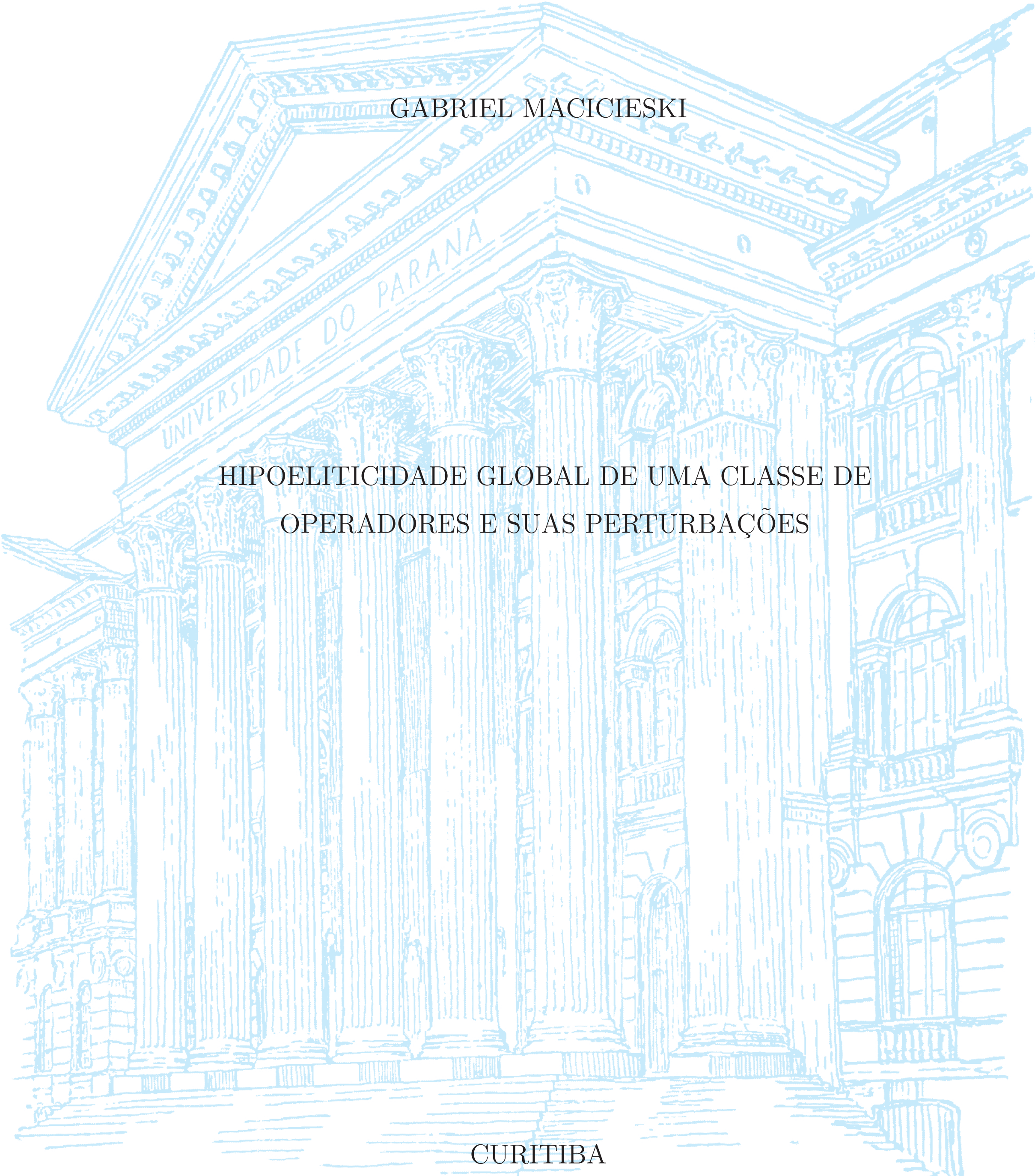
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ



GABRIEL MACICIESKI

HIPOELITICIDADE GLOBAL DE UMA CLASSE DE OPERADORES E SUAS PERTURBAÇÕES

CURITIBA

2021

GABRIEL MACICIESKI

HIPOELITICIDADE GLOBAL DE UMA CLASSE DE OPERADORES E SUAS PERTURBAÇÕES

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov.

CURITIBA

2021

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

M152h Macicieski, Gabriel
Hipoeliticidade global de uma classe de operadores e suas perturbações [recurso eletrônico] / Gabriel Macicieski. – Curitiba, 2021.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2021.

Orientador: Alexandre Kirilov

1. Operadores diferenciais. 2. Perturbação (Matemática). 3. Equações diferenciais. 4. Fourier, Operadores integrais de. 4. Hipoeliticidade global . I. Universidade Federal do Paraná. II. Kirilov, Alexandre. III. Título.

CDD: 515.7242

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

ATA Nº102

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

No dia vinte e seis de fevereiro de dois mil e vinte e um às 10:00 horas, na sala meet.google.com/cai-xzho-jjn, remoto, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de dissertação do mestrando **GABRIEL MACICIESKI**, intitulada**: HIPOELITICIDADE GLOBAL DE UMA CLASSE DE OPERADORES E SUAS PERTURBAÇÕES**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: CLÉBER DE MEDEIRA (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), WAGNER AUGUSTO ALMEIDA DE MORAES (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), RAFAEL BORRO GONZALEZ (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela APROVAÇÃO. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de mestre está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, CLÉBER DE MEDEIRA, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

CURITIBA, 26 de Fevereiro de 2021.

Assinatura Eletrônica
26/02/2021 12:42:02.0
CLÉBER DE MEDEIRA
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
26/02/2021 15:41:57.0
WAGNER AUGUSTO ALMEIDA DE MORAES
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
27/02/2021 10:40:56.0
RAFAEL BORRO GONZALEZ
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA - 40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **GABRIEL MACICIESKI** intitulada: **HIPOELITICIDADE GLOBAL DE UMA CLASSE DE OPERADORES E SUAS PERTURBAÇÕES**, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 26 de Fevereiro de 2021.

Assinatura Eletrônica
26/02/2021 12:42:02.0
CLÉBER DE MEDEIRA
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
26/02/2021 15:41:57.0
WAGNER AUGUSTO ALMEIDA DE MORAES
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
27/02/2021 10:40:56.0
RAFAEL BORRO GONZALEZ
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ)

Agradecimentos

Em primeiro lugar, devo meus agradecimentos ao próprio Deus. Sou grato por todos os presentes que tenho recebido: esperança, capacidade, alegria, saúde e amor. Por causa de sua bondade, posso descansar com a certeza de que Ele é fiel e cuidadoso mesmo quando eu não sou. Sou grato aos meus pais, que sempre cuidaram de mim, me apoiaram, se orgulharam, e se alegraram com as minhas conquistas. Sou grato a minha noiva Ana por todo apoio que me deu, por estar do meu lado em qualquer situação e acreditar no futuro ao meu lado. Muitas vezes deixou o seu conforto para me ajudar e me fazer feliz. Não consigo enxergar como eu passaria por tudo que passei sem ela. Sou muito grato também ao Márcio e a Adriana, que me ajudaram muito na questão financeira e de apoio. Sem a ajuda deles eu não conseguiria nem ter começado o mestrado. Ambos não medem esforço para nos ajudar quando precisamos, sua generosidade é grande. Ainda mais, agradeço aos professores da universidade, por sua excelência no ensino. Aprendi muito com cada um deles, em diversos sentidos. Rendo, entretanto, agradecimento especial ao meu orientador, o professor Kirilov. Por me acolher como seu orientado no curso, por me direcionar a este caminho e pela grande disposição em ajudar sempre. Sou grato aos meus colegas Bruno e Eliakim, pela inspiração, pela ajuda e a camaradagem. Por fim, sou grato ao departamento e ao programa que me aceitaram como aluno e deram o voto de confiança nas minhas capacidades, assim como à CAPES pelo apoio financeiro, que foi imprescindível.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a Hipoeliticidade Global de uma classe de operadores diferenciais lineares de primeira ordem no toro tridimensional. Começamos caracterizando completamente a Hipoeliticidade Global para operadores da forma $\partial_t + ib_1(t)\partial_x + ib_2\partial_y$ e a seguir procuramos responder às seguintes perguntas: se perturbarmos este operador por uma constante, o resultado se mantém? E se for uma perturbação por uma função suave? A resposta é afirmativa desde que o 0-ésimo coeficiente de Fourier destas perturbações não estejam em um certo conjunto de medida nula.

Palavras-chave: Hipoeliticidade global; Perturbações de ordem zero, Análise de Fourier; Distribuições periódicas.

ABSTRACT

In this work we study the Global Hypoellipticity of a class of first order linear differential operators on the tridimensional torus. We start by characterizing completly the Global Hypoellipticity for operators of the form $\partial_t + ib_1(t)\partial_x + ib_2\partial_y$ and then we try to answer the following questions: the perturbations of this operator by a constant, remain Globally Hypoelliptic? What about the perturbations by smooth functions? The answer is affirmative as long as the 0-th Fourier coefficient of these perturbations are not in a certain null measure set.

Keywords: Global Hypoellipticity; Zero order perturbations; Fourier analysis; Periodic distributions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais Parciais estão presentes nas mais variadas áreas das ciências e, em grande parte destas, desempenham papel fundamental. Os fenômenos mais conhecidos que podem ser descritos pelas Equações Diferenciais Parciais, e que motivaram o desenvolvimento de teorias matemáticas sólidas, são: a condução do calor em uma barra, vibrações transversais em uma corda e o equilíbrio de uma membrana sob ação de certas forças. É do estudo das soluções da equação da condução do calor em uma barra, feito por Jean-Baptiste Joseph Fourier no século 18, que surgem as ferramentas hoje bem conhecidas da Análise de Fourier, que também são essenciais neste trabalho.

Uma das propriedades das Equações Diferenciais Parciais é a Hipoeliticidade Global, que é o tema deste trabalho. Este conceito, grosso modo, visa estabelecer sob quais condições as soluções de uma Equação Diferencial Parcial são "bem comportadas". Para exemplificar o que isto significa, podemos considerar uma Equação Diferencial Ordinária (EDO):

$$a \cdot y'(t) = f(t)$$

Se a é constante não nula e f é uma função suave então sabemos que as soluções desta equação tem a forma

$$y(t) = \frac{1}{a}\int_0^t f(w)dw,$$

ou seja, as soluções para esta EDO serão suaves sempre que f for suave. Todavia, no caso em que a é uma função suave de t, isso segue sendo verdade? Se a é uma função estritamente positiva ou negativa então é fácil ver que isto é verdade, pois

$$y(t) = \int_0^t \frac{f(w)}{a(w)}dw$$

é solução da EDO, caso contrário, isto pode ser falso. Se, por exemplo, fizermos $a(t) = t$ e $f(t) = 2$, para cada $t \in \mathbb{R}$, então a EDO se torna em

$$ty' = 2,$$

e se y fosse uma solução suave da reta então temos $y'(t) = 2/t$ para cada t não nulo, mas por conta da continuidade da derivada deveríamos ter

$$\lim_{t\to 0} y'(t) < +\infty.$$

Portanto, as soluções não podem ser suaves (na verdade não chegam nem a ser contínuas). Mas, usando a ideia de distribuições, é possível verificar que a função

$$y_0(t) = \begin{cases} 2ln|t|, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases},$$

é uma solução desta EDO, mesmo sendo descontínua. Em seguida, poderíamos nos perguntar se com estas mesmas condições sobre a a equação

$$ay' + \lambda y = f(t),$$

em que λ é uma constante real, também possui soluções suaves quando f é suave.

Este trabalho compreende o análogo das ideias contidas no exemplo acima, mas para Equações Diferenciais Parciais sob o toro tridimensional. Consideraremos uma classe de operadores diferenciais lineares de primeira ordem (desconsiderando a derivada de ordem 0), e veremos quais condições são necessárias e suficientes para que as soluções sejam suaves quando a parte não homogênea da equação for suave. Depois, tentamos responder as seguintes perguntas: se perturbarmos um operador Globalmente Hipoelítico por uma constante (inclusão da derivada de ordem 0) então este novo operador é Globalmente Hipoelítico? E se a perturbação for por uma função suave?

No primeiro capítulo fixamos as notações e estabelecemos os conceitos preliminares. Na Seção 1.1 definimos os operadores que trabalharemos e fixamos algumas notações. Na Seção 1.2 fazemos uma pequena revisão das distribuições periódicas. Na Seção 1.3 trazemos as definições de Hipoeliticidade Global e Resolubilidade Global, e, ainda mais, expomos os resultados sobre as séries de Fourier (parciais e totais) que serão úteis nos capítulos seguintes. Na Seção 1.4 definimos os números de Liouville e uma condição diofantina que se relaciona a eles, e também, apresentamos alguns exemplos de números que são irracionais não Liouville. Por fim, na Seção 1.5 enunciamos três lemas que importam às demonstrações contidas nos capítulos em sequência.

O conteúdo do segundo capítulo é grandemente baseado no artigo [2], mas apresentado com mais detalhes e algumas mudanças. Apresentamos condições necessárias e suficientes para que certos operadores diferenciais lineares de primeira ordem (campos vetoriais) sejam Globalmente Hipoelíticos. Nas Seção 2.1 e Seção 2.2 demonstramos a Proposição 2.1, que trata da Hipoeliticidade Global. Na Seção 2.3 apresentamos um corolário para a Proposição 2.1 e alguns exemplos de operadores Globalmente Hipoelíticos.

No terceiro capítulo estudamos a Hipoeliticidade Global dos operadores anteriores, mas perturbados por uma constante. Também, de modo a estender os operadores que sabemos ser Globalmente Hipoelíticos, consideramos o caso em que a perturbação é não constante e um resultado sobre composição de operadores Globalmente Hipoelíticos. Na Seção 3.1 demonstramos a Proposição 3.1, que traz as condições que são suficientes para que os operadores perturbados sejam Globalmente Hipoelíticos. Este é o resultado principal deste trabalho. Na Seção 3.2 trazemos um exemplo com operadores Globalmente Hipoelíticos, segundo a Proposição 3.1. Na Seção 3.3 provamos a Proposição 3.2, que estende o resultado da Proposição 3.1 considerando a perturbação não constante. Finalmente, na Seção 3.4 incluímos mais um resultado sobre composição de operadores, de modo a estender mais ainda as possibilidades, juntamente com alguns exemplos.

O trabalho contém também alguns apêndices, que são citados conforme a necessidade do texto.

Capítulo 1

CONCEITOS INICIAIS E NOTAÇÕES

Neste primeiro capítulo, fixaremos algumas notações, relembraremos de alguns conceitos e estabeleceremos os resultados que serão importantes para o decorrer do texto. Na Seção 1.1 definimos o tipo de operador que trabalharemos e o que vem a ser o símbolo deste operador. A Seção 1.2 trata de uma revisão de distribuições, onde também estabelecemos as notações que utilizaremos. A Seção 1.3 trata primordialmente das séries de Fourier (totais e parciais). Na Seção 1.4 definimos os números de Liouville, fornecemos algumas maneiras de obter números não Liouville e fazemos a relação deste conceito com certa condição diofantina. Por fim, na Seção 1.5 foram expostos alguns outros resultados que são importantes para as demonstrações contidas nos capítulos seguintes.

1.1 EDP's e Notações

Vamos começar fixando a notação que usaremos no decorrer deste trabalho. Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ é dito multi-índice de ordem $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Dado um multi-índice α e um vetor $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ denotaremos

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} := \partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n} u(x),$$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$$

e

$$\alpha! := \alpha_1! ... \alpha_n!.$$

Como neste trabalho trataremos apenas das Equações Diferenciais Parciais Lineares então começaremos as definições a partir deste ponto.

Definição 1.1. *Uma Equação Diferencial Parcial Linear de ordem m em um aberto Ω do $\mathbb{R}^n$ é uma equação no formato*

$$Pu = f,$$

com P sendo um operador diferencial linear, ou seja,

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

com $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $m \in \mathbb{N}_0$ *e as funções* a_α *estão definidas em* Ω, *sendo que para pelo menos algum* α *tal que* $|\alpha| = m$ *temos* a_α *não nula.*

No desenvolvimento deste trabalho faremos uso do conceito de símbolo de um operador diferencial linear. Tal aparece em muitos momentos (em alguns casos implicitamente), e portanto, definimos esta ideia a seguir.

Definição 1.2. *O símbolo de um operador diferencial linear* P, *como o da Definição 1.1, é dado por*

$$P(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha,$$

com $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Neste texto estamos interessados nos seguintes operadores diferenciais parciais lineares de primeira ordem

$$P := \partial_t + ib_1(t)\partial_x + ib_2(t)\partial_y,$$

e

$$L := P + \lambda(t, x, y),$$

sendo b_1 e b_2 funções reais, suaves e 2π-periódicas, e, λ é uma função complexa, suave e 2π-periódica em cada variável. Além disso, as soluções serão procuradas em $\mathbb{R}^3$ e também deverão ser 2π-periódicas em cada uma das variáveis. Quando falamos em $\mathbb{T}^3$ estamos nos referindo ao cubo $[0, 2\pi]^3$ com a topologia induzida pelo espaço quociente, resultante das identificações feitas com as faces e vértices do cubo (ver p. 137 de [11]).

De acordo com a definição acima, os operadores P e L possuem como símbolos

$$P(\xi) = i\xi_1 - b_1(t)\xi_2 - b_2(t)\xi_3$$

e

$$L(\xi) = i\xi_1 - b_1(t)\xi_2 - b_2(t)\xi_3 + \lambda(t, x, y),$$

com $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

1.2 Distribuições

Um conceito base neste texto é o de distribuições, e portanto deve-se entender bem seu significado e também como trabalhar com estas. Segue então uma pequena revisão que pode vir a ser útil. Chamaremos de distribuições sobre $\mathbb{T}^n$ (ou simplesmente distribuição periódica) os elementos do espaço vetorial

$$\mathscr{D}'(\mathbb{T}^n) := \{u : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{R}; u \text{ é linear e contínuo}\}.$$

Levando em conta a dualidade entre distribuições e funções suaves, preferimos usar a notação $\langle u, f\rangle$ em vez de $u(f)$. A continuidade de u significa que, se uma sequência $\{f_j\} \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ converge para a função nula em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ então $\langle u, f_j\rangle$ converge para 0. O leitor deve estar atento ao fato de que a convergência de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ é a induzida pela métrica

$$d(f,g) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^j}\frac{p_j(f-g)}{1+p_j(f-g)},$$

com p_j, para cada $j \in \mathbb{N}$, sendo a semi-norma definida em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ por

$$p_j(f) = \sup_{\substack{|\alpha|\le j\\ x\in\mathbb{T}^n}} |D^\alpha f(x)|.$$

A convergência acima é equivalente a seguinte noção de convergência, que pode ser mais simples de se trabalhar em muitos casos. Dizemos que uma sequência de funções $\{f_j\} \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ converge em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ se existir $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ tal que $D^\alpha f_j \to D^\alpha f$ uniformemente, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Exemplo 1.1. *O nosso primeiro exemplo de distribuição é a distribuição δ de Dirac, que é dada por $\langle \delta, f\rangle = f(0)$, para cada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Sua importância é devido a ela ser uma formalização da "função" de Dirac, que é nula em toda reta mas na origem tem o valor $+\infty$ (aí está o motivo das aspas). Tal função aparece em uma grande quantidade de aplicações físicas, podendo representar por exemplo uma força enorme sendo aplicada em um instante pontual.*

Obviamente ela é linear, já que, dadas $f, g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $\gamma \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned}\langle \delta, f+\gamma g\rangle &= (f+\gamma g)(0)\\ &= f(0)+\gamma g(0)\\ &= \langle \delta, f\rangle + \gamma\langle \delta, g\rangle.\end{aligned}$$

Para mostrar a continuidade, tomamos uma sequência $\{f_j\} \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ convergindo para a função nula. Daí, temos que $\langle \delta, f_j\rangle = f_j(0) \to 0$, pois $f_j \to 0$ uniformemente.

Exemplo 1.2. *Um dos mais importantes exemplos de distribuição é o definido por uma função localmente integrável. Considere uma função $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente integrável à Lebesgue, isto é, tal que*

$$\int_X |\psi(y)|dy < +\infty,$$

para todo conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$. Chamaremos também de ψ a distribuição periódica definida por

$$\langle \psi, f\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} \psi(y)f(y)dy,$$

para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Claramente ψ está bem definida e é linear, pois, dadas $f, g \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e $\gamma \in \mathbb{C}$

tem-se que

$$\begin{aligned}
\langle \psi, f + \gamma g\rangle &= \int_{\mathbb{T}^n} \psi(y)(f+\gamma g)(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \psi(y)f(y)dy + \gamma \int_{\mathbb{T}^n} \psi(y)g(y)dy \\
&= \langle \psi, f\rangle + \gamma\langle \psi, g\rangle.
\end{aligned}$$

Para a continuidade, tomamos uma sequência $\{f_j\} \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *tendendo para a função nula. Daí, como* ψ *é localmente integrável então* $f_j(y)\psi(y) \to 0$ *em quase toda parte (aqui usamos o fato de que se uma função é integrável então os pontos onde ela dá infinito estão contidos num conjunto de medida nula). Ainda mais, temos que* $|f_j(y)\psi(y)| \leq C|\psi(y)|$ *em* $\mathbb{T}^n$*, onde* $|\psi|$ *é integrável também (*C *vem do fato de* $f_j \to 0$ *uniformemente e destas funções serem todas limitadas por serem suaves e periódicas). Pelo Teorema da Convergência Dominada (Ver p. 54 de [5])*

$$\begin{aligned}
\lim_j \langle \psi, f_j\rangle &= \lim_j \int_{\mathbb{T}^n} \psi(y)f_j(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} 0dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Note que esse exemplo justifica a utilização de $\langle , \rangle$ para aplicar uma distribuição. Pois $\langle \psi, f\rangle$ poderia ser visto também como o produto interno entre ψ e f.

Uma característica interessante das distribuições é que conseguimos definir uma derivação mais geral, que se estende para quaisquer funções que sejam localmente integráveis, e ainda mais, para distribuições que nem podem ser obtidas de funções. Com isso, funções que antes não possuíam uma derivada agora passam a ter.

Definição 1.3. *Seja* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$*. Chamaremos de derivada de ordem* $|\alpha|$ *de uma distribuição periódica* $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^n)$ *a distribuição que é denotada por* $D^\alpha\mu$ *e é definida por*

$$\langle D^\alpha \mu, f\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle \mu, D^\alpha f\rangle.$$

Exemplo 1.3. *Vamos ver o que acontece quando tomamos a derivada de uma distribuição que provêm de uma função que já é derivável. Para simplificar, vamos considerar o caso unidimensional. Seja* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1*. Então, sabemos que* ψ *define uma distribuição. Calculando a derivada de primeira ordem temos*

$$\begin{aligned}
\langle \psi', f\rangle &= (-1)\langle \psi, f'\rangle \\
&= (-1)\int_{\mathbb{T}} \psi(x)f'(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} f(x)\psi'(x)dx \\
&= \langle \psi', f\rangle,
\end{aligned}$$

para cada $f \in C^\infty(\mathbb{T})$. A penúltima igualdade vem da integração por partes, e na última o leitor precisa ter cautela, pois esta é a distribuição definida pela derivada (como função) da ψ. Algumas referências utilizam chaves para diferenciar a derivada da distribuição e a distribuição da derivada, e então teríamos na verdade $\langle \psi', f\rangle = \langle \{\psi'\}, f\rangle$. Portanto, a derivada da distribuição ψ é na verdade a distribuição que é definida pela derivada da função ψ. Obviamente, a derivada foi definida da maneira que foi para que isto acontecesse. A derivada de uma distribuição generaliza a derivada considerando a integração por partes de uma função que não é derivável (por meio de definição).

Exemplo 1.4. *Para mostrar o que foi citado de antemão, vamos considerar agora a função 2π-periódica $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é dada por $\psi(x) = |x - \pi|$ em $[0, 2\pi]$. Sabemos do Cálculo que esta função não é diferenciável em $x = \pi$, porém se olharmos do ponto de vista das distribuições podemos calcular sua derivada. Vale, para cada $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, que*

$$\begin{aligned}
\langle \psi', f\rangle &= -\int_{\mathbb{T}} |x-\pi| f'(x)dx \\
&= \int_{[0,\pi]} (x-\pi)f'(x)dx - \int_{[\pi,2\pi]} (x-\pi)f'(x)dx \\
&= -\int_{[0,\pi]} f(x)dx + \int_{[\pi,2\pi]} f(x)dx \\
&= \langle H_\pi, f\rangle,
\end{aligned}$$

sendo H_π a função 2π-periódica que em $[0, 2\pi]$ é dada por

$$H_\pi(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,\pi] \\ +1, & x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Lembrando que aqui estamos olhando para ψ como uma distribuição em $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$, ou seja, as funções ficam restritas ao toro.

Exemplo 1.5. *Por fim, podemos efetuar a derivada de distribuições que nem são representadas por funções. Tomemos, por exemplo, a distribuição de Dirac. Temos, para cada $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, que*

$$\begin{aligned}
\langle \delta', f\rangle &= (-1)\langle \delta, f'\rangle \\
&= -f'(0).
\end{aligned}$$

Vale comentar também que, mesmo funções com descontinuidades de primeira espécie (podendo ter uma infinidade delas) quando vistas como distribuições são deriváveis. Todavia, desviamos desta parte, já que não necessitaremos para o restante do texto. O leitor mais curioso pode encontrar algo na referência [3], por exemplo.

Uma outra ferramenta que aparece com frequência quando trabalhamos com distribuição é o produto direto. Ele será de grande utilidade quando necessitarmos construir uma certa distribuição para satisfazer o que desejaremos.

Definição 1.4. *Dadas $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1})$ e $\nu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_2})$, definimos a distribuição $\mu \otimes \nu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^{n_1+n_2})$ pela regra*

$$\langle \mu \otimes \nu, \phi(x,y)\rangle = \langle \mu, \langle \nu, \phi(x,y)\rangle\rangle,$$

para cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^{n_1+n_2})$. Chamamos $\mu \otimes \nu$ de produto direto de μ por ν. Denotaremos por $\mu = \mu(x)$ para indicar que μ é distribuição com relação a variável $x \in \mathbb{T}^{n_1}$.

1.3 Principais Definições e Séries de Fourier

Entre os diversos problemas que estão envolvidos com as equações diferenciais parciais fazem parte a Resolubilidade Global e a Hipoeliticidade Global de um operador diferencial. O primeiro destes conceitos, neste texto, servirá como uma ferramenta para obter resultados sobre o segundo. Vamos definir o que são estes conceitos nesta seção. Ainda mais, serão apresentadas as séries de Fourier (Totais e Parciais) e algumas proposições importantes para o trabalho. Aqui apenas enunciamos os resultados, mas as demonstrações podem ser encontradas em [16].

Definição 1.5. *Diremos que um operador diferencial linear P é Globalmente Hipoelítico (GH) em $\mathbb{T}^3$ se $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$ com $Pu := f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ implicar que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$.*

Definição 1.6. *Diremos que um operador diferencial linear P é Globalmente Resolúvel (GR) em $\mathbb{T}^3$ se $PC^\infty(\mathbb{T}^3) = (ker P^t)^o$.*

Como a inclusão $PC^\infty(\mathbb{T}^3) \subset (ker P^t)^o$ sempre ocorre, então podemos redefinir da seguinte forma mais simples.

Definição 1.7. *Diremos que um operador diferencial P é Globalmente Resolúvel (GR) em $\mathbb{T}^3$ se, para qualquer função $f \in (ker P^t)^o$, for possível encontrar uma outra função $u \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ de modo que $Pu = f$.*

Como veremos mais adiante, esta definição pode ser ainda mais simplificada, dependendo do operador e das condições que estaremos supondo em cima deste. Há aqui pelo menos três problemas imediatos. O primeiro deles é tentar descrever o espaço $(ker P^t)^o$ de acordo com o operador que consideraremos e de modo que nos seja conveniente. O segundo é em como relacionaremos u e f através da equação $Pu = f$, de forma que a descrição que obtemos de $(ker P^t)^o$ nos seja útil. Por fim, precisamos de uma forma de caracterizar as funções do espaço $C^\infty(\mathbb{T}^3)$ que possa ser relacionada aos dois problemas mencionados acima. Para lidar com estes problemas, a análise de Fourier nos concede resultados poderosos e é devido a ela, em maior parte, que conseguiremos extrair as conclusões que desejamos. Por isso, passaremos a definir quais as principais ideias que serão necessárias para este texto.

Começaremos com as proposições e definições das séries de Fourier (totais) de uma função de $C^\infty(\mathbb{T}^3)$.

Proposição 1.1. *Seja $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}^3}$ uma sequência satisfazendo a condição de que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|a_j| \leq \frac{C}{(1+|j|)^m},$$

para cada $j \in \mathbb{Z}^3$. Então,

$$f(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}^3} a_j e^{ij\cdot x}$$

define uma função em $C^\infty(\mathbb{T}^3)$.

Proposição 1.2. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Então,*

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^3} a_j e^{ij\cdot x},$$

onde

$$a_j = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(x)e^{-ij\cdot x}dx,$$

e, $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}^3}$ é uma sequência que satisfaz a condição de que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|a_j| \leq \frac{C}{(1+|j|)^m},$$

para cada $j \in \mathbb{Z}^3$.

Definição 1.8. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. O número*

$$a_j := \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} f(x)e^{-ij\cdot x}dx,$$

é dito j-ésimo coeficiente de Fourier de f. Quando $j = (j_1, j_2, j_3)$ usaremos a notação

$$\hat{f}(j_1, j_2, j_3) = \hat{f}(j) := a_j.$$

Note que os coeficientes de Fourier de uma função $f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ ficam unicamente determinados de acordo com as proposições acima. Caracterizamos, assim, as funções de $C^\infty(\mathbb{T}^3)$ através de sequências com índices em $\mathbb{Z}^3$ que satisfazem uma condição de decrescimento. Além disso, quando uma sequência satisfaz estas condições presentes nestas primeiras proposições diz-se que ela é rapidamente decrescente (ou que decresce rapidamente).

Resultados semelhantes podem ser provados para distribuições periódicas, mas com algumas diferenças. Vejamos abaixo.

Proposição 1.3. *Seja* $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}^3}$ *uma sequência que satisfaz a condição de que existem constantes* $C > 0$ *e* $m \in \mathbb{N}$ *de modo que*

$$|a_j| \leq C(1 + |j|)^m,$$

para cada $j \in \mathbb{Z}^3$*. Então,*

$$\mu = \sum_{j\in\mathbb{Z}^3} a_j e^{ij\cdot x}$$

define uma distribuição em $\mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$*. Vale que*

$$a_j = \frac{1}{(2\pi)^3}\langle \mu, e^{-ij\cdot x}\rangle,$$

para cada $j \in \mathbb{Z}^3$*.*

Proposição 1.4. *Seja* $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$*. Então a sequência* $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}^3}$ *dada por*

$$a_j = \frac{1}{(2\pi)^3}\langle \mu, e^{-ij\cdot x}\rangle,$$

para cada $j \in \mathbb{Z}^3$*, satisfaz a condição de que existem constantes* $C > 0$ *e* $m \in \mathbb{N}$ *de modo que*

$$|a_j| \leq C(1 + |j|)^m,$$

para cada $j \in \mathbb{Z}^3$*. Vale que*

$$\mu = \sum_{j\in\mathbb{Z}^3} a_j e^{ij\cdot x}.$$

Definição 1.9. *Seja* $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$*. Então, o número*

$$a_j := \frac{1}{(2\pi)^3}\langle \mu, e^{-ij\cdot x}\rangle$$

é dito j-ésimo coeficiente de Fourier da distribuição μ*. Se* $j = (j_1, j_2, j_3)$ *usaremos a notação*

$$\hat{\mu}(j) = \hat{\mu}(j_1, j_2, j_3) := a_j.$$

Observe que vale de fato algo análogo ao caso das funções suaves. Uma sequência que satisfaz a condição embutida nestas duas últimas proposições é dita ser de crescimento lento.

Seguiremos então com as Séries Parciais de Fourier, que de certo modo também são muito semelhantes as proposições anteriores. Este conceito se faz presente tanto com relação as funções como com distribuições.

Proposição 1.5. *Seja* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ *uma sequência de funções em* $C^\infty(\mathbb{T})$ *satisfazendo a condição de que para todo* α *e* m *naturais, existe* $C(\alpha, m) > 0$ *de modo que*

$$|D^\alpha f_k(t)| \leq C(1 + |k|)^{-m}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^2$ *e* t *em* $\mathbb{T}$. *Então, a função* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$f(t,x,y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k(t) e^{ik\cdot(x,y)}$$

está bem definida e pertence a $C^\infty(\mathbb{T}^3)$. *Acima,* $k \cdot (x,y)$ *é o produto escalar entre* k *e* (x,y), *isto é, se* $k = (k_1, k_2)$ *então* $k \cdot (x,y) = k_1 x + k_2 y$.

Proposição 1.6. *Dada uma função* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ *então*

$$f(t,x,y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f_k(t) e^{ik\cdot(x,y)},$$

sendo $f_k \in C^\infty(\mathbb{T})$ *dada por*

$$f_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(t,x,y) e^{-ik\cdot(x,y)} dxdy.$$

Além disso, vale a condição de que para todo α *e* m *naturais, existe* $C(\alpha, m) > 0$ *de modo que*

$$|D^\alpha f_k(t)| \leq C(1 + |k|)^{-m}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^2$ *e* $t \in \mathbb{T}$.

Definição 1.10. *Dada uma função* $f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ *e* $(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}^2$. *Então,*

$$\hat{f}(t,\xi,\eta) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(t,x,y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dxdy$$

é dito (ξ,η)*-ésimo coeficiente parcial de Fourier de* f *com relação a* (x,y). *Note que cada coeficiente é uma função definida em* $\mathbb{T}$. *Também, para cada* $t \in \mathbb{T}$ *a sequência* $\{\hat{f}(t,\xi,\eta)\}_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2}$ *é dita transformada parcial de Fourier com relação a* (x,y).

As duas proposições acima nos fornecem uma outra caracterização para funções de $C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Ou seja, sempre que quisermos mostrar que uma função está em $C^\infty(\mathbb{T}^3)$ podemos mostrar que seus coeficientes parciais de Fourier (podemos calculá-los mesmo que $f \notin C^\infty(\mathbb{T}^3)$) satisfazem as condições pedidas na Proposição 1.5, e sempre que tivermos uma função de $C^\infty(\mathbb{T}^3)$ já sabemos que ela deve satisfazer essas condições também.

Resultados análogos ocorrem para as distribuições periódicas, como veremos em seguida.

Proposição 1.7. *Seja* $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{Z}^2}$ *uma sequência em* $\mathscr{D}'(\mathbb{T})$ *que satisfaz a condição de que existe* $C > 0$ *e* $m \in \mathbb{N}$ *de modo que*

$$|\langle \mu_k, f \rangle| \leq C p_m(f)(1 + |k|)^m,$$

para cada $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ *e* $k \in \mathbb{Z}^2$. *Então,*

$$\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \mu_k(t) e^{ik\cdot(x,y)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$$

Proposição 1.8. *Seja $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$. Então, vale que*

$$\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \mu_k(t) e^{ik\cdot(x,y)},$$

sendo $\mu_k \in \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ dada por

$$\langle \mu_k, f(t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \langle \mu, f(t) e^{-ik\cdot(x,y)} \rangle,$$

para cada $f \in C^\infty(\mathbb{T})$. Mais ainda, a sequência $\{\langle \mu_k, f \rangle\}_{k \in \mathbb{Z}^2}$ satisfaz a condição de que existe $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}_0$ de modo que

$$|\langle \mu_k, f \rangle| \leq C(1 + |k|)^m,$$

para cada $k \in \mathbb{Z}^2$ (é dito nesse caso que a sequência é de crescimento lento também).

Definição 1.11. *Dado $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$ e $(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}^2$ então $\hat{u}(t, \xi, \eta) \in \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ que é definido por*

$$\langle \hat{u}(t, \xi, \eta), f \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \langle u, f(t) e^{-i(\xi x + \eta y)} \rangle,$$

para cada $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, é dito (ξ, η)-ésimo coeficiente parcial de Fourier da distribuição u com relação a (x, y).

Para acostumarmos com as notações e com essas ideias vejamos dois exemplos em que calcularemos as séries parciais de Fourier de distribuições.

Exemplo 1.6. *Tomemos a distribuição de Dirac $\delta \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$ que é dada por $\langle \delta, f \rangle = f(0)$, para cada $f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Vamos calcular então $\delta_k \in \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ de acordo com a Proposição 1.8. Temos então, para qualquer função $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$, que*

$$\begin{aligned} \langle \delta_k, \phi \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \langle \delta, \phi(t) e^{-ik\cdot(x,y)} \rangle \\ &= \frac{\phi(0)}{(2\pi)^2} \\ &= \left\langle \frac{\delta(t)}{(2\pi)^2}, \phi \right\rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\delta_k = \dfrac{\delta(t)}{(2\pi)^2}$ ($\delta(t)$ é a distribuição de Dirac apenas na variável t), para todo $k \in \mathbb{Z}^2$. Assim, podemos escrever

$$\delta = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \frac{\delta(t)}{(2\pi)^2} e^{ik\cdot(x,y)}.$$

Vamos testar se de fato a igualdade se confirma (também para mostrar como se calcula com uma *distribuição neste formato). Vale, para $g \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$, que*

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \frac{\delta(t)}{(2\pi)^2} e^{ik(x,y)}, g(t,x,y) \right\rangle &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \left\langle \frac{\delta(t)}{(2\pi)^2}, \int_{\mathbb{T}^2} g(t,x,y) e^{ik(x,y)} dxdy \right\rangle \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^2} g(0,x,y) e^{ik(x,y)} dxdy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \hat{g}(0,k) \\
&= g(0),
\end{aligned}$$

sendo $\hat{g}(0,k)$ o k-ésimo coeficiente parcial de Fourier de g com relação a (x,y) (para conseguir a última igualdade basta escrever a série parcial de Fourier de g com relação a (x,y) e aplicar em 0 dos dois lados).

Exemplo 1.7. *Vamos considerar agora uma distribuição periódica definida por uma função para ver o que ocorre. Por simplicidade, tomemos a função $\psi(t,x,y) = c$, com $c \in \mathbb{R}$. Ou seja, a distribuição periódica ψ é dada por*

$$\begin{aligned}
\langle \psi, f \rangle &= \int_{\mathbb{T}^3} \psi(t,x,y) f(t,x,y) dtdxdy \\
&= c \int_{\mathbb{T}^3} f(t,x,y) dtdxdy.
\end{aligned}$$

Agora, de acordo com a Proposição 1.8 temos, para cada $g \in C^\infty(\mathbb{T})$, que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_k, g \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \langle \psi, g(t) e^{-ik\cdot(x,y)} \rangle \\
&= \frac{c}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}^3} g(t) e^{-ik(x,y)} dtdxdy \\
&= \frac{c}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{T}} g(t) dt \int_{\mathbb{T}^2} e^{-ik(x,y)} dxdy \\
&= c \int_{\mathbb{T}} g(t) dt \\
&= \langle \psi(t), g \rangle,
\end{aligned}$$

caso $k = 0$, e, caso seja $k \neq 0$ então claramente a igualdade se anula. Portanto,

$$\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} \psi_k(t) e^{ik\cdot(x,y)} = \psi_0(t) = \psi(t).$$

Uma coisa que deve ficar clara quando operamos com as séries parciais de Fourier de uma distribuição é que o produto $\hat{\mu}(t,\xi,\eta) \cdot e^{i(\xi x + \eta y)}$, com $\hat{\mu}(\cdot,\xi,\eta) \in \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ e $e^{i(\xi x+\eta y)} \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)$, não deve ser entendido como o produto usual. Caso $\hat{\mu}(\cdot,\xi,\eta)$ fosse uma distribuição dada por uma função de t então a notação de produto faz sentido, porém se não é isto que ocorre então uma notação melhor para o produto seria $\hat{\mu}(\cdot,\xi,\eta) \otimes e^{i(\xi x+\eta y)}$. Mas podemos usar a primeira notação, com o t para indicar que a distribuição é com relação a variável t apenas. Dito isto, não haverá perigo de confusão.

1.4 Números de Liouville e Condição Diofantina

Nesta seção apresentaremos os números de Liouville e as condições diofantinas que serão necessárias para o desenvolvimento dos resultados deste texto. Dados α_1 e α_2 números reais, consideremos o operador

$$P := \partial_t + i\alpha_1\partial_x + i\alpha_2\partial_y$$

cujo símbolo é $P(\chi) = i\tau - \alpha_1\xi - \alpha_2\eta$, se $\chi = (\tau, \xi, \eta) \in \mathbb{Z}^3$.

Definição 1.12. *Dizemos que $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é um número de Liouville se, para cada $n > 0$, existem infinitos racionais p/q (com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$) de modo que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^n}.$$

Definição 1.13 (condição (DC) para o operador P)**.** *Diremos que o par de números reais (α_1, α_2) satisfaz a condição diofantina (DC) se existem constantes $C > 0$ e $\gamma > 0$ tais que*

$$|P(\chi)| = |\tau + i(\xi\alpha_1 + \eta\alpha_2)| \geq C(|\tau| + |\xi| + |\eta|)^{-\gamma},$$

para quaisquer ternas de inteiros $\chi := (\tau, \xi, \eta) \neq (0, 0, 0)$.

Observe que a condição acima depende do operador P que estamos considerando. É fácil ver como esta condição pode ser generalizada para o caso n dimensional.

Não é difícil provar os lemas abaixo, mas, apenas a Proposição 1.9 será demonstrada, por se tratar do resultado principal desta seção e que nos será muito importante nos próximos capítulos. Também, esta proposição pode parecer de maneiras diferentes em outros lugares e até mesmo incorporada diretamente nas demonstrações de outras proposições. Por isso, pode ser interessante, e necessário, que o resultado esteja estabelecido com clareza aqui. As demonstrações dos Lema 1.1 e Lema 1.2 podem ser encontradas em [15].

Lema 1.1. *O número $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ é de Liouville se, para cada $n > 0$, existe uma sequência de racionais distintos,$\{p_j/q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, com $p_j \in \mathbb{Z}$ e $q_j \in \mathbb{N}$, de modo que*

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| \leq \frac{1}{q_j^n},$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Além disso, podemos supor $q_j > 1$ e $q_j \to +\infty$ quando $j \to +\infty$.

Lema 1.2. *Se α é um irracional não Liouville então existe $N > 0$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^N},$$

para cada $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.9. *Um par de números reais (x, y) satisfaz a condição (DC) se, e somente se, tem-se $x \cdot y \neq 0$ e x/y é um irracional não Liouville.*

Demonstração. ($\Rightarrow$): Supondo inicialmente que vale a condição (DC) para o par (x, y) então, se $x = 0$, fazendo $\tau = 0$ e $\eta = 0$, obtemos que

$$0 \geq C|\xi|^{-\gamma},$$

onde C e γ são positivos. Portanto, a terna $(0, 1, 0)$, por exemplo, não satisfaz a desigualdade da condição (DC), o que é uma contradição. Analogamente, quando $y = 0$ chegamos em um absurdo.

Podemos passar a supor que $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Se y/x fosse um número racional, bastaria considerar a terna $(0, -y, x)$ e daí

$$|\tau + i(\xi x + \eta y)| = |\eta y||\xi/\eta + y/x| = 0 < \frac{C}{(|\tau| + |\xi| + |\eta|)^{\gamma}},$$

o que contradiz a condição (DC). Vamos supor então que $\alpha = y/x$ seja um número irracional de Liouville. Sejam γ e C números reais positivos. Como α é um número de Liouville então, pelo Lema 1.1, para $\gamma + 2$ existe uma sequência $\{(\xi_j, \eta_j)\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^2$, onde podemos supor que $\eta_j > 1$ e que $\eta_j \to +\infty$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{\xi_j}{\eta_j}\right| < \frac{1}{\eta_j^{\gamma+2}},$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Considerando daí os pares (ξ_j^*, η_j) onde $\xi_j^* = -\xi_j$ para $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$\begin{aligned} |\xi_j^* x + \eta_j y| &= |x|\eta_j \left|\alpha - \frac{\xi}{\eta}\right| \\ &< \frac{|x|}{\eta_j^{\gamma+1}}. \end{aligned}$$

Como $\eta_j \to +\infty$ então existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $j > j_1$ então

$$\frac{|x|}{\eta_j^{\gamma+2}} < 1.$$

Portanto, quando $j > j_1$ temos que

$$\begin{aligned} |\xi_j^* x| - |\eta_j^* y| &\leq |\xi_j^* x + \eta_j y| \\ &< |\eta_j|, \end{aligned}$$

que nos dá

$$|\xi_j^* x| < |\eta_j| + |\eta_j y|,$$

que por sua vez equivale a

$$|\xi_j^*| < \frac{|\eta_j|}{|x|} + |\eta_j||\alpha|.$$

Com tudo isso, obtemos que

$$|\xi_j^*| + |\eta_j| < |\eta_j| \left(\frac{1}{|x|} + |\alpha|\right) + |\eta_j| = |\eta_j| \left(1 + \frac{1}{|x|} + |\alpha|\right),$$

desde que $j > j_1$. Elevando ambos os lados por $\gamma + 1$ e arrumando a desigualdade segue que

$$\frac{1}{|\eta_j|^{\gamma+1}} < \frac{(|\alpha| + 1 + 1/|x|)^{\gamma+1}}{(|\xi_j^*| + |\eta_j|)^{\gamma+1}} = \frac{(|\alpha| + 1 + 1/|x|)^{\gamma+1}}{(|\xi_j^*| + |\eta_j|)} \frac{1}{(|\xi_j^*| + |\eta_j|)^{\gamma}}.$$

Agora, observe que por $|\xi_j^*| + |\eta_j| \to +\infty$, quando $j \to +\infty$, vale que

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{(|\alpha| + 1 + 1/|x|)^{\gamma+1}}{(|\xi_j^*| + |\eta_j|)} = 0.$$

Logo, existe $j_2 \in \mathbb{N}$ tal que quando $j > j_2$ tem-se

$$\frac{|x|(|\alpha| + 1 + 1/|x|)^{\gamma+1}}{(|\xi_j^*| + |\eta_j|)} < C.$$

Portanto, para $j > \max\{j_1, j_2\}$ segue que

$$|\xi_j^* x + \eta_j y| < \frac{C}{(|\xi_j^*| + |\eta_j|)^{\gamma}}.$$

Mas isso contradiz a condição (DC) pois para cada γ e C positivos existe uma terna $(\tau, \xi, \eta) = (0, \xi_j^*, \eta_j)$ tal que

$$|\tau + i(\xi x + \eta y)| < \frac{C}{(|\tau| + |\xi| + |\eta|)^{\gamma}}.$$

Na verdade, observe que mostramos existir não só uma terna mas sim uma infinidade delas. Isso termina a demonstração de que se o par (x, y) satisfaz a condição (DC) então $x \cdot y \neq 0$ e y/x é um número irracional não Liouville.

($\Leftarrow$): Por fim, vamos provar a recíproca, de maneira direta. Ou seja, vamos começar supondo que $x \cdot y \neq 0$ e y/x é um irracional não Liouville. Então, pelo Lema 1.2, existe $N > 0$ de tal forma que

$$\left|\frac{y}{x} - \frac{\xi}{\eta}\right| > \frac{1}{\eta^N},$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e $\eta \in \mathbb{N}$. Portanto, para $(\tau, \xi, \eta) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}$ obtemos

$$\begin{aligned}
|\tau + i(\xi x + \eta y)| &= \left|\tau + i(x\eta)\left(\frac{\xi}{\eta} + \frac{y}{x}\right)\right| \\
&> \frac{1}{2}\left(|\tau| + |x\eta|\left|\frac{\xi}{\eta} + \frac{y}{x}\right|\right) \\
&> \frac{1}{2}\left(|\tau| + |x\eta|\frac{1}{\eta^N}\right) \\
&> \frac{|x|/2}{\eta^N} \\
&> \frac{|x|/2}{(|\tau| + |\xi| + |\eta|)^N},
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade vem do fato de que $|\eta|^N < (|\tau| + |\xi| + |\eta|)^N$.

Para o caso em que η percorre os inteiros não negativos basta notar que podemos incorporar o sinal em ξ na fração ξ/η, pois este ainda continua percorrendo todos os inteiros. Neste caso, vale a mesma desigualdade que acabamos de mostrar.

Falta ainda os casos em que temos $(\tau, \xi, \eta) \in (\mathbb{Z}^2 \times \{0\}) \backslash (0,0,0)$. Assim sendo, vale que

$$|\tau + i(\xi x + \eta y)| = |\tau + i\xi x| > \frac{1}{2}(|\tau| + |\xi x|) \geq \frac{|x|}{2} \geq \frac{|x|/2}{(|\tau| + |\xi| + |\eta|)^N},$$

onde a última desigualdade vem do simples fato de que $(|\tau| + |\xi| + |\eta|)^N \geq 1$.

Concluí-se então que existe $N > 0$ e $C := |x|/2 > 0$ de modo que vale

$$|\tau + i(\xi x + \eta y)| \geq \frac{C}{(|\tau| + |\xi| + |\eta|)^N},$$

para cada terna de inteiros $(\tau, \xi, \eta) \neq (0,0,0)$. Provamos a condição (DC) para o par (x, y).

■

Assim, podemos transitar entre as duas definições o quanto nos for conveniente. Mas, precisamos ainda de uma forma de encontrar números irracionais que não sejam Liouville, pois estes números serão os que nos darão exemplos de operadores Globalmente Hipoelíticos nos próximos capítulos. O próximo resultado cede uma porção de exemplos.

Proposição 1.10 (ver Teo. 1.13 de [9]). *Todo número de Liouville é transcendente.*

Lembramos que o conjunto dos números transcendentes é o complementar (nos complexos) dos números algébricos. Por sua vez, um número algébrico é qualquer número complexo que é raiz de um polinômio não nulo com coeficientes inteiros.

Exemplo 1.8. *Consideremos os polinômios da forma*

$$p(x) = x^2 - q,$$

onde q é um número primo. Sabemos que as raízes deste polinômio são os números irracionais $x = \sqrt{q}$. Como x é raiz do polinômio p então não é transcendente, e consequentemente, também não é Liouville. Ainda mais, se $r = a/b \in \mathbb{Q}$ então também vale que $x = r \cdot \sqrt{q}$ é não Liouville. Basta considerar o polinômio

$$p_0(x) = b^2 x^2 - qa^2.$$

Podemos estender as possibilidades cada vez mais. Note que q não precisa ser de fato primo para a raiz ser irracional. Também, podemos considerar potências maiores. Vários outros exemplos podem ser encontrados na referência [12] e não são complicados de obter.

Exemplo 1.9. *Alguns exemplos de números não Liouville são relativamente recentes. Também, servem como contra-exemplo para a recíproca da proposição anterior. Os mais famosos são os números π e o de Euler e. Além de ambos serem transcendentes também são números não Liouville. A prova para este fato demanda um esforço considerável e detalhes das provas e mais informações podem ser encontradas nas referências [9] e [14].*

1.5 Outros Resultados Importantes

Alguns resultados concernentes ao caso bidimensional são importantes para a demonstração dos casos de dimensão superior. O lema seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada na referência [6], é um desses resultados.

Lema 1.3. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. O operador $P = \partial_t + \alpha\partial_y$ é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^2$ se, e somente se, α é um número irracional não Liouville.*

O lema a seguir nos dispõe de mais um resultado em dimensão dois. Sua demonstração se encontra em [7].

Lema 1.4. *Consideremos $b \in C^\infty(\mathbb{T})$ uma função real e P um operador diferencial definido por*

$$P := \partial_t + ib(t)\partial_x.$$

Então, P é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^2$ se, e somente se, b não é nula e não muda de sinal.

Um outro resultado mais técnico, cuja importância é grande nas demonstrações deste trabalho, é o seguinte.

Lema 1.5. *Sejam g e h funções $\mathbb{R}$-linearmente independentes em $C^\infty(\mathbb{T};\mathbb{R})$. Então, existem p e q inteiros não nulos, com $p \neq q$ de modo que a função real ψ definida em $\mathbb{T}$ dada por $\psi(t) = pg(t) + qh(t)$ muda de sinal. Ainda mais, se $g_0 := \int_0^{2\pi} g(t)dt$ e $h_0 := \int_0^{2\pi} h(t)dt$ não são nulos, então podemos encontrar p e q inteiros de forma que*

$$\int_0^{2\pi} pg(t) + qh(t)dt \neq 0.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [2].

Capítulo 2

HIPOELITICIDADE GLOBAL NO TORO $\mathbb{T}^3$

Neste capítulo estudaremos a Hipoeliticidade Global no toro $\mathbb{T}^3$ do operador diferencial linear

$$P = \partial_t + ib_1(t)\partial_x + ib_2(t)\partial_y,$$

sendo $b_1, b_2 \in C^\infty(\mathbb{T})$ funções a valores reais. Nas Seção 2.1 e Seção 2.2 lidamos com a prova da necessidade e suficiência, nesta ordem, da Proposição 2.1 enunciada abaixo, enquanto que na Seção 2.3 veremos uma consequência direta desta proposição e alguns exemplos de operadores diferenciais lineares Globalmente Hipoelíticos em $\mathbb{T}^3$.

Proposição 2.1. *Sejam $b_1, b_2 \in C^\infty(\mathbb{T})$ funções a valores reais. O operador $P = \partial_t + ib_1(t)\partial_x + ib_2(t)\partial_y$ é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- *as funções b_1 e b_2 não são nulas;*
- *b_1 e b_2 não mudam de sinal;*
- *b_1 e b_2 são $\mathbb{R}$-linearmente dependentes;*
- *o par (b_{10}, b_{20}) satisfaz a condição (DC).*

Os números b_{10} e b_{20} são definidos por

$$b_{j0} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_j(t)dt, \ \ para\ j = 1, 2.$$

Os valores b_{10} e b_{20} são os 0-ésimos coeficientes de Fourier das funções b_1 e b_2. É comum adicionar o subíndice 0 à uma função da reta para denotar seu 0-ésimo coeficiente de Fourier. Faremos uso desta notação.

Lembramos ao leitor que a condição (DC) é correspondente a Definição 1.13 da Seção 1.4. O Apêndice E (p. 61) traz ainda outra condição, denotada (DC^*), que será utilizada na demonstração da Proposição 2.1.

2.1 Demonstração da necessidade da Proposição 2.1

Começaremos utilizando a contrapositiva. Digamos que seja $b_1 \equiv 0$. Neste caso, o operador se reduz a

$$P = \partial_t + ib_2(t)\partial_y.$$

Em seguida, definimos a distribuição periódica μ dada por

$$\langle \mu, \phi \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(t, 0, y) dtdy,$$

que é na verdade a distribuição $1(t, y) \otimes \delta(x)$. Temos que $P\mu = 0$, pois

$$\begin{aligned}
\langle P\mu, \phi \rangle &= -\langle \mu, P\phi \rangle \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P\phi(t, 0, y) dtdy \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\partial_t + ib_2(t)\partial_y)\phi(t, 0, y) dtdy \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_t\phi(t, 0, y) + ib_2(t)\partial_y\phi(t, 0, y) dtdy \\
&= -\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_t\phi(t, 0, y) dtdy - \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ib_2(t)\partial_y\phi(t, 0, y) dydt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$, sendo que a última igualdade vem do fato de ϕ ser periódica em t e y (e claro, do Teorema Fundamental do Cálculo). Entretanto, vale que $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3) \backslash C^\infty(\mathbb{T}^3)$, pois

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}(\tau, \xi, \eta) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \langle \mu, e^{-i(\tau t + \xi x + \eta y)} \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(\tau t + \eta y)} dtdy \\
&= \frac{1}{2\pi},
\end{aligned}$$

para $\tau = \eta = 0$ e para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Daí, se $\{\hat{\mu}(\tau, \xi, \eta)\}$ fosse uma sequência rapidamente decrescente, então existiria uma constante $C > 0$ de modo que

$$|\hat{\mu}(\tau, \xi, \eta)| \leq \frac{C}{1 + |\tau| + |\xi| + |\eta|},$$

para $(\tau, \xi, \eta) \in \mathbb{Z}^3$. Em particular, quando $\tau = \eta = 0$ e fazendo $\xi \to +\infty$ temos $\hat{\mu}(0, \xi, 0) \to 0$. Uma contradição, já que $\hat{\mu}(0, \xi, 0) = \dfrac{1}{2\pi}$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Com isso, provamos que P não pode ser Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$.

No caso em que $b_2 \equiv 0$ a prova é análoga, bastando adaptar cada parte da prova para a variável correspondente.

Continuaremos procedendo pela contrapositiva para demonstrar as demais condições. Vamos supor que b_1 muda de sinal. Se isto ocorre então o Lema 1.4 garante que o operador $P_1 = \partial_t + ib_1(t)\partial_x$ não é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^2$. Portanto, existe $\nu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2) \backslash C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $P_1\nu := f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. A estratégia é considerar a distribuição $\nu(t, x) \otimes 1(y) \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$, pois a parte da variável y nos permite progredir ao operador P mudando pouco a função f e por $\nu \notin C^\infty(\mathbb{T}^2)$ então $\nu(t, x) \otimes 1(y) \notin C^\infty(\mathbb{T}^3)$, como será acertado a seguir.

Primeiramente, temos para cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$, que

$$\begin{aligned}
\langle P(\nu(t,x)\otimes 1(y)),\phi\rangle &= -\langle \nu(t,x)\otimes 1(y), P\phi\rangle \\
&= -\langle \nu(t,x)\otimes 1(y), \partial_t\phi + ib_1(t)\partial_x\phi + ib_2(t)\partial_y\phi\rangle \\
&= -(\langle \nu(t,x)\otimes 1(y), ib_2(t)\partial_y\phi\rangle + \langle \nu(t,x)\otimes 1(y), \partial_t\phi + ib_1(t)\partial_x\phi\rangle) \\
&= -\langle \nu(t,x)\otimes 1(y), \partial_t\phi + ib_1(t)\partial_x\phi\rangle \\
&= -\langle \nu(t,x)\otimes 1(y), P_1\phi\rangle \\
&= -\left\langle \nu(t,x), \int_{\mathbb{T}} P_1\phi dy\right\rangle \\
&= -\left\langle \nu(t,x), P_1\int_{\mathbb{T}} \phi dy\right\rangle \\
&= \left\langle P_1\nu(t,x), \int_{\mathbb{T}} \phi dy\right\rangle \\
&= \langle f(t,x), \langle 1(y),\phi\rangle\rangle \\
&= \langle f(t,x)\otimes 1(y),\phi\rangle.
\end{aligned}$$

Agora, é claro que $f(t,x)\otimes 1(y) \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$, pois esta é na verdade a própria função f vista como se possuísse as três variáveis (t,x,y), mas invariante com relação a y.

Basta mostrarmos agora, que de fato, $\mu = \nu(t,x)\otimes 1(y)$ não pertence a $C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Com esse objetivo em mente, vamos olhar novamente para os coeficientes de Fourier de μ. Temos, para $\eta = 0$, que

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}(\tau,\xi,0) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\langle \mu, e^{-i(\tau t+\xi x)}\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\langle \nu(t,x), e^{-i(\tau t+\xi x)}\rangle \\
&= \hat{\nu}(\tau,\xi)
\end{aligned}$$

Como $\nu \notin C^\infty(\mathbb{T}^2)$ então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $C > 0$ vale, para algum par $(\tau,\xi) \in \mathbb{Z}^2$, que

$$|\hat{\mu}(\tau,\xi,0)| = |\hat{\nu}(\tau,\xi)| > \frac{C}{(1+|\tau|+|\xi|)^m} = \frac{C}{(1+|\tau|+|\xi|+|0|)^m},$$

ou seja, isto nos diz que a sequência $\{\hat{\mu}(\tau,\xi,\eta)\}_{\mathbb{Z}^3}$ também não pode ser rapidamente decrescente. Provando o que queríamos, isto é, que P não pode ser Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$.

Novamente, o caso em que b_2 muda de sinal é totalmente análogo, e portanto P não pode ser Globalmente Hipoelítico neste caso também.

Para provar as demais condições podemos supor que b_1 e b_2 não se anulam totalmente e que nenhuma das duas muda de sinal, pois caso contrário já vimos que P não é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$. Seguimos em frente com a prova, pela contrapositiva, para demonstrar que se P é Globalmente Hipoelítico então b_1 e b_2 serão $\mathbb{R}$-linearmente dependentes.

Vamos supor que b_1 e b_2 sejam funções reais $\mathbb{R}$-linearmente independentes. A prova consistirá em procurar uma função $f \in (ker(P^t))^o$, que esteja em $C^\infty(\mathbb{T}^3)$, tal que a equação $P\mu = f$ não possua uma solução em $C^\infty(\mathbb{T}^3)$.

Começamos usando o Lema 1.5. Por b_1 e b_2 serem $\mathbb{R}$-linearmente independentes, existem inteiros não nulos p e q com $p \neq q$, de modo que a função $\Psi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ dada por $\Psi(t) = pb_1(t) + qb_2(t)$ muda de sinal. Além disso, por b_1 e b_2 serem não nulas e não mudarem de sinal então $b_{10} \neq 0$ e $b_{20} \neq 0$, e ainda pelo Lema 1.5 temos que $\Psi_0 = pb_{10} + qb_{20} \neq 0$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que seja $\Psi_0 = pb_{10} + qb_{20} < 0$.

Definiremos então a função $H : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$H(x, y) = \int_{y-x}^{y} \Psi(s)ds,$$

cuja expressão aparecerá algumas vezes mais adiante. Como H é uma função contínua então podemos definir

$$M := H(x_0, y_0) = \max_{0 \le x, y \le 2\pi} H(x, y).$$

Por Ψ mudar de sinal então existe um ponto t_0 em que esta função é positiva. Como Ψ é contínua existe um intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ em que ela é positiva. Fazendo $x = \delta$ e $y = t_0 + \delta$ obtemos

$$M \geq H(x, y) = \int_{t_0}^{t_0+\delta} \Psi(s)ds > 0.$$

Portanto, podemos considerar $M > 0$.

Vamos construir uma função $f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ a partir de sua série parcial de Fourier. Para isto escolhemos uma sequência de funções em $C^\infty(\mathbb{T})$ satisfazendo as condições da Proposição 1.5. Seja, então,

$$\hat{f}(t, \ell p, \ell q) := e^{-\ell M},$$

para $\ell \geq 1$ inteiro, e 0 no restante dos coeficientes. Note que pelo Teorema de Taylor, para cada $m \in \mathbb{N}_0$, tem-se

$$e^x \geq \frac{x^m}{m!},$$

para cada $x \geq 0$, ou ainda,

$$e^{-x} \leq \frac{m!}{x^m},$$

para cada $x > 0$. Como $\ell M > 0$, para $\ell \geq 1$ inteiro, então temos

$$|\hat{f}(t, \ell p, \ell q)| = e^{-\ell M} \leq \frac{m!}{(\ell M)^m} = \frac{m!(|p| + |q|)^m}{(\ell M)^m(|p| + |q|)^m}.$$

Basta, portanto, tomar $C > 0$ da Proposição 1.5 como $C = \dfrac{m!(|p| + |q|)^m}{M^m}$. No caso das derivadas observe que os coeficientes se anulam e portanto nos livra da necessidade de analisar o caso. Com isso, temos provado que a função f definida por

$$f(t,x,y) := \sum_{\ell\geq 1} e^{-\ell M} e^{i(\ell p x+\ell q y)},$$

está em $C^\infty(\mathbb{T}^3)$.

Agora, se $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$ satisfaz a equação $P\mu = f$ então usando séries parciais de Fourier nas variáveis x e y obtemos

$$\mu(t,x,y) = \sum_{\xi,\eta\in\mathbb{Z}} \hat{\mu}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)},$$

e portanto devemos ter (pela unicidade de representação da série de parcial de Fourier e por P ser contínuo) que

$$\begin{aligned} P\mu = f \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{\xi,\eta\in\mathbb{Z}} P\hat{\mu}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)} = \sum_{\xi,\eta\in\mathbb{Z}} \hat{f}(t,\xi,\eta)e^{i\xi x+\eta y} \\ &\Longleftrightarrow \quad \partial_t\hat{\mu}(t,\xi,\eta) - (\xi b_1(t)+\eta b_2(t))\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = \hat{f}(t,\xi,\eta) \end{aligned}$$

Nos deparamos então com uma família de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Observe que nos casos em que $(\xi,\eta)\neq(\ell p,\ell q)$, com $\ell>0$ inteiro, as únicas soluções das EDO's seriam a função identicamente nula (pois estamos supondo $pb_{10}+qb_{20}\neq 0$). Então reduzimos a família de equações que estudaremos para

$$\partial_t\hat{\mu}(t,\ell p,\ell q) - \ell(pb_1(t)+qb_2(t))\hat{\mu}(t,\ell p,\ell q) = \hat{f}(t,\ell p,\ell q), \tag{2.1}$$

com $\ell>0$ inteiro. Pelo Apêndice B (p. 56), podemos olhar para as equações

$$\partial_t\nu(t,\ell p,\ell q) - \ell\Psi_0\nu(t,\ell p,\ell q) = e^{-\ell[\int_0^t \Psi(w)dw-\Psi_0 t]}\hat{f}(t,\ell p,\ell q), \tag{2.2}$$

e como estamos supondo que $\Psi_0<0$ então segue que $\ell\Psi_0\neq 0$, para $\ell>0$ inteiro. Podemos então utilizar o Apêndice D (p. 58) para garantir que as equações em (2.2) possuem única solução em $\mathbb{T}$ dadas por

$$\nu(t,\ell p,\ell q) = \frac{1}{1-e^{2\pi\ell\Psi_0}}\int_0^{2\pi} e^{-\ell(\int_0^{t-s}\Psi(w)dw-\Psi_0 t)}\hat{f}(t-s,\ell p,\ell q)ds,$$

para cada $\ell>0$ inteiro. Com isso, as únicas soluções em $\mathbb{T}$ para as EDO's em (2.1) são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(t,\ell p,\ell q) &= e^{\ell(\int_0^t\Psi(w)dw-\Psi_0 t)}\nu(t,\ell p,\ell q) \\ &= \frac{1}{1-e^{2\pi\ell\Psi_0}}\int_0^{2\pi} e^{\ell\int_{t-s}^t\Psi(w)dw}\hat{f}(t-s,\ell p,\ell q)ds \\ &= \frac{1}{1-e^{2\pi\ell\Psi_0}}\int_0^{2\pi} e^{\ell\int_{t-s}^t\Psi(w)dw}e^{-\ell M}ds \\ &= \frac{1}{1-e^{2\pi\ell\Psi_0}}\int_0^{2\pi} e^{-\ell(M-H(s,t))}ds, \end{aligned}$$

para ℓ inteiro positivo.

O que fizemos até aqui é mostrar que se uma distribuição periódica satisfaz a equação $P\mu = f$ então seus coeficientes parciais de Fourier devem satisfazer as condições acima. Com base nas condições que encontramos vamos definir a soma abaixo como sendo a μ que precisamos, que deverá satisfazer $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)\backslash C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Definimos

$$\mu(t, x, y) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \hat{\mu}(t, \ell p, \ell q) e^{i\ell(px+qy)},$$

com

$$\hat{\mu}(t, \ell p, \ell q) = \frac{1}{1 - e^{2\pi\ell\Psi_0}} \int_0^{2\pi} e^{-\ell(M - H(s,t))} ds,$$

para cada $\ell \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar que $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$. Para isto vamos utilizar a Proposição 1.7. Antes, observe que $\hat{\mu}(t, \ell p, \ell q) \in C^\infty(\mathbb{T})$ (pois $H(s, \cdot)$ é $C^\infty(\mathbb{T})$). Vale que

$$\begin{aligned}
|\langle \hat{\mu}(t, \ell p, \ell q), \phi \rangle| &= \frac{1}{|1 - e^{2\pi\ell\Psi_0}|} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\ell(M - H(s,t))} \phi(t) ds dt \right| \\
&\leq \frac{2\pi}{|1 - e^{2\pi\ell\Psi_0}|} \int_0^{2\pi} |\phi(t)| dt \\
&\leq \frac{(2\pi)^2}{1 - e^{2\pi\Psi_0}} ||\phi||_\infty,
\end{aligned}$$

sendo que a primeira desigualdade vem do fato de que $M - H(s, t) \geq 0$, e então a exponencial dentro da integral fica limitada por 1, e, a segunda desigualdade decorre de $1 - e^{2\pi\Psi_0}$ ser positivo e maior ou igual que $1 - e^{2\pi\ell\Psi_0}$ para cada $\ell > 0$ inteiro, já que $\Psi_0 < 0$. Com isso, podemos usar a Proposição 1.7 com $m = 0$ (os demais coeficientes de Fourier de μ são nulos e satisfazem trivialmente a desigualdade acima), de modo que $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$.

No caso em que $\Psi_0 > 0$ a prova é análoga. Basta considerar daí a outra solução equivalente que aparece no Apêndice D (p. 58), isto é, considerar

$$\nu(t, \ell p, \ell q) = \frac{1}{e^{-2\pi\ell\Psi_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-\ell\Psi_0 s - \ell(\int_0^{t+s} \Psi(w)dw - \Psi_0(t+s))} \hat{f}(t + s, \ell p, \ell q) ds,$$

e desenvolver do mesmo modo a partir disto.

Precisamos, por fim, mostrar que $\mu \notin C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Usaremos a Proposição 1.6 para isto. Considerando novamente que $\Psi_0 < 0$, temos para um t_0 particular que

$$\begin{aligned}
|\hat{\mu}(t_0, \ell p, \ell q)| &= \frac{1}{|1 - e^{2\pi\ell\Psi_0}|} \int_0^{2\pi} e^{-\ell(M - H(s,t_0))} ds \\
&\geq \int_0^{2\pi} e^{-\ell(M - H(s,t_0))} ds
\end{aligned}$$

Definimos então a função $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada pela lei

$$\sigma(s) = M - H(s, t_0).$$

A função satisfaz $\sigma(s_0) = 0$ e vale também que $\sigma'(s_0) = 0$, já que s_0 é um ponto de mínimo de σ. Podemos então usar a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange em σ (em torno de s_0) para garantir que

$$\sigma(s) = \frac{1}{2}\sigma''(c)(s - s_0)^2,$$

para $c \in (s_0, s)$. Note que o número $\dfrac{\sigma''(c)}{2}$ depende na verdade de s, pois c depende de s (analise com cuidado o Teorema de Taylor contido na Seção 8.4 de [10]).

Como a função σ'' é contínua em $[0, 2\pi]$ então ela é limitada por uma constante $C > 0$, de modo que para qualquer $s \in (s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)$ com $0 < \epsilon < 1$ suficientemente pequeno teremos

$$\sigma(s) = \frac{\sigma''(c)(s - s_0)^2}{2} \leq \frac{C(s - s_0)^2}{2} \leq C(s - s_0)^2.$$

Na verdade, podemos considerar que $C \geq 1$.

Portanto, segue que

$$-\ell\sigma(s) \geq -\ell C(s - s_0)^2,$$

e então

$$e^{-\ell C(s-s_0)^2} \leq e^{-\ell\sigma(s)}.$$

Daí, obtemos, para cada $\ell > 0$ inteiro, que

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(t_0, \ell p, \ell q)| &\geq \int_0^{2\pi} e^{-\ell C(s-s_0)^2} ds \\ &\geq \int_{s_0-\epsilon}^{s_0+\epsilon} e^{-\ell C(s-s_0)^2} ds. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $w = s - s_0$ segue que

$$\int_{s_0-\epsilon}^{s_0+\epsilon} e^{-\ell C(s-s_0)^2} ds = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} e^{-\ell C w^2} ds.$$

Pelo Apêndice A (p. 56) vale que

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} e^{-\ell C w^2} ds \geq \frac{C_\epsilon}{\sqrt{l}},$$

com C_ϵ sendo uma constante positiva que não depende de ℓ. Assim, teremos

$$|\hat{\mu}(t_0, \ell p, \ell q)| \geq \frac{C_\epsilon}{\sqrt{\ell}}.$$

Ainda mais, note que

$$\sqrt{\ell} \leq \sqrt{\ell}\sqrt{|p| + |q|} \leq (|\ell p| + |\ell q|)^2 \leq (1 + |\ell p| + |\ell q|)^2.$$

Como consequência

$$|\hat{\mu}(t_0, \ell p, \ell q)| \geq \frac{C_\epsilon}{(1 + |\ell p| + |\ell q|)^2}.$$

Contrariando então a Proposição 1.6, de modo que $\mu \notin C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Portanto, P não pode ser Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$.

Provamos até então que se P é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ então b_1 e b_2 não são nulas, não mudam de sinal e são $\mathbb{R}$-linearmente dependentes. Resta mostrar ainda que o par (b_{10}, b_{20}) satisfaz a condição (DC). Podemos para isto supor que são válidas as condições acima, que já provamos.

Por b_1 e b_2 serem $\mathbb{R}$-linearmente dependentes, então existe uma constante real $\beta \neq 0$ (pois b_1 e b_2 são não nulas) tal que $\beta b_1(t) = b_2(t)$. Agora, integrando dos dois lados da igualdade obtemos

$$\int_0^{2\pi} \beta b_1(w)dw = \int_0^{2\pi} b_2(w)dw,$$

ou seja,

$$\beta = \frac{b_{20}}{b_{10}},$$

lembrando que b_{10} e b_{20} são diferentes de zero por b_1 e b_2 não mudarem de sinal e não serem nulas (argumento no começo da demonstração). Então tem-se que

$$b_2(t) = \frac{b_{20}}{b_{10}} b_1(t).$$

Com isso, o operador P pode ser escrito na forma

$$P = \partial_t + ib_1(t)\left(\partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y\right).$$

Vamos supor primeiramente que $\beta \in \mathbb{Q}$. Por consequência, existem números inteiros p e q de modo que $\beta = \dfrac{p}{q}$. Usando séries parciais de Fourier podemos definir uma distribuição $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$ com

$$\mu = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} e^{i\ell(px - qy)}.$$

Claro que μ é uma distribuição, já que seus coeficientes parciais de Fourier são limitados por 1. Ainda mais, μ não pode estar em $C^\infty(\mathbb{T}^3)$, caso contrário teríamos, por conta da Proposição 1.6, que existe $C > 0$ não dependendo de ℓ de modo que

$$1 \leq \frac{C}{1 + |\ell p| + |\ell q|},$$

para cada $\ell > 0$ inteiro. Fazendo $\ell \to \infty$ obtemos $1 \leq 0$, o que é um absurdo.

A distribuição periódica μ como definida satisfaz a equação $Pw = 0$, e disso decorre que P

não pode ser Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$. De fato,

$$
\begin{aligned}
P\mu &= P\sum_{\ell\in\mathbb{N}} e^{i\ell(px-qy)} \\
&= \left[\partial_t + ib_1(t)\left(\partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y\right)\right]\sum_{\ell\in\mathbb{N}} e^{i\ell(px-qy)} \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{N}} ib_1(t)\left(\partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y\right)e^{i\ell(px-qy)} \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{N}} -\ell b_1(t)\left(p - q\frac{b_{20}}{b_{10}}\right)e^{i\ell(px-qy)} \\
&= \sum_{\ell\in\mathbb{N}} -\ell b_1(t)\left(p - q\frac{p}{q}\right)e^{i\ell(px-qy)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Vamos supor agora que $\beta = \dfrac{b_{20}}{b_{10}}$ seja um número irracional de Liouville. Neste caso, o Lema 1.3 nos diz que o operador

$$P_1 = \partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y,$$

não é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^2$. Ou seja, existe $w(x,y) \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^2)\backslash C^\infty(\mathbb{T}^2)$, tal que $P_1 w := g \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Consideramos daí $\nu := 1(t)\otimes w(x,y) \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$. Tal ν não pertence a $C^\infty(\mathbb{T}^3)$, pois, usando séries de Fourier obtemos que

$$
\begin{aligned}
\hat{\nu}(0,\xi,\eta) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\langle \nu, e^{-i(x\xi+y\eta)}\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\langle w, e^{-i(x\xi+y\eta)}\rangle \\
&= \hat{w}(\xi,\eta).
\end{aligned}
$$

Como w não pertence a $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ segue que existe $m \in \mathbb{N}$ de tal modo que para qualquer $C > 0$ vale que

$$\hat{\nu}(0,\xi,\eta) = \hat{w}(\xi,\eta) > \frac{C}{(1+|\xi|+|\eta|)^m} = \frac{C}{(1+|0|+|\xi|+|\eta|)^m},$$

para algum par $(\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^2$. Isto, ao mesmo tempo, diz que ν não pertence a $C^\infty(\mathbb{T}^3)$.

Ainda mais, temos, para cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$, que

$$\begin{aligned}
\langle P\nu, \phi\rangle &= -\langle \nu, P\phi\rangle \\
&= -\langle 1(t)\otimes w(x,y), P\phi\rangle \\
&= -\left\langle 1(t)\otimes w(x,y), \partial_t\phi + ib_1(t)\left(\partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y\right)\phi\right\rangle \\
&= -\langle 1(t)\otimes w(x,y), \partial_t\phi\rangle - \left\langle 1(t)\otimes w(x,y), ib_1(t)\left(\partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y\right)\phi\right\rangle \\
&= -\left\langle 1(t)\otimes w(x,y), ib_1(t)\left(\partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y\right)\phi\right\rangle \\
&= -\langle 1(t), \langle w(x,y), P_1\phi\rangle\rangle \\
&= \langle 1(t), \langle P_1 w(x,y), \phi\rangle\rangle \\
&= \langle 1(t), \langle g, \phi\rangle\rangle \\
&= \langle 1(t)\otimes g(x,y), \phi\rangle.
\end{aligned}$$

Deste modo, $P\nu = 1(t)\otimes g(x,y) \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Concluindo que P não pode ser Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$.

Assim, β deve ser um irracional não Liouville, que vimos ser equivalente a condição (DC). Terminando a demonstração da última condição do Teorema. Podemos partir para a segunda parte da demonstração, a suficiência.

2.2 Demonstração da suficiência da Proposição 2.1

Para a segunda parte da demonstração iremos considerar válidas as condições de que b_1 e b_2 são não nulas, não mudam de sinal e são $\mathbb{R}$-linearmente dependentes, e, além disto, que o par (b_{10}, b_{20}) satisfaz a condição (DC). Ou seja, podemos utilizar o operador P na forma

$$\partial_t + ib_1(t)\left(\partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y\right),$$

sendo $\beta := \dfrac{b_{20}}{b_{10}}$ um irracional não Liouville. Vamos efetuar uma prova direta, isto é, deduziremos a partir destas condições que o operador P será Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$.

Seja $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$ de tal modo que $P\mu := f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Queremos demonstrar que $\mu \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Para fazer isto utilizaremos a Proposição 1.5. Usando séries parciais de Fourier com relação a x e y em μ e em f obtemos que

$$\mu = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \hat{\mu}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)},$$

e também que

$$f = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}.$$

Daí, da equação $P\mu = f$ segue, para cada $(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2$, que

$$\left[\partial_t + ib_1(t)\left(\partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y\right)\right]\mu = f,$$

que equivale a

$$\left[\partial_t + ib_1(t)\left(\partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y\right)\right]\sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2}\hat{\mu}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)} = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2}\hat{f}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)},$$

e pela continuidade do operador P temos como equivalente a equação

$$\sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2}\left[\partial_t + ib_1(t)\left(\partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y\right)\right]\hat{\mu}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)} = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2}\hat{f}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)},$$

que é o mesmo que

$$\sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2}\left[\partial_t\hat{\mu}(t,\xi,\eta) - (\xi+\beta\eta)b_1(t)\hat{\mu}(t,\xi,\eta)\right]e^{i(\xi x+\eta y)} = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2}\hat{f}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)},$$

que implica que os coeficientes de μ devem satisfazer as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\partial_t\hat{\mu}(t,\xi,\eta) - (\xi+\beta\eta)b_1(t)\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = \hat{f}(t,\xi,\eta). \tag{2.3}$$

Vamos chamar então

$$c := (\xi+\beta\eta)b_1,$$

e também vamos definir uma função C com domínio em $\mathbb{T}$ e dada pela lei

$$C(t) := \int_0^t c(w)dw - c_0 t,$$

sendo

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(w)dw.$$

Pelo Apêndice B (p. 56), as soluções em $\mathbb{T}$ das EDO's em (2.3) são as mesmas soluções que as das equações

$$\partial_t\nu(t,\xi,\eta) - c_0\nu(t,\xi,\eta) = e^{-C(t)}\hat{f}(t,\xi,\eta), \tag{2.4}$$

mas multiplicadas por $e^{-C(t)}$. Isto é, temos que

$$\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = e^{C(t)}\nu(t,\xi,\eta).$$

Para resolver esta última família de EDO's em (2.4) precisamos olhar para o coeficiente c_0, pois utilizaremos o Apêndice D (p. 58). Devemos considerar dois casos.

Caso $c_0 \in i\mathbb{Z}$, então por c_0 ser um número real segue que só poderia ser $c_0 = 0$, ou seja, deve ser $b_{10}(\xi + \beta\eta) = 0$, ou ainda, $b_{10}\xi + b_{20}\eta = 0$. Entretanto, para todo $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ isto não pode ocorrer, já que o par (b_{10}, b_{20}) satisfaz a condição (DC). De fato, existe $K > 0$ e $\gamma > 0$ de modo que

$$|\xi b_{10} + \gamma b_{20}| \geq \frac{K}{(|\xi| + |\eta|)^\gamma} > 0,$$

para todo $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$. Se $(\xi, \eta) = (0, 0)$ então podemos olhar diretamente para a primeira equação em (2.3), que neste caso fica na forma

$$\partial_t \hat{\mu}(t, 0, 0) = \hat{f}(t, 0, 0).$$

Daí, usando o Teorema Fundamental do Cálculo, segue que

$$\hat{\mu}(t, 0, 0) = \int_0^t \hat{f}(w, 0, 0)dw,$$

que é uma solução suave em $\mathbb{T}$.

Assim, partimos para o caso em que $c_0 \notin i\mathbb{Z}$ que ocorre para todo par $(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}^2$ não nulo. Neste caso, o Apêndice D (p. 58) afirma que a última família de equações em (2.4) possuem uma única solução em $\mathbb{T}$ dadas por

$$\nu(t, \xi, \eta) = \frac{1}{1 - e^{2\pi c_0}} \int_0^{2\pi} e^{c_0 s} e^{-C(t-s)} \hat{f}(t - s, \xi, \eta)ds,$$

ou, equivalentemente,

$$\nu(t, \xi, \eta) = \frac{1}{e^{-2\pi c_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-c_0 s} e^{-C(t+s)} \hat{f}(t + s, \xi, \eta)ds.$$

As soluções para a primeira equação em (2.3), quando $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$, são daí

$$\hat{\mu}(t, \xi, \eta) = e^{C(t)} \frac{1}{1 - e^{2\pi c_0}} \int_0^{2\pi} e^{c_0 s} e^{-C(t-s)} \hat{f}(t - s, \xi, \eta)ds$$

ou

$$\hat{\mu}(t, \xi, \eta) = e^{C(t)} \frac{1}{e^{-2\pi c_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-c_0 s} e^{-C(t+s)} \hat{f}(t + s, \xi, \eta)ds.$$

Podemos simplificar estas expressões notando que vale

$$\begin{aligned} C(t) + c_0 s - C(t - s) &= \int_0^t c(w)dw - c_0 t + c_0 s - \left(\int_0^{t-s} c(w)dw - c_0(t - s) \right) \\ &= \int_0^t c(w)dw + \int_{t-s}^0 c(w)dw \\ &= \int_{t-s}^t c(w)dw \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} C(t) - c_0 s - C(t+s) &= \int_0^t c(w)dw - c_0 t - c_0 s - \left(\int_0^{t+s} c(w)dw - c_0(t+s) \right) \\ &= \int_0^t c(w)dw + \int_{t+s}^0 c(w)dw \\ &= \int_{t+s}^t c(w)dw \end{aligned}$$

Portanto, as soluções se tornam em

$$\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = \frac{1}{1 - e^{2\pi c_0}} \int_0^{2\pi} e^{\int_{t-s}^t c(w)dw} \hat{f}(t-s,\xi,\eta)ds$$

ou

$$\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = \frac{1}{e^{-2\pi c_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\int_{t+s}^t c(w)dw} \hat{f}(t+s,\xi,\eta)ds.$$

Observe daí, que estas soluções pertencem a $C^\infty(\mathbb{T})$. Com isto demonstramos que a sequência $\{\hat{\mu}(t,\xi,\eta)\}_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2}$ satisfaz a primeira parte da Proposição 1.5, sobre ser uma sequência de funções suaves definidas em $\mathbb{T}$. Resta mostrar, portanto, que esta sequência satisfaz a condição de decaimento.

Vamos considerar dois casos. Como $b_{10}\xi + b_{20}\eta \neq 0$, para $(\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^2$ não nulo, então vamos começar considerando os pares (ξ,η) tais que $b_{10}\xi + b_{20}\eta < 0$, ou seja, $b_{10}(\xi + \beta\eta) < 0$.

Como b_1 não muda de sinal então $c(t) = b_1(t)(\xi + \beta\eta) \leq 0$ (b_1 tem que ter o mesmo sinal que b_{10}). A partir disto temos que

$$\begin{aligned} |\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t,\xi,\eta)| &= \frac{1}{|1 - e^{2\pi c_0}|} \left| \int_0^{2\pi} \partial_t^\alpha [e^{\int_{t-s}^t c(w)dw} \hat{f}(t-s,\xi,\eta)]ds \right| \\ &= \frac{1}{|1 - e^{2\pi c_0}|} \left| \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{\alpha} C_j \partial_t^j e^{\int_{t-s}^t c(w)dw} \partial_t^{\alpha-j} \hat{f}(t-s,\xi,\eta)ds \right| \end{aligned}$$

Podemos usar a fórmula de Faà di Bruno para efetuar as derivadas da exponencial. Obtemos

$$\partial_t^j e^{\int_{t-s}^t c(w)dw} = e^{\int_{t-s}^t c(w)dw} \sum_{m=1}^{j} h_m(t,s)(\xi + \beta\eta)^m,$$

sendo h_m uma função que é dada por uma combinação linear de produtos das derivadas (até ordem j) da função

$$(t,s) \mapsto \int_{t-s}^t b_1(w)dw.$$

Ou seja, por esta última função ser suave, então h_m também é, de modo a ser limitada em $[0,2\pi]^2$. Portanto, existe $K_m > 0$ (que não depende de ξ e nem de η, pois h_m não depende) de tal modo que $|h_m(t,s)| \leq K_m$. Ainda mais, por $c(t) \leq 0$ então deve ser

$$e^{\int_{t-s}^t c(w)dw} \leq 1,$$

já que a integral também não é positiva.

Considerando, em segundo caso, os pares de inteiros (ξ, η) tais que $b_{10}(\xi + \beta\eta) > 0$, teremos de maneira análoga que deve ser $c(t) \geq 0$ (em $\mathbb{T}$). Daí, utilizamos a solução no outro formato que nos dá

$$|\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t, \xi, \eta)| = \frac{1}{|e^{-2\pi c_0} - 1|} \left| \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{\alpha} C_j \partial_t^j e^{-\int_t^{t+s} c(w)dw} \partial_t^{\alpha - j} \hat{f}(t + s, \xi, \eta) ds \right|.$$

As derivadas da exponencial ficam como

$$\partial_t^j e^{\int_t^{t+s} c(w)dw} = e^{\int_t^{t+s} c(w)dw} \sum_{m=1}^{j} g_m(t, s)(\xi + \beta\eta)^m,$$

sendo g_m uma função que é dada por uma combinação linear de produtos das derivadas (até a ordem j) da função

$$(t, s) \mapsto \int_t^{t+s} b_1(w)dw.$$

Pelo mesmo motivo do outro caso, existe $G_m > 0$ (sem depender de ξ e η) tal que $|g_m(t, s)| \leq G_m$. E por $c(t) \geq 0$ temos

$$e^{-\int_t^{t+s} c(w)dw} \leq 1.$$

Portanto, de acordo com as considerações do primeiro caso resulta, para todo par de inteiros (ξ, η) tais que $b_{10}(\xi + \beta\eta) < 0$, que

$$\begin{aligned}
|\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t, \xi, \eta)| &\leq \frac{1}{|1 - e^{2\pi c_0}|} \int_0^{2\pi} |\sum_{j=0}^{\alpha} C_j \partial_t^j e^{\int_{t-s}^{t} c(w)dw} \partial_t^{\alpha-j} \hat{f}(t - s, \xi, \eta)| ds \\
&= \frac{1}{|1 - e^{2\pi c_0}|} \int_0^{2\pi} |\sum_{j=0}^{\alpha} e^{\int_{t-s}^{t} c(w)dw} \sum_{m=1}^{j} [h_m(t, s)(\xi + \beta\eta)^m] \partial_t^{\alpha-j} \hat{f}(t - s, \xi, \eta)| ds \\
&\leq \frac{1}{|1 - e^{2\pi c_0}|} \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{m=1}^{j} K_m |\xi + \beta\eta|^m |\partial_t^{\alpha-j} \hat{f}(t - s, \xi, \eta)| ds \\
&\leq \frac{1}{|1 - e^{2\pi c_0}|} \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{m=1}^{j} K_m S^m (|\xi| + |\eta|)^m |\partial_t^{\alpha-j} \hat{f}(t - s, \xi, \eta)| ds \\
&\leq \frac{1}{|1 - e^{2\pi c_0}|} \int_0^{2\pi} \sum_{j=0}^{\alpha} j K S^j (|\xi| + |\eta|)^j |\partial_t^{\alpha-j} \hat{f}(t - s, \xi, \eta)| ds,
\end{aligned}$$

com $S := \max\{\beta, 1\}$ e $K = \max\{K_1, ..., K_j\}$. Como $f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$, pela Proposição 1.6, para cada k natural, existe $M > 0$ dependendo de j e k de modo que

$$|\partial_t^{\alpha-j} \hat{f}(t - s, \xi, \eta)| \leq \frac{M}{(|\xi| + |\eta|)^{k+j}},$$

para cada t e s em $\mathbb{T}$ e $\xi, \eta \in \mathbb{Z}$ (sem ser simultaneamente nulos). Segue daí que

$$\begin{aligned} |\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t,\xi,\eta)| &\leq \frac{1}{|1-e^{2\pi c_0}|}\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{\alpha} jKS^j(|\xi|+|\eta|)^j \frac{M}{(|\xi|+|\eta|)^{k+j}}ds \\ &= \frac{1}{|1-e^{2\pi c_0}|}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{\alpha} jKS^j \frac{M}{(|\xi|+|\eta|)^{k}}ds \\ &\leq \frac{1}{|1-e^{2\pi c_0}|}\frac{N}{(|\xi|+|\eta|)^{k}}, \end{aligned}$$

aqui k é um número natural qualquer e N é uma constante positiva (proveniente de todas as demais) que depende de k.

Fazendo cálculos idênticos, de acordo com as considerações do segundo caso, se considerarmos $G := \max\{G_1, ..., G_j\}$, teremos para cada par de inteiros (ξ, η) satisfazendo $b_{10}(\xi + \beta\eta) > 0$ que

$$|\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t,\xi,\eta)| \leq \frac{1}{|e^{-2\pi c_0}-1|}\int_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{\alpha} jGS^j \frac{M}{(|\xi|+|\eta|)^{k}}ds.$$

Tomando o N anterior maior se preciso podemos concluir que

$$|\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t,\xi,\eta)| \leq \frac{1}{|e^{-2\pi c_0}-1|}\frac{N}{(|\xi|+|\eta|)^{k}},$$

para os pares (ξ, η) que estamos considerando.

Precisamos, por fim, fazer algo com respeito as exponenciais nos denominadores. Para isto usamos a condição (DC^*) do Apêndice E (p. 61), que garante a existência de constantes $N_1 > 0$ e $\gamma > 0$ tais que

$$|1 - e^{\pm 2\pi c_0}| \geq N_1(|\xi|+|\eta|)^{-\gamma},$$

para todo par de inteiros $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$. Obtemos, enfim, que

$$|\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t,\xi,\eta)| \leq \frac{(|\xi|+|\eta|)^{\gamma}}{N_1}\frac{N}{(|\xi|+|\eta|)^{k}} = \frac{N/N_1}{(|\xi|+|\eta|)^{k-\gamma}},$$

para todo par de inteiros $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $k \in \mathbb{N}$ de modo que $k - \gamma > n$ e então

$$(|\xi|+|\eta|)^{k-\gamma} > (|\xi|+|\eta|)^{n}.$$

Para este k, existe uma constante N/N_1 de modo que

$$|\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t,\xi,\eta)| \leq \frac{N/N_1}{(|\xi|+|\eta|)^{k-\gamma}} \leq \frac{N/N_1}{(|\xi|+|\eta|)^{n}},$$

para cada $t \in \mathbb{T}$ e $(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Logo, $\mu \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$.

Isso prova o que queríamos, de modo que P é de fato Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$.

Concluí-se, a prova da Proposição 2.1.

2.3 Consequências e Exemplos

De imediato, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1. *Sejam b_1 e b_2 constantes reais. O operador $P = \partial_t + ib_1\partial_x + ib_2\partial_y$ é Globalmente Hipoelítico se, e somente se, o par (b_1, b_2) satisfaz a condição (DC), que é o mesmo que b_1/b_2 ser um irracional não Liouville.*

Vamos considerar alguns exemplos de operadores, começando pelos cedidos pelo Corolário 2.1.

Exemplo 2.1. *Os operadores $P_1 = \partial_t + i\sqrt{2}\partial_x$ ou $P_2 = \partial_t + i\partial_y$ não são Globalmente Hipoelíticos em $\mathbb{T}^3$. Pois, ou $b_1 = 0$ ou $b_2 = 0$, de modo que b_1/b_2 ou não define um número ou é nulo e portanto não pode ser irracional. Segue que para esses operadores existem distribuições periódicas não suaves de $\mathbb{T}^3$ que quando aplicadas aos operadores resultam em funções suaves de $\mathbb{T}^3$.*

Exemplo 2.2. *Dado p um número primo qualquer. O operador*

$$P = \partial_t + i\sqrt{p}\partial_x + i\partial_y$$

é Globalmente Hipoelítico. De fato, como já vimos no Exemplo 1.8, $\sqrt{p}$ é um número irracional não Liouville.

Exemplo 2.3. *O operador $P = \partial_t + i(sen(t) + 1)\partial_x + i\partial_y$ não é Globalmente Hipoelítico, pois b_1 e b_2 não são $\mathbb{R}$-linearmente dependentes.*

Exemplo 2.4. *Tomemos o operador*

$$P = \partial_t + i(sen(t))^2(\sqrt{2}\partial_x + \partial_y).$$

Tal operador é Globalmente Hipoelítico. De fato, $b_1 = \sqrt{2}b_2$ com $b_1(t) = \sqrt{2}(sen(t))^2$, e com isso temos que ambas não se anulam, não mudam de sinal, são funções definidas em $\mathbb{T}$ e claramente são $\mathbb{R}$-linearmente dependentes. Precisamos mostrar que b_{10}/b_{20} é irracional não Liouville. Note que, $b_{10} = \sqrt{2}b_{20}$, e então segue que $b_{10}/b_{20} = \sqrt{2}$.

O que o exemplo acima mostra é que se b_1 e b_2 são $\mathbb{R}$-linearmente dependentes, ou seja, $b_1 = \lambda b_2$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, então os operadores Globalmente Hipoelíticos vão ser os que λ é irracional não Liouville.

Capítulo 3

PERTURBAÇÕES DO OPERADOR

Neste capítulo queremos saber o que acontece com o operador

$$P = \partial_t + ib_1(t)\partial_x + ib_2(t)\partial_y$$

quando o perturbamos com uma constante complexa λ, no sentido da Hipoeliticidade Global. Ou seja, supondo que P é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ então vale que $L = P + \lambda$ o é também? Veremos que a resposta para o caso em que $\lambda \notin \mathbb{R}\backslash(b_{10}\mathbb{Z} + b_{20}\mathbb{Z}) + i\mathbb{Z}$ é relativamente simples. Algumas das técnicas utilizadas aqui estão presentes na referência [1], onde o autor trabalha o caso bidimensional. Vale a pena conferir a Proposição 4.1 desta referência, que nos dá indícios sobre o resultado encontrado aqui e os próximos passos que podem ser tomados em um estudo futuro. Enunciamos o resultado da seguinte forma.

Proposição 3.1. *Dadas duas funções a valores reais $b_1, b_2 \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ e $\lambda \notin \mathbb{R}\backslash(b_{10}\mathbb{Z} + b_{20}\mathbb{Z}) + i\mathbb{Z}$. Se o operador P dado por*

$$P := \partial_t + ib_1(t)\partial_x + ib_2(t)\partial_y$$

é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ então o operador $L := P + \lambda$ também é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$.

Lembramos que b_{10} e b_{20} são os 0-ésimos coeficientes de Fourier das funções b_1 e b_2, respectivamente.

Tendo isto, é possível estender ainda mais a gama de operadores que conseguimos verificar ser Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$. Garantiremos o resultado para λ não constante. Para fazer isto necessitaremos utilizar a Resolubilidade Global em $\mathbb{T}^3$ e uma certa conjugação. Veremos que vale a seguinte proposição.

Proposição 3.2. *Seja $\lambda \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ e $b_1, b_2 \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ funções a valores reais. Se o operador P dado por*

$$P := \partial_t + ib_1(t)\partial_x + ib_2(t)\partial_y$$

é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ e se $\lambda_0 \notin \mathbb{R}\backslash(b_{10}\mathbb{Z} + b_{20}\mathbb{Z}) + i\mathbb{Z}$, com

$$\lambda_0 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{T}^3} \lambda(t, x, y)dtdxdy,$$

então $L := P + \lambda(t, x, y)$ também é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$.

Observe que o conjunto $\mathbb{R}\backslash(b_{10}\mathbb{Z}+b_{20}\mathbb{Z})+i\mathbb{Z}$ tem medida nula em $\mathbb{C}$. Então, neste sentido se trata de um conjunto pequeno. Entretanto, é um conjunto denso nas retas que o contém.

3.1 Demonstração da Proposição 3.1

O caso em que $\lambda = 0$ é o da proposição anterior, então podemos supor que $\lambda := \lambda_1 + i\lambda_2 \neq 0$. Além disso, a prova segue de maneira análoga a segunda parte da Proposição 2.1 em alguns momentos. O leitor que achar alguma parte um pouco obscura pode recorrer a Proposição 2.1 para verificar as contas.

Como anteriormente, considerando todas as suposições podemos escrever o operador L na forma

$$L = \partial_t + ib_1(t)\left(\partial_x + \frac{b_{20}}{b_{10}}\partial_y\right) + \lambda,$$

onde $\beta := b_{20}/b_{10}$ é um irracional não Liouville.

Seja $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$ satisfazendo $L\mu := f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Devemos mostrar que $\mu \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Faremos isto por meio da Proposição 1.5. Utilizamos as séries parciais de Fourier com relação a x e y de μ e f para obter

$$\mu = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \hat{\mu}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}$$

e

$$f = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \hat{f}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)}.$$

Da equação $L\mu = f$, segue a família de EDO's

$$\partial_t\hat{\mu}(t,\xi,\eta) + (\lambda - (\xi+\beta\eta)b_1(t))\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = \hat{f}(t,\xi,\eta), \tag{3.1}$$

para cada par de inteiros (ξ,η). Desta vez chamaremos

$$c := (\xi+\beta\eta)b_1 - \lambda$$

e definiremos função C com domínio em $\mathbb{T}$ de forma que

$$C(t) := \int_0^t c(w)dw - c_0 t,$$

onde

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c(w)dw.$$

Pelo Apêndice B (p. 56), as soluções em $\mathbb{T}$ da família de EDO's em (3.1) são equivalentes as das equações

$$\partial_t\nu(t,\xi,\eta) - c_0\nu(t,\xi,\eta) = e^{-C(t)}\hat{f}(t,\xi,\eta), \tag{3.2}$$

mas multiplicadas por $e^{-C(t)}$. Ou seja, teremos $\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = e^{C(t)}\nu(t,\xi,\eta)$.

Assim, usando o Apêndice D (p. 58), devemos considerar os casos em que $(\xi,\eta) \in \mathbb{Z}^2$ faz com que $c_0 \in i\mathbb{Z}$ e os casos em que $c_0 \notin i\mathbb{Z}$.

Caso $c_0 \in i\mathbb{Z}$ então $\lambda_1 - b_{10}(\xi + \beta\eta) = 0$ e $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$. Entretanto, se $\lambda_2 \notin \mathbb{Z}$ então se concluí diretamente que para nenhum par de inteiros vale que $c_0 \in i\mathbb{Z}$. Se de fato vale que $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$ então vamos mostrar que só pode existir no máximo um par de inteiros em que $\lambda_1 - b_{10}(\xi + \beta\eta) = 0$. Suponhamos, por absurdo, que existam pares distintos (ξ_1,η_1) e (ξ_2,η_2) de números inteiros tais que

$$b_{10}(\xi_1 + \beta\eta_1) = \lambda_1 = b_{10}(\xi_2 + \beta\eta_2).$$

Como o par (b_{10}, b_{20}) satisfaz a condição (DC) então b_{10} não pode ser nulo (nem b_{20}). Também, pelos pares serem distintos então $\xi_1 \neq \xi_2$ ou $\eta_1 \neq \eta_2$, de tal modo que podemos supor, sem perda de generalidade, que $\eta_1 \neq \eta_2$. Resulta da igualdade acima

$$\xi_1 + \beta\eta_1 = \xi_2 + \beta\eta_2,$$

que por fim nos dá

$$\frac{\xi_1 - \xi_2}{\eta_2 - \eta_1} = \beta.$$

Mas assim $\beta \in \mathbb{Q}$, o que é um absurdo já que por suposição β é irracional, provando o que queríamos. Se existir esse par, que chamaremos de (ξ_1,η_1) de inteiros que faz com que $c_0 \in i\mathbb{Z}$ então o Apêndice D afirma que se

$$\int_0^{2\pi} e^{-\int_0^s c(w)dw}\hat{f}(s,\xi_1,\eta_1)ds = 0,$$

então uma solução para as EDO's (3.2) em $\mathbb{T}$ será

$$\nu(t,\xi_1,\eta_1) = e^{c_0 t}\int_0^t e^{-c_0 s}e^{-C(s)}\hat{f}(s,\xi_1,\eta_1)ds,$$

e consequentemente

$$\hat{\mu}(t,\xi_1,\eta_1) = e^{C(t)}\nu(t,\xi_1,\eta_1),$$

é uma solução para as EDO's em (3.1). Ainda mais, se tivermos uma outra solução para as EDO's então, pelo Apêndice C, essas soluções devem diferir por uma função exponencial. Assim, todas as soluções para as EDO's em (3.1) são suaves. Além disso, por se tratar de uma solução para o único par (ξ_1,η_1) então não precisamos considerá-la quando formos fazer as estimativas de decrescimento. Vamos provar que o exposto acima vale de fato. Sabemos que

$$(\partial_t - c_0)\nu(t,\xi_1,\eta_1) = e^{-C(t)}\hat{f}(t,\xi_1,\eta_1),$$

mas por $c_0 \in i\mathbb{Z}$ segue que essa equação é equivalente a

$$\partial_t(\nu(t,\xi_1,\eta_1)e^{-c_0 t}) = e^{-c_0 t}e^{-C(t)}\hat{f}(t,\xi_1,\eta_1).$$

Olhando do ponto de vista das distribuições obtemos, para cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{T})$, que

$$\langle \partial_t(\nu(t,\xi_1,\eta_1)e^{-c_0 t}), \phi\rangle = \langle e^{-c_0 t}e^{-C(t)}\hat{f}(t,\xi_1,\eta_1), \phi\rangle,$$

e fazendo $\phi = 1$ teremos do lado esquerdo que

$$\langle \partial_t(\nu(t,\xi_1,\eta_1)e^{-c_0 t}), 1\rangle = \langle \nu(t,\xi_1,\eta_1)e^{-c_0 t}, \partial_t 1\rangle = 0,$$

e então

$$\langle e^{-c_0 t}e^{-C(t)}\hat{f}(t,\xi_1,\eta_1), 1\rangle = 0,$$

que é o mesmo que

$$\int_0^{2\pi} e^{-c_0 s}e^{-C(s)}\hat{f}(s,\xi_1,\eta_1)ds = \int_0^{2\pi} e^{-\int_0^s c(w)dw}\hat{f}(s,\xi_1,\eta_1)ds = 0,$$

como queríamos. Com isso, o caso em que $c_0 \in i\mathbb{Z}$ está solucionado, pois encontramos que as soluções devem ser suaves, e por ser para no máximo um par de inteiros então não atrapalha nas estimativas.

Passamos a considerar agora o caso em que os pares de inteiros (ξ,η) são tais que $c_0 \notin i\mathbb{Z}$. Neste caso, o apêndice D (p. 58) afirma que as EDO's em (3.1) possuem como soluções

$$\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = \frac{1}{1-e^{2\pi c_0}}\int_0^{2\pi} e^{\int_{t-s}^t c(w)dw}\hat{f}(t-s,\xi,\eta)ds$$

ou

$$\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = \frac{1}{e^{-2\pi c_0}-1}\int_0^{2\pi} e^{\int_{t+s}^t c(w)dw}\hat{f}(t+s,\xi,\eta)ds.$$

Tais soluções pertencem a $C^\infty(\mathbb{T})$ como é fácil ver, de forma que resta apenas mostrar que a sequência $\{\hat{\mu}(t,\xi,\eta)\}_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2}$ satisfaz as condições de decrescimento para que as hipóteses da Proposição 1.5 sejam cumpridas.

Vamos verificar três casos, excluindo é claro o par (ξ,η) que faz que $b_{10}(\xi+\beta\eta) = \lambda_1$. O primeiro caso é quando os pares de inteiros (ξ,η) são tais que $b_{10}(\xi+\beta\eta) < 0$. Por conta disso, sabemos que $b_1(t)(\xi+\beta\eta) \leq 0$. Temos daí que

$$\begin{aligned} |\partial_t^\alpha\hat{\mu}(t,\xi,\eta)| &= \frac{1}{|1-e^{2\pi c_0}|}\left|\int_0^{2\pi}\sum_{j=0}^{\alpha} C_j\partial_t^j e^{\int_{t-s}^t c(w)dw}\partial_t^{\alpha-j}\hat{f}(t-s,\xi,\eta)ds\right| \\ &= \frac{1}{|1-e^{2\pi c_0}|}\left|\int_0^{2\pi} e^{-\lambda s}\sum_{j=0}^{\alpha} C_j\partial_t^j e^{\int_{t-s}^t(\xi+\beta\eta)b_1(w)dw}\partial_t^{\alpha-j}\hat{f}(t-s,\xi,\eta)ds\right| \end{aligned}$$

Observe então que

$$\partial_t^j e^{\int_{t-s}^t(\xi+\beta\eta)b_1(w)dw}$$

é o mesmo que consideramos na proposição anterior quando fizemos as derivadas da exponencial, de modo que podemos usar a mesma notação (só é necessário cuidar que a função c não é a mesma nas duas proposições) e escrever

$$\partial_t^j e^{\int_{t-s}^t(\xi+\beta\eta)b_1(w)dw} = e^{\int_{t-s}^t(\xi+\beta\eta)b_1(w)dw}\sum_{m=1}^{j} h_m(t,s)(\xi+\beta\eta)^m.$$

Além do mais, de acordo com o que estamos supondo valem as mesmas considerações feitas na proposição anterior e então podemos utilizar a mesma notação. Mais ainda, note que $e^{-\lambda s} \leq 1$ e então segue que

$$\begin{aligned}
|\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t,\xi,\eta)| &= \frac{1}{|1-e^{2\pi c_0}|}\left|\int_0^{2\pi} e^{-\lambda s}\sum_{j=0}^{\alpha} C_j \partial_t^j e^{\int_{t-s}^t (\xi+\beta\eta)b_1(w)dw} \partial_t^{\alpha-j}\hat{f}(t-s,\xi,\eta)ds\right| \\
&\leq \frac{1}{|1-e^{2\pi c_0}|}\frac{N}{(|\xi|+|\eta|)^k}
\end{aligned}$$

O segundo caso a analisar é os pares de inteiros (ξ,η) que fazem com que $(\xi+\beta\eta)b_{10} > 0$ e então $(\xi+\beta\eta)b_1(t) \geq 0$. Utilizamos neste caso a outra solução, entretanto é fácil ver que esse caso também fica semelhante ao da proposição anterior, procedendo da mesma forma que o primeiro caso. Considerando N maior se for preciso obtemos que

$$|\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t,\xi,\eta)| \leq \frac{1}{|e^{-2\pi c_0}-1|}\frac{N}{(|\xi|+|\eta|)^k},$$

para cada par de inteiros $(\xi,\eta) \neq (0,0)$.

O terceiro caso seria quando $(\xi,\eta) = (0,0)$, o qual pode ser desconsiderado, pois trata-se de apenas um par e não afeta a estimativa a não ser por uma constante.

Até aqui, o valor de λ não teve nenhuma influência relevante e a prova é quase igual ao da Proposição 2.1. Porém, é agora que o problema começa, pois necessitamos utilizar a condição (DC^*) presente no Apêndice E (p. 61). Este é então o último ponto da prova e o mais crucial.

Inicialmente, começaremos supondo que $\lambda \notin \mathbb{R} + \frac{i}{2}\mathbb{Z}$. Ou seja, teremos garantia de que o operador L é Globalmente Hipoelítico fora das retas horizontais passando pelos números imaginários em $\frac{i}{2}\mathbb{Z}$. Em seguida, supomos que $\lambda \in \mathbb{R} + i(1/2+\mathbb{Z})$, e portanto, teremos a garantia do resultado apenas fora das retas horizontais passando pelos números imaginários inteiros. Por fim, mostraremos que para alguns valores em cima destas retas restantes ainda é possível mostrar que o operador L é Globalmente Hipoelítico. Faremos a suposição de que $\lambda \in \mathbb{R}$ e que exista $(\xi_1,\eta_1) \in \mathbb{Z}^2$ de modo que $\lambda = b_{10}(\xi_1+\beta\eta_1)$, e depois estendemos para as demais retas por conta da periodicidade da exponencial. Resumindo, obteremos que o operador L é Globalmente Hipoelítico quando $\lambda \notin \mathbb{R}\backslash(b_{10}\mathbb{Z}+b_{20}\mathbb{Z}) + i\mathbb{Z}$.

Vamos supor que $\lambda \notin \mathbb{R} + \frac{i}{2}\mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned}
|1-e^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda]}| &= |1-e^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}e^{\mp 2\pi i\lambda_2}| \\
&= |1-e^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}\cos(2\pi\lambda_2) \mp ie^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}\operatorname{sen}(2\pi\lambda_2)| \\
&\geq \frac{1}{2}(|1-e^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}\cos(2\pi\lambda_2)| + |e^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}\operatorname{sen}(2\pi\lambda_2)|).
\end{aligned}$$

Agora, como $\lambda \notin \mathbb{R}+\frac{i}{2}\mathbb{Z}$ então $\lambda_2 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Desse modo $\operatorname{sen}(2\pi\lambda_2) \neq 0$ e $\cos(2\pi\lambda_2) \neq 1$. Vamos considerar os pares de inteiros (ξ,η) tais que $(\xi+\beta\eta)b_{10} < 0$. Suponhamos que $2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1] \leq -1$. Se o valor $\cos(2\pi\lambda_2)$ for negativo ou nulo então segue que

$$\begin{aligned}|1 - e^{2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda]}| &\geq \frac{1}{2}(1 + e^{2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}(-1)\cos(2\pi\lambda_2)) \\ &\geq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Se o valor de $\cos(2\pi\lambda_2)$ for positivo então note que

$$e^{2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]} \leq e^{-1},$$

daí multiplicando dos dois lados por $\cos(2\pi\lambda_2)$ temos

$$e^{2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}\cos(2\pi\lambda_2) \leq e^{-1}\cos(2\pi\lambda_2),$$

e desenvolvendo obtemos

$$1 - e^{2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}\cos(2\pi\lambda_2) \geq 1 - e^{-1}\cos(2\pi\lambda_2) > 0.$$

Se $2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1] > -1$, teremos

$$\begin{aligned}|1 - e^{2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda]}| &\geq \frac{1}{2}|e^{2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}\operatorname{sen}(2\pi\lambda_2)| \\ &> \frac{1}{2}e^{-1}|\operatorname{sen}(2\pi\lambda_2)| > 0.\end{aligned}$$

Portanto, pegando a menor destas três constantes e chamando de C_1 obtemos que

$$|1 - e^{2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda]}| \geq C_1 > 0,$$

para cada par de inteiros (ξ,η) tais que $(\xi+\beta\eta)b_{10} < 0$. Para o caso em que os pares de inteiros (ξ,η) são tais que $(\xi+\beta\eta)b_{10} > 0$ basta pegar a exponencial com o sinal de menos e desenvolver de forma idêntica. Ou seja, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$|1 - e^{-2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda]}| \geq C_2 > 0.$$

Tomando $C := \min\{C_1, C_2\}$ teremos então que

$$|\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t,\xi,\eta)| \leq \frac{N/C}{(|\xi|+|\eta|)^k},$$

para cada $t \in \mathbb{T}$ e para cada par de inteiros $(\xi,\eta) \neq (0,0)$ e também tais que $(\xi+\beta\eta)b_{10} \neq \lambda_1$. Observe que a suposição de que $\lambda_2 \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ serviu para garantir que $C > 0$, pois se $C = 0$ então temos um problema nesta última desigualdade. Isso prova que o operador L é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ quando $\lambda \notin \mathbb{R} + \frac{i}{2}\mathbb{Z}$.

Agora, vamos supor que $\lambda \in \mathbb{R} + i(1/2 + \mathbb{Z})$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned}|1 - e^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda]}| &= |1 - e^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}cos(2\pi\lambda_2) \mp ie^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}sen(2\pi\lambda_2)| \\ &= |1 + e^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}| \\ &\geq 1,\end{aligned}$$

para qualquer pares de inteiros $(\xi,\eta)\neq(0,0)$. Com isso temos provado que L é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ quando $\lambda\notin\mathbb{R}+i\mathbb{Z}$.

Como passaremos a considerar os valores de λ restantes, que estão inclusos em $\mathbb{R}+i\mathbb{Z}$, então por conta da periodicidade da exponencial complexa teremos

$$|1-e^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda]}|=|1-e^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda_1]}|.$$

Portanto, bastaria demonstrar para o caso em que λ é real e então os demais casos faltantes sairiam diretamente.

Suponha que $\lambda\in\mathbb{R}$ e que exista $(\xi_1,\eta_1)\in\mathbb{Z}^2$ de modo que $\lambda=b_{10}(\xi_1+\beta\eta_1)$. Sabemos (pelo Apêndice E) que por valer (DC^*) para o par (b_{10},b_{20}) então existem constantes $\gamma>0$ e $C>0$ de modo que

$$|1-e^{\pm 2\pi(\xi+\beta\eta)b_{10}}|\geq C(|\xi|+|\eta|)^{-\gamma},$$

para cada par de inteiros $(\xi,\eta)\neq(0,0)$. Portanto

$$\begin{aligned}|1-e^{\pm 2\pi[(\xi+\beta\eta)b_{10}-\lambda]}| &= |1-e^{\pm 2\pi((\xi-\xi_1)+\beta(\eta-\eta_1))b_{10}}|\\ &\geq C(|\xi-\xi_1|+|\eta-\eta_1|)^{-\gamma},\end{aligned}$$

para cada par de inteiros $(\xi,\eta)\neq(\xi_1,\eta_1)$. Assim, com a mesma notação dos casos anteriores, segue que

$$|\partial_t^\alpha\hat{\mu}(t,\xi,\eta)|\leq\frac{N}{C}\frac{(|\xi-\xi_1|+|\eta-\eta_1|)^\gamma}{(|\xi|+|\eta|)^k},$$

para cada par de inteiros (ξ,η) não nulo e diferente de (ξ_1,η_1). Usando a desigualdade triangular obtemos que

$$(|\xi-\xi_1|+|\eta-\eta_1|)^\gamma\leq(|\xi|+|\eta|+|\xi_1|+|\eta_1|)^\gamma.$$

Chamaremos de d o menor inteiro maior que γ para conseguirmos que

$$(|\xi-\xi_1|+|\eta-\eta_1|)^\gamma\leq(|\xi|+|\eta|+|\xi_1|+|\eta_1|)^d.$$

Do binômio de Newton segue que

$$\begin{aligned}(|\xi|+|\eta|+|\xi_1|+|\eta_1|)^d &= \sum_{j=0}^{d}\binom{d}{j}(|\xi_1|+|\eta_1|)^j(|\xi|+|\eta|)^{d-j}\\ &\leq \sum_{j=0}^{d}\binom{d}{j}(|\xi_1|+|\eta_1|)^j(|\xi|+|\eta|)^{d}.\end{aligned}$$

Fazendo

$$D:=\sum_{j=0}^{d}\binom{d}{j}(|\xi_1|+|\eta_1|)^j,$$

teremos então que

$$|\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t,\xi,\eta)| \leq \frac{ND}{C}\frac{(|\xi|+|\eta|)^d}{(|\xi|+|\eta|)^k} = \frac{\frac{ND}{C}}{(|\xi|+|\eta|)^{k-d}}.$$

Por fim, temos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ de tal maneira que $k-d > n$, e assim

$$(|\xi|+|\eta|)^{k-d} > (|\xi|+|\eta|)^n.$$

Para este k existe a constante $\dfrac{ND}{C} > 0$ (que também depende de α) de modo que

$$|\partial_t^\alpha \hat{\mu}(t,\xi,\eta)| \leq \frac{\frac{ND}{C}}{(|\xi|+|\eta|)^n}.$$

Portanto, L também é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ quando $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda = b_{10}(\xi_1 + \beta\eta_1)$ para algum $(\xi_1,\eta_1) \in \mathbb{Z}^2$, ou equivalentemente, quando $\lambda \in b_{10}\mathbb{Z} + b_{20}\mathbb{Z}$. Como comentamos anteriormente, isto se estende automaticamente para o caso $\lambda \in b_{10}\mathbb{Z} + b_{20}\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$.

Em suma, fica provado que se o operador P é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ então $P+\lambda$ também o é, se considerarmos $\lambda \notin \mathbb{R}\backslash(b_{10}\mathbb{Z} + b_{20}\mathbb{Z}) + i\mathbb{Z}$.

3.2 Exemplo de Operador Globalmente Hipoelítico

Exemplo 3.1. *Vimos no Exemplo 2.2 que um operador P na forma*

$$P = \partial_t + i\sqrt{3}\partial_x + i\partial_y,$$

é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$. De acordo com a Proposição 3.1, os operadores $L_1 = P + 5i$, $L_2 = P + 3 + (4/3)i$, $L_3 = P + (1/2) + i\sqrt{3}$ e $L_4 = P + 1$ são também operadores Globalmente Hipoelíticos em $\mathbb{T}^3$. No caso de L_4, note que

$$1 = 0 \cdot b_{10} + 1 \cdot b_{20} = 0 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 1.$$

3.3 Demonstração da Proposição 3.2

Para começar a prova necessitamos descrever o espaço $(kerP^t)^o$, pois usaremos a Resolubilidade Global em $\mathbb{T}^3$ do operador P. Todavia, faremos isso considerando as hipóteses que temos válidas para este operador. Isto é, sabendo que P é Globalmente Hipoelítico, ou equivalentemente, que valem as seguintes condições:

- b_1 e b_2 são não nulos.

- b_1 e b_2 não mudam de sinal

- b_1 e b_2 são $\mathbb{R}$-linearmente dependentes
- (b_{10}, b_{20}) satisfaz a condição (DC).

Dizer que uma função $f \in (KerP^t)^o$ é equivalente a dizer que $\langle \mu, f \rangle = 0$, para cada $\mu \in KerP^t$. Como $P^t = -P$, então o disposto acima equivale a $\langle \mu, f \rangle = 0$, para cada $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$ com $P\mu = 0$.

Usando série parcial de Fourier na distribuição periódica μ com relação as variáveis x e y obtemos que

$$\mu = \sum_{(\xi,\eta)\in\mathbb{Z}^2} \hat{\mu}(t,\xi,\eta)e^{i(\xi x+\eta y)},$$

e então por $P\mu = 0$, segue que, para cada par $(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}^2$, $\hat{\mu}(t, \xi, \eta)$ deve satisfazer a EDO

$$\partial_t \hat{\mu}(t,\xi,\eta) - (b_1(t)\xi + b_2(t)\eta)\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = 0.$$

Ainda mais, por b_1 e b_2 serem $\mathbb{R}$-linearmente dependentes, podemos escrever

$$b_2 = \frac{b_{20}}{b_{10}} b_1 := \beta b_1,$$

e então a equação se torna em

$$\partial_t \hat{\mu}(t,\xi,\eta) - b_1(t)(\xi + \eta\beta)\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = 0.$$

Se $(\xi, \eta) = (0, 0)$ então é óbvio que $\hat{\mu}(t, 0, 0) = C$ e esta é a única solução 2π-periódica para a equação. Se por outro lado $(\xi, \eta) \neq 0$, o método de separação de variáveis (ou pode ser usado o fator integrante) nos diz que a única solução da equação tem a forma

$$\hat{\mu}(t,\xi,\eta) = C_{\xi,\eta} \cdot e^{\int_0^t (\xi+\eta\beta)b_1(w)dw}.$$

Entretanto, como as soluções precisam ser 2π-periódicas então devemos ter que

$$\hat{\mu}(0,\xi,\eta) = \hat{\mu}(2\pi,\xi,\eta),$$

ou seja, deve valer que

$$C_{\xi,\eta} = C_{\xi,\eta} e^{\int_0^{2\pi} (\xi+\eta\beta)b_1(w)dw}.$$

Se fosse $C_{\xi,\eta} \neq 0$ então só poderia ser

$$\int_0^{2\pi} (\xi + \eta\beta)b_1(w)dw = 0,$$

que equivale a dizer que

$$b_{10}\xi + b_{20}\eta = 0.$$

Porém, não existe par não nulo de inteiros que satisfaça isto, já que b_{10}/b_{20} é um número irracional por hipótese e a igualdade acima equivale a

$$\frac{b_{10}}{b_{20}} = -\frac{\eta}{\xi} \in \mathbb{Q}.$$

Segue que só pode ser $C_{\xi,\eta} = 0$, para cada $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$.

Resulta de tudo isso que todos os coeficientes parciais de Fourier de μ são nulos com exceção do $(0,0)$-ésimo termo, que é constante. Segue disto tudo que

$$\mu = C.$$

Desta forma, dizer que $f \in (kerP^t)^o$ é equivalente a dizer que $\langle C, f\rangle = 0$, para cada constante C. Todavia, isso quer dizer que

$$C \int_{\mathbb{T}^3} f(t,x,y)dtdxdy = 0.$$

Podemos escrever então que

$$(kerP^t)^o = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{T}^3); \int_{\mathbb{T}^3} f(t,x,y)dtdxdy = 0 \right\}.$$

Tendo a descrição de $(kerP^t)^o$, usaremos o fato de que se P é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ então ele é Globalmente Resolúvel em $\mathbb{T}^3$ (está afirmação não será provada neste texto, mas comparando em [2] o Teorema 1.1 e o Teorema 1.3 é fácil ver que isto é verdade). Definimos daí a função complexa Λ de $C^\infty(\mathbb{T}^3)$ dada pela lei

$$\Lambda(t,x,y) = \lambda_0 - \lambda(t,x,y).$$

Observe que, do jeito que definimos esta função, temos que

$$\int_{\mathbb{T}^3} \Lambda(t,x,y)dtdxdy = 0,$$

e portanto, temos que $\Lambda \in (kerP^t)^o$. Como P é Globalmente Resolúvel segue que existe $\mu \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$ tal que $P\mu = \Lambda$. A partir disto, mostraremos que vale a conjugação

$$e^{-\mu}L(e^{\mu}\nu) = L_0\nu,$$

para cada $\nu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$, onde $L_0 = P + \lambda_0$.

Seja $\nu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$. Vale que

$$\begin{aligned}
e^{-\mu}L(e^{\mu}\nu) &= e^{-\mu}(\partial_t e^{\mu}\nu + ib_1\partial_x e^{\mu}\nu + ib_2\partial_y e^{\mu}\nu + \lambda e^{\mu}\nu) \\
&= e^{-\mu}(e^{\mu}((\partial_t\mu)\nu + \partial_t\nu) + ib_1 e^{\mu}((\partial_x\mu)\nu + \partial_x\nu) + ib_2 e^{\mu}((\partial_y\mu)\nu + \partial_y\nu) + \lambda e^{\mu}\nu)) \\
&= (\partial_t\mu)\nu + \partial_t\nu + ib_1((\partial_x\mu)\nu + \partial_x\nu) + ib_2((\partial_y\mu)\nu + \partial_y\nu) + \lambda\nu \\
&= (P\mu)\nu + \partial_t\nu + ib_1\partial_x\nu + ib_2\partial_y\nu + \lambda\nu \\
&= \Lambda\nu + \partial_t\nu + ib_1\partial_x\nu + ib_2\partial_y\nu + \lambda\nu \\
&= \partial_t\nu + ib_1\partial_x\nu + ib_2\partial_y\nu + (\lambda + \Lambda)\nu \\
&= \partial_t\nu + ib_1\partial_x\nu + ib_2\partial_y\nu + (\lambda_0)\nu \\
&= L_0\nu.
\end{aligned}$$

Temos por suposição que P é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ e $\lambda_0 \notin \mathbb{R}\backslash(b_{10}\mathbb{Z} + b_{20}\mathbb{Z}) + i\mathbb{Z}$. Pela proposição anterior vale que L_0 é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$. Tendo isto e a conjugação, vamos mostrar que L também é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$. Portanto, suponha que $L\omega := f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Precisamos demonstrar que $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Note que, por causa da conjugação e por μ estar em $C^\infty(\mathbb{T}^3)$, vale que

$$L_0(e^{-\mu}\omega) = e^{-\mu}L\omega = e^{-\mu}f \in C^\infty(\mathbb{T}^3).$$

Por L_0 ser Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ segue que $e^{-\mu}\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Entretanto, disto se segue que $\omega \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Assim, temos por fim, que L é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$, como queríamos demonstrar.

3.4 Exemplos e Resultado Final

Exemplo 3.2. *O operador*

$$L = \partial_t + i(sen(t) + 1)(\partial_x + \sqrt{3}\partial_y) + cos(t) + 2\sqrt{3}$$

é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$. De fato,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cos(t) + 2\sqrt{3}dt = 2\sqrt{3},$$

e

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sen(t) + 1dt = 1,$$

que então nos dá, segundo a notação das provas, que $b_{10} = 1$ e $b_{20} = \sqrt{3}$. Como já vimos, b_{10}/b_{20} é claramente irracional não Liouville e além disso

$$2\sqrt{3} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3}.$$

Um último resultado, simples em demonstração mas muito poderoso, nos permite obter a resposta para a Hipoeliticidade Global de operadores com ordens superiores. Claro que não nos permite obter resposta para todos os operadores de ordem mais alta, mas mesmo assim ganhamos conhecimento sobre uma vasta gama deles.

Proposição 3.3. *Se dois operadores diferenciais P_1 e P_2 são Globalmente Hipoelíticos em $\mathbb{T}^3$ então a composição $P_1 \circ P_2$ também satisfaz essa propriedade.*

Demonstração. Para mostrar que $P_1 \circ P_2$ é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$ devemos considerar $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T}^3)$ tal que

$$P_1 \circ P_2(\mu) := f \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$$

e demonstrar daí que $\mu \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$. Mas, note que $P_1(P_2(\mu)) = f$ e que P_1 é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$. Como consequência, segue que

$$P_2(\mu) := g \in C^\infty(\mathbb{T}^3).$$

Porém, P_2 também é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$, de modo que $\mu \in C^\infty(\mathbb{T}^3)$, como queríamos demonstrar.

■

Exemplo 3.3. *Evidentemente que o operador constante $P_1 = i$ é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$. É fácil ver também que $P_2 = \partial_t + i(\sqrt{3}\partial_x + \sqrt{2}\partial_y) - i$ é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$. Desse modo, vale que*

$$P_1 \circ P_2 = i\partial_t - \sqrt{3}\partial_x - \sqrt{2}\partial_y + 1,$$

é Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$.

Exemplo 3.4. *Podemos também compor um operador com ele mesmo. Tome, por exemplo, o operador*

$$P = \partial_t + i(\partial_x + \sqrt{2}\partial_y),$$

que já vimos ser Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$. Temos daí

$$P^2 = \partial_t^2 - \partial_x^2 - 2\partial_y^2 + i(\partial_t\partial_x + \partial_x\partial_t + \sqrt{2}(\partial_t\partial_y + \partial_y\partial_t)) - \sqrt{2}(\partial_x\partial_y + \partial_y\partial_x),$$

também Globalmente Hipoelítico em $\mathbb{T}^3$.

APÊNDICE

A. Derivado do Método de Laplace

Sejam $C \geq 1$ e $\delta > 0$. Vamos considerar a sequência de integrais $\{\mathscr{T}(\ell)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$, onde

$$\mathscr{T}(\ell) = \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\ell C w^2} dw.$$

Vejamos se esta sequência tem todos os termos definidos. Temos que

$$0 \leq \mathscr{T}(\ell) = |\mathscr{T}(\ell)| \leq \int_{-\delta}^{+\delta} |e^{-\ell C w^2}| dw \leq 2\delta.$$

Portanto, as integrais são finitas e a sequência limitada.

Através de uma mudança da mudança de variáveis $s = w\sqrt{C\ell}$ obtemos que

$$\mathscr{T}(\ell) = \frac{1}{\sqrt{C\ell}} \int_{-\delta\sqrt{C\ell}}^{+\delta\sqrt{C\ell}} e^{-s^2} ds.$$

Como vale que $(-\delta, \delta) \subset (-\delta\sqrt{C\ell}, +\delta\sqrt{C\ell})$, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, segue que

$$\frac{1}{\sqrt{C\ell}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-s^2} ds \leq \mathscr{T}(\ell).$$

Chamando

$$C_\delta := \frac{1}{\sqrt{C}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-s^2} ds,$$

temos por fim que

$$\frac{C_\delta}{\sqrt{\ell}} \leq \mathscr{T}(\ell).$$

Observe que C_δ só depende da constante C e de δ.

B. Equivalência de Equações

Proposição 1. *Sejam c e f funções suaves e 2π-periódicas, e, C uma função real definida na reta por*

$$C(t) := \int_0^t c(w)dw - c_0 t,$$

com

$$c_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(w)dw.$$

As equações diferenciais

$$\partial_t \mu(t) - c(t)\mu(t) = f(t)$$

e

$$\partial_t \nu(t) - c_0 \nu(t) = e^{-C(t)} f(t)$$

possuem as mesmas soluções 2π-periódicas à menos de uma função exponencial composta. Isto significa que, se $\mu(t)$ for uma solução 2π-periódica da primeira equação então $\nu(t) = e^{-C(t)}\nu(t)$ será solução 2π-periódica da segunda, e, se $\nu(t)$ for solução 2π-periódica da segunda equação então $\mu(t) = e^{C(t)}\nu(t)$ será solução 2π-periódica da primeira.

Demonstração. Vamos supor que μ seja uma solução 2π-periódica da primeira equação. Vamos mostrar que $\nu(\cdot) = e^{-C(\cdot)}\mu(\cdot)$ é uma solução 2π-periódica da segunda equação.

Como C é 2π-periódica então segue diretamente a periodicidade de ν. Vale então que

$$\begin{aligned}
\partial_t \nu(t) - c_0 \nu(t) &= \partial_t (e^{-C(t)}\mu(t)) - c_0 e^{-C(t)}\mu(t) \\
&= -e^{-C(t)}\mu(t)\partial_t C(t) + e^{-C(t)}\partial_t \mu(t) - c_0 e^{-C(t)}\mu(t) \\
&= e^{-C(t)}(\mu(t)(c_0 - c(t)) + \partial_t \mu(t) - c_0 \mu(t)) \\
&= e^{-C(t)}(\partial_t \mu(t) - \mu(t)c(t)) \\
&= e^{-C(t)} f(t),
\end{aligned}$$

onde a última igualdade vêm do fato de μ satisfazer a primeira equação. Consequentemente, ν satisfaz a segunda equação.

Suponhamos agora que ν é 2π-periódica e satisfaz a segunda equação. Mostraremos que $\mu(\cdot) = e^{C(\cdot)}\nu(\cdot)$ satisfaz a primeira equação (como a primeira, é óbvio a periodicidade). Temos que

$$\begin{aligned}
\partial_t \mu(t) - c(t)\mu(t) &= \partial_t (e^{C(t)}\nu(t)) - c(t)e^{C(t)}\nu(t) \\
&= e^{C(t)}((c(t) - c_0)\nu(t) + \partial_t \nu(t) - c(t)\nu(t)) \\
&= e^{C(t)}(\partial_t \nu(t) - c_0 \nu(t)) \\
&= e^{C(t)} e^{-C(t)} f(t) \\
&= f(t),
\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade vêm do fato de ν ser solução da segunda equação. Segue que μ é uma solução da primeira equação.

■

C. Soluções da EDO Homogênea

Proposição 2. *A equação diferencial ordinária de primeira ordem*

$$\partial_t \mu(t) + c\mu(t) = 0,$$

onde $c \in \mathbb{C}$, admite solução 2π-periódica não trivial se, e somente se, $c \in i\mathbb{Z}$. Caso seja válido, já sabemos que suas soluções devem ser da forma

$$\mu(t) = Ke^{-ct},$$

onde $K \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Se μ é uma solução 2π-periódica da EDO então deve ser da forma

$$\mu(t) = Ke^{-ct},$$

onde $K \in \mathbb{C}$, e além disso deve valer que

$$\mu(t) = \mu(t + 2\pi).$$

Deste modo, teremos que

$$Ce^{-c(t+2\pi)} = Ce^{-ct},$$

para cada $C \in \mathbb{C}$. No caso particular em que $C = 1$ obtemos

$$e^{-2c\pi} = 1,$$

que implica em $2c\pi = 2j\pi i$, para algum $j \in \mathbb{Z}$. Assim, vale que $c \in i\mathbb{Z}$.

Reciprocamente, se $c \in i\mathbb{Z}$ então basta fazer a volta do processo que realizamos, para garantir a periodicidade da solução. A existência de soluções já é garantida para qualquer constante. Segue o resultado.

∎

D. Soluções da EDO Não Homogênea

A fim de avançar para o resultado que queremos será necessário expor algumas definições e proposições que se tornarão essenciais na prova deste.

Definição 1. *Sejam $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ e $f \in C^\infty(\mathbb{T})$. Defini-se a convolução de μ por f como sendo a função $\mu * f$ definida na reta, com valores complexos, tal que*

$$(\mu * f)(t) = \langle \mu(s), f(t-s) \rangle$$

Proposição 3. *Seja f uma função 2π-periódica, seccionalmente contínua com derivada $\partial_t f(t)$ também seccionalmente contínua. Se x_0 é um ponto de descontinuidade em $(0, 2\pi]$ então a derivada de f no sentido de distribuições é dada por*

$$f' := \partial_t f + (f(x_0^+) - f(x_0^-))\delta_{x_0},$$

onde δ_{x_0} é distribuição de Dirac em x_0.

Definição 2. *Diz-se que $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{T})$ é uma solução fundamental para um operador diferencial P se esta satisfaz a equação*

$$P\mu = \delta.$$

Proposição 4. *Se μ é uma solução fundamental para um operador P e $g \in C^\infty(\mathbb{T})$, então a função definida por*

$$f := \mu * g$$

é uma solução da equação $P\omega = g$.

Proposição 5. *Se $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ então*

$$\int_0^{2\pi} f(s)ds = \int_t^{t+2\pi} f(s)ds,$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Proposição 6. *Considere a equação diferencial*

$$\partial_t \mu(t) + c\mu(t) = f(t),$$

onde $c \in \mathbb{C}$ e $f \in C^\infty(\mathbb{T})$.

Se $c \notin i\mathbb{Z}$, então a equação possui uma única solução 2π-periódica que podem ser escritas das formas equivalentes:

$$\mu(t) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi c}} \int_0^{2\pi} e^{-cs} f(t-s)ds,$$

ou

$$\mu(t) = \frac{1}{e^{2\pi c} - 1} \int_0^{2\pi} e^{cs} f(t+s)ds.$$

Se, por outro lado, valer que $c \in i\mathbb{Z}$ e

$$\int_0^{2\pi} e^{cs} f(s)ds = 0,$$

então

$$\mu(t) = e^{-ct} \int_0^t e^{cs} f(s)ds$$

será uma solução para a equação.

Demonstração. Vamos começar supondo que $c \notin i\mathbb{Z}$. Neste caso, para encontrar as soluções, tentaremos obter uma solução fundamental Λ do operador $\partial_t + c$. Sabemos que as soluções da equação homogênea são da forma $\mu(t) = Ke^{-ct}$, porém não temos garantida a periodicidade. Portanto, consideramos uma função ν definida em $[0, 2\pi)$ e dada por $\nu(t) = e^{-ct}$, e, estendemos ela periodicamente colocando $\nu(t) = \nu(t + 2\pi)$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Note que esta função é localmente integrável e define então uma distribuição. Como a função é seccionalmente contínua com derivada seccionalmente contínua então a derivada da distribuição ν é a distribuição

$$\nu' = -ce^{-ct} + [1 - e^{-2\pi c}]\delta,$$

onde δ é a distribuição delta de Dirac. Temos então que

$$(\partial_t + c)\nu = -ce^{-ct} + [1 - e^{-2\pi c}]\delta + ce^{-ct} = [1 - e^{-2\pi c}]\delta.$$

Assim,

$$\Lambda = \frac{\nu}{1 - e^{-2\pi c}}$$

é uma solução fundamental do operador $\partial_t + c$. Segue que

$$\mu = \Lambda * f$$

é a solução que buscamos para a EDO.

Abrindo essa convolução obtemos

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \Lambda * f(t) \\ &= \left\langle \frac{\nu(s)}{1 - e^{-2\pi c}}, f(t-s) \right\rangle \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi c}} \int_0^{2\pi} e^{-cs} f(t-s) ds. \end{aligned}$$

Observe que esta função é 2π-periódica como consequência de f ser. Encontramos, portanto, uma solução 2π-periódica (e suave) para a EDO mas precisamos mostrar ainda a unicidade da solução e também a sua forma equivalente. Vamos começar mostrando a outra forma que essa solução pode ter. Façamos a substituição $w = 2\pi - s$ e a periodicidade de f para obter

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi c}} \int_0^{2\pi} e^{-cs} f(t-s) ds \\ &= \frac{-1}{1 - e^{-2\pi c}} \int_{2\pi}^{0} e^{-c(2\pi - w)} f(t + w - 2\pi) dw \\ &= \frac{e^{-2\pi c}}{1 - e^{-2\pi c}} \int_0^{2\pi} e^{cw} f(t+w) dw \\ &= \frac{1}{e^{2\pi c} - 1} \int_0^{2\pi} e^{cw} f(t+w) dw. \end{aligned}$$

Agora, para mostrar a unicidade vamos supor que μ_1 e μ_2 sejam ambos soluções da EDO. Colocando $\mu := \mu_1 - \mu_2$ obtemos que

$$\partial_t \mu + c\mu = 0.$$

Usando o resultado do apêndice anterior, segue pelo fato de $c \notin i\mathbb{Z}$ que $\mu = 0$, que então nos dá $\mu_1 = \mu_2$. Deste modo, a primeira parte do lema fica demonstrada.

Por fim, suponhamos que $c \in i\mathbb{Z}$ e que vale

$$\int_0^{2\pi} e^{cs} f(s)ds = 0.$$

Usando fator integrante teremos que

$$\begin{aligned} & \partial_t \mu(t) + c\mu(t) = f(t) \\ \iff \quad & e^{ct}(\partial_t \mu(t)) + ce^{ct}\mu(t) = e^{ct} f(t) \\ \iff \quad & \partial_t(\mu(t)e^{ct}) = e^{ct} f(t). \end{aligned}$$

Integrando em ambos os lados e dividindo a exponencial obtemos

$$\mu(t) = e^{-ct} \int_0^t e^{cs} f(s)ds.$$

Entretanto, ainda precisamos demonstrar que esta solução é 2π-periódica. Para isso é necessário que valha que $\mu(t) = \mu(t + 2\pi)$, para cada $t \in \mathbb{R}$. Ou seja, deve valer que

$$e^{-ct} \int_0^t e^{cs} f(s)ds = e^{-c(t+2\pi)} \int_0^{t+2\pi} e^{cs} f(s)ds.$$

Como $c \in i\mathbb{Z}$ então $e^{-ct-2\pi c} = e^{-ct}$, de modo que a igualdade acima equivale a

$$\int_t^{t+2\pi} e^{cs} f(s)ds = 0.$$

Por $c \in i\mathbb{Z}$ vale também que $f(\cdot)e^{-c(\cdot)}$ é 2π-periódica, que faz com que a igualdade acima seja então equivalente a

$$\int_0^{2\pi} e^{cs} f(s)ds = 0.$$

Assim, se segue o desejado.

■

E. Condição (DC^*)

Proposição 7. *Se vale a condição (DC) sobre um par de números reais (x, y) então vale a condição que chamaremos de (DC^*): existem constantes $C > 0$ e $\gamma > 0$ tais que*

$$|1 - e^{\pm 2\pi(\xi x + \eta y)}| \geq (|\xi| + |\eta|)^{-\gamma},$$

para cada par de inteiros $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$.

Demonstração. Primeiramente, provaremos que vale o seguinte:

- $|1 - e^s| \geq e^{-1}|s|$, se $s > -1$;

- $|1 - e^s| \geq e^{-1}$, se $s \leq -1$.

Para provar o primeiro item podemos utilizar o Teorema do Valor Médio (TVM). Pelo TVM, considerando $s > 0$ e o intervalo $(1, 1 + s)$, temos

$$e^{1+s} - e = e^c s = e^c |s|,$$

onde $c \in (1, 1 + s)$. Como $c > 0$ então segue que

$$|e - e^{1+s}| = e^{1+s} - e \geq |s|.$$

Se considerarmos $-1 < s < 0$ e o intervalo $(1 + s, 1)$ teremos, novamente pelo TVM, que

$$e - e^{1+s} = e^c(-s) = e^c |s|,$$

onde $c \in (1 + s, 1)$. Por $c > 0$ segue que

$$|e - e^{1+s}| = e - e^{1+s} \geq |s|.$$

Se $s = 0$ a desigualdade é óbvia. Portanto, obtemos que

$$|1 - e^s| \geq e^{-1}|s|,$$

se for $s > -1$.

O segundo item pode ser mostrado facilmente notando que se $s \leq -1$ então

$$e^s \leq e^{-1}$$

e daí

$$|1 - e^s| = 1 - e^s \geq 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} \geq e^{-1}.$$

Terminando a demonstração desta primeira parte.

Suponhamos que vale a condição (DC) sobre o par de números reais (x, y). Consequentemente, existem constantes $K > 0$ e $\gamma > 0$ tais que

$$|\tau + i(\xi x + \eta y)| \geq K(|\tau| + |\xi| + |\eta|)^{-\gamma},$$

para cada terna $(\tau, \xi, \eta) \neq (0, 0, 0)$ de inteiros. Fazendo $\tau = 0$ obtem-se

$$|\xi x + \eta y| \geq K(|\xi| + |\eta|)^{-\gamma},$$

para cada par $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ de inteiros. Dessa forma, usando a primeira parte temos que se $2\pi(\xi x + \eta y) > -1$ então

$$\begin{aligned} |1 - e^{2\pi(\xi x + \eta y)}| &\geq e^{-1} 2\pi |\xi x + \eta y| \\ &\geq K e^{-1} 2\pi (|\xi| + |\eta|)^{-\gamma}, \end{aligned}$$

desde que $(\xi,\eta) \neq (0,0)$, e se $2\pi(\xi x + \eta y) \leq -1$ temos

$$\begin{aligned} |1 - e^{2\pi(\xi x+\eta y)}| &\geq e^{-1} \\ &\geq e^{-1}(|\xi| + |\eta|)^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Tomando $C := \min\{Ke^{-1}2\pi, e^{-1}\}$ concluímos que

$$|1 - e^{2\pi(\xi x+\eta y)}| \geq C(|\xi| + |\eta|)^{-\gamma},$$

para cada par de inteiros $(\xi,\eta) \neq (0,0)$.

Note que a primeira parte da prova é equivalente a:

- $|1 - e^{-s}| \geq e^{-1}|s|$, se $s < 1$;
- $|1 - e^{-s}| \geq e^{-1}$, se $s \geq 1$.

Pode-se usar os mesmos procedimentos para mostrar que vale também

$$|1 - e^{-2\pi(\xi x+\eta y)}| \geq C(|\xi| + |\eta|)^{-\gamma},$$

para cada par de inteiros $(\xi,\eta) \neq (0,0)$.

Em suma, temos que existem $C > 0$ e $\gamma > 0$ tais que

$$|1 - e^{\pm 2\pi(\xi x+\eta y)}| \geq C(|\xi| + |\eta|)^{-\gamma},$$

para cada par de inteiros $(\xi,\eta) \neq (0,0)$.

■

REFERÊNCIAS

[1] BERGAMASCO, A. P. Pertubations of globally hypoelliptic operators. *Journal of Differential Equations*, v. 114, n. 1, p. 513–526, 1994.

[2] BERGAMASCO, A. P.; SILVA, P. L. D. D.; GONZALEZ, R. B.; KIRILOV, A. Global solvability and global hypoellipticity for a class of complex vector fields on the 3-torus. *Pseudo-Differ. Oper. Appl.*, v. 6, n. 1, p. 341–360, 2015.

[3] BRAGA, C. L. R. *Notas de física-matemática: equações diferenciais, funções de green e distribuições*. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[4] BRUIJIN, N. G. *Asymptotic methods in analysis*. New York: Dover, 1981.

[5] FOLLAND, G. B. *Real analysis: modern techniques and their applications*. New York: Wiley, 1999.

[6] GREENFIELD, S.; WALLACH, N. Global hypoellipticity and liouville numbers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 252, n. 1, p. 112–114, 1972.

[7] HOUNIE, J. Global hypoelliptic and globally solvable first order evolution equations. *Trans. Am. Math. Soc.*, v. 252, n. 1, p. 233–248, 1979.

[8] KIRILOV, A. *Algumas observações sobre a hipoeliticidade global no toro n-dimensional*. 1996. Dissertação (Mestrado em Matemática) - UFSCar, São Carlos, 1996.

[9] LAFETA, A. C.; SILVA, E.; LELIS, J. *Teoria dos números transcendentes: do teorema de liouville à conjectura de schanuel*. Rio de Janeiro: Bienal da Matemática, 2017.

[10] LIMA, E. L. *Curso de análise vol.1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[11] MUNKRES, J. *Topology*. New York: Pearson, 2014.

[12] NIVEN, I. M. *Números: racionais e irracionais*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[13] RENARDY, M.; ROGERS, R. C. *An introduction to partial differential equations*. New York: Springer, 2004.

[14] RIBENBOIM, P. *My numbers, my friends: Popular lectures on number theory*. New York: Springer, 2000.

[15] TAKAHASHI, L. T. *Hipoeliticidade global de certas classes de operadores diferenciais parciais.* 1995. Dissertação (Mestrado em Matemática) - UFSCar, São Carlos, 1995.

[16] ZANI, S. L. *Hipoeliticidade global para operadores de segunda ordem.* 1988. Dissertação (Mestrado em Matemática) - USP, São Carlos, 1988.