

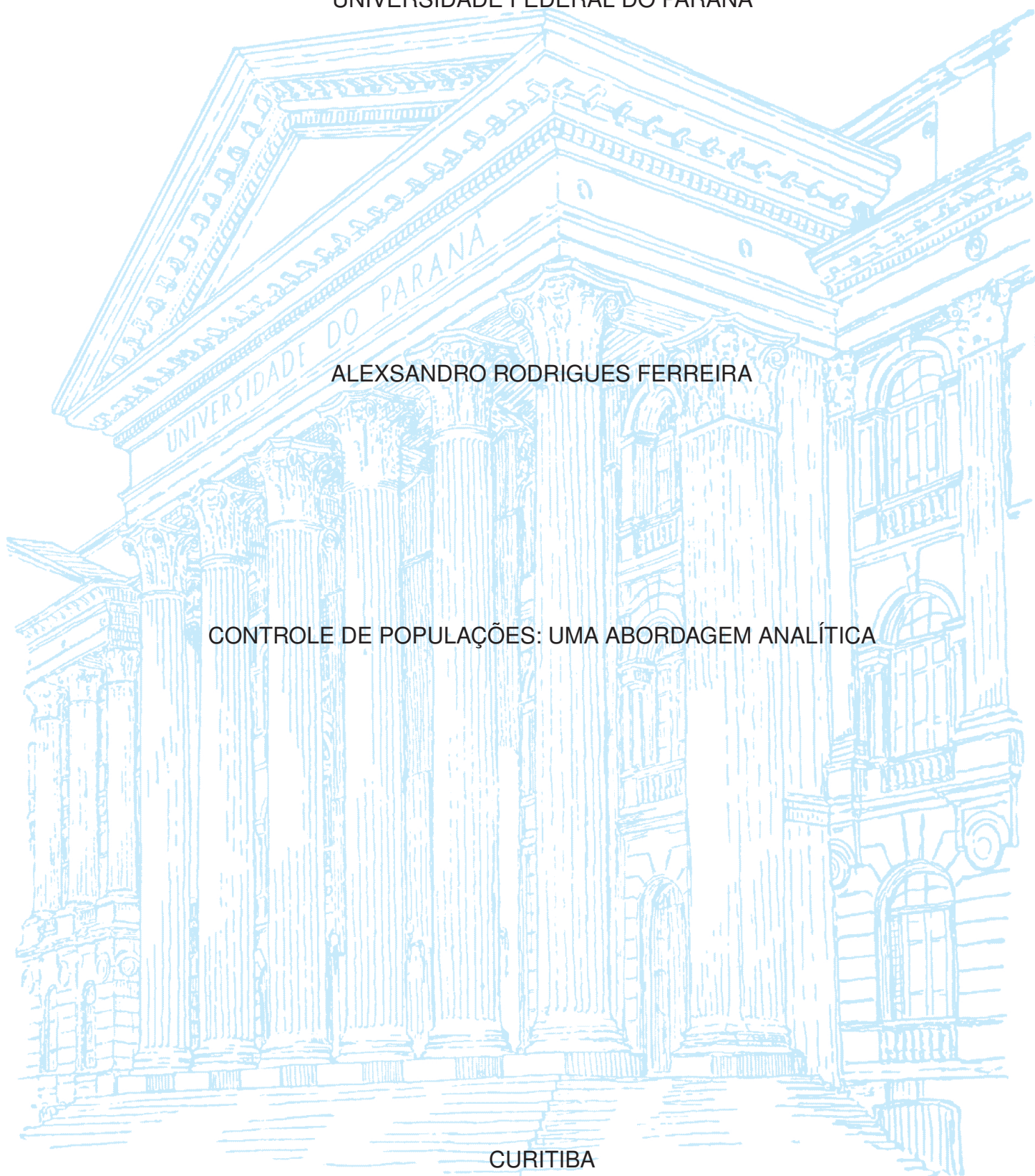
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ALEXSANDRO RODRIGUES FERREIRA

CONTROLE DE POPULAÇÕES: UMA ABORDAGEM ANALÍTICA

CURITIBA

2021



ALEXSANDRO RODRIGUES FERREIRA

CONTROLE DE POPULAÇÕES: UMA ABORDAGEM ANALÍTICA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática .

Orientador: Luiz Antônio Ribeiro de Santana

CURITIBA

2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

F383c

Ferreira, Alexsandro Rodrigues  
Controle de populações: uma abordagem analítica [recurso eletrônico] /  
Alexsandro Rodrigues Ferreira. – Curitiba, 2021.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,  
Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional  
(PROFMAT), 2021.

Orientador: Luiz Antônio Ribeiro de Santana

1. Equações Diferenciais. 2. Crescimento demográfico. 3. População -  
Crescimento. I. Universidade Federal do Paraná. II. Santana, Luiz Antônio  
Ribeiro de. III. Título.

CDD: 515.35

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ALEXSANDRO RODRIGUES FERREIRA** intitulada: **Controle de Populações: Uma abordagem analítica**, sob orientação do Prof. Dr. LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 05 de Fevereiro de 2021.

Assinatura Eletrônica

05/02/2021 15:31:52.0

LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

05/02/2021 15:32:45.0

ADRIANA LUIZA DO PRADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

05/02/2021 15:33:54.0

JOAO LUIS GONCALVES

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

## **AGRADECIMENTOS**

Este trabalho não seria possível sem o apoio e colaboração de minha esposa e filhos que renunciaram a minha presença nas horas de estudo. Agradeço ao amigo Juliano Fogaça pela insistência e apoio para que eu me inscrevesse no processo de seleção do PROFMAT, me fazendo enxergar os benefícios que me traria esse título. Ao professor Luiz Antônio de Ribeiro Santana, que me orientou com paciência e dedicação, sem o qual não seria possível a realização desta pesquisa. A todos os professores que ao longo do curso compartilharam seu saber e aos colegas de sala com os quais compartilhei dúvidas e certezas.

## RESUMO

Neste trabalho realizamos um estudo analítico das soluções de uma equação diferencial, com o objetivo de obter as informações necessárias a respeito de uma determinada população, sem a necessidade de uma abordagem algébrica, que muitas vezes é inviável devido a sua complexidade, ou até mesmo impossível de obter. Neste contexto, utilizamos modelos alguns matemáticos já existentes baseados numa classe especial de funções diferenciais: as equações autônomas. Com o auxílio do software Dfield, plotamos as curvas que representam as soluções da equação diferencial do respectivo modelo para diferentes situações iniciais e fazemos uma análise dos resultados obtidos. Desta forma podemos realizar interferências nos elementos que controlam uma determinada população a fim de se obter uma situação de equilíbrio na dinâmica populacional da espécie em questão. Este estudo se justifica pela necessidade, cada vez mais atual, de controlar alguns aspectos da dinâmica populacional de algumas pragas que prejudicam a agricultura ou até mesmo dizimam florestas e outras áreas essenciais para um meio ambiente saudável.

**Palavras-chaves:** Equações Diferenciais, Dinâmica Populacional, Plano de Fase.

## **ABSTRACT**

In this work, we carry out an analytical study of the solutions of a differential equation, with the objective of obtaining the necessary information about a given population, without the need for an algebraic approach, which is often unfeasible due to its complexity, or even impossible to obtain. In this context, we use some existing mathematical models based on a special class of differential functions: autonomous equations. With the aid of the Dfield software, we plot the curves that represent the solutions of the differential equation of the respective model for different initial situations and make an analysis of the results obtained. In this way, we can interfere with the elements that control a given population in order to obtain a balanced situation in the population dynamics of the species in question. This study is justified by the need, more and more current, to control some aspects of the population dynamics of some pests that harm agriculture or even decimate forests and other areas essential for a healthy environment.

### **Key-words:**

Differential Equations, Population Dynamics, Phase Plan .

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – Plano de fase exemplo 4.1 . . . . .	21
FIGURA 2 – Plano de fase equação da 4.9. . . . .	26
FIGURA 3 – Plano de fase equação 4.10 . . . . .	27
FIGURA 4 – Gráfico equação 4.11 . . . . .	27
FIGURA 5 – Plano de fase da equação 4.11 . . . . .	28
FIGURA 6 – Algumas soluções da Equação (4.12). . . . .	29
FIGURA 7 – Plano de fase da equação 4.13 . . . . .	30
FIGURA 8 – Variáveis e parâmetros da equação 5.4 . . . . .	34
FIGURA 9 – Pontos críticos da equação 5.5 . . . . .	35
FIGURA 10 – Gráfico da equação 5.5 . . . . .	35
FIGURA 11 – Plano de fase para a equação 5.5 . . . . .	36
FIGURA 12 – Estudo de soluções da equação 5.5 para $\alpha = 0,54$ e $\beta = 12$ . . . . .	36
FIGURA 13 – Gráfico da equação 5.5 para $\alpha = 0,54$ e $\beta = 12$ . . . . .	37
FIGURA 14 – Plano de fase da equação 5.5 para $\alpha = 0,54$ e $\beta = 12$ . . . . .	37
FIGURA 15 – Estudo de soluções da equação 5.5 para $\alpha = 0,54797$ e $\beta = 12$ . . . . .	38
FIGURA 16 – Gráfico da equação 5.5 para $\alpha = 0,54797$ e $\beta = 12$ . . . . .	38
FIGURA 17 – Plano de fase da equação 5.5 para $\alpha = 0,54797$ e $\beta = 12$ . . . . .	38



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELOS MATEMÁTICOS</b>	<b>13</b>
2.0.1	Modelo matemático para ratos do campo e corujas	13
2.1	Classificação de equações diferenciais	13
<b>3</b>	<b>MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES</b>	<b>15</b>
3.1	Solução por integração direta	15
3.2	Equações de variáveis separáveis	16
3.3	Equações Lineares. Método dos fatores integrantes	17
3.4	Equações exatas	18
<b>4</b>	<b>EQUAÇÕES AUTÔNOMAS</b>	<b>20</b>
4.1	Estabilidade e plano de fase	20
4.2	Dinâmica populacional	22
4.3	Crescimento de populações sem fator limitante	23
4.4	Crescimento de populações com fatores limitantes	24
4.5	Existência de pontos críticos	25
4.6	Crescimento Logístico com limiar	26
<b>5</b>	<b>MODELO MATEMÁTICO PARA LAGARTAS CANADENSES</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>39</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>40</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Desde muito tempo o homem tem a necessidade de entender e fazer intervenções na natureza de modo a se apropriar de seus recursos ou apenas coexistir com suas mais diversas manifestações. Esta necessidade aumenta na medida que a civilização se expande e se confronta com as dificuldades imposta pelo meio. Neste contexto, a Matemática se faz de extrema necessidade, de modo que o progresso da humanidade é diretamente proporcional aos avanços feitos nesta ciência. Através da Matemática o homem pode descrever e interpretar o universo à sua volta e também, por meio dela, pode intervir de maneira eficiente, obtendo máximo proveito de seus recursos ou até mesmo realizar previsões de eventos que ameaçam sua existência.

Ao longo dos anos foram diversas as tentativas de descrever matematicamente o mundo no qual vivemos e a cada tentativa houveram significativas contribuições ao desenvolvimento de uma linguagem precisa e eficiente. Grandes nomes surgiram durante esta trajetória e talvez nenhum deles tenha tanta importância para desenvolvimento deste trabalho quanto o de Isaac Newton (1643-1727). Com Newton a humanidade conheceu o cálculo diferencial, e por meio do cálculo, avanços significativos na interpretação matemática do mundo surgiram. É claro que todo conhecimento adquirido por ele foi devido aos esforços de muitos que o precederam. Nas palavras do próprio Isaac Newton "...se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei nos ombros de gigantes."

Newton e muitos depois dele tornaram o cálculo diferencial uma ferramenta valiosa, meticulosamente elaborada e extremamente precisa na descrição do nosso universo cujas leis estão em grande parte escritas na linguagem matemática. Os fenômenos mais interessantes envolvem a variação de quantidade e como sabemos a derivada de uma função  $f$  pode ser entendida como a taxa na qual a quantidade  $f(x)$  varia em relação a uma variável independente  $t$ . Dessa forma, o estudo de fenômenos que envolvem mudanças, são frequentemente descritos por equações que envolvem derivadas, a estas equações chamamos de equações diferenciais.

O estudo de equações diferenciais se justifica pela vasta aplicação na modelagem de fenômenos ambientais, econômicos, físicos, entre outros. No entanto, a eficiência de um modelo é medida por sua capacidade de representar a realidade e fazer previsões. É claro que esta representação será, por maior que seja sua eficiência, apenas uma aproximação do fenômeno real.

A teoria das equações diferenciais fundamenta modelos matemáticos que traduzem o mundo a nossa volta em termos das variáveis de uma equação, cuja análise nos conduz a interações com o meio que vivemos a fim de entendê-lo e

modificá-lo de acordo com as nossas necessidades. No entanto, essa teoria, apesar de expressar fenômenos com certa precisão, tem suas limitações e algumas dessas equações são de difícil resolução, enquanto outras, são ainda impossíveis de se resolver algebricamente. Desenvolvemos métodos para encontrar as soluções de algumas classes de equações diferenciais, mas estas equações constituem a minoria quando comparadas a complexidade na qual o mundo se apresenta.

Felizmente, com o auxílio de ferramentas computacionais podemos realizar um estudo geométrico das soluções de uma equação diferencial cuja complexidade não nos permita encontrar soluções algébricas. Em alguns casos essas soluções tornam-se até mesmo irrelevantes, visto que podemos conhecer seu comportamento geométrico e através dele obtermos as conclusões necessárias.

O ponto central desse trabalho é o estudo de modelos matemáticos que descrevem o comportamento de populações de indivíduos sobre certas condições oferecidas pelo meio em que habitam ou pela própria população. Neste contexto, o capítulo 02 se inicia com uma breve classificação das equações diferenciais, para em seguida, no capítulo 03, serem apresentados métodos de resolução para as equações de variáveis separáveis, equações exatas e o métodos do fator integrante para equações lineares. No capítulo 4 é realizado um estudo sobre as equações autônomas, que são equações diferenciais da forma:

$$\frac{dp}{dt} = f(p).$$

As demais seções tratam de variações desta equação que descrevem modelos para o crescimento de populações com fator limitante e sem este fator. A ferramenta utilizada no estudo destas equações é o plano de fase, onde são plotadas a família de soluções da respectiva equação e através de uma análise do seu comportamento, de acordo com a variação dos parâmetros utilizados no modelo, são estabelecidos os pontos críticos estáveis em torno do qual a população se estabiliza, ou os pontos críticos instáveis que são aqueles cujas curvas se afastam. E por fim, no capítulo 05 é realizado um estudo analítico do modelo matemático representado pela equação:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{N} \right) - B \frac{P^2}{A^2 + B^2},$$

que modela a dinâmica populacional de um tipo específico de lagarta canadense, testando este modelo para diferentes parâmetros e avaliando seus pontos críticos.

## 2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E MODELOS MATEMÁTICOS

Um modelo matemático consiste em uma equação que relaciona variáveis que descrevem um determinado fenômeno, a análise desta equação nos permite descrever e prever comportamentos do fenômeno estudado, aplicando os conhecimentos adquiridos na situação inicial real.

### 2.0.1 Modelo matemático para ratos do campo e corujas

Considere uma população de ratos do campo em uma determinada área rural. Vamos considerar que na ausência de predadores essa população de ratos cresça a uma taxa proporcional a população atual, o que se aproxima muito da realidade quando não há fatores restritivos para esse crescimento. Se representarmos a população de ratos em um período de tempo  $t$ , medido em meses, por  $p(t)$ , a equação diferencial que representa as variações ocorridas nessa população é

$$\frac{dp}{dt} = kp.$$

Onde  $k$  é a constante de proporcionalidade, geralmente obtida por um estudo da população durante um período, onde é feito um controle da variação da quantidade de indivíduos, seja no seu habitat natural ou em ambiente controlado. Supondo que essa taxa seja  $k = 0,5$ . Agora vamos supor que nessa região existam corujas que matam, em média 15 ratos por dia. Um modelo matemático que descreve esta situação é

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450.$$

Com auxílio desta equação podemos concluir que, nas condições propostas, a população de ratos se estabiliza em torno de 900 indivíduos. Podemos inclusive determinar o número de corujas que devem ser inseridas na região para que a população de ratos se estabilize em torno de 400 indivíduos. Observe que o modelo matemático nos permite estudar as interações entre as populações de ratos e corujas e desta forma realizar as intervenções necessárias para fins de controle.

É claro que devemos considerar que a situação descrita cima é hipotética, usada com o objetivo de ilustrar um modelo matemático.

### 2.1 CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais são classificadas em ordinárias ou parciais, no primeiro caso aparecem na equação diferencial apenas derivadas simples, enquanto no

segundo, as equações são compostas por derivadas parciais. Um exemplo de equações diferenciais ordinárias é

$$R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V$$

que descreve a carga  $Q(t)$  em um capacitor. Nesta equação  $R$  é a resistência,  $C$  a capacitância e  $V$  a voltagem constante fornecida pela bateria. Observe que a derivada  $\frac{dQ}{dt}$  é uma derivada simples. Já na equação do calor

$$\alpha^2 \frac{\delta^2 u(x, t)}{\delta x^2} = \frac{\delta u(x, t)}{\delta t},$$

as derivadas são parciais e por isto é classificada como equação diferencial parcial.

A ordem de uma equação diferencial é a dada pela derivada de maior ordem que aparece na equação, desta forma a equação  $y'' + 9y = 0$  é uma equação de segunda ordem, enquanto que a equação que descreve a carga  $Q(t)$  dada anteriormente, é uma equação de primeira ordem. Outra classificação muito importante no que diz respeito as equações diferenciais é se ela é linear ou não. A equação

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

é dita linear se  $F$  é uma função linear das variáveis  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ . Assim uma equação diferencial ordinária linear geral de ordem  $n$  é descrita como:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_n(t)y = g(t).$$

Todas as equações que iremos utilizar neste trabalho são lineares de primeira ordem. Um exemplo de equação diferencial não linear é  $y^{(3)} + 2e^t y^{(2)} + y \cdot y' = t^4$ . Onde  $y^{(n)}$  denota a derivada de ordem  $n$  de  $y$ , enquanto que derivadas até a segunda ordem optamos por descrever como  $y'$  quando de primeira ordem ou  $y''$  quando de segunda ordem. No exemplo anterior, o termo  $y \cdot y'$  é quem torna a equação não linear.

Muitos fenômenos físicos não podem ser descritos adequadamente por uma equação linear, por isso, para estudar esses fenômenos é inevitável trabalhar com equações não lineares. No entanto, existe um método chamado de linearização, que nos permite aproximar uma equação não linear por uma linear, tendo em vista que o processo de resolução de uma equação linear é muito mais simples, esse método constitui uma importante ferramenta no estudo das equações diferenciais.

### 3 MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

Neste capítulo iremos abordar alguns métodos de resolução para equações de primeira ordem,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

onde  $f$  é uma equação de duas variáveis dada. Qualquer função  $\phi(t)$  que satisfaça esta equação, para todo  $t$  em um intervalo, é dita uma solução, e nosso objetivo é determinar se tais funções existem e, caso existam, desenvolver métodos para encontrá-las. Não existem métodos gerais para determinar tais funções, portanto vamos apresentar três métodos, que constituem o mais importantes, cada um aplicável a uma classe de equações, as equações lineares, as equações de variáveis separadas e as equações exatas.

#### 3.1 SOLUÇÃO POR INTEGRAÇÃO DIRETA

Quando na equação diferencial de primeira ordem  $y' = f(x, y)$ , a função  $f$  é independente da variável dependente  $y$ , ou seja,

$$\frac{dx}{dy} = f(x),$$

basta integrar ambos lados da equação para obter uma solução geral,

$$y = \int f(x) + C.$$

Considerando  $G(x)$  uma primitiva de  $f$ , temos:

$$y(x) = G(x) + C.$$

Se  $y(x_0) = y_0$  é uma condição inicial, então escolhendo a constante  $C$  de modo que  $C = y_0 - G(x_0)$  obtemos uma solução particular da equação dada, satisfazendo a condição inicial,

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

**Exemplo:** Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3, \quad y(1) = 0.$$

Resolução:

$$y = \int 3x^2 - 3 \, dx = x^3 - 3x + C.$$

Substituindo  $x = 1$  e  $y = 0$ , temos:

$$0 = 1 - 3 + C$$

$$c = 2$$

Desta forma a solução procurada é:

$$y(x) = x^3 - 3x + 2.$$

### 3.2 EQUAÇÕES DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

A equação diferencial de 1ª ordem:

$$\frac{dx}{dy} = P(x, y)$$

é dita separável se a função  $P(x, y)$  pode ser escrita como produto de uma função de  $x$  e uma função de  $y$ . Ou seja:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Neste caso podemos escrever

$$f(y)dy = g(x)dx.$$

Integrando em ambos lados obtemos:

$$F(y) = G(x) + C,$$

A constante  $C$  pode ser calculada de acordo com a condição inicial dada.

**Exemplo:** Resolva o problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \quad y(0) = -2.$$

Resolução:

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \rightarrow \frac{dy}{y} = 3xdx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 3xdx$$

$$\ln(y) + C_1 = \frac{3x^2}{2} + C_2$$

Fazendo  $C_2 - C_1 = k$  obtemos:

$$\ln(y) = \frac{3x^2}{2} + k$$

$$y(x) = e^{\frac{3x^2}{2} + k}.$$

Fazendo  $e^k = A$  e considerando a condição inicial  $y(0) = -2$

$$y(0) = A \rightarrow A = -2.$$

$$y(x) = -2 \cdot e^{\frac{3x^2}{2}}.$$

### 3.3 EQUAÇÕES LINEARES. MÉTODO DOS FATORES INTEGRANTES

Considere a equação:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (3.1)$$

onde  $P(x)$  e  $Q(x)$  são funções dadas. Um fator integrante para esta equação é uma função  $\mu(x, y)$  tal que a multiplicação nos dois lados da equação diferencial por  $\mu(x, y)$  forneça uma equação em que cada lado seja reconhecível como uma derivada. Multiplicando a equação 3.1 pelo fator

$$\rho(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (3.2)$$

Temos como resultado

$$e^{\int P(x)dx} \cdot \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot e^{\int P(x)dx} y = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}, \quad (3.3)$$

que é a derivada do produto  $y(x)e^{\int P(x)dx}$ . Desta forma dizemos que 3.2 é o fator integrante da equação 3.1.

Como a derivada da integral de uma função é a própria função, podemos escrever:

$$\frac{d}{dx} \left[ y(x)e^{\int P(x)dx} \right] = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Integrando em ambos os lados, temos

$$y(x)e^{\int P(x)dx} = \int (Q(x)e^{\int P(x)dx})dx + C.$$

Resolvendo em relação a  $y$ , obtemos a solução geral da equação 3.1

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[ \int (Q(x)e^{\int P(x)dx})dx + C \right]. \quad (3.4)$$

**Exemplo:** Resolva o problema de valor inicial:

$$x \frac{dy}{dx} + 5y = 7x^2 \quad y(2) = 1.$$

Resolução:

Dividindo toda equação por  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{5}{x}y = 7x$$

$$\rho(x) = e^{\int \frac{5}{x}dx}$$

$$\rho(x) = x^5.$$



Multiplicando ambos os lados da equação  $\frac{dy}{dx} + \frac{5}{x}y = 7x$  por  $\rho(x)$ , obtemos:

$$x^5 \cdot \frac{dy}{dx} + 5x^4 y = 7x^6.$$

O lado esquerdo da equação acima é a derivada do produto  $x^5 \cdot y$ , portanto:

$$\frac{d}{dx}(x^5 \cdot y) = 7x^6.$$

Integrando em ambos os lados,

$$x^5 \cdot y = \int 7x^6 dx$$

$$x^5 \cdot y = x^2 + \frac{C}{x^5}$$

Aplicando a condição inicial  $y(2) = 1$ , obtemos:

$$y(x) = x^2 + \frac{32}{x^5}.$$

### 3.4 EQUAÇÕES EXATAS

Suponha que as funções  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  são contínuas e têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas num retângulo aberto  $R : a < x < b, c < y < d$ . Então a equação diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3.5}$$

é exata em  $R$ , se e somente se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3.6}$$

em cada ponto de  $R$ . Isto é, existe uma função  $F(x, y)$  definida em  $R$  com  $\frac{\partial F}{\partial x} = M$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} = N$ , se e somente se, a Equação 3.6 é válida em  $R$ .

Encontrar uma solução geral para uma equação exata, consiste em supor uma função  $F(x, y)$  tal que  $\frac{\partial F}{\partial x} = M$  e  $\frac{\partial F}{\partial y} = N$  e como  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  concluímos que  $F(x, y) = C$ , onde  $C$  é uma constante. Para encontrar tal função  $F(x, y)$ , primeiro integramos  $M(x, y)$  em relação a  $x$ , ou seja,

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y),$$

onde  $g(y)$  é uma constante na integração em relação a  $x$ . Agora impondo a condição  $\frac{\partial F}{\partial y} = N$  temos:

$$N = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) + g'(y),$$

e portanto, por comparação com a função  $N(x, y)$ , encontramos  $g'(y)$  e integrando encontramos  $g(y)$ , determinando assim a função  $F(x, y)$ .

**Exemplo** Resolva a equação diferencial

$$(6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0.$$

Esta equação é exata, pois:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Integrando  $M$  em relação a  $x$ ,

$$F(x, y) = \int (6xy - y^3)dx = 3x^2y - xy^3 + g(y).$$

Onde  $g(y)$  é uma constante em relação a  $x$ . Derivando  $F$  em relação a  $y$  e igualando a  $N$ , obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2x + g'(y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2,$$

de onde concluímos que  $g'(y) = 4y$  e portanto  $g(y) = 2y^2 + C_1$  logo,

$$F(x, y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C.$$

## 4 EQUAÇÕES AUTÔNOMAS

Em nosso estudo estamos interessados em equações diferenciais de primeira ordem com algumas particularidades, onde a taxa de variação depende implicitamente da variável independente. Esse tipo de equações são denominadas de autônomas.

As equações diferenciais autônomas são equações diferenciais que têm a forma:

$$\frac{dp}{dt} = f(p). \quad (4.1)$$

A longo deste estudo iremos abordar alguns modelos se baseiam em equações autônomas. A resolução de uma equação diferencial nem sempre é uma tarefa simples. Na maioria das vezes, torna-se até impossível obter soluções por manipulações algébricas. Nestes casos uma análise qualitativa da equação se faz necessária, para tanto, vamos desenvolver ao longo da próxima seção algumas ferramentas que irão nos auxiliar nos capítulos seguintes.

### 4.1 ESTABILIDADE E PLANO DE FASE

Um ponto crítico da equação 4.1 é uma raiz da equação  $f(p) = 0$ . Se  $p = k$  é um ponto crítico de uma equação diferencial, então esta equação tem uma solução constante dada por  $p(t) = k$ . Esta solução é denominada, na maioria das vezes, de solução de equilíbrio. Conhecer a solução de equilíbrio de uma equação é de fundamental importância para uma análise qualitativa.

**Exemplo:** Considerando a equação autônoma  $\frac{dp}{dt} = 4p - p^2 - 3$  determine seus pontos críticos:

Devemos ter  $\frac{dp}{dt} = 0$ , então:

$$4p - p^2 - 3 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau temos:

$$p = 1 \quad \text{e} \quad p = 3,$$

que são os pontos críticos da equação.

A maioria das equações diferenciais que constituem modelos matemáticos não são de fácil resolução, devido a isso uma análise qualitativa da equação, sem resolvê-la, torna-se uma ferramenta valiosa. Neste contexto, poder observar o comportamento de suas soluções em uma região do plano, nos permite tirar conclusões a respeito do fenômeno estudado. Desta forma, métodos computacionais tornam-se poderosos aliados, pois nos poupam de cálculos repetitivos ou até mesmo extremamente complicados. Com auxílio de um computador podemos construir os gráficos das curvas que representam as soluções de uma equação diferencial, para inúmeras condições iniciais. A estes gráficos chamamos de plano de fase.

O plano de fase é uma região do plano, onde plotamos famílias de curvas que são soluções da equação  $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ , para observar, geometricamente, o comportamento destas soluções nas regiões de interesse. No caso do exemplo (3.1) o plano de fase seria:

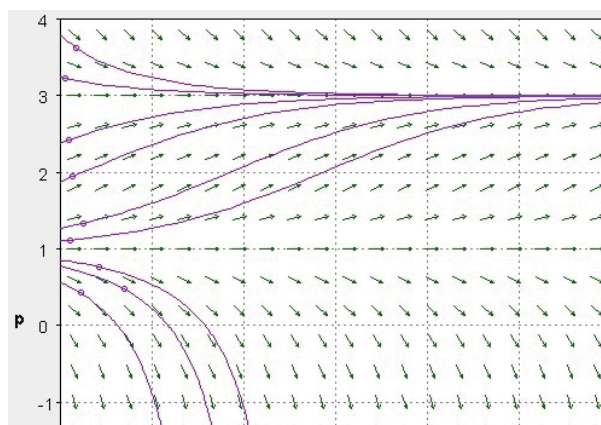


FIGURA 1 – Plano de fase exemplo 4.1

Podemos perceber que as curvas cuja a solução inicial está próxima de  $p = 3$  tendem a se aproximar ainda mais deste valor para  $t \rightarrow \infty$ , enquanto as curvas cuja soluções iniciais estão mais próximas de  $p = 1$  se afastam dele conforme  $t$  aumenta. Este comportamento caracteriza a estabilidade ou instabilidade de um ponto crítico, conforme veremos a seguir.

**Definição:** Um ponto crítico  $p = k$  de uma EDO autônoma é denominado estável se o valor inicial  $p_0$  é suficientemente próximo de  $k$ , então a solução  $p(t)$  permanece próximo de  $k$  para todo  $t > 0$ . Isto é, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  de modo que:

$$|p_0 - k| < \varepsilon \rightarrow |p(t) - k| < \delta.$$

Caso contrário o ponto crítico é denominado instável.

No exemplo acima o ponto  $p = 3$  é estável, enquanto  $p = 1$  é instável.

**Definição:** Um ponto crítico estável  $p = k$  é denominado assintoticamente

estável se existe  $\delta > 0$  tal que:

$$|p_0 - K| < \delta \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = k.$$

Ou seja, um ponto crítico assintoticamente estável não apenas tem a propriedade de permanecer próximo de  $k$  se  $p_0$  é suficientemente próximo de  $k$ , mas tem a propriedade de que as trajetórias que começam suficientemente próximas de  $k$  não apenas permanecem próximas mas tendem a  $k$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

## 4.2 DINÂMICA POPULACIONAL

Uma das aplicações das equações autônomas é o estudo da dinâmica populacional de uma determinada espécie. Este será o tema central de nosso estudo, o que justifica uma abordagem mais detalhada. Inicialmente vamos começar imaginando uma função  $p(t)$  que representa a população de uma determinada espécie em um instante  $t$  de tempo. A população inicial, no instante  $t = 0$ , sendo denotada por  $p(0) = p_0$ . Seria natural imaginar que, havendo um crescimento desta população, este seria proporcional a população inicial, em outras palavras, a taxa de variação dessa população é proporcional a  $p$ , desta forma:

$$\frac{dp}{dt} = kp, \quad (4.2)$$

onde  $k > 0$  seria a taxa de crescimento desta população e  $k < 0$  a taxa de declínio da mesma.

Admitindo  $k > 0$  e uma condição inicial  $p(0) = p_0$ , resolvendo a Equação 4.2 obtemos:

$$p(t) = p_0 \cdot e^{kt}. \quad (4.3)$$

A Equação 4.3 nos conta que a população crescerá exponencialmente para sempre. Mas lembrando que um modelo deve representar, de forma mais eficiente possível, a realidade, percebemos que a equação acima pode descrever a dinâmica populacional de uma determinada espécie em um curto período de tempo, mas falha em representá-la em períodos mais longos. A população não pode aumentar, ou diminuir, infinitamente sabemos que existem fatores limitantes naturais, tais como a disponibilidade de alimentos, questões territoriais e climáticas, predação, etc.

Podemos imaginar uma população de coelhos, por exemplo. Na medida que a população aumenta ( $k > 0$ ), o consumo da vegetação também aumenta, consequentemente as reservas de comida diminuem, pois a taxa de reprodução dos coelhos é muito alta se comparada com a taxa de regeneração das folhagens das quais eles

se alimentam. Em um curto período de tempo, a população de coelhos começa a se reduzir ( $k < 0$ ), até a população se estabilizar em torno de uma quantidade suportada pelo meio, ou se isso não ocorrer, a população se extingue. Esta é uma versão muito simplificada da realidade, outros fatores também interferem no controle da população. Poderíamos pensar ainda que quanto maior for a densidade populacional, maior seria a taxa de infecção por doenças, ou que o aumento na população de presas implica no aumento da população de predadores, isto obrigaria a população de coelhos se estabilizar ou causaria a extinção da espécie.

### 4.3 CRESCIMENTO DE POPULAÇÕES SEM FATOR LIMITANTE

Considerando a influência de outras questões ambientais no desenvolvimento de uma espécie, podemos construir um modelo que abrange essas variações na população de acordo com seu tamanho, em outras palavras, um modelo onde a taxa de natalidade e de mortalidade não são constantes, e sim funções que dependam do tamanho da população. Supondo que as variações na população sejam decorrentes apenas do número de nascimentos e mortes, isto é, descartando as variações que ocorrem devido a migrações ou emigrações e considerando  $n(t)$  e  $m(t)$  os números de nascimentos e mortes, respectivamente, que aconteceram num intervalo  $t$  de tempo. Sejam ainda  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$ , as taxas de natalidade e mortalidade, temos que:

$$\alpha(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{n(t+h) - n(t)}{h \cdot p(t)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{dn}{dt}$$

e

$$\beta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(t+h) - m(t)}{h \cdot p(t)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{dm}{dt},$$

de onde concluímos que:

$$\frac{dn}{dt} = p \cdot \alpha(t) \quad (4.4)$$

e

$$\frac{dm}{dt} = p \cdot \beta(t). \quad (4.5)$$

Pensando na taxa de variação da população:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(t+h) - p(t)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[n(t+h) - n(t)] - [m(t+h) - m(t)]}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[n(t+h) - n(t)]}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[m(t+h) - m(t)]}{h}.$$

Substituindo 4.4 e 4.5 nesta última, obtemos:

$$\frac{dp}{dt} = p \cdot (\alpha(t) - \beta(t)). \quad (4.6)$$

A equação 4.6, afirma que na ausência de fatores limitantes, a taxa de variação de uma população  $p$  é proporcional a diferença entre as taxas de nascimentos e mortes nessa população em um período de tempo.

#### 4.4 CRESCIMENTO DE POPULAÇÕES COM FATORES LIMITANTES

Sabemos que na realidade existem muitos outros fatores além das taxas de nascimento e mortes que influenciam na dinâmica populacional de uma espécie. Portanto, vamos supor que a constante  $k$  na Equação 4.2 seja uma função  $f(p)$ , isto é, que dependa do tamanho da população, e que considere diversos fatores decorrentes de sua variação, dessa forma:

$$\frac{dp}{dt} = f(p)p. \quad (4.7)$$

Para representar essas variações, a função  $f(p)$  deve satisfazer algumas propriedades:

- $f(p) \approx k > 0$  para valores de  $p$  pequenos, pois, pensando em uma coexistência equilibrada com o meio, uma população com um número reduzido de indivíduos sofre pouca interferência de meios externos, como falta de alimento e território.
- $f(p)$  deve decrescer quando  $p$  aumenta, pois quanto maior a população, maior serão as limitações do meio sobre ela.
- $f(p)$  deve crescer quando  $p$  diminui, pois diminuindo a quantidade de indivíduos as condições do meio se tornam mais favoráveis.

A função mais simples que possui todas essas propriedades é uma função afim da forma  $f(p) = k - ap$ , substituindo em 4.7 obtemos:

$$\frac{dy}{dt} = (k - ap)p. \quad (4.8)$$

Esta equação é conhecida como equação logística e muitas vezes tornam-se convenientes algumas alterações. Colocando  $k$  em evidência:

$$\frac{dp}{dt} = kp \left(1 - \frac{ap}{k}\right),$$

escrevendo na forma:

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{\frac{k}{a}}\right).$$

Fazendo  $N = \frac{k}{a}$ ,

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right). \quad (4.9)$$

Onde  $k$  representa a taxa de crescimento intrínseco, isto é, a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitante. Antes de pensar em um significado para o parâmetro  $N$  vamos analisar alguns aspectos importantes de 4.9

#### 4.5 EXISTÊNCIA DE PONTOS CRÍTICOS

Considerando a equação 4.9:

$$\frac{dp}{dt} = kp\left(1 - \frac{p}{N}\right),$$

estamos interessados nos valores de  $p$  para os quais  $\frac{dp}{dt} = 0$ , ou seja:

$$kp\left(1 - \frac{p}{N}\right) = 0.$$

Desenvolvendo a equação acima obtemos uma equação do segundo grau na variável  $p$ :

$$kp - \frac{kp^2}{N} = 0,$$

cujas coordenadas do vértice são  $\left(\frac{N}{2}, \frac{Nk}{4}\right)$ .

Plotando as soluções no plano de fase, podemos analisar o comportamento destas soluções de acordo com os parâmetros envolvidos.

Pelo diagrama, podemos perceber que  $p = 0$  é uma solução instável, já  $p = N$  é uma solução estável. O valor  $p = \frac{N}{2}$  é um ponto de inflexão onde ocorre a mudança na concavidade da curva. O parâmetro  $N$  pode ser entendido então, como a capacidade ambiental de sustentação, pois a população tende a se estabilizar em torno deste valor para todo  $N > 0$ .



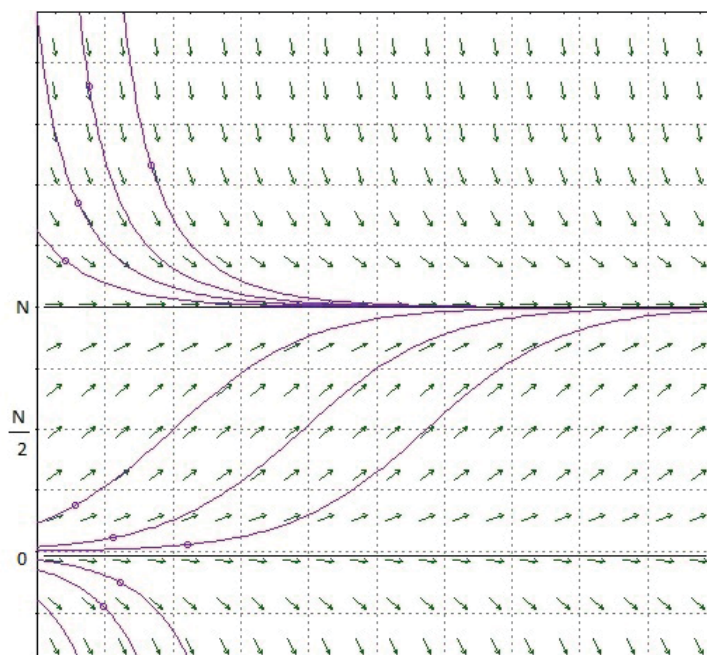


FIGURA 2 – Plano de fase equação da 4.9.

#### 4.6 CRESCIMENTO LOGÍSTICO COM LIMIAR

Analisando agora a equação:

$$\frac{dp}{dt} = -kp \left(1 - \frac{p}{N}\right), \quad (4.10)$$

os pontos críticos são  $\frac{dp}{dt} = 0$  e  $\frac{dp}{dt} = N$ . Esboçando o plano de fase:

Verifica-se pela figura acima que para valores da população inicial  $p_0$  maiores que  $N$  a população cresce indefinidamente, enquanto que para  $0 < p_0 < N$  a população se estabiliza em torno de  $p = 0$ . Uma interpretação para esse fato é que existe um limite  $p_0 = N$  abaixo do qual a espécie entra em extinção e acima desse valor a população cresce indefinidamente. Esse fato não corresponde de forma adequada à realidade, pois como dito anteriormente, existe fatores ambientais que interfere no crescimento da população.

Realizando uma pequena modificação em 4.10, inserindo o fator  $\left(1 - \frac{p}{B}\right)$ , que torna  $\frac{dp}{dt}$  negativa para valores muito grandes de  $p$ , alterando o crescimento das curvas que representam as soluções e trocando  $N$  por  $A$  obtemos:

$$\frac{dp}{dt} = -kp \left(1 - \frac{p}{A}\right) \left(1 - \frac{p}{B}\right). \quad (4.11)$$

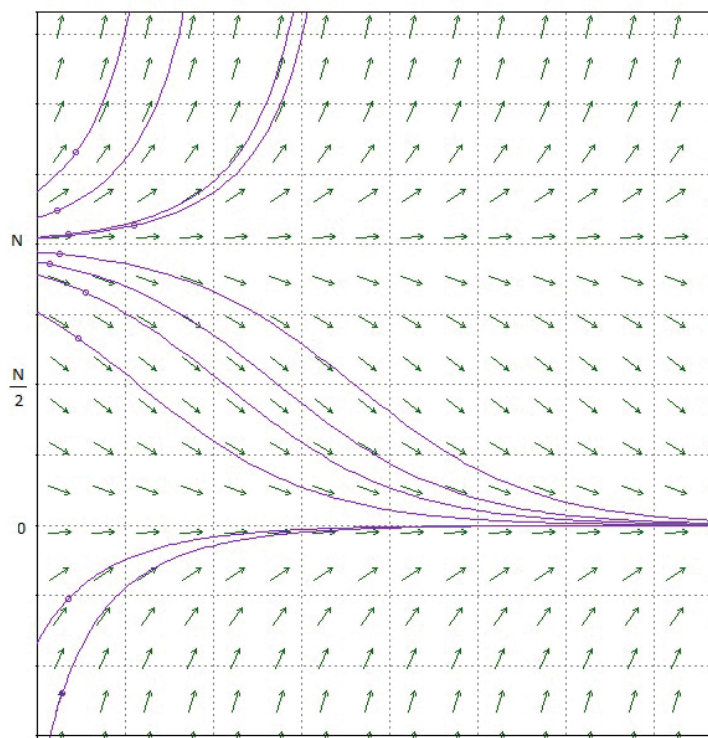


FIGURA 3 – Plano de fase equação 4.10

Cujo gráfico, para  $k = 5$ ,  $A = 3$  e  $B = 5$  é dado abaixo:

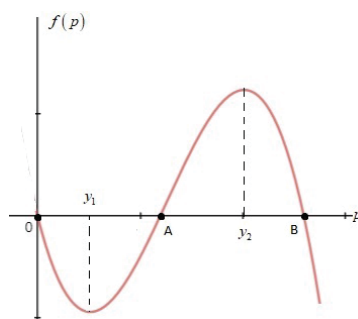


FIGURA 4 – Gráfico equação 4.11

Observe a existência de três pontos críticos  $p = 0$ ,  $p = B$  e  $p = A$ . Vamos esboçar o plano de fase:

O valor  $p = 5$  é um ponto crítico estável, o que significa que para populações iniciais próximas a este valor, a população tende a se estabilizar em torno dele. Enquanto que  $p = 3$  é instável, logo populações iniciais acima deste se estabilizam na solução  $p = 5$  enquanto que para valores de  $p$  menores que 3, a população tende a se estabilizar em torno de  $p = 0$ .

**Exemplo:** Considerando uma população  $y(t)$  de determinada espécie de peixe em uma região do oceano, é razoável pensar que a taxa segundo os peixes são pegos depende do tamanho de sua população, pois quantos mais peixes existirem mais fácil será de pescá-los. Vamos supor, então, que a taxa segundo a qual os peixes são pegos

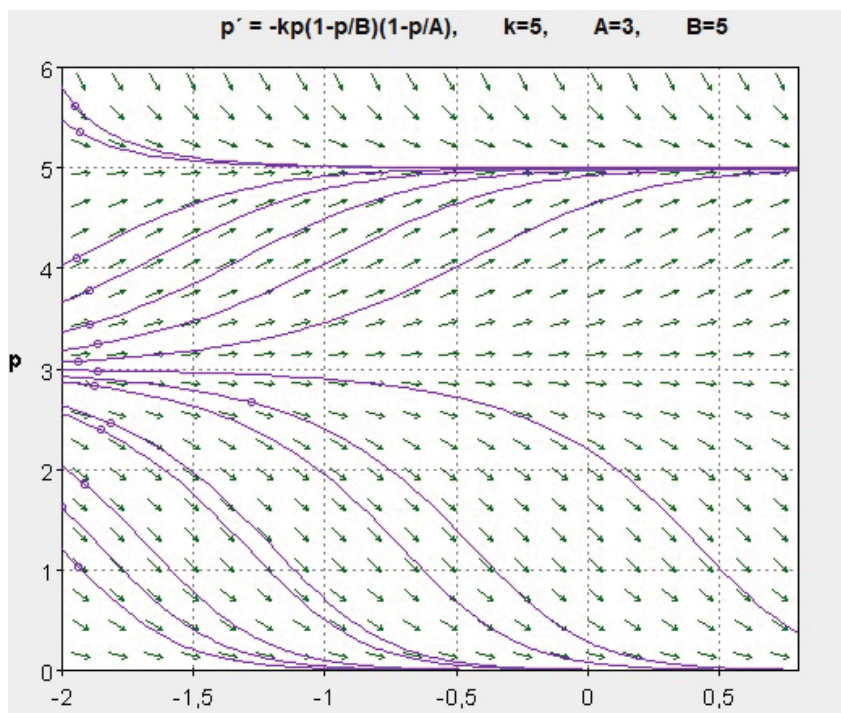


FIGURA 5 – Plano de fase da equação 4.11

é dada por  $Ey$ , onde  $E$  é uma constante positiva, que mede o esforço para explorar a espécie de peixe em questão. A equação logística que representa a situação descrita é:

$$\frac{dp}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) - Ey. \quad (4.12)$$

Essa equação é conhecida por modelo Schaefer, em homenagem ao biólogo M.B. Schaefer, que a aplicou em uma população de peixes.

1. Mostre que se  $E < r$  existem dois pontos de equilíbrio e determine esses pontos e os classifique de acordo com sua estabilidade:

**Resolução:**

Podemos perceber facilmente que  $y = 0$  é um ponto crítico. Os demais satisfazem:

$$r \left(1 - \frac{y}{K}\right) = E,$$

de onde concluímos que:

$$y = k \left(1 - \frac{E}{r}\right).$$

Note que como  $E < r$  temos  $k \left(1 - \frac{E}{r}\right) > 0$ , portanto os pontos críticos são  $y_1 = 0$  e  $y_2 = k \left(1 - \frac{E}{r}\right)$ . Atribuindo valores para os parâmetros  $r = 4$ ,  $k = 5$  e  $E = 1$  e construindo o plano de fase:

Da Figura 6 podemos concluir que  $y_1 = 0$  é um ponto crítico instável. Enquanto  $y_2 = k \left(1 - \frac{E}{r}\right)$  é um ponto crítico estável. Isso no conta que, nessas condições,

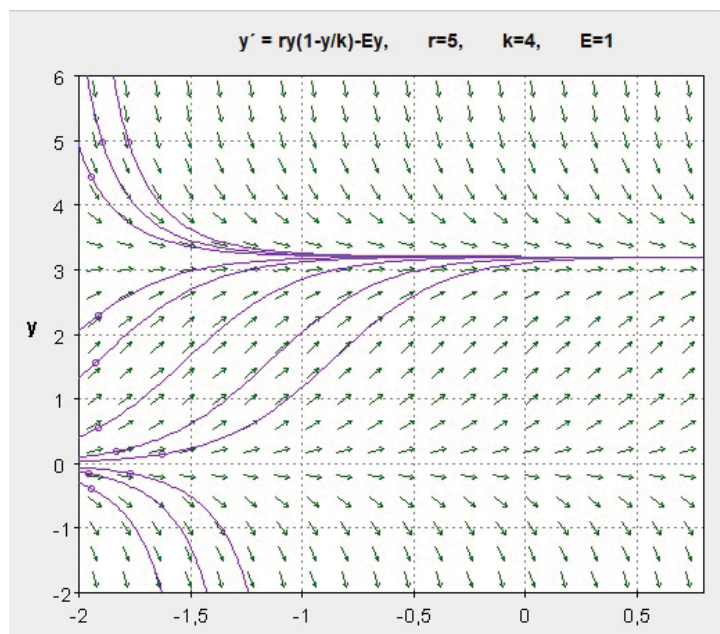


FIGURA 6 – Algumas soluções da Equação (4.12).

para qualquer população inicial, a população de peixes tende a se estabilizar em torno de um valor que depende dos parâmetros  $r$ ,  $k$  e  $E$

- Suponha que haja pesca realizada a uma taxa  $h$  constante. Verifique para quais valores dos parâmetros  $r$ ,  $k$  e  $h$  ocorre a estabilização da espécie e para quais valores ocorre sua extinção.

### Resolução:

Temos a equação:

$$\frac{dy}{dt} = ry \left(1 - \frac{y}{k}\right) - h. \quad (4.13)$$

Considerando a equação do segundo grau:

$$ry \left(1 - \frac{y}{k}\right) - h = 0,$$

cujo discriminante é:

$$\Delta = r^2 - \frac{4rh}{k}.$$

Observe que se  $h < \frac{rk}{4}$  a equação terá dois pontos de equilíbrio distintos, para encontrá-los vamos começar multiplicando a equação toda por  $k$  obtendo:

$$-ry^2 + rky - hk = 0,$$

cujo discriminante é  $\Delta = r^2 \cdot k^2 \left(1 - \frac{4h}{rk}\right)$ . Desta forma:

$$y_1 = \frac{k \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4h}{rk}}\right)}{2}$$

e

$$y_2 = \frac{k \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4k}{rk}} \right)}{2},$$

são os pontos críticos de 4.13.

Construindo o plano de fase de 4.13 poderemos classificar estes pontos críticos e analisar o comportamento das curvas soluções para cada valor inicial  $y_0$ .

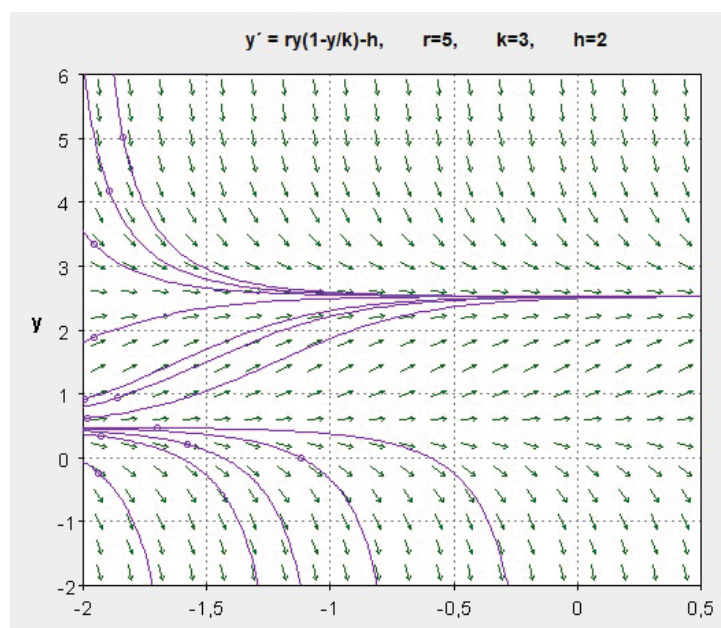


FIGURA 7 – Plano de fase da equação 4.13

Podemos verificar que  $y_1$  é uma solução instável, enquanto  $y_2$  é estável. Observe que se  $y_0 < y_1$  a população entrará em provável extinção em um tempo finito e para populações iniciais  $y_0 > y_1$  a população tende a se estabilizar em torno de  $y_2$ .

## 5 MODELO MATEMÁTICO PARA LAGARTAS CANADENSES

Vamos iniciar uma análise da dinâmica populacional de um tipo específico de lagartas canadense, baseado num estudo feito por Jones. D. Ludwig *et al*. Num artigo publicado no The journal of animal ecology em 1978, Ludwig modelou matematicamente o comportamento populacional desta lagarta e para isto, ele observou os diversos fatores que influenciavam na população, associando a eles variáveis, as quais ele classificou como *variáveis rápidas* e *variáveis lentas*.

Essa classificação se deve ao fato de a escala de tempo dos diversos fatores envolvidos ser diferente, como por exemplo, a escala de tempo para que as árvores possam recompor sua folhagem é na escala de anos, já o ciclo de vida de uma lagarta ocorre na escala de meses. Assim, se  $P$  representa a densidade populacional da lagarta, ela é uma variável rápida, enquanto  $N$  sendo a capacidade de carga do meio, que se refere, neste caso, a quantidade de alimento disponível, seria uma variável lenta.

O próximo passo seria a escolha de um modelo de crescimento adequado, Ludwig optou pelo modelo logístico, por envolver apenas dois parâmetros e por facilitar uma posterior análise matemática. Considerando apenas os aspectos iniciais desse estudo, os mesmos resultados poderiam ser obtidos com outro modelo. De acordo com o modelo logístico, se  $P$  representa a densidade populacional da lagarta e  $N$  a capacidade de suporte do meio então:

$$\frac{dP}{dt} = k.P \left( 1 - \frac{P}{N} \right). \quad (5.1)$$

Onde  $k$  representa a taxa de natalidade linear da lagarta e assumimos que  $N$  dependa apenas da quantidade de alimento disponível.

Esta equação não considera fatores como a predação, que, neste caso, possui efeitos consideráveis no controle da população. Neste modelo, a predação será representada por um termo  $g(P)$  que será subtraído da equação 5.1:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{N} \right) - g(P).$$

Este termo no entanto, deve satisfazer certas condições. Observando o comportamento dos predadores e das presas, seus hábitos alimentares e a frequência com a qual se alimentam, e de se esperar que a predação se sature para grandes densidades de lagartas, isto é, que exista um limite superior a taxa de mortalidade devido a predação, que o limite de presas individuais por pássaros seja limitado pela predação e

ainda que o número de pássaros seja limitado por questões territoriais. Dessa forma, o termo  $g(P)$  deve se aproximar de um limite superior  $B$  quando a população de lagartas tende ao infinito, ou seja:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} g(P) = B.$$

Existe também uma diminuição da efetividade da predação em pequenas populações de lagartas, isto se deve a diversidade de alimentos a disposição dos pássaros, quando um deles se torna escasso eles passam a procurar por outros e associam a presa em escassez com uma recompensa, buscando seletivamente por ela. Considerando todas essas informações, Ludwig presumiu que uma função  $g(P)$  com todas essas características fosse da forma:

$$g(P) = B \cdot \frac{P^2}{A^2 + P^2}. \quad (5.2)$$

Pois,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} B \cdot \frac{P^2}{A^2 + P^2} = B. \quad (5.3)$$

Sendo  $A$  o parâmetro que determina a escala de densidade populacional na qual a saturação se inicia e  $B$  o limite anteriormente citado. Juntando as equações 5.1 e 5.2 obtemos:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{N} \right) - B \cdot \frac{P^2}{A^2 + P^2}. \quad (5.4)$$

A equação possui 4 parâmetros:  $A$  e  $B$  que são constantes positivas e que regulam a predação, note que para valores grandes de  $A$ , a predação é reduzida, o que é benéfico para a presa e para valores pequenos de  $A$  a predação aumenta, estabelecendo assim um equilíbrio. Se  $A = 0$  ou  $A = P$  o termo relacionado a predação torna-se constante e igual a  $B$  ou  $\frac{B}{2}$  respectivamente, isto é, independe do tamanho da população.

O parâmetro  $N$  está relacionado com a capacidade de suporte do meio, neste caso, diz respeito a quantidade de alimento disponível e se refere a folhagem das árvores. Observe na equação 5.4 que devemos ter  $N > P$ , pois o meio tem que possuir recursos suficientes para sustentar a população, caso contrário, os recursos seriam esgotados rapidamente e como a escala de tempo para regeneração da vegetação é relativamente longa se comparada com a escala de tempo da lagarta, haveria extinção de recursos e conseqüentemente da espécie. Isto é, para  $P = N$

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{P} \right) - B \cdot \frac{P^2}{A^2 + P^2} = -B \cdot \frac{P^2}{A^2 + P^2}.$$

A taxa de variação da população seria negativa, o que significa que a população está diminuindo devido a predação, pois o meio não oferece recursos suficiente para o desenvolvimento da espécie. Note ainda que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} kP \left( 1 - \frac{P}{N} \right) = kP.$$

Ou seja, se o meio oferece uma quantidade inesgotável de alimento, a população seria proporcional a taxa de nascimentos e o único fator regulatório seria a predação.

Neste ponto, agora que temos a equação 5.4 que nos fornece a dinâmica populacional da lagarta, devemos nos concentrar em uma análise qualitativa da mesma. A equação 5.4 possui 5 parâmetros,  $P$ ,  $k$ ,  $N$ ,  $A$  e  $B$ , alguns com escala de tempo bem diferentes e essas diferenças, nos mostram que seria muito mais cômodo se os parâmetros e as variáveis fossem adimensionais, ou seja, que fossem números puros. Desta forma, poderíamos analisar a relação entre eles de modo mais eficiente e tirar conclusões dessas relações que promoveriam a intervenção adequada na dinâmica populacional da espécie. No entanto, através de algumas manipulações matemáticas, podemos tornar a equação 5.4 adimensional seguindo os passos descritos nas notas de aula do professor (**JUNPING**)

**Passo 01** Listar todas as variáveis, parâmetros e suas dimensões. Atribuindo para a variável  $t$  a dimensão  $\tau$  e para a variável  $P$  a dimensão  $\rho$  podemos deduzir as dimensões dos parâmetros.

Como a taxa de natalidade é dada pelo número de indivíduos que nascem dividido pelo período de tempo, de onde concluímos que a dimensão do parâmetro  $k$  é  $\frac{1}{\tau}$ .

Agora considerando que todas as parcelas da equação 5.4 devem ter a mesma dimensão do termo  $\frac{dP}{dt}$  que é  $\frac{\rho}{\tau}$  e verificando que o fator  $kP$  já possui dimensão  $\frac{\rho}{\tau}$ , concluímos que o fator  $\left( 1 - \frac{P}{N} \right)$  deve ser adimensional e por isso o parâmetro  $N$  deve ter a mesma dimensão da variável  $P$  que é  $\rho$

Continuando com o mesmo raciocínio, encontramos para o parâmetro  $A$  a dimensão  $\rho$  e para o parâmetro  $B$  a dimensão  $\frac{\rho}{\tau}$ .  $P_0$  é a população inicial, logo também possui dimensão igual a  $\rho$ . Dessa forma temos a tabela abaixo que descreve todas as variáveis e parâmetros da equação 5.4 e suas respectivas dimensões.

**Passo 02** A partir de cada variável, criar uma nova dividindo pela combinação de parâmetros de mesma dimensão.

$$u = \frac{P}{A} \quad \text{e} \quad s = \frac{Bt}{A}.$$



Variável	Dimensão	Parâmetro	Dimensão
$t$	$\tau$	$k$	$1/\tau$
$P$	$\rho$	$N$	$\rho$
		$A$	$\rho$
		$B$	$\rho/\tau$
		$P_0$	$\rho$

FIGURA 8 – Variáveis e parâmetros da equação 5.4

**Passo 03** Usar a regra da cadeia para derivar a nova equação diferencial.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$

Multiplicando por  $\frac{dP}{dt}$ :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} \rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{du} \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Verificando que:

$$\frac{dP}{du} = A \quad \text{e} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{B}{A}$$

Temos que:

$$\frac{dP}{dt} = B \frac{dP}{ds}$$

Substituindo essas mudanças na equação 5.4 temos:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{N}\right) - \frac{BP^2}{A^2 + P^2}$$

$$B \frac{dP}{ds} = uAk \left(1 - \frac{uA}{N}\right) - \frac{Bu^2}{1 + u^2}$$

Dividindo toda equação por  $B$ :

$$\frac{dP}{ds} = \frac{uAk}{B} \left(1 - \frac{uA}{N}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2}$$

Fazendo:

$$\alpha = \frac{Ak}{B} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{N}{A},$$

obtemos a nova equação com apenas dois parâmetros e uma variável:

$$\frac{du}{ds} = \alpha \cdot u \left(1 - \frac{u}{\beta}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2} \quad (5.5)$$

A equação 5.5 está escrita em termos adimensionais e a relação entre os parâmetros antigos pode agora ser estudada com base nos valores atribuídos aos novos parâmetros.

Antes dessa análise, vamos realizar um estudo sobre os possíveis pontos críticos de 5.5. Nota-se claramente que  $u = 0$  é um ponto crítico e que os demais, se existirem, satisfazem a condição:

$$\alpha \cdot u \left( 1 - \frac{u}{\beta} \right) = \frac{u^2}{1 + u^2}. \quad (5.6)$$

O lado direito da igualdade acima representa uma reta decrescente na variável  $u$  que descreve a taxa *per capita* de nascimento da lagarta e o lado esquerdo uma curva que descreve a taxa *per capita* de mortalidade da lagarta (devido a predação) também na variável  $u$  e cuja assíntota é o eixo das abscissas. Por motivo de contextualização, é claro que devemos considerar apenas valores positivos de  $u$ .

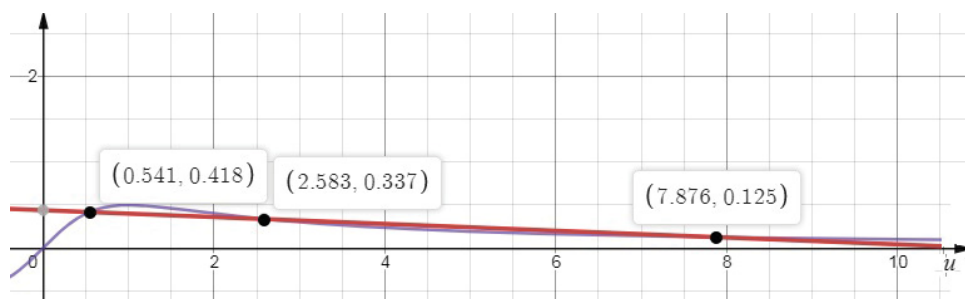


FIGURA 9 – Pontos críticos da equação 5.5

Os pontos de intersecção entre a reta e a curva representam os valores que satisfazem a igualdade 5.6, isto é, os pontos críticos da equação 5.5, que possui um máximo de 3 e um mínimo de 1 pontos críticos que dependem dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . No que segue vamos analisar a natureza dessa dependência.

Na figura 02 podemos observar 3 pontos críticos associados aos parâmetros  $\alpha = 0,44$  e  $\beta = 12$ . A natureza desses parâmetros pode ser observada na figura abaixo:

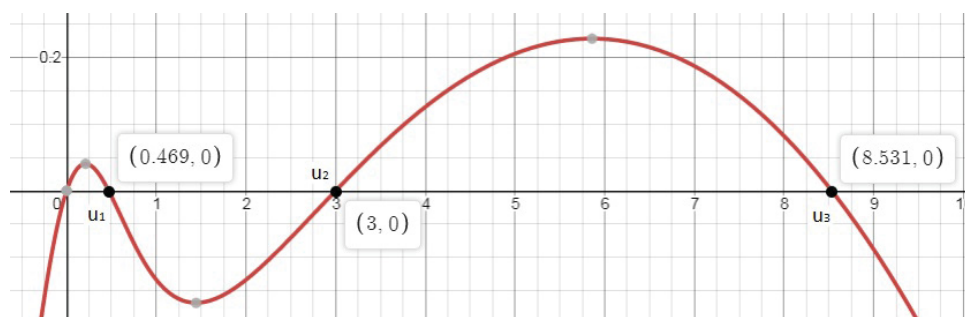


FIGURA 10 – Gráfico da equação 5.5

No plano de fase, criado no software Dfield podemos analisar o comportamento da função próximo a esses pontos e determinar a natureza destes valores.

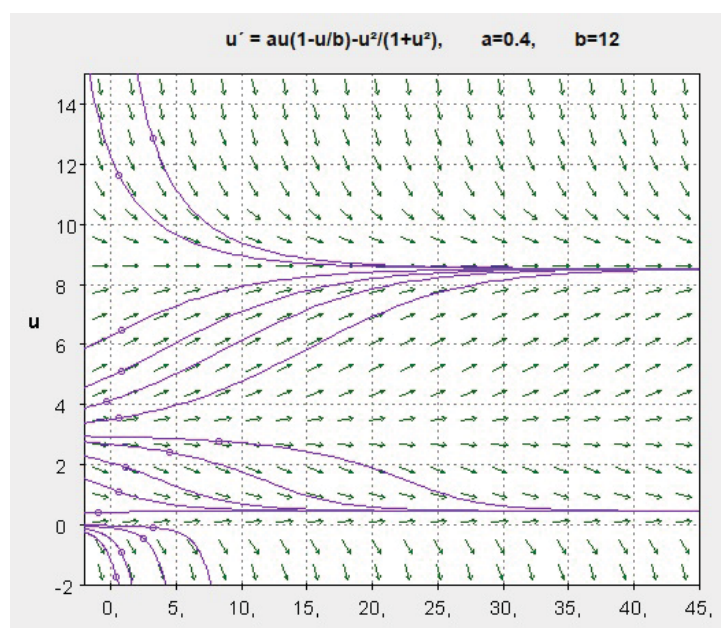


FIGURA 11 – Plano de fase para a equação 5.5

Observa-se que  $u_1 = 0,469$  e  $u_3 = 8,531$  são pontos críticos estáveis, enquanto  $u_2 = 3$  e  $u_0 = 0$  são instáveis. Podemos concluir do plano de fase que se  $0 < p_0 < u_2$  a população se estabiliza em torno de  $u_1 = 0,469$ , esta faixa de valores é favorável para o controle da população de lagartas, pois esta se estabiliza em torno de uma população relativamente baixa.

Se  $P_0 > u_2 = 3$  a população se estabiliza em torno de  $u_3 = 8,531$ . Esta é uma situação favorável para a espécie, pois sua população se estabiliza em torno de um valor relativamente alto. Devemos lembrar que esses valores de  $P_0$  dependem dos valores associados aos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , que por sua vez, dependem dos valores dos parâmetros originais  $k$ ,  $A$ ,  $B$  e  $N$  da equação 5.4

No caso acima consideramos  $\alpha = 0,44$  e  $\beta = 12$ . A pergunta a se fazer seria: quais são os limites de variação dos parâmetros? Para responder essa pergunta vamos plotar o gráfico de 5.5, utilizando o software Desmos.com para outros valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .



FIGURA 12 – Estudo de soluções da equação 5.5 para  $\alpha = 0,54$  e  $\beta = 12$

Note que com um ligeiro aumento do valor de  $\alpha$  e com  $\beta$  mantido constante

houve uma aproximação dos pontos  $u_1$  e  $u_2$  e conseqüentemente um afastamento entre  $u_1$  e  $u_3$ . Abaixo podemos ver o gráfico da equação 5.4 para os novos valores atribuídos aos parâmetros.

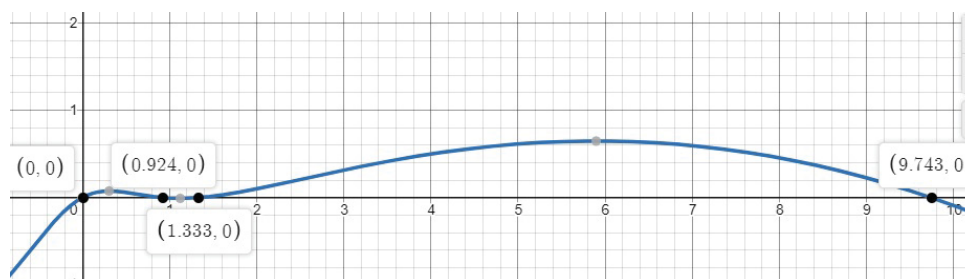


FIGURA 13 – Gráfico da equação 5.5 para  $\alpha = 0,54$  e  $\beta = 12$

Para analisar o efeito que estes parâmetros exercem sobre a população vamos plotar o plano de fase:

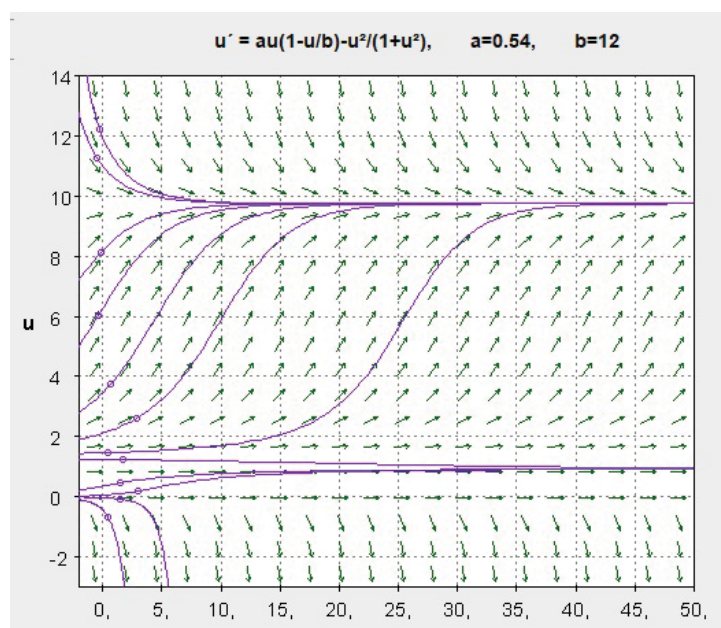


FIGURA 14 – Plano de fase da equação 5.5 para  $\alpha = 0,54$  e  $\beta = 12$

Se  $0 < P_0 < u_2$  a população se estabiliza em torno de  $u_1 = 0,924$ , esta é uma faixa de valores favorável para o controle da população. Se  $P_0 > u_2 = 1,333$  a população se estabiliza em torno de  $u_3 = 9,743$  o que é favorável para a espécie.

As duas situações acima parecem sugerir que um aumento no valor do parâmetro  $\alpha$  se traduz num aumento da população mínima em torno da qual há estabilidade. Podemos observar que para  $\alpha = 0,44$  a menor população estável era  $u_1 = 0,469$  com um aumento da ordem de 0,1 essa população passou para  $u_1 = 0,924$ . No entanto, houve também uma aumento da maior população estável, o que deveria ser analisado em mais detalhes para conclusões efetivas.

O valor limite para  $\alpha$  é  $\alpha = 0,54797$  e a variação do parâmetro  $\beta$  interfere de maneira quase imperceptível no comportamento das soluções, conforme ilustra a figura abaixo.

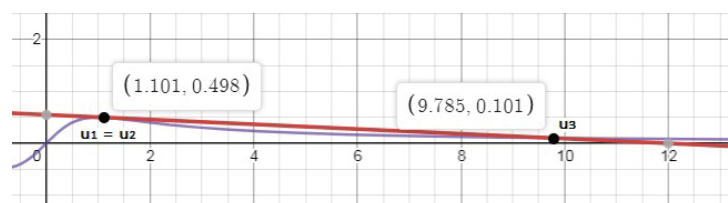


FIGURA 15 – Estudo de soluções da equação 5.5 para  $\alpha = 0,54797$  e  $\beta = 12$

O gráfico da função para  $\alpha = 0,54797$  e  $\beta = 12$  é plotado abaixo:

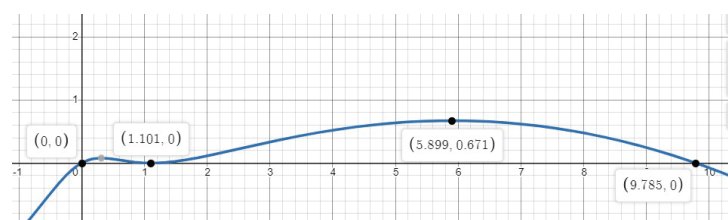


FIGURA 16 – Gráfico da equação 5.5 para  $\alpha = 0,54797$  e  $\beta = 12$

O plano de fase nos mostra que há apenas um ponto crítico estável que é  $u_3 = 9,785$ .

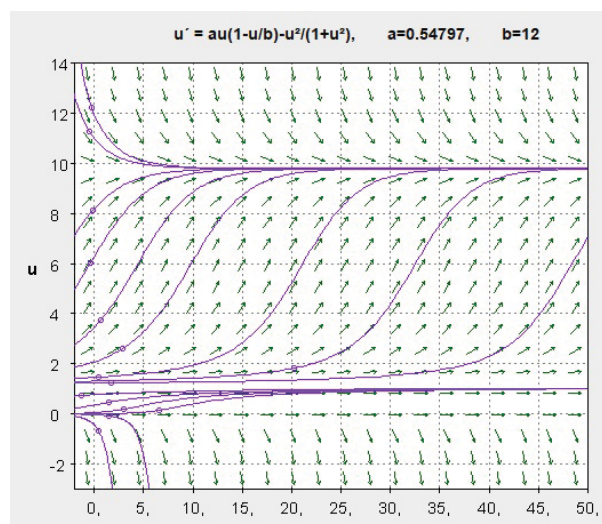


FIGURA 17 – Plano de fase da equação 5.5 para  $\alpha = 0,54797$  e  $\beta = 12$

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As equações diferenciais constituem uma ferramenta eficiente na modelagem de fenômenos que envolvem a dinâmica populacional de espécies, embora muitas vezes essas equações sejam de difícil resolução algébrica, o estudo analítico destas equações utilizando softwares específicos, são capazes de substituir a necessidade dessas soluções. Neste trabalho foi abordado o uso de equações autônomas para descrever o comportamento de populações considerando aspectos como fatores limitantes impostos pelo meio.

O estudo destes modelos utilizando o software Dfield, se mostrou eficiente no sentido de plotar o plano de fases que descreve uma família de soluções para diversas condições iniciais e, variando os parâmetros utilizados nos modelos, podemos observar claramente o impacto de alguns fatores nas populações estudadas. A parametrização da equação que descreve a dinâmica populacional de um tipo específico de lagarta canadense, dada por

$$\frac{dP}{dt} = kP \left( 1 - \frac{P}{N} \right) - B \cdot \frac{P^2}{A^2 + P^2},$$

reduziu a quantidade de parâmetros necessários no modelo e tornou o estudo dos possíveis pontos críticos mais clara. Depois de parametrizada a equação assumiu a forma

$$\frac{du}{ds} = \alpha \cdot u \left( 1 - \frac{u}{\beta} \right) - \frac{u^2}{1 + u^2},$$

onde os parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $N$  foram substituídos pelos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Desta forma, após um estudo sobre seus possíveis pontos críticos, varias situações foram representadas graficamente pelo software Dfield, onde foi possível classificar esses pontos críticos em estáveis ou instáveis e assim observar o comportamento das soluções em torno destes valores.

O presente trabalho se torna útil a qualquer estudante que deseja se aprofundar no estudo de equações diferenciais que constituem modelos populacionais, no sentido de obter conclusões a respeito do modelo mesmo sem exibir suas soluções algébricas.

## REFERÊNCIAS

- [1] EDWARDS, C.H, PENNEY, David E.. **Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno..** Tradução de Celso Wilmer Campinas, SP: Editora Prentice-Hall do Brasil, 1995
- [2] BOYCE, William E, DiPrima, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno..** Tradução de Valéria de Magalhães. Rio de Janeiro, RJ: Editora LTC, 2006.
- [3] BASSANEZI, Rodney Carlos, CARVALHO, P. **Ensino -aprendizagem com Modelagem Matemática** .São Paulo, SP: Editora Contexto, 2011
- [4] MURRAY, James.Dickson, **Mathematical Biology:I. An Introduction.**Third Edition, SP: Editora Contexto, 2011
- [5] JUNPING, Shi. **Nondimensionalization.** Disponível em: <<http://www.math.wm.edu/shij/math345/notes1.pdf>>. Acesso em: 20 de jun. de 2020.
- [6] LUDWIG; D. D. Jones; C. S. Holling **Qualitative Analysis of Insect Outbreak Systems: The Spruce Budworm and Forest** . Disponível em: <<http://web.math.ku.dk/moller/e04/bio/ludwig78.pdf>>. Acesso em: 15 de Outubro. de 2019.