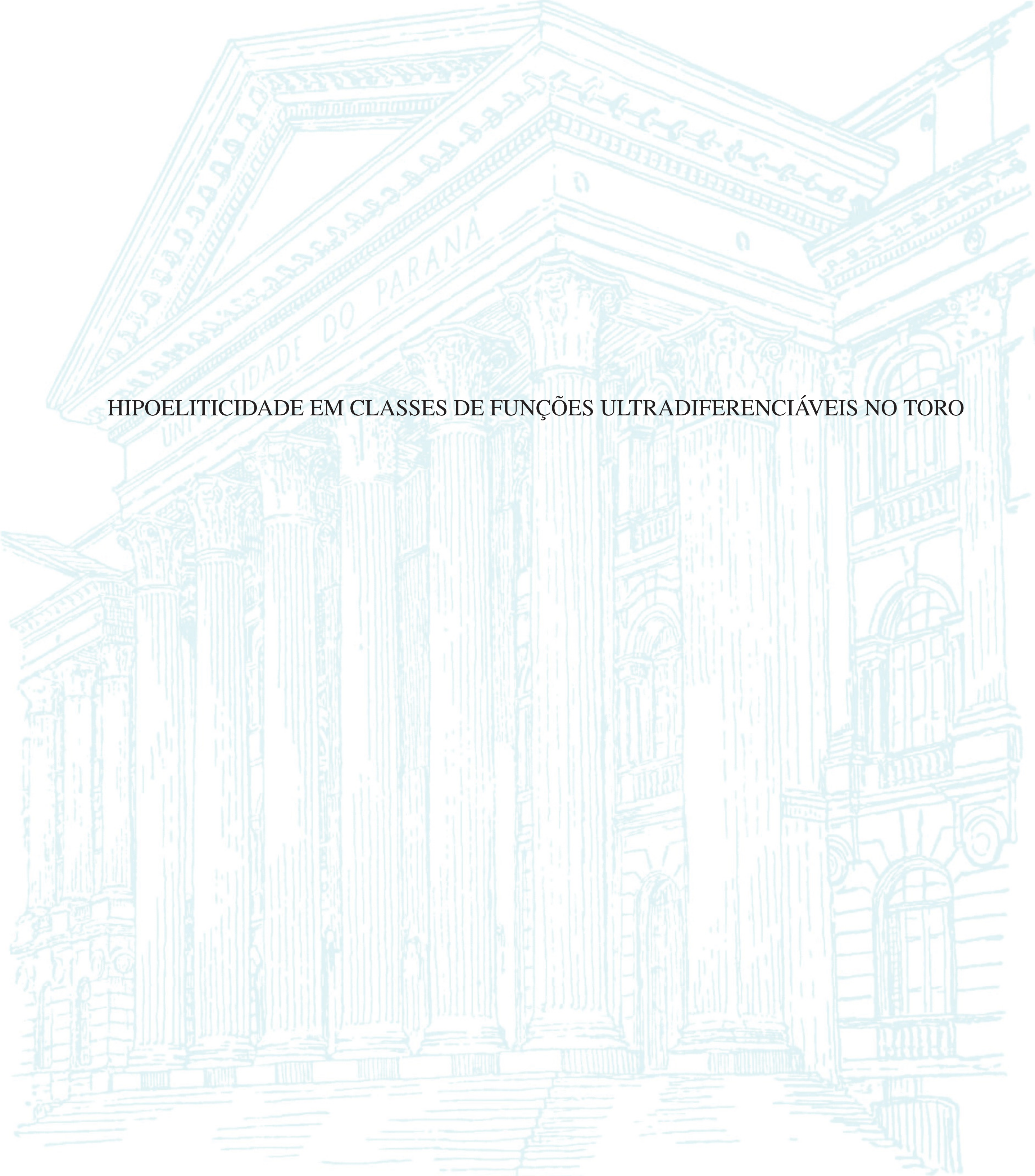
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

BRUNO DE LESSA VICTOR



HIPOELITICIDADE EM CLASSES DE FUNÇÕES ULTRADIFERENCIÁVEIS NO TORO

CURITIBA

FEVEREIRO 2021

BRUNO DE LESSA VICTOR

HIPOELITICIDADE EM CLASSES DE FUNÇÕES ULTRADIFERENCIÁVEIS NO TORO

Tese apresentada como requisito parcial a obtenção do grau de Doutor em Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof Dr. Alexandre Kirilov

Coorientador: Prof Dr. Paulo Domingos Cordaro

CURITIBA

FEVEREIRO 2021

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

V642h Victor, Bruno de Lessa
Hipoeliticidade em classes de funções ultradiferenciáveis no toro [recurso eletrônico] / Bruno de Lessa Victor. – Curitiba, 2021.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021.

Orientador: Alexandre Kirilov – Coorientador: Paulo Domingos Cordaro

1. Equações diferenciais. 2. Fourier, Análise de. 3. Campos vetoriais. 4. Hipoeliticidade. I. Universidade Federal do Paraná. II. Kirilov, Alexandre. III. Cordaro, Paulo Domingos. IV. Título.

CDD: 515.35

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA -
40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **BRUNO DE LESSA VICTOR** intitulada: **HIPOELITICIDADE EM CLASSES DE FUNCOES ULTRADIFERENCIAVEIS NO TORO**, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 25 de Fevereiro de 2021.

Assinatura Eletrônica
25/02/2021 14:38:03.0
FERNANDO DE AVILA SILVA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
25/02/2021 14:58:57.0
GUSTAVO HOEPFNER
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS)

Assinatura Eletrônica
27/02/2021 10:39:18.0
RAFAEL BORRO GONZALEZ
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ)

Assinatura Eletrônica
01/03/2021 12:22:56.0
PAULO DOMINGOS CORDARO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica
25/02/2021 15:06:46.0
PAULO LEANDRO DATTORI DA SILVA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

RESUMO

O principal tema desta tese é a hipoeliticidade global no contexto ultradiferenciável de sistemas de operadores lineares. De modo geral, o trabalho está dividido em três partes. Na primeira, apresentamos o ambiente funcional no qual trabalharemos: definimos tanto os espaços de funções ultradiferenciáveis no toro como os seus respectivos duais (ultradistribuições), e desenvolvemos a Análise de Fourier, sendo assim capazes de exibir algumas aplicações. No segundo segmento, caracterizamos hipoeliticidade global para uma classe de sistemas sobredeterminados de campos vetoriais complexos. No último terço do trabalho, após definir uma classe de operadores pseudodiferenciais, trabalhamos com sistemas denominados *"com perda de derivadas"* e mostramos que estes não só são globalmente hipoelíticos, mas também preservam a propriedade para certos tipos de perturbação. Além disso, tratamos brevemente da resolubilidade do transposto de um sistema hipoelítico.

Palavras-chaves: Classes Ultradiferenciáveis; Análise de Fourier; Hipoeliticidade Global; Sistemas Sobredeterminados; Perturbações.

ABSTRACT

The main subject of study of this dissertation is global hypoellipticity in the ultradifferentiable setting for systems of linear operators. Generally speaking, this manuscript is divided into three parts. In the first one we introduce the functional environment where we will be working at: we set the spaces of ultradifferentiable functions, as well as their topological duals (composed by ultradistributions) and, after developing Fourier Analysis, we are able to exhibit some applications. Next we characterize global hypoellipticity for a class of overdetermined systems of complex vector fields. In the last third we define a class of pseudodifferential operators and work with a subclass denominated *"with loss of derivatives"*, which we prove to be not only globally hypoelliptic, but also to preserve such property for certain perturbations. Last, we deal briefly with the solvability for the transposed of a hypoelliptic system.

Keywords: Ultradifferentiable Classes; Fourier Analysis; Global Hypoellipticity; Overdetermined Systems; Perturbations.

Conteúdo

Introdução

Temos visto nas últimas décadas um grande desenvolvimento no estudo de problemas relacionados a Análise Global, sobretudo quando o espaço ambiente é o toro $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N/2\pi\mathbb{Z}^N$. Em particular, uma enorme quantidade de trabalhos ligados a resolubilidade e/ou hipoeliticidade de operadores e/ou sistemas foi produzida (veja, por exemplo, [1], [13], [26], [54], bem como suas referências), em diferentes ambientes funcionais. Dois dos espaços que se destacam neste contexto são os das funções analíticas e Gevrey (veja, por exemplo, [3], [11], [33], [51], assim como as referências contidas nos mesmos).

Um fato bastante interessante que diz respeito aos espaços Gevrey é o seguinte: ao mesmo tempo que eles estendem o espaço das funções analíticas de um modo aparentemente *bem justo*, afinal $\mathcal{G}^1(\mathbb{T}^N) = C^\omega(\mathbb{T}^N)$), por outro lado é possível verificar (veja [48]) que

$$C^\omega(\mathbb{T}^N) \subsetneq \bigcap_{s>1} \mathcal{G}^s(\mathbb{T}^N).$$

Mais ainda, existem subespaços de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ cujos elementos não são analíticos em nenhum ponto, porém satisfazem a seguinte condição de continuação analítica:

$$x_0 \in \mathbb{T}^N \text{ e } D^\alpha f(x_0) = 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N,\ \Rightarrow f \equiv 0.$$

Note que tal propriedade não é válida para nenhum $G^s(\mathbb{T}^N)$, se $s > 1$.

Por conseguinte, fica evidente que apesar de serem relevantes para a compreensão da lacuna que existe entre $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e $C^\omega(\mathbb{T}^N)$, os espaços Gevrey não são suficientes neste sentido. São estas as principais razões que nos levam ao estudo de espaços de funções ultradiferenciáveis, também conhecidas como classes de *Denjoy-Carleman*; de forma breve, dada uma sequência de números positivos $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, trabalharemos com funções $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ tais que

$$|D^\alpha f(x)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!,\ \ \forall x \in \mathbb{T}^N,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N,$$

o que nos fornecerá uma quantidade muito mais ampla de classes de funções.

O Capítulo 1 é destinado à construção dos espaços funcionais mencionados logo acima. Na Seção 1.1, estabelecemos precisamente de que forma serão as sequências $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, denominadas *sequências peso*, e mostramos algumas de suas propriedades. Nas Seções 1.2 e 1.3, definimos e provamos alguns fatos sobre as classes de funções associadas, além de compará-las de acordo com o crescimento assintótico das sequências peso. Finalmente, na Seção 1.4 munimos os espaços com uma topologia dada pelo limite injetivo de sequências de espaços de Banach, com inclusões compactas.

O principal objetivo deste trabalho é o estudo de hipoeliticidade global para algumas classes de sistemas de operadores. Uma das ferramentas que se mostra fundamental e indispensável neste contexto é a caracterização de ultradistribuições e funções atráves de seus coeficientes de Fourier (este fato não se restringe a apenas este trabalho; veja, por exemplo, [2], [6] [16], [20], [22], [34], e [45]).

Com isto em mente, prosseguimos para o Capítulo 2, fortemente baseado nas notas *"Periodic Gevrey Ultradistributions in* $\mathbb{R}^n$*"*, de autoria do Prof. Gerson Petronilho; na Seção 2.1, caracterizamos as ultradistribuições, utilizando a topologia definida na Seção 1.4. Em seguida, definimos na Seção 2.2 os coeficientes de Fourier para ultradistribuições, mostramos que estas podem ser descritas por sua respectiva série de Fourier e que, através de seu decaimento, é possível atestar quando uma ultradistribuição é dada na verdade por uma função ultradiferenciável. Na seção 2.3 fazemos respectivamente um breve resumo sobre funções peso associadas, enquanto na 2.4 adicionamos uma nova hipótese para as sequências peso, com o intuito de apresentar e caracterizar a série parcial de Fourier de uma ultradistribuição na Seção 2.5.

Dividimos o Capítulo 3, destinado a algumas aplicações da teoria desenvolvida até o momento, em três partes. Na Seção 3.1, demonstramos para qualquer classe uma extensão do Teorema de Greenfield-Wallace (veja [30]), que trata de hipoeliticidade para sistemas de operadores com coeficientes constantes. Em seguida, generalizamos na Seção 3.2 uma construção feita em [29], exibindo campos vetoriais invariantes que *separam classes* com relação a hipoeliticidade global. Por fim, na Seção 3.3, inspirados em trabalhos como [12], [15] e [37], descrevemos por completo a hipoeliticidade global de uma classe de sistemas de campos reais de tipo tubo através de uma conjugação para sistemas com coeficientes constantes.

No Capítulo 4, trabalhamos com o seguinte sistema de equações ambientado no toro $\mathbb{T}^{N+1} = \mathbb{T}^N_t \times \mathbb{T}_x$:

$$L_{\lambda_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + c_j(t_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_j, \qquad (j = 1, 2, \dots, N), \tag{1}$$

com $\lambda_j \in \mathbb{C}$ e $c_j(t_j) = a_j(t_j) + ib_j(t_j)$, no qual a_j, b_j são funções ultradiferenciáveis a valores reais para cada j.

Vale ressaltar que este tipo de sistema já foi estudado por diversos autores, em diferentes configurações. No caso suave, por exemplo, o problema de hipoeliticidade global foi tratado em [37] (para um único campo, com $\lambda = 0$), em [10] (quando $N = 1$ e $\lambda \neq 0$) e em [11] (se $N > 1$ e $\lambda = 0$). Por outro lado, o caso analítico (com $\lambda = 0$) foi estudado em [11], enquanto que o Gevrey (para $s > 1$) foi trabalhado em [29] (um único campo em $\mathbb{T}^2$, com $\lambda = 0$) e em [6] ($N > 1$ e $\lambda = 0$).

Neste trabalho, obtemos uma caracterização completa da hipoeliticidade ultradiferenciável de (1), generalizando assim os resultados produzidos para as configurações analítica e Gevrey. Além disso, conseguimos também uma descrição completa para uma família mais geral de campos, dada por

$$L_{f_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + c_j(t_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + f_j(t_j), \qquad (j = 1, 2, \ldots, N), \tag{2}$$

desde que o sistema

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + c_j(t_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, N),$$

seja globalmente hipoelítico no sentido ultradiferenciável.

A organização do capítulo 4 é dada da seguinte forma: após uma breve introdução do problema, demonstramos na Seção 4.1 que duas condições, uma delas diofantina e a outra relacionada à condição (P) de Nirenberg-Treves, são, cada uma por si só, suficientes para a hipoeliticidade de (1). Os argumentos aqui utilizados são semelhantes aos aplicados em [6].

Em seguida, na Seção 4.2, mostramos que é possível construir uma solução singular para o problema na situação em que negamos ambas as condições, completando a demonstração do resultado principal do capítulo. Aqui a prova é dividida em duas partes, sendo fundamental a existência (ou não) de *funções de corte* pertencendo às classes ultradiferenciáveis. Em um caso, seguimos passos semelhantes ao que foi feito em [6], enquanto que no outro o procedimento é inspirado em construções feitas em [8], [9] e [14], além de depender fortemente do Método da Fase Estacionária de Hörmander (veja [36]). Encerrando o Capítulo 4, temos a Seção 4.3. Nela, exibimos alguns dos principais fatos decorrentes de nosso resultado central.

Passando para o Capítulo 5, iniciamos na Seção 5.1 desenvolvendo o cálculo de uma extensão (para o contexto ultradiferenciável) da teoria de operadores pseudodiferenciais analíticos no toro $\mathbb{T}^N$ estabelecida em [22]. Em seguida, na Seção 5.2, criamos uma família de normas definidas para ultradistribuições que, de certo modo, misturam a norma usual para funções ultradiferenciáveis (sobretudo o caso Gevrey) com normas Sobolev.

Na Seção 5.3, definimos uma classe de sistemas de operadores denominados *"com perdas de derivadas "*, que remetem a operadores satisfazendo estimativas subelíticas (veja, por exemplo, [22], [38] e [44]). Aqui, provamos que tais sistemas são globalmente hipoelíticos no sentido ultradiferenciável e, após alguns resultados técnicos, que a perturbação por sistemas que satisfaçam apenas uma condição ligada à sua ordem permanece globalmente hipoelítica. Sendo assim, estendemos resultados provados em [20] e [22] para um contexto mais amplo.

A Seção 5.4 é destinada a uma aplicação da seção antecedente; verificamos que famílias de operadores com força constante se encaixam na definição de sistemas com perdas de derivadas, mais uma vez generalizando um fato provado em [22]. Por fim, inspirados em resultados mostrados em [4], provamos na Seção 5.5 que o transposto de um sistema globalmente hipoelítico é globalmente resolúvel no sentido de ultradistribuições, generalizando resultados apresentados em [3] para nosso contexto.

Para finalizar, comentemos brevemente sobre o desenvolvimento deste trabalho. O tema do Capítulo 5 foi recomendação do Prof. Paulo Cordaro, que sugeriu a possibilidade da extensão de resultados apresentados no capítulo 2 de [27] para o contexto de Classes de *Denjoy-Carleman*; um artigo derivado desta generalização foi aceito para publicação em [28]. Para que o objetivo inicial fosse cumprido, era necessário não só compreender as principais propriedades das classes de funções ultradiferenciáveis como também desenvolver ferramentas de Análise de Fourier, o que acabou dando origem aos Capítulos 1, 2 e 3, cujo teor está contido em [23] e foi aceito para publicação. Por fim, o conteúdo contido no Capítulo 4 surgiu através de conversas com meu colega de doutorado Alexandre Arias Junior, com o intuito de generalizar os resultados (publicados em [6]) obtidos em sua dissertação de mestrado ([5]); como consequência destes esforços, tivemos o trabalho aceito para publicação em [24].

Capítulo 1

Espaços de Funções Ultradiferenciáveis

1.1 Sequências Peso

Uma *sequência peso* é uma sequência de números positivos $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$m_0 = m_1 = 1, \tag{1.1}$$

$$m_n^2 \le m_{n-1} \cdot m_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Observação 1.1. *A condição (1.2) é conhecida na literatura como* ***convexidade logarítmica*** *(veja, por exemplo, [36], [40] e [48]).*

Antes de provarmos resultados decorrentes destas definições, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.2. *Considere $m_n = (n!)^{s-1}$, com $s \ge 1$; é imediato que $m_0 = m_1 = 1$. Além disso,*

$$\frac{m_{n-1} \cdot m_{n+1}}{m_n^2} = \frac{[(n-1)!]^{s-1} \cdot [(n+1)!]^{s-1}}{(n!)^{s-1} \cdot (n!)^{s-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{s-1} \ge 1,$$

o que prova (1.2).

Exemplo 1.3. *Dado $\sigma > 0$, considere $m_n = [\log(n+e-1)]^{\sigma n}$. Note que*

$$m_0 = \log(e-1)^0 = 1, \quad m_1 = (\log e)^\sigma = 1.$$

Por outro lado,

$$\frac{m_{n+1} \cdot m_{n-1}}{m_n^2} = \left(\frac{[\log(n+e)]^{(n+1)} \cdot [\log(n+e-2)]^{(n-1)}}{[\log(n+e-1)]^{2\cdot n}}\right)^\sigma$$

$$= \left(\frac{[\log(n+e)]^{(n+1)}}{[\log(n+e-1)]^{n}} \cdot \frac{[\log(n+e-2)]^{(n-1)}}{[\log(n+e-1)]^{n}} \right)^{\sigma}.$$

Quando $n = 1$, (1.2) segue imediatamente. Para os outros casos, analisemos o comportamento da função $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{[\log(x+e)]^{(x+1)}}{[\log(x+e-1)]^{x}} = \exp\left[(x+1)\log(\log(x+e)) - x\log(\log(x+e-1))\right].$$

Observe que $\dfrac{m_{n+1} \cdot m_{n-1}}{m_n^2} = \left(\dfrac{f(n)}{f(n-1)}\right)^{\sigma}$. *Desta forma, é suficiente verificar que f é não decrescente. Como*

$$f'(x) = f(x) \cdot \Bigg[\log(\log(x+e)) - \log(\log(x+e-1)) + \\ + \frac{x+1}{(x+e)\cdot\log(x+e)} - \frac{x}{(x+e-1)\cdot\log(x+e-1)} \Bigg],$$

será suficiente mostrar que a expressão dentro dos colchetes é positiva. Para tal, tome

$$\begin{aligned} g : [1, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log(\log(x+e-1)) + \frac{x}{(x+e-1)\cdot\log(x+e-1)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Repare que $f'(x) = f(x) \cdot (g(x+1) - g(x))$; visto que

$$g'(x) = \frac{(x+2e-2)\cdot\log(x+e-1) - x}{[(x+e-1)\log(x+e-1)]^2},$$

segue que g é crescente, o que nos permite concluir que $g(x+1) > g(x)$ e $f'(x) > 0$ para qualquer $x \geq 1$, finalizando a prova.

Exemplo 1.4. *Seja $m_n = [\log(\log(n + e^e - 1))]^{\beta \cdot n}$, no qual β é um número real positivo. Novamente (1.1) é consequência de uma verificação direta. A fim de mostrar (1.2), definimos*

$$h : [1, +\infty) \to \mathbb{R}; \;\; h(x) = \frac{[\log(\log(x+e^e))]^{(x+1)}}{[\log(\log(x+e^e-1))]^{x}}.$$

Analogamente ao Exemplo 1.3, temos

$$\frac{m_{n+1} \cdot m_{n-1}}{m_n^2} = \left(\frac{h(n)}{h(n-1)}\right)^{\beta}.$$

O próximo passo é computar a derivada de h, que é dada por

$$h'(x) = h(x) \cdot \Bigg[\log\log\log(x+e^e)) - \log\log\log(x+e^e-1) +$$

$$\left. + \frac{x+1}{(x+e^e)\log(x+e^e)\log\log(x+e^e)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x}{(x+e^e-1)\log(x+e^e-1)\log\log(x+e^e-1)} \right]$$
$$= h(x) \cdot [\rho(x+1) - \rho(x)],$$

se estabelecemos $\rho : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$\rho(x) = \log\log\log(x+e^e-1) - \frac{x}{(x+e^e-1)\log(x+e^e-1)\log\log(x+e^e-1)}.$$

Por fim, observe que

$$\rho'(x) = \frac{x \cdot [1 + (1+\log(x+e^e-1)) \cdot \log\log(x+e^e-1)]}{[(x+e^e-1)\log(x+e^e-1)\log\log(x+e^e-1)]^2},$$

que é claramente positiva, como pretendíamos demonstrar. Por conseguinte, h *é crescente e vale* (1.2).

Exploremos algumas propriedades válidas para sequências peso que serão úteis no decorrer deste texto:

Proposição 1.5. *Seja* $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *uma sequência peso. Então* $\beta_n = (m_n)^{\frac{1}{n}}$ *é não decrescente.*

Demonstração. Iniciamos com a sequência auxiliar

$$\omega_n = \log m_n. \tag{1.4}$$

Segue de (1.1) e (1.2) que

$$\omega_0 = \omega_1 = 0, \quad 2\omega_k \leq \omega_{k-1} + \omega_{k+1}, \ \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.5}$$

Afirmamos que

$$\omega_p \leq \left(\frac{p}{p+q}\right) \omega_{p+q}, \ \ \forall p, q \in \mathbb{N}_0. \tag{1.6}$$

O caso p ou q = 0 é trivial; provemos inicialmente por indução para $q = 1$. Suponha que

$$\omega_k \leq \left(\frac{k}{k+1}\right) \omega_{k+1}.$$

Através de (1.5), deduzimos que

$$\omega_{k+1} \leq \frac{\omega_{k+2}}{2} + \left(\frac{k}{2k+2}\right) \omega_{k+1} \ \ \Rightarrow \ \ \omega_{k+1} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right) \omega_{k+2}, \tag{1.7}$$

o que finaliza a primeira parte da prova. Seguimos agora com indução em q. Suponha que

$$\omega_p \leq \left(\frac{p}{p+j}\right)\omega_{p+j};$$

decorre de (1.7) que

$$\omega_p \leq \left(\frac{p}{p+j}\right)\left(\frac{p+j}{p+j+1}\right)\omega_{p+j+1} = \left(\frac{p}{p+j+1}\right)\omega_{p+j+1},$$

encerrando a demonstração de (1.6).

Retomando a prova da Proposição 1.5, segue de (1.6) que, para todo n natural,

$$\frac{\omega_n}{n} \leq \frac{\omega_{n+1}}{n+1} \Rightarrow \frac{\log m_n}{n} \leq \frac{\log m_{n+1}}{n+1} \Rightarrow \log\left[(m_n)^{\frac{1}{n}}\right] \leq \log\left[(m_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}\right].$$

Consequentemente

$$(m_n)^{\frac{1}{n}} \leq (m_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

de acordo com o que pretendíamos provar. □

Corolário 1.6. *Toda sequência peso é não decrescente.*

Proposição 1.7. *Considere $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência peso. Então vale a seguinte desigualdade:*

$$m_k \cdot m_{n-k} \leq m_n, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}_0 \text{ tais que } n \geq k. \tag{1.8}$$

Demonstração. Considere $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ como em (1.4). Se $p \leq q$, obtemos de (1.6) que

$$\omega_p \leq \frac{p}{q} \cdot \omega_q. \tag{1.9}$$

Observe que provar (1.8) é equivalente a mostrar que

$$\omega_k + \omega_{n-k} \leq \omega_n, \quad \text{sempre que } k \leq n.$$

Por outro lado, inferimos de (1.9) que

$$\omega_k + \omega_{n-k} \leq \frac{k}{n} \cdot \omega_n + \frac{n-k}{n} \cdot \omega_n = \omega_n,$$

como desejávamos verificar. □

1.2 Classes de Funções

Nosso ambiente de trabalho será o toro N-dimensional, dado por $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N/2\pi\mathbb{Z}^N$. As classes de funções 2π-periódicas definidas adiante terão o comportamento de suas derivadas relacionado às sequências que acabamos de estabelecer.

Definição 1.8. *Seja $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência peso; uma função $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ será denominada* ***ultradiferenciável de classe*** *$\{\mathscr{M}\}$ se, e somente se, existirem constantes $C, h > 0$ tais que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$,*

$$|D^\alpha f(x)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N. \tag{1.10}$$

Notação 1.9. *Denotaremos o espaço das funções ultradiferenciáveis de classe $\{\mathscr{M}\}$ em $\mathbb{T}^N$ por $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.*

Observação 1.10. *Na literatura, o ambiente funcional no qual trabalharemos é formado pelas chamadas Classes de Romieu (veja, por exemplo, [43], [46] e [47]).*

Observação 1.11. *O surgimento dessas classes se deu pela resposta ao seguinte questionamento: para quais espaços funcionais o único elemento flat em algum ponto (isto é, uma função que tem o seu valor e de todas as suas derivadas igual a zero no mesmo) é a função nula? Uma classe de funções que satisfaz tal condição é denominada* ***quase analítica****; caso contrário, é nomeada* ***não quase analítica****.*

O primeiro exemplo de classe de funções quase analítica diferente do espaço das funções analíticas foi exibido por Denjoy em [25]. Uma caracterização completa foi dada por Carleman em [21] (para uma prova, recomendamos [36] ou [49]):

Teorema 1.12. *Seja $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência peso. A classe associada $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é quase analítica se, e somente se,*

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{m_j}{m_{j+1}\cdot(j+1)} = +\infty.$$

Observação 1.13. *Apesar do Teorema 1.12 ter sido originalmente demonstrado para o caso local, não é difícil ver que o mesmo continua valendo para elementos em $C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Se a classe associada a $\mathscr{M}$ é não quase analítica, considere $I = (0, 2\pi)$ e tome $f \in C_c^\infty(I)$ satisfazendo uma estimativa análoga a (1.10). Estendendo f periodicamente, teremos $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ e por conseguinte $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$. É imediato que tal função é não-nula e flat em 0, por exemplo.*

Por outro lado, se a classe associada a uma sequência é quase analítica, podemos ver $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ *como subespaço de* $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{R}^N)$ *e portanto o único elemento flat em algum ponto será a função nula.*

Observação 1.14. *Antes de prosseguir para exemplos, analisemos as diferenças entre as classes definidas aqui e aquelas dadas por Komatsu em [39]. A sequência denotada* M_n *pelo autor é dada aqui por* $m_n \cdot n!$*. Isto se deve sobretudo ao fato de termos o objetivo de trabalhar com espaços que contenham a classe das funções analíticas (veja a Proposição 1.18).*

Cabe ressaltar que, além disso, a condição (1.2) *é levemente mais forte do que a propriedade* $(M.1)$ *requerida por Komatsu. Visto que* (1.2) *é verdadeira para a sequência dos fatoriais, concluímos que a validade da mesma para* m_n *implicará na propriedade satisfeita para* M_n*. Em contrapartida,*

$$\frac{M_{n-1}\cdot M_{n+1}}{M_n^2}=\frac{m_{n+1}\cdot m_{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(n+1)!}{m_n^2\cdot(n!)^2}=\frac{m_{n+1}\cdot m_{n-1}}{m_n^2}\cdot\frac{n+1}{n},$$

mostrando que a recíproca não é necessariamente verdadeira.

Há várias razões para esta diferença na escolha das hipóteses. Primeiramente, existem motivos técnicos evidentes, como as Proposições 1.5, 1.7 e suas implicações futuras, bem como o Lema 3.17. Além disso, a condição (1.2) *(e consequentemente a propriedade provada na Proposição 1.5) garante que as classes sejam fechadas para composição e inversão (se* $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ *e* $f>0$*, então* $1/f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$*), algo que não é necessariamente verdadeiro para as classes de Komatsu (veja respectivamente [46] e [48]).*

Por fim, as condições iniciais (1.1)*, que não são requisitadas em [39], são essencialmente impostas para facilitar as contas, não sendo de fato uma obstrução para a teoria.*

Vejamos, agora, exemplos de espaços obtidos das sequências estabelecidas anteriormente.

Exemplo 1.15. *Considere a sequência* $\mathscr{M}^s$*, dada por* $m_n=(n!)^{s-1}$*, definida no Exemplo 1.2. O espaço* $\mathcal{G}^s(\mathbb{T}^N) := \mathcal{E}_{\mathscr{M}^s}(\mathbb{T}^N)$ *é conhecido como o das funções* ***Gevrey*** *de ordem* s*, para* $s \geq 1$.

Exemplo 1.16. *Dada* $\mathscr{M}=\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *como no Exemplo 1.3, a classe* $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ *é de grande relevância para o estudo da diferença entre classes quase analíticas e não quase analíticas. Afinal, para o caso particular em que* $\sigma=1$*, é possível provar (veja [48]) que a mesma representa a intersecção de todas as classes não quase analíticas fechadas para inversão.*

Outro fato interessante é o seguinte: a classe será quase analítica se, e somente se, $0 < \sigma \leq 1$ (veja [52]). Desta forma, inferimos que a intersecção de uma família de classes não quase analíticas pode resultar em uma classe quase analítica.

Exemplo 1.17. *A classe de funções associada ao Exemplo 1.4, por sua vez, tem uma grande importância histórica. Afinal, o exemplo dado por Denjoy em [25], citado na Observação 1.11 nada mais é que o caso particular em que $\beta = 1$.*

Antes de encerrar a seção, fixemos $\mathscr{M}$ uma sequência peso e mostremos que as classes associadas são fechadas para soma e produto.

Proposição 1.18. *$\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é um espaço vetorial, contendo o espaço das funções analíticas reais $C^\omega(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Fixemos $f \in C^\omega(\mathbb{T}^N)$; pela analiticidade de f, existem $C, h > 0$ tais que:

$$|D^\alpha f(x)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N.$$

Logo $C^\omega(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Vejamos agora que é espaço vetorial: sejam $f, g \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $a \in \mathbb{C}$. Existem assim $C_1, C_2, h_1, h_2 > 0$ de modo que:

$$|D^\alpha f(x)| \leq C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N,$$
$$|D^\alpha g(x)| \leq C_2 \cdot h_2^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N.$$

Portanto, para cada $x \in \mathbb{T}^N$,

$$\begin{aligned}
|D^\alpha(af + g)(x)| &\leq |a| \cdot |D^\alpha f(x)| + |D^\alpha g(x)| \\
&\leq |a| \cdot C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! + C_2 \cdot h_2^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \\
&\leq (|a| \cdot C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} + C_2 \cdot h_2^{|\alpha|}) \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!.
\end{aligned}$$

Se $h = \max\{h_1, h_2\}$ e $C = (|a| \cdot C_1 + C_2)$, segue que

$$|D^\alpha(af + g)(x)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N,$$

encerrando a prova. □

Proposição 1.19. *$\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é uma subálgebra de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$; existem constantes C_1, C_2, h_1, h_2 tais que:

$$|D^\alpha f(x)| \leq C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N,$$
$$|D^\alpha g(x)| \leq C_2 \cdot h_2^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Pela Fórmula de Leibniz,

$$\begin{aligned}
\left|D^{\alpha}\left(f\cdot g\right)(x)\right| &= \left|\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^{\alpha-\beta}f(x)\cdot D^{\beta}g(x)\right| \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\cdot\left|D^{\alpha-\beta}f(x)\right|\cdot\left|D^{\beta}g(x)\right| \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\cdot\left(C_1\cdot h_1^{|\alpha|-|\beta|}\cdot m_{|\alpha|-|\beta|}\cdot|\alpha-\beta|!\right)\cdot\left(C_2\cdot h_2^{|\beta|}\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|!\right).
\end{aligned}$$

Se $h=\max\{h_1,h_2\}$,

$$\begin{aligned}
\left|D^{\alpha}\left(f\cdot g\right)(x)\right| &\leq (C_1\cdot C_2)\cdot h^{|\alpha|}\cdot\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\cdot(m_{|\alpha|-|\beta|}\cdot m_{|\beta|})\cdot(|\alpha-\beta|!\cdot|\beta|!) \\
&\leq (C_1\cdot C_2)\cdot h^{|\alpha|}\cdot\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!, \quad \text{por (1.8)}, \\
&\leq (C_1\cdot C_2)\cdot(2h)^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!.
\end{aligned}$$

Portanto $fg\in\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, como queríamos demonstrar. □

1.3 Comparação entre Classes

Dadas sequências peso diferentes $\mathscr{M}$ e $\mathscr{L}$, estabeleceremos relação entre os espaços $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{T}^N)$ através do comportamento assintótico das mesmas.

Definição 1.20. *Se $\mathscr{M}=\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ e $\mathscr{L}=\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ são sequências peso, denotaremos*

$$\mathscr{M}\preceq\mathscr{L}\ \Leftrightarrow\ \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n}{\ell_n}\right)^{\frac{1}{n}}<\infty.$$

Não é difícil verificar que a relação $\preceq$ é reflexiva e transitiva. Denotando

$$\mathscr{M}\approx\mathscr{L}$$

no caso em que $\mathscr{M}\preceq\mathscr{L}$ e $\mathscr{L}\preceq\mathscr{M}$, obtemos em $\approx$ uma relação de equivalência.

Lema 1.21. *(Teo. 1 de [52]) Dada $\mathscr{M}$ uma sequência peso, existe $\theta\in\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$ tal que*

$$|\theta^j(0)|\geq m_j\cdot j!,\ \ \forall j\in\mathbb{N}_0.$$

Demonstração. Iniciamos a prova definindo as seguintes sequências auxiliares:

$$M_n=m_n\cdot n!,\qquad \alpha_n=\frac{M_{n+1}}{M_n}=\frac{(n+1)\cdot m_{n+1}}{m_n}.$$

$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também satisfaz a propriedade (1.2), afinal

$$\begin{aligned}\frac{M_{n+1}\cdot M_{n-1}}{M_n^2} &= \left(\frac{(n+1)!\cdot(n-1)!}{n!\cdot n!}\right)\cdot\left(\frac{m_{n+1}\cdot m_{n-1}}{m_n^2}\right)\\ &\geq \left(\frac{m_{n+1}\cdot m_{n-1}}{m_n^2}\right).\end{aligned}$$

Deste modo, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é não decrescente. Afirmamos agora que, para quaisquer $j,k\in\mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^{k-j} \leq \frac{M_j}{M_k}. \tag{1.11}$$

Para $k=j$, a afirmação é trivial. Quando $k>j$,

$$\begin{aligned}\frac{M_k}{M_j} &= \frac{M_k}{M_{k-1}}\cdot\frac{M_{k-1}}{M_{k-2}}\cdot\,\ldots\,\cdot\frac{M_{j+1}}{M_j}\\ &\leq \frac{M_k}{M_{k-1}}\cdot\frac{M_k}{M_{k-1}}\cdot\,\ldots\,\cdot\frac{M_k}{M_{k-1}}\\ &\leq (\alpha_{k-1})^{k-j}\\ &\leq (\alpha_k)^{k-j}.\end{aligned}$$

Se $k<j$,

$$\begin{aligned}\frac{M_j}{M_k} &= \frac{M_j}{M_{j-1}}\cdot\frac{M_{j-2}}{M_{j-1}}\cdot\,\ldots\,\cdot\frac{M_{k+1}}{M_k}\\ &\geq \frac{M_{k+1}}{M_k}\cdot\frac{M_{k+1}}{M_k}\cdot\,\ldots\,\cdot\frac{M_{k+1}}{M_k}\\ &\geq \left(\frac{M_{k+1}}{M_k}\right)^{j-k}\\ &\geq \left(\frac{1}{\alpha_k}\right)^{k-j},\end{aligned}$$

comprovando 1.11.

Retomando a demonstração do Lema, definimos

$$\theta(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{M_k}{(2\alpha_k)^k}\cdot\exp(2i\alpha_k x). \tag{1.12}$$

Note que a série converge absolutamente para todo $x\in\mathbb{T}$, visto que

$$\begin{aligned}|\theta(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{M_k}{(2\alpha_k)^k}\cdot\exp(2i\alpha_k x)\right|\\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{M_k}{\alpha_k^k}\leq 2,\end{aligned}$$

aplicando (1.11). Além disso, derivando j vezes termo a termo,

$$\begin{aligned}
|\theta^{(j)}(x)| &\le \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{M_k}{(2\alpha_k)^k} \cdot (2i\alpha_k)^j \exp(2i\alpha_k x) \right| \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-j}} \cdot \frac{M_k}{\alpha_k^{k-j}} \\
&\le 2^j \cdot M_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&\le 2^{j+1} \cdot m_j \cdot j!.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, $\theta \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|\theta^{(j)}(0)| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-j}} \cdot \frac{M_k}{\alpha_k^{k-j}} \\
&\ge \frac{1}{2^{j-j}} \cdot \frac{M_j}{\alpha_j^{j-j}} \\
&\ge m_j \cdot j!,
\end{aligned}$$

encerrando a demonstração do resultado. □

Teorema 1.22. *A inclusão $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{T}^N)$ é equivalente ao fato de $\mathscr{M} \preceq \mathscr{L}$. Em particular, segue que $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) = \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, $\mathscr{M} \approx \mathscr{L}$.*

Demonstração. Suponha $\mathscr{M} \preceq \mathscr{L}$; então existe $B > 0$ tal que:

$$\frac{m_k}{\ell_k} \le B^k, \ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Fixada $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, encontramos $C, h > 0$ de modo que, dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$$|D^\alpha f(x)| \le C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N.$$

Assim, para todo $x \in \mathbb{T}^N$,

$$\begin{aligned}
|D^\alpha f(x)| &\le C \cdot h^{|\alpha|} \cdot B^{|\alpha|} \cdot \ell_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \\
&\le C \cdot (h \cdot B)^{|\alpha|} \cdot \ell_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!,
\end{aligned}$$

e portanto $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{T}^N)$.

Seguimos para a recíproca, que será provada pela contrapositiva. Por hipótese, para cada n natural, existe um índice k_n de modo que

$$\left(\frac{m_{k_n}}{\ell_{k_n}}\right)^{\frac{1}{k_n}} \ge n \ \Rightarrow \ \left(\frac{m_{k_n}}{\ell_{k_n}}\right) \ge n^{k_n} \ \Rightarrow \ m_{k_n} \ge \ell_{k_n} \cdot n^{k_n}.$$

Tomando θ como no Lema 1.21 , definimos:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{T}^N &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \theta(x_1); \end{aligned} \tag{1.13}$$

é imediato que $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Por outro lado, se $\alpha_{k_n} = (k_n, 0, 0, \ldots, 0)$,

$$|D^{\alpha_{k_n}}\varphi(0)| = |\theta^{k_n}(0)| \geq (k_n)! \cdot m_{k_n} \geq (k_n)! \cdot \ell_{k_n} \cdot n^{k_n}.$$

Consequentemente

$$\left(\frac{|D^{\alpha_{k_n}}\varphi(0)|}{(k_n)! \cdot l_{k_n}}\right)^{\frac{1}{k_n}} \rightarrow \infty,$$

o que nos permite deduzir que $\varphi \notin \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{T}^N)$. □

Corolário 1.23. *Se $r < s$, então $\mathcal{G}^r(\mathbb{T}^N) \subsetneq \mathcal{G}^s(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. As sequência associadas a $\mathcal{G}^r$ e $\mathcal{G}^s$ são $m_k = (k!)^{r-1}$ e $\ell_k = (k!)^{s-1}$, respectivamente. Logo

$$\left(\frac{m_k}{\ell_k}\right)^{\frac{1}{k}} = (k!)^{\frac{r-s}{k}}.$$

Lembrando que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{n^k}{k!} = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, inferimos que $\lim\limits_{k\to\infty} (k!)^{\frac{1}{k}} = \infty$. Assim, se $r < s$,

$$\lim_{k\to\infty} (k!)^{\frac{r-s}{k}} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} (k!)^{\frac{s-r}{k}} = \infty.$$

Deste modo, $\mathcal{G}^r(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{G}^s(\mathbb{T}^N)$ e $\mathcal{G}^s(\mathbb{T}^N) \not\subset \mathcal{G}^r(\mathbb{T}^N)$, encerrando a demonstração. □

Corolário 1.24. *$C^\omega(\mathbb{T}^N) = \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se $\sup\limits_{j\geq 1} (m_j)^{\frac{1}{j}} < +\infty$.*

Proposição 1.25. *Seja $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência peso e denote $\mathscr{M}^k = \{m_n^k\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ a sequência dada por $m_n^k = m_{n+k}$. Se $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = k$ e φ é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, então $D^\alpha\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}^k}(\mathbb{T}^N)$.*

Observação 1.26. *Antes de iniciar a prova, ressaltamos que $\mathscr{M}^k$ não é necessariamente uma sequência peso, mas utilizaremos a notação $\mathcal{E}_{\mathscr{M}^k}(\mathbb{T}^N)$ de qualquer modo.*

Demonstração. Fixados $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ e $x \in \mathbb{T}^N$, decorre da hipótese que

$$\begin{aligned} |D^{\alpha+\beta}\varphi(x)| &\leq C \cdot h^{|\alpha+\beta|} \cdot m_{|\alpha+\beta|} \cdot |\alpha+\beta|! \\ &\leq (C \cdot h^{|\alpha|}) \cdot h^{|\beta|} \cdot m_{k+|\beta|} \cdot |\alpha+\beta|! \end{aligned}$$

$$\leq (C \cdot h^{|\alpha|}) \cdot h^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|}^{k} \cdot |\alpha + \beta|!.$$

Além disso, como $(|\alpha| + |\beta|)! \leq |\alpha|! \cdot |\beta|! \cdot 2^{|\alpha|} \cdot 2^{|\beta|}$, segue que

$$|D^{\alpha+\beta}\varphi(x)| \leq (C \cdot h^{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot 2^{|\alpha|}) \cdot (2h)^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|}^{k} \cdot |\beta|!,$$

o que encerra a prova. □

Teorema 1.27. *Dada uma sequência peso $\mathscr{M}$ arbitrária, o espaço $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é fechado com relação a diferenciação se, e somente se,*

$$\sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_{j+1}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} < \infty.$$

Demonstração. Suponha primeiramente que $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é fechado com relação a diferenciação. Neste caso, segue da Proposição 1.25 que $\mathcal{E}_{\mathscr{M}^1}(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Pelo Teorema 1.22,

$$\sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_j^1}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} = \sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_{j+1}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} < \infty$$

Em contrapartida, supondo que $\sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_{j+1}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} < \infty$, verifiquemos que $\mathcal{E}_{\mathscr{M}^p}(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, para qualquer $p \in \mathbb{N}$. O caso $p = 1$ segue diretamente da hipótese. Supondo a afirmação verdadeira para $p = q$, repare que:

$$\left(\frac{m_{j+q+1}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} = \left(\frac{m_{j+q+1}}{m_{j+q}} \right)^{\frac{1}{j}} \cdot \left(\frac{m_{j+q}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_{j+q+1}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} &\leq \sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_{j+q+1}}{m_{j+q}} \right)^{\frac{1}{j}} \cdot \sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_{j+q}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} \\ &\leq \sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_{j+1}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} \cdot \sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_{j+q}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} < \infty, \end{aligned}$$

aplicando a hipótese de indução. Está demonstrado o resultado. □

Para o estudo de equações diferenciais, é natural pedir que o espaço funcional em que se está trabalhando seja fechado com relação a diferenciação. Consequentemente, a partir de agora trabalharemos apenas com sequências peso $\mathscr{M} = \{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ satisfazendo as seguintes condições:

1. $m_0 = m_1 = 1$. (1.1)

2. $m_n^2 \leq m_{n-1} \cdot m_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$ (1.2)

3. Existe $C_{\{1\}} > 1$ de modo que:

$$\sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_{j+1}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} \leq C_{\{1\}}. \tag{1.14}$$

Observação 1.28. *Uma consequência imediata do Teorema 1.27 é a existência, dado $k \in \mathbb{N}$, de $C_{\{k\}} > 1$ de forma que*

$$\sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_{j+k}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} \leq C_{\{k\}}. \tag{1.15}$$

Observação 1.29. *No caso particular em que $m_n = n!$, recorde que:*

$$\sup_{j \geq 1} \left(\frac{m_{j+1}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} = \sup_{j \geq 1} (j+1)^{\frac{1}{j}} = 2.$$

Por conseguinte, para cada $q \in \mathbb{N}$ obtemos uma constante $B_{\{q\}}$ de maneira que:

$$\sup_{j \geq 1} \left(\frac{(j+q)!}{j!} \right)^{\frac{1}{j}} \leq B_{\{q\}}.$$

As Observações 1.28 e 1.29 serão fundamentais no decorrer deste trabalho, sendo utilizadas em praticamente todas as demonstrações.

1.4 A topologia de $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$

Nesta seção apresentaremos a topologia que usaremos em nossas classes de funções ultradiferenciáveis.

Definição 1.30. *Dado $h > 0$, definimos*

$$\mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N) = \left\{ f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N); \ \sup_{\substack{x \in \mathbb{T}^N \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N}} \frac{|D^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!}. < \infty \right\}.$$

E, para cada $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$, denotaremos

$$\|f\|_{\mathscr{M},h} := \sup_{\substack{x \in \mathbb{T}^N \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N}} \frac{|D^\alpha f(x)|}{h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!}.$$

Não é difícil verificar que $\|.\|_{\mathscr{M},h}$ é uma norma em $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$. Neste caso, temos a seguinte

Proposição 1.31. *$\mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$ e fixemos x em $\mathbb{T}^N$ e β em $\mathbb{N}_0^N$. Dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrar $j_0 \in \mathbb{N}$ de maneira que, se $j, k \geq j_0$,

$$\begin{aligned}\left|D^\beta \varphi_j(x) - D^\beta \varphi_k(x)\right| &= \left[\frac{\left|D^\beta\left(\varphi_j - \varphi_k\right)(x)\right|}{h^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|!}\right] \cdot h^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|! \\ &\leq \|\varphi_j - \varphi_k\|_{\mathscr{M},h} \cdot h^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|! \\ &\leq \frac{\varepsilon}{h^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|!} \cdot h^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|! \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, $\left\{D^\beta \varphi_n(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$.

Para cada par $(x, \beta) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{N}_0^N$, definimos $\phi_\beta(x) = \lim D^\beta \varphi_n(x)$. Como $\mathbb{T}^N$ é compacto,

$$\varphi := \phi_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^N);\ D^\beta \varphi = \phi_\beta,\ \forall \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

O passo seguinte é verificar que $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$; escolhendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\varphi_j - \varphi_k\|_{\mathscr{M},h} \leq 1$ para quaisquer $j, k \geq n_0$, segue que

$$\begin{aligned}|D^\alpha \varphi(x)| &\leq |D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi_{n_0}(x)| + |D^\alpha \varphi_{n_0}(x)| \\ &\leq |\lim_{j\to\infty} D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi_{n_0}(x)| + |D^\alpha \varphi_{n_0}(x)| \\ &\leq h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! + C_0 \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \\ &\leq (C_0 + 1) \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N,\ \forall x \in \mathbb{T}^N.\end{aligned}$$

Por fim, com o intuito de demonstrar que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$, fixemos $\varepsilon > 0$. Como a sequência é de Cauchy, é possível encontrar $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\varphi_j - \varphi_k\|_{\mathscr{M},h} \leq \varepsilon,\ \forall j, k \geq j_0.$$

Isto é,

$$\frac{\left|D^\beta \varphi_j(x) - D^\beta \varphi_k(x)\right|}{h^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|!} \leq \varepsilon,\ \ \forall x \in \mathbb{T}^N,\ \ \forall \beta \in \mathbb{N}_0^N.$$

Fazendo $k \to \infty$, deduzimos que

$$\|\varphi_j - \varphi\|_{\mathscr{M},h} \leq \varepsilon,\ \forall j \geq j_0,$$

concluindo a prova. □

Proposição 1.32. *Sejam $h_1, h_2 \in \mathbb{R}_+$, com $h_1 < h_2$. Então $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_1}(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N)$ e a inclusão $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_1}(\mathbb{T}^N) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N)$ é compacta.*

Demonstração. A inclusão dos espaços é imediata. Concentremo-nos assim na compacidade: dada $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sequência limitada em $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_1}(\mathbb{T}^N)$, queremos comprovar a existência de subsequência convergente em $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N)$.

Por hipótese, existe $C_0 \in \mathbb{R}_+$ de modo que

$$|D^\alpha f_n(x)| \leq C_0 \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \ \ \forall x \in \mathbb{T}^N, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

Desta maneira, fixado $k \in \mathbb{N}_0$ qualquer, resulta de (1.16) a existência de $C_k > 0$ tal que

$$\sum_{|\beta|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{T}^N} |D^\beta f_n(x)| \leq C_k, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Decorre do Teorema de Arzelà-Ascoli a existência de uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo para uma função f em $C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Resta-nos mostrar que f é de fato um elemento de $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N)$ e que a convergência se dá neste mesmo espaço.

Para a primeira afirmação, note o seguinte: dados quaisquer $x \in \mathbb{T}^N$ e $\gamma \in \mathbb{N}_0^N$, obtemos de (1.16) que

$$|D^\gamma f(x)| = \left| \lim_{k\to+\infty} D^\gamma f_{n_k}(x) \right| \leq C_0 \cdot h_1^{|\gamma|} \cdot m_{|\gamma|} \cdot |\gamma|! \leq C_0 \cdot h_2^{|\gamma|} \cdot m_{|\gamma|} \cdot |\gamma|!,$$

o que nos permite inferir que $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N)$. Seguimos para a segunda parte: fixado $\varepsilon > 0$, selecionamos $p \in \mathbb{N}$ de modo que $\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^p \leq \dfrac{\varepsilon}{2C_0}$. Além disso, definimos

$$C_1 := \max\left\{ \frac{1}{h_2^q \cdot m_q \cdot q!}; \ 0 \leq q \leq p \right\}.$$

Pelo fato de $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergir para f em $C^\infty(\mathbb{T}^N)$, é possível encontrar $k_1 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^N} \left| D^\lambda f_{n_k}(x) - D^\lambda f(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{C_1}, \ \ |\lambda| \leq p, \ \ k \geq k_1.$$

Suponha agora $k \geq k_1$. Se $|\lambda| \leq p$,

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^N} \left(\frac{\left| D^\lambda f_{n_k}(x) - D^\lambda f(x) \right|}{h_2^{|\lambda|} \cdot m_{|\lambda|} \cdot |\lambda|!} \right) \leq \frac{\varepsilon}{C_1} \cdot C_1 = \varepsilon.$$

Quando $|\lambda| > p$,

$$\sup_{x\in\mathbb{T}^N} \left(\frac{\left| D^\lambda f_{n_k}(x) - D^\lambda f(x) \right|}{h_2^{|\lambda|} \cdot m_{|\lambda|} \cdot |\lambda|!} \right) \leq \sup_{x\in\mathbb{T}^N} \left(\frac{\left| D^\lambda f_{n_k}(x) - D^\lambda f(x) \right|}{h_1^{|\lambda|} \cdot m_{|\lambda|} \cdot |\lambda|!} \right) \cdot \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{x\in\mathbb{T}^N}\left(\frac{\left|D^\lambda f_{n_k}(x) - D^\lambda f(x)\right|}{h_1^{|\lambda|}\cdot m_{|\lambda|}\cdot|\lambda|!}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2C_0}\\
&\leq \left(\|f_{n_k}\|_{\mathscr{M},h_1} + \|f\|_{\mathscr{M},h_1}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2C_0}\\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\|f_{n_k} - f\|_{\mathscr{M},h_2} \leq \varepsilon,\ \forall k \geq k_1,$$

o que nos permite inferir que $f_{n_k} \to f$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N)$. □

A topologia imposta em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ será dada pelo limite indutivo da família de espaços $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$, com h real positivo. As aplicações de cadeia serão dadas por inclusões

$$i_{h_1}^{h_2} : \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_1}(\mathbb{T}^N) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_2}(\mathbb{T}^N),$$

para $h_1 < h_2$. Denotamos

$$\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) = \varinjlim_{h\in\mathbb{R}^+} \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N).$$

É possível mostrar que para qualquer sequência $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ crescente e ilimitada, temos

$$\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) = \varinjlim_{n} \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N).$$

Assim, associando as Proposições 1.31 e 1.32, concluímos que $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é uma *sequência injetiva compacta de espaços localmente convexos*, conhecido na literatura como um espaço **DFS**. Para maiores detalhes sobre estes espaços, recomendamos [39]; aqui apresentaremos apenas as informações que serão fundamentais mais adiante.

Uma questão fundamental, ao definirmos uma topologia, é a caracterização de conjuntos abertos e funções contínuas. Neste caso, é de se esperar alguma relação com os espaços $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N)$.

Teorema 1.33. *(Teorema 6' de [39]). Um conjunto $A \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é aberto (fechado) se, e somente se,*

$$A \cap \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N) \text{ é aberto (fechado) em } \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.34. *Seja X um espaço topológico qualquer; $f : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to X$ será uma função contínua se, e somente se, a restrição $f_n : \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N) \to X$ for contínua, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Definimos inicialmente a inclusão $I_n : \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, que é contínua devido ao Teorema 1.33. Assim, se f for contínua, $f_n = f \circ I_n$ também o será, provando a necessidade da condição.

Reciprocamente, suponha $B \subset X$ um conjunto fechado. Como cada restrição f_n é contínua, $f_n^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_n}(\mathbb{T}^N)$ é fechado. Aplicando o Teorema 1.33, inferimos que $f^{-1}(B)$ é fechado, como pretendíamos provar. □

Corolário 1.35. *Considere $g : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ uma aplicação qualquer. Para que g seja contínua, é suficiente provar que para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $p \in \mathbb{N}$ de modo que*

$$g\left(\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_m}(\mathbb{T}^N)\right) \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_p}(\mathbb{T}^N) \text{ e } g_m^p : \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_m}(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_p}(\mathbb{T}^N)$$

é contínua.

Demonstração. Se as funções g_m^p são contínuas, as restrições g_m de g também o serão. Através do Teorema 1.34, deduzimos que o mesmo será válido para g. □

Outros pontos relevantes a serem abordados são os conceitos de conjuntos limitados e convergência de sequências em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Teorema 1.36. *(Teorema 6' de [39]).*

1. *Para que um conjunto $B \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ seja limitado, é necessário e suficiente a existência de $k \in \mathbb{N}$ de modo que $B \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_k}(\mathbb{T}^N)$ e que seja limitado com relação à topologia deste espaço.*

2. *Uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ converge para 0 no espaço se, e somente se, é possível encontrar $m \in \mathbb{N}$ de modo que*

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_m}(\mathbb{T}^N) \text{ e } f_n \to 0 \text{ em } \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_m}(\mathbb{T}^N).$$

Capítulo 2

Ultradistribuições e Série de Fourier

Neste capítulo, trataremos do dual topológico dos espaços $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e desenvolveremos os resultados da análise de Fourier necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Vale ressaltar que a maioria do conteúdo deste capítulo são resultados estendendo fatos apresentados pelo Prof. Gerson Petronilho em suas notas *"Periodic Gevrey Ultradistributions in* $\mathbb{R}^n$*"*.

2.1 Ultradistribuições

Definido o espaço vetorial topológico $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, o próximo passo é tratar de seu dual. Cabe ressaltar

Definição 2.1. *Dada $\mathscr{M}$ uma sequência peso, definiremos por $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ o* ***espaço dual topológico de*** $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$*. Isto é, o conjunto dos funcionais lineares da forma $u : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \mathbb{C}$ contínuos.*

Teorema 2.2. *As seguintes afirmações a respeito de um funcional linear $u : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \mathbb{C}$ são equivalentes:*

1. *$u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.*

2. *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ de modo que*

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C_\varepsilon \cdot \sup_{\substack{x \in \mathbb{T}^N \\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N}} \left(\frac{|\partial^\alpha \varphi(x)| \cdot \varepsilon^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right), \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N). \tag{2.1}$$

3. *Se $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ converge para 0 em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, então $\langle u, \varphi_n \rangle \to 0$.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) : Provaremos pela contrapositiva; suponha que (2) não é verdadeira. Então existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ de maneira que

$$|\langle u, \varphi_n\rangle| > n \cdot \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^N}} \left(\frac{|\partial^\alpha \varphi_n(x)| \cdot \varepsilon_0^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right).$$

Seja $\Psi_n = \dfrac{\varphi_n}{|\langle u, \varphi_n\rangle|}$; neste caso, teremos $|\langle u, \Psi_n\rangle| = 1$ e

$$1 > n \cdot \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^N}} \left(\frac{|\partial^\alpha \Psi_n(x)| \cdot \varepsilon_0^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right) \Rightarrow \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^N}} \left(\frac{|\partial^\alpha \Psi_n(x)| \cdot \varepsilon_0^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right) < \frac{1}{n}.$$

Deste modo, para todo $x \in \mathbb{T}^N$,

$$|\partial^\alpha \Psi_n(x)| \leq \left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Isto é, $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M},1/\varepsilon_0}(\mathbb{T}^N)$ e

$$|\langle u, \Psi_n\rangle| \geq n \, \|\Psi_n\|_{\mathscr{M},1/\varepsilon_0} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que nos mostra que $u\Big|_{\mathcal{E}_{\mathscr{M},1/\varepsilon_0}(\mathbb{T}^N)}$ não é contínua. Logo, pelo Teorema 1.34, u não é contínua.
(2) $\Rightarrow$ (3) : Se $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ converge para 0 em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, decorre do Teorema 1.36 a existência $p \in \mathbb{N}$ de modo que $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_p}(\mathbb{T}^N)$. Tomemos $\varepsilon = \dfrac{1}{h_p}$; pela hipótese, existe $C > 0$ de maneira que

$$|\langle u, \varphi_n\rangle| \leq C \cdot \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^N}} \left(\frac{|\partial^\alpha \varphi_n(x)|}{(h_p)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!} \right) \leq C \cdot \|\varphi_n\|_{\mathscr{M},h_p}.$$

Como $\|\varphi_n\|_{\mathscr{M},h_p} \to 0$, deduzimos que $\langle u, \varphi_n\rangle \to 0$.
(3) $\Rightarrow$ (1) : Novamente aplicaremos a contrapositiva: suponha que $u \notin \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Através do Teorema 1.34, encontramos $q \in \mathbb{N}$ de maneira que

$$u\big|_{\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)} : \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N) \to \mathbb{C}$$

não é contínua. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, é possível obter $\varphi_j \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)$, de maneira que

$$|\langle u, \varphi_j\rangle| > j \cdot \|\varphi_j\|_{\mathscr{M},h_q}.$$

Seja $\Psi_j := \dfrac{\varphi_j}{|\langle u, \varphi_j\rangle|}$; então

$$|\langle u, \Psi_j\rangle| = 1, \quad \|\Psi_j\|_{\mathscr{M},h_q} = \frac{\|\varphi_j\|_{\mathscr{M},h_q}}{|\langle u, \varphi_j\rangle|} < \frac{1}{j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, $\{\Psi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \to 0$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, mas $\langle u, \Psi_j\rangle \nrightarrow 0$. $\square$

2.2 Série de Fourier

Definiremos a Transformada de Fourier de elementos em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, e descreveremos propriedades dos mesmos através do comportamento de seus coeficientes de Fourier.

Definição 2.3. *Seja $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Para cada $\xi \in \mathbb{Z}^N$, definimos*

$$\hat{\varphi}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\xi} \cdot \varphi(x)dx,$$

e denotaremos por $\mathscr{F}(\varphi)$ a aplicação

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\varphi) : \mathbb{Z}^N &\to \mathbb{C} \\ \xi &\mapsto \hat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

Teorema 2.4. *Dada $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, temos*

$$\varphi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \hat{\varphi}(\xi) \cdot e^{ix\xi}, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N,$$

com convergência em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Além disso, existem constantes $C, \delta > 0$ de modo que

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N. \tag{2.2}$$

Demonstração. Iniciamos com a prova de (2.2). Para $n = 0$, temos

$$|\hat{\varphi}(\xi)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\xi} \cdot \varphi(x)dx. \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{T}^N} |\varphi(x)|. \tag{2.3}$$

Assim, se $\xi = 0$, é suficiente escolher $C_1 = \sup_{x \in \mathbb{T}^N} |\varphi(x)|$ e $\delta = 1$. Passemos para o caso $n \geq 1$; fixados $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ e $\xi \in \mathbb{Z}^N$ não nulos,

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(D^\alpha \varphi)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\xi} \cdot D^\alpha \varphi(x)dx. \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (e^{-ix\xi}) \cdot \varphi(x)dx. \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} \xi^\alpha \cdot e^{-ix\xi} \cdot \varphi(x)dx. \\ &= \xi^\alpha \cdot \mathscr{F}(\varphi)(\xi). \end{aligned}$$

A igualdade acima, unida à hipótese inicial, nos permite concluir a existência de C_2, h_2 positivos, tais que

$$|\xi^\alpha| \cdot |\hat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} |D^\alpha \varphi(x)|dx \leq C_2 \cdot h_2^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!.$$

Pela desigualdade $|\xi|^n \leq \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \cdot |\xi^\alpha|$, inferimos que

$$\begin{aligned}
|\xi|^n \cdot |\hat{\varphi}(\xi)| &\leq \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \cdot |\xi^\alpha| \cdot |\hat{\varphi}(\xi)| \\
&\leq \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \cdot C_2 \cdot h_2^n \cdot m_n \cdot n! \\
&\leq C_2 \cdot h_2^n \cdot m_n \cdot n! \cdot \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} \\
&\leq C_2 \cdot (\underbrace{h_2 \cdot N}_{h_3})^n \cdot m_n \cdot n!
\end{aligned}$$

Como $\xi \neq 0$, denotando $h_4 = (2 \cdot h_3)$, deduzimos que

$$(1 + |\xi|)^n \cdot |\hat{\varphi}(\xi)| \leq C_2 \cdot (h_4)^n \cdot m_n \cdot n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}.$$

Assim, se tomamos $C = \max\{C_1, C_2\}$ e $\delta = \frac{1}{\max\{h_4, 1\}}$, concluímos que

$$(1 + |\xi|)^n \cdot |\hat{\varphi}(\xi)| \leq C \cdot \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N. \tag{2.4}$$

Em particular, como a desigualdade acima vale para todo n em $\mathbb{N}_0$,

$$|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C \cdot \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right), \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Partimos agora para a demonstração da convergência da série. Como $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, temos ciência de que $\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \hat{\varphi}(\xi) \cdot e^{ix\xi}$ converge no espaço das funções suaves para $\varphi(x)$. Definimos, para $k \in \mathbb{N}$, a soma parcial

$$S_k\varphi(x) = \sum_{|\xi| \leq k} \hat{\varphi}(\xi) \cdot e^{i\xi x}.$$

Por S_k ser uma função analítica, pertence a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Além disso,

$$(\varphi - S_k\varphi)(x) = \sum_{|\xi| \geq k+1} \hat{\varphi}(\xi) \cdot e^{i\xi x}.$$

Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, segue que

$$D^\alpha(\varphi - S_k\varphi)(x) = \sum_{|\xi| \geq k+1} \hat{\varphi}(\xi) \cdot \xi^\alpha \cdot e^{i\xi x}.$$

Assim, aplicando (2.4), obtemos

$$|D^\alpha(\varphi - S_k\varphi)(x)| \leq \sum_{|\xi| \geq k+1} |\hat{\varphi}(\xi)| \cdot |\xi|^{|\alpha|}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{|\xi|\ge k+1} |\hat{\varphi}(\xi)| \cdot (1+|\xi|)^{|\alpha|+2N} \cdot (1+|\xi|)^{-2N} \\
&\le C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{|\alpha|+2N} \cdot m_{|\alpha|+2N} \cdot (|\alpha|+2N)! \cdot \sum_{|\xi|\ge k+1} (1+|\xi|)^{-2N}. \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

Pelas Observações 1.28 e 1.29, além de (2.5), segue que

$$
\begin{aligned}
|D^\alpha(\varphi - S_k\varphi)(x)| &\le C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{|\alpha|+2N} \cdot (m_{|\alpha|} \cdot C^{|\alpha|}_{\{2N\}}) \cdot (|\alpha|! \cdot B^{|\alpha|}_{\{2N\}}) \cdot \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} (1+|\xi|)^{-2N} \\
&\le \left[C\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2N} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} (1+|\xi|)^{-2N}\right] \left(\left(\frac{1}{\delta}\right) B_{\{2N\}} C_{\{2N\}}\right)^{|\alpha|} m_{|\alpha|}|\alpha|!.
\end{aligned}
$$

Se tomamos $C' = C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{2N} \cdot \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} (1+|\xi|)^{-2N}$ e $h' = \left(\frac{1}{\delta}\right) \cdot B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}}$,

$$
|D^\alpha(\varphi - S_k\varphi)(x)| \le C' \cdot h'^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N.
$$

Logo $(\varphi - S_k\varphi) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h'}(\mathbb{T}^N)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Pelo fato de $\frac{1}{\delta}$ ser menor que h', inferimos que φ também é elemento de $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h'}(\mathbb{T}^N)$. Ou seja,

$$
S_k\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h'}(\mathbb{T}^N), \quad \forall k \in \mathbb{N}.
$$

Finalmente, observe que por (2.5),

$$
|D^\alpha(\varphi - S_k\varphi)(x)| \le \left(C\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2N} \sum_{|\xi|\ge k+1} (1+|\xi|)^{-2N}\right) h'^{|\alpha|} m_{|\alpha|}|\alpha|!, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N.
$$

Portanto, $\|\varphi - S_k \cdot \varphi\|_{\mathscr{M},h'} \to 0$ quando $k \to +\infty$ e assim $S_k\varphi \to \varphi$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. □

Estenderemos agora a noção de Série de Fourier para ultradistribuições, usando o fato de que $\rho(x) = e^{-ix\xi}$ é analítica para quaisquer $x \in \mathbb{T}^N$ e $\xi \in \mathbb{Z}^N$.

Definição 2.5. *Seja $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$; definimos o coeficiente de Fourier $\hat{u}(\xi)$ de u por*

$$
\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \cdot \langle u, e^{-ix\xi}\rangle, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}.
$$

Teorema 2.6. *Considere $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$; então para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ de maneira que:*

$$
|\hat{u}(\xi)| \le C_\varepsilon \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.
$$

Demonstração. Por definição $|\hat{u}(\xi)| = \dfrac{1}{(2\pi)^N} \cdot \left|\langle u, e^{-ix\xi}\rangle\right|$. Fixados $\varepsilon > 0$ e $\xi \in \mathbb{Z}^N$, decorre de (2.1) a existência de $C_\varepsilon > 0$, de modo que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_\varepsilon \cdot \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^N \\ \alpha\in\mathbb{N}_0^N}} \left(\frac{|\partial_x^\alpha(e^{-ix\xi})| \cdot \varepsilon^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!}\right).$$

Por conseguinte,

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_\varepsilon \cdot \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \left(\frac{(1+|\xi^\alpha|) \cdot \varepsilon^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!}\right) \leq C_\varepsilon \cdot \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \left(\frac{(1+|\xi|^{|\alpha|}) \cdot \varepsilon^{|\alpha|}}{m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!}\right),$$

e portanto

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_\varepsilon \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right).$$

Está demonstrada a afirmação. □

Observação 2.7. *Na Seção 2.3, as relações entre os resultados provados nos Teoremas 2.4, 2.6 e as estimativas já conhecidas para o caso Gevrey são melhor elucidadas.*

Observação 2.8. *Para qualquer $t > 0$ fixado,*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{t^n}{m_n \cdot n!}\right) = 0,$$

visto que o numerador possui crescimento polinomial, enquanto o denominador tem crescimento ao menos fatorial. Além disso, para o mesmo t,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{t^n}{m_n \cdot n!}\right) \geq \left(\frac{t^0}{m_0 \cdot 0!}\right) = 1.$$

Isto nos mostra que $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\dfrac{t^n}{m_n \cdot n!}\right)$ é sempre assumido, de fato, para algum $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Com um argumento do mesmo estilo, prova-se que $\inf_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\dfrac{m_n \cdot n!}{t^n}\right)$ é assumido por algum n_1 em N_0, e assim

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{t^n}{m_n \cdot n!}\right)\right]^{-1} = \inf_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{t^n}\right).$$

O próximo passo é provar uma versão do Teorema 2.4 para ultradistribuições. Para tal, não obstante, é necessário antes definir a noção de convergência em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Definição 2.9. *Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e u uma ultradistribuição. Diremos que $u_n \to u$ no espaço se*

$$\langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N).$$

Lema 2.10. *Considere* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$*, tal que* $\langle u_n,\varphi\rangle$ *é uma sequência de Cauchy para toda* $\varphi\in\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$*. Com tais hipóteses, existe* $u\in\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ *tal que*

$$\lim\langle u_n,\varphi\rangle=\langle u,\varphi\rangle,\ \ \varphi\in\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N).$$

Demonstração. Seja $u:\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\to\mathbb{C}$ a aplicação dada por $\langle u,\varphi\rangle=\lim\langle u_n,\varphi\rangle$. O limite existe, pela completude de $\mathbb{C}$, e a linearidade é imediata. Resta-nos verificar a continuidade; suponha $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ convergindo para 0. Pelo Teorema 1.36, existe $q\in\mathbb{N}$ de maneira que

$$\varphi_k\in\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N),\ \ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Como u_n é contínuo para cada $n\in\mathbb{N}$, inferimos que $u_n\big|_{\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)}$ é contínuo. Dada $\psi\in\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)$, $\langle u_n,\psi\rangle$ é sequência de Cauchy e portanto limitada. Isto é, existe $L>0$;

$$|\langle u_n,\psi\rangle|\le L,\ \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Pelo Teorema de Banach-Steinhaus, existe $M>0$ satisfazendo

$$|\langle u_n,\psi\rangle|\le M\cdot\|\psi\|_{\mathscr{M},h_q},\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall\psi\in\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N).$$

Dado $\varepsilon>0$, tomamos $\gamma_k:=\dfrac{2M\varphi_k}{\varepsilon}$. Perceba que $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)$ e $\gamma_k\to 0$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_q}(\mathbb{T}^N)$. Escolhemos $k_0\in\mathbb{N}$ de modo que $\|\gamma_k\|_{\mathscr{M},h_q}\le 1,\forall k\ge k_0$. Então

$$|\langle u_n,\gamma_k\rangle|\le M\ \ \Rightarrow|\langle u_n,\varphi_k\rangle|\le\frac{\varepsilon}{2},\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\ge k_0. \tag{2.6}$$

Já que $\langle u,\varphi_k\rangle=\lim\limits_{n}\langle u_n,\varphi_k\rangle$, para cada $k\ge k_0$, existe $n_k\in\mathbb{N}$ tal que:

$$|\langle u,\varphi_k\rangle-\langle u_{n_k},\varphi_k\rangle|\le\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.7}$$

Unindo (2.6) a (2.7), obtemos para $k\ge k_0$,

$$|\langle u,\varphi_k\rangle|\le|\langle u,\varphi_k\rangle-\langle u_{n_k},\varphi_k\rangle|+|\langle u_{n_k},\varphi_k\rangle|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ou seja, $\langle u,\varphi_k\rangle\to 0$, como pretendíamos provar. □

Teorema 2.11. *Seja* $\{a_\xi\}_{\xi\in\mathbb{Z}^N}$ *uma sequência em* $\mathbb{C}$ *tal que, para todo* $\varepsilon>0$*, existe* $C_\varepsilon>0$ *de modo que*

$$|a_\xi|\le C_\varepsilon\cdot\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right),\ \ \forall\xi\in\mathbb{Z}^N.$$

Considere $u=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}a_\xi\cdot e^{ix\xi}$ *o funcional que age da seguinte maneira em* $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$*:*

$$\langle u,\varphi\rangle=\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{T}^N}\sum_{|\xi|\le j}a_\xi\cdot e^{ix\xi}\cdot\varphi(x)dx,\ \ \forall\varphi\in\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N).$$

Então u *é um elemento de* $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ *e* $\hat{u}(\xi)=a_\xi$*.*

Demonstração. Definimos $s_j(x) = \sum_{|\xi|\leq j} a_\xi \cdot e^{ix\xi}$, para cada j natural. Provaremos que, para qualquer $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, a sequência

$$\langle s_j, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{T}^N} \sum_{|\xi|\leq j} a_\xi \cdot e^{ix\xi} \cdot \varphi(x)dx = \sum_{|\xi|\leq j} a_\xi \cdot \int_{\mathbb{T}^N} e^{ix\xi} \cdot \varphi(x)dx$$

é de Cauchy em $\mathbb{C}$. Para tal, tome $m, k \in \mathbb{N}$, com $m > k$. Dada $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$,

$$\begin{aligned}\langle s_m - s_k, \varphi\rangle &= \sum_{k+1\leq|\xi|\leq m} a_\xi \int_{\mathbb{T}^N} e^{ix\xi}\varphi(x)\\ &= (2\pi)^N \sum_{k+1\leq|\xi|\leq m} a_\xi \cdot \hat{\varphi}(-\xi),\end{aligned}$$

e por conseguinte

$$|\langle s_m - s_k, \varphi\rangle| \leq (2\pi)^N \sum_{k+1\leq|\xi|\leq m} |a_\xi| \cdot |\hat{\varphi}(-\xi)|. \tag{2.8}$$

Fixado $\xi \in \mathbb{Z}^N$, temos

$$\begin{aligned}|a_\xi| \cdot |\hat{\varphi}(-\xi)| &\leq C_\varepsilon \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right) \cdot |\hat{\varphi}(-\xi)|\\ &\leq C_\varepsilon \cdot \left(\frac{\varepsilon^{n_0} \cdot (1+|\xi|)^{n_0}}{m_{n_0} \cdot n_0!}\right) \cdot |\hat{\varphi}(-\xi)|,\end{aligned}$$

para algum n_0 que, a priori, depende de ε e ξ. Seguimos adiante, aplicando o Teorema 2.4 e as Observações 1.28, 1.29:

$$\begin{aligned}|a_\xi| \cdot |\hat{\varphi}(-\xi)| &\leq \left[C_\varepsilon \cdot \left(\frac{\varepsilon^{n_0} \cdot (1+|\xi|)^{n_0}}{m_{n_0} \cdot n_0!}\right)\right] \cdot C_1 \cdot \frac{m_{(n_0+2N)} \cdot (n_0+2N)!}{\delta^{n_0+2N} \cdot (1+|\xi|)^{n_0+2N}}\\ &\leq \left(\frac{C_\varepsilon \cdot C_1}{\delta^{2N}}\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{n_0} \cdot \frac{m_{(n_0+2N)}}{m_{n_0}} \cdot \frac{(n_0+2N)!}{n_0!} \cdot \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}\\ &\leq \left(\frac{C_\varepsilon \cdot C_1}{\delta^{2N}}\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon \cdot B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}}}{\delta}\right)^{n_0} \cdot \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}.\end{aligned}$$

Escolhemos $\varepsilon = \dfrac{\delta}{C_{\{2N\}} \cdot B_{\{2N\}}}$; se $C_2 = \left(\dfrac{C_\varepsilon \cdot C_1}{\delta^{2N}}\right)$,

$$|a_\xi| \cdot |\hat{\varphi}(-\xi)| \leq C_2 \cdot \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N. \tag{2.9}$$

Aliando (2.8) a (2.9), deduzimos que

$$|\langle s_m - s_k, \varphi\rangle| \leq (2\pi)^N C_2 \sum_{k+1\leq|\xi|\leq m} \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}.$$

Como a série do lado direito converge, $\lim_{k\to\infty} |\langle s_m - s_k, \varphi\rangle| = 0$. Por conseguinte, $\langle s_j, \varphi\rangle$ é de Cauchy para toda $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Pelo Lema 2.10, $\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} a_\xi \cdot e^{ix\xi}$ é de fato uma ultradistribuição.

Provemos por fim que $\hat{u}(\xi) = a_\xi$. Com efeito,

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \cdot \langle u, e^{-ix\xi} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \cdot \lim_{j\to\infty} \sum_{|\eta|\leq j} a_\eta \int_{\mathbb{T}^N} e^{ix\eta} e^{-ix\xi} dx = a_\xi,$$

concluindo nossa prova. □

Teorema 2.12. *Fixe $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Então*

$$u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \hat{u}(\xi) \cdot e^{ix\xi},$$

com convergência em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Unindo os Teoremas 2.6 e 2.11, concluímos que

$$\tilde{u} := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \hat{u}(\xi) \cdot e^{ix\xi}$$

é elemento de $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Resta-nos verificar que $u = \tilde{u}$. Fixe $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$; assim como no Teorema 2.4, definimos $S_k\varphi(x) = \sum_{|\xi|\leq k} \hat{\varphi}(\xi) \cdot e^{ix\xi}$. Vimos que $S_k\varphi \to \varphi$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$; consequentemente,

$$\begin{aligned}
\langle u, \varphi \rangle &= \lim_k \langle u, S_k\varphi \rangle \\
&= \lim_k \sum_{|\xi|\leq k} \langle u, \hat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} \rangle \\
&= \lim_k \sum_{|\xi|\leq k} \hat{\varphi}(\xi) \langle u, e^{ix\xi} \rangle
\end{aligned}$$

Como $\mathscr{F}(\tilde{u})(\xi) = \mathscr{F}(u)(\xi)$, temos que $\langle \tilde{u}, e^{-ix\xi} \rangle = \langle u, e^{-ix\xi} \rangle$, para qualquer $\xi \in \mathbb{Z}^N$. Logo

$$\begin{aligned}
\langle u, \varphi \rangle &= \lim_k \sum_{|\xi|\leq k} \hat{\varphi}(\xi) \cdot \langle u, e^{ix\xi} \rangle \\
&= \lim_k \sum_{|\xi|\leq k} \langle \tilde{u}, \hat{\varphi}(\xi) \cdot e^{ix\xi} \rangle \\
&= \langle \tilde{u}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Concluímos assim que $u = \tilde{u}$. □

Nosso objetivo final nesta seção é provar uma recíproca do Teorema 2.4. Isto é, mostrar que se $v \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é uma ultradistribuição cujos coeficientes de Fourier possuem decaimento análogo ao das funções em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, será de fato um elemento do espaço.

Teorema 2.13. *Seja* $\{b_\xi\}_{\xi\in\mathbb{Z}^N}$ *uma sequência de números complexos e suponha que existam de* $C, \delta > 0$, *de maneira que*

$$|b_\xi| \leq C \cdot \inf_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^n} \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N. \tag{2.10}$$

Então existe $\psi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ *de modo que*

$$\psi(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} b_\xi \cdot e^{ix\xi},$$

com convergência em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. *Além disso,* $\widehat{\psi}(\xi) = b_\xi$.

Demonstração. Definimos primeiramente

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{T}^N &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} b_\xi \cdot e^{ix\xi}. \end{aligned}$$

Pela estimativa (2.10), decorre da teoria clássica de Série de Fourier que $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, com convergência no espaço. Resta-nos verificar que $\psi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e a convergência no subespaço. Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $D^\alpha\psi(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \xi^\alpha \cdot b_\xi \cdot e^{ix\xi}$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} |D^\alpha\psi(x)| &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} (1+|\xi|)^{|\alpha|} \cdot |b_\xi| \\ &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \left(C \cdot \frac{m_{|\alpha|+2N} \cdot (|\alpha|+2N)!}{\delta^{|\alpha|+2N}} \right) \cdot \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}} \end{aligned}$$

Separando o produto de maneira conveniente,

$$\begin{aligned} |D^\alpha\psi(x)| &\leq \left(C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{2N} \cdot \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{|\alpha|} \cdot \underbrace{\left(C_{\{2N\}}^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \right)}_{\text{Observação } 1.28} \cdot \underbrace{\left({B_{\{2N\}}}^{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \right)}_{\text{Observação } 1.29} \\ &\leq \left(C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{2N} \cdot \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}} \right) \cdot \left(\underbrace{\frac{C_{\{2N\}} \cdot B_{\{2N\}}}{\delta}}_{:=h_1} \right)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \end{aligned}$$

o que mostra que $\psi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_1}(\mathbb{T}^N)$.

A fim de provar a convergência, seja $S_j\psi(x) = \sum_{|\xi|\leq j} b_\xi \cdot e^{ix\xi}$, para cada j natural. Note que a desigualdade acima também vale para cada S_j. Provaremos que $S_j\psi \to \psi$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h_1}(\mathbb{T}^N)$. Com efeito, aplicando as mesmas estimativas utilizadas anteriormente,

$$|D^\alpha(\psi - S_j\psi)(x)| \leq \left(C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{2N} \cdot \sum_{|\xi|\geq j+1} \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}} \right) \cdot \left(\frac{C_{\{2N\}} \cdot B_{\{2N\}}}{\delta} \right)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!.$$

Consequentemente, $\lim\limits_{j\to\infty} \|\psi - S_j\psi\|_{\mathscr{M},h_1} = 0 \Rightarrow S_j\psi \to \psi$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. $\square$

Corolário 2.14. *Dada $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, suponha que existam $C, \delta > 0$ tais que:*

$$|\hat{u}(\xi)| \le C \cdot \inf_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^n} \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Então $u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

2.3 Função Peso

Nesta seção, associaremos a uma sequência peso $\mathscr{M}$ uma **função peso**, que será denotada $\omega_{\mathscr{M}}$. Para que o leitor entenda a motivação de sua definição, analisaremos brevemente alguns resultados provados na Seção 2.2.

Através do Teorema 2.4 e do Corolário 2.14, vimos que um elemento $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ pertence a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, existirem $C, \delta > 0$ tais que

$$|\hat{u}(\xi)| \le C \cdot \inf_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^n} \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.6, se $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, dado $\varepsilon > 0$ é possível encontrar $C_\varepsilon > 0$ de modo que

$$|\hat{u}(\xi)| \le C_\varepsilon \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{[\varepsilon \cdot (1+|\xi|)]^n}{m_n \cdot n!} \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Ou seja, podemos reescrever o Teorema 2.4, afirmando que existem $C, \varepsilon > 0$ tais que

$$|\hat{u}(\xi)| \le C \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{[\varepsilon \cdot (1+|\xi|)]^n}{m_n \cdot n!} \right)^{-1}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Definição 2.15. *Dada $\mathscr{M}$ uma sequência peso, definimos a* função peso *$\omega_{\mathscr{M}}$ da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \omega_{\mathscr{M}} : [0,+\infty) &\to [0,+\infty) \\ t &\mapsto \begin{cases} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \log \left(\dfrac{t^n}{m_n \cdot n!} \right), & \text{se } t > 0. \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposição 2.16. *Seja $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ de modo que*

$$|\hat{u}(\xi)| \le C_\varepsilon \cdot e^{\omega_{\mathscr{M}}(\varepsilon\cdot(1+|\xi|))}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Mais ainda, $u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, existirem $C, \delta > 0$ tais que

$$|\hat{u}(\xi)| \le C \cdot e^{-\omega_{\mathscr{M}}(|\delta|\cdot(1+|\xi|))}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

O leitor habituado com os espaços Gevrey já está acostumado com este tipo de caracterização. Afinal, é conhecido o fato de que se $u \in \mathscr{D}'_s(\mathbb{T}^N)$, então

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, C_\varepsilon > 0; \quad |\hat{u}(\xi)| \leq\ C_\varepsilon \cdot e^{\varepsilon \cdot |\xi|^{1/s}},\ \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Além disso, $u \in \mathcal{G}^s(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se,

$$\exists\, C, \delta > 0; \quad |\hat{u}(\xi)| \leq C \cdot e^{-\delta \cdot |\xi|^{1/s}},\ \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Note que, pela maneira aqui definida, a função associada seria

$$\begin{aligned} \omega_s : [0, +\infty) &\to [0, +\infty) \\ t &\mapsto \begin{cases} \sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} \log \left(\dfrac{t^n}{n!^s} \right), & \text{se } t > 0. \\ 0, & \text{se } t = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mostraremos que neste caso há uma equivalência entre as funções, no seguinte sentido: podemos caracterizar ultradistribuições e funções Gevrey utilizando tanto $e^{t^{1/s}}$ como $e^{\omega_s(t)}$, sem qualquer distinção. Com efeito, para $s = 1$ e $t > 0$,

$$\omega_1(t) = \log \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{t^n}{n!} \right) \leq \log \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) = \log \left(e^t \right) = t.$$

Por outro lado,

$$\frac{t}{2} = \log \left[\exp \left(\frac{t}{2} \right) \right] = \log \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n \cdot n!} \right] \leq \log \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{t^n}{n!} \right) \right] = \log 2 + \omega_1(t).$$

Logo

$$\omega_1(t) \leq t \leq 2 \cdot (\log 2 + \omega_1(t)).$$

Seguimos para o caso em que $s > 1$;

$$\omega_s(t) = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left[\log \left(\frac{t^n}{n!^s} \right) \right] = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left[s \log \left(\frac{t^{n/s}}{n!} \right) \right] = s \log \left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{t^{n/s}}{n!} \right) \right] \leq s \log \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k/s}}{k!} \right]$$

Por conseguinte, $\omega_s(t) \leq s \cdot \log \left(e^{t^{1/s}} \right) = s \cdot t^{1/s}$. Em contrapartida,

$$\begin{aligned} t^{1/s} = s \cdot \left(\frac{t^{1/s}}{s} \right) &= s \cdot \log \left\{ \exp \left[\left(\frac{t^{1/s}}{s} \right) \right] \right\} = s \cdot \log \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k/s}}{s^k \cdot k!} \right] \\ &\leq s \cdot \log \left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{t^{n/s}}{n!} \right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s^k} \right] = \log \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{t^n}{n!^s} \right) + s \cdot \log \left(\frac{1}{1 - s^{-1}} \right). \end{aligned}$$

Deste modo,

$$t^{1/s} - s \cdot \log \left(\frac{1}{1 - s^{-1}} \right) \leq \omega_s(t) \leq s \cdot t^{1/s}.$$

Assim, verificamos a equivalência que pretendíamos comprovar.

Observação 2.17. *Para mais informações sobre as funções peso associadas, recomendamos [40]. Em alguns trabalhos, como [19], classes de funções ultradiferenciáveis são definidas diretamente através de funções peso, satisfazendo certas condições. Em muitos destes casos, é possível extrair uma sequência deste tipo de função, de modo que as definições dadas neste trabalho e no de [19] sejam equivalentes. Não obstante, tal processo nem sempre é possível. Para mais informações, veja [18].*

2.4 Sequências de Crescimento Moderado

Antes de prosseguirmos para Séries Parciais de Fourier, necessitaremos da alteração de uma hipótese imposta nos espaços estudados. Até o momento, foram requeridas três condições para uma sequência peso $\mathscr{M}$:

1. $m_0 = m_1 = 1.$ (1.1)

2. $m_n^2 \leq m_{n-1} \cdot m_{n+1}, \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$ (1.2)

3. Existe $C_{\{1\}} > 1$ de modo que

$$\sup_{j\geq 1} \left(\frac{m_{j+1}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} \leq C_{\{1\}}. \quad (1.14)$$

Não obstante, para algumas provas de resultados fundamentais que aparecerão daqui em diante, será necessária uma troca de hipóteses. Ao invés de (1.14), assumiremos que

$3'$. Existe $H > 1$ de modo que:

$$\sup_{j,k} \left(\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k} \right)^{1/(j+k)} \leq H. \tag{2.11}$$

Observação 2.18. *Uma condição equivalente à (2.11) é denominada "Estabilidade sob Operadores Ultradiferenciáveis" em [40]. Em outros trabalhos, como em [42], é dito que $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ possui "Crescimento Moderado". Esta é a denominação que escolhemos usar neste trabalho.*

Observação 2.19. *Se (2.11) é válida, ao tomarmos $k = 1$, concluímos que*

$$\sup_{j\geq 1} \left(\frac{m_{j+1}}{m_j} \right)^{\frac{1}{j}} \leq H.$$

Isto é, a condição (2.11) implica (1.14). Deste modo, quando apenas a ultima desigualdade for necessária, permaneceremos com a notação utilizada nas Observações 1.28 e 1.29.

Vejamos agora que os Exemplos 1.2, 1.3 e 1.4 satisfazem (2.11). De fato, iniciemos com o caso Gevrey: para $s \geq 1$ arbitrário,

$$\left(\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k}\right) = \left(\frac{(j+k)!}{j! \cdot k!}\right)^{s-1} = \binom{j+k}{k}^{s-1} \leq (2^{s-1})^{j+k}.$$

Por conseguinte, nesta situação,

$$\sup_{j,k} \left(\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k}\right)^{1/(j+k)} \leq 2^{s-1}.$$

Em particular, quando $s = 2$,

$$(j+k)! \leq 2^{j+k} \cdot j! \cdot k!, \quad \forall j, k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.12}$$

Sigamos para o Exemplo 1.3; como a função $\dfrac{\log x}{x}$ é descrescente para $x \geq e$, dados $j, k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k} &= \left[\frac{\log(j+k+e-1)}{\log(j+e-1)}\right]^{\sigma j} \cdot \left[\frac{\log(j+k+e-1)}{\log(k+e-1)}\right]^{\sigma k} \\
&\leq \left[1 + \frac{k}{j+e-1}\right]^{\sigma j} \cdot \left[1 + \frac{j}{k+e-1}\right]^{\sigma k} \\
&\leq e^{\sigma \cdot (j+k)}.
\end{aligned}$$

Logo, $\displaystyle\sup_{j,k} \left(\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k}\right)^{1/(j+k)} \leq e^{\sigma}$.

Por fim, o argumento para o Exemplo 1.4 é bastante semelhante:

$$\begin{aligned}
\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k} &= \left[\frac{\log\left(\log(j+k+e^e-1)\right)}{\log\left(\log(j+e^e-1)\right)}\right]^{\beta j} \cdot \left[\frac{\log\left(\log(j+k+e^e-1)\right)}{\log\left(\log(k+e^e-1)\right)}\right]^{\beta k} \\
&\leq \left[\frac{\log(j+k+e^e-1)}{\log(j+e^e-1)}\right]^{\beta j} \cdot \left[\frac{\log(j+k+e^e-1)}{\log(k+e^e-1)}\right]^{\beta k} \\
&\leq \left[1 + \frac{k}{j+e^e-1}\right]^{\beta j} \cdot \left[1 + \frac{j}{k+e^e-1}\right]^{\beta k} \\
&\leq e^{\beta \cdot (j+k)}
\end{aligned}$$

e assim $\displaystyle\sup_{j,k} \left(\frac{m_{j+k}}{m_j \cdot m_k}\right)^{1/(j+k)} \leq e^{\beta}$.

2.5 Série Parcial de Fourier

Trataremos nesta seção de coeficientes parciais Fourier para elementos de $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Sejam $R, S \in \mathbb{N}$, tais que $R + S = N$; escreveremos $(x, y) \in \mathbb{T}^N$, com $x \in \mathbb{T}^R$ e $Y \in \mathbb{T}^S$.

Fixada $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, considere para cada $x \in \mathbb{T}^R$ a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi_x : \mathbb{T}^S & \to & \mathbb{C} \\ y & \mapsto & \varphi(x,y). \end{array}$$

É imediato que $\varphi_x \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$; decorre do Teorema 2.4 que

$$\varphi(x,y) = \varphi_x(y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} \widehat{\varphi}(x,\eta) \cdot e^{iy\eta}, \tag{2.13}$$

com convergência em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$, no qual

$$\widehat{\varphi}(x,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^S} \int_{\mathbb{T}^S} \varphi_x(y) \cdot e^{-iy\eta} dy = \frac{1}{(2\pi)^S} \int_{\mathbb{T}^S} \varphi(x,y) \cdot e^{-iy\eta} dy.$$

Pelo fato de φ pertencer a $C^\infty(\mathbb{T}^N)$, temos que $\widehat{\varphi}(x,\eta)$ é elemento de $C^\infty(\mathbb{T}^R)$ para cada $\eta \in \mathbb{Z}^S$. Afirmamos também que $\widehat{\varphi}(x,\eta) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$; de fato,

$$\partial_x^\alpha \widehat{\varphi}(x,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^S} \int_{\mathbb{T}^S} \partial_x^\alpha \varphi(x,y) \cdot e^{-iy\eta} dy,$$

o que nos permite inferir que

$$|\partial_x^\alpha \widehat{\varphi}(x,\eta)| \leq \sup_{(x,y) \in \mathbb{T}^N} |\partial_x^\alpha \varphi(x,y)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall x \in \mathbb{T}^R, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^R.$$

Provemos uma estimativa mais precisa sobre a função acima.

Teorema 2.20. *Dada $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, é possível encontrar constantes $C_R, h_R, h_S > 0$ de modo que*

$$|\partial_x^\alpha \widehat{\varphi}(x,\eta)| \leq C_R \cdot h_R^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot \inf_{p \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right), \quad \forall x \in \mathbb{T}^R, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^R, \ \forall \eta \in \mathbb{Z}^S. \tag{2.14}$$

Demonstração. Iniciamos com a seguinte observação:

$$\partial_x^\alpha \widehat{\varphi}(x,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^S} \int_{\mathbb{T}^S} \partial_x^\alpha \varphi(x,y) \cdot e^{-iy\eta} dy = \widehat{\partial_x^\alpha \varphi}(x,\eta).$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \partial_x^\alpha \widehat{D_y^\beta \varphi}(x,\eta) &= \frac{1}{(2\pi)^S} \int_{\mathbb{T}^S} \partial_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x,y) \cdot e^{-iy\eta} dy \\ &= \eta^\beta \cdot \frac{1}{(2\pi)^S} \int_{\mathbb{T}^S} \partial_x^\alpha \varphi(x,y) \cdot e^{-iy\eta} dy \\ &= \eta^\beta \cdot \partial_x^\alpha \widehat{\varphi}(x,\eta). \end{aligned}$$

Logo, aplicando (2.11) e (2.12), obtemos

$$
\begin{aligned}
|\eta^{\beta}\cdot\partial_x^{\alpha}\widehat{\varphi}(x,\eta)| &\le \sup_{(x,y)\in\mathbb{T}^N}\left|\partial_x^{\alpha}D_y^{\beta}\varphi(x,y)\right| \\
&\le \|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot h^{|\alpha|+|\beta|}\cdot m_{|\alpha|+|\beta|}\cdot(|\alpha|+|\beta|)! \\
&\le \|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot h^{|\alpha|+|\beta|}\cdot\left(H^{|\alpha|+|\beta|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot m_{|\beta|}\right)\cdot\left(2^{|\alpha|+|\beta|}\cdot|\alpha|!\cdot|\beta|!\right) \\
&\le \|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot\left[(2hH)^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\right]\cdot\left[(2hH)^{|\beta|}\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|!\right].
\end{aligned}
$$

Supondo $\eta\neq 0$, escolhemos $p\in\{1,2,\ldots,N\}$ de modo que $|\eta_p|=\max\limits_{1\le q\le N}|\eta_q|$. Se $\beta=k\cdot e_p$, com e_p sendo o elemento da base canônica,

$$
|\eta|^{2k}=\left(\sum_{j=1}^{N}|\eta_j|^2\right)^{k}\le N^k\cdot|\eta_p|^{2k}\le N^k\cdot\left|\eta^{\beta}\right|^2.
$$

Assim,

$$
|\eta|^{|\beta|}\cdot|\partial_x^{\alpha}\widehat{\varphi}(x,\eta)|\le\|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot\left[(2hH)^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\right]\cdot\left[(2hH\sqrt{N})^{|\beta|}\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|!\right].
$$

Visto que $(1+|\eta|)\le 2|\eta|$, inferimos que

$$
(1+|\eta|)^k\cdot|\partial_x^{\alpha}\widehat{\varphi}(x,\eta)|\le\|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot\left[(2hH)^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\right]\cdot\left[(4hH\sqrt{N})^{k}\cdot m_k\cdot k!\right],\quad\forall k\in\mathbb{N}.
$$

Ou seja, se $C_R=\|\varphi\|_{\mathscr{M},h}$, $h_R=2hH$ e $h_S=\dfrac{1}{4hH\sqrt{N}}$, temos a desigualdade desejada quando $\eta\neq 0$. Para que a estimativa também abranja o caso $\eta=0$, basta selecionar

$$
C_R=\|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{h_S^p}\right)^{-1}=\|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot\sup_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{h_S^p}{m_p\cdot p!}\right),
$$

encerrando a prova. □

Vimos anteriormente que se φ é elemento de $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, as funções $\widehat{\varphi}(x,\eta)$ pertencem a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$ e possuem comportamento como descrito em (2.14). Apresentemos uma recíproca do resultado anterior.

Teorema 2.21. *Suponha que para cada $\eta\in\mathbb{Z}^S$, exista uma função φ_η em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$ tal que*

$$
|\partial_x^{\alpha}\varphi_\eta(x)|\le C_R\cdot h_R^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\cdot\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{h_S^p\cdot(1+|\eta|)^p}\right),
$$

para todos $x\in\mathbb{T}^R$, $\alpha\in\mathbb{N}_0^R$ e $\eta\in\mathbb{Z}^S$, com C_R, h_R e h_S constantes positivas. Então a função $\varphi:\mathbb{T}^N\to\mathbb{C}$ dada por $\varphi(x,y)=\sum\limits_{\eta\in\mathbb{Z}^S}\varphi_\eta(x)\cdot e^{iy\eta}$ está bem definida, pertence a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e vale a convergência neste espaço.

Demonstração. Verifiquemos que φ está bem definida. De fato,

$$|\varphi(x,y)| \leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} |\varphi_\eta(x)| \leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} C_R \frac{m_{2N}(2N)!}{h_S^{2N}(1+|\eta|)^{2N}} \leq \frac{C_R m_{2N}(2N)!}{h_S^{2N}} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}\varphi(x,y)\right| &\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} |\partial_x^{\alpha_1}\varphi_\eta(x)| \cdot (1+|\eta|)^{|\alpha_2|} \\
&\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} C_R \cdot h_R^{|\alpha_1|} \cdot m_{|\alpha_1|} \cdot |\alpha_1|! \cdot \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p}\right) \cdot (1+|\eta|)^{|\alpha_2|} \\
&\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} C_R \cdot h_R^{|\alpha_1|} \cdot m_{|\alpha_1|} \cdot |\alpha_1|! \left(\frac{m_{|\alpha_2|+2N} \cdot (|\alpha_2|+2N)!}{h_S^{|\alpha_2|+2N} \cdot (1+|\eta|)^{|\alpha_2|+2N}}\right) \cdot (1+|\eta|)^{|\alpha_2|}.
\end{aligned}$$

Das Observações 1.28, 1.29 e Proposição 1.7, obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}\varphi(x,y)\right| &\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} C_R \cdot h_R^{|\alpha_1|} \cdot m_{|\alpha_1|} \cdot |\alpha_1|! \left(\frac{m_{|\alpha_2|} \cdot |\alpha_2|! \cdot B_{\{2N\}}^{|\alpha_2|} \cdot C_{\{2N\}}^{|\alpha_2|}}{h_S^{|\alpha_2|+2N} \cdot (1+|\eta|)^{2N}}\right) \\
&\leq \frac{C_R}{h_S^{2N}} \cdot h_R^{|\alpha_1|} \left(\frac{B_{\{2N\}}C_{\{2N\}}}{h_S}\right)^{|\alpha_2|} m_{|\alpha_1+\alpha_2|}(|\alpha_1+\alpha_2|)! \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, se $C = \dfrac{C_R}{h_S^{2N}} \displaystyle\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}$ e $h = \max\left\{h_R, \dfrac{B_{\{2N\}}C_{\{2N\}}}{h_S}\right\}$, concluímos que

$$\left|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}\varphi(x,y)\right| \leq C \cdot h^{|\alpha_1+\alpha_2|} \cdot m_{|\alpha_1+\alpha_2|} \cdot (|\alpha_1+\alpha_2|)!,$$

o que mostra que $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Resta-nos verificar a convergência: considere para cada $k \in \mathbb{N}_0$ a soma parcial

$$S_k\varphi(x,y) = \sum_{|\eta|\leq k} \varphi_\eta(x) \cdot e^{iy\eta}.$$

Queremos mostrar que $S_k\varphi \to \varphi$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Analogamente ao que fizemos no início da demonstração, temos

$$\begin{aligned}
\left|\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2}\left(S_k\varphi - \varphi\right)(x,y)\right| &\leq \sum_{|\eta|\geq k+1} |\partial_x^{\alpha_1}\varphi_\eta(x)| \cdot (1+|\eta|)^{|\alpha_2|} \\
&\leq \left[\frac{C_R}{h_S^{2N}} \cdot \sum_{|\eta|\geq k+1} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}\right] \cdot h^{|\alpha_1+\alpha_2|} \cdot m_{|\alpha_1+\alpha_2|} \cdot (|\alpha_1+\alpha_2|)!.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, fazendo $k \to \infty$, segue que $S_k\varphi \to \varphi$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, como pretendíamos provar. $\square$

Bem estabelecida a Série Parcial de Fourier para funções ultradiferenciáveis, o próximo passo é desenvolver o conceito para ultradistribuições. Fixada $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, definimos para cada ψ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$ fixada o seguinte funcional:

$$\begin{aligned} u_\psi : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle u, \psi \otimes \varphi \rangle, \end{aligned}$$

no qual $\psi \otimes \varphi(x,y) = \psi(x) \cdot \varphi(y)$.

Lema 2.22. *Dadas $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\psi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$, temos que $u_\psi \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$.*

Demonstração. A linearidade decorre imediatamente da definição; provemos a continuidade. Seja $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$ convergindo para 0. Caso provemos que $\psi \otimes \varphi_n \to 0$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, a afirmação será consequência da continuidade de u.

Como $\varphi_n \to 0$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^S)$, pelo Teorema 1.36 encontramos $h_S > 0$ de modo que

$$\varphi_n \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_S}(\mathbb{T}^S),\ \forall n \in \mathbb{N};\ \ \|\varphi_n\|_{\mathscr{M},h_S} \to 0.$$

Por outro lado, existe $h_R > 0$ de forma que $\psi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h_R}(\mathbb{T}^R)$. Assim, se $h = \max\{h_R, h_S\}$,

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y)\in\mathbb{T}^N} \left|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta (\psi(x)\cdot\varphi(y))\right| &\leq \sup_{x\in\mathbb{T}^R} |\partial_x^\alpha \psi(x)| \cdot \sup_{y\in\mathbb{T}^S} \left|\partial_y^\beta \varphi(y)\right| \\ &\leq \|\psi\|_{\mathscr{M},h_R} \cdot h_R^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot \|\varphi_n\|_{\mathscr{M},h_S} \cdot h_S^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|! \\ &\leq \|\psi\|_{\mathscr{M},h_R} \cdot \|\varphi_n\|_{\mathscr{M},h_S} \cdot h^{|\alpha+\beta|} \cdot m_{|\alpha+\beta|} \cdot |\alpha+\beta|! \end{aligned}$$

Deduzimos assim que

$$\begin{gathered} \psi \otimes \varphi_n \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N),\ \ \forall n \in \mathbb{N}; \\ \|\psi \otimes \varphi_n\|_{\mathscr{M},h} \leq \|\psi\|_{\mathscr{M},h_R} \cdot \|\varphi_n\|_{\mathscr{M},h_S} \to 0. \end{gathered}$$

Está demonstrado o lema. □

Através do Teorema 2.12 e do Lema 2.22, podemos escrever

$$u_\psi = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} \widehat{u_\psi}(\eta) \cdot e^{iy\eta},$$

com $\widehat{u_\psi}(\eta) = \dfrac{1}{(2\pi)^S} \cdot \langle u_\psi, e^{-iy\eta} \rangle = \dfrac{1}{(2\pi)^S} \cdot \langle u, \psi(x) \cdot e^{-iy\eta} \rangle$. Agora, para $\eta \in \mathbb{Z}^S$ fixado, definimos o funcional

$$\langle u_\eta, \psi \rangle = \widehat{u_\psi}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^S} \cdot \langle u, \psi(x) \cdot e^{-iy\eta} \rangle. \tag{2.15}$$

Como a função $e^{-iy\eta}$ é analítica, decorre do Lema 2.22 o seguinte fato:

Lema 2.23. *Dado $\eta \in \mathbb{Z}^S$, o funcional u_η definido em (2.15) pertence a $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$.*

Teorema 2.24. *Seja u um elemento de $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$; então*

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} u_\eta \cdot e^{iy\eta},$$

com convergência em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Além disso, dados $\varepsilon, h > 0$, existe $C_{\varepsilon,h} > 0$ de maneira que

$$|\langle u_\eta, \psi \rangle| \leq C_{\varepsilon,h} \cdot \|\psi\|_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{p \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^p \cdot (1 + |\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right), \tag{2.16}$$

para quaisquer $\eta \in \mathbb{Z}^S$ e $\psi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^R)$.

Demonstração. Seja $\lambda(x, y) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$; associando (2.13) aos Teoremas 2.20 e 2.21, inferimos que

$$\lambda(x, y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^S} \widehat{\lambda}(x, \eta) \cdot e^{i\eta y},$$

com convergência em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\langle u, \lambda \rangle &= \lim_{k \to +\infty} \sum_{|\eta| \leq k} \langle u, \widehat{\lambda}(x, \eta) \cdot e^{iy\eta} \rangle \\
&= \lim_{k \to +\infty} \sum_{|\eta| \leq k} (2\pi)^S \cdot \langle u_{-\eta}, \widehat{\lambda}(x, \eta) \rangle \\
&= \lim_{k \to +\infty} \sum_{|\eta| \leq k} \langle u_\eta, \int_{\mathbb{T}^S} \lambda(x, y) \cdot e^{iy\eta} dy \rangle \\
&= \lim_{k \to +\infty} \sum_{|\eta| \leq k} \langle u_\eta \cdot e^{iy\eta}, \lambda \rangle.
\end{aligned}$$

Resta-nos, portanto, verificar (2.16). Para tal, fixemos $\varepsilon, h > 0$; nos utilizando do Teorema 2.2, encontramos C_ε tal que

$$\begin{aligned}
|\langle u_\eta, \psi \rangle| &\leq \frac{C_\varepsilon}{(2\pi)^S} \cdot \sup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{T}^N \\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^N}} \left(\frac{\left| \partial_x^\alpha \partial_y^\beta \left(\psi(x) \cdot e^{-iy\eta} \right) \right| \cdot \varepsilon^{|\alpha+\beta|}}{m_{|\alpha+\beta|} \cdot (|\alpha+\beta|)!} \right) \qquad (2.17) \\
&\leq \frac{C_\varepsilon}{(2\pi)^S} \cdot \sup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{T}^N \\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^N}} \left(\frac{|\partial_x^\alpha \psi(x)| \cdot \left| \partial_y^\beta e^{-iy\eta} \right| \cdot \varepsilon^{|\alpha|} \cdot \varepsilon^{|\beta|}}{m_{|\alpha|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\alpha|! \cdot |\beta|!} \right) \\
&\leq \frac{C_\varepsilon}{(2\pi)^S} \cdot \|\psi\|_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{\substack{(x,y) \in \mathbb{T}^N \\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^N}} \left(\frac{h^{|\alpha|} \cdot (1 + |\eta|)^{|\beta|} \cdot \varepsilon^{|\alpha|} \cdot \varepsilon^{|\beta|}}{m_{|\beta|} \cdot |\beta|!} \right).
\end{aligned}$$

Suponha por um momento que $\varepsilon \leq \dfrac{1}{h}$; neste caso,

$$|\langle u_\eta, \psi \rangle| \leq \frac{C_\varepsilon}{(2\pi)^S} \cdot \|\psi\|_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^S} \left(\frac{\varepsilon^{|\beta|} \cdot (1 + |\eta|)^{|\beta|}}{m_{|\beta|} \cdot |\beta|!} \right)$$

$$\leq \frac{C_\varepsilon}{(2\pi)^S} \cdot \|\psi\|_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right).$$

Dessa forma, se $\varepsilon \leq \dfrac{1}{h}$ tomamos $C_{h,\varepsilon} = \dfrac{C_\varepsilon}{(2\pi)^S}$. Caso contrário, temos $\varepsilon > \dfrac{1}{h}$ e podemos aplicar (2.17) do seguinte modo:

$$|\langle u_\eta, \psi\rangle| \leq \frac{C_{1/h}}{(2\pi)^S} \cdot \|\psi\|_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{(1+|\eta|)^p}{h^p \cdot m_p \cdot p!} \right) \leq \frac{C_{1/h}}{(2\pi)^S} \cdot \|\psi\|_{\mathscr{M},h} \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right).$$

Assim, se $\varepsilon > \dfrac{1}{h}$ selecionamos $C_{h,\varepsilon} = \dfrac{C_{1/h}}{(2\pi)^S}$, o que encerra a demonstração. □

Associando o Lema 2.23 ao Teorema 2.24, inferimos o seguinte: se $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, o funcional u_η definido em (2.15) pertence a $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$, para cada $\eta \in \mathbb{Z}^S$. Além disso, vale uma estimativa como em (2.16) e $u = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} u_\eta \cdot e^{iy\eta}$.

O que pretendemos mostrar a seguir é uma recíproca desta conclusão. Para tal, precisaremos antes de um resultado provado em [40], que reforça a necessidade da hipótese de crescimento moderado para nossas sequências.

Lema 2.25. *(Proposição 3.6 de [40]) Considere $\mathscr{M}$ uma sequência peso satisfazendo* (1.1), (1.2) *e* (2.11). *Com tais hipóteses,*

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\rho^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^2 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\rho^n \cdot H^n}{m_n \cdot n!} \right), \quad \forall \rho > 0.$$

Teorema 2.26. *Seja $\{u_\eta\}_{\eta\in\mathbb{Z}^S}$ uma sequência de elementos em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^R)$, satisfazendo a seguinte condição: dados $\varepsilon, h > 0$, existe $C_{\varepsilon,h} > 0$ de modo que*

$$|\langle u_\eta, \psi\rangle| \leq C_{\varepsilon,h} \cdot \|\psi\|_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\varepsilon^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right), \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}^S, \ \ \forall \psi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^R).$$

Então $u := \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^S} u_\eta \cdot e^{iy\eta}$ pertence a $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Fixemos $\lambda(x,y) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$; por definição, existe $h > 0$ de modo que $\lambda \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$. Consideramos então

$$s_j = \sum_{|\eta|\leq j} u_\eta \cdot e^{iy\eta}.$$

Note que $\langle s_j, \lambda\rangle = \sum_{|\eta|\leq j} \langle u_\eta \cdot e^{iy\eta}, \lambda\rangle = \sum_{|\eta|\leq j} \langle u_\eta, \int_{\mathbb{T}^S} \lambda(x,y) \cdot e^{iy\eta} dy\rangle$. Por conseguinte, se $k \in \mathbb{N}$, utilizamos a hipótese e o Teorema 2.20 da seguinte forma:

$$|\langle s_{k+j} - s_j, \lambda\rangle| \leq (2\pi)^S \sum_{j<|\eta|\leq j+k} C_{\delta,h_R} \cdot \left\| \widehat{\lambda}(\cdot, -\eta) \right\|_{\mathscr{M},h_R} \cdot \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\delta^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right)$$

$$\leq \sum_{j<|\eta|\leq j+k} C'_{\delta,h_R} \cdot \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right) \cdot \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\delta^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right),$$

com $C'_{\delta,h_R} = (2\pi)^S \cdot C_{\delta,h_R} \cdot \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{h_S^p}{m_p \cdot p!} \right) \cdot \|\lambda\|_{\mathscr{M},h}$ e $\delta > 0$ que ainda será escolhido.

Tomando $\delta = \dfrac{h_S}{H}$, com H dado em (2.11), segue do Lema 2.25 que

$$\sup_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p}{H^p \cdot m_p \cdot p!} \right) \leq \left[\sup_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p}{m_p \cdot p!} \right) \right]^{1/2} = \left[\inf_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right) \right]^{-1/2}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} |\langle s_{k+j} - s_j, \lambda \rangle| &\leq \sum_{j<|\eta|\leq j+k} C'_{\delta,h_R} \left(\inf_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{m_p \cdot p!}{h_S^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{j<|\eta|\leq j+k} C'_{\delta,h_R} \left(\frac{(m_{4N} \cdot 4N!)^{1/2}}{h_S^{2N} \cdot (1+|\eta|)^{2N}} \right) \\ &\leq C \sum_{j<|\eta|\leq j+k} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}. \end{aligned}$$

Portanto $\langle s_j, \lambda \rangle$ é sequência de Cauchy. o que nos permite concluir que $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, pelo Lema 2.10. $\square$

Capítulo 3

Sistemas de Operadores de Coeficientes Constantes e uma Classe de Sistemas de Campos Reais

Desenvolvida a Análise de Fourier, temos agora repertório para abordar diversos problemas relacionados a equações diferenciais parciais lineares em nosso contexto de classes de funções ultradiferenciáveis. Neste capítulo, lidamos inicialmente com a hipoeliticidade global para sistemas de operadores cujos coeficientes são constantes; em seguida, encontramos uma aplicação que preserva a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global e leva todo elemento de uma classe de sistemas de campos vetoriais reais a um sistema de coeficientes constantes.

Definição 3.1. *Sejam* $P_1, P_2, \cdots P_k : \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ *operadores contínuos e*

$$P = (P_1, \ldots, P_k)$$

o sistema formado por estes operadores. Diremos que P *é* ***globalmente*** $\mathscr{M}$***-hipoelítico*** *se*

$$u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N),\ f_j \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N),\ P_j u = f_j,\ j = 1, 2, \ldots, k\ \Rightarrow u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N).$$

Observação 3.2. *Note que a nossa definição estende os conceitos de hipoeliticidade global analítica e Gevrey.*

3.1 Sistemas de Operadores de Coeficientes Constantes no toro $\mathbb{T}^N$

Nesta seção, descreveremos $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global para sistemas de operadores diferenciais com coeficientes constantes. Assim como nos casos analítico (veja [30]) e Gevrey (veja [34]), há uma conexão direta entre o comportamento assintótico do símbolo do sistema com a função peso associada a $\mathscr{M}$.

Dados $P_1(D), P_2(D), \dots, P_k(D)$ operadores de coeficientes constantes agindo em $\mathbb{T}^N$, com k natural, caracterizaremos a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global do sistema dado por

$$P_j u = f_j, \quad u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N), \;\; f_j \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N), \;\; j = 1, 2, \dots, k. \tag{3.1}$$

Definição 3.3. *Seja P o sistema descrito em (3.1); definimos seu respectivo **símbolo** do seguinte modo:*

$$P(\xi) := \left(P_1(\xi), P_2(\xi), \dots, P_k(\xi)\right), \;\; \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Denotamos também, para cada $\xi \in \mathbb{Z}^N$, $|P(\xi)| := \max\limits_{1 \leq j \leq k} |P_j(\xi)|$.

Teorema 3.4. *Considere um sistema como em (3.1); o mesmo é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, for possível encontrar $R_\varepsilon > 0$ de maneira que*

$$|P(\xi)| \geq \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N; \; |\xi| \geq R_\varepsilon. \tag{3.2}$$

Demonstração. Iniciamos a prova verificando a suficiência de (3.2): suponha $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ de modo que $P_j(D)u = f_j \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, para $j = 1, 2, \dots, k$. Pelo Teorema 2.4, encontramos $C, \delta > 0$ tais que

$$|\widehat{f_j}(\xi)| \leq C \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right), \;\; \forall \xi \in \mathbb{Z}^N, \;\; j = 1, 2, \dots, k.$$

Segue do Teorema 2.12 que $u = \sum\limits_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{u}(\xi) \cdot e^{ix\xi}$. Tome $\varepsilon = \dfrac{\delta}{H}$ e fixemos $\xi \in \mathbb{Z}$ tal que $|\xi| \geq R_{\delta/H}$. Nesta situação, aplicando o Lema 2.25,

$$\begin{aligned} |\widehat{u}(\xi)| &\leq C \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right) \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{((\delta)/H)^n (1 + |\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \\ &\leq C \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right). \end{aligned}$$

Assim, temos uma desigualdade como no Corolário 2.14 sempre que $|\xi| \geq R_{\delta/H}$, sobrando apenas um número finito de elementos de $\mathbb{Z}^N$. Com um possível aumento de C, obtemos

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right), \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N,$$

de acordo com o queríamos provar.

Resta-nos demonstrar a necessidade de (3.2), o que será feito pela contrapositiva. Negando a hipótese, temos a existência de $\varepsilon > 0$ e uma sequência $\{\xi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{Z}^N$ satisfazendo

$$|P(\xi_m)| < \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi_m|)^n} \right), \ |\xi_m| \geq m, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Definimos $u = \sum_{m \in \mathbb{N}} e^{ix \cdot \xi_m}$; pelo Teorema 2.11, $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Por outro lado, note que u não é dada sequer por uma função integrável, visto que seus coeficientes de Fourier não tendem para zero quando $n \to \infty$ (Lema de Riemann-Lebesgue).

Em contrapartida, se tomamos $P_j(D)u := f_j$, então $f_j = \sum_{m \in \mathbb{N}} P_j(\xi_m) \cdot e^{ix \cdot \xi_m}$. Além disso,

$$|P_j(\xi_m)| \leq |P(\xi_m)| < \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi_m|)^n} \right), \ \ \forall m \in \mathbb{N}, \ \ j = 1, 2, \ldots, k.$$

Empregando o Teorema 2.13, inferimos que $f_j \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, como pretendíamos demonstrar. □

Corolário 3.5. *Sejam $\mathscr{M}$ e $\mathscr{L}$ duas sequências peso distintas, tais que $\mathscr{M} \preceq \mathscr{L}$. Caso um sistema como em 3.1 seja globalmente $\mathscr{L}$-hipoelítico, também será globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.*

Demonstração. Decorre da Definição 1.20 e do Teorema 1.22 que $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{E}_{\mathscr{L}}(\mathbb{T}^N)$ e existe $C \geq 1$ de maneira que

$$m_k \leq C^k \cdot \ell_k, \ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, pelo Teorema 3.4 é possível encontrar R_ε tal que

$$|P(\xi)| \geq \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{C^n \cdot \ell_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N; \ |\xi| \geq R_\varepsilon.$$

Observando que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\left(\frac{C^n \cdot \ell_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right) \geq \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right)$, deduzimos que

$$\inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{C^n \cdot \ell_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right).$$

Por conseguinte,

$$P(\xi) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi|)^n} \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N; \ |\xi| \geq R_\varepsilon.$$

Pelo Teorema 3.4, o sistema (3.1) é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico. □

Corolário 3.6. *Seja $P(D)$ um sistema operadores diferenciais lineares de coeficientes constantes globalmente C^∞-hipoelíticos. Então $P(D)$ é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico, para qualquer sequência peso $\mathscr{M}$.*

Demonstração. A condição de Greenfield-Wallach (veja [31]) implica na existência de números reais $L, k, R > 0$ tais que

$$|P(\xi)| \geq \frac{L}{(1+|\xi|)^k}, \quad |\xi| \geq R.$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar $k \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos

$$R_\varepsilon = \max\left\{R, \ \frac{m_{k+1}\cdot(k+1)!}{L\cdot\varepsilon^{k+1}}\right\}.$$

Assim,

$$|\xi| \geq R_\varepsilon \ \Rightarrow |P(\xi)| \geq \frac{L(1+|\xi|)}{(1+|\xi|)^{k+1}} \geq \frac{m_{k+1}(k+1)!}{\varepsilon^{k+1}(1+|\xi|)^{k+1}} \geq \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n(1+|\xi|)^n}\right),$$

finalizando nossa prova. □

Observação 3.7. *Através dos resultados acima, podemos concluir que, para sistemas de operadores lineares com coeficientes constantes, temos*

$$C^\infty\text{-}\textit{hipoeliticidade global} \ \Rightarrow \ \mathscr{M}\text{-}\textit{hipoeliticidade global} \Rightarrow \ C^\omega\text{-}\textit{hipoeliticidade global},$$

para qualquer sequência peso $\mathscr{M}$.

3.2 Campos de Greenfield-Wallach

De maneira análoga ao que foi feito em [29], [30] e [31], aplicando o Teorema 3.4 para a situação em que temos apenas um campo vetorial, iremos estudar a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global de campos em $\mathbb{T}^2$ dados por

$$P_\alpha(D_1, D_2) = D_1 - \alpha D_2, \qquad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{3.4}$$

Em todos os trabalhos citados, os autores fazem conexões entre a hipoeliticidade global do operador (em suas respectivas classes de funções) a propriedades númericas de α. Pretendemos aqui fazer o mesmo para nossas classes de estudo.

Iniciamos a análise ressaltando o seguinte fato: se α possui parte imaginária não nula, P_α é elítico e por conseguinte globalmente C^∞-hipoelítico. Neste caso, decorre do Corolário 3.6 que P_α é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico. Consequentemente, os exemplos mais interessantes serão aqueles em que α é real.

Definição 3.8. *Diremos que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é **$\mathscr{M}$-exponencial Liouville** se existir $\varepsilon > 0$ de modo que a desigualdade*

$$|\xi - \alpha\eta| < \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\eta|)^n} \right), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

possui infinitas soluções.

Lema 3.9. *$P_\alpha(D_1, D_2)$ será globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico se, e somente se, α for irracional e **não** $\mathscr{M}$-exponencial Liouville.*

Demonstração. Note que o símbolo do operador é dado por

$$P_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{i} \cdot (\xi - \alpha\eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

No caso em que α é racional, é possível obter uma sequência $\{\xi_m, \eta_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $P_\alpha(\xi_m, \eta_m) = 0$. Logo

$$|P_\alpha(\xi_m, \eta_m)| < \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi_m| + |\eta_m|)^n} \right), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Decorre do Teorema 3.4 que $P_\alpha(D_1, D_2)$ não é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.

Prosseguimos para a situação em que α é irracional; suponha α **não** $\mathscr{M}$-exponencial Liouville. Por hipótese, para todo $\varepsilon > 0$, encontramos $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\xi - \alpha\eta| \geq \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\eta|)^n} \right), \quad |\xi| + |\eta| \geq R_\varepsilon.$$

Consequentemente,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists R_\varepsilon > 0; \quad |\xi - \alpha\eta| \geq \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi| + |\eta|)^n} \right), \quad |\xi| + |\eta| \geq R_\varepsilon, \tag{3.5}$$

e deste modo $D_1 - \alpha D_2$ é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico, também pelo Teorema 3.4.

Finalmente, considere P_α globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico; pelo Teorema 3.4 vale (3.5). Nosso objetivo é verificar que α não é $\mathscr{M}$-exponencial Liouville. Para tal, fixamos $\delta > 0$ e tomamos $\varepsilon = \dfrac{\delta}{(|\alpha| + 3)}$. Note bem: se $|\xi - \alpha\eta| \geq 1$, temos imediatamente

$$|\xi - \alpha\eta| \geq 1 \geq \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\eta|)^n} \right).$$

Caso contrário, $|\xi| - |\alpha| \cdot |\eta| \leq 1 \ \Rightarrow |\xi| \leq |\alpha| \cdot |\eta| + 1$. Assim, se $|\xi| + |\eta| \geq R_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |\xi - \alpha\eta| &\geq \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi| + |\eta|)^n} \right) \\ &\geq \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (2 + |\alpha| \cdot |\eta| + |\eta|)^n} \right) \end{aligned}$$

$$\geq \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(|\alpha|+3)^n\cdot|\eta|^n}\right)$$
$$\geq \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\delta^n\cdot|\eta|^n}\right)$$
$$\geq \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\delta^n\cdot(1+|\eta|)^n}\right),$$

visto que podemos considerar $|\eta|\neq 0$. Assim, α não é $\mathscr{M}$-exponencial Liouville. $\square$

No Corolário 3.5, demonstramos que se $\mathscr{M},\mathscr{L}$ são duas sequências peso e $\mathscr{M}\preceq\mathscr{L}$, o fato de P_α ser globalmente $\mathscr{L}$-hipoelítico implicará na $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global do mesmo campo. Em contrapartida, em [29] os autores provam a seguinte afirmação: dados $r,s\geq 1$ distintos, é possível encontrar $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ de maneira que P_α é globalmente $\mathcal{G}^r$-hipoelítico, mas não globalmente $\mathcal{G}^s$-hipoelítico. Nosso propósito é estender de certo modo este resultado para as classes funções ultradiferenciáveis estudadas neste trabalho.

Definição 3.10. *Sejam $\mathscr{L}=\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\mathscr{M}=\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sequências peso quaisquer. Denotaremos por $\mathscr{M}\prec\mathscr{L}$ quando $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\dfrac{m_k}{\ell_k}\right)^{1/k}=0$.*

Observação 3.11. *No caso em que $\mathscr{M}\prec\mathscr{L}$, temos $\mathscr{M}\preceq\mathscr{L}$ e $\mathscr{L}\npreceq\mathscr{M}$.*

Lema 3.12. *Se $\mathscr{M}\prec\mathscr{L}$, então* $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\left[\sup\limits_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\dfrac{t^p}{\ell_p\cdot p!}\right)\right]}{\left[\sup\limits_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\dfrac{\delta^p\cdot t^p}{m_p\cdot p!}\right)\right]}=0$, *para qualquer $\delta>0$.*

Demonstração. Seja H a constante proveniente de (2.11); escolhemos q de maneira que $\dfrac{1}{H^q}\leq\delta$. Como $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\dfrac{\ell_k}{m_k}\right)^{1/k}=+\infty$, existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{\ell_k}{m_k}\right)^{1/k}\geq H^{q+1},\quad \forall k\geq k_0, \tag{3.6}$$

Consideremos $t\geq\ell_{k_0}\cdot(k_0!)$. Se $s<k_0$,

$$\frac{t^{k_0}}{\ell_{k_0}\cdot k_0!}\div\frac{t^s}{\ell_s\cdot s!}=t^{k_0-s}\cdot\frac{\ell_s\cdot s!}{\ell_{k_0}\cdot k_0!}\geq[\ell_{k_0}\cdot k_0!]^{k_0-s-1}\cdot\ell_s\cdot s!>1,$$

e assim $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\dfrac{t^p}{\ell_p\cdot p!}\right)=\sup\limits_{p\geq k_0}\left(\dfrac{t^p}{\ell_p\cdot p!}\right)$. Desta forma, se $t\geq\ell_{k_0}\cdot(k_0!)$, segue de (3.6) que

$$\sup_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{t^p}{\ell_p\cdot p!}\right)=\sup_{p\geq k_0}\left(\frac{t^p}{\ell_p\cdot p!}\right)\leq\sup_{p\geq k_0}\left(\frac{t^p}{(H^{q+1})^p\cdot m_p\cdot p!}\right)\leq\sup_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{t^p}{(H^{q+1})^p\cdot m_p\cdot p!}\right). \tag{3.7}$$

Pelo Lema 2.25, pode-se verificar que

$$\left[\sup_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{t^p}{(H^{q+1})^p\cdot m_p\cdot p!}\right)\right]\leq\left[\sup_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{t^p}{(H^q)^p\cdot m_p\cdot p!}\right)\right]^{1/2}\leq\left[\sup_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\delta^p\cdot t^p}{m_p\cdot p!}\right)\right]^{1/2}. \tag{3.8}$$

Associando (3.7) a (3.8), inferimos que

$$\frac{\sup\limits_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\dfrac{t^p}{\ell_p\cdot p!}\right)}{\sup\limits_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\dfrac{(\delta t)^p}{m_p\cdot p!}\right)}\leq\left[\sup_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\delta^p\cdot t^p}{m_p\cdot p!}\right)\right]^{-1/2}\leq\frac{\sqrt{m_2\cdot 2}}{\delta t},$$

o que demonstra a proposição.

□

Teorema 3.13. *Considere $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ sequências peso tais que $\mathscr{M}\prec\mathscr{L}$, e P_α o operador definido em (3.4). Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se P_α for globalmente $\mathscr{L}$-hipoelítico, também será globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.*
2. *É possível encontrar $\beta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ de modo que P_β é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico, mas **não** globalmente $\mathscr{L}$-hipoelítico.*

Demonstração. A prova de 1. decorre imediatamente do Corolário 3.5 e da Observação 3.11. Resta-nos demonstrar 2, o que será feito com o uso da teoria de frações contínuas, utilizando como base [32].

Nosso objetivo é construir $\beta=[a_0,a_1,\dots,a_n,\dots]$ no intervalo $(0,1)$, escolhendo uma sequência adequada $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, de modo que as hipóteses do enunciado sejam satisfeitas. Seguindo [32] (Teo. 149), definimos as sequências $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ por

$$\begin{aligned}p_0&=0,\quad p_1=1,\quad p_n=a_n\cdot p_{n-1}+p_{n-2}\quad(2\leq n),\\ q_0&=1,\quad q_1=0,\quad q_n=a_n\cdot q_{n-1}+q_{n-2}\quad(2\leq n).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Além disso, construímos por recorrência $\{a'_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ da seguinte maneira (Sec. 10.9):

$$a'_n=[a_n,a_{n+1},\dots],\quad\forall n\in\mathbb{N}_0.$$

São verdadeiras as seguintes afirmações (mais uma vez utilizando [32]):

I. (Teo 155, 156). Se $n>3$, temos $q_{n+1}\geq q_n\geq n$. Assim, $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=+\infty$.

II. (Teo 168). Para todo $n\in\mathbb{N}_0$, $\lfloor a'_n\rfloor=a_n$, no qual $\lfloor.\rfloor$ é a função piso, isto é,

$$\lfloor x\rfloor:=\max\{m\in\mathbb{Z};m\leq x\}.$$

III. (Teo 171). Dado $n \geq 1$, $|p_n - \beta \cdot q_n| = \dfrac{1}{a'_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}}$. Por conseguinte, a sequência $|p_n - \beta \cdot q_n|$ é estritamente decrescente, com limite igual a 0.

IV. (Teo 182). Considere $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, de modo que $mdc\,(p, q) = 1$ e $q_k \leq q < q_{k+1}$. Com tais hipóteses, vale

$$|p - q \cdot \beta| \geq |p_k - q_k \cdot \beta| > |p_{k+1} - q_{k+1} \cdot \beta|.$$

Estamos devidamente preparados para proceder para a prova do resultado, que será feita por recorrência. Por II., $a_0 = 0$; suponha agora a_j definido, para $0 \leq j \leq n-1$. Segue de (3.9) que temos p_j, q_j bem definidos se $j \leq n-1$. Tomamos

$$a_n = \begin{cases} \left\lfloor \sup\limits_{r \in \mathbb{N}_0} \left(\dfrac{(q_{n-1}+1)^r}{\ell_r \cdot r!} \right) \Big/ q_{n-1} \right\rfloor, & n \neq 2. \\ 1, & n = 2. \end{cases}$$

Verifiquemos que P_β é globalmente $\mathscr{L}$-hipoelítico. Com efeito, sejam $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ tais que $mdc\,(p, q) = 1$. Por I., inferimos a existência de $k_0 \in \mathbb{N}$ de maneira que $q_{k_0} \leq q < q_{k_0+1}$. Logo, concluímos a partir de III. e IV. que

$$|p - q \cdot \beta| \geq |p_{k_0} - q_{k_0} \cdot \beta| = \frac{1}{a'_{k_0+1} \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1}}. \tag{3.10}$$

Por outro lado, se escolhemos $q \geq q_3$, segue de II e da construção de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ que:

$$\begin{aligned} a'_{k_0+1} \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1} &\leq \left\lfloor \sup_{r \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{\ell_r \cdot r!} \right) \Big/ q_{k_0} \right\rfloor \cdot q_{k_0} + q_{k_0} + q_{k_0-1} \\ &\leq \sup_{r \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{\ell_r \cdot r!} \right) + q_{k_0} + q_{k_0-1} \\ &\leq 3 \sup_{r \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{\ell_r \cdot r!} \right) \\ &\leq 3 \sup_{r \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{(q+1)^r}{\ell_r \cdot r!} \right). \end{aligned}$$

Por conseguinte, aplicando (3.10), obtemos

$$|p - q \cdot \beta| \geq \frac{1}{3} \cdot \inf_{r \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{\ell_r \cdot r!}{(q+1)^r} \right). \tag{3.11}$$

Fixemos $\delta > 0$; pelo Lema 3.12, temos

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\inf\limits_{r \in \mathbb{N}_0} \left(\dfrac{m_r \cdot r!}{\delta^r \cdot t^r} \right)}{\inf\limits_{r \in \mathbb{N}_0} \left(\dfrac{\ell_r \cdot r!}{t^r} \right)} = 0.$$

Consequentemente, é possível encontrar $s_0 \in \mathbb{N}$ de maneira que $s_0 \geq q_5$ e

$$\inf_{r\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_r \cdot r!}{\delta^r \cdot t^r}\right) \leq \frac{1}{3} \cdot \inf_{r\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\ell_r \cdot r!}{t^r}\right), \qquad t \geq s. \tag{3.12}$$

Associando (3.11) a (3.12), deduzimos a existência de $s_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p - q \cdot \beta| \geq \inf_{r\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_r \cdot r!}{\delta^r \cdot (1+q)^r}\right), \quad \forall q \geq s_1.$$

Decorre do Lema 3.9 a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global de P_β.

Por outro lado, estimemos por baixo a expressão $|p_{k_0} - q_{k_0} \cdot \beta|$:

$$\begin{aligned}
a'_{k_0+1} \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1} &\geq \left\lfloor \sup_{r\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{\ell_r \cdot r!}\right) \Big/ q_{k_0} \right\rfloor \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1} \\
&> \left(\frac{\sup_{r\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{\ell_r \cdot r!}\right)}{q_{k_0}} - 1\right) \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1} \\
&> \sup_{r\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{\ell_r \cdot r!}\right) + q_{k_0-1} - q_{k_0} \\
&> \sup_{r\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{\ell_r \cdot r!}\right) - q_{k_0}.
\end{aligned}$$

Usando o mesmo raciocínio empregado na prova do Lema 3.12, inferimos que

$$\sup_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{t^p}{\ell_p \cdot p!}\right) = \sup_{p\geq 2}\left(\frac{t^p}{\ell_p \cdot p!}\right) \geq \frac{t^2}{2\ell_2}, \qquad t \geq 2\ell_2.$$

Consequentemente, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sup_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{t^p}{\ell_p \cdot p!}\right) \geq 2t, \qquad \forall t \geq n_1.$$

Logo, se $k_0 \geq n_1$, deduzimos que

$$a'_{k_0+1} \cdot q_{k_0} + q_{k_0-1} > \frac{1}{2} \cdot \sup_{r\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{(q_{k_0}+1)^r}{\ell_r \cdot r!}\right). \tag{3.13}$$

Associando I., (3.10) e (3.13), concluímos a existência de $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p_n - q_n \cdot \beta| < 2 \cdot \inf_{r\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\ell_r \cdot r!}{(1+q_n)^r}\right), \quad n \geq r_0. \tag{3.14}$$

Não é difícil ver através de (3.14) que β é $\mathscr{L}$-exponencial Liouville, como desejávamos provar.

$\square$

3.3 $\mathscr{M}$-Hipoeliticidade Global para uma Classe de Sistemas Reais

Nesta seção, nosso ambiente de estudo será o toro $\mathbb{T}^{N+1}$ para algum N natural. Seus elementos serão denotados por (t, x), com $t \in \mathbb{T}^N$ e $x \in \mathbb{T}$. Consideraremos o seguinte sistema de campos em $\mathbb{T}^{N+1}$:

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + a^j(t)\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, N), \tag{3.15}$$

no qual cada a^j é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ a valores reais, satisfazendo o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial a^j}{\partial t_k} = \frac{\partial a^k}{\partial t_j}, \quad \forall j, k \in \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{3.16}$$

Observação 3.14. *Note que a Condição (3.16) é equivalente a dizer que a 1-forma dada por* $a = \sum_{j=1}^{N} a^j dt_j$ *é fechada.*

Notação 3.15. *Dada $f(t) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, denotaremos*

$$f_{j0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \ldots, 0, t_j, 0, \ldots, 0)\, dt_j.$$

Com base em resultados provados em [15], [37] (caso suave) e [6] (caso Gevrey), mostraremos que a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global do sistema (3.15) é equivalente à de

$$\widetilde{L_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + a^j_{j0}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{3.17}$$

Observação 3.16. *Como o sistema (3.17) possui coeficientes constantes, a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global do mesmo é descrita pelo Teorema 3.4. Por conseguinte, isto também valerá para o sistema (3.15).*

Considere, para $j = 1, 2, \ldots, N$, as seguintes funções:

$$\nu^j : \mathbb{T}^N \to \mathbb{R}; \;\; \nu^j(t) = a^j(t) - a^j_{j0}. \tag{3.18}$$

Observe que a condição (3.16) permanece verdadeira para cada ν^j. Além disso, segue que

$$\nu^j_{j0} = 0, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Desta maneira, a forma $\nu = \sum_{j=1}^{N} \nu^j dt_j$ é exata. Logo, podemos encontrar

$$A \in C^\infty(\mathbb{T}^N; \mathbb{R}) \mid \quad \frac{\partial A}{\partial t_k}(t) = \nu^k(t), \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{3.19}$$

Antes de provar uma estimativa para A como em (3.19), necessitamos de um resultado cuja demonstração pode ser encontra no trabalho citado.

Lema 3.17. *(Corolário 4.5 de [17]) Sejam $p, n \in \mathbb{N}$ e $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N}^p \setminus \{0\}$, $\delta_1, \ldots, \delta_\ell \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$. Denotemos $\beta = k_1 + \ldots + k_\ell$ e $\gamma = |k_1|\delta_1 + \ldots + |k_\ell|\delta_\ell$. Então*

$$m_{|\beta|} \cdot m_{|\delta_1|}^{|k_1|} \ldots \cdot m_{|\delta_\ell|}^{|k_\ell|} \leq m_{|\gamma|}.$$

Proposição 3.18. *Seja A como em (3.19). Dado $\varepsilon > 0$, existem $C_\varepsilon, h_\varepsilon > 0$ tais que*

$$\inf_{p \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{\varepsilon^p \cdot (1 + |\eta|)^p} \right) \cdot \left| \partial_t^\alpha e^{i\eta A(t)} \right| \leq C_\varepsilon \cdot h_\varepsilon^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!,$$

para quaisquer $t \in \mathbb{T}^N$, $\eta \in \mathbb{Z}$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Demonstração. Como cada a_j pertence a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, segue de (3.19) que $A \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$; assim, existem $C, h > 1$ de forma que

$$|\partial_t^\alpha A(t)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall t \in \mathbb{T}^N, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N. \tag{3.20}$$

A fim de estimar $e^{i\eta A(t)}$ e suas derivadas, precisaremos lançar mão da Fórmula de Faá di Bruno, que será aplicada seguindo a Proposição 4.3 de [17]. Estabelecendo $f_\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \ f_\eta(x) = e^{i\eta x}$, obtemos que

$$D_t^\alpha \left(e^{i\eta A(t)} \right) = \sum \frac{\alpha!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!} \cdot f_\eta^{(k_1 + \ldots + k_\ell)}(A(t)) \cdot \left(\frac{D_t^{\delta_1} A(t)}{\delta_1!} \right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{D_t^{\delta_\ell} A(t)}{\delta_\ell!} \right)^{k_\ell}, \tag{3.21}$$

com a soma acima sendo tomada sobre os conjuntos $\{\delta_1, \ldots, \delta_\ell\}$ de ℓ elementos distintos de $\mathbb{N}^N \setminus \{0\}$ e $(k_1, \ldots, k_\ell)$ de $\mathbb{N}^\ell$, com $\ell = 1, 2, 3, \ldots$, tais que

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\ell} k_j \delta_j.$$

Estimemos agora $\left| D_t^\alpha \left(e^{i\eta A(t)} \right) \right|$, utilizando o fato de A ser real e aplicando (3.20) e (3.21):

$$\left| D_t^\alpha \left(e^{i\eta A(t)} \right) \right| \leq \sum \frac{\alpha!}{k_1! \ldots k_\ell!} |\eta|^{(k_1 + \ldots + k_\ell)} \left(\frac{C h^{|\delta_1|} m_{|\delta_1|} |\delta_1|!}{\delta_1!} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{C h^{|\delta_\ell|} m_{|\delta_\ell|} |\delta_\ell|!}{\delta_\ell!} \right)^{k_\ell}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum \frac{\alpha!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!}(C|\eta|)^{(k_1+\ldots+k_\ell)} h^{k_1|\delta_1|+\ldots+k_\ell|\delta_\ell|} \\
&\quad \times m_{|\delta_1|}^{k_1} \cdots m_{|\delta_\ell|}^{k_\ell} \left(\frac{|\delta_1|!}{\delta_1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{|\delta_\ell|!}{\delta_\ell!}\right)^{k_\ell} \\
&\leq \sum \frac{\alpha!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!}(C|\eta|)^{(k_1+\ldots+k_\ell)} \cdot h^{k_1|\delta_1|+\ldots+k_\ell|\delta_\ell|} \\
&\quad \times m_{|\delta_1|}^{k_1} \cdot \ldots \cdot m_{|\delta_\ell|}^{k_\ell} \cdot N^{k_1|\delta_1|+\ldots+k_\ell|\delta_\ell|} \\
&\leq (Nh)^{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot \sum \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!} \cdot [C(1+|\eta|)]^{(k_1+\ldots+k_\ell)} \\
&\quad \times m_{|\delta_1|}^{k_1} \cdot \ldots \cdot m_{|\delta_\ell|}^{k_\ell}. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, considere $(\star) := \inf_{p \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{\varepsilon^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right) \left| \partial_t^\alpha e^{i\eta A(t)} \right|$; utilizando (3.22) e o Lema 3.17, obtemos

$$\begin{aligned}
(\star) &\leq (Nh)^{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot \sum \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!} \cdot [C(1+|\eta|)]^{(k_1+\ldots+k_\ell)} \\
&\quad \times m_{|\delta_1|}^{k_1} \cdot \ldots \cdot m_{|\delta_\ell|}^{k_\ell} \cdot \inf_{p \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{\varepsilon^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right) \\
&\leq (Nh)^{|\alpha|} |\alpha|! \sum \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!} [C(1+|\eta|)]^{(k_1+\ldots+k_\ell)} \\
&\quad \times m_{|\delta_1|}^{k_1} \cdot \ldots \cdot m_{|\delta_\ell|}^{k_\ell} \cdot \frac{m_{(k_1+\ldots+k_\ell)}\,(k_1+\ldots+k_\ell)!}{\varepsilon^{(k_1+\ldots+k_\ell)}(1+|\eta|)^{(k_1+\ldots+k_\ell)}} \\
&\leq (Nh)^{|\alpha|}|\alpha|! \cdot \sum \frac{(k_1+\ldots+k_\ell)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!} \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{(k_1+\ldots+k_\ell)} \left(m_{(k_1+\ldots+k_\ell)} \cdot m_{|\delta_1|}^{k_1} \cdot \ldots \cdot m_{|\delta_\ell|}^{k_\ell} \right) \\
&\leq (Nh)^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot \underbrace{\sum \frac{(k_1+\ldots+k_\ell)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_\ell!} \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{(k_1+\ldots+k_\ell)}}_{(\triangle)}. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos o Lema 4.8 de [17], que afirma existirem $M, \lambda > 0$ dependendo exclusivamente de C e ε, de modo que

$$(\triangle) \leq M \cdot \lambda^{|\alpha|}.$$

Por conseguinte, ao escolhermos $C_\varepsilon = M$ e $h_\varepsilon = N \cdot h \cdot \lambda$, deduzimos de (3.23) que

$$\inf_{p \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{\varepsilon^p \cdot (1+|\eta|)^p} \right) \left| \partial_t^\alpha e^{i\eta A(t)} \right| \leq C_\varepsilon \cdot h_\varepsilon^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \quad \forall t \in \mathbb{T}^N,\ \forall \eta \in \mathbb{Z},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N,$$

de acordo com o que desejávamos mostrar. $\square$

Teorema 3.19. *O operador $T : \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1}) \to \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ dado por*

$$T\left(\sum_{\eta \in \mathbb{Z}} u_\eta e^{ix\eta} \right) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}} u_\eta e^{i(A(t)+x)\eta} \qquad (3.24)$$

é um automorfismo. Mais ainda, $T\big|_{\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})}$ tem imagem em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ e é isomofismo neste espaço.

Demonstração. Para verificar que T está bem definida, aplicaremos a afirmação provada no Teorema 2.26; isto é, dados $\varepsilon, h > 0$, queremos encontrar $C_{\varepsilon,h} > 0$ de modo que

$$\left|\langle u_\eta e^{i\eta A(t)}, \psi\rangle\right| \leq C_{\varepsilon,h} \cdot \|\psi\|_{\mathscr{M},h} \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\varepsilon^n \cdot (1+|\eta|)^n}{m_n \cdot n!}\right), \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}, \;\; \forall \psi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N).$$

Fixemos $\varepsilon, h > 0, \varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$ e denotemos, para $\delta > 0$ que será escolhido posteriormente,

$$(\triangle) = \left|\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p \cdot p!}{\delta^p \cdot (1+|\eta|)^p}\right)\partial_t^\alpha\left(e^{i\eta A(t)} \cdot \varphi(t)\right)\right|.$$

Pela Proposição 3.18,

$$\begin{aligned}
(\triangle) &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p \cdot p!}{\delta^p \cdot (1+|\eta|)^p}\right)\cdot\left|\partial_t^\beta(e^{i\eta A(t)})\right|\cdot\left|\partial_t^{\alpha-\beta}(\varphi)(t)\right| \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\cdot C_\delta \cdot h_\delta^{|\beta|}\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|!\cdot\|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot h^{|\alpha|-|\beta|}\cdot m_{|\alpha|-|\beta|}\cdot(|\alpha|-|\beta|)! \\
&\leq C_\delta \cdot \|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot(2h_1)^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!,
\end{aligned}$$

com $h_1 = \max\{h_\delta, h\}$. Ou seja, se $h_2 = 2h_1$,

$$\left|\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p \cdot p!}{\delta^p \cdot (1+|\eta|)^p}\right)\partial_t^\alpha\left(e^{i\eta A(t)} \cdot \varphi(t)\right)\right| \leq C_\delta \cdot \|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot h_2^\alpha \cdot m_\alpha \cdot \alpha!. \tag{3.25}$$

Em contrapartida, decorre do Teorema 2.2 que para cada $\rho > 0$, existe $C_\rho > 0$ tal que

$$|\langle u, f\rangle| \leq C_\rho \sup_{\substack{x\in\mathbb{T}^{N+1}\\ \gamma\in\mathbb{N}_0^{N+1}}}\left(\frac{|\partial^\gamma f(x)|\cdot\rho^{|\gamma|}}{m_{|\gamma|}\cdot|\gamma|!}\right), \qquad \forall f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1}).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\langle u_\eta e^{i\eta A(t)}, \varphi(t)\rangle\right| &= \frac{1}{2\pi}\cdot\left|\langle u, e^{i\eta A(t)}\cdot\varphi(t)\cdot e^{-ix\eta}\rangle\right| \\
&\leq \frac{C_\rho}{2\pi}\sup_{\substack{(t,x)\in\mathbb{T}^{N+1}\\ (\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{N}_0^{N+1}}}\left(\frac{\left|\partial_t^{\gamma_1}\left(e^{iA(t)\eta}\varphi(t)\right)\right|\cdot\left|\partial_x^{\gamma_2}\left(e^{-ix\eta}\right)\right|\cdot\rho^{|\gamma_1|+|\gamma_2|}}{m_{|\gamma_1|+|\gamma_2|}\cdot(|\gamma_1|+|\gamma_2|)!}\right) \\
&\leq \frac{C_\rho}{2\pi}\sup_{\substack{(t,x)\in\mathbb{T}^{N+1}\\ (\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{N}_0^{N+1}}}\left(\frac{\left|\partial_t^{\gamma_1}\left(e^{iA(t)\eta}\varphi(t)\right)\right|\cdot(1+|\eta|)^{|\gamma_2|}\cdot\rho^{|\gamma_1|+|\gamma_2|}}{m_{|\gamma_1|+|\gamma_2|}\cdot(|\gamma_1|+|\gamma_2|)!}\right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Pela Lema 2.25, se $\delta = \dfrac{\varepsilon}{H}$,

$$\begin{aligned}
\left|\partial_t^{\gamma_1}\left(e^{iA(t)\eta}\varphi(t)\right)\right|\cdot(1+|\eta|)^{|\gamma_2|}\cdot\rho^{|\gamma_1|+|\gamma_2|} \quad &\leq \quad \left|\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p \cdot p!}{\delta^p \cdot (1+|\eta|)^p}\right)\partial_t^{\gamma_1}\left(e^{iA(t)\eta}\varphi(t)\right)\right| \\
&\quad\times\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p \cdot p!}{\delta^p \cdot (1+|\eta|)^p}\right)\cdot(1+|\eta|)^{|\gamma_2|}
\end{aligned}$$

$$\times \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\varepsilon^n\cdot(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\cdot\rho^{|\gamma_1|+|\gamma_2|}. \quad (3.27)$$

Associando (3.25) a (3.27), inferimos que

$$\begin{aligned}\left|\partial_t^{\gamma_1}\left(e^{iA(t)\eta}\varphi(t)\right)\right|\cdot(1+|\eta|)^{|\gamma_2|}\cdot\rho^{|\gamma_1|+|\gamma_2|} &\leq C_{\varepsilon/H}\cdot\|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot h_2^{|\gamma_1|}\cdot m_{|\gamma_1|}\cdot|\gamma_1|!\\ &\times\left(\frac{m_{|\gamma_2|}\cdot|\gamma_2|!\cdot H^{|\gamma_2|}}{\varepsilon^{|\gamma_2|}}\right)\\ &\times\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\varepsilon^n\cdot(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\cdot\rho^{|\gamma_1|+|\gamma_2|}.\end{aligned}$$

Como podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varepsilon < H$,

$$\begin{aligned}\left|\partial_t^{\gamma_1}\left(e^{iA(t)\eta}\varphi(t)\right)\right|\cdot(1+|\eta|)^{\gamma_2}\cdot\rho^{|\gamma_1|+|\gamma_2|} &\leq C_{\varepsilon/H}\cdot\|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot\left(\frac{h_2\cdot H\cdot\rho}{\varepsilon}\right)^{|\gamma_1|+|\gamma_2|}\\ &\times m_{|\gamma_1|+|\gamma_2|}(|\gamma_1|+|\gamma_2|)!\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\varepsilon^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right).\end{aligned}$$

Já que a expressão do lado direito é independente de (t,x), escolhendo $\rho = \dfrac{\varepsilon}{h_2\cdot H}$, deduzimos de (3.26) que

$$\left|\langle u_\eta e^{i\eta A(t)},\varphi(t)\rangle\right| \leq \frac{C_\rho}{2\pi}\cdot C_{\varepsilon/H}\cdot\|\varphi\|_{\mathscr{M},h}\cdot\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\varepsilon^n\cdot(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right).$$

Observe ademais que ρ depende somente de ε e h. Escolhendo $C_{\varepsilon,h} = \dfrac{C_\rho}{2\pi}\cdot C_{\varepsilon/H}$, está provada a primeira parte do resultado.

Em seguida, verifiquemos que se $\psi\in\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$, $T(\psi)$ também será elemento do espaço. Com efeito, pelo Teorema 2.20, é possível encontrar $C_R, h_R, h_S > 0$ tais que

$$|\partial_t^\beta\widehat{\psi}(t,\eta)| \leq C_R\cdot h_R^{|\beta|}\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|!\cdot\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{h_S^p\cdot(1+|\eta|)^p}\right),\quad \forall t\in\mathbb{T},\ \forall\beta\in\mathbb{N}_0^N. \quad (3.28)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left|\partial_t^\alpha\left(\widehat{\psi}(t,\eta)\cdot e^{iA(t)\eta}\right)\right| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left|\partial_t^\beta\widehat{\psi}(t,\eta)\right|\cdot\left|\partial_t^{\alpha-\beta}(e^{iA(t)\eta})\right|\\ &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}C_R h_R^{|\beta|}m_{|\beta|}|\beta|!\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{h_S^p(1+|\eta|)^p}\right)\left|\partial_t^{\alpha-\beta}(e^{iA(t)\eta})\right|.\end{aligned} \quad (3.29)$$

Novamente fazemos uso do Lema 2.25:

$$\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{h_S^p\cdot(1+|\eta|)^p}\right) \leq \inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{H^p\cdot m_p\cdot p!}{h_S^p\cdot(1+|\eta|)^p}\right)^2.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{h_S^p\cdot(1+|\eta|)^p}\right)\left|\partial_t^{\alpha-\beta}(e^{iA(t)\eta})\right| &\leq \inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{H^p\cdot m_p\cdot p!}{h_S^p\cdot(1+|\eta|)^p}\right)\\
&\quad\times\left[\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{H^p\cdot m_p\cdot p!}{h_S^p\cdot(1+|\eta|)^p}\right)\cdot\left|\partial_t^{\alpha-\beta}(e^{iA(t)\eta})\right|\right]\\
&\leq \inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{H^p\cdot m_p\cdot p!}{h_S^p\cdot(1+|\eta|)^p}\right)\\
&\quad\times C_{h_S/H}\cdot h_{h_S/H}^{|\alpha|-|\beta|}\cdot m_{|\alpha|-|\beta|}\cdot(|\alpha|-|\beta|)!, \quad (3.30)
\end{aligned}$$

pela Proposição 3.18. Desta maneira, associando (3.29) a (3.30), concluímos que

$$\begin{aligned}
\left|\partial_t^{\alpha}\left(\widehat{\psi}(t,\eta)\cdot e^{iA(t)\eta}\right)\right| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}C_R\cdot h_R^{|\beta|}\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|!\\
&\quad\times\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{H^p\cdot m_p\cdot p!}{h_S^p\cdot(1+|\eta|)^p}\right)\cdot C_{H/h_S}\cdot h_{H/h_S}^{|\alpha|-|\beta|}\cdot m_{|\alpha|-|\beta|}\cdot(|\alpha|-|\beta|)!\\
&\leq C_1\cdot h_1^{\alpha}\cdot m_\alpha\cdot\alpha!\cdot\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{H^p\cdot m_p\cdot p!}{h_S^p\cdot(1+|\eta|)^p}\right), \quad (3.31)
\end{aligned}$$

se $C_1=C_R\cdot C_{H/h_S}$ e $h_1=2\cdot\max\left\{h_{H/h_S},h_R\right\}$. Deste modo, $T(\psi)\in\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, pelo Teorema 2.21.

Resta-nos provar que T é automorfismo. Para tal, seja $T':\mathscr{D}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})\to\mathscr{D}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ dada por

$$T'\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}u_\eta e^{ix\eta}\right)=\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}u_\eta e^{i(-A(t)+x)\eta}.$$

Note que valem para T' as mesmas propriedades demonstradas para T. Além disso,

$$\begin{aligned}
T\circ T'\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}u_\eta e^{ix\eta}\right) &= T\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}u_\eta e^{i(-A(t)+x)\eta}\right)\\
&=\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}u_\eta e^{i(-A(t)+A(t)+x)\eta}\\
&=\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}u_\eta e^{ix\eta}.
\end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $T'\circ T$ é a aplicação identidade. □

Teorema 3.20. *O sistema de campos reais descrito em* (3.15) *é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico se, e somente se, o sistema definido em* (3.17) *também o for.*

Demonstração. Considerando A como em (3.19), definimos

$$P_j:=T\circ L_j\circ T^{-1},$$

com T e T^{-1} sendo as aplicações do Teorema 3.19. Vejamos que a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global do sistema P_j é equivalente à de L_j.

Com efeito, suponha que tal propriedade vale para o sistema dado por L_j, que u pertence a $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ e

$$P_j u = f_j, \quad f_j \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1}), \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Pelo fato de T ser automorfismo em $\mathscr{D}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$, existe v neste espaço de modo que $Tv = u$. Por conseguinte,

$$f_j = P_j u = (P_j \circ T)v = (T \circ L_j)v.$$

Desta equação, concluímos que $L_j v = T^{-1} f_j$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Pelo Teorema 3.19, $T^{-1} f_j$ pertence a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ para todo j. Segue da hipótese de $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global do sistema que $v \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$, e assim o mesmo vale para u. A prova da recíproca é completamente análoga.

Afirmamos, por fim, que $P_j = \widetilde{L}_j$, para todo j. De fato,

$$\begin{aligned}
P_j u = P_j\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}} u_\eta e^{ix\eta}\right) &= T \circ L_j \left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}} u_\eta e^{i(-A(t)+x)\eta}\right) = T\left[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}} L_j\left(u_\eta e^{i(-A(t)+x)\eta}\right)\right] \\
&= T\left[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial t_j} - \nu^j(t)(i\eta)\cdot u_\eta + a^j(t)(i\eta)\cdot u_\eta\right) e^{i(-A(t)+x)\eta}\right] \\
&= T\left[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial t_j} + a^j_{j0}\cdot(i\eta)\cdot u_\eta\right) e^{i(-A(t)+x)\eta}\right] \\
&= \widetilde{L}_j u,
\end{aligned}$$

encerrando a prova. $\square$

Capítulo 4

Uma Classe de Sistemas de Campos Complexos

Este capítulo será destinado ao estudo da $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global para um determinado sistema de campos vetoriais complexos. Existem na literatura vários trabalhos que lidam com o mesmo tipo de problema, nos contextos suave, Gevrey e analítico (veja, por exemplo, [6], [10], [11], [29] e [37]). Em particular, nossas principais técnicas são inspiradas em [11] e [29].

Mais uma vez ambientados no toro $\mathbb{T}^{N+1} = \mathbb{T}_t^N \times \mathbb{T}_x$, para algum $N \in \mathbb{N}$, estudaremos $\mathscr{L}_\lambda = (L_{\lambda_1}, \ldots, L_{\lambda_N})$, no qual

$$L_{\lambda_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + c_j(t_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, N), \tag{4.1}$$

satisfazendo as seguintes condições para cada $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$:

- $\lambda_j = \lambda_{j1} + i\lambda_{j2}, \quad \lambda_{j1}, \lambda_{j2} \in \mathbb{R}$.
- $c_j(t_j) = a_j(t_j) + ib_j(t_j)$, sendo a_j, b_j funções a valores reais e elementos de $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$.

Para iniciar, remetemos mais uma vez ao Teorema 3.4. Considere uma família de campos com coeficientes constantes da forma

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + a_j \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_j, \;\; a_j \in \mathbb{R}, \; \lambda_j \in \mathbb{C}; \quad j = 1, 2, 3 \ldots, k.$$

Pelo Teorema 3.4, o sistema acima será globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $R_\varepsilon > 0$ de maneira que

$$\max_{1 \le j \le k} |\eta_j + a_j\xi - i\lambda_j| \ge \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\eta| + |\xi|)^n} \right),$$

para todos $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{k+1};\ |\eta| + |\xi| \geq R_\varepsilon$. Desta condição, extraímos a próxima

Definição 4.1. *Diremos que* $(a, \lambda) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^k$ ***satisfaz a propriedade*** $(\star)$ *se para todo* $\varepsilon > 0$, *for possível encontrar* $R_\varepsilon > 0$ *de modo que*

$$\max_{1 \leq j \leq k} |\eta_j + a_j \xi - i\lambda_j| \geq \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\eta| + |\xi|)^n} \right), \tag{4.2}$$

para todos $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{k+1};\ |\eta| + |\xi| \geq R_\varepsilon$.

Estamos prontos para enunciar o principal resultado do capítulo.

Teorema 4.2. *Seja* $\mathscr{L}_\lambda$ *o sistema* $(L_{\lambda_1}, L_{\lambda_2}, \ldots, L_{\lambda_N})$ *descrito em* (4.1). *Então* $\mathscr{L}_\lambda$ *é* $\mathscr{M}$-*globalmente hipoelítico se, e somente se, ao menos uma das condições abaixo é satisfeita:*

1. *Existe* $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *de modo que* $b_j \not\equiv 0$ *e não muda de sinal.*

2. *Se o conjunto* $J := \{j \in \{1, 2, \ldots, N\}\,; b_j(t_j) \equiv 0\} = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ *é não vazio, o vetor* $\left(a_{j_{1}0}, a_{j_{2}0}, \ldots, a_{j_{k}0}, \lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_k}\right)$ *satisfaz a propriedade* $(\star)$, *estabelecida em* (4.2).

Demonstração. Decorre imediatamente dos Teoremas 4.3, 4.6 e 4.13, que serão provados mais adiante. $\square$

Iniciemos a prova do Teorema 4.2 vendo que o mesmo processo utilizado na Seção 3.3 nos permitirá lidar com o sistema um pouco mais simples $\widetilde{\mathscr{L}_\lambda} = \left(\widetilde{L}_{\lambda_1}, \ldots, \widetilde{L}_{\lambda_N}\right)$, com

$$\widetilde{L}_{\lambda_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_{j0} + i b_j(t_j)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{4.3}$$

Primeiramente, observe que a 1-forma $a = \sum_{j=1}^{N} a_j(t_j) dt_j$ é trivialmente fechada. Procedendo como em (3.18), definimos $\nu_j : \mathbb{T} \to \mathbb{R};\ \nu_j(t_j) = a_j(t_j) - a_{j0}$, e neste caso a aplicação A definida em (3.19) tem uma expressão simples, dada por

$$A : \mathbb{T}^N \to \mathbb{R}; \quad A(t) = \sum_{j=1}^{N} \left[\int_0^{t_j} a_j(s) ds - a_{j0} \cdot t_j \right]. \tag{4.4}$$

Com o mesmo argumento aplicado previamente, segue que valem para A definida em (4.4) a Proposição 3.18 e o Teorema 3.19. Isto não só nos mostra que o caso no qual $b_j \equiv 0$ para todo j foi caracterizado na Seção 3.3, como também nos permite provar o seguinte resultado mais geral:

Teorema 4.3. *O sistema de campos complexos descrito em* (4.1) *é globalmente* $\mathscr{M}$*-hipoelítico se, e somente se, o sistema definido em* (4.3) *também o for.*

Demonstração. Considerando A como em (4.4), definimos

$$P_j := T \circ L_j \circ T^{-1},$$

com T e T^{-1} sendo as aplicações do Teorema 3.19. Analogamente ao caso anterior, a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global do sistema P_j será equivalente à de L_j. Resta-nos ver que $P_j = \widetilde{L}_j$, para todo j. Com efeito,

$$\begin{aligned}
P_j u = P_j\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}} u_\eta e^{ix\eta}\right) &= T\circ L_j\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}} u_\eta e^{i(-A(t)+x)\eta}\right) = T\left[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}} L_j\left(u_\eta e^{i(-A(t)+x)\eta}\right)\right]\\
&= T\left[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial t_j} + (a_{j_0} - a_j(t_j))(i\eta)\cdot u_\eta + c_j(t_j)(i\eta)\cdot u_\eta + \lambda_j\cdot u_\eta\right)e^{i(-A(t)+x)\eta}\right]\\
&= T\left[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial t_j} + (a_{j_0} + ib_j(t_j))(i\eta)\cdot u_\eta + \lambda_j\cdot u_\eta\right)e^{i(-A(t)+x)\eta}\right]\\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\partial u_\eta}{\partial t_j} + (a_{j_0} + ib_j(t_j))(i\eta)\cdot u_\eta + \lambda_j\cdot u_\eta\right)e^{ix\eta} = \widetilde{L}_j u,
\end{aligned}$$

encerrando a prova. □

Observação 4.4. *Provado o Teorema 4.3, nosso estudo daqui em diante será feito inteiramente com base no sistema* $\widetilde{\mathscr{L}}_\lambda$.

4.1 Condições Suficientes

Nesta seção, provaremos condições que são individualmente suficientes para a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global do sistema apresentado em (4.3). Antes de prosseguir para o principal resultado desta seção, precisamos definir para $\alpha \in \mathbb{N}$ o seguinte conjunto:

$$\Delta(\alpha) = \{(k_1, k_2, \ldots, k_\alpha) \in \mathbb{N}_0^\alpha;\ \ k_1 + 2\cdot k_2 + \ldots + \alpha\cdot k_\alpha = \alpha\}. \tag{4.5}$$

Utilizaremos o seguinte

Lema 4.5. *(Lema 1.4.1 de [41]) Dados* $n \in \mathbb{N}_0$ *e* $R > 0$*, temos*

$$\sum_{\Delta(n)} \frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}\cdot R^k = R\cdot(1+R)^{n-1},$$

com $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ *e* $\Delta(n)$ *como em* (4.5).

Feito o breve comentário, estamos prontos para enunciar e demonstrar o seguinte

Teorema 4.6. *Considere o seguinte sistema de campos em* $\mathbb{T}^{N+1}$*:*

$$L_{\lambda_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_{j_0} + ib_j(t_j)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, N),$$

descrito em (4.3)*. Qualquer uma das seguintes condições implica em sua* $\mathscr{M}$*-hipoeliticidade global:*

1. *Existe* $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *de modo que* $b_j \not\equiv 0$ *e não muda de sinal.*

2. *Supondo que o conjunto* $J := \{j \in \{1, 2, \ldots, N\}\,; b_j(t_j) \equiv 0\} = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ *é não vazio, o vetor* $(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_k}, \lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_k})$ *satisfaz a propriedade* $(\star)$*, estabelecida em* (4.2)*.*

Demonstração. (1 implica na $\mathscr{M}$*-hipoeliticidade global de* (4.3)*).* Sem perda de generalidade, podemos assumir $b_1 \leq 0$ e por conseguinte $b_{10} < 0$. Se $L_j u = f_j$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, com $f_j \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ e $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$, escrevendo em termos da Série Parcial de Fourier em x as igualdades, obtemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_j} + i\xi c_j(t_j) + \lambda_j\right) \widehat{u}(t, \xi) = \widehat{f}_j(t, \xi), \tag{4.6}$$

para quaisquer $t \in \mathbb{T}^N,\ \xi \in \mathbb{Z}$ e $j = 1, 2, \ldots, N$.

Definindo $C(t) = \sum_{j=1}^{N} C_j(t_j) := \sum_{j=1}^{N} \left[\int_0^{t_j} c_j(s)ds - c_{j_0} \cdot t_j\right]$, segue por fator integrante que (4.6) é equivalente a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_j} + i\xi c_{j_0} + \lambda_j\right) e^{i\xi C(t)} \widehat{u}(t, \xi) = \widehat{f}_j(t, \xi) e^{i\xi C(t)}, \ \ \forall t \in \mathbb{T}^N, \ \forall \xi \in \mathbb{Z}, \ \ (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{4.7}$$

Considere o caso em que $j = 1$; se $i\xi c_{1_0} + \lambda_1 \notin i\mathbb{Z}$, é possível provar (veja o Lema 5.5 de [5]) que (4.7) possui uma única solução, cuja expressão apresentaremos a seguir. Visto que a parte real de $i\xi c_{10} + \lambda_1$ é igual a $\lambda_{11} - \xi \cdot b_{10}$, supondo ξ diferente de $\dfrac{\lambda_{11}}{b_{10}}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(t, \xi) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi(i\xi c_{10} + \lambda_1)}} \int_0^{2\pi} e^{-(i\xi c_{10} + \lambda_1)\tau} \cdot \widehat{f}_1(t_1 - \tau, t_2, \ldots, t_N, \xi) \cdot e^{i\xi(C_1(t_1 - \tau) - C_1(t_1))} d\tau \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi(i\xi c_{10} + \lambda_1)}} \int_0^{2\pi} e^{-(i\xi c_{10} + \lambda_1)\tau} \widehat{f}_1(t_1 - \tau, t_2, \ldots, t_N, \xi) e^{i\xi\left(\int_{t_1}^{t_1 - \tau} c_1(s)ds + c_{10} \cdot \tau\right)} d\tau \\
&= \frac{1}{1 - e^{-2\pi(i\xi c_{10} + \lambda_1)}} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda_1 \tau} \cdot e^{-i\xi H_1(t_1, \tau)} \cdot \widehat{f}_1(t_1 - \tau, t_2, \ldots, t_N, \xi) d\tau \\
&= \frac{1}{e^{2\pi(i\xi c_{10} + \lambda_1)} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\lambda_1 \tau} \cdot e^{i\xi H_2(t_1, \tau)} \cdot \widehat{f}_1(t_1 + \tau, t_2, \ldots, t_N, \xi) d\tau,
\end{aligned}$$

tomando

$$H_1(t_1,\tau)=\int_{t_1-\tau}^{t_1} c_1(s)ds = a_{10}\tau + i\cdot\int_{t_1-\tau}^{t_1} b_1(s)ds,$$
$$H_2(t_1,\tau)=\int_{t_1}^{t_1+\tau} c_1(s)ds = a_{10}\tau + i\cdot\int_{t_1}^{t_1+\tau} b_1(s)ds.$$

Para $\xi > 0$, escreveremos

$$\widehat{u}(t,\xi)=\frac{1}{1-e^{-2\pi(i\xi c_{10}+\lambda_1)}}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda_1\tau}\cdot e^{-i\xi H_1(t_1,\tau)}\cdot \widehat{f}_1(t_1-\tau,t_2,\ldots,t_N,\xi)d\tau. \tag{4.8}$$

Em contrapartida, para $\xi < 0$ definiremos

$$\widehat{u}(t,\xi)=\frac{1}{e^{2\pi(i\xi c_{10}+\lambda_1)}-1}\int_0^{2\pi} e^{\lambda_1\tau}\cdot e^{i\xi H_2(t_1,\tau)}\cdot \widehat{f}_1(t_1+\tau,t_2,\ldots,t_N,\xi)d\tau. \tag{4.9}$$

Tal escolha é feita para que as constantes $\dfrac{1}{1-e^{-2\pi(i\xi c_{10}+\lambda_1)}}$ e $\dfrac{1}{e^{2\pi(i\xi c_{10}+\lambda_1)}-1}$ sejam limitadas quando fazemos $|\xi|\to+\infty$.

A partir de agora iremos supor $\xi > 0$, considerando a solução como em (4.8); o caso (4.9) possui prova análoga. Antes de demonstrar o resultado principal, é necessário obter uma estimativa sobre as derivadas de $e^{-i\xi H_1(t_1,\tau)}$. Aplicamos Faà di Bruno:

$$\begin{aligned}\left|\partial_{t_1}^{\gamma_1} e^{-i\xi H_1(t_1,\tau)}\right| &= \left|\sum_{\Delta(\gamma_1)}\frac{\gamma_1!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{\gamma_1}!}\cdot(-i\xi)^{k_1+\ldots+k_{\gamma_1}}\cdot e^{-i\xi H_1(t_1,\tau)}\cdot\prod_{j=1}^{\lambda_1}\left(\frac{\partial_{t_1}^{j}H_1(t_1,\tau)}{j!}\right)^{k_j}\right|\\ &\le \sum_{\Delta(\gamma_1)}\frac{\gamma_1!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{\gamma_1}!}(1+|\xi|)^{k_1+\ldots+k_{\gamma_1}}\left|e^{-i\xi H_1(t_1,\tau)}\right|\prod_{j=1}^{\lambda_1}\left(\frac{|\partial_{t_1}^{j}H_1(t_1,\tau)|}{j!}\right)^{k_j}.\end{aligned}$$

Como $b_1(t_1)\le 0$ e $\xi > 0$, $\left|e^{-i\xi H_1(t_1,\tau)}\right|\le 1$. Por outro lado, como $\tau\in[0,2\pi]$, $H_1(t_1,\tau)\in\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}_1)$, com estimativa uniforme em τ. Assim, existem $C_1, h_1 > 1$ tais que

$$\begin{aligned}\left|\partial_{t_1}^{\gamma_1} e^{-i\xi H_1(t_1,\tau)}\right| &\le \sum_{\Delta(\gamma_1)}\frac{\gamma_1!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{\gamma_1}!}\cdot(1+|\xi|)^{k_1+\ldots+k_{\gamma_1}}\cdot\prod_{j=1}^{\lambda_1}\left(\frac{C_1\cdot h_1^j\cdot m_j\cdot j!}{j!}\right)^{k_j}\\ &\le \sum_{\Delta(\gamma_1)}\frac{\gamma_1!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{\gamma_1}!}\cdot(1+|\xi|)^{k_1+\ldots+k_{\gamma_1}}\cdot C_1^{k_1+\ldots+k_{\gamma_1}}\cdot h_1^{\gamma_1}\cdot\prod_{j=1}^{\lambda_1} m_j^{k_j}\end{aligned}$$

Do Lema 3.17, segue que

$$\left|\partial_{t_1}^{\gamma_1} e^{-i\xi H_1(t_1,\tau)}\right| \le h_1^{\gamma_1}\cdot m_{\gamma_1}\cdot\sum_{\Delta(\gamma_1)}\frac{\gamma_1!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{\gamma_1}!}\cdot[C_1\cdot(1+|\xi|)]^{k_1+\ldots+k_{\gamma_1}}\cdot\frac{1}{m_{k_1+\ldots+k_{\gamma_1}}}. \tag{4.10}$$

Sigamos para a estimativa de $\widehat{u}(t,\xi)$ e suas derivadas:

$$|\partial_t^{\alpha}\widehat{u}(t,\xi)| = C\left|\int_0^{2\pi} e^{-\lambda_1\tau}\partial_{t_1}^{\alpha_1}\left[e^{-i\xi H_1(t_1,\tau)}\left(\partial_{t_2}^{\alpha_2}\ldots\partial_{t_N}^{\alpha_N}\widehat{f}_1(t_1-\tau,t_2,\ldots,t_N,\xi)\right)\right]d\tau.\right|$$

$$\leq C_0 \int_0^{2\pi} \left| \partial_{t_1}^{\alpha_1} \left[e^{-i\xi H_1(t_1,\tau)} \left(\partial_{t_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{t_N}^{\alpha_N} \widehat{f}_1(t_1-\tau, t_2, \ldots, t_N, \xi) \right) \right] \right| d\tau.$$

$$\leq C_0 \sum_{\beta_1 \leq \alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left| \partial_{t_1}^{\alpha_1-\beta_1} \left(e^{-i\xi H_1(t_1,\tau)} \right) \right| \left| \partial_{t_1}^{\beta_1} \partial_{t_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{t_N}^{\alpha_N} \widehat{f}_1(t_1-\tau, t_2, \ldots, t_N, \xi) \right| d\tau.$$

Através do Teorema 2.20 e de (4.10), existem $C_2, h_2, h_3 > 1$ tais que

$$\begin{aligned}
|\partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi)| \leq\ & C_0 \int_0^{2\pi} \sum_{\beta_1 \leq \alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} h_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdot m_{\alpha_1-\beta_1} \\
& \times \left(\sum_{\Delta(\alpha_1-\beta_1)} \frac{(\alpha_1-\beta_1)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_{\alpha_1-\beta_1}!} \cdot [C_1 \cdot (1+|\xi|)]^{k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1}} \cdot \frac{1}{m_{k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1}}} \right) \\
& \times C_2 h_2^{\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N} m_{\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N} (\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N)! \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p p!}{h_3^p (1+|\xi|)^p} \right) d\tau.
\end{aligned}$$

Escolhendo $h_4 = \dfrac{h_3}{H}$ e aplicando o Lema 2.25, temos

$$\inf_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_3 \cdot (1+|\xi|)^p} \right) \leq \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_4 \cdot (1+|\xi|)^p} \right)^2.$$

Prossigamos com a estimativa:

$$\begin{aligned}
|\partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi)| \leq\ & C_0 \int_0^{2\pi} \sum_{\beta_1 \leq \alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} h_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdot m_{\alpha_1-\beta_1} \\
& \times \left(\sum_{\Delta(\alpha_1-\beta_1)} \frac{(\alpha_1-\beta_1)!}{k_1! \cdots k_{\alpha_1-\beta_1}!} [C_1(1+|\xi|)]^{k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1}} \frac{\inf_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p p!}{h_4^p (1+|\xi|)^p} \right)}{m_{k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1}}} \right) \\
& \times C_2 h_2^{\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N} m_{\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N} (\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N)! \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{h_4^p \cdot (1+|\xi|)^p} \right) d\tau \\
\leq\ & C_0 \int_0^{2\pi} \sum_{\beta_1 \leq \alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} h_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdot m_{\alpha_1-\beta_1} \\
& \times \left(\sum_{\Delta(\alpha_1-\beta_1)} \frac{(\alpha_1-\beta_1)!}{k_1! \cdots k_{\alpha_1-\beta_1}!} [C_1(1+|\xi|)]^{k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1}} \frac{(k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1})!}{[h_4(1+|\xi|)]^{k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1}}} \right) \\
& \times C_2 h_2^{\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N} m_{\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N} (\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N)! \inf_{p\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p p!}{h_4^p (1+|\xi|)^p} \right) d\tau \\
\leq\ & C_0 \int_0^{2\pi} \sum_{\beta_1 \leq \alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} h_1^{\alpha_1-\beta_1} \cdot m_{\alpha_1-\beta_1} \\
& \times \left(\sum_{\Delta(\alpha_1-\beta_1)} \frac{(\alpha_1-\beta_1)!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_{\alpha_1-\beta_1}!} \cdot \left(\frac{C_1}{h_4} \right)^{k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1}} \cdot (k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1})! \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \times C_2 h_2^{\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N} m_{\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N}(\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N)! \inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p p!}{h_4^p(1+|\xi|)^p}\right) d\tau \\
\leq\ & C_0 \int_0^{2\pi} \sum_{\beta_1\leq\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} h_1^{\alpha_1-\beta_1}\cdot m_{\alpha_1-\beta_1}\cdot(\alpha_1-\beta_1)! \\
& \times\left(\sum_{\Delta(\alpha_1-\beta_1)} \frac{(k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1})!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{\alpha_1-\beta_1}!}\cdot\left(\frac{C_1}{h_4}\right)^{k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1}}\right) \\
& \times C_2 h_2^{\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N} m_{\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N}(\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N)! \inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p p!}{h_4^p(1+|\xi|)^p}\right) d\tau.
\end{aligned}
$$

Utilizamos o Lema 4.5:

$$
\left(\sum_{\Delta(\alpha_1-\beta_1)} \frac{(k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1})!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{\alpha_1-\beta_1}!}\cdot\left(\frac{C_1}{h_4}\right)^{k_1+\ldots+k_{\alpha_1-\beta_1}}\right) \leq \left(1+\frac{C_1}{h_4}\right)^{\alpha_1-\beta_1}.
$$

Definindo $h_5=\max\left\{h_1\cdot\left(1+\dfrac{C_1}{h_4}\right), h_2\right\}$, retomamos:

$$
\begin{aligned}
|\partial_t^\alpha \widehat{u}(t,\xi)| \leq\ & 2\pi C_0 C_2 \sum_{\beta_1\leq\alpha_1}\binom{\alpha_1}{\beta_1} h_5^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N}\cdot m_{\alpha_1-\beta_1}\cdot m_{\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N} \\
& \times(\alpha_1-\beta_1)!\cdot(\beta_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N)!\cdot\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{h_4^p\cdot(1+|\xi|)^p}\right). \quad (4.11)
\end{aligned}
$$

Assim, se $h_6=2h_5$ e $C_3=2\pi C_0C_2$,

$$
|\partial_t^\alpha\widehat{u}(t,\xi)|\leq C_3\cdot h_6^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{h_4^p\cdot(1+|\xi|)^p}\right),\quad \forall\alpha\in\mathbb{N}_0^N,\ \ \forall\xi\in\mathbb{N}\setminus\left\{0,\frac{\lambda_{11}}{b_{10}}\right\}.
$$

Resta-nos provar que uma desigualdade como a de acima vale quando $\xi\in\left\{0,\dfrac{\lambda_{11}}{b_{10}}\right\}$. Verificando que $\widehat{u}(t,0)$ e $\widehat{u}\left(t,\dfrac{\lambda_{11}}{b_{10}}\right)$ pertencem a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, teremos obtido a estimativa desejada, a menos de possível troca das constantes C_3 e h_6.

Observe agora o seguinte: por (4.7), $\widehat{u}(t,0)$ e $\widehat{u}\left(t,\dfrac{\lambda_{11}}{b_{10}}\right)$ são soluções respectivamente dos seguintes sistemas:

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t_j}+\lambda_j\right)\widehat{u}(t,0)=\widehat{f}_j(t,0),\ \ \forall t\in\mathbb{T}^N,
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t_j}+i\frac{\lambda_{11}}{b_{10}}c_{j_0}+\lambda_j\right)e^{i\frac{\lambda_{11}}{b_{10}}C(t)}\widehat{u}\left(t,\frac{\lambda_{11}}{b_{10}}\right)=\widehat{f}_j\left(t,\frac{\lambda_{11}}{b_{10}}\right)e^{i\frac{\lambda_{11}}{b_{10}}C(t)},\ \ \forall t\in\mathbb{T}^N,
$$

com $j=1,2,\ldots,N$. Por conseguinte, basta mostrarmos que sistemas da forma

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t_j}+\mu_j\right),\ \ (j=1,2,\ldots,N),
$$

são globalmente $\mathscr{M}$-hipoelíticos em $\mathbb{T}^N$. Recordando a Definição 3.3, temos

$$
|P(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)|=\max_{1\leq j\leq N}|\xi_j-\mu_j|.
$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $M = \max_{1 \leq j \leq N} \{|\mu_j|\}$ e fixemos $\xi \in \mathbb{Z}^N$ tal que $|\xi| > N \cdot (M+1)$. Segue do Princípio da Casa dos Pombos a existência de $1 \leq j_0 \leq N$ tal que $|\xi_{j_0}| \geq M+1$. Logo,

$$|P(\xi)| \geq |\xi_{j_0} - \mu_{j_0}| \geq |\xi_{j_0}| - |\mu_{j_0}| > 1 \geq \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|)^n} \right)$$

Pelo Teorema 3.4, sistema é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico, encerrando a prova da suficiência de 1. $\square$

Demonstração. (2 implica na $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global de (4.3)). A menos de uma reordenação de índices, podemos considerar $J = \{1, 2, \ldots, k\}$. Consequentemente, o sistema é dado por

$$\begin{aligned}
L_{\lambda_1} &= \frac{\partial}{\partial t_1} + a_{10} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_1 \\
&\vdots \\
L_{\lambda_k} &= \frac{\partial}{\partial t_k} + a_{k0} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_k \\
L_{\lambda_{k+1}} &= \frac{\partial}{\partial t_{k+1}} + \left(a_{(k+1)_0} + i b_{(k+1)}(t_{k+1}) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{k+1} \\
&\vdots \\
L_{\lambda_N} &= \frac{\partial}{\partial t_N} + (a_{N0} + i b_N(t_N)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_N.
\end{aligned}$$

Denotaremos $t' = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $t'' = (t_{k+1}, \ldots, t_N)$ e $t = (t', t'')$.

Suponha $L_j u = f_j$ para $j = 1, 2, \ldots, N$, com $f_j \in \mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ e $u \in \mathscr{D}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$. Reescreveremos esta igualdade em termos da Série Parcial de Fourier em (t', x). Para cada j,

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{(\eta,\xi) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}} \widehat{u}(t'', \eta, \xi) \cdot e^{i(\eta,\xi)\cdot(t',x)} \\
f_j &= \sum_{(\eta,\xi) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}} \widehat{f}_j(t'', \eta, \xi) \cdot e^{i(\eta,\xi)\cdot(t',x)}
\end{aligned}$$

Assim,

$$i \left(\eta_j + a_{j0}\xi - i\lambda_j \right) \cdot \widehat{u}(t'', \eta, \xi) = \widehat{f}_j(t'', \eta, \xi), \ \forall (\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{k+1}, \tag{4.12}$$

para todo $t'' \in \mathbb{T}^{N-k}$ e $j = 1, 2, \ldots, k$.

Pelo Teorema 2.20, existem constantes C_1, h_1, ε_1 tais que, para qualquer $t'' \in \mathbb{T}^{N-k}$,

$$\left| \partial_{t''}^{\alpha} \widehat{f}_j(t'', \eta, \xi) \right| \leq C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \inf_{p \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{\varepsilon_1^p \cdot (1 + |\eta| + |\xi|)^p} \right),$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}_0^{N-k}$, $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ e $j = 1, 2, \dots k$. Aplicamos agora a hipótese, utilizando (4.2) para $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1}{H}$, com H proveniente de (2.11). Logo, encontramos $R > 0$ de modo que

$$\max_{1\leq j\leq k} |\eta_j + a_{j0}\xi - i\lambda_j| \geq \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n n!}{(\varepsilon_1/H)^n(1+|\xi|+|\eta|)^n}\right),$$

para todos $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{k+1}$; $|\xi| + |\eta| \geq R$.

Fixemos $(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ tal que $|\xi| + |\eta| \geq R$; então $\widehat{u}(t'', \eta, \xi) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N-K})$ e

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha_{t''}\widehat{u}(t'',\eta,\xi)| &\leq \frac{C_1\cdot h_1^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\inf\limits_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\dfrac{m_p\cdot p!}{\varepsilon_1^p\cdot(1+|\eta|+|\xi|)^p}\right)}{\max\limits_{1\leq j\leq k}|\eta_j + a_{j0}\xi - i\lambda_j|}\\
&\leq C_1 h_1^{|\alpha|} m_{|\alpha|}|\alpha|!\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p p!}{\varepsilon_1^p(1+|\eta|+|\xi|)^p}\right)\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{(\varepsilon_1/H)^n\,(1+|\xi|+|\eta|)^n}{m_n n!}\right)\\
&\leq C_1 h_1^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\cdot\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{(\varepsilon_1/H)^p\cdot(1+|\eta|+|\xi|)^p}\right),
\end{aligned}$$

aplicando o Lema 2.25.

Pela última desigualdade e pelo Teorema 2.21, só precisamos nos preocupar com $|\widehat{u}(t'', \eta, \xi)|$ para os casos em que $|\xi| + |\eta| < R$, ou seja, um número finito de pares. Nesta situação, analisamos somente as últimas $N - k$ parcelas do sistema:

$$\frac{\partial\widehat{u}(t'',\eta,\xi)}{\partial t_\ell} + [i\cdot c_\ell(t_\ell)\cdot\xi + \lambda_\ell]\,\widehat{u}(t'',\eta,\xi) = \widehat{f}_\ell(t'',\eta,\xi), \tag{4.13}$$

para todo $t'' \in \mathbb{T}^{N-k}$ e $\ell = k+1, \dots, N$.

Analogamente ao que foi feito em (4.7), se $D(t'') := \displaystyle\sum_{p=k+1}^{N}\left[\int_0^{t_\ell} c_\ell(s)ds - c_{\ell 0}\cdot t_\ell\right]$, o sistema acima é equivalente a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_\ell} + i\xi c_{\ell_0} + \lambda_\ell\right) e^{i\xi D(t'')}\widehat{u}(t'',\eta,\xi) = \widehat{f}_\ell(t'',\eta,\xi)e^{i\xi D(t'')},$$

com $t'' \in \mathbb{T}^{N-k}$, $\ell = k+1, \dots, N$, e cuja $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global é verificada da mesma forma que fizemos na prova de 1. Por conseguinte, com uma possível troca da constantes C_1 e h_1, deduzimos que

$$|\partial^\alpha_{t''}\widehat{u}(t'',\eta,\xi)| \leq C_1\cdot h_1^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\cdot\inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{\delta_1^p\cdot(1+|\eta|+|\xi|)^p}\right),$$

para quaisquer $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{k+1}$, $t'' \in \mathbb{T}^{N-k}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{N-k}$. Decorre do Teorema 2.21 que $u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$. $\square$

4.2 Condições Necessárias

Na seção anterior, encontramos duas condições que são individualmente suficientes (mas também podem ocorrer simultaneamente) para a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global do sistema (4.3). Nosso objetivo nesta seção é provar a necessidade de pelo menos uma delas. Isto é, mostrar que se ambas foram negadas, o sistema (4.3) não é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.

Para tal, será necessário separar as classes de funções ultradiferenciáveis em quasianalíticas e não quasianalíticas, seguindo a Observação 1.11. Serão aplicadas técnicas consideravelmente diferentes; para as não-quasianalíticas será fundamental a existência de funções de corte, enquanto que para as quasianalíticas iremos nos amparar no fato de que seus elementos possuem os zeros isolados, encontrando uma solução singular nos moldes das construídas em [8], [9] e [14]. Antes disto, iniciamos com resultados independentes da quasianaliticidade das classes.

Lema 4.7. *Considere $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2$ números reais e $a = a_1 + ia_2$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Seja*

$$S_{a,\lambda} := \{\xi \in \mathbb{Z}; i\xi a + \lambda \in i\mathbb{Z}\}.$$

Valem as seguintes afirmações:

1. *Se $(a, \lambda) \notin \mathbb{Q} \times i\mathbb{Q}$, $S_{a,\lambda}$ possui no máximo um único elemento.*

2. *Supondo $(a, \lambda) \in \mathbb{Q} \times i\mathbb{Q}$, $a_1 = \dfrac{p}{q}$ e $\lambda_2 = \dfrac{r}{s}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q, s \in \mathbb{N}$ e $mdc(p, q) = mdc(r, s) = 1$, teremos $S_{a,\lambda}$ infinito se, e somente se $q \in s\mathbb{N}$.*

Demonstração. Observe que $i\xi a + \lambda = i\xi(a_1 + ia_2) + \lambda_1 + i\lambda_2 = (\lambda_1 - a_2\xi) + i\,(a_1\xi + \lambda_2)$. Desta forma, ξ será elemento de S se, e somente se,

$$\begin{cases} \lambda_1 - a_2\xi & = 0; \\ a_1\xi + \lambda_2 & \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da primeira igualdade, concluímos que se $a_2 \neq 0$, a única solução possível será $\xi = \dfrac{\lambda_1}{a_2}$. Quando $a_2 = 0$, se $\lambda_1 \neq 0$ temos $S_{a,\lambda}$ vazio. Logo, só é possível que a primeira equação tenha infinitas soluções se $a_2 = \lambda_1 = 0$.

Suponha agora ξ_1, ξ_2 elementos distintos de $\mathbb{Z}$ tais que $(a_1\xi_1 + \lambda_2)$, $(a_1\xi_2 + \lambda_2)$ pertençam a $\mathbb{Z}$. Por conseguinte,

$$a_1 \cdot (\xi_1 - \xi_2) \in \mathbb{Z} \;\; \Rightarrow a_1 \in \mathbb{Q}.$$

Mais ainda, se $a_1 \in \mathbb{Q}$, é necessário que $\lambda_2 \in \mathbb{Q}$ para que $a_1\xi_1 + \lambda_2 \in \mathbb{Z}$. Portanto, a fim de que $S_{a,\lambda}$ seja infinito, é necessário que $(a, \lambda) \in \mathbb{Q} \times i\mathbb{Q}$, finalizando a prova de 1..

Provemos 2.: tomando $a_1 = \dfrac{p}{q}$ e $\lambda_2 = \dfrac{r}{s}$, com $mdc(p, q) = mdc(r, s) = 1$, queremos encontrar $\xi \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{p}{q} \cdot \xi + \frac{r}{s} \in \mathbb{Z}.$$

Multiplicando em ambos os lados por q, inferimos que $q \cdot \frac{r}{s} \in \mathbb{Z}$. Como $mdc(r, s) = 1$, segue que $q \in s\mathbb{N}$. Logo, 2. é condição necessária. Verifiquemos que a mesma é suficiente. Se $q = \alpha \cdot s$, com $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$\frac{p}{q} \cdot \xi + \frac{r}{s} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{p \cdot \xi + r \cdot \alpha}{q} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow p \cdot \xi + r \cdot \alpha \equiv 0 \mod q.$$

Como $mdc(p, q) = 1$, existe $k \in \mathbb{Z}$ de modo que $pk \equiv 1 \mod q$. Assim,

$$\frac{p}{q} \cdot \xi + \frac{r}{s} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \xi \equiv -k \cdot r \cdot \alpha \mod q.$$

Logo, se $q = \alpha \cdot s$, segue que $S_{a,\lambda} = -k \cdot r \cdot \alpha + q\mathbb{Z}$ e portanto $S_{a,\lambda}$ é infinito. □

Proposição 4.8. *Considere o sistema de equações dado por*

$$\widetilde{L}_{\lambda_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + a_j \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k \;\; \textit{in } \mathbb{T}^{k+1},$$

*com $a_j \in \mathbb{R}$ e $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Suponha que (a, λ) **não satisfaz a propriedade** $(\star)$, estabelecida na Definição 4.1. Então existe uma solução singular*

$$u = \sum_{p \in \mathbb{N}} \widehat{u}(t, \xi_p) \cdot e^{i\xi_p \cdot x},$$

satisfazendo as seguintes condições:

- $\{\xi_p\}_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ *ou* $\{\xi_p\}_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}_{<0}$, *e* $|\xi_p| \to \infty$*;*
- $\widehat{u}(t, \xi_p) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$*, para todo* $p \in \mathbb{N}$*;*
- $|\widehat{u}(t, \xi_p)| = 1, \;\; \forall t \in \mathbb{T}, \; \forall p \in \mathbb{N}$*;*
- $\forall \varepsilon > 0, \; \exists C, h > 0; \; \inf\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\dfrac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\xi_p|)^n} \right) |\partial^\alpha \widehat{u}(t, \xi_p)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!,$ *para todos* $\alpha \in \mathbb{N}_0^k, \; t \in \mathbb{T}^k$.

Demonstração. Pela hipótese, existe $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(\eta_p, \xi_p) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}$ de maneira que $|\eta_p| + |\xi_p| \to +\infty$ e

$$\max_{1\leq j\leq k} \left|\eta_{p_j} + a_j\xi_p - i\lambda_j\right| < \inf_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1 + |\eta_p| + |\xi_p|)^n} \right), \forall p \in \mathbb{N}.$$

Mostremos que $\{\xi_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ não é limitada. De fato, suponha a existência de $M > 0$ limitante superior da sequência; para cada $j = 1, 2, \ldots, k$, teríamos

$$\left|\eta_{p_j} + a_j\xi_p - i\lambda_j\right| < 1 \;\Rightarrow\; |\eta_{p_j}| < 1 + |a_j|\cdot|\xi|_p + |\lambda_j| \leq 1 + |a_j|\cdot M + |\lambda_j|, \tag{4.14}$$

e portanto $|\eta_p| < L$, para algum $L > 0$, contradizendo o fato de que $|\eta_p| + |\xi_p| \to +\infty$.

Portanto, podemos assumir que $|\xi_p|$ é crescente e $\lim|\xi_p| \to \infty$. Visto que $\xi_p \in \mathbb{Z}$, existem infinitos elementos da sequência em $\mathbb{N}$ ou em $\mathbb{Z}_{<0}$. Já que o outro caso é análogo, assumiremos que $\xi_p \in \mathbb{N}$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Definimos

$$u = \sum_{p\in\mathbb{N}} e^{i\eta_p t}\cdot e^{i\xi_p x}, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{T}.$$

Note que $|\widehat{u}(t,\xi_p)| = |e^{i\eta_p t}| = 1$, para todos $p \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{T}^k$ e logo $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{k+1}) \setminus \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{k+1})$. Em contrapartida,

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\widetilde{L}_{\lambda_j} u}(\eta_p,\xi_p)\right| &= \left|\widetilde{L}_{\lambda_j}(\eta_p,\xi_p)\right|\cdot|\widehat{u}(\eta_p,\xi_p)| \\
&= \left|\eta_{p_j} + a_j\xi_p - i\lambda_j\right| \\
&< \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+|\eta_p|+|\xi_p|)^n}\right),
\end{aligned}$$

o que nos permite deduzir (Corolário 2.14) que $\widetilde{L}_{\lambda_j} u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{k+1})$, para $j = 1, 2, \ldots, k$.

Por fim, fixemos $\varepsilon > 0$; como $\partial^\alpha\widehat{u}(t,\xi_p) = (i\eta_p)^\alpha\cdot e^{i\eta_p t}$. decorre da conta feita em (4.14) que

$$|\eta_p| = \sum_{j=1}^{k}|\eta_{p_j}| < k + \max_{1\leq j\leq k}|a_j|\cdot|\xi_p| + \max_{1\leq j\leq k}|\lambda_j| \leq (k+|a|+|\lambda|)\cdot(1+|\xi_p|),$$

denotando $|a| = \max_{1\leq j\leq k}|a_j|$ e $|\lambda| = \max_{1\leq j\leq k}|\lambda_j|$. Logo, se $h_1 = (k+|a|+|\lambda|)$,

$$\begin{aligned}
\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi_p|)^n}\right)|\partial^\alpha\widehat{u}(t,\xi_p)| &\leq \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi_p|)^n}\right)\cdot|\eta_p|^{|\alpha|} \\
&\leq \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi_p|)^n}\right)\cdot h_1^{|\alpha|}\cdot(1+|\xi_p|)^{|\alpha|} \\
&\leq \left(\frac{h_1}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!.
\end{aligned}$$

Para encerrar a prova, basta tomar então $C = 1$ e $h = \dfrac{h_1}{\varepsilon}$. □

Provaremos agora duas proposições com enunciados praticamente idênticos, com a diferença de que o primeiro será para classes não quase analíticas, enquanto que o segundo será para classes quase analíticas.

Proposição 4.9. *Sejam $\mathscr{M}$ uma* ***sequência não quase analítica*** *e $\widetilde{L}_\lambda$ o campo em $\mathbb{T}^2$ dado por*

$$\widetilde{L}_\lambda = \frac{\partial}{\partial t} + c(t)\frac{\partial}{\partial x} + \lambda,$$

para $\lambda \in \mathbb{C}$ dado por $\lambda_1 + i\lambda_2$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, e $c(t) = a_0 + ib(t)$, no qual $b(t)$ é uma função a valores reais, pertence a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$ e muda de sinal. Denotemos $S_{c_0,\lambda} = \{\xi \in \mathbb{Z};\ i\xi c_0 + \lambda \in i\mathbb{Z}\}$ como no Lema 4.7; existe então $u \in \mathscr{D}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$ que satisfaz as seguintes condições:

1. *$\widetilde{L}_\lambda u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$ e $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2) \setminus \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$.*

2. *$u = \underbrace{\sum_{\xi \in \mathbb{N}\cap S_{c_0,\lambda}} \hat{v}_1(t,\xi)e^{i\xi x}}_{v_1} + \underbrace{\sum_{\xi \in \mathbb{N}\setminus S_{c_0,\lambda}} \hat{v}_2(t,\xi)e^{i\xi x}}_{v_2}$, no qual $\hat{v}_1(t,\xi)$, $\hat{v}_2(t,\xi) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Além disso, é possível encontrar $t_0, t^* \in \mathbb{T}$ e $C_1 > 0$ de maneira que*

$$|\hat{v}_1(t^*,\xi)| = 1, \ \ \forall \xi \in \mathbb{N} \cap S_{c_0,\lambda}.$$
$$|\hat{v}_2(t_0,\xi)| \geq \frac{C_1}{\sqrt{\xi}}, \ \ \forall \xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}.$$

3. *Dado $\varepsilon > 0$, existem $C, h > 0$ tais que*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|)^n}\right) \cdot |\partial^\alpha \widehat{u}(t,\xi)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!,$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{T}$, $\xi \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. A prova do resultado será dividida em dois casos.
Caso 1: $b_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} b(s)ds \leq 0$. Seja H a seguinte função:

$$H : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{C};\ H(t,r) = a_0 \cdot r + i \cdot \int_{t-r}^{t} b(s)ds,$$

e denotemos $B_0 = \displaystyle\max_{t,r\in[0,2\pi]} \operatorname{Im} H = \max_{t,r\in[0,2\pi]} \int_{t-r}^{t} b(s)ds = \int_{t_0-r_0}^{t_0} b(s)ds$. Observe que

- $B_0 > 0$, ja que b muda de sinal..

- $r_0 \in (0,2\pi)$, pois $\displaystyle\int_{t_0-0}^{t_0} b(s)ds = 0 < B_0$ e

$$\int_{t_0-2\pi}^{t_0} b(s)ds = \int_0^{2\pi} b(s)ds = 2\pi \cdot b_0 \leq 0 < B_0.$$

- $b(t_0 - r_0) = 0$. Para verificar isto, suponhamos $b(t_0 - r_0) > 0$; neste caso, existirá $\delta > 0$ tal que

$$[r_0 - \delta, r_0 + \delta] \subset (0,2\pi), \ \ b > 0 \text{ em } (t_0 - r_0 - \delta, t_0 + r_0 + \delta),$$

e consequentemente

$$\int_{t_0-r_0-\delta}^{t_0} b(s)ds = \int_{t_0-r_0-\delta}^{t_0-r_0} b(s)ds + \int_{t_0-r_0}^{t_0} b(s)ds > \int_{t_0-r_0}^{t_0} b(s)ds = B_0,$$

o que comprova por absurdo que $b(t_0 - r_0) \leq 0$. Prova-se analogamente que $b(t_0 - r_0) \geq 0$.

- A menos de uma translação, podemos assumir $b(0) \neq 0$ e $t_0 \in (0, 2\pi)$.
- Temos $(t_0 - r_0) \in (-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi)$, visto que $b(t_0 - r_0) = 0$ e consideramos $b(0) \neq 0$.

Prosseguimos para a prova, assumindo que $t_0 - r_0 \in (0, 2\pi)$ (o outro caso é análogo). Tomemos $\delta > 0$ de modo que

$$I_\delta = [t_0 - r_0 - \delta, t_0 - r_0 + \delta] \subset (0, 2\pi).$$

Como $\mathscr{M}$ é não quase analítica, podemos tomar $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$ tal que $\varphi\big|_{I_{\delta/2}} \equiv 1$, $supp\ \varphi \subset I_\delta$ e $0 \leq \varphi \leq 1$. Para cada $\xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}$, definimos $\widehat{f}(t, \xi)$ como a extensão 2π-periódica de

$$\left(1 - e^{-2\pi(i\xi c_0 + \lambda)}\right) \cdot e^{-B_0\xi} \cdot e^{-(i\xi a_0+\lambda)(t-t_0)} \cdot \varphi(t), \quad t \in \mathbb{T}. \tag{4.15}$$

Visto que $b_0 \leq 0$ e $\xi > 0$, a expressão $1 - e^{-2\pi(i\xi c_0+\lambda)}$ é limitada por uma constante para toda $\xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}$. Escrevemos

$$f(t, x) := \sum_{\xi \in \mathbb{N}\setminus S_{c_0,\lambda}} \widehat{f}(t, \xi) \cdot e^{i\xi x}.$$

Decorre da definição que cada $\widehat{f}(t, \xi)$ é elemento de $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$. Mostremos agora que $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$:

$$\partial_t^\alpha \widehat{f}(t, \xi) = \left(1 - e^{-2\pi(i\xi c_0+\lambda)}\right) e^{-B_0\xi} e^{(i\xi a_0+\lambda)t_0} \left[\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [-(i\xi a_0 + \lambda)]^\beta e^{-(i\xi a_0+\lambda)t} \partial_t^{\alpha-\beta} \varphi(t)\right]$$

e portanto

$$\begin{aligned}\left|\partial_t^\alpha \widehat{f}(t, \xi)\right| &\leq C_1 \cdot e^{\lambda_1 t_0} \cdot e^{-B_0\xi} \left[\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |i\xi a_0 + \lambda|^\beta \cdot C_2 \cdot h_2^{\alpha-\beta} \cdot m_{\alpha-\beta} \cdot (\alpha - \beta)!\right] \\ &\leq [C_1 \cdot e^{\lambda_1 t_0} \cdot C_2] \cdot \left[e^{-B_0\xi} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[(|a_0| + |\lambda|)\, \xi\right]^\beta \cdot h_2^{\alpha-\beta} \cdot m_{\alpha-\beta} \cdot (\alpha - \beta)!\right],\end{aligned}$$

utilizando os fatos de que $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$ e $e^{-\lambda_1 t} \cdot \left(1 + e^{-2\pi\lambda_1}\right) \leq C_1$, para algum $C_1 > 0$.

Dados $n \in \mathbb{N}_0$ e $x \geq 0$, temos

$$e^{(1+x)} \geq \frac{(1+x)^n}{n!} \Rightarrow e^x \geq \frac{1}{e} \cdot \frac{(1+x)^n}{n!} \Rightarrow e^{-x} \leq e \cdot \frac{n!}{(1+x)^n} \Rightarrow e^{-x} \leq e \cdot \frac{m_n \cdot n!}{(1+x)^n},$$

permitindo-nos inferir que

$$e^{-(B_0/2)\xi} \leq e \cdot \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{[1 + (B_0/2)\xi]^n} \right) \leq e \cdot \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\gamma^n \cdot (1+\xi)^n} \right), \quad \gamma = \min \left\{ \frac{B_0}{2}, 1 \right\}.$$

Da desigualdade acima e recordando que $\xi^\gamma \cdot e^{-(B_0/2)\xi} \leq h_3^\gamma \cdot \gamma!$, para algum $h_3 > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \partial_t^\alpha \widehat{f}(t,\xi) \right| &\leq C_3 \cdot \left[e^{-(B_0/2)\xi} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [(|a_0| + |\lambda|)]^\beta \cdot \xi^\beta \cdot e^{-(B_0/2)\xi} \cdot h_2^{\alpha-\beta} \cdot m_{\alpha-\beta} \cdot (\alpha-\beta)! \right] \\
&\leq C_3 \cdot \left[e^{-(B_0/2)\xi} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [(|a_0| + |\lambda|)]^\beta \cdot h_3^\beta \cdot \beta! \cdot h_2^{\alpha-\beta} \cdot m_{\alpha-\beta} \cdot (\alpha-\beta)! \right] \\
&\leq C_4 \cdot \left[\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [(|a_0| + |\lambda|)]^\beta \cdot h_4^\alpha \cdot m_\alpha \cdot \alpha! \right] \\
&\leq C_4 \cdot h_4^\alpha \cdot m_\alpha \cdot \alpha! \left[\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [(|a_0| + |\lambda|)]^\beta \right],
\end{aligned}$$

se $C_3 = [C_1 \cdot e^{\lambda_1 t_0 + 1} \cdot C_2]$, $C_4 = e \cdot C_3$ e $h_4 = \max\{h_2, h_3\}$. Deste modo, tomando $C_5 = C_4$ e $h_5 = 2h_4 \cdot \max\{1, |a_0| + |\lambda|\}$, deduzimos que

$$\left| \partial_t^\alpha \widehat{f}(t,\xi) \right| \leq C_5 \cdot h_5^\alpha \cdot m_\alpha \cdot \alpha! \cdot \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\gamma^n \cdot (1+\xi)^n} \right),$$

verificando que $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$, pelo Teorema 2.21.

O próximo passo é encontrar $v_2 \in \mathscr{D}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$ de forma que $\widetilde{L}_\lambda(v_2) = f$. Quando $\xi \leq 0$ ou $\xi \in \mathbb{N} \cap S_{c_0,\lambda}$, tomamos $\widehat{v_2}(t,\xi) = 0$. Caso contrário, $i\xi c_0 + \lambda \notin i\mathbb{Z}$, e decorre de (4.8) que

$$\widehat{v_2}(t,\xi) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi(i\xi c_0 + \lambda)}} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda\tau} \cdot e^{-i\xi H(t,\tau)} \cdot \widehat{f}(t-\tau,\xi) d\tau,$$

no qual $H(t,\tau) = \displaystyle\int_{t-\tau}^t c(s)ds = a_0\tau + i \cdot \int_{t-\tau}^t b(s)ds.$

Por $\widehat{f}(t-\tau,\xi)$ e H serem 2π-periódicas em t, o mesmo ocorre para $\widehat{v_2}(t,\xi)$. Além disso, para $t \in \mathbb{T}$, decorre de (4.15) que

$$\widehat{v_2}(t,\xi) = e^{\lambda(t_0 - t)} \cdot e^{-i\xi a_0(t-t_0)} \cdot \int_0^{2\pi} \exp\left[\xi \cdot \left(\int_{t-\tau}^t b(s)ds - B_0 \right) \right] \cdot \varphi(t-\tau) d\tau.$$

Então $\widehat{v_2}(t,\xi) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$ para cada $\xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}$ e, como $\displaystyle\int_{t-\tau}^t b(s)ds - B_0 \leq 0$, inferimos que $|\widehat{v_2}(t,\xi)| \leq C$, para algum $C > 0$. Logo

$$v_2 := \sum_{\xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}} \widehat{v_2}(t,\xi) \cdot e^{i\xi x}$$

pertence a $\mathscr{D}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$ e $\widetilde{L}_\lambda v_2 = f$, por construção.

Estudemos o comportamento de $\widehat{v_2}(t_0,\xi)$ para $\xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}$. Note primeiramente que, pela propriedade do suporte de φ e fazendo a substituição de variável $\theta = \tau - r_0$, obtemos que

$$\widehat{v_2}(t_0,\xi) \geq \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \exp\left[\xi \cdot \left(\int_{t_0-r_0-\theta}^{t_0} b(s)ds - B_0\right)\right] d\theta. \tag{4.16}$$

Definimos a função

$$\rho : [0,2\pi] \to \mathbb{R};\;\; \rho(\theta) = \int_{t_0-\theta}^{t_0} b(s)ds - B_0,$$

e reescrevemos (4.16) como

$$\widehat{v_2}(t_0,\xi) \geq \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e^{\rho(\theta+r_0)\cdot\xi}\, d\theta.$$

Observe que $\rho(r_0) = 0$ e $\rho'(r_0) = b(t_0 - r_0) = 0$. Apliquemos então a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange, de ordem 2, centrada em r_0:

$$\rho(r_0+h) = \rho''(r_0+\omega(h))\cdot\frac{h^2}{2},\quad h\in[-\delta,\delta],\;\; \text{com } \omega(h) \text{ entre } 0 \text{ e } h.$$

Se $A = \sup_{\theta\in[0,2\pi]}\left|\dfrac{\rho''(\theta)}{2}\right|$ temos, para algum $C_1 > 0$,

$$\widehat{v_2}(t_0,\xi) \geq \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e^{\rho''(r_0+\omega(\theta))\cdot\frac{\theta^2}{2}\cdot\xi}\, d\theta \geq \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e^{-A\cdot\theta^2\cdot\xi}\, d\theta \geq \frac{C_1}{\sqrt{\xi}} \geq \frac{C_1}{1+\sqrt{\xi}}.$$

Por conseguinte, se $\mathbb{N}\setminus S_{c_0,\lambda}$ é infinito, para quaisquer $\varepsilon, M > 0$ existe $\xi_0 \in \mathbb{N}\setminus S_{c_0,\lambda}$ tal que

$$\widehat{v_2}(t_0,\xi_0) > M\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon\cdot(1+\xi_0)}\right) \geq M\cdot\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+\xi_0)^n}\right),$$

o que nos mostra que $v_2 \notin \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$, pelo Teorema 2.20.

Estimemos então $\widehat{v_2}(t,\xi)$ e suas derivadas:

$$\partial_t^\alpha \widehat{v_2}(t,\xi) = \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int_0^{2\pi}\partial_t^{\alpha-\beta}\exp\left[\xi\left(\int_{t-\tau}^{t} b(s)ds - B_0\right)\right]\partial_t^\beta\left[e^{-(i\xi a_0+\lambda)(t-t_0)}\varphi(t-\tau)\right]d\tau. \tag{4.17}$$

A igualdade acima nos leva a estudar o termo $\partial_t^\beta\left[e^{-(i\xi a_0+\lambda)(t-t_0)}\cdot\varphi(t-\tau)\right]$:

$$\left|\partial_t^\beta\left[e^{-(i\xi a_0+\lambda)(t-t_0)}\cdot\varphi(t-\tau)\right]\right| \leq \sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\cdot|i\xi a_0+\lambda|^\gamma\cdot e^{\lambda\cdot(t_0-t)}\cdot C_2\cdot h_2^{\beta-\gamma}\cdot m_{\beta-\gamma}\cdot(\beta-\gamma)!.$$

Dado $\varepsilon > 0$, denotamos

$$(\star) := \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{(\varepsilon/H)^n\cdot(1+|\xi|)^n}\right)\cdot\left|\partial_t^\beta\left[e^{-(i\xi a_0+\lambda)(t-t_0)}\cdot\varphi(t-\tau)\right]\right|.$$

Então

$$
\begin{aligned}
(\star) &\leq C_3 h_2^{\beta} \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} (|a_0|+|\lambda|)^{\gamma}(1+|\xi|)^{\gamma} \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{(\varepsilon/H)^n\cdot(1+|\xi|)^n}\right)\cdot m_{\beta-\gamma}\cdot(\beta-\gamma)!\\
&\leq C_3\cdot h_3^{\beta}\cdot\sum_{\gamma\leq\beta}\binom{\beta}{\gamma}\cdot(1+|\xi|)^{\gamma}\cdot\frac{m_\gamma\cdot\gamma!}{(1+|\xi|)^{\gamma}\cdot(\varepsilon/H)^{\gamma}}\cdot m_{\beta-\gamma}\cdot(\beta-\gamma)!\\
&\leq C_3\cdot h_4^{\beta}\cdot m_\beta\cdot(\beta)!, \qquad (4.18)
\end{aligned}
$$

para $C_3 = C_2\cdot\sup\limits_{t\in\mathbb{T}} e^{\lambda(t_0-t)}$, $h_3 = h_2\cdot\max\{1,(|a_0|+|\lambda|)\}$ and $h_4 = 2\cdot h_3\cdot\dfrac{H}{\varepsilon}$.

Por outro lado, seja

$$
(\star\star) = \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{(\varepsilon/H)^n\cdot(1+|\xi|)^n}\right)\cdot\left|\partial_t^{\alpha-\beta}\exp\left[\xi\cdot\left(\int_{t-\tau}^{t} b(s)ds - B_0\right)\right]\right|
$$

e $\omega(t,\tau) := \left(\int_{t-\tau}^{t} b(s)ds - B_0\right)$; como $\xi\cdot\omega(t,\tau)\leq 0$, com um processo semelhante ao usado para obter (4.10), concluímos que

$$
\left|\partial_t^{\alpha-\beta}e^{\xi\cdot\omega(t,\tau)}\right| \leq h_1^{\alpha-\beta}\cdot m_{\alpha-\beta}\cdot\sum_{\Delta(\alpha-\beta)}\frac{(\alpha-\beta)!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{\alpha-\beta}!}\cdot\frac{[C_1\cdot(1+|\xi|)]^{k_1+\ldots+k_{\alpha-\beta}}}{m_{k_1+\ldots+k_{\alpha-\beta}}}.
$$

Por conseguinte,

$$
\begin{aligned}
(\star\star) &\leq h_1^{\alpha-\beta} m_{\alpha-\beta}\sum_{\Delta(\alpha-\beta)}\frac{(\alpha-\beta)!}{k_1!\ldots k_{\alpha-\beta}!}\frac{[C_1(1+|\xi|)]^{k_1+\ldots+k_{\alpha-\beta}}}{m_{k_1+\ldots+k_{\alpha-\beta}}}\\
&\quad\times\frac{m_{k_1+\ldots+k_{\alpha-\beta}}(k_1+\ldots+k_{\alpha-\beta})!}{(\varepsilon/H)^{k_1+\ldots+k_{\alpha-\beta}}(1+|\xi|)^{k_1+\ldots+k_{\alpha-\beta}}}\\
&\leq h_1^{\alpha-\beta}\cdot m_{\alpha-\beta}\cdot(\alpha-\beta)!\cdot\sum_{\Delta(\alpha-\beta)}\frac{(k_1+\ldots+k_{\alpha-\beta})!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_{\alpha-\beta}!}\cdot\left(\frac{C_1\cdot H}{\varepsilon}\right)^{k_1+\ldots+k_{\alpha-\beta}}\\
&\leq h_5^{\alpha-\beta}\cdot m_{\alpha-\beta}\cdot(\alpha-\beta)!, \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

tomando $h_5 = h_1\cdot\left(1+\dfrac{C_1\cdot H}{\varepsilon}\right)$ e aplicando o Lema 4.5.

Associando o Lema 2.25 a (4.17), (4.18) e (4.19), inferimos que

$$
\begin{aligned}
\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n n!}{\varepsilon^n(1+|\xi|)^n}\right)|\partial_t^{\alpha}\widehat{v_2}(t,\xi)| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int_0^{2\pi}\underbrace{\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n n!}{(\varepsilon/H)^n(1+|\xi|)^n}\right)\left|\partial_t^{\alpha-\beta}e^{\xi\omega(t,\tau)}\right|}_{(\star\star)}\\
&\quad\times\underbrace{\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n n!}{(\varepsilon/H)^n(1+|\xi|)^n}\right)\left|\partial_t^{\beta}\left[e^{-(i\xi a_0+\lambda)(t-t_0)}\varphi(t-\tau)\right]\right|}_{(\star)}d\tau\\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int_0^{2\pi} h_5^{\alpha-\beta}m_{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)!C_3h_4^{\beta}m_\beta\beta!\,d\tau\\
&\leq C_6\cdot h_6^{\alpha}\cdot m_\alpha\cdot\alpha!, \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

se $C_6 = 2\pi C_3$ e $h_6 = 2\max\{h_4, h_5\}$. Logo

$$\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|)^n}\right) \cdot |\partial_t^\alpha \widehat{v_2}(t,\xi)| \leq C_6 \cdot h_6^\alpha \cdot m_\alpha \cdot \alpha!, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0,$$

para todos $t \in \mathbb{T}$, $\xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}$.

Provadas todas as propriedades enunciadas de v_2, prosseguimos para v_1. Quando $\mathbb{N} \cap S_{c_0,\lambda} = \emptyset$, não há nada para provar. No caso em que $N \cap S_{c_0,\lambda} = \{\xi^*\}$, tomamos

$$\widehat{v_1}(t,\xi^*) = 1 \;\Rightarrow\; v_1(t,x) = e^{i\xi^* x}, \;\; \forall (t,x) \in \mathbb{T}^2.$$

Neste caso, $v_1 \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$, $v_2 \notin \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$,

$$u := (v_1 + v_2) \in \mathscr{D}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2) \setminus \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2), \;\; \widetilde{L}_\lambda(u) = \widetilde{L}_\lambda v_1 + \widetilde{L}_\lambda v_2 \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2),$$

e facilmente se verifica que as outras propriedades enunciadas são satisfeitas.

Resta-nos o caso em que $S_{c_0,\lambda} \cap \mathbb{N}$ é infinito. Pelo Lema 4.7,

$$b_0 = 0, a_0 = \frac{p}{q} \text{ e } \mathbb{N} \cap S_{c_0,\lambda} = \{w_0 + mq;\; m \in \mathbb{N}_0\}, \text{ para algum } w_0 \in \mathbb{Z}.$$

Como $b_0 = 0$,

$$B(t) = \int_0^t b(s)\, ds \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}).$$

Tomamos $t^* \in \mathbb{T}$ tal que $B(t^*) \geq B(t),\ \forall t \in \mathbb{T}$, e definimos

$$v_1 = \sum_{\xi\in\mathbb{N}\cap S} \left[e^{-(i\xi c_0+\lambda)t} \cdot e^{\xi\cdot(B(t)-B(t^*))}\right] e^{i\xi x}.$$

Dado que $B(t) - B(t^*) \leq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{N} \cap S_{c_0,\lambda}$,

$$|\widehat{v_1}(t,\xi)| = \left|e^{-(i\xi c_0+\lambda)t}\right| \cdot e^{\xi\cdot(B(t)-B(t^*))} \leq \left|e^{-(i\xi c_0+\lambda)t}\right| = 1,$$

pois $(i\xi c_0 + \lambda) \in i\mathbb{Z}$, o que nos permite concluir que $v_1 \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$. Além disso,

$$|\widehat{v_1}(t^*,\xi)| = 1, \;\; \forall \xi \in \mathbb{N} \cap S_{c_0,\lambda}, \;\; \Rightarrow \;\; u := v_1 + v_2 \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2) \setminus \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2),$$

e

$$\begin{aligned} L_\lambda v_1 &= \sum_{\xi\in\mathbb{N}\cap S} \left[-(i\xi c_0+\lambda) + b(t)\xi + (a_0 + ib(t))\, i\xi + \lambda\right] \left[e^{-(i\xi c_0+\lambda)t} \cdot e^{\xi\cdot(B(t)-B(t^*))}\right] e^{i\xi x} \\ &= \left[-ia_0\xi - \lambda + b(t)\xi + ia_0\xi - b(t)\xi + \lambda\right] \left[e^{-(i\xi c_0+\lambda)t} \cdot e^{\xi\cdot(B(t)-B(t^*))}\right] e^{i\xi x} = 0. \end{aligned}$$

O argumento utilizado para o comportamento de $\widehat{v_1}(t,\xi)$ e suas derivadas é análogo ao aplicado no estudo de $\widehat{v_2}(t,\xi)$. Está provada a afirmação para o primeiro caso.

Caso 2: $b_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} b(s)ds \geq 0$. Aqui a construção de v_2 é semelhante, mas possui diferenças que merecem destaque. Por isso, apresentaremos um breve resumo dos passos tomados.

Iniciamos com a definição de

$$\widetilde{H} : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C};\ \widetilde{H}(t, r) = a_0 r + i \int_t^{t+r} b(s)ds,$$

e denotamos

$$\widetilde{B}_0 = \min_{t,r\in[0,2\pi]} \int_t^{t+r} b(s)ds = \int_{t_0}^{t_0+r_0} b(s)ds < 0.$$

De maneira similar ao primeiro caso, podemos assumir que

$$r_0 \in (0, 2\pi),\ b(t_0 + r_0) = 0,\ b(0) \neq 0,\ t_0 \in (0, 2\pi) \text{ e } t_0 + r_0 \in (0, 2\pi).$$

Escolhemos $\delta > 0$ de modo que

$$I_\delta = [t_0 + r_0 - \delta, t_0 + r_0 + \delta] \subset (0, 2\pi),$$

e $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(0, 2\pi)$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\varphi\big|_{I_{\delta/2}} \equiv 1,\ \ \text{supp}\, \varphi \subset I_\delta \text{ e } 0 \leq \varphi \leq 1.$$

Para cada $\xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}$ e $t \in \mathbb{T}$, tomamos $\widehat{f}(t, \xi)$ como a extensão 2π-periódica de

$$(e^{2\pi(i\xi c_0+\lambda)} - 1) \cdot e^{\widetilde{B}_0\xi} \cdot e^{(i\xi a_0+\lambda)(t_0-t)} \cdot \varphi(t).$$

Segue de (4.9) que

$$\widehat{v_2}(t, \xi) = e^{(i\xi a_0+\lambda)(t_0-t)} \int_0^{2\pi} e^{\xi(\widetilde{B}_0 - \int_t^{t+r} b(s)ds)} \varphi(t + r)dr,$$

e construímos v_2 de forma análoga ao que foi feito no primeiro caso.

Por outro lado, observe que a construção de v_1 não é diferente para o Caso 2, visto que a mesma só faz sentido para a situação em que $b_0 = 0$. □

Observação 4.10. *Com as hipóteses da Proposição 4.9, é possível construir uma solução singular u satisfazendo as mesmas propriedades, com as frequências parciais de Fourier definidas em $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$. Isto é,*

$$u = \underbrace{\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_{<0}\cap S_{c_0,\lambda}} \hat{v}_1(t, \xi)e^{i\xi x}}_{v_1} + \underbrace{\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_{<0}\setminus S_{c_0,\lambda}} \hat{v}_2(t, \xi)e^{i\xi x}}_{v_2}.$$

Para a construção de v_1 quando $S_{c_0,\lambda} \cap \mathbb{Z}_{<0}$ é infinito, definimos $B(t) = \displaystyle\int_0^t b(s)\, ds$, que pertence a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$ (pois $b_0 = 0$) e escolhemos $t^* \in \mathbb{T}$ tal que $B(t^*) \leq B(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Consideramos então

$$v_1(t,x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_{<0} \cap S_{c_0,\lambda}} e^{-(i\xi c_0 + \lambda)t} e^{\xi(B(t)-B(t^*))} e^{i\xi x}.$$

Observe que a escolha do mínimo de B foi feita para que o sinal de $\xi(B(t) - B(t^*))$ seja negativo. O resto do processo é análogo.

Passamos para a construção de v_2; se $b_0 \leq 0$, definimos

$$\widetilde{H} : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{C};\ \widetilde{H}(t,r) = a_0 r + i \int_t^{t+r} b(s)ds,$$

e denotamos

$$\widetilde{B}_0 = \max_{t,r\in[0,2\pi]} \int_t^{t+r} b(s)ds = \int_{t_0}^{t_0+r_0} b(s)ds > 0.$$

Novamente pode ser mostrado que $r_0 \in (0,2\pi)$, $b(t_0 + r_0) = 0$; assumimos também que $b(0) \neq 0$, $t_0 \in (0,2\pi)$ e $t_0 + r_0 \in (0,2\pi)$.

Tomamos então $\delta > 0$ de modo que

$$I_\delta = [t_0 + r_0 - \delta, t_0 + r_0 + \delta] \subset (0,2\pi)$$

e $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(0,2\pi)$ de maneira que $\varphi\big|_{I_{\delta/2}} \equiv 1$, supp $\varphi \subset I_\delta$ e $0 \leq \varphi \leq 1$. Para $\xi \in \mathbb{Z}_{<0} \setminus S_{c_0,\lambda}$, $\widehat{f}(t,\xi)$ é escolhido como a extensão 2π-periódica de

$$(e^{2\pi(i\xi c_0+\lambda)} - 1)e^{\widetilde{B}_0\xi} e^{(i\xi a_0+\lambda)(t_0-t)}\varphi(t).$$

Segue de (4.9) que

$$\widehat{v_2}(t,\xi) = e^{(i\xi a_0+\lambda)(t_0-t)} \int_0^{2\pi} e^{\xi(\widetilde{B}_0 - \int_t^{t+r} b(s)ds)} \varphi(t+r)dr, \quad t \in [0,2\pi].$$

Observe que escolhemos $\tilde{H}$ como no Caso 2 da Proposição 4.9 pois em ambas as situações foi usada a fórmula (4.9) (por b_0 e ξ terem mesmo sinal). A diferença, devido à troca de sinal de ξ, foi a escolha do máximo de Im $\tilde{H}$, ao invés do mínimo. Seguindo a linha de raciocínio, quando $b_0 \geq 0$ trabalhamos com a função H usada no Caso 1 da Proposição 4.9, tomamos o máximo de sua parte imaginária e utilizamos (4.8) para descrever $\hat{v}_2(t,\xi)$ após definirmos $\hat{f}(t,\xi)$ de maneira análoga. Em ambos os casos as estimativas requeridas decorrem de um processo análogo ao que foi feito na Proposição 4.9 e por tal motivo não vemos a necessidade de serem repetidas.

Proposição 4.11. *Sejam $\mathscr{M}$ uma* ***sequência quase analítica*** *e $\widetilde{L}_\lambda$ o campo em $\mathbb{T}^2$ dado por*

$$\widetilde{L}_\lambda = \frac{\partial}{\partial t} + c(t)\frac{\partial}{\partial x} + \lambda,$$

para $\lambda \in \mathbb{C}$ dado por $\lambda_1 + i\lambda_2$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, e $c(t) = a_0 + ib(t)$, no qual $b(t)$ é uma função a valores reais, pertence a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$ e muda de sinal. Denotemos $S_{c_0,\lambda} = \{\xi \in \mathbb{Z};\ i\xi c_0 + \lambda \in i\mathbb{Z}\}$ como no Lema 4.7; existe $u \in \mathscr{D}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$ que satisfaz as seguintes condições:

1. *$\widetilde{L}_\lambda u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$ e $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2) \setminus \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$.*

2. $u = \underbrace{\sum_{\xi \in \mathbb{N} \cap S_{c_0,\lambda}} \hat{v}_1(t,\xi)e^{i\xi x}}_{v_1} + \underbrace{\sum_{\xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}} \hat{v}_2(t,\xi)e^{i\xi x}}_{v_2}$*, no qual $\hat{v}_1(t,\xi)$, $\hat{v}_2(t,\xi) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Além disso, é possível encontrar $t_0, t^* \in \mathbb{T}$ e $C_1 > 0$ de maneira que*

$$|\hat{v}_1(t^*,\xi)| = 1, \ \ \forall \xi \in \mathbb{N} \cap S_{c_0,\lambda}.$$
$$|\hat{v}_2(t_0,\xi)| \geq \frac{C_1}{\sqrt{\xi}}, \ \ \forall \xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}.$$

3. *Dado $\varepsilon > 0$, existem $C, h > 0$ tais que*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\varepsilon^n \cdot (1+|\xi|)^n} \right) \cdot |\partial^\alpha \widehat{u}(t,\xi)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!,$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{T}$, $\xi \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Iniciamos a prova destacando que a construção de v_1 feita na Proposição 4.9 não depende da quase analiticidade das classes e por isso somente temos de apresentar v_2 que satisfaça as condições estabelecidas.

Como $\mathscr{M}$ é quase analítica, os zeros de b são isolados. Além disso, pela periodicidade de b, podemos assumir (com uma possível translação) que

$$b(0) = 0,\ b(x) < 0 \text{ se } x \in [-\delta, 0) \text{ e } b(x) > 0 \text{ se } x \in (0, \delta], \ \text{ para algum } \delta > 0. \tag{4.21}$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$, consideremos

$$A(t) = a_0 \cdot t,\ \ B(t) = \int_0^t b(s)ds,\ \ C(t) = A(t) + iB(t).$$

Seja $t_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $B(t_0) \geq B(t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ e denotemos $M = B(t_0)$. Note que $M > 0$, $B(0) = 0$ e

$$B(2\pi) = B(2\pi - \delta) + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} b(s)ds = B(2\pi - \delta) + \int_{-\delta}^{0} b(s)ds < B(2\pi - \delta),$$

o que nos permite concluir que $t_0 \in (0, 2\pi)$. Dividiremos a prova em duas partes, de acordo com o sinal da média de $b(t)$.

Caso 1: $b_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} b(s)ds \leq 0$ e assim $\xi \cdot b_0 \leq 0$. Logo, para g_1 que será construída adiante, definiremos os coeficientes parciais de Fourier de v_2 como em (4.8). Considere

$$\psi_1 : \mathbb{T} \to \mathbb{C};\ \psi_1(t) = M + K \cdot (1 - \cos t) + i \cdot (a_0 \cdot \sin(t - t_0)),$$

para $K >> 0$ que será escolhido posteriormente. Dado $\xi \in \mathbb{N}$, definimos

$$\alpha_\xi = \left(1 - e^{-2\pi(i\xi c_0 + \lambda)}\right);$$

note que esta sequência é limitada. Estabelecemos

$$\widehat{g_1}(t, \xi) = \alpha_\xi \cdot e^{-\xi\psi_1(t)} \cdot e^{-i\lambda_2 t} \in C^\omega(\mathbb{T}),\ \ \forall \xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}, \tag{4.22}$$

e

$$g_1(t, x) = \sum_{\xi \in \mathbb{N}\setminus S_{c_0,\lambda}} \widehat{g_1}(t, \xi) \cdot e^{i\xi x} = e^{-i\lambda_2 t} \cdot \sum_{\xi \in \mathbb{N}\setminus S_{c_0,\lambda}} \alpha_\xi \cdot e^{-\xi\psi_1(t)} \cdot e^{i\xi x}.$$

Pelo fato de M ser positivo e $\left|e^{-\psi_1(t)\xi}\right| \leq e^{-M\xi}$, segue que g_1 pertence a $C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e por conseguinte a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$.

Suponha a existência de $v_2 \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$ tal que $\widetilde{L}_\lambda v_2 = g_1$. Então para cada $t \in \mathbb{T}$ e $\xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}$,

$$(\partial_t + i\xi c(t) + \lambda)\,\widehat{v_2}(t, \xi) = \widehat{g_1}(t, \xi) \Leftrightarrow (\partial_t + i\xi c_0 + \lambda)\, e^{i\xi\tilde{C}(t)}\widehat{v_2}(t, \xi) = e^{i\xi\tilde{C}(t)}\widehat{g_1}(t, \xi),$$

no qual $\tilde{C}(t) = C(t) - (a_0 + ib_0)$. Pela própria definição do conjunto $S_{c_0,\lambda}$, a EDO acima possui uma única solução para cada $\xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}$, dada por

$$\widehat{v_2}(t, \xi) = \frac{1}{\alpha_\xi}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda s} \cdot e^{-i\xi\cdot(C(t) - C(t-s))} \cdot \widehat{g_1}(t - s, \xi)ds. \tag{4.23}$$

Usando (4.22), (4.23) e a definição de ψ_1, obtemos

$$\widehat{v_2}(t, \xi) = e^{-i\lambda_2 t} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-\lambda_1 s} \cdot e^{\xi\cdot[B(t) - B(t-s) - M - K\cdot(1-\cos(t-s))]} \cdot e^{i\xi a_0\cdot[t_0 - s - \sin(t-s)]}ds. \tag{4.24}$$

Mostremos que para $K >> 0$ a função

$$\varphi_1 : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R};\ \varphi_1(t, s) = B(t) - B(t - s) - M - K \cdot (1 - \cos(t - s)), \tag{4.25}$$

não assume valores positivos. Se $t = s$, $\varphi_1(t, t) = B(t) - M \leq 0$. Inferimos de (4.21) que $B(\sigma) > 0$ quando $\sigma \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$. Logo,

$$\varphi_1(t, s) \leq B(t) - B(t - s) - M \leq -B(t - s) < 0,\ \ \text{para } 0 < |t - s| < \delta. \tag{4.26}$$

Por outro lado, $\varphi_1(0, 2\pi) = B(2\pi) - M < 0$ and $\varphi_1(2\pi, 0) = -M < 0$. Assim, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ de modo que

$$2\pi - \varepsilon < |t - s|, \ \ (t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \Rightarrow \ \varphi_1(t, s) < 0. \tag{4.27}$$

Por fim, tomemos $m = \min\{(1 - \cos \tau); \ \delta \leq |\tau| \leq 2\pi - \varepsilon\} > 0$. Então

$$\delta \leq |t-s| \leq 2\pi - \varepsilon \ \Rightarrow \frac{B(t) - B(t-s) - M}{1 - cos(t-s)} \leq \frac{-B(t-s)}{m} \leq \frac{1}{m} \cdot \max_{t,s \in [0,2\pi]} |B(t-s)| := D. \tag{4.28}$$

Associando (4.26) a (4.27) e (4.28), concluímos que $\varphi_1 \leq 0$ se $K \geq D$.

Escrevemos agora

$$v_2 = \sum_{\xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}} \widehat{v_2}(t, \xi) e^{ix\xi};$$

como $\varphi_1 \leq 0$, a sequência $|\widehat{v_2}(t, \xi)|$ é limitada e assim $v_2 \in D'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$. A fim de estimar as derivadas dos coeficientes de Fourier de v_2, denotamos

$$\Phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}; \ \ \Phi(t, s) = a_0 \cdot [t_0 - s - \sin(t - s)] - i\varphi_1(t, s)$$

com φ_1 dada por (4.25). Então

$$\widehat{v_2}(t, \xi) = \int_0^{2\pi} e^{-\lambda_1 s} \cdot e^{-i\lambda_2 t} \cdot e^{i\xi \cdot \Phi(t,s)} ds,$$

e por conseguinte

$$\partial_t^\alpha v_2(t, \xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda_1 s} \cdot \partial^{\alpha - \beta} \left(e^{-i\lambda_2 t}\right) \cdot \partial_t^\beta \left(e^{i\xi \cdot \Phi(t,s)}\right) ds.$$

Observe que as derivadas com relação a t de Φ podem ser estimadas uniformemente com relação a s. Desta maneira, com um argumento análogo ao usado para demonstrar (4.10), provamos que dado $\varepsilon > 0$, existem $C'_\varepsilon, h'_\varepsilon > 0$ tais que

$$\inf_{p \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{\varepsilon^p \cdot (1 + |\eta|)^p} \right) \cdot \left| \partial_t^\beta e^{i\xi\Phi(t,s)} \right| \leq C'_\varepsilon \cdot h'^\beta_\varepsilon \cdot m_\beta \cdot \beta!, \ \ \forall t, s \in [0, 2\pi], \ \forall \beta \in \mathbb{N}_0.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \inf_{p \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p p!}{\varepsilon^p (1 + |\eta|)^p} \right) |\partial_t^\alpha v_2(t, \xi)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \int_0^{2\pi} |e^{-\lambda_1 s}| \left| \partial_t^{\alpha - \beta} \left(e^{-i\lambda_2 t}\right) \right| C'_\varepsilon h'^\beta_\varepsilon m_\beta \beta! \, ds \\ &\leq C_\varepsilon \cdot h_\varepsilon^\alpha \cdot m_\alpha \cdot \alpha!, \end{aligned}$$

com $C_\varepsilon = 2\pi \cdot \max_{s \in [0,2\pi]} |e^{-\lambda_1 s}| \cdot C'_\varepsilon$ e $h_\varepsilon = 2 \cdot \max\{1, h'_\varepsilon\} \cdot \max\{1, |\lambda_2|\}$.

Por fim, se $\mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda}$ é infinito, estudemos o comportamento assintótico de $\widehat{v_2}(t_0, \xi)$. Segue de (4.24) que

$$\begin{aligned}\widehat{v_2}(t_0,\xi) &= e^{-i\lambda_2 t_0} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-\lambda_1 s} \cdot e^{\xi\cdot[-B(t_0-s)-K\cdot(1-\cos(t_0-s))]} \cdot e^{i\xi a_0\cdot[t_0-s-\sin(t_0-s)]} ds \\ &= e^{-\lambda t_0} \cdot \int_{t_0-2\pi}^{t_0} e^{\lambda_1 \sigma} \cdot e^{-\xi\cdot[B(\sigma)+K\cdot(1-\cos\sigma)]} \cdot e^{i\xi a_0\cdot[\sigma-\sin(\sigma)]} d\sigma, \end{aligned} \tag{4.29}$$

com a substituição $\sigma = t_0 - s$.

Lembrando que $B(\sigma)$ é positivo no conjunto $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$, tomamos

$$\begin{aligned} m^* &= \min\{B(\sigma);\ \sigma \in [t_0 - 2\pi, -\delta] \cup [\delta, t_0]\}, \\ \overline{m} &= \min\{1-\cos\sigma;\ \sigma \in [t_0 - 2\pi, -\delta] \cup [\delta, t_0]\} > 0. \end{aligned}$$

Com um possível aumento de K, obtemos

$$B(\sigma) + K(1-\cos\sigma) \geq m^* + K \cdot \overline{m} > 0, \ \ \forall \sigma \in [t_0 - 2\pi, -\delta] \cup [\delta, t_0].$$

Logo $B(0) + K(1-\cos 0) = 0$ e $B(\sigma) + K(1-\cos\sigma) > 0$ para todo $\sigma \in [t_0 - 2\pi, t_0]$ diferente de 0.

Seja

$$f_1 : [t_0 - 2\pi, t_0] \to \mathbb{C}; \ \ f_1(\sigma) = a_0 \cdot [\sigma - \sin(\sigma)] + i \cdot (B(\sigma) + K \cdot (1 - \cos\sigma)).$$

Decorre de (4.29), que

$$\widehat{v_2}(t_0,\xi) = e^{-\lambda t_0} \cdot \underbrace{\int_{|\sigma|<\delta} e^{\lambda_1\sigma} \cdot e^{i\xi f_1(\sigma)} d\sigma}_{I_\xi} + \underbrace{\int_{|\sigma|\geq\delta} e^{\lambda_1\sigma} \cdot e^{i\xi f_1(\sigma)} d\sigma}_{J_\xi}. \tag{4.30}$$

Note que

$$|J_\xi| \leq \int_{|\sigma|\geq\delta} |e^{\lambda_1\sigma}| \cdot |e^{i\xi f_1(\sigma)}| d\sigma \leq 2\pi\rho e^{-\xi\theta}, \tag{4.31}$$

com $\rho = \max\limits_{\sigma\in[t_0-2\pi,t_0]} e^{\lambda_1\sigma}$ e $\theta = \min\limits_{\substack{|\sigma|\geq|\delta| \\ \sigma\in[t_0-2\pi,t_0]}} (B(\sigma) + K \cdot (1-\cos\sigma)) > 0$.

Para estimar I_ξ, tomemos $\chi \in C_c^\infty([-2\delta, 2\delta])$ tal que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi\big|_{[-\delta,\delta]} \equiv 1$ e estudemos

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(\sigma) \cdot e^{\lambda_1\sigma} \cdot e^{i\xi f_1(\sigma)} d\sigma = \int_{-2\delta}^{2\delta} \chi(\sigma) \cdot e^{\lambda_1\sigma} \cdot e^{i\xi f_1(\sigma)} d\sigma. \tag{4.32}$$

Valem as seguintes propriedades:

- $\chi(\sigma) \cdot e^{\lambda_1\sigma} \in C_c^\infty([-2\delta, 2\delta])$.
- $f_1 \in C^\infty((t_0 - 2\pi, t_0))$ e $f_1(0) = 0$.

- $Im\ f_1 = B(\sigma) + K(1-\cos\sigma) \geq 0$, para todo $\sigma \in (t_0 - 2\pi, t_0)$.

- $f_1'(0) = a_0 \cdot (1-\cos 0) + i(b(0) + K \cdot \sin(0)) = 0$.

- $f_1'(\sigma) = a_0 \cdot (1-\cos\sigma) + i(b(\sigma) + K \cdot \sin(\sigma))$. Visto que $\lim\limits_{\sigma\to 0} \dfrac{b(\sigma)}{\sin\sigma} = b'(0)$, podemos tomar
$$K > \sup_{\substack{\sigma\in[-2\delta,2\delta]\\ \sigma\neq 0}} \left|\frac{b(\sigma)}{\sin\sigma}\right|.$$
Consequentemente, $f_1'(\sigma) \neq 0$ para todo $\sigma \in [-2\delta, 2\delta]$ diferente de 0.

- $f_1''(0) = i(b'(0) + K)$, que assumimos ser não nulo no último item.

- f_1 é limitada em $C^\infty([-2\delta, 2\delta])$.

- $\lim\limits_{\sigma\to 0} \left(\dfrac{|\sigma|}{|f_1'(\sigma)|}\right)^2 = \lim\limits_{\sigma\to 0} \dfrac{\sigma^2}{a_0^2(1-\cos\sigma)^2 + (b(\sigma) + K\sin\sigma)^2} = \dfrac{1}{(b'(0)+K)^2} > 0$. Assim, a função $\dfrac{x}{f_1'(x)}$ é limitada em $[t_0 - 2\pi, t_0] \setminus \{0\}$.

As afirmações acima nos permitem aplicar o Teorema 7.7.5 de [36] para estimar (4.32). Como $f_1(0) = 0$ e $\chi(0) \cdot e^{\lambda_1 \cdot 0} = 1$, inferimos a existência de $C > 0$ tal que

$$\left|\int_{-2\delta}^{2\delta} \chi(\sigma) \cdot e^{\lambda_1\sigma} \cdot e^{i\xi f_1(\sigma)} d\sigma - \left(\frac{2\pi}{\xi(b'(0)+K)}\right)^{1/2}\right| \leq \frac{C}{\xi} \sum_{|\alpha|\leq 2} \sup \left|D^\alpha \left(\chi(\sigma)\cdot e^{\lambda_1\sigma}\right)\right|,$$

o que implica que

$$\left|\int_{-2\delta}^{2\delta} \chi(\sigma) \cdot e^{\lambda_1\sigma} \cdot e^{i\xi f_1(\sigma)} d\sigma - \frac{C_2}{\sqrt{\xi}}\right| \leq \frac{C_3}{\xi}, \quad \text{para certos } C_2, C_3 > 0. \tag{4.33}$$

Por outro lado, segue de (4.30) e (4.31) que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-2\delta}^{2\delta} \chi(\sigma) \cdot e^{\lambda_1\sigma} \cdot e^{i\xi f_1(\sigma)} d\sigma - \frac{C_2}{\sqrt{\xi}}\right| &\geq \frac{C_2}{\sqrt{\xi}} - \left|\int_{-2\delta}^{2\delta} \chi(\sigma) \cdot e^{\lambda_1\sigma} \cdot e^{i\xi f_1(\sigma)} d\sigma\right| \\
&\geq \frac{C_2}{\sqrt{\xi}} - |I_\xi| - \left|\int_{\delta\leq|\sigma|\leq 2\delta} \chi(\sigma) \cdot e^{\lambda_1\sigma} \cdot e^{i\xi f_1(\sigma)} d\sigma\right| \\
&\geq \frac{C_2}{\sqrt{\xi}} - |I_\xi| - 2\pi\rho e^{-\xi\theta}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Utilizando (4.30), (4.31), (4.33) e (4.34), deduzimos que

$$\begin{aligned}
|\widehat{v}_2(t_0,\xi)| &\geq e^{-\lambda_1 t_0}(|I_\xi| - |J_\xi|) \\
&\geq e^{-\lambda_1 t_0}\left(\frac{C_2}{\sqrt{\xi}} - \frac{C_3}{\xi} - |J_\xi| - 2\pi\rho e^{-\xi\theta}\right) \\
&\geq e^{-\lambda_1 t_0}\left(\frac{C_2}{\sqrt{\xi}} - \frac{C_3}{\xi} - 4\pi\rho e^{-\xi\theta}\right)
\end{aligned}$$

$$\geq e^{-\lambda_1 t_0} \frac{C_2}{2\sqrt{\xi}},$$

para ξ suficientemente grande. Desta forma, existe $C_1 > 0$ de maneira que

$$|\widehat{v_2}(t_0, \xi)| \geq \frac{C_1}{\sqrt{\xi}}, \ \forall \xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda},$$

como pretendíamos provar.

Caso 2: $b_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} b(s)ds \geq 0$, o que significa que $\xi \cdot b_0 \geq 0$. Logo, para g_2 que será construída adiante, o coeficiente parcial de Fourier de v_2 será dado como em (4.9). Seja

$$\psi_2 : \mathbb{T} \to \mathbb{C}; \ \ \psi_2(t) = M + K(1 - \cos t) - B(2\pi) + ia_0 \cdot (\sin t - t_0 + 2\pi),$$

no qual $K > 0$ e será escolhido posteriormente. Para todo $\xi \in \mathbb{N}$, denotamos

$$\beta_\xi = \left(e^{2\pi(i\xi c_0 + \lambda_1)} - 1\right);$$

não é difícil ver que esta sequência é limitada. Consideremos

$$\widehat{g_2}(t, \xi) = \beta_\xi \cdot e^{-\xi\psi_2(t)} \cdot e^{-i\lambda_2 t} \in C^\omega(\mathbb{T}), \ \ \forall \xi \in \mathbb{N} \setminus S_{c_0,\lambda},$$

e

$$g_2(t, x) = \sum_{\xi \in \mathbb{N}\setminus S_{c_0,\lambda}} \widehat{g_2}(t, \xi) \cdot e^{i\xi x} = e^{-i\lambda_2 t} \cdot \sum_{\xi \in \mathbb{N}\setminus S_{c_0,\lambda}} \beta_\xi \cdot e^{-\xi\psi_2(t)} \cdot e^{i\xi x}.$$

De forma muito semelhante ao primeiro caso, temos $g_2 \in C^\omega(\mathbb{T}^2)$ e por conseguinte $g_2 \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$. Procedendo analogamente ao Caso 1, temos

$$\widehat{v_2}(t, \xi) = e^{-i\lambda_2 t} \cdot \int_0^{2\pi} e^{\lambda_1 s} \cdot e^{\xi \cdot [B(t) - B(t+s) + B(2\pi) - M - K\cdot(1-\cos(t+s))]} \cdot e^{i\xi a_0 \cdot [s + t_0 - 2\pi - \sin(t+s)]} ds.$$

Mostremos que para $K >> 0$,

$$\varphi_2 : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}; \ \ \varphi_2(t, s) = B(t) - B(t+s) + B(2\pi) - M - K \cdot (1 - \cos(t+s)),$$

não assume valores positivos. Visto que $\varphi_2(0, 0) = B(2\pi) - M < 0$ e $\varphi_2(2\pi, 2\pi) = -M < 0$, é possível encontrar $\varepsilon > 0$ de modo que

$$|t + s| < \varepsilon, \ \ 4\pi - \varepsilon < |t + s|, \ \ (t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \Rightarrow \ \varphi(t, s) < 0.$$

Quando $(t+s)=2\pi$, $\varphi_2(t,s)=B(t)-M\leq 0$. Além disso, se $0<|\sigma-2\pi|<\delta$ decorre de (4.21) que

$$B(2\pi)-B(\sigma)=\int_\sigma^{2\pi} b(s)ds<0,$$

o que nos mostra que $\varphi_2(t,s)\leq 0$ se $2\pi-\delta<t+s<2\pi+\delta$. Por fim, consideremos

$$m=\min\{(1-\cos\tau);\ \varepsilon\leq|\tau|\leq 2\pi-\delta \text{ ou } 2\pi+\delta\leq|\tau|\leq 4\pi-\varepsilon\}>0.$$

Se $\varepsilon\leq|t+s|\leq 2\pi-\delta$ ou $2\pi+\delta\leq|t+s|\leq 4\pi-\varepsilon$, segue que

$$\frac{B(t)-B(t+s)+B(2\pi)-M}{1-cos(t-s)}\leq\frac{B(2\pi)-B(t+s)}{m}\leq\frac{2}{m}\cdot\max_{t,s\in[0,2\pi]}|B(t+s)|:=D.$$

Logo, tomando $K\geq D$, concluímos que $\varphi_2\leq 0$.

Com o mesmo argumento aplicado no Caso 1, verificamos que $v_2\in\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e as estimativas para as derivadas de $\widehat{v_2}(t,\xi)$. Resta-nos estudar o comportamento assintótico desta função em t_0 quando $\mathbb{N}\setminus S_{c_0,\lambda}$ é infinito:

$$\begin{aligned}\widehat{v_2}(t_0,\xi)&=e^{-i\lambda_2 t_0}\cdot\int_0^{2\pi} e^{\lambda_1 s}\cdot e^{\xi\cdot[B(2\pi)-B(t_0+s)-K\cdot(1-\cos(t_0+s))]}\cdot e^{i\xi a_0\cdot[s+t_0-2\pi-\sin(t_0+s)]}ds\\&=e^{-\lambda t_0}\cdot\int_{t_0}^{t_0+2\pi} e^{\lambda_1\sigma}\cdot e^{\xi\cdot[B(2\pi)-B(\sigma)-K\cdot(1-\cos\sigma)]}\cdot e^{i\xi a_0\cdot[\sigma-2\pi-\sin\sigma]}d\sigma\\&=e^{-\lambda t_0}\cdot\int_{t_0}^{t_0+2\pi} e^{\lambda_1\sigma}\cdot e^{i\xi\cdot f_2(\sigma)}d\sigma,\end{aligned}$$

para $f_2:[t_0,t_0+2\pi]\to\mathbb{C}$ dada por

$$f_2(\sigma)=a_0\cdot[\sigma-2\pi-\sin(\sigma)]+i\cdot(B(\sigma)-B(2\pi)+K\cdot(1-\cos\sigma)).$$

Observe que:

- $f_2\in C^\infty((t_0,t_0+2\pi))$ e $f_2(2\pi)=0$.
- Assim como no Caso 1, podemos tomar $K>0$ tal que $Im\ f_2=B(\sigma)-B(2\pi)+K(1-\cos\sigma)\geq 0$ para qualquer $\sigma\in(t_0,t_0+2\pi)$.
- $f_2'(2\pi)=a_0\cdot(1-\cos 2\pi)+i(b(2\pi)+K\cdot\sin(2\pi))=0$.
- $f_2'(\sigma)=a_0\cdot(1-\cos\sigma)+i(b(\sigma)+K\cdot\sin(\sigma))$. Já que $\lim_{\sigma\to 2\pi}\dfrac{-b(\sigma)}{\sin\sigma}=-b'(2\pi)$, escolhendo

  $$K>\sup_{\substack{\sigma\in[2\pi-2\delta,2\pi+2\delta]\\ \sigma\neq 2\pi}}\left|\frac{b(\sigma)}{\sin\sigma}\right|,$$

  teremos $f_2'(\sigma)\neq 0$ para todo $\sigma\in[2\pi-2\delta,2\pi+2\delta]$ diferente de 2π.

- $f_2''(2\pi) = i(b'(2\pi) + K)$, que podemos assumir ser diferente de zero, pelo último item.
- f_2 é limitada em $C^\infty([2\pi - 2\delta, 2\pi + 2\delta])$.
- $\lim\limits_{\sigma \to 2\pi} \left(\dfrac{|\sigma - 2\pi|}{|f_2'(\sigma)|} \right)^2 = \lim\limits_{\sigma \to 2\pi} \dfrac{(\sigma - 2\pi)^2}{a_0^2(1 - \cos\sigma)^2 + (b(\sigma) + K\sin\sigma)^2} = \dfrac{1}{(b'(0) + K)^2} > 0$, o que nos mostra que $\left(\dfrac{x - 2\pi}{f_1'(x)} \right)$ é limitada em $[t_0, t_0 + 2\pi] \setminus \{2\pi\}$.

Daqui em diante, basta proceder de forma análoga ao que fizemos no Caso 1. □

Observação 4.12. *De forma similar ao caso não quase analítico, é possível construir uma solução singular u satisfazendo as condições da Proposição 4.11 com as frequências parciais de Fourier definidas em $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$. Isto é,*

$$u(t,x) = \underbrace{\sum_{\xi \in \mathbb{Z}_{<0} \cap S_{c_0,\lambda}} \hat{v_1}(t,\xi) e^{i\xi x}}_{v_1} + \underbrace{\sum_{\xi \in \mathbb{Z}_{<0} \setminus S_{c_0,\lambda}} \hat{v_2}(t,\xi) e^{i\xi x}}_{v_2}.$$

A construção de v_1 é exatamente aquela apresentada na Observação 4.10. Para exibir um resumo da obtenção de v_2, temos mais uma vez de lidar com dois casos de formas distintas. Antes disso, consideramos que

$$b(0) = 0,\ b(t) > 0 \text{ se } -\delta \le t < 0 \text{ e } b(t) < 0 \text{ se } 0 < t \le \delta,\ \text{ para algum } \delta > 0,$$

e tomamos $m = \min\limits_{t \in [0,2\pi]} B(t) = B(t_0) < 0$. Note que $t_0 \in (0, 2\pi)$, pois

$$B(0) = 0 \text{ e } B(2\pi) = B(2\pi - \delta) + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi} b(s)ds > B(2\pi - \delta).$$

Caso 1: *$b_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} b(s)ds \le 0$, o que implica que $\xi \cdot b_0 \ge 0$ e portanto os coeficientes parciais de Fourier serão dados como em (4.9). Definimos então*

$$\widetilde{\psi_1} : \mathbb{T} \to \mathbb{C};\ \widetilde{\psi_1}(t) = m - B(2\pi) + K(\cos t - 1) + ia_0 (\sin t - t_0 + 2\pi).$$

De forma similar ao Caso 2 da Proposição 4.11, denotamos

$$\widehat{\widetilde{g_1}}(t,\xi) = \beta_\xi \cdot e^{-\xi \widetilde{\psi_1}(t)} \cdot e^{-i\lambda_2 t} \in C^\omega(\mathbb{T}),\ \ \forall \xi \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0) \setminus S_{c_0,\lambda},$$

e

$$\widetilde{g_1}(t,x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_{<0} \setminus S_{c_0,\lambda}} \widehat{\widetilde{g_1}}(t,\xi) \cdot e^{i\xi x} = e^{-i\lambda_2 t} \cdot \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_{<0} \setminus S_{c_0,\lambda}} \beta_\xi \cdot e^{-\xi \widetilde{\psi_1}(t)}.$$

Então $\widetilde{g_1}$ é uma função analítica e

$$\widehat{v_2}(t,\xi)=e^{-i\lambda_2 t}\int_0^{2\pi} e^{\lambda_1\cdot\tau}\cdot e^{i(-\xi)a_0[\sin(t+\tau)-(t_0+\tau)+2\pi]}\cdot e^{(-\xi)[B(t+\tau)-B(t)+m-B(2\pi)+K(\cos(t+\tau)-1)]}d\tau.$$

Caso 2: $b_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} b(s)ds\geq 0$ *e assim* $\xi\cdot b_0\leq 0$. *Dessa forma, os coeficientes parciais de Fourier são obtidos através de* (4.8)*. Consideramos*

$$\widetilde{\psi_2}:\mathbb{T}\to\mathbb{C};\ \widetilde{\psi_2}(t)=m+K(\cos t-1)+ia_0\left(\sin t-t_0\right).$$

Analogamente ao Caso 1 *da Proposição 4.11, estabelecemos*

$$\widehat{\widetilde{g_2}}(t,\xi)=\alpha_\xi\cdot e^{-\xi\widetilde{\psi_2}(t)}\cdot e^{-i\lambda_2 t}\in C^\omega(\mathbb{T}),\ \ \forall\xi\in(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0)\setminus S_{c_0,\lambda},$$

e

$$\widetilde{g_2}(t,x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}_{<0}\setminus S_{c_0,\lambda}}\widehat{\widetilde{g_2}}(t,\xi)\cdot e^{i\xi x}=e^{-i\lambda_2 t}\cdot\sum_{\xi\in(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0)\setminus S_{c_0,\lambda}}\alpha_\xi\cdot e^{-\xi\widetilde{\psi_2}(t)}.$$

Então $\widetilde{g_2}$ é uma função analítica e

$$\widehat{v_2}(t,\xi)=e^{-i\lambda_2 t}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda_1 s}\cdot e^{i(-\xi)a_0[(s-t_0)-\sin(s-t)]}\cdot e^{(-\xi)[B(t-s)-B(t)+m+K(\cos(t-s)-1)]}ds.$$

Em ambos os casos, os argumentos do ponto onde paramos em diante são os mesmos usados na Proposição 4.11, e por tal motivo serão omitidos.

Munidos das Proposições 4.8, 4.9 e 4.11, além das Observações 4.10 e 4.12, estamos prontos para enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção, a recíproca do Teorema 4.6.

Teorema 4.13. *Considere o seguinte sistema de campos em $\mathbb{T}^{N+1}$:*

$$L_{\lambda_j}=\frac{\partial}{\partial t_j}+(a_{j_0}+ib_j(t_j))\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_j,\qquad(j=1,2,\ldots,N),$$

descrito em (4.3)*. Suponha verdadeiras as seguintes hipóteses:*

1. *Caso o conjunto $J:=\{j\in\{1,2,\ldots,N\};b_j(t_j)\equiv 0\}=\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}$ não seja vazio, o vetor $\left(a_{j_{1_0}},a_{j_{2_0}},\ldots,a_{j_{k_0}},\lambda_{j_1},\lambda_{j_2},\ldots,\lambda_{j_k}\right)$ **não** satisfaz a propriedade $(\star)$ estabelecida em* (4.2).

2. *Para todo $j\in\{1,2,\ldots,N\}$ tal que $b_j\not\equiv 0$, b_j muda de sinal.*

*Então o sistema **não** é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.*

Demonstração. Com um rearranjo dos índices, organizamos o sistema da seguinte maneira:

- Para $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $b_j \equiv 0$. Logo,

$$\widetilde{L}_{\lambda_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + a_{j_0}\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Segue de 1. que $(a_{1_0}, \dots, a_{k_0}, \lambda_1, \dots \lambda_k)$ não satisfaz $(\star)$. Considere

$$v = \sum_{p\in\mathbb{N}} \widehat{v}(t_1, \dots, t_k, \xi_p) \cdot e^{i\xi_p \cdot x} \tag{4.35}$$

a solução singular descrita na Proposição 4.8. Apenas para simplificar, iremos supor que $\xi_p \in \mathbb{N}$ para cada $p \in \mathbb{N}$.

- Quando $j \in \{k+1, \dots, N\}$, decorre de 2. que $b_j(t_j)$ muda de sinal. Para cada j, tratamos

$$\widetilde{L}_{\lambda_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_{j_0} + ib_j(t_j))\,\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_j$$

como um campo agindo em $\mathbb{T}^2$, com coordenadas (t_j, x). Seja

$$u_j = \sum_{\xi\in\mathbb{N}} \widehat{u_j}(t_j, \xi) e^{ix\xi}, \quad j = k+1, \dots, N, \tag{4.36}$$

sua solução singular satisfazendo as propriedades descritas nas Proposições 4.9 ou 4.11.

Denotamos

$$u = \sum_{p\in\mathbb{N}} \widehat{v}(t_1, \dots, t_k, \xi_p) \cdot \widehat{u_{k+1}}(t_{k+1}, \xi_p) \cdot \dots \cdot \widehat{u_N}(t_N, \xi_p) \cdot e^{ix\xi_p},$$

no qual $\widehat{v}$ e $\widehat{u_j}$ são dadas em (4.35) and (4.36), respectivamente. Mostremos que

$$\widetilde{L}_{\lambda_j} u := g_j \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1}), \quad j = 1, 2, \dots N.$$

Com efeito, se $j \in \{1, 2, \dots, k\}$,

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_{\lambda_j} u &= \sum_{p\in\mathbb{N}} \widetilde{L}_{\lambda_j}\left(\widehat{v}(t_1, \dots, t_k, \xi_p) \cdot \widehat{u_{k+1}}(t_{k+1}, \xi_p) \cdot \dots \cdot \widehat{u_N}(t_N, \xi_p) \cdot e^{ix\xi_p}\right) \\ &= \sum_{p\in\mathbb{N}} \underbrace{\widehat{u_{k+1}}(t_{k+1}, \xi_p) \cdot \dots \cdot \widehat{u_N}(t_N, \xi_p) \cdot \widehat{f_j}(t_1, \dots, t_k, \xi_p)}_{\widehat{g_j}(t, \xi_p)} \cdot e^{ix\xi_p},\end{aligned}$$

no qual $f_j = \widetilde{L}_{\lambda_j} v \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{k+1})$. É imeditado das Proposições 4.9 e 4.11 que $\widehat{g_j}(t, \xi_p) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Pelo Teorema 2.20, existem $C, h, \delta > 0$ tais que

$$|\partial_t^\alpha \widehat{g_j}(t, \xi_p)| = \underbrace{\left|\partial_t^{\alpha_{k+1}} \widehat{u_{k+1}}(t_{k+1}, \xi_p)\right| \cdot \dots \cdot \left|\partial_t^{\alpha_N} \widehat{u_N}(t_N, \xi_p)\right|}_{:=(\triangle)} \cdot \left|\partial_t^{(\alpha_1, \dots, \alpha_k)} \widehat{f_j}(t_1, \dots, t_k, \xi_p)\right|$$

$$\leq (\triangle)\cdot C\cdot h^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}\cdot m_{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}\cdot(\alpha_1+\ldots+\alpha_k)!\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\delta^n\cdot(1+|\xi_p|)^n}\right), \tag{4.37}$$

para todo ξ_p. Em contrapartida, dado $\varepsilon>0$, decorre das Proposições 4.9 e 4.11 a existência de $C_1,h_1>0$ tais que

$$|\partial_t^{\alpha_s}\widehat{u_s}(t_s,\xi_p)|\leq C_1\cdot h_1^{\alpha_s}\cdot m_{\alpha_s}\cdot\alpha_s!\cdot\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi_p|)^n}{m_n\cdot n!}\right),\quad s=k+1,k+2,\ldots,N. \tag{4.38}$$

Associando (4.37) a (4.38) e denotando $C_2=C\cdot C_1^{N-k}$ e $h_2=\max\{h,h_1\}$, deduzimos que

$$|\partial_t^{\alpha}\widehat{g_j}(t,\xi_p)|\leq C_2\cdot h_2^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\cdot\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi_p|)^n}{m_n\cdot n!}\right)^{N-k}\cdot\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\delta^n\cdot(1+|\xi_p|)^n}\right). \tag{4.39}$$

Prova-se por indução, a partir do Lema 2.25, que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\rho^n}{m_n\cdot n!}\right)\leq\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\rho^n\cdot(H^k)^n}{m_n\cdot n!}\right)^{\frac{1}{2^k}},\quad\forall\rho>0,\ \forall k\in\mathbb{N}_0. \tag{4.40}$$

Escolhemos agora $\ell\in\mathbb{N}$ tal que $2^\ell>N-k$ e $\varepsilon=\dfrac{\delta}{H^{\ell+1}}$. Aplicando (4.40), segue de (4.39) que

$$\begin{aligned}|\partial_t^{\alpha}\widehat{g_j}(t,\xi_p)| &\leq C_2h_2^{|\alpha|}m_{|\alpha|}|\alpha|!\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{(\delta/H^{\ell+1})^n(1+|\xi_p|)^n}{m_nn!}\right)\right]^{2^\ell}\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_nn!}{\delta^n(1+|\xi_p|)^n}\right)\\ &\leq C_2\cdot h_2^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\cdot\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{(\delta/H)^n\cdot(1+|\xi_p|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\cdot\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\delta^n\cdot(1+|\xi_p|)^n}\right)\\ &\leq C_2\cdot h_2^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!\cdot\inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{(\delta/H)^n\cdot(1+|\xi_p|)^n}\right).\end{aligned}$$

Através do Teorema 2.21, inferimos que $\widetilde{L}_{\lambda_j}u\in\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ para $j\in\{1,2,\ldots,k\}$.

Quando $j\in\{k+1,k+2,\ldots N\}$, a prova é bastante semelhante. Temos

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_{\lambda_j}u=\sum_{p\in\mathbb{N}}&\widehat{v}(t_1,\ldots,t_k,\xi_p)\widehat{u_{k+1}}(t_{k+1},\xi_p)\ldots\widehat{u_{j-1}}(t_{j-1},\xi_p)\times\\ &\times\widehat{u_{j+1}}(t_{j+1},\xi_p)\ldots\widehat{u_N}(t_N,\xi_p)\widehat{f_j}(t_j,\xi_p)e^{ix\xi_p},\end{aligned}$$

no qual $\widetilde{L}_{\lambda_j}u_j=f_j\in\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^2)$. A Proposição 4.8 nos fornece uma estimativa no mesmo formato de (4.38) para $\widehat{v}(t_1,\ldots,t_k,\xi_p)$, e a partir daí o processo é completamente análogo.

Resta-nos verificar que $u\in\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})\setminus\mathscr{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$. Deduzimos da Proposição 4.8 que

$$|\widehat{u}(t,\xi_p)|=|\widehat{u_{k+1}}(t_{k+1},\xi_p)|\cdot\ldots\cdot|\widehat{u_N}(t_N,\xi_p)|,\quad\forall p\in\mathbb{N}, \tag{4.41}$$

e das Proposições 4.9 e 4.11 que cada $\widehat{u_j}$ é uniformemente limitada, o que nos permite concluir que $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$. Mais ainda, inferimos também que para cada $j \in \{k+1, k+2, \ldots, N\}$, existem $t_j^*, t_{j0} \in \mathbb{T}$ e $C > 0$ tais que

$$|\hat{u}_j(t_j^*, \xi_p)| = 1, \ \ \forall \xi_p \in \mathbb{N} \cap S_{c_{j0}, \lambda_j}; \tag{4.42}$$

$$|\hat{u}_j(t_{j0}, \xi_p)| \geq \frac{C}{\sqrt{\xi_p}}, \ \ \forall \xi_p \in \mathbb{N} \setminus S_{c_{j0}, \lambda_j}. \tag{4.43}$$

Encontraremos agora um vetor $\bar{t} = (0, \ldots, 0, \bar{t}_{k+1}, \ldots, \bar{t}_N)$ e uma subsequência $\{\xi_{p_q}\}_{q \in \mathbb{N}}$ de forma que

$$\left|\widehat{u}(\bar{t}, \xi_{p_q})\right| \geq \left(\frac{C}{\sqrt{\xi_{p_q}}}\right)^{\ell}, \ \ \forall q \in \mathbb{N}, \tag{4.44}$$

no qual $0 \leq \ell \leq N - k$, o que nos permitirá concluir que u não é sequer função suave.

Iniciemos com a escolha de $\bar{t}_{k+1}$; existem duas possibilidades: $\{\xi_p\}_{p \in \mathbb{N}} \cap S_{c_{(k+1)0}, \lambda_{k+1}}$ é finito ou infinito. Para o primeiro caso, selecionamos $\bar{t}_{k+1} = t_{(k+1)0}$ como em (4.43) e tomamos a subsequência

$$\{\xi_p\}_{p \in \mathbb{N}} \cap (\mathbb{N} \setminus S_{c_{(k+1)0}, \lambda_{k+1}}). \tag{4.45}$$

Caso contrário, definimos $\bar{t}_{k+1} = t_{k+1}^*$ como em (4.42) e tomamos

$$\{\xi_p\}_{p \in \mathbb{N}} \cap \left(\mathbb{N} \cap S_{c_{(k+1)0}, \lambda_{k+1}}\right). \tag{4.46}$$

Para a escolha de $\bar{t}_{k+2}$, o processo é análogo, com a diferença de que sequência inicial será dada por (4.45) ou (4.46), dependendo do passo anterior. Pela finitude do número de decisões, obtemos o vetor $\bar{t}$ de forma recursiva. A estimativa (4.44) decorre de (4.41), (4.42) e (4.43), com ℓ contando o número de passos para o qual $\bar{t}_j$ foi tomado como em (4.43).

Antes de encerrar a prova, vale notar que se $\xi_p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ para todo $p \in \mathbb{N}$, ao invés de aplicarmos as Proposições 4.9 e 4.11, usamos as construções feitas nas Observações 4.10 e 4.12, e os processos são completamente análogos. □

4.3 Aplicações

Antes de prosseguir para as consequências, reorganizamos o sistema $\mathscr{L}_\lambda$ da mesma maneira que fizemos na prova do Teorema 4.6:

$$\begin{aligned} L_{\lambda_j} &= \frac{\partial}{\partial t_j} + a_j(t_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_j, \ \text{para } j = 1, 2, \ldots, k, \\ L_{\lambda_\ell} &= \frac{\partial}{\partial t_\ell} + (a_\ell + ib_\ell)(t_\ell) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_\ell, \ \ \text{para } \ell = k+1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{4.47}$$

estando inclusas as situações nas quais $k = 0$ ou $k = N$ (isto é, em que cada $b_\ell \not\equiv 0$ e toda $b_j \equiv 0$, respectivamente.)

Observação 4.14. *Quando $k = 0$, $\mathscr{L}_\lambda$ é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico se, e somente se, existe $\ell \in \{1, 2, \ldots, N\}$ tal que L_{λ_ℓ} agindo em $\mathbb{T}^2$ é $\mathscr{M}$-globalmente hipoelítico. Isto é completamente diferente do que ocorre no caso local; com efeito, o sistema dado por*

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial}{\partial t_1} - it_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \\ P_2 &= \frac{\partial}{\partial t_2} + it_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

é analítico hipoelítico em $0 \in \mathbb{R}^3$, enquanto que P_1 e P_2 não satisfazem tal condição em $0 \in \mathbb{R}^2$ (para entender o porquê, recomendamos o Teorema 2.1 de [7]).

Observação 4.15. *Se $k = N$, pelo Teorema 4.3 nosso problema pode ser reduzido a um campo de coeficientes constantes. Por conseguinte, o Teorema 4.2 apenas recupera o Teorema 3.4. Em contraste com a Observação 4.14, a construção feita no Exemplo 4.9 de [11] nos apresenta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que, separadamente, os campos*

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial}{\partial t_1} - \alpha\frac{\partial}{\partial x}, \\ P_2 &= \frac{\partial}{\partial t_2} - \beta\frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

não são globalmente analítico-hipoelíticos, mas o sistema dado pelos mesmos o é.

Pela Observação 4.15, concluímos que não é necessário que nenhum dos campos agindo em $\mathbb{T}^2$ seja globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico para que $\mathscr{L}_\lambda$ o seja. Em contrapartida, temos a

Proposição 4.16. *Suponha que o campo L_{λ_n} agindo em $\mathbb{T}^2$ seja $\mathscr{M}$-globalmente hipoelítico, para algum $n \in \{1, 2, \ldots N\}$; então o sistema $\mathscr{L}_\lambda$ é $\mathscr{M}$-globalmente hipoelítico.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.2, existem duas possibilidades para L_{λ_n}:

- $b_n \not\equiv 0$ e não muda de sinal;
- $b_n \equiv 0$ e (a_{n0}, λ_n) satisfaz a condição $(\star)$.

O primeiro caso é imediato; para a segunda situação, temos $n \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e decorre da hipótese que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $M_\varepsilon > 0$ de modo que

$$|\tau + a_{n0}\xi - i\lambda_n| \geq \inf_{p \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{\varepsilon^p \cdot (1 + |\tau| + |\xi|)^p} \right), \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{Z}^2;\ |\tau| + |\xi| \geq M_\varepsilon. \tag{4.48}$$

Sejam

$$A = \max_{1\leq j\leq k}\left\{|a_{j0}|\right\},\ \Lambda = \max_{1\leq j\leq k}\left\{|\lambda_j|\right\},\ r_\varepsilon = \max\left\{(AM_\varepsilon + \Lambda + 1), M_\varepsilon\right\} \text{ e } R_\varepsilon = (k+1)r_\varepsilon.$$

Dado $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}$, com $|\eta| + |\xi| \geq R_\varepsilon$, segue do Princípio da Casa dos Pombos que

$$|\xi| \geq r_\varepsilon \geq M_\varepsilon \quad \text{ou} \quad |\eta_q| \geq r_\varepsilon \geq AM_\varepsilon + \Lambda + 1, \text{ para algum } q \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Se $|\xi| \geq M_\varepsilon$, decorre de (4.48) que

$$\begin{aligned}\max_{1\leq j\leq k}\left|\eta_j + a_{j0}\xi - i\lambda_j\right| &\geq |\eta_n + a_{n0}\xi - i\lambda_n| \\ &\geq \inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{\varepsilon^p\cdot(1+|\eta_n|+|\xi|)^p}\right) \\ &\geq \inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{\varepsilon^p\cdot(1+|\eta|+|\xi|)^p}\right).\end{aligned}$$

Caso contrário,

$$\begin{aligned}\max_{1\leq j\leq k}\left|\eta_j + a_{j0}\xi - i\lambda_j\right| &\geq \left|\eta_q + a_{q0}\xi - i\lambda_q\right| \\ &\geq |\eta_q| - |a_{q0}||\xi| - |\lambda_q| \\ &\geq (AM_\varepsilon + \Lambda + 1) - AM_\varepsilon - \Lambda \\ &\geq 1 \\ &\geq \inf_{p\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_p\cdot p!}{\varepsilon^p\cdot(1+|\eta|+|\xi|)^p}\right).\end{aligned}$$

Assim, o vetor $(a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{k0}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ satisfaz a propriedade $(\star)$, encerrando a prova. $\square$

Corolário 4.17. *Suponha que $b_1 \equiv 0$ e Re $(\lambda_1) \neq 0$. Então $\mathscr{L}_\lambda$ é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.*

Demonstração. Pela Proposição 4.16, basta provar que $(a_{10}, \lambda_1) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$ satisfaz a propriedade $(\star)$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $R_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon\cdot|\mathrm{Re}\,(\lambda_1)|}$; se $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ é tal que $|\eta| + |\xi| \geq R_\varepsilon$, temos:

$$\begin{aligned}|\eta + a_{10}\xi - i\lambda_1| &\geq |\mathrm{Re}\,(\lambda_1)| \\ &\geq \frac{1}{\varepsilon\cdot(|\eta|+|\xi|)} \\ &\geq \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+|\eta|+|\xi|)^n}\right),\end{aligned}$$

finalizando a prova. $\square$

Seja $\mathscr{L}$ o sistema dado pelo caso particular de (4.47) no qual $\lambda = 0$. Ou seja,

$$\begin{aligned} L_j &= \frac{\partial}{\partial t_j} + a_j(t_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, k, \\ L_\ell &= \frac{\partial}{\partial t_\ell} + (a_\ell + ib_\ell)(t_\ell) \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{para } \ell = k+1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Para a situação trazida Observação 4.14, a perturbação por constantes não tem qualquer efeito na $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global de $\mathscr{L}$. Por outro lado, no caso estudado no Corolário 4.17 uma perturbação por constante pode facilmente tornar $\mathscr{L}$ um sistema $\mathscr{M}$-globalmente hipoelítico, mesmo que o original não o seja.

Observação 4.18. *Seja L um campo agindo em $\mathbb{T}^2$ e globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico, dado por*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x},$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Baseados na Proposição 3.5 de [10], *mostremos que existe uma grande quantidade de perturbações de L por constantes que destroem sua $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global.*

Considere para cada $j \in \mathbb{N}$, $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^2$, o seguinte conjunto:

$$\mathcal{A}_{j,\xi,\eta} = \left\{ \lambda \in i\mathbb{R};\ |\eta + \alpha\xi - i\lambda| < \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{j^n \cdot (1 + |\xi| + |\eta|)^n} \right) \right\}.$$

Denotemos $\mathcal{A}_j = \bigcup_{(\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^2} \mathcal{A}_{j,\xi,\eta}$. Note que cada $\mathcal{A}_{j,\xi,\eta}$ é um intervalo aberto de $i\mathbb{R}$ e $\mathcal{A}_j$ contém o conjunto $i(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$. Logo, todo $\mathcal{A}_j$ é um aberto denso em $i\mathbb{R}$ e, pelo Teorema da Categoria de Baire,

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_j$$

é denso em $i\mathbb{R}$. Além disso, decorre também do Teorema de Baire que $\mathcal{A} \cap [i(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})]^c$ é denso, visto que $i(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ é uma união enumerável de conjuntos fechados cujos complementares são densos.

Seja $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap [i(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})]^c$ e $\beta \in \mathcal{B}$; então existe uma sequência $(\xi_j, \eta_j) \subset \mathbb{Z}^2$ de modo que

$$0 < |\eta_j + \alpha\xi_j - i\beta| < \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{j^n \cdot (1 + |\xi_j| + |\eta_j|)^n} \right), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como $0 < |\eta_j + \alpha\xi_j - i\beta|$ e $\inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{j^n \cdot (1 + |\xi_j| + |\eta_j|)^n} \right) < \frac{1}{j}$, é possível extrair uma subsequência disjunta, que será também denotada (ξ_j, η_j), satisfazendo

$$|\eta_j + \alpha\xi_j - i\beta| < \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{(1 + |\xi_j| + |\eta_j|)^n} \right), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Portanto, o campo $\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta$ não é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico para cada β em $\mathcal{B}$, um conjunto que é denso em $i\mathbb{R}$.

Através do Corolário 4.17 e das Observações 4.14 e 4.18, temos um resumo das possíveis alterações que uma perturbação por constantes pode trazer na $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global do sistema $\mathscr{L}$ descrito em (4.49).

Nosso objetivo agora é compreender, ao menos para uma família de casos, em quais situações a perturbação por funções pode destruir a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global de $\mathscr{L}$. Isto é, assumindo que $\mathscr{L}$ é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico, entender quando a propriedade se preserva para $\mathscr{L}_f$ dado por

$$L_{f_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + c_j(t_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + f_j(t,x), \qquad (j = 1, 2, \dots, N), \tag{4.50}$$

com $f_j(t,x) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Novamente será suficiente estudar a questão para o sistema simplificado $\widetilde{\mathscr{L}_f}$, descrito por

$$\widetilde{L}_{f_j} = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_{j_0} + ib_j(t_j)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + f_j(t,x), \qquad (j = 1, 2, \dots, N). \tag{4.51}$$

Mostraremos que para o caso particular em que $f = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ pertence à *imagem* do sistema $\widetilde{\mathscr{L}}$, com equações dadas por

$$\widetilde{L}_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_{j_0} + ib_j(t_j)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \qquad (j = 1, 2, \dots, N), \tag{4.52}$$

nossa meta é atingida.

Suponha por um instante a existência de $u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ de modo que

$$\widetilde{L}_j u = f_j, \ \text{ para } j = 1, 2, \dots, N. \tag{4.53}$$

Prova-se facilmente que, para quaisquer $j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$,

$$\widetilde{L}_j f_k(t,x) = \widetilde{L}_k f_j(t,x), \ \ \forall (t,x) \in \mathbb{T}^{N+1}, \tag{4.54}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j(0, \dots, 0, t_j, 0, \dots, 0, x) \, dt_j \, dx = 0. \tag{4.55}$$

As identidades acima nos levam a definir o seguinte conjunto:

$$E := \left\{ f = (f_1, \dots, f_N) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})^N; \ \ f \text{ satisfaz (4.54) e (4.55)} \right\}. \tag{4.56}$$

Proposição 4.19. *Seja $\widetilde{\mathcal{L}}$ o sistema descrito pelos campos* (4.52) *e suponha que o mesmo é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico. Considere E o conjunto definido em* (4.56)*; dado $f = (f_1, \dots, f_N) \in E$, existe $u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ de maneira que $\widetilde{L}_j u = f_j$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, N\}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 4.2, há dois casos a serem levados em consideração. Iniciamos a análise com o primeiro, assumindo sem perda de generalidade que b_1 é não nula e $b_1(t_1) \leq 0$ para todo $t_1 \in \mathbb{T}$.

Sigamos a demonstração da primeira metade do Teorema 4.6: se $\xi \in \mathbb{Z}$ e $i\xi(a_{1_0} + ib_{10}) \notin i\mathbb{Z}$ (o que ocorre sempre que $\xi \neq 0$), $\widehat{u}(t,\xi)$ é dado por (4.8) ou (4.9). Resta-nos então encontrar uma solução para

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\widehat{u}(t,0) = \widehat{f_j}(t,0),\;\; j \in \{1,2,\ldots,N\}\,. \tag{4.57}$$

Afirmamos que a 1-forma suave $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \widehat{f_j}(t,0)\,dt_j$ é exata. Por (4.54), segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_k}\widehat{f_j}(t,0) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_k} f_j(t,x)dx = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t_k} f_j(t,x) + (a_{k0} + ib_k(t_k))\cdot \frac{\partial}{\partial x} f_j(t,x)\right]dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \widetilde{L}_k f_j(t,x)dx = \int_0^{2\pi} \widetilde{L}_j f_k(t,x)dx = \frac{\partial}{\partial t_j}\widehat{f_k}(t,0).\end{aligned} \tag{4.58}$$

Logo, a 1-forma é fechada. Além disso, ela será exata se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} \widehat{f_j}(0,\ldots,0,t_j,0,\ldots,0)\,dt_j = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_j(0,\ldots,0,t_j,0,\ldots,0,x)\,dt_j\,dx = 0$$

para cada $j \in \{1,2,\ldots,N\}$, o que é dado precisamente por (4.55). Por conseguinte, encontramos $\widehat{u}(t,0) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ que resolve (4.57). Assim, $u = \displaystyle\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(t,\xi)e^{ix\xi}$ pertence a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ e $\widetilde{L}_j u = f_j$, para $j \in \{1,2,\ldots,N\}$, como desejávamos provar.

Prossigamos para a segunda possibilidade; isto é, o conjunto

$$J := \{j \in \{1,2,\ldots,N\}\,; b_j(t_j) \equiv 0\} = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$$

é não vazio e $\left(a_{j_{10}}, a_{j_{20}}, \ldots, a_{j_{k0}}, \lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \ldots, \lambda_{j_k}\right)$ satisfaz a condição $(\star)$. Procedendo como na segunda metade da prova do Teorema 4.6, decorre de (4.12) que

$$i\left(\eta_j + a_{j_0}\xi\right)\cdot\widehat{u}(t'',\eta,\xi) = \widehat{f_j}(t'',\eta,\xi),\; \forall(\eta,\xi) \in \mathbb{Z}^{k+1},\; \forall t'' \in \mathbb{T}^{N-k},\; j = 1,2,\ldots,k. \tag{4.59}$$

Por outro lado, a condição $(\star)$ nos fornece, para cada $\varepsilon > 0$, a existência de $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$\max_{1\leq j\leq k} |\eta_j + a_{j_0}\xi| \geq \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{m_n\cdot n!}{\varepsilon^n\cdot(1+|\eta|+|\xi|)^n}\right),\quad \forall(\eta,\xi)\in\mathbb{Z}^{k+1};\; |\eta|+|\xi| \geq R_\varepsilon. \tag{4.60}$$

Uma consequência disso é a impossibilidade de encontrar $(\eta',\xi') \in \mathbb{Z}^{k+1}$ diferente de $(0,0)$ de modo que

$$\left(\eta_j' + a_{j0}\xi'\right) = 0,\;\; j = 1,2,\ldots,k.$$

Afinal, se existisse tal par, a igualdade acima valeria para $(s\eta', s\xi')$, para todo $s \in \mathbb{Z}$, contradizendo (4.60). Portanto, para todo $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{k+1} \setminus \{(0,0)\}$, obtemos $\widehat{u}(t'', \eta, \xi)$ de (4.59).

A fim de encontrar $\widehat{u}(t'', 0, 0)$, usamos as equações (4.13), que nesta situação são dadas por

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t_\ell}(t'', 0, 0) = \widehat{f}_\ell(t'', 0, 0), \;\; \forall t'' \in \mathbb{T}^{N-k}, \;\; \ell = k+1, \dots, N.$$

Assim como em (4.57), precisamos mostrar que a 1-forma $\sum_{\ell=k+1}^{N} \widehat{f}_\ell(t'', 0, 0)\, dt_\ell$ é exata. Com o mesmo argumento usado no caso anterior, mostramos que

$$\frac{\partial}{\partial t_q}\widehat{f}_\ell(t'', 0, 0) = \frac{\partial}{\partial t_\ell}\widehat{f}_q(t'', 0, 0), \quad \forall \ell, q \in \{k+1, \dots, N\},$$

e portanto a forma é fechada.

Para provarmos sua exatidão, fixemos $t' \in \mathbb{T}^k$ e o denotemos por $(t'_1, \dots, t'_k)$. Aplicando o Teorema de Fubini e (4.58), segue que

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [f_\ell(t', 0, \dots, 0, t_\ell, 0, \dots, 0, x) - f_\ell(0, t'_2, \dots, t'_k, 0, \dots, 0, t_\ell, 0, \dots, 0, x)]\; dx\, dt_\ell = \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{t'_1} \frac{\partial}{\partial t_1} f_\ell(t_1, 0, \dots, 0, t_\ell, 0, \dots, 0, x)\, dt_1\, dx\, dt_\ell = \\
&= \int_0^{t'_1}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_1} f_\ell(t_1, t_2, \dots, t_k, 0, \dots, 0, t_\ell, 0, \dots, 0, x)\, dx\right] dt_\ell\, dt_1 = \\
&= \int_0^{t'_1}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_\ell} f_1(t_1, t_2, \dots, t_k, 0, \dots, 0, t_\ell, 0, \dots, 0, x)\, dx\right] dt_\ell\, dt_1 = \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Repetindo este processo de forma recursiva e utilizando (4.54), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\ell(t', 0, \dots, 0, t_\ell, 0, \dots, 0, x) dx\, dt_\ell &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\ell(0, 0, \dots, 0, t_\ell, 0, \dots, 0, x) dx\, dt_\ell \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para cada $t' \in \mathbb{T}^k$. Consequentemente,

$$\int_0^{2\pi} \widehat{f}_\ell(0, \dots, t_\ell, 0, \dots 0, 0)\, dt_\ell = \int_{[0,2\pi]^k}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_\ell(t', 0, \dots, 0, t_\ell, 0, \dots 0, x)\, dx\, dt_\ell\, dt' = 0,$$

para $\ell = k+1, \dots, N$, o que nos permite concluir que $\sum_{\ell=k+1}^{N} \widehat{f}_\ell(t'', 0, 0)\, dt_\ell$ é exata. Encontramos então $\widehat{u}(t'', 0, 0) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N-k})$ como desejávamos.

Desta maneira,

$$u = \sum_{(\eta,\xi)\in\mathbb{Z}^k\times\mathbb{Z}} \widehat{u}(t'',\eta,\xi)\cdot e^{i(\eta,\xi)\cdot(t',x)} \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1}),$$

e $\widetilde{L}_j u = f_j$ para cada $j \in \{1,2,\dots,N\}$, finalizando a demonstração. □

Antes de enunciar o principal resultado da seção, necessitamos de uma nova

Definição 4.20. *Seja $f = (f_1, f_2, \dots, f_N) \in (\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1}))^N$; denoratemos por f^0 o seguinte elemento de $\mathbb{C}^N$:*

$$f^0 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(t_1,0,\dots,0,x)\,dt_1\,dx,\dots,\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_N(0,\dots,0,t_N,x)\,dt_N\,dx\right).$$

Teorema 4.21. *Considere $\widetilde{\mathcal{L}}$ o sistema dado em (4.52) e assuma que o mesmo é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico. Denote por $\widetilde{\mathcal{L}}_f$ o sistema descrito em (4.51), para $f = (f_1, f_2, \dots, f_N) \in (\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1}))^N$ satisfazendo (4.54). Então $\widetilde{\mathcal{L}}_f$ é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico se, e somente se, o mesmo vale para $\widetilde{\mathcal{L}}_{f^0}$, cujas equações são*

$$\widetilde{L}_{f_j^0} = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_{j0} + ib_j(t_j))\cdot\frac{\partial}{\partial x} + f_j^0, \qquad (j = 1,2,\dots,N).$$

Demonstração. Considere $g := f - f^0$; é fácil ver que g satisfaz as condições (4.54) e (4.55), e portanto $g \in E$. Pela Proposição 4.19, encontramos $v \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ de modo que

$$\widetilde{L}_j v = g_j, \quad \forall j \in \{1,2,\dots,N\}.$$

Definimos então

$$\begin{aligned} T : \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1}) &\to \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1}) \\ u &\mapsto e^v u. \end{aligned}$$

Note que T é um automorfismo em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$ e em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1})$, quando restrito a este subespaço, com inversa dada por

$$\begin{aligned} T^{-1} : \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1}) &\to \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^{N+1}) \\ u &\mapsto e^{-v} u. \end{aligned}$$

Denotemos por $\mathcal{P}$ o sistema dado por

$$P_j = T\circ \widetilde{L}_{f_j}\circ T^{-1}, \quad j = 1,2,\dots,N.$$

É imediato que $\mathcal{P}$ será globalmente $\mathscr{M}$-hipeolítico se, e somente se, $\mathscr{L}$ o for. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
P_j u &= e^v \widetilde{L}_{f_j}(e^{-v}u) \\
&= e^v \left(e^{-v}\widetilde{L}_{f_j}u - (\widetilde{L}_{f_j}v)e^{-v}u \right) \\
&= \widetilde{L}_{f_j}u - e^v(f_j - f_j^0)e^{-v}u) \\
&= \widetilde{L}_{f_j} - f_j u + f_j^0 u \\
&= \widetilde{L}_{f_j^0}u,
\end{aligned}$$

encerrando a prova de nossa afirmação. □

Apesar de a condição (4.55) ser difícil de ser satisfeita de modo geral, há um caso no qual ela é trivialmente válida. Quando cada f_j depende somente de t_j, segue que $\widetilde{L}_j f_k \equiv \widetilde{L}_k f_j \equiv 0$ se $j \neq k$. Isto nos leva ao

Corolário 4.22. *Seja* $g = ((g_1(t_1), g_2(t_2), \ldots, g_N(t_N))$ *tal que cada* $g_j(t_j)$ *é elemento de* $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T})$. *Se* $\mathscr{L}$ *dado por* (4.49) *é globalmente* $\mathscr{M}$*-hipoelítico, o sistema* $\mathscr{L}_g$ *descrito em* (4.50) *será globalmente* $\mathscr{M}$*-hipoelítico se, e somente se, o mesmo valer para* $\mathscr{L}_{g_0}$*, cujas equações são*

$$L_{g_{j_0}} = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_j + ib_j)(t_j) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + g_{j_0}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

Demonstração. Segue da hipótese e do Teorema 4.3 que $\widetilde{\mathscr{L}}$ descrito em (4.52) é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico; por ser imediato que g satisfaz (4.54), inferimos dos Teoremas 4.3 e 4.21 que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_g \text{ é globalmente } \mathscr{M}\text{-hipoelítico} &\Leftrightarrow \widetilde{\mathscr{L}_g} \text{ é globalmente } \mathscr{M}\text{-hipoelítico} \\
&\Leftrightarrow \widetilde{\mathscr{L}_{g_0}} \text{ é globalmente } \mathscr{M}\text{-hipoelítico} \\
&\Leftrightarrow \mathscr{L}_{g_0} \text{ é globalmente } \mathscr{M}\text{-hipoelítico,}
\end{aligned}$$

como pretendíamos verificar. □

Capítulo 5

Uma Classe de Sistemas de Operadores Pseudodiferenciais

Neste capítulo, estudaremos uma classe de operadores pseudodiferenciais contínuos nos espaços $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, que estende as classes de operadores definidas em [22]. Em seguida, provaremos hipoeliticidade global para operadores que denominamos *"com perda de derivadas"* e certas perturbações por operadores de ordem menor.

5.1 Uma Classe de Operadores

Definição 5.1. *Dados $\mathscr{M}$ uma sequência peso e $\sigma \in \mathbb{R}$, diremos que um operador linear contínuo $a(x, D) : C^\infty(\mathbb{T}^N) \to C^\infty(\mathbb{T}^N)$ pertence a $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$ caso existam $C, h > 0$ de forma que*

$$|D^\alpha_x a(x, \eta)| \leq C \cdot h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot (1 + |\eta|)^\sigma, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N, \ \forall \eta \in \mathbb{Z}^N,$$

sendo $a(x, \eta) = e^{-ix\cdot\eta} \cdot [a(x, D)(e^{ix\cdot\eta})]$ o símbolo de $a(x, D)$.

Notação 5.2. *Denotaremos $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N) := \bigcup_{\sigma\in\mathbb{R}} \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$.*

Observação 5.3. *As classes $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N)$ são uma generalização dos operadores pseudodiferenciais definidos em [50], visto que nenhuma exigência é feita com relação a operadores de diferença. O controle sobre o crescimento do símbolo é naturalmente similar ao das funções ultradiferenciáveis, visto que nosso objetivo é estudar operadores que ajam continuamente em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.*

O próximo passo é estudar a relação entre o comportamento do símbolo de um elemento em $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e de seu respectivo núcleo distribuição. Para tal, precisamos antes de um lema.

Lema 5.4. *Seja* $a(x,D) : C^\infty(\mathbb{T}^N) \to C^\infty(\mathbb{T}^N)$ *um operador linear contínuo. Se temos que* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$*, vale a igualdade*

$$(a(x,D)\varphi)(x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\xi} \cdot \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\cdot\hat{\varphi}(\eta).$$

Além disso, se $\mathcal{K}_a$ *é o núcleo distribuição de Schwartz de* $a(x,D)$*,*

$$\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^N}\cdot\widehat{a}(\xi+\eta,-\eta), \ \ \forall \xi,\eta\in\mathbb{Z}^N.$$

Demonstração. Para provar a primeira expressão, observe que

$$\begin{aligned}
(a(x,D)\varphi)(x) &= a(x,D)\left[\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\eta}\cdot\hat{\varphi}(\eta)\right] \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} a(x,D)(e^{ix\cdot\eta})\cdot\hat{\varphi}(\eta) \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\eta}\cdot a(x,\eta)\cdot\hat{\varphi}(\eta) \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\eta}\cdot\hat{\varphi}(\eta)\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\xi}\cdot\widehat{a}(\xi,\eta) \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \hat{\varphi}(\eta)\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\cdot\widehat{a}(\xi,\eta) \\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \hat{\varphi}(\eta)\cdot\sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\zeta}\cdot\widehat{a}(\zeta-\eta,\eta) \\
&= \sum_{\zeta\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\zeta}\cdot\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \widehat{a}(\zeta-\eta,\eta)\cdot\hat{\varphi}(\eta) \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\xi}\cdot\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\cdot\hat{\varphi}(\eta).
\end{aligned}$$

Passemos para a segunda identidade; $\mathcal{K}_a$ é o único elemento em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^N\times\mathbb{T}^N)$ tal que

$$\langle a(x,D)(\varphi),\psi\rangle = \langle\mathcal{K}_a,\psi\otimes\varphi\rangle, \ \ \forall\varphi,\psi\in C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

Consequentemente,

$$\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,\eta) = \frac{1}{(2\pi)^{2N}}\cdot\langle\mathcal{K}_a(x,y), e^{-i(x,y)\cdot(\xi,\eta)}\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \cdot \langle \mathcal{K}_a(x,y), e^{-ix\cdot\xi} \otimes e^{-iy\cdot\eta} \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \cdot \langle a(x,D)(e^{-ix\cdot\eta}), e^{-ix\cdot\xi} \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \cdot \langle (e^{-ix\cdot\eta}) \cdot a(x,-\eta), e^{-ix\cdot\xi} \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \cdot \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot(\xi+\eta)} \cdot a(x,-\eta) dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{N}} \cdot \widehat{a}(\xi+\eta,-\eta).
\end{aligned}
$$

Está provado o Lema. $\square$

Proposição 5.5. *Seja $a(x,D) : C^\infty(\mathbb{T}^N) \to C^\infty(\mathbb{T}^N)$ um operador linear contínuo. Considere $\mathcal{K}_a \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^N \times \mathbb{T}^N)$ seu núcleo distribuição. Fixado $\sigma \in \mathbb{R}$, são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. *Existem $C_1, h_1 > 0$ tais que:*

$$
|D_x^\alpha a(x,\eta)| \leq C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot (1+|\eta|)^\sigma, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N,\ \forall \eta \in \mathbb{Z}^N,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N. \tag{5.1}
$$

2. *Existem $C_2, h_2 > 0$ de modo que:*

$$
|\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,\eta)| \leq C_2 \cdot \inf_{k\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{h_2^k \cdot m_k \cdot k!}{(1+|\xi+\eta|)^k} \right) \cdot (1+|\eta|)^\sigma, \ \ \forall \xi,\eta \in \mathbb{Z}^N. \tag{5.2}
$$

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) : Consideramos primeiramente o caso em que $\xi + \eta = 0$. Nesta situação, pelo Lema 5.4,

$$
|\widehat{\mathcal{K}_a}(-\eta,\eta)| = \frac{1}{(2\pi)^{2N}} \cdot \left| \int_{\mathbb{T}^N} a(x,-\eta) dx \right| \leq C_1 \cdot (1+|\eta|)^\sigma.
$$

Se $C' = C_1$ e $h' = \max\{h_1, 1\}$, inferimos que

$$
|\widehat{\mathcal{K}_a}(-\eta,\eta)| \leq C' \cdot (h')^k \cdot m_k \cdot k! \cdot (1+|\eta|)^\sigma, \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall \eta \in \mathbb{Z}^N. \tag{5.3}
$$

Prosseguimos para o caso em que $\eta \neq -\xi$. Aplicando novamente o Lema 5.4 e tomando β como no Teorema 2.20, obtemos:

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,\eta)| \cdot (1+|\xi+\eta|)^k &\leq |\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,\eta)| \cdot 2^k \cdot (|\xi+\eta|)^k \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \cdot |\widehat{a}(\xi+\eta,-\eta)| \cdot 2^k \cdot (|\xi+\eta|)^k \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^N} \cdot |\widehat{a}(\xi+\eta,-\eta)| \cdot 2^k \cdot N^{k/2} \cdot \left|(\xi+\eta)^\beta\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{(2\pi)^N}\cdot(2\sqrt{N})^k\cdot\left|\int_{\mathbb{T}^N}(\xi+\eta)^\beta\cdot e^{-ix\cdot(\xi+\eta)}\cdot a(x,-\eta)dx\right|\\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{2N}}\cdot(2\sqrt{N})^k\cdot\left|\int_{\mathbb{T}^N}D_x^\beta(e^{-ix\cdot(\xi+\eta)})\cdot a(x,-\eta)dx\right|\\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{2N}}\cdot(2\sqrt{N})^k\cdot\left|\int_{\mathbb{T}^N}e^{-ix\cdot(\xi+\eta)}\cdot D_x^\beta a(x,-\eta)dx\right|\\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{2N}}\cdot(2\sqrt{N})^k\cdot\int_{\mathbb{T}^N}\left|D_x^\beta a(x,-\eta)\right|dx\\
&\leq (2\sqrt{N})^k\cdot C_1\cdot h_1^{|\beta|}\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|!\cdot(1+|\eta|)^\sigma\\
&\leq (2\sqrt{N})^k\cdot C_1\cdot h_1^{k}\cdot m_{k}\cdot k!\cdot(1+|\eta|)^\sigma\\
&\leq C_1\cdot(2\sqrt{N}\cdot h_1)^k\cdot m_{k}\cdot k!\cdot(1+|\eta|)^\sigma
\end{aligned}
$$

Ao considerarmos $C'' = C_1 = C'$ e $h'' = 2\sqrt{N}\cdot h_1$, inferimos que

$$
|\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,\eta)|\cdot(1+|\xi+\eta|)^k \leq C''\cdot(h'')^k\cdot m_k\cdot k!\cdot(1+|\eta|)^\sigma,\quad \xi\neq\eta,\ \forall k\in\mathbb{N}_0. \tag{5.4}
$$

Tomando $h_2 = \max\{h', h''\}$, deduzimos de (5.3) e (5.4) que

$$
|\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,\eta)|\cdot(1+|\xi+\eta|)^k \leq C_2\cdot h_2^k\cdot m_k\cdot k!\cdot(1+|\eta|)^\sigma,\ \ \forall k\in\mathbb{N}_0,\ \forall\xi,\eta\in\mathbb{Z}^N,
$$

demonstrando 5.2.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Escrevemos inicialmente, usando o Lema 5.4,

$$
\begin{aligned}
a(x,\eta) &= \sum_{\theta\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\theta}\widehat{a}(\theta,\eta)\\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{ix(\xi-\eta)}\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\\
&= (2\pi)^N\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{ix(\xi-\eta)}\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,-\eta).
\end{aligned}
$$

Por conseguinte,

$$
\begin{aligned}
|D_x^\alpha a(x,\eta)| &\leq (2\pi)^N\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi-\eta|)^{|\alpha|}\cdot|\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,-\eta)|\\
&\leq (2\pi)^N\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[(1+|\xi-\eta|)^{|\alpha|+2N}\cdot|\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,-\eta)|\right]\cdot\frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}}
\end{aligned}
$$

Aplicando a hipótese e as Observações 1.28 e 1.29, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\frac{|D_x^\alpha a(x,\eta)|}{(1+|\eta|)^\sigma} &\leq (2\pi)^N\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[C_2\cdot h_2^{|\alpha|+2N}\cdot m_{|\alpha|+2N}\cdot(|\alpha|+2N)!\right]\cdot\frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}}\\
&\leq\left[(2\pi)^N\cdot C_2\cdot h_2^{2N}\cdot\sum_{\theta\in\mathbb{Z}^N}\frac{1}{(1+|\theta|)^{2N}}\right]\cdot\left[h_2\cdot C_{\{2N\}}\cdot B_{\{2N\}}\right]^{|\alpha|}\cdot m_{|\alpha|}\cdot|\alpha|!.
\end{aligned}
$$

Denotando $C_1 = \left[(2\pi)^N \cdot C_2 \cdot h_2^{2N} \cdot \sum_{\theta\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\theta|)^{2N}}\right]$ e $h_1 = \left[h_2 \cdot C_{\{2N\}} \cdot B_{\{2N\}}\right]$, segue que

$$|D_x^\alpha a(x,\eta)| \leq C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot (1+|\eta|)^\sigma, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N,\ \forall \eta \in \mathbb{Z}^N,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N,$$

como pretendíamos demonstrar. □

O próximo passo é mostrar que um operador na classe $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}^{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ leva continuamente elementos de $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Precisamos antes, não obstante, de dois resultados técnicos.

Lema 5.6. *Existe $\lambda(N) > 0$ tal que, se $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$ (veja Definição 1.30), então*

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{\mathscr{M},h} \cdot \inf_{k\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{(\lambda\cdot h)^k \cdot m_k \cdot k!}{(1+|\xi|)^k}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N,$$

para qualquer $h > 0$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, assumimos $h \geq 1$; note que

$$|\hat{f}(0)| = \frac{1}{(2\pi)^N}\left|\int_{\mathbb{T}^N} f(x)dx.\right| \leq \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{T}^N} |f(x)|dx \leq \sup_{x\in\mathbb{T}^N} |f(x)| \leq \|f\|_{\mathscr{M},h}\,.$$

Logo, para $\xi = 0$, vale a igualdade desejada desde que $\lambda \geq 1 \geq \dfrac{1}{h}$.

Fixemos $\xi \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}$; com o mesmo argumento utilizado na prova do Teorema 2.20, encontramos $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ de modo que $|\xi|^k \leq (\sqrt{N})^k \cdot |\xi^\beta|$ e $|\beta| = k$. Portanto,

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^k \cdot |\hat{f}(\xi)| &\leq 2^k \cdot (|\xi|^k \cdot |\hat{f}(\xi)|)\\ &\leq 2^k \cdot (\sqrt{N})^k \cdot |\xi^\beta \cdot \hat{f}(\xi)|\\ &\leq (2\cdot\sqrt{N})^k \cdot |\widehat{D^\beta f}(\xi)|\\ &\leq (2\cdot\sqrt{N})^k \cdot \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{T}^N} |D^\beta f(x)|dx\\ &\leq (2\cdot\sqrt{N})^k \cdot \|f\|_{\mathscr{M},h} \cdot h^{|\beta|} \cdot m_{|\beta|} \cdot |\beta|!\end{aligned}$$

Isto é,

$$(1+|\xi|)^k \cdot |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{\mathscr{M},h} \cdot (h\cdot 2\cdot\sqrt{N})^k \cdot m_k \cdot |k|!, \quad \forall k \neq 0,\ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}\,.$$

Unindo a desigualdade acima às anteriores e tomando $\lambda = 2\cdot\sqrt{N}$, concluímos que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{\mathscr{M},h} \cdot \inf_{k\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{(\lambda\cdot h)^k \cdot m_k \cdot k!}{(1+|\xi|)^k}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N,$$

encerrando a demonstração. □

Lema 5.7. *Existe $\theta = \theta(N) > 0$ tal que se $g \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e*

$$|\hat{g}(\xi)| \leq C_1 \cdot \inf_{p \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_p \cdot p!}{\delta^p \cdot (1 + |\xi|)^p} \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N,$$

para $C_1, \delta > 0$, então $g \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}, \theta/\delta}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Escrevendo $g(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \hat{g}(\xi) \cdot e^{ix\cdot\xi}$, temos para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$

$$D^\alpha g(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \xi^\alpha \cdot \hat{g}(\xi) \cdot e^{ix\cdot\xi}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |D^\alpha g(x)| &\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \left[|\hat{g}(\xi)| \cdot (1 + |\xi|)^{|\alpha| + 2N} \right] \cdot \frac{1}{(1 + |\xi|)^{2N}} \\ &\leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \left[C_1 \cdot \frac{m_{|\alpha|+2N} \cdot (|\alpha| + 2N)!}{\delta^{|\alpha|+2N}} \right] \cdot \frac{1}{(1 + |\xi|)^{2N}} \\ &\leq \left[C_1 \cdot \left(\frac{1}{\delta} \right)^{2N} \cdot \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1 + |\xi|)^{2N}} \right] \cdot \left[\frac{B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}}}{\delta} \right]^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \end{aligned}$$

aplicando as Observações 1.28 e 1.29. Consequentemente, se $\theta = B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}}$, está provada a afirmação. □

Teorema 5.8. *Se $a(x, D) \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, então $a(x, D)f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Além disso, a aplicação $a(x, D) : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é contínua.*

Demonstração. Por definição, existem $C_1, h_1 > 0$ e $\sigma \in \mathbb{R}$, tais que

$$|D_x^\alpha a(x, \eta)| \leq C_1 \cdot h_1^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot (1 + |\eta|)^\sigma, \quad \forall x \in \mathbb{T}^N, \ \forall \eta \in \mathbb{Z}^N, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Através do Corolário 1.35, precisamos somente mostrar que, dado $k > 0$, é possível encontrar $\ell > 0$ tal que

$$a(x, D) : \mathcal{E}_{\mathscr{M},k}(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{E}_{\mathscr{M},\ell}(\mathbb{T}^N)$$

é bem definida e contínua. Assim, iniciamos com uma sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{E}_{\mathscr{M},k}(\mathbb{T}^N)$, convergindo para 0. Provaremos que $\{a(x, D)u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_{\mathscr{M},\ell}(\mathbb{T}^N)$, para algum $\ell > 0$, e que $\|a(x, D)u_n\|_{\mathscr{M},\ell} \to 0$.

Pelo Lema 5.4, dados $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},k}(\mathbb{T}^N)$, $\xi \in \mathbb{Z}^N$ e $j \in \mathbb{N}_0$,

$$\left| (\widehat{a(x, D)}\varphi)(\xi) \right| \cdot (1 + |\xi|)^j \leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} |\widehat{a}(\xi - \eta, \eta) \cdot \hat{\varphi}(\eta)| \cdot (1 + |\xi|)^j$$

$$\begin{aligned}&\leq (2\pi)^N \cdot \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,-\eta)| \cdot |\hat{\varphi}(\eta)| \cdot (1+|\xi|)^j.\\&\leq (2\pi)^N \cdot [(\star)+(\star\star)],\end{aligned} \tag{5.5}$$

com

$$\begin{aligned}(\star) &= \sum_{|\eta|<\frac{|\xi|}{2}} |\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,-\eta)| \cdot |\hat{\varphi}(\eta)| \cdot (1+|\xi|)^j,\\(\star\star) &= \sum_{|\eta|\geq\frac{|\xi|}{2}} |\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,-\eta)| \cdot |\hat{\varphi}(\eta)| \cdot (1+|\xi|)^j.\end{aligned}$$

Comecemos estimando $(\star)$: se $|\xi| > 2|\eta|$, então $|\xi| \leq |\xi-\eta| + |\eta| < |\xi-\eta| + \dfrac{|\xi|}{2}$. Consequentemente, $|\xi| \leq 2\cdot|\xi-\eta|$. Logo,

$$\begin{aligned}(\star) &\leq \sum_{|\eta|<\frac{|\xi|}{2}} |\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,-\eta)| \cdot |\hat{\varphi}(\eta)| \cdot 2^j \cdot (1+|\xi-\eta|)^j\\&\leq 2^j \cdot C_2 \cdot h_2^j \cdot m_j \cdot j! \cdot \sum_{|\eta|<\frac{|\xi|}{2}} |\hat{\varphi}(\eta)| \cdot (1+|\eta|)^\sigma,\end{aligned}$$

aplicando a Proposição 5.5. Definimos $b = [|\sigma|]+1$; utilizando o Lema 5.6, segue que

$$\begin{aligned}(\star) &\leq C_2 \cdot (2h_2)^j \cdot m_j \cdot j! \cdot \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\hat{\varphi}(\eta)| \cdot (1+|\eta|)^b\\&\leq C_2 \cdot (2h_2)^j \cdot m_j \cdot j! \cdot \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \left(|\hat{\varphi}(\eta)| \cdot (1+|\eta|)^{b+2N}\right) \cdot \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}\\&\leq C_2 \cdot (2h_2)^j \cdot m_j \cdot j! \cdot \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \left(\|\varphi\|_{\mathscr{M},k} \cdot (\lambda k)^{b+2N} \cdot m_{b+2N} \cdot (b+2N)!\right) \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}.\end{aligned}$$

Definindo $C_3 = C_2 \cdot (\lambda k)^{b+2N} \cdot m_{b+2N} \cdot (b+2N)! \cdot \displaystyle\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}$, inferimos que

$$(\star) \leq C_3 \cdot \|\varphi\|_{\mathscr{M},k} \cdot (2h_2)^j \cdot m_j \cdot j!. \tag{5.6}$$

Prosseguimos para a estimativa de $(\star\star)$; como $|\xi| \leq 2\cdot\eta$, empregando por mais uma vez a Proposição 5.5 e o Lema 5.6, além das Observações 1.28 e 1.29, inferimos que

$$\begin{aligned}(\star\star) &\leq \sum_{|\eta|\geq\frac{|\xi|}{2}} |\widehat{\mathcal{K}_a}(\xi,-\eta)| \cdot |\hat{\varphi}(\eta)| \cdot 2^j \cdot (1+|\eta|)^j\\&\leq \sum_{|\eta|\geq\frac{|\xi|}{2}} C_2 \cdot (1+|\eta|)^\sigma \cdot |\hat{\varphi}(\eta)| \cdot 2^j \cdot (1+|\eta|)^j\\&\leq C_2 \cdot 2^j \cdot \sum_{|\eta|\geq\frac{|\xi|}{2}} |\hat{\varphi}(\eta)| \cdot (1+|\eta|)^{j+(b+2N)} \cdot \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}\end{aligned}$$

$$\leq C_2 \cdot 2^j \cdot \|\varphi\|_{\mathscr{M},k} \cdot (\lambda k)^{j+(b+2N)} \cdot m_{j+(b+2N)} \cdot (j+(b+2N))! \cdot \sum_{|\eta|\geq\frac{|\xi|}{2}} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}$$

$$\leq C_2 \cdot (\lambda k)^{b+2N} \cdot \left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}\right) \cdot \|\varphi\|_{\mathscr{M},k} \cdot (2\lambda k)^j \cdot m_j \cdot C^j_{\{b+2N\}} \cdot j! \cdot B^j_{\{b+2N\}}.$$

Portanto, se tomamos $C_4 := C_2 \cdot (\lambda k)^{b+2N} \cdot \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\eta|)^{2N}}$, concluímos que

$$(\star\star) \leq C_4 \cdot \|\varphi\|_{\mathscr{M},k} \cdot (2\lambda k \cdot C_{\{b+2N\}} \cdot B_{\{b+2N\}})^j \cdot m_j \cdot j! \tag{5.7}$$

Escolhendo $C_5 = (2\pi)^N \cdot \max\{C_3, C_4\}$ e $h = \max\left\{(2h_2),\ (2\lambda k \cdot C_{\{b+2N\}} \cdot B_{\{b+2N\}})\right\}$, deduzimos de (5.5), (5.6) e (5.7) que

$$\left|(\widehat{a(x,D)\varphi})(\xi)\right| \leq C_5 \cdot \|\varphi\|_{\mathscr{M},k} \cdot \inf_{j\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{h^j \cdot m_j \cdot j!}{(1+|\xi|)^j}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Pelo Corolário 2.14, $a(x,D)\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Além disso, segue como consequência do Lema 5.7 que $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},\theta h}(\mathbb{T}^N)$,

$$a(x,D) : \mathcal{E}_{\mathscr{M},k}(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{E}_{\mathscr{M},\ell}(\mathbb{T}^N)$$

está bem definida, denotando $\ell = \theta \cdot h$, e $\|a(x,D)\varphi\|_{\mathscr{M},\ell} \leq C_6 \cdot \|\varphi\|_{\mathscr{M},h}$, para algum $C_6 > 0$. Retornando ao problema original, segue que

$$\|a(x,D)u_n\|_{\mathscr{M},\ell} \leq C_6 \cdot \|u_n\|_{\mathscr{M},h} \ \Rightarrow\ \|a(x,D)u_n\|_{\mathscr{M},\ell} \to 0,$$

provando o resultado. $\square$

Após a continuidade, abordemos agora a composição de operadores em $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N)$.

Teorema 5.9. *Sejam $a(x,D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$ e $b(x,D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\omega}(\mathbb{T}^N)$. Nesta situação, o operador composição $a(x,D) \circ b(x,D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_{\sigma+\omega}}(\mathbb{T}^N)$, e seu símbolo é dado por*

$$(a \circ b)(x,\eta) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot(\xi-\eta)} \cdot a(x,\xi) \cdot \widehat{b}(\xi-\eta,\eta).$$

Demonstração. Consideremos primeiramente

$$\Gamma(x,\eta) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot(\xi-\eta)} \cdot a(x,\xi) \cdot \widehat{b}(\xi-\eta,\eta);$$

mostremos que $\Gamma(x,\eta)$ é um símbolo e o operador $\Gamma(x,D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_{\sigma+\omega}}(\mathbb{T}^N)$. Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$,

$$D^\alpha_x(\Gamma(x,\eta)) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} D^\alpha_x\left(e^{ix\cdot(\xi-\eta)} \cdot a(x,\xi)\right) \cdot \widehat{b}(\xi-\eta,\eta)$$

$$= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D_x^{\alpha-\beta}(e^{ix\cdot(\xi-\eta)})\cdot D_x^\beta a(x,\xi)\right]\cdot\widehat{b}(\xi-\eta,\eta)$$
$$= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(\xi-\eta)^{\alpha-\beta}\cdot(e^{ix\cdot(\xi-\eta)})\cdot D_x^\beta a(x,\xi)\right]\cdot\widehat{b}(\xi-\eta,\eta)$$

Aplicamos o Lema 5.4 e a Proposição 5.5:

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha(\Gamma(x,\eta))| &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\xi-\eta|^{|\alpha-\beta|}\cdot|D_x^\beta a(x,\xi)|\cdot|\widehat{b}(\xi-\eta,\eta)|\\ &\leq (2\pi)^N\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\xi-\eta|^{|\alpha-\beta|}\cdot|D_x^\beta a(x,\xi)|\cdot|\widehat{\mathcal{K}_b}(\xi,-\eta)|\\ &\leq (2\pi)^N\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\xi-\eta|^{|\alpha-\beta|}(C_1h_1^{|\beta|}m_{|\beta|}|\beta|!)(1+|\xi|)^\sigma|\widehat{\mathcal{K}_b}(\xi,-\eta)|.\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Peetre,

$$\begin{aligned}\frac{|D_x^\alpha(\Gamma(x,\eta))|}{(1+|\eta|)^\sigma} &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\xi-\eta|^{|\alpha-\beta|}(C_2h_1^{|\beta|}m_{|\beta|}|\beta|!)(1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|}|\widehat{\mathcal{K}_b}(\xi,-\eta)|\\ &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(C_2\cdot h_1^{|\beta|}\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|!)(1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|+|\alpha|-|\beta|}\cdot|\widehat{\mathcal{K}_b}(\xi,-\eta)|\end{aligned}$$

Se $p=[|\sigma|]+1$,

$$\begin{aligned}\frac{|D_x^\alpha(\Gamma(x,\eta))|}{(1+|\eta|)^\sigma} &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(C_2\cdot h_1^{|\beta|}\cdot m_{|\beta|}\cdot|\beta|!)\cdot(1+|\xi-\eta|)^{p+|\alpha|-|\beta|}\cdot|\widehat{\mathcal{K}_b}(\xi,-\eta)|\\ &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(C_2h_1^{|\beta|}m_{|\beta|}|\beta|!)\cdot\frac{(1+|\xi-\eta|)^{p+|\alpha|-|\beta|+2N}\cdot|\widehat{\mathcal{K}_b}(\xi,-\eta)|}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}}\end{aligned}$$

Denotando $\zeta=p+|\alpha|-|\beta|+2N$ e usando a Proposição 5.5, deduzimos que

$$\begin{aligned}\frac{|D_x^\alpha(\Gamma(x,\eta))|}{(1+|\eta|)^\sigma} &\leq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(C_2h_1^{|\beta|}m_{|\beta|}|\beta|!)\cdot\frac{(C_3\cdot h_3^\zeta\cdot m_\zeta\cdot\zeta!)\cdot(1+|\eta|)^\omega}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}}\\ &\leq (1+|\eta|)^\omega\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\frac{(C_2C_3)\cdot\max\{h_1,h_3\}^{|\beta|+\zeta}\cdot m_{|\beta|+\zeta}\cdot(|\beta|+\zeta)!}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}}\end{aligned}$$

Repare que $|\beta|+\zeta=p+|\alpha|+2N$ e portanto, a série acima não depende de $|\beta|$. Por consequência,

$$\frac{|D_x^\alpha(\Gamma(x,\eta))|}{(1+|\eta|)^\sigma}\leq(1+|\eta|)^\omega\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}2^{|\alpha|}\frac{(C_2C_3)\max\{h_1h_3\}^{p+|\alpha|+2N}\,m_{p+|\alpha|+2N}(p+|\alpha|+2N)!}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}}.$$

Denotando $C_4=C_2\cdot C_3$ e $h_4=\max\{h_1,h_3\}$, segue que

$$|D_x^\alpha(\Gamma(x,\eta))|\leq(1+|\eta|)^{\sigma+\omega}C_4h_4^{p+2N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}}(2h_4)^{|\alpha|}\cdot m_{p+|\alpha|+2N}\cdot(p+|\alpha|+2N)!.$$

Se $C_5 = C_4 h_4^{p+2N} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}}$ e $h_5 = \left(2 \cdot h_4 \cdot C_{\{p+2N\}} \cdot B_{\{p+2N\}}\right)$, inferimos das Observações 1.28 e 1.29 que

$$|D_x^\alpha(\Gamma(x,\eta))| \leq C_5 \cdot h_5^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \cdot (1+|\eta|)^{\sigma+\omega}.$$

Logo $\Gamma(x,D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_{\sigma+\omega}}(\mathbb{T}^N)$.

Por outro lado, pelo Lema 5.4,

$$\begin{aligned} a(x,D)[b(x,D)(\varphi)](x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\xi} \cdot a(x,\xi) \cdot (\widehat{b(x,D)}\varphi)(\xi) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\xi} \cdot a(x,\xi) \cdot \widehat{b}(\xi-\eta,\eta) \cdot \hat{\varphi}(\eta) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot(\xi-\eta)} \cdot a(x,\xi) \cdot \widehat{b}(\xi-\eta,\eta) \cdot (\hat{\varphi}(\eta) \cdot e^{ix\cdot\eta}) \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} \left[\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot(\xi-\eta)} \cdot a(x,\xi) \cdot \widehat{b}(\xi-\eta,\eta) \right] \cdot (\hat{\varphi}(\eta) \cdot e^{ix\cdot\eta}) \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot\eta} \left[\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} e^{ix\cdot(\xi-\eta)} \cdot a(x,\xi) \cdot \widehat{b}(\xi-\eta,\eta) \right] \cdot \hat{\varphi}(\eta), \end{aligned}$$

o que prova a fórmula para o símbolo da composição enunciada. □

Antes de encerrar a seção, faremos um breve estudo sobre o *transposto* de um elemento de $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N)$. Provaremos que se $a(x,D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$, $a(x,D)^t$ também pertence ao espaço. E mostraremos estes operadores podem ser estendidos continuamente a $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Para tal, precisaremos primeiro estudar as ações de elementos de $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N)$ nos espaços de Sobolev.

Proposição 5.10. *Se $a(x,D)$ é um elemento de $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N)$ de* ordem zero*, então pode ser estendido como um operador contínuo de $L^2(\mathbb{T}^N)$ em $L^2(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Pelo Lema 5.4, para cada $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ temos

$$(\widehat{a(x,D)}\varphi)(\xi) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} \widehat{a}(\xi-\eta,\eta) \cdot \hat{\varphi}(\eta), \ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Consideremos agora a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \Xi : \ell^2(\mathbb{Z}^N) &\to \ell^2(\mathbb{Z}^N) \\ (y_\xi)_{\xi \in \mathbb{Z}^N} &\mapsto (z_\xi)_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \ \Big| \ z_\xi := \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} \widehat{a}(\xi-\eta,\eta) \cdot y_\eta. \end{aligned}$$

Verifiquemos que Ξ está de fato bem definida. Com efeito, aplicamos a desigualdade de Hölder, o Lema 5.4 e a Proposição 5.5:

$$
\begin{aligned}
|z_\xi|^2 &\le \left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\cdot y_\eta|\right)^2 \\
&\le \left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\right)\cdot\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\cdot|y_\eta|^2\right) \\
&\le \left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \frac{C_2\cdot h_2^{2N}\cdot m_{2N}\cdot(2N)!}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}}\right)\cdot\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\cdot|y_\eta|^2\right) \\
&\le \left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \frac{C_2\cdot h_2^{2N}\cdot m_{2N}\cdot(2N)!}{(1+|\eta|)^{2N}}\right)\cdot\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\cdot|y_\eta|^2\right) \\
&\le C_3\cdot\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\cdot|y_\eta|^2\right).
\end{aligned}
$$

Pelo fato de $|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|$ ser limitado, segue que $(z_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^N}$ está bem definida. Resta-nos provar que a sequência é um elemento de $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} |z_\xi|^2 &\le C_3 \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\cdot|y_\eta|^2 \\
&\le C_3 \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\cdot|y_\eta|^2 \\
&\le C_3 \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |y_\eta|^2\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \frac{C_2\cdot h_2^{2N}\cdot m_{2N}\cdot(2N)!}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}} \\
&\le C_3 \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |y_\eta|^2\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \frac{C_2\cdot h_2^{2N}\cdot m_{2N}\cdot(2N)!}{(1+|\xi|)^{2N}} \\
&\le C_4\cdot\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} |y_\eta|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto Ξ é bem definida e contínua. Pelo isomorfismo existente entre $L^2(\mathbb{T}^N)$ e $\ell^2(\mathbb{Z}^N)$ (através dos coeficientes de Fourier), está demonstrada a proposição. □

Corolário 5.11. *Para cada $s\in\mathbb{R}$, $a(x,D)\in\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$ se estende como aplicação linear e contínua de $H^s(\mathbb{T}^N)$ a $H^{s-\sigma}(\mathbb{T}^N)$.*

Demonstração. Denotemos por $(1+|D|)^r$ o operador pseudodiferencial cujo símbolo é dado por $b_r(x,\eta)=(1+|\eta|)^r$. É imediato que $(1+|D|)^r\in\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_r}(\mathbb{T}^N)$. Mais ainda, pode-se verificar $(1+|D|)^r$ define um isomorfismo entre $H^s(\mathbb{T}^N)$ e $H^{s-r}(\mathbb{T}^N)$, com aplicação inversa dada por $(1+|D|)^{-r}$.

Desta maneira, dado $a(x,D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$, tomamos o seguinte operador:

$$\mathcal{A}(x,D) = (1+|D|)^{s-\sigma} \circ a(x,D) \circ (1+|D|)^{-s}.$$

Pelo Teorema 5.9, $\mathcal{A}(x,D)$ é um elemento $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_0}(\mathbb{T}^N)$. Assim, se estende a um operador contínuo em $L^2(\mathbb{T}^N)$ (Proposição 5.10). Consequentemente,

$$a(x,D) : H^s(\mathbb{T}^N) \to H^{s-\sigma}(\mathbb{T}^N)$$

está bem definida e é contínua. □

Recordemos agora que se $a(x,D) : C^\infty(\mathbb{T}^N) \to C^\infty(\mathbb{T}^N)$, seu transposto será a aplicação $a(x,D)^t : \mathscr{D}'(\mathbb{T}^N) \to \mathscr{D}'(\mathbb{T}^N)$ que satisfaz a seguinte relação:

$$\left\langle a(x,D)^t(u), \varphi \right\rangle = \langle u, a(x,D)(\varphi) \rangle \,, \;\; \forall u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^N),\; \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N). \tag{5.8}$$

Proposição 5.12. *Dado* $a(x,D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$*,* $a(x,D)^t \left(H^r(\mathbb{T}^N)\right) \subset H^{r-\sigma}(\mathbb{T}^N)$*, para qualquer* $r \in \mathbb{R}$*. Além disso, a aplicação*

$$\begin{aligned} a(x,D)^t : H^r(\mathbb{T}^N) &\to H^{r-\sigma}(\mathbb{T}^N) \\ f &\mapsto a(x,D)^t f \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração. Fixada $f \in H^r(\mathbb{T}^N)$, definimos o seguinte funcional linear:

$$\begin{aligned} \Phi_f : H^{\sigma-r}(\mathbb{T}^N) &\to \mathbb{C} \\ v &\mapsto \Bigg(\underbrace{a(x,D)(v)}_{\in H^{-r}(\mathbb{T}^N)}, \underbrace{\bar{f}}_{\in H^r(\mathbb{T}^N)} \Bigg), \end{aligned}$$

com a notação $(,)$ se referindo ao pareamento nos espaços de Sobolev. Pelo Teorema de Representação de Riesz, existe uma única $u \in H^{r-\sigma}(\mathbb{T}^N)$ de modo que

$$\left(a(x,D)(v), \bar{f}\right) = (v,u) \,, \;\; \forall v \in H^{\sigma-r}(\mathbb{T}^N). \tag{5.9}$$

Estabelecemos

$$\begin{aligned} \Psi : H^r(\mathbb{T}^N) &\to H^{r-\sigma}(\mathbb{T}^N) \\ f &\mapsto \bar{u}. \end{aligned}$$

No caso particular em que $v \in H^{\sigma-r}(\mathbb{T}^N)$ é um elemento de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$, segue de (5.8) e (5.9) que

$$\left\langle a(x,D)^t f, v\right\rangle = \langle f, a(x,D)(v)\rangle = \left(a(x,D)(v), \bar{f}\right) = (v,u) = \left(v, \overline{\Psi(f)}\right) = \langle \Psi(f), v\rangle\,,$$

o que nos permite concluir que $a(x,D)^t\left(H^r(\mathbb{T}^N)\right) \subset H^{r-\sigma}(\mathbb{T}^N)$.

A fim de comprovar a continuidade, note que

$$|\Phi_f(v)| \leq \|a(x,D)v\|_{H^{-r}(\mathbb{T}^N)} \cdot \left\|\bar{f}\right\|_{H^r(\mathbb{T}^N)} \leq \|a(x,D)\| \cdot \|v\|_{H^{\sigma-r}(\mathbb{T}^N)} \cdot \|f\|_{H^r(\mathbb{T}^N)}\,,$$

o que implica que

$$\|\Phi_f\| \leq \|a(x,D)\| \cdot \|f\|_{H^r(\mathbb{T}^N)}\,.$$

Utilizando de uma das propriedades do Teorema de Riesz, temos

$$\|\bar{u}\|_{H^{r-\sigma}(\mathbb{T}^N)} = \|u\|_{H^{r-\sigma}(\mathbb{T}^N)} = \|\Phi_f\|\,,$$

e por conseguinte

$$\|\Psi(f)\|_{H^{r-\sigma}(\mathbb{T}^N)} = \left\|a(x,D)^t f\right\|_{H^{r-\sigma}(\mathbb{T}^N)} \leq \|a(x,D)\| \cdot \|f\|_{H^r(\mathbb{T}^N)}\,.$$

finalizando a prova do resultado. □

Lembramos também que o adjunto formal em $L^2(\mathbb{T}^N)$ de $a(x,D)$ é o operador denotado por $a(x,D)^*$, que satisfaz a seguinte condição:

$$(a(x,D)f, g)_{L^2} = (f, a(x,D)^* g)_{L^2}\,, \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

Decorre da Proposição 5.12 que $a(x,D)^t$ leva funções suaves em funções suaves continuamente. Consequentemente, há uma relação entre o transposto e o adjunto formal, dada da seguinte maneira: para $f, g \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ quaisquer,

$$\langle a(x,D)f, g\rangle = \left\langle f, a(x,D)^t g\right\rangle = (a(x,D)f, \bar{g})_{L^2} = (f, a(x,D)^*\bar{g})_{L^2} = \left\langle f, \overline{a(x,D)^*\bar{g}}\right\rangle.$$

Por conseguinte, para cada $g \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, $a(x,D)^t g = \overline{a(x,D)^*\bar{g}}$. Logo,

$$\begin{aligned} a^t(x,\eta) &= e^{-ix\cdot\eta} \cdot \left[a(x,D)^t\left(e^{ix\cdot\eta}\right)\right] \\ &= e^{-ix\cdot\eta} \cdot \left[\overline{a(x,D)^* e^{-ix\cdot\eta}}\right] \\ &= \overline{e^{ix\cdot\eta} \cdot \left[a(x,D)^* e^{-ix\cdot\eta}\right]} \\ &= \overline{a^*(x,-\eta)}. \end{aligned}$$

Encontremos a transformada de Fourier de $a^*(x,\eta)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{a^*}(\xi,\eta) &= \frac{1}{(2\pi)^N}\cdot\int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot\xi}\cdot a^*(x,\eta)dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\cdot\int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot\xi}\cdot e^{-ix\cdot\eta}\cdot a(x,D)^*(e^{ix\cdot\eta})dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\cdot\int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix\cdot(\xi+\eta)}\cdot a(x,D)^*(e^{ix\cdot\eta})dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\cdot\big(a(x,D)^*(e^{ix\cdot\eta}),e^{ix\cdot(\xi+\eta)}\big)_{L^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\cdot\big(e^{ix\cdot\eta},a(x,D)(e^{ix\cdot(\xi+\eta)})\big)_{L^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\cdot\overline{\langle a(x,D)(e^{ix\cdot(\xi+\eta)}),e^{-ix\cdot\eta}\rangle} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\cdot\overline{\langle \mathcal{K}_a, e^{-ix\cdot\eta}\otimes e^{iy\cdot(\xi+\eta)}\rangle} \\
&= (2\pi)^N\cdot\overline{\widehat{\mathcal{K}_a}(\eta,-\xi-\eta)}.
\end{aligned}$$

Proposição 5.13. *Se* $a(x,D)\in\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$*, seu adjunto formal* $a(x,D)^*$ *e transposto* $a(x,D)^t$ *pertencem a* $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$.

Demonstração. Pela igualdade anterior e pelo Lema 5.4,

$$\widehat{\mathcal{K}_{a^*}}(\xi,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^N}\cdot\widehat{a^*}(\xi+\eta,-\eta)=\overline{\widehat{\mathcal{K}_a}(-\eta,-\xi)},\quad \forall\xi,\eta\in\mathbb{Z}^N.$$

Tome $q\in\mathbb{N}$, de modo que $|\sigma|\le q$. Dado $k\in\mathbb{N}_0$, inferimos da Proposição 5.5 e das Observações 1.28, 1.29 que

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mathcal{K}_{a^*}}(\xi,\eta)| &= |\widehat{\mathcal{K}_a}(-\eta,-\xi)| \\
&\le \frac{C_2\cdot h_2^{k+q}\cdot m_{k+q}\cdot(k+q)!\cdot(1+|\xi|)^\sigma}{(1+|\xi+\eta|)^{k+q}} \\
&\le \frac{C_2\cdot h_2^{k+q}\cdot m_{k+q}\cdot(k+q)!\cdot(1+|\eta|)^\sigma\cdot(1+|\xi+\eta|)^{|\sigma|}}{(1+|\xi+\eta|)^{k+q}} \\
&\le \frac{(C_2\cdot h_2^q)\cdot(h_2\cdot C_q\cdot B_q)^k\cdot m_k\cdot k!\cdot(1+|\eta|)^\sigma}{(1+|\xi+\eta|)^k} \\
&\le \frac{C_3\cdot h_3^k\cdot m_k\cdot k!\cdot(1+|\eta|)^\sigma}{(1+|\xi+\eta|)^k}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\widehat{\mathcal{K}_{a^*}}(\xi,\eta)|\le C_3\cdot\inf_{k\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{h_3^k\cdot m_k\cdot k!}{(1+|\xi+\eta|)^k}\right)\cdot(1+|\eta|)^\sigma,$$

e portanto $a(x,D)^*\in\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$, novamente pela Proposição 5.5. Por fim, $a^t(x,\eta)=\overline{a^*(x,-\eta)}$ e então o mesmo vale para $a(x,D)^t$. □

Finalmente, vejamos que elementos de $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ são estendidos continuamente para $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Segue das Proposições 5.8 e 5.13, que $a(x,D)^t : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ é contínua. Do Corolário após a Proposição 19.5 de [53], concluímos que

$$a(x,D) : \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$$

é contínua (para uma melhor compreensão da topologia imposta no dual, veja o Teorema 12 de [39]). Note que, se iniciamos o raciocínio com $a(x,D)$ ao invés de $a(x,D)^t$, deduzimos a mesma afirmação para $a(x,D)^t$.

5.2 Uma Família de Normas

Nesta seção, definiremos uma família de subespaços normados de $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, no qual $\mathscr{M}$ será uma sequência peso fixada, satisfazendo (1.1), (1.2) e (2.11).

Definição 5.14. *Fixados $\delta, \sigma \in \mathbb{R}$, denotamos por $(\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}}(\mathbb{T}^N)$ o espaço das ultradistribuições u em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ tais que*

$$\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}} := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^{2s(\delta)} \cdot (1+|\xi|)^{2\sigma} \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 \ < +\infty,$$

com $s(\delta) = sgn(\delta) = \begin{cases} 1, & se\ \delta \geq 0 \\ -1, & se\ \delta < 0 \end{cases}.$

Observação 5.15. *Para que a Definição 5.14 faça sentido quando $\delta = 0$, iremos considerar $0^0 = 1$. Logo, uma ultradistribuição u será elemento de $(\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(0,\sigma)\}}(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se,*

$$\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(0,\sigma)\}} := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} (1+|\xi|)^{2\sigma} \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 \ < +\infty.$$

Observação 5.16. *Repare que estes subespaços normados podem ser considerados Espaços de Sobolev para Ultradistribuições, nos quais colocamos como peso a exponencial da função peso associada, tratada na Seção 2.3.*

Proposição 5.17. *Considere $\delta_1, \delta_2, \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\delta_1 \leq \delta_2$ e $\sigma_1 \leq \sigma_2$. Então*

$$(\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_2)\}}(\mathbb{T}^N) \subset (\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta_1,\sigma_1)\}}(\mathbb{T}^N).$$

Além disso, se $u \in (\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_2)\}}(\mathbb{T}^N)$,

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta_1,\sigma_1)\}} \leq \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_2)\}}.$$

Demonstração. Suponha $u \in (\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_2)\}}(\mathbb{T}^N)$. Por hipótese, $\sigma_2 \geq \sigma_1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_2)\}} &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta_2|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{2s(\delta_2)} \cdot (1+|\xi|)^{2\sigma_2}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2 \\
&\geq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta_2|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{2s(\delta_2)} \cdot (1+|\xi|)^{2\sigma_1}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2 \\
&\geq \|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_1)\}}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $u \in (\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_1)\}}(\mathbb{T}^N)$ e $\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_2)\}} \geq \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_1)\}}$.

Provemos agora que $\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_1)\}} \geq \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta_1,\sigma_1)\}}$. Supondo $\delta_2 \geq \delta_1 \geq 0$,

$$\frac{\delta_2^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!} \geq \frac{\delta_1^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}, \quad \forall n\in\mathbb{N}_0,\ \forall\xi\in\mathbb{Z}^N.$$

Por conseguinte,

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\delta_2^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^2 \geq \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\delta_1^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^2, \quad \forall\xi\in\mathbb{Z}^N,$$

o que implica que

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_1)\}} &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\delta_2^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^2 \cdot (1+|\xi|)^{2\sigma_1}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2 \\
&\geq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\delta_1^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^2 \cdot (1+|\xi|)^{2\sigma_1}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2 \\
&\geq \|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta_1,\sigma_1)\}}.
\end{aligned}$$

Quando $\delta_2 \geq 0 > \delta_1$, repare que

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{\delta_2^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right]^2 \geq 1 \geq \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{|\delta_1|^n\cdot|(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right]^{-2}, \quad \forall\xi\in\mathbb{Z}^N,$$

e portanto $\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_1)\}} \geq \|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta_1,\sigma_1)\}}$.

Finalmente, se $\delta_1 \leq \delta_2 < 0$, $|\delta_1| \geq |\delta_2|$. Consequentemente,

$$\left[\frac{|\delta_1|^n\cdot|(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right] \geq \left[\frac{|\delta_2|^n\cdot|(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right], \quad \forall n\in\mathbb{N}_0,\ \forall\xi\in\mathbb{Z}^N.$$

Por conseguinte,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta_1|^n\cdot|(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta_2|^n\cdot|(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right), \quad \forall\xi\in\mathbb{Z}^N.$$

Elevando ambos os lados da equação a (-2), inferimos que

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta_1|^n\cdot|(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2} \leq \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta_2|^n\cdot|(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}, \quad \forall\xi\in\mathbb{Z}^N.$$

Desta maneira, $\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_1)\}} \leq \|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta_1,\sigma_1)\}}$.

Em todos os casos, chegamos a conclusão de que $\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_1)\}} \geq \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta_1,\sigma_1)\}}$. Ou seja,

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta_1,\sigma_1)\}} \leq \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_1)\}} \leq \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta_2,\sigma_2)\}},$$

de acordo com o que desejávamos provar. $\square$

Relacionemos agora os subespaços $(\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}}(\mathbb{T}^N)$ com os espaços $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Proposição 5.18. *Seja $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Valem as seguintes afirmações:*

1. *$u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, existem $\delta > 0$ e $\sigma \in \mathbb{R}$ tais que $u \in (\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}}(\mathbb{T}^N)$.*

2. *$u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, existe $\delta > 0$ de modo que $u \in (\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}}(\mathbb{T}^N)$, para qualquer $\sigma \in \mathbb{R}$.*

3. *$u \in (\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}}(\mathbb{T}^N)$, $\forall \delta < 0$, $\forall \sigma \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Primeiramente, observe o seguinte: se provarmos a suficiência de 2, automaticamente teremos comprovado a suficiência de 1. Por outro lado, ao demonstrarmos a necessidade de 1, imediatamente a necessidade de 2 estará verificada. Dito isto, iniciemos a prova.

(1) $(\Leftarrow)$: Por hipótese, existem $C, \delta > 0$ e $\sigma \in \mathbb{R}^N$ de forma que

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^2 \cdot (1+|\xi|)^{2\sigma} \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 = C^2.$$

Por conseguinte,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \cdot (1+|\xi|)^{\sigma} \cdot |\hat{u}(\xi)| \leq C, \qquad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Se $\sigma \geq 0$, $(1+|\xi|)^\sigma \geq 1$. Nesta situação,

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C \cdot \inf_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{m_n \cdot n!}{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^n} \right), \qquad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Pelo Corolário 2.14, $u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

Para $\sigma < 0$, considere $L \in \mathbb{N}$ tal que $-\sigma \leq L$. Então

$$(1+|\xi|)^{-\sigma} \leq (1+|\xi|)^L \;\Rightarrow\; (1+|\xi|)^{-L} \leq (1+|\xi|)^{\sigma}.$$

Logo

$$\frac{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^{n-L}}{m_n \cdot n!} \cdot |\hat{u}(\xi)| \leq C, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N,\ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Escrevendo $k = n - L$, inferimos que:

$$\frac{\delta^{k+L} \cdot (1+|\xi|)^{k}}{m_{k+L} \cdot (k+L)!} \cdot |\hat{u}(\xi)| \leq C, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N,\ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Consequentemente, segue das Observações 1.28 e 1.29 que

$$(1+|\xi|)^k \cdot |\hat{u}(\xi)| \leq C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^L \cdot \left(\frac{1}{\delta} \cdot C_{\{L\}} \cdot B_{\{L\}}\right)^k \cdot m_k \cdot k!, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N,\ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Tomando $C_1 = C \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^L$ e $h_1 = \left(\frac{1}{\delta} \cdot C_{\{L\}} \cdot B_{\{L\}}\right)$, inferimos que

$$|\hat{u}(\xi)| \leq \inf_{k \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{h_1^k \cdot m_k \cdot k!}{(1+|\xi|)^k}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N,$$

e decorre novamente do Corolário 2.14 que $u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.

(2) $(\Rightarrow)$: Fixemos $u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$; então existem $C, h > 0$ tais que

$$|\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|)^n \leq C \cdot h^n \cdot m_n \cdot n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Dados $\xi \in \mathbb{Z}^N$ e $\sigma \in \mathbb{R}$, tomamos $M \in \mathbb{N}$ de modo que $M \geq \sigma$. Além disso, denotamos

$$(\star) = \left[\frac{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right]^2 \cdot (1+|\xi|)^{2\sigma} \cdot |\hat{u}(\xi)|^2. \tag{5.10}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned}
(\star) &\leq \left[\frac{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right]^2 \cdot (1+|\xi|)^{2M} \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 \\
&\leq \frac{\delta^{2n} \cdot (1+|\xi|)^{2n} \cdot (1+|\xi|)^{2(M+N)} \cdot |\hat{u}(\xi)|^2}{(m_n \cdot n!)^2 \cdot (1+|\xi|)^{2N}} \\
&\leq \left[\frac{\delta^{2n} \cdot (1+|\xi|)^{2n} \cdot |\hat{u}(\xi)|}{(m_n \cdot n!)^2} \cdot \left(|\hat{u}(\xi)| \cdot (1+|\xi|)^{2(M+N)}\right)\right] \cdot \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}} \\
&\leq \left[\frac{\delta^{2n} \cdot (1+|\xi|)^{2n} \cdot |\hat{u}(\xi)|}{(m_n \cdot n!)^2} \cdot C \cdot h^{2(M+N)} \cdot m_{2(M+N)} \cdot (2(M+N))!\right] \cdot \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}
\end{aligned}$$

Escrevendo $\lambda = 2(M+N)$, segue que

$$\begin{aligned}
(\star) &\leq \left[\frac{\delta^{2n} \cdot (1+|\xi|)^{2n} \cdot |\hat{u}(\xi)|}{(m_n \cdot n!)^2} \cdot \left(C \cdot h^\lambda \cdot m_\lambda \cdot \lambda!\right)\right] \cdot \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}} \\
&\leq \left[\frac{\delta^{2n} \cdot (1+|\xi|)^{2n} \cdot |\hat{u}(\xi)|}{m_{2n} \cdot (2n)!} \cdot \frac{m_{2n} \cdot (2n)!}{(m_n \cdot n!)^2}\right] \cdot \frac{C \cdot h^\lambda \cdot m_\lambda \cdot \lambda!}{(1+|\xi|)^{2N}}.
\end{aligned}$$

De (2.11) e (2.12), inferimos que

$$\left[\frac{m_{2n}\cdot(2n)!}{(m_n\cdot n!)^2}\right]\leq(2H)^{2n}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}(\star)&\leq\left[\frac{\delta^{2n}\cdot(1+|\xi|)^{2n}\cdot|\hat{u}(\xi)|}{m_{2n}\cdot(2n)!}\right]\cdot(2H)^{2n}\cdot\frac{C\cdot h^{\lambda}\cdot m_{\lambda}\cdot\lambda!}{(1+|\xi|)^{2N}}\\&\leq\left[\frac{(1+|\xi|)^{2n}\cdot|\hat{u}(\xi)|}{m_{2n}\cdot(2n)!}\right]\cdot(2\delta H)^{2n}\cdot\frac{C\cdot h^{\lambda}\cdot m_{\lambda}\cdot\lambda!}{(1+|\xi|)^{2N}}\\&\leq C\cdot(2\delta hH)^{2n}\cdot\frac{C\cdot h^{\lambda}\cdot m_{\lambda}\cdot\lambda!}{(1+|\xi|)^{2N}}\\&\leq(C^2\cdot h^{\lambda}\cdot m_{\lambda}\cdot\lambda!)\cdot(2\delta hH)^{2n}\cdot\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}.\end{aligned}$$

Observe que, se $B:=(C^2\cdot h^{\lambda}\cdot m_{\lambda}\cdot\lambda!)$, então B depende somente de u, σ e N. Tomando $\delta=\dfrac{1}{h\cdot 2\cdot H}$, inferimos que

$$(\star)\leq B\cdot\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}. \tag{5.11}$$

Associando (5.10) a (5.11), obtemos

$$\left[\frac{\delta^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right]^2\cdot(1+|\xi|)^{2\sigma}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\leq B\cdot\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}.$$

Pelo fato do lado direito da desigualdade ser independente de n,

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\delta^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^2\cdot(1+|\xi|)^{2\sigma}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\leq B\cdot\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}.$$

Ou seja,

$$\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}}=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\delta^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^2\cdot(1+|\xi|)^{2\sigma}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\leq B\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}},$$

o que nos permite afirmar que $u\in(\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}}(\mathbb{T}^N)$ para todo $\sigma\in\mathbb{R}$, sempre que $\delta\leq\dfrac{1}{h\cdot 2\cdot H}$.

(3): Começamos fixando $u\in\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, $\delta<0$ e $\sigma\in\mathbb{R}$; demonstraremos que u é elemento de $(\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}}(\mathbb{T}^N)$. Pelo Teorema 2.6, para cada $\varepsilon>0$, existe $C_\varepsilon>0$ de maneira que

$$|\hat{u}(\xi)|\leq C_\varepsilon\cdot\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right),\quad\forall\xi\in\mathbb{Z}^N. \tag{5.12}$$

Dado $\xi\in\mathbb{Z}^N$, denotaremos

$$(\ddagger)=\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2\sigma}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2.$$

Para $L \geq \sigma$ natural e ε que será escolhido mais adiante, decorre de (5.12) que

$$\begin{aligned}
(\ddagger) &\leq \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2\sigma}\cdot\left[C_\varepsilon\cdot\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\varepsilon^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^2\\
&\leq \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2L}\cdot\left[C_\varepsilon\cdot\left(\frac{\varepsilon^{n_0}\cdot(1+|\xi|)^{n_0}}{m_{n_0}\cdot n_0!}\right)\right]^2\\
&\leq \left[\frac{|\delta|^{(n_0+L+N)}\cdot(1+|\xi|)^{(n_0+L+N)}}{m_{(n_0+L+N)}\cdot(n_0+L+N)!}\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2L}\cdot\left[C_\varepsilon\cdot\left(\frac{\varepsilon^{n_0}\cdot(1+|\xi|)^{n_0}}{m_{n_0}\cdot n_0!}\right)\right]^2\\
&\leq \left(\frac{C_\varepsilon}{|\delta|^{L+N}}\right)^2\cdot\left(\frac{m_{(n_0+L+N)}\cdot(n_0+L+N)!}{m_{n_0}\cdot n_0!}\right)^2\cdot\left(\frac{\varepsilon}{|\delta|}\right)^{2n_0}\cdot\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}\\
&\leq \left(\frac{C_\varepsilon}{|\delta|^{L+N}}\right)^2\cdot\left(C_{\{L+N\}}\cdot B_{\{L+N\}}\right)^{2n_0}\cdot\left(\frac{\varepsilon}{|\delta|}\right)^{2n_0}\cdot\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}\\
&\leq \left(\frac{C_\varepsilon}{|\delta|^{L+N}}\right)^2\cdot\left(C_{\{L+N\}}\cdot B_{\{L+N\}}\cdot\frac{\varepsilon}{|\delta|}\right)^{2n_0}\cdot\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}.
\end{aligned}$$

Se $\varepsilon = \dfrac{|\delta|}{C_{\{L+N\}}\cdot B_{\{L+N\}}}$, concluímos que

$$(\ddagger) \leq C_1(\sigma,\delta)\cdot\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}.$$

Logo

$$\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}} = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!\cdot|\delta|^n}\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2\sigma}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2 \leq C(\sigma,\delta)\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}.$$

Pela arbitrariedade de δ e σ, concluímos que $u \in (\mathcal{DE})_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}}(\mathbb{T}^N)$, $\forall\delta<0,\ \forall\sigma\in\mathbb{R}$. $\square$

Antes de encerrar a seção, provemos um resultado que será fundamental posteriormente.

Lema 5.19. *Considere $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$; então existem $\delta_0, B, \rho > 0$ tais que*

$$\|f\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} \leq B\cdot\rho^k\cdot m_k\cdot k!,\quad \forall k\in\mathbb{N}_0,\ \forall\delta\leq\delta_0.$$

Demonstração. Fixados $\xi\in\mathbb{Z}^N$, $k\in\mathbb{N}_0$ e $\delta>0$, novamente escrevemos

$$(\star) = \left[\frac{\delta^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right]^2\cdot(1+|\xi|)^{2k}\cdot|\hat{f}(\xi)|^2. \tag{5.13}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\star) &\leq \left[\frac{\delta^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right]^2\cdot\frac{(1+|\xi|)^{2(k+N)}\cdot|\hat{f}(\xi)|^2}{(1+|\xi|)^{2N}}\\
&\leq \left[\frac{|\hat{f}(\xi)|\cdot\delta^{2n}\cdot(1+|\xi|)^{2n}}{(m_n\cdot n!)^2}\right]\cdot\frac{(1+|\xi|)^{2(k+N)}\cdot|\hat{f}(\xi)|}{(1+|\xi|)^{2N}}
\end{aligned}$$

$$\leq \left[\frac{|\hat{f}(\xi)| \cdot \delta^{2n} \cdot (1+|\xi|)^{2n}}{m_{2n} \cdot (2n!)} \cdot \frac{m_{2n} \cdot (2n)!}{(m_n \cdot n!)^2}\right] \cdot \frac{(1+|\xi|)^{2(k+N)} \cdot |\hat{f}(\xi)|}{(1+|\xi|)^{2N}}.$$

Como $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, existem $C, h > 0$ de maneira que

$$|\hat{f}(\xi)| \cdot (1+|\xi|)^n \leq C \cdot h^n \cdot m_n \cdot n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Além disso, por (2.11) e (2.12), existe $H > 0$ de forma que

$$\left[\frac{m_{2n} \cdot (2n)!}{(m_n \cdot n!)^2}\right] \leq (2H)^{2n}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
(\star) &\leq \left[\frac{|\hat{f}(\xi)| \cdot \delta^{2n} \cdot (1+|\xi|)^{2n}}{m_{2n} \cdot (2n!)} \cdot (2H)^{2n}\right] \cdot \frac{C \cdot h^{2(k+N)} \cdot m_{2(k+N)} \cdot (2(k+N))!}{(1+|\xi|)^{2N}} \\
&\leq (C \cdot h^{2N}) \cdot (h)^{2k} \cdot \left[\frac{|\hat{f}(\xi)| \cdot (2\delta H)^{2n} \cdot (1+|\xi|)^{2n}}{m_{2n} \cdot (2n!)}\right] \cdot \frac{m_{2(k+N)} \cdot (2(k+N))!}{(1+|\xi|)^{2N}} \\
&\leq (C \cdot h^{2N}) \cdot (h \cdot B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}})^{2k} \cdot \left[\frac{|\hat{f}(\xi)| \cdot (2\delta H)^{2n} \cdot (1+|\xi|)^{2n}}{m_{2n} \cdot (2n!)}\right] \cdot \frac{m_{2k} \cdot (2k)!}{(1+|\xi|)^{2N}} \\
&\leq (C \cdot h^{2N}) \cdot (2hH \cdot B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}})^{2k} \cdot \left[\frac{|\hat{f}(\xi)| \cdot (2\delta H)^{2n} \cdot (1+|\xi|)^{2n}}{m_{2n}(2n!)}\right] \cdot \frac{(m_k \cdot k!)^2}{(1+|\xi|)^{2N}} \\
&\leq (C \cdot h^{2N}) \cdot (2hH \cdot B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}})^{2k} \cdot \left[C \cdot h^{2n} \cdot (2\delta H)^{2n}\right] \cdot \frac{(m_k \cdot k!)^2}{(1+|\xi|)^{2N}} \\
&\leq (C \cdot h^{N})^2 \cdot (2hH \cdot B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}})^{2k} \cdot (2\delta hH)^{2n} \cdot \frac{(m_k \cdot k!)^2}{(1+|\xi|)^{2N}}.
\end{aligned}$$

Considere $\delta \leq \dfrac{1}{2hH}$. Neste caso,

$$(\star) \leq (C \cdot h^N)^2 \cdot (2hH \cdot B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}})^{2k} \cdot \frac{(m_k \cdot k!)^2}{(1+|\xi|)^{2N}}. \tag{5.14}$$

Aliando (5.13) a (5.14), temos

$$\left[\frac{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right]^2 \cdot (1+|\xi|)^{2\sigma} \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 \leq (C \cdot h^N)^2 \cdot (2hH \cdot B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}})^{2k} \cdot \frac{(m_k \cdot k!)^2}{(1+|\xi|)^{2N}}.$$

Pelo fato do lado direito da equação não depender de n,

$$\left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{\delta^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right)\right]^2 \cdot (1+|\xi|)^{2\sigma} \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 \leq (C \cdot h^N)^2 \cdot (2hH \cdot B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}})^{2k} \cdot \frac{(m_k \cdot k!)^2}{(1+|\xi|)^{2N}}.$$

Portanto, se tomamos

$$s^2 = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}, \quad B = C \cdot h^N \cdot s, \quad \rho = 2hH \cdot B_{\{2N\}} \cdot C_{\{2N\}} \text{ e } \delta_0 = \frac{1}{2hH},$$

concluímos através da Proposição 5.17 que

$$\|f\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} \leq B \cdot \rho^k \cdot m_k \cdot k!, \quad \forall \delta \leq \delta_0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

de acordo com o que pretendíamos demonstrar. □

5.3 Sistemas com Perda de Derivadas

Nosso próximo objeto de estudo será uma subclasse de sistemas de operadores de $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N)$. Verificaremos que todo elemento desta subclasse não só é $\mathscr{M}$-globalmente hipoelítico, como também permanece $\mathscr{M}$-globalmente hipoelítico para certos tipos de perturbações.

Definição 5.20. *Considere $a_1(x,D), a_2(x,D), \ldots, a_q(x,D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$, para algum $q \in \mathbb{N}$, e denotemos por $\mathcal{A} = (a_1(x,D), \ldots, a_r(x,D))$ o sistema formado por esses operadores. Diremos que $\mathcal{A}$ é **globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico com perda de r derivadas**, com $r \geq 0$, caso existam constantes $C,\ \theta > 0,\ \delta_0 < 0$ e $k_0 \in \mathbb{R}$, tais que*

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+k-r)\}} \leq C \cdot \left[\max_{1\leq j\leq q} \|a_j(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} + \theta^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right],$$

para quaisquer $k \in \mathbb{N}_0,\ u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\delta_0 < \delta < 0$.

Teorema 5.21. *Todo sistema globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico com perda de r derivadas é de fato globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.*

Demonstração. Seja $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ tal que $a_j(x,D)u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, para $1 \leq j \leq q$. Escrevendo $g_j := a_j(x,D)u$, decorre do Lema 5.19 a existência de $B,\ \rho,\ \delta_1 > 0$ tais que

$$\|g_j\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} \leq B \cdot \rho^k \cdot m_k \cdot k!,\ \ 1 \leq j \leq q,\ \forall \delta \leq \delta_1,\ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+k-r)\}} &\leq C \cdot \max_{1\leq j\leq q} \|g_j\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} + C \cdot \theta^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}} \\ &\leq B \cdot C \cdot \rho^k \cdot m_k \cdot k! + C \cdot \theta^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}.\end{aligned}$$

Portanto, se $C_1 = \max\{(BC), C\}$ e $h_1 = \max\{\rho, \theta\}$,

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+k-r)\}} \leq C_1 \cdot h_1^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right),\quad \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \delta_0 < \delta < 0. \tag{5.15}$$

Fixados $j \in \mathbb{N}_0,\ \xi \in \mathbb{Z}^N$ e $\delta_0 < \delta < 0$, denotaremos

$$(\triangle)(\xi) := \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right]^{-2} \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 \cdot (1+|\xi|)^{2j}.$$

Tomando $q \in \mathbb{N}$ tal que $q \geq r - \sigma$ e aplicando (5.15), além das Observações 1.28 e 1.29, obtemos:

$$(\triangle)(\xi) \leq \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right]^{-2} \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 \cdot (1+|\xi|)^{2\cdot(j+q+\sigma-r)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n \cdot (1+|\eta|)^n}{m_n \cdot n!}\right)\right]^{-2} \cdot |\hat{u}(\eta)|^2 \cdot (1+|\eta|)^{2\cdot(j+q+\sigma-r)} \\
&\leq \|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,j+q+\sigma-r)\}} \\
&\leq C_1^2 \cdot h_1^{2(j+q)} \cdot [m_{j+q} \cdot (j+q)!]^2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right)^2 \\
&\leq (C_1 \cdot h_1^q)^2 \cdot h_1^{2j} \cdot [m_j \cdot C^j_{\{q\}} \cdot j! \cdot B^j_{\{q\}}]^2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right)^2 \\
&\leq (C_1 \cdot h_1^q)^2 \cdot (h_1 \cdot C_{\{q\}} \cdot B_{\{q\}})^{2j} \cdot [m_j \cdot j!]^2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Note que o lado direito da desigualdade acima é independente do ξ fixado. Por conseguinte, ao escolher $C_2 = C_1 \cdot h_1^q$ e $h_2 = h_1 \cdot C_{\{q\}} \cdot B_{\{q\}}$, verificamos que

$$
\left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right)\right]^{-1} \cdot |\hat{u}(\xi)| \cdot (1+|\xi|)^j \leq C_2 \cdot h_2^j \cdot m_j \cdot j! \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right),
$$

para quaisquer $\xi \in \mathbb{Z}^N,\ j \in \mathbb{N}_0$ e $\delta_0 < \delta < 0$. Por conseguinte, para quaisquer $\xi \in \mathbb{Z}^N,\ j \in \mathbb{N}_0$ e $\delta_0 < \delta < 0$, segue que

$$
\left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right)\right]^{-1} \cdot \frac{(1+|\xi|)^j}{(2h_2)^j \cdot m_j \cdot j!} \cdot |\hat{u}(\xi)| \leq C_2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right) \cdot \frac{1}{2^j}.
$$

Somando em j, temos

$$
\sum_{j=0}^{\infty} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right)\right]^{-1} \cdot \frac{(1+|\xi|)^j}{(2h_2)^j \cdot m_j \cdot j!} \cdot |\hat{u}(\xi)| \leq 2C_2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right).
$$

Em particular, para quaisquer $\xi \in \mathbb{Z}^N$ e δ no intervalo $(\delta_0, 0)$,

$$
\left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right)\right]^{-1} \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{(1+|\xi|)^n \cdot \left(\frac{1}{2h_2}\right)^n}{m_n \cdot n!}\right) \cdot |\hat{u}(\xi)| \leq 2C_2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right). \tag{5.16}
$$

Fixemos então $\xi_0 \in \mathbb{Z}^N$ arbitrário; nesta situação,

$$
\left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi_0|)^n}{m_n \cdot n!}\right)\right]^{-1} = \left[\frac{|\delta|^{n_0} \cdot (1+|\xi_0|)^{n_0}}{m_{n_0} \cdot n_0!}\right]^{-1},
$$

para algum n_0 em $\mathbb{N}_0$. Logo, por (5.16), para quaisquer $k \in \mathbb{N}_0$ e $\delta_0 < \delta < 0$,

$$
\left[\frac{|\delta|^{n_0} \cdot (1+|\xi_0|)^{n_0}}{m_{n_0} \cdot n_0!}\right]^{-1} \cdot \frac{(1+|\xi_0|)^{k+n_0} \cdot \left(\frac{1}{2h_2}\right)^{k+n_0}}{m_{k+n_0} \cdot (k+n_0)!} \cdot |\hat{u}(\xi_0)| \leq 2C_2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right).
$$

Isto é,

$$
|\hat{u}(\xi_0)| \cdot (1+|\xi_0|)^k \leq 2C_2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right) \cdot (2h_2)^{k+n_0} \cdot |\delta|^{n_0} \cdot \frac{m_{k+n_0} \cdot (k+n_0)!}{m_{n_0} \cdot n_0!}
$$

$$\leq 2C_2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right) (2h_2)^k \cdot (2h_2|\delta|)^{n_0} \frac{m_{k+n_0} \cdot (k+n_0)!}{m_{n_0} \cdot n_0!}$$

Aplicamos agora (2.11) e (2.12): como

$$\frac{m_{k+n_0} \cdot (k+n_0)!}{m_{n_0} \cdot n_0!} \leq (2H)^{k+n_0} \cdot m_k \cdot k!,$$

segue que

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\xi_0)| \cdot (1+|\xi_0|)^k &\leq 2C_2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right) \cdot (2h_2)^k \cdot (2h_2|\delta|)^{n_0} \cdot (2H)^{k+n_0} \cdot m_k \cdot k! \\ &\leq 2C_2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right) \cdot (4Hh_2)^k \cdot (4h_2H|\delta|)^{n_0} \cdot m_k \cdot k! \end{aligned}$$

Fixado $\delta < 0$ de modo $|\delta| \leq \frac{1}{4Hh_2}$, teremos $(4h_2H|\delta|)^{n_0} \leq 1$ para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$. Logo, estabelecendo $C_3 = 2C_2 \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right)$ e $h_3 = 4Hh_2$, concluímos que

$$|\hat{u}(\xi_0)| \cdot (1+|\xi_0|)^k \leq C_3 \cdot h_3 \cdot m_k \cdot k!, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

com o lado direito sendo independente do ξ_0 selecionado. Portanto

$$|\hat{u}(\xi)| \leq C_3 \cdot \inf_{k \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{h_3^k \cdot m_k \cdot k!}{(1+|\xi|)^k} \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N,$$

e assim $u \in \mathcal{E}_M(\mathbb{T}^N)$, pelo Corolário 2.14. □

Após verificar a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global dos sistemas com perda de derivadas em $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N)$, lidaremos com o mesmo problema para a perturbação. Isto é, dados

$$a_1(x,D), \ldots, a_q(x,D) \text{ em } \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N) \text{ e } \mathcal{A} = (a_1(x,D), \ldots, a_q(x,D))$$

com perda de r derivadas, queremos encontrar condições suficientes para que $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ permaneça globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico, com

$$\mathcal{B} = (b_1(x,D), \ldots, b_q(x,D)) \text{ e } b_1(x,D), \ldots, b_q(x,D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N).$$

Para tal, precisaremos de uma versão da desigualdade de Peter-Paul e de um resultado relacionado a funções peso.

Lema 5.22. *Dados $\lambda > 0$, $\delta < 0$ e $\rho < \sigma < \tau$ quaisquer, vale:*

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}} \leq \lambda \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\tau)\}} + \lambda^{\frac{\rho-\sigma}{\tau-\sigma}} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\rho)\}}.$$

Demonstração. Por definição, temos

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}} &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2\sigma}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\\ &= (\star)+(\star\star),\end{aligned}$$

no qual

$$\begin{aligned}(\star) &= \sum_{(1+|\xi|)^{\tau-\sigma}<\frac{1}{\lambda}}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2\sigma}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2;\\ (\star\star) &= \sum_{(1+|\xi|)^{\tau-\sigma}\geq\frac{1}{\lambda}}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2\sigma}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2.\end{aligned}$$

Se $(1+|\xi|)^{\tau-\sigma}<\frac{1}{\lambda}$, segue que

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^{2\sigma} &= (1+|\xi|)^{2\rho}\cdot\left[(1+|\xi|)^{2(\tau-\sigma)}\right]^{\left(\frac{\sigma-\rho}{\tau-\sigma}\right)}\\ &\leq (1+|\xi|)^{2\rho}\cdot\left[\lambda^{-2}\right]^{\left(\frac{\sigma-\rho}{\tau-\sigma}\right)}\\ &\leq (1+|\xi|)^{2\rho}\cdot\lambda^{2\cdot\left(\frac{\rho-\sigma}{\tau-\sigma}\right)}.\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}(\star) &= \sum_{(1+\xi)^{\tau-\sigma}<\frac{1}{\lambda}}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2\sigma}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\\ &\leq \sum_{(1+\xi)^{\tau-\sigma}<\frac{1}{\lambda}}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2\rho}\cdot\lambda^{2\cdot\left(\frac{\rho-\sigma}{\tau-\sigma}\right)}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\\ &\leq \lambda^{2\cdot\left(\frac{\rho-\sigma}{\tau-\sigma}\right)}\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2\rho}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\\ &\leq \lambda^{2\cdot\left(\frac{\rho-\sigma}{\tau-\sigma}\right)}\cdot\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,\rho)\}}.\end{aligned}$$

Por outro lado, se $(1+|\xi|)^{\tau-\sigma}\geq\frac{1}{\lambda}$, verificamos que

$$(1+|\xi|)^{2(\tau-\sigma)}\geq\lambda^{-2}\;\Rightarrow\;(1+|\xi|)^{2\sigma}\leq\lambda^2\cdot(1+|\xi|)^{2\tau}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}(\star\star) &= \sum_{(1+|\xi|)^{\tau-\sigma}\geq\frac{1}{\lambda}}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2\sigma}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\\ &\leq \sum_{(1+|\xi|)^{\tau-\sigma}\geq\frac{1}{\lambda}}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot\lambda^2\cdot(1+|\xi|)^{2\tau}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leq \lambda^2 \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2\cdot\tau}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\\ &\leq \lambda^2\,\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,\tau)\}}\end{aligned}$$

Portanto, unindo as duas desigualdades provadas, temos

$$\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}}=(\star)+(\star\star)\leq\lambda^{2\cdot\left(\frac{\rho-\sigma}{\tau-\sigma}\right)}\cdot\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,\rho)\}}+\lambda^2\cdot\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,\tau)\}},$$

e por conseguinte,

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma)\}}\leq\lambda\cdot\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\tau)\}}+\lambda^{\left(\frac{\rho-\sigma}{\tau-\sigma}\right)}\cdot\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\rho)\}},$$

encerrando a prova do resultado. □

Lema 5.23. *(Proposição 3.4 de [40]) Para quaisquer $k,\rho>0$, temos*

$$\log\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{(k\rho)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]-\log\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\rho^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]\geq\frac{\log\rho\cdot\log k}{\log C_{\{1\}}},$$

no qual $C_{\{1\}}$ é a constante descrita em (1.15).

Enunciemos e demonstremos uma proposição que será fundamental na prova do principal teorema da seção.

Proposição 5.24. *Considere $a(x,D)\in\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)$; então existem constantes $C,h>0$ tais que, dado $\varepsilon>0$, é possível encontrar $\delta_\varepsilon<0$, de modo que, para quaisquer u em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $k\in\mathbb{N}_0$,*

$$\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}\leq C\cdot\left(\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma+\varepsilon)\}}+h^k\cdot m_k\cdot k!\cdot\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+\varepsilon)\}}\right),\quad\forall\delta_\varepsilon\leq\delta<0.$$

Demonstração. Dada $u\in\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, denotemos $(*)=\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}$. Assim,

$$\begin{aligned}(*)&=\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}(1+|\xi|)^{2k}|\widehat{a(x,D)u}(\xi)|^2\right)^{1/2}\\ &=\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}(1+|\xi|)^{2k}\left|\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\cdot\hat{u}(\eta)\right|^2\right)^{1/2}\\ &=\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left|\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-1}(1+|\xi|)^k\cdot\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\cdot\hat{u}(\eta)\right|^2\right)^{1/2}\\ &\leq\left[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-1}(1+|\xi|)^k\,|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)|\right)^2\right]^{1/2}.\quad(5.17)\end{aligned}$$

Observe que

$$
\begin{aligned}
(\dagger) &:= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-1}(1+|\xi|)^k\,|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)| \\
&\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-1}(1+|\xi-\eta|+|\eta|)^k\,|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-1}(1+|\xi-\eta|)^j\,(1+|\eta|)^{k-j}\times \\
&\quad\times|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)|\,.
\end{aligned}\tag{5.18}
$$

Deduzimos de (5.17) e (5.18) que

$$
\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}\leq\left[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right]^{-1}(1+|\xi-\eta|)^j\times\right.\right.
$$
$$
\left.\left.\times(1+|\eta|)^{k-j}\cdot|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)|\right)^2\right]^{1/2}.
$$

Aplicamos a Desigualdade de Minkowski para integrais:

$$
\begin{aligned}
\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} &\leq \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-1}(1+|\xi-\eta|)^j\times\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.\times(1+|\eta|)^{k-j}\cdot|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)|\right)^2\right]^{1/2} \\
&\leq \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi-\eta|)^j\times\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.\times(1+|\eta|)^{k-j}\cdot|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)|\right)^2\right]^{1/2}
\end{aligned}\tag{5.19}
$$

Denotamos $(\triangle):=\left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi-\eta|)^j\cdot(1+|\eta|)^{k-j}\,|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)||\hat{u}(\eta)|\right)^2$. Pela Desigualdade de Hölder,

$$
(\triangle)\leq\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi-\eta|)^{2j}\,|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\cdot\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N}(1+|\eta|)^{2(k-j)}\,|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)||\hat{u}(\eta)|^2.
$$

Decorre então de (5.19) que

$$
\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}\leq\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\times\right.
$$

$$\times \underbrace{\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} (1+|\xi-\eta|)^{2j} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|}_{:=(I)} \underbrace{\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} (1+|\eta|)^{2(k-j)} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)||\hat{u}(\eta)|^2}_{:=(II)} \Bigg]^{1/2} \tag{5.20}$$

Considere agora $q \in \mathbb{N}$, de maneira que $q \geq |\sigma|$. Associando o Lema 5.4 à Proposição 5.5, temos

$$\begin{aligned}
(I) &\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} (1+|\xi-\eta|)^{2j} \cdot \frac{C_1 h_1^{(2j+q+2N)} m_{(2j+q+2N)}(2j+q+2N)!}{(1+|\xi-\eta|)^{(2j+q+2N)}} \cdot (1+|\eta|)^{\sigma} \\
&\leq \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} (1+|\xi-\eta|)^{2j} \frac{C_1 h_1^{(2j+q+2N)} m_{(2j+q+2N)}(2j+q+2N)!}{(1+|\xi-\eta|)^{(2j+q+2N)}} (1+|\xi|)^{\sigma}(1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} \\
&\leq (1+|\xi|)^{\sigma} \cdot \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} (1+|\xi-\eta|)^{2j} \frac{C_1 h_1^{(2j+q+2N)} m_{(2j+q+2N)}(2j+q+2N)!}{(1+|\xi-\eta|)^{(2j+q+2N)}} (1+|\xi-\eta|)^{q},
\end{aligned}$$

pela desigualdade de Peetre. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
(I) &\leq C_1 \cdot h_1^{(2j+q+2N)} \cdot m_{(2j+q+2N)} \cdot (2j+q+2N)! \cdot (1+|\xi|)^{\sigma} \cdot \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}} \\
&\leq C_2 \cdot h_1^{2j} \cdot m_{(2j+q+2N)} \cdot (2j+q+2N)! \cdot (1+|\xi|)^{\sigma},
\end{aligned}$$

com $C_2 = C_1 \cdot h_1^{q+2N} \cdot \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}}$. Através das Observações 1.28 e 1.29, concluímos que

$$\begin{aligned}
(I) &\leq C_2 \cdot h_1^{2j} \cdot m_{(2j+q+2N)} \cdot (2j+q+2N)! \cdot (1+|\xi|)^{\sigma} \\
&\leq C_2 \cdot (h_1 \cdot C_{\{q+2N\}} \cdot B_{\{q+2N\}})^{2j} \cdot m_{2j} \cdot (2j)! \cdot (1+|\xi|)^{\sigma}.
\end{aligned}$$

De (2.11) e (2.12), existe $H > 1$ de modo que

$$\begin{aligned}
(I) &\leq C_2 \cdot (h_1 \cdot C_{\{q+2N\}} \cdot B_{\{q+2N\}})^{2j} \cdot (2H)^{2j} \cdot (m_j \cdot j!)^2 \cdot (1+|\xi|)^{\sigma} \\
&\leq (C_2) \cdot (2h_1 H B_{\{q+2N\}} C_{\{q+2N\}})^{2j} \cdot (m_j \cdot j!)^2 \cdot (1+|\xi|)^{\sigma} \\
&\leq C_3^2 \cdot h_3^{2j} \cdot (m_j \cdot j!)^2 \cdot (1+|\xi|)^{\sigma},
\end{aligned} \tag{5.21}$$

com $C_3^2 = C_2$ e $h_3 = 2h_1 H B_{\{q+2N\}} C_{\{q+2N\}}$. Desta forma, inferimos de (5.20) e (5.21) que

$$\begin{aligned}
\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Bigg[\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \Bigg[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \Bigg]^{-2} C_3^2 h_3^{2j} (m_j j!)^2 (1+|\xi|)^{\sigma} \times \\
\times \left(\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} (1+|\eta|)^{2(k-j)} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)||\hat{u}(\eta)|^2 \right) \Bigg]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} \le C_3 \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot h_3^j \cdot m_j \cdot j! \times$$
$$\times \Bigg[\underbrace{\sum_{\xi,\eta\in\mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^{-2} (1+|\xi|)^{\sigma} \, (1+|\eta|)^{2(k-j)} \, |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)| |\hat{u}(\eta)|^2}_{:=(\bigstar)} \Bigg]^{\frac{1}{2}} \tag{5.22}$$

O passo seguinte é estimar ($\bigstar$):

$$\begin{aligned}(\bigstar) &\le \sum_{\xi,\eta\in\mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^{-2} (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} \, (1+|\eta|)^{2(k-j)+\sigma} \times \\ &\quad \times |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)| |\hat{u}(\eta)|^2 \\ &\le \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^N} (1+|\eta|)^{2(k-j)+\sigma} \cdot |\hat{u}(\eta)|^2 \times \\ &\quad \times \underbrace{\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^{-2} \cdot (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} \cdot |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|}_{;=(\diamondsuit)}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Note o seguinte: para $s \in \mathbb{N}$ fixado, que será escolhido posteriormente, obtemos

$$\begin{aligned}(\diamondsuit) &= \underbrace{\left(\sum_{|\xi|\le\frac{s}{s+1}\cdot|\eta|} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^{-2} \cdot (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} \cdot |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)| \right)}_{:=(\triangledown)} + \\ &+ \underbrace{\left(\sum_{\frac{s}{s+1}\cdot|\eta|<|\xi|} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^{-2} \cdot (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} \cdot |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)| \right)}_{:=(\triangledown\triangledown)}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Estimemos primeiramente ($\triangledown$); se $|\xi| \le \frac{s}{s+1}\cdot|\eta|$, então $|\xi-\eta| \ge |\eta|-|\xi| \ge \frac{|\eta|}{s+1}$. Isto é, $|\eta| \le (s+1)\cdot|\xi-\eta|$. Fixado $\eta\in\mathbb{Z}^N$, temos

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n (1+|\eta|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^{-2} = \left[\frac{|\delta|^{n_0} (1+|\eta|)^{n_0}}{m_{n_0} \cdot n_0!} \right]^{-2} = \frac{(m_{n_0}\cdot n_0!)^2}{|\delta|^{2n_0}\cdot(1+|\eta|)^{2n_0}}, \tag{5.25}$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}(\triangledown) &= \sum_{|\xi|\le\frac{s}{s+1}\cdot|\eta|} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^{-2} \cdot (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} \cdot |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)| \\ &\le \sum_{|\xi|\le\frac{s}{s+1}\cdot|\eta|} (1+|\xi-\eta|)^{q} \cdot |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{|\xi|\leq \frac{s}{s+1}\cdot|\eta|} (1+|\xi-\eta|)^q \cdot \frac{C_1 h_1^{(2n_0+2N+q)} m_{(2n_0+2N+q)}(2n_0+2N+q)!}{(1+|\xi-\eta|)^{(2n_0+2N+q)}}(1+|\eta|)^\sigma \\
&\leq \left(C_1 h_1^{2N+q} \sum_{|\xi|\leq \frac{s}{s+1}\cdot|\eta|} \frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}} \right) \frac{h_1^{2n_0} m_{(2n_0+2N+q)}(2n_0+2N+q)!}{(1+\frac{|\eta|}{s+1})^{2n_0}}(1+|\eta|)^\sigma \\
&\leq \left(C_1 h_1^{2N+q} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}} \right) \frac{h_1^{2n_0} m_{(2n_0+2N+q)}(2n_0+2N+q)!}{(1+\frac{|\eta|}{s+1})^{2n_0}}(1+|\eta|)^\sigma \\
&\leq C_2 \cdot \frac{((s+1)\cdot h_1)^{2n_0} \cdot m_{(2n_0+2N+q)} \cdot (2n_0+2N+q)!}{(1+|\eta|)^{2n_0}} \cdot (1+|\eta|)^\sigma .
\end{aligned}
$$

Por mais uma vez, nos utilizamos das Observações 1.28 e 1.29, além de (2.11) e (2.12):

$$
\begin{aligned}
(\triangledown) &\leq C_2 \cdot \frac{((s+1)\cdot h_1)^{2n_0} \cdot m_{(2n_0)} \cdot (2n_0)! \cdot C_{\{2N+q\}}^{2n_0} \cdot B_{\{2N+q\}}^{2n_0}}{(1+|\eta|)^{2n_0}} \cdot (1+|\eta|)^\sigma \\
&\leq C_2 \cdot \frac{((s+1)\cdot h_1 \cdot C_{\{2N+q\}} \cdot B_{\{2N+q\}})^{2n_0} \cdot m_{(2n_0)} \cdot (2n_0)!}{(1+|\eta|)^{2n_0}} \cdot (1+|\eta|)^\sigma \\
&\leq C_2 \cdot \frac{((s+1)\cdot h_1 \cdot C_{\{2N+q\}} \cdot B_{\{2N+q\}})^{2n_0} \cdot (m_{n_0} \cdot n_0!)^2 \cdot (2H)^{2n_0}}{(1+|\eta|)^{2n_0}} \cdot (1+|\eta|)^\sigma \\
&\leq C_2 \cdot \frac{((s+1)\cdot h_1 \cdot C_{\{2N+q\}} \cdot B_{\{2N+q\}} \cdot 2H)^{2n_0} \cdot (m_{n_0} \cdot n_0!)^2}{(1+|\eta|)^{2n_0}} \cdot (1+|\eta|)^\sigma .
\end{aligned}
$$

Escolhemos δ de forma que $|\delta| \leq \dfrac{1}{(s+1)\cdot h_1 \cdot C_{\{2N+q\}} \cdot B_{\{2N+q\}} \cdot 2H}$. Neste caso, decorre de (5.25) que

$$
\begin{aligned}
(\triangledown) &\leq C_2 \cdot \frac{(m_{n_0} \cdot n_0!)^2}{|\delta|^{2n_0} \cdot (1+|\eta|)^{2n_0}} \cdot (1+|\eta|)^\sigma \\
&\leq C_2 \cdot \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n \cdot (1+|\eta|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^{-2} \cdot (1+|\eta|)^\sigma .
\end{aligned}
$$

Pelo fato de C_2 não depender do η fixado, segue que

$$
(\triangledown) \leq C_2 \cdot \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n \cdot (1+|\eta|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^{-2} \cdot (1+|\eta|)^\sigma, \ \ \forall \eta \in \mathbb{Z}^N. \tag{5.26}
$$

Seguimos para $(\triangledown\triangledown)$: por hipótese,

$$
\frac{s}{s+1} \cdot |\eta| < |\xi| \ \Rightarrow \ 1 + \frac{s\cdot|\eta|}{s+1} < 1 + |\xi|.
$$

Logo, para qualquer $\delta < 0$,

$$
|\delta|\cdot(1+|\xi|) > |\delta|\cdot\left(1+\frac{s\cdot|\eta|}{s+1}\right) = \left(\frac{s}{s+1}\cdot|\delta|\right)\cdot\left(\frac{s+1}{s}+|\eta|\right) > \left(\frac{s}{s+1}\cdot|\delta|\right)\cdot(1+|\eta|)\,.
$$

Por conseguinte,

$$
(\triangledown\triangledown) \leq \left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{\left(\frac{s}{s+1}\cdot|\delta|\right)^n (1+|\eta|)^n}{m_n \cdot n!} \right) \right]^{-2} (1+|\xi-\eta|)^{|\sigma|} |\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)| \right)
$$

$$\leq \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\left(\frac{s}{s+1}\cdot|\delta|\right)^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot\left(\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi-\eta|)^q|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\right).$$

Utilizamos por mais uma vez o Lema 5.4 e a Proposição 5.5:

$$\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}(1+|\xi-\eta|)^q|\widehat{a}(\xi-\eta,\eta)|\leq\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\frac{C_1h_1^{q+2N}m_{q+2N}\cdot(q+2N)!}{(1+|\xi-\eta|)^{2N}}\cdot(1+|\eta|)^\sigma$$

Ao denotarmos $B_2 := C_1\cdot h_1^{q+2N}\cdot m_{q+2N}\cdot(q+2N)!\cdot\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\frac{1}{(1+|\xi|)^{2N}}$, inferimos que

$$(\nabla\nabla)\leq B_2\cdot\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\left(\frac{s}{s+1}\cdot|\delta|\right)^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\eta|)^\sigma. \tag{5.27}$$

Aplicamos o Lema 5.23, para $k=\frac{s}{s+1}$ e $\rho=|\delta|\cdot(1+|\eta|)$:

$$\log\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\left(\frac{s}{s+1}|\delta|\right)^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]-\log\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]\geq\frac{\log\left(|\delta|(1+|\eta|)\right)\log\left(\frac{s}{s+1}\right)}{\log C_{\{1\}}},$$

o que implica que

$$-\log\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\left(\frac{s}{s+1}|\delta|\right)^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]\leq\frac{\log\left(|\delta|(1+|\eta|)\right)\log\left(\frac{s+1}{s}\right)}{\log C_{\{1\}}}-\log\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right].$$

Multiplicando a desigualdade acima por 2 e exponenciando em ambos os lados, obtemos:

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\left(\frac{s}{s+1}|\delta|\right)^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\leq\left[|\delta|\cdot(1+|\eta|)\right]^{\frac{2\log\left(\frac{s+1}{s}\right)}{\log C_{\{1\}}}}\cdot\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}.$$

Como podemos supor $|\delta|<1$,

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\left(\frac{s}{s+1}|\delta|\right)^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\leq(1+|\eta|)^{\frac{2\log\left(\frac{s+1}{s}\right)}{\log C_{\{1\}}}}\cdot\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}.$$

Dado $\varepsilon>0$, tomamos $s\in\mathbb{N}$ de modo que $\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{s}\right)}{\log C_{\{1\}}}\leq\varepsilon$. Desta forma,

$$\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\left(\frac{s}{s+1}|\delta|\right)^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\leq\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}.(1+|\eta|)^{2\varepsilon}. \tag{5.28}$$

Associando (5.27) a (5.28), concluímos que

$$(\nabla\nabla)\leq B_2\cdot\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right]^{-2}\cdot(1+|\eta|)^{\sigma+2\cdot\varepsilon}. \tag{5.29}$$

Seja $K^2=2\max\{C_2,B_2\}$; decorre de (5.24), (5.26) e (5.29) que

$$\diamondsuit=(\nabla)+(\nabla\nabla)\leq K^2\cdot\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\eta|)^n}{m_n\cdot n!}\right]^{-2}\cdot(1+|\eta|)^{\sigma+2\cdot\varepsilon}, \tag{5.30}$$

para $|\delta| \leq \dfrac{1}{(s+1)\cdot h_1 \cdot C_{\{2N+q\}} \cdot B_{\{2N+q\}} \cdot 2H}$. De (5.23) e (5.30), deduzimos que

$$(\bigstar) \leq K^2 \cdot \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{|\delta|^n \cdot (1+|\eta|)^n}{m_n \cdot n!} \right]^{-2} \cdot (1+|\eta|)^{2\cdot(k-j+\sigma+\varepsilon)} \cdot |\hat{u}(\eta)|^2. \tag{5.31}$$

Por (5.22) e (5.31), temos

$$\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} \leq K \cdot C_3 \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot h_3^j \cdot m_j \cdot j! \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k-j+\sigma+\varepsilon)\}} \, . \tag{5.32}$$

Fixemos $1 \leq j \leq k-1$; como $\sigma+\varepsilon < k-j+\sigma+\varepsilon < k+\sigma+\varepsilon$, podemos usar o Lema 5.22. Tomando $\lambda_j = \dfrac{1}{\binom{k}{j}\cdot(2h_3)^j \cdot m_j \cdot j!}$, segue que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k-j+\sigma+\varepsilon)\}} &\leq \lambda_j \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma+\varepsilon)\}} + \lambda_j^{\frac{(\sigma+\varepsilon)-(k-j+\sigma+\varepsilon)}{(k+\sigma+\varepsilon)-(k-j+\sigma+\varepsilon)}} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},\delta,\sigma+\varepsilon)\}} \\
&\leq \lambda_j \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma+\varepsilon)\}} + \lambda_j^{\frac{j-k}{j}} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+\varepsilon)\}} \\
&\leq \lambda_j \cdot \left(\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma+\varepsilon)\}} + \lambda_j^{\frac{-k}{j}} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+\varepsilon)\}} \right)
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\binom{k}{j} \cdot h_3^j \cdot m_j \cdot j! \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},\delta,k-j+\sigma+\varepsilon)\}} \leq \frac{1}{2^j} \cdot \left(\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma+\varepsilon)\}} + \lambda_j^{\frac{-k}{j}} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+\varepsilon)\}} \right). \tag{5.33}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lambda_j^{\frac{-k}{j}} &= \left(\binom{k}{j} \cdot (2h_3)^j \cdot m_j \cdot j! \right)^{\frac{k}{j}} \\
&= \left(\frac{k!}{(k-j)!} \cdot (2h_3)^j \cdot m_j \right)^{\frac{k}{j}} \\
&\leq \left(k^j \cdot (2h_3)^j \cdot m_j \right)^{\frac{k}{j}} \\
&\leq k^k \cdot (2h_3)^k \cdot \left(m_j^{\frac{1}{j}} \right)^k \\
&\leq k^k \cdot (2h_3)^k \cdot \left(m_k^{\frac{1}{k}} \right)^k \\
&\leq k^k \cdot (2h_3)^k \cdot m_k \\
&\leq e^k \cdot k! \cdot (2h_3)^k \cdot m_k \\
&\leq (2 \cdot h_3 \cdot e)^k \cdot m_k \cdot k!,
\end{aligned}$$

já que $k > j$ e $(m_n)^{\frac{1}{n}}$ é crescente, pela Proposição 1.5. Assim, se definimos $h_4 = 2 \cdot h_3 \cdot e$,

$$\lambda_j^{\frac{-k}{j}} \leq h_4^k \cdot m_k \cdot k!, \quad 1 \leq j \leq k-1. \tag{5.34}$$

Associamos agora (5.32), (5.33) e (5.34):

$$\begin{aligned}\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} &\leq K\cdot C_3\cdot\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{2^j}\cdot\Big(\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma+\varepsilon)\}}+h_4^k\cdot m_k\cdot k!\cdot\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+\varepsilon)\}}\Big)+\\ &\quad+K\cdot C_3\cdot\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma+\varepsilon)\}}+K\cdot C_3\cdot h_3^k\cdot m_k\cdot k!\cdot\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+\varepsilon)\}}\\ &\leq(2KC_3)\cdot\Big(\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma+\varepsilon)\}}+h_4^k\cdot m_k\cdot k!\cdot\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+\varepsilon)\}}\Big)\end{aligned}$$

Finalmente, se denotamos $C:=(2KC_3)$ e $h_4:=h$, demonstramos que

$$\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}\leq C\cdot\Big(\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma+\varepsilon)\}}+h^k\cdot m_k\cdot k!\cdot\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+\varepsilon)\}}\Big),\quad\forall k\in\mathbb{N}_0,$$

dado que $\delta\in[\delta_\varepsilon,0)$, com $\delta_\varepsilon=-\dfrac{1}{(s+1)\cdot h_1\cdot C_{\{2N+q\}}\cdot B_{\{2N+q\}}\cdot 2H}$ e $s\in\mathbb{N}$ seja escolhido de maneira que $\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{s}\right)}{\log C_{\{1\}}}\leq\varepsilon$. Está provada a afirmação. □

Teorema 5.25. *Sejam*

$$a_1(x,D),a_2(x,D),\dots,a_q(x,D)\in\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\sigma}(\mathbb{T}^N)\text{ e }\mathcal{A}=(a_1(x,D),\dots,a_q(x,D))$$

um sistema globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico com perda de r derivadas. Considere

$$b_1(x,D),\dots,b_q(x,D)\in\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\tau}(\mathbb{T}^N)\text{ e }\mathcal{B}=(b_1(x,D),\dots,b_r(x,D)),$$

com $\tau<\sigma-r$. Então o sistema dado por $\mathcal{P}:=\mathcal{A}+\mathcal{B}$ é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.

Demonstração. Suponha $u\in\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, de modo que $p_j(x,D)u=a_j(x,D)u+b_j(x,D)u$ pertence a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, para $1\leq j\leq q$; provaremos que $u\in\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Começamos utilizando o fato de $\mathcal{A}$ ser globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico com perda de r derivadas: existem constantes $C_1,\ h_1>0,\ \delta_0<0$ e $k_0\in\mathbb{R}$, tais que

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+k-r)\}}\leq C_1\left[\max_{1\leq j\leq q}\|a_j(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}+h_1^k\cdot m_k\cdot k!\cdot\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right],$$

para quaisquer $k\in\mathbb{N}_0$ e $\delta_0<\delta<0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+k-r)\}}&\leq C_1\left[\max_{1\leq j\leq q}\|(p_j(x,D)-b_j(x,D))u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}+h_1^k\cdot m_k\cdot k!\cdot\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right]\\ &\leq C_1\left[\max_{1\leq j\leq q}\|p_ju\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}+\max_{1\leq j\leq q}\|b_ju\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}+h_1^km_kk!\,\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right].\end{aligned}$$

Pelo Lema 5.19, podemos encontrar $B_1,h_2>1$, tais que

$$\max_{1\leq j\leq q}\|p_j(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}\leq B_1\cdot h_2^k\cdot m_k\cdot k!,\quad\forall k\in\mathbb{N}_0.$$

Logo, para $C_2 = C_1 \cdot B_1$,

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+k-r)\}} \leq C_2 \cdot \left[h_2^k m_k k! + \max_{1\leq j\leq q} \|b_j(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} + h_1^k m_k k! \, \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}} \right].$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ de modo que $\tau+\varepsilon < \sigma - r$. Pela Proposição 5.24, é possível encontrar $B_2, h_3 > 1$ e $\delta_\varepsilon < 0$ de forma que

$$\max_{1\leq j\leq q} \|b_j(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} \leq B_2 \left(\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\tau+\varepsilon)\}} + h_3^k m_k k! \, \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\tau+\varepsilon)\}} \right), \ \delta_\varepsilon \leq \delta < 0.$$

Por conseguinte, para $C_3 = B_2 C_2$ e $\delta_1 = \max\{\delta_\varepsilon, \delta_0\}$,

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+k-r)\}} \leq C_3 \Bigg(h_2^k \cdot m_k \cdot k! + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\tau+\varepsilon)\}} + h_3^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\tau+\varepsilon)\}} + \\ + h_1^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}} \Bigg), \quad \delta_1 < \delta < 0.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $k_0 \geq \tau + \varepsilon$. Se $h_4 = \max\{h_1, h_2, h_3\}$ e $C_4 = 3C_3$, segue que

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+k-r)\}} \leq C_4 \cdot h_4^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right) + C_4 \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\tau+\varepsilon)\}}. \quad (5.35)$$

Para estimar $\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\tau+\varepsilon)\}}$, remetemos mais uma vez ao Lema 5.22. Pela escolha de ε,

$$\tau + \varepsilon - 1 < k + \tau + \varepsilon < k + \sigma - r.$$

Tomando $\lambda = \dfrac{1}{2C_4}$, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\tau+\varepsilon)\}} &\leq \frac{1}{2C_4} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma-r)\}} + \left(\frac{1}{2C_4}\right)^{\frac{-1-k}{\sigma-r-(\tau+\varepsilon)}} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\tau+\varepsilon-1)\}} \\ &\leq \frac{1}{2C_4} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma-r)\}} + (2C_4)^{\frac{k+1}{\sigma-r-(\tau+\varepsilon)}} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\tau+\varepsilon-1)\}} \\ &\leq \frac{1}{2C_4} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma-r)\}} + [(2C_4)^{n_0}]^{k+1} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\tau+\varepsilon-1)\}}, \end{aligned}$$

no qual $n_0 \in \mathbb{N}$ e $n_0 \geq \dfrac{1}{\sigma - r - (\tau+\varepsilon)}$. Consequentemente, se $B_3 = (2C_4)^{n_0}$, obtemos

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\tau+\varepsilon)\}} \leq \frac{1}{2C_4} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\sigma-r)\}} + B_3^{k+1} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\tau+\varepsilon-1)\}}. \quad (5.36)$$

Através de (5.35) e (5.36), concluímos que

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+k-r)\}} \leq 2C_4 \cdot h_4^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right) + (2C_4 B_3) \cdot B_3^k \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}. \quad (5.37)$$

Tomando $C_5 = 4C_4B_3$ e $h_5 = \max\{h_4, B_3\}$, inferimos de (5.37) que

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\sigma+k-r)\}} \leq C_5 \cdot h_5^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \left(1 + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \delta_1 \leq \delta < 0. \tag{5.38}$$

Observe, por fim, que as desigualdades (5.15) e (5.38) são, a menos de uma troca das constantes, as mesmas. Logo, basta repetir o raciocínio empregado no Teorema 5.21 que o resultado estará provado. □

5.4 Aplicação

Trabalharemos nesta seção com operadores diferenciais parciais lineares da seguinte forma:

$$a(x, D) = P_0(D) + \sum_{j=1}^{q} a_j(x)P_j(D), \tag{5.39}$$

com $a_j(x) \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $P_0(D), P_1(D) \dots P_q(D)$ operadores com coeficientes constantes, de modo que

1. É possível encontrar $C, R > 0$ e $m \in \mathbb{R}$ tais que

$$|P_0(\xi)| \geq C \cdot (1 + |\xi|)^m, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N; |\xi| \geq R. \tag{5.40}$$

2. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, existem $\beta_j, c_j > 0$ de maneira que

$$|P_j(\xi)| \leq c_j \cdot \frac{|P_0(\xi)|}{(1 + |\xi|)^{\beta_j}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N; |\xi| \geq R. \tag{5.41}$$

Observação 5.26. *Decorre imediatamente da definição que $P_0(D), P_1(D), \dots, P_q(D)$ são elementos de $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Em particular, por (5.40),*

$$P_0(D) \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\beta_0}}^{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N), \quad com\ \beta_0 \geq m.$$

Observação 5.27. *$P_0(D)$ é um operador globalmente C^∞-hipoelítico e portanto globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico, para qualquer sequência peso $\mathscr{M}$.*

Observação 5.28. *Sob as condições definidas em (5.39), $a(x, D)$ é um operador de força constante (para mais detalhes, indicamos [35]).*

Teorema 5.29. *Seja $a(x, D)$ um operador como em (5.39), $P_0(D)$ pertencendo a $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\beta_0}}^{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, para $\beta_0 \geq m$. Sob tais hipóteses, temos $a(x, D)$ globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico com perda de $\beta_0 - m$ derivadas. Em particular, $a(x, D)$ é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.*

Demonstração. Fixamos $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $k \in \mathbb{N}_0$ arbitrários; para $\delta < 0$ que escolheremos mais adiante, obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,k+m)\}} &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}(1+|\xi|)^{2k+2m}\,|\hat{u}(\xi)|^2\\
&= \sum_{|\xi|<R}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}(1+|\xi|)^{2k+2m}\,|\hat{u}(\xi)|^2 +\\
&\quad+\sum_{|\xi|\geq R}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}(1+|\xi|)^{2k+2m}\,\frac{|\widehat{P_0(D)u}(\xi)|^2}{|P_0(\xi)|^2}\\
&\leq (1+R)^{2k}\cdot\sum_{|\xi|<R}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}(1+|\xi|)^{2m}\,|\hat{u}(\xi)|^2 +\\
&\quad+C^{-2}\sum_{|\xi|\geq R}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}(1+|\xi|)^{2k}\,|\widehat{P_0(D)u}(\xi)|^2,
\end{aligned}$$

aplicando (5.40). Se $B_1 = \max\{(1+R), C^{-1}\}$, concluímos que

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+m)\}} \leq B_1^k\cdot\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,m)\}} + B_1\cdot\|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}\,. \tag{5.42}$$

O próximo passo é comparar $\|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}$ e $\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}$. Dado $\ell \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}
\|P_j(D)u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,\ell)\}} &= \underbrace{\sum_{|\xi|<R}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}(1+|\xi|)^{2\ell}\,|P_j(\xi)|^2|\hat{u}(\xi)|^2}_{(*)} +\\
&\quad+\underbrace{\sum_{|\xi|\geq R}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}(1+|\xi|)^{2\ell}\,|P_j(\xi)|^2|\hat{u}(\xi)|^2}_{(**)}\,.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Consideremos $\tau, C' > 0$ de maneira que

$$|P_j(\xi)| \leq C'\cdot(1+|\xi|)^{\tau},\ \ \forall j\in\{1,2,\ldots,q\}\,,\ \forall\xi\in\mathbb{Z}^N.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \sum_{|\xi|<R}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{(2\ell-2m)+2m}\cdot C'^2\cdot(1+|\xi|)^{2\tau}|\hat{u}(\xi)|^2\\
&\leq C'^2\cdot(1+R)^{2(\tau+\ell+|m|)}\sum_{|\xi|<R}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{|\delta|^n\cdot(1+|\xi|)^n}{m_n\cdot n!}\right)\right]^{-2}\cdot(1+|\xi|)^{2m}\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\\
&\leq \left[C'\cdot(1+R)^{\tau+|m|}\right]^2\cdot B_1^{2\ell}\cdot\|u\|^2_{\{\mathscr{M},(\delta,m)\}}\,.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Por outro lado, por (5.41),

$$(**) \leq c_j^2 \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right)\right]^{-2} (1+|\xi|)^{2\ell} |\hat{u}(\xi)|^2 \frac{|P_0(\xi)|^2}{(1+|\xi|)^{2\beta_j}}$$
$$\leq c_j^2 \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left(\frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right)\right]^{-2} (1+|\xi|)^{2\ell-2\beta_j} |\widehat{P_0(D)u}(\xi)|^2. \tag{5.45}$$

Escolhendo $B_2 = \max\left\{c_1, c_2, \dots c_q, C' \cdot (1+R)^{\tau+|m|}\right\}$ e $\gamma = \min\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q\}$, decorre de (5.43), (5.44) e (5.45) que

$$\|P_j(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\ell)\}} \leq B_2 \|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\ell-\gamma)\}} + B_2 \cdot B_1^\ell \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,m)\}}, \quad j = 1, 2 \dots, q. \tag{5.46}$$

Observe agora o seguinte:

$$\|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} \leq \|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} + \sum_{j=1}^q \|a_j(x)P_j(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}. \tag{5.47}$$

Como cada a_j pertence a $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e consequentemente a $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_0}(\mathbb{T}^N)$, decorre da Proposição 5.24 a existência de $\delta_1 < 0$, $B_3, h > 0$ tais que, para $\delta_1 \leq \delta < 0$,

$$\|a_j(x)P_j(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} \leq B_3 \|P_j(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\frac{\gamma}{2})\}} + B_3 \cdot h^k \cdot m_k \cdot k! \, \|P_j(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\frac{\gamma}{2})\}}. \tag{5.48}$$

Assim, de (5.46), (5.47) e (5.48), temos

$$\begin{aligned}
\|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} &\leq \|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} + \sum_{j=1}^q B_3 \left(\|P_j(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+\frac{\gamma}{2})\}}\right) + \\
&\quad + B_3 \cdot h^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \sum_{j=1}^q \|P_j(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\frac{\gamma}{2})\}} \\
&\leq \|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} + \\
&\quad + \sum_{j=1}^q B_3B_2 \left(\|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k-\frac{\gamma}{2})\}} + B_1^{k+\frac{\gamma}{2}} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,m)\}}\right) + \\
&\quad + B_3B_2 \cdot h^k \cdot m_k \cdot k! \left(\sum_{j=1}^q \|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,-\frac{\gamma}{2})\}} + B_1^{\frac{\gamma}{2}} \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,m)\}}\right).
\end{aligned}$$

Por conseguinte, se $B_4 = 2qB_1^{\frac{\gamma}{2}} B_2B_3$ e $h_2 = \max\{h, B_1\}$,

$$\begin{aligned}
\|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} &\leq \|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} + B_4 \cdot \|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k-\frac{\gamma}{2})\}} + \\
&\quad + B_4 \cdot h_2^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \left(\|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,-\frac{\gamma}{2})\}} + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,m)\}}\right).
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Tomemos $\omega \in \mathbb{R}$ de maneira que $\omega < -\dfrac{\gamma}{2}$. Como $\omega < k - \dfrac{\gamma}{2} < k$ para cada k em $\mathbb{N}_0$, é possível empregar o Lema 5.22, para $\lambda = \dfrac{1}{2B_4}$:

$$\|P_0(D)u\|_{\left\{\mathscr{M},(\delta,k-\frac{\gamma}{2})\right\}} \leq \frac{\|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}}{2B_4} + (2B_4)^{\frac{2(k-\omega-\frac{\gamma}{2})}{\gamma}} \cdot \|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\omega)\}} \tag{5.50}$$

Aliando (5.49) a (5.50), mostramos que

$$\begin{aligned}\frac{\|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}}}{2} &\leq \|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} + (2B_4)^{\frac{2(k-\omega)}{\gamma}} \|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,\omega)\}} + \\ &+ B_4 \cdot h_2^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \left(\|P_0(D)u\|_{\left\{\mathscr{M},(\delta,-\frac{\gamma}{2})\right\}} + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,m)\}}\right)\end{aligned}$$

Se $B_5 = 4\max\left\{(2B_4)^{-2\omega/\gamma}, B_4\right\}$, $h_3 = \max\left\{h_2, (2B_4)^{2/\gamma}\right\}$ e nos utilizando o fato de que $\omega < -\dfrac{\gamma}{2}$, concluímos que

$$\begin{aligned}\|P_0(D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} &\leq 2\,\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} + \\ &+ B_5 \cdot h_3^k \cdot m_k \cdot k! \left(\|P_0(D)u\|_{\left\{\mathscr{M},(\delta,-\frac{\gamma}{2})\right\}} + \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,m)\}}\right).\end{aligned} \tag{5.51}$$

Associando (5.42) a (5.51), segue que

$$\begin{aligned}\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+m)\}} \leq{}& \left(B_1^k + B_1 \cdot B_5 \cdot h_3^k \cdot m_k \cdot k!\right) \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,m)\}} + 2B_1\,\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} + \\ &+ B_1 \cdot B_5 \cdot h_3^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \|P_0(D)u\|_{\left\{\mathscr{M},(\delta,-\frac{\gamma}{2})\right\}}.\end{aligned} \tag{5.52}$$

Como $P_0(D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_{\beta_0}}(\mathbb{T}^N)$,

$$\begin{aligned}\|P_0(D)u\|^2_{\left\{\mathscr{M},(\delta,-\frac{\gamma}{2})\right\}} &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right)^{-2} (1+|\xi|)^{-\gamma}\,|P_0(\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \\ &\leq C_2^2 \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^N} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|\delta|^n \cdot (1+|\xi|)^n}{m_n \cdot n!}\right)^{-2} (1+|\xi|)^{-\gamma}\,(1+|\xi|)^{2\beta_0} |\hat{u}(\xi)|^2 \\ &\leq C_2^2\,\|u\|^2_{\left\{\mathscr{M},(\delta,\beta_0-\frac{\gamma}{2})\right\}},\end{aligned}$$

o que implica que

$$\|P_0(D)u\|_{\left\{\mathscr{M},(\delta,-\frac{\gamma}{2})\right\}} \leq C_2\,\|u\|_{\left\{\mathscr{M},(\delta,\beta_0-\frac{\gamma}{2})\right\}}. \tag{5.53}$$

Aplicando (5.53) e tomando $h_4 = \max\{B_1, h_3\}$, $B_6 = 3B_1B_5C_2$ e $k_0 = \max\left\{\beta_0 - \dfrac{\gamma}{2}, m\right\}$, reescrevemos 5.52 da seguinte maneira:

$$\|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k+m)\}} \leq B_6 \cdot \left(\|a(x,D)u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k)\}} + h_4^k \cdot m_k \cdot k! \cdot \|u\|_{\{\mathscr{M},(\delta,k_0)\}}\right),\ \forall \delta \in [\delta_1, 0).$$

Está demonstrada a afirmação. □

Corolário 5.30. *Seja $a(x,D)$ o operador descrito em (5.39); se $b(x,D) \in \mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}_\tau}(\mathbb{T}^N)$, para $\tau < m$, então $P(x,D) = a(x,D) + b(x,D)$ é globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 5.25. □

Observação 5.31. *O Teorema 5.29 não só generaliza o Teorema 2.2 de [22] com relação às classes de funções para qual o mesmo é válido, como também permite que o valor m em (5.40) possa ser negativo.*

5.5 A Resolubilidade do Sistema Transposto

Inspirados em resultados provados em [4], exploraremos nesta seção a conexão entre $\mathscr{M}$-hipoeliticidade e resolubilidade global, com relação aos espaços $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, para sistemas de operadores em $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N)$ e seus respectivos transpostos, estendendo assim fatos demonstrados em [3].

Sejam $a_1(x,D),\dots,a_q(x,D)$ elementos de $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N)$ e $\mathcal{A} = (a_1(x,D),\dots,a_q(x,D))$ o sistema dado pelos operadores mencionados. Então $\mathcal{A}$ age continuamente em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, através da seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) &\to \left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q \\ \varphi &\mapsto (a_1(x,D)\varphi,\dots,a_q(x,D)\varphi)\,. \end{aligned}$$

Estudemos a ação de $\mathcal{A}^t$; dada $u = (u_1,u_2,\dots,u_q) \in \left(\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$, teremos

$$\begin{aligned} \langle u, \mathcal{A}\varphi\rangle &= \sum_{j=1}^q \langle u_j, a_j(x,D)\varphi\rangle \\ &= \sum_{j=1}^q \langle a_j(x,D)^t(u_j), \varphi\rangle \\ &= \langle \mathcal{A}^t, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^t : \left(\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q &\to \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \\ (u_1,\dots,u_q) &\mapsto \sum_{j=1}^q a_j(x,D)^t(u_j). \end{aligned}$$

Suponha agora $v \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e $u = (u_1, \ldots, u_q) \in \left(\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ tal que $A^t u = v$. Quando $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ pertence ao kernel de $\mathcal{A}$, segue que

$$\langle v, f\rangle = \langle A^t u, f\rangle = \sum_{j=1}^{q} \langle a_j(x,D)^t(u_j), f\rangle = \sum_{j=1}^{q} \langle u_j, a_j(x,D)f\rangle = 0.$$

Analogamente, quando $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_q) \in \left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ e $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ são tais que $\mathcal{A}\varphi = \psi$, e $w = (w_1, \ldots, w_r) \in \left(\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ é elemento de ker $\mathcal{A}^t$, temos

$$\langle w, \psi\rangle = \sum_{j=1}^{q} \langle w_j, \psi_j\rangle = \sum_{j=1}^{q} \langle w_j, a_j(x,D)\varphi\rangle = \langle \sum_{j=1}^{q} a_j(x,D)^t w_j, \varphi\rangle = \langle \mathcal{A}^t w, \varphi\rangle = 0.$$

Por conseguinte, concluímos que

$$\text{ran } \mathcal{A} \subset \left(\text{ker } \mathcal{A}^t\right)^{\perp} \text{ e ran } \mathcal{A}^t \subset (\text{ker } \mathcal{A})^{\perp},$$

o que nos leva à seguinte

Definição 5.32. *Seja $\mathcal{A} = (a_1(x,D), \ldots a_r(x,D))$ um sistema formado por elementos de $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N)$. Diremos que*

1. *$\mathcal{A}^t$ é globalmente resolúvel em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ se para toda $u \in \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ tal que*

$$\langle u, f\rangle = 0, \ \ \textit{para toda } f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N); \ \mathcal{A}f = 0, \tag{5.54}$$

   existir $v = (v_1, \ldots, v_r) \in \left(\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ de modo que $\mathcal{A}^t v = u$. Isto é, se ran $\mathcal{A}^t =$ (ker $\mathcal{A})^{\perp}$.

2. *$\mathcal{A}$ é globalmente resolúvel em $\left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ se, para toda $\varphi \in \left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ tal que*

$$\langle w, \varphi\rangle = 0, \ \ \textit{para toda } w \in \left(\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q; \ \mathcal{A}^t w = 0, \tag{5.55}$$

   existir $\psi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ de modo que $\mathcal{A}\psi = \varphi$. Isto é, se ran $\mathcal{A} =$ (ker $\mathcal{A}^t)^{\perp}$.

Nosso objetivo é provar que a $\mathscr{M}$-hipoeliticidade global de $\mathcal{A}$ tem implicações diretas na resolubilidade global de $\mathcal{A}$ em $\left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ e de $\mathcal{A}^t$ em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. Para tal, adaptaremos o conceito de operador (σ_+, σ)-hipoelítico, definido em [4], para o nosso contexto.

Definição 5.33. *Dada $\mathscr{M}$ uma sequência peso, denotaremos por $\mathscr{L}_{\mathscr{M}} = \{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ a sequência peso dada por*

$$\ell_n = m_n \cdot n!, \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Não é difícil verificar que $\mathscr{L}_{\mathscr{M}}$ satisfaz (1.1), (1.2) e (2.11). Além disso, pelo Teorema 1.22, $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \subsetneq \mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}}}(\mathbb{T}^N)$.

Lema 5.34. *$\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}},1}(\mathbb{T}^N)$ e a inclusão $i : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}},1}(\mathbb{T}^N)$ é contínua.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.34, queremos mostrar que $\mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}},1}(\mathbb{T}^N)$, para todo $h > 0$ e a inclusão

$$i_h : \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N) \to \mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}},1}(\mathbb{T}^N)$$

é contínua. Seja $f \in \mathcal{E}_{\mathscr{M},h}(\mathbb{T}^N)$, tal que $\|f\|_{\mathscr{M},h} = 1$. Neste caso,

$$|D^\alpha f(x)| \leq h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \;\; \forall x \in \mathbb{T}^N, \; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

Como $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{h^k}{k!} = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ de modo que $k! \geq h^k$, para cada $k \geq n_0$. Assim,

$$|D^\alpha f(x)| \leq \big(|\alpha|! \cdot m_{|\alpha|}\big) \cdot |\alpha|! = \ell_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \;\; \forall x \in \mathbb{T}^N, \; |\alpha| \geq n_0. \tag{5.56}$$

Se $h \leq 1$, podemos tomar $n_0 = 0$. Caso contrário, para os casos em que $|\alpha| < n_0$, considere $C_0 = h^{n_0}$. Por conseguinte,

$$|D^\alpha f(x)| \leq h^{|\alpha|} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \leq h^{n_0} \cdot m_{|\alpha|} \cdot |\alpha|! \leq h^{n_0} \cdot \ell_{|\alpha|} \cdot |\alpha|!, \;\; \forall x \in \mathbb{T}^N. \tag{5.57}$$

Portanto, decorre de (5.56) e (5.57) que $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{E}^1_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}}}(\mathbb{T}^N)$ e

$$\|f\|^1_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}}} \leq h^{n_0} \cdot \|f\|_{\mathscr{M},h}\,,$$

comprovando a continuidade de i_h. □

Definição 5.35. *Seja $\mathcal{A} = (a_1(x,D), \ldots, a_q(x,D))$ um sistema de elementos de $\mathfrak{D}^{\mathscr{M}}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{T}^N)$. Diremos que $\mathcal{A}$ é **globalmente** $(\mathscr{L}_{\mathscr{M}} - \mathscr{M})$**-hipoelítico** se satisfizer a seguinte condição:*

$$\forall u \in \mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}}}(\mathbb{T}^N), \;\; a_j(x,D)u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \; \forall j \in \{1, 2, \ldots, q\}\,, \; \Rightarrow \; u \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N).$$

Observação 5.36. *É imediato que qualquer sistema globalmente $\mathscr{M}$-hipoelítico também é globalmente $(\mathscr{L}_{\mathscr{M}} - \mathscr{M})$-hipoelítico.*

Lema 5.37. *Seja $\mathcal{A}$ um sistema globalmente $(\mathscr{L}_{\mathscr{M}} - \mathscr{M})$-hipoelítico e Γ o gráfico de*

$$\mathcal{A} : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \big(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\big)^q\,.$$

Então Γ é um subespaço fechado de $\mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}}}(\mathbb{T}^N) \times \big(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\big)^q$.

Demonstração. Para provar que Γ é fechado, basta demonstrar que o conjunto é sequencialmente fechado (Lema 2.2 de [4]). Considere então $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$ e um par $(\varphi,\psi) \in \mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}}}(\mathbb{T}^N) \times \left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$, de modo que

$$(\varphi_n, \mathcal{A}(\varphi_n)) \to (\varphi,\psi) \text{ em } \mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}}}(\mathbb{T}^N) \times \left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q.$$

Logo,

$$\varphi_n \to \varphi \text{ em } \mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \;\Rightarrow \mathcal{A}(\varphi_n) \to \mathcal{A}(\varphi) \text{ em } \left(\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q.$$

Por outro lado,

$$\mathcal{A}(\varphi_n) \to \psi \text{ em } \left(\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q.$$

Pelo fato de $\left(\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ ser um espaço de Fréchet-Schwartz (ver [39]), o mesmo é Hausdorff. Por conseguinte, $\mathcal{A}(\varphi) = \psi$, o que nos permite concluir que $\varphi \in \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, pela $(\mathscr{L}_{\mathscr{M}} - \mathscr{M})$ hipoeliticidade global. Está provada a afirmação. $\square$

Teorema 5.38. *Suponha $\mathcal{A} = (a_1(x,D),\ldots,a_q(x,D))$ um sistema formado por elementos de $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$, que seja globalmente $(\mathscr{L}_{\mathscr{M}} - \mathscr{M})$-hipoelítico. Então valem as seguintes afirmações:*

- *$\mathcal{A}$ é globalmente resolúvel em $\left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$.*
- *$\mathcal{A}^t$ é globalmente resolúvel em $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.*
- *O kernel de $\mathcal{A} : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ é finitamente gerado.*

Demonstração. De acordo com o que fizemos na Seção 1.4, podemos escrever

$$\mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}}}(\mathbb{T}^N) = \varinjlim_{n} \mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}},h_n}(\mathbb{T}^N),$$

com $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ sendo uma sequência crescente, tal que $h_1 = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} h_n = +\infty$. Deste modo, se $\mathcal{A}$ é globalmente $(\mathscr{L}_{\mathscr{M}} - \mathscr{M})$ hipoelítico, temos as seguintes propriedades:

- $\mathcal{A} : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ é contínua.
- $\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \subset \mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}},1}(\mathbb{T}^N)$ e a inclusão $i : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \hookrightarrow \mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}},1}(\mathbb{T}^N)$ é contínua (Lema 5.34).
- O gráfico de $\mathcal{A}$ é fechado como subespaço de $\mathcal{E}_{\mathscr{L}_{\mathscr{M}}}(\mathbb{T}^N) \times \left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ (Lema 5.37).

Pelo Teorema 2.5 de [4], $\ker(\mathcal{A})$ é finitamente gerado, provando a última propriedade enunciada. Decorre também do mesmo resultado que $\operatorname{ran}(\mathcal{A})$ é fechada em $\left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$. Isto nos permite concluir as duas afirmações através do Lema 2.2 de [4], finalizando a prova da proposição. $\square$

Corolário 5.39. *Seja* $\mathcal{A} = (a_1(x, D), \ldots, a_q(x, D))$ *um sistema formado por elementos de* $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}^{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$. *Se* $\mathcal{A}$ *é globalmente* $\mathscr{M}$*-hipoelítico, satisfaz as seguintes propriedades:*

- $\mathcal{A}$ *é globalmente resolúvel em* $\left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$.
- $\mathcal{A}^t$ *é globalmente resolúvel em* $\mathscr{D}'_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)$.
- *O kernel de* $\mathcal{A} : \mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N) \to \left(\mathcal{E}_{\mathscr{M}}(\mathbb{T}^N)\right)^q$ *é finitamente gerado.*

Em particular, isto vale para os sistemas trabalhados nos Teoremas 3.4, 4.2, 4.21, 5.21, 5.25 e 5.29, bem como para os Corolários 4.16, 4.17, 4.22 e 5.30.

Referências

[1] A. A. Albanese and D. Jornet. Global regularity in ultradifferentiable classes. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 193(2):369–387, 2014.

[2] A.A. Albanese and P. Popivanov. Global analytic and gevrey solvability of sublaplacians under diophantine conditions. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 185(3):395–409, 2006.

[3] A.A. Albanese and L. Zanghirati. Global hypoellipticity and global solvability in gevrey classes on the n-dimensional torus. *Journal of Differential Equations*, 199(2):256–268, 2004.

[4] G. Araújo. Regularity and solvability of linear differential operators in gevrey spaces. *Mathematische Nachrichten*, 291(5-6):729–758, 2018.

[5] A. Arias Jr. Regularidade gevrey das soluções de uma certa classe de sistemas. 2018.

[6] A. Arias Jr., A. Kirilov, and C. de Medeira. Global gevrey hypoellipticity on the torus for a class of systems of complex vector fields. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 474(1):712–732, 2019.

[7] M.S. Baouendi and F. Treves. A microlocal version of bochner's tube theorem. *Indiana University Mathematics Journal*, 31(6):885–895, 1982.

[8] A. Bergamasco, A. Kirilov, W. Nunes, and S. Zani. Global solutions to involutive systems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 143(11):4851–4862, 2015.

[9] A. Bergamasco and S. Zani. Prescribing analytic singularities for solutions of a class of vector fields on the torus. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357(10):4159–4174, 2005.

[10] A. P. Bergamasco. Perturbations of globally hypoelliptic operators. *Journal of Differential Equations*, 114(2):513–526, 1994.

[11] A. P. Bergamasco. Remarks about global analytic hypoellipticity. *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 4113–4126, 1999.

[12] A. P. Bergamasco, P. D. Cordaro, and P. A. Malagutti. Globally hypoelliptic systems of vector fields. *J. Funct. Anal*, 114(2):267–285, 1993.

[13] A. P. Bergamasco, P. D. Cordaro, and G. Petronilho. Global solvability for a class of complex vector fields on the two-torus. *Communications in Partial Differential Equations*, 29(5-6):785–819, 2004.

[14] A. P. Bergamasco, C. de Medeira, A. Kirilov, and S. L. Zani. On the global solvability of involutive systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 444(1):527–549, 2016.

[15] A. P. Bergamasco and G. Petronilho. Global solvability of a class of involutive systems. *Journal of mathematical analysis and applications*, 233(1):314–327, 1999.

[16] A.P. Bergamasco, P.L.D. da Silva, and R.B. Gonzalez. Global solvability and global hypoellipticity in gevrey classes for vector fields on the torus. *Journal of Differential Equations*, 264(5):3500–3526, 2018.

[17] E. Bierstone and P. D. Milman. Resolution of singularities in denjoy-carleman classes. *Selecta Mathematica*, 10(1):1, 2004.

[18] J. Bonet, R. Meise, and S. Melikhov. A comparison of two different ways to define classes of ultradifferentiable functions. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 14(3):425–444, 2007.

[19] R.W. Braun, R. Meise, and B.A. Taylor. Ultradifferentiable functions and fourier analysis. *Results in Mathematics*, 17(3-4):206–237, 1990.

[20] N. Braun Rodrigues, G. Chinni, P. Cordaro, and M. Jahnke. Lower order perturbation and global analytic vectors for a class of globally analytic hypoelliptic operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144(12):5159–5170, 2016.

[21] T. Carleman. *Les Fonctions quasi analytiques: leçons professées au College de France*. Gauthier-Villars et Cie, 1926.

[22] G. Chinni and P.D. Cordaro. On global analytic and gevrey hypoellipticity on the torus and the métivier inequality. *Communications in Partial Differential Equations*, 42(1):121–141, 2017.

[23] B. de Lessa Victor. Fourier analysis for denjoy-carleman classes on the torus. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, pages 1–30, 2020.

[24] B. de Lessa Victor and A. Arias Junior. Global denjoy–carleman hypoellipticity for a class of systems of complex vector fields and perturbations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, pages 1–32, 2020.

[25] A. Denjoy. Sur l'itération des fonctions analytiques. *CR Acad. Sci. Paris*, 182(2):255–257, 1926.

[26] D. Dickinson, T. Gramchev, and M. Yoshino. Perturbations of vector fields on tori: resonant normal forms and diophantine phenomena. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 45(3):731–759, 2002.

[27] I. A. Ferra. Hipoelipticidade global para sublaplacianos, perturbações de ordem inferior, resolubilidade e hipoelipticidade global para uma classe de campos vetoriais. 2018.

[28] I. A. Ferra, B. de Lessa Victor, and G. Petronilho. Global m-hypoellipticity, global m-solvability and perturbations by lower order ultradifferential pseudodifferential operators. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, pages 1–32, 2020.

[29] T. Gramchev, P. Popivanov, and M. Yoshino. Global properties in spaces of generalized functions on the torus for second order differential operators with variable coefficients. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, 51(2):144–174, 1993.

[30] S. J. Greenfield. Hypoelliptic vector fields and continued fractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 31(1):115–118, 1972.

[31] S. J. Greenfield and N. R. Wallach. Global hypoellipticity and liouville numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 31(1):112–114, 1972.

[32] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford university press, 1979.

[33] A Himonas. Global analytic and gevrey hypoellipticity of sublaplacians under diophantine conditions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(7):2061–2067, 2001.

[34] A. A. Himonas and G. Petronilho. On gevrey regularity of globally smooth hypoelliptic operators. *Journal of Differential Equations*, 207(2):267–284, 2004.

[35] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators II: Differential Operators with Constant Coefficients*. Springer, 2005.

[36] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators I: Distribution theory and Fourier analysis*. Springer, 2015.

[37] J. Hounie. Globally hypoelliptic and globally solvable first-order evolution equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 252:233–248, 1979.

[38] J. J. Kohn. Subellipticity of the d-bar-neumann problem on pseudoconvex domains: Sufficient conditions. *Acta Mathematica*, 142(1):79–122, 1979.

[39] H. Komatsu. Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 19(3):366–383, 1967.

[40] H. Komatsu. Ultradistributions i. structure theorems and a characterization. *J. Fac. Sci. Tokyo, Ser. IA*, 20:25–105, 1973.

[41] S. G Krantz and H. R. Parks. *A primer of real analytic functions*. Springer Science & Business Media, 2002.

[42] A Kriegl, P. W. Michor, and A. Rainer. The convenient setting for quasianalytic denjoy–carleman differentiable mappings. *Journal of Functional Analysis*, 261(7):1799–1834, 2011.

[43] A. Kriegl, P. W. Michor, and A. Rainer. The convenient setting for denjoy–carleman differentiable mappings of beurling and roumieu type. *Revista matemática complutense*, 28(3):549–597, 2015.

[44] A. Parmeggiani. A remark on the stability of c^∞-hypoellipticity under lower-order perturbations. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, 6(2):227–235, 2015.

[45] G. Petronilho and S.L. Zani. Global s-solvability and global s-hypoellipticity for certain perturbations of zero order of systems of constant real vector fields. *Journal of Differential Equations*, 244(9):2372–2403, 2008.

[46] A. Rainer and G. Schindl. Composition in ultradifferentiable classes. *Studia Mathematica*, 224(2):97–131, 2014.

[47] A. Rainer and G. Schindl. Equivalence of stability properties for ultradifferentiable function classes. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 110(1):17–32, 2016.

[48] W. Rudin. Division in algebras of infinitely differentiable functions. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 11(5):797–809, 1962.

[49] W. Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-hill education, 2006.

[50] M. Ruzhansky and V. Turunen. *Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2009.

[51] David Tartakoff. Global (and local) analyticity for second order operators constructed from rigid vector fields on products of tori. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(7):2577–2583, 1996.

[52] V. Thilliez. On quasianalytic local rings. *Expositiones Mathematicae*, 26(1):1–23, 2008.

[53] F. Treves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels: Pure and Applied Mathematics, Vol. 25*, volume 25. Elsevier, 2016.

[54] C. Wenyi and M.Y. Chi. Hypoelliptic vector fields and almost periodic motions on the torus tn. *Communications in Partial Differential Equations*, 25(1-2):337–354, 2000.