

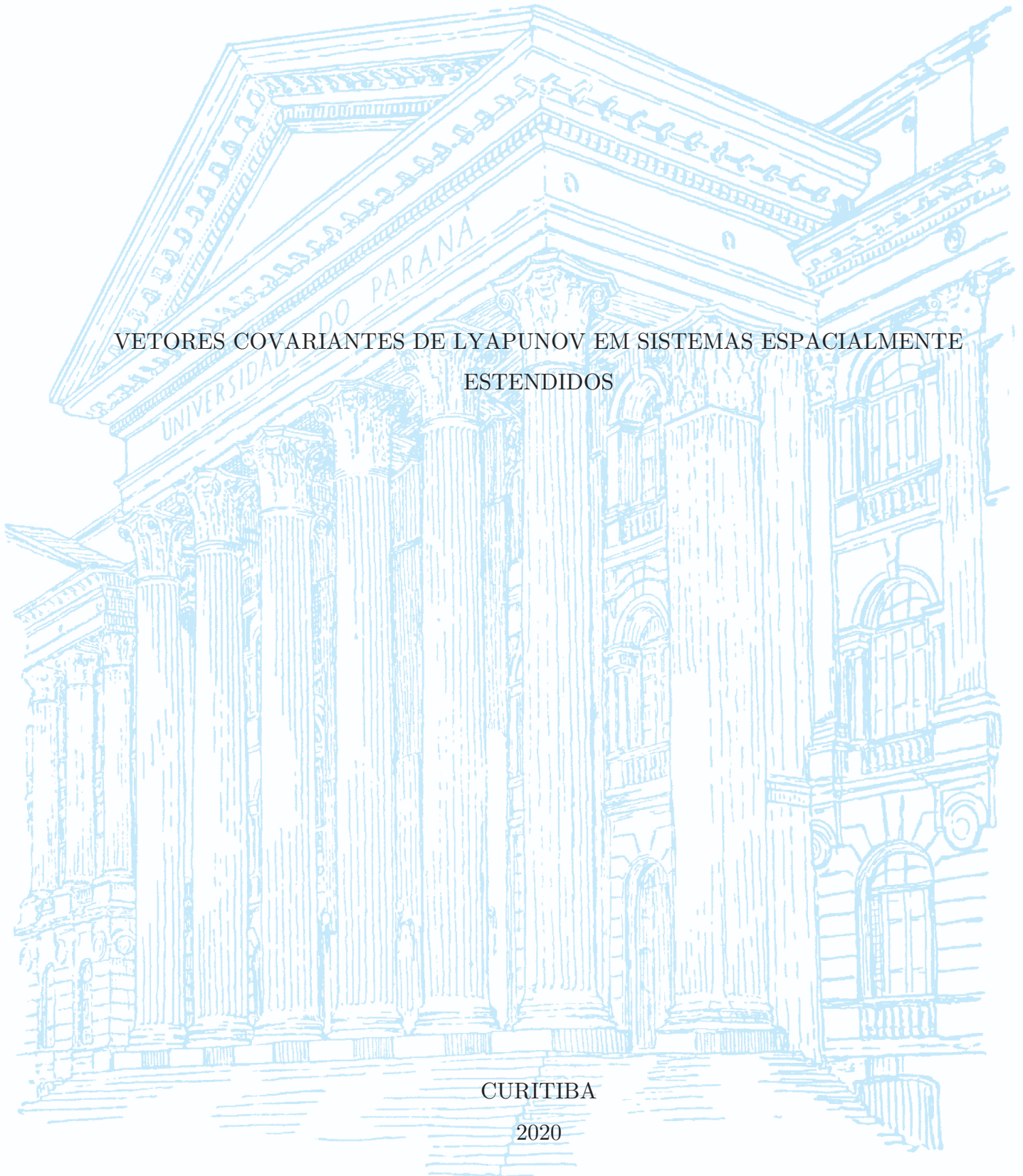
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LUIZ MENON JUNIOR

VETORES COVARIANTES DE LYAPUNOV EM SISTEMAS ESPACIALMENTE
ESTENDIDOS

CURITIBA

2020



LUIZ MENON JUNIOR

VETORES COVARIANTES DE LYAPUNOV EM SISTEMAS ESPACIALMENTE
ESTENDIDOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Setor de Exatas, da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Werner Beims.

CURITIBA

2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

M547v Menon Junior, Luiz
Vetores covariantes de Lyapunov em sistemas espacialmente estendidos [recurso eletrônico] /
Luiz Menon Junior. – Curitiba, 2020.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências da Terra, Programa de Pós-
Graduação em Física, 2020.

Orientador: Marcus Werner Beims.

I. Expoentes de Lyapunov. 2. Redes de mapa acopladas. I. Universidade Federal do Paraná. II.
Beims, Marcus Werner. III. Título.

CDD: 003.85

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928



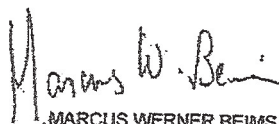
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO FÍSICA - 40001016020P4

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de LUIZ MEMON JUNIOR intitulada: "Vetores covariantes de Lyapunov em sistemas espacialmente estendidos", sob orientação do Prof. Dr. MARCUS WERNER BEIMS, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 27 de Fevereiro de 2020.


MARCUS WERNER BEIMS

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)


THIAGO DE LIMA PRADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)


CESAR MANCHEIN

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA)

aos meus pais

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus pais pelo incentivo e apoio que me deram e ainda tem dado para minha formação. Ao professor Marcus W. Beims, que admiro e estimo muito, pela orientação, dedicação e amizade. Também aos professores Marcos Gomes da Luz e Rafael Marques da Silva pelas sugestões que enriqueceram e ajudaram a dar forma nesta versão final do texto. Ao secretário Leandro Florentino pelo seu trabalho e amizade.

O meu obrigado aos colegas do grupo de pesquisa em especial ao Eduardo Brugnago que me passou muitas dicas sobre implementações computacionais. Também ao Miguel Prado Reynoso pelas inúmeras discussões sobre o tema e pela ajuda na otimização de vários procedimentos numéricos utilizados neste trabalho. O meu agradecimento também aos colegas e amigos da Pós Graduação, os quais não citarei nomes, pois são muitos e também por receio de esquecer alguém e cometer alguma injustiça.

Agradeço a meus amigos aqui de Curitiba, ao pessoal do equinócio e ao meu roommate Douglas Tribek.

Gostaria de citar o professor Fabiano M. de Andrade (UEPG) que me incentivou em escolher a UFPR para realizar o mestrado. Também não posso esquecer do Danilo Cius, Gustavo Uhdre, Karen Ribeiro e Maíke Faustino que mesmo longe sempre me deram apoio.

Obrigado a Alexandra Elbakyan e a comunidade que trabalha para manter funcionando a plataforma Sci-Hub fornecendo conhecimento de forma livre. Também de uma forma geral a comunidade que se compromete a desenvolver e prestar manutenção aos softwares livres para a Ciência.

Agradeço a UFPR, o departamento de Física e ao PPG em Física pela estrutura e por ultimo a CAPES pelo fomento.

“ More Is Different ”
(Anderson, P. W.)

RESUMO

Os expoentes de Lyapunov são uma das ferramentas mais usadas na caracterização de sistemas dinâmicos não lineares e descrevem as taxas de crescimento e contração de perturbações aplicadas a sua trajetória em diferentes direções do espaço de fase. Porém com as técnicas convencionais para a obtenção dos expoentes Lyapunov é impossível identificar a real direção dessas taxas de crescimento. Essa informação é acessível apenas através dos vetores covariantes de Lyapunov (VCLs). Embora o conceito de vetores covariantes de Lyapunov seja bem estabelecido há muito tempo, ainda não haviam algoritmos eficientes para obtenção numérica destes vetores até o recente desenvolvimento sugerido por Ginneli e colaboradores [1]. Neste sentido utilizamos esse procedimento para revisar alguns resultados já estabelecidos na literatura e na caracterização de sistemas espacialmente estendidos, mais especificamente redes mapas quadráticos acoplados e osciladores de Kuramoto-Sakaguchi, sendo que este último apresenta um comportamento espaço-temporal que vem sendo exaustivamente explorado, os chamados estados quimera.

Palavras-chave: expoentes de Lyapunov. estados quimera. mapas acoplados. hiperbolicidade.

ABSTRACT

Lyapunov exponents are one of the most used tools in the characterization of nonlinear dynamic systems, capable of describing the growth rates of disturbances applied on trajectories in different directions of phase space. However with conventional techniques to obtain Lyapunov exponents it is impossible to identify the real direction of these growth rates. This information is accessible to covariant Lyapunov vectors. While this concept has been well established for a long time there were still no efficient algorithms for obtaining these vectors numerically until the recent development suggested by Ginneli et al.[1]. In this sense we use this procedure to revisit some results already established in the literature and also characterize some spatially developed systems. More specifically, coupled map lattice of quadratic maps and Kuramoto-Sakaguchi oscillators. The latter shows a space-time behavior that has been exhaustively explored, the so-called chimera states, consisting of the coexistence of incoherent oscillations with synchronized behavior.

Keywords: Lyapunov exponent's. chimera states. coupled map lattice. hyperbolicity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Espaço de fase para um sistema de $n = 3$ dimensões que evolui de $\mathbf{x}(0)$ até $\mathbf{x}(t)$, em que a linha é a trajetória e as setas indicam o tempo. . . .	19
Figura 2 – Iterações do mapa quadrático com $a = 0,59$, nota-se que após um numero de iteradas o x converge para um ponto fixo.	19
Figura 3 – (a) Iterações do mapa quadrático com $a = 0,9$ com pontos fixos de período-2 (a) Iterações do mapa quadrático com $a = 1,3$ com pontos fixos de período-4	21
Figura 4 – (a) Diagrama de bifurcações para o mapa quadrático gerado a partir dos seguintes passos: (i) Fixamos um valor inicial para o parâmetro $a = 0,1$; (ii) Escolhemos uma condição inicial x_0 em um intervalo $[-1,1]$; (iii) Iteramos o mapa e descartamos as primeiras $n = 300$ iterações transientes; (iv) Iteramos o mapa salvando os valores de x_n , e do parâmetro a nas próximas 700 iterações; (v) Escolhemos uma nova condição inicial dentro do intervalo $[-1,1]$ (vi) Reexecutamos os passos (iii) a (v) até um número suficiente de condições iniciais; (vi) acrescentamos um valor $\Delta a = 0,01$ em a e repetimos os passos (iii) a (vi) até que $a = 2,0$. (b) Ampliação da Figura (a) no intervalo $a = 1,1$ até $a = 2,0$	22
Figura 5 – Trajetória no espaço de fase para o sistema de Lorenz com parâmetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$	23
Figura 6 – Ilustração esquemática da seção de Poincaré para um fluxo tridimensional.	23
Figura 7 – Alguns casos de subespaços estáveis e instáveis e suas respectivas orbitas: (a) Dimensão $n = 2$, com $n_i = n_e = 1$ e $n_c = 0$; (b) $n = 3$, com $n_i = 1$, $n_e = 2$ e $n_c = 0$ em que o subespaço estável corresponde a dois autovalores reais; (c) $n = 3$, com $n_i = 1$, $n_e = 2$ e $n_c = 0$ em que o subespaço estável corresponde a um par de autovalores em que um é complexo conjugado do outro; (d) $n = 3$, com $n_i = 2$, $n_e = 2$ e $n_c = 0$ em que o subespaço instável corresponde a um par de autovalores em que um é complexo conjugado do outro. Figura retirada de [2] com adaptações.	24
Figura 8 – Variedades em um ponto de sela x^* associadas aos subespaços estáveis e instáveis para um sistema não linear bidimensional.	26
Figura 9 – EL (vermelho) para o mapa quadrático com diferentes valores de a em comparação ao diagrama de bifurcações(cinza)	28

Figura 10 – Estabilização dos dois expoentes de Lyapunov para o mapa de Henon	30
Figura 11 – Representação esquemática da ação do matrizes simétricas $\mathbf{M}_{l,k}^T$ e $\mathbf{M}_{l,k}$ no espaço tangente para um tempo discreto k	31
Figura 12 – (a) Subespaço $(\Gamma_k^i)^\pm$; (b) Subespaço $(\Gamma_k^i)^\pm \setminus (\Gamma_k^i)^{i\pm 1}$	32
Figura 13 – (a) Atrator de Hénon e em cores os ângulos entres as variedades estável e instável. As flechas indicam onde existem tangências entre as variedades; (b) Distribuição dos ângulos entre as variedades.	35
Figura 14 – Em cores temos a série temporal da variável x para sistema de Lorenz eq. 3.31, em que as cores indicam o Ângulo entre a variedade instável e a variedade central, em preto a serie temporal da derivada do Ângulo $\dot{\theta}_{12}$ em relação ao tempo.	37
Figura 15 – (a) Atrator de Lorenz e perfil espacial dos ângulos entre a variedade instável e central ao longo da trajetória no espaço fase; (b) perfil de $\dot{\theta}_{12}$ ao longo da trajetória no espaço de fase.	37
Figura 16 – Serie temporal da variável z para o oscilador de Rössler em preto, em azul está a série temporal de $-\dot{\theta}_{23}$ e as barra vermelhas indicam o tempo de antecipação dos picos em z .	38
Figura 17 – Atrator de Rössler e perfil espacial dos ângulos entre a variedade estável e central ao longo da trajetória no espaço fase.	38
Figura 18 – Sobreposição de 50 tempos diferentes de iteração para amplitude espacial de uma RMA de mapas quadráticos com $n = 100$: (a) padrão periódico com $a = 1,33$ e $e = 0,3$; (b) Padrão aleatório estático com $a = 1,48$ e $e = 0,1$.	40
Figura 19 – Sob: reposição de 50 tempos diferentes de iteração para amplitude espacial de uma RMA de mapas quadráticos com $n = 100$: (a) supressão de caos com $a = 1,72$ e $e = 0,1$; (e) defeito browniano com $a = 1,85$ e $e = 0,1$.	41
Figura 20 – Diagrama espaço-temporal binário, com $x^* \approx 0,51$, para uma RMA de $n = 100$ mapas com parâmetros $a = 1,85$ e $0,1$ (defeito browniano), com tempo discreto de iterações de $k = 16000$ até 24000 em que os pontos são plotados a cada 50 iterações.	42
Figura 21 – Sobreposição de 50 tempos diferentes de iteração para amplitude espacial de uma RMA de mapas quadráticos com $n = 100$: (a) Competição de padrões com $1,68$ e $e = 0,3$; (b) Caos desenvolvido com valore de $a = 1,94$ e $e = 0,1$.	42
Figura 22 – Média temporal dos ângulos entre VCLs: (a) Padrão aleatório estático com $a = 1,48$ e $e = 0,1$; (b) Supressão do caos, com $a = 1,72$ e $e = 0,1$; (c) Defeito browniano, com $a = 1,85$ e $e = 0,1$; (d) Competição de padrões, com $a = 1,68$ e $e = 0,3$; (e) Caos desenvolvido $a = 1,94$ e $e = 0,1$.	44

Figura 23 – Espectro de Lyapunov via dinâmica para frente no tempo (vermelho) para trás no tempo a menos de um fator -1 , calculados em um tempo discreto de $5 \cdot 10^4$ iterações após um transiente de $5 \cdot 10^3$ iterações nas duas dinâmicas: (a) Padrão aleatório estático com $a = 1,48$ e $e = 0,1$; (b) Supressão do caos, com $a = 1,72$ e $e = 0,1$; (c) Defeito browniano, com $a = 1,85$ e $e = 0,1$; (d) Competição de padrões, com $a = 1,68$ e $e = 0,3$; (e) Caos desenvolvido $a = 1,94$ e $e = 0,1$	47
Figura 24 – Densidade da violação da DDO para a RMA: (a) Padrão aleatório estático com $a = 1,48$ e $e = 0,1$; (b) Supressão do caos, com $a = 1,72$ e $e = 0,1$; (c) Defeito browniano, com $a = 1,85$ e $e = 0,1$; (d) Competição de padrões, com $a = 1,68$ e $e = 0,3$; (e) Caos desenvolvido $a = 1,94$ e $e = 0,1$	48
Figura 25 – (a) Representação das conexões de um oscilador (traço azul) com acoplamento não local de raio $R = 3$. (b) Representação de uma rede da ligação de 100 osciladores com acoplamento não local de raio $R = 30$	49
Figura 26 – Diagrama espaço-temporal (esquerda) e perfil espacial a (direita) para $n = 150$ osciladores de Kuramoto-Sakaguchi com acoplamento não-local e raio de acoplamento $R = 0,30 n$ (a) estados sincronizados $\alpha = 1,37$; (b) Estados quimera $\alpha = 1,47$; (c) Estados dessincronizados $\alpha = 1,57$	51
Figura 27 – Evolução do parâmetro de ordem de Kuramoto $r(t)$ para os osciladores de Kuramoto-Sakaguchi para os casos: (i) $\alpha = 1,37$ <i>sincronizado</i> (ciano) o parâmetro se mantém contante e igual a $1,0$ indicando a total sincronização; (ii) $\alpha = 1,47$ <i>quimera</i> (verde) onde existe o parâmetro de ordem oscila indicando sincronização parcial; (iii) $\alpha = 1,57$ <i>incoerente</i> (roxo) como esperado para este caso o parâmetro de ordem é sempre menor do que os casos <i>i</i> e <i>ii</i>	52
Figura 28 – Espectros de Lyapunov calculados na evolução dinâmica para frente no tempo (vermelho) e também para trás no tempo (azul) para os casos: (a) Sincronizado com $\alpha = 1,37$ <i>sincronizado</i> , $\alpha = 1,37$; (b) Estado quimera com fase $\alpha = 1,47$ (c) Para fase $\alpha = 1,57$ não sincronizado.	53
Figura 29 – Média temporal dos ângulos entre VLS para os osciladores acoplados: (a) Estados sincronizados com $\alpha = 1,37$; (b) Estados quimera $\alpha = 1,47$; (c) Estados dessincronizados $\alpha = 1,57$	54

Figura 30 – Violação da DDO para os casos:(a) *sincronizado* $\alpha = 1,37$ não existe violação da DDO na maioria dos pares, exceto por alguns pontos bem específicos; (b) *quimera* $\alpha = 1,47$ existem duas regiões onde ν_{ij} é maior que corresponde aos modos dessincronizados e a região onde ν_{ij} possui valores próximos a zero corresponde aos modos sincronizados; (c) $\alpha = 1,57$ *dessincronizado* não existe região de ν_{ij} nula indicando que para esse caso só existem modos dessincronizados; (d) Comparação entre a violação da DDO com espectro de Lyapunov para situação de quimera, percebe-se a relação entre a mudança de um modo para o outro. 55

Figura 31 – (a) Distribuição de frequência normalizada de ângulos entre VCL em escala logarítmica no eixo y, detalhes no texto; (b) Ângulo mínimo entre pares arbitrários de VLCs para o estado quimera nos osciladores de Kuramoto-Sakaguchi acoplados. 57

SUMÁRIO

1	Introdução	15
2	Sistemas Dinâmicos	18
2.1	Mapas	18
2.2	Fluxos	22
2.3	Instabilidade e espaço tangente	23
2.4	Variedades	25
3	Expoentes e vetores de Lyapunov	27
3.1	Expoentes de Lyapunov	27
3.2	Vetores de Gram-Schmidt	29
3.3	Decomposição de Oseledets	31
3.4	Vetores covariantes de Lyapunov	32
3.4.1	Procedimento Numérico	34
3.5	Exemplos Numéricos	35
3.5.1	Mapa de Henón	35
3.5.2	Prognóstico em sistemas caóticos	36
4	Vetores Covariantes de Lyapunov em sistemas espacialmente estendidos	39
4.1	Rede de mapas acoplados	39
4.1.1	Ângulo médio entre os VCL	43
4.1.2	Espectro de Lyapunov dominância da decomposição de Oseledets	44
4.2	Estados Quimera	48
4.2.1	Espectro de Lyapunov	51
4.2.2	Ângulo médio entre os VCLs e a violação da DDO	53
4.2.3	Desacoplamento hiperbólico entre modos	56
5	Considerações finais	58
	Referências	59

1 INTRODUÇÃO

Expoentes e vetores de Lyapunov

Um das ferramentas mais usadas na descrição da estabilidade em sistemas dinâmicos são os Expoentes de Lyapunov [3, 4, 5] os quais são empregados nas mais diversas áreas em que fenômenos não-lineares desempenham um papel fundamental. Além das ciências exatas tradicionais como física [6], engenharia [7] e ciência da computação [8] também podemos citar sua utilidade na biologia [9, 10], neurociência [11], ciências sociais [12] e dinâmica populacional [13]. De fato que o desenvolvimento da teoria de Lyapunov se deu alguns anos antes da área de pesquisa em sistemas dinâmicos não-lineares caóticos se estabelecer, precisamente em 1892 em sua tese intitulada “*The general problem of the stability of motion*”. Porém o uso de sua teoria para caracterização de sistemas dinâmicos se tornou popular após 1963, ano em que Edward Lorenz verificou numericamente o chamado “efeito borboleta”, deslumbrado em 1889 por Poincaré no problema de três corpos [14]. Em poucas palavras podemos dizer que o expoente de Lyapunov é capaz de medir o quanto um sistema é sensível a uma pequena mudança nas suas condições iniciais. Ou seja, estas mudanças podem alterar significativamente a dinâmica.

Em um panorama teórico a análise de Lyapunov estar bem desenvolvida, foi apenas em 1979 que um método numérico foi desenvolvido para o cálculo dos Expoente de Lyapunov; E foi concebido independentemente por Shimada e Nagashima [15], e Bennetin [16] é baseado em sucessivos procedimentos de ortogonalização de vetores no espaço tangente a trajetória, os quais são denominados vetores de Gram-Schmidt (VGS). Entretanto, os VGS não são invariantes sob reversão temporal e perdem a sua orientação durante a dinâmica, não revelando propriedades da estrutura geométrica do espaço tangente. Para acessar estas propriedades necessitamos de vetores que decomponham o espaço em direções covariantes de Lyapunov, que é chamada de decomposição de Oseledet, em inglês “*Oseledets’ Splitting*”. Apesar da definição dos vetores covariantes de Lyapunov estar bem estabelecida, conforme o trabalho de Ruelle [17], o assunto não despertou interesse entre os pesquisadores da área, uma vez que ainda não existiam algoritmos eficientes que deixavam estes vetores numericamente acessíveis. Entretanto, em 2007 Ginneli e colaboradores [1] desenvolveram um método eficiente para o cálculo dos vetores. Desde então muitos trabalhos vem empregando esta metodologia. Como exemplo, podemos apontar o seu uso na caracterização da hiperbolicidade em sistemas Hamiltonianos [18]. E também na relação entre os ângulos dos VCLs com as chamadas armadilhas dinâmicas [19], que ocorrem no espaço de fase destes sistemas. Os VCLs veem se mostrado úteis no prognóstico de sistemas caóticos, exemplos disto são encontrados em: Modelos atmosféricos de multi-escalas [20],

antecipações de *burstings* e picos de grande amplitude em reações químicas complexas [21] e lasers não-lineares [22].

No que diz respeito aos sistemas espacialmente estendidos, ainda há poucos trabalhos utilizando os VCL, podemos enumerar aqui alguns de maior relevância, como por exemplo o da Ref. [23] na qual foi mostrado que os vetores de Lyapunov podem ser usados para traçar uma dimensão efetiva de sistemas espacialmente estendidos. Outro trabalho importante foi realizado por Xu e Paul [24] no qual utilizaram os VCL para caracterizar o problema da convecção caótica de Rayleigh-Bénard.

Mapas acoplados e quimeras

Em física muitas das equações fundamentais são descritas por sistemas espacialmente estendidos, alguns exemplos elementares são as equações de difusão, de onda e de Schrödinger. Entretanto, comportamentos e padrões complexos que comumente são observados na natureza, como turbulência, estruturas Turing, e caos espaço-temporal emergem de equações não-lineares cuja as soluções, podem ser de difícil acesso. Tendo em vista estas dificuldades, uma alternativa para compreender os fenômenos não-lineares com dinâmica espaço-temporal são as redes de mapas acoplados introduzidas por Kunihiro Kaneko no começo da década de 90 [25, 26], que são sistemas espacialmente estendidos com números elevados de graus de liberdade e evolução temporal discreta. E se mostraram úteis pois são capazes de mimetizar fenômenos naturais como convecção de calor [27] e a dinâmica de formação de nuvens [28], também foram utilizadas em modelos ecológicos [29] e na simulação de muitos neurônios acoplados [30]. Além disso, servem como um bom “laboratório” para os estudos de sistemas dinâmicos com muitos graus de liberdade.

Outro tipo de sistema espacialmente estendido que abordaremos neste texto é o sistema formado por osciladores de fase acoplados. Estes sistemas evoluem continuamente no tempo mas espacialmente são discretos. Especificamente trataremos dos osciladores que apresentam o padrão espaço-temporal chamado de estados quimera que é dividido em uma população de osciladores em total sincronismo e outra que oscila incoerentemente. Tal comportamento foi relatado pela primeira vez por Kuramoto e colaboradores em sua seminal publicação “*Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators*” [31]. Porém a nomenclatura para este padrão foi cunhada por Abrams e Strogatz [32] em alusão as criaturas mitológicas chamadas de quimera que eram formadas pela composição de animais diferentes [33]. E este tipo de padrão vem sendo exaustivamente investigado, pois é observado com frequência na natureza. um exemplo de grande interesse é o chamado “*unihemispheric slow-wave sleep*” [34] que acontece no cérebro de aves migratórias e de alguns mamíferos aquáticos em que durante o sono metade do cérebro descansa e os osciladores neuronais desta região estão sincronizados enquanto a outra

metade do cérebro permanece em atividade e os osciladores estão dessincronizados [35]. Os estados quimera também aparecem em redes de estações e subestações de energia [36], junções de Josephson [37] e em metamateriais SQUID em inglês “Superconducting Quantum Interference Device” que servem como sensores extremamente sensíveis que detectam baixos campos magnéticos [38].

Neste cenário, esta dissertação teve como objetivo a investigação dos vetores covariantes de Lyapunov para sistemas com muitos graus de liberdade. Sendo eles, redes de mapas acoplados e também os osciladores de fase de Kuramoto-Sakaguchi que apresentam o padrão espaço-temporal de quimera. Com objetivo de caracterizar e identificar quais propriedades destes sistemas são acessíveis via estes vetores.

A dissertação está dividida em mais quatro capítulos, sendo que, no capítulo 2 fazemos um apanhado de definições no tocante a teoria de sistemas dinâmicos que serão úteis durante o decorrer do texto. No capítulo 3 apresentamos a teoria envolvendo expoentes de Lyapunov e também os vetores covariantes de Lyapunov. Ainda neste capítulo mostramos alguns exemplos numéricos elementares, já bem postos na literatura. No capítulo 4 introduzimos a teoria sobre os sistemas que iremos abordar, mapas e osciladores de Kuramoto-Sakaguchi acoplados, e os caracterizamos via a metodologia apresentada no capítulo 3. Por último temos as considerações finais no capítulo 5.

2 SISTEMAS DINÂMICOS

Um sistema dinâmico é definido como a descrição matemática de um sistema cujo os estados evoluem positivamente no tempo [2]. Esta evolução é dada através de um operador de evolução temporal L , isto é,

$$L^t(x_0) \equiv x_t, \quad (2.1)$$

em que x_0 é a condição inicial do sistema no tempo $t = 0$ e x_t é o estado deste sistema em um tempo t . Os sistemas dinâmicos são ditos *determinísticos* quando uma condição inicial leva a apenas um estado final, *estocásticos* ou *aleatórios* quando para uma condição inicial os possíveis estados finais obedecem uma distribuição de probabilidades [39]. O tempo de evolução t em (2.1) pode ser tanto discreto quanto contínuo. Para o tempo de evolução discreto o sistema é definido a partir de um mapa

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k), \quad (2.2)$$

isto é, um número k de aplicações recursivas da função \mathbf{F} a partir da condição inicial, a notação em negrito indica um vetor. Para t contínuo em (2.1) o sistema é definido como *fluxo* e a evolução temporal é dada por um conjunto de equação diferenciais, ou seja

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}(t_0)]. \quad (2.3)$$

Cada estado do sistema, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ é representado por um ponto no *espaço de fase*, como mostrado na Figura 1¹, cuja a dimensão equivale a dimensão do sistema.

2.1 Mapas

Mapas, especificamente os unidimensionais, são os sistemas mais simples que podem exibir movimento caótico, neles são encontrados muitos comportamentos que também surgem em sistemas com mais graus de liberdade [2]. Intrinsecamente a evolução dinâmica de um mapa é discreta e a representamos na forma da equação 2.2, em que $\mathbf{x}_k = [x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_k^{(n)}]^T$ é o vetor denominado de estado do sistema no tempo discreto k , para $k = 0$ este vetor é chamado de estado inicial ou simplesmente de condição inicial. Outra definição importante é a de *órbita*, isto é o conjunto de pontos

$$\{\mathbf{x}_0, \mathbf{F}(\mathbf{x}_0), \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)), \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0))), \dots\},$$

gerados a partir das sucessivas iterações da condição inicial do sistema. Denotemos $\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)))$ como $f^{[3]}$, ou seja, a terceira iterada ou iteração e $f^{[k]}$ como a k -ésima iteração.

¹ As figuras que não estão referenciadas foram elaboradas pelo autor

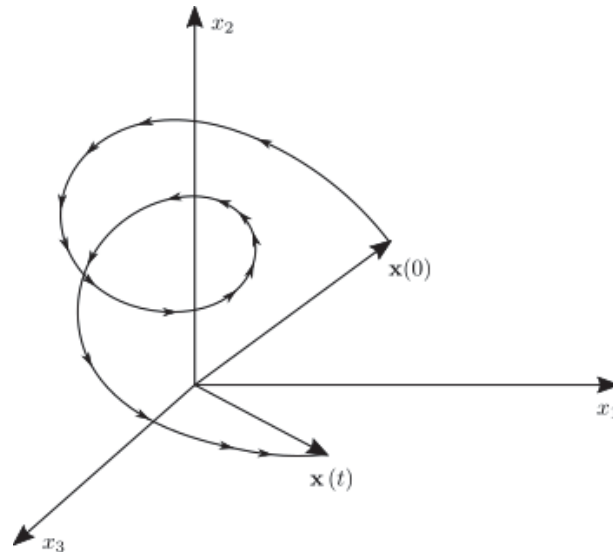


Figura 1 – Espaço de fase para um sistema de $n = 3$ dimensões que evolui de $\mathbf{x}(0)$ até $\mathbf{x}(t)$, em que a linha é a trajetória e as setas indicam o tempo.

Para o caso unidimensional se a k -ésima iteração resultar no mesmo valor de entrada, tal que $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$, dizemos que x^* é um *ponto fixo*.

Se um ponto qualquer x pertencer ao intervalo $(x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ e na k -ésima iterada satisfazer $f^{[k]}(x) = x^*$ então este ponto fixo é chamado de *atrativo* (ou *assintoticamente estável*). Se temos um ponto $x \neq x^*$ contido no intervalo $(x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ e a relação $|f(x) - x^*| > |x - x^*|$ é satisfeita dizemos que x^* é um ponto fixo repulsivo.

Podemos ilustrar como uma trajetória converge até o ponto fixo utilizando o mapa quadrático dado por

$$x_{k+1} = 1 - ax_k^2, \tag{2.4}$$

em que a é o parâmetro de não linearidade. Mostramos na Figura2 a evolução temporal para o mapa quadrático com $a = 0,59$, percebe-se que a partir da trigésima quarta iterada o sistema converge para um ponto fixo. Um critério útil para definir se o ponto fixo x^*

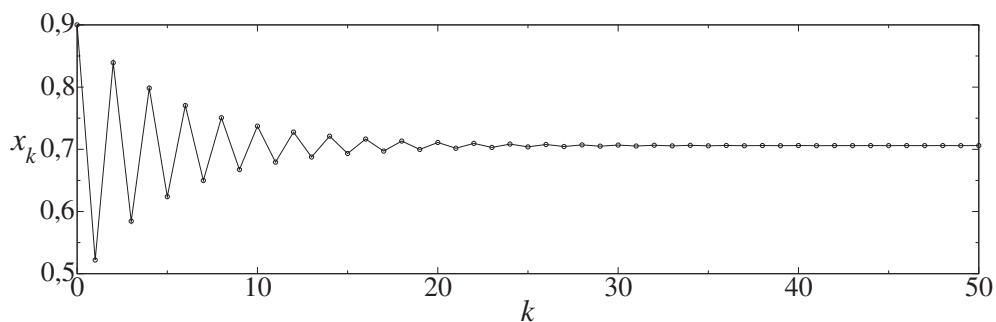


Figura 2 – Iterações do mapa quadrático com $a = 0,59$, nota-se que após um numero de iteradas o x converge para um ponto fixo.

é atrativo(*assintoticamente estável*) ou repulsivo (*instável*) é analisar o valor absoluto

da derivada do mapa f no ponto x^* , seguindo este procedimento temos as seguintes propriedades:

- se $|f'(x^*)| < 1$, então x^* é atrativo.
- se $|f'(x^*)| > 1$, então x^* é repulsivo.

Para classificar os pontos fixos de mapas com dimensões maiores que 1 consideramos a linearização da seguinte forma: Seja $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^n$ um mapa, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ um ponto, aplicando uma pequena perturbação também de dimensão n tem-se

$$\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}). \quad (2.5)$$

Utilizando uma aproximação de primeira ordem, a taxa que a perturbação se move para perto ou para longe do ponto fixo é dada por

$$\delta\mathbf{x} = \frac{\partial\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)}{\partial\mathbf{x}}\delta\mathbf{x} \quad (2.6)$$

em que

$$\mathbf{J} \equiv \frac{\partial\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)}{\partial\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

é a matriz Jacobiana, os ponto fixos então são caracterizados da seguinte maneira:

- Se a magnitude de cada autovalor de \mathbf{J} é menor que 1, então (\mathbf{x}^*) é um ponto fixo assintoticamente estável,
- Se a magnitude de pelo menos 1 autovalor de \mathbf{J} é maior que 1, então (\mathbf{x}^*) é instável,

isto também é válido para autovalores complexos. O ponto fixo \mathbf{x}^* é definido como hiperbólico se nenhum dos autovalores da matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ possui magnitude 1. E também, se (\mathbf{x}^*) é hiperbólico e pelo menos um auto valor de $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*)$ possui magnitude maior que 1 e pelo um autovalor menor que , então (\mathbf{x}^*) é um ponto de sela [40]. Como a matriz jacobiana calculada no ponto de sela possui um autovalor maior que 1 então este ponto é instável no sentido de que as trajetórias perturbadas nas vizinhança de \mathbf{x}^* irão se afastar de \mathbf{x}^* .

Outra noção central no estudo de sistemas dinâmicos é a periodicidade [41], chamamos de ponto periódico aquele que se repete depois de um número qualquer de iterações, ou seja $f^{[l]}(x^*) = x^*$ em que x^* é denominado como ponto de período l . Na Figura (3) temos dois casos para o mapa quadrático, com $a = 0,9$ que apresenta um período-2, e quando é $a = 1,3$, neste caso possui período-4.

¹ Assumindo que a função é diferenciável em x^* s

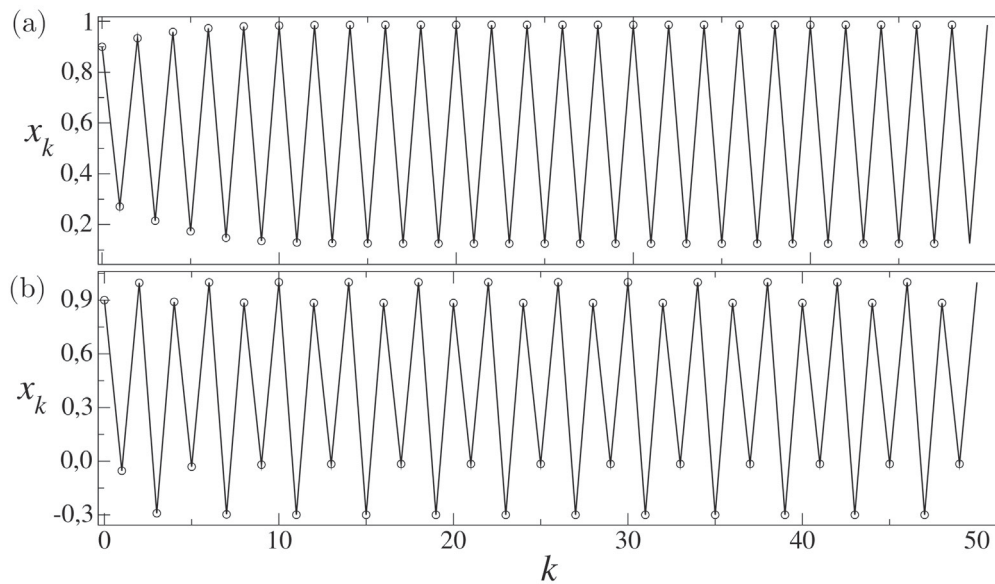


Figura 3 – (a) Iterações do mapa quadrático com $a = 0,9$ com pontos fixos de período-2 (a) Iterações do mapa quadrático com $a = 1,3$ com pontos fixos de período-4

Percebemos que os diferentes períodos do mapa quadrático estão relacionados aos distintos valores de a . Podemos visualizar estas mudanças no conjunto de pontos fixos, periódicos ou de qualquer outro utilizando um diagrama conhecido como diagrama de bifurcação. Este diagrama relaciona o comportamento assintótico da variável x em função do parâmetro a . Em que o comportamento assintótico é aquele obtido após um intervalo de tempo suficientemente grande, o qual chamamos de tempo transiente. Na Figura 4 temos o diagrama de bifurcação do mapa quadrático, no qual é possível notar o período 2 para $a = 0,9$ e o período 4 para $a = 1,3$ apresentados na Figura 3. Um caso interessante ocorre quando $a \approx 1,756$ em que o período do mapa quadrático é igual 3, este caso pode ser melhor visualizado na figura 4 (b) onde ampliamos a região de $a = 1,1$, até $a = 2,0$. De acordo como teorema de *Li-Yorke* [41, 2], quando um mapa possui um ponto de período-3 ele também possui pontos de todos os outros períodos.

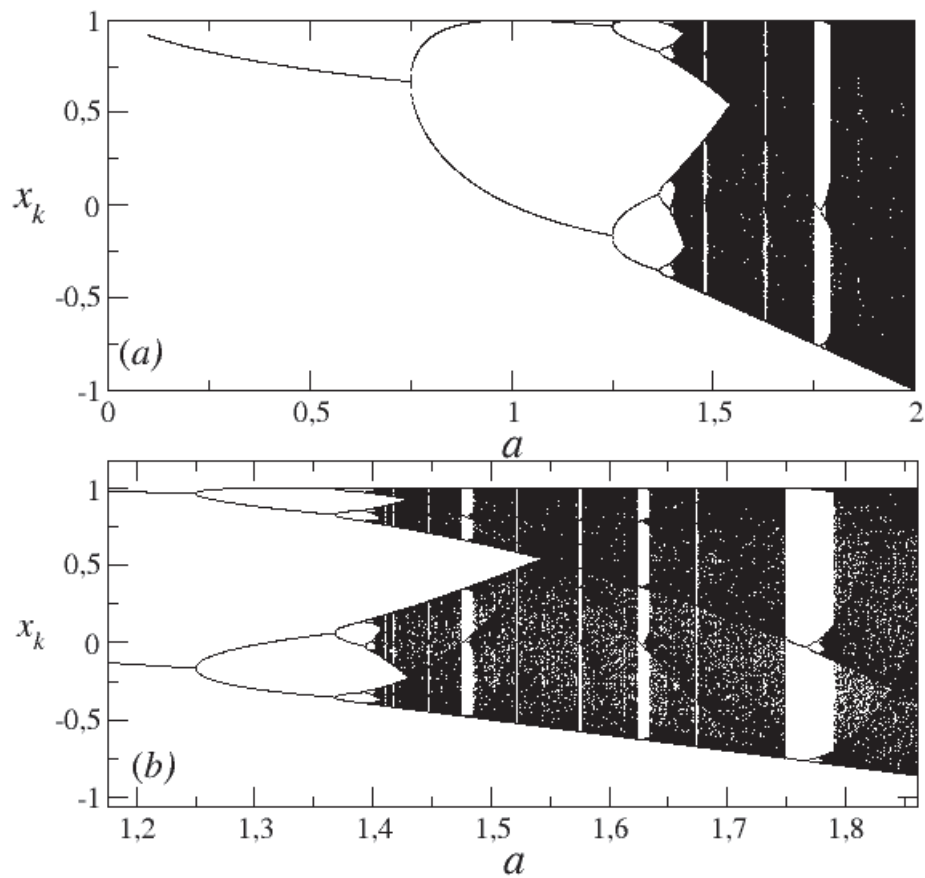


Figura 4 – (a) Diagrama de bifurcações para o mapa quadrático gerado a partir dos seguintes passos: (i) Fixamos um valor inicial para o parâmetro $a = 0,1$; (ii) Escolhemos uma condição inicial x_0 em um intervalo $[-1,1]$; (iii) Iteramos o mapa e descartamos as primeiras $n = 300$ iterações transitientes; (iv) Iteramos o mapa salvando os valores de x_n , e do parâmetro a nas próximas 700 iterações; (v) Escolhemos uma nova condição inicial dentro do intervalo $[-1,1]$ (vi) Reexecutamos os passos (iii) a (v) até um número suficiente de condições iniciais; (vii) acrescentamos um valor $\Delta a = 0,01$ em a e repetimos os passos (iii) a (vi) até que $a = 2,0$. (b) Ampliação da Figura (a) no intervalo $a = 1,1$ até $a = 2,0$.

2.2 Fluxos

Sistemas dinâmicos cuja evolução temporal é contínua no tempo são chamados fluxos e sua dinâmica é descrita por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, como na eq. (2.3). Em analogia aos mapas em vez de termos pontos periódicos para fluxos temos órbitas periódicas que trataremos na próxima seção. Aqui exemplificamos com um sistema de equações tridimensional bem conhecido o chamado sistema de Lorenz:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma(y - x), \\
 \dot{y} &= -xz + \rho x - y, \\
 \dot{z} &= xy - \beta z.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

A Figura 5 mostra a trajetória do sistema de Lorenz no espaço de fase.

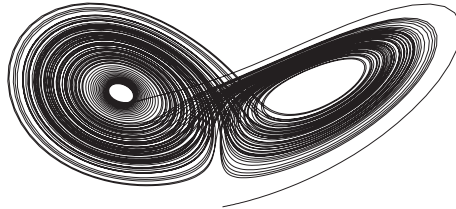


Figura 5 – Trajetória no espaço de fase para o sistema de Lorenz com parâmetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$.

Uma ferramenta útil para análise de fluxos é a chamada *seção de Poincaré* que consiste na interseção entre a trajetória e um plano, esta ferramenta transforma a análise de um sistema contínuo n -dimensional em um sistema discreto com dimensão $n - 1$. Define-se mapa de Poincaré, $\mathbf{P}(\mathbf{x}_k)$, a operação que relaciona a sequência de pontos em que o fluxo intercepta a seção de Poincaré, isto é, $(\mathbf{x}_{k+1}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}_k)$; Um ponto fixo (\mathbf{x}^*) no mapa de Poincaré representa uma trajetória periódica fechada de período τ do fluxo. Uma representação esquemática de um fluxo tridimensional que cruza a seção de Poincaré em dois pontos é encontrada na Figura 6.

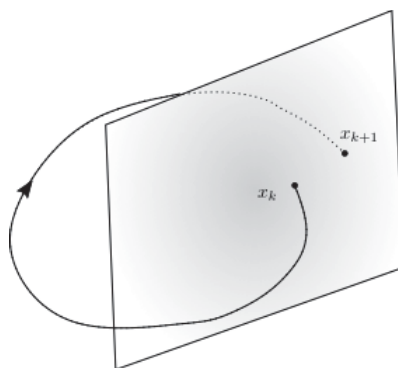


Figura 6 – Ilustração esquemática da seção de Poincaré para um fluxo tridimensional.

2.3 Instabilidade e espaço tangente

A estabilidade de um ponto fixo \mathbf{x}^* é avaliada a partir dos autovalores da matriz Jacobina \mathbf{J} . Estes autovalores podem ser separados em três grupos: σ_e , σ_i e σ_c , que

dependem do sinal dos autovalores $\Lambda_j \in \mathbb{C}$ [14], no qual \mathbb{C} é o corpo dos complexos. Os grupos de autovalores são caracterizados da seguinte maneira:

- $\Lambda \in \sigma_e$ se $\text{Re}(\Lambda) < 0$
- $\Lambda \in \sigma_i$ se $\text{Re}(\Lambda) > 0$
- $\Lambda \in \sigma_c$ se $\text{Re}(\Lambda) = 0$.

Em que o subespaço gerado pelo autovetores \mathbf{v}_j , cujos os auto valores pertencem a σ_e , é denominado *subespaço estável*. Isto é, o conjunto gerado por $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n_e}]$, denotado por $\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n_e}\}$ formam os subespaço estável. O subespaço gerado pelos autovetores \mathbf{u}_j correspondentes aos autovalores contidos em σ_i é o chamado de *subespaço instável*, ou seja, $E^i = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n_i}\}$ e o subespaço gerados pelos autovetores \mathbf{w}_i que correspondem aos autovalores em σ_c é o *subespaço central*, isto é, $E^c = \text{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{n_c}\}$. Os números n_i , n_e e n_c correspondem a dimensão de cada um destes subespaços e sua soma é igual a dimensão n do sistema dinâmico, Na Figura 7 mostramos alguns casos de subespaços estáveis e instáveis para diferentes autovalores Λ .

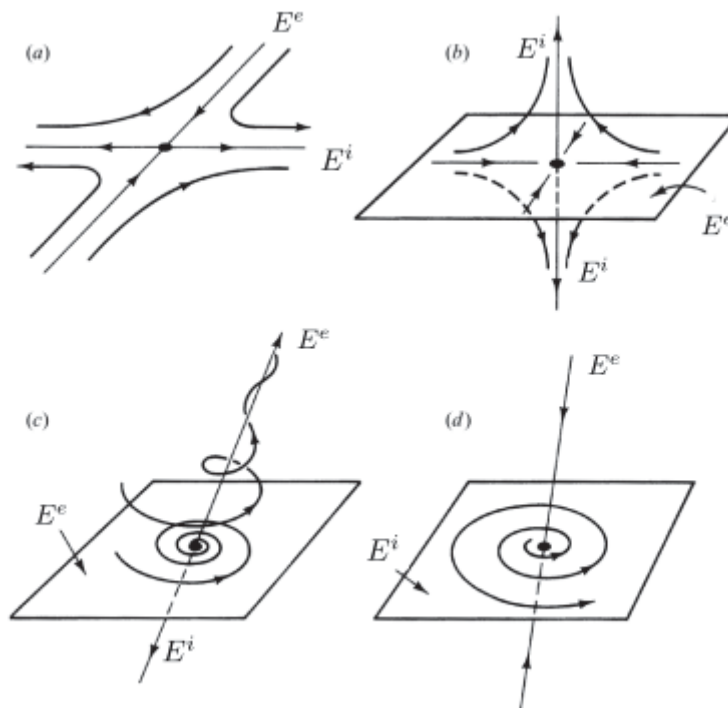


Figura 7 – Alguns casos de subespaços estáveis e instáveis e suas respectivas orbitas: (a) Dimensão $n = 2$, com $n_i = n_e = 1$ e $n_c = 0$; (b) $n = 3$, com $n_i = 1$, $n_e = 2$ e $n_c = 0$ em que o subespaço estável corresponde a dois autovalores reais; (c) $n = 3$, com $n_i = 1$, $n_e = 2$ e $n_c = 0$ em que o subespaço estável corresponde a um par de autovalores em que um é complexo conjugado do outro; (d) $n = 3$, com $n_i = 2$, $n_e = 2$ e $n_c = 0$ em que o subespaço instável corresponde a um par de autovalores em que um é complexo conjugado do outro. Figura retirada de [2] com adaptações.

Ainda podemos definir o espaço tangente TX ao ponto x^* como sendo a soma direta dos subespaços E^e , E^i e E^c , isto é

$$TX = E^e \oplus E^i \oplus E^c. \quad (2.9)$$

Ou seja o espaço tangente pode ser decomposto nestes três subespaços e possui dimensão $n = n^e + n^i + n^c$.

2.4 Variedades

Uma variedade, no contexto de sistemas dinâmicos, é definida como sendo um conjunto de pontos S do espaço de fase se a condição inicial ($\mathbf{x}(0) \in S$ e o estado $\mathbf{x}(t)$ também pertence a S para um $|t| < t_f$ com $t_f > 0$, se isto vale para $t_f \rightarrow \infty$, então S é uma variedade invariante [14]. Podemos associar os subespaços definidos a partir dos autovalores da jacobiana a variedades do espaço fase de acordo com o teorema das variedades estáveis [42]². Este teorema diz que, para cada ponto fixo hiperbólico x^* existe uma variedade estável local $W_{loc}^e(x^*)$ suave de dimensão n_e e tangente a E^e no ponto fixo x^* . Existe também uma variedade instável local $W_{loc}^i(x^*)$ suave de dimensão n_i , tangente ao subespaço E^i no ponto fixo x^* . A variedade invariante local estável é definida como [42]:

$$W_{loc}^e(x^*) = \{x \in S | f(x) \rightarrow x^* \text{ com } t \rightarrow \infty, \text{ e } f(x) \in S \text{ para todo } t \geq 0\}. \quad (2.10)$$

Isto nos diz que a variedade estável local de um ponto fixo x^* corresponde ao conjunto dos pontos, tais que as trajetórias convergem para o ponto x^* quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, a evolução é feita para frente no tempo. De maneira semelhante, a variedade invariante local instável é definida como:

$$W_{loc}^i(x^*) = \{x \in S | f(x) \rightarrow x^* \text{ com } t \rightarrow -\infty, \text{ e } f(x) \in S \text{ para todo } t \leq 0\}. \quad (2.11)$$

Neste caso, a variedade instável local de um ponto fixo x^* corresponde ao conjunto de pontos, tais que as trajetórias convergem para x^* quando $t \rightarrow -\infty$, esta é feita para trás no tempo.

A união de todas as variedades locais estáveis é chamada de variedade estável global, e a união das variedades locais instável é denominada a variedade global instável [42], e são definidas, respectivamente, da seguinte forma:

$$W^e(x^*) = \bigcup_{t \leq 0} f(W_{loc}^e(x^*); t), \quad (2.12)$$

$$W^i(x^*) = \bigcup_{t \geq 0} f(W_{loc}^i(x^*); t). \quad (2.13)$$

² Alguns autores chamam este teorema de teorema das variedades hiperbólicas como na ref. [14]

Também existe uma variedade central local associada e tangente ao subespaço E^c porém não é necessariamente única. Na figura 8 esboçamos como as variedades estável e instável se comportam próxima a um ponto fixo. A existência de cruzamentos entre as variedades é responsável pela dinâmica complexa de sistemas não lineares, os cruzamentos entre variedades associadas ao mesmo ponto fixo são denominados de cruzamentos *homoclínicos*, e os cruzamentos de variedades associadas a diferentes pontos fixos são chamados de cruzamentos *heteroclínicos*.

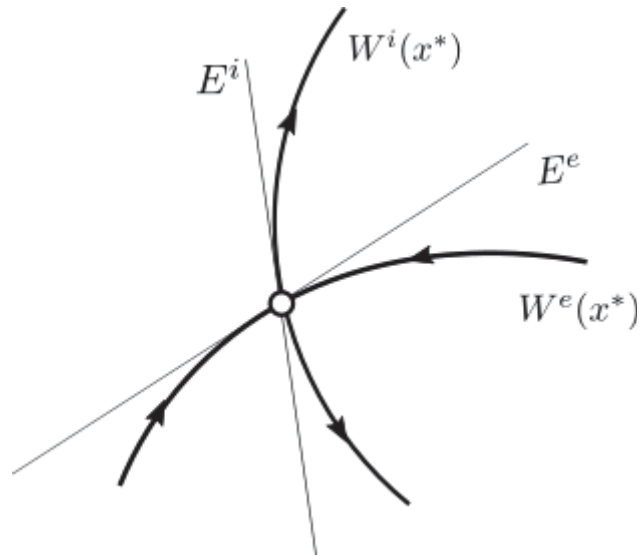


Figura 8 – Variedades em um ponto de sela x^* associadas aos subespaços estáveis e instáveis para um sistema não linear bidimensional.

3 EXPOENTES E VETORES DE LYAPUNOV

3.1 Expoentes de Lyapunov

A definição de expoente de Lyapunov (EL) surge quando é analisada a estabilidade das trajetórias de um sistema dinâmico genérico, da mesma maneira em que foi mostrado no capítulo anterior. Todavia, estamos interessados na taxa de crescimento da perturbação $\delta\mathbf{x}$ que nos dará a informação de quanto órbitas muito próximas divergem uma das outras após um determinado tempo.

Vamos considerar por simplicidade um sistema dinâmico discreto (um mapa), em que a evolução da perturbação é

$$\delta\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{J}_k \delta\mathbf{x}_k. \quad (3.1)$$

A matriz \mathbf{J} é a Jacobiana, o estado em um tempo discreto k da perturbação é dada através das sucessivas iterações do mapa linear

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}_k &= \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{J}_{k-2} \mathbf{J}_{k-3} \cdots \mathbf{J}_0 \delta\mathbf{x}_0 \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{J}_j \delta\mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde o produto das matrizes jacobianas pode ser definido como uma outra matriz, $\mathbf{M}_k = \prod_{j=0}^{k-1} \mathbf{J}_j$, que evolui a perturbação inicial num tempo $j = 0$ para um tempo final $j = k$. Aqui se faz necessário dizer que cada ponto do espaço de fase pode ser associado a um espaço tangente e o expoente de Lyapunov esta diretamente associado a expansão (ou contração) dos vetores que formam este espaço durante a evolução temporal. Podemos definir os ELs da seguinte maneira: Para qualquer perturbação inicial $\delta\mathbf{x}_0$ que evolui exponencialmente no tempo, o EL é definido como o logaritmo da taxa de expansão para tempos suficientemente grandes

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \frac{\|\mathbf{M}_k \delta\mathbf{x}_0\|}{\|\delta\mathbf{x}_0\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \frac{\|\delta\mathbf{x}_k\|}{\|\delta\mathbf{x}_0\|}, \quad (3.3)$$

em que $i = 1, 2, \dots, n$ sendo n a dimensão do sistema e $\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_{n-2} \geq \dots \geq \lambda_1$. Por exemplo, para o caso tridimensional teremos $n = 3$ ELs. O conjunto de todos os ELs é chamado de espectro de Lyapunov.

¹ Para o caso onde a evolução é continua a esta matriz é definida como $\mathbf{M}(t) = \exp(\int_0^t dt' \mathbf{J}(\mathbf{F}, t'))$

Para o caso no qual sistema é unidimensional, a jacobiana se reduz a derivada $f'(x)$. Neste caso temos apenas um EL e a eq. 3.3 torna-se

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \ln |f'(x)|. \quad (3.4)$$

Na Figura 9 ilustramos o comportamento do EL para o mapa quadrático para diferentes valores de a . Percebe-se que para órbitas periódicas o EL é sempre menor que zero ($\lambda < 0$). Nas regiões onde ocorrem bifurcações, onde ocorre um dobramento de período, o EL é igual a zero ($\lambda = 0$). Nas regiões onde o EL é positivo temos a região de instabilidade das órbitas e se o movimento for não periódico dizemos que a região é caótica.

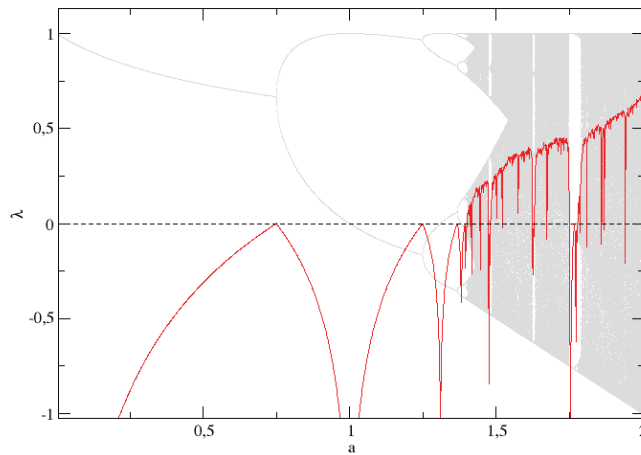


Figura 9 – EL (vermelho) para o mapa quadrático com diferentes valores de a em comparação ao diagrama de bifurcações(cinza)

Outra definição para o espectro de Lyapunov é obtida através do *teorema ergótico multiplicativo de Oseledets* [43][44]. Este teorema nos diz que se a matriz

$$\mathbf{P} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\mathbf{M}_k (\mathbf{M}_k^T)^{\frac{1}{2k}} \right] \quad (3.5)$$

existe neste limite, e seus autovalores são $\Lambda_n \geq \Lambda_{n-1} \geq \Lambda_{n-2} \geq \dots \geq \Lambda_1$. Então o espectro de Lyapunov é definido a partir do logaritmo destes autovalores

$$\lambda_i = \ln \Lambda_i. \quad (3.6)$$

O teorema de Oseledets garante que o espectro de Lyapunov será o mesmo para qualquer condição inicial uma vez que as escolhermos dentro do domínio ergótico do sistema [45]. A razão de definirmos o espectro de Lyapunov via o teorema de Oseledets é que ele se mostra essencial para a definição formal dos vetores covariantes de Lyapunov.

3.2 Vetores de Gram-Schmidt

O cálculo do espectro de Lyapunov para dimensões maiores que $n = 1$ é feita através da evolução das equações linearizadas de movimento do sistema de interesse, que é o mesmo que evoluir a perturbação. Como as equações linearizadas dependem dos valores da trajetória em cada tempo também precisamos evoluir as equações não lineares, isto é

$$\begin{bmatrix} \delta x_k^{1,1} & \dots & \delta x_k^{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta x_k^{n,1} & \dots & \delta x_k^{n,n} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_k \begin{bmatrix} \delta x_0^{1,1} & \dots & \delta x_0^{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta x_0^{n,1} & \dots & \delta x_0^{n,n} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

em que cada coluna da matriz na equação (3.7) representa um vetor do espaço tangente correspondente a cada ponto da trajetória do sistema dinâmico e por facilidade reescrevemos como $\delta \mathbf{x} = [\delta \mathbf{x}^1 | \delta \mathbf{x}^2 | \dots | \delta \mathbf{x}^n]$. Um problema em efetuar a evolução da perturbação conforme a eq. (3.7) é que em um sistema caótico os vetores no espaço tangente perdem a sua orientação e colapsam na direção de maior crescimento. Este colapso faz com que os vetores tornem-se indistinguíveis numericamente [4]. Esta dificuldade é contornada utilizando o procedimento proposto independentemente por Bennetin [16] e Shimada [15], que consiste em reortonormalizar os vetores que evoluem a partir do vetor que cresce na direção mais instável, direção com maior crescimento, durante as etapas da evolução temporal. O procedimento baseia-se em iniciar a dinâmica com n vetores ortogonais $\mathbf{G}_0 = [\mathbf{g}_0^1 | \mathbf{g}_0^2 | \dots | \mathbf{g}_0^n]$ e evoluir conforme

$$\tilde{\mathbf{G}}_k = \mathbf{M}_k \mathbf{G}_0. \quad (3.8)$$

A equação (3.8) que leva a matriz ortogonal \mathbf{G}_0 a matriz $\tilde{\mathbf{G}}_k$ não ortogonal, então a cada passo da dinâmica ortogonalizamos através da decomposição QR, que decompõe uma matriz não ortogonal em um produto de uma matriz ortogonal por uma matriz triangular superior, desta maneira

$$\tilde{\mathbf{G}}_k = \mathbf{G}_k \mathbf{R}_k, \quad (3.9)$$

em que \mathbf{G}_k é construído pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (OGS) a partir do primeiro vetor. Daqui em diante chamaremos os vetores \mathbf{g}^n de *vetores de Gram-Schmidt* (VGS). O primeiro vetor é o obtido pela normalização de $\tilde{\mathbf{g}}_k^1$

$$\mathbf{g}_k^1 = \frac{\tilde{\mathbf{g}}_k^1}{\|\tilde{\mathbf{g}}_k^1\|} \quad (3.10)$$

os demais são construídos da seguinte maneira [46, 47]

$$\mathbf{g}_k^j = \frac{\tilde{\mathbf{g}}_k^j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle \mathbf{g}_k^i, \tilde{\mathbf{g}}_k^j \rangle \mathbf{g}_k^i}{\|\tilde{\mathbf{g}}_k^j - \sum_{i=1}^{j-1} \langle \mathbf{g}_k^i, \tilde{\mathbf{g}}_k^j \rangle \mathbf{g}_k^i\|}, \quad (3.11)$$

em que $\langle \mathbf{g}_k^i, \mathbf{g}_k^j \rangle = \delta_{i,j}$ onde $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker ², isso quer dizer que sempre VGSs distintos são ortogonais. Já a matriz \mathbf{R}_k é dada por

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{g}_k^1, \tilde{\mathbf{g}}_k^1 \rangle & \langle \mathbf{g}_k^1, \tilde{\mathbf{g}}_k^2 \rangle & \langle \mathbf{g}_k^1, \tilde{\mathbf{g}}_k^3 \rangle & \cdots \\ 0 & \langle \mathbf{g}_k^2, \tilde{\mathbf{g}}_k^2 \rangle & \langle \mathbf{g}_k^2, \tilde{\mathbf{g}}_k^3 \rangle & \cdots \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{g}_k^3, \tilde{\mathbf{g}}_k^3 \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Esta matriz contém a informação obtida pela ortogonalização da matriz $\tilde{\mathbf{G}}_k$ em particular os elementos diagonais de $[\mathbf{R}_k]_{i,i} = \gamma_k^i$ representam a taxa de crescimento local ao longo do tempo k dos VGSs. Desta forma podemos redefinir o espectro de Lyapunov (3.3) através da média temporal do logaritmo destes termos diagonais

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^k \ln \gamma_j^i. \quad (3.13)$$

Podemos ilustrar este procedimento a partir de um mapa bidimensional. Utilizaremos o mapa de Hénon que foi proposto através de uma simplificação da seção de Poincaré para o sistema de Lorenz, as equações para o mapa são

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 1 - a x_k^2 + y_k, \\ y_{k+1} &= b x_k. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Cuja a matriz Jacobiana é dada por

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} -2 a x_k & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Utilizando os parâmetros $a = 0,3$ e $b = 1,4$, após 400 iterações e efetuando o processo de OGS a cada passo discreto encontramos os expoentes $\lambda_1 = 0,59$ e $\lambda_2 = -2,33$. A Figura 10 mostra a evolução temporal de λ_1 e λ_2 até a estabilização em um limite assintótico.

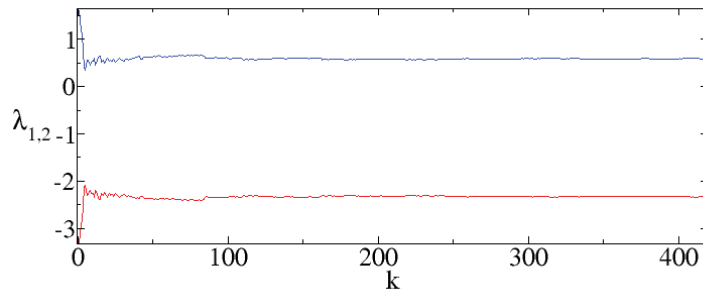


Figura 10 – Estabilização dos dois expoentes de Lyapunov para o mapa de Henon

² Para $i = j$, $\delta_{ij} = 1$ e para $i \neq j$, $\delta_{ij} = 0$

3.3 Decomposição de Oseledets

Como na Ref. [3] vamos reformular o teorema de Oseledets de modo a definir uma dinâmica para frente no tempo e outra para trás no tempo, desta maneira introduzimos as matrizes

$$\Xi_l^\pm = \lim_{l \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2l} \ln \left[(\mathbf{M}_{k,l})^T \mathbf{M}_{k,l} \right], \quad (3.16)$$

em que o símbolo “+” indica evolução crescente no tempo (para frente) e “-” a evolução de um tempo maior para um menor (para trás). Ambas as matrizes Ξ_k^\pm são estacionárias neste

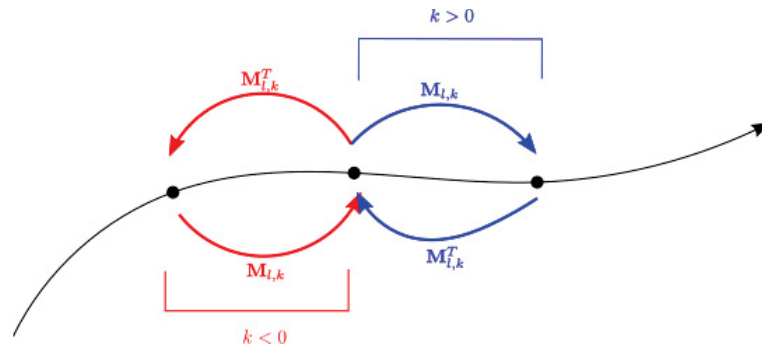


Figura 11 – Representação esquemática da ação das matrizes simétricas $\mathbf{M}_{l,k}^T$ e $\mathbf{M}_{l,k}$ no espaço tangente para um tempo discreto k

limite e os autovalores irão corresponder ao espectro de Lyapunov $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$ que é o mesmo para as duas. Note que, diferente do que definimos na equação (3.5) já tomamos o logaritmo na própria definição das matrizes, então seus autovalores irão coincidir com os ELs. Toda via, mesmo que autovalores de ambas as matrizes Ξ_k^\pm sejam iguais seus autovetores diferem e não são invariantes sob reversão temporal. Porém, podemos utilizá-los para construir autoespaços correspondentes a estes autovetores, isto é, $(\mathbf{U}_k^i)^\pm$ que por sua vez geram os chamados subespaços de Oseledets. Estes que são definidos da seguinte maneira

$$(\Gamma_k^i)^+ = (\mathbf{U}_k^i)^+ \oplus \dots \oplus (\mathbf{U}_k^m)^+, \quad (3.17)$$

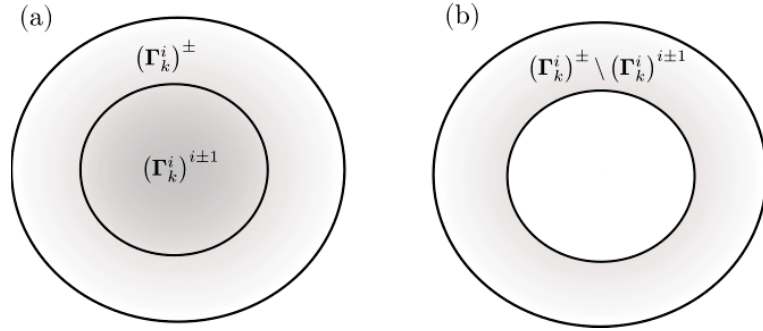
e

$$(\Gamma_k^i)^- = (\mathbf{U}_k^1)^- \oplus \dots \oplus (\mathbf{U}_k^i)^-. \quad (3.18)$$

Uma consequência do teorema de Oseledets é a filtragem da dinâmica [1, 48]

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|k|} \frac{\|\mathbf{M}_{k,l}\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \pm\lambda_i \text{ para } \mathbf{u} \in (\Gamma_k^i)^\pm \setminus (\Gamma_k^i)^{i\pm 1}, \quad (3.19)$$

ou seja, $\mathbb{R}^n = (\Gamma_k^1)^+ \supset (\Gamma_k^2)^+ \supset \dots \supset (\Gamma_k^m)^+$ e $\mathbb{R}^n = (\Gamma_k^m)^- \supset (\Gamma_k^{m-1})^- \supset \dots \supset (\Gamma_k^1)^-$. Para o caso particular, considerando a dinâmica em frente no tempo, para todos os vetores \mathbf{u} que não fazem parte do subespaço $(\Gamma_k^2)^+$ o limite da eq. (3.19) é o maior EL λ_1 . Na figura 12 mostramos esquematicamente como ocorre a propriedade de filtragem dos subespaços de Oseledets.


 Figura 12 – (a) Subespaço $(\Gamma_k^i)^\pm$; (b) Subespaço $(\Gamma_k^i)^\pm \setminus (\Gamma_k^i)^{i\pm 1}$

Embora os subespaços de Oseledets não sejam invariantes sob inversão temporal, no sentido de que os subespaços formados na dinâmica em frente no tempo diferem dos formados na dinâmica reversa. Contudo, é possível obter um subespaço invariante por meio da interseção destes dois conjuntos [17, 48, 49], de tal modo

$$\Omega_k^i = (\Gamma_k^i)^+ \cap (\Gamma_k^i)^-. \quad (3.20)$$

Os subespaços Ω_k^i são chamados de decomposição de Oseledets, em inglês *Oseledets' splitting*. E decompõem o espaço tangente independente da norma escolhida e são covariantes com a dinâmica. Para um caso particular de um sistema tridimensional com $n_i = n_c = n_e = 1$ os subespaços Ω_k^i , com $i = 1, 2, 3$, irão condizer com os subespaços E^i , E^c e E^e . Logo, serão tangentes as respectivas variedades locais próximas aos pontos fixos.

3.4 Vetores covariantes de Lyapunov

Vimos que um método eficiente para computar o espectro de Lyapunov se dá através dos vetores de Gram-Schmidt, porém a informação das direções de crescimento é perdida pelos os sucessivos processos de reortonormalização [50]. No entanto, para investigar diretamente as direções de expansão do espaço tangente é preciso encontrar o conjunto de vetores que são invariantes sob reversão temporal e covariantes com a dinâmica, estes são chamados de vetores covariantes de Lyapunov (VCLs), os mesmo que geram o espaço da decomposição de oseledets Ω_k^i . O conhecimento dos VCLs permite identificar em cada ponto no espaço de fase um campo vetorial que possui uma interpretação geométrica, ou seja, os VCLs identificam a orientação local das variedades estáveis e instáveis do sistema. Este fato torna os VCLs primordiais, em certos contextos, para o estudo de sistemas dinâmicos [3].

Por simplicidade vamos considerar que não há degenerescência entre os expoentes de Lyapunov e assim é possível associar a cada expoente um VCL. Embora existam alguns algoritmos para o cálculo dos VCLs [51] aqui vamos utilizar o procedimento de Ginelli e colaboradores [3] que se baseia em um primeiro momento efetuar a dinâmica para frente no tempo e em seguida a evolução reversa no tempo nos subespaços correspondentes.

O algoritmo se baseia no seguinte procedimento. O primeiro passo é efetuar a dinâmica para frente no tempo, que é feita da mesma maneira a qual se obtêm os VGSs. Sabemos que o VGS associado ao maior expoente de Lyapunov é o único que aponta para a direção mais instável do espaço de fases de um sistema dinâmico, fato que nos diz que este vetor corresponde ao VCL associado a este expoente de Lyapunov. Também graças a propriedade de filtragem dos subespaços de Oseledet [3], o j -ésimo VCL está contido no subespaço formado pelos primeiros j VGSs. Desta maneira o principal argumento do método é que, embora os VGSs não forneçam as direções dos subespaços de Oseledet, eles formam uma base para os VCLs, isto é

$$\mathbf{v}_k^i = \sum_{j=1}^i c_k^{(j,i)} \mathbf{g}_k^j. \quad (3.21)$$

Em que os coeficientes $c_k^{(j,i)}$ são obtidos a partir do produto interno entre os vetores, ou seja, $c_k^{(j,i)} = \langle \mathbf{g}_k^j, \mathbf{v}_k^i \rangle$, com $j \leq i$. Outro aspecto que é necessário discutir é a evolução temporal dos VCLs, seja os VCLs as colunas da matriz $\mathbf{V}_k = [\mathbf{v}_k^1 | \mathbf{v}_k^2 | \dots | \mathbf{v}_k^n]$, que evoluem de acordo com

$$\mathbf{M}_{k,m} \mathbf{V}_m = \mathbf{V}_{m+k} \mathbf{D}_{k,m}, \quad (3.22)$$

o índice m indica o tempo discreto de partida. Já $\mathbf{D}_{k,m}$ é uma matriz diagonal que contém a informação dos fatores de crescimento local $\gamma_k^i = d_{i,i}$, em que $d_{i,i}$ são os elementos diagonais da matriz. Para tempos finitos o logaritmo deste fator de crescimento é chamado de expoente de Lyapunov a tempo finito (ELTF)

$$\bar{\lambda}_i^{k,m} = \frac{1}{k} \ln \gamma_{k,m}^i. \quad (3.23)$$

Se tomarmos a média no limite assintótico dos ELTF, $k \rightarrow \infty$, os valores convergem para os expoentes de Lyapunov usuais. Ainda nos falta determinar os coeficientes da expansão da eq.(3.21), escrevendo na forma matricial torna-se $\mathbf{V}_m = \mathbf{C}_m \mathbf{G}_m$. Para isto utilizamos a eq. (3.21) aplicada em (3.22) que nos resulta em

$$\mathbf{G}_{m+k} \mathbf{C}_{m+k} \mathbf{D}_{k,m} = \mathbf{M}_{k,m} \mathbf{G}_m \mathbf{C}_m, \quad (3.24)$$

agora aplicando as equações 3.8 e 3.9, temos

$$\mathbf{G}_{m+k} \mathbf{C}_{m+k} \mathbf{D}_{k,m} = \mathbf{G}_{k,m} \mathbf{R}_{k,m} \mathbf{C}_m, \quad (3.25)$$

que nos leva a

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{R}_{k,m}^{-1} \mathbf{C}_{m+k} \mathbf{D}_{k,m}. \quad (3.26)$$

Esta equação calcula \mathbf{C}_m a partir de um estado futuro \mathbf{C}_{m+k} , ou seja, é a evolução em tempo reverso. A matriz $\mathbf{R}_{k,m}$ é obtida na evolução para frente dos VGSs, tendo estas informações em mãos estamos apto a computar os VCLs a partir da equação (3.21). Na

maioria das análises não estamos interessados especificamente nos VCLs, mas nos ângulos formado entre eles, que são definidos por

$$\theta_k^{ij} = \cos^{-1}(\langle \mathbf{v}_k^i, \mathbf{v}_k^j \rangle). \quad (3.27)$$

Levando em consideração a ortogonalidade dos VGSs, isto é $\langle \mathbf{g}_k^i, \mathbf{g}_k^j \rangle = \delta_{ij}$, é possível definir os ângulos entres os VCLs apenas através dos elementos da matriz triangular $\mathbf{C}_{k,m}$, uma vez que

$$\langle \mathbf{v}_k^i, \mathbf{v}_k^j \rangle = \sum_{l=1}^i \sum_{m=1}^j c_k^{(l,i)} c_k^{(m,j)} \delta_{l,m} \quad (3.28)$$

onde δ_{ij} é, novamente, o delta de Kronecker, o que nos leva a reescrever a eq. (3.27) como

$$\theta_k^{ij} = \cos^{-1} \left(\sum_{l=1}^{i \wedge j} c_k^{(l,i)} c_k^{(l,j)} \right). \quad (3.29)$$

Este resultado é útil para quando estamos interessados nos ângulos entre os vetores.

3.4.1 Procedimento Numérico

O procedimento numérico é dividido em algumas etapas. A primeira etapa consiste em fazer a evolução para frente num tempo transiente para o sistema dinâmico e também evoluir um conjunto de vetores ortonormais (VGSs) no espaço tangente aplicando a OGS em cada iteração. O numero de passos nesta etapa deve ser o suficiente para que o espaço de fase convergir para o atrator e o vetores ortogonais convergirem para os VGSs. A segunda etapa consiste na evolução para frente no tempo, novamente obtendo os VGSs por meio das sucessivas decomposições QR a cada passo. Nesta etapa, é necessário guardar matrizes as $\mathbf{G}_{m,k}$ e $\mathbf{R}_{m,k}$ para efetuar a dinâmica reversa no tempo. também é necessário executar esta evolução além do tempo de interesse para que possa servir de tempo transiente na dinâmica reversa.

A terceira etapa inicia a partir de uma condição inicial para \mathbf{C}_{m+k} que deve ser uma matriz triangular superior e normalizada. Em seguida é efetuada a evolução transiente reversa de acordo coma eq. (3.26). A cada iteração é efetuada a normalização da matriz \mathbf{C}_{m+k} . O tempo de evolução nesta etapa deve ser suficiente para que a matriz \mathbf{C}_{m+k} convirja para os reais coeficientes da expansão (3.21).

Já na quarta etapa calculamos os coeficientes corretos da expansão 3.21, novamente utilizando a equação (3.26). Agora guardando os resultados tanto das matrizes \mathbf{C}_{m+k} quanto das taxas de expansão dadas através da matriz $\mathbf{D}_{k,m}$. Aqui podemos obter os ELFT $\bar{\lambda}_i^{k,m}$ tomando o logaritmo dos elementos diagonais de $\mathbf{D}_{k,m}$. Ainda nesta etapa estamos aptos a encontrar os VCLs já alinhados nas direções do subespaços de Oseledets (ou variedades nas regiões de pontos fixos) por meio da eq. (3.21).

Na situação em que queremos calcular apenas os ângulos entre VCLs não necessitamos guardar as matrizes \mathbf{G}_k nas etapas anteriores uma vez que a eq. (3.29) é valida.

Uma prova matemática formal sobre a convergência dos VCLs para as regiões estáveis e instáveis do espaço tangente obtidas pelo algoritmo de Ginneli pode ser encontrada em [52].

3.5 Exemplos Numéricos

Nesta seção iremos apresentar alguns exemplos numéricos da utilização dos ângulos entre VCLs para sistemas de baixa dimensionalidade. Primeiramente para o teste de caos hiperbólico no mapa bidimensional de Hénon. Em seguida mostraremos a capacidade de antecipação de picos com grande amplitude para o sistema de Lorenz e também para o oscilador de Rössler

3.5.1 Mapa de Henón

Os sistemas mais simples para o cálculo de ângulos entre os VCLs são os mapas bidimensionais, pois possuem apenas dois VCLs. Este tipo de análise é interessante pois o pode utilizado para caracterização de caos hiperbólico como nas Referências [19, 50, 53]. Aqui ilustraremos o procedimento para mapa de Hénon da equação (3.14), utilizando $a = 1,4$ e $b = 0,3$, encontramos os vetores \mathbf{v}^1 e \mathbf{v}^2 e calculamos o ângulo entre as variedades da seguinte maneira $\theta_{12} = \cos^{-1}(|\langle \mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \rangle|)$ que pertence ao intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. A figura (13) mostra o atrator de Hénon e os respectivos ângulos entre as direções das variedades estáveis e instáveis. Notamos que para a região onde as flechas apontam que existem tangências entre as variedades, ou seja, o ângulo entre os VCLs é zero indicando, a não hiperbolicidade nesta região. Também na figura 13 (b) temos a distribuição dos ângulos entre as variedades em toda a dinâmica.

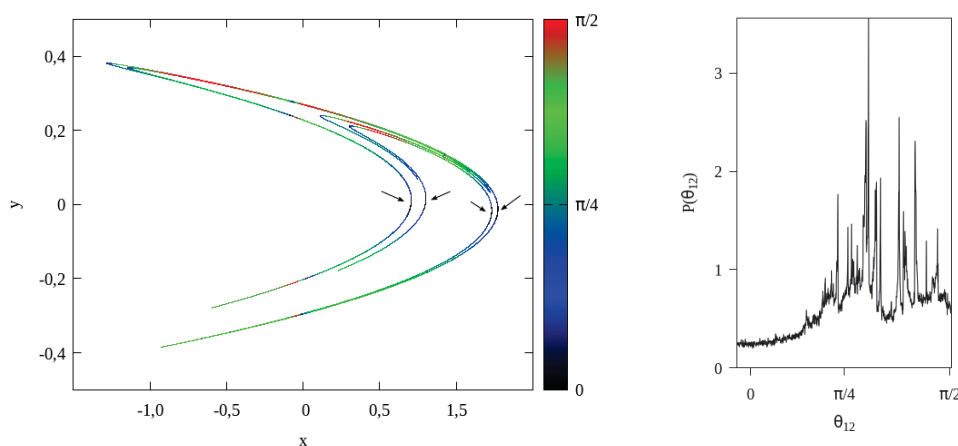


Figura 13 – (a) Atrator de Hénon e em cores os ângulos entre as variedades estável e instável. As flechas indicam onde existem tangências entre as variedades; (b) Distribuição dos ângulos entre as variedades.

3.5.2 Prognostico em sistemas caóticos

Aqui revisitamos alguns resultados práticos da utilização dos VCL para antecipação de picos com grandes amplitudes em séries temporais de sistemas caóticos. O método proposto Beims e Gallas em [22, 21] que se baseia no alinhamento entre os VCLs. O primeiro sistema que analisamos foi o sistema de Lorenz [54] descrito pelo conjunto de equações

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + \rho x - y \\ \dot{z} &= xy - \beta z.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Integramos a eq.(3.31) utilizando método Runge-Kutta de quarta ordem [55] utilizando os parâmetros $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$. Evoluímos tanto as equações não lineares como as equações linearizadas do espaço tangente, com um passo $h = 0,01$. Também descartamos um tempo transiente de 10^7 passos tanto na dinâmica para frente no tempo quanto para dinâmica reversa e salvamos os posteriores 10^4 passos de integração e calculamos os VCLs e também os respectivos ângulos entre eles. Na Figura 14 mostramos a série temporal da variável $x(t)$ em pontos e o código de cores se refere ao Ângulo θ_{12} , entre a variedade instável e a variedade central (*fluxo*). Ainda em preto mostramos a serie temporal da derivada do ângulo formado pelo dois primeiros VCL $\dot{\theta}_{12}$. É possível notar que para os maiores picos em x o Ângulo θ_{12} é sempre 0 radianos ou π radianos, indicando o alinhamento dos VCLs. Também é notável que antecipadamente aos picos de grande amplitude surge um pico na série temporal de $\dot{\theta}_{12}$ que indica o caráter preditivo desta quantidade. Já na Figura 15 (a) mostramos o espaço de fase para o sistema de Lorenz e em cores o Ângulo θ_{12} a fim de mostrar a estrutura local destes ângulo. Na Figura 15 (b) mostramos em cores a derivada $\dot{\theta}_{12}$ percebemos que quando x se aproxima dos extremos o valor de $\dot{\theta}_{12}$ torna-se 0.

O segundo exemplo trata do oscilador de Rössler que descrito pelo conjunto de equação adimensionais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= bx + z(x - c)\end{aligned}\tag{3.31}$$

com $a = 0,38$, $b = 0,3$ e $c = 4,82$ o sistema de Rössler é um bom candidato para a validação do método uma vez que a variável z apresenta picos de grandes amplitudes. Para este sistema em especificamente as encontramos melhores propriedades preditivas do alinhamento entre os VCLs analisando o ângulo entre as variedades central e estável. Na Figura 16 mostramos a serie temporal da variável z em cinza, em azul esta a série temporal do valor negativo da derivada do ângulo, $-|\dot{\theta}_{23}|$, para uma melhor visualização. Ainda na Figura 16 vemos que os picos da série temporal $-|\dot{\theta}_{23}|$ antecedem os picos da

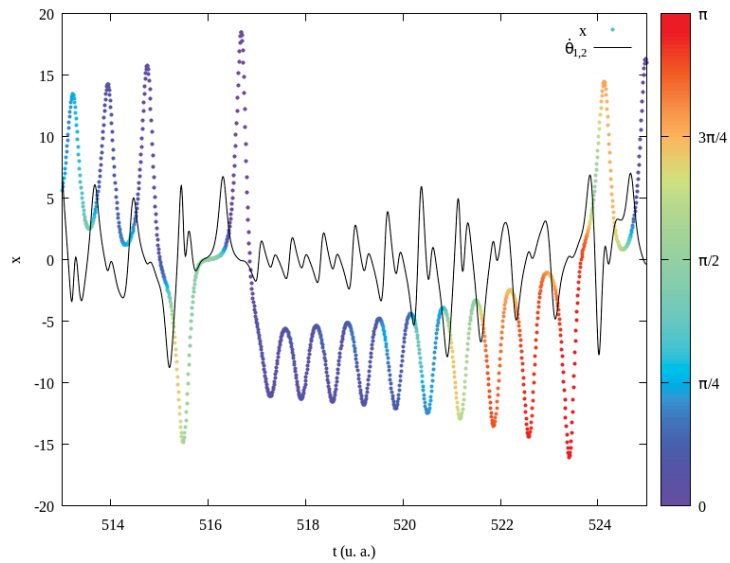


Figura 14 – Em cores temos a série temporal da variável x para sistema de Lorenz eq. 3.31, em que as cores indicam o Ângulo entre a variedade instável e a variedade central, em preto a serie temporal da derivada do Ângulo $\dot{\theta}_{1,2}$ em relação ao tempo.

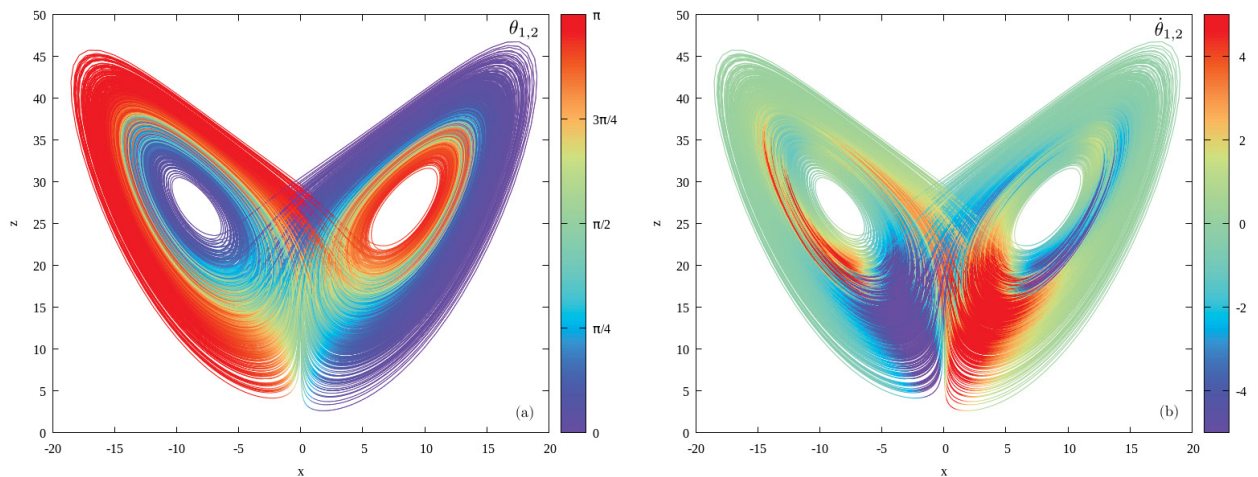


Figura 15 – (a) Atrator de Lorenz e perfil espacial dos ângulos entre a variedade instável e central ao longo da trajetória no espaço fase; (b) perfil de $\dot{\theta}_{1,2}$ ao longo da trajetória no espaço de fase.

variável z e as barras vermelhas indicam o tempo de predição para estes picos. Também traçamos o perfil do $\theta_{2,3}$ ao longo do atrator com a finalidade de mostrar a região no espaço de fase na qual ocorre o alinhamento entre as variedades.

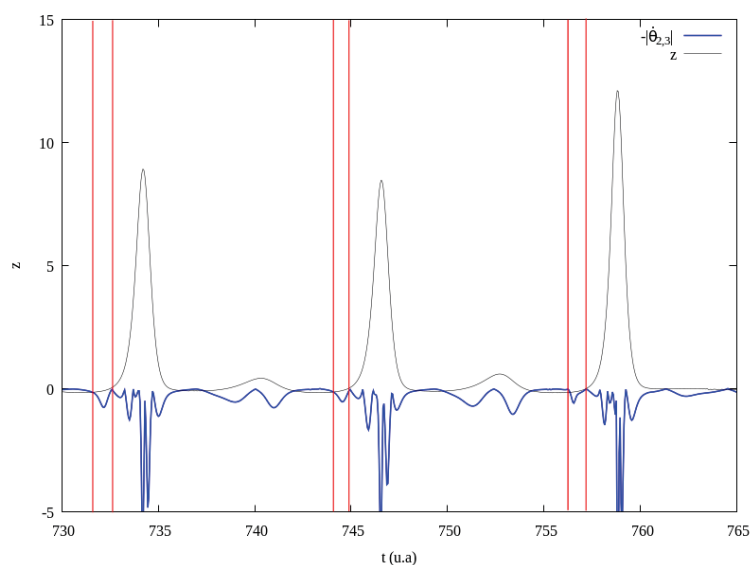


Figura 16 – Série temporal da variável z para o oscilador de Rössler em preto, em azul está a série temporal de $-|\dot{\theta}_{23}|$ e as barra vermelhas indicam o tempo de antecipação dos picos em z .

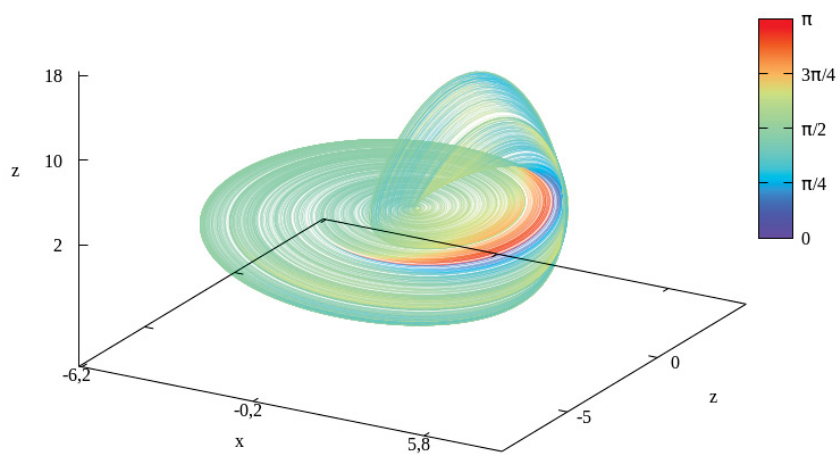


Figura 17 – Atrator de Rössler e perfil espacial dos ângulos entre a variedade estável e central ao longo da trajetória no espaço fase.

4 VETORES COVARIANTES DE LYAPUNOV EM SISTEMAS ESPACIALMENTE ESTENDIDOS

4.1 Rede de mapas acoplados

As redes de mapas acoplados (RMA) são modelos simples de sistemas dinâmicos espacialmente estendidos por terem tanto tempo quanto espaço discretizados. Entretanto ainda sim possuem uma rica dinâmica que nos auxilia no entendimento de sistemas com muitos graus de liberdade. Esta abordagem foi introduzida em [25, 26, 56, 57] para expandir as propriedades de caos temporal para os domínios espaciais e ser utilizada como “toy-model”¹ para o estudo do caos espaço-temporal. Entretanto as RMAs se mostraram úteis na modelagem de vários fenômenos naturais, por exemplo na descrição da convecção de calor [27], dinâmica da formação de nuvens [28], modelos ecológicos [29] e na simulação de neurônios [30]. Aqui utilizamos a abordagem de Kaneko [25] para estudar os VCLs em sistemas com alta dimensionalidade.

Utilizamos uma rede de mapas com acoplamento difusivo, ou seja, apenas os primeiros vizinhos estão conectados e é descrito pela equação

$$x_{k+1}^i = (1 - e)f(x_k^i) + \frac{e}{2} [f(x_k^{i-1}) + f(x_k^{i+1})]. \quad (4.1)$$

Em que e é o parâmetro de acoplamento, em todas as nossas análises utilizaremos para dinâmica local $f(x)$ mapas quadráticos, isto é

$$f(x) = 1 - ax^2. \quad (4.2)$$

Dependendo da combinação entre os parâmetros a dos mapas e do parâmetro acoplamento e da equação podemos obter uma grande diversidade de padrões espaço-temporais. Sendo que, uma das principais características de uma RMA é a de que quando escolhemos um parâmetro a para o qual a dinâmica temporal de um único mapa é periódica esta periodicidade se estende espacialmente. Exemplificaremos para o caso em que $a = 1,33$, região de período-4 temporal, isto pode visto no diagrama de bifurcação deste mapa na Figura (4). Na Figura 18 (a) mostramos como a periodicidade temporal se estende para a rede espacial, neste caso utilizamos $e = 0,1$ e uma rede com 100 mapas. Isto é feito plotando, após 1000 iterações, a sobreposição das amplitudes nos próximos $k = 50$ tempos

¹ Toy model é um modelo matemático simplista, com muitos detalhes removidos, utilizado para explicar um mecanismo de forma concisa.

de iteração. Dizemos que o período é espacial pois é possível perceber que espacialmente a maioria dos sítios possuem não mais que 4 valores de amplitude distintos. Ainda servindo-se da Figura 18 (a) vamos introduzir a nomenclatura de kinks que são as quedas abruptas na amplitude de x_i e os anti-kinks que dizem respeito as ascensões abruptas da amplitude. As regiões fechadas são chamadas de domínios. Em todos os casos que apresentaremos aqui utilizamos as mesmas condições iniciais, sendo elas

$$x_0^i = 0,5 + 0,4 \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi(i-n)}{n} \right). \quad (4.3)$$

Um dos méritos desta RMA é o de reproduzir qualitativamente algumas classes de padrões espaço-temporais. A maioria delas foram classificadas na Ref.[25], em um primeiro momentos nossas análises se basearam nestes padrões. Iniciaremos pelo chamado *Padrão aleatório estático* que formado com o aumento do parâmetro não linear a , saindo da região periódica individual de cada mapa. Precisamente este padrão se manifesta com $a = 1,48$ e $e = 0,1$ e mostrado na Figura 18 (b). Pode-se notar que períodos aleatórios surgem formando domínios irregulares de vários, entretendo estes não se movimentam espacialmente na rede e por isso recebe o nome de padrão estático.

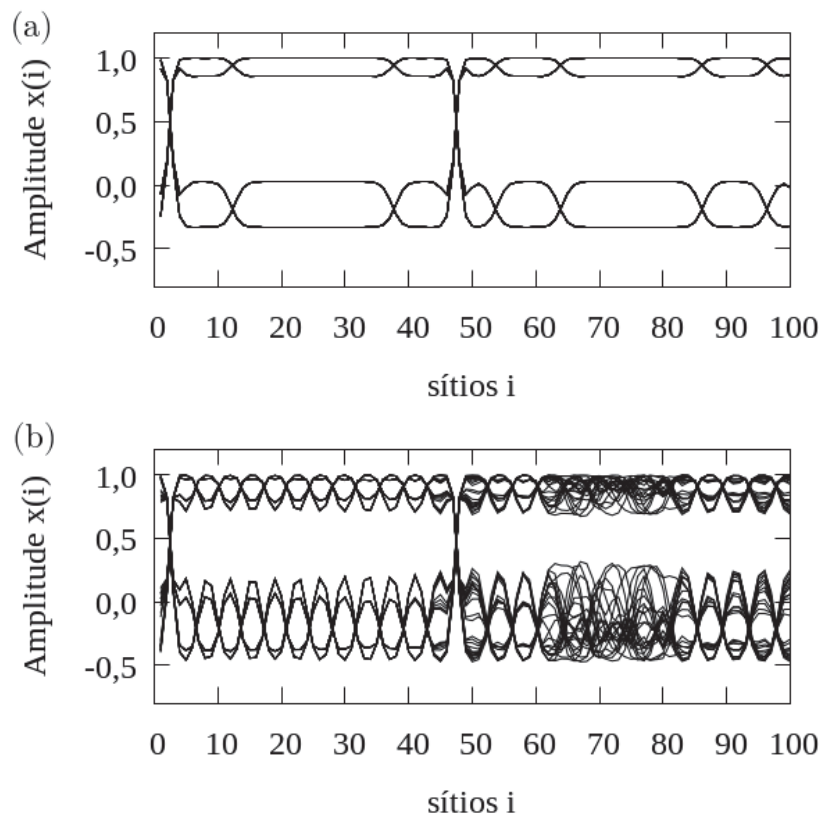


Figura 18 – Sobreposição de 50 tempos diferentes de iteração para amplitude espacial de uma RMA de mapas quadráticos com $n = 100$: (a) padrão periódico com $a = 1,33$ e $e = 0,3$; (b) Padrão aleatório estático com $a = 1,48$ e $e = 0,1$.

A medida que aumentamos o valor do parâmetro a para $a = 1,72$ as fronteiras dos

domínios começam a se mover criando domínios menores porém mais regulares. Este padrão é chamado de padrão selecionado e supressão do caos, visualmente podemos dizer que o comportamento caótico é suprimido, como mostramos na Figura 19 (a). Para $a = 1,85$ e $e = 0,1$ é possível perceber algumas regiões irregulares com maior amplitude, destacado na Figura 19 (b), estas regiões são chamadas de defeitos. Neste caso os defeitos movem-se espacialmente durante a evolução temporal e quando se encontram aniquilam-se. Podemos visualizar a dinâmica do defeito construindo um diagrama espaço-temporal binário. Sendo x^* um ponto fixo instavel de um único mapa, se x_k^i for maior que x^* pintamos um ponto de preto, caso contrario deixamos em branco. Este digrama é mostrado na Figura 20 e perceptível que os defeitos se propagam como um ruído aleatório e desaparecem quando se encontram, este padrão é chamado de defeito browniano.

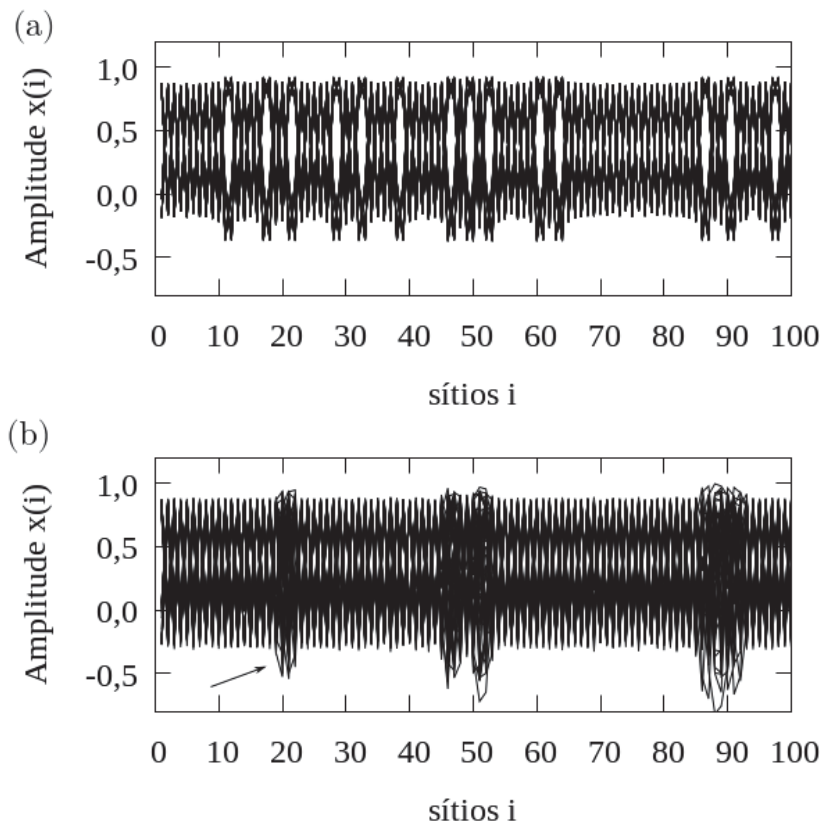


Figura 19 – Sob: reposição de 50 tempos diferentes de iteração para amplitude espacial de uma RMA de mapas quadráticos com $n = 100$: (a) supressão de caos com $a = 1,72$ e $e = 0,1$; (e) defeito browniano com $a = 1,85$ e $e = 0,1$.

Agora aumentando o valor do acoplamento para $e = 0$, com $a = 1,68$ induzimos bursts intermitentes em algumas regiões tipicamente estacionárias. A Figura 21(a) apresenta este caso em que encontramos domínios “mais” regulares e os domínios intermitentes, este comportamento é denominado de competição de padrões. Por ultimo temos o chamado Caos desenvolvido utilizando $a = 1,95$ e $e = 0,1$. Uma vez que estamos usando o acoplamento difusivo o parâmetro e tende a levar o sistema ao equilíbrio mas como a dinâmica local é modelada por um mapa caótico tende a ocorrer uma competição entre estes dois

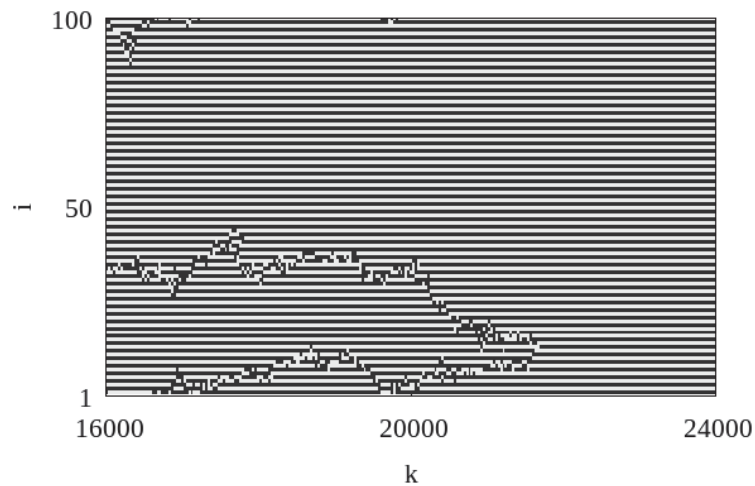


Figura 20 – Diagrama espaço-temporal binário, com $x^* \approx 0,51$, para uma RMA de $n = 100$ mapas com parâmetros $a = 1,85$ e $0,1$ (defeito browniano), com tempo discreto de iterações de $k = 16000$ até 24000 em que os pontos são plotados a cada 50 iterações.

comportamentos porém para valores altos de a o comportamento caótico é dominante, como mostrado na Figura 21(b).

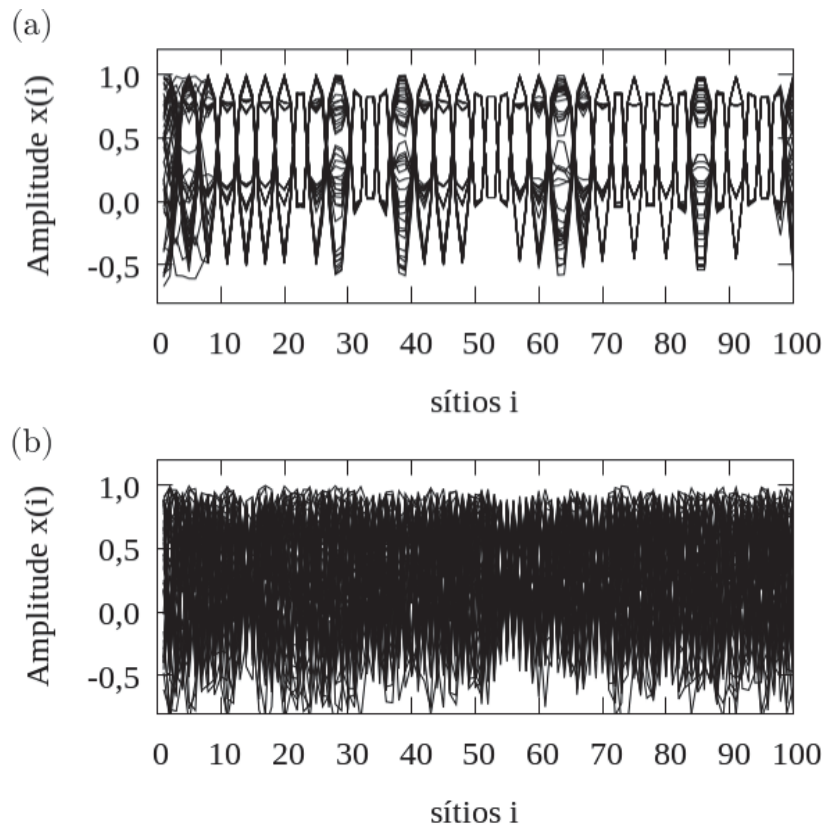


Figura 21 – Sobreposição de 50 tempos diferentes de iteração para amplitude espacial de uma RMA de mapas quadráticos com $n = 100$: (a) Competição de padrões com $1,68$ e $e = 0,3$; (b) Caos desenvolvido com valor de $a = 1,94$ e $e = 0,1$.

4.1.1 Ângulo médio entre os VCL

Nesta seção aplicamos o procedimento numérico definido na seção 3.4.1 para calcular a média dos ângulos entre VCLs para os casos apresentados na seção anterior para as RMAs. Foram usadas aqui RMAs com $n = 300$ para obter uma melhor resolução das figuras. Para primeira etapa da evolução em frente no tempo transiente utilizamos $5 \cdot 10^3$ iterações. Em seguida, na segunda etapa da evolução em frente no tempo, efetuamos $5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$, salvando as matrizes que são produto do procedimento de OGS. As últimas $5 \cdot 10^3$ iterações desta etapa são deixadas para serem utilizadas como transiente para a dinâmica reversa no tempo. A terceira etapa é o início da dinâmica reversa no tempo em que deixamos as $5 \cdot 10^3$ iterações como transiente a fim que os coeficientes da expansão do VCLs convirjam para seus reais valores. Por último efetuamos as $5 \cdot 10^4$ iterações restantes já calculando o ângulo entre todos os pares arbitrários dos VCLs conforme a eq. (3.29). Em seguida obtemos a média temporal entre os ângulos, conforme

$$\langle \theta^{i,j} \rangle = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k \theta_m^{i,j}. \quad (4.4)$$

Na figura 22 (a) mostramos a média entre os ângulos absolutos de pares arbitrários de VCLs i e j para o padrão aleatório estático de uma RMA de 300 mapas quadráticos com $a = 1,48$ e $e = 0,1$. Os elementos diagonais da figura representam o ângulo entre um vetor com ele mesmo, que obviamente resulta em zero. Os pares que estão mais próximos a diagonal apresentam uma menor média o que pode indicar que entre estes pares os ângulos podem assumir um intervalo maior de valores. A medida que a um afastamento entre os VCLs o valor médio se aproxima cada vez mais de $\pi/2$ que indica ortogonalidade entre eles.

Para o caso de supressão de caos, o valor médio dos ângulos entre os VCLs é apresentado na Figura 22 (b). Neste caso é perceptível algumas regiões circulares (azul escuro) entre os primeiros VCLs próximos a diagonal de menor valor. Também a uma região quadrada bem delimitada em ciano aproximadamente em $j = i = 175$ em que pequenas regiões que apresentam pontos pretos indicando ângulos médios em $\pi/2$. Após esta região quadrada os valores médios se aproximam cada vez mais de $\pi/2$. Para o defeito browniano, Figura 22 (c), vemos a formação de uma estrutura em formato de “pipa” com uma fronteira em preto seguida de uma nova região em ciano. Já na Figura 22 (d), que diz respeito a competição de padrões temos uma região em ciano esparsa, porém para os VCLs mais afastados a ortogonalidade se mantém. O último caso é o do caos desenvolvido em que novamente a estrutura em ciano com formato de “pipa”, mostrada na Figura 22 (e) porém mais alongada em comparação ao caso do defeito browniano.

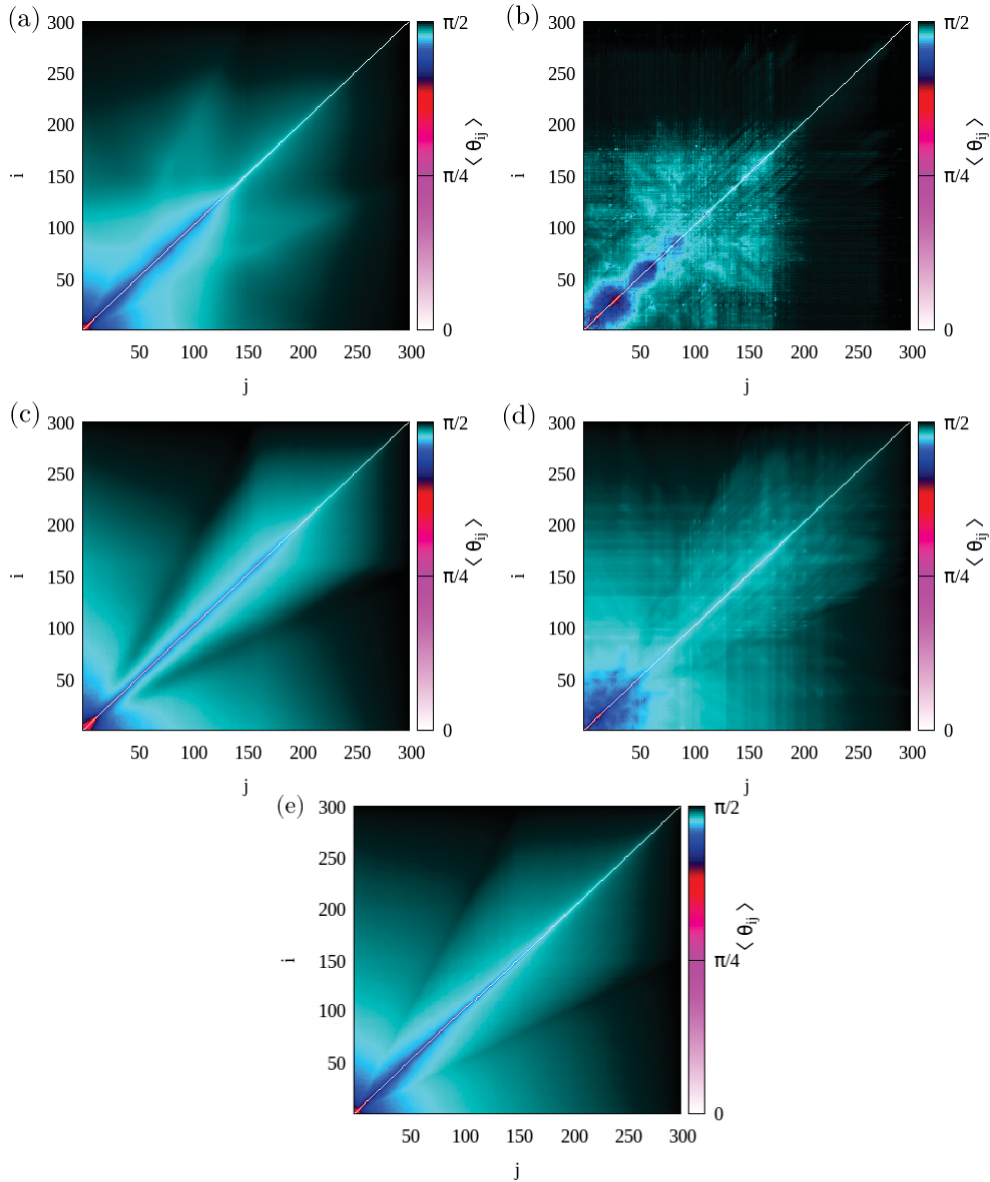


Figura 22 – Média temporal dos ângulos entre VCLs: (a) Padrão aleatório estático com $a = 1,48$ e $e = 0,1$; (b) Supressão do caos, com $a = 1,72$ e $e = 0,1$; (c) Defeito browniano, com $a = 1,85$ e $e = 0,1$; (d) Competição de padrões, com $a = 1,68$ e $e = 0,3$; (e) Caos desenvolvido $a = 1,94$ e $e = 0,1$.

4.1.2 Espectro de Lyapunov dominância da decomposição de Oseledets

Nesta seção calculamos o espectro de Lyapunov para os casos apresentados anteriormente. O cálculo foi feito em duas etapas primeiramente através dos VGSs na dinâmica para frente no tempo e também utilizando o fator de crescimento dos VCLs obtidos na dinâmica reversa, ou seja, através do limite assintótico dos ELTF. É importante deixar claro que os ELs obtidos na dinâmica reversão nos dá a taxa de contração do espaço de fase, então em magnitude são iguais porém diferem no sinal. Em nossos resultados mostraremos o espectro calculado a partir da dinâmica reversa multiplicado por um fator -1 . Fazemos isto para mostrar que o espectro de Lyapunov calculado a partir da dinâmica reversa é

mesmo calculado para frente no tempo a menos de um sinal .

Os Resultados obtidos para o espectro de Lyapunov estão mostrados na Figura 23. Comparando os dois primeiros casos da Figura 23, (a) padrão aleatório estático, com (b) padrão de supressão de caos, podemos notar que apesar do valor que controla a não linearidade a ser maior para o segundo caso existe um comportamento emergente ordenado que é comprovado pela existência de um menor número de ELs positivos. Na Figura 23(c) temos o espectro de Lyapunov para o caso de competição de padrões e na Figura 23(d) para o defeito browniano. Na ref. [25] foi mostrado que numero de defeitos para esta situação, de defeito browniano, é proporcional ao número de ELs positivos. Por ultimo, na Figura 23(e), temos caos totalmente desenvolvido e como era de se esperar existe um numero maior de ELs positivos.

Um quantificador que ajuda a classificar os VCLs proposto por Takeuchi e colaboradores em [58] é a chamado de Dominância da Decomposição de Oseledets (DDO)², que nos da informação do isolamento dos subespaços de Oseledets devido ao ordenamento das taxas locais de expansão. Dizemos que existe uma dominância na decomposição dos espaços de Oseledets, ou VCLs, se para $i > j$ a relação $\bar{\lambda}_i(t) > \bar{\lambda}_j(t)$ entre os ELTF se cumpre. Esta quantidade é significativa uma vez que foi provado matematicamente em [59, 60] que a DDO implica na ausência de tangências entre os VCLs. A DDO é quantificada a partir de

$$\Delta\bar{\lambda}_{i,j}(t) = \bar{\lambda}_i(t) - \bar{\lambda}_j(t). \quad (4.5)$$

Nós calculamos o número de vezes que ocorre a violação da DDO em um determinado tempo através da expressão, conforme [58, 24]

$$\nu_{ij} = \langle 1 - \Theta(\Delta\bar{\lambda}_{i,j}(t)) \rangle. \quad (4.6)$$

A função $\Theta(x)$ é a função degrau, definida como

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}. \quad (4.7)$$

Os brakets na eq. (4.6) indicam a média temporal, uma vez que $\nu_{ij} = 1$ significa que ocorre a violação da DDO em todos os tempos entre os subespaços indexados por i e j . Caso $\nu_{ij} = 0$ nenhuma violação de DDO ocorre no tempo calculado. Calculamos esta densidade de violação da DDO para os padrões anteriormente citados como mostra a Figura 24. Enfatizando que para o cálculo de ν_{ij} utilizamos o mesmo número de mapas e os mesmos tempos de iterações de quando calculamos a média dos ângulos entre os VCLs.

É possível perceber a relação da violação da DDO com o espectro de Lyapunov. Por exemplo comparando a Figura 24 (a) com a Figura 23 (a), para o padrão aleatório estático. Nota-se que a quebra qualitativa no espectro acontece na mesma região em a violação da

² O nome original em inglês é *Domination of Oseledets Splitting* com a sigla DOS.

DDO começa a diminuir. Aproximadamente a partir de $i \approx 225$ a $i \approx 300$ e $j \approx 0$ a $j \approx 150$, a região em preto indica que não há violação da DDO. No comportamento de supressão de caos a violação da DDO mostrada na Figura 24 (b). Onde há um decaimento moderado na violação a partir do índice $i = 250$. Na Figura 24 (c) a violação DDO prevalece na maioria da região, no sentido não haver regiões de violação nula. Acreditamos que este comportamento acontece pois os ELs estão muito próximos uns dos outros no espectro. No próximo caso, o da competição de padrões, onde existe uma quebra significativa espectro de Lyapunov mostrado na Figura 23 (d) em $i \approx 200$. A Figura 24 (d) mostra uma região grande onde a violação da DDO é nula a partir deste índice exceto pela região próxima a diagonal da figura. Para o caos desenvolvido os valores dos ELs também estão próximos e a violação da DDO também prevalece, isto é mostrado na Figura 24 (e).

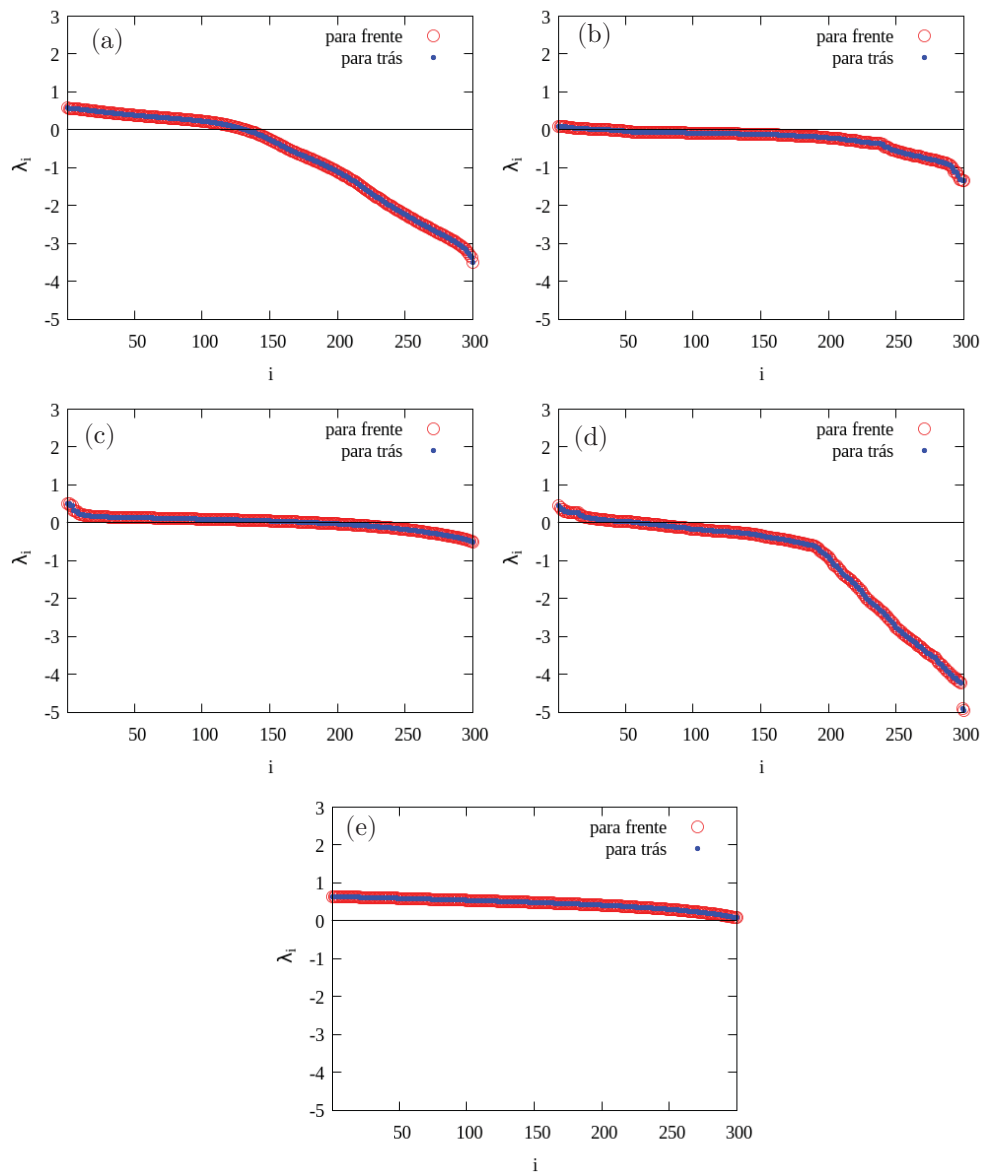


Figura 23 – Espectro de Lyapunov via dinâmica para frente no tempo (vermelho) para trás no tempo a menos de um fator -1 , calculados em um tempo discreto de $5 \cdot 10^4$ iterações após um transiente de $5 \cdot 10^3$ iterações nas duas dinâmicas: (a) Padrão aleatório estático com $a = 1,48$ e $e = 0,1$; (b) Supressão do caos, com $a = 1,72$ e $e = 0,1$; (c) Defeito browniano, com $a = 1,85$ e $e = 0,1$; (d) Competição de padrões, com $a = 1,68$ e $e = 0,3$; (e) Caos desenvolvido $a = 1,94$ e $e = 0,1$.

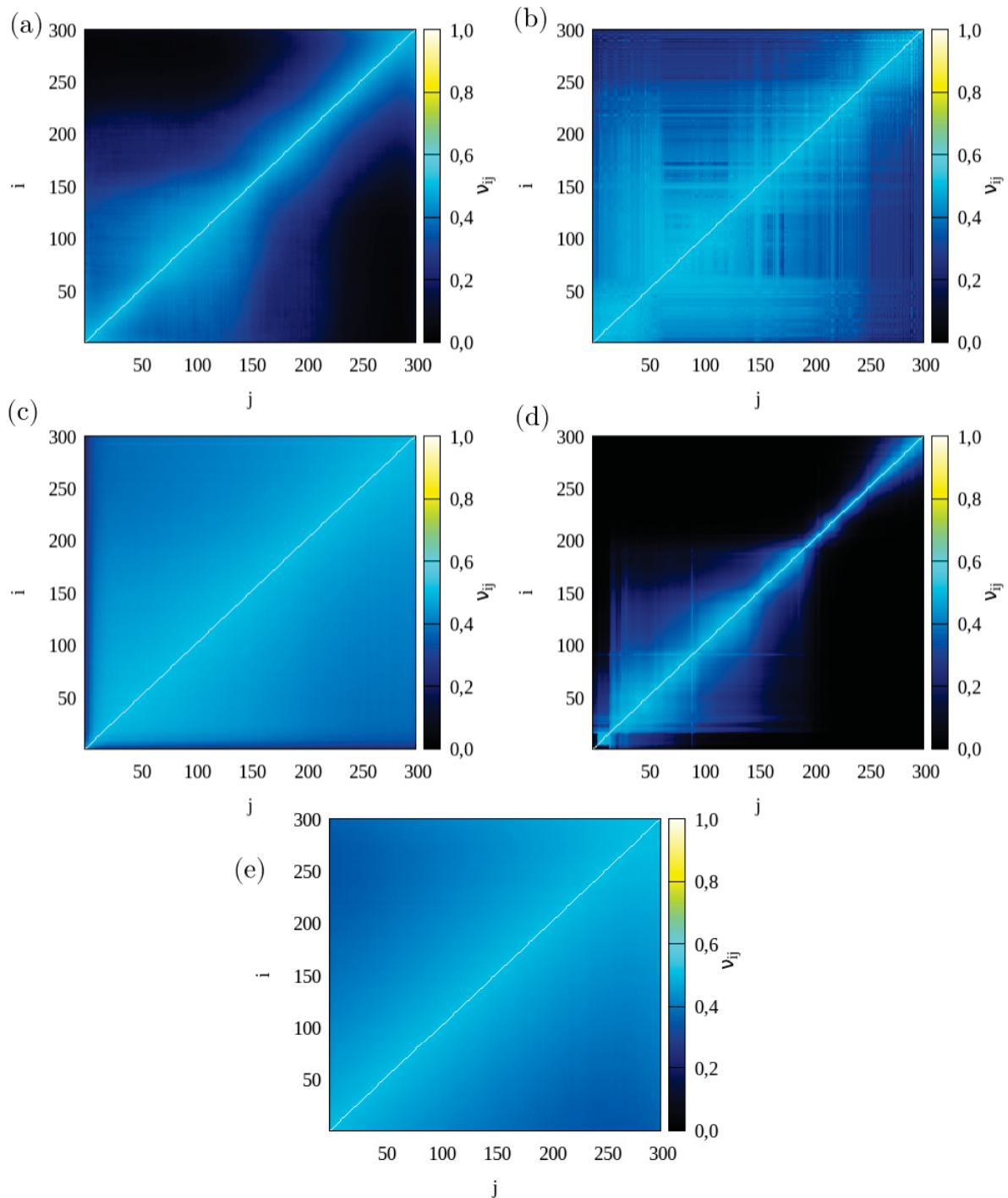


Figura 24 – Densidade da violação da DDO para a RMA: (a) Padrão aleatório estático com $a = 1,48$ e $e = 0,1$; (b) Supressão do caos, com $a = 1,72$ e $e = 0,1$; (c) Defeito browniano, com $a = 1,85$ e $e = 0,1$; (d) Competição de padrões, com $a = 1,68$ e $e = 0,3$; (e) Caos desenvolvido $a = 1,94$ e $e = 0,1$.

4.2 Estados Quimera

Um padrão espaço-temporal é definido como estado quimera segundo Abrams and Strogatz [32], quando para um sistema de osciladores *idênticos* este padrão pode ser dividido em duas estruturas coexistentes. Na primeira encontram-se oscilações coerentes e uma

certa população de osciladores está sincronizada, e a segunda é formada por oscilações incoerentes onde não ocorre sincronização. Os estados quimera ocorrem em vários modelos de sistemas espacialmente estendidos, equações diferenciais parciais, mapas acoplados e autômatos celulares. Entretanto, nosso foco é no estudo dos estados quimera em osciladores de fase acoplados. Existe algumas condições básicas para observar este comportamento nestes osciladores [61, 62]: (i) um meio discreto representado por uma numero grande de osciladores distribuídos espacialmente; (ii) o acoplamento entre os elementos da rede deve ser não local e também (iii) um parâmetro de defasagem entre os osciladores ou um atraso no acoplamento.

O sistema que utilizamos é formado por uma rede de osciladores de Kuramoto-Sagakuchi [63] com acoplamento não local, dado por

$$\dot{\phi}_i(t) = \omega_i - \frac{1}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} \text{sen}(\phi_i(t) - \phi_j(t) + \alpha), \quad (4.8)$$

com $i = 1, 2, 3 \dots, n$ sendo os índices de cada oscilador na rede, sendo ϕ_i e ω_i respectivamente a fase e a frequência natural do i -ésimo oscilador e $\alpha \in [0, \pi]$ o parâmetro de defasagem. Diferente da seção anterior em que os mapas eram acoplados apenas aos seus primeiros vizinhos, agora cada oscilador é acoplado com um raio de R elementos a sua direita e R a sua esquerda, que é denominado acoplamento não local. A rede também possui uma condição de contorno periódica (anel), isto é, para n osciladores $\phi_{n+i} = \phi_i$, como ilustrado na Figura (25).

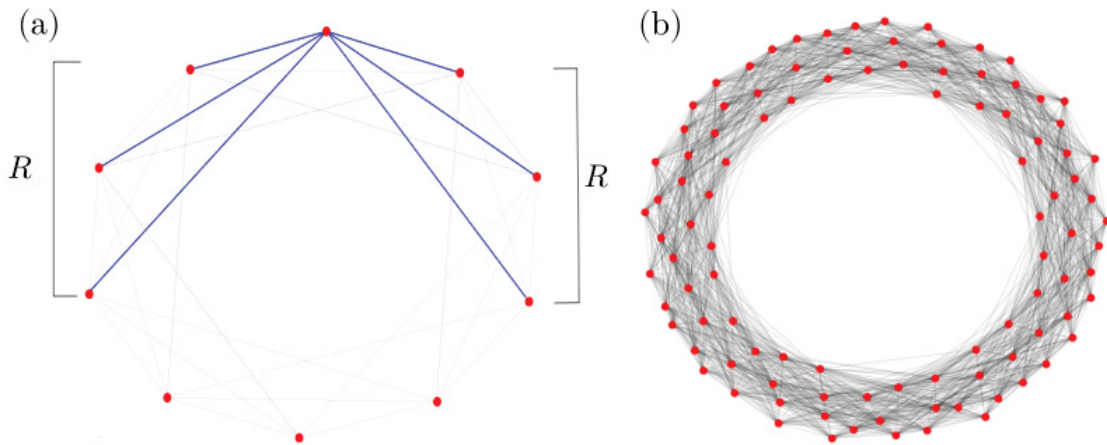


Figura 25 – (a) Representação das conexões de um oscilador (traço azul) com acoplamento não local de raio $R = 3$. (b) Representação de uma rede da ligação de 100 osciladores com acoplamento não local de raio $R = 30$.

No sistema Kuramoto-Sagakuchi é possível identificar três comportamentos diferentes de interesse que dependem apenas do parâmetro de defasagem α quando consideramos o

mesmo número de osciladores e raio de acoplamento. Para obtenção destes comportamentos é também necessário uma boa escolha do estado inicial conforme [32, 64], e é

$$\phi_i(0) = 6 \eta_i e^{-0,76 \rho_i^2}. \quad (4.9)$$

este estado inicial, divide a população de osciladores em um ambiente parcialmente coerente e outro ambiente parcialmente incoerente. Os valores para ρ_i são igualmente distribuídos no intervalo $[-\pi, \pi]$ e η_i é um conjunto de números aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Para $n = 150$ elementos na rede com raio de acoplamento $R = 0,30 n$, utilizamos o método de Ruge-Kutta de quarta ordem [65, 55] para evolução da eq. (4.9), com passo integração fixo de $h = 0,05$, descartando um transiente de 10^3 unidades de tempo e computamos por mais $5 \cdot 10^2$ unidades de tempo.

Primeiramente, com $\alpha = 1,37$ temos o caso em que ocorre a sincronização completa. Na figura 26(a) mostramos o diagrama espaço temporal para este caso, na Figura 26 (b) temos o perfil espacial para a rede para um tempo $t = 1200$, que mostra que os osciladores possuem a mesma fase. Para $\alpha = 1,47$ temos a formação do estado quimera no diagrama espaço-temporal, como mostra a Figura 26 (c), é nitidamente notável a separação entre as regiões coerente (sincronizada) e incoerente (não sincronizada) bem como o perfil espacial para o tempo $t = 1200$, Figura 26 (d). O ultimo caso é quando não existe mais sincronização, $\alpha = 1,57$, percebe-se que as fases estão distribuídas desordenadamente no perfil espacial da Figura 26 (f) e evoluem de mesmo modo no tempo, como mostra Figura 26 (e).

Para ter uma constatação não apenas gráfica da sincronização e também com a finalidade de quantificar o quão sincronizados os osciladores estão, calculamos o parâmetro de ordem de Kuramoto que é uma ferramenta de diagnóstico de sincronização baseada na diferença de fases entre fasores no plano complexo, que são as mesmas entres os osciladores. O parâmetro de ordem de Kuramoto é definido da seguinte maneira [66]:

$$r(t) = \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{i\phi_j(t)} \right| \quad (4.10)$$

em que i é unidade imaginária e $r \in [0, 1]$. Interpretamos o valor do parâmetro de ordem da seguinte forma: Se $r(t) = 1$ retrata a total sincronização, se $r(t) = 0$ significa que não existe sincronização e valores intermediários indicam a sincronização parcial. A evolução do parâmetro de ordem é exibido para os três casos anteriores na Figura 27.

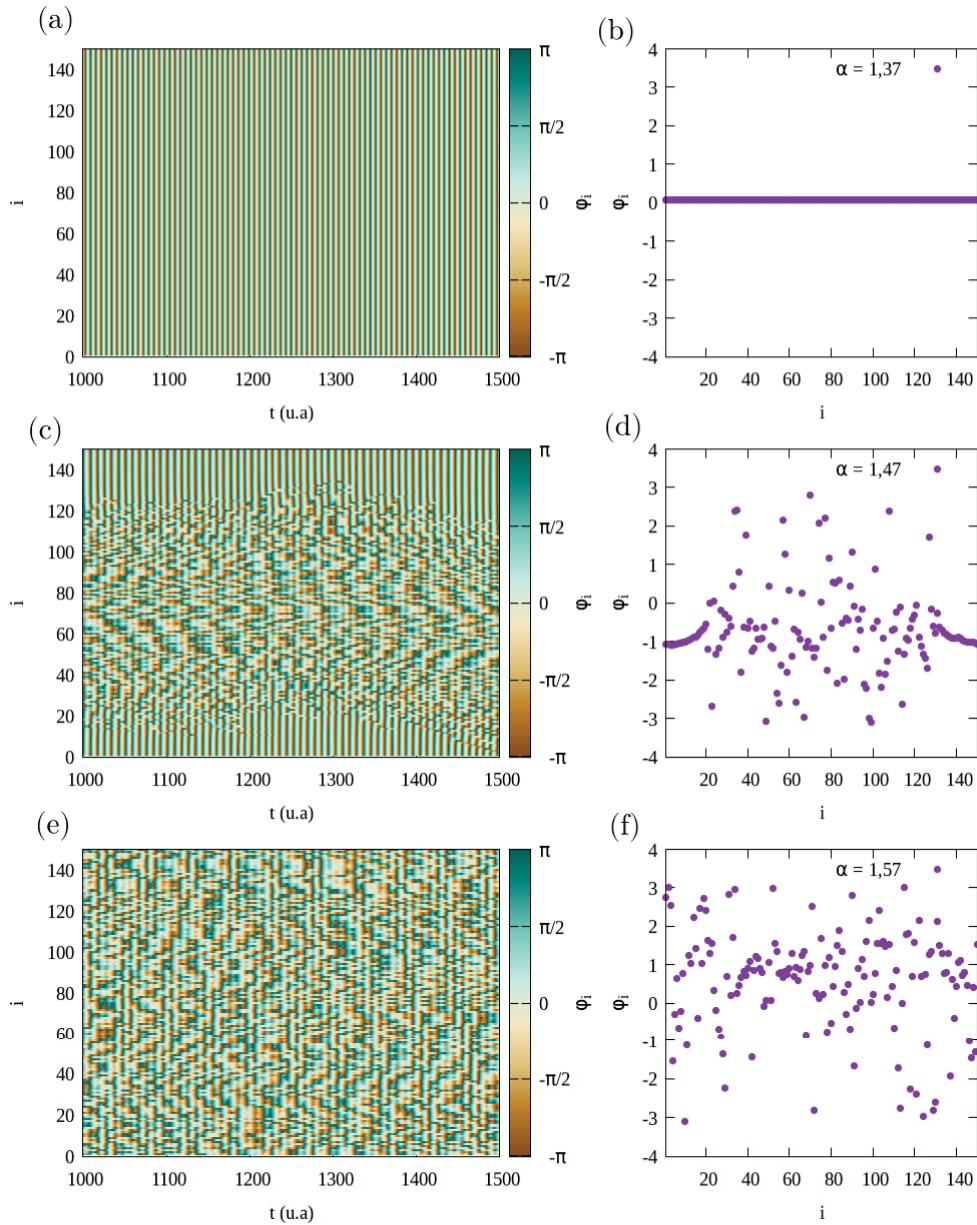


Figura 26 – Diagrama espaço-temporal (esquerda) e perfil espacial a (direita) para $n = 150$ osciladores de Kuramoto-Sakaguchi com acoplamento não-local e raio de acoplamento $R = 0,30n$ (a) estados sincronizados $\alpha = 1,37$; (b) Estados quimera $\alpha = 1,47$; (c) Estados dessincronizados $\alpha = 1,57$.

4.2.1 Espectro de Lyapunov

Para os três comportamentos abordados da rede de osciladores de Kuramoto-Sakaguchi, computamos o espectro de Lyapunov tanto com a dinâmica para frente no tempo utilizando os VGSs como também para trás no tempo através do limite assintótico dos ELTFs. Usamos o mesmo artifício de multiplicar o espectro da dinâmica reversa por -1 . Para os EL calculados na dinâmica para frente no tempo utilizamos o procedimento OGS conforme a seção 3.2, evoluindo os VGSs a partir da matriz Jacobiana cujo os elementos

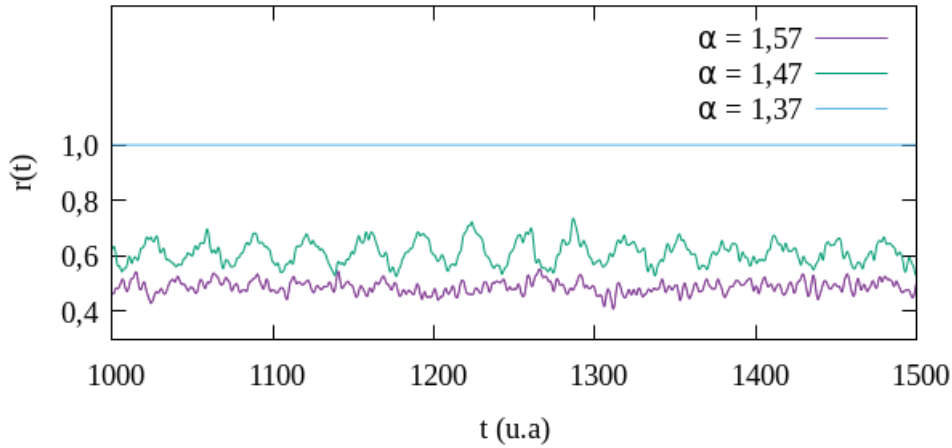


Figura 27 – Evolução do parâmetro de ordem de Kuramoto $r(t)$ para os osciladores de Kuramoto-Sakaguchi para os casos: (i) $\alpha = 1,37$ *sincronizado* (ciano) o parâmetro se mantém contante e igual a 1,0 indicando a total sincronização; (ii) $\alpha = 1,47$ *quimera* (verde) onde existe o parâmetro de ordem oscila indicando sincronização parcial; (iii) $\alpha = 1,57$ *incoerente* (roxo) como esperado para este caso o parâmetro de ordem é sempre menor do que os casos i e ii.

são dados pela equação

$$J_{i,j} = \frac{(-1)^{\delta_{i,j}}}{2R} \sum_{k=i-R}^{i+R} \cos(\phi_i - \phi_k + \alpha) \delta_{i,j+k}, \quad (4.11)$$

em que $\delta_{m,n}$ é o delta de Kronecker. E as equações linearizadas são escritas como $\delta\dot{\Phi}(t) = \mathbf{J}\delta\Phi$. Para uma rede de 150 osciladores temos 22500 equações linearizadas, novamente utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem para integração numérica com $3 \cdot 10^4$ passos após descartar $2 \cdot 10^4$ passos transientes, o tamanho do passo é de $h = 0,05$. No caso do espectro de Lyapunov para a dinâmica reversa no tempo procedemos conforme a seção 3.4.

O espectro de Lyapunov na Figura 28(a) refere-se à situação de sincronização. Nota-se a ausência de ELs positivos, com $\lambda_{max} = 0$ indicando, como esperado, a estabilidade. Para o estado quimera, Figura 28(b), o espectro de Lyapunov exhibe alguns ELs positivos que decaem suavemente para um platô de ELs próximos a zero, este é um comportamento típico de estados quimera. Na ref. [61] Wolfrum e colaboradores mostraram quanto maior o numero de osciladores na rede menor é o número de ELs positivos, ou seja, os expoentes positivos convergem para a região de plato próximo a zero. Ainda neste mesmo trabalho [61] foi comprovado, que para o limite termodinâmico $n \rightarrow \infty$ não existem ELs positivos e o número de ELs que estão no platô em zero são proporcionais ao número de osciladores incoerentes. E Também o número de ELs negativos é proporcional ao número de osciladores sincronizados.

Por ultimo temos o caso de oscilações incoerentes, exibido na Figura 28(c). Alguns ELs positivos são encontrados mas a grande maioria esta na região de platô próxima a zero.

Sumariamente, nota-se que para a sincronização os ELs se encontram em grande maioria próximos a um platô negativo. Em estados quimera, o número de ELs próximos a zero é proporcional ao número de osciladores não sincronizados e os negativos correspondem aos sincronizados. O ultimo caso, onde não ocorre a sincronização todos, os ELs estão próximos a zero.

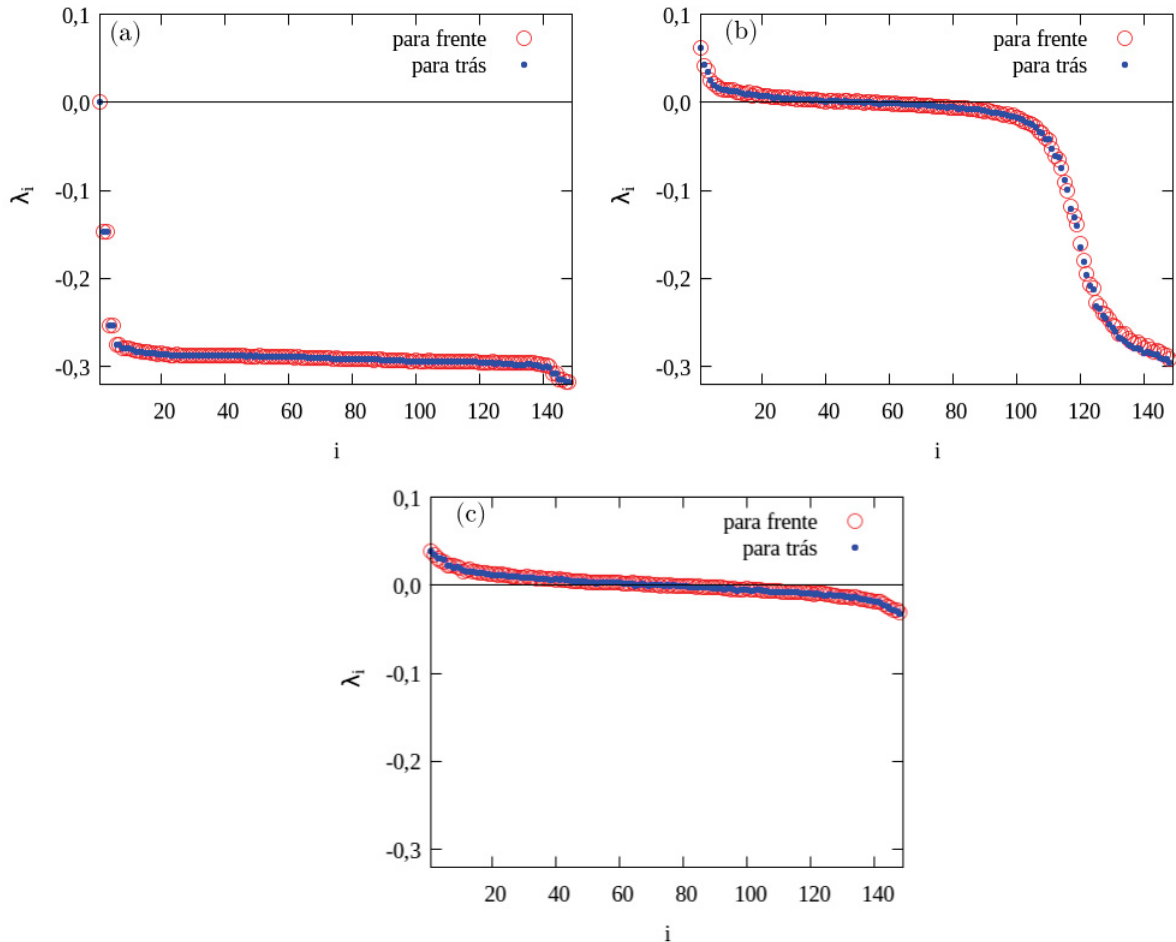


Figura 28 – Espectros de Lyapunov calculados na evolução dinâmica para frente no tempo (vermelho) e também para trás no tempo (azul) para os casos: (a) Sincronizado com $\alpha = 1,37$ sincronizado, $\alpha = 1,37$; (b) Estado quimera com fase $\alpha = 1,47$ (c) Para fase $\alpha = 1,57$ não sincronizado.

4.2.2 Ângulo médio entre os VCLs e a violação da DDO

Nesta seção calculamos o ângulo médio entre os VCLs utilizando a definição (3.29) com o valor absoluto do produto interno, que nos resulta em ângulos no intervalo de $[0, \pi/2]$, uma vez que estamos interessados no alinhamento ou não dos VCLs. A figura 29(a) mostra a média temporal dos ângulo entre todos os pares arbitrários de VCLs para o estado sincronizado. Até um certo limite de i e j aproximadamente iguais a 60, observamos pares de vetores mais próximos que possuem em média ângulos menores. A região em branco indica que estes vetores em média são sempre tangentes, após o limite de $i = j = 60$

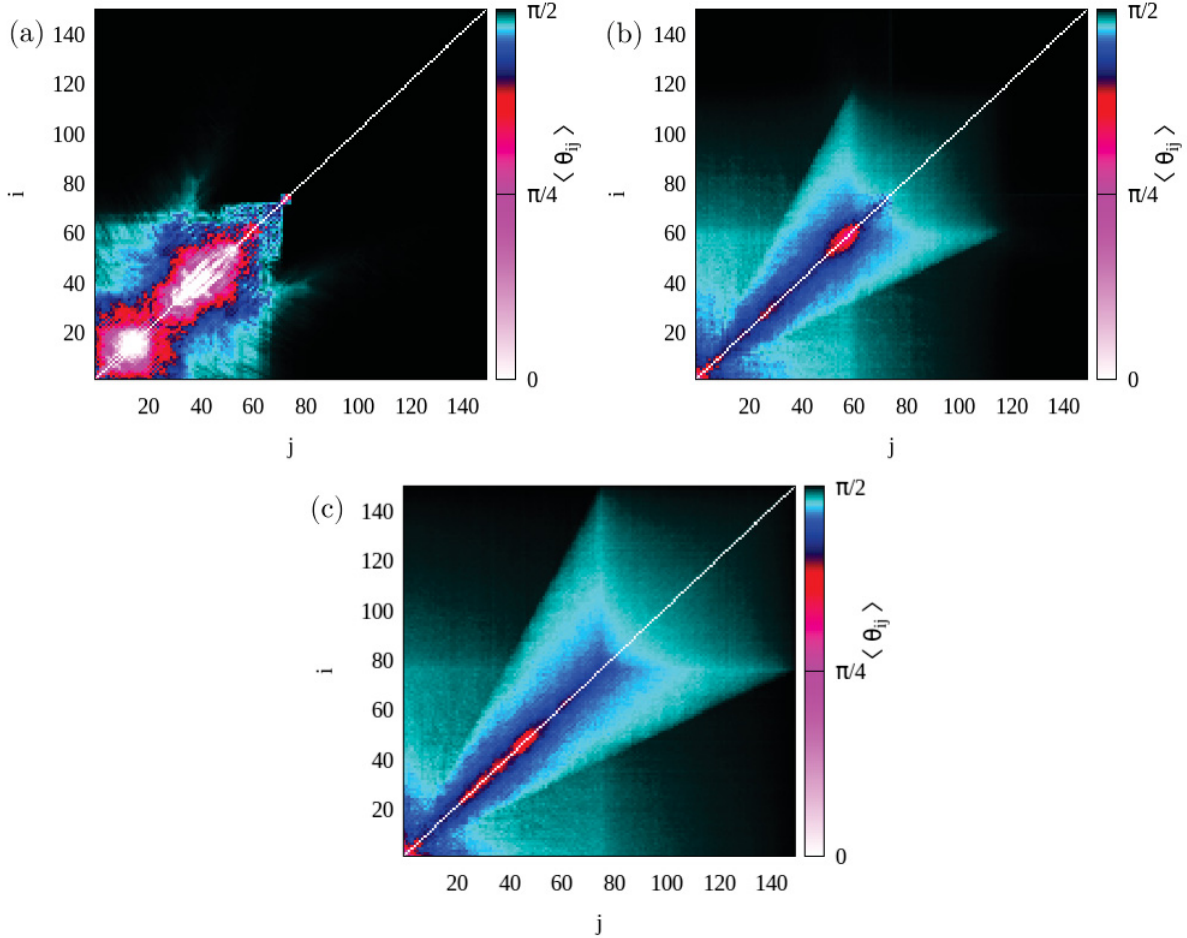


Figura 29 – Média temporal dos ângulos entre VLS para os osciladores acoplados: (a) Estados sincronizados com $\alpha = 1,37$; (b) Estados quimera $\alpha = 1,47$; (c) Estados dessincronizados $\alpha = 1,57$.

em média todos os VCLs são ortogonais, exceto os pares idênticos de que são sempre paralelos entre si. Para o estados quimera, onde ângulos médios são exibidos na Figura 29(b), este limite também é percebido em $i \approx 60$ e $j \approx 155$, depois desta região em média os VCLs são ortogonais. Já a Figura 29(c), que representa a situação dessincronizada, possui a mesma estrutura porém ampliada da situação anterior. O que acontece nesta situação é que não existe um limite que a partir do qual a figura passa exibir apenas regiões de ortogonalidade.

Os resultados para a densidade de violação da DDO apresentam propriedades que caracterizam bem a diferença das três situações que investigamos. Na sincronização, a não ser por pequenas regiões bem específicos, não ocorre a violação da DDO, como mostrado na Figura 30 (a). Aqui encontramos uma ambiguidade em relação dos nossos resultados e o que afirmam as referencias [58, 24], neste dois trabalhos os autores afirmam que a violação da DDO nula implica a não tangência entres os VCLs. Se compararmos as Figuras 30 (a) com 29 (a), pelo resultado da densidade de violação da DDO as não tangências médias não poderiam ocorrer, este resultado continua em investigação.

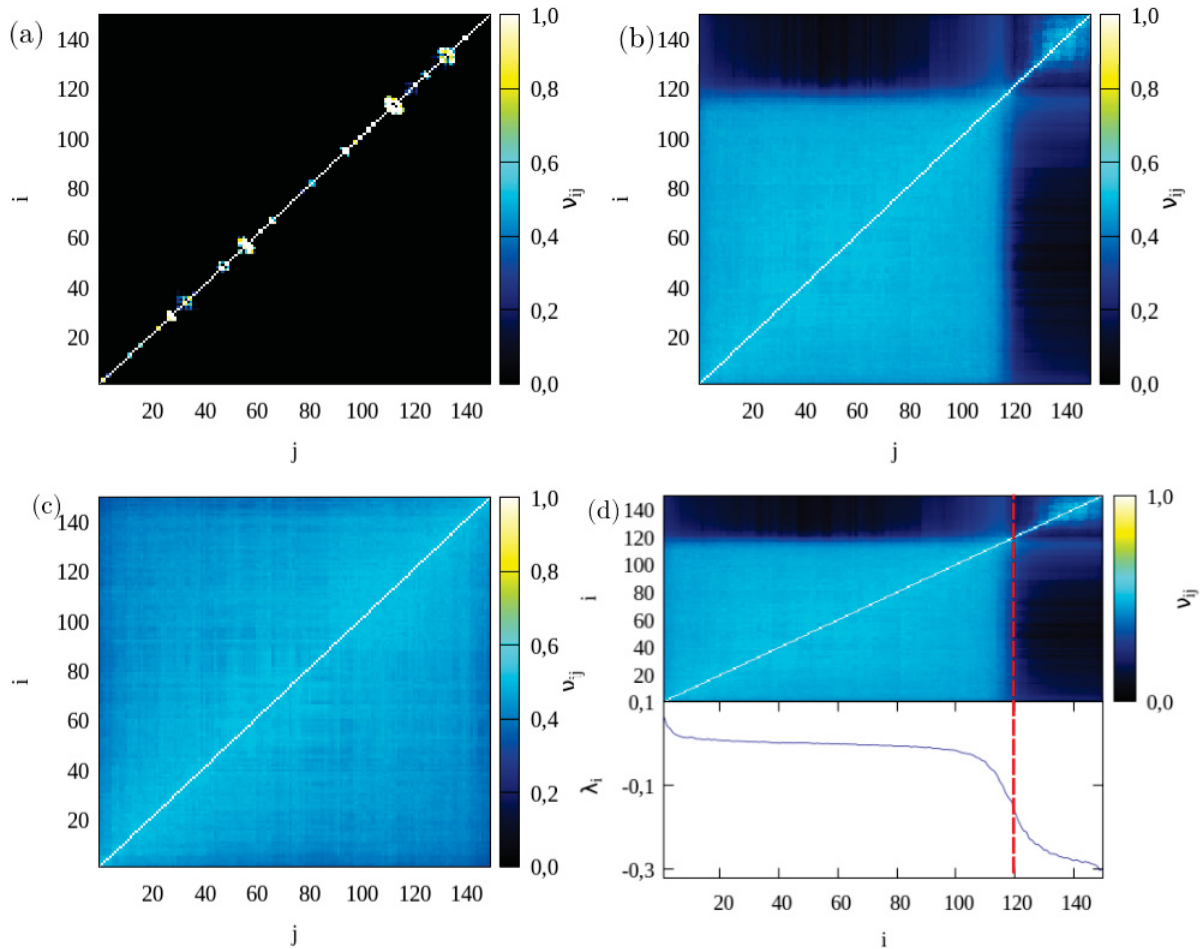


Figura 30 – Violação da DDO para os casos: (a) *sincronizado* $\alpha = 1,37$ não existe violação da DDO na maioria dos pares, exceto por alguns pontos bem específicos; (b) *quimera* $\alpha = 1,47$ existem duas regiões onde ν_{ij} é maior que corresponde aos modos dessincronizados e a região onde ν_{ij} possui valores próximos a zero corresponde aos modos sincronizados; (c) $\alpha = 1,57$ *dessincronizado* não existe região de ν_{ij} nula indicando que para esse caso só existem modos dessincronizados; (d) Comparação entre a violação da DDO com espectro de Lyapunov para situação de quimera, percebe-se a relação entre a mudança de um modo para o outro.

Agora para o estado de quimera a uma diferença de entre violação da DDO na região de decaimento dos ELs, dividida em duas regiões, a primeira onde a violação da DDO é maior que corresponde a região do espectro com ELs positivos ou próximos de zero, e uma região onde a violação de DDO é mínima que diz respeito a parte negativa do espectro. Esse comportamento é comum em sistemas espacialmente estendidos conforme [58]. Ainda sobre a ref. [58] os autores separam estas regiões denominando-as da seguinte maneira, o número de modos com maior violação da DDO são chamados de modos físicos e na região de pouca violação da DDO os modos são chamados de modos espúrios ou modos isolados. Outra característica destes modos é que os VCLs dos modos físicos se tangenciam entre eles. Já os VCLs dos modos espúrios são ortogonais aos VCLs dos modos físicos, e ortogonais aos diferentes VCLs destes modos.

Também é feita a decomposição do espaço tangente em um subespaço físico composto pelos modos físicos e o subespaço espúrio formado pelos modos espúrios. Takeuchi e colaboradores [58] ainda afirmam que os modos físicos são responsáveis por carregar as informações fisicamente relevantes para descrever o sistema [24] e os modos espúrios são residuais. Porém em nossos resultado o que seriam os modos espúrios correspondem as trajetórias sincronizadas que é uma informação relevante sobre a trajetória, e os modos físicos correspondem a região de não sincronização. Note que não estamos associando diretamente os VCLs \mathbf{v}_i ou os ELs λ_i , com as fases ϕ_i dos osciladores. Estamos associando o comportamento dessincronizado com a região dos espectro de Lyapunov próxima de zero. E o comportamento sincronizado com a região negativa do espectro de Lyapunov, enfatizando que esta associação já foi feita na Ref. [61].

Daqui em diante no contexto de estados quimera chamaremos aos modos com maior violação da DDO de modos dessincronizados e parte com violação nula de modos sincronizados. Na figura 30 (c) observamos apenas modos dessincronizados.

4.2.3 Desacoplamento hiperbólico entre modos

Faremos agora a análise de como estão distribuídos os ângulos entre VCL da seguinte maneira, ângulo entre VCL das regiões dos modos dessincronizados-dessincronizados, ou seja, tomaremos VCLs arbitrários desta região e vamos observar como se distribuem os ângulos entre eles. Também vamos proceder desta forma para os modos dessincronizados-sincronizados e sincronizados-sincronizados. Na Figura 31 (a) são mostradas as distribuições entre alguns ângulos arbitrários, nota-se que para pares de vetores próximos na região dos modos dessincronizados varrem um número maior de ângulos entre $[0, \pi]$, como exemplo temos a distribuição de dos ângulos (55,57) (*roxo escuro*) a distribuição apresenta uma maior uniformidade, o mesmo acontece para o par (61,67) (*azul claro*). Ainda na região do modos dessincronizados calculamos a distribuição para um par de vetores mais distantes, (4,40) (*roxo*) vemos que em média o ângulo é $\pi/2$ mas ainda há um alargamento na distribuição, entre o par (10,100) com média também igual a $\pi/2$ porém com um menor desvio. As distribuições de ângulos entre as regiões de modos dessincronizados e sincronizados, (35,120) (*vermelho*), estão bem localizadas em torno de $\pi/2$. No contexto dos modos sincronizados pares próximos em média são ortogonais também com a distribuição bem concentrada. Na Figura 31 plotamos o ângulo mínimo entre todos os pares de VCLs para observar quando ocorre pelo menos uma tangencia entre os vetores.

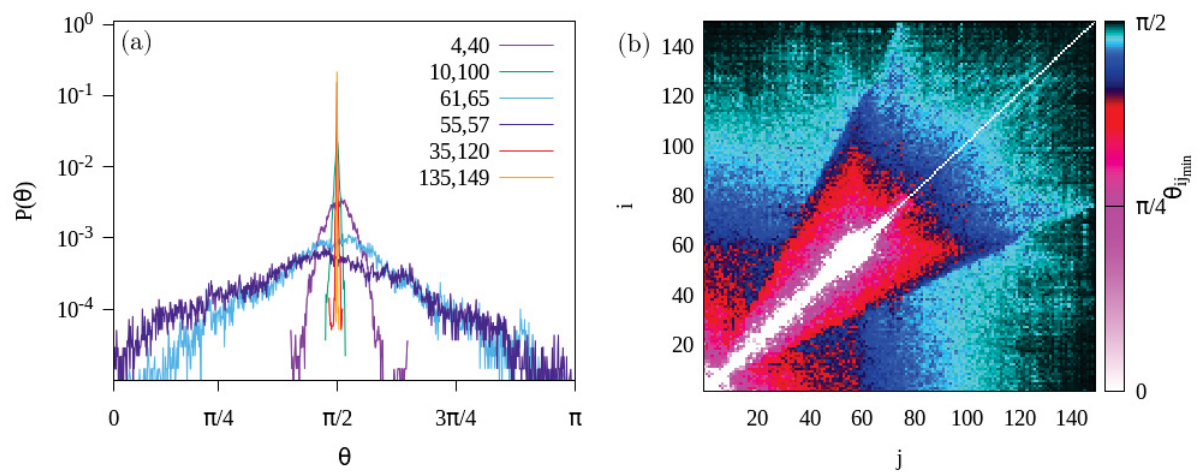


Figura 31 – (a) Distribuição de frequência normalizada de ângulos entre VCL em escala logarítmica no eixo y, detalhes no texto; (b) Ângulo mínimo entre pares arbitrários de VLCs para o estado quimera nos osciladores de Kuramoto-Sakaguchi acoplados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Revisamos a literatura recente sobre o tema *vetores covariantes de Lyapunov* partindo dos métodos propostos em [1, 3] nos quais é introduzido algoritmo dinâmico para a obtenção destes vetores, exemplificamos o caso para um sistema simples, mapa de Hénon, em que os ângulos formado pelos VCL são capazes de detectar facilmente propriedades referentes a (não) hiperbolicidade nesse sistema, uma vez que estão alinhados as variedades, acusando as regiões de tangência entre as variedades instável e estável. Também revisitamos alguns resultados presentes em [22, 21] e examinamos o carácter preditivo na análise de ângulos formados pelos VCLs para o sistema de Lorenz e para o oscilador de Rossler, em que os resultados mostram que o alinhamento entre os VCLs são capazes de antecipar picos de grande amplitude.

No que diz respeito À análise dos VCLs em sistemas espacialmente estendidos utilizamos dois modelos que possuem diversos comportamentos de interesse. Primeiro, em uma rede de mapas acoplados com acoplamento difusivo, calculamos a média temporal dos ângulos formados por todos os pares de VCLs para os padrões definidos em [25], que em média estão próximos de $\pi/2$ porém é possível observar algumas estruturas de ângulos menores. Ainda para a RMA calculamos densidade de violação da DDO conforme a proposto em [58] e observamos a relação da não violação com o decaimento do espectro de Lyapunov.

Para os osciladores de Kuramoto-Sakaguchi analisamos três comportamentos, sincronizado, quimera e dessincronizado. No caso onde existe a sincronização a uma região onde em média sempre há tangências entre os vetores e um limite que a partir dele os VCLs sempre são ortogonais. Entretanto, há ambiguidade neste resultados pois segundo as referencias [58, 59, 60] quando existe a DDO, ou seja ela não é violada, não existe tangência entre os VCLs. Para estados quimera também procedemos desta mesma forma. Contudo a densidade de violação da DDO revelou duas regiões uma com maior densidade de violação referente a de plato de valores próximos á zero do espectro de Lyapunov e outra para a região negativa de menor ou quase nula violação da DDO. Esta divisão em duas regiões em relação a violação da DDO é relatada na literatura como região de modos físicos e modos espúrios [58], em nosso trabalho, no contexto de estados quimera, tomamos a liberdade de chamar os modos encontrado de modos dessincronizados e sincronizados. Mostramos através das distribuição de ângulos entre os VCLs que os vetores da região dos modos sincronizados é sempre ortogonal aos vetores da região dos modos dessincronizados que pode indicar o desacoplamento hiperbólico entre as duas regiões.

REFERÊNCIAS

- 1 GINELLI, F. et al. Characterizing dynamics with covariant lyapunov vectors. *Physical review letters*, v. 99, n. 13, p. 130601, 2007.
- 2 OTT, E. *Chaos in dynamical systems*. [S.l.]: Cambridge university press, 2002.
- 3 GINELLI, F. et al. Covariant lyapunov vectors. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 46, n. 25, p. 254005, 2013.
- 4 WOLF, A. et al. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985.
- 5 DRESSLER, U.; FARMER, J. D. Generalized lyapunov exponents corresponding to higher derivatives. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, North-Holland, v. 59, n. 4, p. 365–377, 1992.
- 6 CHÁVEZ-CARLOS, J. et al. Quantum and classical lyapunov exponents in atom-field interaction systems. *Physical review letters*, APS, v. 122, n. 2, p. 024101, 2019.
- 7 CAESARENDRA, W. et al. Application of the largest lyapunov exponent algorithm for feature extraction in low speed slew bearing condition monitoring. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 50, p. 116–138, 2015.
- 8 ESSAID, M. et al. A new image encryption scheme based on confusion-diffusion using an enhanced skew tent map. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 127, p. 539–548, 2018.
- 9 BOWKER, R. G.; WRIGHT, C. L.; BOWKER, G. E. Patterns of body temperatures: Is lizard thermoregulation chaotic? *Journal of Thermal Biology*, Elsevier, v. 35, n. 1, p. 1–5, 2010.
- 10 FREITAS, U. et al. Identifying chaos from heart rate: The right task? *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 19, n. 2, p. 028505, 2009.
- 11 AFTANAS, L. I. et al. Non-linear analysis of emotion eeg: calculation of kolmogorov entropy and the principal lyapunov exponent. *Neuroscience letters*, Elsevier, v. 226, n. 1, p. 13–16, 1997.
- 12 NAKAYAMA, S.; NAKAMURA, Y. A fashion model with social interaction. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 337, n. 3-4, p. 625–634, 2004.
- 13 BAO, J. et al. Competitive lotka–volterra population dynamics with jumps. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Elsevier, v. 74, n. 17, p. 6601–6616, 2011.
- 14 MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2002.
- 15 SHIMADA, I.; NAGASHIMA, T. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progress of theoretical physics*, Oxford University Press, v. 61, n. 6, p. 1605–1616, 1979.

- 16 BENETTIN, G. et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Meccanica*, Springer, v. 15, n. 1, p. 9–20, 1980.
- 17 RUELLE, D. Ergodic theory of differentiable dynamical systems. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Springer, v. 50, n. 1, p. 27–58, 1979.
- 18 JOUSSEPH, C. et al. Weak dissipative effects on trajectories from the edge of basins of attraction. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 456, p. 68–74, 2016.
- 19 KRÜGER, T. S. et al. Mechanism for stickiness suppression during extreme events in hamiltonian systems. *Physical Review E*, APS, v. 91, n. 6, p. 062903, 2015.
- 20 NORWOOD, A. et al. Lyapunov, singular and bred vectors in a multi-scale system: an empirical exploration of vectors related to instabilities. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 46, n. 25, p. 254021, 2013.
- 21 BEIMS, M. W.; GALLAS, J. A. Predictability of the onset of spiking and bursting in complex chemical reactions. *Physical Chemistry Chemical Physics*, Royal Society of Chemistry, v. 20, n. 27, p. 18539–18546, 2018.
- 22 BEIMS, M. W.; GALLAS, J. A. Alignment of lyapunov vectors: a quantitative criterion to predict catastrophes? *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 6, p. 37102, 2016.
- 23 YANG, H.-l. et al. Hyperbolicity and the effective dimension of spatially extended dissipative systems. *Physical review letters*, APS, v. 102, n. 7, p. 074102, 2009.
- 24 XU, M.; PAUL, M. R. Covariant lyapunov vectors of chaotic rayleigh-bénard convection. *Physical Review E*, APS, v. 93, n. 6, p. 062208, 2016.
- 25 KANEKO, K. Pattern dynamics in spatiotemporal chaos: Pattern selection, diffusion of defect and pattern competition intermittency. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 34, n. 1-2, p. 1–41, 1989.
- 26 CRUTCHFIELD, J. P.; KANEKO, K. Phenomenology of spatio-temporal chaos. In: *Directions In Chaos—Volume 1*. [S.l.]: World Scientific, 1987. p. 272–353.
- 27 YANAGITA, T.; KANEKO, K. Coupled map lattice model for convection. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 175, n. 6, p. 415–420, 1993.
- 28 YANAGITA, T.; KANEKO, K. Modeling and characterization of cloud dynamics. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 22, p. 4297, 1997.
- 29 BRÄNNSTRÖM, Å.; SUMPTER, D. J. Coupled map lattice approximations for spatially explicit individual-based models of ecology. *Bulletin of mathematical biology*, Springer, v. 67, n. 4, p. 663–682, 2005.
- 30 SUN, H.; CAO, H. Complete synchronization of coupled rulkov neuron networks. *Nonlinear Dynamics*, Springer, v. 84, n. 4, p. 2423–2434, 2016.

- 31 KURAMOTO, Y.; BATTOGTOKH, D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators. *Nonlinear Phenomena and Complex Systems*, v. 5, p. 380–385.
- 32 ABRAMS, D. M.; STROGATZ, S. H. Chimera states for coupled oscillators. *Physical review letters*, APS, v. 93, n. 17, p. 174102, 2004.
- 33 HOMERO. *Ilíada*. [S.l.]: Penguin Companhia, 2005. (Clássicos). ISBN 978-85-8086-617-9.
- 34 RATTENBORG, N. C.; AMLANER, C.; LIMA, S. Behavioral, neurophysiological and evolutionary perspectives on unihemispheric sleep. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, Elsevier, v. 24, n. 8, p. 817–842, 2000.
- 35 RATTENBORG, N. C. Do birds sleep in flight? *Naturwissenschaften*, Springer, v. 93, n. 9, p. 413–425, 2006.
- 36 MOTTER, A. E. et al. Spontaneous synchrony in power-grid networks. *Nature Physics*, Nature Publishing Group, v. 9, n. 3, p. 191–197, 2013.
- 37 LIN, S.-Z. Mutual synchronization of two stacks of intrinsic josephson junctions in cuprate superconductors. *Journal of Applied Physics*, American Institute of Physics, v. 115, n. 17, p. 173901, 2014.
- 38 HIZANIDIS, J.; LAZARIDES, N.; TSIRONIS, G. Robust chimera states in squid metamaterials with local interactions. *Physical Review E*, APS, v. 94, n. 3, p. 032219, 2016.
- 39 MEISS, J. Dynamical systems. *Scholarpedia*, v. 2, n. 2, p. 1629, 2007. Revision #137210.
- 40 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos*. [S.l.]: Springer, 1996.
- 41 GULICK, D. *Encounters with Chaos and Fractals*. 2. ed. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2012. ISBN 1584885173,9781584885177.
- 42 GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 42.
- 43 OSELEDETS, V. I. A multiplicative ergodic theorem. characteristic ljustapunov, exponents of dynamical systems. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, Moscow Mathematical Society, v. 19, p. 179–210, 1968.
- 44 ABARBANEL, H. D. et al. The analysis of observed chaotic data in physical systems. *Reviews of modern physics*, APS, v. 65, n. 4, p. 1331, 1993.
- 45 SILVA, R. M. d. et al. Proliferação de estruturas periódicas em sistemas dinâmicos estocásticos. 2019.
- 46 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- 47 HOFFMAN, K.; KUNZE, R. Algebra linear. 2a. *Edição (traduzida)*, LTC, Rio de Janeiro, 1979.

- 48 JP, E.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, v. 57, p. 617–656, 1985.
- 49 BOSETTI, H.; POSCH, H. A. Covariant lyapunov vectors for rigid disk systems. *Chemical physics*, Elsevier, v. 375, n. 2-3, p. 296–308, 2010.
- 50 BEIMS, M. W.; GALLAS, J. A. Manifold angles, the concept of self-similarity, and angle-enhanced bifurcation diagrams. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 6, p. 18859, 2016.
- 51 KUPTSOV, P. V.; PARLITZ, U. Theory and computation of covariant lyapunov vectors. *Journal of nonlinear science*, Springer, v. 22, n. 5, p. 727–762, 2012.
- 52 NOETHEN, F. A projector-based convergence proof of the ginelli algorithm for covariant lyapunov vectors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 396, p. 18–34, 2019.
- 53 KUPTSOV, P. V. Fast numerical test of hyperbolic chaos. *Physical Review E*, APS, v. 85, n. 1, p. 015203, 2012.
- 54 LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.
- 55 PRESS, W. H. *Numerical recipes in Fortran 77 and Fortran 90: the art of scientific and parallel computing; diskette v 2.06 h*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.
- 56 KANEKO, K. Period-doubling of kink-antikink patterns, quasiperiodicity in antiferro-like structures and spatial intermittency in coupled logistic lattice: Towards a prelude of a “field theory of chaos”. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 72, n. 3, p. 480–486, 1984.
- 57 KAPRAL, R. Pattern formation in two-dimensional arrays of coupled, discrete-time oscillators. *Physical Review A*, APS, v. 31, n. 6, p. 3868, 1985.
- 58 TAKEUCHI, K. A. et al. Hyperbolic decoupling of tangent space and effective dimension of dissipative systems. *Physical Review E*, APS, v. 84, n. 4, p. 046214, 2011.
- 59 VIANA, M.; BOCHI, J. Pisa lectures on lyapunov exponents. 2005.
- 60 PUGH, C.; SHUB, M. et al. Stable ergodicity. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 41, n. 1, p. 1–41, 2004.
- 61 WOLFRUM, M. et al. Spectral properties of chimera states. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 21, n. 1, p. 013112, 2011.
- 62 MENDES, C. F. O.; SILVA, R. M. da; BEIMS, M. W. Distance correlation in chimera states. *Em preparação*.
- 63 SAKAGUCHI, H.; KURAMOTO, Y. A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 76, n. 3, p. 576–581, 1986.

-
- 64 ABRAMS, D. M.; STROGATZ, S. H. Chimera states in a ring of nonlocally coupled oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 16, n. 01, p. 21–37, 2006.
- 65 FAIRES, R. L. B. J. D. *Numerical analysis*. 9th ed. ed. [S.l.]: Brooks/Cole Cengage Learning, 2011. ISBN 9780538733519,0538733519,9780538735643,0538735643.
- 66 STROGATZ, S. H. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 143, n. 1-4, p. 1–20, 2000.