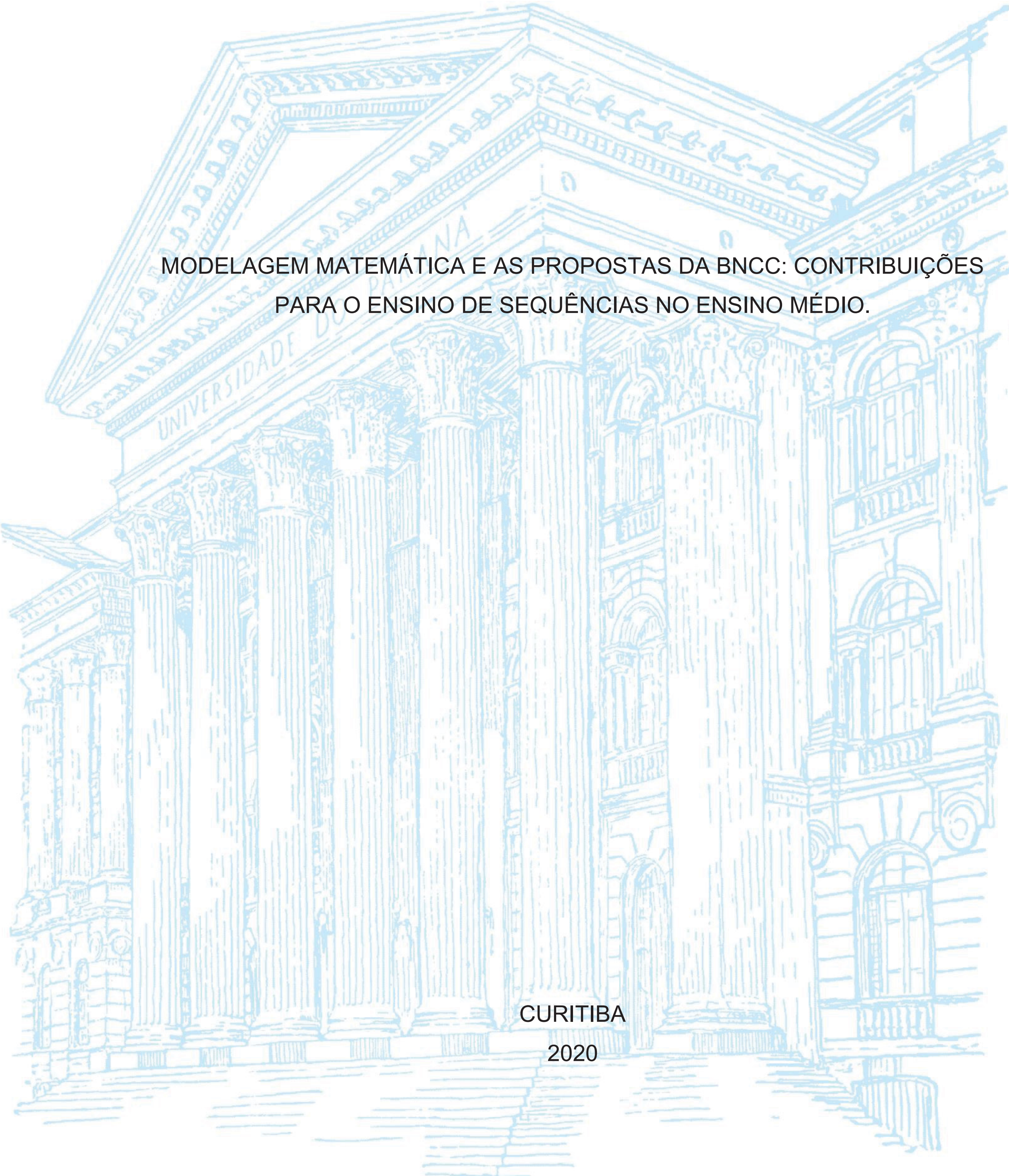
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JHEFRENDY MORAIS DA CUNHA



MODELAGEM MATEMÁTICA E AS PROPOSTAS DA BNCC: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE SEQUÊNCIAS NO ENSINO MÉDIO.

CURITIBA

2020

JHEFRENDY MORAIS DA CUNHA

MODELAGEM MATEMÁTICA E AS PROPOSTAS DA BNCC: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE SEQUÊNCIAS NO ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, da Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Prof(a). Dr(a) Adriana Luiza Prado.

CURITIBA

2020

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

C972m Cunha, Jhefrendy Morais da
Modelagem matemática e as propostas da BNCC: contribuições para o ensino de sequências no ensino médio [recurso eletrônico] / Jhefrendy Morais da Cunha. – Curitiba, 2020.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2020.

Orientadora: Adriana Luiza Prado.

1. Base Nacional Comum Curricular. 2. Séries aritméticas. 3. Séries geométricas.
4. Matemática (Ensino médio). I. Universidade Federal do Paraná. II. Prado, Adriana Luiza. III. Título.

CDD: 510

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **JHEFRENDY MORAIS DA CUNHA** intitulada: **MODELAGEM MATEMÁTICA E AS PROPOSTAS DA BNCC: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE SEQUÊNCIAS NO ENSINO MÉDIO** , sob orientação da Profa. Dra. ADRIANA LUIZA DO PRADO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 21 de Outubro de 2020.

Assinatura Eletrônica
22/10/2020 21:00:16.0
ADRIANA LUIZA DO PRADO
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
23/10/2020 14:09:35.0
ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
22/10/2020 13:05:10.0
WILLIAN RIBEIRO VALENCIA DA SILVA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE COIMBRA - PORTUGAL)

Dedico esta dissertação à minha esposa e filhos, por me incentivarem e acreditarem no meu potencial, pois sem o apoio deles não seria possível atingir esse objetivo. E também, aos meus professores que compartilharam seus conhecimentos e experiências durante o curso.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço a Deus por me conduzir durante cada etapa do mestrado. Desde a preparação para o exame de acesso até a última letra escrita neste trabalho Ele foi importante, pois nos momentos de dificuldades busquei forças em suas palavras e encontrei a paz e a confiança que precisava para concluir o curso.

Agradeço à minha esposa, Edilene S. Morais, por ter me dado todo o suporte e apoio necessário para a realização desse curso. Seu companheirismo e cuidado proporcionaram as condições ideais para prosseguir e não desistir.

Agradeço aos meus filhos, Helena S. Morais e Neemias S. Morais, vocês são a razão do meu esforço, porque, embora a conclusão do curso me traga satisfação profissional, é pensando em vocês que encontro um significado para as decisões que preciso tomar. Obrigado por compreenderem os motivos pelos quais precisei me ausentar de algumas atividades.

Agradeço aos meus pais, Manuel F. da Cunha e Maria A. V. de Morais, que em meio a tantos problemas não deixaram de acreditar e me incentivar. Se agora posso experimentar a alegria dessa conquista é porque vocês acreditaram em mim.

Quero agradecer ainda a todos os meus colegas de curso pelo companheirismo e incentivo mútuo, de algum modo vocês fazem parte disso. Particularmente, agradeço meu amigo Plínio H. S. Alves, que foi companheiro de estudos em diversos momentos.

Agradeço aos amigos da família que de algum modo contribuíram para este trabalho, em especial à Francieli C. A. Antunes, que sugeriu alguns rumos para a pesquisa.

Também sou grato a todos os professores do curso por compartilharem seus conhecimentos e se comprometerem com este projeto. Em especial à minha orientadora, Adriana Luiza Prado, que foi paciente e compreensiva durante a escrita deste trabalho.

Agradeço aos membros da banca por dedicarem o seu precioso tempo para analisar a escrita desta dissertação, sugerir melhorias e participarem da comunicação dos resultados e conclusões obtidas junto à comunidade acadêmica.

No mais, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a produção desta dissertação.

“Suba o primeiro degrau com fé. Não é necessário que você veja toda a escada. Apenas dê o primeiro passo.”

(Martin Luther King)

RESUMO

No cenário da educação brasileira, as novas orientações propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Básico indicam a necessidade de assegurar o desenvolvimento de competências nos alunos. Em vista disso, entende-se que as etapas incorporadas em atividades de Modelagem Matemática como estratégia metodológica podem, no âmbito das aprendizagens, justificar a sua utilização em sala de aula. Por isso, neste trabalho se propõem analisar algumas dissertações que empregam o uso de Modelagem Matemática no ensino de progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG), e verificar se a maneira como as atividades foram encaminhadas colaboram para o desenvolvimento dos objetivos previstos na BNCC. Sendo assim, buscaram-se, nos textos de Bassanezi, Biembengut, Burak, entre outros, argumentos que justificassem a utilização da Modelagem Matemática como ferramenta alinhada com a BNCC. Além disso, elencamos os processos, as expectativas e os desafios do ensino com Modelagem Matemática, a fim de incentivar os professores a conhecerem e até mesmo a incorporarem em sua prática docente. Esta dissertação, portanto, se caracteriza como uma pesquisa bibliográfica de caráter qualitativo; além de subsidiar as discussões anteriores, fomentou um olhar sobre como o ensino de PA e PG, ao longo de dez anos, é tratado no cerne da Modelagem Matemática. O mapeamento ainda identificou, entre outros, que existem dificuldades relacionadas à compreensão e aplicação da estratégia nas aulas de matemática, sendo comum associá-la a resolução de problemas. Pretendendo contribuir com o tema, foram propostas duas atividades, uma voltada à aquisição da casa própria e outra relacionada ao crescimento de cianobactérias e lemnas em ambientes aquáticos. Com isso, se espera provocar a reflexão sobre temas relevantes ao cotidiano e relacioná-los ao ensino de matemática, utilizando como meio estratégias que refletem as novas tendências educacionais.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Base Nacional Comum Curricular, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica.

ABSTRACT

In Brazilian educational system, new orientations presented by the Base Nacional Comum Curricular (BNCC) for Basic Education indicate how important it is to ensure the development of student's skills. Therefore, we understand the stages included in Mathematical Modeling activities as methodological approaches may, in the learning field, justify its application in classes. Thus, this work aims to analyze some dissertations which apply Mathematical Modeling on teaching Arithmetic Progression and Geometric Progression, and to check whether the way activities have been conducted collaborate to the development of the main goals proposed on BNCC. Therefore, based on Bassanezi, Biembengut, Burak, among others, we present points that justify the use of Mathematical Modeling as a teaching tool aligned with BNCC. Furthermore, we relate the process, expectations and challenges of Mathematical Modeling in order to encourage its knowledge and use by teachers in their classes. The present dissertation, therefore, is characterized as a bibliographic and qualitative research; besides assisting the previous discussion, it fosters a view over how PA and PG teaching, over ten years, has been approached at the core of Mathematical Modeling. The mapping identifies, among others, the existence of some difficulties associated with comprehension and application of strategies in Math classes, often related to solving problems. In order to contribute to the subject, two activities were proposed, one of them regards home ownership and another one related to the growth of cianobacterias and lemnas in aquatic environments. Hence, we expect to promote reflections about the significant subjects on a daily basis and relate them to Math teaching by using strategies which reflect new educational trends.

Keywords: Mathematical Modeling, Base Nacional Comum Curricular, Arithmetic Progression, Geometric Progression.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

DCN - Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica

LDB - Lei de Diretrizes e Bases

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PNE - Plano Nacional de Educação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com a homologação no Brasil, em 2017, da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Fundamental e, no ano seguinte, a do Ensino Médio, foram definidos e esclarecidos o conjunto de conhecimentos os quais estudantes devem dispor ao término da educação básica. Em suma, com o documento espera-se que os conhecimentos escolares estejam adequadamente orientados para assegurar o desenvolvimento de competências e habilidades nos alunos.

A partir desse fato, é de se esperar que as estratégias adotadas pelos professores em sala de aula valorizem metodologias capazes de atender aos objetivos propostos nesse documento.

De acordo com os autores citados nesse trabalho, entre as diversas estratégias associadas ao ensino, a Modelagem Matemática tem se mostrado uma excelente alternativa educacional, pois, além de valorizar as experiências do cotidiano dos alunos, possibilita que os conhecimentos do currículo da matemática sejam trabalhados ao mesmo tempo em que se desenvolvem atividades para obtenção de um modelo que descreva a situação problema investigada.

Essas características têm motivado alguns autores a construírem propostas que atualmente podem ser utilizadas por professores de matemática interessados em diversificar as suas aulas, e com isso tornar relevante e significativo os conhecimentos matemáticos na vida dos alunos.

Com base nesses aspectos é que chegamos à escolha desse tema. Ele resulta do interesse em investigar se as propostas de Modelagem Matemática para o ensino de progressões aritméticas e geométricas, já feitas em dissertações de mestrado, atendem aos novos encaminhamentos elencados na BNCC.

Para tanto, buscou-se argumentos de diversos autores que justificassem a utilização da Modelagem Matemática como estratégia alinhada aos objetivos da BNCC. Ainda, analisou-se como são desenvolvidas as atividades de Modelagem Matemática em sala de aula, observando o papel do professor e dos alunos em cada etapa do processo de obtenção do modelo. Por fim, realizou-se um levantamento e análise das dissertações que tratavam sobre as sequências PA e PG e cujos autores manifestavam o interesse em propor atividades ou exemplos de aplicações da Modelagem Matemática como ferramenta associada ao ensino.

Por isso, para chegar neste ponto, em cada capítulo da pesquisa foi preciso discorrer sobre outras questões secundárias, as quais foram organizadas de modo que se reunissem elementos capazes de concorrer ao objetivo da pesquisa. Essas questões representam os objetivos específicos e estão incluídas no desenvolvimento do trabalho.

Assim sendo, traçou-se no primeiro capítulo um panorama histórico do ensino com Modelagem Matemática, tomando como referência os precursores brasileiros e suas contribuições para difundir os estudos nessa área. Ainda na investigação histórica, os desdobramentos dessa temática foram observados em alguns documentos que regiam a educação e outros que a regem atualmente, ou seja, a BNCC. E ainda, a partir de algumas argumentações de autores que defendem a utilização dessa ferramenta metodológica para o ensino da matemática, verificou-se como cada etapa do processo proposto nas atividades pode contribuir para atingir os objetivos previstos na BNCC.

Na sequência, discorreu-se sobre os procedimentos adotados para atividades de Modelagem Matemática na perspectiva de Almeida, Silva e Vertuan (2016), traçando um comparativo entre as etapas empregadas por outros autores, como Bassanezi (2006) e Biembengut (2004).

No capítulo seguinte, observaram-se os desafios que acompanham professores, alunos e escola para incorporar as atividades de Modelagem Matemática nas aulas. Além disso, se explorou algumas propostas de intervenção como possíveis soluções para enfrentar ou minimizar os efeitos provocados pela aplicação dessa abordagem em sala de aula.

Por fim, no último capítulo, realizou-se um levantamento de dissertações que tratam o ensino de sequências utilizando como estratégia a Modelagem Matemática. Com isso, identificaram-se quatro pesquisas que trazem a intenção de conduzir seus estudos nessa perspectiva.

Ainda nele, foram sugeridas duas propostas baseadas no ensino de progressões aritméticas e geométricas utilizando-se a Modelagem Matemática. Na primeira estratégia, o assunto é desenvolvido a partir da simulação de um financiamento para compra da casa própria e na segunda estratégia, o estudo ocorre pela análise do desenvolvimento de cianobactérias e lemnas em um ambiente aquático.

Com todas as informações apresentadas e exploradas nessa pesquisa, acredita-se que de algum modo, produziu-se embasamento científico para o ensino da matemática por meio da Modelagem. Além disso, entende-se que os processos aqui expostos podem contribuir para que os professores cumpram os encaminhamentos contidos na BNCC, principalmente em relação ao assunto de PA e PG.

2 DA MATEMÁTICA À MODELAGEM: UM OLHAR SOBRE AS ORIGENS E DOCUMENTOS EDUCACIONAIS

É fundamental entendermos que a Modelagem Matemática empregada na educação não teve sua raiz no ensino. Antes disso, é resultado da incorporação de processos da matemática aplicada como método para investigação e solução de problemas de interesse e relevância social no ensino de matemática.

Isso ocorreu quando alguns autores entenderam que era necessário aproximar a matemática estudada nas escolas à realidade dos alunos, por isso, apegaram-se a essas ideias e sistematizaram uma metodologia direcionada à educação.

Assim sendo, observando esses princípios e procedimentos da matemática aplicada, apresentou-se algumas compreensões das bases que teceram o caminho para a aplicação da Modelagem Matemática no ensino de matemática. Além disso, investigou-se como se deram essas aplicações nos documentos que orientaram ou ainda orientam as práticas educacionais na educação brasileira.

2.1 RAÍZES HISTÓRICAS DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO BRASIL

O conhecimento e suas aplicações vêm proporcionando um aperfeiçoamento na maneira como a humanidade lida com suas necessidades cotidianas. Este conhecimento ao longo do tempo sofreu avanços significativos em diversas áreas, pois anteriormente era construído a partir das vivências empíricas do indivíduo e atualmente é desenvolvido pelo método científico, que proporciona a sistematização de ideias, a organização e a análise dos resultados encontrados por meio de experimentos observáveis. Ou seja, saímos do saber do senso comum e adentramos ao conhecimento científico.

A construção desse conhecimento surgiu da necessidade de compreender os fenômenos e beneficiar-se deles nas atividades diárias. Essa motivação impulsionou o ser humano a realizar um conjunto de ações planejadas de pesquisa. Em meio a esses processos, situações puderam ser quantificadas, lógicas e deduções sistematizadas, representação de formas observadas na natureza passaram a fazer parte de construções etc., isto é, o conhecimento matemático passou a ser inserido diretamente nessas ações da humanidade.

> Seja em prol da sobrevivência, conforto e segurança, seja na tentativa de decifrar o desconhecido, o ser humano, por toda a sua trajetória, vem, a cada dia que passa, criando novas técnicas, novas economias, novas formas de representar alguma coisa. Essa capacidade de modelar uma coisa imaginada é que impulsionou e impulsiona o ser humano a criações cada vez mais avançadas. (BIEMBENGUT, 2004, p. 15).

Sendo assim, a criação de modelos para representar ou ilustrar algo imaginado e suas características, auxiliou a compreensão de questões relacionadas aos fenômenos naturais presentes na biologia, química, física, produção agrícola, dentre outras. Para Almeida, Silva e Vertuan (2016) uma das maneiras pela qual a matemática explica, representa e aproxima situações não matemáticas do cotidiano é a partir de modelos matemáticos.

Reconhecendo que o conhecimento matemático tornou-se fundamental para os avanços científico-tecnológicos presentes na sociedade contemporânea, alguns pesquisadores acreditam que o ensino da matemática precisa aproveitar os conhecimentos contidos no processo de obtenção dos modelos matemáticos, e aplicá-los por meio de metodologias que valorizem a experiência de vida e que estimulem os alunos ao pensamento crítico, inovador e criativo. Desse modo, esperava-se com isso desenvolver nos alunos algumas características e habilidades necessárias para superar os desafios de uma sociedade em constantes transformações.

Para Bassanezi (2006, p. 16), "A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". O processo de pesquisa necessário para determinação de modelos matemáticos em aplicações de situações específicas de um fenômeno está inserido no campo de estudos da Matemática Aplicada. Essa área desenvolveu procedimentos importantes para encontrar modelos matemáticos confiáveis.

Esses procedimentos foram necessários, pois situações reais baseadas no senso comum e sem postura crítica são desprovidas de linguagem própria para racionalizar e validar os pensamentos. E como destaca Bassanezi (2006), a matemática permite extrair a parte essencial da situação problema, e o faz por meio de uma linguagem que formaliza o pensamento e atua como instrumento sintetizador de ideias e variáveis.

Ainda na perspectiva desses procedimentos, iniciou-se em meados de 1960 um movimento educacional internacional chamado de “utilitarista”, com olhar mais voltado às aplicações na Educação Matemática, sendo caracterizado pelas aplicações práticas dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade. Esse movimento despertou o debate sobre como sugerir aplicações úteis ao ensino da matemática privilegiando as habilidades de matematização e modelagem em detrimento de métodos estanques. (BIEMBENGUT, 2009)

Inspirados nessas discussões, no Brasil, alguns professores de programas da pós-graduação, tais como: Aristides Camargos Barreto e Rodney Carlos Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sabastini, fomentaram a importância de novas metodologias de ensino da matemática e de pesquisas voltadas à Modelagem Matemática na educação.

Atribui-se a Aristides de Camargos Barreto, formado em engenharia em 1960, a primeira incorporação de modelos matemáticos como estratégia de ensino nas aulas das disciplinas que ministrava na PUC-RIO (1970). Em programas de pós-graduação na PUC-RIO (1976 e 1979), o professor orientou duas dissertações que defendiam as propostas de modelos para o ensino e aprendizagem da matemática.

As variedades de modelos matemáticos, originados das experiências e pesquisas por ele orientadas, conduziram Barreto a defender essa proposta nos Eventos de Educação Matemática dos quais participava. Essas experiências sensibilizaram a comunidade acadêmica brasileira da época, como salienta Biembengut (2009, p. 11):

> Sua proposta implicava apresentar uma situação problema capaz de motivar os estudantes a aprender a teoria matemática; ensinar a teoria, e então retornar à situação problema para matematizá-la (modelar) e respondê-la. Como ele dispunha de uma coleção de modelos matemáticos de diversas áreas realizados por ele ou pelos seus estudantes, suas exposições conquistaram muitos adeptos; um deles, Rodney Bassanezi, num Seminário sobre “Modelos Matemáticos” que Barreto ministrou na UNICAMP, em 1979, a convite do professor D’Ambrosio.

Simpático a essas experiências com modelos matemáticos e aliando seus trabalhos com a matemática aplicada em instituições de ensino superior na região Sul do Brasil, Rodney Bassanezi iniciou sua trajetória com a Modelagem Matemática aproveitando um curso de formação para professores da disciplina de Cálculo Diferencial Integral, realizado em 1980. A estratégia do curso consistia em dividir os participantes em grupos para levantarem problemas a serem tratados no curso.

Como esperado, as questões sugeridas utilizavam as mesmas abordagens tradicionais dos problemas trazidos nos livros-texto da disciplina.

As verificações iniciais proporcionaram o momento oportuno para Bassanezi empregar a Modelagem Matemática. O objetivo desses cursos era conduzir os estudantes a observarem questões da região às quais pertenciam e, a partir da inteiração com esse ambiente, sugerir problemas de interesse para serem investigados. A proposta conquistou aceitação de muitos participantes, pois a construção dos modelos forneciam indícios dos conteúdos matemáticos que seriam abordados no decorrer do curso (Biembengut, 2009).

Além disso, nos anos seguintes, após assumir a coordenação de um curso de pós-graduação pela Universidade Estadual de Guarapuava, sugeriu alterações no programa do curso, a fim de propor visitas às empresas da cidade para que os alunos pudessem levantar questões problemas de interesse para serem investigados, configurando, assim, o primeiro curso de pós-graduação em modelagem. Dentre essas contribuições, ainda consta a orientações de dissertações de mestrado no Programa de Mestrado em Educação Matemática na UNESP, Rio Claro- SP.

Ainda que ambos os precursores da Modelagem Matemática no Brasil tenham atuado no ensino superior e em cursos de pós-graduação, a divulgação dos resultados positivos atingidos por meio de seus trabalhos em eventos disseminou e inspirou professores de vários níveis, inclusive da educação básica. Isso contribuiu para o surgimento de novas atividades, entendimentos, pesquisas, concepções e tendências de modelagem no ensino da matemática (Biembengut, 2009).

Esse interesse pode ser comprovado pelo aumento no número de produções acadêmicas sobre o assunto. O tema Modelagem Matemática tornou-se recorrente em: trabalhos de conclusão de curso na graduação e pós-graduação *lato* e *stricto sensu*, artigos e publicações em revistas e anais de congresso, capítulos de livros e livros. São diversos fatores responsáveis pelo o aumento da divulgação dessas pesquisas, dentre eles também destacamos a consolidação do Grupo Internacional de Modelagem e Aplicações Matemáticas (ICTMA), em 1983, que, nos moldes de outros movimentos, passou a realizar conferências bianuais.

Analisando momentos posteriores a esse período, Biembengut (2009) ao realizar um mapeamento histórico dos 30 anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira, verificou que a partir de 1991 houve um aumento significativo nas produções científicas voltadas ao tema. Esses trabalhos são resultados de pesquisas para conclusão de pós-graduação, dissertações do mestrado, artigos e as primeiras teses em nível de doutorado, sendo que algumas delas orientadas pelos precursores desses estudos no Brasil e também por outros professores do quadro acadêmico de outras instituições onde os cursos passaram a ser ofertados. A divulgação das pesquisas ganhou espaço nos eventos regionais e estaduais que ocorriam em vários locais do país.

2.2 UM PANORAMA DA MODELAGEM MATEMÁTICA NOS PCN

No Brasil, alguns documentos foram criados para organizar e direcionar a educação nos níveis de ensino básico, estabelecendo responsabilidades e deveres à família e ao estado, orientando a construção de currículos para os diferentes níveis de ensino e prevendo a formação adequada dos profissionais atuantes nessas áreas. Os documentos também determinam critérios para criação e monitoria das ações de instituições, públicas e privadas, voltadas ao ensino no território nacional, dentre outras especificações. Neles não encontramos diretamente o termo Modelagem Matemática, porém essa estratégia pode ser empregada como uma alternativa para atingir alguns objetivos presentes na redação desses documentos.

Na Lei de Diretrizes e Bases da Educação nº 9.394/1996 (LDB) foi definido que a educação deveria prezar pela formação do indivíduo em diferentes contextos sociais e culturais. Em seu artigo segundo estão elencados os princípios e finalidades da educação. São eles: o desenvolvimento pleno do aluno, a qualificação para o mercado de trabalho e o preparo para o exercício da cidadania.

As discussões sobre educação são ampliadas e aprofundadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (1998), sinalizando como objetivos educacionais a formação de um cidadão consciente da sua participação na sociedade e de seus direitos, capaz de posicionar-se criticamente por meio do diálogo e de atuar como agente transformador do ambiente. Também, um cidadão apto a utilizar diferentes linguagens, dentre elas a matemática, para expressar e comunicar suas ideias, saber utilizar recursos tecnológicos para ampliar o acesso às informações e formular problemas a partir de elementos da realidade e resolvê-los.

No PCN (1998) é destacado que um dos problemas enfrentados na disciplina de matemática é a carência de propostas aliadas ao ensino da matemática ou a má interpretação delas. O documento menciona a existência de esforços para superação desse quadro desfavorável, entretanto, esses esforços, geralmente, refletem iniciativas que surgem de pequenos grupos ou até mesmo individuais, não sendo suficientes para minimizar os problemas. As propostas com resultados positivos tinham como característica a presença da matemática relacionada às questões que partiam do interesse dos alunos e das necessidades da comunidade.

Analisando esses aspectos, observa-se que a Modelagem Matemática enquadra-se nessa proposta de ensino em virtude de possuir objetivos em comum e construir sua pesquisa baseadas no interesse do indivíduo. Por isso, Biembengut e Hein (2003, p. 17), consideram que:

> No dia-a-dia, em muitas das atividades é "evocado" o processo de modelagem. Basta para isso ter um problema que exija criatividade, intuição e instrumental matemático. Nesse sentido, a modelagem matemática não pode deixar de ser considerada no contexto escolar.

Além disso, os PCN também consideram que os saberes matemáticos de calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatísticas, etc., como condições imprescindíveis para compreendermos criticamente a política e as relações sociais. Essa compreensão é obtida pela leitura critica e análise das informações presentes em dados estatísticos publicados pelos meios de comunicação.

Com relação à preparação para o mercado de trabalho, a Modelagem Matemática contribui ao acesso prévio às diferentes áreas do conhecimento e à possibilidade de uma experiência motivadora, obtida pelo contato com atividades cotidianas envolvendo matemática, inseridas em variados segmentos profissionais. A forma como a construção desse conhecimento é realizada cumpre a proposta de ensino compreendido nos PCN (1998), que sugerem a ocorrência de inserções dos cidadãos no mundo do trabalho e, além disso, apoiam a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.

Um dos princípios atribuídos ao ensino, Art. 3° §II, da LDB, prevê ao estudante a liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber. A Modelagem Matemática está em consonância com este objetivo, pois visa a proporcionar a liberdade do aluno escolher os temas que pretende pesquisar, resgatando as experiências construídas pelo indivíduo em suas relações sociais. Essa abordagem motiva nos indivíduos à curiosidade e ao anseio pela solução ou compreensão das situações vivenciadas em áreas de interesse pessoal, ou seja, no espaço onde surgem os problemas. Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2017), isso propõe a necessidade de aprender para transformar, antes de tudo, o sujeito do processo, nesse caso, o educando.

No âmbito das escolhas dos temas com origem em situações reais, a Modelagem Matemática diversifica a atuação da matemática em diferentes áreas do conhecimento. Nessa perspectiva, é compreensível que, pelo caráter de relevância social, as preferências em questões locais sobreponham-se às demais, mesmo não sendo esta uma problemática que deva ser tratada exclusivamente por critério regional.

Deste modo, é comum que alguns temas escolhidos para as atividades estejam inseridos em assuntos denominados nos PCN (1998) de “Temas Transversais”. Esses temas permeiam as disciplinas do currículo escolar, dentre elas, a matemática, e compreendem as indagações que atravessam as seguintes problemáticas: ética, orientação sexual, meio ambiente, saúde, pluralidade cultural, trabalho e consumo.

Esses estudos relativos a questões de urgência social encontram na Modelagem Matemática instrumentos para investigação por meio da organização de informações, cálculos e interpretação de resultados, além de que, a vinculação desses temas ás situações práticas em diferentes contextos permite ressignificar, na vida do estudante, conceitos e procedimentos estudados em matemática.

Analisaremos na sequência como a Modelagem Matemática se ajusta às novas reformulações curriculares que conduzirão a educação brasileira, sobre a perspectiva de um ensino voltado ao desenvolvimento de habilidades e competências que são essenciais à formação do estudante.

2.3 PROPOSTAS DA BNCC E IMPLICAÇÕES NO ENSINO POR MEIO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Na perspectiva de estabelecer os conhecimentos mínimos necessários para os estudantes, a Constituição Federal de 1988 propôs, no Art. 210, a fixação de conteúdos mínimos para a formação básica. As condições, os critérios e a maneira como isso deve ser realizado está discriminada na LDB 9.394/1996, em seu artigo 26. Nele, sugere-se a criação de currículos organizados em uma base nacional comum a serem utilizados em cada sistema de ensino, nos variados níveis da educação básica, de modo que contemplem a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio. Em sua elaboração, a BNCC apoiou-se nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) que especificam os direitos e objetivos da aprendizagem para a educação no Brasil e no Plano Nacional de Educação (PNE), que estabeleceu metas e orientações para construção dessa proposta.

Com sua homologação, a BNCC torna-se o documento com base no qual as redes de ensino e escolas brasileiras devem estruturar seus currículos, estratégias, planos de aula e projetos políticos pedagógicos. Com a adoção de um currículo único, pretende-se possibilitar aos estudantes um conjunto de aprendizagens essenciais ao seu desenvolvimento, sendo estas adquiridas pelos estudantes ao longo da sua vida escolar. Na prática, essas aprendizagens essenciais devem fortalecer o desenvolvimento de dez competências gerais[1] e reforçarem o direito a aprendizagens que serão encaminhadas no âmbito pedagógico.

A palavra *competência*, segundo o dicionário Aurélio, remete à ideia de capacidade de resolver determinado problema com aptidão e idoneidade. Na própria BNCC (2017, p. 8), competência é definida como “mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para solucionar demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo de trabalho”.

Semelhante a isso, Perrenoud (2000) considera que o indivíduo atinge a competência quando é capaz de mobilizar um conjunto de recursos cognitivos (saberes, capacidades, informações, etc.) para trazer soluções eficazes e pertinentes a eventos variados.

Ou seja, como a matemática está vinculada a formação de estruturas de pensamentos que possibilitam a resolução de problemas por meio de um raciocínio lógico, o seu ensino incorporado a situações do cotidiano é imprescindível para o desenvolvimento do indivíduo.

Isso está de acordo com Biembengut e Hein (2003), os quais compreendem o ensino da matemática como indispensável nos diversos níveis de escolaridade,

---

[1] (BNCC, 2017, p. 9 -10)

visto que ela é intrínseca às demais áreas do conhecimento, permitindo o desenvolvimento dos níveis cognitivos e criativos, tornando a sua utilização determinante para emergir habilidades como criar, resolver problemas e modelar.

Esse desenvolvimento cognitivo do indivíduo, segundo Burak (2005), insere-se no papel formativo da matemática, ou seja, seu ensino almeja auxiliar o aluno a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, e, dessa maneira, colaborar com o desenvolvimento de processos de pensamento.

Sendo assim, o ensino da matemática possui o objetivo de desenvolver habilidades e competências indispensáveis à formação do indivíduo, dentre elas, Burak (2005) elenca a autonomia do pensamento, a resolução de problemas, a dedução de resultados, a estimativa, a investigação e o posicionar-se frente a situações desconhecidas. Pelo exposto, é natural compreender que todas as ações da escola precisam ser orientadas visando assegurar o desenvolvimento dessas competências.

O autor ainda destaca outro papel da matemática no ensino da disciplina e argumenta que:

> [...] no seu papel instrumental, torna-se importante para a compreensão de outras áreas do conhecimento, na vida profissional e na vida cidadã. Nessa perspectiva, a Matemática como uma linguagem, com seus símbolos e seus códigos, permite a matematização de situações que podem revelar aspectos até então desconhecidos de um campo de conhecimento e enfatizar sua importância de se constituir como um instrumento formal de expressão e comunicação para diversas ciências. (BURAK, 2005, p. 6).

Na BNCC (2017) alguns processos matemáticos são elencados como alternativas para o desenvolvimento das habilidades voltadas ao letramento matemático[2], dentre eles a Modelagem. Segundo Bassanezi (2015), a Modelagem Matemática consiste na habilidade de relacionar problemas presentes em situações contidas em diversas áreas do conhecimento da humanidade e transformá-los em problemas matemáticos, cabíveis de solução e com resultados interpretados na mesma linguagem da condição inicial. Pelo exposto, portanto, é possível afirmar que a Modelagem Matemática insere-se nas exigências do documento, sendo mais uma

---

[2] A Matriz do Pisa (2012) define o letramento matemático como a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em diversos contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos.

estratégia para contribuir com o desenvolvimento de habilidades e competências nos estudantes.

As competências específicas para a matemática, no caso do Ensino Médio, também sinalizam aos professores a necessidade de metodologias que relacionem as experiências dos alunos e a sua compreensão de mundo. Dessa maneira, o documento sugere:

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. (BNCC, 2018, p. 523).

E ainda,

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BNCC, 2018, p. 523).

Com a aplicação da Modelagem Matemática no ensino e aprendizagem emergem-se possibilidades de, a partir de um tema e dos questionamentos levantados pelos alunos, desenvolver neles a habilidade de associar contextos aos conteúdos estudados. Dessa forma, conceitos matemáticos passam a ter significado e relevância para o estudante.

Outro fator importante envolve a apropriação de conceitos, pois, segundo Burak (2004), a adoção da Modelagem Matemática como alternativa metodológica permite que os assuntos estudados sejam revisitados várias vezes no decorrer das atividades, no contexto de um tema e em situações diversas, contribuindo, assim, de maneira eficaz para a compreensão dos elementos matemáticos estudados e conscientizando sobre a importância desse conhecimento no cotidiano e na sociedade.

Portanto, observa-se que as interações entre o conhecimento matemático e os conhecimentos presentes nas demais áreas servem de instrumento para desenvolver habilidades que permitam a compreensão da situação. A BNCC (2017) orienta-se pelo entendimento de que as aprendizagens em Matemática estão particularmente associadas à compreensão, ou seja, os conceitos matemáticos devem ser aprendidos estabelecendo-se uma conexão com os demais conhecimentos prévios.

Nesse sentido, Almeida, Silva e Vertuan (2016) consideram que as ações cognitivas empreendidas pelos estudantes ao se depararem com situações-problemas sobre as quais se pretende pesquisar, exigem primeiramente que o aluno realize aproximações ou idealizações para compreender a situação problema. Além disso, analisam que o desenvolvimento de diversas habilidades tais como: entendimento da situação, apreensão de significados, interpretação de fatos, interpretação de informações e agrupamento de ideias é resultado da transição entre a situação problema e a representação mental da situação.

A dinâmica criada pelo ensino com Modelagem Matemática permite o indivíduo transitar de uma atitude passiva em relação ao conhecimento para uma condição de protagonismo, indo de encontro diretamente ao seu interesse enquanto aluno, fazendo com que a aprendizagem seja mais significativa. Por isso, Burak (2005, p. 10) argumenta que:

> Essa forma de tratamento do conhecimento pode favorecer que, ao longo da transposição didática, o conteúdo de ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno ou o grupo a estabelecer entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. A contextualização evoca áreas, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural e mobiliza competências cognitivas.

Como a Modelagem Matemática, segundo Bassanezi (2006), envolve processos que associam a teoria e a prática, o indivíduo quando estimulado a entender a realidade na qual está inserido, interessa-se por instrumentos com condições de fornecer meios para agir sobre a realidade e transformá-la. A esse respeito, Barbosa (2004) acredita que as atividades de Modelagem podem potencializar nos alunos o surgimento de argumentações plausíveis em debates sobre questões sociais que envolvam aplicações de matemática, tornando-os conscientes de seu papel sociocultural.

Em outro aspecto, o ensino com Modelagem Matemática diverge do modelo tradicional, logo é improvável conceber que os instrumentos tecnológicos não estejam auxiliando no desenvolvimento das atividades e pesquisas. A BNCC (2017) trata como indispensável a incorporação de propostas de trabalho que valorizem as práticas da cultura digital e o acesso a saberes do mundo digital para modelar e resolver problemas do cotidiano e de outras áreas do conhecimento.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2016), a utilização do computador é relevante tanto no aspecto motivacional do aluno quanto para a aprendizagem em atividades de Modelagem Matemática. Os autores compreendem ainda que essa incorporação permite: lidar com situações problemas independente da ordem em que o valor investigado for expresso, concentrar os esforços nos processos relativos ao desenvolvimento da atividade de Modelagem Matemática e realizar simulações numéricas ou gráficas variando o parâmetro de acordo com a representação.

A mediação do computador durante a execução dos cálculos, nas aproximações e representações gráficas, contribui para a formulação de conjecturas baseadas em análises de padrões observados por meio do processo de pesquisa. Quanto a isso, a BNCC (2018), nas competências específicas para a matemática, indica que na investigação de conceitos e propriedades matemáticas devem ser usados recursos e estratégias que facilitem a observação de experimentações e padrões.

Compreendendo essa importância em relação às tecnologias digitais no ensino a partir de atividades com Modelagem Matemática, Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 31) entendem que:

> A dinamicidade de inúmeros softwares livres, hoje disponíveis no mercado, pode auxiliar alunos e professor na construção de gráficos e na observação da influência dos parâmetros bem como na realização de cálculos. Nesse sentido, a possibilidade de experimentar, de visualizar e de coordenar de forma dinâmica as representações algébricas, gráficas e tabulares, são vantagens da interação de atividades de modelagem com as mídias informáticas.

Vale ressaltar ainda que nas competências específicas elencadas na BNCC (2018) sugere-se a necessidade de validação das conjecturas mediante uma investigação e comunicação dos resultados. Na Modelagem Matemática, a análise e a discussão da solução ou soluções representa uma etapa fundamental da atividade, nela é verificado se os resultados matemáticos encontrados representam ou se adéquam à situação pesquisada. Essas considerações e análises das hipóteses, segundo Burak (2010), possibilitam resgatar os aspectos matemáticos e não matemáticos presentes na atividade e ainda verificar a coerência e consistência lógica das soluções encontradas.

Burak (2010) considera esse processo importante para desenvolver o pensamento crítico e a argumentação lógica, tornando o momento propício para mostrar a importância da formalização e da justificativa de alguns procedimentos matemáticos. Assim, o autor também destaca outro aspecto incluído nesse processo de Modelagem, que não é o matemático, mas um responsável pela formação de valores e atitudes essenciais nos alunos, que são as habilidades resultantes da cooperação, das discussões em grupo e do trabalho em equipe.

O texto da BNCC (2018) também propõe atividades cujo enfoque esteja: na interação dos estudantes; no incentivo à investigação e na tomada de decisões de forma conjunta, prezando pelo respeito e diversidade. Para Burak (2004), como na Modelagem Matemática a escolha do assunto estudado advém do interesse dos alunos, temos um processo em que o ensino é compartilhado, ou seja, existe a colaboração entre o grupo em todas as etapas da atividade. Para o autor, isso permite aos envolvidos expressarem as suas opiniões, trocarem ideias e refletirem sobre os resultados e hipóteses. Além disso, possibilita a criação de vínculos entre os alunos e ainda, entre professor e alunos, enriquecendo os diálogos e desenvolvendo o interesse do grupo pelo tema e matéria.

Quando o aluno se interessa por procedimentos que organizam e inter-relacionam os diversos fenômenos relacionados à matemática e não apenas os quantifique, a aprendizagem se torna significativa a ele. Nessa perspectiva, a BNCC (2018) apoia formas de trabalho que possibilitem ao estudante a compreensão desses fenômenos, e que o auxiliem, em meio a variados contextos, a fundamentar seus argumentos e a criar diferentes representações para expressar objetos matemáticos. Dessa forma, espera-se que o ensino da matemática não se restrinja a apenas aplicações de técnicas voltadas ao cálculo com números e a determinação de resultados. Isso porque os processos de ensino devem possibilitar que o aluno estabeleça sentidos e significados acerca de suas aprendizagens.

Os significados são o ponto inicial para a aprendizagem e funcionam como referenciais para os novos conhecimentos. Esses saberes, na literatura, são chamados de conhecimentos prévios, e servem de estruturas ideais para organizar a incorporação, compreensão e fixação de novos conhecimentos (MOREIRA, 2011). A aprendizagem significativa, da teoria de David Ausubel (1918 - 2008), considera aquilo que o individuo já sabe como meio para construção de um novo conhecimento.

Ausubel argumenta que a aprendizagem significativa ocorre quando o sujeito relaciona, de forma substantiva e não arbitrária, uma nova informação a outras já existentes em sua estrutura cognitiva. Essa maneira não arbitrária refere-se a um aspecto adequado e específico da relação entre o material da aprendizagem e a estrutura cognitiva do individuo, visto que são apenas os conhecimentos significativos ao sujeito, os quais Ausubel chama de subsunçores, adequados a relacionar-se com a nova informação. Outra característica da aprendizagem significativa é a substantividade, que se refere à incorporação das informações essenciais à estrutura cognitiva do indivíduo contidas em um conjunto de ideias ou proposições, não necessariamente as palavras que expressam o conhecimento, mas o significado principal trazido por elas (MOREIRA, 2011).

Sendo assim, é possível prever que existam condições necessárias para que as relações ocorram no cognitivo do estudante e conduzam a aprendizagem significativa. Nesse sentido, Almeida, Silva e Vertuan (2016), baseados na teoria de Ausubel, elencam os seguintes fatores para o ensino:

- O material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo ao aluno.
- A estrutura cognitiva do aluno precisa conter os conhecimentos prévios para favorecer as relações com as novas informações.
- O aluno precisa ter uma predisposição adequada para aprender de maneira significativa.

Visto isso, compreendemos por que a BNCC (2017) trata como indispensável para o desenvolvimento de habilidades o ensino pautado nas experiências e conhecimentos já vivenciados pelos alunos. Ou seja, o documento aponta que as estratégias de ensino da matemática devam privilegiar situações originadas no cotidiano do estudante e que produzam elementos para a observação de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, permitindo, assim, o estabelecimento de relações significativas com o conteúdo a ser estudado.

Alguns estudos e pesquisas sinalizam que a Modelagem Matemática possui características adequadas à ativação dos fatores associados à aprendizagem significativa. Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 37) consideram que:

> O trabalho com modelagem em situações de ensino proporciona uma atmosfera propícia para essa troca de significados. [...] Assim, a resolução correta de um problema, a aplicação correta de um método de resolução, são alguns indícios de que ocorre a interação entre o novo conhecimento e a estrutura cognitiva do aluno. Nesses termos está sinalizada a aprendizagem significativa.

Desse modo, como são vários os fatores que sinalizam a Modelagem Matemática como ferramenta educacional alinhada ao ensino e a aprendizagem significativa, justifica-se a sua utilização para atingir os objetivos propostos na BNCC.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA ESTRATÉGIA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

Como visto anteriormente, as dificuldades enfrentadas na aprendizagem de matemática têm suscitado debates a respeito da necessidade de utilizar alternativas metodológicas que motivem e conscientizem o aluno sobre a importância prática do conhecimento matemático em sua vida diária. Por isso, as estratégias de ensino que acompanham as transformações sociais e os avanços tecnológicos ganham cada vez mais espaço na educação. Por isso, observou-se como e porque a Modelagem Matemática pode, enquanto ferramenta metodológica, auxiliar o professor em sala de aula.

3.1 POR QUE UTILIZAR MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA?

É comum, no âmbito educacional, discutir-se a respeito de metodologias eficazes para o ensino da matemática. Um dos fatores que levam a essas discussões é o baixo aproveitamento obtido pelos alunos na disciplina de matemática em avaliações nacionais e internacionais.

Existem algumas causas associadas a esses resultados, porém não é o objetivo dessa pesquisa esgotar todos eles. Porém, refletindo sobre as práticas de ensino da matemática, percebe-se que a maioria dos professores utiliza-se quase que exclusivamente apenas de abordagens mais tradicionais em suas aulas. E isso pode ser um dos fatores que contribuem para esse cenário, visto que no ensino tradicional o aluno é receptor do conhecimento transmitido e pouco reflete sobre as aplicações do conteúdo no cotidiano, entre outras características.

Geralmente, os conteúdos são organizados na sequência em que serão estudados, assim, durante as aulas, o professor realiza a explicação do assunto, faz a generalização e passa exercícios de fixação, o que dá a sensação de que os conteúdos estão isolados e não possuem relação. Entretanto, as aplicações da matemática nas relações cotidianas e nos diversos campos do saber não evidencia necessariamente que esses conhecimentos seguem uma sequência didática. Além disso, a fragmentação dos conteúdos decorrentes dessa metodologia cria em alguns indivíduos obstáculos na compreensão dos conhecimentos matemáticos.

Pela observação dessas e outras limitações no ensino da matemática, Bassanezi (2015) sugere a adoção de mudanças pedagógicas, com o objetivo de proporcionar ambientes de ensino e aprendizagem condizentes com os anseios dos estudantes.

Isso é essencial, pois as exigências provocadas pelo desenvolvimento científico-tecnológico carecem de sujeitos criativos, dinâmicos, sensíveis, ativos e inovadores, e o simples acesso aos conteúdos não é suficiente para levar o sujeito a pensar matemática nesses moldes.

Em suas pesquisas, Bassanezi (2006) encontrou na Modelagem Matemática os elementos que acreditava serem capazes de estimular a criatividade e motivar os educandos no processo de ensino e aprendizagem, atuando desde as etapas de escolha dos problemas até a aplicação das habilidades matemáticas para resolvê-los.

Com base nesses aspectos, o currículo escolar deve considerar a inclusão dessas estratégias como aliadas ao processo, as quais não são exclusivamente responsáveis por garantir a efetividade do currículo, mas são participantes. O autor defende que:

> A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com o seu ambiente natural (BASSANEZI, 2006, p. 38).

Mesmo verificando que existem outras alegações que justificariam a utilização da Modelagem Matemática, para Barbosa (2004), aquela que impacta diretamente no ensino está vinculada à formação do sujeito, visto que essa estratégia incentiva os alunos ao pensamento crítico, à análise dos diferentes contextos e ao debate. Essas habilidades conduzem a uma perspectiva da matemática na sociedade, que somente é adquirida pelo desenvolvimento de competências gerais de investigação e pela compreensão do papel sociocultural da matemática.

A compreensão é algo essencial para desafiar criticamente a ideologia da certeza, segundo Skovsmose[3] (1997 *apud* BARBOSA 2004), pois denota o caráter

---

[3] BORBA, M.; SKOVSMOSE, O. The ideology of certainty in mathematics education. *For the learning for mathematics*, Kingston, v. 17, n. 3, p. 17-23, nov. 1997.

reflexivo sobre a veracidade e confiabilidade dos resultados obtidos nas aplicações matemáticas, bem como estimula, nas salas de aula, o aparecimento de questionamentos não convencionais à natureza dessas aplicações. Contudo, está voltada aos interesses que as motivaram, aos critérios utilizados para obtenção dos resultados, à finalidade da pesquisa e ao significado social. Como cita Barbosa (2004, p. 2):

> Com essa perspectiva, creio que Modelagem pode potencializar a intervenção das pessoas nos debates e nas tomadas de decisões sociais que envolvem aplicações da matemática, o que me parece ser uma contribuição para alargar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades democráticas. Portanto, ao tomar o argumento de que Modelagem leva os alunos a compreender o papel sócio-cultural da matemática, quero justamente enfatizar esse aspecto nas atividades de sala de aula.

Nessa perspectiva, reconhecendo a importância de desenvolver nos estudantes a capacidade de interpretação e leitura dos conceitos matemáticos, presentes nas diferentes áreas de conhecimento, Biembengut (2004) defende como estratégia de ensino a utilização da Modelagem Matemática. Para a autora, aulas que privilegiam a simples resolução de questões matemáticas, desprovidas de significados, comprometem a compreensão da teoria matemática e a natureza dos problemas a serem modelados.

Assim sendo, para que a formação matemática seja mais eficiente, é preciso aplicar meios capazes de promover aprendizado no âmbito escolar. Nesse sentido, a Modelagem Matemática, compreendida como método de pesquisa, de acordo com Biembengut (2004), desperta no sujeito o interesse pela matemática e estimula o seu senso criativo e investigativo, possibilitando o contato com assuntos que não fazem parte do currículo daquele ano, ao mesmo tempo em que o aluno estuda a situação problema e aprende a modelar matematicamente.

Além de contribuir diretamente com a aprendizagem, Biembengut (2009) compreende que a partilha de experiências durante as atividades de Modelagem Matemática auxilia no desenvolvimento da interação entre professor e aluno, fruto da ruptura de processos rígidos firmados na figura do professor e da mudança na participação mais ativa do aluno na resolução do problema.

Na concepção de Modelagem Matemática, Burak (2004) estabelece como essencial para o ensino e aprendizagem de matemática o interesse coletivo dos educandos. Deste modo, o interesse seria o ponto inicial para o desenvolvimento dos procedimentos metodológicos dessa estratégia, ou seja, começa motivando pela escolha do assunto e direciona os demais encaminhamentos da pesquisa.

Burak (2004) sugere que o interesse compartilhado pelo grupo, motivado pela liberdade de selecionar temas que despertem a curiosidade, pode oportunizar discussões e propostas mais relevantes durante a construção do trabalho. E também, favorecer a aprendizagem pela participação direta dos estudantes, contribuir para a significação dos conteúdos da disciplina e possibilitar uma mudança de postura do professor frente à educação usual.

> A educação usual tem privilegiado, na maior parte das vezes, que o processo de ensino seja deflagrado pelo professor. Na Modelagem Matemática o fato de compartilhar o processo de ensino com o grupo ou grupos faz a diferença, constitui-se em uma mudança de postura por parte do professor: essa atitude favorece o estabelecimento de relações afetivas mais fortes entre os alunos e professor e alunos. (BURAK, 2004, p. 3).

Desse modo, a Modelagem Matemática, além de possibilitar respostas a diversas situações vivenciadas pelos educandos por meio do ensino da Matemática, atua no desenvolvimento da autonomia do aluno e o retira da condição de espectador passivo, tornando-o agente do próprio conhecimento.

3.2 MODELOS MATEMÁTICOS E MODELAGEM

Há, de certo modo, consenso entre os pesquisadores na noção de modelo, mas, afinal, como caracterizar modelo? Na concepção de Biembengut (2004), modelo é interação entre si de um conjunto de símbolos, representando alguma coisa, podendo ser feita por meio de desenhos ou imagens, projetos, gráficos, dentre outros. O modelo surge como resultado da apuração criteriosa de uma série de procedimentos adotados sobre uma situação e com ele é possível produzir, reproduzir ou executar uma ação. “Nenhum modelo ou forma de representar é casual ou rudimentar. É, antes, a expressão das percepções da realidade, do desejo, da aplicação, da representação” (BIEMBENGUT, 2004, p.17).

Analogamente, Bassanezi (2006) entende como modelo a formalização de argumentos ou parâmetros, considerados essenciais na representação de um sistema que reproduz uma realidade. Porém, o termo modelo, pela sua abrangência em diferentes áreas e situações, parte do princípio básico de simplificar o entendimento sobre determinada realidade em um aspecto amplo ou limitado, podendo ser comumente aplicado na confecção de maquetes para representar modelos físicos. Também, há aqueles relativos à representação de sistemas: o modelo objeto e o modelo teórico; respectivamente, um é a simbolização de um objeto e/ou fato concreto e o outro está ligado a uma teoria geral existente, simbolizada por um código de interpretação com características de um sistema real.

Os modelos, que trataremos com maior ênfase, representam de algum modo um conjunto de símbolos e relações matemáticas de um objeto estudado (BASSANEZI, 2006); esses modelos são chamados de modelos matemáticos. Essa definição é complementada quando nos deparamos com as contribuições apresentadas por outros autores a respeito do que são objetos de estudo e o propósito dos modelos matemáticos. Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 13) afirmam que:

> Usamos modelos matemáticos – para representar, explicar e “tornar presentes” situações (que podem não ser matemáticas) que queremos analisar usando matemática. Podemos dizer, então, que um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, podendo mesmo permitir a realização de previsões sobre este outro sistema.

No domínio acadêmico, comumente, situações presentes na realidade são analisadas e discutidas em cursos de matemática pura e aplicada, sendo utilizados modelos que preveem o comportamento e apontam as possibilidades e soluções com resultados exibidos por meio de uma linguagem ou estrutura matemática. Essa situação problema, representada a partir de uma estrutura matemática, permite aos estudantes conjecturarem teorias e/ou resultados de maneira mais precisa e sem contradições. Em virtude disso, Bassanezi (2006, p. 25) afirma que:

> A obtenção do modelo matemático pressupõe, por assim dizer, a existência de um dicionário que interpreta, sem ambiguidades, os símbolos e operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada da descrição do problema estudado, e vice-versa. Com isso, transpõe-se o problema de alguma realidade para a matemática onde será tratado através de teorias e técnicas próprias desta Ciência; pela mesma via de interpretação, no sentido contrário, obtém-se o resultado dos estudos na linguagem original do problema.

Nessa perspectiva, Góes e Góes (2016) caracterizam o conjunto de equações e/ou inequações como uma proposta de representação da realidade para um modelo matemático, presumindo que as variáveis presentes nos problemas apoiem a solução das equações. Complementando essa compreensão, Almeida, Silva e Vertuan (2016) consideram, ainda, mais dois diferentes tipos de sistemas de representação: a tabela e o gráfico.

Essa diversidade de representações favorece o pesquisador a escolher o modelo matemático que mais se adéqua à situação estudada. Para determinar o modelo matemático, Bassanezi (2006) sugere que a formulação dos modelos matemáticos deve considerar a natureza dos fenômenos ou situações, e podem ser classificados de acordo com o tipo de matemática utilizada. A saber:

- **Linear ou não linear:** apresentam equações com essas características.
- **Estático:** representa a forma geométrica do objeto, empregando uma **determinada escala.**
- **Dinâmico:** simulam variações de etapas decorridas em situações reais.
- **Educacional:** refere-se a uma quantidade pequena de hipóteses de "fácil análise", não representando com exatidão a realidade necessária para prever resultados precisos.
- **O Aplicativo:** envolve uma quantidade maior de variáveis fundamentadas em variáveis reais, geralmente requerendo métodos computacionais para análise das equações.
- **Estocástico ou determinístico:** o primeiro, geralmente, apresenta o comportamento de um sistema probabilístico; empregam-se, na maioria dos casos, em aplicações de modelos práticos, como exemplo, aqueles resultantes de processos biológicos. Já o determinístico, pressupõe a existência de dados suficientes em algum estado de desenvolvimento do processo, podendo prever toda a evolução do sistema precisamente.

Organizar e sistematizar situações de diversas áreas em modelos matemáticos requer habilidade do modelador. Porém, a simplificação desses problemas, que podem não ter sua origem na matemática, para uma linguagem de "fácil" compreensão dos problemas, é essencial, a fim de agilizar e facilitar a obtenção de soluções. De certo modo, "a importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas) que propiciam o uso de métodos computacionais para cálculos e situações numéricas" (BASSANEZI, 2006, p. 20).

Pelo exposto, percebemos que os modelos matemáticos possibilitam uma variedade de aplicações em situações do cotidiano, ao contrário do ensino tradicional, que aproveita apenas a estrutura final de um contexto, desconsiderando os critérios utilizados na formulação dos problemas. Por isso, é comum os professores apoiarem-se exclusivamente no material didático.

Essa característica é observada, por exemplo, no estudo de equações, em que o professor normalmente solicita aos estudantes a obtenção do conjunto solução da equação, ou ainda a equação correspondente ao gráfico e a utilização dos dados de uma tabela para cálculos aritméticos ou algébricos. Todavia, mesmo que isso seja importante, corre-se o risco de que os resultados encontrados pelos alunos nas atividades tornem-se apenas um fim em si, ou seja, a origem dos resultados de uma situação observada, bem como todo processo para chegar ao modelo matemático acaba se perdendo e poucas vezes são explorados.

Ao contrário disso, Almeida, Silva e Vertuan (2016, p.13) entendem que “um modelo matemático é, portanto, uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam. Sua formulação, todavia, não tem um fim em si só, mas visa fomentar a solução de algum problema”.

Segundo Biembengut (2004), o conjunto de ações e procedimentos necessários para formulação do modelo chamamos de Modelagem. Esse modelo pode ser relativo a qualquer área de interesse do pesquisador, por isso, Bassenezi (2015) acrescenta a importância do indivíduo no processo de criação de modelos, visto que cada pesquisador está munido de suas experiências e subjetividade, as quais advêm de suas leituras, conhecimentos e interpretações. Vale ressaltar que a modelagem não necessariamente corresponde exatamente à realidade, mas tende a retratar aproximações da situação real ou frações dela.

Desse modo, quando realizamos ações que resultam em modelos matemáticos, dizemos tratar-se de Modelagem Matemática. A utilização do termo Modelagem Matemática pode estar associada à matemática aplicada, cujo objetivo é o desenvolvimento de pesquisas que auxiliem o indivíduo na tomada de decisões, mediante a análise de um conjunto de dados presentes em uma situação problemática. Entretanto, também pode estar relacionada ao ensino e aprendizagem como uma metodologia de pesquisa, que atua para motivar os alunos em sala de aula a aprenderem matemática pela investigação de situações, presentes no cotidiano, seguindo etapas empregadas na determinação de modelos matemáticos. Bassanezi (2006, p. 24) afirma que:

> Modelagem matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

Ainda,

> A modelagem matemática é simplesmente uma estratégia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais. No processo de reflexão sobre a porção da realidade, selecionamos os argumentos considerados essenciais e procuramos uma formalização artificial (modelo matemático) que contemple as relações que envolvem tais argumentos. (BASSANEZI, 2015, p. 15).

Apesar de o foco da modelagem matemática estar sensibilizado pela busca humana, em ambos os casos, mencionados anteriormente, dedicaremos uma atenção maior às atividades de Modelagem Matemática, como estratégia de ação pedagógica associada ao ensino e aprendizagem. As atividades com Modelagem Matemática, além de considerarem os conhecimentos de vida do sujeito e desenvolverem a capacidade de avaliar os passos que conduziram à elaboração dos modelos matemáticos, promovem a reflexão social frente às diversas áreas de conhecimento, bem como a relação delas com a matemática em diferentes contextos. Sendo assim, Almeida, Silva e Vertuan (2016) configuram a atividade de Modelagem Matemática da seguinte maneira:

> Uma atividade de modelagem matemática, nesse contexto, envolve fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema as quais caracterizamos como inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. (ALMEIDA, SILVA E VERTUAN, 2016, p. 15).

Mesmo que sejam contextos diferentes, existe confluência entre autores acerca das fases necessárias para o desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática. Porém, a divergência na quantidade de etapas, nomenclaturas e termos utilizados não altera a essência da proposta e nem os resultados a serem alcançados.

3.3 ETAPAS ENVOLVIDAS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

No desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática, conhecer e planejar atentamente as ações e direcionamentos que serão utilizados é um dos fatores importantes para que o professor atinja aos objetivos da estratégia. Além desses, aponta-se como fundamental que sejam observadas atentamente o desenvolvimento de cada etapa da estratégia para assegurar o cumprimento de todas elas no decorrer do processo de modelagem.

Dentre alguns procedimentos para a Modelagem Matemática, descreveremos nesta pesquisa os utilizados por Almeida, Silva e Vertuan em atividades desse tipo, a saber: inteiração, matematização, resolução, interpretação e validação. Como esses procedimentos possuem alguma similaridade com os elencados por Bassanezi e Biembengut, teceu-se um paralelo entre eles com a finalidade de agregar informações e, assim, fornecer uma visão mais abrangente sobre o assunto.

3.3.1 Inteiração

Além de também representar a etapa inicial, na visão de Biembengut (2004), nessa fase o indivíduo terá o primeiro contato com a situação problema, de maneira que organizará as formas como se efetivarão os estudos, coletas de dados etc. A pesquisa poderá ser feita diretamente por meio de experiências de campo, seja com base em resultados obtidos por especialistas da área ou de experimentos próprios. Pesquisas com essas características configuram a primeira etapa, que Bassanezi (2006) denomina *Experimentação*. Nela, atividades de coleta de dados são realizadas em laboratórios por meio de experimentos, e, nesse caso, o papel do pesquisador na adoção de técnicas e métodos estatísticos é fundamental para a seleção das variáveis mais importantes do fenômeno, possibilitando cálculos e resultados mais precisos.

Entretanto, a pesquisa também poderá ser realizada indiretamente com base em bibliografias confiáveis sobre o assunto. Na visão de Almeida, Silva e Vertuan (2016), a inteiração possibilita conhecer as particularidades da situação e ainda pode acompanhar as demais etapas, visto que as informações não coletadas previamente podem ser exigidas no decorrer da pesquisa. Portanto, o foco principal nessa etapa é a escolha do tema e a coleta de informações, as quais são importantes para restringir o problema e adequar as metas para resolução.

3.3.2 Matematização

Essa etapa presume determinar um sistema conceitual capaz de realizar uma análise detalhada da situação, a partir da organização das ideias de maior relevância (BIEMBENGUT, 2004). É natural o predomínio de uma linguagem mais usual na composição desse sistema conceitual, afinal, trata-se de informações e dados identificados na fase de inteiração, exigindo-se um tratamento que transforme para uma linguagem matemática. É essencial apropriar-se dos conceitos e características para representar matematicamente o problema a ser solucionado (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016).

A relação entre as características, conceitos e o método matemático permitem descrever o fenômeno utilizando símbolos próprios da matemática. A descrição matemática é elaborada após a fase de inteiração e utiliza como base a pesquisa e o problema; sua realização depende da formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2016).

A esses procedimentos que conduzirão a descrição matemática das situações-problemas, Bassanezi (2006) chama de Abstração. Essa é a segunda fase, utilizada pelo autor, para as atividades intelectuais da modelagem matemática, as quais são elencadas da seguinte maneira:

- **Seleção de variáveis:** uma vez definidas as características da situação problema ou fenômeno, percebe-se que um conjunto de valores interdependentes pode estar associado a esses conceitos e, nesse caso, definiremos como variáveis. Essas variáveis podem ser qualitativas, quando representam uma classificação por categoria ou atributos, porém, existem ainda as variáveis quantitativas, que exprimem características mensuráveis, ou seja, expressas por valores numéricos.

  Dessa maneira, estamos identificando as variáveis de estado, responsáveis por descrever as mudanças contínuas no sistema, e as variáveis de controle, que agem no sistema (BASSANEZI, 2006), sendo necessário utilizar uma simbologia apropriada para essas variáveis.

- **Problematização:** a ação de delimitar o tema aponta exatamente os objetivos da pesquisa. Por essa razão, na elaboração dos problemas, os enunciados formulados precisam ser claros, compreensíveis e operacionais (BASSANEZI, 2006). Essa delimitação ocorre pela necessidade de especificar e generalizar as informações, facilitando a verificação dos padrões, comportamentos e a compreensão da situação problema.
- **Formulação de hipóteses:** segundo o dicionário online Michaelis (2015), a palavra *hipótese* é utilizada para suposições a respeito de alguma coisa que pode ser possível ou não, da qual se podem tirar conclusões que serão constatadas. Também é aplicada quando se toma um conjunto de condições como ponto inicial, no desenvolvimento de um raciocínio, ou seja, as hipóteses são responsáveis por direcionar, de maneira lógica, os rumos da pesquisa, por permitirem a retirada de princípios que auxiliarão a esclarecer situações empíricas. Por isso, espera-se desse conjunto de condições uma correlação coerente com as variáveis evidenciadas anteriormente.

  As hipóteses são obtidas pela "observação de fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal do modelador, observação de casos singulares da própria teoria, analogia de sistemas etc. [...]" (BASSANEZI, 2006, p. 28). Dessa forma, são, ainda, responsáveis pelo andamento da pesquisa, possibilitando deduções baseadas nas experiências do modelador, ou seja, pelo caráter empírico, configuram-se a partir da investigação da ocorrência de inter-relações entre variáveis e pela generalização de determinados resultados.

  Para Bassanezi (2006), é na fase de Abstração que ocorre a montagem do modelo matemático, o qual depende das hipóteses e da quantidade de variáveis. Para além disso, Biembengut e Hein (2003) destacam que, na fase de matematização, já se deve determinar o modelo matemático a ser resolvido, pois:

> O objetivo principal dessa etapa do processo de modelagem é chegar a um conjunto de expressões aritméticas, fórmulas, equações algébricas, gráficos, representações ou programa computacional que leve à solução ou permita a dedução de solução. Uma vez modelada, resolve-se a situação-problema a partir do modelo e realiza-se a aplicação. (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p. 14).

- **Simplificação:** considerando a diversidade de detalhes, conferida aos fenômenos investigados na atividade de modelagem matemática, presume-se a existência de uma complexidade que não permite analisarmos, na perspectiva integral, a situação problema. Entretanto, as contribuições para a pesquisa, imputadas a Galileu (1564-1642), pela criação do método científico-analítico, e a Descartes (1596-1650), com o método da razão, possibilitam restringir e isolar o objeto de estudo de maneira conveniente, preservando sua importância e tornando o problema mais tratável matematicamente (BASSANEZI, 2006).

Parece um tanto contraditório, defende R. Bellmam (1924-1985), que a compreensão de situações complexas ocorra retirando-se informações, todavia, devemos reconhecer que, no estágio de desenvolvimento intelectual de uma ordem complexa maior, a simplificação é a melhor estratégia. Nessa abordagem, a retirada de informações não ocorre de maneira aleatória e indiscriminada, mas sim exige um olhar atento do modelador às questões centrais do problema.

Geralmente, problemas não tratáveis resultam de equívocos na restrição das informações incorporadas ao modelo matemático, sendo necessário retornar ao problema, na fase inicial, devido à impossibilidade de prosseguimento provocada pela sua complexidade (BASSANEZI, 2006). É evidente que, além da restrição das informações, pode haver outros fatores responsáveis pelo retrocesso no processo de descrição das variáveis do modelo matemático, sendo necessário considerar a verificação dos dados da pesquisa para evitar novas intercorrências.

Um matemático polonês, chamado Mark (1914-1983), afirma que: “Se você não consegue resolver o problema a que se propôs, então tente simplificá-lo. A condição única é esta: você não deve simplificá-lo demasiadamente a ponto de perder as informações essenciais” (*apud* BASSANEZI, 2006).

3.3.3 Resolução

Essa etapa consiste em descrever o fenômeno em uma linguagem matemática coerente, munida de generalização e lógica, ou seja, sua finalidade é construir um modelo matemático que substitua a linguagem natural das hipóteses obtidas por meio de observações empíricas por outra capaz de responder às questões inicialmente propostas. A linguagem matemática transpõe a barreira imposta por um conjunto de palavras e permite expressar exatamente o mesmo sentido do outro, traduzindo os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural (BASSANEZI, 2006).

Deduzido o tipo de modelo matemático que pode ser uma equação diferencial, equação de diferenças finitas, fórmulas, gráficos, dentre outros, podemos, com base nos resultados encontrados, viabilizar previsões para a situação pesquisada. Todavia, determinar soluções numéricas aproximadas aos modelos dependerá do grau de complexidade empregado em sua formulação e, geralmente, para auxiliar nos cálculos das equações, são utilizados recursos computacionais programados para essa finalidade (BASSANEZI, 2006).

É inegável que avanços nas pesquisas com modelagem resultaram no desenvolvimento da matemática como ciência, incentivando matemáticos a descobrirem novas formas de pensar sobre determinado assunto, além de otimizar resultados e fundamentar novas teorias. Nessa vertente de ideias, Bassanezi (2006, p. 30) acredita que:

> A modelagem pode vir a ser o fator responsável para o desenvolvimento de novas técnicas e teorias matemáticas quando os argumentos conhecidos não são eficientes para fornecer soluções dos modelos – nisto consiste a riqueza do uso da modelagem, em se tratando de pesquisa no campo próprio da Matemática.

3.3.4 Interpretação de Resultados e Validação

A interpretação de resultados e validação corresponde à etapa que Biembengut (2004) chama de modelo matemático. Segundo a autora, nessa fase, a interpretação e a validação dos resultados são baseadas nas soluções encontradas e conclusões obtidas na aplicação do modelo. O resultado também é submetido à averiguação de relevância e adequabilidade – validação.

Nessa mesma perspectiva, Almeida, Silva e Vertuan (2016) consideram que a interpretação dos resultados consiste em analisar se as soluções encontradas pelo modelo matemático são convenientes a uma resposta ao problema. Essa atitude possibilita que os responsáveis pela pesquisa possam avaliar se o modelo aplicado à situação corresponde a uma representação matemática adequada, ou seja, trata-se de validar o modelo matemático.

Já o termo utilizado por Bassanezi (2006), em relação a essa fase do processo, é apenas validação. Porém na prática o princípio da etapa é o mesmo que dos autores anteriormente citados, que consiste em aceitar ou não o modelo proposto ao problema:

> "Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhe são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real – O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para sua validação." (BASSANEZI, 2006, p.30).

Ainda, segundo o autor, os modelos matemáticos apropriados devem, em seus resultados, respeitar as aproximações determinadas pelo pesquisador, assegurar, no mínimo, que os dados da fase inicial sejam previstos e antecipar a ocorrência de novos fatos ou relações insuspeitas. Sendo assim, uma ótima alternativa para a interpretação dos resultados é utilizar o gráfico das soluções obtidas pelo modelo como recurso para auxiliar na avalição das previsões, ou até mesmo na indicação de possíveis ajustes a serem realizados.

Decorridas as análises, compete ao modelador aceitar ou não o modelo; para isso, é necessário considerar também outros fatores, a saber, as metas do pesquisador e recursos disponíveis para o prosseguimento das atividades. Contudo, espera-se que as atribuições do modelo sejam objetivas e reproduzam com sensatez a situação ou fenômeno estudado. Para Biembengut (2004, p.18): "Se o modelo atender às necessidades que o geraram, procura-se descrever, deduzir ou verificar outros fenômenos ou deduções. Caso contrário, retorna-se à segunda etapa − Matematização, mudando ou ajustando às hipóteses e variáveis".

Isso vai de encontro ao que Almeida, Silva e Vertuan (2016) chamam de movimentos de "ida e vinda", ou seja, as dinâmicas entre as fases da atividade de Modelagem Matemática nem sempre ocorrem de maneira linear, mas estão em constante movimento. Esse processo de ajuste do modelo matemático, chamado por Bassanezi (2006) de fase de Modificação, ocorre quando existem algumas condições capazes de invalidar o modelo matemático. Segundo o autor, as condições podem estar associadas ao problema original, ou ao processo de restrição das informações ou, ainda, pelas razões a seguir elencadas:

- A existência de hipóteses falsas ou com aproximações insuficientes para representar a verdade, conjecturas equivocadas ou simplificações drásticas do fenômeno.

- Ausência de critérios ou equívocos durante a coleta dos dados experimentais, ou fontes não confiáveis de informação.
- Quando, mesmo sendo verdadeiras, as hipóteses e informações da pesquisa são insuficientes para assegurar a confiabilidade do modelo.
- Deduções baseadas em intuições desprovidas de análise e lógica, não refletindo a realidade dos fatos.
- Quando as variáveis utilizadas não foram suficientes para representar a situação real do modelo teórico.
- Ocorreram erros matemáticos no desenvolvimento da atividade.
- Um novo princípio importante foi descoberto.

Todas as etapas mencionadas pelos autores, independente das nomenclaturas utilizadas, possuem objetivos específicos e conduzem o aluno a experiências com a matemática sobre outra ótica, mesmo que às vezes no decorrer do processo alguns resultados não atendam efetivamente as expectativas, mas, mesmo assim, possibilitam o surgimento de outras habilidades que podem ser trabalhadas ao longo da atividade.

4 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA PRÁTICA DOCENTE

Como visto anteriormente, o ensino da matemática escolar vem buscando alternativas didáticas para garantir a aprendizagem significativa dos alunos. Com o passar dos anos as pesquisas educacionais fomentaram adequações no currículo da disciplina e incentivaram a criação de métodos de ensino que auxiliam o professor em sala de aula nas suas práticas pedagógicas, a atingir o objetivo de despertar nos alunos as capacidades cognitivas necessárias para ler, interpretar e relacionar os conceitos matemáticos com origem em outras áreas (BIEMBENGUT, 2004).

A modelagem matemática como método de pesquisa aplicado ao ensino proporciona abordagens que privilegiam situações de interesse dos alunos e despertam capacidades de investigação e criatividade. Apesar disso, essa estratégia ainda encontra muitas barreiras no âmbito escolar quanto a sua utilização, seja por inseguranças do professor, seja pela pressão da coordenação pedagógica ou família, tempo para desenvolver as atividades, etc.

Pelo exposto, Almeida, Silva e Vertuan (2016) e Biembengut (2004) elencam alguns questionamentos comuns para aplicação da Modelagem Matemática: “Como fazer modelagem matemática em sala de aula?”, “Como pode ser um curso de modelagem matemática?”, “Como tornar a modelagem uma estratégia de ensino de matemática quando existe um programa/currículo a ser cumprido?”, “Quais são as vantagens e desvantagens de se utilizar modelagem matemática no ensino?”.

Essas questões representam alguns obstáculos para a introdução da modelagem matemática no currículo escolar, e inseguranças do professor na condução dessas atividades. Em uma visão mais prática, na sala de aula o educador se depara com decisões de: como inteirar a turma nas atividades? Qual a duração das atividades de modelagem? Quantas pessoas haverá em cada equipe? Quem definirá as situações a serem pesquisadas (professor ou alunos)? Quais conteúdos serão abordados na pesquisa? Quais as formas de avaliação e registros, materiais e recursos necessários em cada etapa da atividade? Etc.

Prevendo fornecer um suporte para professores interessados em incluir como uma das estratégias de ensino nas aulas de matemáticas, discorreremos algumas considerações sobre a atividade na prática docente.

4.1 A MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA SEGUNDO BIEMBENGUT

Na concepção de Biembengut (2004), o planejamento das atividades de Modelagem Matemática deve prever inicialmente o público-alvo. Esse público pode ser de diferentes modalidades de ensino, ou seja, estudantes da educação básica, acadêmicos da graduação ou de cursos técnicos e professores. Consequentemente, pela diversidade presente nas características de cada grupo, as expectativas podem refletir objetivos distintos. Entre eles está: estabelecer condições para que os participantes aprendam a arte de modelar matematicamente, ensinar a pesquisar e a desenvolver modelos matemáticos para questões presentes especificamente em uma área de conhecimento, capacitar professores para aprenderem a modelar e adaptar o processo de modelagem ao ensino da matéria.

Sendo assim, Biembengut (2004, p. 24) afirma que:

> [...] o objetivo de quem faz modelagem é estabelecer o modelo matemático de uma situação-problema para então resolvê-la, entendê-la ou ainda, modificá-la, se necessário. Isto é, o objetivo é, essencialmente, fazer pesquisa, enquanto o objetivo da modelação é promover o conhecimento ao aluno.

A autora define Modelação como o processo de adaptação da modelagem matemática ao ensino formal. Essa definição abrange aos diversos aspectos intrínsecos à escola e ao ensino, tais como: currículo, carga horária, estrutura física, quantidade de alunos por turma, dentre outros. Como elementos associados a este conjunto de aspectos estão a pesquisa orientada aos alunos, os conteúdos programáticos (e não programáticos) e os conhecimentos pertinentes às mais diversas áreas que são relacionadas ao ensino no processo de construção dos modelos matemáticos.

Biembengut e Hein (2003) consideram que a inserção da modelagem na escola pode favorecer o ensino do conteúdo programático e, além disso, despertar nos estudantes competências de um pesquisador e a sensibilidade para analisar criticamente um determinado assunto. Como o conhecimento matemático está amplamente presente em diversas situações do cotidiano, naturalmente serão observados assuntos que não abrangem o conteúdo programático da série. Entretanto, o educando ao ser confrontado pelo desafio de encontrar soluções para sua atividade, será motivado pelo interesse e desprenderá um esforço em compreender conteúdos que não fazem parte da série.

> Dessa forma, a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico (BIEMBENGUT e HEIN, 2003, p. 18).

O ensino com modelagem matemática deve predispor de um planejamento que considere cada fator escolar, e, na medida em que as dificuldades e ou questionamentos forem surgindo, caberá ao professor direcionar adequadamente os alunos ao objetivo da atividade. Como existem inúmeras possibilidades e encaminhamentos para diferentes problemas, o professor precisa limitar a quantidade de pessoas em cada grupo de pesquisa. Biembengut sugere que os grupos formados sejam de, no máximo, 4 participantes com interesses comuns e afinidade entre si, para tornar o trabalho mais dinâmico.

Biembengut elenca alguns enfoques voltados à pesquisa que devem ser adotados pelos professores para auxiliar no desenvolvimento das estratégias de Modelagem Matemática. Tais procedimentos corroboram para atingir efetivamente a compreensão da aplicação das etapas na prática de modelagem matemática. São elas: apresentação do processo, escolha do tema, orientação do processo e Modelação Matemática.

4.1.1 Apresentação do processo

Esta etapa representa o primeiro contato dos educandos com a Modelagem Matemática, o professor apresenta a atividade e os procedimentos necessários para obter os resultados desejados com a estratégia. Por tratar-se de uma nova experiência, é fundamental motivar os alunos a enxergarem em outras abordagens educacionais a existência de meios diferentes para adquirir aprendizado. Entretanto, despertar algo tão subjetivo quanto a motivação dependerá de como a conscientização da temática será conduzida pelo professor. Ou seja, não há um procedimento padrão, mas o convencimento dos benefícios do método pode partir da expectativa de melhoria na compreensão dos conteúdos da série e das relações entre eles com outras áreas do conhecimento.

Para o processo de familiarização, o professor também pode utilizar-se de um modelo matemático pronto como objeto de análise dos procedimentos que envolvem as etapas da pesquisa até o resultado final. Este detalhamento antecipa possíveis dúvidas e permite inferir conceitos matemáticos presentes no modelo estudado. Entretanto esse tempo deve ser adequado à resolução de questões pontuais que forem surgindo e, na sequência, retoma-se a motivação da atividade para não perder o foco.

Se durante o andamento das atividades surgirem circunstância que exijam a inserção de conceitos matemáticos relevantes à turma ou a necessidade de uma orientação pontual ou abrangente para realização do trabalho, o professor poderá escolher outros modelos matemáticos para apresentar aos alunos. Essas orientações devem estar alinhadas aos interesses do grupo e às expectativas que permeiam os objetivos do trabalho.

4.1.2 Escolha do tema

Considerando o enfoque da pesquisa, temos o aluno como protagonista na escolha do tema. Sendo assim, para Biembengut (2004), o empenho dos estudantes nas aulas é motivado pelo interesse, ou seja, a aprendizagem é potencializada quando entendem o assunto estudado baseando-se em suas experiências de vida, conhecimentos prévios e crenças.

No primeiro momento, após a apresentação do modelo matemático e escolha do tema, o educador sugere aos estudantes a formação de grupos para inteirar-se sobre o assunto. Essa inteiração deve ter prazo determinado para verificar a viabilidade do tema escolhido, por meio da análise de dados do assunto e condições favoráveis ou não à obtenção deles, ou seja, sugere-se no mínimo uma semana nesta fase.

O professor poderá levantar sugestões de possíveis temas, organizando-os por meio de um questionário ou conversa informal e, assim, observar quais são os interesses dos alunos. Essa antecipação aos dados permite ao professor filtrar dentre as informações e assuntos proposto pelos grupos aqueles mais adequados ao cumprimento do conteúdo programático. Além disso, poderá compreender as possíveis dificuldades para obtenção dos dados, orientar adequações ou delimitações/recortes sobre o tema, direcionar e planejar as abordagens a serem empregadas em cada grupo.

4.1.3 Orientação do processo

A efetividade da orientação dos grupos dependerá essencialmente do planejamento das etapas a serem utilizadas em cada fase da pesquisa. Neste planejamento o professor estabelecerá estratégias que permitam o cumprimento dos objetivos dentro dos prazos. Entretanto, é primordial ao orientador programar quando e como se apropriará das situações-problemas escolhidas, a fim de definir as questões iniciais em ordem de prioridades, da mais elementar a mais abrangente.

As fases da pesquisa e cada procedimento adotado para elaboração do modelo matemático são descritos por Biembengut da seguinte maneira:

> [...] inteiração (reconhecimento da situação-problema→ delimitação do problema; familiarização com o assunto a ser modelado→ referencial teórico); matematização (formulação do problema→ hipótese; formulação de um modelo matemático→ desenvolvimento); modelo matemático (resolução do problema a partir do modelo→ aplicação e interpretação da solução e validação do modelo→ avaliação). (BIEMBENGUT, 2004, p. 26)

O acompanhamento dessas atividades realizadas pelos grupos em cada etapa deve ser constante para evitar que dificuldades não resolvidas prejudiquem o andamento dos trabalhos. Biembengut estabelece possíveis dificuldades em cada etapa e as atitudes de intervenção necessárias para contornar a situação.

Na fase de Inteiração, quando os temas escolhidos são amplos e ocupam um tempo superior ao disponibilizado para a atividade, poderão ser propostas ao grupo pesquisas específicas para delimitar o problema, tais como: escrever um texto histórico a respeito do tema, coletar mais informações para familiarização do assunto, sugerir novas questões cujas respostas sejam desconhecidas ou não estejam presentes nas fontes pesquisadas, entrevistas com especialistas da área e visitas a locais onde ocorrem atividades relacionadas à situação analisada.

Na fase de Matematização, as soluções das questões específicas após o recorte do tema, o grupo pode esbarrar no desconhecimento de conceitos matemáticos, neste caso poderá ser: sugerido outro modelo matemático que contenha esses conhecimentos ou, ainda, trabalhar o conteúdo matemático com todos os grupos ou incentivá-los à pesquisa. Entretanto, caso o problema seja apenas na definição de prioridade, sugere-se realizar as soluções cujas exigências matemáticas partam da mais elementar para a mais complexa e, na sequência, elabore-se um modelo capaz de encontrar, além da situação específica, outras soluções ou que se executem previsões.

Na fase Modelo Matemático, se após a análise do modelo matemático for comprovado não ser válida a resolução do problema, será necessário revisitar as hipóteses para identificar os fatores responsáveis pelas inadequações ou, ainda, reformular as hipóteses a fim de validar o trabalho.

Resolvidas as dificuldades em cada etapa da Modelagem, prossegue-se com a organização dos trabalhos e definem-se os meios pelos quais o modelo matemático encontrado será divulgado, podendo ser por meio de seminário ou publicação.

4.1.4 Modelação Matemática

Estabelecidas as etapas voltadas ao enfoque da pesquisa, conforme Biembengut (2004), o professor também poderá adotar em sala de aula a Modelação Matemática. Essa metodologia permite, dentro da estrutura escolar, desenvolver mutuamente o conteúdo programático e o ensino por meio de uma adaptação ao processo de modelagem.

> A modelação matemática pode ser implementada em qualquer nível de escolaridade. Objetiva-se, fundamentalmente, proporcionar ao aluno melhor apreensão dos conceitos matemáticos; capacidade para ler, interpretar, formular e resolver situações-problemas e, também, desperta-lhe o senso crítico e criativo. (BIEMBENGUT, 2004, p. 30)

No entanto, encontrar um tema que auxilie o professor na abordagem dos conteúdos na mesma sequência prevista pelo programa escolar pode configurar entraves que impactam na definição do tema que será pesquisado. Nessa estratégia, essa situação é contornada pelo ensino de um ou mais tópicos da matemática por meio de um tema único, definido pelo professor, destinado a toda a classe e em consonância aos interesses dos alunos.

No ambiente escolar, normalmente o planejamento bimestral ou semestral orienta os conteúdos a serem desenvolvidos e o tempo necessário para trabalhá-los na turma. Desse modo, o desenvolvimento do conteúdo programático neste método precisa sistematizar a criação de um modelo ou adaptar um processo que elabora um modelo já existente. Segundo Biembengut (2004), envolve sete etapas a serem efetuadas pelo professor, pelos alunos ou por ambos:

1º- Explicação do tema e levantamento de questões e/ou sugestões apresentadas pelos alunos.

2º- Seleção, dentre as situações levantadas, daquelas necessárias ao desenvolvimento do conteúdo programático.

3º- Formulação das hipóteses com base nas informações, organizam-se os dados e equacionam-se os problemas.

4º- Explanação do conteúdo programático, relacionando o assunto escolar à situação problema.

5º- Aplicação do assunto por meio de exemplos e incentivo à utilização de tecnologias para verificação de padrões nesses exemplos.

6º- Formulação do modelo e resolução a partir dos conhecimentos adquiridos no conteúdo estudado.

7º- Interpretação e avaliação dos resultados obtidos no modelo matemático encontrado.

As etapas listadas anteriormente podem ser planejadas e aplicadas pelo professor, em concordância com em seu planejamento, em, pelo menos, três aulas, observando o tempo disponível para o cumprimento do conteúdo e a apropriação dos conhecimentos matemáticos pelos alunos. Não necessariamente cada parte do processo ocorrerá em sala de aula, mas também em atividades extraclasses como pesquisas, entrevistas, exercícios de aplicação etc.

4.2 O PROFESSOR E OS DESAFIOS PARA O ENSINO POR MEIO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

A implantação da modelagem matemática no ensino, defendida por diversos autores, pode proporcionar no aluno uma melhor conexão dos conteúdos elencados nas aulas com situações de seu interesse. Apesar desse e de outros argumentos favoráveis à incorporação dessa estratégia nas práticas educacionais, há dificuldades a serem superadas pelos professores, alunos e escola.

Inicialmente, teceremos comentários a respeito das dificuldades enfrentadas pelo professor na introdução e condução das atividades de modelagem matemática em sala de aula e para além dela. Não queremos deste modo, atribuir a responsabilidade exclusivamente ao professor pela predominância de aulas com abordagens tradicionais, mas presumir como central que a formação inadequada deste profissional pode contribuir para limitações no conhecimento de estratégias diferenciadas, cujos padrões destoam daquelas enraizados em abordagens cujas características pressupõem: conteúdos explanados de maneira expositiva, indicação de uma série de exercícios presentes no material didático e pouca interação entre os alunos.

O movimento de ensino com modelagem no Brasil tem avançado nas discussões sobre o assunto, mas não ao ponto de superar completamente a reprodução de comportamentos e práticas tidos como referência para alguns educadores. Não que essas referências sejam inadequadas ao ensino, mas a inter-relação entre essa abordagem e a Modelação como estratégia de ensino ampliam a compreensão matemática de um público mais diverso e em constante transformação. Biembengut (2004) afirma que uma das dificuldades encontradas pelo professor está na sua formação.

> [...] na formação de professores de matemática, por exemplo, raramente é dada orientação de modelagem, tampouco há utilização deste processo no ensino formal. Isso vem ocorrendo nessas duas últimas décadas, em cursos de formação continuada ou disciplinas de pós-graduação em educação matemática. (BIEMBENGUT, 2004, p. 37)

Bassanezi (2006) argumenta que alguns educadores não utilizam essa estratégia em suas aulas pela falta de conhecimento das etapas pertencentes ao processo de modelagem e por medo de presenciarem situações diferentes das encontradas constantemente, especialmente quando os assuntos se aproximam de outras áreas às quais a matemática esteja aplicada. Por isso a importância de promover cursos de especialização fomentando uma nova atitude diante desses obstáculos – termo usado pelo autor – por meio do desenvolvimento da maneira de pensar frente aos processos empíricos, na perspectiva de um saber abstrato e sua formalização.

As situações previsíveis nas práticas do professor trazem a sensação de segurança que todos os conteúdos listados no programa da matéria, serão cumpridos. Para Almeida, Silva e Vertuan (2016), essa “zona de conforto” não deixa abertura para experiências diferentes daquelas sobre as quais quase tudo é conhecido, não havendo espaço para “imprevisibilidades” decorrentes de atividades como as encontradas na Modelagem. Logo, somente professores que superam as adversidades e correm “riscos” são capazes de vivenciar situações favoráveis e construir uma nova “zona de conforto”.

Nesse sentido Almeida, Silva e Vertuan (2016) sugerem que a formação inicial e continuada dos professores deve ser fundamentada e estruturada em:

> [...] uma formação docente em modelagem matemática a partir da tríade “aprender sobre”, “aprender por meio” e “ensinar usando” modelagem matemática. Só assim é possível ultrapassar a visão estritamente empirista e pragmática da prática do professor em relação à modelagem, migrando para um terreno em que se aceita que o “como fazer” é impregnado de teoria e que teoria e prática é que orientam o movimento do “conforto” para o “risco”. (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 24)

Assumindo a formação do professor como prioritária, no âmbito da Modelagem, Barbosa (2001), afirma que existem poucas pesquisas voltadas a esse tema, e as ações mais efetivas para o ensino concentram-se em cursos de pós-graduação *lato senso* e em cursos de extensão. Percebe-se ainda que alguns profissionais, até manifestam através do discurso a vontade de rever suas práticas, porém, o receio de provocar tensões no ambiente escolar por meio de atividades diferentes das habituais levam a ações mais cautelosas tanto na implementação quanto no prosseguimento da nova proposta.

Segundo Barbosa (2001), o receio de não saber responder a questionamentos trazidos pelos alunos também representa uma insegurança. Esse despreparo motivado pela carência de tempo para adaptação e aquisição de novos conhecimentos pode ser contornado por meio da experiência, segurança e confiança obtidas pela familiarização com aplicações mais frequentes do método.

Na perspectiva do aluno, a mudança entre métodos de ensino provoca, inicialmente, estranhamento pela falta de vivência com atividades dessa natureza. Segundo Biembengut (2004), a adaptação dos estudantes acostumados com aulas de matemática essencialmente tradicionais é mais difícil, uma vez que as abordagens características da nova estratégia exigirão mais empenho nos estudos, na pesquisa e na interpretação do contexto. Sendo assim, alguns indivíduos resistentes ao cumprimento das etapas podem não engajar-se à proposta.

Sem dúvida as alterações na rotina dos alunos, destaca Bassanezi (2006), produzem reflexos na postura em sala de aula. É comum em alguns casos a dispersão durante as explicações e a diminuição do empenho na realização das atividades. Algo compreensivo, em virtude do redirecionamento no processo de ensino-aprendizagem, em que o professor, anteriormente como transmissor, passa a mediar o conhecimento e o estudante assume o protagonismo do processo.

Apesar de a situação representar desafios aos estudantes, espera-se que a aceitação se consolide no decorrer das atividades e se confirme pela identificação com os assuntos. No entanto, não se exime a necessidade de conscientização sobre a postura esperada em atividades como essa. Para Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 25):

> Mover-se de um paradigma em que exposições do professor seguem-se de exercícios para o enfrentamento de situações, de modo geral, não idealizadas, representa um desafio também para os alunos. As práticas de sala de aula baseadas na realização de atividades investigativas, como é o caso das atividades de modelagem matemática, ao mesmo tempo em que requerem um novo comportamento diante dos problemas, envolvem professor e alunos com a própria definição de um problema.

Como mencionado anteriormente, a interpretação de contextos é outra dificuldade apresentada pelos alunos. Segundo Biembengut (2004), isso ocorre em virtude de o ensino tradicional não priorizar o desenvolvimento de habilidades que capacitem para leitura de contextos. Desse modo, quando solicitamos ao estudante a realização de uma atividade fora de sua vivência escolar, como ler, entender e interpretar de maneira ampla o texto ou contexto pode não ser realizado da maneira esperada, ou seja, a leitura superficial da situação pode interferir nos resultados da pesquisa.

Além disso, a escolha do tema deve ser orientada cuidadosamente pelo professor, pois, se o assunto de interesse do aluno exigir conhecimentos muito avançados ou a pesquisa de informações não for fácil de ser obtida, pode gerar uma desmotivação e desinteresse pela atividade, isso porque exigirá maior empenho por parte do aluno para aprender e realizar a atividade proposta. De maneira análoga, esses problemas se verificam quando os dados coletados não acrescentam significativamente um conhecimento matemático.

Ainda considerando os obstáculos, podemos inserir nessa categoria a pressão familiar e a escolar. Em relação à família é comum questionamentos quanto às atividades, em virtude desse processo não contemplar, em sua essência, a resolução de listas de exercícios, mesmo que em momento oportuno elas devam surgir; mas, neste caso, apenas terá o objetivo de capacitar o aluno para solucionar o problema principal ou como treino para a assimilação dos procedimentos empregados na quantificação dos fenômenos (Meyer, Caldeira e Malheiros, 2017).

Já a pressão escolar concentra-se no cumprimento do programa adotado pela instituição. Como a modelagem pode demandar muito tempo, essa etapa pode ser comprometida, por isso a necessidade de flexibilização dos conteúdos. Desse modo, Biembengut (2004, p.39), enfatiza que:

> O compromisso com a educação é de todos os envolvidos direta ou indiretamente. Assim, envolver a comunidade escolar/ institucional ou mesmo colocá-la a par do processo pode contribuir. Sem este apoio, o professor pode desestimular-se na ocorrência de resistências por parte dos alunos ou pais.

A atenuação dessas dificuldades permite o êxito no desenvolvimento das etapas da Modelagem. Segundo Bassanezi (2006), o sucesso no ensino aprendizagem com Modelagem, não necessariamente é medido pela validação dos modelos encontrados, porque o foco central não está na formulação de modelos, mas em que o estudante utilize o processo para sistematizar e aplicar os conteúdos matemáticos. Sendo assim, o fenômeno modelado é apenas uma motivação para que o aluno, no processo de interação com situações de seu interesse, aprenda a matemática.

4.3 A AVALIAÇÃO NO ENSINO POR MEIO DE MODELAGEM MATEMÁTICA.

Considerando as ações pedagógicas como centrais ao ensino e aprendizagem, é natural prever que pelas características da Modelagem Matemática os professores precisarão dispor de instrumentos diferenciados para avaliar os alunos no decorrer das atividades de cada grupo. Assim sendo, é inviável verificar conhecimentos apenas por meio de provas escritas.

Quanto a isso, Biembengut (2004, p. 39) diz que “A modelação requer avaliação diagnóstica, processual e de resultados. O objetivo da avaliação é saber o que o aluno conhece, quanto conhece e o que ainda necessita conhecer”. Assim, segundo a autora, como se trata de um processo de ensino e aprendizagem caracterizado pela orientação, formalização de conteúdos e estímulo à criatividade, tanto os critérios quanto instrumentos de avaliação devem ser reformulados para valorizarem os procedimentos adotados durante a Modelagem.

5 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ESTUDO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Os resultados aqui apresentados surgem da análise de algumas dissertações que abordam a Modelagem Matemática em um estudo voltado às sequências numéricas no Ensino Médio. Por isso, limitaremos aos conteúdos que envolvem progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG). A metodologia adotada nessa pesquisa tem caráter bibliográfico e está delimitada ao período de 2008 a 2018. Com isso espera-se observar os trabalhos, as propostas e os resultados encontrados. Em outros aspectos, também se pretende verificar se os procedimentos indicados nas aplicações das atividades são capazes de contribuir para o desenvolvimento, nos estudantes, das habilidades elencadas na BNCC.

Inicialmente, realizamos a pesquisa nos registros de periódicos da plataforma Capes e, posteriormente, no Google. O assunto inserido no campo de busca foi “Modelagem Matemática no ensino de sequências numéricas progressão aritmética e progressão geométrica”.

Dentre os resultados, encontramos quinze dissertações com algumas das palavras incluídas em seus títulos, porém, após a leitura desses materiais, selecionamos três delas, pois no resumo o pesquisador manifestava o interesse em criar propostas de atividades ou, ainda, no texto utilizava-se como referencial bibliográfico um dos autores citados neste trabalho. Além disso, em alguns momentos descreveram as etapas para o ensino com Modelagem Matemática, mesmo que as aplicassem ou não.

Como as atividades poderiam apresentar características e perspectivas diferentes na maneira como se desenvolveriam, optamos por analisar à qual caso de Modelagem Matemática elas pertenciam. Esses casos ou classificações foram sugeridos por Barbosa (2001), a partir de uma análise das publicações nacionais e internacionais sobre o assunto. Assim o autor dissocia a Modelagem Matemática da obrigatoriedade de atividades por projetos e inclui outras abordagens mais simples e que demandam um tempo inferior. Observe:

- **1º Caso:** O professor seleciona e expõe a situação-problema apresentando as informações e os dados necessários que conduziram aos alunos a investigarem e resolverem a situação-problema proposta. As etapas da atividade são desenvolvidas em sala de aula.

- **2º Caso:** A partir de uma situação-problema de outra área de conhecimento escolhida pelo professor os alunos realizam, dentro ou fora da escola, as pesquisas, coletam as informações, levantam as hipóteses e solucionam o problema.
- **3º Caso:** A escolha da situação-problema é baseada nas sugestões de temas indicados pelos alunos, os quais podem não ser necessariamente matemáticos. Os alunos ficam responsáveis pelas demais etapas do processo de Modelagem Matemática.

Em cada um dos casos elencados os professores possuem uma condição de coparticipante, e, dependendo do caso, podem assumir mais ou menos atribuições no processo. Ou seja, ao classificar os casos, Barbosa (2001) exibe as possibilidades de atividades com Modelagem Matemática e as diversas maneiras como os envolvidos podem contribuir para a solução da situação-problema. O Quadro 1, a seguir, ilustra a participação de cada um nas etapas.

Quadro 1: O aluno e o professor nos casos de Modelagem

	Caso 1	*Caso 2*	*Caso 3*
Elaboração da situação-problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	professor	professor/aluno	professor/aluno
Resolução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Fonte: Barbosa, 2001, p. 9.

Decorridas essas análises, tomaremos como modelo o caso 2 e realizaremos algumas sugestões de atividades para o ensino de sequência no Ensino Médio. Essas propostas seguirão as etapas indicadas por Almeida, Silva e Vertuan (2016) para o ensino com Modelagem Matemática: inteiração, matematização, resolução interpretação e validação. Com isso, esperamos fornecer recursos educacionais alinhados com a BNCC e que atendam às necessidades dos professores ao tratarem dos assuntos PA e PG em suas aulas.

5.1 MODELAGEM MATEMÁTICA: ANÁLISE DE DISSERTAÇÕES NO ENSINO DE PA E PG

A seguir realizou-se a análise de três dissertações que mais se adequaram ao objetivo da pesquisa em relação a um conjunto de 15 dissertações encontradas. Como um dos aspectos que motivaram a escolha delas em detrimento às outras foi a intencionalidade de criar exemplos ou propostas que remetessem á aplicação da Modelagem Matemática, iremos observar inicialmente quais autores foram citados no trabalho, quais as contribuições das propostas para o ensino de PA e PG e como elas se adaptam ao ensino nos moldes do que se exige a BNCC, entre outras considerações.

Em cada quadro foram inseridas informações a respeito das dissertações realizadas, tais como autor, link, título e resumo da obra. Na sequência, conforme indicado no parágrafo anterior, discorreu-se um breve texto trazendo uma reflexão sobre a pesquisa.

Título	Modelagem e Sequências Numéricas.
Autor	Fábio Barbosa de Oliveira
Link	https://www.seduc.pi.gov.br/download/arquivos/biblioteca/730293970.dissertacao.pdf
Resumo	A modelagem em matemática tem alcançado novos rumos devido aos novos campos de pesquisa e trabalho. Muitos pesquisadores-professores tem desempenhado um importante papel para sua divulgação e expansão, principalmente com a criação de centros de pesquisa. Devido a sua importância, faz necessário conhecer um pouco de sua história no Brasil e como também de seus precursores, como se da o seu planejamento e aplicação. O conhecimento prévio de alguns conteúdos como progressão aritmética, progressão geométrica e recorrências são importantes para o desenvolvimento de uma pesquisa em modelagem matemática, a qual poderá ser aplicada na visualização de problemas como financiamento de carros, da casa própria ou simples planejamento familiar.

A dissertação de Oliveira (2013), apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT-PI), situa os aspectos históricos da Modelagem Matemática e adota como autores em suas referencias Bassanezi e Biembengut. No texto também estão indicados os processos necessários para aplicação da Modelagem Matemática como estratégia de ensino sugerida por ambos os autores.

Como a pesquisa de Oliveira (2013) propõe um estudo sobre sequências, estão apresentadas algumas definições de sequências e sequências numéricas. Após isso, o autor caracteriza progressões aritméticas (PA) e exibe os elementos dessa sequência utilizando argumentações lógicas sobre os termos para determinar a fórmula do termo geral. Aplicando uma análise similar nos termos de uma progressão geométrica (PG), também determina a fórmula do termo geral.

No trabalho há ainda outras conclusões acerca das propriedades de soma dos termos das sequências que estão demonstradas e servem de base para resolução dos problemas. Entre eles há exemplos relacionados ao crescimento populacional, desvalorização, órbita do cometa Halley, etc.

Essas aplicações realizadas pelo autor representam problemas que estão inseridos em uma aplicação real. E isso, segundo a BNCC (2017), serve como uma oportunidade para que o aluno utilize recursos matemáticos e, assim, determine os resultados a partir de um contexto para assim compreendê-los.

Por isso, quando o autor valoriza o ensino por meio de problemas, ele proporciona uma condição adequada ao desenvolvimento e compreensão da matemática no aluno. Essa estratégia insere-se nos objetivos educacionais, portanto a disposição dele em estabelecer essas relações entre contextos diversos é valida. No entanto a proposta utilizada na pesquisa não se caracteriza como Modelagem Matemática.

Quanto a isso, Barbosa (2011, p. 8) afirma que:

> Existe uma relativa distância entre a maneira que o ensino tradicional enfoca problemas de outras áreas e a modelagem. São atividades de natureza diferente, o que nos leva a pensar que a transição em relação à modelagem não é algo tão simples. Envolve o abandono de posturas e conhecimentos oferecidos pela socialização docente e discente e a adoção de outros. Do ponto de vista curricular, não é de se esperar que esta mudança ocorra instantaneamente a partir da percepção da plausibilidade da modelagem no ensino, sob pena de ser abortada no processo.

Todavia, na dissertação não identificamos propostas de Modelagem Matemática para o ensino de sequências. Em outras palavras, o autor optou por incluir problemas contextualizados como instrumento para aplicar as fórmulas, não mostrando o papel do aluno na construção dos modelos. Logo, os exemplos utilizados expressaram apenas uma aplicação para o assunto, que é uma das etapas da Modelação Matemática.

Título	Modelagem Matemática no Ensino Médio por meio de Sequências e Séries Numéricas.
Autor	Claudio Fernandes Vasconcelos
Link	https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/143941/fernandesvasconcelos_c_me_rcla.pdf?sequence=3
Resumo	Neste trabalho discorremos brevemente a respeito da modelagem matemática como metodologia de ensino e pesquisa e do modo como ela é abordada nos parâmetros curriculares nacionais. Apresentamos vários resultados da teoria de sequências e séries numéricas e, por fim, colocamos algumas propostas pedagógicas utilizando a modelagem matemática juntamente com a teoria de sequências e séries numéricas. O intuito destas propostas é proporcionar a construção do conhecimento matemático nos alunos do ensino médio.

Na dissertação de Vasconcelos (2016), apresentada ao programa de pós-graduação PROFMAT-UNESP, o autor argumenta sobre a importância e eficácia de utilizarmos a Modelagem Matemática como ferramenta para construção do conhecimento. Em seu capítulo introdutório traça um paralelo entre as áreas que empregam essa ferramenta, destacando que: uma prioriza o desenvolvimento de modelos matemáticos destinados à pesquisa acadêmica e a outra é uma metodologia pedagógica associada ao ensino.

É mencionada, ainda, a necessidade de descentralizar a aprendizagem da figura do professor e incluir elementos do cotidiano nas aulas de matemática, apreciando, assim, as experiências do aluno. Algumas dessas conclusões foram observadas por Vasconcelos (2016) a partir dos Parâmetros Nacionais Curriculares e pelos autores Ubiratan D'Ambrósio, Bassanezi, Biembengut, M. S. Hein, entre outros.

A descrição das etapas, sugeridas por Biembengut, M. Hein (2003) para aplicação de atividades com Modelagem Matemática, inteiração, matematização e modelo matemático, também estão especificadas por Vasconcelos (2016). Apesar disso, quando analisamos o processo desenvolvido nas atividades propostas pelo autor, não fica evidente o cumprimento dessas etapas.

Em todas as propostas de atividade, o professor organizou os alunos em grupos, definiu um problema a ser resolvido, destinou duas aulas para discussões de hipóteses, resolução do problema, explicação da teoria e conclusões. As três atividades sugeridas contemplam os assuntos de PA e PG, ora empregados na matemática financeira ou na aplicação da fórmula do termo geral.

O enunciado da primeira atividade menciona a realização de um empréstimo entre duas pessoas, a ser pago em um prazo de 4 meses, a juros compostos de

12% a. m., porém, o devedor discorda das condições e pretende pagar utilizando juros simples. Então, os alunos devem calcular a taxa aplicada sob esse juro de forma que o montante represente o mesmo valor da condição inicial. Após isso, os alunos iniciam as discussões das soluções e, na sequência, o professor apresenta as suas considerações utilizando os conceitos de PA.

Já na segunda atividade, solicita-se aos alunos a determinação da quantidade de radares a serem instalados em uma rodovia com base em algumas características mencionadas no enunciado. Diante disso, o professor inicialmente desenvolve a relação do termo geral da PA e incentiva os estudantes a solucionarem o problema e discutirem os resultados. Por fim, o professor aplica as informações na fórmula do termo geral da PA e determina a quantidade de radares.

A terceira atividade traz uma problematização descontextualizada e sem relação com a realidade, porquanto é sugerido ao estudante calcular as quantidades de vezes que um papel com 1 mm de espessura deve ser dobrado até atingir um comprimento suficiente para dar a volta no planeta Terra. A relação sugerida para resolver o problema é a fórmula do termo geral da PG.

Questões equivalentes a essa última até possibilitam encontrar padrões aplicáveis na matemática escolar, porém, não têm significado na vida do aluno. Quanto a isso, Meyer, Caldeira e Malheiros (2017, p. 29), pressupõem que:

> os problemas apresentados na escola, muitas vezes, não chegam nem na validação porque, em geral, muito pouco tem a ver com a realidade, muitos problemas, aliás, nem tocam em algum cotidiano, [...], ou seja, estamos muito acostumados a trabalhar problemas na categoria de exercícios de reconhecimento, de repetição, de algoritmo e, eventualmente problemas de aplicação.

As duas primeiras atividades são propostas que se originam de temas abrangentes, e podem propiciar diversos questionamentos, como sugere Bassanezi (2015). Entretanto, a abordagem das atividades não corresponde a nenhum dos casos de Modelagem Matemática vistos anteriormente.

Sobre isso, analisando a matemática escolar, Burak (2004) compreende que, na maioria das vezes, as contextualizações empregadas em problemas pelos professores não retratam de forma significativa a realidade dos alunos e, por isso, podem desestimular o aprendizado e, como consequência disso, contribuir para o desinteresse pela matemática.

Título	Modelagem Matemática através da utilização de softwares no ensino médio para o estudo de sequências numéricas: progressão aritmética e progressão geométrica.
Autor	Marcelo Tadeu Uchôa Pinto
Link	https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/MODELAGEM-MATEM%c3%81TICA-ATRAV%c3%89S-DA-UTILIZA%c3%87%c3%83O-DE-SOFTWARES-NO-ENSINO-M%c3%89DIO-PARA-O-ESTUDO-DE-SEQU%c3%8aNCIAS-NUM%c3%89RICAS-PROGRESS%c3%83O-ARITM%c3%89TICA-E-PROGRESS%c3%83O-GEOM%c3%89TRICA.pdf
Resumo	Esta dissertação foi desenvolvida com intuito de propor o uso da Modelagem Matemática como ferramenta de Ensino Aprendizagem no estudo de Sequências Numéricas no Ensino Médio. Utilizou-se como metodologia para desenvolver a pesquisa, primeiramente, o levantamento bibliográfico sobre o tema, e determinar quais dificuldades enfrentadas no processo ensino aprendizagem de Sequências Numéricas, assim procurou-se fundamentar o desenvolvimento de atividade de Modelagem Matemática e pesquisou-se também o uso de softwares matemáticos, principalmente, os software Modellus, e suas versões, e Excel. A abordagem demonstra também o enriquecimento do processo de aprendizagem com o uso das simulações seja nas atividades exploratórias ou nas atividades de criação. Foram propostos modelos de atividades a serem desenvolvidas, utilizando problemas de Matemática Aplicada. Para tanto, buscou-se entender o funcionamento do software Modellus como ferramenta de simulação e utilizando o Excel, como ferramenta de apoio das simulações. Assim, foram construídos alguns modelos matemáticos e atividades de sequências numéricas.

A dissertação de Pinto (2016), apresentada ao programa de pós-graduação PROFMAT-AP, destaca, entre outros, o emprego de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no ensino-aprendizagem. O software Modellus foi escolhido porque, segundo o autor, possui uma linguagem acessível aos alunos do Ensino Médio e possibilita a criação de modelos matemáticos.

Ainda nos capítulos iniciais, Pinto (2016) cita a concepção que Bassanezi, Biembengut, Hein e Barbosa têm sobre Modelagem Matemática. As observações tecidas seguem os encaminhamentos de três correntes fundamentais: a modelação, projetos de modelagem e corrente sociocrítica. E a partir delas o autor exibe os processos para obtenção dos modelos matemáticos e objetivos considerados em cada concepção.

Quanto aos assuntos PA e PG, o autor caracterizou cada tipo de sequência e aplicou o método de recorrência para determinar as fórmulas dos termos gerais antes de encaminhar as atividades.

Nas propostas, Pinto (2016) optou por criar roteiros de atividades para utilizar os recursos do software Modellus e também do Excel, na construção de modelos matemáticos ou na determinação de padrões. Entretanto, como nem todas as atividades sugeridas tratam dos assuntos PA ou PG, se analisou apenas os resultados das questões a seguir:

> ATIVIDADE 2: [..] determinado reservatório com capacidade para 750 l está com 240l de água. Utilizando uma bomba de vazão constante, são necessários 15min para terminar de encher esse reservatório. Qual a quantidade de água no reservatório ao final de cada minuto? (PINTO, 2016, p. 55).

E ainda,

> ATIVIDADE 4: Imagine que você receba mensalmente R$ 7.000,00 de salário e receba a seguinte proposta de trabalho por apenas um mês. “No primeiro dia você receberá R$0,01, no 2º dia R$ 0,02, no 3º dia R$ 0,04, e assim por diante, sempre dobrando o valor do dia anterior até o trigésimo dia". Você aceitaria essa proposta? (PINTO, 2016, p. 58).

Nos encaminhamentos da atividade 2, o autor solicita aos alunos a aplicação das informações para determinar a razão da PA. Nesse caso a razão é equivalente à vazão em litros por minuto, e com essa variável encontrada é possível modelar uma equação para o problema. Ainda na questão, utilizando o software Modellus, pede-se a construção de um modelo gráfico representando os valores do nível de água, em litros.

Já na atividade 4, o autor solicita aos estudantes a utilização do Excel para determinar os termos da sequência. Após essa etapa, o professor encontra e aplica a fórmula da soma dos termos da PG finita. Nesse caso, o resultado é verificado, posteriormente, por meio da função somatório do software.

Analisou-se que essa interação dos alunos com os softwares matemáticos Modellus e Excel é valida, pois coopera para o desenvolvimento da competência prevista na BNCC que sugere ao estudante a compreensão e utilização de tecnologias com a finalidade de produzir conhecimentos e resolver problemas.

No desenvolvimento das atividades consideramos que algumas etapas do processo de Modelagem Matemática estão presentes, porém outras ainda precisavam ser mais bem aprofundadas.

5.2 PROPOSTA DE ATIVIDADE: COMPRA DA CASA PRÓPRIA

Nesta seção, buscou-se apresentar uma sugestão de aula para o ensino de progressão aritmética no Ensino Médio. Como a Modelagem Matemática será a metodologia escolhida para conduzir as ações do professor e alunos, definiu-se um número mínimo de cinco aulas para concluir as atividades. É importante frisar que a dinâmica apresentada nas atividades pode ser modificada de acordo com as necessidades da turma.

O tema escolhido para orientar as pesquisas é a compra da casa própria, especificamente serão tratados dos aspectos que envolvem o antes e depois do financiamento. Esse assunto é relevante porque pode proporcionar nos alunos a reflexão de aspectos e dificuldades encontradas por várias famílias brasileiras para adquirir um imóvel. Além disso, a matemática atuará como meio para conscientizar sobre a importância de um planejamento financeiro em longo prazo para concretizar objetivos pré-determinados.

Sendo assim, na primeira aula o professor dividirá os alunos em grupos pequenos, explicará a estratégia e solicitará que pesquisem informações sobre o assunto. É essencial especificar alguns pontos relevantes que servirão de base para a obtenção do modelo matemático, dentre eles: quais as condições e formas de pagamento, valor percentual de entrada, prazos etc.

Na segunda aula, o professor reservará um momento para os alunos discutirem os resultados encontrados e organizarem as informações por meio de um resumo, ou ainda apresentar um texto contendo as principais informações da pesquisa, que facilmente pode ser realizada por eles.

O texto-resumo a seguir, apresenta alguns dados que podem ser encontrados na pesquisa dos alunos. Essas informações foram retiradas do site da Caixa Econômica e adaptadas, e contêm parâmetros importantes para o prosseguimento da atividade, podendo ser adequados para fins didáticos pelo professor e ou utilizados na aplicação dessa proposta.

Texto 01:

No Brasil existem várias linhas de financiamento para aquisição da casa própria. Ao comprar um imóvel novo, por exemplo, são oferecidos financiamentos de até 80% do valor, sendo necessária uma entrada para a quantia restante. É comum, para evitarem inadimplências, alguns bancos estabelecerem a prestação máxima de 30% do salário bruto do comprador.

Existe ainda a possibilidade de o comprador complementar o pagamento do imóvel utilizando os recursos do fundo de garantia por tempo de serviço FGTS, para isso precisa ter, no mínimo, três anos de carteira assinada e saldo nesse fundo. Esse recurso é um valor mensal pago ao trabalhador e equivale a 8% de seu salário.

A amortização do valor financiado, que é o pagamento da dívida, pode ser feita de duas maneiras: pelo Sistema de Amortização Constante (SAC) ou o Sistema Francês de Amortização ou Tabela Price (SFA/TP). O processo de redução da dívida pelo SAC prevê prestações em decrescimento constante, já no sistema TP as prestações possuem o mesmo valor durante todo o período do financiamento.

O cálculo da prestação mensal leva em conta o valor amortizado e os juros. Esse juro é obtido pela multiplicação entre a taxa de juros e o saldo devedor. Atualmente, a taxa de juros cobrado nessa linha de crédito varia de 6,5% a 8,5% ao ano.

Após aderir ao financiamento, o comprador tem até 420 meses para quitar a dívida, ou seja, 35 anos.

Fonte: Informações extraídas do site http://www.caixa.gov.br/Paginas/home-caixa.aspx, acesso em 20 jan. 2020, adaptado pelo autor.

Decorrida a leitura, definiremos a situação-problema observando os seguintes termos: é possível planejar ou acompanhar mensalmente a partir de um modelo matemático, o comportamento dos valores destinados à entrada e ao pagamento das prestações da casa própria, bem como o total gasto ao final do financiamento.

Com base na situação-problema e nas informações coletadas, pode-se combinar com os alunos um valor qualquer para fazer simulações e, assim, analisar em termos dos parâmetros encontrados em uma versão simplificada para a solução.

Nesse caso, tomou-se como hipótese a compra de um imóvel novo no valor de R$200.000,00. Com o comprador apresentando um salário mensal fixo de R$5.000,00 e um saldo de três anos de FGTS, que é o mínimo exigido para quem desejar usar esse recurso, e admitindo que, a partir de então, poupe 30% do salário todos os meses.

Inicialmente, os alunos podem calcular o saldo do FGTS em reais, na conta do comprador. Da seguinte maneira:

$$FGTS = 3 \times 12 \times 0{,}08 \times 5000$$

$$FGTS = 2{,}88 \times 5000 = 14400.$$

Feito isso, calcula-se o valor da entrada que corresponderá a:

$$20\%\ de\ 200\ 000 = 40\ 000.$$

Como a diferença entre o valor da entrada e o saldo do FGTS é R$25.600,00, o comprador precisa se planejar para acumular a quantia restante. Por isso, aplicando as informações do texto temos que, o valor mensal economizado com FGTS será de $0{,}08 \times 5000 = 400\ reais$ e com o salário é $0{,}30 \times 5000 = 1500\ reais$.

Realizado previamente os cálculos, o aluno deverá organizar os dados e analisar os padrões numéricos. Para isso, sugere-se colocá-los em uma tabela.

Tabela 1: Planejamento do valor da entrada do imóvel

Mês	**Valor Poupado (R$)**	**Saldo/FGTS (R$)**	**Valor disponível (R$)**
1	1500	14800	16300
2	3000	15200	18200
3	4500	15600	20100
4	6000	16000	22000
5	7500	16400	23900
6	9000	16800	25800
⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Elaborado pelo autor.

É importante os alunos perceberem que em cada coluna o próximo termo é obtido somando um valor constante ao termo anterior. Além disso, o professor poderá orientá-los a encontrar o resultado do saldo disponível em função do primeiro termo da sequência, do seguinte modo:

Tomando-se V(n) o valor disponível em reais para uma quantidade n de meses, temos:

$$V(1) = 16300$$
$$V(2) = 16300 + 1900$$
$$V(3) = 16300 + 2 \times 1900$$
$$V(4) = 16300 + 3 \times 1900$$
$$\vdots$$

Utilizando um processo recursivo, obtemos:

$$V(n) = 16300 + (n-1) \cdot 1900 \qquad (1)$$

Na terceira aula, após validarem o Modelo Matemático encontrado, o professor poderá abordar o conceito de sequências com as características semelhantes às observadas anteriormente.

5.2.1 Progressão Aritmética

As sequências numéricas, as quais a diferença entre cada termo pelo seu termo anterior (a partir do segundo) é constante, chamamos de progressão aritmética (PA). A diferença entre esses termos é denominada razão da progressão, e normalmente expressa pela letra r.

Classificamos essas sequências de acordo com o valor da razão.

Se $r > 0$, a PA será dita crescente.

Se $r < 0$, a PA será chamada de decrescente.

Se $r = 0$, temos uma PA constante.

5.2.2 Fórmula do termo geral de uma PA

Seja uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n)$ uma PA de razão r. Temos, por característica, que cada próximo termo é determinado pela soma do termo anterior com uma razão r. Assim sendo, segue que:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$
$$\vdots$$

Aplicando a relação de recorrência, encontramos o termo de ordem n, ou seja, o termo geral da PA.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \tag{2}$$

Os alunos também poderão utilizar essa fórmula para verificar as informações da tabela. Destacamos entre elas o cálculo dos termos a_{13} e a_{14}, da sequência, contida na coluna do Valor disponível, comparando-os com resultados encontrados no Modelo Matemático.

$$a_{13} = 16300 + 12 \cdot 1900 = 39100 = V(13)$$
$$a_{14} = 16300 + 13 \cdot 1900 = 41000 = V(14)$$

Com isso, observamos que são necessários 14 meses, ou seja, mais 1 ano e 2 meses para o comprador obter o valor referente à entrada.

Na quarta aula, o professor retomará a situação-problema, enfatizando os aspectos que envolvem o financiamento do imóvel, pelo Sistema de Amortização Constante (SAC).

A amortização no SAC é constante e os juros são decrescentes. Desse modo, obtemos o valor das amortizações dividindo o valor financiado pelo prazo e o juro multiplicando a taxa mensal pelo saldo devedor. E assim, a cada pagamento da prestação (amortizações + juros), abatemos do saldo devedor o valor amortizado.

Retornando á simulação, vamos assumir como hipótese que o comprador deu de entrada exatamente 20% do valor, ou seja, foram financiados R$160.000,00. E ainda, que a taxa de juros é de 6,5% a. a., ou seja, 0,5% a. m. (aproximação decimal para fins didáticos) a um prazo de 360 meses.

Da mesma maneira realizada anteriormente, os alunos podem construir uma tabela preenchendo os valores correspondentes a cada variável.

Tabela 2: Financiamento SAC.

Mês	Saldo Devedor (R$)	Amortização (R$)	Juros (R$)	Prestação (R$)
0	160.000,00	----------	----------	-----------
1	159.500,00	500,00	800,00	1.300,00
2	159.000,00	500,00	797,50	1.297,50
3	158.500,50	500,00	795,00	1.295,00
4	158.000,00	500,00	792,50	1.292,50
5	157.500,00	500,00	790,50	1.287,50
6	157.000,00	500,00	787,50	1.285,00
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Elaborado pelo autor.

É importante os alunos observarem que as sequências dos valores representam uma PA. No caso da prestação, uma PA de razão $r = -2{,}50$.

Estabelecendo um Modelo Matemático, tomou-se P(n) como valor da prestação e n o número de meses, com $n \in [1\,,360]$. Temos:

$$P(n) = 1300 + (n-1) \cdot (-2{,}50) \tag{3}$$

Após os alunos validarem o modelo, o professor poderá solicitar o cálculo de P (360) que equivale à última prestação do financiamento. Esse valor será importante, porque permitirá que os alunos na quinta aula, avancem para última etapa da situação-problema, que é a obtenção da soma de todas as prestações pagas pelo comprador. E no caso, o conhecimento matemático aplicado nesse procedimento remete ao estudo da soma dos termos de uma PA.

- Soma dos termos de uma PA.

Em uma PA finita de termos $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ de razão r, a soma dos n termos, que chamaremos S_n , pode ser obtida da seguinte maneira:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Da relação (2), temos:

$$S_n = a_1 + (a_1 + \mathrm{r}) + (a_1 + 2\mathrm{r}) + \cdots + (a_n - 2\mathrm{r}) + (a_n - \mathrm{r}) + a_n$$

$$S_n = a_n + (a_n - \mathrm{r}) + (a_n - 2\mathrm{r}) + \cdots + (a_1 + 2\mathrm{r}) + (a_1 + \mathrm{r}) + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Note que $a_1 + a_n$ é somado n vezes. Assim segue:

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}. \qquad (4)$$

Com a fórmula da soma de termos, os alunos podem determinar o total gasto para quitar o financiamento aplicando os valores na relação 4. Assim temos:

$$S_{360} = \frac{(a_1 + a_{360}) \cdot 360}{2} = \frac{(1300 + 402{,}50) \cdot 360}{2} = 306\,360.$$

Ou seja, a soma das prestações é igual a R$ 306.360,00.

Nesse caso, é interessante os alunos observarem que a diferença entre a soma das prestações e o valor financiado equivale ao juro total pago na compra do imóvel, fato que pode ser comprovado de forma análoga somando-se os termos da coluna dos juros. Sugere-se que o professor incentive os alunos à realização desse cálculo.

Realizada essas análises, os alunos poderão comunicar seus resultados, impressões e descobertas para os demais grupos, fomentando o debate a respeito dos impactos causados por um mau planejamento financeiro, principalmente quando voltado à aquisição de um imóvel.

5.2.3 Resumo da proposta de atividade: compra da casa própria.

A seguir foram organizadas resumidamente as etapas do processo de Modelagem Matemática segundo Almeida, Silva e Vertuan (2016):

- Etapa de inteiração.

Pesquisas na internet sobre as condições e formas de pagamento de uma casa, valor percentual, prazos, etc.

Definição do problema: é possível realizar um planejamento mensal para valores de entrada e acompanhar o comportamento das prestações com o passar do tempo?

- Matematização e resolução.

Definição de hipóteses: o comprador possui renda fixa de R$5000,00, possui saldo de 3 anos de FGTS e poupa o equivalente a 30% da renda mensalmente. E ainda, pagará 20% do valor do imóvel, no prazo de 360 meses a uma taxa fixa de 0,5% a.m.

Definição das Variáveis: valor fixo do imóvel (R$200.000,00), quantidade de meses (n), valor disponível para entrada [V(n)], valor da prestação [P(n)], soma das prestações [S(n)].

Modelos encontrados a partir da situação problema:

$V(n) = 16300 + (n-1) \cdot 1900;$

$P(n) = 1300 + (n-1) \cdot (-2{,}50);$

$S_n = [(a_1 + a_n) \cdot n]/2$.

Matemática utilizada na atividade: Progressão Aritmética (PA).

- Interpretação e Validação.

Os modelos obtidos possibilitam o cálculo da quantidade de meses necessários para que o comprador acumule o valor de entrada. Além disso, permite o acompanhamento da prestação com o passar do tempo e o cálculo do valor final gasto na compra do imóvel.

5.3 PROPOSTA DE ATIVIDADE: EUTROFIZAÇÃO EM LAGOS

Nessa seção será apresentada uma sugestão de aula para o ensino de progressão geométrica no Ensino Médio. Como a estratégia adotada será a Modelagem Matemática, o professor precisará dispor de, no mínimo, cinco aulas para trabalhar o assunto. Destacamos que a maneira como as atividades serão conduzidas, as escolhas e abordagem são apenas sugestões e podem ser modificadas de acordo com as experiências e necessidades dos estudantes.

O tema escolhido para direcionar a pesquisa envolve um fenômeno comum em ambientes aquáticos: a eutrofização, que ocorre naturalmente quando há um aumento dos nutrientes, principalmente nitrogênio e fósforo, em lagos, rios e represas, possibilitando as condições ideais para o crescimento de fitoplânctos[4] e plantas aquáticas. Em condições normais, a eutrofização pode ser benéfica, porém, quando pela poluição das águas, torna-se um processo artificial, existe um descontrole populacional acelerado, floração, que pode trazer consequências negativas ao meio ambiente. (Rodrigues, 2008)

Na primeira aula, o professor poderá utilizar uma reportagem relatando a situação e os impactos causados por ela. A reportagem poderá ser em vídeo (ver exemplos, Anexos 01 e 02) ou em texto (ver exemplo, Apêndice 01).

Como existe uma variedade de espécies capazes de provocar o fenômeno, é importante restringir a pesquisa, determinando uma espécie de cada tipo, para dinamizar a coleta de informações. Deste modo, analisando as características biológicas reprodutivas, optou-se pelas cianobactérias unicelulares e as lemnas (ver Anexos 03 e 04).

Feito isso, o professor deverá separar os alunos em pequenos grupos e dentro da problemática levantar o seguinte questionamento: *é possível estimar e monitorar em condições favoráveis de crescimento, a quantidade de cianobactérias unicelulares ou lemnas presentes em um ambiente aquático qualquer a partir de uma população inicial em um período de tempo inferior a fase de estabilização?*

5.3.1 Cianobactérias

---

[4] É o conjunto de organismos aquáticos microscópicos que têm capacidade fotossintética e que vivem dispersos e flutuando na coluna d’água. Neste grupo estão incluídas as algas e cianobactérias. Disponível em: http://www.iap.pr.gov.br/arquivos/File/Qualidade_das_aguas/RElatoriofinal.pdf.

Primeiramente, optou-se por avaliar o desenvolvimento das cianobactérias. Assim sendo, ao iniciar a fase da coleta de informações, o professor deverá acompanhar as pesquisas e, quando houver dúvidas, direcioná-las a pontos essenciais do problema, entre eles: como ocorre a reprodução desses organismos, taxa de crescimento, quantidade aceitável no ambiente etc. Também, sugere-se que sejam registradas as informações para futuras discussões.

Na segunda aula, o professor deverá reservar no momento inicial um espaço para os estudantes compartilharem as descobertas e, assim, possibilitar a sistematização das informações relevantes ao problema. Ou ainda, conduzir as próximas etapas a partir do texto, a seguir, que facilmente pode surgir dessas discussões.

Quadro 2: Texto resumo sobre cianobactérias

As cianobactérias, também conhecidas como algas azuis, são organismos procariontes que realizam fotossíntese com liberação de oxigênio. Sabe-se que a reprodução das cianobactérias unicelulares é assexuada, ou seja, acontece por divisão binária da célula. Também existem estudos que indicam a possibilidade de encontrar densidades superiores a 10 milhões de células desse organismo por litro d'água. Como algumas bactérias podem se reproduzir exponencialmente quando estão adaptadas ao meio, dependendo das condições, chegam a dobrar a sua quantidade a cada 20 minutos.

Fonte: Brasil Escola, Ministério da Saúde e Só Biologia (adaptado pelo autor).

Considerando as discussões e o enunciado, pode-se retomar a situação problema, e a partir das hipóteses, variáveis e valores informados, assumir n como um número natural qualquer. Nesse caso, tomou-se Q_0 como a quantidade inicial de 10 milhões de cianobactérias unicelulares em um ambiente aquático favorável, se considerou ainda uma versão simplificada do aumento populacional, ou seja, apenas a fase exponencial do crescimento e supôs-se não haver mortes desses organismos no período analisado.

Desse modo, tomou-se $Q_0 = 10^7$ de cianobactérias, assim temos:

$$Q_1 = 2 \cdot Q_0 = 2 \cdot 10^7$$

$$Q_2 = 2 \cdot Q_1 = 2 \cdot 2 \cdot 10^7 = 2^2 \cdot 10^7$$
$$Q_3 = 2 \cdot Q_2 = 2 \cdot 2^2 \cdot 10^7 = 2^3 \cdot 10^7$$
$$Q_4 = 2 \cdot Q_3 = 2 \cdot 2^3 \cdot 10^7 = 2^4 \cdot 10^7$$
$$\vdots$$

É possível que alguns grupos realizem esse mesmo procedimento e organizem os dados em uma tabela. Inclusive, essa atitude deve ser valorizada e incentivada. Porém, antes disso o professor deverá sugerir aos alunos a escrita das quantidades como termos de uma sequência em função da quantidade inicial, para facilitar a visualização do processo recursivo.

Obtendo os seguintes resultados:

Tabela 3: Aumento da quantidade de cianobactérias

Tempo (mim)	Momento	Quantidade
0	0	10^7
20	1	$2 \cdot 10^7$
40	2	$2^2 \cdot 10^7$
60	3	$2^3 \cdot 10^7$
80	4	$2^4 \cdot 10^7$
100	5	$2^5 \cdot 10^7$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Logo, para um momento n qualquer, a quantidade de cianobactérias Q_n é:

$$Q_n = 2^n \cdot Q_0 \ ,$$

ou ainda,

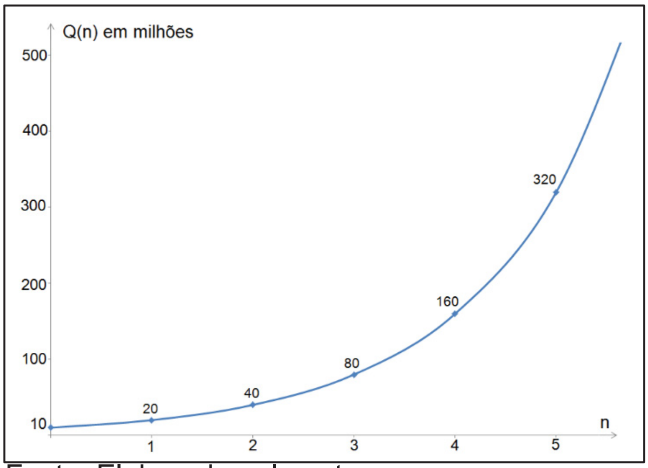
$$Q_n = Q_0 \cdot 2^n \ . \tag{5}$$

Note que, em um processo similar, obtemos T(n) o tempo em minutos:

$$T(n) = 20 \cdot n \ . \tag{6}$$

Após validar o Modelo Matemático, pode-se sugerir a construção de um gráfico a partir dos resultados encontrados.

Gráfico 1: Aumento exponencial das cianobactérias



Fonte: Elaborado pelo autor.

Antes de retomar à outra parte da situação-problema, o professor poderá caracterizar as sequências que possuem condições similares às observadas.

5.3.2 Progressão Geométrica

Convencionou-se chamar de progressão geométrica (PG) as sequências de números que apresentam o resultado da divisão entre cada termo, a partir do segundo, pelo seu anterior um valor constante. Esse resultado é chamado de razão, sendo representado pela letra q. Observando de outro modo, podemos afirmar que cada próximo termo da sequência pode ser obtido multiplicando-se o termo anterior pela razão q.

Vale ressaltar ainda que os termos da sequência precisam ser diferentes de zero. Com isso, para uma sequência $\left(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots, a_{n-1,}\ a_n\right)$ de n termos, com n um número natural, temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q\ ) \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4$$
$$\vdots$$

Aplicando-se a relação de recorrência, podemos inferir que:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \tag{7}$$

esse resultado é conhecido como fórmula do termo geral da PG.

Na terceira aula, o professor poderá reservar um momento para que os alunos exponham os resultados encontrados na pesquisa tais como o modelo matemático, testes de validação aplicados, conclusões e descobertas mais relevantes durante o processo de Modelação, entre outros. Finalizando, assim, uma parte do estudo de sequências.

5.3.3 Lemnas

A continuidade do estudo de PG, bem como a obtenção de outros resultados igualmente importantes no estudo de sequências, pode ser construída pelos alunos e professor, a partir do prosseguimento das pesquisas, mas agora avaliando o desenvolvimento populacional de outro organismo, as lemnas.

Como os alunos já estarão habituados à estratégia de Modelagem Matemática, sendo que são os mesmos procedimentos utilizados anteriormente no estudo das cianobactérias, os grupos poderão fazer essa pesquisa extraclasse, e trazerem os resultados apenas em um momento posterior a ser indicado pelo professor.

De posse das informações, na quarta aula, o professor adotará a mesma postura e reservará um espaço para os grupos exibirem suas descobertas sobre a planta aquática, ou ainda, poderá sistematizar as informações para análise da situação, baseando-se no seguinte texto.

Quadro 3: Texto resumo Lemnas

As lemnas são vegetais aquáticos, também conhecidos popularmente como lentilhas d'água. Elas apresentam um crescimento rápido quando existir espaço e condições adequadas, chegando a dobrar a biomassa em dois ou três dias. Atualmente são utilizadas para o tratamento de efluentes e na piscicultura como alimento para alguns peixes.

Fonte: MIRANDA (2014).

Apenas com o texto sugerido, têm-se dados suficientes para retomar a situação inicial e prosseguir com as etapas da atividade de Modelagem Matemática para uma quantidade Q_0 qualquer de lemnas. Como nessa proposta pretende-se fornecer recursos para a obtenção de alguns resultados importantes ao ensino de

PG, optou-se por inserir um contexto extra em forma de problema para explorar outros assuntos relacionados ao ensino de progressões geométricas.

Com isso, espera-se simplificar a análise do desenvolvimento das lemnas, visto que no problema que traremos a seguir será dada uma quantidade inicial de lemnas inseridas em um contexto experimental de desenvolvimento populacional.

Problema: Pretendendo analisar o crescimento das lemnas, um grupo de pesquisadores separou vinte reservatórios d’água para realizar um experimento. Após prepararem os locais para oferecer condições favoráveis de desenvolvimento das plantas aquáticas, iniciaram as fases da pesquisa. E assim, no primeiro dia do experimento colocaram 200 lemnas em um dos reservatórios, no dia seguinte, por volta do mesmo horário, colocaram 200 lemnas em outro reservatório e prosseguiram desse modo até o vigésimo dia.

Após o experimento, comprovou-se que a população de lemnas, em cada reservatório, se desenvolveu conforme mencionado no texto do Quadro 3 até o décimo sexto dia. Dessa forma, determine um modelo matemático para a situação problema e a quantidade de lemnas presente no décimo sexto dia.

Nas condições dessa situação-problema assumiu-se como hipóteses que as dimensões do ambiente não servirão de limitadores ao desenvolvimento das plantas, e que a biomassa delas após se desenvolverem é equivalente, ou seja, em dois dias representará exatamente o dobro da quantidade inicial. Também se supôs que não haverá perdas durante o período analisado e, ainda, que a curva da sigmoide estará na fase exponencial de crescimento.

De certo, não há uma maneira única para encontrar a solução, entretanto, os alunos podem começar determinando a quantidade de lemnas que se originaram do primeiro reservatório com o passar do tempo. Assim, tomou-se Q_0 como a quantidade inicial de lemnas e p um número par de dias. Assim temos:

$$Q_0 = 200$$

$$Q_2 = 2 \cdot Q_0 = 2 \cdot 200$$

$$Q_4 = 2 \cdot Q_2 = 2 \cdot 2 \cdot 200 = 2^2 \cdot 200$$

$$\vdots$$

Como essa sequência é uma PG, a razão q é dada por:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_1}{Q_o}$$

$$(Q_1)^2 = Q_2 \cdot Q_0$$

$$(Q_1)^2 = 2 \cdot 200 \cdot 200$$

$$Q_1 = \sqrt{40000 \cdot 2}$$

$$Q_1 = 200\sqrt{2} \; ou \; Q_1 = (2)^{\frac{1}{2}} \cdot 200.$$

Dessa forma, temos que a PG possui razão $q = \sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}}$. Esse fato ajuda na visualização das demais quantidades de lemnas e na construção do modelo pelo processo de recorrência. Tomando $Q_0 = 200$, temos:

$$Q_1 = (2)^{\frac{1}{2}} \cdot Q_0 = (2)^{\frac{1}{2}} \cdot 200$$

$$Q_2 = (2)^{\frac{1}{2}} \cdot Q_1 = (2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2)^{\frac{1}{2}} \cdot 200 = 2 \cdot 200$$

$$Q_3 = (2)^{\frac{1}{2}} \cdot Q_2 = (2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot 200 = (2)^{\frac{3}{2}} \cdot 200$$

$$Q_4 = (2)^{\frac{1}{2}} \cdot Q_3 = (2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2)^{\frac{3}{2}} \cdot 200 = 2^2 \cdot 200$$

$$\vdots$$

Em uma tabela, os resultados podem ficar assim dispostos:

Tabela 4: Aumento da quantidade de lemnas caso 1

Tempo (dias)	Quantidade
0	200
1	$(2)^{\frac{1}{2}} \cdot 200$
2	$2 \cdot 200$
3	$(2)^{\frac{3}{2}} \cdot 200$
4	$2^2 \cdot 200$
5	$(2)^{\frac{5}{2}} \cdot 200$
⋮	⋮

Fonte: Elaborado pelo autor.

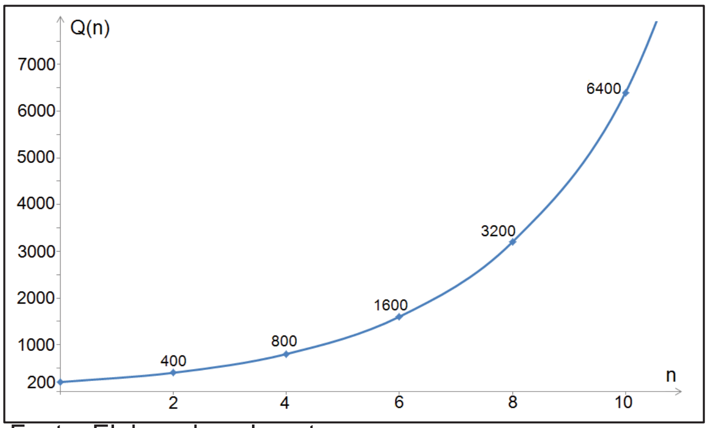
Portanto, para n qualquer de dias, a quantidade de lemnas Q_n é dada por:

$$Q_n = (2)^{\frac{n}{2}} \cdot Q_0$$

ou ainda,

$$Q_n = Q_0 \cdot (2)^{\frac{n}{2}} \tag{8}$$

Gráfico 2: Aumento exponencial de lemnas caso 1



Fonte: Elaborado pelo autor.

Existe ainda outra condição a ser analisada. A saber, o caso em que as lemnas levam três dias para dobrar a quantidade de biomassa, ou seja, duas plantas adultas com a mesma massa. Por isso, tomou-se P_0 como a quantidade inicial de lemnas e como se trata de uma PG, temos a sequência:

$$(200, P_1, P_2, 400, \dots ,)$$

Desse modo, a razão q pode ser determinada por:

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$400 = 200 \cdot q^3$$

$$q^3 = 2$$

$$q = \sqrt[3]{2} \,,$$

Ou seja, $q = (2)^{\frac{1}{3}}$. Como $P_0 = 200$, segue:

$$P_1 = (2)^{\frac{1}{3}} \cdot P_0 = (2)^{\frac{1}{3}} \cdot 200$$

$$P_2 = (2)^{\frac{1}{3}} \cdot P_1 = (2)^{\frac{1}{3}} \cdot (2)^{\frac{1}{3}} \cdot 200 = (2)^{\frac{2}{3}} \cdot 200$$

$$P_3 = (2)^{\frac{1}{3}} \cdot P_3 = (2)^{\frac{1}{3}} \cdot (2)^{\frac{2}{3}} \cdot 200 = (2)^{\frac{3}{3}} \cdot 200$$

$$P_4 = (2)^{\frac{1}{3}} \cdot P_3 = (2)^{\frac{1}{3}} \cdot (2)^{\frac{3}{3}} \cdot 200 = (2)^{\frac{4}{3}} \cdot 200$$

$$\vdots$$

Sendo assim, para n qualquer de dias e P_n a quantidade de lemnas, temos:

$$P_n = P_0 \cdot (2)^{\frac{n}{3}} \qquad (9)$$

Ao validar os dados, os alunos podem representar as respectivas quantidades em uma tabela. Neste caso, optou-se pelos n múltiplos de 3.

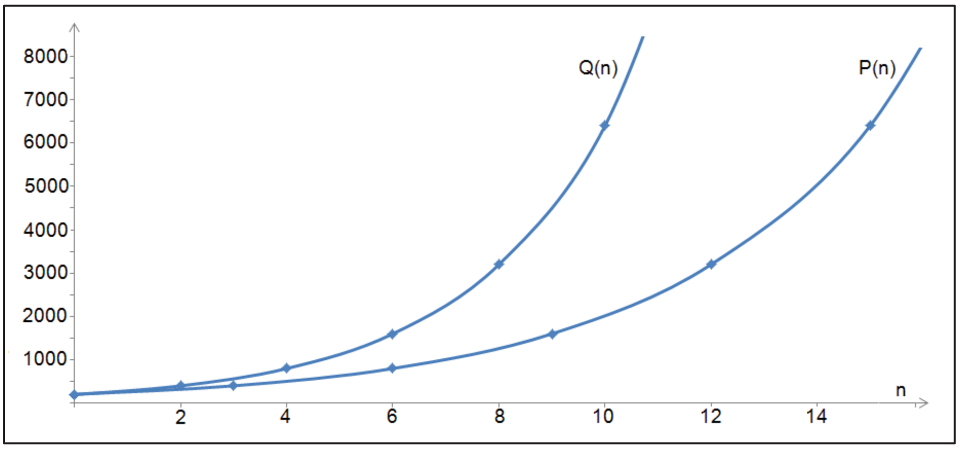
Tabela 5: Aumento da quantidade de lemnas caso 2

Tempo (dias)	**Quantidade**
0	200
3	400
6	800
9	1600
12	3200
15	6400
⋮	⋮

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao final dessa etapa, os alunos podem construir um gráfico comparando os resultados obtidos em ambos os casos.

Gráfico 3: Comparação das quantidades de lemnas em cada Modelo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que o gráfico do crescimento populacional das lemnas nesse exemplo continuará crescendo exponencialmente, porém isso retrata apenas uma fase do comportamento da curva que, na verdade, é uma curva sigmoide, ou seja, em dado momento diminuirá a velocidade devido a fatores do meio até encontrar equilíbrio populacional, podendo sofrer pequenas oscilações em torno de uma média com o passar do tempo.

Isso já era esperado, pois durante a solução considerou-se apenas um período do desenvolvimento populacional: a fase exponencial.

Note que até este ponto os alunos verificaram o crescimento das lemnas no primeiro reservatório. Contudo, ainda resta apenas somar com as quantidades de lemnas que se originaram nos demais reservatórios, conforme proposto pelo problema. Antes disso, o professor deve discorrer, na quinta aula, sobre soma de termos de uma PG.

5.3.4 Soma dos termos de uma progressão Geométrica

Considerando $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \dots, a_{n-1},\ a_n)$ uma PG finita de n termos, sendo a razão q não nula e diferente de 1, tomamos S_n como soma dos termos do seguinte modo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (10)$$

Agora, multiplicaremos ambos os membros da igualdade da pela razão q; obtém-se:

$$q \cdot S_n = q \cdot a_1 + q \cdot a_2 + q \cdot a_3 + q \cdot a_4 + \dots + q \cdot a_{n-1} + q \cdot a_n$$

Como $q \cdot a_1 = a_2$; $q \cdot a_2 = a_3$; $q \cdot a_4 = a_5$; .... ; $q \cdot a_{n-1} = a_n$, rescreveremos:

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_n + q \cdot a_n \quad (11)$$

Fazendo (10) – (11), encontramos;

$$S_n - q \cdot S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + q \cdot a_n)$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - q \cdot a_n$$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$S_n(1 - q) = a_1 - q \cdot a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

Portanto,

$$S_n = \frac{a_1\,(1-q^n)}{1-q} \quad (12)$$

Em vista do problema, temos que a quantidade total de lemnas no décimo sexto dia é obtida somando-se as respectivas populações em cada reservatório. Para facilitar a compreensão, tomou-se R_i como a quantidade de lemnas em cada reservatório, com i natural representando o reservatório.

Desse modo, o total de lemnas pode ser obtido por, $R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_{16}$. Note que no caso 1, em R_{16}, temos $Q_0 = 200$ lemnas.

Da mesma forma, em R_{15}, temos $Q_1 = 200\sqrt{2}$ lemnas.

Sendo assim, temos:

$R_{16} + R_{15} + \cdots + R_2 + R_1 = Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_{14} + Q_{15}$

$R_{16} + R_{15} + \cdots + R_2 + R_1 = 200 + 200\sqrt{2} + 400 + \cdots + 25600\sqrt{2}$

Ou seja, a soma anterior pode ser obtida pela fórmula da soma dos termos de uma PG finita de razão $q = \sqrt{2}$ e $a_1 = 200$. Logo:

$$S_{16} = \frac{200\left[1-\left(\sqrt{2}\right)^{16}\right]}{1-\sqrt{2}} \cong 123\ 125\ lemnas.$$

Um raciocínio similar ao anterior permite inferir para o segundo caso, que o resultado é dado pela soma dos termos de uma PG finita de razão $q = \sqrt[3]{2}$ e $a_1 = 200$. Logo:

$$S_{16} = \frac{200\left[1-\left(\sqrt[3]{2}\right)^{16}\right]}{1-\sqrt[3]{2}} \cong 30\ 253\ lemnas.$$

Portanto, a quantidade de lemnas no primeiro caso é 123 125 e do segundo caso 30 253, nas condições informadas no enunciado.

Ao final da atividade, os grupos poderão comunicar seus resultados, as impressões e descobertas que tiveram durante a atividade. Ressalta-se ainda que o professor deverá propor instrumentos avaliativos condizentes com a metodologia empregada e, assim, valorizar outros aspectos importantes da aprendizagem dos estudantes frente à situação-problema proposta.

5.3.5 Resumo da proposta de atividade: eutrofização em lagos

A seguir foram organizadas resumidamente as etapas do processo de Modelagem Matemática segundo Almeida, Silva e Vertuan (2016) da atividade de eutrofização em lagos.

- Etapa de inteiração.

Pesquisas na internet sobre os impactos causados por esse fenômeno e coleta de informações das características biológicas reprodutivas dos organismos envolvidos nesse problema.

Definição do problema: é possível estimar e monitorar o desenvolvimento da quantidade de cianobactérias unicelulares ou lemnas presentes em um ambiente aquático onde ocorre o fenômeno da eutrofização por esses organismos?

- Matematização e Resolução.

Definição de hipóteses: os organismos são cianobactérias unicelulares ou lemnas, encontram condições favoráveis ao desenvolvimento, e não haverá mortes de nenhum organismo, o intervalo analisado e referente a fase exponencial de desenvolvimento, ou seja, não estabilizou o crescimento populacional.

No caso das cianobactérias, temos:

Variáveis: quantidade inicial de cianobactéria (Q_0), quantidade de cianobactérias (Q_n), momento (n), tempo em minutos [$T(n)$].

Modelos da situação-problema no caso das cianobactérias:

$Q_n = Q_0 \cdot 2^n$;

$T(n) = 20 \cdot n$.

Matemática da situação: termo geral da progressão geométrica.

No caso das lemnas, temos:

Variáveis: quantidade inicial de lemnas(Q_0), quantidade de lemnas (Q_n) , tempo em dias (n), quantidade de lemnas [$P(n)$], quantidade inicial de lemnas (P_0) e soma da quantidade de lemnas [$S(n)$].

Modelos da situação-problema no caso das lemnas:

Caso 1: $Q_n = Q_0 \cdot (2)^{\frac{n}{2}}$

Caso 2: $P_n = P_0 \cdot (2)^{\frac{n}{3}}$

Matemática da situação: termo geral e soma dos termos de uma progressão geométrica finita.

- Interpretação e Validação.

Os modelos obtidos possibilitam o cálculo da quantidade de cianobactérias unicelulares e lemnas para uma quantidade inicial desses organismos em um ambiente aquático com condições favoráveis ao seu desenvolvimento em um período inferior a fase de estabilização. E ainda, permitem a partir de uma situação problema de experimento calcular a quantidade total de lemnas a partir da somas de termos de uma PG.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No âmbito escolar o ensino da matemática está repleto de estratégias metodológicas que orientam as práticas escolares dos professores. Esse contexto nos levou a vários questionamentos, dentre eles, se as práticas utilizadas em sala de aula estão alinhadas às propostas trazidas nos documentos que regem a educação.

Por isso, ao escolher o tema Modelagem Matemática como alternativa de ensino, decidiu-se verificar se as propostas sugeridas em dissertações de mestrado, com essa estratégia para o ensino de progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG), estão alinhadas aos novos direcionamentos trazidos pela BNCC.

Pautado no interesse em investigar essa questão e a partir das pesquisas realizadas e da análise dos materiais encontrados, verificou-se que existem propostas que abrangem essa temática e que podem contribuir para o ensino de sequências PA e PG na matemática nos moldes das exigências trazidas no documento da BNCC. Ainda que em algumas atividades propostas nas dissertações fosse perceptiva a dificuldade dos autores em aplicar as etapas da Modelagem Matemática, chegando até em alguns casos a apresentarem certa semelhança com atividades voltadas ao ensino por problemas, todavia, ainda assim os resultados mostraram-se satisfatórios.

Ao analisar inicialmente alguns documentos anteriores à BNCC, encontraram-se elementos que justificavam a utilização da Modelagem Matemática no ensino, apesar da metodologia não ser mencionada diretamente neles. Entretanto, na BNCC, além dos elementos que reforçam a aplicação da estratégia estarem alinhados com os autores citados no trabalho, no próprio documento encontra-se a modelagem como forma de estratégia para desenvolver a aprendizagem de forma significativa nos estudantes. Assim sendo, comprovou-se algo que se suspeitava no início da pesquisa.

Visto isso, com o objetivo de analisar como os processos aplicados na Modelagem Matemática para obtenção do modelo matemático podem efetivamente contribuir para o ensino, reuniu-se os argumentos levantados por autores como Bassanezi, Biembengut, Burak, entre outros. Foram a partir desses argumentos que também se chegou à conclusão da necessidade de aplicação da Modelagem Matemática nas abordagens de assuntos em sala de aula.

Esse fato pode ser mais bem observado quando se abordou as etapas do processo de Modelagem Matemática, tecendo-se um paralelo entre os processos utilizados por Almeida, Silva e Vertuan e os utilizados por Bassanezi e Biembengut. Isso permitiu um olhar abrangente sobre cada etapa, ampliando a compreensão do que se espera determinar e desenvolver no aluno para aquele momento da atividade.

Desse modo, ao tratar desses processos, se construiu um suporte para indagar sobre a seguinte questão: como o professor deve conduzir essa metodologia, visto que difere substancialmente daquela empregada com mais frequência nas aulas de matemática? Essa discussão ocorreu de maneira mais aprofundada quando se tratou da condução dos encaminhamentos para a escolha do tema e situação-problema, e ainda quanto aos cuidados a serem tomados durante a condução das atividades.

Por esses fatos, é natural compreender que existem desafios e dificuldades a serem enfrentados por professores e alunos, principalmente quando são tirados de uma zona de conforto sobre suas práticas. E ao analisarem-se esses problemas, por meio das discussões de temas voltados a esses assuntos, são fornecidos recursos aos agentes da aprendizagem, para superação das barreiras que os impedem de se expor a novas práticas educacionais, pois é a partir dessa exposição que são agregados mais recursos, tornando as aulas de matemática mais diversificadas.

Ao tratar das questões anteriores, se construiu uma base para análise das dissertações que tratavam sobre o ensino de PA e PG. Inicialmente, pelas características do ensino por meio de Modelagem Matemática, já havia um hipótese de que essa estratégia poderia contribuir significativamente para desenvolver nos alunos os conhecimentos e habilidades elencados na BNCC, sendo confirmada por meio da pesquisa bibliográfica realizada em todos os materiais utilizados nesse trabalho.

Entretanto, em alguns momentos da escrita, depois de aplicados os filtros para seleção dos materiais que traziam a intenção de aplicar a Modelagem Matemática como estratégia de ensino com propostas de ensino, percebeu-se que mesmo com o levantamento de um número representativo de dissertações, a quantidade de trabalhos que abordam o tema era reduzida em comparação a outros assuntos, como por exemplo, funções.

Desse modo, a criação de duas propostas visa trazer aos professores mais opções de atividade que explorem o assunto PA e PG e contribuam com o ensino de sequências numéricas. Além disso, os temas observados nas propostas, financiamento da casa própria e eutrofização dos lagos por lemnas e cianobactérias, atendem aos pressupostos do ensino por meio de Modelagem Matemática, tomando como base Almeida, Silva e Vertuan (2016), que têm como questões situações de relevância social que podem ser adequadas à realidade da região a qual o estudante vive, ou seja, a proposta visa favorecer a aprendizagem significativa elencada no documento da BNCC.

Como não foram esgotados todos os assuntos aos quais a BNCC traz como requisito necessário ao desenvolvimento das aprendizagens e habilidades dos alunos, sugere-se em outras pesquisas explorar esses conteúdos, tais como funções exponenciais e logarítmicas, a fim de diversificar ainda mais as opções de ensino por meio de Modelagem Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, P. S.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. **BOLEMA – Boletim de Educação Matemática.** Rio Claro, ano 14, n. 15, p. 05-23, 2001b.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73- 80, 2004. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Matematica/artigo_veritati_jonei.pdf. Acesso em: 17 set. 2018.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2006.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática:** teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no ensino.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem & implicações no ensino e na aprendizagem de matemática.** 2. ed. Blumenau: Edifurb, 2004.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática no Ensino Fundamental**. Blumenau: Edifurb, 2014.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 7-32, Florianópolis, jul. 2009.

BRASIL. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Poder Legislativo, **Diário Oficial da União**. Brasília, DF, 23 dez. 1996.
Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em: 01 dez. 2018.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Senado Federal, Brasília, 05 de outubro de 1988. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 26 jun. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Secretaria de Educação Básica, Brasília, DF, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª série): Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Saúde. **Cianobactéria/cianotoxinas:** procedimentos de coleta, preservação e análise. Brasília, 2015. Secretaria de Vigilância e Saúde. Disponível em: https://portalarquivos2.saude.gov.br/images/pdf/2015/janeiro/19/cianobacterias-cianotoxinas-2...pdf. Acesso em: 10 jan. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas (Inep). **Matriz do Piza**.
Disponível em: http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf . Acesso em: 10 set. 2019.

BURAK, D. **Modelagem Matemática e a sala de aula.** *In*: I EPMEM – Encontro Paranaense da Modelagem na Educação Matemática, 2004, Londrina. Anais do I IPEMEM. Londrina, 2004.
Disponível em: http://www.dionisioburak.com.br/artigoseventos. Acesso em: 18 set. 2018.

BURAK, D. As Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática e a Modelagem Matemática. **Perspectiva**, v. 29, n. 113, p. 153-161, Erechim, setembro, 2005.

BURAK, D.. Modelagem Matemática sob um olhar da educação matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, v. 1 n. 1, p.10 – 26, 2010.

CAIXA Econômica Federal. 2020. Disponível em: http://www.caixa.gov.br/Paginas/home-caixa.aspx. Acesso em: 20 jan. 2020.

COMPETÊNCIA. *In*: Aurélio, **Dicionário da Língua Portuguesa**. 5. ed. Versão Digita: Ed. Positivo Soluções Didáticas Ltda, 2010. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=br.com.editorapositivo.aurelio. Acesso em: 26 jun. 2018.

GÓES, A. R. T.; GÓES, H. C. **Modelagem matemática:** teoria, pesquisa e práticas pedagógicas. Curitiba: InterSaberes, 2016.

KOWALSKI. R. L. **Algas invasoras “encobrem” o lago no Parque Tingui de Curitiba e trazem riscos**. Bem Paraná, 2019. Disponível em: https://www.bemparana.com.br/noticia/algas-invasoras-encobrem-lago-no-parque-tingui-de-curitiba-e-trazem-risco#.XhipDX9KjIU. Acesso em: 10 jan. 2020.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

MELZER, E. E. M.; SILVEIRA, E. **Modelagem e Temas Transversais:** a promoção matemática segundo os PCN. *In*. CONGRESO IBEROAMERICANO DE

EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7, 2013. Montevideo. Anais... Montevideo: VII CIBEM, 2013. p. 2964-2971. Disponível em: http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/932.pdf. Acesso em: 11 dez. 2018.

HIPÓTESE. *In*: Michaelis, **Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa**. Versão digital: Ed. Melhoramentos Ltda, 2015. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/ . Acesso em: 10 mar. 2019.

MIRANDA. F. A. G. *et al*. Monitoramento do desenvolvimento de macrófitas aquáticas em laboratório por meio de imagens digitais. **Revista Agrogeoambiental**, v. 6, n. 2, Porto Alegre, agosto de 2014. Disponível em: https://agrogeoambiental.ifsuldeminas.edu.br/index.php/Agrogeoambiental/article/view/482/566. Acesso em: 10 jan. 2020.

MOREIRA. M. A. Aprendizagem Significativa: um conceito subjacente. **Revista Meaningful Learning Review**, v. 1, n. 3, p. 25-46, Porto Alegre, 2011. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/asr/?go=artigos&idEdicao=3. Acesso em: 20 de set. 2019.

OLIVEIRA. F. B. **Modelagem e Sequências Numéricas.** Dissertação (Mestrado) – Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013. Disponível em: https://www.seduc.pi.gov.br/download/arquivos/biblioteca/730293970.dissertacao.pdf . Acesso em: 21 nov. 2019.

PERRENOUD. P. **Dez novas competências para ensinar**. Tradução de: RAMOS, P. C. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PINTO. M. T. U. **Modelagem Matemática através da utilização de softwares no ensino médio para o estudo de sequências numéricas:** progressão aritmética e progressão geométrica. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Macapá, Amapá, 2016. Disponível em: https://www2.unifap.br/matematica/files/2017/07/MODELAGEM-MATEM%c3%81TICA-ATRAV%c3%89S-DA-UTILIZA%c3%87%c3%83O-DE-SOFTWARES-NO-ENSINO-M%c3%89DIO-PARA-O-ESTUDO-DE-SEQU%c3%8aNCIAS-NUM%c3%89RICAS-PROGRESS%c3%83O-ARITM%c3%89TICA-E-PROGRESS%c3%83O-GEOM%c3%89TRICA.pdf. Acesso em: 21 nov. 2019.

Planta aquática prejudica a criação de tambaquis de propriedade em RR. Globo Comunicação e Participações S.A. Globo Rural. Duração: 5 minutos. Disponível em: https://globoplay.globo.com/v/2554295/. Acesso em: 10 de jan. de 2020.

Proliferação de algas deixa parte do Rio Tietê verde na região noroeste paulista. Globo Comunicação e Participações S.A. TEM Notícias 1ª Edição. Rio Preto/ Araçatuba. Duração: 2 minutos. Disponível em: https://globoplay.globo.com/v/7213773/. Acesso em: 10 de jan. de 2020.

“Reprodução das bactérias” em Só biologia. Virtuos Tecnologia da informação, 2008-2020. Disponível em:

https://www.sobiologia.com.br/conteudos/Reinos/biomonera3.php. Acesso em: 10 de jan. 2020.

RODRIGUES, L. L. R. **Biodiversidade de cianobactéria e algas das represas Billings e Guarapiranga**. 2008. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Botânica. Instituto de Biociências da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2008. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/41/41132/tde-02122008-112617/publico/luciana_rodrigues.pdf. Acesso em: 8 jan. 2020.

SANTOS. V. S. **"O que é cianobactéria?"**. Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/biologia/o-que-e-cianobacteria.htm. Acesso em: 10 jan. 2020.

VASCONCELOS. C. F. **Modelagem Matemática no Ensino Médio por meio de Sequências e Séries Numéricas**. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2016. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/143941/fernandesvasconcelos_c_me_rcla.pdf?sequence=3. Acesso em: 21 nov. 2019.

XAVIER. C. R.; DIAS. L. N.; BRUNKOW. R. F. **Qualidade das águas dos reservatórios do Estado do Paraná**. Relatório Técnico, Instituto Ambiental do Paraná, 2017. Disponível em: http://www.iap.pr.gov.br/arquivos/File/Qualidade_das_aguas/RElatoriofinal.pdf. Acesso em: 10 jan. 2020.

APÊNDICE 1 – Reportagem 1

Algas invasoras ‘encobrem’ lago no Parque Tingui de Curitiba e trazem risco.

(Foto: Valquir Aureliano)

Quem passou nos últimos dias pelo Parque Tingui, na região norte de Curitiba, se deparou com um cenário no mínimo curioso. É que um dos lagos que ficam dentro do parque foi praticamente ‘engolido’ por algas, a ponto de não se conseguir ver mais água no local, que mais parece uma extensão do gramado que fica ao lado da pista de corrida.

A situação inspira preocupação principalmente por conta das pessoas que frequentam o local no período noturno, quando há menor visibilidade e, consequentemente, maior risco de acidentes. Por conta disso, foi instalada uma placa alertando sobre as bordas do lago, a fim de evitar que alguém se confunda com a grama e acabe caindo na água.

Por meio de nota, a Prefeitura de Curitiba informou que ações de limpeza começarão a ser feitas no local nas próximas semanas, aproveitando o fato de que quando o clima esfria há diminuição da proliferação dessas plantas áquaticas invasoras, que se reproduzem com facilidade em alguns lagos urbanos e cujo crescimento é favorecido pelo calor.

Em 2016, inclusive, uma situação parecida com essa foi registrada no mesmo parque. Além disso, em 2015 a mesma situação havia sido registrada no Parque Barigui. Em ambas as situações, as plantas tiveram de ser retiradas manualmente.

Disponível em: https://www.bemparana.com.br/noticia/algas-invasoras-encobrem-lago-no-parque-tingui-de-curitiba-e-trazem-risco#.XhipDX9KjIU

Acesso em: 10 jan. 2020.

ANEXO 1 – SUGESTÕES DE REPORTAGENS EM VÍDEO: CIANOBACTÉRIA.

Proliferação de algas deixa parte do Rio Tietê verde na região noroeste paulista. Globo Comunicação e Participações S.A. TEM Notícias 1ª Edição. Rio Preto/ Araçatuba. Duração: 2 minutos.
Disponível em: https://globoplay.globo.com/v/7213773/
Acesso em: 10 de jan. 2020.

ANEXO 2 – SUGESTÕES DE REPORTAGENS EM VÍDEO: LEMNA.

Planta aquática prejudica a criação de tambaquis de propriedade em RR. Globo Comunicação e Participações S.A. Globo Rural. Duração: 5 minutos.
Disponível em: https://globoplay.globo.com/v/2554295/.
Acesso em: 10 de jan. 2020.

ANEXO 3 – LEMNAS.


Disponível em: https://jb.utad.pt/especie/lemna_minor#imagem-18583
Acesso em: 10 jan. 2020.

ANEXO 4 – CIANOBACTÉRIAS.

Disponível em: http://www.jornalja.com.br/estudo-avalia-algas-toxicas-em-lagos-de-pracas-e-parques-da-capital/
Acesso em: 20 jan. 2020.