílica de forma a descrever a evolução das propriedades efetivas ao longo do tempo. Os modelos de homogeneização foram vinculados de forma efetiva e consideram o modelo difusivo e o modelo gerador de gel como parâmetros de entrada.

Por fim, foi proposto analisar o processo de danificação a partir da mudança das propriedades efetivas do concreto ao longo do tempo. Essa análise foi realizada na seção anterior, ao criar-se uma variável Dano Químico que pode ser acoplada à outras

fontes de dano.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão de trabalhos futuros, é possível utilizar métodos ainda mais atuais para a previsão do tensor homogeneizado. Assim como, pode-se realizar a homogeneização em níveis mais profundos, considerando os materiais que formam a argamassa, os agregados graúdos e o gel. Além disso, os resultados podem ser replicados para estruturas maiores, uma vez que toda a simulação foi considerada no elemento representativo do concreto.

Sugere-se, também, para efeitos de simulação, considerar outros tempos gráficos tanto para a geração do RVE, como para a geração do gel, e para as técnicas de homogeneização utilizadas. Também é necessário que se realize experimentos condizentes com a metodologia adotada para ter mais uma validação desse resultado.

REFERÊNCIAS

- ARNALDO, J. S. **Um estudo sobre estimativas de erros de modelagem em estruturas de materiais heterogêneos**. Dissertação (Mestrado) — UFAL, 2008.
- AURELIA, I. C. R. *et al.* Hpc simulations of alkali-silica reaction-induced damage: Influence of alkali-silica gel properties. **Cement and Concrete Research**, v. 109, p. 90–102, 2018.
- BALBO, F. A. N. *et al.* Um modelo para formação e difusão do gel formado pela reação alcali-sílica no concreto. **CNMAC 2014**, 2014.
- BAZANT, Z. P.; STEFFENS, A. A mathematical model for kinetics of alkali-silica reaction in concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 30, p. 419–428, 2000.
- CAVALCANTE, R. D. B. **Avaliação de propriedades elásticas efetivas de rochas com cavidades secas ou saturadas**. Tese (Doutorado) — UFA, 2008.
- CHARWOOD, R. G.; SOLYMAR, Z. V. A review of aar in dams. **Dam Engng**, v. 5, p. 31–62, 1994.
- CHOI, Y. K.; WANG, W.; LIU, Y. Continuous collision detection for elliptic disks. **HKU CS Tech Report**, v. 0, p. 95–115, 2005.
- COMBY-PEIROT, I. *et al.* Development and validation of a 3d computational tool to describe concrete behavior at mesoscale: application to the alkali-silica reaction. **Computational Material Science**, v. 46, p. 1163–1177, 2009.
- COMI, C.; FEDELE, R.; PEREGO, U. A chemo-thermo damage model for the analysis of concrete dams affected by alkali-sílica reaction. **Mechanics of Material**, v. 41, p. 210–230, 2009.
- DASCALU, C.; BILBIE, G.; AGIASOFITOU, E. K. Damage and size effects in elastic solids: A homogeneization approach. **International Journal of Solids and Structures**, v. 45, p. 409–430, 2007.
- DRON, R.; BRIVOT, F. Thermodynamic and kinetic approach to the alkali-silica reaction. part 1: Concepts. **Cement and Concrete Research**, v. 5, p. 941–948, 1992.
- ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. **Proc. of Roy. Soc.**, v. 241, p. 376–396, 1957.
- ESHELBY, J. D. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. **Proc. of Roy. Soc.**, v. 252, p. 561–569, 1959.
- GLASSER, L. D. Osmotic pressure and the swelling of gels. **Cement and Concrete Research**, v. 9, p. 515–517, 1979.

GLASSER, L. D.; KATAOKA, N. Some observations on the rapid chemical test for potentially reactive aggregate. **Cement and Concrete Research**, v. 11, p. 191–196, 1982.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. **Journal Mech. Phys. Solids**, v. 11, p. 127–140, 1963.

HOBBS, D. W. The alkali-silica reaction - a model for predicting expansion in mortar. **Magazine of Concrete Research**, v. 33, p. 208–220, 1981.

HUANG, M.; ZOU, W.; ZHENH, Q. Explicit expression of Eshelby tensor for arbitrary weakly non-circular inclusion in two-dimensional elasticity. **International Journal of Engineering Science**, v. 45, p. 409–430, 2009.

JIE, L.; XIAODAN, R. Homogenization-based multi-scale damage theory. **Science China - Physics, Mechanics and Astronomy**, v. 53, p. 690–698, 2010.

LAI, W. M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. **Introduction to Continuum Mechanics**. 4. ed. [S.l.]: Elsevier, 2010.

LI, S.; WANG, G. **Introduction to Micromechanics and Nanomechanics**. [S.l.]: World Scientific, 2008.

PESAVENTO, F. *et al.* Modeling alkali-silica reaction in non-isothermal, partially saturated cement based materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 0, p. 95–115, 2012.

PIANEZZER, G. A. **Geração do elemento representativo do concreto com agregados graúdos em formato elíptico**. Dissertação (Mestrado) — UFPR, 2013.

PIANEZZER, G. A. *et al.* Um algoritmo para geração do elemento representativo do concreto com agregados graúdos em formato elíptico. **Sodebras**, v. 8, p. 11–15, 2013.

PINTO, C. S. **Curso Básico de Mecânica dos Solos**. [S.l.]: Oficina de Textos, 2008.

PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 7, p. 33–60, 2005.

RASSY, M. T. **Uma contribuição para a modelagem numérica da heterogeneidade do concreto com o método de Galerkin Livre de Elementos**. Tese (Doutorado) — USP, 2012.

REZAKHANI, R.; ALNAGGAR, M.; CUSATIS, G. Multiscale homogenization modeling of alkali-silica-reaction damage in concrete. **9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures**, v. 1, 2016.

SBRIGHI, C. **Agregados naturais, britados e artificiais para o concreto**. [S.l.]: IBRACON, 2011.

STRANSKY, J. *et al.* Mori-tanaka based estimates of effective thermal conductivity of various engineering materials. **Micromachines**, v. 2, p. 129–149, 2011.

TÉCNICAS, A. B. D. N. **NBR 13281: Argamassa para assentamento e revestimento de paredes e tetos - requisitos**. Dissertação (Mestrado) — Rio de Janeiro, 2005.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1951.

TIMOTHY, J. J.; NGUYES, M. N.; MESCHKE, G. Computational modeling of concrete degradation due to alkali silica reaction. **10th International Conference on Mechanics and Physics of Creep, Shrinkage, and Durability of Concrete and Concrete Structures**, v. 1, 2015.

VOIGT, W. **Lehrbuch der Kristallphysik**. [S.l.]: B. G. Teubner, 1910.

WEIBERGER, C.; CAI, W.; BARNETT, D. **Lecture Notes - Elasticity of Microscopic Structures**. [S.l.]: Stanford University, 2004.

WRIGGERS, P.; MOFTAH, S. O. Mesoscale models for concrete: Homogeneization and damage behaviour. **Finite Element in Analysis and Design**, v. 42, p. 623–636, 2006.

YURTDAS, I. *et al.* Influence of alkali silica reaction (asr) on mechanical properties of mortar. **Construction and building materials**, v. 47, p. 165–174, 2013.