

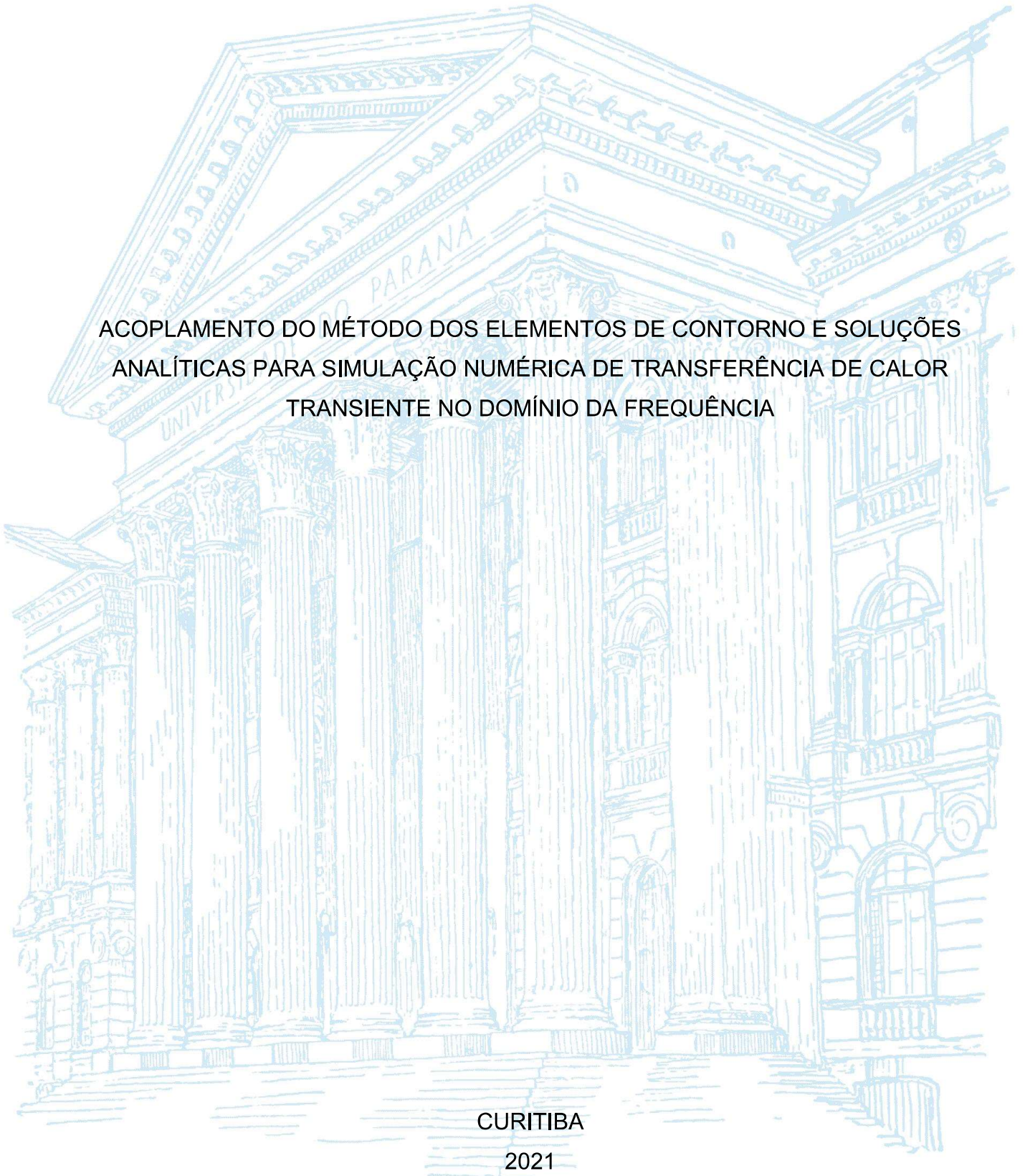
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CIBELE CORNEJO JACINTO PORTELA

ACOPLAMENTO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTO RNO E SOLUÇÕES
ANALÍTICAS PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR
TRANSIENTE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

CURITIBA

2021



CIBELE CORNEJO JACINTO PORTELA

ACOPLAMENTO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E SOLUÇÕES
ANALÍTICAS PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR
TRANSIENTE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor, Setor de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, Área de Concentração: Mecânica Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Alkimin de Lacerda
Coorientador: Prof. Dr. Antônio José Barreto Tadeu

CURITIBA

2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

P843a Portela, Cibele Cornejo Jacinto
Acoplamento do método dos elementos de contorno e soluções analíticas para simulação numérica de transferência de calor transiente no domínio da frequência [recurso eletrônico] / Cibele Cornejo Jacinto Portela. – Curitiba, 2021.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos numéricos em Engenharia, 2021.

Orientador: Luiz Alkimin de Lacerda.
Coorientador: Antônio José Barreto Tadeu.

1. Método dos elementos de contorno. 2. Meios de transferência de calor. 3. Fourier, Transformadas de. I. Universidade Federal do Paraná. II. Lacerda, Luiz Alkimin de. III. Tadeu, Antônio José Barreto. IV. Título.

CDD: 515.2433

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928



TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **CIBELE CORNEJO JACINTO PORTELA** intitulada: **ACOPLAMENTO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR TRANSIENTE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA**, sob orientação do Prof. Dr. LUIZ ALKIMIN DE LACERDA, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 02 de Julho de 2021.

Assinatura Eletrônica

02/07/2021 16:47:53.0

LUIZ ALKIMIN DE LACERDA

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

07/07/2021 12:45:36.0

JOSÉ ANTONIO MARQUES CARRER

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

07/07/2021 10:51:27.0

JOSÉ ANTONIO FONTES SANTIAGO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)

Assinatura Eletrônica

03/07/2021 07:45:17.0

LUIZ CARLOS WROBEL

Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA - PUC/RIO)

Aos meus pais, Lily e Marcos.

Ao meu esposo, Rafael.

AGRADECIMENTOS

A concretização da presente tese só foi possível graças a um conjunto de pessoas que me apoiaram durante essa caminhada e contribuíram para a sua realização de forma direta ou indireta. Sirvo-me deste espaço para expressar os meus sinceros agradecimentos.

Ao meu orientador, o Prof. Doutor Luiz Alkimin de Lacerda por toda a orientação prestada, pela disponibilidade de esclarecer minhas dúvidas, pelas palavras de incentivo, pelo apoio, paciência e compreensão que sempre manifestou.

Ao Prof. Doutor António José Barreto Tadeu, primeiramente por ter aceitado me orientar durante o período de doutorado sanduíche na Universidade de Coimbra. Serei eternamente grata por sua dedicação, pela constante partilha de conhecimentos e pelo seu decisivo envolvimento e empenho para a realização deste trabalho.

Agradeço a todos os outros professores que me ajudaram durante toda minha formação académica, em especial a professora e amiga Amanda Jarek pela sua amizade, seu incentivo, sua disponibilidade e apoio.

A minha família, aos meus pais Lily e Marcos e a minha irmã Denise. Obrigada por todos os ensinamentos, valores, amor e apoio incondicional que me deram por toda a vida.

Ao meu marido, Rafael, por sempre estar ao meu lado. Obrigado pelo carinho, companheirismo, pela lealdade, pelo amor e principalmente pela paciência durante esse percurso.

Aos meus colegas de trabalho, pelo apoio, palavras de incentivo e amizade.

À todos,

O meu eterno obrigada.

“Aprender é, de longe, a melhor recompensa.” (William Hazlitt)

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma nova abordagem para a simulação da difusão de calor transiente em um meio contendo heterogeneidades cilíndricas de multicamadas usando uma formulação que combina o Método dos Elementos de Contorno e soluções analíticas. As soluções analíticas são incorporadas como funções de Green particulares, tornando desnecessária a discretização das interfaces do sistema multicamadas, melhorando assim a eficiência do algoritmo. Foram desenvolvidos códigos para problemas com uma fonte de calor e domínio externo infinito, com condições iniciais iguais a zero, onde foi adotada uma abordagem em 2,5D que permite a simulação de fenômenos tridimensionais através de um somatório de soluções 2D mais simples, com diferentes números de onda espaciais. O fenômeno que se considerou inicialmente foi o de condução e em uma segunda fase do trabalho, foram consideradas a condução e a convecção em simultâneo. Para a convecção, considerou-se uma velocidade radial desde o eixo do sistema. Foram estudados também, problemas bidimensionais para inclusões em um domínio finito com condições iniciais diferentes de zero, envolvendo somente o fenômeno de condução. A interação entre os subdomínios heterogêneos e o meio homogêneo externo é estabelecida pela imposição da continuidade de temperaturas e fluxos de calor nas interfaces virtuais criadas entre estes.

A solução é primeiramente calculada no domínio da frequência, com uma formulação obtida através da Transformada de Fourier, para uma ampla faixa de frequências e números de onda axiais, usando frequências complexas para evitar o fenômeno de *aliasing*. As séries temporais podem então ser obtidas por meio de uma transformada rápida inversa de Fourier.

A precisão, eficiência e estabilidade dos algoritmos propostos são confirmados pela comparação dos resultados com soluções de referência. A aplicabilidade deste estudo é então ilustrada através de exemplos numéricos e a análise das respostas no domínio do tempo mostrou-se consistente com a física do problema.

Palavras-chave: Método dos elementos de contorno. Solução analítica. Transferência de calor transiente. Domínio da frequência. 2,5D. Transformada de Fourier.

ABSTRACT

This work presents a new approach for simulating the transient heat diffusion in a medium containing multilayered cylindrical heterogeneities using a formulation that combines the Boundary Element Method and analytical solutions. The analytical solutions are incorporated as particular Green functions, making it unnecessary to discretize the multilayer system interfaces, thus improving the efficiency of the algorithm. Codes were developed for problems with a heat source and infinite external domain, with initial conditions equal to zero, where a 2,5D approach was adopted that allows the simulation of three-dimensional phenomena through a summation of simpler 2D solutions, with different spatial wave numbers. The phenomenon that was initially considered was conduction and in a second phase of the work, conduction and convection were considered simultaneously. For convection, a radial velocity from the axis of the system was considered. Two-dimensional problems were also studied for inclusions in a finite domain with nonzero initial conditions involving only the conduction phenomenon. The interaction between the heterogeneous subdomains and the external homogeneous medium is established by imposing the continuity of temperatures and heat flows on the virtual interfaces created between them.

The solution is first calculated in the frequency domain for a wide range of frequencies and axial wave numbers, using complex frequencies to avoid the aliasing phenomenon. The time series can then be obtained by means of a fast inverse Fourier transform.

The accuracy, efficiency and stability of the proposed algorithms are confirmed by comparing the results with reference solutions. The applicability of this study is then illustrated through numerical examples and the analysis of the responses in the time domain proved to be consistent with the physics of the problem.

Keywords: Boundary element method. Analytical solution. Transient transfer heat. Frequency domain. 2,5D. Fourier transform.

LISTA DE FIGURAS

- FIGURA 1 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA INCLUSÃO CILÍNDRICA DE MULTICAMADAS, COMPOSTA POR $h-1$ ANÉIS CILÍNDRICOS (MEIOS = 1, 2.... $h-1$) E UM CILÍNDRIO INTERNO (MEIO h). ESTA INCLUSÃO É DELIMITADA POR UM SÓLIDO UNIFORME (MEIO 0) E SUBMETIDA A UMA FONTE DE CALOR.....36
- FIGURA 2 – VALORES PRESCRITOS NO CONTORNO.....54
- FIGURA 3 – REPRESENTAÇÃO DA SEÇÃO DE UMA INCLUSÃO CILÍNDRICA DE MULTICAMADA, COMPOSTA POR $h-1$ ANÉIS CILÍNDRICOS (MEIOS = 1,2,.... $h-1$) E UM CILÍNDRIO INTERNO (MEIO h). ESTA INCLUSÃO É DELIMITADA POR UM SÓLIDO UNIFORME (MEIO 0) E SUBMETIDA A UMA FONTE DE CALOR.....74
- FIGURA 4 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UMA INCLUSÃO CIRCULAR CILÍNDRICA SUBMETIDA A UMA FONTE DE CALOR.....78
- FIGURA 5 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS VERSUS SOLUÇÕES COM O CÓDIGO COM ACOPLAMENTO (PARTE REAL EM AZUL; PARTE IMAGINÁRIA EM VERMELHO; RESPOSTAS ANALÍTICAS EM LINHAS SÓLIDAS; RESULTADOS DO ACOPLAMENTO EM LINHAS MARCADAS) PARA $kz = 0,0\text{rad. m}^{-1}$ e $kz = 1,0\text{rad. m}^{-1}$: a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2.....79
- FIGURA 6 – ERRO NUMÉRICO ABSOLUTO DAS RESPOSTAS DO ALGORITMO PROPOSTO (LINHA LARANJA – 20 ELEMENTOS DE CONTORNO; LINHA VERDE – 50 ELEMENTOS DE CONTORNO): a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; RESPOSTAS NO RECEPTOR 2.....80
- FIGURA 7 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS DE MULTICAMADAS. ESSAS INCLUSÕES HETEROGÊNEAS ESTÃO INSERIDAS EM UM MEIO SÓLIDO (MEIO 0) E ESTÃO SUBMETIDAS A UMA FONTE DE CALOR.....81
- FIGURA 8 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA SEÇÃO DE DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS, CONSTITUÍDAS PELO MEIO 1 E MEIO 2. ESSAS INCLUSÕES ESTÃO INSERIDAS EM UM MEIO SÓLIDO (MEIO 0) E ESTÃO SUBMETIDAS A UMA FONTE DE CALOR.86

FIGURA 9 – SOLUÇÕES COM USO DO MEC CLÁSSICO VERSUS SOLUÇÕES DO CÓDIGO COM ACOPLAMENTO (PARTE REAL EM AZUL; PARTE IMAGINÁRIA EM VERMELHO; RESPOSTAS COM O MEC EM LINHAS SÓLIDAS; RESULTADOS DO ACOPLAMENTO EM LINHAS MARCADAS) PARA $kz = 0,0 \text{ rad.m}^{-1}$ e $kz = 1,0 \text{ rad.m}^{-1}$: a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2; c) RESPOSTAS NO RECEPTOR 3.	87
FIGURA 10 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA INCLUSÃO CIRCULAR DE MULTICAMADAS CONTORNADA POR UM MEIO SÓLIDO E FINITO (MEIO 0).....	89
FIGURA 11 – ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO	93
FIGURA 12 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA INCLUSÃO COMPOSTA DE UM MEIO 1, INSERIDA EM UM MEIO FINITO E UNIFORME (MEIO 0).....	94
FIGURA 13 – DISTRIBUIÇÃO INICIAL DE TEMPERATURA.....	94
FIGURA 14 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS VERSUS SOLUÇÕES DO CÓDIGO COM ACOPLAMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA (PARTE REAL EM AZUL; PARTE IMAGINÁRIA EM VERMELHO; RESPOSTAS ANALÍTICAS EM LINHAS CONTÍNUAS; RESULTADOS DO ACOPLAMENTO EM LINHAS MARCADAS): a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2.....	96
FIGURA 15 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS VERSUS SOLUÇÕES DO CÓDIGO COM ACOPLAMENTO NO DOMÍNIO DO TEMPO (RESPOSTAS ANALÍTICAS EM LINHAS CONTÍNUAS; RESULTADOS DO ACOPLAMENTO EM LINHAS MARCADAS): a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2.....	96
FIGURA 16 – RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA USANDO O ALGORITMO COM O MEC CLÁSSICO VERSUS ALGORITMO COM A FORMULAÇÃO PROPOSTA (PARTE REAL EM AZUL; PARTE IMAGINÁRIA EM VERMELHO; RESPOSTAS COM O MEC EM LINHAS CONTÍNUAS; RESULTADOS DO ACOPLAMENTO EM LINHAS MARCADAS): a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2; c) RESPOSTAS NO RECEPTOR 3; d) RESPOSTAS NO RECEPTOR 4.	97

FIGURA 17 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA SEÇÃO DE UM CILINDRO COM DUAS CAMADAS SUJEITO A UMA FONTE DE CALOR.	102
FIGURA 18 – RESPOSTAS ANALÍTICAS VERSUS RESPOSTAS DO ALGORITMO PROPOSTO (PARTE REAL EM AZUL; IMAGINÁRIA EM VERMELHO; RESULTADOS ANALÍTICOS EM LINHA CONTÍNUA; RESULTADOS DO CÓDIGO PROPOSTO EM LINHAS MARCADAS PARA $kz = 0,0 \text{ rad. mm}^{-1}$ E $kz = 0,5 \text{ rad. m}^{-1}$: a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2.....	103
FIGURA 19 – VERIFICAÇÃO DA ACURÁCIA DO CÓDIGO PROPOSTO PARA A FREQUÊNCIA DE $5,0 \times 10^{-7} \text{ Hz}$ (PARTE REAL E PARTE IMAGINÁRIA) COM DIFERENTES NÚMEROS DE ELEMENTOS DE CONTORNO: a) ERRO ABSOLUTO COM 20 ELEMENTOS DE CONTORNO; b) ERRO ABSOLUTO COM 40 ELEMENTOS DE CONTORNO.	104
FIGURA 20 – EVOLUÇÃO TEMPORAL DA FONTE DE CALOR.....	107
FIGURA 21 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA SEÇÃO DE DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS COM VÁRIAS CAMADAS. ESSAS INCLUSÕES SÃO DELIMITADAS POR UM SÓLIDO UNIFORME (MEIO 0) E SUBMETIDAS A UMA FONTE DE CALOR.	108
FIGURA 22 – VARIAÇÃO DAS PROPRIEDADES TÉRMICAS: a) EM Ω_1 ; b) EM Ω_2	109
FIGURA 23 – TEMPERATURAS NO RECEPTOR 1 (LINHA AZUL), RECEPTOR 2 (LINHA LARANJA) E RECEPTOR 3 (LINHA VERMELHA) PARA DIFERENTES Z-COORDENADAS: a) $z=0,0\text{m}$; b) $z=3,0\text{m}$	111
FIGURA 24 – TEMPERATURAS EM DIFERENTES COORDENADAS Z (LINHA SÓLIDA – $z= 0,0\text{m}$; LINHA MARCADA – $z=3,0\text{m}$): a) RECEPTOR 1; b) RECEPTOR 2; c) RECEPTOR 3.	112
FIGURA 25 – CAMPO DE TEMPERATURA EM UMA MALHA DE RECEPTORES EM ESCALA LOGARÍTMICA PARA O CASO 1 (MEIO HOMOGÊNEO E INFINITO COM DUAS INCLUSÕES) E CASO 2 (MEIO HOMOGÊNEO E INFINITO: a) $t=485\text{h}$; b) $t=1490\text{h}$; c) $t=2167\text{h}$	114
FIGURA 26 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA SEÇÃO DE QUATRO INCLUSÕES CILÍNDRICAS COM VÁRIAS CAMADAS. ESSAS INCLUSÕES SÃO DELIMITADAS POR UM SÓLIDO UNIFORME (MEIO 0) E SUBMETIDAS A UMA FONTE DE CALOR.	115

FIGURA 27 – CAMPO DE TEMPERATURA EM TRÊS MALHAS DE RECEPTORES TRANSVERSAIS EM ESCALA LOGARÍTMICA LOCALIZADAS EM $z=0,0m$, $z=3.0m$ E $x=0,0m$: a) $t=485h$; b) $t=1490h$; c) $t=2167h$	116
FIGURA 28 – VARIAÇÃO NA DENSIDADE E DIFUSIVIDADE TÉRMICA: a) EM $\Omega 1$; b) EM $\Omega 2$; c) EM $\Omega 3$	118
FIGURA 29 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA INCLUSÃO DE MULTICAMADAS. ESSA INCLUSÃO ESTÁ INSERIDA EM UM MEIO SÓLIDO UNIFORME FINITO (MEIO 0)	119
FIGURA 30 – DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA PARA $T_0(x,y)=1,0$: a) $t=195s$; b) $t=389s$; c) $t=585s$ E d) $t=976s$	120
FIGURA 31 – SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA UM MEIO HOMOGÊNEO SEM INCLUSÃO REPRESENTADA POR LINHAS SÓLIDAS E SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA UM MEIO COM UMA INCLUSÃO REPRESENTADA POR LINHAS MARCADAS. AMBOS OS CASOS PARA $T_0(x,y)=1,0$. RESPOSTAS PARA UMA LINHA DE RECEPTORES NOS INSTANTES: $t=292s$; $t=585s$ E $t=976s$, LOCALIZADOS EM: a) $y = 0,0m$; b) $y = 0,12m$	121
FIGURA 32 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE TRÊS INCLUSÕES DE MULTICAMADAS. ESSAS INCLUSÕES ESTÃO ENVOLVIDAS EM UM MEIO SÓLIDO UNIFORME (MEIO 0).	122
FIGURA 33 – CAMPO DE TEMPERATURA EM UMA GRELHA DE RECEPTORES PARA UM MEIO HETEROGÊNEO CONTENDO TRÊS INCLUSÕES E PARA UM MEIO HOMOGÊNEO INFINITO: a) $t=195s$; b) $t=585s$; c) $t=976s$	123
FIGURA 34 – a) REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA SEÇÃO DE DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS COM VÁRIAS CAMADAS SUBMETIDAS A UMA FONTE DE CALOR, b) EVOLUÇÃO TEMPORAL DA FONTE DE CALOR.....	124
FIGURA 35 – VARIAÇÃO DAS PROPRIEDADES TÉRMICAS: a) VARIAÇÃO NA CONDUTIVIDADE TÉRMICA; b) VARIAÇÃO NA DIFUSIVIDADE TÉRMICA.	125
FIGURA 36 – TEMPERATURAS NO RECEPTOR 1 (LINHA AZUL), RECEPTOR 2 (LINHA VERDE) E RECEPTOR 3 (LINHA LARANJA) E RECEPTOR 4	

	(LINHA VERMELHA) PARA DIFERENTES z-COORDENADAS: a) z=0,0m; c) z=0,5m.	128
FIGURA 37 – CAMPO DE TEMPERATURA EM UMA MALHA DE RECEPTORES EM ESCALA LOGARÍTMICA PARA O CASO 1 (SOMENTE CONDUÇÃO) E CASO 2 (CONDUÇÃO E CONVECÇÃO) EM t=784h: a) z=0,0m; b) z=2,5m; c) x=0,0m.		129
FIGURA 38 – CAMPO DE TEMPERATURA EM UMA MALHA DE RECEPTORES EM ESCALA LOGARÍTMICA PARA O CASO 1 (SOMENTE CONDUÇÃO) E CASO 2 (CONDUÇÃO E CONVECÇÃO) EM t=1624h: a) z=0,0m; b) z=2,5m; c) x=0,0m.		130
FIGURA 39 – CAMPO DE TEMPERATURA EM UMA MALHA DE RECEPTORES EM ESCALA LOGARÍTMICA PARA O CASO 1 (SOMENTE CONDUÇÃO) E CASO 2 (CONDUÇÃO E CONVECÇÃO) EM t=2438h: a) z=0,0m; b) Z=2,5m; c) x=0,0m.		131

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

MEC	- Método dos Elementos de Contorno
MEF	- Método dos Elementos Finitos
MDF	- Método das Diferenças Finitas
VPC	- Valor principal de Cauchy
MRD	- Método da Reciprocidade Dual
TF	- Transformada de Fourier
TFI	- Transformada de Fourier Inversa
TDF	- Transformada Discreta de Fourier
TDFI	- Transformada Discreta de Fourier Inversa
TRF	- Transformada Rápida de Fourier
MRP	- Método dos Resíduos Ponderados

LISTA DE SÍMBOLOS

t	- Tempo
T	- Temperatura
q	- Fluxo de calor
K	- Difusividade térmica
k	- Condutividade térmica
ρ	- Densidade
c	- Calor específico
K_v	- Difusividade térmica para o meio v
k_v	- Condutividade térmica para o meio v
ρ_v	- Densidade para o meio v
c_v	- Calor específico para o meio v
a_v	- Raio externo para o meio v
ω	- Frequência
δ	- Delta de Dirac
k_z	- Número de onda espacial na direção z
\tilde{T}_{inc}	- Campo de calor incidente
$H_n()$	- Funções de Hankel de segundo tipo de ordem n
$J_n()$	- Funções de Bessel de ordem n
$S_{ns}()$	- Funções de Struve de ordem ns
A	- Amplitude
V_x	- Velocidade de convecção para um meio fluido na direção x
V_y	- Velocidade de convecção para um meio fluido na direção y
V_z	- Velocidade de convecção para um meio fluido na direção z
V^v	- Velocidade de convecção radial relacionada ao meio v
r''	- Distância do receptor até a fonte
r_0	- Distância da fonte até o eixo da inclusão
r	- Distância do receptor ao eixo da inclusão
S	- Representa o contorno de um problema
Ω	- Representa o domínio de um problema
R	- Resíduo
Σ	- Somatório de números
w	- Função de ponderação

\tilde{c}	- Constante definida pelo contorno
ν_n	- Vetor normal ao contorno
G	- Solução fundamental para temperatura
H	- Solução fundamental para fluxo
\tilde{G}	- Temperatura computada analiticamente
\tilde{H}	- Fluxo computado analiticamente
∇^2	- Operador de Laplace
∂	- Derivada parcial

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	18
1.1 OBJETIVO GERAL	21
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	21
1.3 METODOLOGIA UTILIZADA	21
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO	22
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
2.1 APRIMORAMENTOS COM O USO DO MEC	25
2.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NO REGIME TRANSIENTE	26
3 TRANSFORMADA DE FOURIER	29
3.1 O PAR DA TRANSFORMADA DE FOURIER	29
3.2 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER	30
3.3 TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER	31
4 FORMULAÇÃO ANALÍTICA	34
4.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO	34
4.1.1 Formulação analítica para uma inclusão cilíndrica de multicamadas submetida a uma fonte de calor (somente condução)	36
4.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E CONVECÇÃO	44
4.2.1 Formulação analítica para uma inclusão cilíndrica de multicamadas submetida a uma fonte de calor (condução e convecção)	45
5 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	53
5.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO	53
5.1.1 Formulação do MEC para meios homogêneos	53
5.1.2 Formulação do MEC para meios sólidos contendo inclusões sólidas	60
5.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E CONVECÇÃO	64
5.2.1 Formulação do MEC para meios homogêneos	64
5.2.2 Formulação do MEC para meios contendo inclusões	68
6 ACOPLAMENTO DO MEC COM A FORMULAÇÃO ANALÍTICA	73
6.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO	73
6.1.1 Fonte de Calor e condições iniciais iguais a zero	73
6.1.1.1 Formulação para uma inclusão	74
6.1.1.3 Formulação para duas inclusões	80
6.1.2 Condições iniciais diferentes de zero	88

6.1.2.1	Formulação para uma inclusão	88
6.1.2.2	Verificação da formulação para uma inclusão	93
6.2	TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E CONVECÇÃO	98
6.2.1.1	Fonte de calor e condições iniciais iguais a zero	98
6.2.1.2	Formulação para uma inclusão	98
6.3	RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO	104
7	APLICAÇÕES	106
7.1	TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO	106
7.1.1	Fonte de calor e condições iniciais iguais a zero	106
7.1.2	Condições iniciais diferentes de zero	117
7.2	TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E CONVECÇÃO	123
7.2.1	Fonte de Calor e condições iniciais iguais a zero	124
8	CONCLUSÕES	132
8.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	133
	REFERÊNCIAS	135

1 INTRODUÇÃO

O estudo da propagação de calor é importante em diversas áreas da ciência e uma das referências bibliográficas mais relevantes sobre transferência de calor é o livro de Carslaw e Jaeger (1959). As soluções de engenharia são elaboradas visando a performance ótima com relação aos processos e economia de materiais. Sob esse enfoque, os projetos que são elaborados com maior precisão, permitem uma concepção mais otimizada e eficiente e o aprimoramento nos métodos relacionados à transferência de calor, sob o ponto de vista da acurácia e eficiência na sua implementação, permite uma melhor avaliação do seu comportamento real, trazendo soluções mais arrojadas e econômicas. As disciplinas da engenharia dedicadas à transferência de calor, além de se dedicarem à compreensão dos fenômenos, fomentam o desenvolvimento de métodos de cálculo capazes de simular muitos dos problemas reais e quanto maiores forem as exigências mais detalhada deverá ser a sua avaliação. A crescente proliferação dos recursos computacionais tem ocasionado uma procura constante de ferramentas de cálculo que possuam capacidade de modelar fisicamente os problemas com o máximo de fidelidade possível, as quais revelam ser uma alternativa vantajosa em relação às dispendiosas campanhas de ensaios laboratoriais.

Problemas mais simples, podem ser estudados com o uso de soluções analíticas (ZHUANG; WERNER; SCHLÜNDER, 1995; BLUCK; WOLFENDALE, 2017). Porém, em geral, a complexidade dos problemas impossibilita a obtenção de soluções analíticas que governam seus fenômenos físicos, fazendo com que a única alternativa viável para analisá-los seja a utilização de métodos numéricos com diferentes complexidades, como o Método dos Elementos de Contorno (MEC) (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984; SHI; BANERJEE, 1993; SHEHAB, 2015), o Método dos Elementos Finitos (MEF) (BATHE, 1976; GARTLING, 1977) e o Método das Diferenças Finitas (MDF) (FREITAS; ABRANCHES; CRAUSSE, 1996; KHADER; MEGAHED, 2013). Entre essas técnicas, possivelmente, o MEC é a ferramenta mais adequada para modelar sistemas infinitos homogêneos contendo inclusões. Ele satisfaz automaticamente as condições de campo e apenas os contornos das interfaces e das inclusões precisam ser discretizados, enquanto o MEF e o MDF exigem a discretização completa do domínio que está sendo estudado, o que leva a esquemas computacionais numéricos maiores.

Esse trabalho visa contribuir com estudos no âmbito da transferência de calor, através do desenvolvimento de algoritmos que permitem o cálculo da difusão de calor em regime transiente, nas proximidades de inclusões cilíndricas de múltiplas camadas, inseridas em um meio homogêneo infinito sujeito a uma fonte de calor com condições iniciais iguais a zero e problemas com condições iniciais diferentes de zero. Numa primeira fase foi considerada somente a transferência de calor por condução e posteriormente por condução e convecção. Alguns casos que possuem configurações semelhantes a geometria do problema estudado são os cabos elétricos, dutos e fibras óticas. A formulação apresentada nesse trabalho para a condução e convecção, considera uma velocidade radial. Esse comportamento pode ser observado em veias e artérias, que sendo sistemas permeáveis, possuem propriedades que permitem a difusão de fluidos através delas. As fissuras de origem térmica são frequentes em estruturas de grandes dimensões, como por exemplo em barragens. Sendo assim, é importante um controle na distribuição de temperatura nessas estruturas e é possível controlar essas variações térmicas através de perfurações no concreto para inserção de gases para seu resfriamento, gerando uma convecção radial. O estudo através dos métodos numéricos da distribuição térmica nesses elementos, permite evitar condições que podem resultar em falhas ocasionando danos ambientais, econômicos e até mesmo humanos.

A presente tese explora soluções analíticas aplicáveis ao estudo da difusão de calor em regime permanente e transiente, para um meio que hospeda um sistema cilíndrico de várias camadas, quando submetidos a fontes de calor, simulando fenômenos de condução e convecção. As equações analíticas para uma inclusão composta de um anel, de comprimento infinito, preenchido no seu interior pode ser encontrada no trabalho de Simões (2006). Nessa tese, essas equações foram expandidas para o caso genérico de uma inclusão com múltiplos anéis.

Para um problema com múltiplas inclusões, a solução analítica é muito mais complexa de se obter. Neste trabalho é apresentada uma formulação acoplando o MEC com essas soluções analíticas que são utilizadas como soluções fundamentais na modelagem de sistemas contendo inclusões de multicamada. O MEC é então usado para o domínio ilimitado homogêneo, enquanto as soluções analíticas são usadas para resolver cada um dos subdomínios confinados não homogêneos. Essa estratégia combina as vantagens de ambos os métodos em uma única solução. Como a formulação analítica é incorporada como uma função de Green, evita-se a

discretização das interfaces do sistema multicamada, melhorando a eficiência do algoritmo, e o acoplamento com o MEC permite lidar com a interação entre as inclusões com multicamadas que, na prática, seriam inviáveis de serem resolvidas apenas com a solução analítica. A interação entre as diferentes heterogeneidades é estabelecida pela imposição da continuidade de temperaturas e fluxos de calor nas interfaces virtuais criadas entre o meio sólido infinito homogêneo e cada um dos subdomínios heterogêneos. Essa estratégia proposta (de acoplamento entre o MEC e soluções analíticas) pode ser estendida para diferentes problemas com outras geometrias, para os quais a solução analítica existe ou pode ser definida. Uma aplicação similar foi desenvolvida por Tadeu *et al.* (2004) onde a associação desses dois métodos foi usada para computar a transferência de calor em um sistema com multicamadas paralelas com inclusões homogêneas.

A maior parte dos trabalhos desenvolvidos para resolver problemas de calor por difusão transiente foram formulados na abordagem de "marchar no tempo", que obtém a solução a cada etapa diretamente no domínio do tempo ou empregam a transformada de Laplace, removendo a derivada dependente do tempo usando uma variável de transformação. Neste trabalho, a variável dependente do tempo é removida com a aplicação de uma transformada de Fourier, trazendo resultados para o domínio da frequência (TADEU; SIMÕES, 2006). As respostas no domínio do tempo podem ser computadas por meio de uma transformada de Fourier inversa, após a solução ser obtida para uma sequência de valores do parâmetro de transformação (SIMÕES; TADEU, 2005). O "aliasing" é impedido usando frequências complexas com uma pequena parte imaginária, como mencionado por Bouchon e Aki (1977) e Phinney (1965). Este procedimento também permite o cálculo da resposta no regime estacionário. As respostas no domínio da frequência são computadas para fontes unitárias. Isso permite que o efeito de diferentes fontes de calor, com distintas durações e variações de amplitude, seja simulado sem a necessidade de recalculá-las as respostas do MEC no domínio da frequência.

A simulação de fenômenos tridimensionais traz um alto custo computacional, porém, se a geometria do problema permanecer constante em uma direção, a solução 3D completa pode ser expressa como um somatório de soluções 2D mais simples com diferentes números de onda espaciais. Esse trabalho utiliza essa abordagem que é frequentemente chamada de problema 2,5D, onde uma transformada de Fourier espacial na direção em que a geometria não varia é usada para a cálculo da resposta

(GODINHO; TADEU; SIMÕES, 2004; TADEU; GODINHO, 1999; TADEU; KAUSEL, 2000; TADEU; ANTÓNIO; GODINHO, 2001).

1.1 OBJETIVO GERAL

O presente estudo tem como objetivo principal contribuir para o desenvolvimento de métodos de simulação da transferência de calor envolvendo condução e convecção, no domínio da frequência e do tempo, com uma formulação proposta capaz de resolver problemas de transferência de calor em regime transiente para anéis concêntricos delimitados por um meio uniforme.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) Apresentação da base teórica e as formulações para problemas de transferência térmica transiente, utilizando o Método de Elementos de Contorno para meios homogêneos e as técnicas analíticas para obtenção do campo de calor gerado por uma fonte atuando na presença de uma inclusão cilíndrica de multicamadas;
- b) Implementação de códigos computacionais em três abordagens: considerando condução isolada, condução e convecção em simultâneo e problemas de condições iniciais diferentes de zero envolvendo condução;
- c) Validação dos códigos e análise de exemplos.

1.3 METODOLOGIA UTILIZADA

Inicialmente, foi feita uma ampla pesquisa da base teórica e das formulações envolvendo livros consagrados, teses, artigos científicos e dissertações.

Em seguida, foi feita a implementação de códigos computacionais, em linguagem Fortran, com uma formulação proposta capaz de resolver problemas de transferência de calor em regime transiente para anéis cilíndricos concêntricos delimitados por um meio uniforme. Essa formulação engloba o uso do MEC associado com soluções analíticas no domínio da frequência. As soluções analíticas são específicas para problemas que possuem uma geometria simples, envolvendo uma

configuração circular constituída por múltiplas camadas e sujeita a uma fonte de calor. Para este trabalho, essas soluções foram definidas considerando isoladamente o fenômeno de condução ou em simultâneo com a convecção, assumindo-se sempre condições iniciais nulas. Essas soluções analíticas, além de poderem ser implementadas na resolução de problemas específicos, desempenham nesse trabalho um papel fundamental no processo de verificação de outras formulações, e servem também para os modelos baseados no MEC. Para alguns problemas, para os quais não é possível estabelecer soluções analíticas, desenvolveu-se então, modelos numéricos baseados no MEC que integram essas soluções analíticas específicas, trazendo a redução do esforço computacional, uma vez que não é necessário discretizar as interfaces entre os anéis concêntricos. Na criação destes modelos numéricos desenvolveu-se a solução de problemas considerando uma fonte de calor com condições iniciais nulas e problemas que apresentam valores iniciais de temperatura no domínio espacial não nulos.

Foram feitas então, as validações dos códigos comparando os resultados com exemplos específicos e a análise de exemplos de aplicação das ferramentas computacionais desenvolvidas com a discussão dos resultados.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em oito capítulos. O primeiro deles, destina-se a uma contextualização do presente estudo. O segundo, apresenta uma revisão bibliográfica. O terceiro capítulo é destinado a descrição da transformada de Fourier, a qual é de suma importância para o desenvolvimento da formulação utilizada nesta tese.

No quarto capítulo, definem-se as equações governantes para transferência de calor no domínio da frequência. Em seguida, são apresentadas as soluções analíticas para a obtenção do campo de calor gerado por uma fonte de calor atuando na presença de uma inclusão cilíndrica de multicamadas inserida num meio infinito. Considerou-se inicialmente o fenômeno da condução isoladamente e, em seguida, simultaneamente com o fenômeno de convecção.

No quinto capítulo, apresenta-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno para a obtenção do campo de calor, no domínio da frequência, gerado por uma fonte, considerando inicialmente apenas o fenômeno de condução e,

posteriormente, admitindo a ocorrência simultânea da condução e da convecção. Essas formulações descritas permitem a análise de propagação de calor para meios infinitos contendo inclusões de geometria variável. Neste capítulo, também, definem-se as funções de Green necessárias para a resolução pelo MEC.

No sexto capítulo, a estratégia que acopla o MEC com as soluções analíticas é então introduzida. Na primeira parte deste capítulo, são impostas condições iniciais nulas e em seguida é apresentada a formulação para condições iniciais diferentes de zero com a formulação primeiro envolvendo condução isoladamente. Em uma segunda parte, analisa-se a formulação para condições iniciais iguais a zero envolvendo condução e convecção simultaneamente. A validade das funções propostas neste capítulo é analisada comparando os resultados obtidos no domínio da frequência com as soluções fornecidas pela formulação descrita no Capítulo 4 e foram feitas também algumas verificações adicionais no domínio do tempo. Em seguida, neste capítulo, o método para obtenção da solução no domínio do tempo é explicado resumidamente.

No sétimo capítulo, ilustra-se a aplicabilidade das ferramentas desenvolvidas. Nos exemplos de aplicação, avalia-se a influência da presença de heterogeneidades e das suas propriedades térmicas, na propagação de calor em regime transiente em sistemas contendo inclusões cilíndricas de secção circular. Analisa-se a importância do fenômeno de convecção quando este atua em simultâneo com a condução. Neste capítulo, estuda-se também o MEC aplicado à resolução de problemas de transferência de calor por condução com condições iniciais de temperatura diferentes de zero.

No oitavo e último capítulo, apresentam-se algumas conclusões finais que dão ênfase aos aspectos mais relevantes do presente trabalho, assim como algumas perspectivas para desenvolvimento futuro.

Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas para a elaboração desta tese.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As equações integrais têm sido estudadas desde o início do século XIX e são o alicerce do Método dos Elementos de Contorno com a contribuição de esforços de matemáticos como Laplace, Green, Fourier e Betti. A primeira teoria clássica das equações integrais, onde os núcleos eram definidos e integráveis, foi apresentada no trabalho de Fredholm (1903) que estudou problemas de potencial regidos pela equação de Laplace, nos quais adotou um procedimento de discretização para estabelecer a existência de soluções para a equação integral de contorno.

Em seguida pesquisadores como Kellog (1929), Muskhelishvili (1953), Mikhlin (1957) e Kupradze (1965) aplicaram a solução para problemas de elasticidade. Esses trabalhos fazem parte da formulação indireta, pois apresentam a solução em função de variáveis fictícias que não têm significado físico real, as quais permitem o cálculo das variáveis físicas dos problemas.

Muitos pesquisadores atribuem a origem do MEC aos trabalhos de Jawson (1963) e Symm (1963), onde a equação integral de contorno de Laplace foi resolvida usando discretização e técnicas computacionais, utilizando-se de variáveis reais. Assim, foi considerado um método semi-direto aplicado a problemas de potencial. Esses autores sugeriram a ampliação para problemas na teoria da elasticidade e problemas tridimensionais.

As primeiras aplicações em problemas de elasticidade bidimensional foram realizadas por Rizzo (1967), que destacou em seu trabalho que o surgimento de núcleos singulares nestas equações integrais de contorno é mais complexo que aqueles que surgem para o problema de potencial. Ressalta em seu trabalho, também, a atenção necessária aos núcleos singulares cujas integrais só existem no sentido do valor principal de Cauchy (VPC). Seguindo essa formulação direta, Cruse (1969) ampliou esse método para elasticidade tridimensional fazendo a aproximação das variáveis de contorno por uma função constante. Cruse (1974) apresenta uma formulação melhorada com aproximação linear para tais variáveis em problemas de duas e três dimensões.

O método teve uma generalização para problemas de engenharia com o trabalho de Lachat (1975) e Lachat e Watson (1976), que são, provavelmente, as mais significativas contribuições iniciais para o MEC se tornar uma técnica numérica eficaz, nas quais as técnicas de resolução das equações integrais são calculadas

numericamente, utilizando quadratura Gaussiana. A partir de então, as Equações Integrais de Contorno começam a ser vistas como métodos numéricos.

O termo elemento de contorno originou-se no departamento de Engenharia Civil na Universidade de Southampton, aparecendo pela primeira vez no trabalho de Brebbia e Domingues (1977). Em 1978, o primeiro livro sobre o método dos elementos de contorno foi publicado (BREBBIA, 1978) com o qual o método teve sua divulgação inicial bem definida com aplicações na engenharia.

Desde então, o MEC tem sido aplicado com sucesso em variadas áreas como elastodinâmica (TADEU; KAUSEL, 2000), acústica (ANTÓNIO; GODINHO; TADEU, 2004; DE LACERDA; WROBEL; MANSUR, 1997), eletromagnetismo (HOLM; STEPHAN, 1995), entre outras e com a associação com diferentes métodos numéricos (TADEU; SIMÕES; SIMÕES, 2010; TADEU; ANTÓNIO, SIMÕES, 2010). Em relação ao tema desta tese, existem diversos trabalhos na literatura em que o MEC é utilizado para solucionar problemas de transferência de calor (RAGHU; JAGATH, 2013; PETTRES; LACERDA; CARRER, 2015; SALAM; WROBEL, 2019).

2.1 APRIMORAMENTOS COM O USO DO MEC

As potencialidades do MEC têm motivado a comunidade científica a desenvolver diversos esquemas numéricos para aprimorar a sua eficiência, ampliando a sua aplicação para uma forma mais generalizada, podendo ser usado em um maior número de problemas. O método da Reciprocidade Dual (MRD) é uma dessas técnicas e foi proposto originalmente por Nardini e Brebbia (1982) para problemas de vibrações. Posteriormente foi estendido em diversas pesquisas como a de Wrobel e Brebbia (1987) para problemas de difusão e mais tarde para problemas mais gerais por Partridge e Brebbia (1989) e Partridge e Brebbia (1990). A essência do MRD é construir soluções particulares para resolver problemas não-lineares ou dinâmicos, considerando as forças de inércia como forças de domínio. Baseado nessa ideia, esse conjunto de funções transformam a integral de domínio em uma série de integrais de contorno.

Sirilath e Chan (2008) propuseram um modelo que combina o Método dos Elementos Finitos com o dos Elementos de Contorno para avaliar o fenômeno de transferência de calor em processamento a laser. Guven e Madenci (2003) desenvolveram um modelo que também associa esses dois métodos para análise de

condução de calor transiente bidimensional e análises termo elásticas em domínios com materiais diferentes e descontinuidades geométricas.

A necessidade de estudar a transferência de calor em problemas caracterizados pela existência de heterogeneidades (inclusões de multicamadas), pode beneficiar-se do desenvolvimento de modelos que combinem algoritmos específicos. Embora seja possível resolver esse tipo de problema apenas com o MEC convencional, a sua combinação com adequadas funções de Green permite evitar a necessidade de discretização das interfaces entre camadas com diferentes propriedades térmicas (sólidas ou fluidas), sendo esta a proposta deste trabalho. Esta técnica de acoplamento proposta pode ser estendida a diferentes problemas com outras geometrias, para os quais existem ou podem ser definidas soluções analíticas. Uma aplicação semelhante foi desenvolvida por Tadeu et al. (2004) onde o MEC foi combinado com soluções analíticas para calcular a transferência de calor através de um sistema estratificado sólido podendo conter inclusões homogêneas.

No domínio da transferência de calor têm sido desenvolvidos e propostos diversos modelos com o MEC que podem ser subdivididos em dois tipos: problemas em regime permanente e em regime transiente. Estudos de condução de calor em regime permanente baseados no MEC foram abordados por alguns pesquisadores. Divo e Kassab (1996) propuseram uma solução fundamental generalizada para o MEC aplicado ao estudo de condução de calor isotrópica em um meio com variação espacial da condutibilidade térmica. Tanaka, Matsumoto e Sud (2001) aplicaram o método dos elementos de contorno com dupla reciprocidade para resolver problemas de condução de calor em regime permanente de materiais com gradiente funcional. Mera et al. (2002) aplicaram um método de elemento de contorno modificado para lidar com singularidades para problemas com condução de calor em regime permanente em um meio anisotrópico.

2.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NO REGIME TRANSIENTE

Como mencionado anteriormente, os programas com o MEC para difusão transiente foram desenvolvidos principalmente usando dois procedimentos: o método amplamente conhecido por *time marching* e o método da transformada de Laplace. Outra abordagem alternativa, que foi usada neste trabalho, é a aplicação de uma transformada de Fourier. Um estudo desses esquemas foi apresentado por Manolis

(1983) e Beskos (1987). A abordagem de *time marching* obtém os resultados diretamente no domínio do tempo e é um método de aplicação simples e direta. Parte-se do pressuposto de que as temperaturas e fluxos de calor podem ser calculados considerando sucessivos incrementos de tempo até ao instante pretendido. Wrobel e Brebbia (1981) implementaram uma formulação para análise de problemas de difusão axissimétrica de calor. Dargush e Banerjee (1991) propuseram um modelo para analisar problemas de transferência de calor com o uso do MEC, no domínio do tempo, para problemas bidimensionais, tridimensionais e axissimétricos. Davies (1997) calculou o fluxo de calor através de uma parede de múltiplas camadas, considerando camadas virtuais para poder estudar a transferência de calor por radiação e convecção. Mais recentemente, o trabalho de Carrer e Mansur (2004) apresenta um esquema de *time marching* alternativo para realizar análise elastodinâmica pelo Método dos elementos de contorno. Uma desvantagem desse processo de “marcha no tempo” é que a solução pode ser instável. As soluções encontradas são geralmente mais precisas no início do período de interesse do que posteriormente, uma vez que o erro se acumula com o tempo.

O uso da transformada de Laplace remove a derivada dependente do tempo usando uma variável de transformação. Este procedimento requer uma transformação inversa para obter a solução no domínio do tempo. Rizzo e Shippy (1970) foram os primeiros a usar uma formulação do método dos elementos de contorno para problemas de condução de calor transiente usando a transformada de Laplace para estabelecer uma integração do contorno que independe do tempo, em um domínio transformado. Essa publicação precedeu uma grande quantidade de pesquisas conduzidas nesta área. Cheng, Abousleiman e Badmus (1992) empregaram um modelo com o uso do MEC na resolução de da equação de difusão axissimétrica no domínio da Transformada de Laplace. Amado e Tobar (2005) estudaram a aplicabilidade da transformada de Laplace com o método dos elementos de contorno com dupla reciprocidade para fins de modelagem de tratamento térmico a laser.

O processo da transformada inversa para a obtenção da resposta no domínio do tempo pode levar a uma perda de precisão, pois pode conduzir à amplificação de pequenos erros decorrentes da necessidade de truncar a resposta. Este fato tem motivado a busca de uma solução para este problema. Stehfest (1970) e Papoulis (1957), por exemplo, propuseram algoritmos específicos para aplicar à transformada inversa de Laplace.

Como mencionado anteriormente, este trabalho usa uma formulação que remove a variável dependente do tempo aplicando uma transformada de Fourier, trazendo os resultados para o domínio da frequência. A série temporal pode ser obtida aplicando uma transformada inversa de Fourier (rápida) no espaço-tempo. O trabalho de Tadeu, Simões e Simões (2010) utilizou esse esquema em um modelo baseado no MEC e na correspondente equação integral derivada (TBEM), combinados com o Método das Soluções Fundamentais (MSF) para o estudo da transferência de calor transiente na presença de inclusões, de forma a superar as limitações de cada método. Outro exemplo de trabalho que utilizou a sua formulação no domínio da frequência obtida por uma transformada de Fourier foi o de Simões e Tadeu (2006) que estudou a transferência de calor em solos estratificados sujeitos a múltiplas fontes de calor.

Nesse contexto, o presente trabalho visa desenvolver um estudo capaz de resolver problemas de transferência de calor em um meio com múltiplas inclusões de multicamadas cilíndricas, utilizando uma formulação obtida pela Transformada de Fourier trazendo os resultados para o domínio da frequência e podendo posteriormente obter-se a série temporal através de uma Transformada Inversa de Fourier.

3 TRANSFORMADA DE FOURIER

Este capítulo tem como objetivo principal resumir as principais propriedades da Transformada de Fourier e apresentar a sua determinação na forma discreta chamada de transformada discreta de Fourier (TDF) e uma forma alternativa para computar a TDF, chamada de Transformada Rápida de Fourier (TRF).

3.1 O PAR DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Dada uma função contínua $x(t)$, a Integral de Fourier é definida por (BRIGHAM, 1988):

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

Se essa integral existe para todo valor do parâmetro ω , então a equação (1) define $X(\omega)$ como a Transformada de Fourier (TF) de $x(t)$. Tipicamente $x(t)$ é denominada uma função da variável tempo e $X(\omega)$ da variável frequência. Para que $X(\omega)$ convirja, são necessárias as seguintes condições:

- a) $x(t)$ deve possuir um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito;
- b) $x(t)$ deve possuir um número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito;
- c) $x(t)$ deve ser absolutamente integrável em módulo, isto é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (2)$$

O sinal original é recuperado pela Transformada de Fourier Inversa (TFI) que é dada por:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3)$$

As duas equações (1) e (3) são denominadas de Par da Transformada de Fourier.

3.2 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Na prática, o par de transformadas definidas em (1) e (3) não é apropriado para o cálculo em computador já que só é possível defini-las para um conjunto de valores e não em sua totalidade. Sendo assim, torna-se necessário o uso da Transformada Discreta de Fourier (TDF), que é baseada na amostragem de uma função contínua. Para isso, define-se a função $x(t)$ em uma amostragem de N pontos, ou seja, quando forem conhecidos $x(t_k)$ para $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, o valor de $X(\omega_j)$ em pontos discretos do espectro das ω_j frequências, poderá ser avaliado numericamente através da expressão:

$$X(\omega_j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) e^{-\frac{2\pi i k j}{N}}, \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (4)$$

A TDF Inversa (TDFI), que transforma a sequência $X(\omega_j)$ em $x(t_k)$ é:

$$x(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X(\omega_j) e^{\frac{2\pi i k j}{N}}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (5)$$

Introduzindo o termo W_N , onde:

$$W_N = e^{\frac{2\pi i}{N}} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}\right). \quad (6)$$

Usando uma notação mais compacta para as equações (4) e (5):

$$X(\omega_j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(t_k) W_N^{-kj} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad (7)$$

$$x(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X(\omega_j) W_N^{kj} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (8)$$

A variável W_N é frequentemente chamada de "Enésima raiz da unidade", uma vez que $(W_N)^N = e^{2\pi i} = 1$. Outra característica de W_N é ser periódica, ou seja, $W_N^k = W_N^{k+mN}$ para qualquer número inteiro m .

As expressões (4) e (5) são as versões discretizadas das equações (1) e (3) respectivamente e são denominadas de Par da Transformada de Fourier discreto. Na forma matricial, fazendo $x(t_k) = x(k)$ e $X(\omega_j) = X(j)$, a TDF pode ser descrita matricialmente como:

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{x}, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \dots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

onde \mathbf{D} é chamada de matriz TDF e é de ordem $N \times N$. Dessa forma verifica-se pela equação (4), que para determinar o TDF de um sinal discreto $x(t_k)$ (onde N é o tamanho de seu domínio), multiplica-se cada um de seus valores por e elevado a alguma função de k . Soma-se então os resultados obtidos para chegar a $X(\omega_j)$ para um dado j . Se um computador for usado para calcular a Transformada Discreta de Fourier de um sinal, seria necessário executar N^2 multiplicações complexas. Portanto, a ordem da complexidade multiplicativa de uma TDF é de $O(N^2)$ para o cálculo de $X(\omega_j)$ de tamanho N .

3.3 TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

A Transformada Rápida de Fourier (TRF) é uma classe de algoritmos eficientes para calcular o TDF. Os algoritmos que utilizam a TRF permitem reduzir o esforço computacional na avaliação de uma TDF. O algoritmo da TRF descrito por James Cooley e Tukey (1965), é o mais comum para a aplicação de TRF. Esse algoritmo, publicado em 1965, utiliza uma maneira recursiva de resolver TDF de qualquer tamanho arbitrário N . A técnica consiste em dividir uma TDF maior em problemas de TDF menores, que subsequentemente reduzem a complexidade de seu algoritmo.

Da equação (7), tem-se:

$$X(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{-kj} \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (11)$$

Admitindo N como um número par e inteiro, pode-se dividir $x(k)$ em duas sequências de tamanho $M = \frac{N}{2}$, onde uma consiste nos termos pares de $x(k)$ e a outra, nos termos ímpares:

$$x_1(k) = x(2k), \quad (12)$$

$$x_2(k) = x(2k+1) \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots, M-1. \quad (13)$$

Assim, utiliza-se da equação (11) para determinar as TDF:

$$X_1(j) = \sum_{k=0}^{M-1} x_1(k) W_M^{-kj}, \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (14)$$

$$X_2(j) = \sum_{k=0}^{M-1} x_2(k) W_M^{-kj}, \text{ para } j = 0, 1, 2, \dots, M-1. \quad (15)$$

A equação (11) pode ser escrita com dois somatórios:

$$X(j) = \sum_{k=0}^{M-1} x(2k) W_N^{-2kj} + \sum_{k=0}^{M-1} x(2k+1) W_N^{-(2k+1)j}. \quad (16)$$

Dado que:

$$W_N^{-2kj} = e^{\frac{-2\pi i k j}{N/2}} = W_M^{-kj}, \quad (17)$$

$$W_N^{-(2k+1)j} = e^{\frac{-2\pi i j(2k+1)}{N}} = W_M^{-kj} W_N^{-j}. \quad (18)$$

Substituindo as equações (12), (13), (17) e (18) em (16), encontra-se:

$$X(j) = \sum_{k=0}^{M-1} x_1(k) W_M^{-kj} + W_N^{-j} \sum_{k=0}^{M-1} x_2(k) W_M^{-kj}, \quad (19)$$

para $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Comparando com as equações (14) e (15), observa-se que:

$$X(j) = X_1(j) + W_N^{-j} X_2(j), \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (20)$$

Levando em conta a propriedade de simetria e periodicidade de W_N^j , em que:

$$W_N^{j+\frac{N}{2}} = W_N^j W_N^{\frac{N}{2}} = W_N^j e^{i\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{N}{2}\right)} = W_N^j e^{i\pi} = -W_N^j. \quad (21)$$

Tem-se que:

$$X(j) = X_1(j) + W_N^{-j} X_2(j), \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad (22)$$

$$X(j+M) = X_1(j) - W_N^{-j} X_2(j), \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, M-1. \quad (23)$$

Nota-se que o cálculo da transformada discreta de Fourier de $X_1(j)$ ou $X_2(j)$ requer apenas M^2 ou $\frac{N^2}{4}$ operações complexas. Sendo assim, quando usamos as equações (22) e (23) para obter $X(j)$, requerem-se $2\left(\frac{N^2}{4}\right)$ operações de multiplicação para calcular as duas transformadas de Fourier $X_1(j)$ e $X_2(j)$ e mais N operações de adições. Assim, o número de operações é reduzido de N^2 para $N + \frac{N^2}{2}$. Agora, supondo que N seja divisível por 4 ou $M = \frac{N}{2}$ divisível por 2, o número de operações passa a ser $2\left(2\left(\frac{N}{4}\right)^2 + \frac{N}{2}\right) + N$. Esse procedimento pode ser recursivamente aplicado, se N for divisível por N^p (sendo p um número inteiro positivo), até que cada uma das TDFs resultantes seja de comprimento 2. Embora a maioria das sequências não tenha esses números convenientes de termos, adiciona-se artificialmente zeros na extremidade de uma sequência para atingir tal valor. Sendo assim, o número de operações para o cálculo de uma TDF de dados de entrada pelo algoritmo de TRF será:

$$N + N \log_2 N. \quad (24)$$

Sendo assim, esse esquema de cálculo permite reduzir a ordem de cálculo da complexidade multiplicativa da TDF de $O(N^2)$ para apenas $O(N \log_2 N)$.

4 FORMULAÇÃO ANALÍTICA

Neste capítulo, primeiramente, apresentam-se as formulações para o fenômeno de transferência de calor em regime transiente de condução, para o domínio da frequência. Em seguida, definem-se as soluções 2,5D para um sistema com uma inclusão formada por anéis cilíndricos com um meio homogêneo no seu interior, delimitada exteriormente por um sólido infinito e submetida a uma fonte de calor.

Em um segundo momento, são apresentadas as formulações para o problema de transferência de calor considerando a condução e a convecção. Para este caso, apresentam-se também as soluções analíticas para uma inclusão formada por anéis cilíndricos compostos por meios sólidos ou fluidos, preenchida no seu interior por um meio sólido ou fluido, inserida em um domínio infinito e homogêneo e submetida a uma fonte de calor.

As equações analíticas para uma inclusão composta de um anel de comprimento infinito, preenchido no seu interior, podem ser encontradas no trabalho de Simões (2006). Nesse trabalho, essas equações foram expandidas para o caso genérico de uma inclusão com múltiplos anéis concêntricos.

4.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO

A transferência de calor por condução em um domínio sólido homogêneo Ω , no domínio do tempo, pode ser descrita pela seguinte equação (CARSLAW; JAEGER, 1959):

$$\nabla^2 T = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (25)$$

onde $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$, t é o tempo, $T(t, x, y, z)$ representa temperatura, $K = k/(\rho c)$ a difusividade térmica, k a condutividade térmica, ρ a densidade e c o calor específico.

Para transformar a equação (25) em uma equação no domínio da frequência, a transformada de Fourier é aplicada e chega-se a:

$$\left(\nabla^2 + \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K}} \right)^2 \right) \hat{T}(\omega, x, y, z) = 0, \quad (26)$$

onde $i = \sqrt{-1}$, ω é a frequência e $\hat{T}(\omega, x, y, z) = \int_0^\infty T(t, x, y, z) e^{-i\omega t} dt$.

A solução fundamental para uma fonte de calor aplicada em (x_s, y_s, z_s) em um meio infinito, na forma $f(\omega, x, y, z) = \delta(x - x_s)\delta(y - y_s)\delta(z - z_s)e^{i\omega t}$, em que $\delta(x - x_s)$, $\delta(y - y_s)$ e $\delta(z - z_s)$ são Deltas de Dirac, pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} \hat{T}(\omega, x, y, z) & \quad (27) \\ &= \frac{1}{2k\sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}} e^{\left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K}}\right)\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2+(z-z_s)^2}}. \end{aligned}$$

Se a geometria do problema permanecer constante ao longo da direção z , a solução 3D completa pode ser expressa como um somatório de soluções 2D mais simples com diferentes números de onda espaciais k_z . Esse procedimento requer a aplicação de uma transformação espacial de Fourier ao longo dessa direção,

$$\tilde{T}(\omega, x, y, k_z) = \frac{-i}{4k} H_0 \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K} - (k_z)^2} r'' \right), \quad (28)$$

onde $r'' = \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2}$ e $H_0(\cdot)$ é a função de Hankel de segundo tipo e ordem 0. Esta resposta está relacionada com a variação espacial de uma fonte de calor linear na forma $f(\omega, x, y, k_z) = \delta(x - x_s)\delta(y - y_s)e^{i(\omega t - k_z z)}$. O campo de calor 3D completo é então encontrado por meio de uma transformada inversa de Fourier ao longo de k_z . Essa transformada inversa de Fourier é expressa como um somatório discreto admitindo a existência de fontes virtuais ao longo de z , em intervalos igualmente espaçados L_z , que permite a solução ser obtida resolvendo um número limitado de problemas 2D.

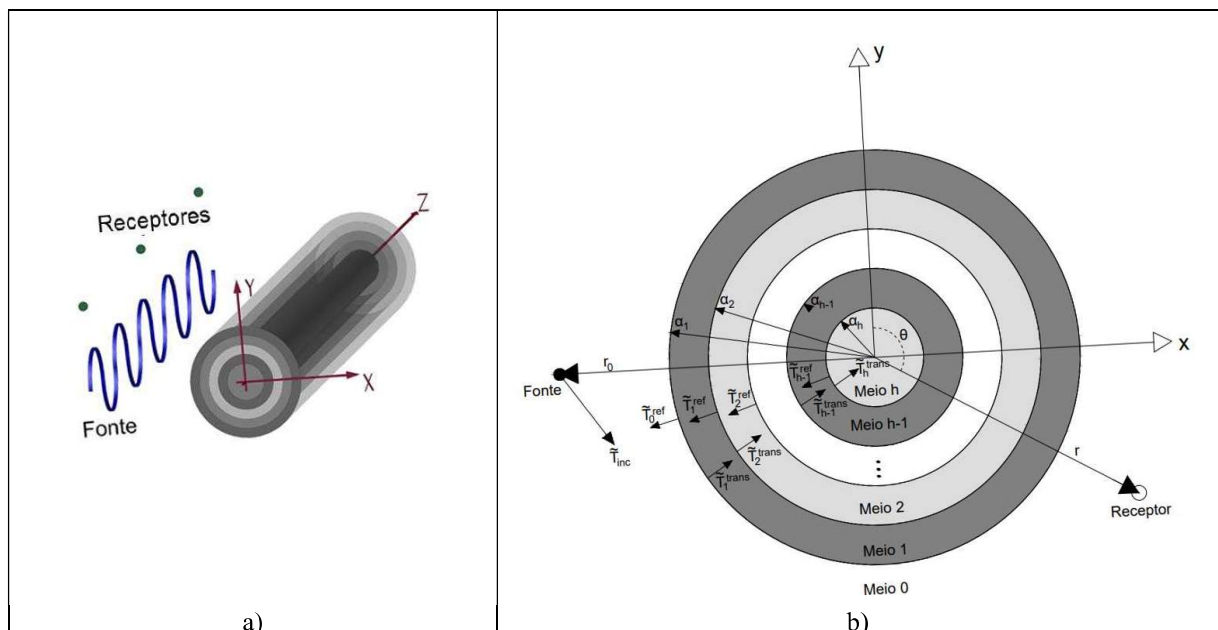
$$\hat{T}(\omega, x, y, z) = \frac{2\pi}{L_z} \sum_{m=-M}^M \tilde{T}(\omega, x, y, k_{zm}) e^{-ik_{zm}z}, \quad (29)$$

onde $\tilde{T}(\omega, x, y, k_{zm}) = \frac{-i}{4k} H_0 \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K} - (k_{zm})^2} r'' \right)$ e k_{zm} é o número de onda axial dado por $k_{zm} = (2\pi/L_z)m$. A distância L_z precisa ser de tamanho suficiente para evitar interferência espacial das fontes virtuais, tal como foi originalmente publicado por Bouchon e Aki (1977).

4.1.1 Formulação analítica para uma inclusão cilíndrica de multicamadas submetida a uma fonte de calor (somente condução)

Essa subseção apresenta o cálculo analítico da transferência de calor por condução em uma inclusão cilíndrica de multicamadas, delimitada por um meio sólido homogêneo, de extensão infinita, indicado como o meio 0. A geometria considerada é apresentada na FIGURA 1. Essa inclusão é composta por $h-1$ anéis cilíndricos (meios = 1, 2, ..., $h-1$) com raios a_1, a_2, \dots, a_{h-1} e um cilindro interno (meio h) com raio a_h . A condutividade térmica, densidade e calor específico são k_v, ρ_v e c_v , respectivamente, para o meio v ($v = 0, 1, 2, \dots, h$). Esse sistema é submetido a uma fonte de calor localizada no meio exterior no ponto (x_s, y_s, z_s) e oscilando a uma frequência ω .

FIGURA 1 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA INCLUSÃO CILÍNDRICA DE MULTICAMADAS, COMPOSTA POR $h-1$ ANÉIS CILÍNDRICOS (MEIOS = 1, 2, ..., $h-1$) E UM CILÍNDRO INTERNO (MEIO h). ESTA INCLUSÃO É DELIMITADA POR UM SÓLIDO UNIFORME (MEIO 0) E SUBMETIDA A UMA FONTE DE CALOR.



FONTE: O autor (2021).

O campo incidente 3D produzido por essa fonte de calor é descrito pela equação (29), e obtido pela resolução de um número limitado de problemas 2D com parcelas centradas em (x_s, y_s) dadas pela equação:

$$\tilde{T}_{inc}(\omega, r'', k_{zm}) = \frac{-iA}{4k_0} H_0 \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K_0} - (k_{zm})^2} r'' \right), \quad (30)$$

sendo A a amplitude. Esse campo incidente, pode ser expresso em termos centrados na origem da inclusão. Usando o teorema de Graf (WATSON, 1980) obtêm-se o campo incidente e seu fluxo correspondente, em coordenadas polares:

quando $r < r_0$:

$$\tilde{T}_{inc}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \frac{-iA}{4k_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n H_n(k_{\alpha_0} r_0) J_n(k_{\alpha_0} r) \cos(n\theta), \quad (31)$$

$$q_{inc}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \frac{-iA}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n H_n(k_{\alpha_0} r_0) \left[\frac{n}{r} J_n(k_{\alpha_0} r) - k_{\alpha_0} J_{n+1}(k_{\alpha_0} r) \right] \cos(n\theta), \quad (32)$$

quando $r > r_0$:

$$\tilde{T}_{inc}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \frac{-iA}{4k_0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n J_n(k_{\alpha_0} r_0) H_n(k_{\alpha_0} r) \cos(n\theta), \quad (33)$$

$$q_{inc}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \frac{-iA}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n J_n(k_{\alpha_0} r_0) \left[\frac{n}{r} H_n(k_{\alpha_0} r) - k_{\alpha_0} H_{n+1}(k_{\alpha_0} r) \right] \cos(n\theta), \quad (34)$$

onde o subscrito *inc* denota o campo de calor incidente, r_0 é a distância da fonte até o eixo da inclusão, r é a distância do receptor ao eixo da inclusão, θ é o ângulo suplementar ao ângulo entre r e r_0 , $H_n(\cdot)$ são as funções de Hankel do segundo tipo e ordem n , $J_n(\cdot)$ são as funções de Bessel de ordem n , $k_{\alpha_0} = \sqrt{\frac{-i\omega}{K_0} - (k_{zm})^2}$, $K_0 =$

$$\frac{k_0}{\rho_0 c_0} \text{ e } \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 2, & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

4.1.1.1 Campo de calor refletido no meio externo:

O calor gerado por essa fonte se propaga e atinge a superfície da inclusão, onde parte da energia incidente é refletida de volta e parte dessa energia é transmitida para o meio 1. Estas parcelas dependem das propriedades dos meios onde se propagam. Este campo de calor refletido para o meio exterior e seu correspondente fluxo de calor podem ser expressos por:

$$\tilde{T}_0^{ref}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \sum_{n=0}^{\infty} Ar_n^0 H_n(k_{\alpha_0} r) \cos(n\theta), \quad (35)$$

$$q_0^{ref}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \sum_{n=0}^{\infty} Ar_n^0 k_0 \left[\frac{n}{r} H_n(k_{\alpha_0} r) - k_{\alpha_0} H_{n+1}(k_{\alpha_0} r) \right] \cos(n\theta), \quad (36)$$

onde o sobrescrito *ref* denota o campo de calor refletido e Ar_n^0 é o coeficiente desconhecido a ser determinado para cada valor de n .

4.1.1.2 Campo de calor nos anéis:

O campo de calor no meio j onde $j = 1, 2, 3 \dots h - 1$, depende de dois diferentes grupos de termos: a energia gerada no contorno exterior do anel correspondente e que é transmitida para o interior do anel e o outro gerado no contorno interno devido a energia que é refletida. O campo de calor correspondente a energia gerada no contorno exterior e seu correspondente fluxo de calor podem ser expressos pela seguinte equação:

$$\tilde{T}_j^{trans}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \sum_{n=0}^{\infty} At_n^j J_n(k_{\alpha_j} r) \cos(n\theta), \quad \text{para } j = 1, 2, 3 \dots h - 1, \quad (37)$$

$$q_j^{trans}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \sum_{n=0}^{\infty} At_n^j k_j \left[\frac{n}{r} J_n(k_{\alpha_j} r) - k_{\alpha_j} J_{n+1}(k_{\alpha_j} r) \right] \cos(n\theta), \quad (38)$$

para $j = 1, 2, 3 \dots h - 1$,

onde o sobrescrito *trans* refere-se ao campo de calor transmitido, At_n^j são os coeficientes desconhecidos a serem determinados para cada valor de n e $k_{\alpha_j} =$

$$\sqrt{\frac{-i\omega}{K_j} - (k_{zm})^2} \text{ e } K_j = \frac{k_j}{\rho_j c_j}.$$

O campo de calor gerado no contorno interno e refletido ao anel pode ser definido por:

$$\tilde{T}_j^{ref}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \sum_{n=0}^{\infty} Ar_n^j H_n(k_{\alpha_j} r) \cos(n\theta) \quad \text{para } j = 1, 2 \dots h-1, \quad (39)$$

$$q_j^{ref}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \sum_{n=0}^{\infty} Ar_n^j k_j \left[\frac{n}{r} H_n(k_{\alpha_j} r) - k_{\alpha_j} H_{n+1}(k_{\alpha_j} r) \right] \cos(n\theta), \quad (40)$$

para $j = 1, 2, 3 \dots h-1,$

onde Ar_n^j são os coeficientes desconhecidos a serem determinados para cada valor de n .

4.1.1.3 Calor transmitido ao meio interno h :

O campo de calor no meio interno h depende apenas da energia transmitida através do contorno do anel mais interno. Esse campo de calor e seu fluxo correspondente são descritos pelas seguintes equações:

$$\tilde{T}_h^{trans}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \sum_{n=0}^{\infty} At_n^h J_n(k_{\alpha_h} r) \cos(n\theta), \quad (41)$$

$$q_h^{trans}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \sum_{n=0}^{\infty} At_n^h k_h \left[\frac{n}{r} J_n(k_{\alpha_h} r) - k_{\alpha_h} J_{n+1}(k_{\alpha_h} r) \right] \cos(n\theta), \quad (42)$$

onde At_n^h é o coeficiente desconhecido a ser determinado para cada valor de n ,

$$k_{\alpha_h} = \sqrt{\frac{-i\omega}{K_h} - (k_{zm})^2} \text{ e } K_h = \frac{k_h}{\rho_h c_h}.$$

A definição das condições de contorno apropriadas, permite a obtenção dos coeficientes $Ar_n^0, At_n^h, Ar_n^j, At_n^j$ ($j = 1, 2, \dots, h - 1$) associados a cada termo potencial. A solução é obtida pela imposição da continuidade de temperaturas e fluxos normais nas interfaces entre os meios. Para $r = a_1$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{inc}(\omega, a_1, \theta, k_{zm}) + \tilde{T}_0^{ref}(\omega, a_1, \theta, k_{zm}) \\ = \tilde{T}_1^{trans}(\omega, a_1, \theta, k_{zm}) + \tilde{T}_1^{ref}(\omega, a_1, \theta, k_{zm}), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} k_0 \frac{\partial[\tilde{T}_{inc}(\omega, a_1, \theta, k_{zm})]}{\partial r} + k_0 \frac{\partial[\tilde{T}_0^{ref}(\omega, a_1, \theta, k_{zm})]}{\partial r} \\ = k_1 \frac{\partial[\tilde{T}_1^{trans}(\omega, a_1, \theta, k_{zm})]}{\partial r} + k_1 \frac{\partial[\tilde{T}_1^{ref}(\omega, a_1, \theta, k_{zm})]}{\partial r}. \end{aligned} \quad (44)$$

Para $r = a_2$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1^{trans}(\omega, a_2, \theta, k_{zm}) + \tilde{T}_1^{ref}(\omega, a_2, \theta, k_{zm}) \\ = \tilde{T}_2^{trans}(\omega, a_2, \theta, k_{zm}) + \tilde{T}_2^{ref}(\omega, a_2, \theta, k_{zm}), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\partial[\tilde{T}_1^{trans}(\omega, a_2, \theta, k_{zm})]}{\partial r} + k_1 \frac{\partial[\tilde{T}_1^{ref}(\omega, a_2, \theta, k_{zm})]}{\partial r} \\ = k_2 \frac{\partial[\tilde{T}_2^{trans}(\omega, a_2, \theta, k_{zm})]}{\partial r} + k_2 \frac{\partial[\tilde{T}_2^{ref}(\omega, a_2, \theta, k_{zm})]}{\partial r}. \end{aligned} \quad (46)$$

Para $r = a_3$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_2^{trans}(\omega, a_3, \theta, k_{zm}) + \tilde{T}_2^{ref}(\omega, a_3, \theta, k_{zm}) \\ = \tilde{T}_3^{trans}(\omega, a_3, \theta, k_{zm}) + \tilde{T}_3^{ref}(\omega, a_3, \theta, k_{zm}), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} k_2 \frac{\partial[\tilde{T}_2^{trans}(\omega, a_3, \theta, k_{zm})]}{\partial r} + k_2 \frac{\partial[\tilde{T}_2^{ref}(\omega, a_3, \theta, k_{zm})]}{\partial r} \\ = k_3 \frac{\partial[\tilde{T}_3^{trans}(\omega, a_3, \theta, k_{zm})]}{\partial r} + k_3 \frac{\partial[\tilde{T}_3^{ref}(\omega, a_3, \theta, k_{zm})]}{\partial r}. \end{aligned} \quad (48)$$

E assim sucessivamente para $r = a_4, a_5, \dots, a_{h-1}$. Para $r = a_h$:

$$\tilde{T}_{h-1}^{trans}(\omega, a_h, \theta, k_{zm}) + \tilde{T}_{h-1}^{ref}(\omega, a_h, \theta, k_{zm}) = \tilde{T}_h^{trans}(\omega, a_h, \theta, k_{zm}), \quad (49)$$

$$\begin{aligned} k_{h-1} \frac{\partial[\tilde{T}_{h-1}^{trans}(\omega, a_h, \theta, k_{zm})]}{\partial r} + k_{h-1} \frac{\partial[\tilde{T}_{h-1}^{ref}(\omega, a_h, \theta, k_{zm})]}{\partial r} \\ = k_h \frac{\partial[\tilde{T}_h^{trans}(\omega, a_h, \theta, k_{zm})]}{\partial r}. \end{aligned} \quad (50)$$

Combinando as equações adequadamente, obtém-se um sistema de $2h$ equações e $2h$ incógnitas para cada valor de n , permitindo a determinação das incógnitas:

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \frac{-iA}{4k_0} (-1)^n \varepsilon_n H_n(k_{\alpha_0} r_0) \mathbf{y}. \quad (51)$$

Sendo:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & G_{2h-1 \times 2h-2} & G_{2h-1 \times 2h-1} & G_{2h-1 \times 2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & G_{2h \times 2h-2} & G_{2h \times 2h-1} & G_{2h \times 2h} \end{bmatrix}, \quad (52)$$

$$G_{11} = H_n(k_{\alpha_0} a_1),$$

$$G_{21} = k_0 [nH_n(k_{\alpha_0} a_1) - (k_{\alpha_0} a_1)H_{n+1}(k_{\alpha_0} a_1)],$$

$$G_{12} = -J_n(k_{\alpha_1} a_1),$$

$$G_{22} = -k_1 [nJ_n(k_{\alpha_1} a_1) - (k_{\alpha_1} a_1)J_{n+1}(k_{\alpha_1} a_1)],$$

$$G_{13} = -H_n(k_{\alpha_1} a_1),$$

$$G_{23} = -k_1 [nH_n(k_{\alpha_1} a_1) - (k_{\alpha_1} a_1)H_{n+1}(k_{\alpha_1} a_1)],$$

$$G_{32} = J_n(k_{\alpha_1} a_2),$$

$$G_{42} = k_1 [nJ_n(k_{\alpha_1} a_2) - (k_{\alpha_1} a_2)J_{n+1}(k_{\alpha_1} a_2)],$$

$$\begin{aligned}
G_{33} &= H_n(k_{\alpha_1} a_2), \\
G_{43} &= k_1 [nH_n(k_{\alpha_1} a_2) - (k_{\alpha_1} a_2)H_{n+1}(k_{\alpha_1} a_2)], \\
G_{34} &= -J_n(k_{\alpha_2} a_2), \\
G_{44} &= -k_2 [nJ_n(k_{\alpha_2} a_2) - (k_{\alpha_2} a_2)J_{n+1}(k_{\alpha_2} a_2)], \\
G_{35} &= -H_n(k_2 a_2), \\
G_{45} &= -k_2 [nH_n(k_{\alpha_2} a_2) - (k_{\alpha_2} a_2)H_{n+1}(k_{\alpha_2} a_2)], \\
G_{2h-1 \times 2h-2} &= J_n(k_{\alpha_{h-1}} a_h), \\
G_{2h \times 2h-2} &= k_{h-1} [nJ_n(k_{\alpha_{h-1}} a_h) - (k_{\alpha_{h-1}} a_h)J_{n+1}(k_{\alpha_{h-1}} a_h)], \\
G_{2h-1 \times 2h-1} &= H_n(k_{\alpha_{h-1}} a_h), \\
G_{2h \times 2h-1} &= k_{h-1} [nH_n(k_{\alpha_{h-1}} a_h) - (k_{\alpha_{h-1}} a_h)H_{n+1}(k_{\alpha_{h-1}} a_h)], \\
G_{2h-1 \times 2h} &= -J_n(k_{\alpha_h} a_h), \\
G_{2h \times 2h} &= -k_h [nJ_n(k_{\alpha_h} a_h) - (k_{\alpha_h} a_h)J_{n+1}(k_{\alpha_h} a_h)],
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} Ar_n^0 \\ At_n^1 \\ Ar_n^1 \\ At_n^2 \\ Ar_n^2 \\ \vdots \\ At_n^{h-1} \\ Ar_n^{h-1} \\ At_n^h \end{bmatrix}, \tag{53}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -J_n(k_{\alpha_0} a_1) \\ -k_0 [nJ_n(k_{\alpha_0} a_1) - (k_{\alpha_0} a_1)J_{n+1}(k_{\alpha_0} a_1)] \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Se a fonte de calor estiver localizada dentro da inclusão, a definição do campo de calor gerado pode ser realizada pela mudança da expressão que define o campo incidente e estabelecendo as condições que garantem a continuidade das temperaturas e fluxos normais nas interfaces entre os meios. Os termos da matriz \mathbf{G} e do vetor \mathbf{x} permanecem os mesmos, já o vetor independente \mathbf{y} se modifica. Se a fonte estiver no meio interno h , o sistema de equações passa a ser:

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \frac{-iA}{4k_h} (-1)^n \varepsilon_n J_n(k_{\alpha_h} r_0) \mathbf{y}, \quad (55)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H(k_{\alpha_h} a_h) \\ k_h [nH_n(k_{\alpha_h} a_h) - (k_{\alpha_h} a_h)H_{n+1}(k_{\alpha_h} a_h)] \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Já se a fonte estiver em um meio intermediário, por exemplo, o meio 2:

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \frac{-iA}{4k_2} (-1)^n \varepsilon_n \mathbf{y}, \quad (57)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_n(k_{\alpha_2} r_0) H(k_{\alpha_2} a_2) \\ J_n(k_{\alpha_2} r_0) k_2 [nH_n(k_{\alpha_2} a_2) - (k_{\alpha_2} a_2)H_{n+1}(k_{\alpha_2} a_2)] \\ -H_n(k_{\alpha_2} r_0) J_n(k_{\alpha_2} a_3) \\ -H_n(k_{\alpha_2} r_0) k_2 [nJ_n(k_{\alpha_2} a_3) - (k_{\alpha_2} a_3)J_{n+1}(k_{\alpha_2} a_3)] \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

4.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E CONVECÇÃO

A transferência de calor em regime transiente por condução e convecção em um meio homogêneo Ω , isotrópico, no domínio do tempo, é descrito pela seguinte equação de difusão:

$$\nabla^2 T - \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (59)$$

sendo V_x , V_y e V_z as componentes prescritas da velocidade de convecção para um meio fluido nas direções x , y e z respectivamente, partindo da origem do sistema.

Aplicando a transformada de Fourier à equação (59), que é dependente do tempo, chega-se à equação no domínio da frequência:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} + V_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K}} \right)^2 \right) \hat{T}(\omega, x, y, z) = 0, \quad (60)$$

Considerando uma perturbação gerada por uma fonte de calor esférica localizada em (x_s, y_s, z_s) , a solução fundamental que satisfaz a equação (60), pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} \hat{T}(\omega, x, y, z) & \quad (61) \\ &= \frac{e^{\frac{V_x x + V_y y + V_z z}{2K}}}{2k \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}} e^{-i \sqrt{\frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{4K^2} - \frac{i\omega}{K}} \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}} \end{aligned}$$

Quando a geometria do meio não varia em uma direção, (como a direção z por exemplo), o esforço computacional necessário na resolução de problemas tridimensionais pode ser reduzido a um somatório de problemas bidimensionais com diferentes números de onda axial (k_z). Aplicando-se uma transformada de Fourier ao termo

$$e^{-i \sqrt{\frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{4K^2} - \frac{i\omega}{K}} \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2}}, \quad (62)$$

ao longo da direção z , chega-se, então, à seguinte equação:

$$\tilde{T}(\omega, x, y, k_z) = \frac{-i e^{\frac{V_x x + V_y y + V_z z}{2K}}}{4k} H_0 \left(\sqrt{-\frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{4K^2} - \frac{i\omega}{K} - (k_z)^2 r''} \right). \quad (63)$$

A equação (63) pode ser interpretada como sendo a resposta à atuação de uma fonte de calor linear com uma variação espacial dada por $f(x, y, z, t) = \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) e^{i(\omega t - k_z z)}$.

A solução tridimensional final é posteriormente determinada aplicando uma transformada inversa de Fourier em ordem a k_z . Admitindo a existência de um número infinito de fontes virtuais, igualmente espaçadas de uma distância L_z ao longo do eixo z , transforma-se a integral contínua em um somatório discreto:

$$\begin{aligned} \hat{T}(\omega, x, y, z) & \quad (64) \\ &= \frac{2\pi}{L_z} \frac{e^{\frac{V_x x + V_y y + V_z z}{2K}}}{2k\sqrt{r'' + z^2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_0 \left(\sqrt{-\frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{4K^2} - \frac{i\omega}{K} - (k_{zm})^2 r''} \right) e^{-ik_{zm}z}. \end{aligned}$$

Este somatório converge, permitindo dessa forma que a solução tridimensional seja obtida a partir da resolução de um número finito de problemas bidimensionais.

$$\begin{aligned} \hat{T}(\omega, x, y, z) & \quad (65) \\ &= \frac{2\pi}{L_z} \frac{e^{\frac{V_x x + V_y y + V_z z}{2K}}}{2k\sqrt{r'' + z^2}} \sum_{m=-M}^M H_0 \left(\sqrt{-\frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{4K^2} - \frac{i\omega}{K} - (k_{zm})^2 r''} \right) e^{-ik_{zm}z}, \end{aligned}$$

onde k_{zm} representa o número de onda axial, dado por $k_{zm} = (2\pi/L_z)m$. A distância L_z deve ser suficientemente grande de modo a evitar a perturbação da resposta por parte das fontes virtuais.

4.2.1 Formulação analítica para uma inclusão cilíndrica de multicamadas submetida a uma fonte de calor (condução e convecção)

Considera-se uma inclusão de multicamadas, inserida em um meio 0 homogêneo de extensão infinita (FIGURA 1). Admitindo que, para esse sistema, pode ocorrer convecção radial a partir do centro do sistema de eixos, sendo este no centro

da inclusão. Essa inclusão é composta por $h-1$ anéis cilíndricos (meios = $1, 2, \dots, h-1$) e um cilindro interno (meio h), sendo a_h o raio do cilindro composto pelo meio h e a_1, a_2, \dots, a_{h-1} os raios externos dos anéis compostos pelos meios $1, 2, \dots, h-1$, respectivamente. Esse sistema é submetido a uma fonte de calor, localizada no meio exterior no ponto (x_s, y_s, z_s) e oscilando a uma frequência ω . A condutividade térmica, densidade, calor específico e velocidade radial são k_v, ρ_v, c_v , respectivamente, para cada meio v ($v = 0, 1, 2, \dots, h$). Admite-se que a convecção radial, com velocidade V^v relacionada ao meio v , pode ocorrer do centro do eixo do sistema, o qual está localizado no centro da inclusão em $(0,0m, 0,0m)$ e é considerada nula para convecção na direção z ($V_z^v = 0,0$). Todas as camadas são isotrópicas em propriedades térmicas. Para a formulação apresentada admite-se que as condições iniciais são nulas.

Como mencionado anteriormente, o campo incidente 3D produzido por essa fonte de calor pode ser descrito através do somatório de um número limitado de problemas 2D com diferentes números de onda axial. Para fontes localizadas no meio externo:

$$\hat{T}_{inc}(\omega, r, r'') = \frac{2\pi}{L_z} \sum_{m=-M}^M \tilde{T}_{inc}(\omega, r, r'', k_{zm}) e^{-ik_{zm}z}, \quad (66)$$

onde

$$\tilde{T}_{inc}(\omega, r, r'', k_{zm}) = \frac{-i A e^{\frac{V^0 r}{2K_0}}}{4k_0} H_0(k_{\beta_0} r''), \quad (67)$$

V^0 é a velocidade radial no meio 0 e $k_{\beta_0} = \sqrt{-\frac{V^0}{4K_0^2} - \frac{i\omega}{K_0} - (k_{zm})^2}$.

Essa equação está escrita com parcelas centradas em (x_s, y_s) . Esse campo incidente pode ser descrito em termos centrados na origem da inclusão através do teorema de Graf (WATSON, 1980). Assim, obtêm-se em coordenadas polares:

quando $r < r_0$:

$$\tilde{T}_{inc}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \frac{-iA}{4k_0} e^{\frac{V^0 r}{2K_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n H_n(k_{\beta_0} r_0) J_n(k_{\beta_0} r) \cos(n\theta), \quad (68)$$

quando $r > r_0$:

$$\tilde{T}_{inc}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \frac{-iA}{4k_0} e^{\frac{v^0 r}{2K_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n J_n(k_{\beta_0} r_0) H_n(k_{\beta} r) \cos(n\theta). \quad (69)$$

O fluxo de calor relacionado ao campo incidente pode ser expresso por:

quando $r < r_0$:

$$q_{inc}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \frac{-iA}{4} e^{\frac{v^0 r}{2K_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n H_n(k_{\beta_0} r_0) \left\{ \frac{v^0 r}{2K_0} J_n(k_{\beta_0} a_1) + \left[\frac{n}{r} J_n(k_{\beta_0} r) - k_{\alpha_0} J_{n+1}(k_{\beta_0} r) \right] \right\} \cos(n\theta), \quad (70)$$

quando $r > r_0$:

$$q_{inc}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = \frac{-iA}{4} e^{\frac{v^0 r}{2K_0}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_n J_n(k_{\beta_0} r_0) \left\{ \frac{v^0 r}{2K_0} H_n(k_{\beta_0} a_1) + \left[\frac{n}{r} H_n(k_{\beta_0} r) - k_{\alpha_0} H_{n+1}(k_{\beta_0} r) \right] \right\} \cos(n\theta). \quad (71)$$

O calor gerado por essa fonte, que para esse caso se localiza no meio exterior 0, propaga-se e atinge a superfície da inclusão. Parte dessa energia incidente é refletida de volta ao meio 0, enquanto o restante é transmitido para o meio 1.

4.2.1.1 Campo de calor refletido ao meio externo:

Este campo de calor refletido para o meio exterior e o fluxo de calor correspondente podem ser expressos por:

$$\tilde{T}_0^{ref}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = e^{\frac{v^0 r}{2K_0}} \sum_{n=0}^{\infty} A r_n^0 H_n(k_{\beta_0} r) \cos(n\theta), \quad (72)$$

$$q_0^{ref}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = e^{\frac{v^0 r}{2K_0}} \sum_{n=0}^{\infty} A r_n^0 k_0 \left\{ \frac{v^0 r}{2K_0} H_n(k_{\beta_0} r) + \left[\frac{n}{r} H_n(k_{\beta_0} r) k_{\alpha_0} - H_{n+1}(k_{\beta_0} r) \right] \right\} \cos(n\theta), \quad (73)$$

onde o sobrescrito *ref* denota o campo de calor refletido e $A r_n^0$ é o coeficiente desconhecido a ser determinado para cada valor de n .

4.2.1.2 Campo de calor nos anéis:

O campo de calor nos anéis compostos pelo meio j , onde $j = 1, 2, 3 \dots h - 1$, depende tanto da energia gerada no contorno externo do anel correspondente e que é transmitida para o interior do anel, quanto da gerada no contorno interno devido à energia que é refletida. O campo de calor dependente da energia gerada no contorno externo e seu correspondente fluxo de calor podem ser expressos pelas seguintes equações:

$$\tilde{T}_j^{trans}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = e^{\frac{v^j r}{2K_j}} \sum_{n=0}^{\infty} At_n^j J_n(k_{\beta_j} r) \cos(n\theta), \quad \text{para } j = 1, 2 \dots h - 1, \quad (74)$$

$$q_j^{trans}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = e^{\frac{v^j r}{2K_j}} \sum_{n=0}^{\infty} At_n^j k_j \left\{ \frac{v^j r}{2K_j} J_n(k_{\beta_j} r) + \left[\frac{n}{r} J_n(k_{\beta_j} r) - k_{\alpha_j} J_{n+1}(k_{\beta_j} r) \right] \right\} \cos(n\theta), \quad (75)$$

para $j = 1, 2 \dots h - 1$,

onde o sobrescrito *trans* refere-se ao campo de calor transmitido e At_n^j são os coeficientes desconhecidos a serem determinados para cada valor de n , $k_{\beta_j} =$

$$\sqrt{\frac{-v^j{}^2}{4K_j^2} + \frac{-i\omega}{K_j} - (k_{zm})^2} \text{ e } K_j = \frac{k_j}{\rho_j c_j}.$$

O campo de calor gerado no contorno interno e refletido ao interior do anel e seu fluxo de calor correspondente podem ser definidos por:

$$\tilde{T}_j^{ref}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = e^{\frac{v^j r}{2K_j}} \sum_{n=0}^{\infty} Ar_n^j H_n(k_{\beta_j} r) \cos(n\theta), \quad \text{para } j = 1, 2, 3 \dots h - 1, \quad (76)$$

$$q_j^{ref}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = e^{\frac{v^j r}{2K_j}} \sum_{n=0}^{\infty} At_n^j k_j \left\{ \frac{v^j r}{2K_j} H_n(k_{\beta_j} r) + \left[\frac{n}{r} H_n(k_{\beta_j} r) - k_{\alpha_j} H_{n+1}(k_{\beta_j} r) \right] \right\} \cos(n\theta), \quad (77)$$

para $j = 1, 2 \dots h - 1$,

onde Ar_n^j são os coeficientes desconhecidos a serem determinados para cada valor de n .

4.2.1.3 Calor transmitido ao meio interno h :

O campo de calor no meio interno h depende somente da energia transmitida através do contorno do anel mais interno e pode ser escrito apenas por um único termo, sendo este descrito por:

$$\tilde{T}_h^{trans}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = e^{\frac{v^h r}{2K_h}} \sum_{n=0}^{\infty} At_n^h J_n(k_{\beta_h} r) \cos(n\theta), \quad (78)$$

onde At_n^h é o coeficiente desconhecido a ser determinado para cada valor de n , $k_{\beta_h} =$

$$\sqrt{\frac{-v^h^2}{4K_h^2} + \frac{-i\omega}{K_h} - (k_{zm})^2} \text{ e } K_h = \frac{k_h}{\rho_h c_h}.$$

O seu fluxo de calor correspondente:

$$q_h^{trans}(\omega, r, \theta, k_{zm}) = e^{\frac{v^h r}{2K_h}} \sum_{n=0}^{\infty} At_n^h k_h \left\{ \frac{v^h r}{2K_h} J_n(k_{\beta_h} r) + \left[\frac{n}{r} J_n(k_{\beta_h} r) - k_{\alpha_n} J_{n+1}(k_{\beta_h} r) \right] \right\} \cos(n\theta). \quad (79)$$

A definição das condições de contorno apropriadas, impondo continuidade de temperaturas e fluxos normais nas interfaces entre os meios, permite a obtenção das incógnitas $Ar_n^0, At_n^h, Ar_n^j, At_n^j$ ($j = 1, 2, 3 \dots h - 1$). Consequentemente, torna-se possível resolver as equações para obter os campos de calor refletidos e transmitidos no domínio em estudo. Estas condições são estabelecidas permitindo a obtenção do sistema:

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \frac{-iA}{4k_0} e^{\frac{v^0 a_1}{2K_0}} (-1)^n \varepsilon_n H_n(k_{\beta_0} r_0) \mathbf{y}, \quad (80)$$

Com:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{32} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{42} & G_{43} & G_{44} & G_{45} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & G_{2h-1 \times 2h-2} & G_{2h-1 \times 2h-1} & G_{2h-1 \times 2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & G_{2h \times 2h-2} & G_{2h \times 2h-1} & G_{2h \times 2h} \end{bmatrix}, \quad (81)$$

$$G_{11} = e^{\frac{V^0 a_1}{2K_0}} H_n(k_{\beta_0} a_1),$$

$$G_{21} = k_0 e^{\frac{V^0 a_1}{2K_0}} \left\{ \frac{V^0 a_1}{2K_0} H_n(k_{\beta_0} a_1) + [nH_n(k_{\beta_0} a_1) - (k_{\beta_0} a_1)H_{n+1}(k_{\beta_0} a_1)] \right\},$$

$$G_{12} = -e^{\frac{V^1 a_1}{2K_1}} J_n(k_{\beta_1} a_1),$$

$$G_{22} = -k_1 e^{\frac{V^1 a_1}{2K_1}} \left\{ \frac{V^1 a_1}{2K_1} J_n(k_{\beta_1} a_1) + [nJ_n(k_{\beta_1} a_1) - (k_{\beta_1} a_1)J_{n+1}(k_{\beta_1} a_1)] \right\},$$

$$G_{13} = -e^{\frac{V^1 a_1}{2K_1}} H_n(k_{\beta_1} a_1),$$

$$G_{23} = -k_1 e^{\frac{V^1 a_1}{2K_1}} \left\{ \frac{V^1 a_1}{2K_1} H_n(k_{\beta_1} a_1) + [nH_n(k_{\beta_1} a_1) - (k_{\beta_1} a_1)H_{n+1}(k_{\beta_1} a_1)] \right\},$$

$$G_{32} = e^{\frac{V^1 a_2}{2K_1}} J_n(k_{\beta_1} a_2),$$

$$G_{42} = k_1 e^{\frac{V^1 a_2}{2K_1}} \left\{ \frac{V^1 a_2}{2K_1} J_n(k_{\beta_1} a_2) + [nJ_n(k_{\beta_1} a_2) - (k_{\beta_1} a_2)J_{n+1}(k_{\beta_1} a_2)] \right\},$$

$$G_{33} = e^{\frac{V^1 a_2}{2K_1}} H_n(k_{\beta_1} a_2),$$

$$G_{43} = k_1 e^{\frac{V^1 a_2}{2K_1}} \left\{ \frac{V^1 a_2}{2K_1} H_n(k_{\beta_1} a_2) + [nH_n(k_{\beta_1} a_2) - (k_{\beta_1} a_2)H_{n+1}(k_{\beta_1} a_2)] \right\},$$

$$G_{34} = -e^{\frac{V^2 a_2}{2K_2}} J_n(k_{\beta_2} a_2),$$

$$G_{44} = -k_2 e^{\frac{V^2 a_2}{2K_2}} \left\{ \frac{V^2 a_2}{2K_2} J_n(k_{\beta_2} a_2) + [nJ_n(k_{\beta_2} a_2) - (k_{\beta_2} a_2)J_{n+1}(k_{\beta_2} a_2)] \right\},$$

$$G_{35} = -e^{\frac{V^2 a_2}{2K_2}} H_n(k_{\beta_2} a_2),$$

$$G_{45} = -k_2 e^{\frac{V^2 a_2}{2K_2}} \left\{ \frac{V^2 a_2}{2K_2} H_n(k_{\beta_2} a_2) + [nH_n(k_{\beta_2} a_2) - (k_{\beta_2} a_2)H_{n+1}(k_{\beta_2} a_2)] \right\},$$

$$\begin{aligned}
G_{2h-1 \times 2h-2} &= e^{\frac{v^{h-1}a_h}{2K_{h-1}}} J_n(k_{\beta_{h-1}} a_h), \\
G_{2h \times 2h-2} &= k_{h-1} e^{\frac{v^{h-1}a_h}{2K_{h-1}}} \left\{ \frac{v^{h-1}a_h}{2K_{h-1}} J_n(k_{\beta_{h-1}} a_h) \right. \\
&\quad \left. + [nJ_n(k_{\beta_{h-1}} a_h) - (k_{\beta_{h-1}} a_h)J_{n+1}(k_{\beta_{h-1}} a_h)] \right\}, \\
G_{h-1 \times h-1} &= e^{\frac{v^{h-1}a_h}{2K_{h-1}}} H_n(k_{\beta_{h-1}} a_h), \\
G_{2h \times 2h-1} &= k_{h-1} e^{\frac{v^{h-1}a_h}{2K_{h-1}}} \left\{ \frac{v^{h-1}a_h}{2K_{h-1}} H_n(k_{\beta_{h-1}} a_h) \right. \\
&\quad \left. + [nH_n(k_{\beta_{h-1}} a_h) - (k_{\beta_{h-1}} a_h)H_{n+1}(k_{\beta_{h-1}} a_h)] \right\}, \\
G_{2h-1 \times 2h} &= -e^{\frac{v^h a_h}{2K_h}} J_n(k_{\beta_h} a_h), \\
G_{2h \times 2h} &= -k_h e^{\frac{v^h a_h}{2K_h}} \left\{ \frac{v^h a_h}{2K_h} J_n(k_{\beta_h} a_h) + [nJ_n(k_{\beta_h} a_h) - (k_{\beta_h} a_h)J_{n+1}(k_{\beta_h} a_h)] \right\},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} Ar_n^0 \\ At_n^1 \\ Ar_n^1 \\ At_n^2 \\ Ar_n^2 \\ \vdots \\ At_n^{h-1} \\ Ar_n^{h-1} \\ At_n^h \end{bmatrix}, \quad (82)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -J_n(k_{\beta_0} a_1) \\ -k_0 \left\{ \frac{v^0 a_1}{2K_0} J_n(k_{\beta_0} a_1) + [nJ_n(k_{\beta_0} a_1) - (k_{\beta_0} a_1)J_{n+1}(k_{\beta_0} a_1)] \right\} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (83)$$

Caso a fonte de calor não esteja localizada no exterior da inclusão, mas sim no seu interior, a definição do campo de calor gerado pode ser realizada pela mudança da expressão que define o campo incidente (dependente dos parâmetros dos meios onde esta se encontra) e estabelecendo novamente as condições que garantem a continuidade das temperaturas e fluxos normais nas interfaces entre os meios. Assim, os termos da matriz \mathbf{G} e do vetor \mathbf{x} permanecem os mesmos, mas já o vetor independente \mathbf{y} se modifica. Se a fonte estiver no meio interno h , o sistema de equações passa a ser:

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \frac{-iA}{4k_h} e^{\frac{V^h a_h}{2K_h}} (-1)^n \varepsilon_n J_n(k_{\beta_h} r_0) \mathbf{y}, \quad (84)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H(k_{\beta_h} a_h) \\ k_h \left\{ \frac{V^h a_h}{2K_h} H(k_{\beta_h} a_h) + [nH_n(k_{\beta_h} a_h) - (k_{\beta_h} a_h)H_{n+1}(k_{\beta_h} a_h)] \right\} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Já se a fonte estiver em um meio intermediário, como por exemplo, o meio 2:

$$\mathbf{G}\mathbf{x} = \frac{-iA}{4k_2} (-1)^n \varepsilon_n \mathbf{y}, \quad (86)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{\frac{V^2 a_2}{2K_2}} J_n(k_{\beta_2} r_0) H(k_{\beta_2} a_2) \\ J_n(k_{\beta_2} r_0) k_2 e^{\frac{V^2 a_2}{2K_2}} \left\{ \frac{V^2 a_2}{2K_2} H(k_{\beta_2} a_2) + [nH_n(k_{\beta_2} a_2) - (k_{\beta_2} a_2)H_{n+1}(k_{\beta_2} a_2)] \right\} \\ -e^{\frac{V^2 a_3}{2K_2}} H_n(k_{\beta_2} r_0) J_n(k_{\beta_2} a_3) \\ -H_n(k_{\beta_2} r_0) k_2 e^{\frac{V^2 a_3}{2K_2}} \left\{ \frac{V^2 a_3}{2K_2} J_n(k_{\beta_2} a_3) + [nJ_n(k_{\beta_2} a_3) - (k_{\beta_2} a_3)J_{n+1}(k_{\beta_2} a_3)] \right\} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (87)$$

5 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Neste capítulo, apresenta-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno para a obtenção do campo tridimensional de calor, no domínio da frequência, gerado por uma fonte pontual para problemas de condução e posteriormente para condução e convecção. Essas formulações permitem a análise de propagação de calor em meios infinitos contendo inclusões homogêneas.

5.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO

Nesta seção, apresenta-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) que permite a obtenção do campo tridimensional de calor gerado por uma fonte pontual localizada na vizinhança de uma inclusão de seção com geometria qualquer e constante ao longo de uma direção, considerando apenas o fenômeno da condução. Tal como foi explicado anteriormente, quando a geometria do problema permanece constante ao longo de uma das direções, a sua solução tridimensional pode ser conseguida através de um somatório de soluções bidimensionais, obtidas através do MEC, para diferentes números de onda ao longo da direção na qual a geometria não se altera.

5.1.1 Formulação do MEC para meios homogêneos

O MEC pode ser usado para resolver o problema da transferência de calor transiente por condução no domínio da frequência, para cada valor de k_{zm} , em um domínio Ω , homogêneo, isotrópico, correspondendo a problemas bidimensionais individuais.

$$\left(\nabla^2 + \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K} - (k_{zm})^2} \right)^2 \right) \tilde{T}(\omega, x, y, k_{zm}) = 0. \quad (88)$$

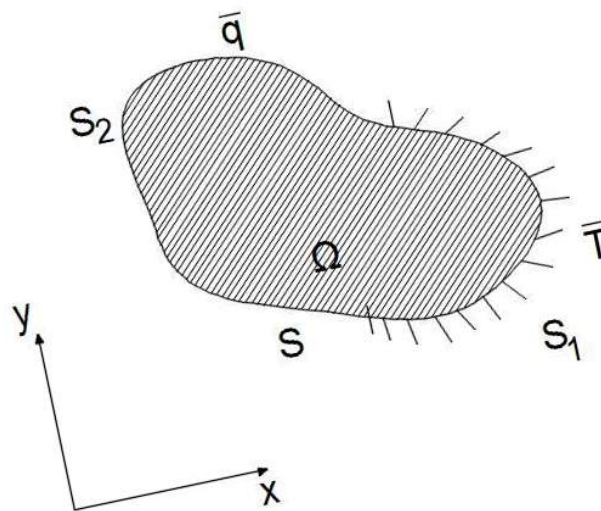
A equação integral do MEC pode ser obtida mediante métodos distintos, sendo o Método dos Resíduos Ponderados (MRP) um deles (BREBBIA; DOMINGUES, 1992). Admite-se um meio homogêneo Ω (ilustrado na FIGURA 2), com

contorno S , sendo $S = S_1 + S_2$, governado pela equação de Helmholtz (88), sujeito às condições de contorno:

$$\tilde{T}(\omega, x, y, k_{zm}) = \bar{T}(\omega, x, y, k_{zm}) \text{ em } (x, y) \in S_1 \text{ (essenciais ou de Dirichlet)} \quad (89)$$

$$q(\omega, x, y, k_{zm}) = \bar{q}(\omega, x, y, k_{zm}) \text{ em } (x, y) \in S_2 \text{ (naturais ou de Neumann)} \quad (90)$$

FIGURA 2 – VALORES PRESCRITOS NO CONTORNO



FONTE: O autor (2021).

Para aplicação do MRP na equação (88), assim como às condições de contorno (89) e (90), consideram-se as seguintes expressões:

$$\nabla^2 \tilde{T} + k_\alpha^2 \tilde{T} = R_\Omega, \quad (91)$$

$$\tilde{T} - \bar{T} = R_{S_1}, \quad (92)$$

$$q - \bar{q} = R_{S_2}, \quad (93)$$

onde $k_\alpha = \sqrt{\frac{-i\omega}{K} - (k_{zm})^2}$, R_Ω , R_{S_1} , R_{S_2} , são os resíduos e \tilde{T} e q representam, agora, valores aproximados. Com a finalidade de minimizar esses resíduos, o seu produto

por funções de ponderação w , \bar{w} , $\bar{\bar{w}}$ (cujas derivadas normais são $\frac{\partial w}{\partial \nu_n}$, $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu_n}$, $\frac{\partial \bar{\bar{w}}}{\partial \nu_n}$) é integrado no domínio e no contorno e igualado a zero. Dessa forma, chega-se a:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} w d\Omega + \int_{S_1} R_{S_1} \bar{w} ds_1 + \int_{S_2} R_{S_2} \bar{\bar{w}} ds_2 = 0. \quad (94)$$

Substituindo as equações (91), (92) e (93) em (94), tem-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \tilde{T} + k_{\alpha}^2 \tilde{T}) w d\Omega + \int_{S_1} (\tilde{T} - \bar{T}) \bar{w} ds_1 + \int_{S_2} (q - \bar{q}) \bar{\bar{w}} ds_2 = 0. \quad (95)$$

As funções de ponderação são então escolhidas convenientemente ($\bar{w} = \frac{\partial w}{\partial \nu_n}$ e $\bar{\bar{w}} = -w$) chegando-se a:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \tilde{T} + k_{\alpha}^2 \tilde{T}) w d\Omega + \int_{S_1} (\tilde{T} - \bar{T}) \frac{\partial w}{\partial \nu_n} ds_1 - \int_{S_2} (q - \bar{q}) w ds_2 = 0. \quad (96)$$

Integrando por partes duas vezes o primeiro termo da primeira integral do lado esquerdo da equação (96) obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \tilde{T}) w d\Omega = \int_S \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \nu_n} w dS - \int_S \tilde{T} \frac{\partial w}{\partial \nu_n} ds + \int_{\Omega} (\nabla^2 w) \tilde{T} d\Omega. \quad (97)$$

Aplicando-se (97) em (96) onde $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \nu_n} = q$, chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 w + k_{\alpha}^2 w) \tilde{T} d\Omega + \int_S q w ds - \int_S \tilde{T} \frac{\partial w}{\partial \nu_n} ds + \int_{S_1} \tilde{T} \frac{\partial w}{\partial \nu_n} ds_1 \\ - \int_{S_1} \bar{T} \frac{\partial w}{\partial \nu_n} ds_1 - \int_{S_2} q w ds_2 + \int_{S_2} \bar{q} w ds_2 = 0. \end{aligned} \quad (98)$$

Como:

$$\int_S q w ds - \int_{S_2} q w ds_2 = \int_{S_1} q w ds_1, \quad (99)$$

e

$$\int_S \tilde{T} \frac{\partial w}{\partial \nu_n} ds - \int_{S_1} \bar{T} \frac{\partial w}{\partial \nu_n} ds_1 = \int_{S_2} \tilde{T} \frac{\partial w}{\partial \nu_n} ds_2. \quad (100)$$

Substituindo (99) e (100) em (98), tem-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w + k_{\alpha}^2 w) \tilde{T} d\Omega + \int_{S_1} q w ds_1 - \int_{S_2} \tilde{T} \frac{\partial w}{\partial v_n} ds_2 - \int_{S_1} \bar{T} \frac{\partial w}{\partial v_n} ds_1 + \int_{S_2} \bar{q} w ds_2 = 0. \quad (101)$$

Sabe-se que no contorno S_2 e S_1 os valores prescritos são \bar{q} e \bar{T} , respectivamente. Assim:

$$\int_{S_1} q w ds_1 + \int_{S_2} \bar{q} w ds_2 = \int_S q w ds, \quad (102)$$

e

$$\int_{S_2} \tilde{T} \frac{\partial w}{\partial v_n} ds_2 + \int_{S_1} \bar{T} \frac{\partial w}{\partial v_n} ds_1 = \int_S \tilde{T} w ds. \quad (103)$$

A equação (101) pode ser novamente escrita como segue:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 w + k_{\alpha}^2 w) \tilde{T} d\Omega + \int_S q w ds - \int_S \tilde{T} \frac{\partial w}{\partial v_n} ds = 0. \quad (104)$$

Desta forma, o operador de Helmholtz $(\nabla^2 + k_{\alpha}^2)$, aplicado sobre a solução \tilde{T} procurada, foi “movido” para a função de ponderação w . No MEC, a formulação da equação de contorno requer que a função de ponderação w seja a solução fundamental de problemas com as mesmas propriedades materiais do corpo em consideração, correspondendo a um domínio infinito com uma fonte unitária concentrada. Para o problema em questão, essa solução corresponde à solução da equação de Helmholtz com fonte singular (isto é, representada pelo delta de Dirac). Em outras palavras, $w = G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$, onde $G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$ é a solução fundamental do problema para a temperatura em um meio sólido e infinito em (x, y) , devido a uma fonte pontual unitária aplicada em (x_0, y_0) . A equação (104) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) + k_a^2 G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)) \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) d\Omega \quad (105)$$

$$+ \int_S q(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds$$

$$- \int_S \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)}{\partial v_n} ds = 0.$$

Designando $\frac{\partial G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)}{\partial v_n} = H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$, tem-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) + k_a^2 G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)) \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) d\Omega \quad (106)$$

$$= \int_S \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds$$

$$- \int_S q(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds,$$

onde v_n é o vetor unitário normal ao contorno. A equação anterior é conhecida como equação integral do problema governado pela equação (88). As funções de Green, ou as também chamadas soluções fundamentais, para a temperatura e fluxo de calor válidas para um meio sólido homogêneo e infinito em (x, y) , devido a uma carga pontual unitária aplicada em (x_0, y_0) , são dadas por:

$$G(x, y, x_0, y_0, \omega) = \frac{-i}{4k} H_0 \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K} - (k_{zm})^2} r_1 \right), \quad (107)$$

$$H(x, y, v_n, x_0, y_0, \omega) = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{-i\omega}{K} - (k_{zm})^2} H_1 \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K} - (k_{zm})^2} r_1 \right) \frac{\partial r_1}{\partial v_n}, \quad (108)$$

onde $r_1 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

a) Equação integral para pontos internos

O próximo passo para o MEC, consiste em eliminar a integral de domínio da equação (106). Sabe-se que o operador de Helmholtz aplicado à função de Green

igualar-se ao negativo da função generalizada delta de Dirac. Sabe-se, pelas características do Delta de Dirac:

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_0, y - y_0) g(x, y) d\Omega = g(x_0, y_0). \quad (109)$$

Usando-se essa propriedade, a equação (106) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) &= \int_S q(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\ &\quad - \int_S \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds. \end{aligned} \quad (110)$$

b) Equação integral de contorno

A equação anterior pode fornecer os valores dos parâmetros buscados em qualquer ponto interno, mas, para isso, é necessário conhecer os valores de \tilde{T} e q no contorno. Os valores incógnitos no contorno podem ser obtidos avaliando-se a equação integral (110) quando o ponto (x_0, y_0) aproxima-se ao contorno. As integrais em S , agora, devem ser calculadas por processos limites à medida que (x_0, y_0) aproxima-se do contorno. Para melhores detalhes desta estratégia, podem ser consultadas as referências (BEER, 2008; BREBBIA, 1978). A equação integral de contorno escreve-se então como:

$$\begin{aligned} \tilde{c}\tilde{T}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) &= \int_S q(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\ &\quad - \int_S \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds. \end{aligned} \quad (111)$$

O fator \tilde{c} é uma constante definida pela forma do contorno onde o ponto fonte

está atuando, sendo este: $\tilde{c} = \begin{cases} 1, & \text{se } (x_0, y_0) \notin S \\ \frac{1}{2}, & \text{se } (x_0, y_0) \in S \text{ e se } S \text{ for suave.} \\ 0, & \text{se } (x_0, y_0) \in \Omega \end{cases}$

O MEC tem origem com a avaliação numérica da expressão (111). Esta formulação fornece uma relação que deve ser satisfeita pelas temperaturas e fluxos no contorno. Quando as condições de contorno são aplicadas, essa equação pode ser usada para calcular as incógnitas no restante do contorno.

c) Equação integral na presença de uma fonte de calor

Se o problema apresenta uma fonte no domínio, por exemplo $B(x, y)$, a equação (88) deixa de ser uma equação diferencial homogênea para converter-se em:

$$\left(\nabla^2 + \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K} - (k_{zm})^2} \right)^2 \right) \tilde{T}(\omega, x, y, k_{zm}) = B(x, y). \quad (112)$$

A equação integral do MEC correspondente pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \tilde{c}\tilde{T}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) &= \int_S q(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\ &\quad - \int_S \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\ &\quad + \int_{\Omega} B(x, y) G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) d\Omega. \end{aligned} \quad (113)$$

Para este trabalho, utiliza-se de uma fonte concentrada unitária, aplicada no ponto (x_s, y_s) . Sendo assim: $B(x, y) = \delta(x - x_s, y - y_s)$. Empregando a propriedade do Delta de Dirac apresentada em (109), a equação (113) pode ser rescrita como:

$$\begin{aligned} \tilde{c}\tilde{T}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) &= \int_S q(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\ &\quad - \int_S \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\ &\quad + G(x_s, y_s, x_0, y_0, k_{zm}, \omega). \end{aligned} \quad (114)$$

Se a fonte de calor for representada por \tilde{T}_{inc} , sendo que $\tilde{T}_{inc}(x_s, y_s, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) = G(x_s, y_s, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{c}\tilde{T}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) &= \int_S q(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\ &\quad - \int_S \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\ &\quad + \tilde{T}_{inc}(x_s, y_s, x_0, y_0, k_{zm}, \omega). \end{aligned} \quad (115)$$

d) Equação integral para condições de contorno diferentes de zero

O problema de transferência de calor transiente por condução no domínio da frequência, em um domínio Ω , homogêneo, isotrópico e com condições iniciais diferentes de zero, pode ser descrito pela seguinte equação:

$$\left(\nabla^2 + \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K}} \right)^2 \right) \tilde{T}(\omega, x, y) = \frac{T_0(x, y)}{K}, \quad (116)$$

onde $T_0(x, y)$ é a distribuição temperatura inicial. A equação integral do MEC correspondente pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \tilde{c}\tilde{T}^{(ext)}(x_0, y_0, \omega) &= \int_S q(x, y, \nu_n, \omega) G(x, y, x_0, y_0, \omega) ds \\ &\quad - \int_S H(x, y, \nu_n, x_0, y_0, \omega) \tilde{T}(x, y, \omega) ds \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{T_0(x, y)}{K} G(x, y, x_0, y_0, \omega) d\Omega. \end{aligned} \quad (117)$$

Nota-se que esta equação possui uma integral de domínio $\int_{\Omega} \frac{T_0(x, y)}{K} G(x, y, x_0, y_0, \omega) d\Omega$ a qual, neste trabalho, é avaliada discretizando o domínio em células quadrilaterais.

5.1.2 Formulação do MEC para meios sólidos contendo inclusões sólidas

Essa subseção descreve a formulação do MEC usada para obter o campo de calor na vizinhança de uma inclusão com seção de geometria qualquer com condições iniciais iguais a zero. Considera-se um meio sólido homogêneo infinito contendo uma inclusão, definida por um contorno S . Este sistema está sujeito à transferência de calor gerada pela ação de uma fonte de calor representada por \tilde{T}_{inc} no meio externo. Ao longo do contorno S no domínio exterior:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}\tilde{T}^{(a)}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \\
&= \int_S q^{(a)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G^{(a)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\
&- \int_S \tilde{T}^{(a)}(x, y, k_{zm}, \omega) H^{(a)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\
&+ \tilde{T}_{inc}(x_s, y_s, x_0, y_0, k_{zm}, \omega),
\end{aligned} \tag{118}$$

Ao longo do contorno S no domínio interior:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}\tilde{T}^{(b)}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \\
&= \int_S q^{(b)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G^{(b)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\
&- \int_S \tilde{T}^{(b)}(x, y, k_{zm}, \omega) H^{(b)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds.
\end{aligned} \tag{119}$$

Nas equações acima, os sobrescritos (a) e (b) correspondem ao domínio exterior e interior, respectivamente, v_n é o vetor unitário normal ao contorno, G e H são as soluções fundamentais para a temperatura (\tilde{T}) e o fluxo de calor (q), respectivamente.

A solução global é encontrada resolvendo as equações (118) e (119), que exigem a discretização do contorno em N elementos de contorno. Se forem usados elementos constantes, com um ponto nodal no meio de cada elemento, os valores de \tilde{T} e q são constantes sobre cada elemento e as equações de interpolação possuem valor unitário. As equações assumem a seguinte forma, para um dado ponto k , ao longo do contorno no domínio exterior:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_k \tilde{T}^{(a)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \\
&= \sum_{l=1}^N \int_{S_l} G^{(a)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) q^{(a)}(x_l, y_l, v_l, k_{zm}, \omega) ds_l \\
&- \sum_{l=1}^N \int_{S_l} \tilde{T}^{(a)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega) H^{(a)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \\
&+ \tilde{T}_{inc}(x_s, y_s, x_k, y_k, k_{zm}, \omega).
\end{aligned} \tag{120}$$

Ao longo do contorno no domínio interior:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_k \tilde{T}^{(b)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \\
&= \sum_{l=1}^N \int_{S_l} G^{(b)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) q^{(b)}(x_l, y_l, \nu_l, k_{zm}, \omega) ds_l \\
&\quad - \sum_{l=1}^N \int_{S_l} H^{(b)}(x_l, y_l, \nu_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \tilde{T}^{(b)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega) ds_l,
\end{aligned} \tag{121}$$

onde k é a posição onde a fonte unitária está atuando no contorno, l é o índice associado ao nó do elemento que está sendo integrado, S_l é o contorno do elemento l . Os valores de \tilde{T} e q podem ser levados para fora da integral já que são constantes para cada elemento. Assim as equações (120) e (121) tornam-se, respectivamente:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_k \tilde{T}^{(a)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \\
&= \sum_{l=1}^N \left(\int_{S_l} G^{(a)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \right) q^{(a)}(x_l, y_l, \nu_l, k_{zm}, \omega) \\
&\quad - \sum_{l=1}^N \left(\int_{S_l} H^{(a)}(x_l, y_l, \nu_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \right) \tilde{T}^{(a)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega) \\
&\quad + \tilde{T}_{inc}(x_s, y_s, x_k, y_k, k_{zm}, \omega),
\end{aligned} \tag{122}$$

e

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_k \tilde{T}^{(b)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \\
&= \sum_{l=1}^N \left(\int_{S_l} G^{(b)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \right) q^{(b)}(x_l, y_l, \nu_l, k_{zm}, \omega) \\
&\quad - \sum_{l=1}^N \left(\int_{S_l} H^{(b)}(x_l, y_l, \nu_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \right) \tilde{T}^{(b)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega).
\end{aligned} \tag{123}$$

Usando uma notação mais compacta para as equações (122) e (123), para o domínio exterior:

$$\tilde{c}_k \tilde{T}^{(a)k} = \sum_{l=1}^N G^{(a)kl} q^{(a)l} - \sum_{l=1}^N H^{(a)kl} \tilde{T}^{(a)l} + \tilde{T}_{inc}^{(a)k}. \tag{124}$$

Ao longo do contorno no domínio interior:

$$\tilde{c}_k \tilde{T}^{(b)k} = \sum_{l=1}^N G^{(b)kl} q^{(b)l} - \sum_{l=1}^N H^{(b)kl} \tilde{T}^{(b)l}. \quad (125)$$

onde:

$$\begin{aligned} q^{(a)l} &= q^{(a)}(x_l, y_l, v_l, k_{zm}, \omega), & q^{(b)l} &= q^{(b)}(x_l, y_l, v_l, k_{zm}, \omega), \\ \tilde{T}^{(a)l} &= \tilde{T}^{(a)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega), & \tilde{T}^{(b)l} &= \tilde{T}^{(b)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega), \\ \tilde{T}^{(a)k} &= \tilde{T}^{(a)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega), & \tilde{T}^{(b)l} &= \tilde{T}^{(b)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega), \\ H^{(a)kl} &= \int_{S_l} H^{(a)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l, & H^{(b)kl} &= \int_{S_l} H^{(b)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l, \\ G^{(a)kl} &= \int_{S_l} G^{(a)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l, & G^{(b)kl} &= \int_{S_l} G^{(b)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l, \end{aligned}$$

$\tilde{T}^{(a)l}$ e $\tilde{T}^{(b)l}$ são os valores nodais das temperaturas no elemento l no domínio exterior e interior, respectivamente, e $q^{(a)l}$ e $q^{(b)l}$ são os valores nodais dos fluxos no elemento l no domínio exterior e interior, respectivamente. Note que o índice “ k ” também varia de 1 a N .

Montagem das matrizes

O sistema final de equações é estabelecido após uma manipulação matemática e em conformidade com a continuidade das temperaturas e fluxos de calor ao longo do contorno da inclusão.

$$\begin{bmatrix} \hat{H}^{(a)kl} & -G^{(a)kl} \\ \hat{H}^{(b)kl} & -G^{(b)kl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^l \\ q^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{inc}^k \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (126)$$

Quando $l = k$, $\hat{H}^{(a)kl} = c_k + H^{(a)kl}$ e $\hat{H}^{(b)kl} = c_k + H^{(b)kl}$. Como mencionado anteriormente, para elementos constantes o contorno é sempre suave conforme o nó está no centro do elemento, portanto o multiplicador c_k vale $1/2$. Quando $l \neq k$, $\hat{H}^{(a)kl} = H^{(a)kl}$ e $\hat{H}^{(b)kl} = H^{(b)kl}$. As integrações ao longo dos elementos são avaliadas usando um esquema de quadratura gaussiana se o elemento a ser integrado não for o elemento carregado. Para esse trabalho, foram usados 8 pontos de Gauss. Quando o elemento carregado coincide com o elemento a ser integrado, no entanto, os integrandos exibem uma singularidade e a integração pode ser calculada de forma analítica (TADEU; SANTOS; KAUSEL, 1992).

$$\int_0^{\frac{L}{2}} H_0(k_\alpha r_1) dr_1 = \frac{L}{2} H_0\left(k_\alpha \frac{L}{2}\right) + \pi \frac{L}{4} \left[H_1\left(k_\alpha \frac{L}{2}\right) S_0\left(k_\alpha \frac{L}{2}\right) - H_0\left(k_\alpha \frac{L}{2}\right) S_1\left(k_\alpha \frac{L}{2}\right) \right], \quad (127)$$

onde $S_{ns}()$ são funções de Struve de ordem ns e L é o comprimento do elemento de contorno. Observe-se que $\int_0^{\frac{L}{2}} H_1(k_\alpha r_1) \frac{\partial r}{\partial v_n} dr = 0$, pois $\frac{\partial r}{\partial v_n} = 0$.

Uma vez resolvido este sistema, são obtidos os valores nodais de temperatura e fluxos de calor no contorno, o que permite determinar os valores correspondentes ao campo refletido em qualquer ponto do campo em análise.

5.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E CONVECÇÃO

A presente seção apresenta a formulação do MEC para obtenção do campo tridimensional de calor gerado por uma fonte pontual localizada na vizinhança de uma inclusão de seção arbitrária e constante ao longo de uma direção, considerando agora o fenômeno de condução e convecção sob condições iniciais iguais a zero. Tal como foi mencionado, a resolução do problema tridimensional estudado nesta tese, quando a geometria do modelo não se altera em uma direção, pode ser simplificada com o uso de um modelo de duas dimensões e meia (2,5D), onde a fonte é tridimensional e a geometria é bidimensional. A resolução pode então ser encontrada através de um conjunto de problemas bidimensionais para diferentes números de onda na direção onde a geometria não varia.

5.2.1 Formulação do MEC para meios homogêneos

O MEC também pode ser utilizado para resolução de problemas de transferência de calor transiente por condução e convecção simultaneamente, no domínio da frequência, para cada valor de k_{zm} , em um domínio Ω , homogêneo, isotrópico, correspondendo a problemas bidimensionais individuais.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(\sqrt{\frac{-i\omega}{K} - (k_{zm})^2} \right)^2 \right) \tilde{T}(\omega, x, y, z) = 0. \quad (128)$$

Assim como para a equação (88) do fenômeno de condução, a equação integral do MEC para o problema descrito pela equação (128) pode ser obtida também a partir do Método dos Resíduos Ponderados. Admite-se um meio homogêneo Ω (ilustrado na Fig. 2), com contorno S , sendo $S = S_1 + S_2$, sujeito às condições de contorno dadas por (89) e (90). Para aplicação do MRP na equação (128) e às condições de contorno (89) e (90), consideram-se as expressões:

$$\nabla^2 \tilde{T} - \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right) + k_\alpha^2 \tilde{T} = R_\Omega, \quad (129)$$

$$\tilde{T} - \bar{T} = R_{S_1}, \quad (130)$$

$$q - \bar{q} = R_{S_2}, \quad (131)$$

em que $k_\alpha = \sqrt{\frac{-i\omega}{K} - (k_{zm})^2}$, e lembrando que R_Ω , R_{S_1} e R_{S_2} são os resíduos e que \tilde{T} e q representam, agora, valores aproximados. Como já descrito para o problema de condução, com a finalidade de minimizar esses resíduos, o seu produto por funções de ponderação w , \bar{w} , $\bar{\bar{w}}$ (cujas derivadas normais são $\frac{\partial w}{\partial v_n}$, $\frac{\partial \bar{w}}{\partial v_n}$, $\frac{\partial \bar{\bar{w}}}{\partial v_n}$) é integrado no domínio e no contorno e igualado a zero. Assim, chega-se a:

$$\int_{\Omega} R_\Omega w d\Omega + \int_{S_1} R_{S_1} \bar{w} ds_1 + \int_{S_2} R_{S_2} \bar{\bar{w}} ds_2 = 0. \quad (132)$$

Substituindo as equações (129), (130) e (131) em (132), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\nabla^2 \tilde{T} - \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right) + k_\alpha^2 \tilde{T} \right) w d\Omega + \int_{S_1} (\tilde{T} - \bar{T}) \bar{w} ds_1 \\ + \int_{S_2} (q - \bar{q}) \bar{\bar{w}} ds_2 = 0. \end{aligned} \quad (133)$$

Aplicando-se o teorema da divergência (WROBEL, 2002) na integral de domínio relacionada à convecção:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right) w \, d\Omega \tag{134} \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial (w\tilde{T})}{\partial x} + V_y \frac{\partial (w\tilde{T})}{\partial y} \right) \, d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial w}{\partial x} + V_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \tilde{T} \, d\Omega \\
&= \frac{1}{K} \int_s w \tilde{T} V_n \, ds - \int_{\Omega} \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial w}{\partial x} + V_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \tilde{T} \, d\Omega,
\end{aligned}$$

sendo $V_n = V_x n_x + V_y n_y$, onde n_x e n_y são os vetores unitários na direção x e y , respectivamente. O que diferencia a equação (95) para a condução da equação (133) para condução e convecção, é que esta última incorpora o termo relacionado ao fenômeno da convecção. A partir disso, a equação integral do problema pode ser encontrada seguindo os passos dados para chegar à equação (104) adicionando-se a equação (134) a esta. Assim, a partir de (133) chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\nabla^2 w + \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial w}{\partial x} + V_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + k_{\alpha}^2 w \right) \tilde{T} \, d\Omega + \int_s q w \, ds - \int_s \tilde{T} \frac{\partial w}{\partial v_n} \, ds \tag{135} \\
&- \frac{1}{K} \int_s w \tilde{T} V_n \, ds = 0.
\end{aligned}$$

Substituindo então na equação (135) a solução fundamental correspondente ao problema de condução e convecção, $w = G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$, a equação pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(\nabla^2 G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \right. \\
& \quad + \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)}{\partial x} + V_y \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)}{\partial y} \right) \\
& \quad \left. + k_{\alpha}^2 G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \right) \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) d\Omega \\
& = \int_S \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\
& \quad - \int_S q(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\
& \quad + \frac{1}{K} \int_S G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) V_n ds,
\end{aligned} \tag{136}$$

sendo $H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) = \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)}{\partial v_n}$.

A equação (136) é conhecida como equação integral do problema governado pela equação (128). As funções de Green para a temperatura e fluxo de calor, envolvendo condução e convecção válidas para um meio homogêneo infinito, são dadas por:

$$G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) = \frac{-i}{4k} e^{\frac{v_r}{2K}} H_0(k_{\beta} r_1), \tag{137}$$

$$\begin{aligned}
& H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \\
& = \frac{-i}{4} e^{\frac{v_r}{2K}} \left[\frac{V}{2K} \left(\frac{\partial r}{\partial v_n} \right) H_0(k_{\beta} r_1) - k_{\alpha} H_1(k_{\beta} r_1) \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_n} \right) \right],
\end{aligned} \tag{138}$$

com e $k_{\beta} = \sqrt{-\frac{V}{4K^2} - \frac{-i\omega}{K} - (k_{zm})^2}$. Essas equações descrevem a temperatura e o fluxo, respectivamente, em (x, y) devido a uma fonte pontual unitária aplicada em (x_0, y_0) .

e) Equação integral para pontos internos

Para eliminar a integral de domínio da equação (136) usa-se da propriedade da solução fundamental G , onde:

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) & \quad (139) \\ + \frac{1}{K} \left(V_x \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)}{\partial x} + V_y \frac{\partial G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)}{\partial y} \right) \\ + k_\alpha^2 G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) & = -\delta(x, y, x_0, y_0). \end{aligned}$$

Aplicando então a propriedade do Delta de Dirac descrita pela equação (109), chega-se a:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) & = \int_S q(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \quad (140) \\ & - \int_S \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\ & - \frac{1}{K} \int_S G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) V_n ds. \end{aligned}$$

f) Equação integral de contorno

Utilizando a estratégia citada anteriormente (BEER, 2008; BREBBIA, 1978), onde avalia-se a equação (140) utilizando processos limites quando o ponto (x_0, y_0) aproxima-se ao contorno. Encontra-se a equação integral de contorno, cuja formulação fornece uma relação que deve ser satisfeita pelas temperaturas e fluxos no contorno.

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{T}}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) & = \int_S q(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \quad (141) \\ & - \int_S \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) H(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\ & - \frac{1}{K} \int_S G(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \tilde{T}(x, y, k_{zm}, \omega) V_n ds. \end{aligned}$$

Com essa equação pode-se obter todos os valores que antes eram incógnitas no contorno. A partir desses valores encontrados, as incógnitas no restante do domínio podem ser calculadas.

5.2.2 Formulação do MEC para meios contendo inclusões

Essa subsecção descreve a formulação do MEC usada para obter o campo de calor na vizinhança de uma inclusão de secção com uma geometria qualquer. Considera-se um meio sólido homogêneo infinito contendo uma inclusão definida por um contorno S . Este sistema está sujeito à transferência de calor gerada pela ação de uma fonte de calor representada por \tilde{T}_{inc} no meio externo. Ao longo do contorno S no domínio exterior:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}\tilde{T}^{(a)}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) & (142) \\
& = \int_S q^{(a)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G^{(a)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\
& - \int_S \tilde{T}^{(a)}(x, y, k_{zm}, \omega) H^{(a)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\
& - \frac{1}{K} \int_S G^{(a)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \tilde{T}^{(a)}(x, y, \omega, k_{zm}) V_n^{(a)} ds \\
& + \tilde{T}_{inc}(x_s, y_s, x_0, y_0, k_{zm}, \omega).
\end{aligned}$$

Ao longo do contorno S no domínio interior:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}\tilde{T}^{(b)}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) & (143) \\
& = \int_S q^{(b)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G^{(b)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\
& - \int_S \tilde{T}^{(b)}(x, y, k_{zm}, \omega) H^{(b)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds \\
& - \frac{1}{K} \int_S G^{(b)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \tilde{T}^{(b)}(x, y, \omega, k_{zm}) V_n^{(b)} ds.
\end{aligned}$$

Nestas equações, os sobrescritos (a) e (b) correspondem ao domínio exterior e interior, respectivamente, v_n é o vetor unitário normal ao contorno, G e H são as soluções fundamentais para a temperatura (\tilde{T}) e o fluxo de calor (q) para o caso envolvendo condução e convecção, respectivamente.

A solução global é encontrada resolvendo as equações (142) e (143), que exigem a discretização do contorno em N elementos de contorno. Para esse trabalho foram utilizados elementos constantes. As equações assumem a seguinte forma, para um dado ponto k , ao longo do contorno no domínio exterior:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_k \tilde{T}^{(a)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \tag{144} \\
&= \sum_{l=1}^N \int_{S_l} G^{(a)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) q^{(a)}(x_l, y_l, \nu_l, k_{zm}, \omega) ds_l \\
&- \sum_{l=1}^N \int_{S_l} \tilde{T}^{(a)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega) H^{(a)}(x_l, y_l, \nu_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \\
&- \frac{1}{K} \sum_{l=1}^N \int_{S_l} G^{(a)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \tilde{T}^{(a)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega) V_n^{(a)} ds_l \\
&+ \tilde{T}_{inc}(x_s, y_s, x_k, y_k, k_{zm}, \omega).
\end{aligned}$$

Ao longo do contorno no domínio interior:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_k \tilde{T}^{(b)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \tag{145} \\
&= \sum_{l=1}^N \int_{S_l} G^{(b)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) q^{(b)}(x_l, y_l, \nu_l, k_{zm}, \omega) ds_l \\
&- \sum_{l=1}^N \int_{S_l} H^{(b)}(x_l, y_l, \nu_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \tilde{T}^{(b)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega) ds_l \\
&- \frac{1}{K} \sum_{l=1}^N \int_{S_l} G^{(b)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \tilde{T}^{(b)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega) V_n^{(b)} ds_l,
\end{aligned}$$

onde k é a posição onde a fonte unitária está atuando no contorno, l se refere ao índice associado ao nó do elemento que está sendo integrado, S_l é o contorno do elemento l . Como para esse trabalho foram utilizados elementos constantes, os valores de \tilde{T} e q podem ser levados para fora da integral já que são constantes para cada elemento. Assim as equações (144) e (145) tornam-se, respectivamente:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_k \tilde{T}^{(a)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \tag{146} \\
&= \sum_{l=1}^N \left(\int_{S_l} G^{(a)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \right) q^{(a)}(x_l, y_l, v_l, k_{zm}, \omega) \\
&- \sum_{l=1}^N \left(\int_{S_l} H^{(a)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \right) \tilde{T}^{(a)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega) \\
&- \sum_{l=1}^N \left(\int_{S_l} G^{(a)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \right) \tilde{T}^{(a)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega) V_n^{(a)} \\
&+ \tilde{T}_{inc}(x_s, y_s, x_k, y_k, k_{zm}, \omega),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_k \tilde{T}^{(b)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega) \tag{147} \\
&= \sum_{l=1}^N \left(\int_{S_l} G^{(b)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \right) q^{(b)}(x_l, y_l, v_l, k_{zm}, \omega) \\
&- \sum_{l=1}^N \left(\int_{S_l} H^{(b)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \right) \tilde{T}^{(b)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega) \\
&- \sum_{l=1}^N \left(\int_{S_l} G^{(b)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds_l \right) \tilde{T}^{(b)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega) V_n^{(b)}.
\end{aligned}$$

Usando uma notação mais compacta para as equações (146) e (147), para o domínio exterior:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_k \tilde{T}^{(a)k} &= \sum_{l=1}^N G^{(a)kl} q^{(a)l} \tag{148} \\
&- \sum_{l=1}^N H^{(a)kl} \tilde{T}^{(a)l} - \frac{1}{K} \sum_{l=1}^N G^{(a)kl} \tilde{T}^{(a)l} V_n^{(a)} + \tilde{T}_{inc}^{(a)k}.
\end{aligned}$$

Ao longo do contorno no domínio interior:

$$\tilde{c}_k \tilde{T}^{(b)k} = \sum_{l=1}^N G^{(b)kl} q^{(b)l} - \sum_{l=1}^N H^{(b)kl} \tilde{T}^{(b)l} - \frac{1}{K} \sum_{l=1}^N G^{(b)kl} \tilde{T}^{(b)l} V_n^{(b)}. \tag{149}$$

Note que “ k ” também varia de 1 a N .

O sistema final de equações é então estabelecido com a imposição de continuidade das temperaturas e fluxos de calor no contorno da inclusão. Da mesma

forma mencionada anteriormente, as integrações ao longo dos elementos são avaliadas usando quadratura gaussiana se o elemento a ser integrado não for o elemento carregado. Para essa tese, utilizou-se de 8 pontos de Gauss. Quando o elemento carregado coincide com o elemento a ser integrado, a existência de singularidade é resolvida de forma analítica utilizando a equação (127). Uma vez resolvido este sistema, os valores nodais no contorno, que constituem as incógnitas, são obtidos e, a partir deles, as temperaturas e fluxos de calor em qualquer ponto do domínio podem ser calculados.

6 ACOPLAMENTO DO MEC COM A FORMULAÇÃO ANALÍTICA

No capítulo 4 descreveram-se soluções analíticas que possibilitam a resolução de problemas de transferência de calor, em regime transiente, para um sistema cilíndrico, submetido a uma fonte de calor, de seção composta de várias camadas concêntricas, cujos meios são homogêneos e isotrópicos. Estes algoritmos de cálculo não são aplicáveis a problemas com várias inclusões, nos quais a solução analítica é muito mais complexa de se obter. Apesar de ser possível resolver problemas de difusão de calor com inclusões de multicamadas através do MEC convencional, a sua combinação com o modelo analítico apropriado permite evitar a discretização das interfaces entre camadas (sólidas ou fluidas) com diferentes propriedades térmicas. Essa estratégia permite reduzir o esforço computacional em relação ao que seria necessário caso se utilizasse um modelo do MEC com funções de Green válidas apenas para um domínio infinito e permite lidar com a interação entre as inclusões de multicamadas que, na prática, seriam inviáveis de serem resolvidas apenas com a solução analítica.

A seguir, é apresentada a formulação proposta que acopla o MEC com soluções analíticas, sendo o MEC usado para o domínio ilimitado homogêneo, enquanto as soluções analíticas são usadas para resolver cada um dos subdomínios confinados não homogêneos, combinando as vantagens de ambos os métodos em uma única solução. Neste capítulo também é descrito o procedimento usado para obtenção da solução no domínio do tempo resumidamente.

6.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO

Nesta seção apresentam-se as formulações que consideram o fenômeno de condução do caso 2,5D para um problema com uma fonte de calor e condições iniciais iguais a zero e em seguida para o caso bidimensional com condições iniciais diferentes de zero.

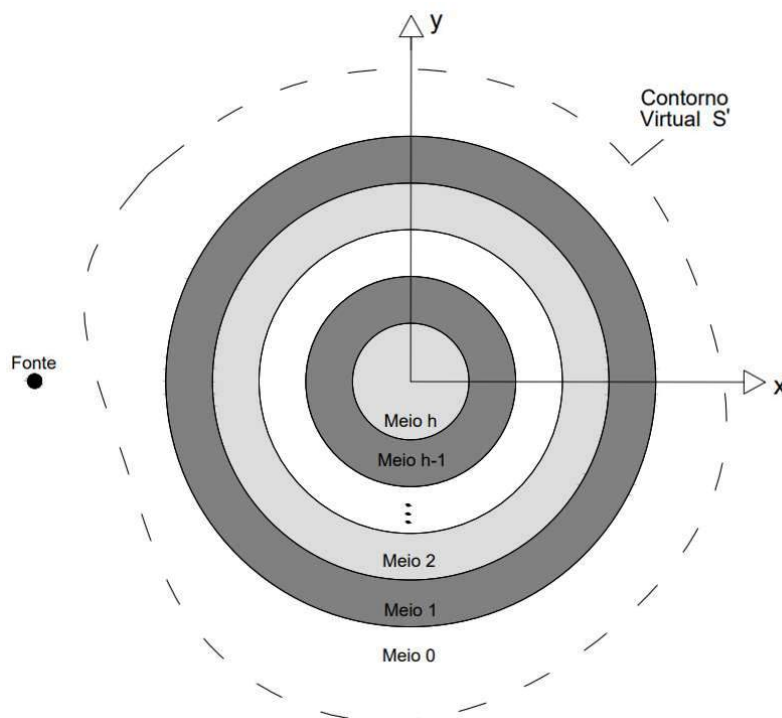
6.1.1 Fonte de Calor e condições iniciais iguais a zero

Primeiramente é apresentada a formulação considerando apenas uma inclusão submetida a uma fonte de calor e considerando condições iniciais iguais a zero. É feita uma verificação dessa formulação desenvolvida comparando os resultados com o caso analítico. Na sequência, descrevem-se as equações considerando duas inclusões, sendo que estas podem ser facilmente expandidas para o caso de mais inclusões e esse algoritmo proposto é comparado com as soluções utilizando apenas o MEC clássico.

6.1.1.1 Formulação para uma inclusão

Nesta subseção, uma estratégia para acoplar o MEC a soluções analíticas é apresentada.

FIGURA 3 – REPRESENTAÇÃO DA SEÇÃO DE UMA INCLUSÃO CILÍNDRICA DE MULTICAMADA, COMPOSTA POR $h-1$ ANÉIS CILÍNDRICOS (MEIOS = 1,2,... $h-1$) E UM CILÍNDRO INTERNO (MEIO h). ESTA INCLUSÃO É DELIMITADA POR UM SÓLIDO UNIFORME (MEIO 0) E SUBMETIDA A UMA FONTE DE CALOR.



FONTE: O autor (2021).

Considere um meio sólido homogêneo infinito ao redor de uma inclusão cilíndrica composta por multicamadas e um cilindro interno (meio h). Este sistema

(ilustrado na FIGURA 3) está sujeito à transferência de calor gerado pela ação de uma fonte no domínio exterior, representada por \tilde{T}_{inc} , localizada em (x_s, y_s) . Definindo-se um contorno virtual S' , localizado a uma certa distância do contorno da inclusão, a equação integral de contorno ao longo do contorno S' no domínio exterior pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} & \tilde{c}\tilde{T}^{(a)}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \\ &= \int_{S'} q^{(a)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G^{(a)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds' \\ & - \int_{S'} \tilde{T}^{(a)}(x, y, k_{zm}, \omega) H^{(a)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds' \\ & + \tilde{T}_{inc}(x_s, y_s, x_0, y_0, k_{zm}, \omega), \end{aligned} \quad (150)$$

É necessário adicionar a contribuição da inclusão no campo de temperatura e fluxo de calor ao longo do contorno virtual S' no domínio interior:

$$\begin{aligned} & \tilde{c}\tilde{T}^{(b)}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \\ &= \int_{S'} q^{(b)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G^{(b)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds' \\ & + \int_{S'} \tilde{q}^{(b)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) \tilde{G}^{(b)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds' \\ & - \int_{S'} \tilde{T}^{(b)}(x, y, k_{zm}, \omega) H^{(b)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds' \\ & - \int_{S'} \tilde{T}^{(b)}(x, y, k_{zm}, \omega) \tilde{H}^{(b)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds', \end{aligned} \quad (151)$$

onde $\tilde{G}^{(b)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$ e $\tilde{H}^{(b)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$ representam a variação no campo de temperatura e fluxos em (x, y) , gerados pela presença da inclusão e são computados analiticamente usando a equação (35) e sua derivada (36) (após os coeficientes Ar_n^0 serem definidos). A solução dessa equação requer a discretização do contorno virtual S' em N elementos. Nesse trabalho foram considerados elementos constantes com um ponto nodal no centro. As equações têm a seguinte forma, para um dado ponto k , ao longo do contorno S' no domínio exterior:

$$\tilde{c}_k \tilde{T}^{(a)k} = \sum_{l=1}^N G^{(a)kl} q^{(a)l} - \sum_{l=1}^N H^{(a)kl} \tilde{T}^{(a)l} + \tilde{T}_{inc}^{(a)k}. \quad (152)$$

Ao longo do contorno S' no domínio interior:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k \tilde{T}^{(b)k} &= \sum_{l=1}^N G^{(b)kl} q^{(b)l} + \sum_{l=1}^N \tilde{G}^{(b)(b)kl} q^{(b)l} \\ &- \sum_{l=1}^N H^{(b)kl} \tilde{T}^{(b)l} - \sum_{l=1}^N \tilde{H}^{(b)kl} \tilde{T}^{(b)l}, \end{aligned} \quad (153)$$

onde:

$$q^{(a)l} = q^{(a)}(x_l, y_l, v_l, k_{zm}, \omega),$$

$$q^{(b)l} = q^{(b)}(x_l, y_l, v_l, k_{zm}, \omega),$$

$$\tilde{T}^{(a)l} = \tilde{T}^{(a)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega),$$

$$\tilde{T}^{(b)l} = \tilde{T}^{(b)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega),$$

$$\tilde{T}^{(a)k} = \tilde{T}^{(a)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega),$$

$$\tilde{T}^{(b)k} = \tilde{T}^{(b)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega),$$

$$H^{(a)kl} = \int_{S'_l} H^{(a)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$H^{(b)kl} = \int_{S'_l} H^{(b)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$\tilde{H}^{(b)kl} = \int_{S'_l} \tilde{H}^{(b)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$\tilde{G}^{(b)kl} = \int_{S'_l} \tilde{G}^{(b)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$G^{(a)kl} = \int_{S'_l} G^{(a)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$G^{(b)kl} = \int_{S'_l} G^{(b)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

l é o índice associado ao nó do elemento que está sendo integrado, S'_l é o contorno do elemento l , $\tilde{T}^{(a)l}$ e $\tilde{T}^{(b)l}$ são os valores nodais das temperaturas no elemento l no domínio exterior e interior, respectivamente, $q^{(a)l}$ e $q^{(b)l}$ são os valores nodais dos fluxos no elemento l no domínio exterior e interior, respectivamente.

As funções de Green 2,5D necessárias, relacionadas à temperatura e ao fluxo de calor em coordenadas cartesianas em um meio infinito em (x_l, y_l) , devido a uma fonte de calor unitária em (x_k, y_k) , são dadas por:

$$G(x_l, y_l, x_k, y_k, k_z, \omega) = \frac{-i}{4k_0} H_0(k_{\alpha_0} r_1), \quad (154)$$

$$H(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_z, \omega) = \frac{i}{4} \left[k_{\alpha_0} H_1(k_{\alpha_0} r_1) \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_l} \right) \right], \quad (155)$$

onde $r_1 = \sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}$.

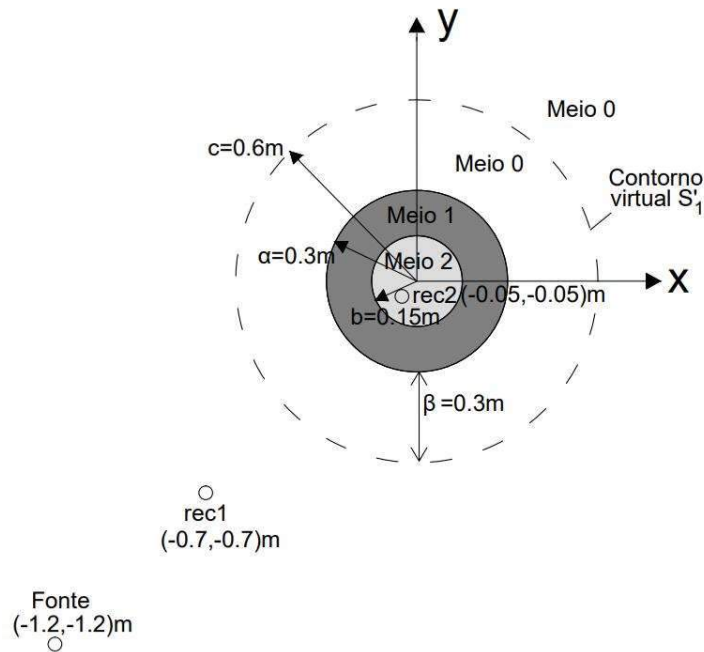
Para resolver as equações (152) e (153), um sistema final de equações é estabelecido após a imposição da continuidade das temperaturas e fluxos de calor ao longo do contorno virtual. Sua solução fornece as amplitudes das temperaturas e dos fluxos de calor nos pontos nodais, o que permite que o campo de calor seja calculado em qualquer ponto no domínio exterior ou interior. O desenvolvimento desse sistema de equações será mais bem descrito posteriormente para o caso de duas inclusões.

6.1.1.2 Verificação da formulação para uma inclusão

Considere a inclusão mostrada na FIGURA 4, composta por um núcleo circular cilíndrico interno (meio 2), limitado por um anel circular cilíndrico (meio 1), incorporado em um espaço ilimitado e uniforme (meio 0). O raio externo e interno são $a = 0,3\text{m}$ e $b = 0,15\text{m}$, respectivamente. Este sistema está sujeito ao calor gerado por uma fonte externa posicionada em $(-1,2\text{m}, -1,2\text{m})$. As propriedades do material estão listadas no Quadro 1. Os cálculos são realizados em uma faixa de frequência $[0,0\text{Hz}, 64,0 \times 10^{-7}\text{Hz}]$, usando um incremento de frequência $\Delta\omega = 1 \times 10^{-7}\text{Hz}$ e $\eta = 0,7\Delta\omega$. A precisão da formulação é confirmada calculando a resposta em dois receptores localizados no sistema [Receptor 1 $(-0,7\text{m}, -0,7\text{m})$, Receptor 2 $(-0,05\text{m}, -0,05\text{m})$] para $k_z = 0,0\text{rad.m}^{-1}$ e $k_z = 1,0\text{rad.m}^{-1}$. São usados 20 e 50 elementos de contorno para modelar um contorno virtual circular posicionado a $0,3\text{m}$ da inclusão.

As FIGURAS 5a e 5b apresentam as partes reais (linhas azuis) e imaginárias (linhas vermelhas) da temperatura. As linhas contínuas correspondem à solução analítica (usada aqui como solução de referência), enquanto a solução do acoplamento, usando 20 elementos de contorno constantes, é indicada pelas linhas marcadas. Os resultados apresentam uma concordância muito boa entre a solução de acoplamento proposta e a solução analítica.

FIGURA 4 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UMA INCLUSÃO CIRCULAR CILÍNDRICA SUBMETIDA A UMA FONTE DE CALOR.



FONTE: O autor (2021).

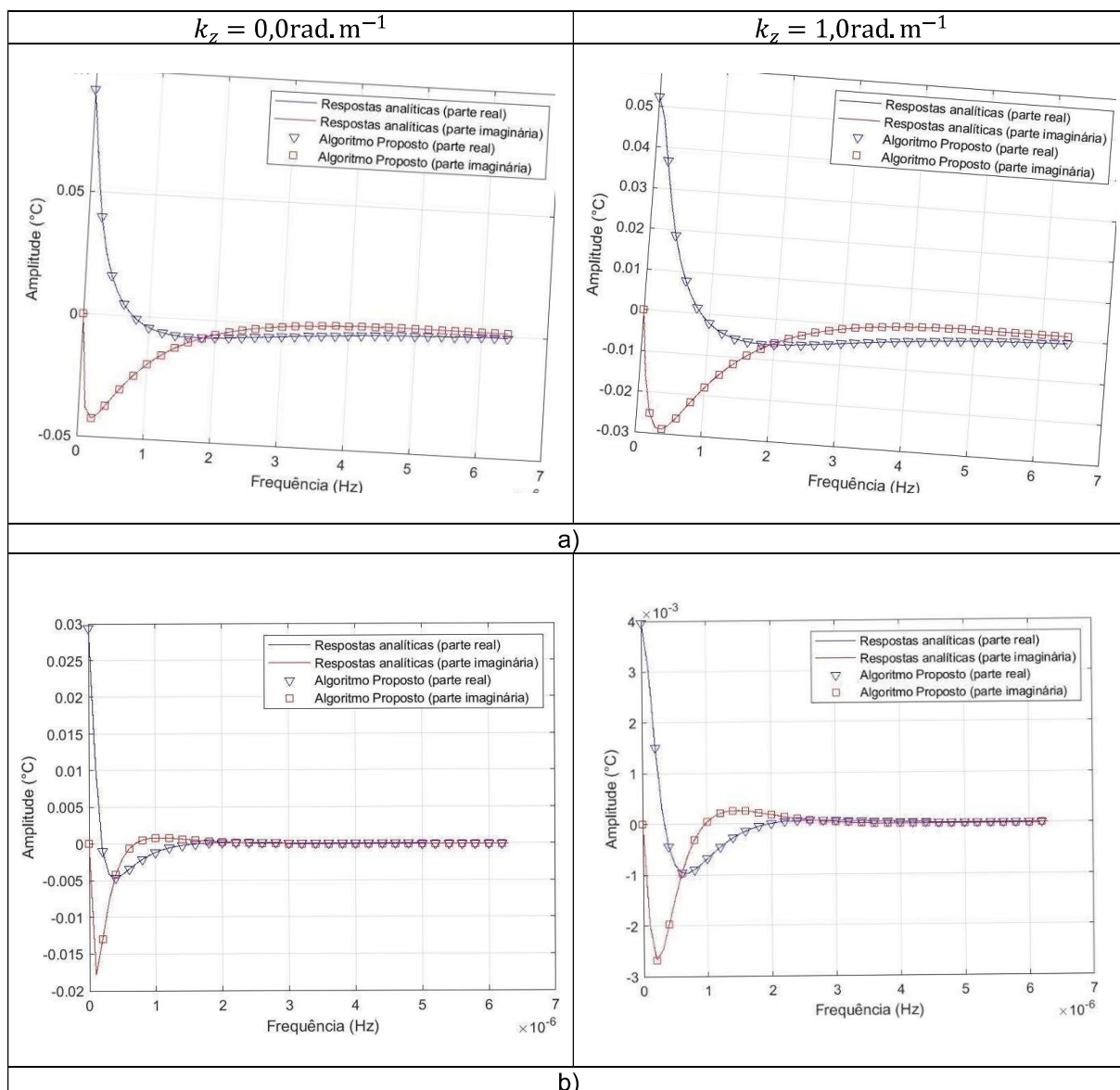
QUADRO 1 – TÍTULO DO QUADRO

	Condutividade Térmica ($W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$)	Densidade ($kg.m^{-3}$)	Calor Específico ($J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$)	Difusividade Térmica ($m^2.s^{-1}$)
Meio 0	1,4	2300,0	880,0	$6,92 \times 10^{-7}$
Meio 1	0,72	780,0	1860,0	$4,96 \times 10^{-7}$
Meio 2	63,9	7832,0	434,0	$1,88 \times 10^{-5}$

FONTE: O autor (2021).

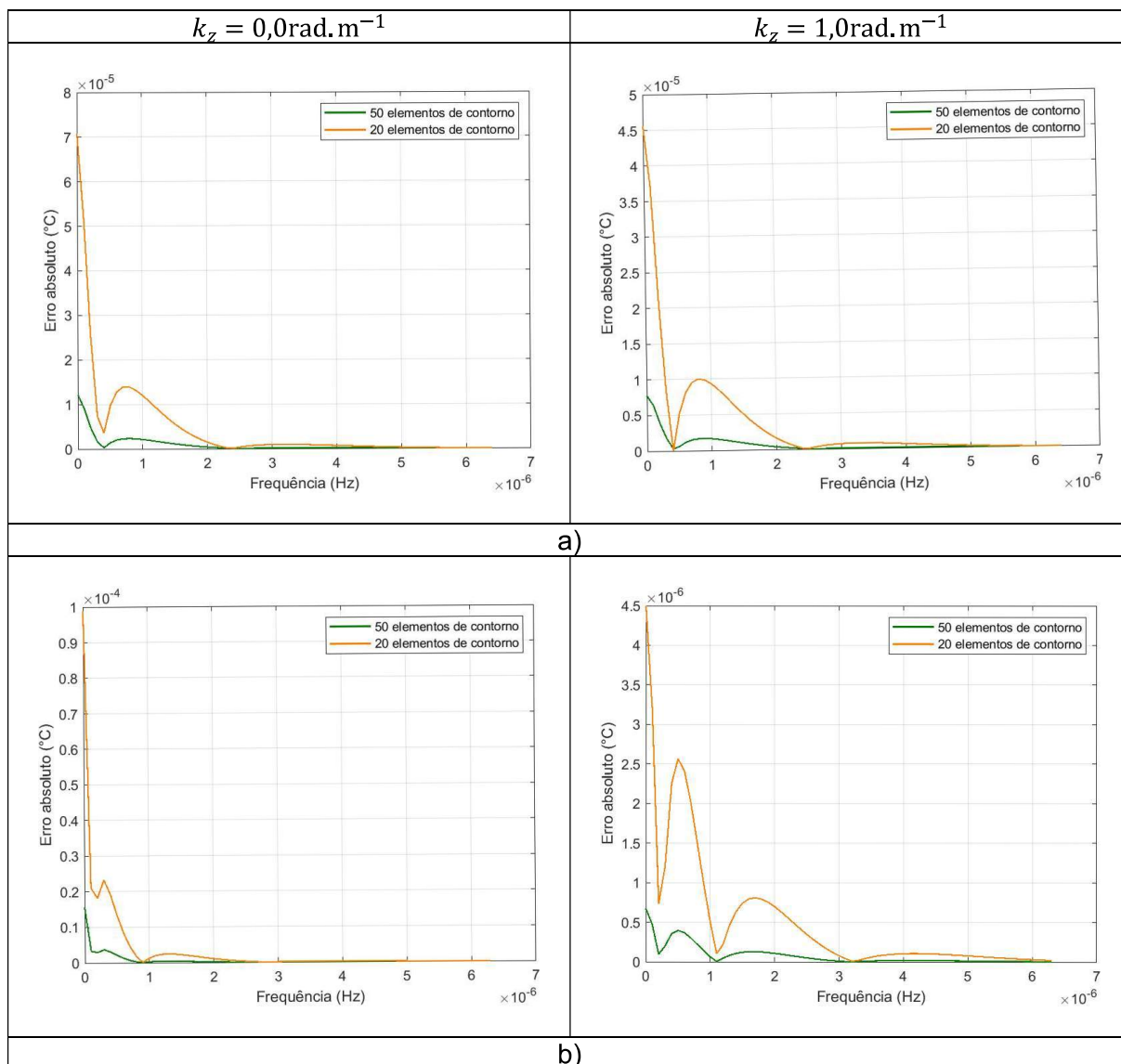
As FIGURAS 6a e 6b ilustram o valor absoluto do erro dos resultados do acoplamento em ambos os receptores, usando 20 e 50 elementos de contorno para discretizar o contorno virtual. Como esperado, pode-se concluir que a solução melhora quando são utilizados mais elementos de contorno, demonstrando a convergência dos resultados.

FIGURA 5 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS VERSUS SOLUÇÕES COM O CÓDIGO COM ACOPLAMENTO (PARTE REAL EM AZUL; PARTE IMAGINÁRIA EM VERMELHO; RESPOSTAS ANALÍTICAS EM LINHAS SÓLIDAS; RESULTADOS DO ACOPLAMENTO EM LINHAS MARCADAS) PARA $k_z = 0,0\text{rad.m}^{-1}$ e $k_z = 1,0\text{rad.m}^{-1}$: a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 6 – ERRO NUMÉRICO ABSOLUTO DAS RESPOSTAS DO ALGORITMO PROPOSTO (LINHA LARANJA – 20 ELEMENTOS DE CONTORNO; LINHA VERDE – 50 ELEMENTOS DE CONTORNO): a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; RESPOSTAS NO RECEPTOR 2.



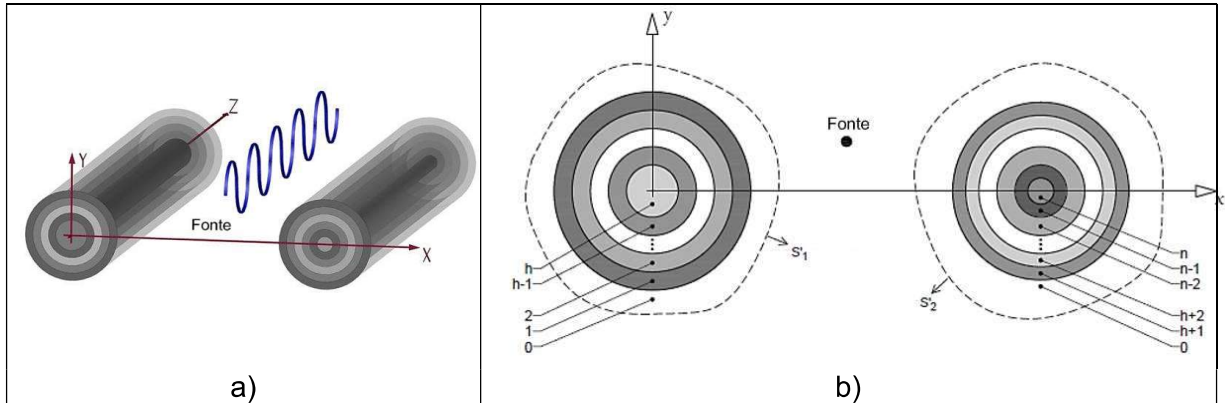
FONTE: O autor (2021).

6.1.1.3 Formulação para duas inclusões

Esta seção descreve o acoplamento entre o MEC e a solução analítica para obter o campo de calor gerado, nas proximidades de inclusões cilíndricas de multicamadas, por uma fonte de calor. Para simplificar, considere a existência de apenas duas inclusões cilíndricas de multicamadas, 1 e 2, envolvidas por um meio sólido e infinito. Como a formulação do MEC incorpora a solução analítica,

apresentada anteriormente, como funções de Green, levando em conta a presença das multicamadas, não há necessidade de discretizar as interfaces das camadas do sistema com elementos de contorno.

FIGURA 7 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS DE MULTICAMADAS. ESSAS INCLUSÕES HETEROGÊNEAS ESTÃO INSERIDAS EM UM MEIO SÓLIDO (MEIO 0) E ESTÃO SUBMETIDAS A UMA FONTE DE CALOR.



FONTE: O autor (2021).

Este sistema (ilustrado na FIGURA 7) está sujeito a uma transferência de calor gerada pela ação de uma fonte de calor no domínio externo, representada por \tilde{T}_{inc} , aplicada em (x_s, y_s) . Considera-se dois contornos virtuais arbitrários S'_1 e S'_2 , localizados a uma certa distância da primeira e da segunda inclusões, respectivamente. A equação integral de contorno ao longo dos dois contornos virtuais, no domínio externo, pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} \tilde{c}\tilde{T}^{(a)}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) = & \int_{S'_1} q^{(a)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G^{(a)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_1 \quad (156) \\ & - \int_{S'_1} \tilde{T}^{(a)}(x, y, k_{zm}, \omega) H^{(a)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_1 \\ & + \int_{S'_2} q^{(a)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G^{(a)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_2 - \\ & \int_{S'_2} \tilde{T}^{(a)}(x, y, k_{zm}, \omega) H^{(a)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_2 + \\ & \tilde{T}_{inc}^{(a)}(x_s, y_s, x_0, y_0, k_{zm}, \omega). \end{aligned}$$

Nesta equação, os sobrescritos (a) correspondem ao domínio externo. É necessário adicionar a contribuição das inclusões no campo de temperatura e fluxo

de calor ao longo dos contornos virtuais S'_1 e S'_2 no domínio interior. Ao longo do contorno virtual S'_1 no domínio interno da primeira inclusão, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{c}\tilde{T}^{(b)}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) &= \int_{S'_1} q^{(b)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G^{(b)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_1 \quad (157) \\ &+ \int_{S'_1} q^{(b)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) \tilde{G}^{(b)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_1 \\ &- \int_{S'_1} \tilde{T}^{(b)}(x, y, k_{zm}, \omega) H^{(b)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_1 \\ &- \int_{S'_1} \tilde{T}^{(b)}(x, y, k_{zm}, \omega) \tilde{H}^{(b)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_1 \end{aligned}$$

onde os sobrescritos (b) correspondem ao domínio interno de S'_1 , $\tilde{G}^{(b)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$ e $\tilde{H}^{(b)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$ representam a variação no campo de temperatura e fluxos em (x, y) , gerados pela presença da inclusão 1 e são computados analiticamente usando a equação (35) e sua derivada (36) (após os coeficientes Ar_n^0 serem definidos). Ao longo do contorno virtual S'_2 no domínio interno da segunda inclusão, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{c}\tilde{T}^{(c)}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) &= \int_{S'_2} q^{(c)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G^{(c)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_2 \quad (158) \\ &+ \int_{S'_2} q^{(c)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) \tilde{G}^{(c)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_2 \\ &- \int_{S'_2} \tilde{T}^{(c)}(x, y, k_{zm}, \omega) H^{(c)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_2 \\ &- \int_{S'_2} \tilde{T}^{(c)}(x, y, k_{zm}, \omega) \tilde{H}^{(c)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds'_2, \end{aligned}$$

onde os sobrescritos (c) correspondem ao domínio interno de S'_2 , $\tilde{G}^{(c)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$ e $\tilde{H}^{(c)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$ representam a variação no campo de temperatura e fluxos em (x, y) , gerado pela presença da inclusão 2, e eles são computados analiticamente, conforme mencionado anteriormente.

As equações (157) e (158), são discretizadas em elementos de contorno retos, com um ponto nodal no meio de cada elemento, sendo a interface do contorno virtual S'_1 em N_1 , e S'_2 em N_2 elementos de contorno. As equações assumem a seguinte

forma, ao longo do contorno virtual no domínio externo, sendo um dado ponto k um dos nós do contorno S'_1 e p um dos nós do contorno S'_2 :

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_k \tilde{T}^{(a)k} + c_p \tilde{T}^{(a)p} = & \sum_{l=1}^{N_1} q^{(a)l} G^{(a)kl} + \sum_{g=1}^{N_2} q^{(a)g} G^{(a)kg} - \sum_{l=1}^{N_1} H^{(a)kl} \tilde{T}^{(a)l} \\
& - \sum_{g=1}^{N_2} H^{(a)kg} \tilde{T}^{(a)g} + \sum_{l=1}^{N_1} q^{(a)l} G^{(a)pl} + \sum_{g=1}^{N_2} q^{(a)g} G^{(a)pg} \\
& - \sum_{l=1}^{N_1} H^{(a)pl} \tilde{T}^{(a)l} - \sum_{g=1}^{N_2} H^{(a)pg} \tilde{T}^{(a)g} + \tilde{T}_{inc}^{(a)k} + \tilde{T}_{inc}^{(a)p}
\end{aligned} \tag{159}$$

onde:

$$q^{(a)l} = q^{(a)}(x_l, y_l, v_l, k_{zm}, \omega),$$

$$q^{(a)g} = q^{(a)}(x_g, y_g, v_g, k_{zm}, \omega),$$

$$\tilde{T}^{(a)l} = \tilde{T}^{(a)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega),$$

$$\tilde{T}^{(a)g} = \tilde{T}^{(a)}(x_g, y_g, k_{zm}, \omega),$$

$$\tilde{T}^{(a)k} = \tilde{T}^{(a)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega),$$

$$\tilde{T}^{(a)p} = \tilde{T}^{(a)}(x_p, y_p, k_{zm}, \omega),$$

$$H^{(a)kl} = \int_{S'_l} H^{(a)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$H^{(a)pl} = \int_{S'_l} H^{(a)}(x_l, y_l, v_l, x_p, y_p, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$H^{(a)kg} = \int_{S'_g} H^{(a)}(x_g, y_g, v_g, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_g,$$

$$H^{(a)pg} = \int_{S'_g} H^{(a)}(x_g, y_g, v_g, x_p, y_p, k_{zm}, \omega) ds'_g,$$

$$G^{(a)kl} = \int_{S'_l} G^{(a)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$G^{(a)pl} = \int_{S'_l} G^{(a)}(x_l, y_l, x_p, y_p, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$G^{(a)kg} = \int_{S'_g} G^{(a)}(x_g, y_g, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_g,$$

$$G^{(a)pg} = \int_{S'_g} G^{(a)}(x_g, y_g, x_p, y_p, k_{zm}, \omega) ds'_g,$$

$\tilde{T}^{(a)l}$ e $\tilde{T}^{(a)g}$ são os valores nodais das temperaturas no elemento l e g , respectivamente, no contorno do domínio exterior, $q^{(a)l}$ and $q^{(a)g}$ são os valores nodais dos fluxos no elemento l e g , respectivamente, no contorno do domínio exterior, k e p são as posições onde a fonte unitária está atuando no contorno e l e g são os índices associados ao nó do elemento que está sendo integrado.

Ao longo do contorno virtual S'_1 no domínio interno da primeira inclusão, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k \tilde{T}^{(b)k} = & \sum_{l=1}^{N_1} q^{(b)l} G^{(b)kl} + \sum_{l=1}^{N_1} q^{(b)l} \tilde{G}^{(b)kl} \\ & - \sum_{l=1}^{N_1} H^{(b)kl} \tilde{T}^{(b)l} - \sum_{l=1}^{N_1} \tilde{H}^{(b)kl} \tilde{T}^{(b)l}, \end{aligned} \quad (160)$$

onde:

$$q^{(b)l} = q^{(b)}(x_l, y_l, v_l, k_{zm}, \omega),$$

$$\tilde{T}^{(b)l} = \tilde{T}^{(b)}(x_l, y_l, k_{zm}, \omega),$$

$$\tilde{T}^{(b)k} = \tilde{T}^{(b)}(x_k, y_k, k_{zm}, \omega),$$

$$H^{(b)kl} = \int_{S'_1} H^{(b)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$G^{(b)kl} = \int_{S'_1} G^{(b)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$\tilde{H}^{(b)kl} = \int_{S'_1} \tilde{H}^{(b)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$$\tilde{G}^{(b)kl} = \int_{S'_1} \tilde{G}^{(b)}(x_l, y_l, x_k, y_k, k_{zm}, \omega) ds'_l,$$

$\tilde{T}^{(b)l}$ é o valor nodal da temperatura no elemento l no domínio interior do contorno S'_1 e $q^{(b)l}$ é o valor nodal do fluxo no elemento l no domínio interior do contorno S'_1 . Ao longo do contorno virtual S'_2 no domínio interno da segunda inclusão, tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_p \tilde{T}^{(c)p} = & \sum_{g=1}^{N_2} q^{(c)g} G^{(c)pg} + \sum_{g=1}^{N_2} q^{(c)g} \tilde{G}^{(c)pg} \\ & - \sum_{g=1}^{N_2} H^{(c)pg} \tilde{T}^{(a)g} - \sum_{g=1}^{N_2} \tilde{H}^{(c)pg} \tilde{T}^{(c)g}, \end{aligned} \quad (161)$$

onde:

$$\begin{aligned}
q^{(c)g} &= q^{(c)}(x_g, y_g, v_g, k_{zm}, \omega), \\
\tilde{T}^{(c)g} &= \tilde{T}^{(c)}(x_g, y_g, k_{zm}, \omega), \\
\tilde{T}^{(c)p} &= \tilde{T}^{(c)}(x_p, y_p, k_{zm}, \omega), \\
H^{(c)pg} &= \int_{S'_g} H^{(c)}(x_g, y_g, v_g, x_p, y_p, k_{zm}, \omega) ds'_g, \\
G^{(c)pg} &= \int_{S'_g} G^{(c)}(x_g, y_g, x_p, y_p, k_{zm}, \omega) ds'_g, \\
\tilde{H}^{(c)pg} &= \int_{S'_g} \tilde{H}^{(c)}(x_g, y_g, v_g, x_p, y_p, k_{zm}, \omega) ds'_g, \\
\tilde{G}^{(c)pg} &= \int_{S'_g} \tilde{G}^{(c)}(x_g, y_g, x_p, y_p, k_{zm}, \omega) ds'_g,
\end{aligned}$$

$\tilde{T}^{(c)g}$ é o valor nodal da temperatura no elemento g no domínio interior do contorno S'_2 e $q^{(c)g}$ é o valor nodal do fluxo no elemento g no domínio interior do contorno S'_2 .

O sistema final de equações é estabelecido após uma manipulação matemática e em conformidade com a continuidade das temperaturas e fluxos de calor ao longo dos contornos virtuais estabelecendo um sistema $[2(N_1 + N_2) \times 2(N_1 + N_2)]$.

$$\begin{bmatrix}
\hat{H}^{(a)kl} & \hat{H}^{(a)kg} & -G^{(a)kl} & -G^{(a)kg} \\
\hat{H}^{(a)pl} & \hat{H}^{(a)pg} & -G^{(a)pl} & -G^{(a)pg} \\
\hat{H}^{(b)kl} + \tilde{H}^{(b)kl} & 0 & -G^{(b)kl} - \tilde{G}^{(b)kl} & 0 \\
0 & \hat{H}^{(c)pm} + \tilde{H}^{(c)pg} & 0 & -G^{(c)pg} - \tilde{G}^{(c)pg}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} T^l \\ T^g \\ q^l \\ q^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{inc}^k \\ \tilde{T}_{inc}^p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (162)$$

Quando $k = l$: $\hat{H}^{(a)kl} = \tilde{c}_k + H^{(a)kl}$ e $\hat{H}^{(b)kl} = \tilde{c}_k + H^{(b)kl}$ e quando $p = g$: $\hat{H}^{(a)pg} = \tilde{c}_p + H^{(a)pg}$ e $\hat{H}^{(c)pg} = \tilde{c}_p + H^{(c)pg}$. Conforme mencionado anteriormente, para elementos constantes o contorno é sempre suave conforme o nó está no centro do elemento; portanto, os multiplicadores \tilde{c}_p e \tilde{c}_k valem $\frac{1}{2}$. Para $k \neq l$: $\hat{H}^{(a)kl} = H^{(a)kl}$ e $\hat{H}^{(b)kl} = H^{(b)kl}$ e para $p \neq g$: $\hat{H}^{(a)pg} = H^{(a)pg}$ e $\hat{H}^{(c)pg} = H^{(c)pg}$.

As integrações ao longo dos elementos são avaliadas usando um esquema de quadratura gaussiana se o elemento a ser integrado não for o elemento carregado. Quando o elemento carregado coincide com o elemento a ser integrado, no entanto, os integrandos exibem uma singularidade e a integração pode ser calculada de forma analítica conforme descrito pela equação (127).

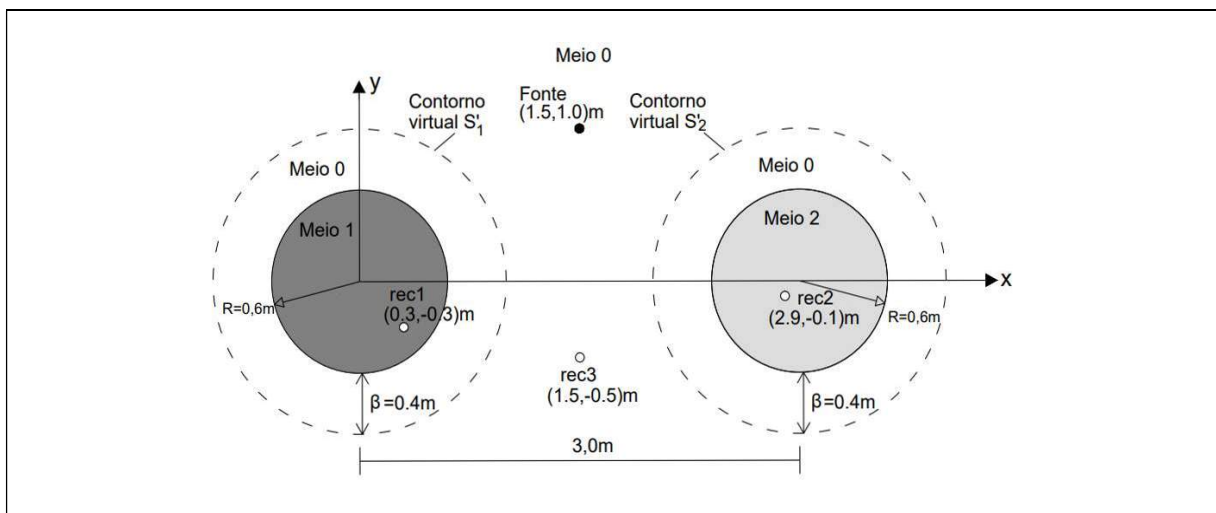
Após a resolução deste sistema, são obtidos os valores nodais de temperatura e fluxos de calor, que permitem processar os valores correspondentes do campo refletido em qualquer ponto do campo em análise.

6.1.1.4 Verificação da formulação para duas inclusões

O algoritmo proposto é comparado com as soluções do MEC, para o campo de calor produzido por uma fonte na vizinhança de duas inclusões cilíndricas incorporadas em um meio sólido infinito, centralizadas em (0,0m, 0,0m) e (3,0m, 0,0m), com raio 0,6m (FIGURA 8). As propriedades do meio sólido hospedeiro (meio 0) e das inclusões (meio 1 e meio 2) são as mesmas listadas no Quadro 1.

Presume-se que a fonte esteja no meio 0 no ponto (1,5m, 1,0m), sendo esta uma linha harmônica cuja amplitude varia senoidalmente na terceira dimensão, de acordo com diferentes valores do parâmetro k_z ($k_z = 0,0$, $k_z = 1,0$)rad.m⁻¹.

FIGURA 8 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA SEÇÃO DE DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS, CONSTITUÍDAS PELO MEIO 1 E MEIO 2. ESSAS INCLUSÕES ESTÃO INSERIDAS EM UM MEIO SÓLIDO (MEIO 0) E ESTÃO SUBMETIDAS A UMA FONTE DE CALOR.



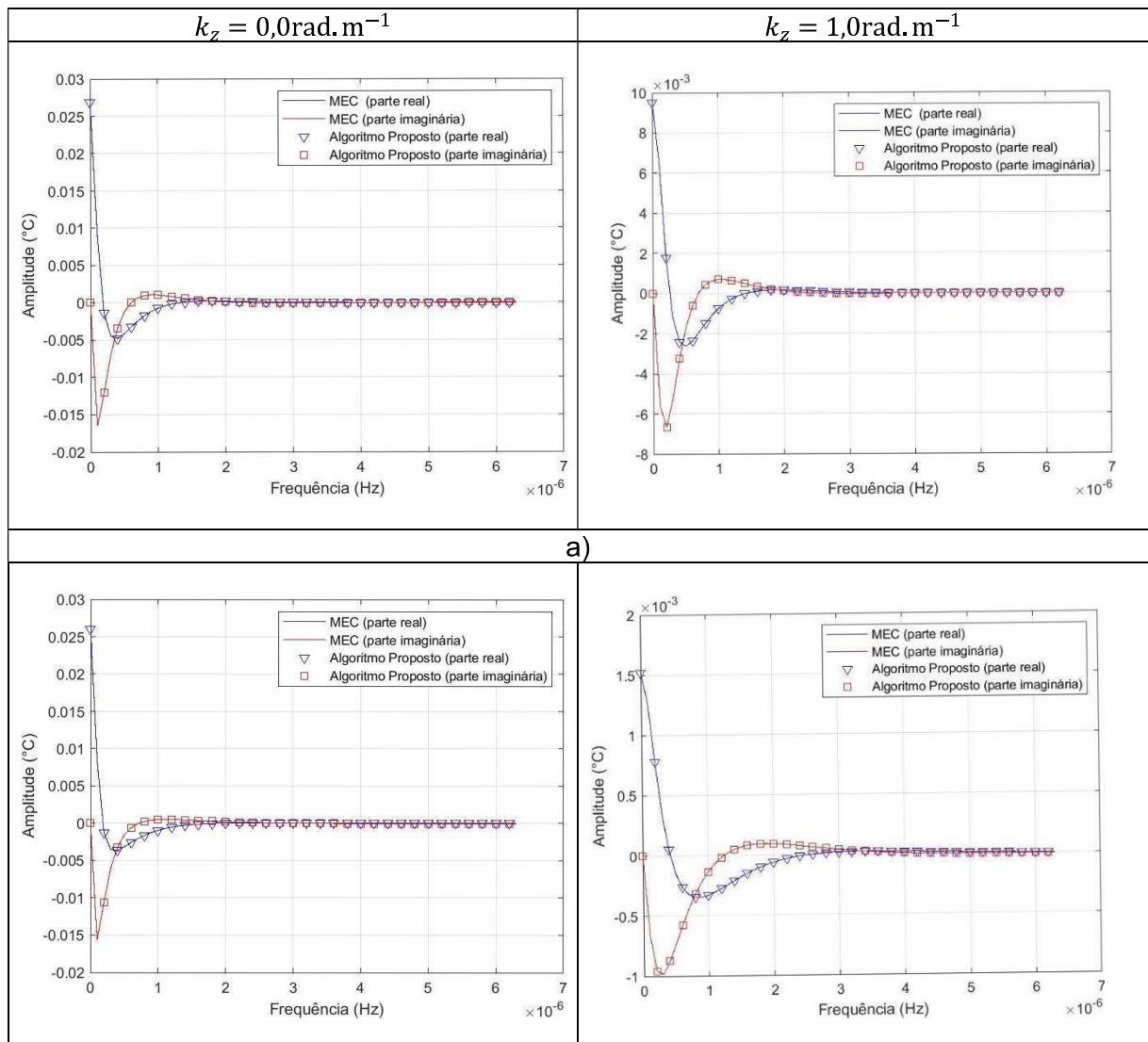
FONTE: O autor (2021).

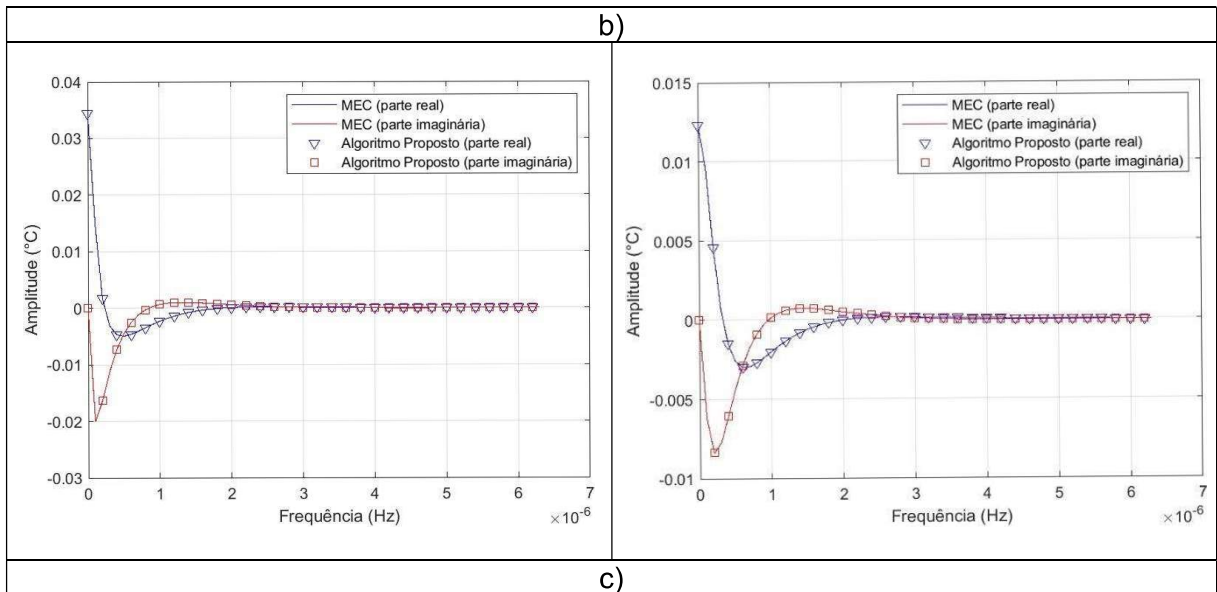
As respostas foram computadas em 3 receptores localizados no sistema [Receptor 1 (0,3m, -0,3m), Receptor 2 (2,9m, -0,1m) e Receptor 3 (1,5m, -0,5m)]. Os cálculos foram realizados para uma faixa de frequência de [0,0 Hz, 64,0x10⁻⁷Hz], usando um incremento $\Delta\omega = 1 \times 10^{-7}$ Hz e $\eta = 0,7\Delta\omega$. Cada contorno virtual foi

definido a uma distância de 0,4m para cada inclusão e modelados com 40 elementos de contorno constantes cada.

A FIGURA 9 apresenta os resultados para as partes reais (linhas azuis) e imaginárias (linhas vermelhas). O MEC (soluções de referência) e as respostas do código proposto são representadas por linhas sólidas e linhas marcadas respectivamente. Os testes mostraram boa concordância entre os resultados. O algoritmo com o acoplamento também foi testado para fontes de calor e receptores posicionados em diferentes posições, onde também foram obtidos bons resultados (exemplos não ilustrados).

FIGURA 9 – SOLUÇÕES COM USO DO MEC CLÁSSICO VERSUS SOLUÇÕES DO CÓDIGO COM ACOPLAMENTO (PARTE REAL EM AZUL; PARTE IMAGINÁRIA EM VERMELHO; RESPOSTAS COM O MEC EM LINHAS SÓLIDAS; RESULTADOS DO ACOPLAMENTO EM LINHAS MARCADAS) PARA $k_z = 0,0 \text{ rad.m}^{-1}$ e $k_z = 1,0 \text{ rad.m}^{-1}$: a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2; c) RESPOSTAS NO RECEPTOR 3.





FONTE: O autor (2021).

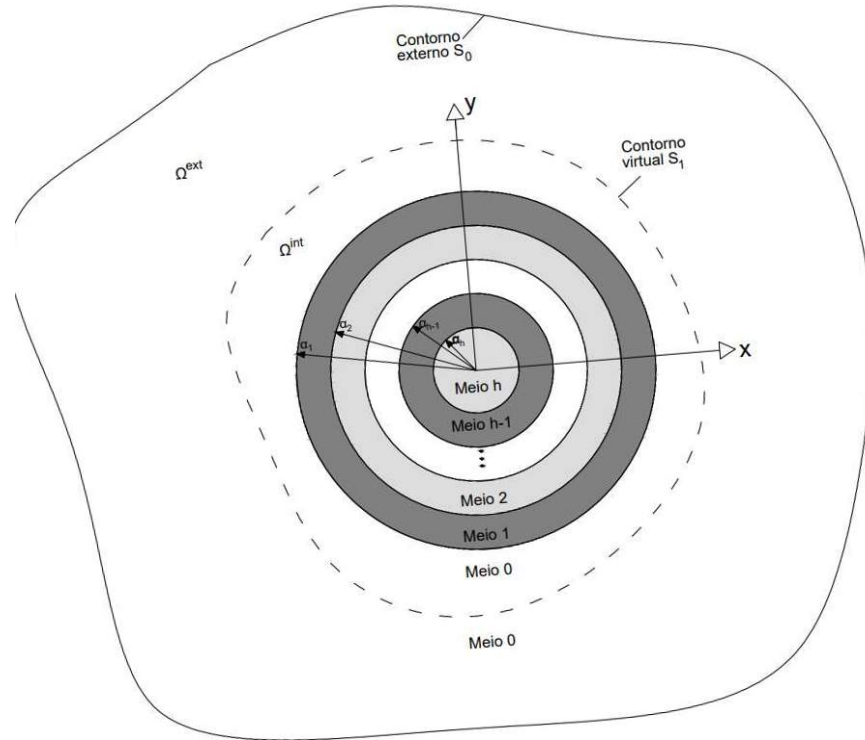
6.1.2 Condições iniciais diferentes de zero

Esta seção descreve a formulação proposta que associa o MEC e as soluções analíticas para obter o campo de calor bidimensional, na vizinhança de uma inclusão circular composta de multicamadas concêntricas, cercada por um meio sólido homogêneo finito sob condições iniciais diferentes de zero. Para validar a formulação, inicialmente simulou-se um problema comparando os resultados com a solução analítica para um meio homogêneo. Uma segunda verificação é feita utilizando a formulação do MEC clássico.

6.1.2.1 Formulação para uma inclusão

Para facilitar o entendimento, apresenta-se a formulação para apenas uma inclusão, mas a formulação proposta pode ser facilmente estendida para múltiplas inclusões. Esta inclusão consiste em $h - 1$ anéis (Meios = $1, 2, \dots, h - 1$) com raios a_1, a_2, \dots, a_{h-1} e um meio cilíndrico interno (Meio h) com raio a_h . A condutividade térmica, a densidade e o calor específico são k_v, ρ_v e c_v , respectivamente, para o meio v ($v = 0, 1, 2, \dots, h$) (FIGURA 10).

FIGURA 10 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA INCLUSÃO CIRCULAR DE MULTICAMADAS CONTORNADA POR UM MEIO SÓLIDO E FINITO (MEIO 0)



FONTE: O autor (2021).

Esse sistema está submetido a condições iniciais diferentes de zero para todo o domínio, representadas por T_0 . Considere o contorno virtual S_1 , localizado a uma distância arbitrária do contorno da inclusão. O domínio externo a S_1 é chamado de Ω^{ext} e o domínio heterogêneo no interior desse contorno é chamado de Ω^{int} . A equação integral de contorno ao longo do contorno S (com $S = S_0 + S_1$) no domínio exterior pode ser descrita por:

$$\begin{aligned} \tilde{c}\tilde{T}^{(ext)}(x_0, y_0, \omega) &= \int_S q^{(ext)}(x, y, \nu_n, \omega) G^{(ext)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds \\ &- \int_S H^{(ext)}(x, y, \nu_n, x_0, y_0, \omega) \tilde{T}^{(ext)}(x, y, \omega) ds \\ &+ \int_{\Omega^{ext}} \frac{T_0(x, y)}{K_0} G^{(ext)}(x, y, x_0, y_0, \omega) d\Omega^{ext} \end{aligned} \quad (163)$$

O fator \tilde{c} é uma constante definida pela geometria do contorno, valendo $\frac{1}{2}$ se o contorno for suave e $(x_0, y_0) \in S$. O sobrescrito (ext) corresponde ao domínio exterior de S , ν_n é a normal unitária ao longo do contorno, $K_0 = \frac{k_0}{\rho_0 c_0}$ representa a

difusividade térmica do meio 0, G e H são as soluções fundamentais para temperatura (\tilde{T}) e fluxo de calor (q) em (x, y) , respectivamente, devido a uma fonte de calor em (x_0, y_0) .

Ao longo do contorno S_1 , no domínio interior, é necessário adicionar a contribuição da inclusão na temperatura e fluxo de calor:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}^{(int)}(x_0, y_0, \omega) &= \int_{S_1} q^{(int)}(x, y, v_n, \omega) G^{(int)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds_1 & (164) \\
 &+ \int_{S_1} q^{(int)}(x, y, v_n, \omega) \tilde{G}^{(int)}(x, y, x_0, y_0, \omega) ds_1 \\
 &- \int_{S_1} H^{(int)}(x, y, v_n, x_0, y_0, \omega) \tilde{T}^{(int)}(x, y, \omega) ds_1 \\
 &- \int_{S_1} \tilde{H}^{(int)}(x, y, v_n, x_0, y_0, \omega) \tilde{T}^{(int)}(x, y, \omega) ds_1 \\
 &+ \int_{\Omega^{int}} \frac{T_0(x, y)}{K_0}(x, y) G^{(int)}(x, y, x_0, y_0, \omega) d\Omega^{int} \\
 &+ \int_{\Omega^{int}} \frac{T_0(x, y)}{K_0}(x, y) \tilde{G}^{(int)}(x, y, x_0, y_0, \omega) d\Omega^{int},
 \end{aligned}$$

onde o sobrescrito (int) corresponde ao domínio interior de S_1 . Gerados pela presença da inclusão, $\tilde{G}^{(int)}(x, y, x_0, y_0, \omega)$ e $\tilde{H}^{(int)}(x, y, v_n, x_0, y_0, \omega)$ representam a variação de temperaturas e fluxos de calor (x, y) e são computados analiticamente usando a equação (35) e sua derivada (36) (após os coeficientes Ar_n^0 serem definidos).

Para o cálculo das integrais (163) e (164), é necessário discretizar o domínio exterior Ω^{ext} e o domínio interior Ω^{int} em M_0 e M_1 células, respectivamente. O contorno externo S_0 e o contorno virtual S_1 também são discretizados em N_0 e N_1 elementos de contorno constantes, respectivamente. Para o propósito deste trabalho, o contorno foi discretizado em elementos de contorno constantes, com um ponto nodal no meio de cada elemento.

As equações assumem a seguinte forma, com p sendo um dos pontos nodais de S_0 e k de S_1 , onde a fonte unitária está agindo. Ao longo do contorno S no domínio exterior, tem-se:

$$\begin{aligned}
& c_p T^{(int)}(x_p, y_p, \omega) + c_k T^{(int)}(x_k, y_k, \omega) = \tag{165} \\
& + \sum_{g=1}^{N_0} \int_{S_g} q^{(ext)}(x_g, y_g, v_g, \omega) G^{(ext)}(x_g, y_g, x_k, y_k, \omega) dS_g \\
& + \sum_{l=1}^{N_1} \int_{S_l} q^{(ext)}(x_l, y_l, v_l, \omega) G^{(ext)}(x_l, y_l, x_p, y_p, \omega) dS_l \\
& + \sum_{l=1}^{N_1} \int_{S_l} q^{(ext)}(x_l, y_l, v_l, \omega) G^{(ext)}(x_l, y_l, x_k, y_k, \omega) dS_l \\
& - \sum_{g=1}^{N_0} \int_{S_g} H^{(ext)}(x_g, y_g, v_g, x_p, y_p, \omega) T^{(ext)}(x_g, y_g, \omega) dS_g \\
& - \sum_{g=1}^{N_0} \int_{S_g} H^{(ext)}(x_g, y_g, v_g, x_k, y_k, \omega) T^{(ext)}(x_g, y_g, \omega) dS_g \\
& - \sum_{l=1}^{N_1} \int_{S_l} H^{(ext)}(x_l, y_l, v_l, x_p, y_p, \omega) T^{(ext)}(x_l, y_l, \omega) dS_l \\
& - \sum_{l=1}^{N_1} \int_{S_l} H^{(ext)}(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, \omega) T^{(ext)}(x_l, y_l, \omega) dS_l \\
& + \sum_{n=1}^{M_0} \int_{\Omega_n^{ext}} \frac{T_0}{K_0} G^{(ext)}(x_n, y_n, x_p, y_p, \omega) d\Omega_n \\
& + \sum_{n=1}^{M_0} \int_{\Omega_n^{ext}} \frac{T_0}{K_0} G^{(ext)}(x_n, y_n, x_k, y_k, \omega) d\Omega_n
\end{aligned}$$

no qual g é o índice associado ao nó do contorno sendo integrado ao longo de S_0 e l ao longo do contorno S_1 . S_g e S_l são os contornos dos elementos g e l , respectivamente. A equação integral discretizada ao longo de S_1 no domínio interior fica:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}_k T^{(int)}(x_0, y_0, \omega) \\
&= \sum_{l=1}^{N_1} \int_{S_l} q^{(int)}(x_l, y_l, \nu_l, \omega) G^{(int)}(x_l, y_l, x_k, y_k, \omega) d_{S_l} \\
&+ \sum_{l=1}^{N_1} \int_{S_l} q^{(int)}(x_l, y_l, \nu_l, \omega) \tilde{G}^{(int)}(x_l, y_l, x_k, y_k, \omega) d_{S_l} \\
&- \sum_{l=1}^{N_1} \int_{S_l} H^{(int)}(x_l, y_l, \nu_l, x_k, y_k, \omega) \tilde{T}^{(int)}(x_l, y_l, \omega) d_{S_l} \\
&- \sum_{l=1}^{N_1} \int_{S_l} \tilde{H}^{(int)}(x_l, y_l, \nu_l, x_k, y_k, \omega) \tilde{T}^{(int)}(x_l, y_l, \omega) d_{S_l} \\
&+ \sum_{m=1}^{M_1} \int_{\Omega_m^{ext}} \frac{T_0}{K_v} G^{(int)}(x_m, y_m, x_k, y_k, \omega) d\Omega_m \\
&+ \sum_{m=1}^{M_1} \int_{\Omega_m^{ext}} \frac{T_0}{K_v} \tilde{G}^{(int)}(x_m, y_m, x_k, y_k, \omega) d\Omega_m
\end{aligned} \tag{166}$$

onde $K_v = \frac{k_v}{\rho_v c_v}$ é a difusividade térmica do meio v ao qual a célula sendo integrada pertence.

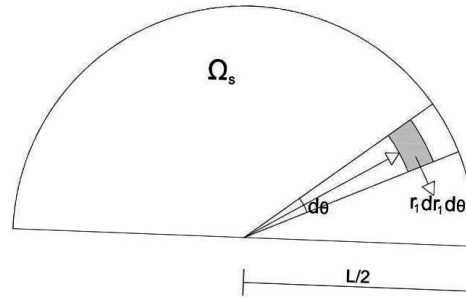
As integrais de contorno ao longo dos elementos são avaliadas com quadratura gaussiana quando o elemento a ser integrado não é o elemento carregado. Para esse trabalho foram usados 8 pontos de Gauss. Quando se integra o elemento carregado, a existência da singularidade é resolvida de forma analítica pela equação (127).

Para as integrais de domínio, um semicírculo é definido, Ω_s , na vizinhança do elemento carregado, com o centro coincidindo com a localização do carregamento virtual e de raio com valor igual à metade do comprimento do elemento, como ilustrado na FIGURA 11. Essa integral é avaliada analiticamente, onde [37]:

$$\int_{\Omega_s} H_0(k_{\alpha_v} r_1) d\Omega_s = \int_0^{\frac{L}{2}} \int_0^{\pi} H_0(k_{\alpha_v} r_1) r_1 dr_1 d\theta = \frac{\pi L}{2k_{\alpha_v}} \left[H_1 \left(k_{\alpha_v} \frac{L}{2} \right) \right] - \frac{2i}{k_{\alpha_v}^2} \tag{167}$$

Para as células restantes, as integrações são realizadas usando o esquema de quadratura gaussiana usando um número fixo de 4 pontos de Gauss em ambas as direções.

FIGURA 11 – ESQUEMA DE INTEGRAÇÃO



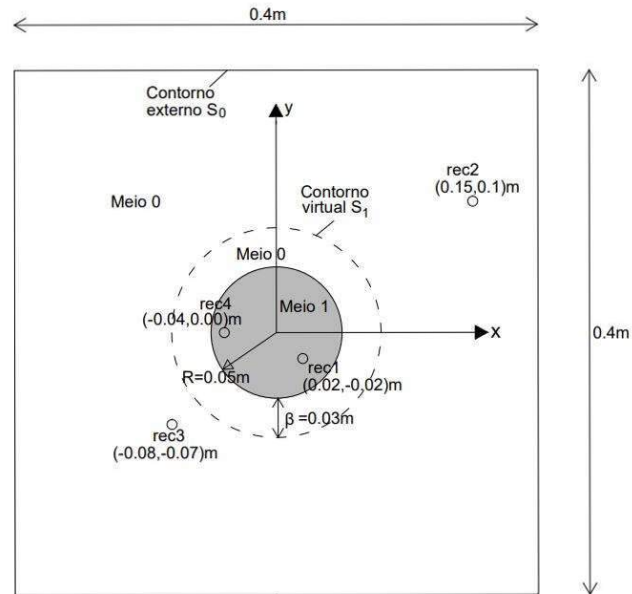
FONTE: O autor (2021).

As equações integrais finais (165) e (166) são combinadas impondo a continuidade de temperaturas e fluxos de calor ao longo do contorno virtual S_1 , de modo a estabelecer o sistema linear de $[(N_0+2N_1) \times (2N_0+2N_1)]$. Uma vez resolvido esse sistema, os valores nodais de temperatura e fluxo de calor são obtidos permitindo, assim, computar o campo de calor em qualquer ponto do domínio.

6.1.2.2 Verificação da formulação para uma inclusão

Para validar a formulação, simulou-se um problema com uma inclusão circular (Meio 1) com raio 0,05m e centralizada em (0,0m, 0,0m), inserida em um sólido homogêneo finito (Meio 0) com geometria quadrada $-m < y < m$, $-n < x < n$ ($m = n = 0,2\text{m}$) (FIGURA 12). As propriedades do material do meio 0 são: $\rho_0 = 780,0\text{kg.m}^{-3}$, $k_0 = 15,72\text{W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$, $c_0 = 860,0\text{J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$ e então $K_0 = \frac{k_0}{\rho_0 c_0} = 2,34 \times 10^{-5} \text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

FIGURA 12 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA INCLUSÃO COMPOSTA DE UM MEIO 1, INSERIDA EM UM MEIO FINITO E UNIFORME (MEIO 0)

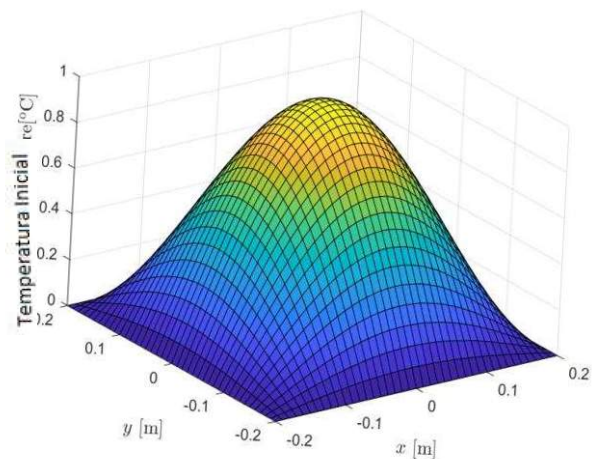


FONTE: O autor (2021).

Foi prescrito para o problema continuidade de temperatura e fluxo de calor na interface virtual entre o meio homogêneo exterior e o subdomínio heterogêneo, temperaturas nulas no contorno do domínio quadrado e uma distribuição de temperatura não nula dentro do domínio (ilustrado na FIGURA 13) descrita pela equação:

$$T_0(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2n}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{2m}y\right). \quad (168)$$

FIGURA 13 – DISTRIBUIÇÃO INICIAL DE TEMPERATURA



FONTE: O autor (2021).

O domínio foi dividido em: 158 células no domínio exterior e 75 no interior. O contorno do retângulo foi discretizado em 56 elementos de contorno constantes e 20 elementos foram usados para o contorno virtual localizado a 0,03m da inclusão. As respostas foram computadas em uma faixa de frequência $[0,0\text{Hz}, 512,0 \times 10^{-3}\text{Hz}]$, utilizando um incremento de frequência $\Delta\omega = 25 \times 10^{-5}\text{Hz}$, que permite a obtenção de uma resposta no tempo até $T=4000\text{s}$.

O algoritmo proposto é verificado usando duas soluções de referência, a primeira delas sendo a solução analítica conhecida para um meio homogêneo e a segunda sendo a solução de um problema utilizando apenas o MEC clássico, com o domínio interno e externo possuindo propriedades diferentes.

Meio Homogêneo

Na primeira verificação, foram adotadas as mesmas propriedades para o meio exterior e interior ($\rho_0 = \rho_1$, $k_0 = k_1$, $c_0 = c_1$ and $K_0 = K_1$). A distribuição de temperatura foi comparada com a solução analítica conhecida no domínio da frequência [37]:

$$T(x, y, \omega) = \frac{T_0(x, y)}{K \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) \right] + i\omega}. \quad (169)$$

A solução no domínio do tempo para equação(169):

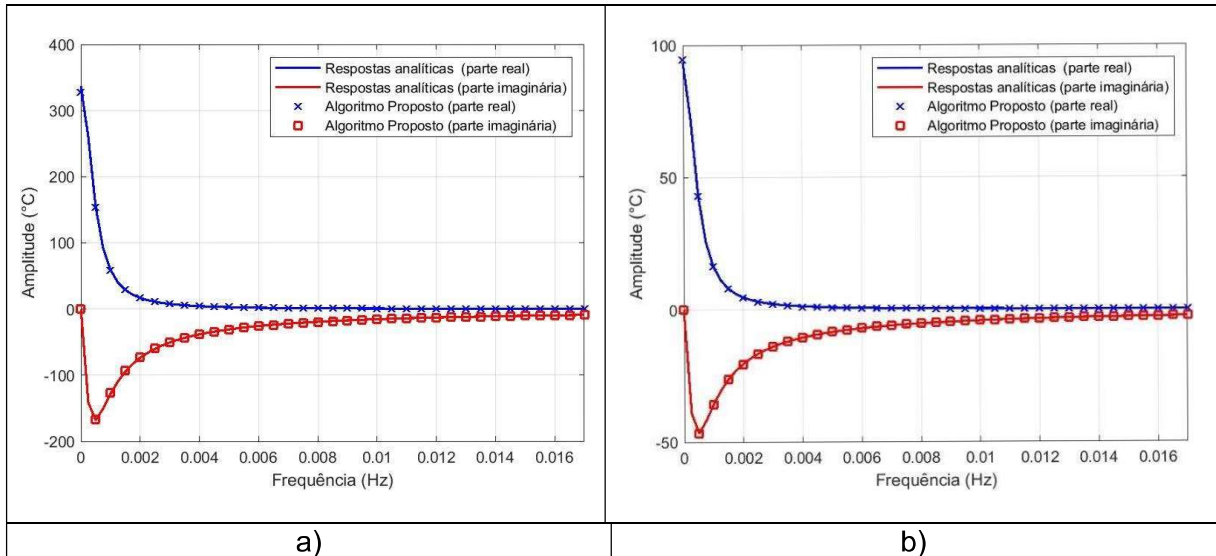
$$T(x, y, t) = T_0(x, y) e^{-K \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) \right] t}. \quad (170)$$

Os resultados numéricos na frequência, dados pela formulação proposta, foram comparados com a solução dada pela equação (169). A FIGURA 14 apresenta os resultados, na frequência, computados em dois receptores localizados no sistema [receptor 1 (0,02m, -0,02m) e receptor 2 (0,15m, 0,10m)]. As soluções apresentaram boa concordância entre si.

A aplicação de uma transformada inversa de Fourier no domínio da frequência permite obter as soluções no tempo. A FIGURA 15 apresenta as respostas no domínio

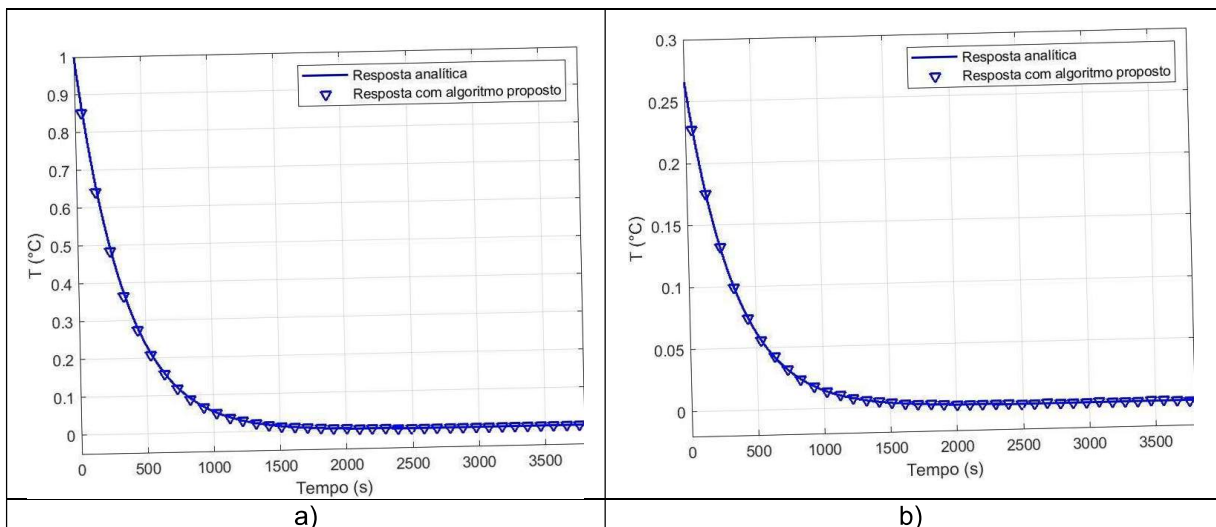
do tempo nos receptores 1 e 2 obtidas usando a formulação proposta neste trabalho. A linha contínua traz a solução dada pela equação (170) e as marcas identificam a resposta dada pela formulação proposta.

FIGURA 14 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS VERSUS SOLUÇÕES DO CÓDIGO COM ACOPLAMENTO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA (PARTE REAL EM AZUL; PARTE IMAGINÁRIA EM VERMELHO; RESPOSTAS ANALÍTICAS EM LINHAS CONTÍNUAS; RESULTADOS DO ACOPLAMENTO EM LINHAS MARCADAS): a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 15 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS VERSUS SOLUÇÕES DO CÓDIGO COM ACOPLAMENTO NO DOMÍNIO DO TEMPO (RESPOSTAS ANALÍTICAS EM LINHAS CONTÍNUAS; RESULTADOS DO ACOPLAMENTO EM LINHAS MARCADAS): a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2.



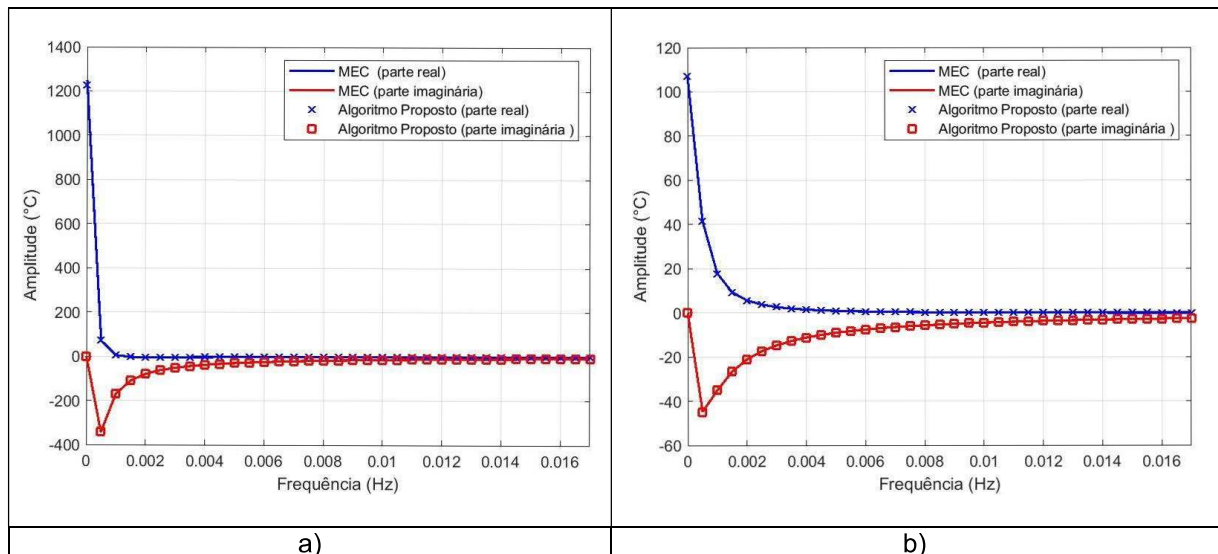
FONTE: O autor (2021).

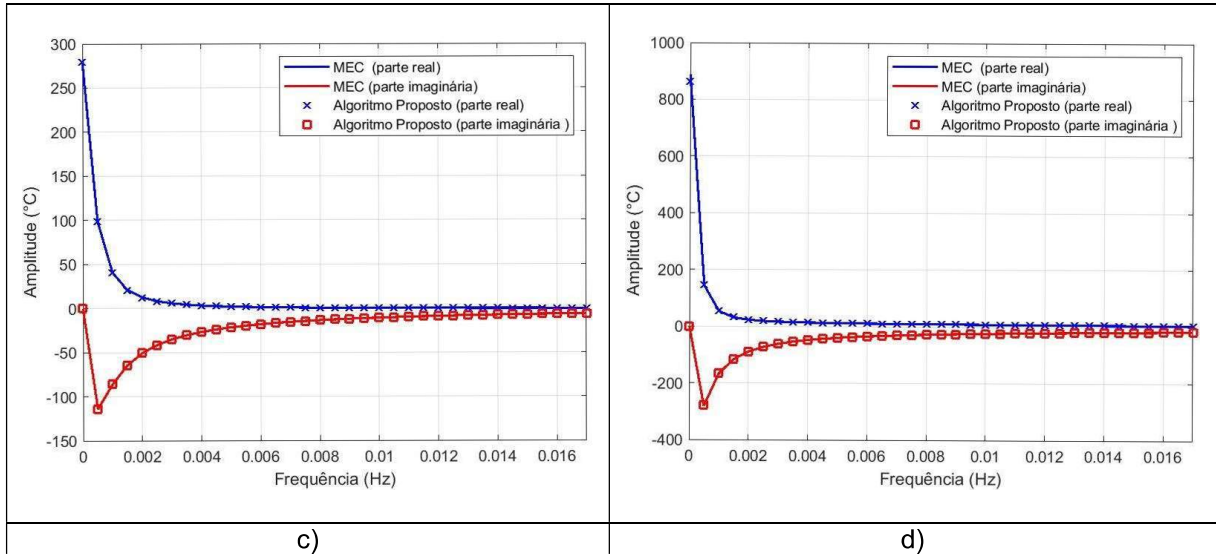
Inclusão circular incorporada em um meio homogêneo

As propriedades do material da inclusão (meio 1) são: $\rho_1 = 780,0\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $k_1 = 0,72\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{°C}^{-1}$, $c_1 = 1860,0\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{°C}^{-1}$ e então $K_1 = \frac{k_1}{\rho_1 c_1} = 4,96 \times 10^{-7} \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. As respostas foram computadas em quatro receptores localizados no sistema [receptor 1 (0,02m, -0,02m), receptor 2 (0,15m, 0,10m), receptor 3 (-0,08m, -0,07m) e receptor 4(-0,04m, 0,0m)].

Como nenhuma solução analítica é conhecida, o MEC clássico é utilizado como referência sendo todo o domínio dividido em 196 células no exterior da inclusão e 37 no interior. O contorno do quadrado e da inclusão foram discretizados em 56 e 22 elementos de contorno constantes, respectivamente. A FIGURA 16 apresenta os resultados para as partes reais (linhas azuis) e imaginárias (linhas vermelhas). O MEC (solução de referência) e as soluções com o acoplamento dos métodos são representadas por linhas contínuas e marcadas, respectivamente. Todos os gráficos mostram uma concordância muito boa entre as soluções.

FIGURA 16 – RESPOSTA NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA USANDO O ALGORITMO COM O MEC CLÁSSICO *VERSUS* ALGORITMO COM A FORMULAÇÃO PROPOSTA (PARTE REAL EM AZUL; PARTE IMAGINÁRIA EM VERMELHO; RESPOSTAS COM O MEC EM LINHAS CONTÍNUAS; RESULTADOS DO ACOPLAMENTO EM LINHAS MARCADAS): a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2; c) RESPOSTAS NO RECEPTOR 3; D) RESPOSTAS NO RECEPTOR 4.





FONTE: O autor (2021).

6.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E CONVECÇÃO

Nesta seção apresenta-se as formulações que consideram o fenômeno de condução e convecção em simultâneo para o caso 2,5D. Para a convecção considerou-se uma velocidade radial desde o eixo do sistema.

6.2.1.1 Fonte de calor e condições iniciais iguais a zero

A formulação considera uma inclusão submetida a uma fonte de calor e condições iniciais iguais a zero e o algoritmo é verificado comparando os resultados que ele fornece com aqueles calculados usando o modelo analítico.

6.2.1.2 Formulação para uma inclusão

Nesta subseção, a estratégia para acoplar o MEC com as soluções analíticas, para a formulação com condução e convecção, é apresentada. Considere um meio homogêneo infinito envolvendo uma inclusão circular cilíndrica composta de $h - 1$ anéis circulares (Meios = 1, 2... $h - 1$) com raios a_1, a_2, \dots, a_{h-1} e um disco interno (Meio h) com raio a_h e com uma seção transversal constante ao longo da direção z . Considere uma condutividade térmica k_v , uma densidade ρ_v e um calor específico c_v para o meio v ($v = 0, 1, 2 \dots h$). Este sistema (ilustrado na FIGURA 3) está sujeito à transferência de calor gerada pela ação de uma fonte de calor no domínio exterior, representada por \tilde{T}_{inc} e, também, este sistema pode ser submetido ao efeito de convecção radial permitindo uma velocidade de convecção V^v radial relacionada ao

meio v . Se definirmos um contorno virtual S' , localizado a uma distância β (qualquer distância) da inclusão, a equação integral de contorno ao longo do contorno S' no domínio exterior, pode ser descrita por:

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}\tilde{T}^{(a)}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) & (171) \\
& = \int_{S'} q^{(a)}(x, y, v_n, k_{zm}, \omega) G^{(a)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) ds' \\
& - \int_{S'} H^{(a)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \tilde{T}^{(a)}(x, y, k_{zm}, \omega) ds' \\
& - \frac{1}{K} \int_{S'} G^{(a)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \tilde{T}^{(a)}(x, y, k_{zm}, \omega) V_n^{(a)} ds' \\
& + \tilde{T}_{inc}^{(a)}(x_s, y_s, x_0, y_0, k_{zm}, \omega).
\end{aligned}$$

Esta equação de contorno integral incorpora um termo relacionado ao fenômeno de convecção: $V_n = V_x n_x + V_y n_y$ onde n_x e n_y são os vetores unitários nas direções x e y respectivamente, e foi considerada uma velocidade nula ao longo da direção z ($V_z = 0,0\text{m/s}$). G e H são, respectivamente, as soluções fundamentais para a temperatura (\tilde{T}) e o fluxo (q) de calor em (x, y) , devido a uma fonte de calor unitária em (x_0, y_0) agora para o problema de condução e convecção. Observe que esta formulação assume condições iniciais de temperaturas nulas no domínio. É necessário adicionar a contribuição da inclusão no campo de temperatura e fluxo de calor ao longo do lado interno do contorno virtual S' :

$$\begin{aligned}
& \tilde{c}\tilde{T}^{(b)}(x_0, y_0, k_{zm}, \omega) & (172) \\
& = \int_{S'} q^{(b)}(x, y, v_n, \omega, k_{zm}) G^{(b)}(x, y, x_0, y_0, \omega, k_{zm}) ds' \\
& + \int_{S'} q^{(b)}(x, y, v_n, \omega, k_{zm}) \tilde{G}^{(b)}(x, y, x_0, y_0, \omega, k_{zm}) ds' \\
& - \int_{S'} H^{(b)}(x, y, v_n, x_0, y_0, \omega, k_{zm}) \tilde{T}^{(b)}(x, y, \omega, k_{zm}) ds' \\
& - \int_{S'} \tilde{H}^{(b)}(x, y, v_n, x_0, y_0, \omega, k_{zm}) \tilde{T}^{(b)}(x, y, \omega, k_{zm}) ds' \\
& - \frac{1}{K} \int_{S'} G^{(b)}(x, y, x_0, y_0, \omega) \tilde{T}^{(b)}(x, y, \omega, k_{zm}) V_n^{(b)} ds' \\
& - \frac{1}{K} \int_{S'} \tilde{G}^{(b)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega) \tilde{T}^{(b)}(x, y, k_{zm}, \omega) V_n^{(b)} ds',
\end{aligned}$$

onde $\tilde{G}^{(b)}(x, y, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$ e $\tilde{H}^{(b)}(x, y, v_n, x_0, y_0, k_{zm}, \omega)$ representam a variação na temperatura e fluxo em (x, y) , respectivamente, e são computados analiticamente usando a equação (72) e sua derivada (73) (depois dos coeficientes desconhecidos, Ar_n^0 , terem sido definidos).

Para resolver as equações (171) e (172), o contorno virtual necessita ser discretizado em N elementos de contorno constantes, com um ponto nodal no meio de cada elemento. Essas equações levam a seguinte forma, com k sendo um dos nós do contorno de S' , onde a fonte unitária está agindo. Ao longo do contorno S' no domínio externo:

$$\tilde{c}_k \tilde{T}^{(a)k} = \sum_{l=1}^N q^{(a)l} G^{(a)kl} - \sum_{l=1}^N \tilde{T}^{(a)l} H^{(a)kl} - \frac{1}{K} \sum_{l=1}^N G^{(a)kl} \tilde{T}^{(a)l} V_n^{(a)} + \tilde{T}_{inc}^k \quad (173)$$

A equação integral discretizada ao longo do contorno S' no domínio interior:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k \tilde{T}^{(b)k} &= \sum_{l=1}^N q^{(b)l} G^{(b)kl} + \sum_{l=1}^N q^{(b)l} \tilde{G}^{(b)kl} - \sum_{l=1}^N \tilde{T}^{(b)l} H^{(b)kl} \\ &- \sum_{l=1}^N \tilde{T}^{(b)l} \tilde{H}^{(b)kl} - \frac{1}{K} \sum_{l=1}^N G^{(b)kl} \tilde{T}^{(b)l} V_n^{(b)} - \frac{1}{K} \sum_{l=1}^N \tilde{G}^{(b)kl} \tilde{T}^{(b)l} V_n^{(b)}, \end{aligned} \quad (174)$$

As funções de Green 2,5D necessárias, relacionadas à temperatura e ao fluxo de calor em coordenadas cartesianas em um meio infinito em (x_l, y_l) , devido a uma fonte de calor em (x_k, y_k) , são dadas por:

$$G(x_l, y_l, x_k, y_k, k_z, \omega) = \frac{-i}{4k_0} e^{\frac{v_0 r}{2K_0}} H_0(k_{\alpha_0} r_1), \quad (175)$$

$$\begin{aligned} H(x_l, y_l, v_l, x_k, y_k, k_z, \omega) &= \frac{-i}{4} e^{\frac{v_0 r}{2K_0}} \left[\frac{V^0}{2K_0} \left(\frac{\partial r}{\partial v_l} \right) H_0(k_{\alpha_0} r_1) \right. \\ &\left. - k_{\alpha_0} H_1(k_{\alpha_0} r_1) \left(\frac{\partial r_1}{\partial v_l} \right) \right], \end{aligned} \quad (176)$$

onde $r_1 = \sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}$.

As integrações de contorno são avaliadas usando quadratura gaussiana, com 8 pontos de Gauss, quando o elemento a ser integrado não é o elemento carregado.

Para o elemento carregado, os integrantes singulares existentes são calculados de forma analítica (ver equação (127)).

O sistema final é estabelecido após a imposição da continuidade de temperaturas e fluxos de calor ao longo do contorno virtual. A resolução desse sistema fornece as amplitudes da temperatura e dos fluxos de calor nos pontos nodais, o que permite que o campo de calor seja calculado em qualquer ponto nos domínios externo ou interno.

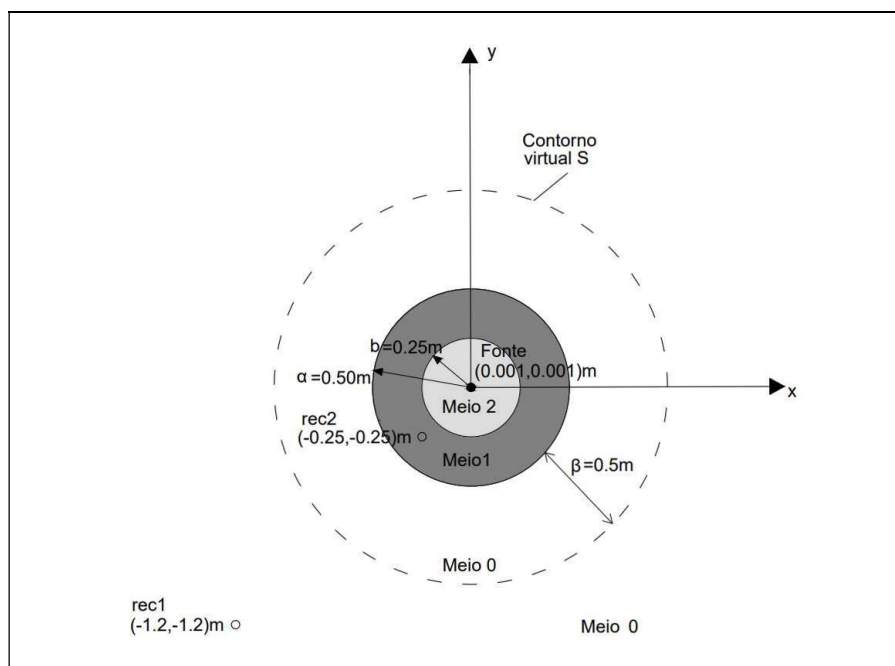
6.2.1.2 Verificação da formulação para uma inclusão

Nesta subsecção, o algoritmo apresentado é verificado comparando os resultados que ele fornece com aqueles calculados usando o modelo analítico. Considera-se uma inclusão composta por um núcleo circular cilíndrico interno (Meio 2), por um anel circular cilíndrico (Meio 1), embutidos em um espaço uniforme ilimitado (Meio 0). Os raios externo e interno são $a = 0,5\text{m}$ e $b = 0,25\text{m}$, respectivamente. Este sistema (ilustrado na FIGURA 17) é submetido a uma fonte de calor linear com uma variação espacial sinusoidal. Continuidade de temperaturas e fluxos de calor são prescritos em todas as interfaces. As respostas foram calculadas para frequências complexas $\omega_c = \omega - i\eta$ (com $\eta = 0,7\Delta\omega$ e $\Delta\omega = 1 \times 10^{-7}\text{Hz}$). O cálculo da temperatura foi realizado para uma faixa de frequência $[0,0\text{ Hz}, 64,0 \times 10^{-7}\text{Hz}]$.

Para o Meio 0 e 2, as seguintes propriedades do material térmico e velocidade de convecção são atribuídas: $\rho_0 = \rho_3 = 850,0\text{kg.m}^{-3}$, $k_0 = k_2 = 150,72\text{W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$, $c_0 = c_2 = 1560,0\text{J.Kk.°C}^{-1}$, $V^0 = V^2 = 4,0 \times 10^{-6}\text{m.s}^{-1}$; para o Meio 1: $\rho_1 = 1860,0\text{Kg.m}^{-3}$, $k_1 = 0,72\text{W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$, $c_1 = 780,0\text{J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$ e $V^1 = 2,0 \times 10^{-6}\text{m.s}^{-1}$. São admitidas velocidades radiais com origem em $(0,0\text{m}, 0,0\text{m})$.

As respostas foram calculadas analiticamente e usando a formulação proposta. A precisão da formulação foi testada calculando a resposta em dois receptores localizados no sistema [rec. 1 $(-1,2\text{m}, -1,2\text{m})$, rec. 2 $(-0,25\text{m}, -0,25\text{m})$] para $k_z = 0,0\text{rad.m}^{-1}$ e $k_z = 0,5\text{rad.m}^{-1}$. As FIGURAS 18a e 18b mostram as respostas analíticas (linhas sólidas) e numéricas (marcas) para as partes reais e imaginárias nos receptores 1 e 2, respectivamente. Pode-se concluir que a concordância entre as duas soluções é muito boa. 20 e 50 elementos de contorno constantes são usados para modelar um contorno virtual colocado a $0,5\text{m}$ a partir da inclusão.

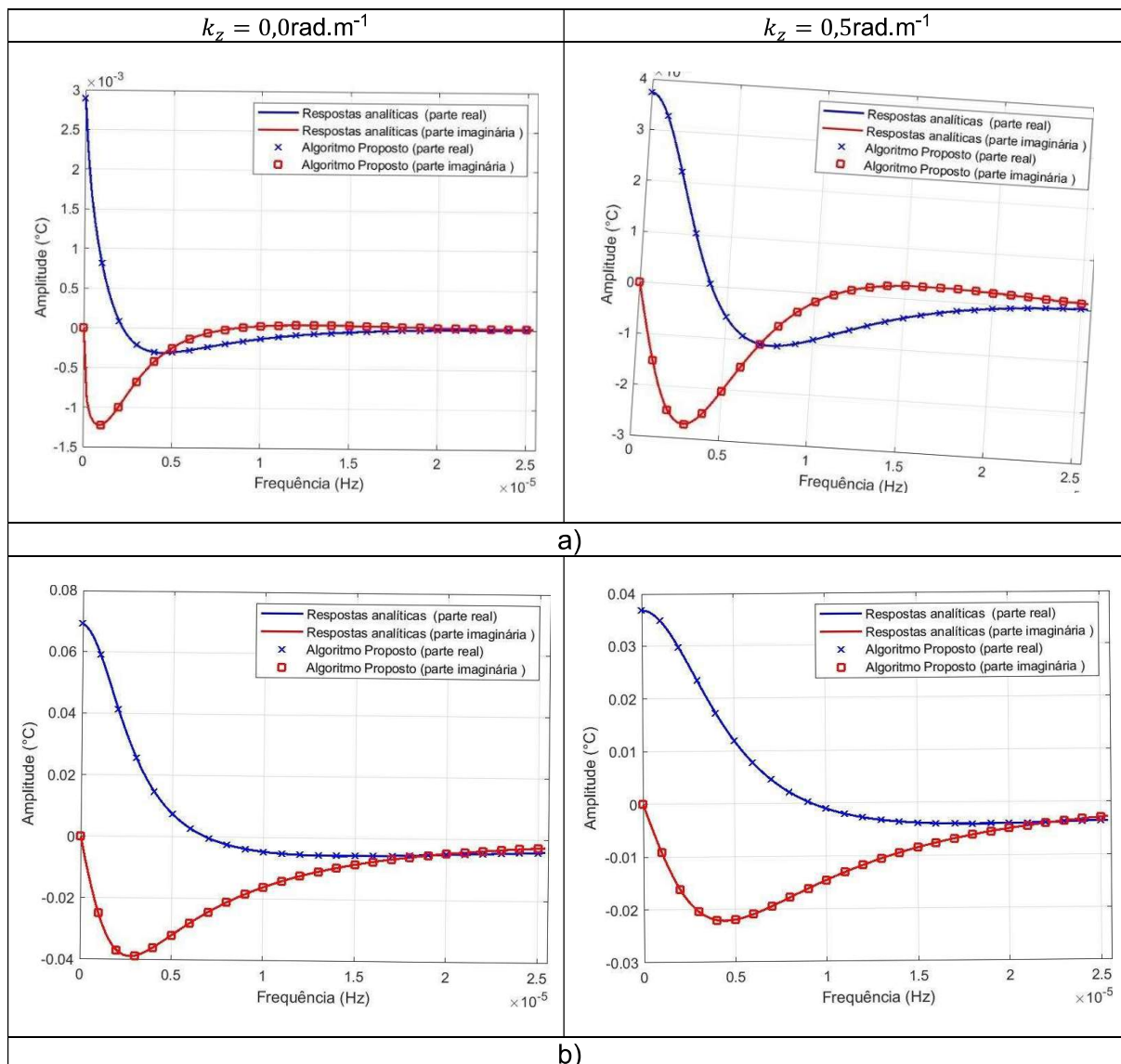
FIGURA 17 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA SEÇÃO DE UM CILINDRO COM DUAS CAMADAS SUJEITO A UMA FONTE DE CALOR.



FONTE: O autor (2021).

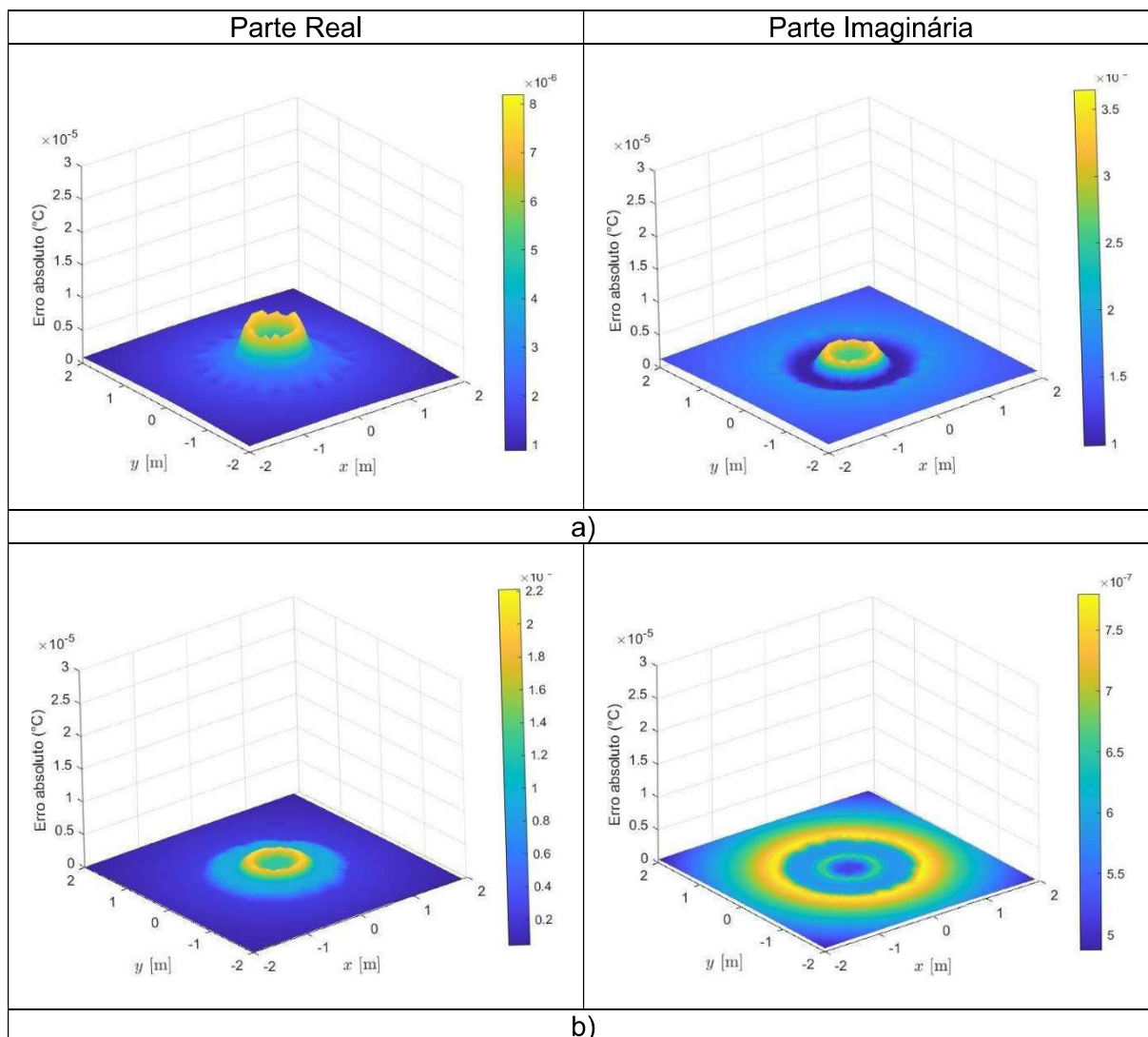
Para verificar e estudar a precisão do modelo proposto, o campo de temperatura foi calculado sobre uma grade de receptores para uma frequência de $5,0 \times 10^{-7}$ Hz. Uma análise comparativa do erro entre a técnica de acoplamento para 20 e 40 elementos de contorno e a solução analítica é apresentada na FIGURA 19. Como esperado, o erro absoluto é menor quanto maior o número de elementos de fronteira usados para modelar a interface virtual.

FIGURA 18 – RESPOSTAS ANALÍTICAS VERSUS RESPOSTAS DO ALGORITMO PROPOSTO (PARTE REAL EM AZUL; IMAGINÁRIA EM VERMELHO; RESULTADOS ANALÍTICOS EM LINHA CONTÍNUA; RESULTADOS DO CÓDIGO PROPOSTO EM LINHAS MARCADAS PARA $k_z = 0,0 \text{ rad. m}^{-1}$ E $k_z = 0,5 \text{ rad. m}^{-1}$: a) RESPOSTAS NO RECEPTOR 1; b) RESPOSTAS NO RECEPTOR 2.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 19 – VERIFICAÇÃO DA ACURÁCIA DO CÓDIGO PROPOSTO PARA A FREQUÊNCIA DE $5,0 \times 10^{-7}$ Hz (PARTE REAL E PARTE IMAGINÁRIA) COM DIFERENTES NÚMEROS DE ELEMENTOS DE CONTOURNO: a) ERRO ABSOLUTO COM 20 ELEMENTOS DE CONTOURNO; b) ERRO ABSOLUTO COM 40 ELEMENTOS DE CONTOURNO.



FONTE: O autor (2021).

6.3 RESPOSTA NO DOMÍNIO DO TEMPO

As formulações utilizadas neste trabalho são centradas no domínio da frequência, porém, pode ser também interessante a interpretação física dos fenômenos de propagação de calor no domínio do tempo por ser mais intuitiva. As respostas no tempo podem ser obtidas por meio de uma transformada Inversa de Fourier após a obtenção dos resultados no domínio da frequência com um intervalo fixo de $\Delta\omega$. O valor adotado para esse incremento de frequência ($\Delta\omega$) define a duração total máxima para análise no domínio do tempo, dada por $T = 2\pi/(\Delta\omega)$. Esse valor de

T pode não ser suficiente para representar a resposta dinâmica na sua totalidade. Nestas condições, a resposta correspondente a tempos superiores a T reaparece no início do eixo do tempo (fenômeno de “aliasing”). Sendo assim, torna-se necessário definir estratégias que permitam lidar com esse problema. Um exemplo, seria a diminuição do incremento de frequência para valores compatíveis com a duração esperada para o fenômeno. No entanto, alguns casos requerem intervalos $\Delta\omega$ muito pequenos levando a custos computacionais elevados.

Uma outra estratégia interessante adotada neste trabalho, é o uso de frequências complexas com uma pequena parte imaginária na forma $\omega_c = \omega - i\eta$ (com $\eta = 0,7\Delta\omega$ sendo $\Delta\omega$ o incremento na frequência), que permite evitar o efeito de “aliasing” e ainda permite o cálculo da resposta estacionária quando a frequência é 0,0Hz, já que esse procedimento leva a argumentos na função Hankel diferentes de zero. No domínio do tempo, seu efeito é removido ao redimensionar a resposta usando a expressão $e^{\eta t}$. Enfatiza-se também, que a utilização de frequências complexas atenua a contribuição de fontes de calor mais afastadas, permitindo que o cálculo das respostas seja feito com um menor número de fontes virtuais.

A variação temporal da energia emitida pela fonte pode ser facilmente arbitrada e a resposta no domínio da frequência é obtida por aplicação de uma transformada de Fourier no domínio do tempo. A resposta no domínio da frequência pode variar de 0,0Hz a uma determinada gama de frequências. Uma característica intrínseca aos problemas de transferência de calor é que as respostas decaem muito rapidamente com o aumento da frequência, o que permite limitar a frequência superior onde a solução é necessária.

7 APLICAÇÕES

Neste capítulo, inicialmente, exemplos de aplicações são apresentados para os casos de condução com uma fonte de calor e domínio externo infinito, com condições iniciais iguais a zero, onde foi adotada uma abordagem em 2,5D. Para o caso de condução, apresentam-se também, exemplos de problemas bidimensionais para inclusões em um domínio finito com condições iniciais diferentes de zero e posteriormente, exemplos com a formulação que envolve condução e convecção em simultâneo, para uma fonte de calor com condições iniciais iguais a zero.

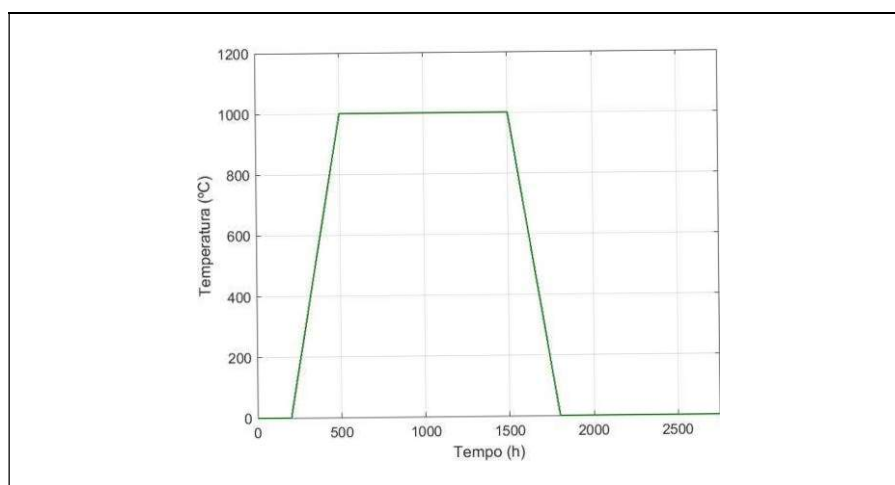
7.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO

A aplicabilidade da técnica proposta com a formulação de condução é ilustrada nesta seção.

7.1.1 Fonte de calor e condições iniciais iguais a zero

A técnica proposta foi simulada considerando um meio 0 infinito com propriedades térmicas conhecidas ($\rho_0 = 880\text{kg.m}^{-3}$, $k_0 = 1,4\text{W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$, $c_0 = 2300\text{J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}$ e $K_0 = \frac{k_0}{\rho_0 c_0} = 6,92 \times 10^{-7}\text{m}^2.\text{s}^{-1}$). O primeiro exemplo é simulado na presença de duas inclusões, enquanto no segundo são consideradas quatro. Todas as inclusões possuem raio 0,6m e possuem propriedades variando na direção radial. Uma fonte de calor em um ponto O, posicionada no plano $z = 0,0\text{m}$, cria um campo de calor esférico que se espalha desde o ponto O para todas as três direções. Essa fonte, gera um aumento de temperatura linear de 0,0°C até 1000°C, com t variando de $t=200\text{h}$ até $t=500\text{h}$. Em seguida, é mantida a uma temperatura de 1000°C por 1000h e logo a passa a diminuir linearmente até ser nula em $t=1800\text{h}$, conforme apresentado na FIGURA 20.

FIGURA 20 – EVOLUÇÃO TEMPORAL DA FONTE DE CALOR.



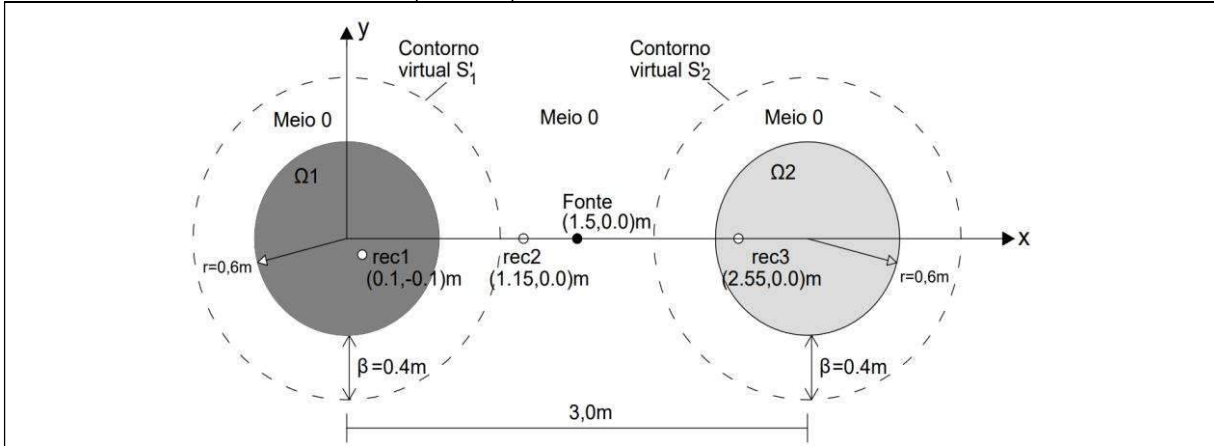
FONTE: O autor (2021).

Os cálculos foram realizados na faixa de frequência $[0,0 \text{ Hz} , 64,0 \times 10^{-7} \text{ Hz}]$, com um incremento de frequência de $\Delta\omega = 1 \times 1.0^{-7} \text{ Hz}$, que determina um tempo de duração total de $T=2778\text{h}$ para a análise no domínio do tempo. Frequências complexas foram usadas com uma pequena parte imaginária da forma $\omega_c = \omega - i\eta$ com $\eta = 0,7\Delta\omega$. A distância entre as fontes virtuais consideradas na análise foi de $L=32\text{m}$ e ambos os contornos virtuais foram modelados com 20 elementos de contorno. Para representar essa variação na direção radial, cada inclusão foi subdividida em 50 camadas concêntricas. As respostas no tempo foram obtidas por meio de uma transformada Inversa de Fourier.

Duas Inclusões

Duas inclusões cilíndricas, Ω_1 e Ω_2 , localizadas no meio 0, são ilustradas na FIGURA 21. Para esse exemplo, a fonte de calor foi posicionada em $(1,15\text{m}, 0,0\text{m})$.

FIGURA 21 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA SEÇÃO DE DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS COM VÁRIAS CAMADAS. ESSAS INCLUSÕES SÃO DELIMITADAS POR UM SÓLIDO UNIFORME (MEIO 0) E SUBMETIDAS A UMA FONTE DE CALOR.



FONTE: O autor (2021).

Para Ω_1 , foi considerada uma densidade constante de $\rho_1 = 600 \text{kg.m}^{-3}$, uma variação na direção radial da condutividade térmica k_1 em uma faixa $[150 \text{W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}, 112,65 \text{W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}]$ e do calor específico c_1 $[6500 \text{J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}, 6314,28 \text{J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}]$, trazendo uma difusividade térmica K_1 em uma faixa $[3,84 \times 10^{-5} \text{m}^2.\text{s}^{-1}, 2,95 \times 10^{-5} \text{m}^2.\text{s}^{-1}]$. As propriedades k_1 e c_1 seguem as seguintes equações:

$$k_1 = 150 \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{10} \right), \quad (177)$$

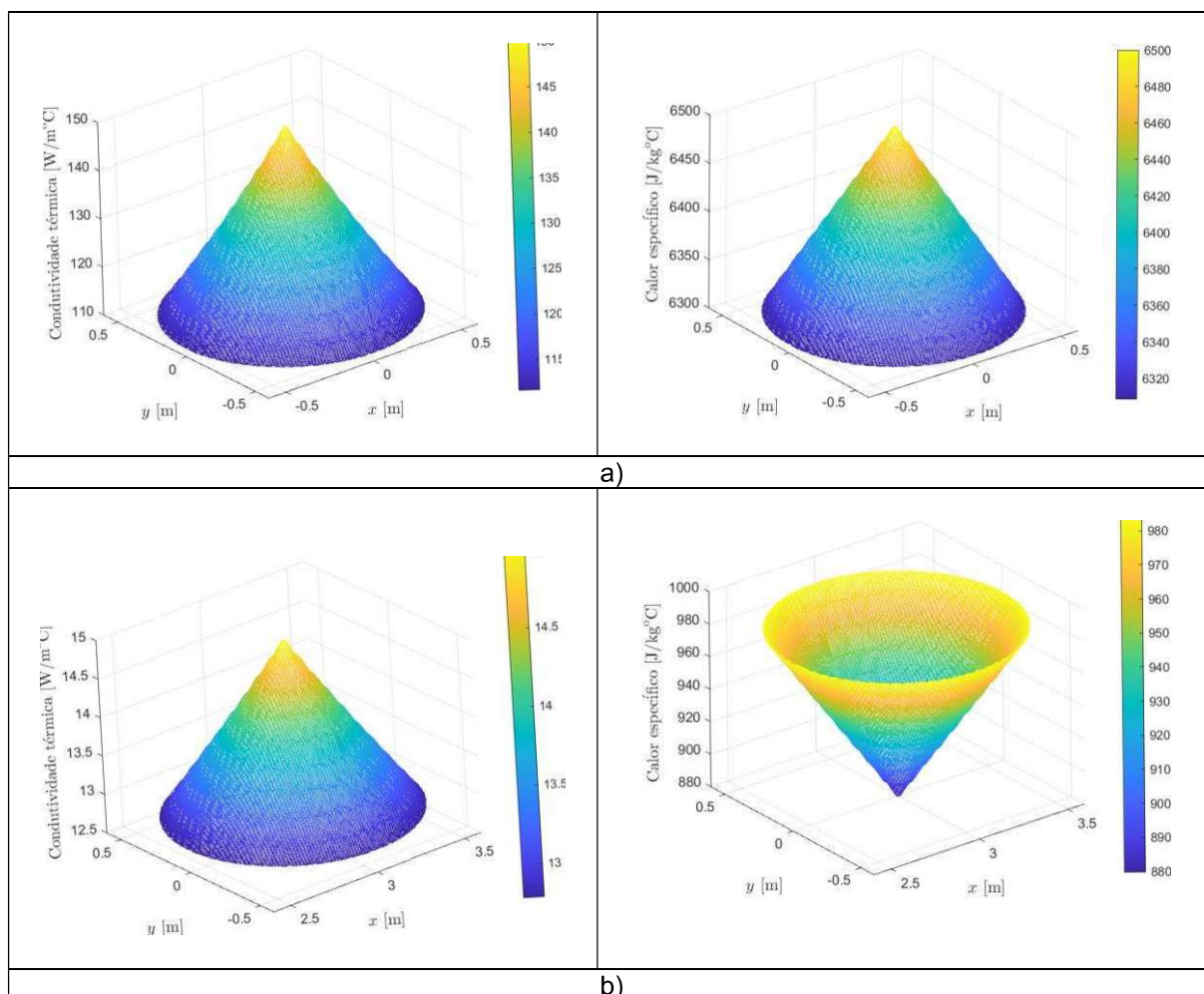
$$c_1 = 6500 \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{20} \right). \quad (178)$$

Para Ω_2 , adotou-se ($\rho_2 = 2500 \text{kg.m}^{-3}$, $k_2 = [15 \text{W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}, 12,95 \text{W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}]$, $c_2 = [880 \text{J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}, 980,57 \text{J.kg}^{-1}.\text{°C}^{-1}]$ e $K_2 = [6,81 \times 10^{-6} \text{m}^2.\text{s}^{-1}, 5,23 \times 10^{-6} \text{m}^2.\text{s}^{-1}]$). A variações de k_2 e c_2 são descritas pelas equações:

$$k_2 = 15 \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{10} \right), \quad (179)$$

$$c_2 = 880 \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{5} \right). \quad (180)$$

As variações das propriedades térmicas são ilustradas na FIGURA 22.

FIGURA 22 – VARIAÇÃO DAS PROPRIEDADES TÉRMICAS: a) EM Ω_1 ; b) EM Ω_2 .

FONTE: O autor (2021).

O campo de calor gerado foi computado nos receptores [Receptor 1(0,1m, -0,1m), Receptor 2(1,15m, 0,0m), Receptor 3 (2,55m, 0,0m)], localizados nos planos $z=0,0\text{m}$ e $z=3,0\text{m}$. Os resultados são apresentados na FIGURA 23. A resposta no tempo iniciou na temperatura nula, correspondendo às condições iniciais determinadas para este problema. Quando a fonte começou a emitir energia em $t=200\text{h}$, a temperatura nos receptores aumentou progressivamente. Os primeiros receptores a registrarem uma mudança de temperatura foram aqueles localizados no plano da fonte em $z=0,0\text{m}$. O receptor 2 registrou mudanças de temperatura mais rapidamente, uma vez que está localizado mais próximo da fonte de calor. Quando a fonte começou a emitir energia, a temperatura registrada nesse ponto aumentou suavemente. A energia da fonte foi então mantida a um valor máximo por um determinado período, fazendo com que a temperatura no Receptor 2 continuasse a subir, em uma taxa mais lenta, atingindo a temperatura máxima de aproximadamente

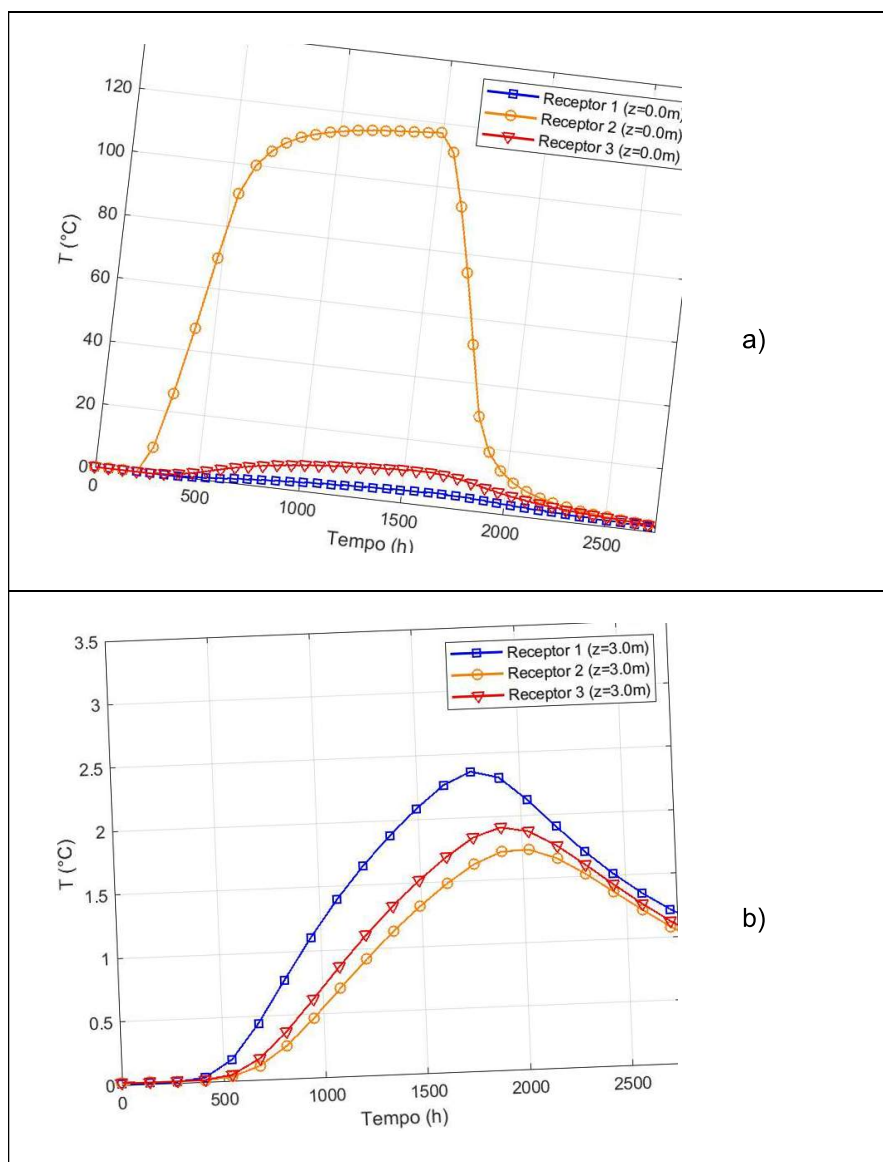
119.0°C. Nesse ponto, a temperatura começou a diminuir. Depois que a fonte para de emitir qualquer energia, esta continua a espalhar-se das regiões mais quentes para as mais frias, até que o equilíbrio no domínio seja estabelecido. Esse equilíbrio seria alcançado apenas para $t = \infty$. Os receptores dentro da inclusão 1 (Receptor 1) e inclusão 2 (Receptor 3), no plano $z = 0,0\text{m}$, apresentaram um valor de temperatura máximo menor que o obtido no Receptor 2. Isso ocorre devido a dois fatores: eles estarem mais distantes da fonte e o meio 0 apresentar uma difusividade térmica menor. Sendo assim, a energia quando alcança as inclusões espalha-se mais rapidamente. A temperatura registrada no Receptor 3, localizado no mesmo plano da fonte, é maior que no Receptor 1, pois Ω_2 possui difusividade menor que Ω_1 .

Observando os resultados calculados nos três receptores localizados em $z = 3,0\text{m}$, a evolução da temperatura nos três receptores está mais próxima do que a evolução em $z = 0,0\text{m}$. As temperaturas mais altas são registradas no Receptor 1. Esse comportamento é explicado pelo fato de que a propagação de calor ocorre principalmente no meio mais condutor, que é em Ω_1 , depois em Ω_2 , seguido pelo meio 0.

A FIGURA 24 apresenta curvas de temperatura para os mesmos receptores em $z = 0,0\text{m}$ e $z = 3,0\text{m}$. Como esperado, a temperatura exibe amplitude menor para distâncias maiores entre o receptor e a fonte.

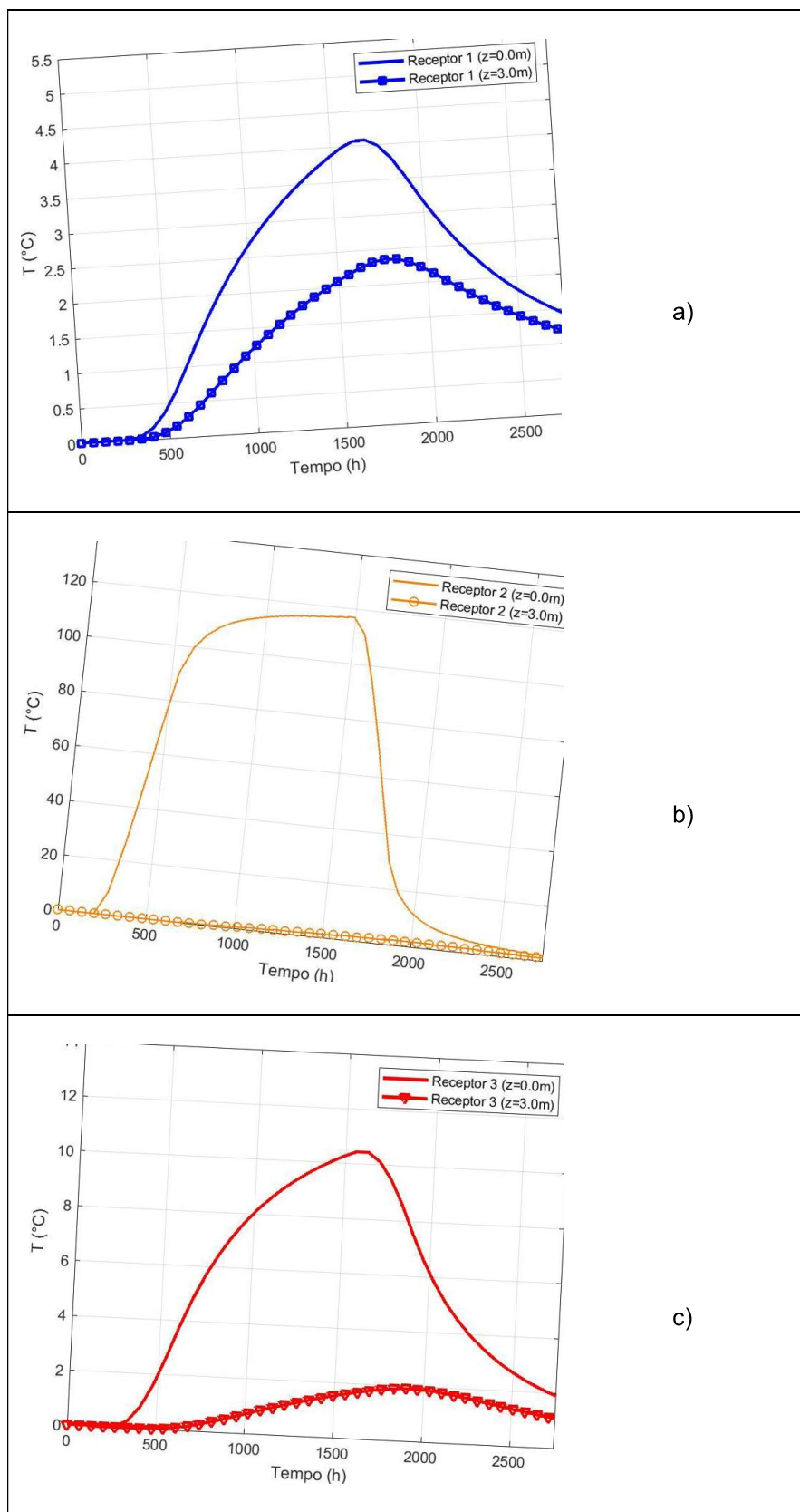
A FIGURA 25, exibe o campo de temperatura (com gráficos de contorno) ao longo de uma grade transversal de receptores colocados em $z = 0,0\text{m}$ nos instantes ($t=485\text{h}$; 1490h e 2167h) para o mesmo meio 0, homogêneo infinito, contendo as duas inclusões (Caso 1). Para entender melhor fisicamente o problema, os resultados são comparados com os calculados nos mesmos receptores para um meio 0 homogêneo infinito (Caso 2) sem heterogeneidades.

FIGURA 23 – TEMPERATURAS NO RECEPTOR 1 (LINHA AZUL), RECEPTOR 2 (LINHA LARANJA) E RECEPTOR 3 (LINHA VERMELHA) PARA DIFERENTES Z-COORDENADAS: a) $z=0,0\text{m}$; b) $z=3,0\text{m}$.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 24 – TEMPERATURAS EM DIFERENTES COORDENADAS Z (LINHA SÓLIDA – $z=0,0\text{m}$; LINHA MARCADA – $z=3,0\text{m}$): a) RECEPTOR 1; b) RECEPTOR 2; c) RECEPTOR 3.

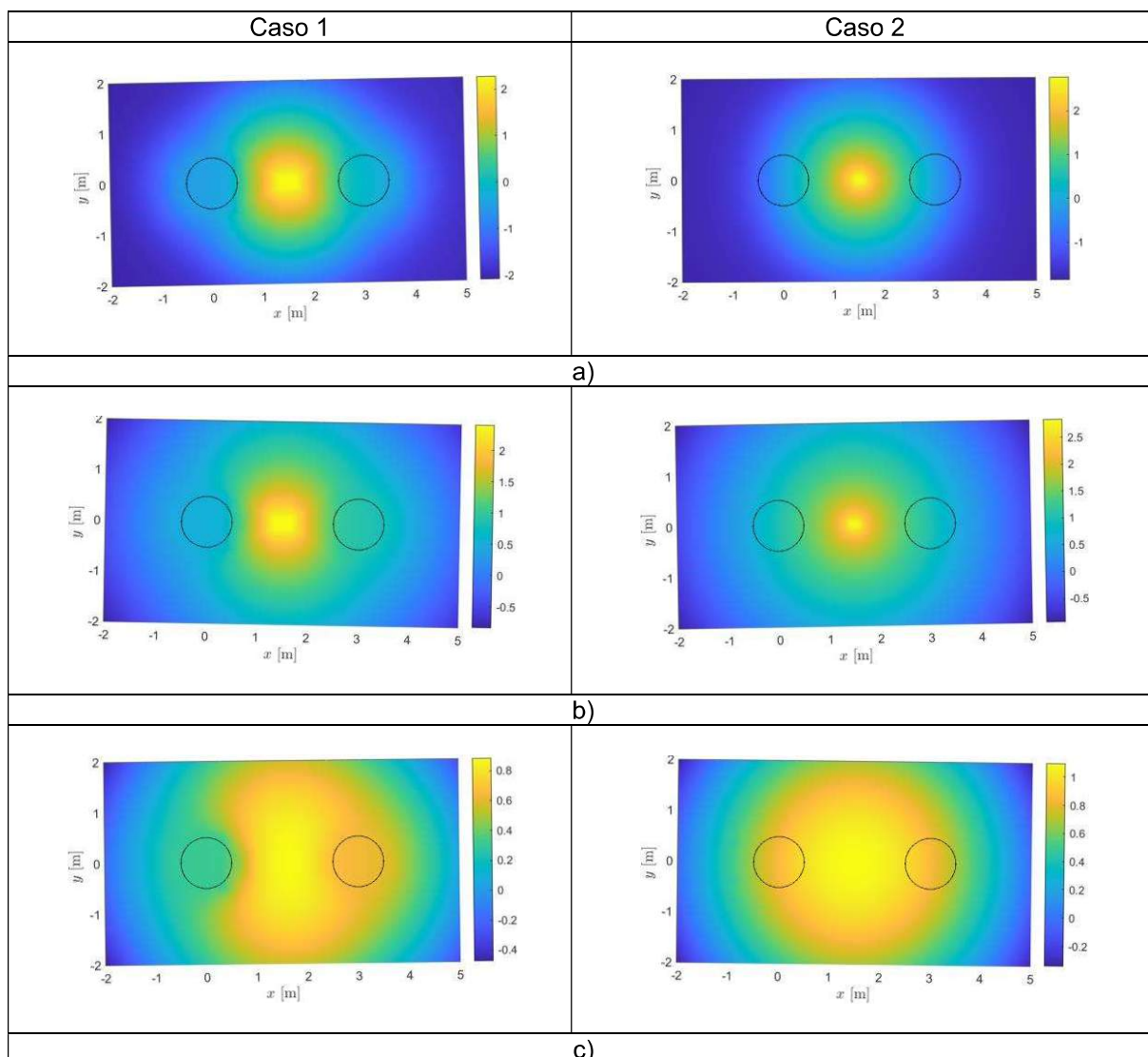


FONTE: O autor (2021).

À medida que o calor se afasta da fonte, a energia se espalha. Podemos ver na FIGURA 25a que para o caso de um meio infinito (Caso 2), o calor se espalha uniformemente, enquanto no Caso 1 há um distúrbio causado pela presença das inclusões. No momento $t=485h$ (FIGURA 25a), uma grande quantidade de energia atingiu as inclusões e se espalha mais rapidamente ao longo delas. Assim, em relação à fonte, as áreas atrás da inclusão registram temperaturas mais altas do que outras áreas que estão à mesma distância da fonte. Além disso, próximo à fonte, o Caso 2 registra temperaturas mais altas que o Caso 1. Nesse caso, a propagação de energia é determinada apenas pelas características físicas do meio hospedeiro (meio 0) e ocorre em uma taxa lenta. Essa energia térmica é retida por mais tempo em regiões próximas à fonte, permitindo que a temperatura alcance valores mais altos.

Com o tempo, a energia continua a se espalhar por todo o domínio dos receptores, gerando um aumento progressivo da temperatura. Para $t=1490h$ (FIGURA 25b), esse aumento é visível em ambas as grades dos receptores. Depois que a energia da fonte é reduzida a zero, a energia continua a espalhar-se pelos meios, com um consequente aumento de temperatura nos receptores posicionados mais longe da fonte. Isso é visível para $t=2167h$ (FIGURA 25c), onde a fonte já havia parado de emitir energia. Os receptores mais afastados da fonte ainda mostram algum aumento de temperatura, enquanto os localizados mais próximos já mostram uma queda de temperatura.

FIGURA 25 – CAMPO DE TEMPERATURA EM UMA MALHA DE RECEPTORES EM ESCALA LOGARÍTMICA PARA O CASO 1 (MEIO HOMOGENEO E INFINITO COM DUAS INCLUSÕES) E CASO 2 (MEIO HOMOGENEO E INFINITO: a) $t=485h$; b) $t=1490h$; c) $t=2167h$.

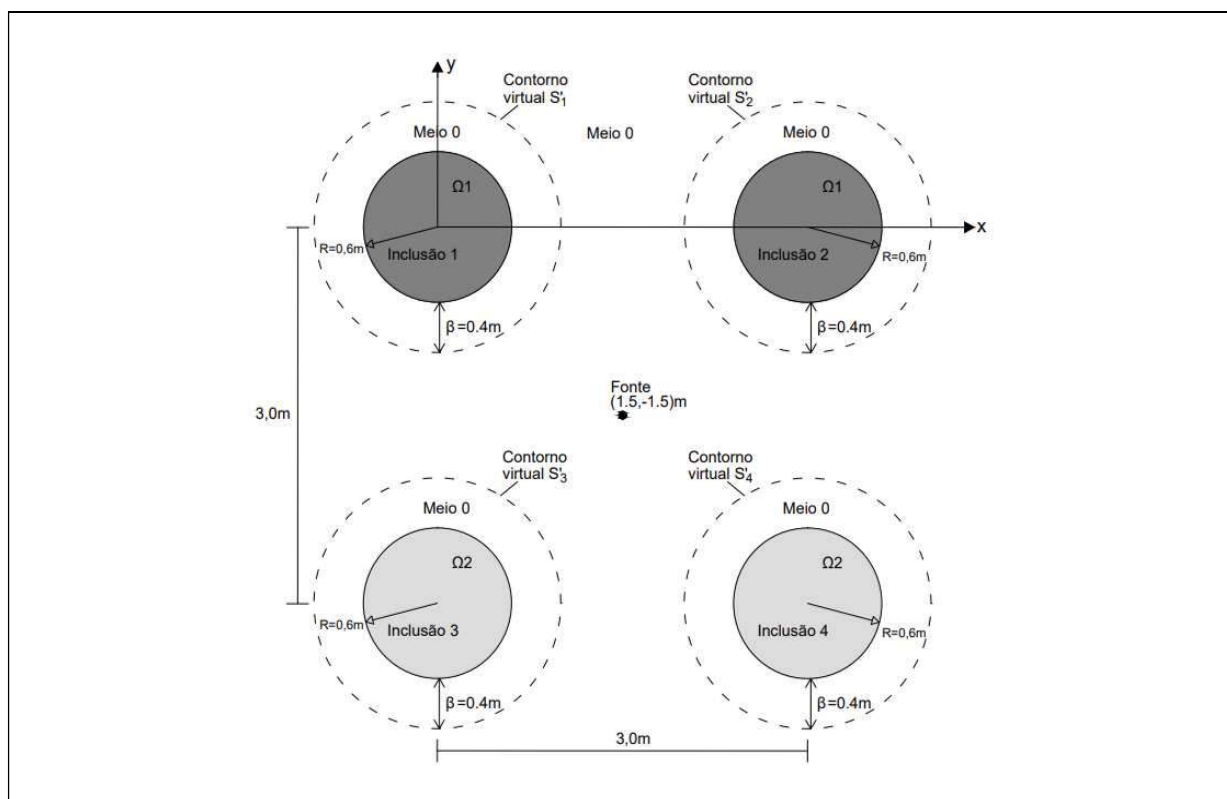


FONTE: O autor (2021).

Quatro Inclusões

Foi feita uma segunda simulação com a fonte de calor localizada em $z=0,0m$ no ponto $(1,5m, -1,5m, 0,0m)$ (FIGURA 26). As propriedades dos materiais e os parâmetros usados são os mesmos descritos acima (Inclusão 1 e 2 - Ω_1 , Inclusão 3 e 4 - Ω_2).

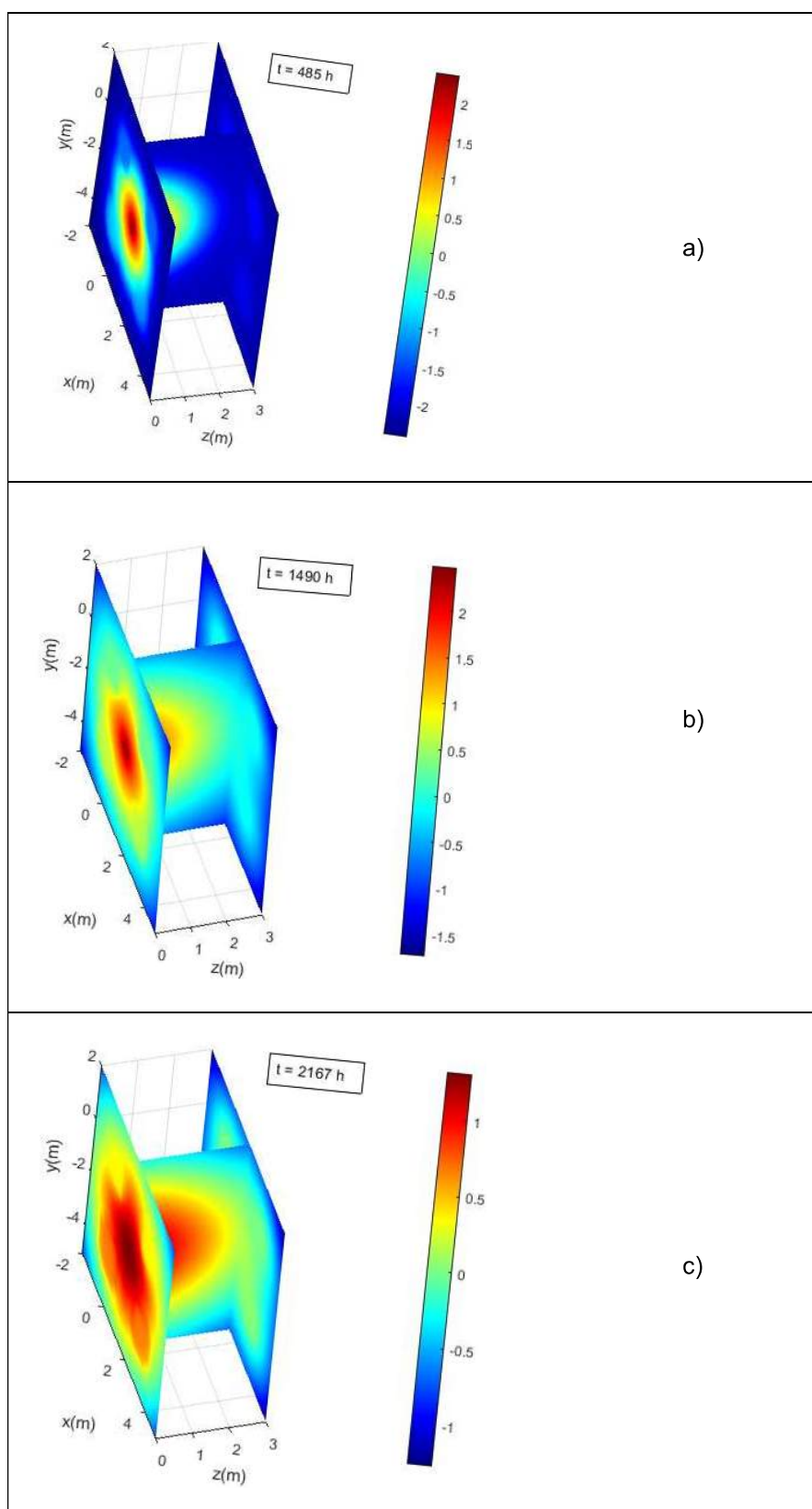
FIGURA 26 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA SEÇÃO DE QUATRO INCLUSÕES CILÍNDRICAS COM VÁRIAS CAMADAS. ESSAS INCLUSÕES SÃO DELIMITADAS POR UM SÓLIDO UNIFORME (MEIO 0) E SUBMETIDAS A UMA FONTE DE CALOR.



FONTE: O autor (2021).

Na FIGURA 27, uma série de instantâneos ($t=485$; $1490h$ e $2167h$) apresentam o campo de temperatura (como curvas de contorno) em três grelhas de receptores localizados em $z=0,0m$, $z=3,0m$ e $x=0,0m$. Em $t=485h$, a fonte de calor já começou a emitir energia e a sua potência está aumentando. Nesse momento, a temperatura computada perto da fonte é maior que em posições mais distantes e uma perturbação causada pela presença das inclusões pode ser notada, as quais possuem difusividade térmica maior que a do meio 0. Ao longo do tempo, a energia continua a espalhar-se em todo o domínio gerando um aumento de temperatura e em $t=1490h$ (FIGURA 27b) esse aumento é visível na malha de receptores. Quando a fonte para de emitir calor, a energia continua a espalhar-se através dos meios até o equilíbrio ser estabelecido. Em $t=2167h$, como esperado, a temperatura está distribuída de forma mais homogênea e os receptores localizados em $z=0,0m$ já computaram uma queda na temperatura enquanto os em $z=3,0m$ mostraram um aumento.

FIGURA 27 – CAMPO DE TEMPERATURA EM TRÊS MALHAS DE RECEPTORES TRANSVERSAIS EM ESCALA LOGARÍTMICA LOCALIZADAS EM $z=0,0\text{m}$, $z=3,0\text{m}$ E $x=0,0\text{m}$: a) $t=485\text{h}$; b) $t=1490\text{h}$; c) $t=2167\text{h}$.



FONTE: O autor (2021).

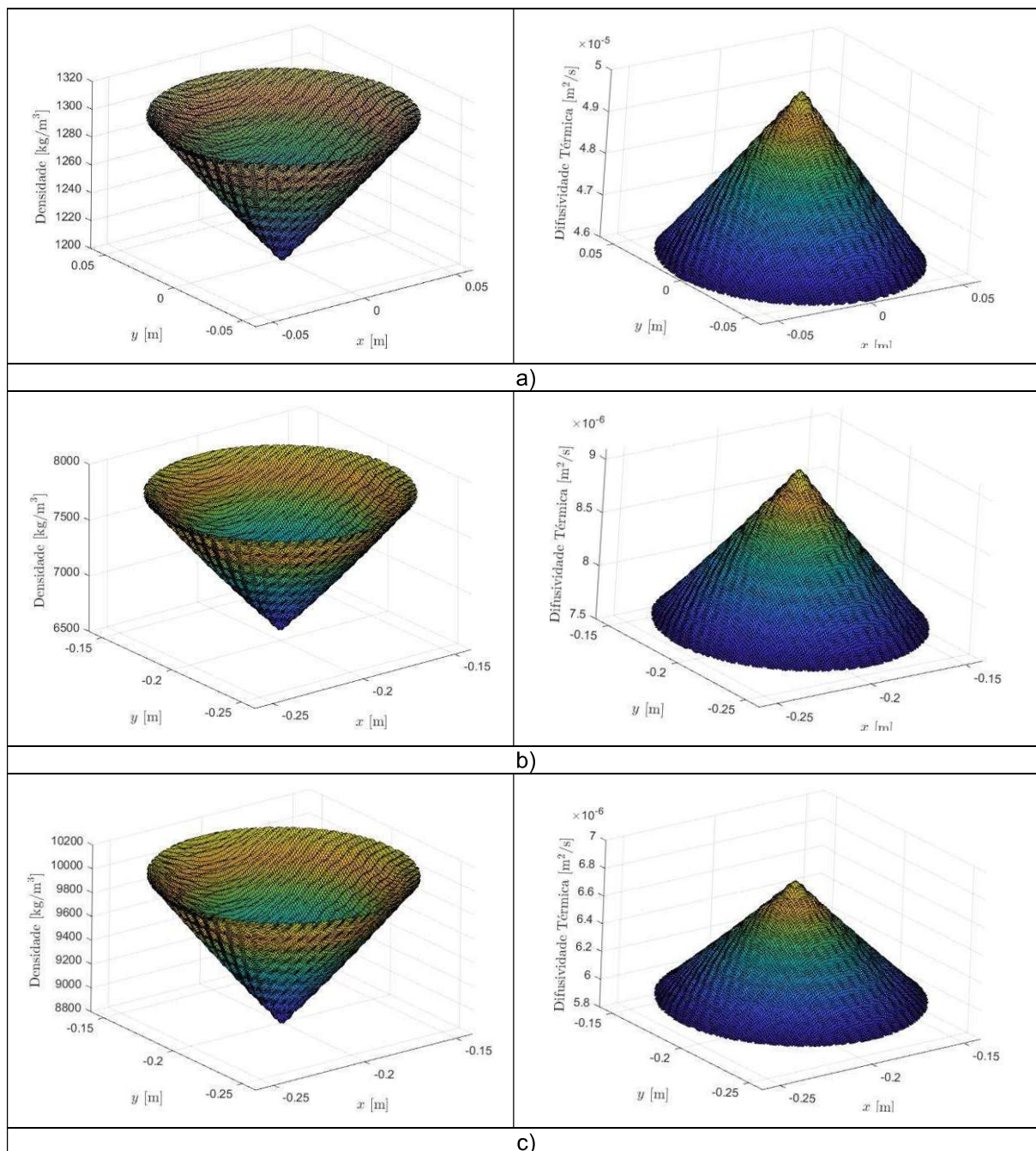
7.1.2 Condições iniciais diferentes de zero

A aplicabilidade do código proposto, para condições iniciais diferentes de zero, é ilustrada usando dois exemplos: uma única inclusão circular de multicamadas (Ω_1) envolta em um meio sólido (Meio 0) e três inclusões circulares (Ω_1 , Ω_2 e Ω_3) inseridas no mesmo meio sólido (Meio 0). Todas as inclusões têm raio de 0,06m. O Meio 0 é limitado por um contorno quadrado $-m < y < m$, $-n < y < n$ ($m = n = 0,4\text{m}$) no qual a temperatura é nula. Foi imposta uma distribuição constante de temperatura inicial $T_0(x, y) = 1,0^\circ\text{C}$ ao longo de todo o domínio.

As seguintes propriedades térmicas foram prescritas para o meio hospedeiro (Meio 0): $\rho_0 = 880,0\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $k_0 = 150,0\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$, $c_0 = 2500,0\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$ sendo então $K_0 = \frac{k_0}{\rho_0 c_0} = 6,81 \times 10^{-5} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Para Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 , foram adotados valores constantes para a condutividade térmica ($150,0\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$) e o calor específico ($2500,0\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot^\circ\text{C}^{-1}$) dentro das inclusões circulares. Considerou-se que a densidade varia radialmente (em Ω_1 , $\rho_v^1 = 1200^{1+\frac{(a_v-a_1)}{5}}$; em Ω_2 , $\rho_v^2 = 6600^{1+\frac{(a_v-a_1)}{3}}$; em Ω_3 , $\rho_v^3 = 8800^{1+\frac{(a_v-a_1)}{4}}$), no qual a_v é a distância até centro e a_1 é o raio mais externo. A FIGURA 28 ilustra a variação na densidade e difusividade térmica em cada inclusão.

As soluções analíticas (usadas como funções de Green) foram computadas dividindo cada inclusão em 30 camadas concêntricas. As respostas foram computadas em uma faixa de frequência $[0,0\text{Hz}, 512,0 \times 10^{-3}\text{Hz}]$, utilizando um incremento de frequência $\Delta\omega = 25 \times 10^{-5}\text{Hz}$, que permite a obtenção de uma resposta no tempo até $T=4000\text{s}$.

FIGURA 28 – VARIAÇÃO NA DENSIDADE E DIFUSIVIDADE TÉRMICA: a) EM Ω_1 ; b) EM Ω_2 ; c) EM Ω_3 .



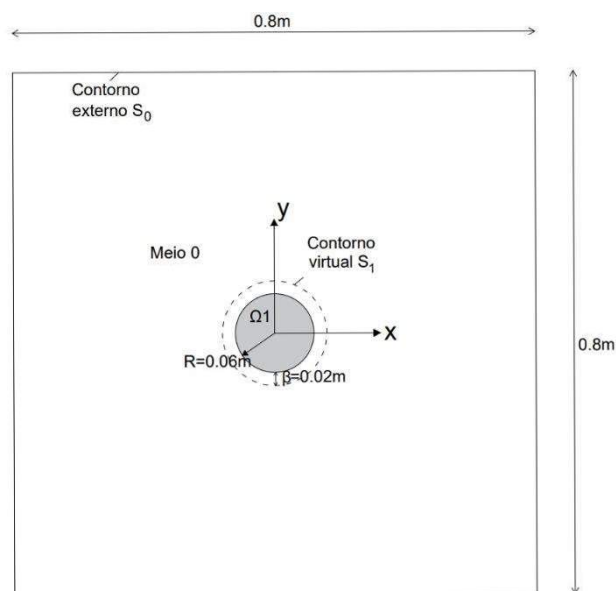
FONTE: O autor (2021).

Uma única inclusão

Neste exemplo, a inclusão heterogênea circular está centrada em (0,0m, 0,0m) (FIGURA 29). Todo o domínio foi dividido em 156 células no domínio externo e

375 no interno. O contorno externo foi discretizado em 48 elementos de contorno constantes e 12 foram usados para o contorno virtual, localizado a 0,02m da inclusão.

FIGURA 29 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA INCLUSÃO DE MULTICAMADAS. ESSA INCLUSÃO ESTÁ INSERIDA EM UM MEIO SÓLIDO UNIFORME FINITO (MEIO 0)



FONTE: O autor (2021).

Na FIGURA 30 apresenta-se o campo de temperatura ao longo de uma grade transversal de receptores colocados nos instantes ($t=195s$; $t=389s$; $t=585s$ e $t=976s$). Como esperado, ao longo do tempo a temperatura cai no domínio, estabelecendo equilíbrio com as condições de contorno (temperaturas nulas).

A FIGURA 31 mostra a temperatura em uma linha de receptores localizada em $y=0,0m$ e $y=0,12m$ em diferentes instantes ($t=292s$; $t=585s$ e $t=976s$). Para entender melhor a física do problema, os resultados são comparados com aqueles computados nos mesmos receptores, mas para um meio homogêneo idêntico ao meio hospedeiro (Meio 0), para o qual a solução analítica é dada por Carslaw e Jaeger [1]:

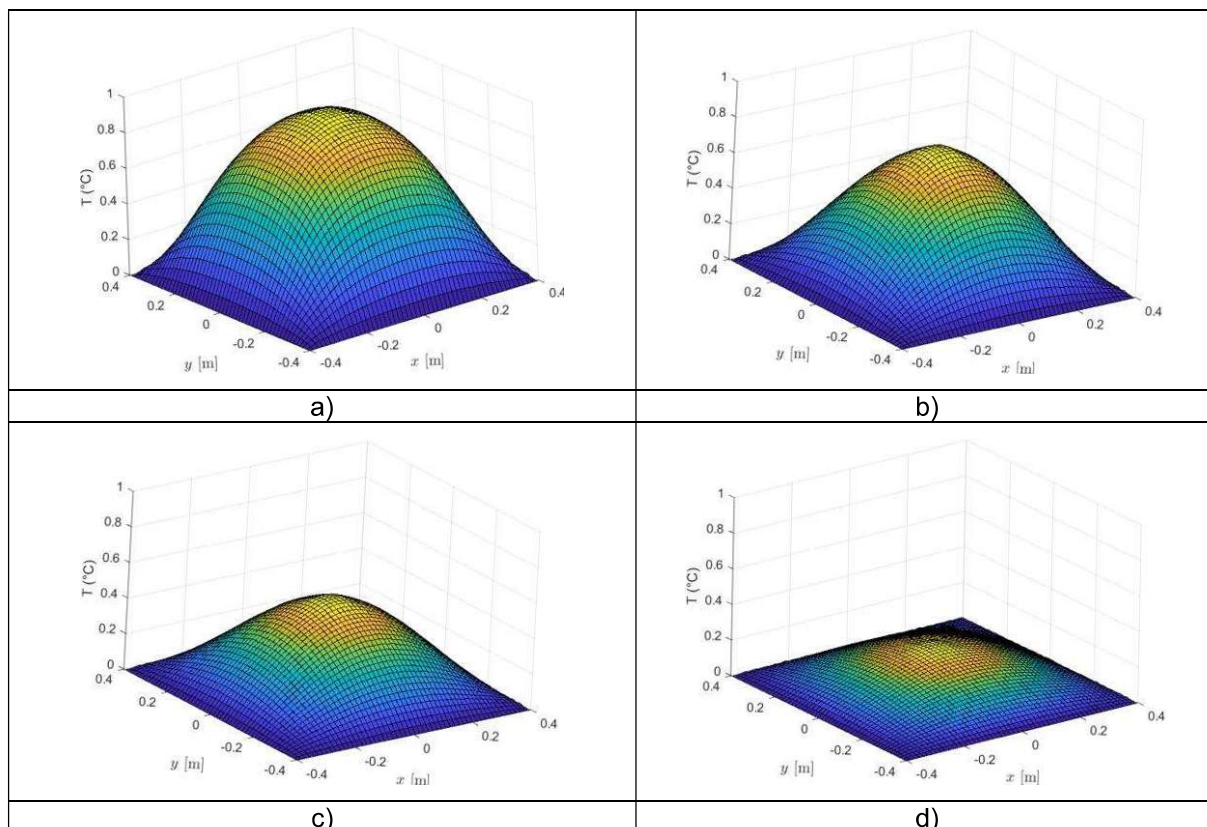
$$T(t, x, y) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} L_{a,b} \cos \frac{(2a+1)\pi x}{2n} \cos \frac{(2b+1)\pi y}{2m} \exp(-D_{a,b}t) \quad (181)$$

onde:

$$L_{a,b} = \frac{(-1)^{a+b}}{(2a+1)(2b+1)} \quad (182)$$

$$D_{a,b} = \frac{K\pi^2}{4} \left[\frac{(2a+1)^2}{n^2} + \frac{(2b+1)^2}{m^2} \right] \quad (183)$$

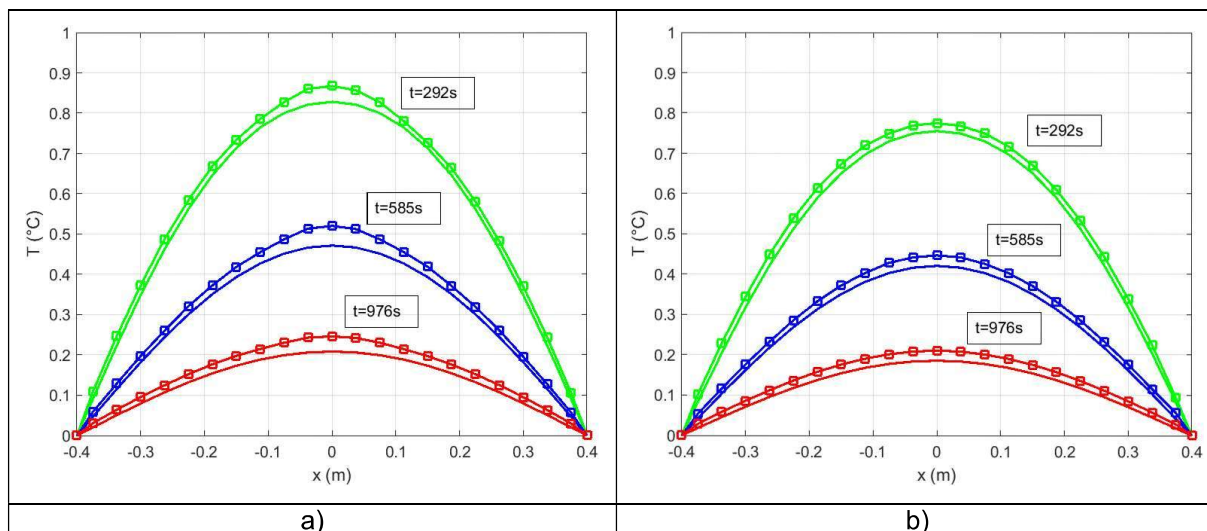
FIGURA 30 – DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURA PARA $T_0(x,y)=1,0$: a) $t=195s$; b) $t=389s$; c) $t=585s$ E d) $t=976s$.



FONTE: O autor (2021).

Na FIGURA 31, a solução analítica usando a equação (181) e a solução com o código desenvolvido é representada por linhas sólidas e linhas marcadas, respectivamente. É possível ver temperaturas maiores na região onde a inclusão está localizada comparadas com as do meio homogêneo sem inclusão. Isso acontece devido ao fato da inclusão ter difusividade térmica mais baixa que a do meio homogêneo. Dessa forma, a energia é retida por mais tempo nessa região fazendo com que a temperatura tenha valores maiores. Como também era esperado, é possível notar que a temperatura cai mais rapidamente em todos os receptores próximos ao contorno, os quais atingem o equilíbrio antes.

FIGURA 31 – SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA UM MEIO HOMOGENEO SEM INCLUSÃO REPRESENTADA POR LINHAS SÓLIDAS E SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA UM MEIO COM UMA INCLUSÃO REPRESENTADA POR LINHAS MARCADAS. AMBOS OS CASOS PARA $T_0(x,y)=1,0$. RESPOSTAS PARA UMA LINHA DE RECEPTORES NOS INSTANTES: $t=292s$; $t=585s$ E $t=976s$, LOCALIZADOS EM: a) $y = 0,0m$; b) $y = 0,12m$.

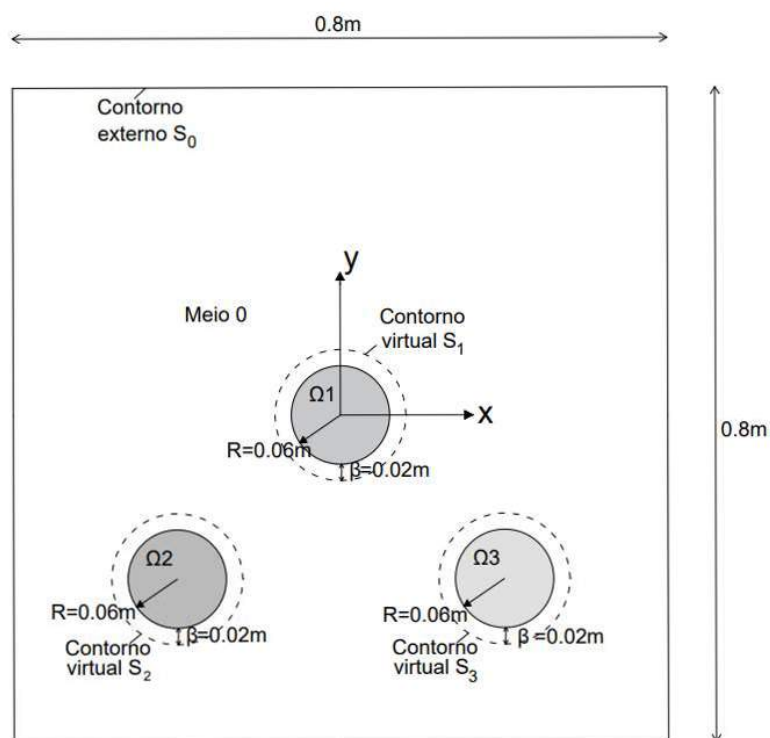


FONTE: O autor (2021).

Três inclusões

As três inclusões heterogêneas circulares (Ω_1 , Ω_2 e Ω_3) estão centradas em $(0,0m, 0,0m)$, $(-0,2m, -0,2m)$ e $(0,2m, -0,2m)$, respectivamente (ver FIGURA 32). O domínio exterior foi dividido em 161 células enquanto cada inclusão foi discretizada em 375 células. O contorno externo foi discretizado em 48 elementos de contorno constantes e 12 foram usados para cada contorno virtual, localizados a 0,02m das inclusões. A FIGURA 33 apresenta o campo de temperatura em diferentes instantes ($t=121s$; $487s$ e $1464s$). Para fins de comparação, as respostas também foram computadas para os mesmos receptores para um meio homogêneo com propriedades materiais idênticas àquelas do Meio 0.

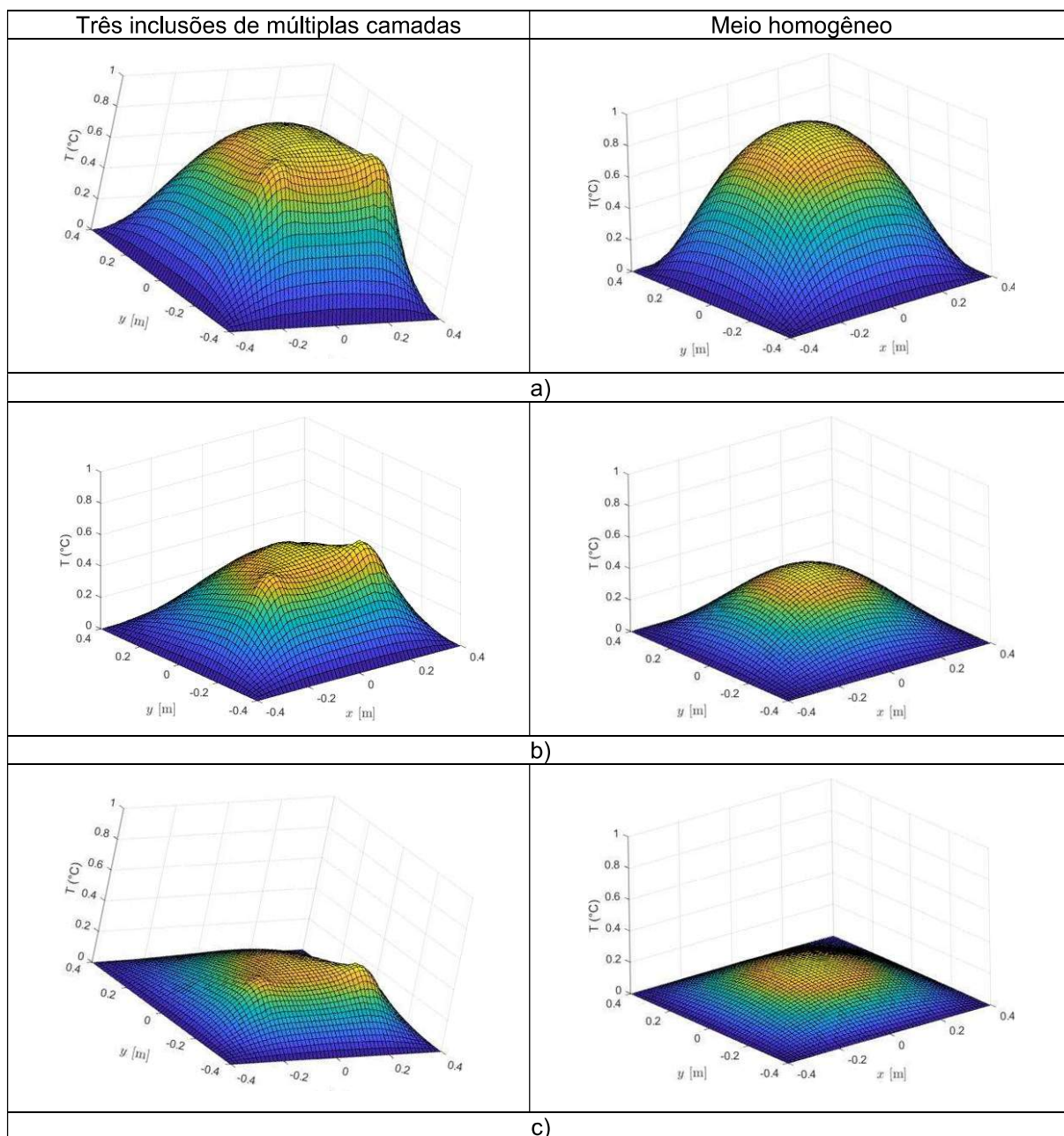
FIGURA 32 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE TRÊS INCLUSÕES DE MULTICAMADAS. ESSAS INCLUSÕES ESTÃO ENVOLVIDAS EM UM MEIO SÓLIDO UNIFORME (MEIO 0).



FONTE: O autor (2021).

Em $t=195s$ (FIGURA 33a) existe uma pequena perturbação causada pelas inclusões, devido a estas possuírem difusividades térmicas menores que o meio 0, fazendo com que a energia se propague mais lentamente. Para $t=585s$ (FIGURA 33b) é possível ver claramente essas perturbações causadas pelas inclusões 2 e 3, as quais retêm a energia por mais tempo e onde as temperaturas são mais altas que aquelas obtidas pelo caso do meio homogêneo. A área dentro da inclusão 3 apresenta maiores temperaturas que dentro da inclusão 2, devido a sua menor difusividade. Em $t=976s$ (FIGURA 33c) é possível ver uma queda na temperatura, mas o meio heterogêneo ainda manteve mais altas temperaturas dentro das inclusões. Analisando os resultados, o sistema exibe um comportamento consistente com o esperado.

FIGURA 33 – CAMPO DE TEMPERATURA EM UMA GRELHA DE RECEPTORES PARA UM MEIO HETEROGÊNEO CONTENDO TRÊS INCLUSÕES E PARA UM MEIO HOMOGÊNIO INFINITO: a) $t=195s$; b) $t=585s$; c) $t=976s$.



FONTE: O autor (2021).

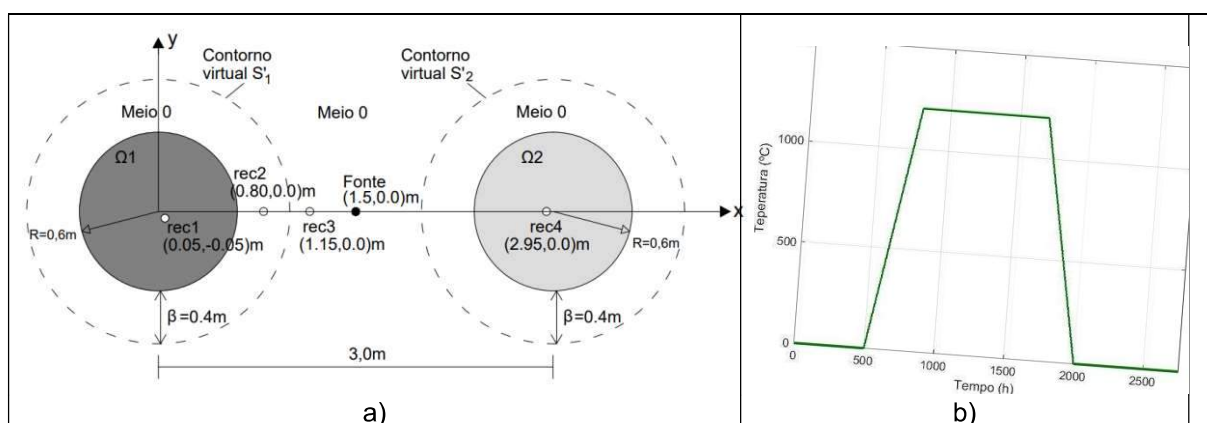
7.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONDUÇÃO E CONVECÇÃO

A aplicabilidade da técnica proposta com a formulação de condução e convecção é ilustrada nessa seção.

7.2.1 Fonte de Calor e condições iniciais iguais a zero

A propagação de calor através de duas inclusões cilíndricas de multicamadas (Ω_1 e Ω_2), com raio de 0,6m, inseridas em um meio sólido infinito (Meio 0) é estudada (FIGURA 34a). Os contornos virtuais, localizados a 0,4m da inclusão, foram modelados usando 40 elementos constantes e a distância considerada entre as fontes virtuais foi de $L = 32$ m. O campo de calor é computado em uma gama de frequência $[0,0\text{Hz}, 64,0 \times 10^{-7}\text{Hz}]$, com incremento de frequência $\Delta\omega = 1 \times 10^{-7}\text{Hz}$, trazendo um período de estudo $T=2778$ h.

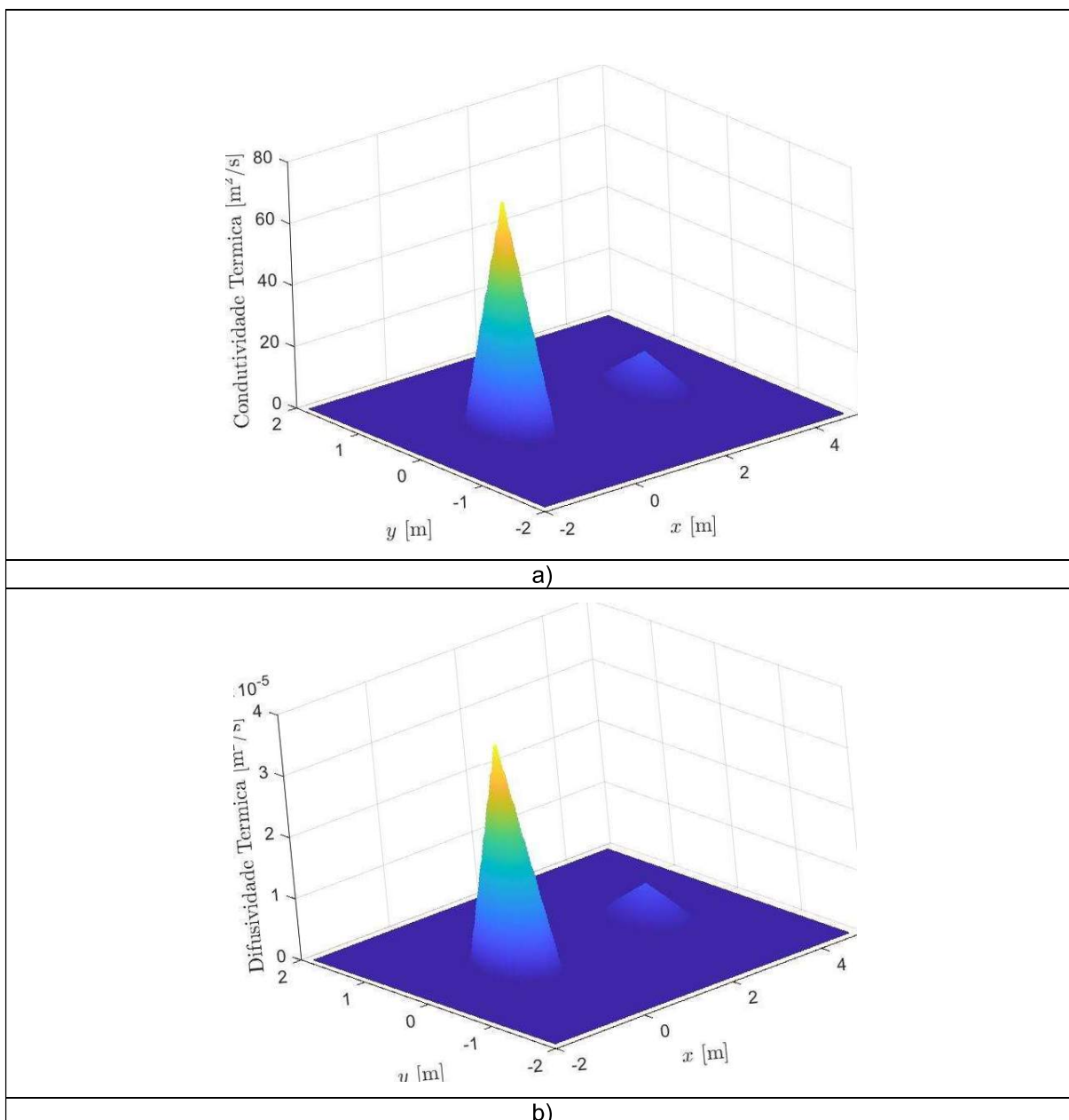
FIGURA 34 – a) REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UMA SEÇÃO DE DUAS INCLUSÕES CILÍNDRICAS COM VÁRIAS CAMADAS SUBMETIDAS A UMA FONTE DE CALOR, b) EVOLUÇÃO TEMPORAL DA FONTE DE CALOR.



FONTE: O autor (2021).

Para o Meio 0, as seguintes propriedades térmicas são assumidas: $\rho_0 = 880,0\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $k_0 = 1,4\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{°C}^{-1}$, $c_0 = 2300,0\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{°C}^{-1}$ e então $K_0 = \frac{k_0}{\rho_0 c_0} = 6,92 \times 10^{-7}\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. Para as inclusões Ω_1 e Ω_2 a densidade ($880,0\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$) e o calor específico ($2300,0\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{°C}^{-1}$) foram considerados constantes. Admitiu-se que a condutividade térmica varia radialmente (em Ω_1 , $k_v^1 = 1,4^{(55-90a_v)}$; em Ω_2 , $k_v^2 = 1,4^{(9-\frac{40}{3}a_v)}$) em que a_v é a distância ao centro. A FIGURA 35 ilustra a variação na condutividade térmica e difusividade térmica dentro de cada inclusão circular.

FIGURA 35 – VARIAÇÃO DAS PROPRIEDADES TÉRMICAS: a) VARIAÇÃO NA CONDUTIVIDADE TÉRMICA; b) VARIAÇÃO NA DIFUSIVIDADE TÉRMICA.



FONTE: O autor (2021).

As soluções analíticas (usadas como funções de Green) foram calculadas dividindo cada inclusão em 30 camadas concêntricas compostas por um meio cada. Para o Meio 0 e Ω_2 foi considerado $V=0,0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Dois casos diferentes são apresentados para Ω_1 : considerando apenas a condução (Caso 1) e considerando ambos os fenômenos de condução e convecção (Caso 2), com a velocidade de convecção afetando apenas a primeira inclusão com $V=5,0\times 10^{-6}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Este sistema é submetido a uma fonte de calor, colocada no meio hospedeiro em (1,5 m, 0,0 m), no plano $z=0,0\text{m}$. Essa fonte começa a emitir energia (FIGURA 34b) em $t=500\text{h}$, aumentando linearmente de $0,0\text{ }^\circ\text{C}$ a $1200,0\text{ }^\circ\text{C}$, atingindo um máximo em $t=800\text{h}$. Este pico é mantido por um período de $t=700\text{h}$ e então é reduzido linearmente para $0,0\text{ }^\circ\text{C}$ em $t=1800\text{h}$. Observe que diferentes variações de amplitude e durações de fonte de calor podem ser facilmente implementadas usando o modelo presente.

A resposta no domínio do tempo para os receptores [Receptor 1 (0,05 m, 0,05 m), Receptor 2 (0,80m, 0,0 m), Receptor 3 (1,15 m, 0,0 m), Receptor 4 (2,95 m, 0,0 m)], localizados nos planos $z = 0,0\text{m}$ e $z = 0,5\text{m}$, está ilustrada na FIGURA 36. Nos momentos iniciais, todos os receptores apresentam temperaturas nulas, correspondentes às condições iniciais prescritas para o problema. Depois que a fonte começa a emitir energia em $t=500\text{h}$, a temperatura em todos os receptores aumenta progressivamente e aqueles localizados em $z=0,0\text{m}$ mostram um aumento na temperatura mais cedo que aqueles no plano $z=0,5\text{m}$. O receptor mais próximo da fonte (Rec.3 no plano $z=0,0\text{m}$) é o primeiro a registrar uma mudança na temperatura e registra uma temperatura máxima mais alta durante o domínio do tempo em estudo do que os outros receptores, para ambos os casos. Nos receptores 1 e 4, localizados no plano da fonte, que estão mais longe da fonte, a temperatura aumenta suavemente e seu máximo é alcançado posteriormente (quando a fonte de energia não está mais emitindo energia), o que significa que a energia ainda está se espalhando para as áreas com temperaturas mais baixas para atingir o equilíbrio energético, que seria alcançado apenas para $t=\infty$. Esses receptores registraram um valor máximo de temperatura inferior ao obtido nos receptores 2 e 3. Isso pode ser explicado pelo fato de estarem mais distantes da fonte e por Ω_1 e Ω_2 possuírem difusividade térmica maior que a do Meio 0, fazendo com que a energia se espalhe mais rapidamente por eles.

É possível notar que em $z=0,0\text{m}$ e $z=0,5\text{m}$, quando o Caso 1 é modelado, os receptores registram temperatura máxima mais alta do que os mesmos receptores no Caso 2. Pode-se concluir que a presença da velocidade de convecção pode ter uma influência considerável nas respostas.

Na FIGURA 37, 38 e 39, uma série de instantâneos em $t=784\text{h}$, 1624h e 2438h , respectivamente, exibem o campo de temperatura (como gráficos de contorno) ao longo de uma grade transversal de receptores colocados em $z=0,0\text{m}$, $z=2,5\text{m}$ e

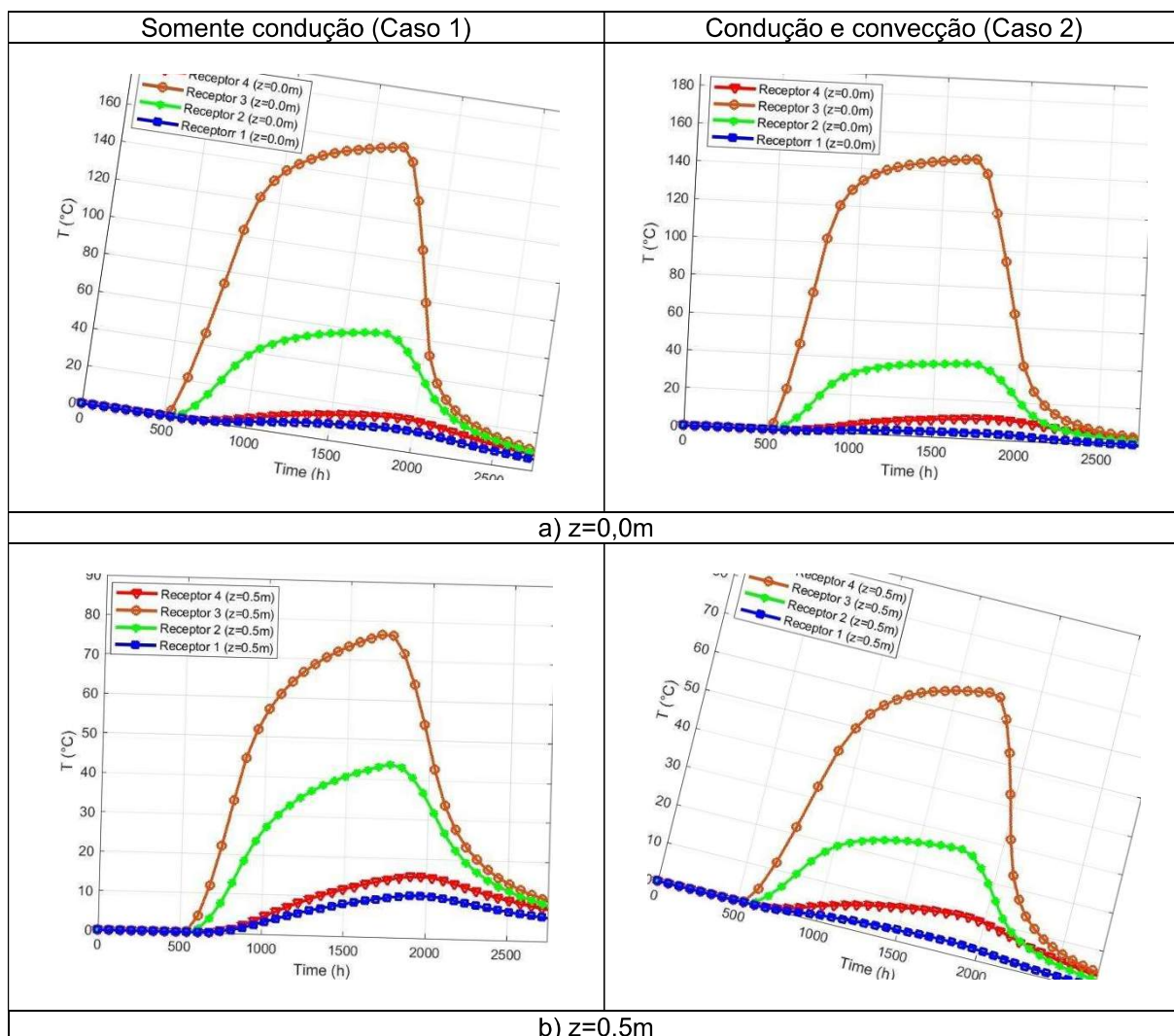
$x=0,0\text{m}$, no mesmo Meio 0 homogêneo infinito contendo as duas inclusões para o Caso 1 (apenas condução) e Caso 2 (condução e convecção).

Em $t = 784 \text{ h}$ (FIGURA 37), a fonte de calor já havia começado a emitir energia e a potência ainda estava aumentando. Neste momento, na FIGURA 37a (Caso 1 e Caso 2) é possível notar uma perturbação causada pela presença das inclusões cuja difusividade térmica é maior que a do Meio 0 e a temperatura registrada próximo à fonte é maior do que nas posições mais distantes. Analisando os resultados calculados na grade de receptores localizados em $z=2,5\text{m}$ na FIGURA 37b (Caso 1), as temperaturas mais altas são registradas na primeira inclusão. Esse comportamento é explicado pelo fato de a propagação do calor ocorrer principalmente no meio mais condutivo. Na FIGURA 37b (Caso 2), embora Ω_1 seja mais condutiva, a presença da convecção radial faz com que a energia se espalhe mais rapidamente ao longo dela na direção radial causando uma queda de temperatura nesta inclusão. Também é possível notar este comportamento na FIGURA 37c (Caso 1) e (Caso 2).

Com o tempo, a energia continua a se espalhar por todo o domínio dos receptores, gerando um aumento progressivo da temperatura. Para $t=1624\text{h}$ (Fig. 37b), este aumento é visível em todas as grades de receptores para ambos os casos na FIGURA 38. Comparando as Figuras em $z=0,0\text{m}$ e $z=2,5\text{m}$, as temperaturas são maiores em $z=0,0\text{m}$, pois a fonte ainda está emitindo energia.

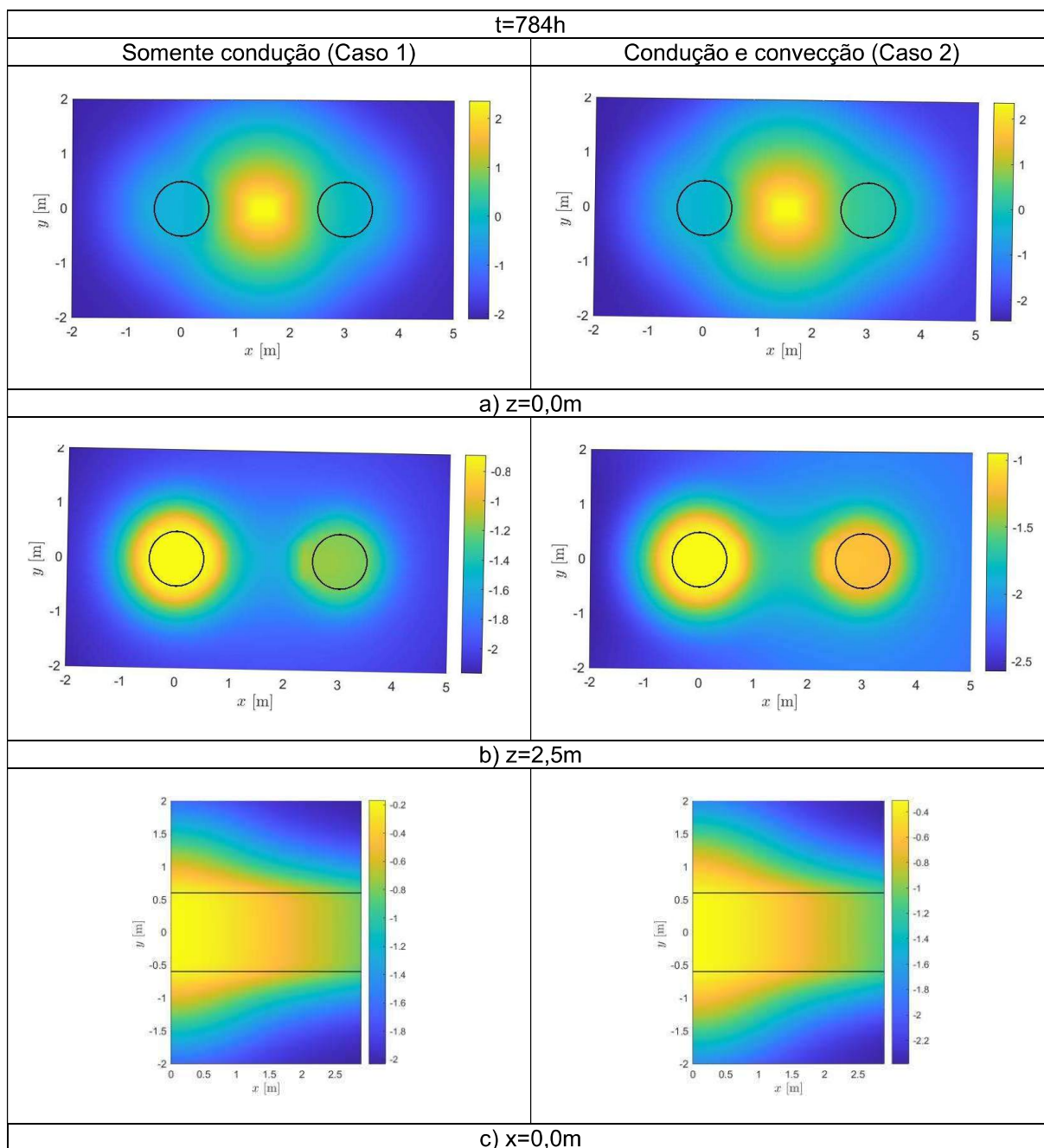
Quando a fonte para de emitir energia, esta continua a se espalhar pelo domínio até atingir o equilíbrio. Em $t=2438\text{h}$ (FIGURA 39), a fonte já parou de emitir energia e é possível observar que os receptores colocados mais distantes da fonte de calor ainda apresentam alguma elevação de temperatura, enquanto os mais próximos já apresentam queda de temperatura. Nesta figura, em todas as grelhas, é fácil visualizar uma queda de temperatura na inclusão 1 causada pela presença de convecção nela. Analisando os resultados, o sistema apresentou um comportamento consistente com o que era esperado.

FIGURA 36 – TEMPERATURAS NO RECEPTOR 1 (LINHA AZUL), RECEPTOR 2 (LINHA VERDE) E RECEPTOR 3 (LINHA LARANJA) E RECEPTOR 4 (LINHA VERMELHA) PARA DIFERENTES Z-COORDENADAS: a) $z=0,0m$; c) $z=0,5m$.



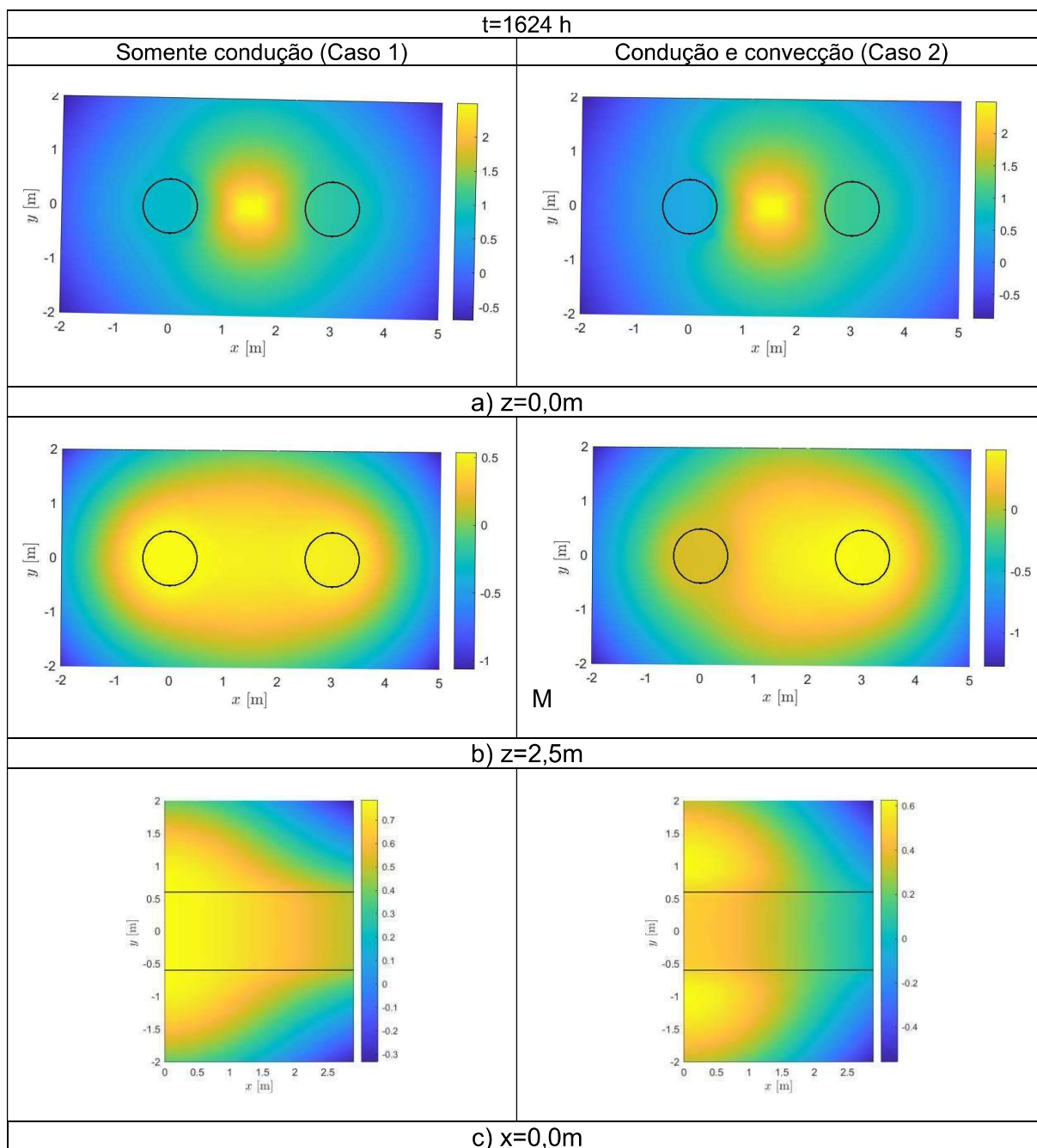
FONTE: O autor (2021).

FIGURA 37 – CAMPO DE TEMPERATURA EM UMA MALHA DE RECEPTORES EM ESCALA LOGARÍTMICA PARA O CASO 1 (SOMENTE CONDUÇÃO) E CASO 2 (CONDUÇÃO E CONVECÇÃO) EM $t=784h$: a) $z=0,0m$; b) $z=2,5m$; c) $x=0,0m$.



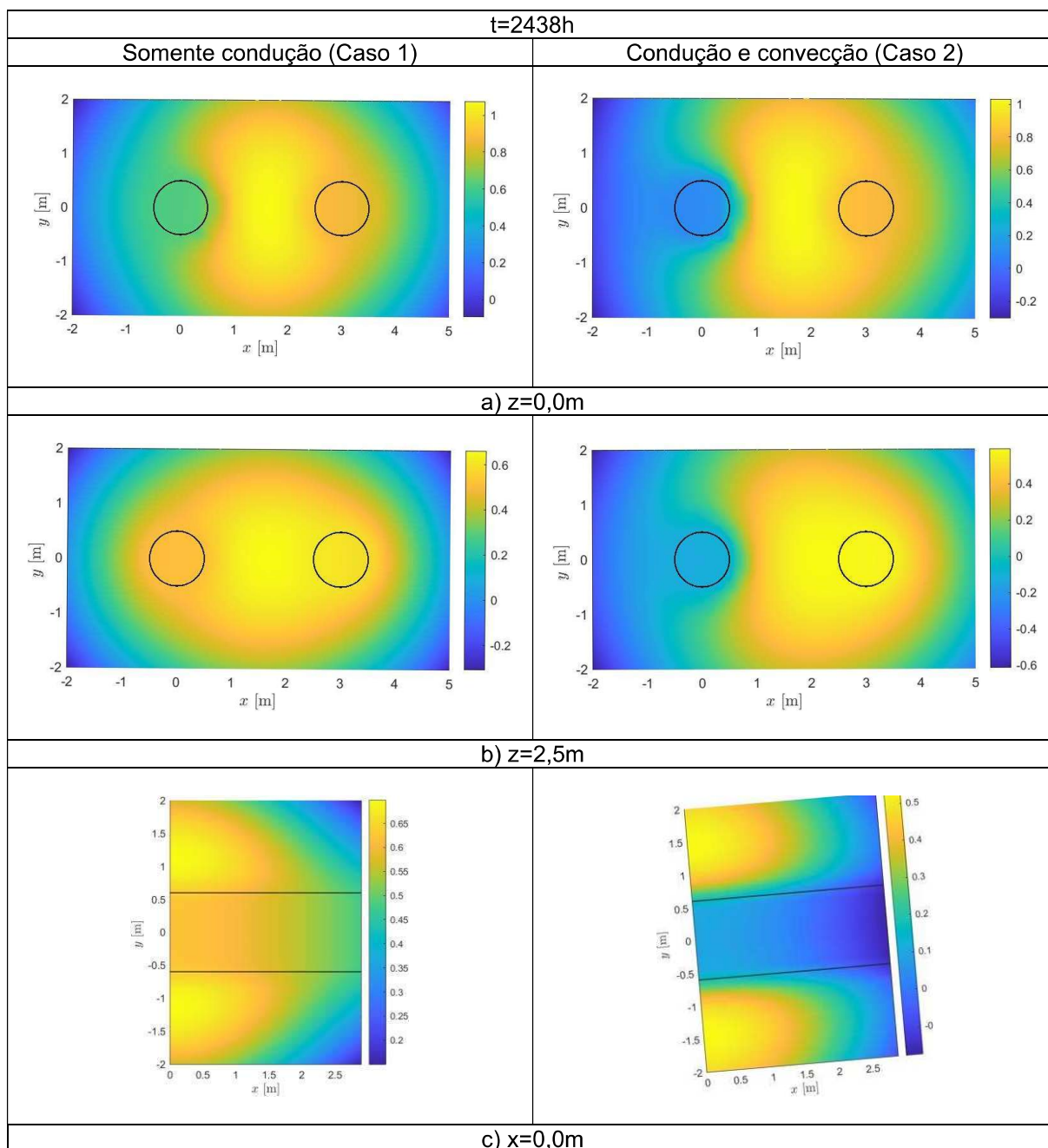
FONTE: O autor (2021).

FIGURA 38 – CAMPO DE TEMPERATURA EM UMA MALHA DE RECEPTORES EM ESCALA LOGARÍTMICA PARA O CASO 1 (SOMENTE CONDUÇÃO) E CASO 2 (CONDUÇÃO E CONVECÇÃO) EM $t=1624\text{h}$: a) $z=0,0\text{m}$; b) $z=2,5\text{m}$; c) $x=0,0\text{m}$.



FONTE: O autor (2021).

FIGURA 39 – CAMPO DE TEMPERATURA EM UMA MALHA DE RECEPTORES EM ESCALA LOGARÍTMICA PARA O CASO 1 (SOMENTE CONDUÇÃO) E CASO 2 (CONDUÇÃO E CONVECÇÃO) EM $t=2438h$: a) $z=0,0m$; b) $Z=2,5m$; c) $x=0,0m$.



FONTE: O autor (2021).

8 CONCLUSÕES

Modelos numéricos usando o método dos elementos de contorno juntamente com soluções analíticas foram propostos para resolver a difusão transiente de calor por condução e problemas que consideram condução e convecção em um meio contendo subdomínios confinados formados por sistemas cilíndricos de várias camadas. A formulação apresentada permite o cálculo do campo de calor dentro e fora dessas inclusões de multicamadas sem discretizar totalmente todas as interfaces internas entre as camadas, como seria necessário em uma formulação do MEC clássica e, portanto, melhora a eficiência do algoritmo. Isso é alcançado incorporando as soluções analíticas para cada inclusão como funções de Green na formulação MEC.

Neste estudo, a variável dependente do tempo é removida aplicando uma transformada de Fourier que permite que o problema seja resolvido no domínio da frequência. A solução proposta para a transferência de calor transiente é calculada para uma ampla faixa de frequências e números de onda axiais, e as séries temporais são então obtidas por meio da transformada inversa (rápida) de Fourier em espaço-tempo. O campo de calor foi estabelecido impondo a continuidade de temperatura e fluxos de calor em contornos virtuais colocados a uma certa distância dos subdomínios heterogêneos.

Foram desenvolvidos códigos para problemas com uma fonte de calor e domínio externo infinito, com condições iniciais iguais a zero, onde foi adotada uma abordagem em 2,5D que permite a simulação de fenômenos tridimensionais através de um somatório de soluções 2D mais simples com diferentes números de onda espaciais. Nesses casos foram consideradas a condução e posteriormente condução e convecção em simultâneo. Foram estudados também problemas bidimensionais para inclusões em um domínio finito com condições iniciais diferentes de zero envolvendo somente o fenômeno de condução.

Os modelos propostos foram implementados e verificados comparando suas soluções com respostas de referência, encontrando uma boa concordância entre os resultados e boa estabilidade numérica, onde os resultados melhoraram para maiores refinamentos apresentados. Esta estratégia de acoplamento proposta pode ser estendida a problemas com diferentes geometrias onde soluções analíticas existem ou podem ser definidas. Exemplos numéricos foram utilizados para ilustrar a

aplicabilidade dos modelos propostos. A análise das respostas de temperatura no domínio do tempo mostrou-se consistente com a física do problema, e os resultados calculados para as simulações mostraram a importância das heterogeneidades dentro dos modelos, uma vez que os resultados térmicos diferem dependendo das propriedades do material das inclusões. Assim, pode-se concluir que estas ferramentas numéricas desenvolvidas são consistentes e se mostram promissoras para aplicações de engenharia.

8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Esse trabalho apresenta a potencialidade dos modelos desenvolvidos que poderiam ser adaptados para diferentes aplicações, eventualmente mais complexas. Nesse contexto, apresentam-se algumas sugestões de estudos futuros, com base nos conhecimentos adquiridos durante o desenvolvimento desta tese:

- a) Os modelos aqui desenvolvidos possuem geometria constante ao longo de uma direção. A sua adaptação para modelos que considerem uma variação de secção transversal ao longo do seu eixo pode ser interessante para alguns problemas físicos, como é o caso de furos de prospecção, que possuem uma secção transversal constante somente até à profundidade da furação.
- b) Adaptação dos estudos desenvolvidos para problemas com diferentes configurações. Nesse exemplo a formulação analítica possui geometria cilíndrica de multicamadas, poderiam ser usadas soluções analíticas com outras geometrias a serem acopladas com o MEC.
- c) Adaptação dos modelos propostos nesta dissertação para o âmbito de propagação de ondas em meio acústicos e elásticos, onde seria possível o estudo do campo tridimensional de ondas gerado por uma por uma fonte dilatacional pontual localizada em um meio sólido ou fluido.
- d) Para este trabalho, admitiu-se que todos os materiais que constituem os sistemas são isotrópicos e homogêneos. A possibilidade de modelação de materiais anisotrópicos e/ou de meios com velocidade variável expandiria a aplicação dos modelos propostos através da utilização de soluções

fundamentais para meios com propriedades térmicas ou velocidade variáveis.

- e) Comparação dos resultados obtidos pelos códigos desenvolvidos com respostas obtidas através de análise experimental. A implementação de ensaios experimentais poderá validar na prática os modelos desenvolvidos e permite o estudo da influência de variáveis não consideradas nos modelos, de forma a avaliar a importância destas no sistema.

REFERÊNCIAS

CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. **Conduction of heat in solids**. Second Edition, Oxford: Oxford University Press, 1959.

Zhuang, J. R.; Werner, K.; Schlünder, E. Study of the analytical solution to the heat transfer problem and surface temperature in a semi-infinite body with a constant heat flux at the surface and an initial temperature distribution. **Heat and Mass Transfer**, v. 30, p. 183–186 ,1995.

BLUCK, M. J.; WOLFENDALE, M. J. An analytical solution to the heat transfer problem in thick-walled hunt flow. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, v. 64, p. 103-111, 2017.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary elements techniques: theory and applications in Engineering**. Berlin: Springer, 1984.

SHI, Y.; BANERJEE, P. K. Boundary element methods for convective heat transfer. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 105(2), p. 261-284, 1993.

SHEHAB, L. S. N. Applying boundary element method to solve the heat conduction problems using constant element. **Journal of Engineering and Development**, v. 19(3), p. 1813-7822, 2015.

BATHE, K. J. **Numerical methods in finite element analysis**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.

GARTLING, D. K. Convective heat transfer analysis by the finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 12(3), p. 365-382, 1977.

FREITAS, V.; Abranches, V.; Crausse, P. Moisture migration in building walls, analysis of the interface phenomena. **Building and Environment**, v. 31(2), p. 99-108, 1996.

KHADER, M. M.; MEGAHED, A. M. Numerical simulation using the finite difference method for the flow and heat transfer in a thin liquid film over an unsteady stretching

sheet in a saturated porous medium in the presence of thermal radiation. **Journal of King Saud University – Engineering Sciences**, v. 25(1), p. 29-34, 2013.

SIMÕES, N. **Transferência de calor em regime transiente modelos analíticos e numéricos**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil), Universidade de Coimbra, Coimbra, 2006.

TADEU, A.; ANTÓNIO, J.; GODINHO L. SIMÕES, N., Boundary elements method analyses of transient heat conduction in an unbounded solid layer containing inclusions. **Computational Mechanics**, v. 34, p. 99-110, 2004.

TADEU, A.; SIMÕES, N. Three-dimensional fundamental solution for transient heat transfer in an unbounded medium, half-space, slab and layered media. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 30(5), p. 338-349, 2006.

SIMÕES, N.; TADEU, A. Fundamental solutions for transient heat transfer by conduction and convection in an unbounded, half-space, slab and layered media in the frequency domain. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29(12), p. 1130-1142, 2005.

BOUCHON, M.; AKI, K. Time-domain transient elastodynamic analysis of 3D solids by BEM. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, p. 1709-1728, 1977.

PHINNEY, R. A. Theoretical calculation of the spectrum of first arrivals in the layered elastic medium. **Journal Geophysical Research**, v. 70, p. 5107-5123, 1965.

GODINHO, L.; TADEU, A.; SIMÕES, N. Study of transient heat conduction in 2.5D domains using the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 28(6), p. 593-606, 2004.

TADEU, A. J. B.; GODINHO, L. M. C. Three-dimensional wave scattering by a fixed cylindrical inclusion submerged in a fluid medium. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23(9), p. 745-755, 1999.

TADEU, A.; KAUSEL, E. Green's functions for two-and-a-half dimensional elastodynamic problems. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 126(10), p. 1093-1097, 2000.

TADEU, A.; ANTÓNIO, J.; GODINHO L. Green's functions for two-and-a-half dimensional elastodynamic problems in a half-space. **Computational Mechanics**, v. 27(6), p. 484-491, 2001.

FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionelles. **Acta Mathematica**, v. 27, p. 365-390, 1903.

KELLOGG, O. D. **Foundations of potencial theory**. Springer: Berlin, 1929.

MUSKHELISHVILI, N. I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity**. Noordhoff: Groningen Holand, 1953.

MIKHLIN, S. G. **Integral equations**. Pergamon: New York, 1957.

KUPRADZE, V. D. **Potencial methods in the theory of elasticity**. Israel Program for Scientific Translation, 1965.

JAWSON, M. A. Integral equation methods in potential theory I. **Proceedings Royal Society**, London, v. 275, p. 23-32, 1963.

SYMM, G. T. Integral equation methods in potential theory II. **Proceedings Royal Society**, London, v. 275, p. 33-46, 1963.

RIZZO, F. J. An Integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of applied Mathematics**, v. 25(1), p. 83-95, 1967.

CRUSE, T. A. A numerical solution in three dimensional elastostatics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 5, p. 1259-1274, 1969.

CRUSE, T. A. An improved boundary integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis. **Computers & Structures**, v. 4, p. 741-754, 1974.

LACHAT, J. C. **A further development of the boundary integral technique for elastostatics**. Thesis (Phd), University of Southampton, 1975.

LACHAT, J. C.; WATSON, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 10, p. 991-1005, 1976.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. Boundary Element Method for Potential Problems. **Applied Mathematical Modeling**, v. 1, p. 372-378, 1977.

BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech Press, 1978.

ANTÓNIO J.; GODINHO L.; TADEU A. Acoustic insulation provided by circular and infinite plane walls. **Journal of Sound and Vibration**, v. 273(3), p. 681-691, 2004.

DE LACERDA, L. A.; WROBEL, L. C.; MANSUR, W. J. A dual boundary element formulation for sound propagation around barriers over an impedance plane. **Journal of Sound and Vibration**, v. 202(2), p. 235-247, 1997.

HOLM H.; STEPHAN E. P. A boundary element method for electromagnetic transmission problems. **Applicable Analysis**, v. 56(3-4), p. 213-226, 1995.

TADEU, A.; SIMÕES, N.; SIMÕES, I. Coupling BEM/TBEM and MFS for the simulation of transient conduction heat transfer. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84(2), p. 179-213, 2010.

TADEU, A.; ANTÓNIO, J.; CASTRO, I. Coupling BEM/TBEM and MFS for the numerical simulation of acoustic wave propagation. **Engineering Analysis with Boundary Element Method**, v. 34(4), p. 405-416, 2010.

RAGHU KUMAR, A. Y.; JAGATH, M. C. Boundary element method for thermal problems: review. **International Journal of Engineering Research & Technology**, v. 2(10), p. 2486-2496, 2013.

PETTRES, R.; LACERDA, L. A.; CARRER, J. A. M. A boundary element formulation for the heat equation with dissipative and heat generation terms. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 51, p. 191-198, 2015.

SALAM, A. A.; WROBEL, L. C. Radial integration boundary element method for two-dimensional non-homogeneous convection-diffusion-reaction problems with variable

source term. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 101, p. 89-101, 2019.

NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. In *Boundary Element Methods in Engineering*. **Computational Mechanics Publications**, Southampton/Springer-Verlag, Berlin, 1982.

WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A. The dual reciprocity boundary element formulation for nonlinear diffusion problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 65, p. 147-164, 1987.

PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C. A. Computer Implementation of the BEM Dual Reciprocity Method for the Solution of Poisson Type Equations. **Software for Engineering Workstations**, v. 5(4), p. 199-206, 1989.

PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C. A. Computer Implementation of the BEM Dual Reciprocity Method for the Solution of General Field Problems. **Communications in Applied Numeric Methods**, v. 6, p. 83-92, 1990.

SIRILATH, J. DESILVA; CHAN, L. C. Coupled boundary element method and finite difference method for the heat conduction in laser processing. **Applied Mathematical Modelling**, v. 32(11), p. 2429-2458, 2008.

GUVEN, I; MADENCI, E. Transient heat conduction analysis in a piecewise homogeneous domain by a coupled boundary and finite method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 56, p. 351-380, 2003.

PORTELA C. C. J.; JAREK A.; LACERDA L. A. Coupling of the boundary element method with a hybrid method for inverse stress analysis of pipelines. **WIT Transactions on Engineering Sciences (online)**; v. 126, p. 137-148, 2019.

KASSAB, A. J.; DIVO, E. A Generalized Boundary Integral Equation for Isotropic Heat Conduction with Spatially Varying Thermal Conductivity. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 18(4), p. 273-286, 1996.

TANAKA, M.; MATSUMOTO, T.; SUD, Y. A dual reciprocity boundary element method applied to the steady-state heat conduction problem of functionally gradient materials

(Study on two-dimensional problems). **Transactions of Japan Society of Mechanical Engineers**, v. 67A(662), p. 1589-1594, 2001.

MERA, N. S.; ELLIOTT, L.; INGHAM D.B.; LESNIC D. Singularities in anisotropic steady-state heat conduction using a boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 53(10), p. 2413-2427, 2002.

MANOLIS, G. D. A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 19(1), p. 73-91, 1983.

BESKOS, D. E. Boundary element method in dynamic analysis. **Applied Mechanics Reviews**, v. 40(1), p. 1-23, 1987.

WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A. **A formulation of the boundary element method for axisymmetric transient heat. International Journal of Heat Mass Transfer**, 24(5), p. 843-850, 1981.

DARGUSH, G. F.; BANERJEE, P. K. Application of the Boundary Element Method to transient heat conduction. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 31(6), p. 1231-1247, 1991.

DAVIES, M. G. Wall transient heat flow using time-domain analysis. **Building and Environment**, v. 32(5), p. 427-446, 1997.

CARRER, J. A. M.; MANSUR, W. J. Alternative time-marching schemes for elastodynamic analysis with the domain boundary element method formulation. **Computational Mechanics**, Springer Verlag, v. 34 (5), p.387-399, 2004.

RIZZO, F. J.; SHIPPY, D. J. A method of solution for certain problems of transient heat conduction. **AIAA Journal**, v. 8, p. 2004-2009, 1970.

CHENG, A. H. D.; ABOUSLEIMAN, Y.; BADMUS, T. A Laplace transform BEM for axisymmetric diffusion utilizing pre-tabulated Green's function. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 9(1), p. 39-46, 1992.

AMADO, J. M.; TOBAR, M. J. Application of the Laplace transform dual reciprocity boundary element method in the modelling of laser heat treatments. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29(2), p. 126-135, 2005.

STEHFEST, H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transform. **Communications of the Association for Computing Machinery**, v. 13(1), p. 47-49, 1970.

PAPOULIS, A. A new method of inversion of the Laplace transform. **Quart. Appl. Math.**, v. 14, p. 405-414, 1957.

TADEU, A.; SIMÕES, N.; SIMÕES, I. Coupling BEM/TBEM and MFS for the simulation of transient conduction heat transfer. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84(2), p. 179-213, 2010.

TADEU, A.; SIMÕES, N. Three-dimensional fundamental solution for transient heat transfer in an unbounded medium, half-space, slab and layered media. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 30(5), p. 338-349, 2006.

SIMÕES, N.; TADEU, A. Transient conduction and convection heat transfer across a multi-layer floor subjected to multiple heat sources. **Building and Environment**, v. 41(10), p. 1299-1310, 2006.

BRIGHAM, E. O. **The fast Fourier transform and its applications**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1988.

COOLEY, W.; TUKEY, J. W. **Algorithm for the machine calculation of Complex Fourier Series**. *Math. of Comput.*, v. 19, p. 297-301, 1965.

BOUCHON, M.; AKI, K. Discrete wavenumber representation of seismic-source wave field. **Bulletin of the Seismological Society of America**, v. 67, p. 259-277, 1977.

WATSON, G. N. **A treatise on the theory of Bessel**. Second Edition, Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements An Introductory Course**. Southampton: Mc Graw-Hill, 1992.

BEER, G.; IAN, S.; DUENSER, C. **The Boundary Element Method with Programming**. NewYork: SpringerWienNewYork, 2008.

BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech Press, 1978.

TADEU, A. J. B.; SANTOS, P. F. A.; KAUSEL, E. Closed-form integration of singular terms for constant, linear and quadratic boundary elements - Part I: SH wave propagation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 23(8), pp. 671-681, 1999.

TADEU, A. J. B.; SANTOS, P.F.A.; KAUSEL, E. Closed-form integration of singular terms for constant, linear and quadratic boundary elements - Part II: SV-P wave propagation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 23(9), pp. 757-768, 1999.

WROBEL, L. C. **The Boundary Element Method V1: Applications in Thermo-Fluids and Acoustics**. First Edition, Sussex: John Wiley & Sons, 2002.