

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RICARDO AUGUSTO BORBA

MATEMÁTICA INTERVALAR APLICADA A FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO
MULTIPERÍODO E TRIFÁSICO

CURITIBA

2020

RICARDO AUGUSTO BORBA

MATEMÁTICA INTERVALAR APLICADA A FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO
MULTIPERÍODO E TRIFÁSICO

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadora: Profa. Dra. Thelma Solange Piazza Fernandes

CURITIBA

2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

B726m Borba, Ricardo Augusto
Matemática intervalar aplicada a fluxo de potência ótimo multiperíodo e trifásico [recurso eletrônico] / Ricardo Augusto Borba. – Curitiba, 2020.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, 2020.

Orientadora: Thelma Solange Piazza Fernandes.

1. Sistemas de energia elétrica. 2. Eletrônica de potência. I. Universidade Federal do Paraná.
II. Fernandes, Thelma Solange Piazza. III. Título.

CDD: 621.317

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

No dia quinze de julho de dois mil e vinte às 14:00 horas, na sala --, Defesa remota- Teams, foram instaladas as atividades pertinentes ao rito de defesa de dissertação do mestrando **RICARDO AUGUSTO BORBA**, intitulada: **Matemática Intervalar aplicada a Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Trifásico**, sob orientação da Profa. Dra. THELMA SOLANGE PIAZZA FERNANDES. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA ELÉTRICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: THELMA SOLANGE PIAZZA FERNANDES (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), ELIZETE MARIA LOURENÇO (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), ALEXANDRE RASI AOKI (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ), ANDREA LUCIA COSTA (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ). A presidência iniciou os ritos definidos pelo Colegiado do Programa e, após exarados os pareceres dos membros do comitê examinador e da respectiva contra argumentação, ocorreu a leitura do parecer final da banca examinadora, que decidiu pela APROVAÇÃO. Este resultado deverá ser homologado pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais definidos pelo programa. A outorga de título de mestre está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, THELMA SOLANGE PIAZZA FERNANDES, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos demais membros da Comissão Examinadora.

CURITIBA, 15 de Julho de 2020.

Assinatura Eletrônica
21/07/2020 17:30:41.0

THELMA SOLANGE PIAZZA FERNANDES
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
21/07/2020 15:53:39.0

ELIZETE MARIA LOURENÇO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
21/07/2020 15:57:23.0

ALEXANDRE RASI AOKI
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
21/07/2020 17:04:15.0

ANDREA LUCIA COSTA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO
PARANÁ)

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA ELÉTRICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **RICARDO AUGUSTO BORBA** intitulada: **Matemática Intervalar aplicada a Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Trifásico**, sob orientação da Profa. Dra. THELMA SOLANGE PIAZZA FERNANDES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 15 de Julho de 2020.

Assinatura Eletrônica

21/07/2020 17:30:41.0

THELMA SOLANGE PIAZZA FERNANDES

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

21/07/2020 15:53:39.0

ELIZETE MARIA LOURENÇO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

21/07/2020 15:57:23.0

ALEXANDRE RASI AOKI

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

21/07/2020 17:04:15.0

ANDREA LUCIA COSTA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

*Diese Arbeit widme ich meinen Eltern Edvald und Sebastiana,
meinem Bruder Eduardo
und meiner Freundin Thamiris*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela vida e força durante todo esse trabalho

Aos meus pais Edvald e Sebastiana por terem me proporcionado educação, ensino, carinho e amor, que me guiaram até aqui.

Ao meu irmão Eduardo pelo companheirismo e ajuda.

À minha namorada Thamiris Karoline pelo verdadeiro amor, amizade, confiança, companheirismo, dedicação e apoio sempre.

Ao meu padrasto Prof. Djalma Lopes de Medeiros (*in memoriam*) por ter sido uma verdadeira inspiração e amigo.

À Prof^a. Dr^a. Thelma pela amizade, orientação, dedicação, confiança, ajuda e conhecimento transmitido.

Aos membros da banca examinadora, Prof^a. Dr^a. Elizete, Prof^a. Dr^a. Andreia e Prof. Dr. Alexandre pela dedicação na revisão desse trabalho.

Aos meus familiares por sempre apoiar e estarem presentes.

À família da minha namorada pelo acolhimento, amizade, confiança e ajuda.

Ao meu amigo Helder pela longa e verdadeira amizade.

*“A verdadeira motivação vem de realização,
desenvolvimento pessoal,
satisfação no trabalho e reconhecimento.”
(Frederick Herzberg)*

RESUMO

As principais ferramentas para operação e planejamento dos sistemas elétricos de potência (SEP) são o Fluxo de Potência (FP) e Fluxo de Potência Ótimo (FPO). Contudo, em grande parte, a análise feita por estas ferramentas entregam valores determinísticos, ou seja, desconsiderando as eventuais incertezas que ocorrem nos sistemas elétricos. Tais incertezas que alteram a solução de um FP ou FPO são causadas principalmente por erro de dados de linhas e transformadores, previsão de demanda e de geração distribuída. Uma estratégia para incorporar essas incertezas nas ferramentas citadas é através da Matemática Intervalar (MI), que permite a inclusão de intervalos de dados ao invés de um único ponto garantindo uma maior abrangência de estados possíveis do sistema. Além disso, a análise é realizada de uma única vez, ao contrário de métodos probabilísticos que executam exaustivas simulações. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é incorporar a Matemática Intervalar no Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e no Fluxo de Potência Ótimo Trifásico (ferramentas clássicas para análise e otimização de redes ativas de distribuição), a fim de se considerar incertezas de dados de carga e geração. A Matemática intervalar é aplicada como um problema de pós-otimização, ou seja, após uma otimização determinística são acrescentados faixas de incertezas nos parâmetros da rede para que assim possa ser utilizado o método de Krawczyk para a determinação de uma faixa ótima de operação da rede. O método proposto foi comparado com resultados obtidos a partir de 200 simulações que geraram valores aleatórios de carga e geração solar, dentro de uma faixa pré-especificada. Através de simulações feitas com o sistema IEEE de 34 Barras, os resultados obtidos foram próximos aos valores da análise aleatória, com uniformidade na faixa de valores dos resultados independentemente da incerteza utilizada e baixo esforço computacional.

Palavras-chave: Fluxo de potência ótimo trifásico. Fluxo de potência ótimo multiperíodo. Matemática intervalar. Método de Krawczyk. Incerteza de geração e carga.

ABSTRACT

The main tools for the operation and planning of electrical power systems (EPS) are the Power Flow (PF) and the Optimal Power Flow (OPF). However, the analysis made by these tools generally results in deterministic values, in other words, disregarding any uncertainties that occur in electrical systems. These uncertainties that alter the solution of an OPF or PF are caused mainly by data errors from lines and transformers, as well as the inaccurate demand forecast and distributed generation. In addition, possible failures or unavailability of generators may be considered. A strategy, in order to incorporate these uncertainties in EPS analysis tools, is the Interval Mathematics (IM), which allows the inclusion of data ranges instead of a single point ensuring a wider range of possible states of the system to be analyzed at once, as opposed to deterministic methods that perform exhaustive simulations. In addition, with the increase of Distributed Generations (DGs), storage systems and the improvement of distribution networks have affected the planning and operation of Distribution Lines (DLs), since it is necessary to coordinate these devices in networks that were designed to operate with unidirectional power flows. Thus, the objective of this work is to incorporate Interval Mathematics in the Multiperiod Optimal Power Flow and in the Three Phase Optimal Power Flow, in order to consider uncertainties in load and generation data. The Interval mathematics is applied as a post-optimization problem, that is, after a deterministic optimization, ranges of uncertainties are applied to the network parameters so that the Krawczyk method can be used to determine an optimal range of operation of the network. The proposed method was compared with results obtained from 200 simulations that generated random values of load and solar generation, within a pre-specified range. Through simulations made with the IEEE 34 Bus system, the results obtained were close to the values of the random analysis, with uniform results obtained regardless of the uncertainty used and low computational power.

Keywords: Three-phase optimal power flow. Multiperiod optimal power flow. Interval mathematics. Krawczyk Method. Load and generation uncertainty.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Propriedades da matemática intervalar	28
Figura 2 – União	29
Figura 3 – Interseção	30
Figura 4 – Função x^2	32
Figura 5 – Função $\text{sen}(x)$	33
Figura 6 – Circuito π Equivalente Linha Trifásica	69
Figura 7 – Circuito π Equivalente Linha Trifásica na Forma Matricial	70
Figura 8 – Fasores	78
Figura 9 – Fluxograma do FPOT e FPOMP intervalares	79
Figura 10 – Sistema <i>IEEE</i> 34 barras	81
Figura 11 – Perfil de tensão – Caso 1	82
Figura 12 – Perfil de tensão – Período 19 – Caso 1	83
Figura 13 – Geração Ativa na Barra 1 – Caso 1	84
Figura 14 – Geração Reativa – Caso 1	85
Figura 15 – Potência da bateria – Caso 1	86
Figura 16 – Perfil de tensão – Caso 2	87
Figura 17 – Perfil de tensão – Período 19 – Caso 2	88
Figura 18 – Geração potência ativa – Caso 2	89
Figura 19 – Geração de potência reativa – Caso 2	90
Figura 20 – Potência ativa da bateria – Caso 2	90
Figura 21 – Perfil de tensão – Caso 3	92
Figura 22 – Perfil de tensão – Período 19 – Caso 3	93
Figura 23 – Geração de potência ativa – Caso 3	94
Figura 24 – Geração de potência reativa – Caso 3	95
Figura 25 – Potência ativa da bateria – Caso 3	96
Figura 26 – Perfil de tensão – Caso 4	97
Figura 27 – Perfil de tensão – Período 19 – Caso 4	98
Figura 28 – Geração de potência ativa – Caso 4	99
Figura 29 – Geração de potência reativa – Caso 4	100
Figura 30 – Potência ativa da bateria – Caso 4	101
Figura 31 – Perfil de tensão – Caso 1T	104
Figura 32 – Geração ativa – Caso 1T	105
Figura 33 – Geração reativa – Caso 1T	107
Figura 34 – Perfil de tensão – Caso 2T	108
Figura 35 – Geração ativa – Caso 2T	109
Figura 36 – Geração reativa – Caso 2T	110

Figura 37 – Perfil de tensão – Caso 3T	112
Figura 38 – Geração ativa – Caso 3T	113
Figura 39 – Geração reativa – Caso 3T	115

Lista de tabelas

Tabela 1 – Operações Aritméticas via MI	27
Tabela 2 – Exemplo 1.2 – Resumo das iterações – Newton intervalar	37
Tabela 3 – Exemplo 1.3 – Resumo das iterações – Krawczyk	40
Tabela 4 – Exemplo 1.4.1 – Resumo de resultados	42
Tabela 5 – Exemplo 1.4.2 – Resumo de resultados	44
Tabela 6 – Configurações de teste do FPOMP	81
Tabela 7 – Análise Estatística – Caso 1 Superior	83
Tabela 8 – Análise Estatística – Caso 1 – Inferior	84
Tabela 9 – Comparação de valores – P_{GH} – Caso 1	86
Tabela 10 – Comparação de valores – P_{BAT} – Caso 1	87
Tabela 11 – Análise estatística da tensão– Caso 2 – Limite superior	89
Tabela 12 – Análise estatística da tensão – Caso 2 – Limite inferior	89
Tabela 13 – Comparação de valores – P_{GH} – Caso 2	91
Tabela 14 – Comparação de valores – P_{BAT} – Caso 2	92
Tabela 15 – Análise estatística da tensão – Caso 3 – Limite superior	94
Tabela 16 – Análise estatística da tensão – Caso 3 – Limite inferior	94
Tabela 17 – Comparação de valores – P_{GH} – Caso 3	96
Tabela 18 – Comparação de valores – P_{BAT} – Caso 3	97
Tabela 19 – Análise estatística da tensão – Caso 4 – Limite superior	98
Tabela 20 – Análise estatística da tensão – Caso 4 – Limite inferior	99
Tabela 21 – Comparação de valores – Caso 4	101
Tabela 22 – Comparação de valores – Caso 4	102
Tabela 23 – Tempo de Simulação	102
Tabela 24 – Configurações de teste do FPOT	103
Tabela 25 – Análise estatística da tensão – Caso 1T – Limite superior	104
Tabela 26 – Análise estatística da tensão – Caso 1T – Limite inferior	105
Tabela 27 – Análise estatística da geração ativa superior – Caso 1T	106
Tabela 28 – Análise estatística da geração ativa inferior – Caso 1T	106
Tabela 29 – Análise estatística da geração reativa superior – Caso 1T	106
Tabela 30 – Análise estatística da geração reativa inferior – Caso 1T	107
Tabela 31 – Análise estatística da tensão – Caso 2T – Limite superior	108
Tabela 32 – Análise estatística da tensão – Caso 2T – Limite inferior	109
Tabela 33 – Análise estatística da geração ativa superior – Caso 2T	110
Tabela 34 – Análise estatística da geração ativa inferior – Caso 2T	110
Tabela 35 – Análise estatística da geração reativa superior – Caso 2T	111
Tabela 36 – Análise estatística da geração reativa inferior – Caso 2T	111

Tabela 37 – Análise estatística da tensão – Caso 3T – Limite superior	112
Tabela 38 – Análise estatística da tensão – Caso 3T – Limite inferior	113
Tabela 39 – Análise estatística da geração ativa superior – Caso 3T	114
Tabela 40 – Análise estatística da geração ativa inferior – Caso 3T	114
Tabela 41 – Análise estatística da geração reativa superior – Caso 3T	114
Tabela 42 – Análise estatística da geração reativa inferior – Caso 3T	115
Tabela 43 – Tempo de Simulação	115
Tabela 44 – Peso das cargas e geração	127
Tabela 45 – Dados da geração solar	127
Tabela 46 – Dados de linha <i>IEEE</i> 34 barras – Resistência	129
Tabela 47 – Dados de linha <i>IEEE</i> 34 barras – Reatância	130
Tabela 48 – Dados das cargas – <i>IEEE</i> 34 Barras	131

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AA	Aritmética Afim
AI	Aritmética Intervalar
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
BC	Banco de Capacitor
FP	Fluxo de Carga
FP	Fluxo de Potência
FPT	Fluxo de Potência Trifásico
FPO	Fluxo de Potência Ótimo
FPOMP	Fluxo de Potência Ótimo MultiPeríodo
FPOMPI	Fluxo de Potência Ótimo MultiPeríodo Intervalar
FPOT	Fluxo de Potência Ótimo Trifásico
FPOTI	Fluxo de Potência Ótimo Trifásico Intervalar
GD	Geração Distribuída
LD	Linha de Distribuição
LT	Linha de Transmissão
MI	Matemática Intervalar
MPIPD	Método dos pontos Interiores PrimalDual
SEP	Sistemas Elétricos de Potência
VSC	<i>Voltage Source Converter</i>
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronic Engineers</i>

Lista de símbolos

ωc	peso relacionado aos custos de geração
ωbat	peso relacionado ao custo da bateria
ωp	peso relacionado às perdas elétricas
$cost^t$	custo da potência fornecida pela subestação no período t
$cost_{degradation}^t$	custo de degradação da bateria
$P_{g_i}^t$	vetor de potência ativa gerada na barra i no período t
$Q_{g_i}^t$	vetor de potência reativa gerada na barra i no período t
$P_{gsol_i}^t$	vetor de potência ativa solar gerada na barra i no período t
$Q_{gsol_i}^t$	vetor de potência reativa solar gerada na barra i no período t
P_i^t	vetor de injeção potência ativa na barra i no período t
Q_i^t	vetor de injeção de potência reativa na barra i no período t
$P_{d_i}^t$	vetor de demanda de potência ativa na barra i no período t
$Q_{d_i}^t$	vetor de demanda de potência reativa na barra i no período t
$P_{BAT_i}^t$	vetor de demanda de potência ativa na barra i no período t
$Q_{BAT_i}^t$	vetor de demanda de potência reativa na barra i no período t
\dot{V}_i^t	fasor da tensão na barra i no período t
$\dot{V}_{min_i}^t$ e $\dot{V}_{max_i}^t$	limites mínimo e máximo da magnitude de tensão na barra i no período t
a_j^t	posição do <i>tap</i> do regulador de tensão na linha j no período t
$a_{min_j}^t$ e $a_{max_j}^t$	limites mínimo e máximo do <i>tap</i> do regulador de tensão na linha j no período t
c_i^t	susceptância capacitiva do banco de capacitor presente na barra i no período t
$c_{max_i}^t$	limite máximo da susceptância capacitiva do banco de capacitor presente na barra i no período t

η	eficiência de carga e descarga do banco de baterias
fl_j^t	fluxo de potência na linha j no período t
fl_{max}^t	Limite máximo de fluxo de potência na linha j no período t
$f.o.$	Função objetivo
nb	número de barras
nl	número de linhas
t	número de períodos
\underline{x}	o valor inferior do intervalo X
\bar{x}	o valor superior do intervalo X
\underline{y}	o valor inferior do intervalo Y
\bar{y}	o valor superior do intervalo Y
X e Y	vetores intervalares genéricos
\cap	Interseção
\cup	União
\emptyset	Conjunto vazio
K	Operador de Krawczyk
N	Operador de Newton
C	Matriz de pré-condicionamento
$P_{g_{a,b,c}}^i$	é a geração de potência ativa Intervalar, nas fases a,b e c
$Q_{g_{a,b,c}}^i$	é a geração de potência reativa Intervalar, nas fases a,b e c
$P_{g_{a,b,c}}^d$	é a geração de potência ativa determinística, nas fases a,b e c
$Q_{g_{a,b,c}}^d$	é a geração de potência reativa determinística, nas fases a,b e c
δ_g	valor da margem de inicialização do intervalo de geração
$P_{d_{a,b,c}}^i$	é a demanda de potência ativa Intervalar, nas fases a,b e c
$Q_{d_{a,b,c}}^i$	é a demanda de potência reativa Intervalar, nas fases a,b e c
$P_{d_{a,b,c}}^d$	é a demanda de potência ativa determinística, nas fases a,b e c

$Q_{d_{a,b,c}}^d$	é a demanda de potência reativa determinística, nas fases a,b e c
δ	valor da incerteza adotada para o cálculo do intervalo
x	é o fasor de tensão complexa na forma retangular ($x = e + jf$)
δ_v	margem de inicialização do intervalo de tensão
$\mathbf{P}_{\mathbf{g}}^{a,b,c}$	vetor com geração de potência ativa para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 1)$
$\mathbf{P}_{\mathbf{d}}^{a,b,c}$	vetor de demanda de potência ativa para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 1)$
$\mathbf{Q}_{\mathbf{g}}^{a,b,c}$	vetor com geração de potência reativa para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 1)$
$\mathbf{Q}_{\mathbf{d}}^{a,b,c}$	vetor de demanda de potência reativa para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 1)$
$\dot{\mathbf{V}}^{a,b,c}$	vetor com tensão nodal para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 1)$
$\dot{\mathbf{Y}}^{a,b,c}$	matriz de admitância de barra para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 3nb)$
$\mathbf{c}^{a,b,c}$	vetor com os bancos de capacitores para as fases A, B e C, com dimensão $(nb \times 1)$.
$\mathbf{P}_{\mathbf{g}_{min}}$ e $\mathbf{P}_{\mathbf{g}_{max}}$	limites mínimo e máximo de geração de potência ativa para as fases A, B e C
$\mathbf{Q}_{\mathbf{g}_{min}}$ e $\mathbf{Q}_{\mathbf{g}_{max}}$	limites mínimo e máximo de geração de potência reativa para as fases A, B e C
$ \dot{\mathbf{V}}_{min} $ e $ \dot{\mathbf{V}}_{max} $	limites mínimo e máximo de magnitude de tensão nas as fases A, B e C
$X_{a,b,c} = E_{a,b,c} + jF_{a,b,c}$	
$K(X_{a,b,c})$	operador de Krawczyk referente ao fasor de tensão
P_d^i	demanda de potência ativa intervalar
Q_d^i	demanda de potência reativa intervalar
P_d^d	demanda de potência ativa determinística
Q_d^d	demanda de potência reativa determinística

δ_{PQ}	valor da incerteza adotada para o cálculo do intervalo de potência
V_{rk}^i	parte real da tensão intervalar na barra k
V_{rk}^d	parte real da tensão determinística na barra k
V_{mk}^i	parte imaginária da tensão intervalar na barra k
V_{mk}^d	parte imaginária da tensão determinística na barra k
δ_{Vmax}	é variação percentual da tensão
I_{rk}^i	é a componente real da injeção de corrente intervalar na barra k
I_{mk}^i	componente imaginária da injeção de corrente intervalar na barra k
G_{ki}	condutância entre as barras k e i
B_{ki}	susceptância entre as barras k e i
ϕ_k	conjunto de barras vizinhas de k , incluindo k
ΔI_{rk}^i	componente real do resíduo de corrente intervalar
ΔI_{mk}^i	componente imaginária do resíduo de corrente intervalar
X^h	vetor das variáveis do problema na iteração h
X^{h+1}	vetor das variáveis do problema na iteração $h + 1$
<i>tolerância</i>	tolerância determinada para o ponto de parada do método de Krawczyk
\dot{Z}_{km}^{aa}	impedância própria da linha na fase A, entre as barras k e m
\dot{Z}_{km}^{bb}	impedância própria da da linha na fase B, entre as barras k e m
\dot{Z}_{km}^{cc}	impedância própria da da linha na fase C, entre as barras k e m
$\dot{Z}_{km}^{ab} = Z_{km}^{ba}$	impedâncias mútuas entre as linhas das fases A e B, entre as barras k e m
$\dot{Z}_{km}^{bc} = Z_{km}^{cb}$	impedâncias mútuas entre as linhas das fases B e C, entre as barras k e m
$\dot{Z}_{km}^{ac} = Z_{km}^{ca}$	impedâncias mútuas entre as linhas das fases A e C, entre as barras k e m
\dot{Z}_{km}^{abc}	matriz de impedâncias
$\dot{Y}_{sh_{km}}^{abc}$	matriz de admitâncias <i>shunt</i> trifásica entre as barras k e m .

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Objetivos	23
1.2	Organização da Dissertação	23
2	MATEMÁTICA INTERVALAR	25
2.1	Termos básicos, operações intervalares e conceitos	26
2.2	Matrizes e vetores intervalares	30
2.2.1	Exemplos	31
2.2.2	Funções elementares	31
2.3	Métodos de solução para sistemas de equações intervalares	33
2.3.1	Sistemas de equações lineares	33
2.3.2	Sistema de equações não lineares	35
2.3.2.1	Método de Newton Intervalar	35
2.3.2.2	Método de <i>Krawczyk</i>	37
2.3.3	Exemplo 1.4.2: otimização restrita com incerteza	42
2.4	Revisão Bibliográfica	44
2.5	Considerações finais	47
3	FLUXO DE POTÊNCIA INTERVALAR E FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO INTERVALAR	48
3.1	Introdução	48
3.2	Revisão Bibliográfica	48
3.3	Fluxo de Potência Intervalar	51
3.4	Fluxo de Potência Ótimo Intervalar	54
3.4.1	Inicialização das variáveis intervalares	55
3.4.2	Aplicação do Método de <i>Krawczyk</i> ao FPO	58
3.5	Considerações finais	59
4	FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO TRIFÁSICO E MULTIPERÍODO INTERVALAR	61
4.1	Definição de FPO	61
4.2	Fluxo de Potência Ótimo MultiPeríodo Intervalar	62
4.2.1	Aplicação da matemática intervalar no fluxo de potência ótimo multiperíodo	65
4.3	Fluxo de Potência Ótimo Trifásico	68
4.3.1	Representação Trifásica	69
4.3.1.1	Modelagem das Linhas	69

4.3.1.2	Modelagem das Cargas	71
4.3.1.3	Modelagem dos bancos de capacitores	71
4.3.2	Fluxo de Potência Ótimo Trifásico Intervalar	72
4.3.2.1	Aplicação da matemática intervalar no fluxo de potência ótimo trifásico	74
4.3.2.1.1	Referência para tensões trifásicas	77
4.4	Considerações finais	79
5	RESULTADOS	80
5.1	Sistema testado	81
5.2	Cenário 1 – FPOMP	81
5.2.1	Caso 1 – Incerteza solar de 5% e carga de 5%	82
5.2.2	Caso 2 - Incerteza solar de 10% e carga de 5%	87
5.2.3	Caso 3 – Incerteza solar de 20% e carga de 5%	92
5.2.4	Caso 4 – Incerteza solar de 30% e carga de 5%	97
5.2.5	Discussão de resultados	102
5.3	Cenário 2	103
5.3.1	Caso 1T – Incerteza de 2 % na carga e 10 % na geração solar	103
5.3.2	Caso 2T – Incerteza de 5% na carga e 10% na geração solar	107
5.3.3	Caso 3T – Incerteza de 10% na carga e 10% na geração solar	111
5.3.4	Discussão de resultados	116
6	CONCLUSÃO E SUGESTÕES	117
	REFERÊNCIAS	119
	APÊNDICES	126
	APÊNDICE A – DADOS DAS CARGAS E GERAÇÃO - FPOMP	127
	ANEXOS	128
	ANEXO A – DADOS DE LINHA – IEEE 34 BARRAS	129
	ANEXO B – DADOS DE CARGA – IEEE 34 BARRAS	131

1 Introdução

Para a execução das etapas de planejamento e operação de sistemas elétricos de potência, são utilizadas as mais diversas ferramentas matemáticas de análise e de otimização. Dentre elas, salientam-se o Fluxo de Potência (FP) o Fluxo de Potência Ótimo (FPO).

Além do FP e do FPO, existem outros métodos que também analisam e otimizam o estado da rede, como o Fluxo de Potência Ótimo Trifásico (FPOT) proposto em Bruno et al. (2011), Araujo e Penido (2013), e Baran e Fernandes (2016) e o Multiperíodo de Uurbey e Costa (2005), Borges, Fernandes e Almeida (2011) e Blasi (2020).

O FPO monofásico já foi vastamente utilizado para análises e ajustes de sistemas de transmissão e distribuição. No entanto, com a crescente complexidade das redes ativas de distribuição, a representação monofásica equilibrada não tem sido mais adequada, sendo substituída pela trifásica que é mais condizente com a realidade destas redes em 13,8 e 34,5 kV (PEREIRA; FERNANDES; AOKI, 2018).

Nessa linha de representação trifásica, dentre os métodos usuais para análise de redes, pode-se citar o Fluxo de Potência Ótimo Trifásico (FPOT), tal como o proposto por Baran e Fernandes (2016), que utiliza a representação trifásica, considerando os acoplamentos mútuos entre as fases e desequilíbrio de cargas e que otimiza o sistema apenas para um instante específico.

Reforça-se ainda que o planejamento e operação das redes de distribuição tem sido afetado pela expansão da geração distribuída e de dispositivos de armazenamentos de energia, tais como sistemas fotovoltaicos e bancos de bateria, que quebraram o paradigma de se operar a rede apenas com fluxos de potência unidirecionais, ou seja, da subestação à carga (PEREIRA; COSTA, 2007).

A inserção de energia solar, por exemplo, tem sido crescente, pois ela apresenta baixo impacto ambiental (fonte limpa) e seu custo tem caído. Contudo, ela apresenta uma natureza aleatória de geração. Para contornar esse problema da aleatoriedade e garantir o fornecimento de energia com uma margem segura, podem ser utilizados bancos de bateria, a fim de se diminuir o efeito da intermitência desse tipo de fonte. Logo, existe a necessidade de se coordenar esses dispositivos com a rede de distribuição a fim de satisfazer os requisitos de qualidade da energia fornecida (ABBEY et al., 2011).

Para tanto, pode-se utilizar um Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo (FPOMP), tal como o proposto por Blasi (2020), que além de otimizar o estado da rede para um horizonte de 1 dia a frente, também otimiza o processo de carga e descarga de bancos de

baterias de acordo com a modulação da fonte solar.

Outra ferramenta de análise para redes ativas de distribuição é o **FPOT** cujo balanço de potência ativa e reativa e restrições de desigualdades (como limites de magnitudes de tensão nas barras e fluxo nas linhas) utilizam a representação trifásica da rede. Similarmente, o **FPOMP** possui as mesmas características do **FPOT** exceto por ser monofásico e por ser multiperíodo para poder incluir a otimização da energia armazenada nos bancos de baterias.

Entretanto, na maioria das vezes a solução obtida através ou de Fluxo de Potência (**FP**) ou de Fluxo de Potência Ótimo (**FPO**) é tratada através de valores determinísticos, quando na verdade podem ocorrer variações incertas ao longo do tempo, fazendo com que a natureza desse problema seja probabilística (**WANG; ALVARADO, 1992**).

Tais incertezas que alteram a solução dos métodos de análises são causadas por: incerteza nos dados de linhas e transformadores, previsão de demanda imprecisa (**WANG; ALVARADO, 1992**); e, possíveis falhas ou indisponibilidade de geradores (**PEREIRA, 2011**). Logo, os dados do sistema, como carga e geração, por exemplo, não deveriam ser considerados apenas como valores pontuais, mas sim por intervalos, para que as soluções dos métodos de análise também sejam fornecidas por intervalos de solução mais prováveis (**WANG; ALVARADO, 1992**).

Uma das linhas de estudos que fornecem conjuntos de solução prováveis para problemas com incertezas é a busca exaustiva pela maior gama possível de combinações de estados do sistema, como por exemplo, de carga e geração. No entanto, as desvantagens dessa abordagem são: elevado número de simulações; e, conseqüentemente tempo computacional alto, devido à elevada geração de resultados não conclusivos (**PEREIRA, 2011**).

Para contornar essas desvantagens, oriundas da necessidade de se incorporar incertezas de carga e geração nos usuais problemas de análise, existem alguns trabalhos que propõem a utilização da Matemática Intervalar (**MI**) para esse fim, tal como proposto por **Pereira e Costa (2012)** e **Araújo (2016)** que a aplicaram no Fluxo de Carga e **Monego (2017)** que a aplicou no **FPO**. A Matemática Intervalar considera um conjunto de métodos para manipular intervalos numéricos que aproximam dados incertos. Estes métodos baseiam-se na definição da Aritmética Intervalar e do produto escalar ótimo.

Como já comentado, um exemplo de aplicação da Matemática Intervalar no Fluxo de Potência foi realizado por **Pereira e Costa (2012)**, cuja formulação do **FP** (modelada via injeção de corrente para o cálculo dos *mismatches* do Método de Newton) foi alterada para que cada iteração forneça intervalos de soluções.

Similarmente, a **MI** foi aplicada ao **FPO** por **Monego (2017)** (via Método de **Krawczyk**). Deve-se lembrar que o **FPO**, além das restrições de igualdade que se referem ao

balanço de potência ativa e reativa, também é formado por função objetivo a ser otimizada e restrições de desigualdades, tais como limite de tensão nas barras e fluxo nas linhas.

1.1 Objetivos

Sabendo que o **FPOMP** e **FPOT** estão sujeito às mesmas incertezas encontradas no **FP** e **FPO** e que há carência de trabalhos que utilizam a **MI** aplicada a problemas de otimização de Sistemas Elétricos de Potência (**SEP**), esse trabalho tem como objetivo aplicar essa técnica ao **FPOMP** e **FPOT**. Para tanto, pretende-se aprimorar o Fluxo de Potência Ótimo Trifásico de **Baran e Fernandes (2016)** e Multiperíodo de **Blasi (2020)**, introduzindo os conceitos da **MI** a fim de se obter intervalos ótimos de solução ao invés de apenas valores ótimos pontuais de solução tal como feito por **Monego (2017)** para um **FPO** monofásico e monopériodo, estendido agora para um **FPO** trifásico e um **FPO** multiperíodo.

Assim será possível calcular um intervalo ótimo para cada variável de otimização de um **FPOT** e de um **FPOMP**, ou seja, uma faixa de valores ao invés de um único ponto de operação.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Avaliar Fluxo de Potência Ótimo monofásico intervalar;
- Avaliar a literatura técnico-científica sobre a aplicação da modelagem intervalar para o cálculo do fluxo de carga considerando a incerteza de carga e aplicação da modelagem intervalar no **FP**, **FPOMP** e **FPOT**;
- Desenvolver metodologia para incorporar **MI** no **FPOT** e **FPOMP** considerando incerteza de carga e geração solar;
- Testar e validar resultados nos sistemas *IEEE* 34 barras para o **FPOMP** e **FPOT** intervalar.

1.2 Organização da Dissertação

Este documento está dividido em seis capítulos.

O Primeiro Capítulo foi responsável por introduzir o contexto e justificativa deste trabalho.

O **Capítulo 2** apresenta os conceitos básicos de operações e técnicas, uma revisão bibliográfica de aplicações da Matemática intervalar em problemas de sistema de equações e otimização, além de mostrar alguns exemplos simples;

O [Terceiro Capítulo](#) mostra uma revisão bibliográfica da matemática intervalar aplicada a problemas de Sistemas Elétricos de Potência ([SEP](#)). Além disso, descreve a modelagem matemática de um modelo de Fluxo de Carga Intervalar e de um modelo de Fluxo de Potência Ótimo monofásico intervalar.

O [Capítulo 4](#) apresenta o modelo dos elementos de rede de distribuição e modelagem determinística dos Fluxos de Potência Ótimo Multiperíodo e Trifásico, bem como a proposta desta dissertação, que é aprimorar essas duas modelagens através da inclusão da matemática intervalar, a fim de considerar incertezas de carga.

Já o [Capítulo 5](#) tem o objetivo de mostrar os sistemas utilizados, as técnicas de validação e os resultados obtidos com a proposta deste trabalho.

Por fim, [Capítulo 6](#) tem o objetivo de concluir o trabalho, além de apresentar propostas futuras e discussões.

2 Matemática Intervalar

Um dos primeiros relatos de utilização de intervalos se deu em 1914, com Norbert Wiener, que descreveu resultados de medição de distância (PALMEIRA; BEDREGAL; SANTIAGO, 2011). Já os conceitos da Aritmética Intervalar, AI, foram feitos através de Burkill (1924) e Young (1931).

Entretanto, citam-se como trabalhos mais expressivos da Matemática Intervalar (MI) os de Warmus (1956), Sunaga (1958) e Moore (1959), sendo este último considerado o pai da matemática intervalar, pois foi quem teve grande contribuição para esta área através de vários artigos e, principalmente, através de seu livro (MOORE, 1966), onde é apresentado o conceito da análise intervalar e proposto o Método de Newton Intervalar.

A MI tem como base a operação aritmética de intervalos numéricos, que possuem limite superior e inferior. Além disso, é muito utilizada na solução de problemas que envolvem incertezas, as quais são manipuladas através de intervalos (GWALTNEY et al., 2008; MONEGO, 2017) controle de erro de arredondamento, representação de aproximações, valores contínuos e erros de truncamento (VARGAS et al., 2008).

Além de Moore (1966), citam-se alguns outros trabalhos notáveis da MI:

- Krawczyk (1969) que descreveu pela primeira vez o consagrado método de Krawczyk;
- (MOORE, 1979) que é um livro sobre aplicações e métodos da matemática intervalar;
- (NEUMAIER, 1990 apud MOORE, 2009) que é um livro que discute métodos intervalares para solução de sistemas de equações;
- Hansen e Walster (2003 apud MOORE, 2009) e (NEUMAIER, 2004 apud MOORE, 2009) que são livros sobre otimização global que utilizam a análise intervalar.

Cita-se ainda Comba e Stol (1993) apresentam um novo método de computação numérica chamado de Aritmética Afim (AA). Ela possui semelhança com a Aritmética Intervalar convencional, com o adicional de se ter controle automático de erro de arredondamento e truncamento para cada um dos valores calculados. A AA também conta com correlação entre as variáveis e sub-fórmulas, por isso consegue entregar limites mais restritos para as variáveis calculadas. A Aritmética Afim também pode ser utilizada em problemas de computação gráfica, especialmente em *Ray Tracing* (Traçado de Raios) e na construção de *Octrees*.

Para que se possa ter entendimento da MI que será aplicada ao Fluxo de Potência Ótimo Trifásico e Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo, este capítulo se propõe a

detalhar conceitos fundamentais da matemática intervalar, bem como analisar aplicações na solução de sistemas de equações e otimização, através dos métodos de Newton Intervalar e Krawczyk. Tal método será empregado no problema de pós-otimização do Fluxo de Potência Multiperíodo e Fluxo de Potência Ótimo Trifásico, cujo objetivo é encontrar como solução intervalos ótimos.

A seguir, serão apresentados os conceitos básicos da Matemática Intervalar, tais como operações algébricas, operações com vetores e matrizes e métodos de solução de sistemas de equações.

2.1 Termos básicos, operações intervalares e conceitos

Como referência para as operações básicas da matemática intervalar nesta seção, utilizou-se livro de [Moore \(2009\)](#).

E, para fins didáticos, consideram-se os intervalos $X = [\underline{x}; \bar{x}]$ e $Y = [\underline{y}; \bar{y}] \in \mathbb{R}$ onde:

- \underline{x} é o valor inferior do intervalo X ;
- \bar{x} é o valor superior do intervalo X ;
- \underline{y} é o valor inferior do intervalo Y ;
- \bar{y} é o valor superior do intervalo Y .

A [Tabela 1](#) apresenta um resumo de como são realizadas as principais operações aritméticas utilizando-se intervalos.

A fim de ilustrar as operações apresentadas na Tabela 1, considere o [Exemplo 1.1](#), a seguir apresentado.

Exemplo 1.1: Deseja-se calcular a área de um retângulo, cujos lados são de 1 m e 2 m, com uma incerteza de medição equivalente 0,0005 m.

Com isso, tem-se:

$$0,9995 \leq l_1 \leq 1,0005$$

e

$$1,9995 \leq l_2 \leq 2,0005.$$

Com isso, criam-se os intervalos:

$$L_1 = [0,9995; 1,0005]$$

Tabela 1 – Operações Aritméticas via MI

Nome	Operação
Adição	$X + Y = [\underline{x} + \underline{y}; \bar{x} + \bar{y}]$
Pseudo-inverso aditivo	$-X = [-\bar{x}; -\underline{x}]$
Subtração	$X - Y = X + (-Y) = [\underline{x} - \bar{y}; \bar{x} - \underline{y}]$
Multiplicação	$X \cdot Y = [\min S; \max S]$ $S = \{\underline{x} \cdot \underline{y}; \underline{x} \cdot \bar{y}; \bar{x} \cdot \underline{y}; \bar{x} \cdot \bar{y}\}$
Divisão	$X \div Y = \left\{ X \cdot \left(\frac{1}{Y} \right) \right\}$ $\frac{1}{Y} = \left\{ y : \frac{1}{y} \in Y \right\} = \left[\frac{1}{\bar{y}}; \frac{1}{\underline{y}} \right]$ com $y \neq 0$

Fonte: Adaptado de Moore (2009).

e

$$L_2 = [1, 9995; 2, 0005].$$

A área é calculada através da fórmula:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= L_1 \cdot L_2 \\ &= [0, 9995; 1, 0005] \cdot [1, 9995; 2, 0005]. \end{aligned}$$

Aplicando a definição de multiplicação intervalar, conforme a propriedade apresentada na Tabela 1, tem-se:

$$\text{Área} = [1.99850025; 2.00150025].$$

Outras operações e conceitos são:

(I) **Módulo:** O módulo de um dado intervalo X é definido por:

$$|X| = \max \{|\underline{x}|, |\bar{x}|\} \quad (2.1)$$

sendo que $|x| \leq |X| \forall x \in X$.

(II) Ponto Médio: O ponto médio de um intervalo X é definido por:

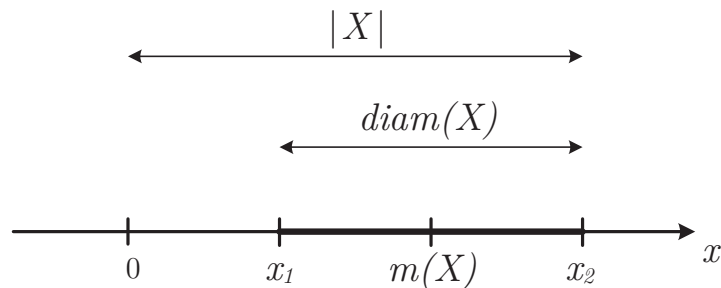
$$m(X) = \frac{1}{2} \cdot (\underline{x} + \bar{x}). \quad (2.2)$$

(III) Diâmetro: A definição do diâmetro de um intervalo X é descrita por:

$$diam(X) = \bar{x} - \underline{x}. \quad (2.3)$$

Tais propriedades podem ser visualizadas graficamente, conforme a [Figura 1](#).

Figura 1 – Propriedades da matemática intervalar



Fonte: O autor (2020).

(IV) Função genérica: Qualquer intervalo X pode ser definido através da [Equação 2.4](#).

$$\begin{aligned} X &= m(X) + \left[-\frac{1}{2} \cdot diam(X); \frac{1}{2} \cdot diam(X) \right] \\ &= m(X) + \frac{1}{2} \cdot diam(X) \cdot [-1; 1]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(V) Intervalo degenerado: Um intervalo é considerado degenerado se:

$$\underline{x} = \bar{x} \quad \underline{x} \text{ e } \bar{x} \in \mathbb{R}.$$

Tal intervalo contém apenas um número x real e, por convenção, pode ser denominado por $[x; x]$. Um exemplo de Intervalo degenerado é:

$$0 = [0; 0].$$

(VI) Intervalo simétrico: Um intervalo X simétrico é definido de acordo com a Equação 2.5.

$$X = [-\underline{x}; \bar{x}]. \quad (2.5)$$

Segundo (OLIVEIRA; CLAUDIO; DIVERIO, 2001), que enunciou o seguinte teorema:

Teorema 1.1: Todo intervalo simétrico possui a forma $[-a; a]$, com $a \geq 0$

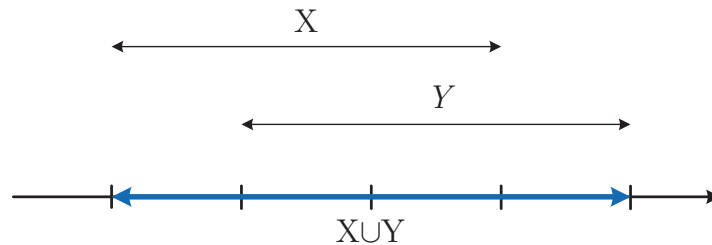
São exemplos de intervalo simétrico: $[-5; 5]$, $[0; 0]$, $[-\pi; \pi]$.

(VII) União: A união de dois intervalos X e Y é definida conforme a Equação 2.6.

$$\begin{aligned} X \cup Y &= \{z : z \in X \text{ ou } z \in Y\} \\ &= [\max\{\underline{x}; \underline{y}\}; \min\{\bar{x}; \bar{y}\}]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A união pode ser visualizada graficamente pela Figura 2.

Figura 2 – União



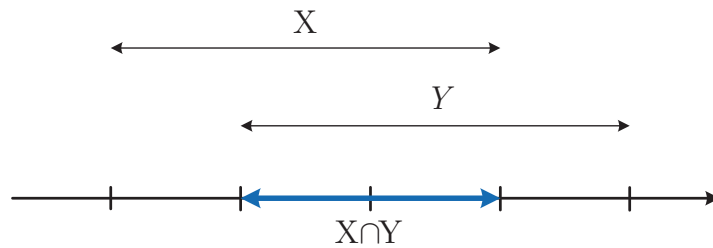
Fonte: O autor (2020).

(VIII) Interseção: A interseção de dois intervalos X e Y , denominada como $X \cap Y$, é definida de acordo com a Equação 2.7

$$\begin{aligned} X \cap Y &= \{z : z \in X \text{ e } z \in Y\} \\ &= [\max\{\underline{x}; \underline{y}\}; \min\{\bar{x}; \bar{y}\}]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A interseção, entre dois intervalos X e Y , pode ser graficamente visualizada na Figura 3.

Figura 3 – Interseção



Fonte: O autor (2020).

(IX) Conjunto vazio: Um conjunto é considerado vazio quando os intervalos X e Y não possuem nenhum ponto em comum. Ou seja:

$$\bar{y} < \underline{x} \text{ ou } \bar{x} < \underline{y}. \quad (2.8)$$

Neste caso, o conjunto vazio possui a denominação \emptyset e é escrito como:

$$X \cap Y = \emptyset. \quad (2.9)$$

2.2 Matrizes e vetores intervalares

Os fundamentos apresentados neste capítulo também podem ser aplicados a vetores e matrizes intervalares.

Seja um vetor \mathcal{V} de dimensão n e intervalar. Este vetor é representado de acordo com a [Equação 2.10](#).

$$\mathcal{V} = [X_1; X_2; \dots; X_n] = \{[\underline{x}_1; \bar{x}_1]; [\underline{x}_2; \bar{x}_2]; \dots; [\underline{x}_n; \bar{x}_n]\}. \quad (2.10)$$

Seja uma matriz qualquer \mathcal{M} . Esta matriz é dita intervalar de dimensão $m \times n$ se cada elemento A_{ij} for um intervalo ([OLIVEIRA; CLAUDIO; DIVERIO, 2001](#)). Por exemplo:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\underline{x}_{11}; \bar{x}_{11}] & [\underline{x}_{12}; \bar{x}_{12}] \\ [\underline{x}_{21}; \bar{x}_{21}] & [\underline{x}_{22}; \bar{x}_{22}] \end{bmatrix}.$$

Para ilustrar um exemplo numérico de uma matriz intervalar, considera-se uma matriz \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1; 2] & [-4; 4] & [1; 1] \\ [0; 3] & [-5; -2] & [7; 7] \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, \mathcal{A} representa uma matriz intervalar de dimensão 2×3 .

Os conceitos das operações básicas, mostradas na [Seção 1.3](#) são válidos para operações com vetores e matrizes.

2.2.1 Exemplos

Dada uma função $f(x)$, monovariável tal que $x \in \mathbb{R}$, quando aplicada à matemática intervalar, deve respeitar a seguinte condição:

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}.$$

Quando ampliada para o caso multivariável:

$$f(X_1, \dots, X_n) = \{f(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}.$$

2.2.2 Funções elementares

Algumas funções elementares são bastantes simples de se aplicar na [MI](#), por exemplo:

- $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R},$

se $X = [\underline{x}; \bar{x}]$, então:

$$f(X) = \{x^2 : x \in X\}. \quad (2.11)$$

Assim, a [Equação 2.11](#) pode ser definida conforme a [Equação 2.12](#).

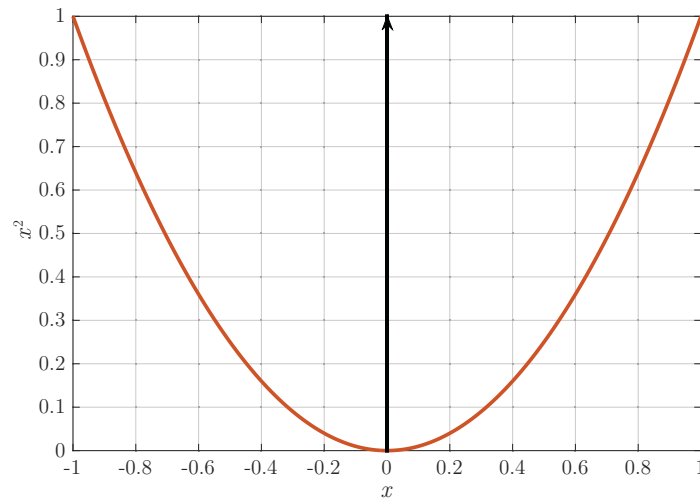
$$f(X) = \begin{cases} [\underline{x}^2; \bar{x}^2], & 0 \leq \underline{x} \leq \bar{x} \\ [\bar{x}^2; \underline{x}^2], & \underline{x} \leq \bar{x} \leq 0 \\ [0; \max\{\underline{x}^2; \bar{x}^2\}], & \underline{x} \leq 0 \leq \bar{x}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Um importante detalhe é de que a [Equação 2.11](#) e [2.12](#) não são equivalentes a $X \cdot X$, pois:

$$X = [-1; 1]$$

$$X^2 = [-1; 1] = [0; 1] \quad X \cdot X = [-1; 1] \cdot [-1; 1] = [-1; 1].$$

Assim, $f(X)$ pode ser visualizada graficamente através da [Figura 4](#).

Figura 4 – Função x^2 

Fonte: O autor (2020).

- $f(x) = \text{sen } x$.

Considerando $X = [\underline{x}; \bar{x}]$, então a função seno intervalar $f(X)$ é definida de acordo com a [Equação 2.13](#)

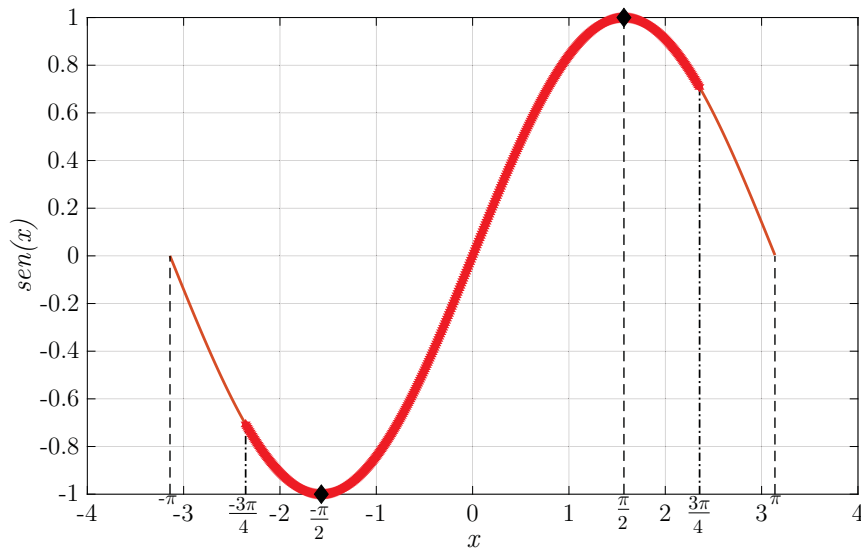
$$\text{sen}(X) = [\text{sen } \underline{x}; \text{sen } \bar{x}] \quad \text{para } X \subseteq \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \quad (2.13)$$

A [Equação 2.13](#) é válida apenas para intervalos que estão compreendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, pois esses são os dois valores no qual a função atinge o mínimo e o máximo, respectivamente. Quando algum dos limites da variável intervalar está fora, a função intervalar assumirá valor -1 e/ou 1 , pois a senoide é uma função cíclica.

Dessa forma, se $\underline{x} \leq \frac{\pi}{2}$ e $\bar{x} \geq \frac{\pi}{2}$, então $\text{sen}(X) = [-1; 1]$ sempre. Para exemplificar isso, considera-se um intervalo $X = \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$. Esta propriedade pode ser explicada conforme o gráfico da [Figura 5](#).

Esta aplicação também é válida para a função cosseno ([MOORE, 2009](#)).

$$\begin{aligned} \text{sen}(X) &\neq \left[\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right); \text{sen}\left(\frac{+3\pi}{4}\right)\right] \\ &\quad \vdots \\ \text{sen}(X) &= [-1; 1] \text{ e } \left[\text{sen}\left(\frac{-3\pi}{4}\right); \text{sen}\left(\frac{+3\pi}{4}\right)\right] = [-0,7071; 0,7071] \end{aligned}$$

Figura 5 – Função $\text{sen}(x)$ 

Fonte: O autor (2020).

2.3 Métodos de solução para sistemas de equações intervalares

Esta seção tem o objetivo apresentar alguns dos métodos de soluções de sistema de equações lineares e não lineares intervalares.

2.3.1 Sistemas de equações lineares

Considera-se um sistema de equações lineares, conforme a [Equação 2.14](#):

$$\mathcal{A} \cdot x - \mathbf{b} = 0 \quad (2.14)$$

onde:

\mathcal{A} é uma matriz quadrada $n \times n$;

\mathbf{b} é um vetor de dimensão $1 \times n$.

Para a solução do sistema modelado na [Equação 2.14](#), considerando que seja intervalar, existem dois caminhos tradicionalmente conhecidos ([MOORE, 2009](#)):

1. Métodos diretos, como eliminação de Gauss (com ou sem pivoteamento), sendo esta responsável por um resultado exato, mas mais difícil de resolver;
2. Métodos iterativos (ou indiretos), que buscam a solução dentro de uma tolerância arbitrária.

Diferentes métodos iterativos de solução de sistemas de equações lineares são apresentados nos trabalhos de Hansen e Walster (1993), Moore (2009). O primeiro autor utiliza uma técnica que envolve uma combinação da eliminação de Gauss e aritmética intervalar e tem como desvantagem o aumento do diâmetro do intervalo, pois os erros passam por um arredondamento. Já o segundo autor recomenda o Método de Krawczyk, que será abordado com mais detalhes nos próximos capítulos, por ser a ferramenta utilizada no Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e Trifásico Intervalares.

O Método de Newton Intervalar, proposto por Moore (1966), toma como base o Método de Newton através da adaptação do operador *Newtoniano* para um operador Intervalar.

O método apresentado por Hansen e Walster (1993) utiliza uma combinação da eliminação de Gauss e aritmética intervalar. Este método apresenta a desvantagem de aumentar o diâmetro do intervalo, pois os erros passam por um arredondamento.

Considerando que o sistema Equação 2.14 é intervalar, define-se o novo conjunto de equações, através da Equação 2.15.

$$\mathcal{A}^I \cdot X - \mathbf{b}^I = 0. \quad (2.15)$$

O conjunto de soluções definidos na Equação 2.15 é definido na Equação 2.16.

$$s = \{x : \mathcal{A} \cdot X = \mathbf{b}, \mathcal{A} \in \mathcal{A}^I, \mathbf{b} \in \mathbf{b}^I\} \quad (2.16)$$

onde:

\mathcal{A}^I é uma matriz quadrada $n \times n$ intervalar;

\mathbf{b}^I é um vetor de dimensão $1 \times n$ intervalar.

Para diminuir o aumento rápido do intervalo, manipula-se a Equação 2.15, acrescentando a matriz \mathcal{B} , que é a inversa de \mathcal{A} , nos dois lados da equação:

$$\mathcal{B} \cdot \mathcal{A}^I \cdot X = \mathcal{B} \cdot \mathbf{b}^I. \quad (2.17)$$

Ao acrescentar o termo \mathcal{B} , conforme a Equação 2.17, embora aumente o custo computacional, pois há a necessidade de inverter a matriz \mathcal{A} , faz com que a nova matriz $\mathcal{B}\mathcal{A}^I$ tenha uma diagonal fortemente dominante, melhorando o condicionamento numérico (HANSEN; WALSTER, 1993).

2.3.2 Sistema de equações não lineares

Para a obtenção da solução de um sistema de equações não lineares, $f(x) = 0$, o Método de Newton constrói uma série convergente de pontos. Da mesma maneira, existe a versão intervalar do Método de Newton, onde é possível construir uma sequência de intervalos convergente, onde o limite é a solução de $f(x)$ que está contida em um intervalo.

2.3.2.1 Método de Newton Intervalar

Considerando que $f(x) = 0$ é uma função não-linear e continuamente diferenciável. Aplicando o teorema do valor médio, tem-se:

$$f(y) = f(x) + J(c) \cdot (y - x) \quad (2.18)$$

onde:

y : é um valor incremental em relação a x ;

c : ponto médio do intervalo $X = [x; y]$;

J : matriz Jacobiana no ponto médio.

Assumindo que $f(y) = 0$ e que existe uma solução x , que satisfaz [Equação 2.19](#).

$$J(c) \cdot (x - y) = -f(y). \quad (2.19)$$

Define-se um intervalo $[x, y] \in X$, sendo X o vetor de variáveis de entrada.

Manipulando a [Equação 2.19](#), tem-se:

$$J(c) \cdot (X - x) = -f(x). \quad (2.20)$$

Define-se $N(X)$ como operador de Newton intervalar, que é equivalente a solução intervalar da [Equação 2.20](#).

Se existe um zero da função $f(y)$, com $y \in X$ para qualquer $x \in X$, então $y \in N(x; X)$. Dessa forma define-se o operador de Newton intervalar, que corresponde ao intervalo X ([HANSEN; WALSTER, 1993](#)), ([MORI; YUIHARA, 1999](#)), ([MOORE, 2009](#)):

$$\begin{aligned} N(X_k) &= m(X_k) - f(m(X_k)) \cdot (J(X_k))^{-1} \\ &= m(X_k) - \frac{f(m(X_k))}{F'(X_k)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Definido o operador de Newton intervalar, define-se o novo vetor de variáveis atualizado a cada iteração, de acordo com a [Equação 2.22](#).

$$X_{(k+1)} = X_{(k)} \cap N(X_{(k)}) \quad (2.22)$$

onde:

k é a iteração ($k = 1, 2, 3, \dots$).

O método se repete até que se atinja uma determinada tolerância, a qual é calculada através da [Equação 2.23](#).

$$\frac{|diam(X_{(k+1)}) - diam(X_{(k)})|}{2} \leq \text{tolerância}. \quad (2.23)$$

A fim de exemplificar uma aplicação do Método de Newton Intervalar, apresenta-se o [Exemplo 1.2](#).

Exemplo 1.2: Calcule a corrente I (mA) que flui num diodo que satisfaz a equação $1 - I - 0,0052 \cdot \ln(10^9 \cdot I) = 0$ utilizando o método de Newton intervalar. Considere $I_0^I = [0,050000; 0,950000]$ A ([MOORE, 2009](#)).

Primeiramente, determina-se $f(x)$ e $J(X)$ intervalares.

$$f(I) = 1 - m(I^I) - 0,0052 \cdot \ln(10^9 \cdot m(I^I))$$

$$J(I^I) = -\frac{13}{2500 * I^I} - 1$$

onde:

- $I = m(I^I) = \frac{I + \bar{I}}{2}$;

I^I é o intervalo da variável do problema, corrente.

Através do Método de Newton convencional (determinístico), obteve-se como resposta $I = 0,892828$ mA.

Aplicando a [Equação 2.21](#) e [Equação 2.22](#), determina-se o valor de $N(I_k^I)$ e $I_{(k+1)}^I$ para cada iteração.

A [Tabela 2](#) compara o Método de Newton intervalar com o método tradicional para os valores da corrente a cada iteração até atingir a convergência, calculada com a [Equação 2.23](#), cuja tolerância foi determinada como 10^{-6} .

Observa-se que ambos os métodos convergem para o mesmo ponto. Além disso, percebe-se, através dos resultados, que $I \in I^I$, o que está de acordo com a teoria do

Tabela 2 – Exemplo 1.2 – Resumo das iterações – Newton intervalar

Iteração	I^I [mA] - Intervalar	I [mA] Determinístico
0	[0, 050000; 0, 950000]	0,5
1	[0, 858554; 0, 893688]	0,891769
2	[0, 892826; 0, 892830]	0,892828
3	[0, 892828; 0, 892828]	—

Fonte: O autor (2020).

Método de Newton Intervalar, de que a solução sempre está contida no intervalo de soluções. Além disso, utilizou-se um intervalo inicial contendo a solução verdadeira do problema. Isso garante que durante o processo iterativo consiga convergir e não tenha interseção vazia (MOORE, 1966), (MOORE, 1979), (HANSEN; WALSTER, 1993), (OLIVEIRA; CLAUDIO; DIVERIO, 2001) e (MOORE, 2009).

2.3.2.2 Método de *Krawczyk*

O método de *Krawczyk* (KRAWCZYK, 1969), derivado do método de Newton Intervalar, tem como uma das principais vantagens a necessidade de inverter a matriz Jacobiana apenas uma vez, ao invés de cada iteração, como no Método de Newton Intervalar (LIAO et al., 2017), (WU et al., 2019) e (LU et al., 2019).

Este método foi também estudado por *Krawczyk e Neumaier* (1986), *Neumaier* (1990), *Hansen e Walster* (2003) e *Moore* (2009). Trata-se de um método que tem como objetivo diminuir erros de condicionamento numérico causados pela inversão da matriz Jacobiana, visto que esta poder apresentar problemas de singularidade (ALEFELD; MAYER, 2000).

Dessa forma, considerando uma função $f(x)$ contínua no intervalo a ser estudado, então define-se a matriz de pré-condicionamento de acordo com a [Equação 2.24](#).

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\mathbf{J}(x)} = \frac{1}{\mathbf{F}'(x)}. \quad (2.24)$$

A matriz \mathbf{C} deve ser não-singular e inversível.

A modelagem matemática de *Krawczyk* é obtida através da adição do termo $(x - y)$ em ambos os lados da [Equação 2.20](#).

$$(\mathbf{J}(X) - I) \cdot (y - x) = f(x) + x - y \quad (2.25)$$

$$y = f(x) + x + (I - \mathbf{J}(X)) \cdot (y - x). \quad (2.26)$$

Considerando que $[x; y] \in X$, então y pode ser substituído por X .

$$K(x; X) = -f(x) + x + (I - \mathbf{J}(X)) \cdot (X - x). \quad (2.27)$$

Além disso, é introduzida a matriz de pré-condicionamento, definida em [Equação 2.24](#), utilizada para evitar intervalos crescentes durante a solução do problema ([SETA, 2015](#)). Assim, o operador de Krawczyk é definido de acordo com a [Equação 2.28](#):

$$K(x_{(k)}; X_{(k)}) = x_{(k)} - \mathbf{C} \cdot f(x_{(k)}) + (\mathbf{I} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{J}(X_{(k)})) \cdot (X_{(k)} - x_{(k)}) \quad (2.28)$$

onde:

- $x_{(k)}$ é o valor médio do intervalo $X_{(k)}$, na iteração k ;
- $X_{(k)}$ é a variável intervalar do problema, na iteração k , onde $x_{(k)} \in X_{(k)}$;
- \mathbf{C} é a matriz de pré-condicionamento;
- $\mathbf{J}(X_{(k)})$ é a Jacobiana intervalar do problema, na iteração k .

Semelhante ao método de Newton intervalar, uma vez definido o operador de Krawczyk, define-se o novo vetor de variáveis intervalar atualizado a cada iteração, de acordo com a [Equação 2.29](#).

$$X_{(k+1)} = X_{(k)} \cap K(x_{(k)}; X_{(k)}). \quad (2.29)$$

O método se repete até que se atinja uma determinada tolerância, a qual é calculada através da [Equação 2.30](#).

$$\frac{|diam(X_{(k+1)}) - diam(X_{(k)})|}{2} \leq tolerância. \quad (2.30)$$

A fim de exemplificar uma aplicação do Método de Krawczyk, apresenta-se o [Exemplo 1.3](#).

Exemplo 1.3: Considerando o mesmo exercício do [Exemplo 1.2](#), onde se pede para calcular a corrente de um diodo. Desta vez, o mesmo problema será resolvido pelo método de Krawczyk ([MOORE, 2009](#)).

Primeiramente, determina-se a matriz de pré-condicionamento, que se mantém constante durante todo o processo iterativo:

$$f(I) = 1 - m(I^I) - 0,0052 \cdot \ln(10^9 \cdot m(I^I))$$

$$J(I) = -\frac{13}{2500 * I^I} - 1.$$

Sabendo que o ponto médio inicial é:

$$m(I^I) = \frac{0,050000 + 0,950000}{2} = 0,500000$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{J}(0,500000) = -\frac{13}{2500 \cdot 0,500000} = -1,010400$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{C} = -0,989707.$$

Após calcular \mathbf{C} , inicia-se o processo iterativo e é necessário determinar o operador de Krawczyk, conforme a [Equação 2.28](#) :

$$K(I_{(k)}; I_{(k)}^I) = I_{(k)} - \mathbf{C} \cdot f(I) + [\mathbf{I} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{J}(I^I)] \cdot (I^I - I)$$

onde:

$$I_{(k)} = m(I_{(k)}^I) = \frac{I_{(k)} + \bar{I}_{(k)}}{2}$$

I^I é o intervalo da variável do problema, corrente

\mathbf{I} é uma matriz identidade.

Iteração 0:

$$\mathbf{J}_{(0)} = ([0,050000; 0,950000]) = [-1,104000; -1,005474]$$

$$I_{(0)}^I = [0,050000; 0,950000] \text{ mA} \quad I_{(0)} = 0,5 \text{ mA} \quad C = -0,989707$$

\vdots

$$K(I_{(0)}; I_{(0)}^I) = [0,850082; 0,933455]$$

$$I_{(1)}^I = [0,850082; 0,933455] \cap [0,050000; 0,950000]$$

$$I_{(1)}^I = [0,850082; 0,933455].$$

O processo se repete, até que a tolerância seja atingida, de acordo com a [Equação 2.30](#). Neste caso, também foi determinada como 10^{-6} .

A [Tabela 3](#) mostra os valores obtidos do intervalo de Corrente para cada iteração e compara com o método de Newton clássico.

Tabela 3 – Exemplo 1.3 – Resumo das iterações – Krawczyk

Iteração	I^I [mA] - Intervalar	I [mA] Determinístico
0	[0,050000; 0,950000]	0,5
1	[0,850082; 0,933455]	0,891769
2	[0,892817; 0,892840]	0,892828
3	[0,892828; 0,892828]	—

Fonte: O autor (2020).

Da mesma forma do [Exemplo 1.2](#), o método apresentou uma convergência do intervalo em direção à solução determinística e respeitando que $I \in I^I$.

Exemplo 1.4.1: otimização restrita

Considere o problema a seguir adaptado de [Ichida \(1996\)](#):

$$\max f(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 6x_1$$

s.a.

$$3x_1 + 4x_2 - 6 \leq 0.$$

Introduzindo uma variável de folga quadrática no problema, tem-se:

$$\max f(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 6x_1$$

s.a.

$$3x_1 + 4x_2 - 6 + s_1^2 = 0$$

Com isso, a [Equação 2.31](#) mostra a função Lagrangeana referente ao exemplo:

$$\mathcal{L}(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 6x_1 + \lambda \cdot \{3x_1 + 4x_2 - 6 + s_1^2\} \quad (2.31)$$

Logo, a solução ótima do problema pode ser obtida através do sistema de equação mostrada na [Equação 2.32](#), considerando que as variáveis são intervalares:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_k} = \begin{bmatrix} -4X_{1(k)} + 2X_{2(k)} + 6 + 3\lambda_{(k)} \\ 2X_{1(k)} - 4X_{2(k)} + 4\lambda_{(k)} \\ 3X_{1(k)} + 4X_{2(k)} - 6 + S_{1(k)}^2 \\ 2\lambda_{(k)}S_{1(k)} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.32)$$

Através da função Lagrangeana, determina-se o Jacobiano intervalar:

$$\mathbf{J}(X_k) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2S_{1(k)} \\ 0 & 0 & 2S_{1(k)} & 2\lambda(k) \end{bmatrix}.$$

Utilizando como intervalo inicial:

$$X_{1(0)} = [-10; 10] \quad X_{2(0)} = [-10; 10] \quad \lambda_{(0)} = [-10; 10] \quad S_{1(0)} = [-10; 10].$$

Resolvendo o problema através do Método de Newton intervalar, considerando uma tolerância de 10^{-6} , tem-se na primeira iteração:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_i} \right]_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_{(0)} = \begin{bmatrix} [-4; -4] & [2; 2] & [3; 3] & [0; 0] \\ [1; 1] & [-4; -4] & [4; 4] & [0; 0] \\ [3; 3] & [4; 4] & [0; 0] & [20; 20] \\ [0; 0] & [0; 0] & [-20; 20] & [-20; 20] \end{bmatrix}.$$

Aplicando a [Equação 2.21](#) e [Equação 2.22](#), determina-se o valor de $N(x_k; X_k)$ e $X_{(k+1)}$ para cada iteração.

$$N(x_{(0)}, X_{(0)}) = \begin{bmatrix} 1,8333 & 1,8333 \\ 0,5417 & 0,5417 \\ 0,0833 & 0,0833 \\ -0,0833 & -0,0833 \end{bmatrix}$$

$$X_{(1)} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -10 & 10 \\ -10 & 10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1,8333 & 1,8333 \\ 0,5417 & 0,5417 \\ 0,0833 & 0,0833 \\ -0,0833 & -0,0833 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,8333 & 1,8333 \\ 0,5417 & 0,5417 \\ 0,0833 & 0,0833 \\ -0,0833 & -0,0833 \end{bmatrix}.$$

O processo continua até que a tolerância, calculada com a [Equação 2.23](#) seja atingida.

A [Tabela 4](#) resume os valores obtidos do intervalo das variáveis para cada iteração, até a convergência.

Ao final da sétima iteração valor da função é $F(X^*) = [5,3514 ; 5,3514]$.

Até então, todos os exemplos tinham as funções com os coeficientes pontuais, ou seja, sem considerar incertezas. Sendo assim, a matemática intervalar serviu para ampliar

Tabela 4 – Exemplo 1.4.1 – Resumo de resultados

Iteração	X_1	X_2	λ	S_1
1	[1, 8333; 1, 8333]	[0, 5417; 0, 5417]	[0, 0833; 0, 0833]	[-0, 0833; -0, 0833]
2	[1, 4158; 1, 8333]	[0, 4200; 0, 5417]	[-0, 3922; 0, 0833]	[-0, 4756; -0, 0833]
3	[1, 4158; 1, 4420]	[0, 4136; 0, 4200]	[-0, 3717; -0, 3531]	[-0, 4756; -0, 0833]
4	[1, 4420; 1, 4561]	[0, 3989; 0, 4136]	[-0, 3531; -0, 3236]	[-0, 0833; -0, 0566]
5	[1, 4561; 1, 4607]	[0, 4050; 0, 4051]	[-0, 3236; -0, 3224]	[-0, 0566; -0, 0067]
6	[1, 4595; 1, 4595]	[0, 4051; 0, 4053]	[-0, 3242; -0, 3236]	[-0, 0067; 0, 0001]
7	[1, 4595; 1, 4595]	[0, 4053; 0, 4054]	[-0, 3243; -0, 3242]	[0, 0000; 0, 0000]

Fonte: O autor (2020).

a busca do ponto ótimo, cujo resultado se dá através da convergência do intervalo até um ponto. Dessa forma, o exemplo a seguir aplica a matemática intervalar em uma função, na qual foi introduzida um intervalo de incerteza, a fim de simular uma incerteza.

2.3.3 Exemplo 1.4.2: otimização restrita com incerteza

Repetindo o [Exemplo 1.4.1](#), entretanto com a inclusão do valor de “ $\pm 0,5$ ” de incerteza no coeficiente linear da restrição, ou seja, na constante “6”. Sendo assim, o problema passa a ser:

$$\max f(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 6x_1$$

s.a.

$$3x_1 + 4x_2 - [5.5; 6.5] \leq 0$$

Introduzindo uma variável de folga quadrática no problema, tem-se:

$$\max f(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 6x_1$$

s.a.

$$3x_1 + 4x_2 - [5, 5; 6, 5] + s_1^2 = 0.$$

Com isso, a [Equação 2.33](#) mostra a função Lagrangeana referente ao exemplo:

$$\mathcal{L}(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 6x_1 + \lambda \cdot \{3x_1 + 4x_2 - [5, 5; 6, 5] + s_1^2\} \quad (2.33)$$

Logo, a solução ótima do problema pode ser obtida através do sistema de equação mostrada na [Equação 2.34](#), considerando que as variáveis são intervalares:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_k} = \begin{bmatrix} -4X_{1(k)} + 2X_{2(k)} + 6 + 3\lambda_{(k)} \\ 2X_{1(k)} - 4X_{2(k)} + 4\lambda_{(k)} \\ 3X_{1(k)} + 4X_{2(k)} - [5.5; 6.5] + S_{1(k)}^2 \\ 2\lambda_{(k)}S_{1(k)} \end{bmatrix} = 0. \quad (2.34)$$

Através da função Lagrangeana, determina-se o Jacobiano intervalar:

$$\mathbf{J}(X_k) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2S_{1(k)} \\ 0 & 0 & 2S_{1(k)} & 2\lambda_{(k)} \end{bmatrix}.$$

Utilizando como intervalo inicial:

$$X_{1(0)} = [-10; 10] \quad X_{2(0)} = [-10; 10] \quad \lambda_{(0)} = [-10; 10] \quad S_{1(0)} = [-10; 10].$$

Resolvendo o problema através do método de Newton intervalar, considerando uma tolerância de 10^{-6} , tem-se na primeira iteração:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X_i} \right]_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ [-6.5; -5.5] \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^{(0)} = \begin{bmatrix} [-4; -4] & [2; 2] & [3; 3] & [0; 0] \\ [1; 1] & [-4; -4] & [4; 4] & [0; 0] \\ [3; 3] & [4; 4] & [0; 0] & [20; 20] \\ [0; 0] & [0; 0] & [-20; 20] & [-20; 20] \end{bmatrix}.$$

Aplicando a [Equação 2.21](#) e [Equação 2.22](#), determina-se o valor de $N(x_k; X_k)$ e $X_{(k+1)}$ para cada iteração.

$$N(x_{(0)}, X_{(0)}) = \begin{bmatrix} 1,7639 & 1,9028 \\ 0,4757 & 0,6076 \\ 0,0347 & 0,1319 \\ -0,1319 & -0,0347 \end{bmatrix}$$

$$X_{(1)} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ -10 & 10 \\ -10 & 10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1,7639 & 1,9028 \\ 0,4757 & 0,6076 \\ 0,0347 & 0,1319 \\ -0,1319 & -0,0347 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,7639 & 1,9028 \\ 0,4757 & 0,6076 \\ 0,0347 & 0,1319 \\ -0,1319 & -0,0347 \end{bmatrix}.$$

O processo continua até que a tolerância, calculada segundo a [Equação 2.23](#) seja atingida.

A [Tabela 5](#) resume os valores obtidos do intervalo das variáveis para cada iteração, até a convergência.

Tabela 5 – Exemplo 1.4.2 – Resumo de resultados

Iteração	X_1	X_2	λ	S_1
1	[1,7639; 1,9028]	[0,47569; 0,60764]	[0,034722; 0,13194]	[-0,13194; -0,034722]
2	[1,4984; 1,7639]	[0,47569; 0,49847]	[-0,33446; 0,034722]	[-0,14065; -0,13194]
3	[1,4984; 1,5199]	[0,47569; 0,48859]	[-0,33446; -0,29917]	[-0,14065; -0,13194]
4	[1,4984; 1,5199]	[0,47569; 0,48066]	[-0,33446; -0,29917]	[-0,13194; -0,022788]

Fonte: O autor (2020).

Ao final da sétima iteração valor da função é $F(X^*) = [5, 3336; 5, 6377]$.

2.4 Revisão Bibliográfica

Esta seção tem como objetivo descrever alguns trabalhos que aplicam a Matemática Intervalar a problemas de otimização.

Uma das abordagens da MI aplicada à otimização, é a de encontrar um intervalo ótimo após a otimização ser realizada por técnicas convencionais. Essa abordagem utiliza o método de Newton Intervalar ou o Método de Krawczyk, onde a solução do problema original é pontual e obtida através dos métodos tradicionais de otimização ([MONEGO, 2017](#)).

Como trabalhos que utilizam a Matemática Intervalar como ferramenta pós-otimização, citam-se [Wang e Alvarado \(1992\)](#), [Mori e Yuihara \(1999\)](#), [Pereira \(2011\)](#), [Pereira e Costa \(2012\)](#) e [Monego \(2017\)](#).

Uma das principais características da Matemática Intervalar consiste no tratamento da incerteza de dados com uma maior eficiência, conforme relatado em algumas publicações durante a década de 1980 ([MONEGO, 2017](#)). Tais trabalhos consolidaram os principais métodos da MI, tais como o Newton Intervalar ([MOORE, 1966](#)) e o de Krawczyk ([KRAWCZYK, 1969](#)), os quais aprimoraram o tratamento de dados, que até então, eram feitas a partir de várias simulações, tentando englobar o maior número de casos possíveis, caso a caso.

O trabalho de ([HANSEN, 1980](#)) mostra como que a Matemática Intervalar pode ser utilizada na busca do mínimo global de uma função continuamente diferenciável por duas vezes, com n -variáveis, baseada no Método de Newton Intervalar e operador de Krawczyk.

Concluiu-se que com esse método, que é possível obter um intervalo ótimo contendo o mínimo global.

(HANSEN; GREENBERG, 1983) desenvolveram uma variante do Método de Newton Intervalar, o qual é dividido em três sub-algoritmos e que resolve sistemas de equações não lineares. Primeiramente, utiliza-se Gauss-Seidel para determinar os limites das variáveis do problema. Em seguida, aplica-se o Método de Newton convencional (não-intervalar) e por fim, é resolvido um sistema de equações linearizadas por eliminação. Às vezes é utilizado o operador de Krawczyk em iterações internas. O algoritmo como um todo é comparado com o método de Hansen-Sengupta (HANSEN; SENGUPTA, 1981) e o método de Krawczyk.

Ratschek e Voller (1991) fazem uma revisão sobre ferramentas e técnicas básicas da aritmética intervalar e como utilizá-la na construção de algoritmos de otimização global determinística. O trabalho é aplicado para otimização com ou sem restrição, bem como otimização não suave, ou seja, quando a função objetivo não é diferenciável no subconjunto do domínio.

Ratschek e Rokne (1993) mostram um método de solução de um circuito elétrico, cuja sensibilidade a pequenas perturbações é extremamente alta. Para isso, é utilizado a matemática intervalar em conjunto com estratégias de subdivisões e do Método *branch-and-bound*. O autor utiliza o Método de Newton Intervalar aprimorado por Hansen e Greenberg (1983).

Os trabalhos de Kearfott (1992) e Kjølner et al. (2007) mostram a aplicação da matemática intervalar em algoritmos *branch-and-bound* para problemas de otimização global, considerando restrições de igualdade e desigualdade em um problema não-linear.

A pesquisa de Kearfott (1992) utiliza o Método de Newton Intervalar combinado ao gradiente reduzido como ferramenta de otimização, além de utilizar o método de Gauss-Seidel intervalar como técnica de condicionamento.

Já Kjølner et al. (2007) utilizam uma técnica onde são combinadas a clássica otimização global utilizando a matemática intervalar com a técnica de propagação de restrições com o auxílio da biblioteca de diferenciação automática FADBAD (STAUNING; BENDTSEN, 2003).

O trabalho de Ichida (1996) propõe um método de busca de máximo global para problemas multimodais e multivariáveis, sujeito a restrições de igualdade e desigualdade. O problema descarta as sub-regiões onde a solução global não pode existir e aplica o Método de Newton Intervalar para resolver o Lagrangeano do problema.

Alefeld e Mayer (2000) fazem uma revisão bibliográfica sobre teoria e aplicações da matemática intervalar. Neste trabalho são discutidas técnicas de solução de equações lineares e não-lineares. Além disso, são mostradas técnicas para problemas envolvendo

autovalores algébricos, problemas com valores iniciais para equações diferenciais ordinárias e limites de valores para equações ordinárias parciais elípticas de segunda ordem.

Benedetti e Perona (2000) mostram um algoritmo para limitar largura de banda de registro de dados de um gráfico de fluxo de dados acíclico. O método utiliza como base a propagação do complemento de dois intervalos numéricos com pontos fixos, através das técnicas da aritmética intervalar. O algoritmo pode ser aplicado a gráficos de fluxo linear e não-linear invariáveis no tempo, bem como na implementação de sistemas FPGA. Os autores concluíram, através de uma aplicação, que a técnica possibilitou delimitar um gráfico de fluxos acíclicos.

Litvinov e Sobolevskii (2001) apresentam um trabalho que utiliza a matemática intervalar para a aplicação de estruturas idempotentes¹. Esta teoria é aplicada para a construção de intervalos de soluções exatas da equação de Bellman discreta e estacionária intervalar. Segundo os autores, a idempotência intervalar é bastante eficiente na solução de problemas fortemente não-lineares e permite encontrar soluções de intervalos exatos em problemas de otimização que contém algum grau de incerteza.

A tese de doutorado de Ibraev (2001) apresenta um novo método paralelo de otimização global verificada. O autor utiliza o Método de Krawczyk convencional, além de apresentar 4 versões modificadas deste: simplificada, normal, sendo estas duas com a possibilidade de serem utilizadas com fatoração LU. Além disso, também há uma modificação do Método de Krawczyk. O autor compara os métodos com o Newton intervalar, além de mostrar toda uma fundamentação e conceito da Matemática Intervalar.

O trabalho de Schichl e Neumaier (2005) utiliza o conceito da matemática intervalar para otimização global através de DAG (*Direct acyclic graphs*). Esta ferramenta permite uma avaliação intervalar e diferenciação automática mais eficientes. Além disso, o autor combina essa técnica com a propagação de restrições, produzindo intervalos dos valores das derivadas e declive de funções mais estreitos.

Noblet et al. (2005) trabalham com a otimização utilizando a matemática intervalar para processamento de imagens 3-D. O autor utiliza esta técnica para a preservação da topologia no registro de imagens deformáveis de 3 dimensões, buscando uma melhor eficiência e tempo computacional.

Michel e Zidna (2015) propõem um método de solução de sistemas não lineares de equações multivariáveis utilizando *B-spline*, baseado no Método de Krawczyk e Newton Intervalar. A pesquisa apontou que para sistemas com poucas variáveis, os dois métodos intervalares tiveram desempenhos similares, entretanto, o Método de Krawczyk se mostrou mais rápido e eficiente para um caso com maior número de variáveis.

¹ idempotência é uma propriedade matemática onde se permite aplicar várias vezes uma operação de tal forma que não altera o valor final após a aplicação inicial.

2.5 Considerações finais

Este capítulo teve como objetivo mostrar um breve histórico da matemática intervalar, bem como a teoria das operações algébricas e fundamentos intervalares. Além disso, apresenta a aplicação dos Métodos de Newton Intervalar e Krawczyk em exemplos simples, mas que dão toda a base para a aplicação em problemas mais complexos, como o caso do Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo e do do Fluxo de Potência Ótimo Trifásico. Por fim a cronologia dos métodos consagrados e diferentes aplicações, envolvendo otimização e solução de sistemas de equações, através de diversos trabalhos e livros publicados, mostrados na referência bibliográfica. Estes trabalhos mostram como a matemática é amplamente utilizada como ferramentas de soluções de sistemas de equações e otimização utilizando vários métodos e adaptações. Por fim, a **MI** apresenta como uma das principais vantagens a inclusão de faixas de incerteza de qualquer parâmetro de um problema de forma direta.

3 Fluxo de Potência Intervalar e Fluxo de Potência Ótimo Intervalar

3.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar diversos trabalhos que incorporam a matemática intervalar em problemas relacionados a sistemas elétricos de potência. Além disso, descrever a modelagem do Fluxo de Potência Ótimo Intervalar de [Monego \(2017\)](#), que é uma das bases dessa dissertação.

3.2 Revisão Bibliográfica

Cita-se [Wang e Alvarado \(1992\)](#) como um dos pioneiros a utilizar FC com erro de dados de entrada, utilizando o método de Newton intervalar para a solução de equações não lineares, combinado com Gauss–Seidel para solução de equações lineares. Além disso, o trabalho compara os resultados obtidos com os calculados via simulação Monte Carlo e fluxo de potência probabilístico. Na primeira, utilizam-se 1000 diferentes valores de potência, dentro de um intervalo específico, sendo cada um desses valores simulados individualmente no fluxo de potência determinístico. Já o FP probabilístico modela as injeções de potência através de uma função de distribuição de probabilidade normal. Concluiu-se que o método intervalar se mostrou mais eficiente.

Já [Mori e Yuihara \(1999\)](#) utilizam o Método de Krawczyk, sucessor do Método de Newton Intervalar, para a solução de equações não-lineares, a fim de se obter um intervalo de soluções do Fluxo de Potência. A modelagem desse é feita utilizando coordenadas retangulares e é considerada incerteza nas cargas.

[Das \(2002\)](#) modela um fluxo de potência para rede de distribuição radial balanceada através da modelagem *Backward sweep/forward* e utiliza a Matemática Intervalar para considerar incerteza de cargas. Neste trabalho, o autor comparou os resultados intervalares com simulações determinísticas, através de dois sistemas de distribuição radial, com 30 e 68 barras.

[Barboza, Dimuro e Reiser \(2004\)](#), [Pereira e Costa \(2012\)](#), [Pereira e Costa \(2014\)](#) e [Ray e Ralhan \(2015\)](#) utilizam a matemática intervalar no fluxo de potência, considerando incertezas nas cargas e dados de linhas. Tais trabalhos utilizam o método de Krawczyk para resolução dos sistemas de equações não lineares através da ferramenta Intlab ([RUMP, 1999](#)).

Vargas et al. (2008) apresentam um Fluxo de Potência Intervalar resolvido pelo Método de Krawczyk e com coordenadas retangulares. Neste trabalho, utiliza-se a linguagem XSC, através da biblioteca C-XSC, que contém os conceitos da Matemática Intervalar em C. Como sistema teste, o autor utiliza os sistemas IEEE 6 barras e SSB-352 (Região Sul-Suldeste do Brasil).

Vaccaro, Canizares e Villacci (2010) utilizam como base a Aritmética Afim para representar incerteza nos dados de geração e carga. Os valores médios das variáveis são obtidos através da simulação do fluxo de potência convencional utilizando os dados nominais do sistema. A partir das sensibilidades das variáveis de estado, são introduzidos os desvios parciais da forma afim. Por fim, utiliza-se de otimização linear para definir as incertezas referentes à injeção de potência. Como validação, o autor compara o método com simulação de Monte Carlo.

Pirnia et al. (2014) propõem um FPO, modelado por injeção de potência e coordenadas retangulares, cuja função objetivo é diminuir custo. É utilizado Aritmética Afim para considerar incerteza de geração eólica e solar, para que possa ser determinada a geração térmica ótima. O método é testado com os sistemas IEEE-30 barras e um sistema europeu de 1211 barras e comparado com a técnica Monte Carlo.

Pereira (2015) modela fluxo de potência intervalar, resolvido pelo Método de Krawczyk, injeção de corrente na forma polar, com controle reativo nas barras de geração e limite de tensão nas barras de carga, com inclusão de ponto máximo de carregamento.

O trabalho de Ding et al. (2015) apresenta um FC para sistemas de distribuição radial proposto por Baran e Wu (1989), conhecido como *Distflow*, modificado para utilizar o Método de Krawczyk e considerar incerteza na carga e geração. O autor considera o Método de Krawczyk eficiente, pois evita a inversão da matriz durante o processo iterativo. O método proposto é comparado com o de eliminação de Gauss intervalar e simulação Monte Carlo, além disso, mostrou ser o mais rápido e eficiente entre todos.

Wang, Han e Wu (2015) apresentam uma formulação de um FC intervalar trifásico para sistemas de distribuição desbalanceados, através da aplicação do método *Forward-Backward Sweep* da Aritmética Afim complexa. O trabalho analisa como a incerteza na geração distribuída (solar e eólica) impacta os sistemas de distribuição, além de considerar incerteza na demanda. O autor utiliza como sistema teste o IEEE 13 barras e um sistema de 292 barras modificado. Como validação de resultados é utilizado a simulação Monte Carlo e o método proposto obteve os resultados 16 vezes mais rápido.

Araújo (2016) formulou um fluxo de potência intervalar por injeção de corrente e coordenada retangular. O método é resolvido por uma combinação da Aritmética Afim com o método de Krawczyk. Como validação de resultados, utiliza os sistemas IEEE 14 e 30 barras de teste e compara os resultados utilizando a técnica de Monte Carlo. Segundo

a autora, a [AA](#) é bastante eficiente quando a variável intervalar possui faixa de valores estreita.

[Monego \(2017\)](#) modela um FPO por injeção de potência e coordenadas retangulares, resolvido pelo Método dos Pontos Interiores versão primal–dual, um FPO intervalar, resolvido através do Método de Krawczyk. A autora considera incerteza na carga, a fim de se obter os intervalos de magnitudes tensão, geração de potência ativa e reativa ótimos. São testados os sistemas de 3 barras ([MONTICELLI, 1983](#)), *IEEE* 30 barras e 70 barras ([BARAN; WU, 1989](#)). Para a validação de resultados, a autora simulou exaustivamente o FPO convencional com valores aleatórios de carga, a fim de se obter um comportamento estatístico, que ao ser comparado com os resultados do método intervalar, os validaram.

[Ray e Ralhan \(2018\)](#) consideram erro nos dados de linha e carga como intervalos compactos. Além disso, utiliza equações linearizadas, o método de Krawczyk e biblioteca Intlab ([RUMP, 1999](#)). Além disso, é utilizado **FC** intervalar para calcular os valores de pré-falta para uma análise de curto circuito, sendo esta resolvida utilizando o equivalente de Thèvenin e Teorema da Superposição.

[Ruback e Costa \(2018\)](#) modelam um método de análise de faltas intervalar que considera redes trifásicas. Para isso, os autores aplicam o Método de Krawczyk em conjunto com a biblioteca Intlab ([RUMP, 1999](#)), a fim de facilitar a resolução dos sistemas de equações lineares intervalares ([MOORE, 2009](#)). A principal avaliação do trabalho é analisar o impacto causado pela incerteza das tensões de pré-falta nas barras e impedância das linhas. O método é validado através de simulação Monte Carlo.

[Wu et al. \(2019\)](#) modelam um fluxo de potência intervalar utilizando uma combinação do método de Krawczyk–Moore ([MOORE, 1979](#)) com aritmética afim combinadas. Além disso, os autores modelam um sistema misto de coordenada polar e retangular no **FP**. O trabalho tem objetivo de avaliar o impacto na magnitude de tensão e ângulo nas barras de um sistema que possui apenas sistema fotovoltaico. O método proposto pelos autores se mostrou mais eficiente e com resultados mais confiáveis quando comparado com a simulação Monte Carlo e um método utilizando apenas a Aritmética Afim. O sistema testado é de um conjunto de placas solares localizado na China.

[Lu et al. \(2019\)](#) utilizam Aritmética Afim no **FP** voltado para sistemas híbridos CA–CC com a inclusão conversores do tipo fonte de tensão (*VSC*). Segundo os autores, o Fluxo de Potência determinístico tem dificuldades de resolver problemas onde são incluídos incerteza tanto na geração, quanto na carga. O trabalho em questão propõe um **FC** que considera incerteza das novas fontes renováveis, como eólica e fotovoltaica, além de considerar erro nas demandas das cargas. O método também inclui o controle automático dos *VSCs* a cada iteração. Como validação de resultados, a proposta é comparada com simulação Monte Carlo. O método em questão obteve resultados satisfatórios, com boa eficiência e baixo tempo computacional.

Devido ao grande número de trabalhos que resolvem problemas relacionados a inclusão de incerteza de dados no SEP através da Matemática intervalar, principalmente com o método de Krawczyk, escolheu-se esta técnica a ser aplicada em um Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo (BLASI, 2020) e em um Fluxo de Potência Ótimo Trifásico (BARAN; FERNANDES, 2016). Além disso, será utilizado a técnica empregada por Monego (2017), devido à similaridade de cenário propostos.

A seguir, serão apresentadas duas modelagens do Método de Krawczyk em problemas relacionados ao SEP.

3.3 Fluxo de Potência Intervalar

Esta seção apresenta a formulação do Fluxo de Potência Intervalar utilizando o operador de Krawczyk, conforme os trabalhos de Mori e Yuihara (1999), Pereira (2011), Pereira e Costa (2012) Araújo (2016).

Após o cálculo do Fluxo de Potência convencional (que utiliza a representação do fasor na forma retangular), ou determinístico, inicializa-se o processo intervalar, utilizando o método de preferência, neste caso, o de Krawczyk.

É aplicado uma incerteza arbitrária δ_{PQ} nos vetores que contém os valores das cargas ativas e reativas:

$$P_d^i = \left[\left(P_d^d - \delta_{PQ} \right); \left(P_d^d + \delta_{PQ} \right) \right] \quad (3.1)$$

$$Q_d^i = \left[\left(Q_d^d - \delta_{PQ} \right); \left(Q_d^d + \delta_{PQ} \right) \right] \quad (3.2)$$

onde:

- P_d^i é a demanda de potência ativa intervalar;
- Q_d^i é a demanda de potência reativa Intervalar;
- P_d^d é a demanda de potência ativa determinística;
- Q_d^d é a demanda de potência reativa determinística;
- δ_{PQ} valor da incerteza adotada para o cálculo do intervalo de potência.

Deve-se inicializar um intervalo de tensão para o processo iterativo, conforme a Equação 3.3 e Equação 3.4.

$$V_{rk}^i = \left[\left(V_{rk}^d - \delta_{Vmax} \right); \left(V_{rk}^d + \delta_{Vmax} \right) \right] \quad (3.3)$$

$$V_{mk}^i = \left[\left(V_{mk}^d - \delta_{V_{max}} \right); \left(V_{mk}^d + \delta_{V_{max}} \right) \right] \quad (3.4)$$

onde:

- V_{rk}^i é a parte real da tensão intervalar na barra k ;
- V_{rk}^d é a parte real da tensão determinística na barra k ;
- V_{mk}^i é a parte imaginária da tensão intervalar na barra k ;
- V_{mk}^d é a parte imaginária da tensão determinística na barra k ;
- $\delta_{V_{max}}$ é variação percentual da tensão.

O valor $\delta_{V_{max}}$ é definido como sendo a maior variação percentual de demanda como o raio para os intervalos em relação ao valor determinístico, anteriormente calculado (PEREIRA, 2011).

Definido os valores iniciais de tensão e demanda, calculam-se os resíduos de potência intervalares. Conforme o trabalho de Pereira (2011), que utiliza modelagem por injeção de corrente, os resíduos são definidos através da Equação 3.5 e Equação 3.6.

$$I_{rk}^i = \sum_{i \in \phi_k} \left(G_{ki} V_{r_i}^i - B_{ki} V_{m_i}^i \right) - \frac{V_{rk}^i P_k^i + V_{mk}^i Q_k^i}{V_{rk}^{i\ 2} + V_{mk}^{i\ 2}} \quad (3.5)$$

$$I_{mk}^i = \sum_{i \in \phi_k} \left(G_{ki} V_{m_i}^i - B_{ki} V_{r_i}^i \right) - \frac{V_{mk}^i P_k^i + V_{rk}^i Q_k^i}{V_{rk}^{i\ 2} + V_{mk}^{i\ 2}} \quad (3.6)$$

onde:

$$P_k^i = P_{g_k}^i - P_{d_k}^i \quad (3.7)$$

$$Q_k^i = Q_{g_k}^i - Q_{d_k}^i \quad (3.8)$$

- I_{rk}^i é a componente real da injeção de corrente intervalar na barra k ;
- I_{mk}^i é a componente imaginária da injeção de corrente intervalar na barra k ;
- G_{k_i} é a condutância entre as barras k e i ;
- B_{k_i} é a susceptância entre as barras k e i ;
- ϕ_k é o conjunto de barras vizinhas de k , incluindo k .

Para concluir, calculam-se os resíduos (*mismatches*) de correntes intervalares, conforme a [Equação 3.9](#) e [Equação 3.10](#).

$$\Delta I_{r_k}^i = I_{r_k}^i - \frac{P_k^i V_{r_k}^d + Q_k^i V_{m_k}^d}{(V_k^d)^2} \quad (3.9)$$

$$\Delta I_{m_k}^i = I_{m_k}^i - \frac{P_k^i V_{m_k}^d + Q_k^i V_{r_k}^d}{(V_k^d)^2} \quad (3.10)$$

onde:

- $\Delta I_{r_k}^i$ é a componente real do resíduo de corrente intervalar;
- $\Delta I_{m_k}^i$ é a componente imaginária do resíduo de corrente intervalar.

Portanto, o conjunto de equações a serem resolvidas pelo método de Krawczyk, correspondente aos resíduos de correntes, é descrita na [Equação 3.11](#).

$$f(x) = \begin{bmatrix} \Delta I_m^i \\ \Delta I_r^i \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Dessa forma, aplica-se a [Equação 3.11](#) no operador de Krawczyk ([Equação 2.28](#)). Através do ponto médio da Jacobiana (equivalente à Jacobiana determinística), determina-se a matriz de pré-condicionamento \mathbf{C} . Uma das vantagens dessa matriz é o fato de ser uma constante durante todo o processo, ou seja, não é necessário fazer a inversão da Jacobiana a cada iteração, diminuindo esforço e tempo computacional ([PEREIRA, 2011](#)). Além disso, melhora o condicionamento e precisão numérica ([MORI; YUIHARA, 1999](#)).

O vetor da iteração sucessivo é determinado através da [Equação 3.12](#).

$$X^{k+1} = [X^k \cap X^{k+1}]. \quad (3.12)$$

Como ponto de parada, verifica-se a convergência a cada iteração, conforme a [Equação 3.13](#).

$$\frac{|diam(X^h) - diam(X^{h+1})|}{2} \leq tolerância \quad (3.13)$$

onde:

- X^h é o vetor das variáveis do problema na iteração h ;
- X^{h+1} é o vetor das variáveis do problema na iteração $h + 1$;
- *tolerância* é a tolerância determinada para o ponto de parada do método de Krawczyk.

Se satisfeita a condição mostrada na [Equação 3.13](#), encerra-se o processo iterativo e assim é determinado o novo perfil de tensão e as variáveis do problema, agora, em intervalos. Do contrário, continua o processo até a convergência atingir a tolerância ([PEREIRA, 2011](#)) e ([PEREIRA; COSTA, 2012](#)).

Esses trabalhos apresentam resultados satisfatórios advindos da aplicação do Método de Krawczyk, bem como das técnicas utilizadas para validação dos resultados e considerações.

3.4 Fluxo de Potência Ótimo Intervalar

Nesta seção será apresentado a modelagem do fluxo de potência ótimo intervalar proposto por [Monego \(2017\)](#), que serve como referência para esta dissertação e que considera incertezas nos valores de carga ativa e reativa.

O FPO intervalar de [Monego \(2017\)](#) utiliza como base os trabalhos de [Mori e Yuihara \(1999\)](#) e [Pereira \(2011\)](#), os quais modelam um Fluxo de Potência intervalar via Método de Krawczyk.

Até então, não se tinha aplicação do fluxo de potência ótimo intervalar utilizando o método de Krawczyk.

A formulação do Fluxo de Potência Ótimo de [Monego \(2017\)](#) é descrita através da [Equação 3.14](#) à [Equação 3.19](#).

$$f.o. \quad \min \omega p \sum (\mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d) \quad (3.14)$$

sujeito a:

$$\mathbf{P}_g - \mathbf{P}_d = \Re \left\{ \text{diag}(\dot{\mathbf{V}}) \cdot (\dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}})^* \right\} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{Q}_g - \mathbf{Q}_d = \Im \left\{ \text{diag}(\dot{\mathbf{V}}) \cdot (\dot{\mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{V}})^* \right\} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{P}_{g_{min}} \leq |\mathbf{P}_g| \leq \mathbf{P}_{g_{max}} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{Q}_{g_{min}} \leq |\mathbf{Q}_g| \leq \mathbf{Q}_{g_{max}} \quad (3.18)$$

$$|\dot{\mathbf{V}}_{min}| \leq |\dot{\mathbf{V}}| \leq |\dot{\mathbf{V}}_{max}| \quad (3.19)$$

onde:

- \mathbf{P}_g é o vetor com geração de potência ativa com dimensão $(nb \times 1)$;

- \mathbf{P}_d é o vetor de demanda de potência ativa com dimensão $(nb \times 1)$;
- \mathbf{Q}_g é o vetor com geração de potência reativa com dimensão $(nb \times 1)$;
- \mathbf{Q}_d é o vetor de demanda de potência reativa com dimensão $(nb \times 1)$;
- $\dot{\mathbf{V}}$ é o vetor com tensão nodal com dimensão $(nb \times 1)$;
- $\dot{\mathbf{Y}}$ é o matriz de admitância de barra com dimensão $(nb \times nb)$;
- $\mathbf{P}_{g_{max}}$ e $\mathbf{P}_{g_{min}}$ são vetores de limites mínimo e máximo de geração de potência ativa com dimensão $(nb \times 1)$;
- $\mathbf{Q}_{g_{max}}$ e $\mathbf{Q}_{g_{min}}$ são vetores de limites mínimo e máximo de geração de potência reativa com dimensão $(nb \times 1)$;
- $|\dot{\mathbf{V}}_{min}|$ e $|\dot{\mathbf{V}}_{max}|$ são os vetores de limites mínimo e máximo de magnitude de tensão com dimensão $(nb \times 1)$;
- nb é o número de barras;
- ωp é o peso que pondera o critério que otimiza as perdas elétricas.

Essa formulação proposta é resolvida pelo Método dos Pontos Interiores versão Primal–Dual (MPIP) (GRANVILLE, 1994).

Após a obtenção da solução ótima do FPO determinístico, aplica-se o Método de Krawczyk, cujo ponto de partida se dá a partir do ponto ótimo determinístico.

Assim, sobre os valores ótimos de \mathbf{P}_g , \mathbf{Q}_g e $\dot{\mathbf{V}}$, aplicam-se incrementos δ para se inicializar o processo iterativo intervalar. Este incremento δ faz com que se crie um intervalo com um valor superior e um inferior das variáveis de otimização do problema.

3.4.1 Inicialização das variáveis intervalares

Após obter a solução convencional do FPO resolvido através do MPIP, utiliza-se a solução como ponto de partida para o Método de Krawczyk.

Como se considera incerteza da carga, são incorporados aos valores de carga ativa e reativa um valor de incerteza associada ao sistema em teste, formando, assim, um intervalo com limites superior e inferior, conforme a Equação 3.20 e Equação 3.21.

$$P_d^i = [(P_d^d - \delta); (P_d^d + \delta)] \quad (3.20)$$

$$Q_d^i = [(Q_d^d - \delta); (Q_d^d + \delta)] \quad (3.21)$$

onde:

- P_d^i é a demanda de potência ativa intervalar;
- Q_d^i é a demanda de potência reativa intervalar;
- P_d^d é a demanda de potência ativa determinística;
- Q_d^d é a demanda de potência reativa determinística;
- δ valor da incerteza adotada para o cálculo do intervalo.

O valor de δ é o mesmo para o P_d^i e Q_d^i , a fim de se manter o fator de potência original da carga.

A partir do valor ótimo determinístico, são calculados os valores de inicialização do perfil de tensão retangular, adicionando intervalos arbitrários, que representam o valor inicial do processo iterativo do Método de Krawczyk:

$$X^i = [(x^d - \delta_v); (x^d + \delta_v)] \quad (3.22)$$

onde:

- x é o fasor de tensão complexa na forma retangular ($\dot{V} = e + jf$), onde e representa a parte real do fasor tensão e f a parte imaginária do fasor tensão, sendo que $x = [e \ f]^T$;
- δ_v margem de inicialização do intervalo de tensão.

Similarmente à aplicação da Matemática Intervalar ao problema de Fluxo de Potência (FP), tal como proposto por [Pereira \(2011\)](#), a inicialização do método de Krawczyk se dá apenas através da [Equação 3.22](#), referente às tensões nodais. Já no FPO, os valores de geração ativa e reativa também são variáveis do problema de otimização, dessa forma, também devem ser incorporadas à inicialização, conforme a [Equação 3.23](#) e [Equação 3.24](#).

$$P_g^i = [(P_g^d - \delta_g); (P_g^d + \delta_g)] \quad (3.23)$$

$$Q_g^i = [(Q_g^d - \delta_g); (Q_g^d + \delta_g)] \quad (3.24)$$

onde:

- P_g^i é a geração de potência ativa Intervalar;
- Q_g^i é a geração de potência reativa Intervalar;

- P_g^d é a geração de potência ativa determinística;
- Q_g^d é a geração de potência reativa determinística;
- δ_g valor da incerteza adotada para o cálculo do intervalo.

Ao aplicar a matemática intervalar no Fluxo de Potência, o sistema de equações a serem resolvidos ($f(x) = 0$) são referentes aos resíduos de potência ativa e reativa (PEREIRA, 2011).

Já no Fluxo de Potência Ótimo, as equações a serem resolvidas são relativas às condições de otimalidade (condições de KKT – *Karush Kuhn–Tucker*) relacionadas ao problema proposto. Assim, são utilizadas variáveis intervalares, as quais resultam em um vetor intervalar.

Conforme (MONEGO, 2017), o sistema de equações a serem resolvidos pelo método de Krawczyk é mostrado na Equação 3.25.

$$g(x)^i = \begin{bmatrix} \nabla_{P_g} L^i \\ \nabla_{Q_g} L^i \\ \nabla_x L^i \\ \nabla_\lambda L^i \\ \nabla_{\pi_{max}} L^i \\ \nabla_{\pi_{min}} L^i \\ \nabla_{s_{max}} L^i \\ \nabla_{s_{min}} L^i \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

onde:

- $\nabla_{P_g} L^i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação à geração de potência ativa;
- $\nabla_{Q_g} L^i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação à potência reativa;
- $\nabla_x L^i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação ao fasor da tensão;
- $\nabla_\lambda L^i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados às restrições de igualdade;
- $\nabla_{\pi_{max}} L^i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação aos multiplicadores de Lagrange associados aos limites máximos com dimensão;
- $\nabla_{\pi_{min}} L^i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação aos multiplicadores de Lagrange associados aos limites mínimos com dimensão;
- $\nabla_{s_{min}} L^i$ é o vetor das variáveis de folga associadas aos limites mínimos com dimensão;

- $\nabla_{s_{max}} L^i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação às variáveis de folga associadas aos limites máximos com dimensão.

Para fins didáticos, na modelagem do FPO, denomina-se o vetor que contém todas as variáveis de otimização como sendo z para o processo determinístico. Dessa forma, as variáveis intervalares serão denominadas de Z .

3.4.2 Aplicação do Método de Krawczyk ao FPO

Após a inicialização das variáveis (conforme seção anterior), calcula-se a matriz de pré-condicionamento \mathbf{C} . No caso do Fluxo de Potência Ótimo, essa matriz é equivalente à derivada segunda da Função Lagrangeana (Hessiana) (\mathbf{W}^*) do problema determinístico no ponto ótimo (MONEGO, 2017).

$$\mathbf{C} = (\mathbf{W}^*)^{-1}. \quad (3.26)$$

Essa matriz \mathbf{C} é calculada apenas uma vez, antes de inicializar o processo iterativo.

Após o cálculo da matriz de pré-condicionamento, determina-se o operador de Krawczyk através da Equação 3.27.

$$K^k(Z^i) = z^h - \mathbf{C} \cdot g(z) + [I_d - \mathbf{C} \cdot \mathbf{W}(Z^i)] \cdot (Z^i - z^h) \quad (3.27)$$

onde:

- Z^i é o vetor intervalar que contém as variáveis do problema;
- $z^h = m(Z^i)$ é o ponto médio do intervalo Z^i a cada iteração;
- $g(z)$ é o valor das condições de KKT (Equação 3.25), no ponto médio;
- I_d é uma matriz identidade;
- \mathbf{C} é a matriz de pré-condicionamento;
- \mathbf{W}^i é a matriz Hessiana intervalar, calculada utilizando o intervalo Z^i .

Após o cálculo do operador K , é possível determinar um novo vetor intervalar, denominado Z^{k+1} , conforme a Equação 3.28.

$$Z^{k+1} = [Z \cap K^k]. \quad (3.28)$$

Sendo assim, é possível verificar a convergência de todo o processo de cálculo intervalar conforme a [Equação 3.29](#). Caso a convergência atinja a tolerância desejada, encerra-se o processo; Caso contrário, é calculado um novo operador K , portanto um novo o vetor Z .

$$conv = \left| \frac{diam(Z^{k+1}) - diam(Z^k)}{2} \right| \leq tolerância. \quad (3.29)$$

Uma vez atingida a condição da [Equação 3.29](#), encerra-se o processo iterativo e o valor de Z^i passa a ser a solução ótima intervalar do fluxo de potência ótimo. Ao final, a solução determinística está contida no novo intervalo ótimo e será seu ponto médio.

O algoritmo básico que descreve o problema do **FPO** intervalar é:

1. Calcula-se o Fluxo de Potência Ótimo convencional e obtém-se despacho de geração e perfil de tensão de pontual do sistema.
2. Defini-se variações percentuais de demanda.
3. Inicializa-se o perfil das tensões intervalares, onde o ponto médio do intervalo é a solução pontual, e o seu raio é o ponto médio multiplicado pela variação percentual da demanda definida no passo 2.
4. Calculam-se resíduos das condições de KKT em análise.
5. Aplica-se o operador Krawczyk.
6. Obtém-se o novo perfil das tensões, geração ativa e reativa intervalares.
7. Testa-se convergência: se sim: Pare, se não ir ao passo 5.

Este algoritmo também será utilizado nas demais formulações de **FPO**, tais como o **FPOMP** e **FPOT**.

3.5 Considerações finais

O objetivo deste capítulo foi mostrar um referencial das aplicações da matemática Intervalar aplicada a problemas envolvendo incerteza de dados nos Sistemas Elétricos de Potência.

Devido à grande quantidade de trabalhos que recomendam a técnica de pós otimização utilizando o Método de Krawczyk, como os de [Mori e Yuihara \(1999\)](#), [Pereira \(2011\)](#), [Pereira e Costa \(2012\)](#), [Araújo \(2016\)](#) e [Monego \(2017\)](#), a mesma técnica será utilizada para formular dois diferentes fluxos de potência ótimos considerando incerteza de carga e geração:

- O Multiperíodo de [Blasi \(2020\)](#) que se modela um FPO multiperíodo que otimiza o processo de carga e descarga de baterias além do estado da rede para horizonte de 24 a 30 horas;
- O trifásico de [Baran e Fernandes \(2016\)](#), que modela um FPO trifásico que realiza ações de controle em uma rede trifásica e desbalanceada.

4 Fluxo de potência ótimo trifásico e multi-período Intervalar

4.1 Definição de FPO

Quando se trata de operação e planejamento da rede elétrica, espera-se que os limites operacionais das linhas e dos equipamentos se mantenham em faixas adequadas, para que o sistema opere com segurança, eficiência e maior vida útil. Para tanto, uma importante ferramenta é o Fluxo de Potência Ótimo (FPO) que além de otimizar um critério de otimização desejado, encontra um ponto de operação factível, ou seja, dentro de limites operacionais desejados.

Entretanto, até metade da década de 50, a otimização de um sistema elétrico era feita através de julgamento de engenheiros experientes. Com a introdução de auxílios computacionais, foi formulado o primeiro FPO por Carpentier (1962), onde é modelado uma rede CA completa, com limites de fluxos nas linhas, geração ativa e reativa e magnitude de tensão nas barras, buscando o menor custo de operação. O método era resolvido por Gauss-Seidel (CAIN; O'NEILL; CASTILLO, 2012).

Diferente do Fluxo de Carga, o qual busca calcular o estado da rede, dada uma configuração, o FPO otimiza as variáveis do problema, afim de alcançar uma ou mais funções objetivo desejada e, ao mesmo tempo, respeitando um conjunto de restrições impostas pelo problema (como limite de geradores, fluxo nas linhas e tensão nas barras).

Existem as mais diversas formas de estabelecer um FPO. Ele pode, por exemplo, considerar os mais diversos critérios de otimização tais como: minimização de custos operativos, perdas elétricas, corte de carga, desvios de tensão ou geração, maximização de carga, entre outros. Ele pode englobar diferentes variáveis de otimização conforme o interesse, tais como: geração de potência ativa e reativa, tensões nodais, *taps* de reguladores de tensão e transformadores de potência, corte de carga, despacho de baterias, gerenciamento da demanda, entre outros. O FPO também pode ser monopérido ou multipérido, ou seja, otimizar apenas um instante ou vários ao mesmo tempo, sendo que o número de períodos e duração podem ser diárias, semanais, mensais, conforme o interesse. E finalmente, um FPO pode representar apenas uma fase da rede ou as três e ainda utilizar modelos matemáticos linear ou não lineares.

Assim, conforme o objetivo do estudo, pode-se combinar os critérios de otimização, variáveis de decisão, horizontes de estudo e representação da rede elétrica, formulando adequadamente um FPO que seja capaz de alcançar as necessidades de operação e

planejamento que se precise.

Monego (2017) já aplicou a MI via Método de Krawczyk para um FPO monopérido, cujo objetivo foi a minimização de perdas elétricas de um sistema de transmissão com representação não linear de rede elétrica para apenas uma fase, despachando geração de potência ativa e reativa e obtendo perfil de tensão. A incerteza foi incorporada nos valores de carga ativa.

Nessa dissertação, tendo em vista a contextualização realizada, se está interessado em introduzir incertezas de carga e geração nos seguintes tipos de FPO:

- FPO multipérido, capaz de considerar várias horas do dia para despacho de bateria de uma rede de distribuição que possui inserção de GD. A representação da rede é monofásica e não linear e é considerada incerteza nos valores de carga horária e injeção de potência das GD a fim de obter valores intervalares de perfil de tensão e carregamento das baterias;
- FPO monopérido, mas com representação não linear e trifásica da rede de distribuição que é composto por incertezas nas cargas desbalanceadas da rede. O objetivo principal é obter valores intervalares de perfil de tensão da rede desequilibrada.

4.2 Fluxo de Potência Ótimo MultiPeríodo Intervalar

Um dos grandes desafios do planejamento das atuais redes ativas de distribuição é conciliar a intermitência das fontes renováveis com um operação segura.

Para isso, Blasi (2020) formulou um fluxo de potência intertemporal para realizar não só a otimização do perfil de tensão e despacho injetado pela subestação de um alimentador por um período de 24 a 30 horas, mas também providenciar energia e potência através de banco de baterias. O método considera na formulação as equações não lineares de balanço de potência ativa e reativa, limites operacionais dos transformadores da subestação, dos módulos de tensão nas barras, fluxo nas linhas e potência/energia acumulada na bateria (BLASI, 2020).

Além disso, considera inserção de geração solar, porém com gerações pré-determinadas e não despacháveis (considera-se que a previsão de incidência solar já foi realizada). Dessa forma, para que a operação desse tipo de geração possa ser, uma vez que se tratam de fontes intermitentes e de natureza aleatória, propõe-se aplicar a Matemática Intervalar a fim de se otimizar a rede segundo faixa de valores de geração eólica e carga.

A formulação geral do Fluxo de Potência Ótimo Multipérido (FPOMP) proposta por Blasi (2020), cuja função objetivo é minimização das perdas elétricas, custos da

geração térmica eventualmente conectada no alimentador e custo de degradação das baterias (Equação 4.2), estão apresentadas da Equação 4.2 a Equação 4.8.

$$\begin{aligned}
 f.o. = \min \omega p \sum_{i=1}^{nb} \sum_{t=1}^{np} \cdot (P_{g_i}^t + P_{gsol_i}^t - P_{d_i}^t - P_{BAT_i}^t) \cdot cost^t \\
 + \omega c \sum_{t=1}^{np} P_{g_i}^t \cdot cost^t + \omega bat \sum_{i=1}^{nb} \sum_{t=1}^{np} |P_{BAT_i}^t| \cdot cost_{degradation} \cdot \Delta t
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sujeito a:

$$P_{g_i}^t + P_{gsol_i}^t - P_{d_i}^t - P_{BAT_i}^t = P_i^t(\dot{V}, a) \tag{4.2}$$

$$Q_{g_i}^t + Q_{gsol_i}^t - Q_{d_i}^t - Q_{BAT_i}^t \cdot \tan(\cos^{-1}(fp)) + diad \left(\left| (\dot{V}_i^t)^2 \right| \cdot c_i \right) = Q_i^t(\dot{V}, a) \tag{4.3}$$

$$|\dot{V}_{min_i}^t| \leq |\dot{V}_i^t| \leq |\dot{V}_{max_i}^t| \tag{4.4}$$

$$-fl_{max_j}^t \leq fl_j^t \leq fl_{max_j}^t \tag{4.5}$$

$$a_{min_j}^t \leq a_j^t \leq a_{max_j}^t \tag{4.6}$$

$$0 \leq c_i^t \leq c_{max_i}^t \tag{4.7}$$

$$-P_{BAT_i}^{max} \leq P_{BAT_i}^t \leq P_{BAT_i}^{max} \tag{4.8}$$

$$E_{BAT_acum}^{min} \leq \sum_{t=1}^{np} [P_{BAT_i}^t - (1 - eta) \cdot |P_{BAT_i}^t|] \cdot \Delta t + E_{BAT_arrival} \leq E_{BAT_acum}^{max} \tag{4.9}$$

onde:

- ωc – peso relacionado aos custos de geração;
- ωbat – peso relacionado ao custo da bateria;
- ωp – peso relacionado às perdas elétricas;
- $cost^t$ – custo da potência fornecida pela subestação no período t ;
- $cost_{degradation}$ – custo de degradação da bateria;
- $P_{g_i}^t$ – vetor de potência ativa gerada na barra i no período t ;

- $Q_{g_i}^t$ – vetor de potência reativa gerada na barra i no período t ;
- $P_{gsol_i}^t$ – vetor de potência ativa solar gerada na barra i no período t ;
- $Q_{gsol_i}^t$ – vetor de potência reativa solar gerada na barra i no período t ;
- P_i^t – vetor de injeção potência ativa na barra i no período t ;
- Q_i^t – vetor de injeção de potência reativa na barra i no período t ;
- $P_{d_i}^t$ – vetor de demanda de potência ativa na barra i no período t ;
- $Q_{d_i}^t$ – vetor de demanda de potência reativa na barra i no período t ;
- $P_{BAT_i}^t$ – vetor de demanda de potência ativa na barra i no período t ;
- $Q_{BAT_i}^t$ – vetor de demanda de potência reativa na barra i no período t ;
- \dot{V}_i^t – fasor da tensão na barra i no período t ;
- $\dot{V}_{min_i}^t$ e $\dot{V}_{max_i}^t$ – limites mínimo e máximo da magnitude de tensão na barra i no período t ;
- a_j^t – posição do *tap* do regulador de tensão na linha j no período t ;
- $a_{min_j}^t$ e $a_{max_j}^t$ – limites mínimo e máximo do *tap* do regulador de tensão na linha j no período t ;
- c_i^t – susceptância capacitiva do banco de capacitor presente na barra i no período t ;
- $c_{max_i}^t$ – limite máximo da susceptância capacitiva do banco de capacitor presente na barra i no período t ;
- eta – eficiência de carga e descarga do banco de baterias;
- fl_j^t – fluxo de potência na linha j no período t ;
- fl_{max}^t – Limite máximo de fluxo de potência na linha j no período t ;
- $f.o.$ – Função objetivo;
- $i = 1, \dots, nb$;
- $j = 1, \dots, nl$;
- $t = 1, \dots, np$;
- nb – número de barras;
- nl – número de linhas;

- t – número de períodos.

A [Equação 4.2](#) e [Equação 4.3](#) representam, respectivamente, as equações de balanço de potência ativa e reativa, e nelas estão inseridas a injeção de geração solar (P_{gsol}) e das baterias (P_{BAT}) para cada uma das barras i e período t .

A bateria pode ser carregada ou descarregada, ou seja, o valor P_{BAT} pode assumir valores negativos ou positivos, respectivamente, ao longo do horizonte de operação considerado.

A [Equação 4.4](#) e [Equação 4.5](#) monitoram os limites de magnitude de tensão e fluxo nas linhas, respectivamente. A [Equação 4.6](#) e [Equação 4.7](#) atuam nos taps dos reguladores de tensão e banco de capacitores, respectivamente. E, a [Equação 4.8](#) e [Equação 4.9](#) monitoram os valores de potência e energia da bateria, as quais contemplam o rendimento das baterias (*eta*).

O Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo proposto em [Blasi \(2020\)](#) é resolvido pelo Método dos Pontos Interiores versão Primal–Dual (MPIP) ([GRANVILLE, 1994](#)).

4.2.1 Aplicação da matemática intervalar no fluxo de potência ótimo multiperíodo

Após obter a solução convencional (determinístico) do FPOMP, resolvido através do Método dos Pontos Interiores versão Primal Dual, utiliza-se a solução como ponto de partida para o Método de Krawczyk.

Na sequência, incorpora-se ao valor de carga uma incerteza arbitrária, formando, assim, um intervalo com limites superior e inferior, conforme a [Equação 4.10](#) e [Equação 4.11](#).

$$P_d^i = \left[\left(P_d^d \cdot (1 - \delta) \right); \left(P_d^d \cdot (1 + \delta) \right) \right] \quad (4.10)$$

$$Q_d^i = \left[\left(Q_d^d \cdot (1 - \delta) \right); \left(Q_d^d \cdot (1 + \delta) \right) \right] \quad (4.11)$$

onde:

- P_d^i é a demanda de potência ativa intervalar;
- Q_d^i é a demanda de potência reativa intervalar;
- P_d^d é a demanda de potência ativa determinística;
- Q_d^d é a demanda de potência reativa determinística;
- δ valor da incerteza adotada para o cálculo do intervalo.

O mesmo processo é aplicado aos valores de geração ativa e reativa da geração solar, conforme a [Equação 4.12](#) e [Equação 4.13](#).

$$P_{gsol}^i = \left[\left(P_{gsol}^d \cdot (1 - \delta_{sol}); P_{gsol}^d \cdot (1 + \delta_{sol}) \right) \right] \quad (4.12)$$

$$Q_{gsol}^i = \left[\left(Q_{gsol}^d \cdot (1 - \delta_{sol}); Q_{gsol}^d \cdot (1 + \delta_{sol}) \right) \right] \quad (4.13)$$

onde:

- P_{gsol}^i é a geração solar ativa intervalar;
- Q_{gsol}^i é a geração solar reativa intervalar;
- P_{gsol}^d é a geração solar ativa determinística;
- Q_{gsol}^d é a geração solar reativa determinística;
- δ_{sol} valor da incerteza adotada para o cálculo do intervalo.

A partir do valor otimizado (determinístico), também são definidos os valores de inicialização do perfil de tensão retangular, através da adição de uma margem arbitrária. A [Equação 4.14](#) representa o valor inicial do processo iterativo do Método de Krawczyk:

$$X^i = \left[\left(x^d \cdot (1 - \delta_v); x^d \cdot (1 + \delta_v) \right) \right] \quad (4.14)$$

onde:

- x é o fasor de tensão complexa na forma retangular ($x = e + jf$);
- δ_v margem de inicialização do intervalo de tensão.

Ao aplicar a matemática no problema do **FP**, tal como proposto por (PEREIRA, 2011), a inicialização do método de Krawczyk se dá apenas através da [Equação 4.14](#), referente as tensões. Já no problema do **FPOMP**, também se calculam os valores de geração ativa e reativa, que também devem ser incorporadas à inicialização, conforme a [Equação 4.15](#) e [Equação 4.16](#).

$$P_g^i = \left[\left(P_g^d \cdot (1 - \delta_g); P_g^d \cdot (1 + \delta_g) \right) \right] \quad (4.15)$$

$$Q_g^i = \left[\left(Q_g^d \cdot (1 - \delta_g); Q_g^d \cdot (1 + \delta_g) \right) \right] \quad (4.16)$$

onde:

- P_g^i representa a geração de potência ativa Intervalar;
- Q_g^i representa a geração de potência reativa Intervalar;
- P_g^d representa a geração de potência ativa determinística;
- Q_g^d representa a geração de potência reativa determinística;
- δ_g é o valor da margem de inicialização do intervalo de geração.

Quando aplicada a matemática intervalar no fluxo de potência, o sistema de equações a serem resolvidos ($f(x) = 0$) são referentes aos resíduos de potência ativa e reativa (Pereira, 2011). Enquanto no Fluxo de Potência Ótimo, as equações a serem resolvidas são relativas às condições de otimalidade (condições de KKT – *Karush Kuhn–Tucker*) relacionadas ao problema proposto. Assim, são utilizadas variáveis intervalares, as quais resultam em um vetor intervalar (MONEGO, 2017).

$$g(x)^i = \begin{bmatrix} \nabla_{P_{BAT}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{P_g} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{Q_g} \mathcal{L}_i \\ \nabla_x \mathcal{L}_i \\ \nabla_{\lambda_g} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{\pi_{max}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{\pi_{min}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{s_{max}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{s_{min}} \mathcal{L}_i \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

onde:

- $\nabla_{P_{BAT}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação à potência da bateria;
- $\nabla_{P_g} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação à geração de potência ativa;
- $\nabla_{Q_g} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação à potência reativa;
- $\nabla_x \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação ao fasor da tensão;
- $\nabla_{\lambda} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados às restrições de igualdade;
- $\nabla_{\pi_{max}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados aos limites mínimos máximos;

- $\nabla_{\pi_{min}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados aos limites mínimos;
- $\nabla_{s_{max}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação às variáveis de folga máximas estritamente positivas;
- $\nabla_{s_{min}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Lagrangeana em relação às variáveis de folga mínimas estritamente positivas.

Para obter a solução intervalar do sistema mostrado na [Equação 4.17](#), constrói-se uma sequência convergente de intervalos, onde o limite é a solução de $g(x)$ que está contida em um intervalo. como descrito na seção 3.3. O algoritmo básico que se propõe é:

1. Calcula-se o Fluxo de Potência Ótimo convencional e obter despacho de geração e perfil de tensão de pontual do sistema;
2. Definem-se variações percentuais de demanda;
3. Inicializa-se o perfil das tensões intervalares, onde o ponto médio do intervalo é a solução pontual, e o seu raio é o ponto médio multiplicado pela variação percentual da demanda definida no passo 2;
4. Calculam-se resíduos das condições de KKT em análise;
5. Aplica-se o operador Krawczyk;
6. Obtêm-se novos valores das variáveis intervalares;
7. Testa-se convergência: se sim: Pare, se não ir ao passo 5.

4.3 Fluxo de Potência Ótimo Trifásico

Esta seção tem o objetivo de apresentar toda a modelagem dos elementos trifásicos utilizados no Fluxo de Potência Ótimo Trifásico utilizado nesta dissertação.

Quando se diz que um circuito trifásico é simétrico e equilibrado, utiliza-se a representação monofásica equivalente para tal. Entretanto, esta não é a realidade das linhas de distribuição, pois estas apresentam desbalanço de cargas e acoplamento mútuo entre as fases ([BARAN; FERNANDES, 2016](#)), ([BARAN; BORBA; FERNANDES, 2017](#)), ([BORBA, 2018](#)) e ([BARAN; BORBA; FERNANDES, 2018](#)).

Em sistemas reais, os desbalanços entre as fases se devem a cargas trifásicas desequilibradas, bifásicas e/ou monofásicas. Outrossim, o desbalanceamento e desequilíbrio das redes é crescente, pois os alimentadores em média tensão apresentam as seguintes características: radialidade da maioria dos circuitos; alta relação entre a resistência e

reatância e assimetria das linhas; presença de circuitos monofásicos e bifásicos, entre outros fatores (PEREIRA; COSTA, 2007) (BARAN; FERNANDES, 2016), (JUNIOR; FERNANDES; BORBA, 2019).

Por este motivo, o FPOT utilizado neste trabalho utiliza representação trifásica modelada de acordo com Baran e Fernandes (2016), que embora de mais complexa, calcula fluxos de potência pelas linhas, tensões e perdas para cada fase da rede.

Para se fazer uma análise trifásica deve levar em consideração a representação trifásica que considera o acoplamento mútuo entre as linhas e desbalanceamento das cargas, como a seguir descrito.

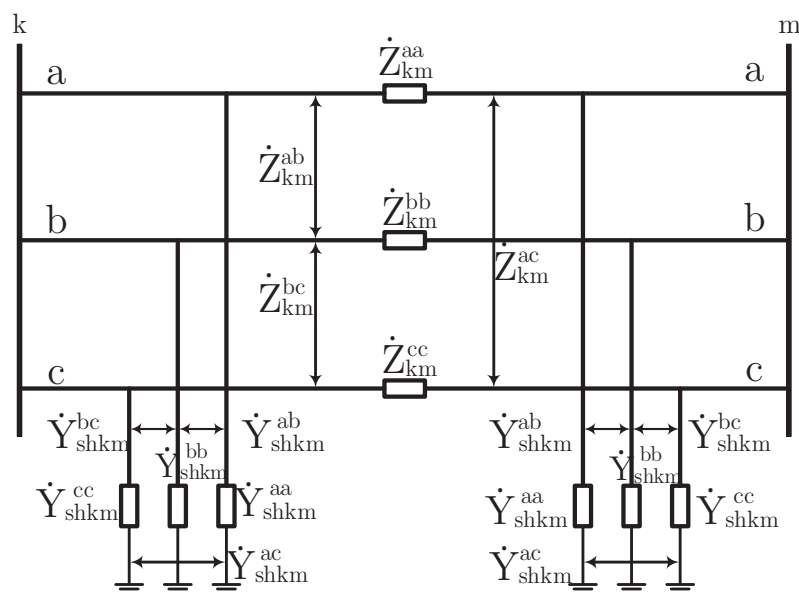
4.3.1 Representação Trifásica

A seguir, serão apresentados os modelos de linhas, transformadores, cargas e capacitores comumente utilizados em redes de distribuição trifásicas. Os modelos trifásicos dos elementos a serem apresentados não utilizam o condutor neutro, visto que o modelo brasileiro de rede de distribuição de média tensão, normalmente, são redes a três fios (BARAN; FERNANDES, 2016; BORBA, 2018; BARAN; BORBA; FERNANDES, 2018).

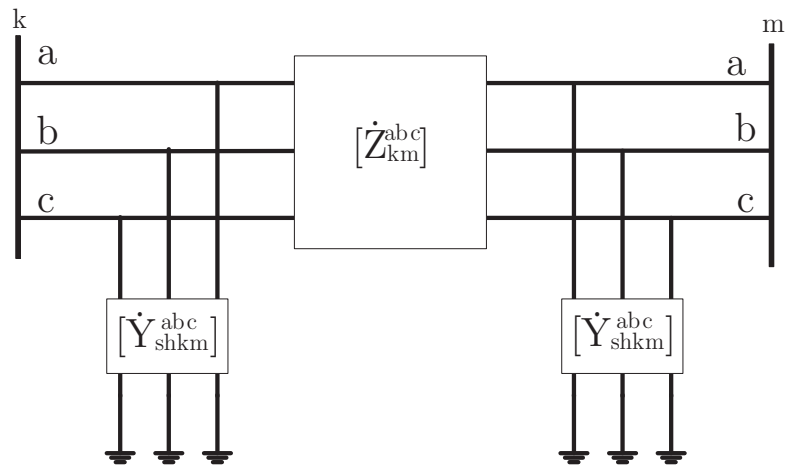
4.3.1.1 Modelagem das Linhas

O modelo matemático das linhas trifásicas é representado por um circuito π a parâmetros concentrados, conforme Figura 6. A Figura 7 representa a linha na forma matricial (PEREIRA, 2006).

Figura 6 – Circuito π Equivalente Linha Trifásica



Fonte: Adaptado de (PEREIRA, 2006)

Figura 7 – Circuito π Equivalente Linha Trifásica na Forma Matricial

Fonte: Adaptado de (PEREIRA, 2006)

$$[\dot{Z}_{km}^{abc}] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{km}^{aa} & \dot{Z}_{km}^{ab} & \dot{Z}_{km}^{ac} \\ \dot{Z}_{km}^{ba} & \dot{Z}_{km}^{bb} & \dot{Z}_{km}^{bc} \\ \dot{Z}_{km}^{ca} & \dot{Z}_{km}^{cb} & \dot{Z}_{km}^{cc} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$[\dot{Y}_{shkm}^{abc}] = j \begin{bmatrix} b_{shkm}^{aa} & b_{shkm}^{ab} & b_{shkm}^{ac} \\ b_{shkm}^{ba} & b_{shkm}^{bb} & b_{shkm}^{bc} \\ b_{shkm}^{ca} & b_{shkm}^{cb} & b_{shkm}^{cc} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

onde:

- \dot{Z}_{km}^{aa} é a impedância própria da linha na fase A, entre as barras k e m ;
- \dot{Z}_{km}^{bb} é a impedância própria da da linha na fase B, entre as barras k e m ;
- \dot{Z}_{km}^{cc} é a impedância própria da da linha na fase C, entre as barras k e m ;
- $\dot{Z}_{km}^{ab} = \dot{Z}_{km}^{ba}$ são as impedâncias mútuas entre as linhas das fases A e B, entre as barras k e m ;
- $\dot{Z}_{km}^{bc} = \dot{Z}_{km}^{cb}$ são as impedâncias mútuas entre as linhas das fases B e C, entre as barras k e m ;
- $\dot{Z}_{km}^{ac} = \dot{Z}_{km}^{ca}$ são as impedâncias mútuas entre as linhas das fases A e C, entre as barras k e m ;
- $[\dot{Z}_{km}^{abc}]$ é a matriz de impedâncias;
- $[\dot{Y}_{shkm}^{abc}]$ é a matriz de admitâncias *shunt* trifásica entre as barras k e m .

As indutâncias mútuas em circuitos trifásicos são dependentes de diversos fatores, tais como:

- espaçamento entre fases;
- distância do cabo ao solo;
- tipo e bitola dos condutores;
- existência do condutor de neutro;
- níveis de tensão;
- extensão da linha.

Para este trabalho, considera-se que estes dados já foram previamente calculados e aferidos.

4.3.1.2 Modelagem das Cargas

É comum que nos sistemas de distribuição a carga seja especificada pela potência ativa e reativa ou potência aparente e fator de potência. Além disso, essas cargas podem ser tanto trifásica, bifásica ou monofásica, as quais podem ser conectadas em estrela (aterrada ou não) ou delta (PIZZALI, 2003) e, ainda, apresentar desequilíbrio.

Além disso, elas podem ser modeladas como os seguintes tipos (PIZZALI, 2003):

- Potência ativa e reativa constantes;
- Corrente constante;
- Impedância constante;
- ZIP, combinação de potência, corrente e impedância constante;
- Exponencial.

Para este trabalho, optou-se por utilizar apenas a modelagem de carga com potência constante.

4.3.1.3 Modelagem dos bancos de capacitores

Bancos de capacitores são de alta importância em redes de distribuição. Eles possibilitam reduzir as perdas nas linhas com a compensação de reativo e melhorar o perfil de tensão.

A modelagem de capacitor proposta por Salas (2010) considera as susceptâncias capacitivas constante, sendo que elas podem ter arranjos trifásicos com de conexões em delta, estrela ou estrela aterrada.

Nos sistemas de distribuição, o comum é que bancos de capacitores sejam classificados por intermédio da tensão nominal de fase em kV e a potência em $kvar$ por fase.

No FPOT utilizado neste trabalho será apenas modelada a conexão estrela aterrada.

O valor da susceptância dos capacitores é determinado pela Equação 4.20.

$$\mathbf{B}_t = \frac{\mathbf{Q}_{BC_t}}{|\dot{\mathbf{V}}_t|^2} \quad (4.20)$$

onde:

- \mathbf{B}_t é o valor da susceptância;
- \mathbf{Q}_{BC_t} é a potência nominal reativa em $kvar$ do capacitor;
- $\dot{\mathbf{V}}_t$ é a tensão aplicada sobre o capacitor;
- t é o sub-índice que referencia das grandezas de potência, tensão e susceptância. $t \in \{an, bn, cn, ab, bc, ca\}$.

4.3.2 Fluxo de Potência Ótimo Trifásico Intervalar

A formulação geral do FPOT utilizada é a proposta em Baran e Fernandes (2016), cuja função objetivo envolve a minimização das perdas (Equação 4.21), solução das equações de balanço de potência ativa e reativa para as três fases e limites de tensão nas três fases, conforme Equação 4.21 a Equação 4.27.

A formulação geral do problema (BARAN; FERNANDES, 2016) é:

$$f.o. \quad \min \quad \sum (\mathbf{P}_g^{a,b,c} - \mathbf{P}_d^{a,b,c}) \quad (4.21)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{P}_g^{a,b,c} - \mathbf{P}_d^{a,b,c} = \Re \left\{ \text{diag}(\dot{\mathbf{V}}^{a,b,c}) \cdot (\dot{\mathbf{Y}}^{a,b,c} \cdot \dot{\mathbf{V}}^{a,b,c})^* \right\} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{Q}_g^{a,b,c} + \text{diag} \left\{ |\dot{\mathbf{V}}^{a,b,c}|^2 \right\} \cdot \mathbf{c}^{a,b,c} - \mathbf{Q}_d^{a,b,c} = \Im \left\{ \text{diag}(\dot{\mathbf{V}}^{a,b,c}) \cdot (\dot{\mathbf{Y}}^{a,b,c} \cdot \dot{\mathbf{V}}^{a,b,c})^* \right\} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{P}_{g_{min}} \leq |\mathbf{P}^{a,b,c}| \leq \mathbf{P}_{g_{max}} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{Q}_{g_{min}} \leq |\mathbf{Q}^{a,b,c}| \leq \mathbf{Q}_{g_{max}} \quad (4.25)$$

$$|\dot{\mathbf{V}}_{\min}^{a,b,c}| \leq |\dot{\mathbf{V}}^{a,b,c}| \leq |\dot{\mathbf{V}}_{\max}^{a,b,c}| \quad (4.26)$$

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{c}^{a,b,c} \leq \mathbf{c}_{max} \quad (4.27)$$

onde:

- w_p - peso que relaciona as perdas elétricas;
- nb - número de barras;
- $\mathbf{P}_g^{a,b,c}$ – vetor com geração de potência ativa para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 1)$;
- $\mathbf{P}_d^{a,b,c}$ – vetor de demanda de potência ativa para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 1)$;
- $\mathbf{Q}_g^{a,b,c}$ – vetor com geração de potência reativa para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 1)$;
- $\mathbf{Q}_d^{a,b,c}$ – vetor de demanda de potência reativa para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 1)$;
- $\dot{\mathbf{V}}^{a,b,c}$ – vetor com tensão nodal para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 1)$;
- $\dot{\mathbf{Y}}^{a,b,c}$ – matriz de admitância de barra para as fases A, B e C com dimensão $(3nb \times 3nb)$;
- $\mathbf{c}^{a,b,c}$ – vetor com os bancos de capacitores para as fases A, B e C, com dimensão $(nb \times 1)$.
- $\mathbf{P}_{g_{min}}$ e $\mathbf{P}_{g_{max}}$ – limites mínimo e máximo de geração de potência ativa para as fases A, B e C;
- $\mathbf{Q}_{g_{min}}$ e $\mathbf{Q}_{g_{max}}$ – limites mínimo e máximo de geração de potência reativa para as fases A, B e C;
- $|\dot{\mathbf{V}}_{\min}|$ e $|\dot{\mathbf{V}}_{\max}|$ – limites mínimo e máximo de magnitude de tensão nas as fases A, B e C.

A Equação 4.22 e Equação 4.23 representam as equações de balanço de potência ativa e reativa, referentes a cada uma das barras e fases. A Equação 4.24 e Equação 4.25 monitoram os limites de geração ativa e reativa, enquanto a Equação 4.26 controla as magnitudes de tensão, respectivamente. A Equação 4.27 atuam no ajuste dos bancos de capacitores.

O fluxo de potência ótimo trifásico de Baran e Fernandes (2016) é resolvido pelo método dos Pontos Interiores versão Primal–Dual (MPIPD) (GRANVILLE, 1994).

4.3.2.1 Aplicação da matemática intervalar no fluxo de potência ótimo trifásico

Semelhante ao FPO e FPOMP Intervalares, após obter a solução convencional do FPOT, resolvido através do Método dos Pontos Interiores versão Primal Dual, utiliza-se a solução como ponto de partida para o Método de Krawczyk. É incorporado ao valor de carga uma incerteza arbitrária, formando, assim, um intervalo com limites superior e inferior, conforme a Equação 4.28 e Equação 4.29.

$$P_{d_{a,b,c}}^i = \left[\left(P_{d_{a,b,c}}^d - \delta \right); \left(P_{d_{a,b,c}}^d + \delta \right) \right] \quad (4.28)$$

$$Q_{d_{a,b,c}}^i = \left[\left(Q_{d_{a,b,c}}^d - \delta \right); \left(Q_{d_{a,b,c}}^d + \delta \right) \right] \quad (4.29)$$

onde:

- $P_{d_{a,b,c}}^i$ é a demanda de potência ativa Intervalar, nas fases a, b e c;
- $Q_{d_{a,b,c}}^i$ é a demanda de potência reativa Intervalar, nas fases a, b e c;
- $P_{d_{a,b,c}}^d$ é a demanda de potência ativa determinística, nas fases a, b e c;
- $Q_{d_{a,b,c}}^d$ é a demanda de potência reativa determinística, nas fases a, b e c;
- δ valor da incerteza adotada para o cálculo do intervalo.

Já para a geração solar, repete-se o processo, conforme a Equação 4.30 e Equação 4.31.

$$P_{gsol_{a,b,c}}^i = \left[\left(P_{gsol_{a,b,c}}^d \cdot (1 - \delta_{sol}) \right); \left(P_{gsol_{a,b,c}}^d \cdot (1 + \delta_{sol}) \right) \right] \quad (4.30)$$

$$Q_{gsol_{a,b,c}}^i = \left[\left(Q_{gsol_{a,b,c}}^d \cdot (1 - \delta_{sol}) \right); \left(Q_{gsol_{a,b,c}}^d \cdot (1 + \delta_{sol}) \right) \right] \quad (4.31)$$

onde:

- $P_{gsol_{a,b,c}}^i$ é a geração solar ativa intervalar;
- $Q_{gsol_{a,b,c}}^i$ é a geração solar reativa intervalar;
- $P_{gsol_{a,b,c}}^d$ é a geração solar ativa determinística;
- $Q_{gsol_{a,b,c}}^d$ é a geração solar reativa determinística;
- δ_{sol} valor da incerteza adotada para o cálculo do intervalo.

A partir do valor determinístico, são calculados os valores de inicialização do perfil de tensão retangular, adicionando uma margem arbitrária, de acordo com a [Equação 4.32](#), que representam o valor inicial do processo iterativo do Método de Krawczyk:

$$X_{a,b,c}^i = [(x_{a,b,c}^d \cdot (1 - \delta_v)); (x_{a,b,c}^d \cdot (1 + \delta_v))] \quad (4.32)$$

onde:

- x é o fasor de tensão complexa na forma retangular ($x = e + jf$);
- δ_v margem de inicialização do intervalo de tensão.

Ao aplicar a matemática no problema de Fluxo de Carga (FC), tal como proposto por ([PEREIRA, 2011](#)), a inicialização do método de Krawczyk se dá apenas através da [Equação 4.32](#), referente às tensões. Já no problema do FPOT, também se calculam os valores de geração ativa e reativa, dessa forma, também devem ser incorporadas à inicialização, conforme a [Equação 4.33](#) e [Equação 4.34](#).

$$P_{g,a,b,c}^i = [(P_{g,a,b,c}^d - \delta_g); (P_{g,a,b,c}^d + \delta)] \quad (4.33)$$

$$Q_{g,a,b,c}^i = [(Q_{g,a,b,c}^d - \delta_g); (Q_{g,a,b,c}^d + \delta)] \quad (4.34)$$

onde:

- $P_{g,a,b,c}^i$ é a geração de potência ativa Intervalar, nas fases a, b e c;
- $Q_{g,a,b,c}^i$ é a geração de potência reativa Intervalar, nas fases a, b e c;
- $P_{g,a,b,c}^d$ é a geração de potência ativa determinística, nas fases a, b e c;
- $Q_{g,a,b,c}^d$ é a geração de potência reativa determinística, nas fases a, b e c;
- δ_g valor da margem de inicialização do intervalo de geração.

Quando aplicada a [MI](#) no fluxo de potência ótimo trifásico, o sistema de equações a serem resolvidos ($f(x) = 0$) são referentes aos resíduos de potência ativa e reativa ([PEREIRA, 2011](#)). Enquanto no Fluxo de Potência Ótimo, as equações a serem resolvidas são relativas às condições de otimalidade (condições de KKT – *Karush Kuhn–Tucker*)

relacionadas ao problema proposto. Assim, são utilizadas variáveis intervalares, as quais resultam em um vetor intervalar (MONEGO, 2017).

$$g(x)^i = \begin{bmatrix} \nabla_{P_g^{a,b,c}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{Q_g^{a,b,c}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{x^{a,b,c}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{b^{a,b,c}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{\lambda_g} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{\pi_{max}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{\pi_{min}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{s_{max}} \mathcal{L}_i \\ \nabla_{s_{min}} \mathcal{L}_i \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

onde:

- $\nabla_{P_g^{a,b,c}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação à geração de potência ativa das fases a, b e c;
- $\nabla_{Q_g^{a,b,c}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação à potência reativa das fases a, b e c;
- $\nabla_{x^{a,b,c}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao fasor da tensão das fases a, b e c;
- $\nabla_{b^{a,b,c}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação aos bancos de capacitores das fases a, b e c;
- $\nabla_{\lambda} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados às restrições de igualdade;
- $\nabla_{\pi_{max}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados aos limites mínimos máximos;
- $\nabla_{\pi_{min}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação ao multiplicador de Lagrange associados aos limites mínimos;
- $\nabla_{s_{max}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação às variáveis de folga máximas estritamente positivas;
- $\nabla_{s_{min}} \mathcal{L}_i$ é a derivada parcial da função Larangeana em relação às variáveis de folga mínimas estritamente positivas;

Para obter a solução intervalar do sistema mostrado na [Equação 4.35](#), constrói-se uma sequência convergente de intervalos, onde o limite é a solução de $g(x)$ que está contida em um intervalo. como descrito na seção 3.3.

4.3.2.1.1 Referência para tensões trifásicas

Um dos desafios encontrados na aplicação do FPOT foi referenciar as componentes real e imaginária dos fasores defasados de 120° , uma vez que o sinal deles é trocado em relação ao fasor de referência (Fase A), conforme mostra a [Figura 8](#), onde são apresentados três fasores de módulo unitário e defasados de 120° . Além disso, tais fasores intervalares são associados a uma função módulo intervalar.

Para tanto, utilizaram-se os valores da magnitude de tensão determinística como referência, uma vez que os pontos de operação do método intervalar se dão ao redor da solução, segundo os conceitos apresentados no [Capítulo 2](#). Essa técnica é aplicada após calcular a interseção do operador de Krawczyk com o vetor de valores das variáveis, conforme a [Equação 2.29](#), para se obter um novo intervalo de solução.

Primeiramente, determina-se o valor de $X_{a,b,c}^{k+1}$:

$$X_{a,b,c}^{k+1} = K(X_{a,b,c})^k \cap X_{a,b,c}^k$$

onde:

- $X_{a,b,c} = E_{a,b,c} + jF_{a,b,c}$;
- $K(X_{a,b,c})$ operador de Krawczyk referente ao fasor de tensão;
- k iteração k .

Esse valor $X_{a,b,c}^{k+1}$ não considera o valor do módulo superior e inferior de tensão, somente as componentes real e imaginária. Dessa forma, é necessário definir quais os valores superiores e inferiores das componentes, baseado na função módulo:

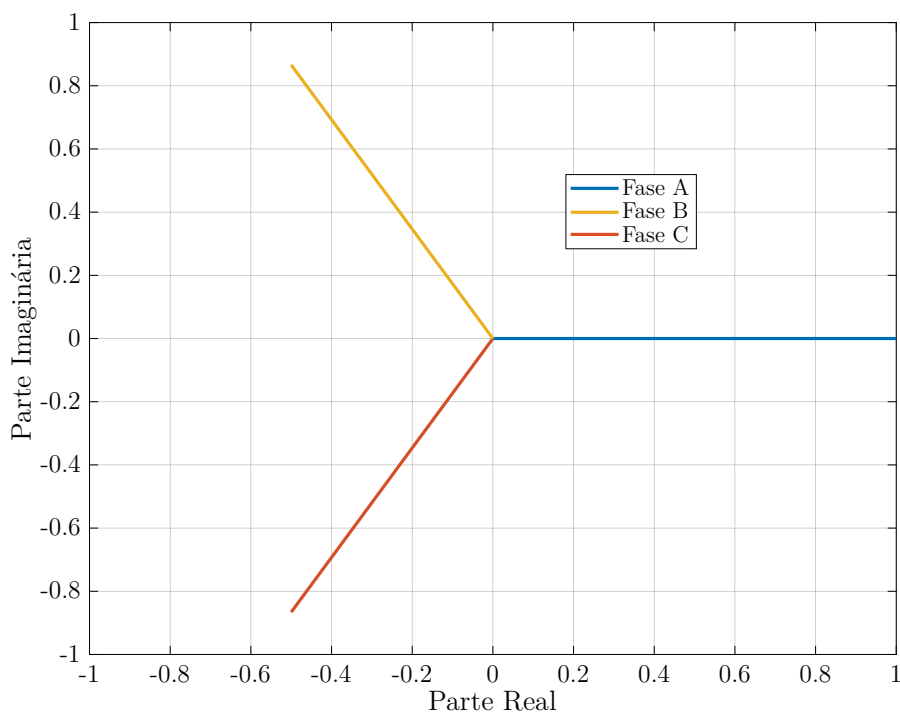
$$\begin{aligned} \underline{V}_{(k+1)} &= \max \left\{ \sqrt{E_{(k+1)}^2 + F_{(k+1)}^2} \right\} \leq V^* \\ \bar{V}_{(k+1)} &= \min \left\{ \sqrt{E_{(k+1)}^2 + F_{(k+1)}^2} \right\} \geq V^*. \end{aligned}$$

Uma vez verificado o módulo da tensão em relação ao valor determinístico, os novos valores de $E = [\underline{e}; \bar{e}]$ e $F = [\underline{f}; \bar{f}]$ são estabelecidos:

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \sqrt{\underline{e}_{(k+1)}^2 + \underline{f}_{(k+1)}^2} \\ \bar{V} &= \sqrt{\bar{e}_{(k+1)}^2 + \bar{f}_{(k+1)}^2}. \end{aligned}$$

Com isso, o algoritmo básico que se propõe é:

Figura 8 – Fasores

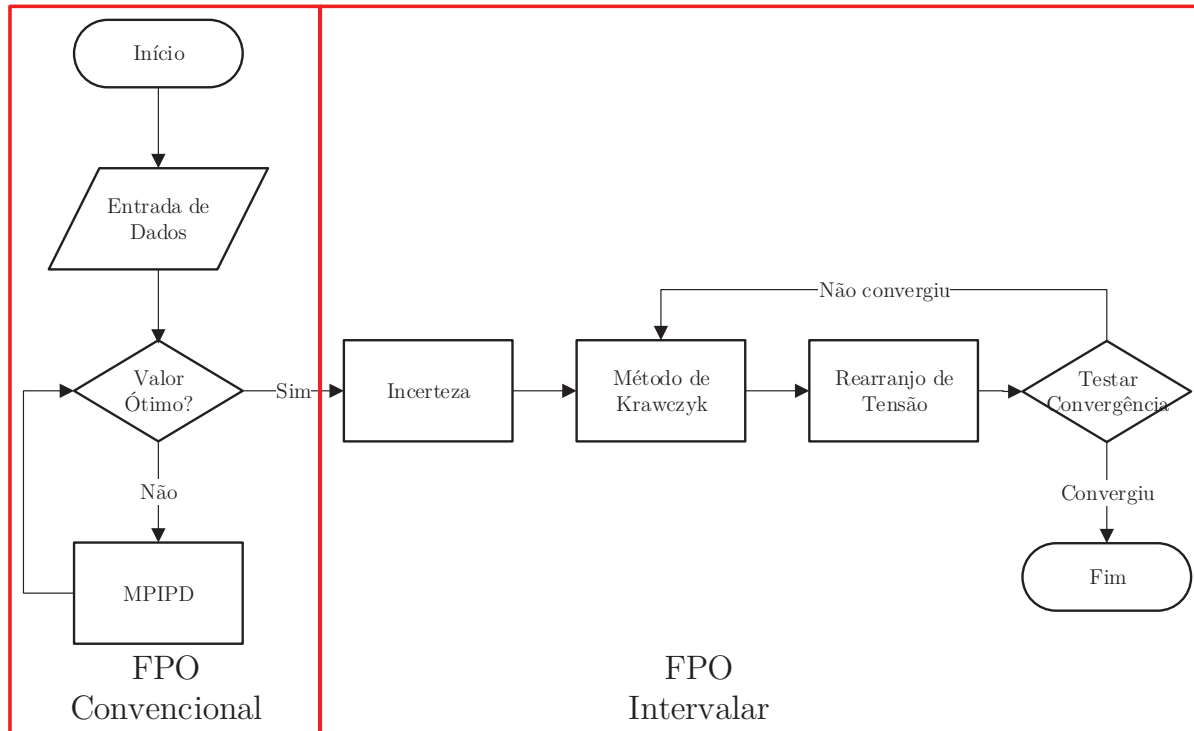


Fonte: O autor (2020).

1. Calcula-se o Fluxo de Potência Ótimo convencional e obter despacho de geração e perfil de tensão de pontual do sistema;
2. Definir variações percentuais de demanda;
3. Inicializar o perfil das tensões intervalares, onde o ponto médio do intervalo é a solução pontual, e o seu raio é o ponto médio multiplicado pela variação percentual da demanda definida no passo 2;
4. Calcular resíduos das condições de KKT em análise;
5. Aplicar o operador Krawczyk;
6. Obter novos valores das variáveis intervalares;
7. Realizar rearranjo dos valores referentes a tensão intervalar;
8. Testar convergência: se sim: Pare, se não ir ao passo 5.

De forma resumida, o fluxograma mostrado na [Figura 9](#) sintetiza o funcionamento do problema proposto.

Figura 9 – Fluxograma do FPOT e FPOMP intervalares



Fonte: O autor (2020).

4.4 Considerações finais

O objetivo deste capítulo foi mostrar a formulação do Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo de Blasi (2020) e Trifásico de Baran e Fernandes (2016) bem como a aplicação do método de Krawczyk em cada um deles, a fim de obter intervalos ótimos do perfil de tensão, geração ativa e reativa. Além disso, foi apresentada a manipulação adequada das componentes da tensão de cada fase, por apresentarem diferentes referências, bem como a aplicação no FPOMP e FPOT.

A técnica intervalar escolhida evita a necessidade de realizar exaustivas simulações a fim de se obter todas as combinações possíveis para descrever o comportamento do sistema com boa precisão. Além disso, o método de Krawczyk evita a inversão da matriz Hessiana a cada iteração, melhorando o esforço computacional, sem perder precisão.

5 Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados das formulações propostas para o Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo Intervalar e Fluxo de Potência Ótimo Trifásico Intervalar.

Para isso, serão analisados dois cenários: o primeiro apresenta o FPOMP Intervalar, enquanto o segundo o FPOT Intervalar utilizando o sistema *IEEE* 34 barras adaptado para ambos os cenários, por se tratar de um sistema de distribuição real com tensão nominal de 24,9 kV, cujo diagrama unifilar é mostrado na [Figura 10](#).

Para a validação de resultados, o FPOT e FPOMP determinísticos foram simuladas 200 vezes, utilizando valores aleatórios carga com distribuição de probabilidade uniforme dentro da mesma faixa de incerteza utilizada na modelagem intervalar, assim como é considerada pela MI.

A [Equação 5.1](#) e [Equação 5.2](#) mostram o modelo matemático utilizado para introduzir vetores de carga aleatórios no FPOMP e FPOT determinísticos.

$$P_d^{nk} = P_{d_{original}} \cdot R(\delta_{inf}; \delta_{sup}) \quad (5.1)$$

$$Q_d^{nk} = Q_{d_{original}} \cdot R(\delta_{inf}; \delta_{sup}) \quad (5.2)$$

onde:

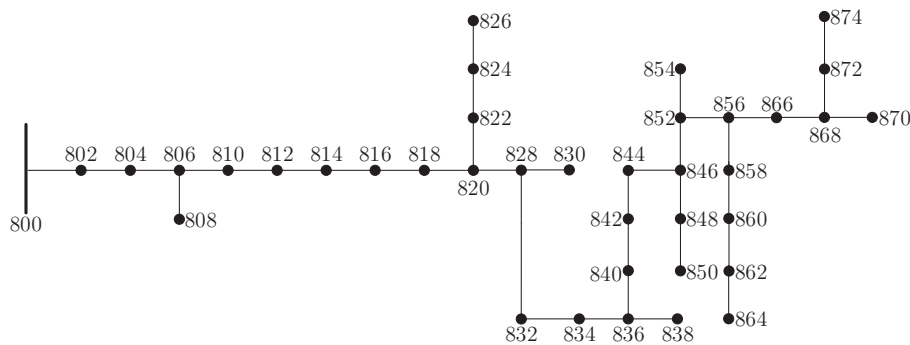
- P_d^{nk} é o vetor de carga ativa aleatório utilizado no FPOMP e FPOT determinísticos na simulação nk ;
- Q_d^{nk} é o vetor de carga reativa aleatório utilizado no FPOMP e FPOT determinísticos na simulação nk ;
- $P_{d_{original}}$ é o vetor de carga ativa original do sistema utilizado;
- $Q_{d_{original}}$ é o vetor de carga reativa original do sistema utilizado;
- R é um vetor que contém números aleatórios, variando entre $(1 - \delta_{inf})$ e $(1 + \delta_{sup})$;
- δ_{inf} limite de incerteza inferior;
- δ_{sup} limite de incerteza superior.

Para manter o fator de potência constante nas barras do sistema, o vetor R é o mesmo para P_d e Q_d .

5.1 Sistema testado

A [Figura 10](#) mostra o diagrama unifilar de um sistema adaptado do *IEEE* 34 barras. Para os resultados mostrados nesse capítulo, foram alteradas algumas características. Para o Cenário 1, foi introduzido um banco de baterias (Barra 834) e geração solar, cujos dados estão apresentados no Apêndice A. Enquanto para o Cenário 2, foi introduzido uma fonte de geração solar na barra 856.

Figura 10 – Sistema *IEEE* 34 barras



Fonte: O autor (2020).

5.2 Cenário 1 – FPOMP

Para este primeiro cenário, foram analisados quatro casos, a fim de observar o comportamento gerado com a inserção de incerteza na carga e geração solar.

A [Tabela 6](#) mostra os valores de incerteza utilizados em cada um dos casos. Para todos os casos considerados, foi utilizado uma incerteza de carga constante, variando apenas as da geração solar. Esta estratégia foi adotada no *FPOMP*, pois um dos objetivos deste problema é a obtenção de operação ótima de bancos de baterias, que é fortemente influenciada pelas injeções de potência das *GDs*. Assim, a escolha de apenas variar as incertezas das *GDs* foi a fim de focar no efeito das mesmas quando da avaliação do *MI*.

Tabela 6 – Configurações de teste do *FPOMP*

Caso	Incerteza de carga	Incerteza de geração solar
1	5%	5%
2	5%	10%
3	5%	20%
4	5%	30%

O autor (2020).

Como critério de avaliação, serão avaliados o perfil de tensão nas barras, geração ativa, reativa e potência da bateria, através da forma gráfica. Serão plotados os valores da simulação determinística considerando condição extrema, ou seja, com todas as cargas

e geração solar acrescidas e decrescidas de δ , a simulação do modelo intervalar, o valor ótimo e valores gerados aleatoriamente. Outrossim, serão tabelados os valores de geração ativa e potência injetada pela bateria em três períodos diferentes, uma vez que essas duas variáveis estão diretamente correlacionadas entre si e com a incerteza de geração solar.

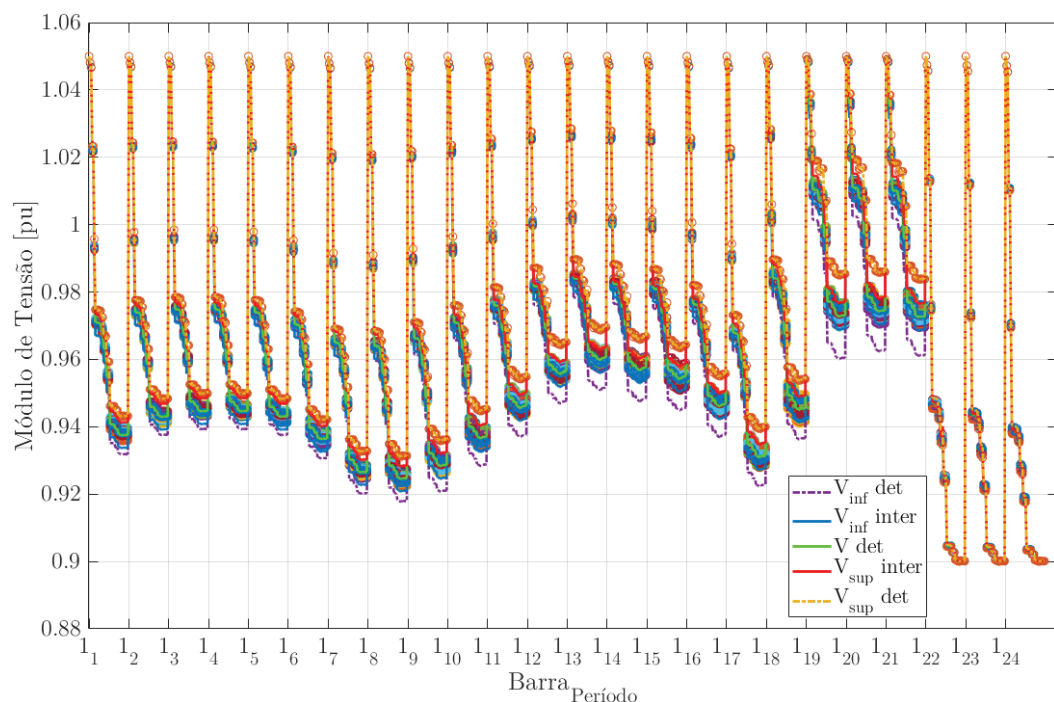
A simulação determinística com os valores de incerteza absolutos permite criar uma envoltória limite de referência juntamente com a nuvem determinística aleatória. Um dos objetivos do método intervalar é incorporar todo o intervalo de incerteza de maneira contínua. Dessa forma o método proposto deve conter o valor determinístico ótimo e ao mesmo tempo encontrar um intervalo ótimo, cujos valores estão contidos na nuvem aleatória (MONEGO, 2017).

Para os resultados gráficos, valores aleatórios serão plotados através de círculos, a fim de se formar uma nuvem de valores prováveis. Já os resultados determinísticos são identificados por linhas tracejadas e o método intervalar por linha sólida.

5.2.1 Caso 1 – Incerteza solar de 5% e carga de 5%

A Figura 11 mostra o perfil de tensão nas barras do caso 1 em 24 períodos. Nota-se que a tensão calculada através do método intervalar engloba praticamente toda a nuvem gerada com despacho aleatório. Além disso, não fica além ou aquém dos valores extremos, dando uma excelente margem de comportamento quando se atribui dados com intervalos de erro. Por fim, o valor determinístico ótimo ficou contido no intervalo, como esperado.

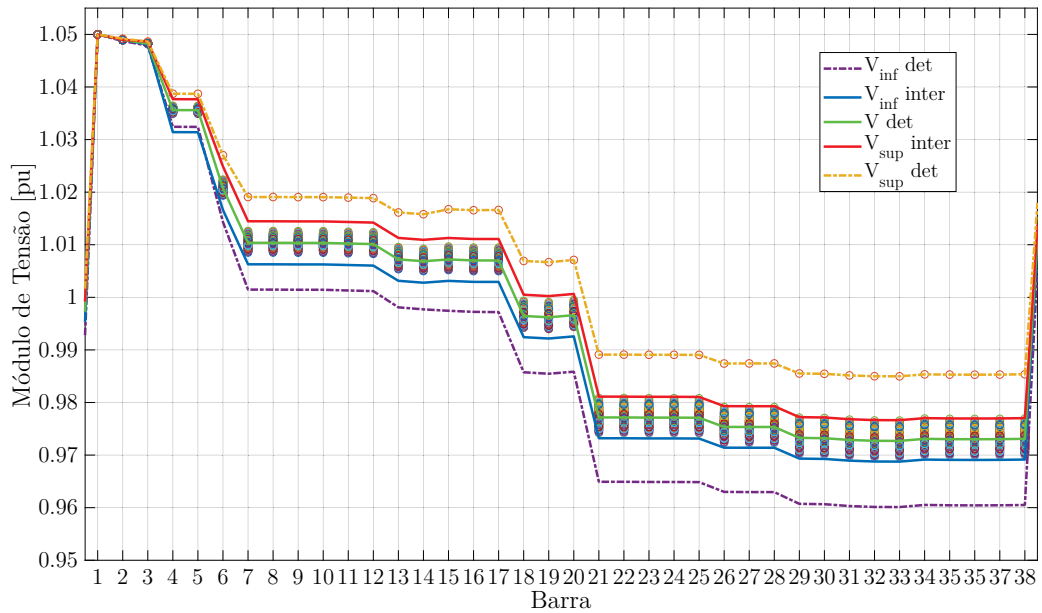
Figura 11 – Perfil de tensão – Caso 1



Fonte: O autor (2020).

Devido à grande concentração de valores no gráfico da [Figura 11](#), ampliou-se o perfil de tensão para o período das 19 horas, correspondente ao pico de carga do sistema, conforme mostra [Figura 12](#). Através do gráfico ampliado, percebe-se com melhor detalhamento o comportamento descrito pelo gráfico da [Figura 11](#), no qual o método intervalar entrega um resultado intermediário em relação ao despacho aleatório e ao ótimo com incerteza em todas as cargas.

Figura 12 – Perfil de tensão – Período 19 – Caso 1



Fonte: O autor (2020).

A [Tabela 7](#) e [Tabela 8](#) são responsáveis por comparar estatisticamente os limites superior e inferior da magnitude de tensão, respectivamente, nas barras onde se tem geração solar. Nelas são calculados a média, desvio padrão e variância entre os três métodos.

O desvio padrão e a variância apresentam o grau de dispersão dos dados em relação a um valor esperado (média). Dessa forma, quanto mais próximos de zero, melhor a qualidade do resultado.

Tabela 7 – Análise Estatística – Caso 1 Superior

Barra	Ótimo Determinístico	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
7	1,0190	1,0140	1,0130	1,0153	0,0032146	$1,0333 \times 10^{-5}$
15	1,0170	1,0110	1,0100	1,0127	0,0037859	$1,4333 \times 10^{-5}$
20	1,0070	1,001	0,9995	1,0025	0,0039686	$1,575 \times 10^{-5}$
25	0,9891	0,9811	0,9811	0,9837	0,0046188	$2,1333 \times 10^{-5}$
30	0,9855	0,9771	0,9771	0,9799	0,0048497	$2,352 \times 10^{-5}$
35	0,9853	0,9770	0,9770	0,9797	0,004792	$2,2963 \times 10^{-5}$
38	0,9854	0,9770	0,9770	0,9798	0,0048497	$2,352 \times 10^{-5}$

Fonte: O autor (2020).

Tabela 8 – Análise Estatística – Caso 1 – Inferior

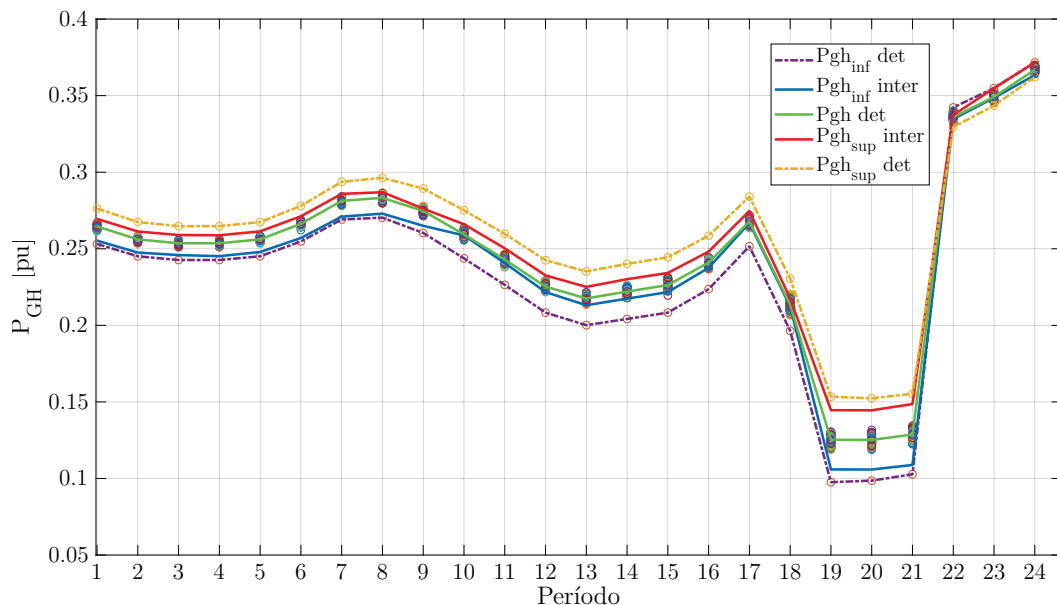
Barra	Ótimo	Determinístico	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
7		1,0001	1,0006	1,0009	1,00053	0,0040415	$1,06333 \times 10^{-5}$
15		0,9974	1,0003	1,0005	1,00018	0,0039395	$1,0552 \times 10^{-5}$
20		0,9859	0,9926	0,9945	0,9910	0,0045177	$2,041 \times 10^{-5}$
25		0,9649	0,9731	0,9743	0,9707	0,005116	$2,173 \times 10^{-5}$
30		0,9607	0,9693	0,9701	0,9667	0,0052115	$2,716 \times 10^{-5}$
35		0,9605	0,9691	0,9699	0,9665	0,0052115	$2,716 \times 10^{-5}$
38		0,9605	0,9691	0,9702	0,9666	0,0053113	$2,821 \times 10^{-5}$

Fonte: O autor (2020).

A partir da [Tabela 7](#) e [Tabela 8](#), conclui-se que os três métodos apresentam baixa dispersão entre si tanto para o intervalo superior quanto inferior, pois os valores de variância são na ordem de 10^{-5} . Reforçando que o método intervalar entrega resultados com boa precisão, quando comparado aos outros 2 métodos de validação.

A [Figura 13](#) mostra a injeção de potência ativa (P_{GH}) na barra da subestação em 24 períodos para o caso 1. Observa-se o mesmo comportamento obtido com o perfil de tensão. Os valores calculados através do método intervalar encontram-se dentro dos limites extremos e contém o valor ótimo determinístico, justificando a teoria da matemática intervalar.

Figura 13 – Geração Ativa na Barra 1 – Caso 1



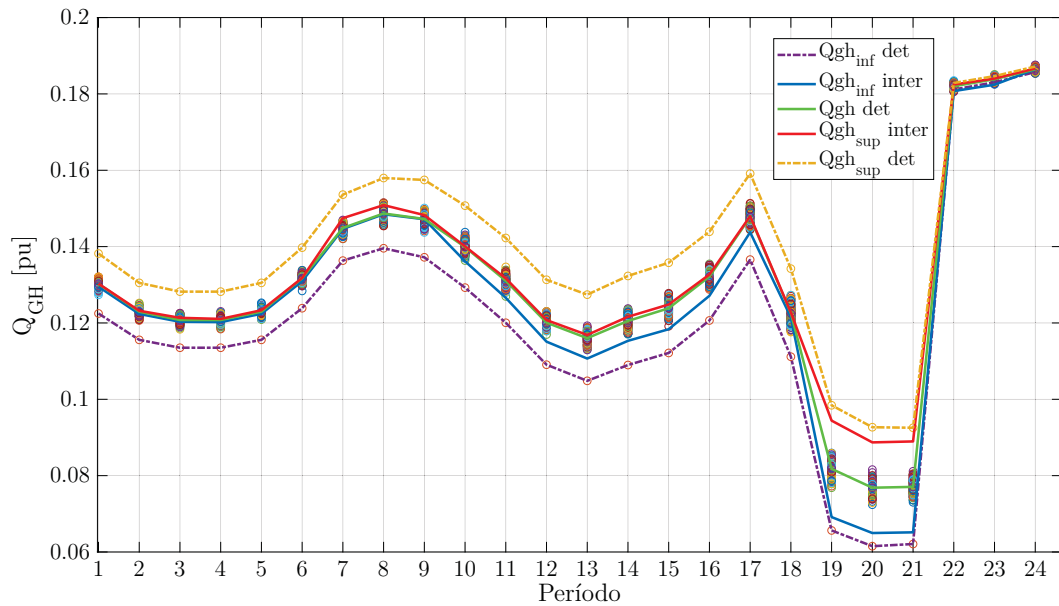
Fonte: O autor (2020).

Na maioria dos períodos, a geração intervalar engloba a nuvem aleatória. Entretanto, no período das 19 às 21 horas, o intervalo determinístico tem um aumento no diâmetro intervalar. O mesmo comportamento ocorre com o banco de bateria, no mesmo período, quando está injetando potência na rede, conforme a [Figura 15](#). Ou seja, durante as

primeiras horas do dia, a incerteza da geração ativa na subestação é proveniente das cargas, enquanto no restante do dia, o banco de bateria é responsável pelo aumento do intervalo de incerteza.

A Figura 14 apresenta a injeção de potência reativa (Q_{GH}) na barra da subestação em 24 períodos para o caso 1. A partir do gráfico, é possível observar o mesmo padrão da geração ativa durante os 24 períodos. O método proposto manteve-se dentro da faixa extrema, com valores muito próximos em relação à nuvem aleatória.

Figura 14 – Geração Reativa – Caso 1

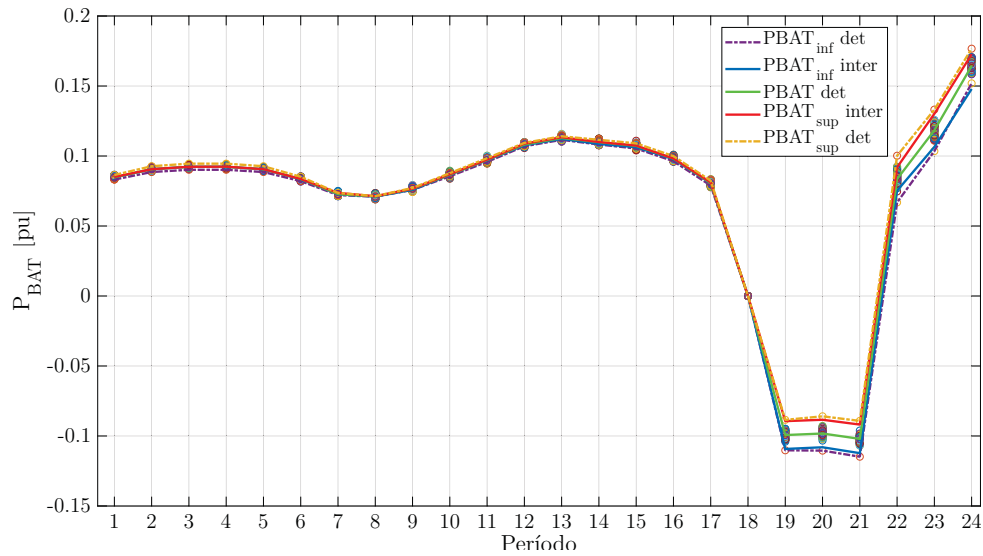


Fonte: O autor (2020).

A potência injetada pelo banco de baterias na Barra 17 (854) é mostrada através da Figura 15. Onde é possível notar, através do gráfico, que durante todo o período de recarga da bateria, entre 1 e 18 horas, praticamente não há incerteza da potência fornecida para qualquer um dos métodos implementados. Contudo, no período das 19 às 21, o banco começa a funcionar como um gerador. A partir disso pode-se concluir que há um aumento considerável da incerteza da potência fornecida pela bateria que pode ser atrelada ao aumento da incerteza de geração (P_{GH}) durante o mesmo período, como explicado anteriormente e através da Figura 13. Além disso, após as 22, tanto o intervalo de P_{GH} e P_{BAT} reduzem simultaneamente.

A fim de se comparar numericamente a geração ativa e potência fornecida pela bateria em alguns períodos específicos, foi comparado o valor determinístico absoluto, intervalar e a extremidade da nuvem aleatória, como mostrado na Tabela 9 e Tabela 10. Nestas tabelas estão presentes os valores absolutos e a diferença relativa em relação ao método determinístico puro. Além disso, foi feita uma análise estatística através da média, desvio padrão e variância.

Figura 15 – Potência da bateria – Caso 1



Fonte: O autor (2020).

Tabela 9 – Comparação de valores – P_{GH} – Caso 1

Método	Período	P_{GH} inferior	Diferença relativa	P_{GH} superior	Diferença relativa
FPOMPI		0,2479	-1,1424%	0,2614	2,2438%
Despacho Aleatório		0,2535	-3,4272%	0,2585	3,3283%
FPOMP Determinístico	5	0,2451	—	0,2674	—
Média		0,2488		0,2624	
Desvio Padrão		0,0043		0,0045	
Variância		$1,8293 \times 10^{-5}$		$2,0603 \times 10^{-5}$	
FPOMPI		0,2131	-6,4968 %	0,2251	4,2942%
Despacho Aleatório		0,2131	-6,4968%	0,2214	5,8673 %
FPOMP Determinístico	13	0,2001	—	0,2352	—
Média		0,2088		0,2272	
Desvio Padrão		0,0075		0,0071	
Variância		$5,6333 \times 10^{-5}$		$5,1023 \times 10^{-5}$	
FPOMPI		0,1058	-7,324 %	0,1445	5,1215 %
Despacho Aleatório		0,1188	-20,5113%	0,1317	13,5259%
FPOMP Determinístico	20	0,0986	—	0,1523	—
Média		0,1077		0,1428	
Desvio Padrão		0,0102		0,0104	
Variância		$1,0481 \times 10^{-4}$		$1,0817 \times 10^{-4}$	

Fonte: O Autor(2020).

Através da [Tabela 9](#) e [Tabela 10](#), afirma-se que o método intervalar possui uma faixa de valores intermediário entre o determinístico e o aleatório. A partir disso, conclui-se que o método proposto garante, na maioria das vezes, a faixa de valores mais provável de ocorrer e apresenta pequena diferença percentual em relação às simulações aleatórias. Além disso, o resultado do **FPOMPI** está sempre contida dentro do intervalo considerado extremo, o qual é o menos provável de ocorrer. Comparando os valores de desvio padrão e variância, observa-se uma baixa dispersão dos valores em relação à média.

Tabela 10 – Comparação de valores – P_{BAT} – Caso 1

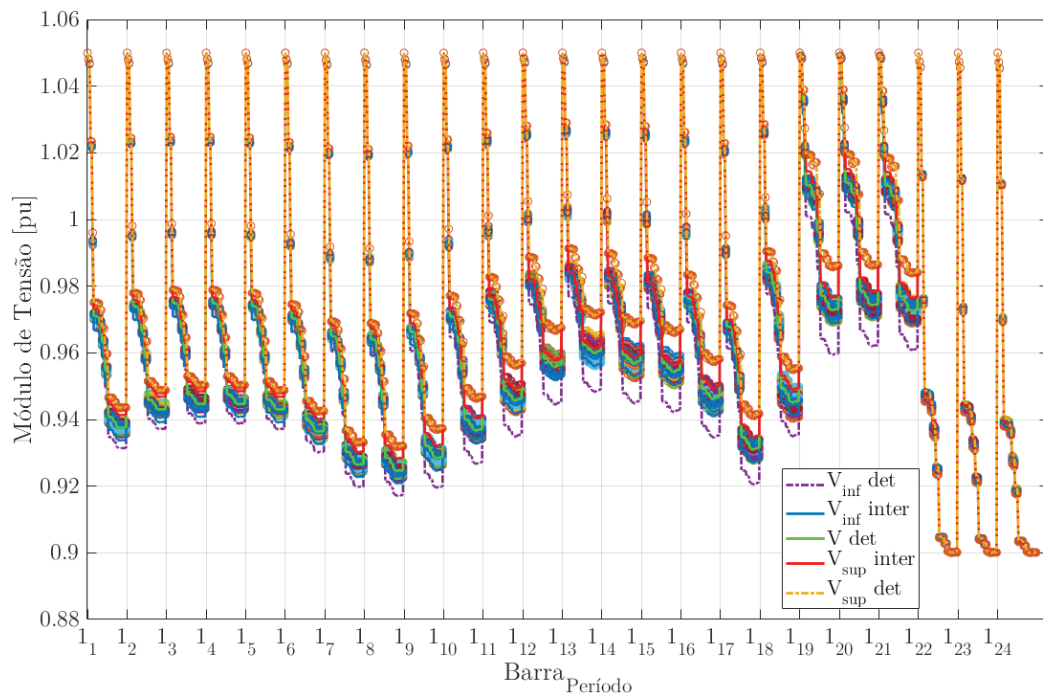
Método	Período	P_{BAT} inferior	Diferença relativa	P_{BAT} superior	Diferença relativa
FPOMPI		0,0923	-2,3622%	0,09235	2,3268%
Despacho Aleatório	5	0,09068	-0,5656%	0,09397	0,6134%
FPOMP Determinístico		0,09017	—	0,094555	—
Média		0,0916		0,0936	
Desvio Padrão		$0,8.1902 \times 10^{-4}$		0,0011	
Variância		$6,7080 \times 10^{-7}$		$1,3048 \times 10^{-6}$	
FPOMPI		0,1122	-0,6278 %	0,1134	0,6135%
Despacho Aleatório	13	0,1103	1,0762%	0,1159	-1,5776 %
FPOMP Determinístico		0,1115	—	0,1141	—
Média		0,1113		0,1145	
Desvio Padrão		$9,6090 \times 10^{-4}$		0,0013	
Variância		$9,2333 \times 10^{-7}$		$1,6633 \times 10^{-6}$	
FPOMPI		-0,1081	2,1719 %	-0,08841	-2,8621 %
Despacho Aleatório	20	-0,1033	6,5158%	-0,092484	-7,6021 %
FPOMP Determinístico		-0,1105	—	-0,08595	—
Média		-0,1073		-0,0889	
Desvio Padrão		0,0037		0,0033	
Variância		$1,3440 \times 10^{-5}$		$1,0890 \times 10^{-5}$	

Fonte: O autor (2020).

5.2.2 Caso 2 - Incerteza solar de 10% e carga de 5%

A Figura 16 é responsável por apresentar o perfil de tensão de todas as barras em 24 períodos para o caso 2.

Figura 16 – Perfil de tensão – Caso 2

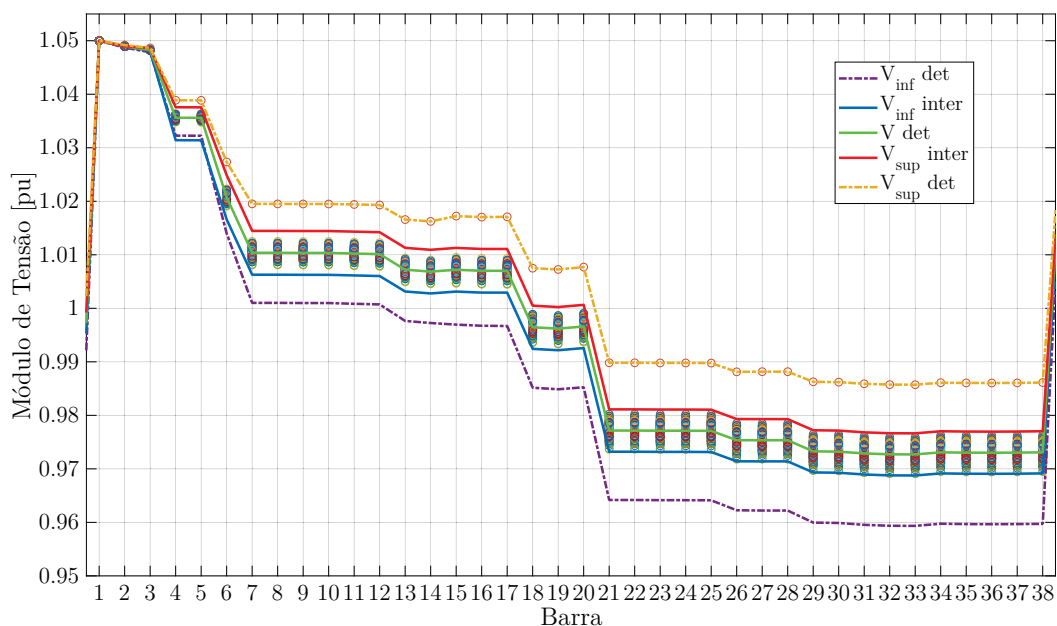


Fonte: O autor (2020).

Conclui-se, através do gráfico da [Figura 16](#), uma similaridade com o caso 1, onde a tensão calculada pelo método proposto acompanha os valores da extremidade da nuvem aleatória, além de conter a solução ótima no intervalo.

O gráfico da [Figura 17](#) mostra o perfil de tensão nas barras às 19 horas, para que possa ser analisado de maneira detalhada o comportamento do método utilizando a Matemática Intervalar. Analogamente ao caso anterior, o FPOMP que utiliza o Método de Krawczyk permaneceu com valores intermediários em relação às várias simulações aleatórias e com o despacho ótimo considerando a incerteza máxima em todas as cargas. O método proposto praticamente criou uma envoltória para a nuvem de valores aleatórios.

Figura 17 – Perfil de tensão – Período 19 – Caso 2



Fonte: O autor (2020).

Com isso, foram tabelados alguns valores superiores e inferiores do despacho ótimo com valor extremo de incerteza, método intervalar e despacho aleatório, mostrados na [Tabela 11](#) e [Tabela 12](#), respectivamente. Com estes valores, foram calculados a média, desvio padrão e variância.

Assim como no caso 1, a variância e o desvio padrão são valores bastante baixos, mostrando que os três métodos apresentam resultados com baixa dispersão entre si.

A [Figura 18](#) mostra a injeção de potência ativa (P_{GH}) ativa durante 24 horas na barra da subestação.

Através do gráfico da [Figura 18](#), é possível notar uma repetição de padrão em relação ao caso 1. Praticamente todos os valores da nuvem aleatória estão contidos no cálculo intervalar, sendo que este continua contido no intervalo determinístico, mesmo como aumento de incerteza na geração solar.

Tabela 11 – Análise estatística da tensão– Caso 2 – Limite superior

Barra	Ótimo superior	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
7	1,002	1,0014	1,0013	1,00157	0,0037859	$1,04333 \times 10^{-5}$
15	1,0017	1,0011	1,001	1,00127	0,0037859	$1,04333 \times 10^{-5}$
20	1,0008	1,0001	0,999	1,00027	0,0047258	$2,2333 \times 10^{-5}$
25	0,9898	0,9811	0,9802	0,9837	0,0053019	$2,811 \times 10^{-5}$
30	0,9862	0,9771	0,9764	0,9799	0,0054672	$2,989 \times 10^{-5}$
35	0,9861	0,977	0,9762	0,97977	0,0054994	$3,0243 \times 10^{-5}$
38	0,9861	0,977	0,9763	0,9798	0,0054672	$2,989 \times 10^{-5}$

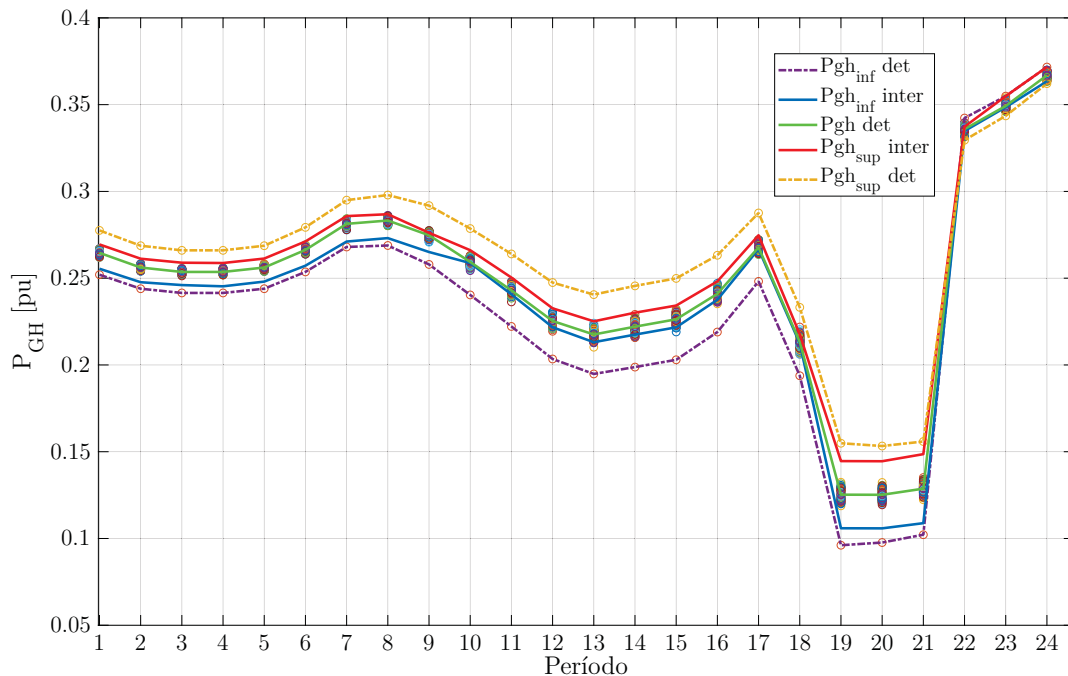
Fonte: O autor (2020).

Tabela 12 – Análise estatística da tensão – Caso 2 – Limite inferior

Barra	Ótimo inferior	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
7	1,0001	1,0006	1,0008	1,0005	0,0036056	$1,03000 \times 10^{-5}$
15	0,997	1,0003	1,0005	1,00017	0,0041633	$1,07333 \times 10^{-5}$
20	0,9852	0,9926	0,9937	0,9905	0,0046228	$2,137 \times 10^{-5}$
25	0,9641	0,9731	0,9736	0,97027	0,0053463	$2,8583 \times 10^{-5}$
30	0,9599	0,9693	0,9696	0,96627	0,0055157	$3,0423 \times 10^{-5}$
35	0,9597	0,9691	0,9695	0,9661	0,0055462	$3,076 \times 10^{-5}$
38	0,9597	0,9691	0,9695	0,9661	0,0055462	$3,076 \times 10^{-5}$

Fonte: O autor (2020).

Figura 18 – Geração potência ativa – Caso 2

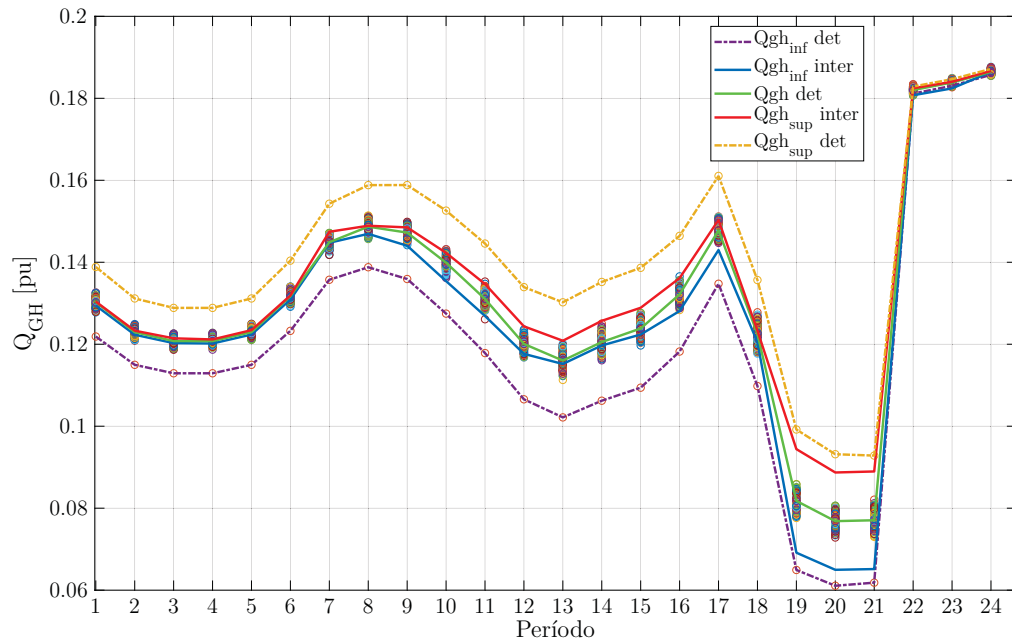


Fonte: O autor (2020).

A Figura 19 apresenta a injeção de potência reativa (Q_{GH}) na barra da subestação em 24 períodos para o caso 2. Nota-se, que a geração reativa obtida através do método intervalar tem o mesmo comportamento do caso anterior. Os limites superior e inferior

estão contidos no intervalo determinístico e contém grande parte da nuvem aleatória. Portanto, sendo uma faixa de valores mais próxima do intervalo provável.

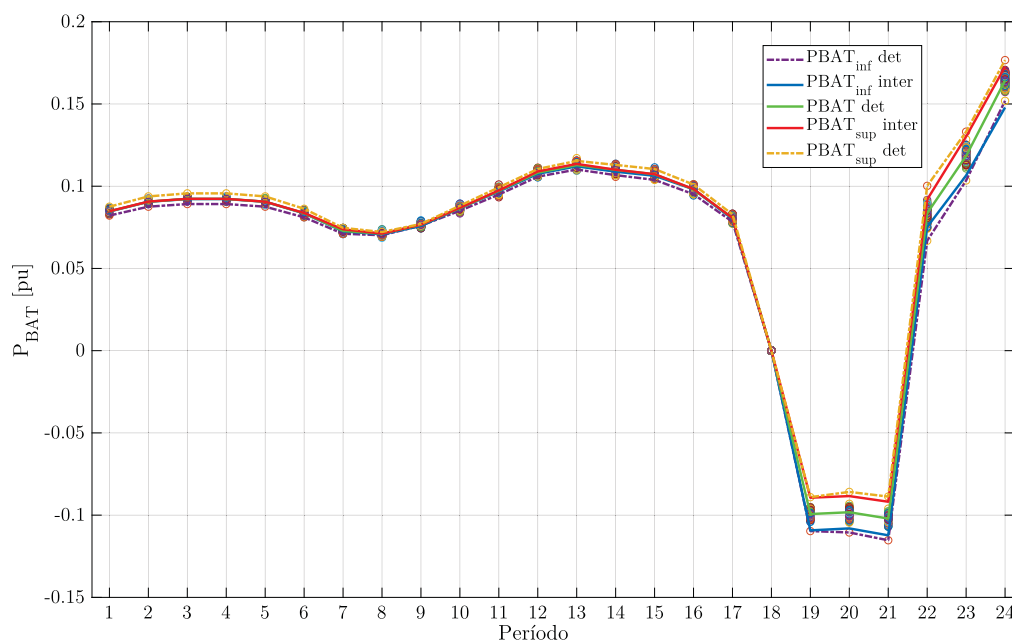
Figura 19 – Geração de potência reativa – Caso 2



Fonte: O autor (2020).

A potência ativa injetada pelo banco de baterias na barra 17 para o caso 2 é mostrada pelo gráfico da Figura 20.

Figura 20 – Potência ativa da bateria – Caso 2



Fonte: O autor (2020).

A partir do gráfico da [Figura 20](#), o perfil gerado pela potência injetada do banco de bateria apresenta grande semelhança com o do caso 1. Durante as primeiras 18 horas, quando acontece a recarga do banco, os intervalos dos três métodos são estreitos, praticamente com diâmetro nulo. No período seguinte, entre 19 e 21 horas, quando a bateria injeta potência ativa, o intervalo dos três métodos aumenta o diâmetro simultaneamente, causando aumento do intervalo de P_{GH} exatamente no mesmo período. Após as 22 horas, tanto a geração ativa quanto a potência injetada P_{BAT} tem a faixa intervalar reduzida.

Para uma análise detalhada de pontos específicos, a [Tabela 13](#) e [Tabela 14](#) mostram a diferença relativa e valor absoluto dos três métodos para o período das 3, 13 e 20 horas e como referência o método determinístico com variação extrema. Além da diferença relativa, foram tabulados a média, desvio padrão e variância.

Tabela 13 – Comparação de valores – P_{GH} – Caso 2

Método	Período	P_{GH} inferior	Diferença relativa	P_{GH} superior	Diferença relativa
FPOMPI		0,2480	-1,6810%	0,2613	2,7540%
Despacho Aleatório		0,2540	-4,1410%	0,2583	3,8705%
FPOMP Determinístico	5	0,2439	—	0,2687	—
Média		0,24863		0,26277	
Desvio Padrão		0,0051		0,0053529	
Variância		$2,5803 \times 10^{-5}$		$2,8653 \times 10^{-5}$	
FPOMPI			0,2131	-9,3943 %	0,2251
Despacho Aleatório		0,2102	-7,9055%	0,2241	6,8191 %
FPOMP Determinístico	13	0,1948	—	0,2405	—
Média		0,20603		0,2299	
Desvio Padrão		0,0098358		0,0091935	
Variância		$9,6743e \times 10^{-5}$		$8,452e \times 10^{-5}$	
FPOMPI			0,1058	-8,3239 %	0,1445
Despacho Aleatório		0,1194	-22,2484%	0,1323	13,6986%
FPOMP Determinístico	20	0,09767	—	0,1533	—
Média		0,10762		0,14337	
Desvio Padrão		0,010979		0,010546	
Variância		0,00012054		0,00011121	

Fonte: O autor (2020).

Afirma-se, conforme os dados da [Tabela 13](#) e [Tabela 14](#), que método proposto tem a faixa de valores intermediária em relação aos outros dois métodos, assim como mostrado no caso 1. No caso 2, o método proposto garantiu, na maioria das vezes, a faixa de valores mais provável de ocorrer. Houve uma pequena diferença ao comparar como a nuvem aleatória, além do mais manteve-se contida no intervalo considerado determinístico. Além disso, os valores de desvio padrão e variância mantiveram-se na mesma faixa do caso 1, confirmando a proximidade dos três métodos em relação a um valor esperado.

Tabela 14 – Comparação de valores – P_{BAT} – Caso 2

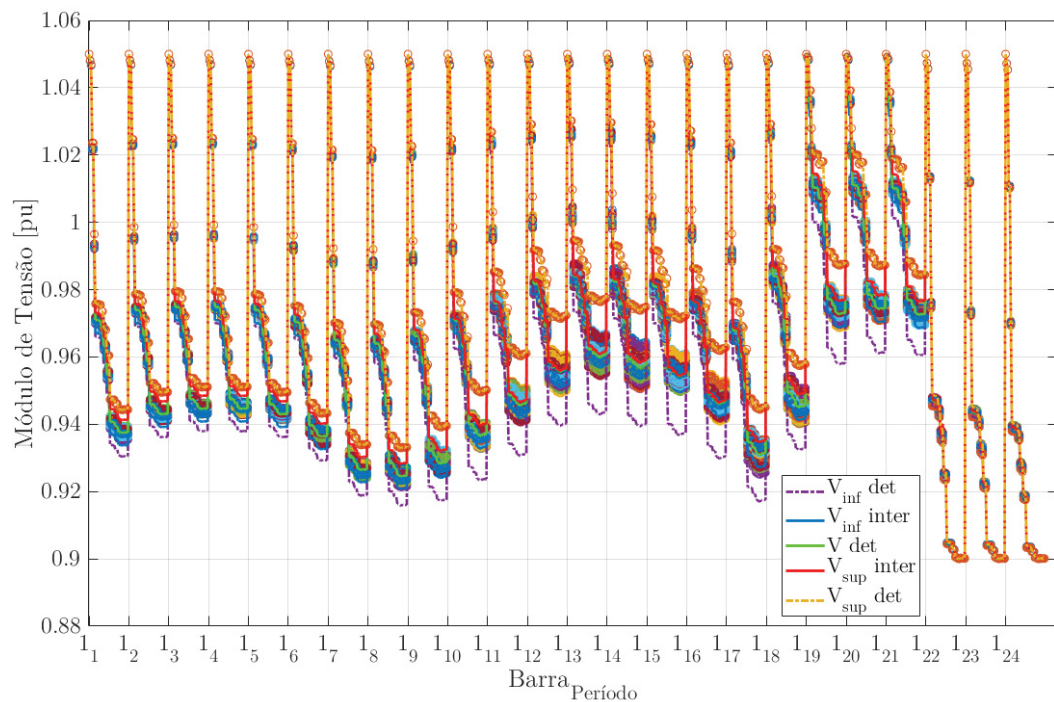
Método	Período	P_{BAT} inferior	Diferença relativa	P_{BAT} superior	Diferença relativa
FPOMPI		0,0905	-3,3577%	0,0906	3,4012%
Despacho Aleatório		0,08844	-1,0050%	0,09285	1,0022%
FPOMP Determinístico	5	0,09017	—	0,094555	—
Média		0,089703		0,092668	
Desvio Padrão		0,0011065		0,0019837	
Variância		$1,2242 \times 10^{-6}$		$3,9353 \times 10^{-6}$	
FPOMPI		0,1121	-1,8165 %	0,1136	1,5598%
Despacho Aleatório		0,1094	0,6358%	0,1171	-1,4731 %
FPOMP Determinístico	13	0,1101	—	0,1141	—
Média		0,11053		0,11493	
Desvio Padrão		0,0014012		0,001893	
Variância		$1,9633 \times 10^{-6}$		$3,5833 \times 10^{-6}$	
FPOMPI		-0,1081	2,1719 %	-0,08841	-2,9580 %
Despacho Aleatório		-0,1045	5,4299%	-0,0931	-8,4197%
FPOMP Determinístico	20	-0,1105	—	-0,08587	—
Média		-0,1077		-0,089127	
Desvio Padrão		0,0030199		0,0036679	
Variância		$9,1200 \times 10^{-6}$		$1,3453 \times 10^{-5}$	

Fonte: O Autor(2020).

5.2.3 Caso 3 – Incerteza solar de 20% e carga de 5%

A Figura 21 mostra o perfil de tensão de todas as barras em 24 períodos para o caso 3.

Figura 21 – Perfil de tensão – Caso 3

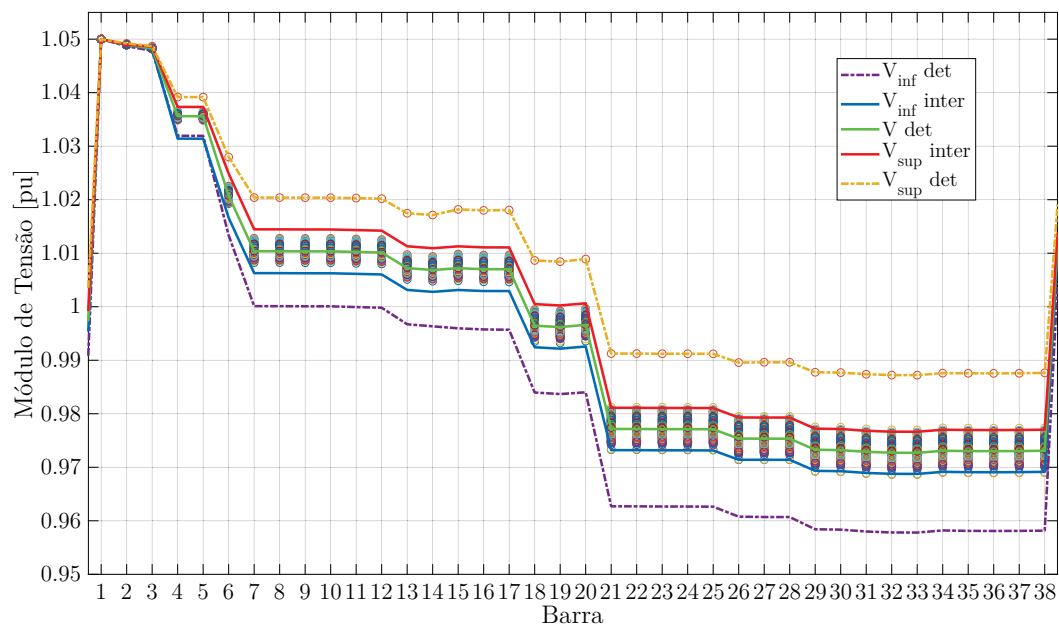


Fonte: O autor (2020).

Observa-se, através da [Figura 21](#), que a magnitude de tensão calculada via Método de Krawczyk engloba praticamente toda a nuvem gerada com despacho aleatório, assim como observado nos últimos dois casos. Além disso, não fica além ou aquém dos valores extremos, dando uma excelente margem de comportamento quando se atribui incerteza nos dados de entrada do sistema. Por fim, o valor determinístico ótimo ficou contido no intervalo, como esperado.

Para visualizar melhor o comportamento da tensão, a [Figura 22](#), mostra o perfil de tensão nas barras no período das 19 horas, correspondente ao pico de carga do sistema. Através do gráfico ampliado, nota-se a repetição de comportamento dos 2 casos anteriores. O método proposto encontra-se intermediário entre o ótimo e a simulação aleatória.

Figura 22 – Perfil de tensão – Período 19 – Caso 3



Fonte: O autor (2020).

Para complementar a análise gráfica a [Tabela 15](#) e [Tabela 16](#) mostram a média, desvio padrão e variância do perfil de tensão às 19 horas nas barras onde se tem geração solar.

Através dos valores presentes na [Tabela 15](#) e [Tabela 16](#), percebe-se que a variância e o desvio padrão continuam com valores baixos, mesmo com o aumento da incerteza na geração solar. Conclui-se que os três métodos apresentam baixa divergência de valores em relação à média, independente da incerteza inserido.

A geração de potência ativa injetada na barra 1 (subestação) durante 24 períodos para o caso 3 pode ser vista a partir da [Figura 23](#). Através do gráfico, percebe-se uma forte correlação com o padrão dos casos anteriores. O intervalo do método proposto ao mesmo está englobando a região de gerações ativas mais prováveis de ocorrer. Além disso,

entre 19 e 21 horas, tanto o banco de baterias quanto a geração ativa apresentam maior intervalo de incerteza.

Tabela 15 – Análise estatística da tensão – Caso 3 – Limite superior

Barra	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
7	1,02	1,014	1,013	1,0157	0,0037859	$1,4333 \times 10^{-5}$
15	1,018	1,011	1,01	1,013	0,0043589	$1,9 \times 10^{-5}$
20	1,009	1,001	0,9996	1,0032	0,0050715	$2,572 \times 10^{-5}$
25	0,9912	0,9811	0,9812	0,9845	0,0058026	$3,367 \times 10^{-5}$
30	0,9877	0,9771	0,9775	0,98077	0,0060078	$3,6093 \times 10^{-5}$
35	0,9876	0,977	0,9773	0,98063	0,0060352	$3,6423 \times 10^{-5}$
38	0,9876	0,997	0,9774	0,98733	0,0098027	$9,6093 \times 10^{-5}$

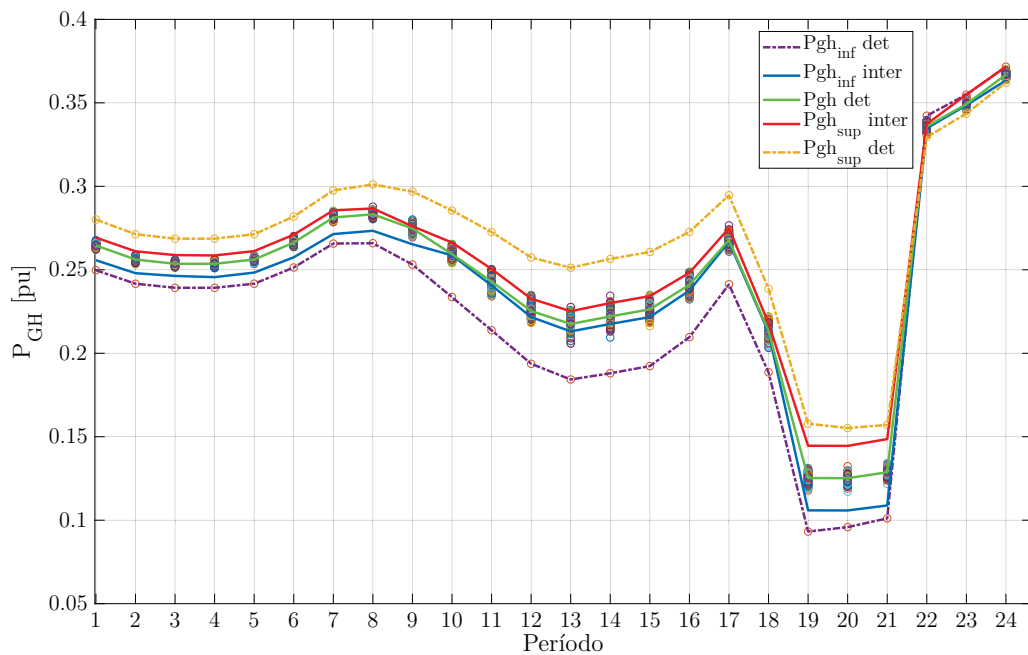
Fonte: O autor (2020).

Tabela 16 – Análise estatística da tensão – Caso 3 – Limite inferior

Barra	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
7	1	1,0006	1,0008	1,00047	0,0041633	$1,07333 \times 10^{-5}$
15	0,996	1,0003	1,0005	1,00013	0,0047258	$2,02333 \times 10^{-5}$
20	0,984	0,9926	0,9936	0,99007	0,0052776	$2,7853 \times 10^{-5}$
25	0,9626	0,9731	0,9733	0,96967	0,0061207	$3,7463 \times 10^{-5}$
30	0,9583	0,9693	0,9693	0,96563	0,0063509	$4,0333 \times 10^{-5}$
35	0,9581	0,9691	0,9691	0,96543	0,0063509	$4,0333 \times 10^{-5}$
38	0,9582	0,9691	0,9690	0,96543	0,0062644	$3,9243 \times 10^{-5}$

Fonte: O autor (2020).

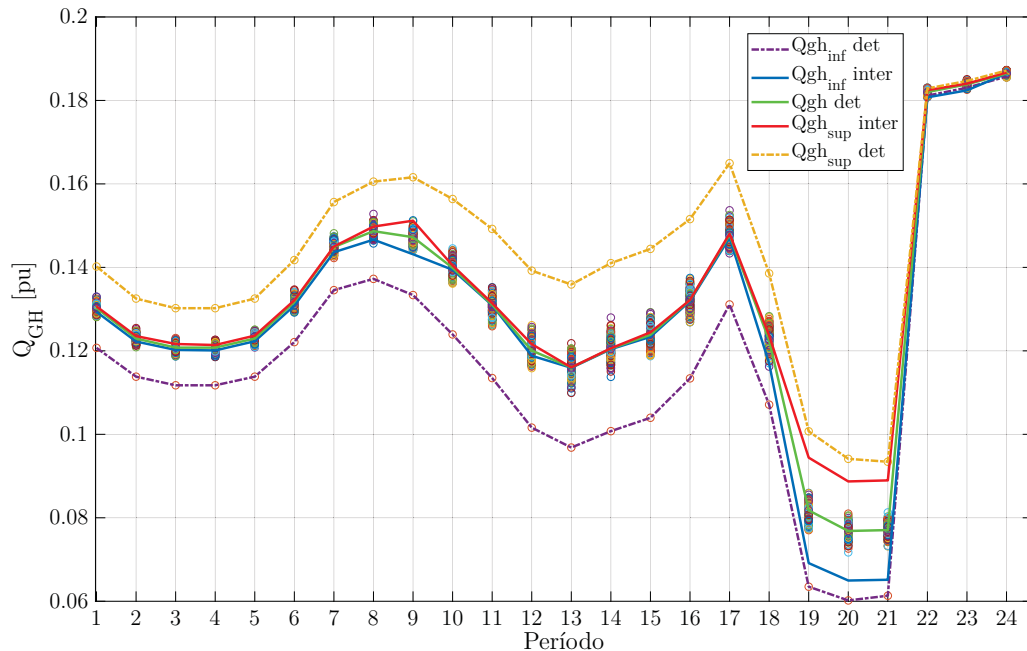
Figura 23 – Geração de potência ativa – Caso 3



Fonte: O autor (2020).

A [Figura 24](#) apresenta o gráfico com a injeção de potência reativa (Q_{GH}) na barra da subestação durante 24 períodos. A partir desse gráfico, afirma-se que enquanto a geração reativa determinística aumenta significativamente, os valores aleatórios e a faixa intervalar se mantém concentrados ao redor do valor ótimo determinístico médio. Entretanto, no período entre 19 e 21, a potência tem um aumento significativo do diâmetro do intervalo, implicado pelo aumento da incerteza da geração através da bateria. Além disso, durante o 13º período, o método proposto tem um achatamento do intervalo. Conforme visto em alguns trabalhos, como o de [Pereira \(2011\)](#), a geração reativa também apresenta distorções quanto aos resultados obtidos via simulação exaustiva. Mesmo assim, apresenta o comportamento semelhante aos casos 1 e 2, onde a nuvem e a faixa intervalar estão próximas entre si.

Figura 24 – Geração de potência reativa – Caso 3



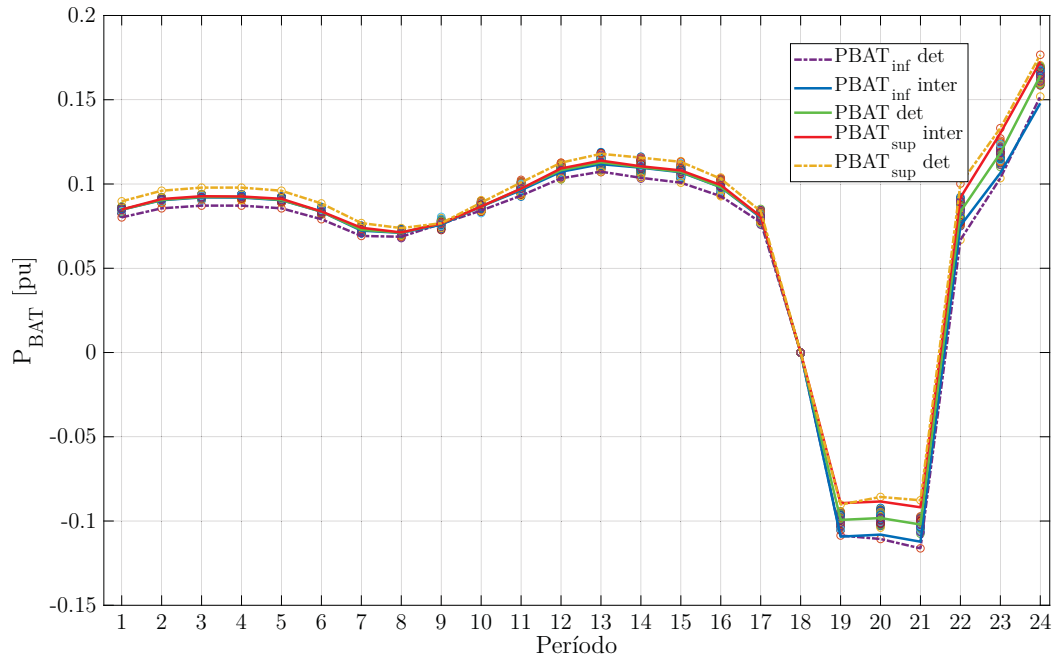
Fonte: O autor (2020).

O gráfico que contém a injeção de potência ativa através do banco de baterias na barra 17 ao longo de 24 períodos pode ser visto na [Figura 25](#). Verifica-se que há semelhança com os 2 casos anteriores, embora o diâmetro dos intervalos nos primeiros períodos tenham expandido minimamente. Mesmo assim, a maior faixa de valores ainda ocorre entre as 19 e 21 horas, durante a descarga do banco de baterias.

Semelhante aos casos 1 e 2, a [Tabela 17](#) e [Tabela 18](#) fazem uma comparação da potência ativa gerada na barra da subestação e da injeção de potência da bateria, respectivamente, em períodos específicos, sendo o método determinístico como a referência. Além disso, mostram uma análise estatística através da média, desvio padrão e variância. Através desses dados, pode-se reforçar que o método intervalar proposto possui uma maior

correlação com a faixa de valores gerado pela nuvem aleatória, visto que estes dois métodos praticamente apresentam para a maioria dos casos e períodos uma faixa de valores muito próximos, mesmo que a envoltória determinística aumente significativamente.

Figura 25 – Potência ativa da bateria – Caso 3



Fonte: O autor (2020).

Tabela 17 – Comparação de valores – P_{GH} – Caso 3

Método	Período	P_{GH} inferior	Diferença relativa	P_{GH} superior	Diferença relativa
FPOMPI		0,2483	-2,7307%	0,2612	3,7228%
Despacho Aleatório		0,2538	-5,0062%	0,2588	4,6074%
FPOMP Determinístico	5	0,2417	—	0,2713	—
Média		0,24793		0,26377	
Desvio Padrão		0,0060583		0,0066335	
Variância		$3,6703 \times 10^{-5}$		$4,4003e \times 10^{-5}$	
FPOMPI		0,2131	-15,6267 %	0,2252	10,3503%
Despacho Aleatório		0,2059	-11,7200 %	0,2277	9,3551 %
FPOMP Determinístico	13	0,1843	—	0,2512	—
Média		0,2011		0,2347	
Desvio Padrão		0,14988		0,014344	
Variância		0,00022464		0,00020575	
FPOMPI		0,1058	-10,3693 %	0,1445	6,8943 %
Despacho Aleatório		0,1171	-22,8980%	0,1323	14,7552%
FPOMP Determinístico	20	0,09586	—	0,1552	—
Média		0,10625		0,144	
Desvio Padrão		0,010627		0,011458	
Variância		0,00011294		0,00013129	

Fonte: O autor (2020).

Tabela 18 – Comparação de valores – P_{BAT} – Caso 3

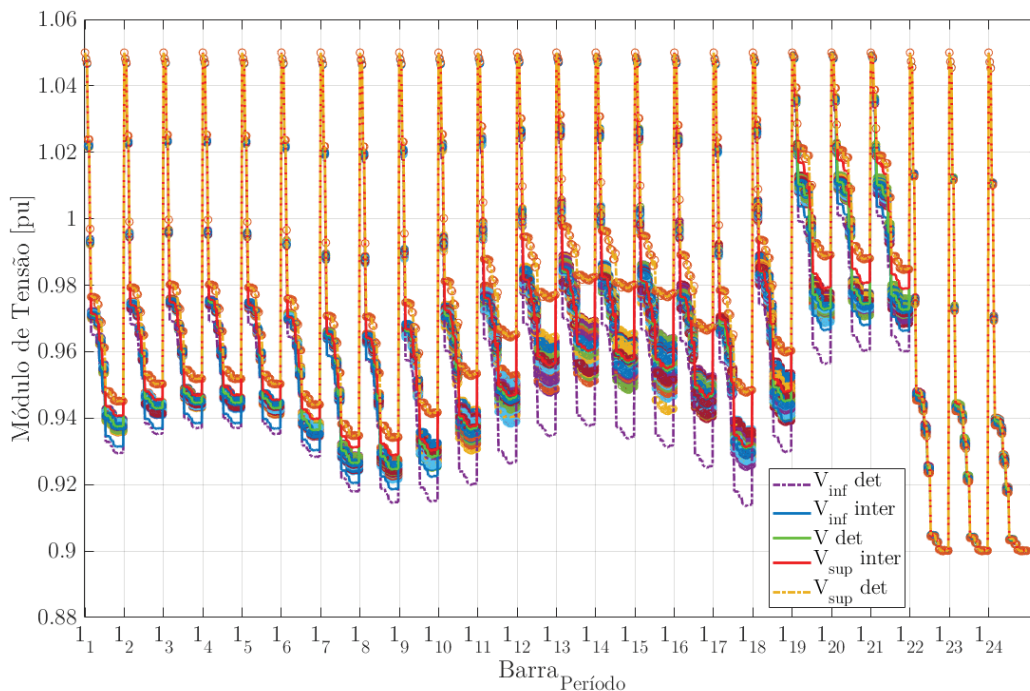
Método	Período	P_{BAT} inferior	Diferença relativa	P_{BAT} superior	Diferença relativa
FPOMPI		0,0904	-5,6445%	0,09122	4,9891%
Despacho Aleatório		0,08884	-3,8214 %	0,09263	3,5205%
FPOMP Determinístico	5	0,08557	—	0,09601	—
Média		0,08827		0,093287	
Desvio Padrão		0,0024649		0,0024616	
Variância		$6,0759 \times 10^{-6}$		$6,0594 \times 10^{-6}$	
FPOMPI		0,1118	-4,1938 %	0,1139	3,3927%
Despacho Aleatório		0,1082	-0,8388%	0,1189	-0,8482 %
FPOMP Determinístico	13	0,1073	—	0,1179	—
Média		0,1091		0,1169	
Desvio Padrão		0,0023812		0,0026458	
Variância		$5,67 \times 10^{-6}$		7×10^{-6}	
FPOMPI		-0,1082	2,3487 %	-0,08841	-3,1502 %
Despacho Aleatório		-0,1039	6,1427%	-0,0922	-7,5720%
FPOMP Determinístico	20	-0,1107	—	-0,08571	—
Média		-0,1076		-0,088773	
Desvio Padrão		0,0034395		0,0032602	
Variância		$1,183 \times 10^{-5}$		$1,0629 \times 10^{-5}$	

Fonte: O autor (2020).

5.2.4 Caso 4 – Incerteza solar de 30% e carga de 5%

A Figura 26 apresenta o gráfico do perfil de tensão de todas as barras em 24 períodos para o caso 4.

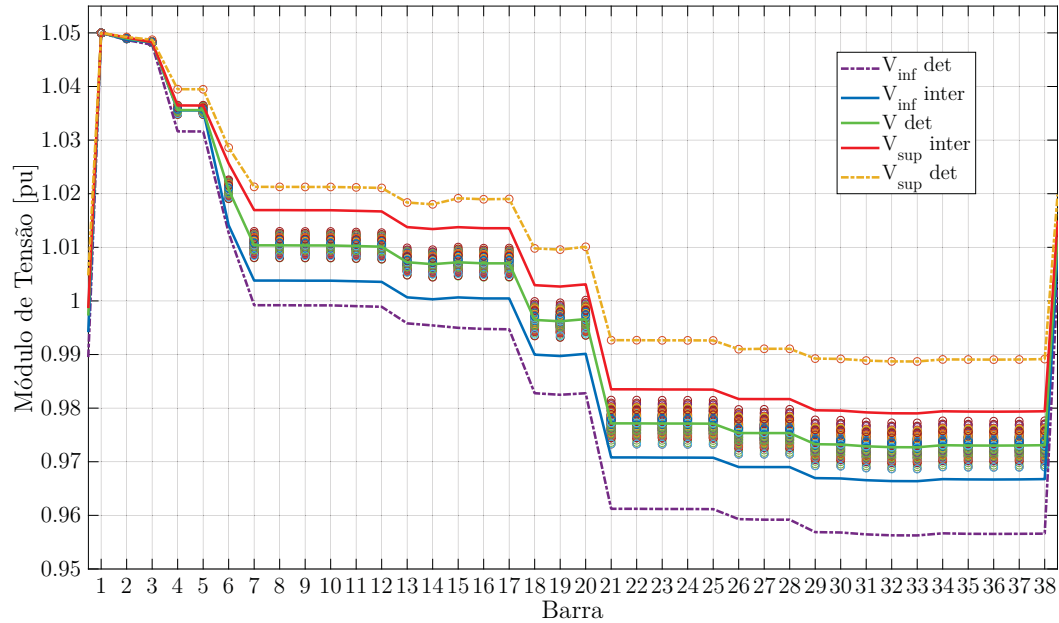
Figura 26 – Perfil de tensão – Caso 4



Fonte: O autor (2020).

Comparando com os casos anteriores, o perfil de tensão apresenta maior semelhança com o caso 3, onde o intervalo apresentou estreitamento durante o 12^o ao 16^o período. Dessa forma, o resultado ficou de acordo com o esperado, contido no intervalo exclusivamente determinístico e com valores próximos à margem dos resultados da simulação aleatória. Por fim, como em todos os casos, o valor determinístico ótimo, ficou praticamente centralizado para todos os intervalos dos três métodos.

Figura 27 – Perfil de tensão – Período 19 – Caso 4



Fonte: O autor (2020).

Para uma análise mais refinada, a [Tabela 19](#) e [Tabela 20](#) mostram a média, desvio padrão e variância do perfil de tensão às 19 horas, nas barras onde se tem geração solar. Da mesma forma que em todos os outros casos, a grandeza da variância manteve-se em 10^{-5} tanto para os limites superior e inferior. Ou seja, os três métodos apresentam baixo desvio em relação ao valor esperado de tensão.

Tabela 19 – Análise estatística da tensão – Caso 4 – Limite superior

Barra	Ótimo superior	Intervalar	Aleatorio	Média	Desvio padrão	Variância
7	1,0210	1,0170	1,0130	1,0170	0,004000	$1,6000 \times 10^{-5}$
15	1,0190	1,0140	1,0100	1,0143	0,0045092	$2,0333 \times 10^{-5}$
20	1,0100	1,0030	1,0000	1,0043	0,0051316	$2,6333 \times 10^{-5}$
25	0,9926	0,9835	0,9814	0,98583	0,0059534	$3,5443 \times 10^{-5}$
30	0,9892	0,9795	0,9777	0,98213	0,0061857	$3,8263 \times 10^{-5}$
35	0,9891	0,9794	0,9776	0,98203	0,0061857	$3,8263 \times 10^{-5}$
38	0,9892	0,9794	0,9776	0,98207	0,0062429	$3,8973 \times 10^{-5}$

Fonte: O autor (2020).

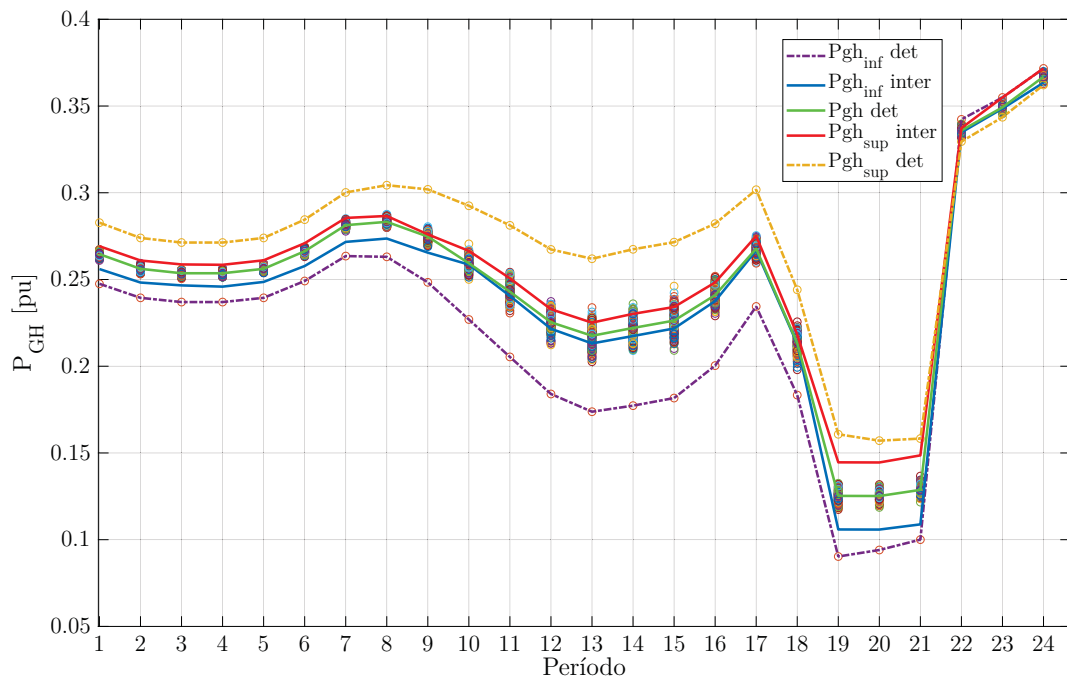
Tabela 20 – Análise estatística da tensão – Caso 4 – Limite inferior

Barra	Ótimo inferior	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
7	0,9992	1,0040	1,0080	1,0037	0,0044061	$1,9413 \times 10^{-5}$
15	0,9950	1,0010	1,0050	1,0003	0,0050332	$2,5333 \times 10^{-5}$
20	0,9828	0,9901	0,9936	0,98883	0,0055103	$3,0363 \times 10^{-5}$
25	0,9612	0,9707	0,9732	0,96837	0,0063311	$4,0083 \times 10^{-5}$
30	0,9568	0,9669	0,9692	0,9643	0,0065962	$4,351 \times 10^{-5}$
35	0,9566	0,9667	0,9690	0,9641	0,0065962	$4,351 \times 10^{-5}$
38	0,9566	0,9668	0,9690	0,96413	0,0066161	$4,3773 \times 10^{-5}$

Fonte: O autor (2020).

O gráfico da geração de potência ativa na barra 1 pode ser visto através da [Figura 28](#). Analisando o gráfico da geração ativa, agora para uma incerteza de 30% de geração solar, as características observadas nos 3 últimos casos se repetem. Embora o intervalo formado utilizando as simulações determinísticas tenha aumentado significativamente, os resultados obtidos pelo método intervalar e através dos 200 despachos aleatórios praticamente possuem os mesmos limites superior e inferior. Além disso, como visto nos outros casos, o aumento de incerteza durante o 19° e 21° período é simultâneo na geração ativa, reativa e na potência fornecida pelo banco de baterias.

Figura 28 – Geração de potência ativa – Caso 4

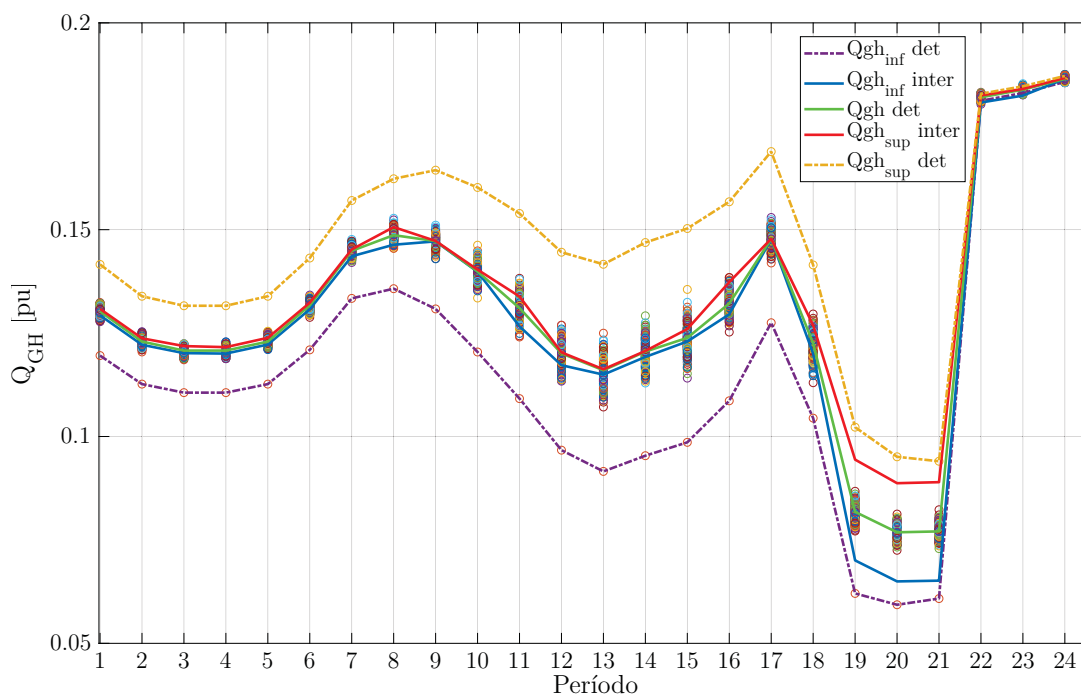


Fonte: O autor (2020).

Através da [Figura 29](#), pode-se observar o gráfico da geração reativa na subestação durante 24 períodos. Nota-se um padrão semelhante aos três casos anteriores, em particular

ao terceiro. Tanto o intervalo calculado pelo Método de Krawczyk quanto o despacho aleatório ficaram concentrados ao redor do ótimo determinístico. Enquanto isso, os limites obtidos através da simulação ótima com variação de todas as cargas tiveram um aumento significativo do diâmetro do intervalo durante o 9º e 18º período. Após às 19 horas, o método intervalar se aproxima dos limites do despacho ótimo absoluto.

Figura 29 – Geração de potência reativa – Caso 4

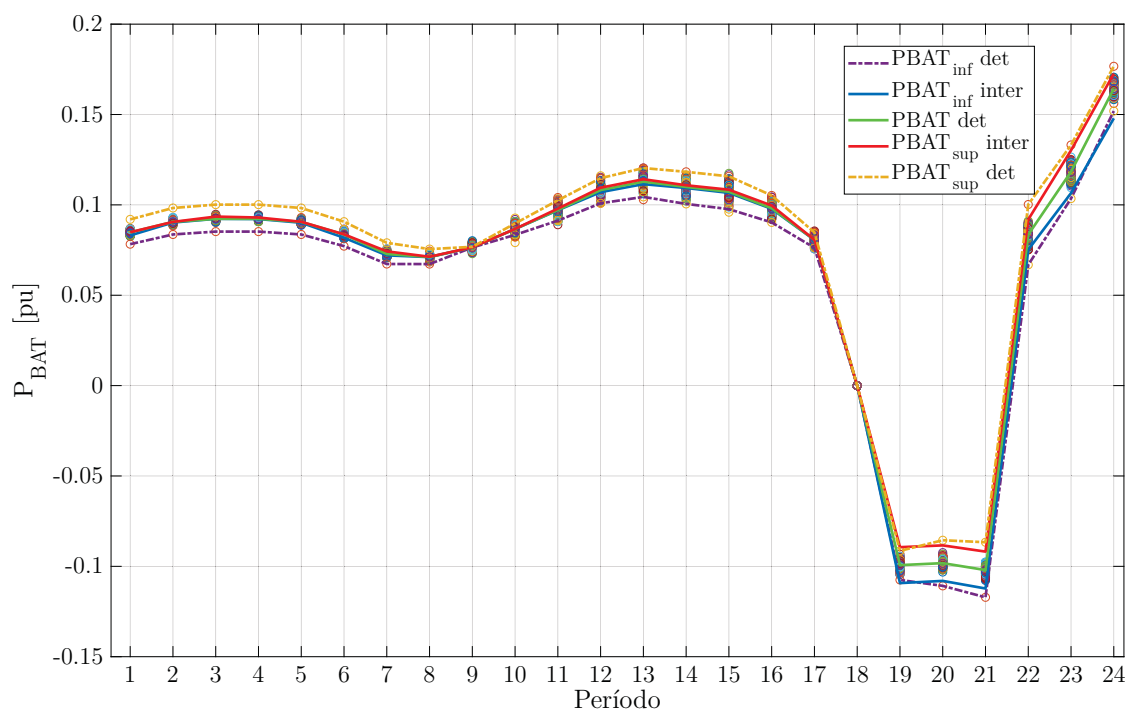


Fonte: O autor (2020).

O gráfico que mostra a potência do banco de baterias na barra 17 para o caso 4, durante 24 horas, pode ser visto na [Figura 30](#). Pode-se notar grande semelhança entre todos os casos. Durante a recarga inicial da bateria, todos os intervalos são praticamente estreitos, vindo apresentar uma margem significativa de incerteza após às 19 horas.

Para uma análise mais detalhada da geração ativa e da potência da bateria, foram tabelados alguns valores dessas variáveis durante um período de carga leve, média e pesada, conforme mostra a [Tabela 21](#) e [Tabela 22](#), respectivamente. Além disso, foram calculados a diferença relativa dos métodos em relação ao determinístico, média, desvio padrão e variância. A partir desses valores, nota-se que há um padrão em todos os casos analisados. O método proposto praticamente cria uma envoltória para o despacho aleatório, que ao mesmo tempo, ficam contidos no intervalo criado a partir das simulações com valores de incerteza máxima e mínimo. Além disso, a dispersão de valores continuou baixa, como visto nos outros dois casos, devido ao baixo desvio padrão.

Figura 30 – Potência ativa da bateria – Caso 4



Fonte: O autor (2020).

Tabela 21 – Comparação de valores – Caso 4

Método	Período	P_{GH} inferior	Diferença relativa	P_{GH} superior	Diferença relativa
FPOMPI		0,2459	-3,7553 %	0,2585	4,7180 %
Despacho Aleatório		0,2513	-6,0338 %	0,2563	13,1478 %
FPOMP Determinístico	5	0,2370	—	0,2713	—
Média		0,24473		0,26203	
Desvio Padrão		0,007221		0,0081002	
Variância		$5,2143 \times 10^{-5}$		$6,5613 \times 10^{-5}$	
FPOMPI		0,2131	-22,6122 %	0,2251	14,0840 %
Despacho Aleatório		0,2102	-17,6640 %	0,2241	10,7634 %
FPOMP Determinístico	13	0,1948	—	0,2405	—
Média		0,20603		0,2299	
Desvio Padrão		0,0098358		0,0091935	
Variância		$9,6743 \times 10^{-5}$		$8,452 \times 10^{-5}$	
FPOMPI		0,1057	-12,4814 %	0,1446	8,0204 %
Despacho Aleatório		0,1186	-26,0897 %	0,1318	16,1044 %
FPOMP Determinístico	20	0,09406	—	0,1571	—
Média		0,10612		0,1445	
Desvio Padrão		0,012275		0,01265	
Variância		0,00015069		0,00016003	

Fonte: O autor (2020).

Tabela 22 – Comparação de valores – Caso 4

Método	P_{BAT} inferior	Diferença relativa	P_{BAT} superior	Diferença relativa
FPOMPI	0,09000	-7,6169 %	0,09070	7,7127 %
Despacho Aleatório	0,08873	-6,0983 %	0,09300	5,3724 %
FPOMP Determinístico	0,08363	—	0,09828	—
Média	0,087453		0,093993	
Desvio Padrão	0,0033714		0,0038864	
Variância	$1,1367 \times 10^{-5}$		$1,5104 \times 10^{-5}$	
FPOMPI	0,1115	-6,8008 %	0,1137	5,5648 %
Despacho Aleatório	0,1029	1,4368%	0,1205	-0,0831 %
FPOMP Determinístico	0,1044	—	0,1204	—
Média	0,10627		0,1182	
Desvio Padrão	0,0045938		0,0038974	
Variância	$2,1103 \times 10^{-5}$		$1,519 \times 10^{-5}$	
FPOMPI	-0,1082	2,4368 %	-0,08850	-3,3310 %
Despacho Aleatório	-0,1031	6,9495 %	-0,09241	-8,0061 %
FPOMP Determinístico	-0,1108	—	-0,08556	—
Média	-0,10737		-0,088823	
Desvio Padrão	0,0039171		0,0034364	
Variância	$1,5343 \times 10^{-5}$		$1,1809 \times 10^{-5}$	

Fonte: O autor (2020).

Por fim, foi comparado o tempo de simulação entre o despacho aleatório e o método de Krawczyk, em segundos, conforme mostra a [Tabela 5.2.4](#).

As configurações do computador usado na simulação são:

- CPU: AMD *Ryzen* 7–3800X @ 3,9 GHz;
- Memória: 16 GB DRR4 @ 3000 MHz;
- Sistema operacional: Windows 10 professional

Tabela 23 – Tempo de Simulação

Caso	Tempo [s]		
	Simulação Aleatória	Método Proposto	FPOMP Determinístico
1	695,25	40,79	15,05
2	694,33	39,11	14,52
3	675,92	41,03	15,95
4	670,94	40,40	16,77

Fonte: O autor (2020).

5.2.5 Discussão de resultados

A partir dos dados mostrados nos gráficos e tabelas, percebe-se uma semelhança no comportamento entre os quatro casos. Independentemente do valor da incerteza considerada, na maioria dos casos o método proposto englobou a nuvem de valores gerado pelo despacho

aleatório, além de ficar com o intervalo contido no resultado obtido através da simulação considerando a incerteza máxima e mínimo em todas as cargas. Exceto para alguns pontos da Geração Reativa, onde se obtiveram valores não englobando a nuvem aleatória, como mostrado em alguns trabalhos envolvendo a MI, tal como o de [Pereira \(2011\)](#).

Outrossim, os valores de diferença relativa, variância e desvio padrão mantiveram-se próximos, independentemente do valor da incerteza considerada, comprovando uma uniformidade de resultados.

Pode-se concluir que o Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo Intervalar apresenta valores com uma boa faixa de precisão quando comparado com o despacho aleatório, além de ser aproximadamente 17 vezes mais rápido.

5.3 Cenário 2

Nesta seção, serão apresentados os resultados do FPOT Intervalar, através da análise do perfil de tensão, geração ativa e reativa, cuja validação dar-se-á através da nuvem aleatória de resultados.

Para isso, foi simulado o sistema *IEEE* 34 barras adaptado, com uma das barras apresentando geração solar.

Para uma análise comparativa, foi criado um vetor de cargas aleatórias para cada um dos casos, a fim de gerar exaustivamente diferentes combinações de faixas de variação na carga e geração solar. Desse modo é possível verificar a aderência dos resultados da MI com os resultados obtidos por essas variações de cargas e despachos aleatórios.

A [Tabela 24](#) apresenta as incertezas utilizadas nas simulações do FPOT e aplicadas no método intervalar. Para o FPOT, onde se considera desequilíbrio de carga, os valores de incerteza considerados têm ênfase na dinâmica dos resultados.

Tabela 24 – Configurações de teste do FPOT

Caso	Incerteza de carga	Incerteza de geração solar
1T	2%	10%
2T	5%	10%
3T	10%	10%

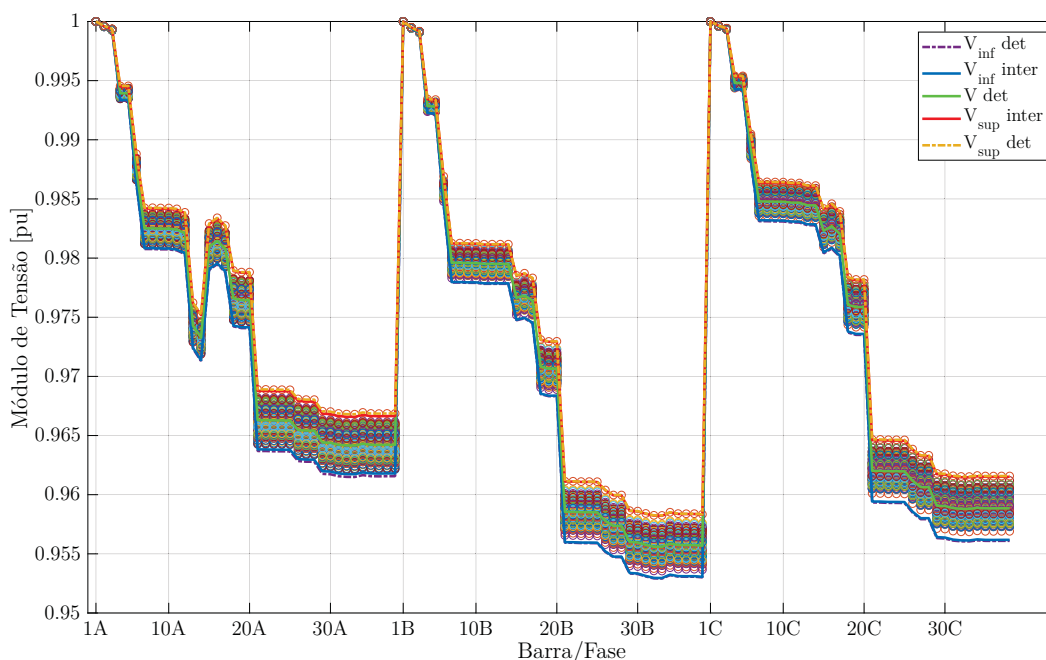
O autor (2020).

5.3.1 Caso 1T – Incerteza de 2 % na carga e 10 % na geração solar

A [Figura 31](#) é responsável por mostrar o perfil de tensão das barras nas 3 fases para o caso 1, considerando o acoplamento mútuo entre fases. Nota-se uma repetição de padrão quando relacionado ao primeiro cenário, onde foi analisado o FPOMP Intervalar.

O intervalo do perfil de tensão gerado pelo método de Krawczyk ficou contido no intervalo do FPOT com condição extrema de incerteza e contém, na maioria, o intervalo gerado pela nuvem aleatória.

Figura 31 – Perfil de tensão – Caso 1T



Fonte: O autor (2020).

Para complementar a análise do perfil de tensão do caso 1T, a Tabela 25 e Tabela 26 mostram o valor absoluto da magnitude de tensão de cada método, bem como a média, desvio padrão e variância para algumas barras ao longo do alimentador. Conclui-se que os resultados obtidos pelos três métodos possuem baixa divergência em relação à média esperada, tanto para o limite superior quanto inferior.

Tabela 25 – Análise estatística da tensão – Caso 1T – Limite superior

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
9A	0,9842	0,9842	0,9836	0,984	0,00034641	$1,2 \times 10^{-7}$
16A	0,9834	0,9833	0,9828	0,98317	0,00032146	$1,0333 \times 10^{-7}$
25A	0,9689	0,9687	0,9682	0,9686	0,00036056	$1,3 \times 10^{-7}$
37A	0,9669	0,9666	0,9662	0,96657	0,00035119	$1,2333 \times 10^{-7}$
9B	0,9812	0,9812	0,9806	0,981	0,00034641	$1,2 \times 10^{-7}$
16B	0,9787	0,9787	0,9781	0,9785	0,00034641	$1,2 \times 10^{-7}$
25B	0,9611	0,961	0,9604	0,96083	0,00037859	$1,4333 \times 10^{-7}$
37B	0,9584	0,9583	0,9576	0,9581	0,00043589	$1,9 \times 10^{-7}$
9C	0,9864	0,9863	0,986	0,98623	0,00020817	$4,3333 \times 10^{-8}$
16C	0,9846	0,9845	0,9844	0,9845	0,0001	1×10^{-8}
25C	0,9646	0,9646	0,9643	0,9645	0,00017321	3×10^{-8}
37C	0,9616	0,9615	0,9612	0,96143	0,00020817	$4,3333 \times 10^{-8}$

Fonte: O autor (2020).

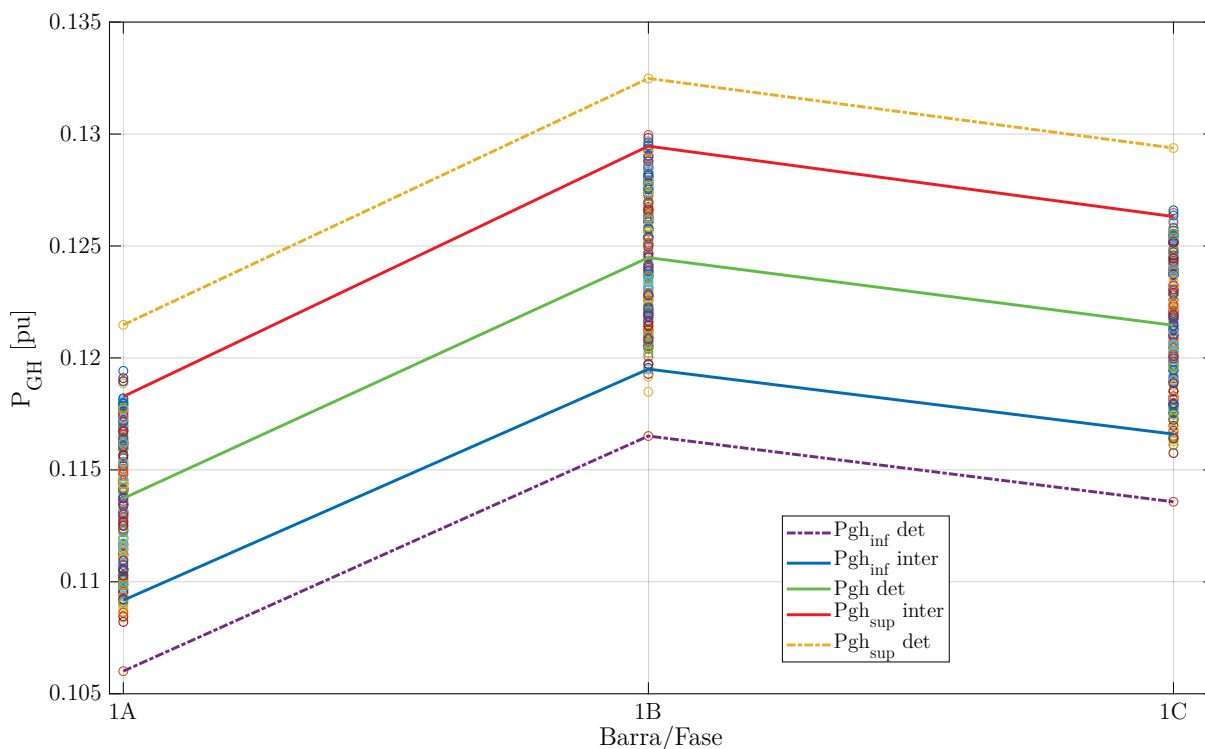
Tabela 26 – Análise estatística da tensão – Caso 1T – Limite inferior

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
9A	0,9807	0,9808	0,9811	0,98087	0,00020817	$4,3333 \times 10^{-8}$
16A	0,9796	0,9797	0,98	0,97977	0,00020817	$4,3333 \times 10^{-8}$
25A	0,9637	0,9638	0,9643	0,96393	0,00032146	$1,0333 \times 10^{-7}$
37A	0,9616	0,9618	0,9621	0,96183	0,00025166	$6,3333 \times 10^{-8}$
9B	0,9779	0,9779	0,9783	0,97803	0,00023094	$5,3333 \times 10^{-8}$
16B	0,975	0,975	0,9753	0,9751	0,00017321	3×10^{-8}
25B	0,9559	0,956	0,9565	0,95613	0,00032146	$1,0333 \times 10^{-7}$
37B	0,9531	0,9532	0,9537	0,95333	0,00032146	$1,0333 \times 10^{-7}$
9C	0,9831	0,9832	0,9835	0,98327	0,00020817	$4,3333 \times 10^{-8}$
16C	0,9808	0,9809	0,9813	0,981	0,00026458	7×10^{-8}
25C	0,9593	0,9594	0,9601	0,9596	0,00043589	$1,9 \times 10^{-7}$
37C	0,9561	0,9562	0,9569	0,9564	0,00043589	$1,9 \times 10^{-7}$

Fonte: O autor (2020).

A geração de potência ativa para o caso 1T em cada uma das fases na barra da subestação pode ser vista através do gráfico da [Figura 32](#). Como mostra o gráfico, o resultado dos três métodos apresentam bastante proximidade dos limites e semelhança com o cenário anterior. O método proposto praticamente engloba todos os valores aleatórios e fica contido no intervalo gerado através da simulação determinística.

Figura 32 – Geração ativa – Caso 1T



Fonte: O autor (2020).

Como forma complementar, a [Tabela 27](#) e [Tabela 28](#) mostram uma análise estatística

dos métodos utilizados através da média, desvio padrão e variância para os valores da geração ativa do caso 1T. Os valores da variância e desvio padrão são baixíssimos, mostrando que há pouca divergência dos três métodos em relação a um valor esperado.

Tabela 27 – Análise estatística da geração ativa superior – Caso 1T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	0,1215	0,1183	0,1191	0,11963	0,0016653	$2,7733 \times 10^{-6}$
1B	0,1325	0,1295	0,1298	0,1306	0,0016523	$2,73 \times 10^{-6}$
1C	0,1294	0,1263	0,1266	0,12743	0,0017098	$2,9233 \times 10^{-6}$

Fonte: O autor (2020).

Tabela 28 – Análise estatística da geração ativa inferior – Caso 1T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	0,106	0,1092	0,1082	0,1078	0,0016371	$2,68 \times 10^{-6}$
1B	0,1165	0,1195	0,1192	0,1184	0,0016523	$2,73 \times 10^{-6}$
1C	0,1136	0,1166	0,1161	0,11543	0,0016073	$2,5833 \times 10^{-6}$

Fonte: O autor (2020).

A [Figura 33](#) apresenta a geração de potência reativa nas 3 fases para os três métodos, considerando uma incerteza de carga de $\pm 2\%$. O resultado obtido pelo método intervalar é intermediário em relação ao despacho ótimo e aleatório, assim como visto no cenário anterior. Além disso, praticamente cria uma margem ao redor da nuvem aleatória. Conforme mostra o gráfico, o padrão de comportamento da geração reativa é similar ao visto nos casos anteriores. O Método intervalar possui uma tendência de acompanhar o despacho aleatório, criando uma envoltória, exceto para a fase B, onde o intervalo ficou mais concentrado. Além disso, o resultado do método intervalar ficou contido dentro dos limites criados pelo despacho ótimo.

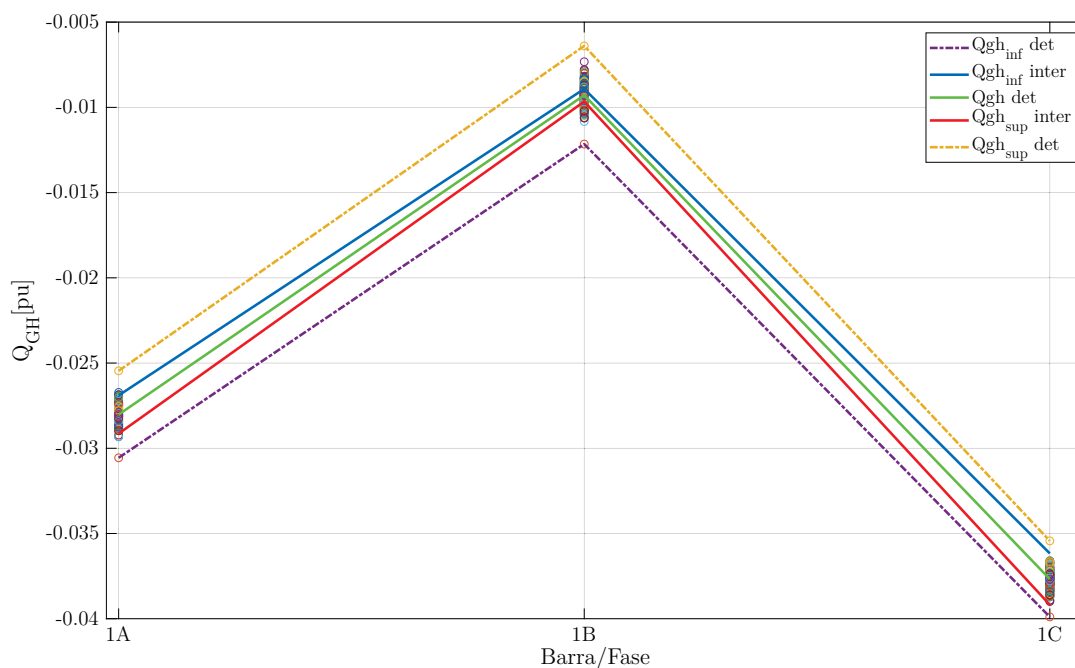
A fim de se detalhar o comportamento da geração reativa para o caso 1T, a [Tabela 29](#) e [Tabela 30](#) mostram os limites superior e inferior absolutos dos três métodos, respectivamente. Além disso, mostra a média, desvio padrão e variância. Pode-se concluir, através do desvio padrão e variância, que os três métodos apresentaram baixa dispersão em relação à média.

Tabela 29 – Análise estatística da geração reativa superior – Caso 1T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	-0,02546	-0,0269	-0,0268	-0,026387	0,00080407	$6,4653 \times 10^{-7}$
1B	-0,006393	-0,008915	-0,007323	-0,0075437	0,0012754	$1,6266 \times 10^{-6}$
1C	-0,03543	-0,03617	-0,03666	-0,036087	0,00061922	$3,8343 \times 10^{-7}$

Fonte: O autor (2020).

Figura 33 – Geração reativa – Caso 1T



Fonte: O autor (2020).

Tabela 30 – Análise estatística da geração reativa inferior – Caso 1T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	-0,03056	-0,02914	-0,02913	-0,02961	0,00082274	$6,769 \times 10^{-7}$
1B	-0,01215	-0,01063	-0,009658	-0,010813	0,001256	$1,5775 \times 10^{-6}$
1C	-0,03989	-0,03918	-0,0392	-0,039423	0,00040427	$1,6343 \times 10^{-7}$

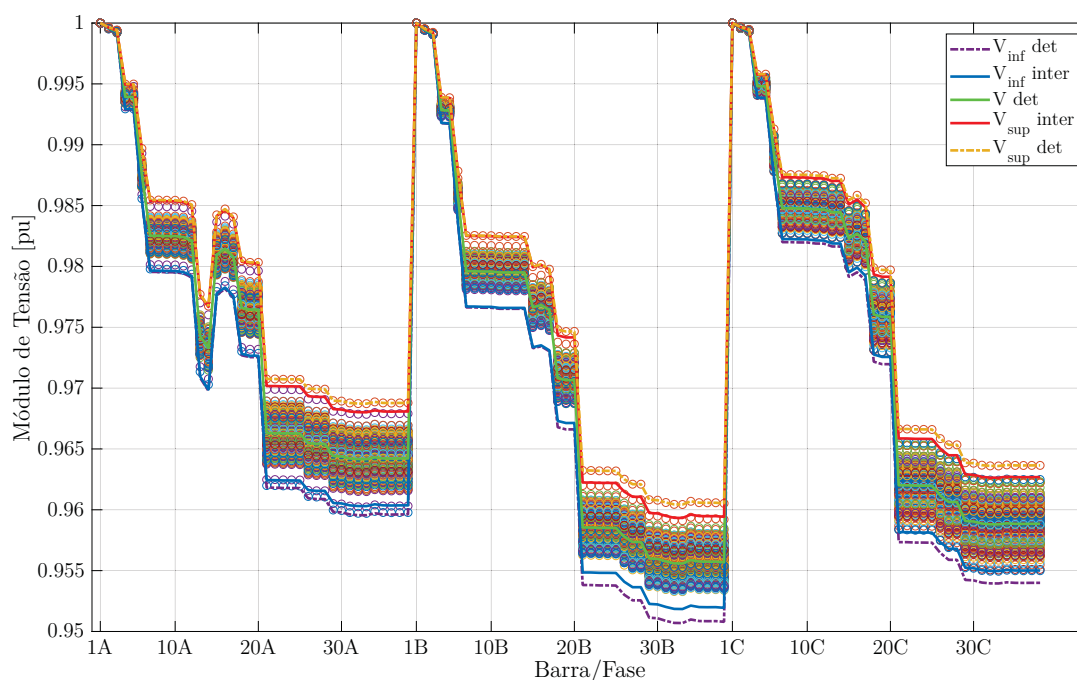
Fonte: O autor (2020).

5.3.2 Caso 2T – Incerteza de 5% na carga e 10% na geração solar

O perfil de tensão trifásico, considerando incerteza de carga de $\pm 5\%$, para os métodos citados está apresentado na [Figura 37](#). Percebe-se a repetição de padrão com os caso anterior e com o [FPOMPI](#) onde [FPOTI](#) entregou um intervalo no qual a nuvem do despacho aleatório está contida, sendo que ambos estão dentro dos limites gerados através do resultado determinístico.

A [Tabela 31](#) e [Tabela 32](#) comparam os valores superiores e inferiores da magnitude de tensão dos três métodos para o caso 1. Além disso, apresentam a média, desvio padrão e variância. O comportamento em relação aos caso anterior analisado se repete. Os valores do desvio padrão e variância continuam na mesma ordem de grandeza e mostram o alto grau de concentração dos resultados dos três métodos em relação à media. Além disso, é possível confirmar, novamente, o acréscimo de tensão em aproximadamente $0,03 pu$, através da média.

Figura 34 – Perfil de tensão – Caso 2T



Fonte: O autor (2020).

Tabela 31 – Análise estatística da tensão – Caso 2T – Limite superior

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
9A	0,9854	0,9854	0,985	0,98527	0,00023094	$5,3333 \times 10^{-8}$
16A	0,9847	0,9846	0,9841	0,98447	0,00032146	$1,0333 \times 10^{-7}$
25A	0,9707	0,9701	0,9699	0,97023	0,00041633	$1,7333 \times 10^{-7}$
37A	0,9688	0,9681	0,9679	0,96827	0,00047258	$2,2333 \times 10^{-7}$
9B	0,9825	0,9824	0,9817	0,9822	0,00043589	$1,9 \times 10^{-7}$
16B	0,9802	0,9801	0,9793	0,97987	0,00049329	$2,4333 \times 10^{-7}$
25B	0,9632	0,9622	0,962	0,96247	0,00064291	$4,1333 \times 10^{-7}$
37B	0,9606	0,9595	0,9593	0,9598	0,0007	$4,9 \times 10^{-7}$
9C	0,9875	0,9873	0,9868	0,9872	0,00036056	$1,3 \times 10^{-7}$
16C	0,9858	0,9855	0,985	0,98543	0,00040415	$1,6333 \times 10^{-7}$
25C	0,9666	0,9658	0,9655	0,96597	0,00056862	$3,2333 \times 10^{-7}$
37C	0,9636	0,9627	0,9625	0,96293	0,00058595	$3,4333 \times 10^{-7}$

Fonte: O autor (2020).

A Figura 35 apresenta os valores da geração ativa trifásica dos três métodos estudados, considerando uma incerteza de carga de $\pm 5\%$. Percebe-se que o padrão visto nos caso anterior se repete, onde o método intervalar contém a maioria dos valores gerados através do despacho aleatório e os limites superior e inferior ficam contidos no intervalo gerado pelo despacho ótimo considerando incerteza absoluto em todas as cargas.

A fim de se complementar a análise da geração, a Tabela 33 e Tabela 34 mostram o valor individual superior e inferior, respectivamente, da geração para cada fase, considerando incerteza de carga de $\pm 5\%$. Além disso, é calculado o valor da média, desvio padrão e

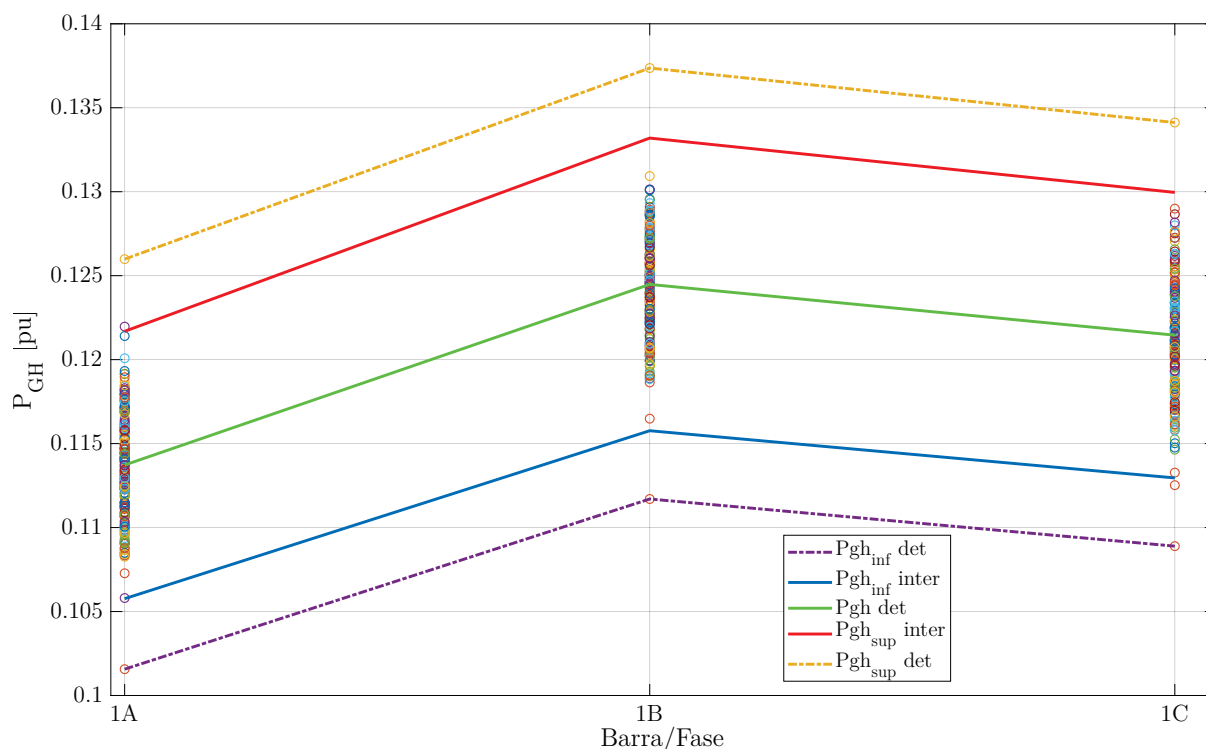
Tabela 32 – Análise estatística da tensão – Caso 2T – Limite inferior

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
9A	0,9795	0,9796	0,9798	0,97963	0,00015275	$2,3333 \times 10^{-8}$
16A	0,9782	0,9783	0,9784	0,9783	0,0001	1×10^{-8}
25A	0,9618	0,9624	0,962	0,96207	0,00030551	$9,3333 \times 10^{-8}$
37A	0,9596	0,9604	0,9598	0,95993	0,00041633	$1,7333 \times 10^{-7}$
9B	0,9767	0,9768	0,9781	0,9772	0,00078102	$6,1 \times 10^{-7}$
16B	0,9735	0,9736	0,9751	0,97407	0,00089629	$8,0333 \times 10^{-7}$
25B	0,9538	0,9548	0,9562	0,95493	0,0012055	$1,4533 \times 10^{-6}$
37B	0,9509	0,952	0,9535	0,95213	0,0013051	$1,7033 \times 10^{-6}$
9C	0,982	0,9822	0,9827	0,9823	0,00036056	$1,3 \times 10^{-7}$
16C	0,9795	0,9799	0,9804	0,97993	0,00045092	$2,0333 \times 10^{-7}$
25C	0,9573	0,9581	0,9583	0,9579	0,00052915	$2,8 \times 10^{-7}$
37C	0,954	0,955	0,955	0,95467	0,00057735	$3,3333 \times 10^{-7}$

Fonte: O autor (2020).

variância. Como pode ser visto nas tabelas, a ordem de grandeza da variância e desvio padrão não se alterou em relação ao caso 1T, além de mostrar a baixa dispersão dos resultados em relação à média.

Figura 35 – Geração ativa – Caso 2T



Fonte: O autor (2020).

A Figura 36 apresenta o gráfico com a geração reativa na barra 1, nas três fases para os três métodos, considerando uma incerteza de carga de $\pm 5\%$. Como visto nos

Tabela 33 – Análise estatística da geração ativa superior – Caso 2T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	0,126	0,1217	0,1217	0,12313	0,0024826	$6,1633 \times 10^{-6}$
1B	0,1374	0,1332	0,1309	0,13383	0,003296	$1,0863 \times 10^{-5}$
1C	0,1341	0,13	0,129	0,13103	0,0027025	$7,3033 \times 10^{-6}$

Fonte: O autor (2020).

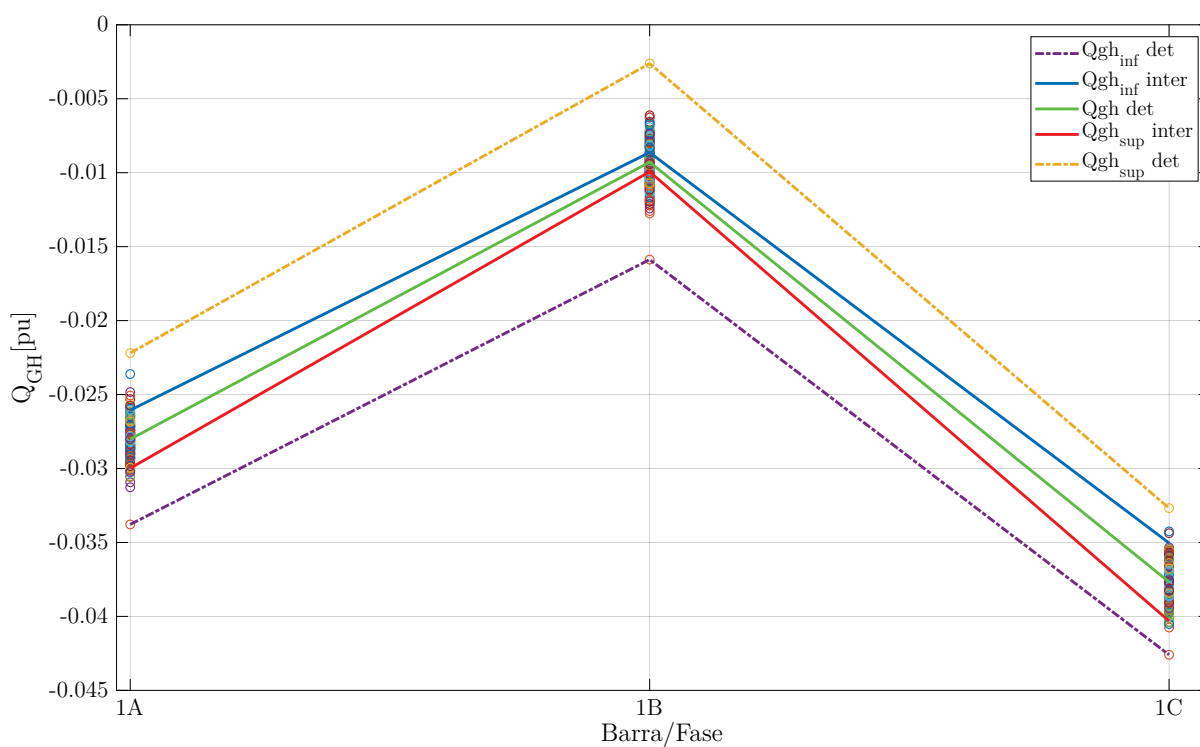
Tabela 34 – Análise estatística da geração ativa inferior – Caso 2T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	0,1016	0,1058	0,1073	0,1049	0,0029547	$8,73 \times 10^{-6}$
1B	0,1117	0,1158	0,1165	0,11467	0,0025929	$6,7233 \times 10^{-6}$
1C	0,1089	0,113	0,1133	0,11173	0,0024583	$6,0433 \times 10^{-6}$

Fonte: O autor (2020).

casos anteriores, o FPOTI criou um intervalo que embora tenha o diâmetro menor (principalmente na fase B), ficou próximo do limite de valores da nuvem do despacho aleatório e, conseqüentemente, contido no intervalo determinístico, considerando incerteza máximo em todas as cargas.

Figura 36 – Geração reativa – Caso 2T



Fonte: O autor (2020).

A [Tabela 35](#) e [Tabela 36](#) mostram os valores da geração reativa, média, desvio padrão e variância para as 3 fases, considerando uma incerteza de carga de $\pm 5\%$. Como visto no caso anterior e no [FPOMPI](#), a faixa de valores das variáveis da análise estatística comprova que os três métodos possuem uma forte convergência em relação a um ponto médio.

Tabela 35 – Análise estatística da geração reativa superior – Caso 2T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	-0,02219	-0,02606	-0,02507	-0,02444	0,0020104	$4,0419 \times 10^{-6}$
1B	-0,002619	-0,008636	-0,006119	-0,0057913	0,0030219	$9,1316 \times 10^{-6}$
1C	-0,03268	-0,03504	-0,03425	-0,03399	0,0012013	$1,4431 \times 10^{-6}$

Fonte: O autor (2020).

Tabela 36 – Análise estatística da geração reativa inferior – Caso 2T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	-0,03378	-0,02998	-0,03093	-0,031563	0,0019776	$3,9108 \times 10^{-6}$
1B	-0,01587	-0,009936	-0,01276	-0,012855	0,0029681	$8,8099 \times 10^{-6}$
1C	-0,0426	-0,04031	-0,04052	-0,041143	0,0012659	$1,6024 \times 10^{-6}$

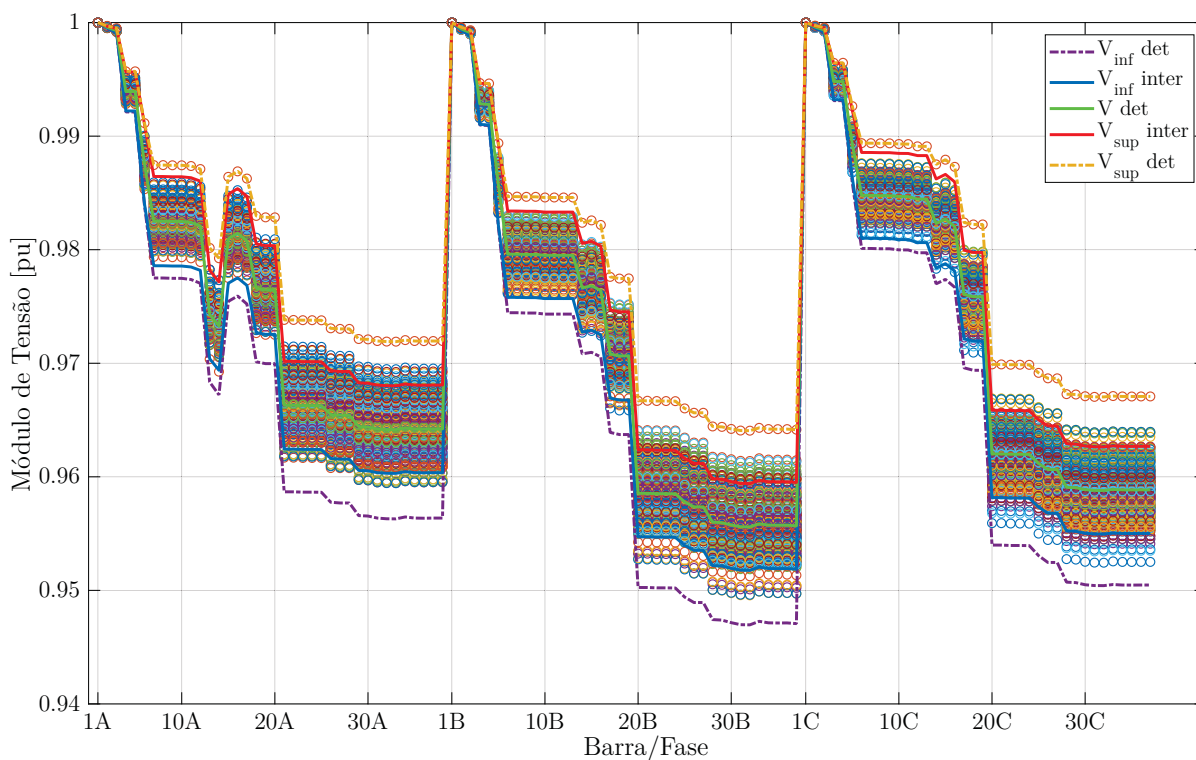
Fonte: O autor (2020).

5.3.3 Caso 3T – Incerteza de 10% na carga e 10% na geração solar

A [Figura 37](#) mostra o perfil de tensão das barras nas 3 fases, considerando incerteza de carga de $\pm 10\%$. Pode-se notar o mesmo padrão quando relacionado aos casos anteriores. O intervalo do perfil de tensão gerado pelo método de Krawczyk ficou contido no intervalo do [FPOT](#) com condição extrema de incerteza e contém, na maioria, o intervalo gerado pela nuvem aleatória.

Através da [Tabela 37](#) e [Tabela 38](#), também é possível avaliar o módulo de tensão em algumas barras específicas, além da média, desvio padrão e variância para o caso 3T. Através dos valores baixos destas duas variáveis, conclui-se que os três métodos possuem uma forte convergência num ponto médio.

Figura 37 – Perfil de tensão – Caso 3T



Fonte: O autor (2020).

Tabela 37 – Análise estatística da tensão – Caso 3T – Limite superior

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
9A	0,9874	0,9864	0,9859	0,98657	0,00076376	$5,8333 \times 10^{-7}$
16A	0,9869	0,9854	0,9852	0,98583	0,00092916	$8,6333 \times 10^{-7}$
25A	0,9738	0,9701	0,9714	0,97177	0,0018771	$3,5233 \times 10^{-6}$
37A	0,972	0,9681	0,9695	0,96987	0,0019757	$3,9033 \times 10^{-6}$
9B	0,9847	0,9834	0,983	0,9837	0,00088882	$7,9 \times 10^{-7}$
16B	0,9826	0,9807	0,9806	0,9813	0,0011269	$1,27 \times 10^{-6}$
25B	0,9667	0,9625	0,9641	0,96443	0,0021197	$4,4933 \times 10^{-6}$
37B	0,9642	0,9596	0,9615	0,96177	0,0023116	$5,3433 \times 10^{-6}$
9C	0,9894	0,9884	0,9875	0,98843	0,00095044	$9,0333 \times 10^{-7}$
16C	0,9879	0,9866	0,9859	0,9868	0,0010149	$1,03 \times 10^{-6}$
25C	0,9699	0,9658	0,9668	0,9675	0,0021378	$4,57 \times 10^{-6}$
37C	0,9671	0,9627	0,964	0,9646	0,0022605	$5,11 \times 10^{-6}$

Fonte: O autor (2020).

A Figura 38 mostra a geração ativa na barra da subestação para as 3 fases para os três métodos utilizados, considerando uma incerteza de $\pm 10\%$. Conforme pode ser visto, o comportamento da geração reativa é semelhante ao visto no cenário 1. O Método intervalar tem uma tendência de acompanhar o despacho aleatório, criando uma envoltória. Além disso, ficou contido dentro dos limites criados pelo despacho ótimo.

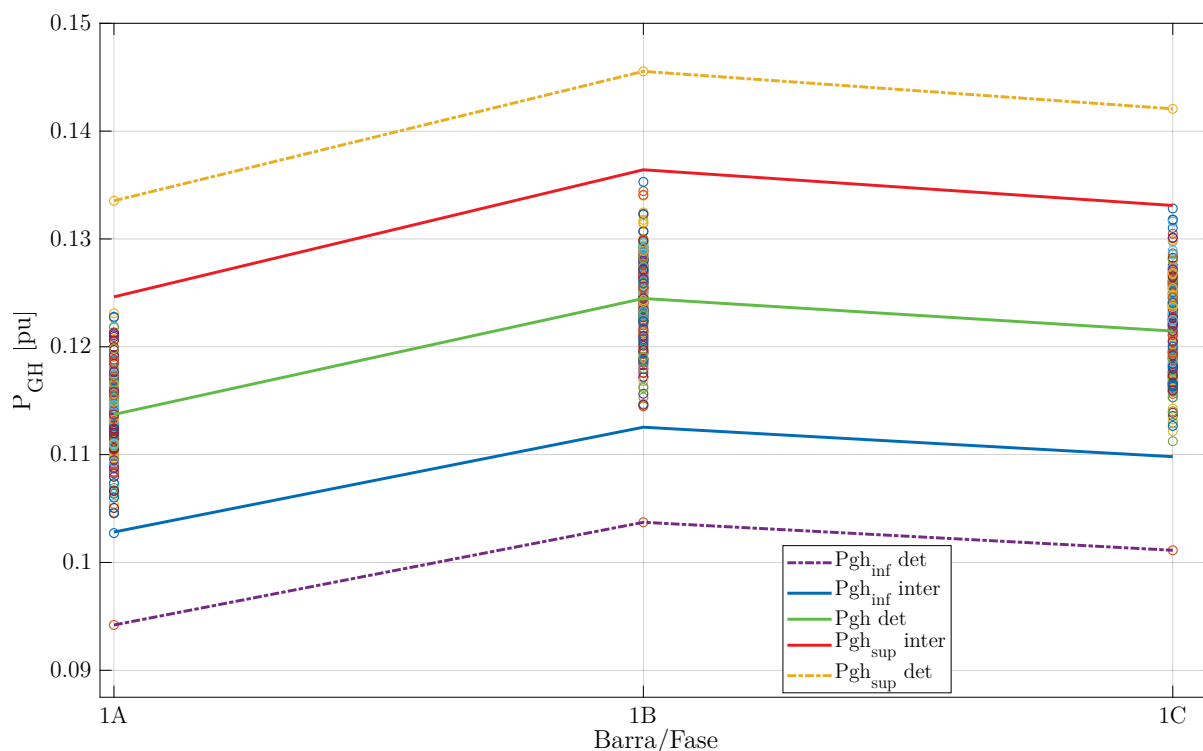
Tabela 38 – Análise estatística da tensão – Caso 3T – Limite inferior

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
9A	0,9775	0,9786	0,9793	0,97847	0,00090738	$8,2333 \times 10^{-7}$
16A	0,9759	0,9775	0,978	0,97713	0,001097	$1,2033 \times 10^{-6}$
25A	0,9586	0,9624	0,9618	0,96093	0,0020429	$4,1733 \times 10^{-6}$
37A	0,9564	0,9604	0,9595	0,95877	0,0020984	$4,4033 \times 10^{-6}$
9B	0,9744	0,9758	0,9761	0,97543	0,00090738	$8,2333 \times 10^{-7}$
16B	0,971	0,9729	0,973	0,9723	0,0011269	$1,27 \times 10^{-6}$
25B	0,9502	0,9527	0,9547	0,95253	0,0022546	$5,0833 \times 10^{-6}$
37B	0,9471	0,9519	0,9498	0,9496	0,0024062	$5,79 \times 10^{-6}$
9C	0,9801	0,981	0,9815	0,98087	0,00070946	$5,0333 \times 10^{-7}$
16C	0,9774	0,9788	0,9789	0,97837	0,00083865	$7,0333 \times 10^{-7}$
25C	0,9539	0,9581	0,9559	0,95597	0,0021008	$4,4133 \times 10^{-6}$
37C	0,9505	0,955	0,9525	0,95267	0,0022546	$5,0833 \times 10^{-6}$

Fonte: O autor (2020).

A Tabela 39 e Tabela 40 complementam a análise da geração ativa para o caso 3T, através dos valores superior e inferior absolutos da geração reativa dos três métodos, respectivamente. Além disso, mostra a média, desvio padrão e variância. Pode-se concluir, através destas duas variáveis, que os três métodos apresentaram baixo afastamento em relação à média. Além disso, em todos os casos, a ordem de grandeza praticamente manteve-se inalterada.

Figura 38 – Geração ativa – Caso 3T



Fonte: O autor (2020).

Tabela 39 – Análise estatística da geração ativa superior – Caso 3T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	0,1335	0,1246	0,1228	0,12697	0,0057292	$3,2823 \times 10^{-5}$
1B	0,1455	0,1364	0,1353	0,13907	0,0055985	$3,1343 \times 10^{-5}$
1C	0,1421	0,1331	0,1328	0,136	0,0052849	$2,793 \times 10^{-5}$

Fonte: O autor (2020).

Tabela 40 – Análise estatística da geração ativa inferior – Caso 3T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	0,0942	0,1028	0,1046	0,10053	0,0055582	$3,0893 \times 10^{-5}$
1B	0,1037	0,1125	0,1146	0,11027	0,005783	$3,3443 \times 10^{-5}$
1C	0,1011	0,1098	0,1112	0,10737	0,0054721	$2,9943 \times 10^{-5}$

Fonte: O autor (2020).

A [Figura 39](#) apresenta a geração de potência reativa na barra da subestação nas 3 fases para os três métodos, considerando o caso 3T. Pode ser observado, assim como nos casos anteriores, que o intervalo obtido pelo método intervalar fica contido nos limites gerados através do despacho ótimo. Além disso, praticamente cria uma margem ao redor da nuvem aleatória, exceto para fase B, onde o intervalo ficou mais concentrado. Conforme mostra o gráfico, o padrão de comportamento da geração reativa é similar ao visto nos casos anteriores. O Método intervalar atem uma tendência de acompanhar o despacho aleatório, criando uma envoltória. Além disso, ficou contido dentro dos limites criados pelo despacho ótimo.

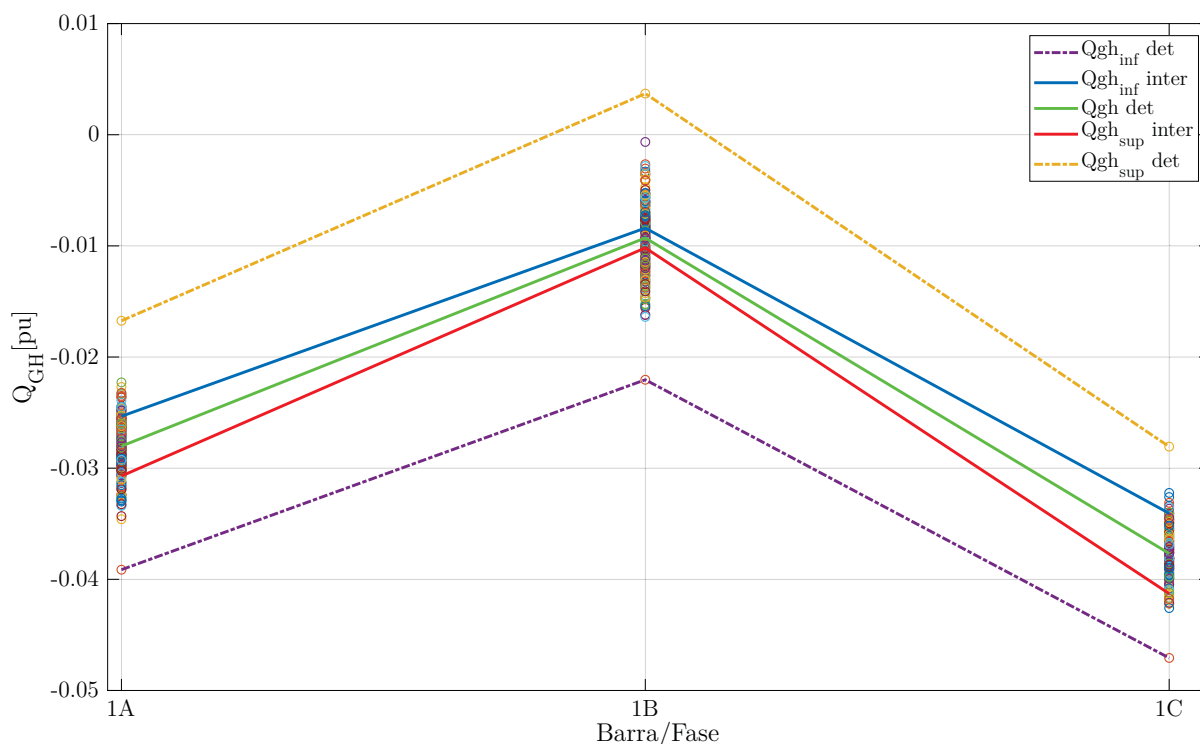
Para complementar a análise da geração reativa, considerando incerteza de carga de $\pm 10\%$, a [Tabela 41](#) e [Tabela 42](#) apresentam os limites superior e inferior absolutos dos três métodos, respectivamente. Outrossim, mostram a média, desvio padrão e variância. Conclui-se, através do desvio padrão e variância, que os três métodos apresentaram baixa dispersão em relação à média, além da ordem de grandeza dos resultados praticamente não ter se alterado ao longo dos casos analisados.

Tabela 41 – Análise estatística da geração reativa superior – Caso 3T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	-0,01674	-0,02533	-0,02228	-0,02145	0,0043547	$1,8964 \times 10^{-5}$
1B	0,003704	-0,008396	-0,0006507	-0,0017809	0,0061287	$3,7561 \times 10^{-5}$
1C	-0,02806	-0,03406	-0,0326	-0,031573	0,003129	$9,7905 \times 10^{-6}$

Fonte: O autor (2020).

Figura 39 – Geração reativa – Caso 3T



Fonte: O autor (2020).

Tabela 42 – Análise estatística da geração reativa inferior – Caso 3T

Barra/Fase	Ótimo	Intervalar	Aleatório	Média	Desvio padrão	Variância
1A	-0,03913	-0,03071	-0,03431	-0,034717	0,0042247	$1,7848 \times 10^{-5}$
1B	-0,02205	-0,01018	-0,01639	-0,016207	0,0059371	$3,5249 \times 10^{-5}$
1C	-0,04708	-0,04129	-0,04177	-0,04338	0,0032133	$1,0325 \times 10^{-5}$

Fonte: O autor (2020).

Por fim, foi comparado o tempo de simulação entre o despacho aleatório, o método de Krawczyk e o despacho ótimo determinístico, em segundos, conforme mostra a Tabela 43.

Tabela 43 – Tempo de Simulação

Caso	Tempo [s]		
	Simulação Aleatória	Método Proposto	FPOT Determinístico
1 T	112,819	3,676	4,266
2 T	111,868	4,227	4,231
3 T	112,874	4,732	7,545

Fonte: O autor (2020).

5.3.4 Discussão de resultados

Através dos três casos analisados anteriormente, pode-se afirmar que o FPOTI cumpre com o esperado. O método proposto consegue detectar, na maioria dos casos, a nuvem de valores prováveis, gerados através do despacho aleatório 26 vezes mais rápido e com o mesmo tempo se comparado ao despacho ótimo determinístico. Além disso, em momento algum apresentou valores anormais, pois os resultados intervalares para cada variável estavam sempre contidos nos limites do despacho ótimo considerando a incerteza máxima em todas as cargas. Entretanto, a maior diferença de valor se deu para a geração reativa, para os três casos e para o Cenário 1. Como pode ser visto no trabalho de [Pereira \(2011\)](#), a geração reativa pode apresentar grande divergência de valores, mesmo assim, sempre contendo o despacho ótimo no intervalo.

Além disso, os valores tabelados, como a variância e desvio padrão, mantiveram-se na mesma ordem de grandeza, independente de considerar a incerteza de carga, mostrando uma uniformidade na solução do sistema proposto. O método proposto cumpriu com às expectativas e mostrou bom comportamento nos resultados.

Dessa forma, conclui-se que o Fluxo de Potência Ótimo Trifásico Intervalar fornece uma excelente precisão quando comparado aos outros métodos, além de ser muito mais rápido.

6 Conclusão e sugestões

Com a evolução das redes ativas de distribuição, através da inserção de GDs, dispositivos de armazenamento de energia, cita-se o de Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo aplicado na execução do planejamento e coordenação dessas redes. Além disso, as LDs apresentam desequilíbrio de cargas, nessa linha de pesquisa, cita-se e o Fluxo de potência Ótimo Trifásico utilizado para analisar e operar esse tipo de sistema.

Entretanto, a maioria das análises realizadas através dessas ferramentas tradicionais não incorporam incertezas que podem ocorrer nos elementos das redes, como demanda de carga, geração, incerteza de dados das linhas e entre outros. Dessa forma, o problema tem abordagem determinística, quando, na verdade, são de natureza probabilística. Para tanto, utiliza-se a Matemática intervalar, a fim de se englobar intervalos de incerteza dos elementos da rede no FP e FPO.

Assim, este trabalho teve como objetivo desenvolver uma metodologia que incorpora a Matemática Intervalar ao Fluxo de Potência Ótimo Multiperíodo proposto em Blasi (2020) e no Fluxo de Potência Ótimo Trifásico, proposto em Baran e Fernandes (2016), para que se possa considerar os intervalos de incerteza de geração solar e carga em problemas do SEP e assim obter faixas de operação de perfil de tensão e despacho de potência.

Como a referência principal da presente dissertação foi o trabalho de Monego (2017), foi necessário primeiramente avaliar o Fluxo de Potência Ótimo Monofásico Intervalar proposto pela autora, além de avaliação da literatura sobre aplicações e MI a problemas de SEP. Dessa forma, foi possível criar o fundamento utilizado na aplicação da MI no FPOT e FPOMP, devido à similaridade das formulações.

Para testar a metodologias propostas, foi utilizado o sistema IEEE 34 barras ao qual foram aplicados diferentes dois cenários com distintas configurações de incerteza. Dessa forma, foi analisado o impacto das incertezas consideradas na geração solar e na carga para o FPOMPI e para o FPOTI. Além disso, os resultados foram comparados com técnicas tradicionais, como por exemplo, a simulação exaustiva. Estas técnicas foram comparadas entre si através de valores médios, desvio padrão e variância. Os dois cenários conseguiram mostrar que a incorporação da Matemática Intervalar no FPOMP e FPOT conseguem trazer resultados bastante precisos quando comparados às técnicas tradicionais, além de apresentar boa uniformidade dos resultados, para todos os casos considerados e cenário simulado. Além disso, o método proposto obteve um ganho computacional quando comparado ao despacho aleatório, para ambos os cenários.

Em alguns resultados, o valor da geração de potência reativa não conseguiu englobar a nuvem de despacho aleatório e apresentou uma diferença de valor significativa, fato

observado em alguns trabalhos que envolvem a **MI** utilizando o método de Krawczyk, tal como o de **Pereira (2011)**.

Uma das principais contribuições do trabalho foi o desenvolvimento de manipulação nas referências de tensão a fim de viabilizar aplicação da **MI** no **FPOT**.

Este trabalho não teve a otimização intervalar aplicada aos bancos de capacitores, nem aos taps de reguladores de tensão. Dessa forma sugere-se expandir tanto o **FPOMPI** quanto o **FPOTI** para que se possa determinar uma faixa ótima de operação desses dispositivos. Bem como o desenvolvimento de um Fluxo de Potência Ótimo Intervalar para a operação de microrredes, a fim de se obter intervalos ótimos de geração ativa e reativa e elementos presentes nas redes.

Já para estudos envolvendo as Linhas de Transmissão, sugere-se o desenvolvimento de Fluxo de Potência Ótimo Intervalar que realiza despacho hidrotérmico e faz uma alocação intervalar de reserva girante. Uma vez que o Brasil apresenta uma matriz energética diversificada, há uma necessidade de coordenação das fontes presente. Dessa forma, a reserva girante tem o papel de suprir uma possível falta de geração causada por intermitência das gerações eólicas e solares, por exemplo. Dessa forma, a **MI** pode ser utilizada para se incorporar incerteza de fontes e determinar uma faixa ótima de alocação de reserva girante.

Além disso, para todos os trabalhos envolvendo a **MI** como ferramenta de busca de faixa ótima, sugere-se uma melhoria nos resultados obtidos para a geração reativa, uma vez que esta variável apresenta não apresentou o mesmo nível de precisão em relação à tensão e geração ativa.

Referências

ABBEY, C. et al. Development and operation of active distribution networks: Results of cigre c6.11 working group. In: . [S.l.: s.n.], 2011. Citado na página 21.

ALEFELD, G.; MAYER, G. Interval analysis: theory and applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier BV, v. 121, n. 1-2, p. 421–464, set. 2000. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 45.

ARAÚJO, B. M. C. *Aritméticas intervalares aplicadas à solução do problema de fluxo de potência via equações de injeção de corrente*. 144 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Juiz de Fora, Fevereiro 2016. Citado 4 vezes nas páginas 22, 49, 51 e 59.

ARAÚJO, L. R.; PENIDO, D. R. R. A methodology for optimization of unbalanced distribution systems. *IEEE Latin America Transactions*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 11, n. 5, p. 1182–1189, sep 2013. Citado na página 21.

BARAN, A. R.; BORBA, R. A.; FERNANDES, T. S. P. Adjustment and operation of banks capacitors using three-phase representation. *Congresso Latino Americano de Geração e Transmissão de Energia Elétrica*, Congresso Latino Americano de Geração e Transmissão de Energia Elétrica, v. 12, Nov 2017. Citado na página 68.

BARAN, A. R.; BORBA, R. A.; FERNANDES, T. S. P. Adjustment of automatic capacitors using three-phase optimal power. In: *2018 13th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications - INDUSCON 2018*. [S.l.]: IEEE, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.

BARAN, A. R.; FERNANDES, T. S. A three-phase optimal power flow applied to the planning of unbalanced distribution networks. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier BV, v. 74, p. 301–309, jan 2016. Citado 10 vezes nas páginas 21, 23, 51, 60, 68, 69, 72, 73, 79 e 117.

BARAN, M.; WU, F. Optimal capacitor placement on radial distribution systems. *IEEE Transactions on Power Delivery*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 4, n. 1, p. 725–734, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.

BARBOZA, L.; DIMURO, G.; REISER, R. Power flow with load uncertainty. *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, Brazilian Society for Computational and Applied Mathematics (SBMAC), v. 5, n. 1, abr. 2004. Citado na página 48.

BENEDETTI, A.; PERONA, P. Bit-width optimization for configurable dsp's by multi-interval analysis. In: IEEE. *Conference Record of the Thirty-Fourth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (Cat. No. 00CH37154)*. [S.l.], 2000. v. 1, p. 355–359. Citado na página 46.

BLASI, T. M. *PLANNING OF ACTIVE DISTRIBUTION SYSTEMS OPERATION WITH BATTERIES AND RENEWABLE ENERGY SOURCES*. 158 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Curitiba, 2020. Citado 8 vezes nas páginas 21, 23, 51, 60, 62, 65, 79 e 117.

BORBA, R. A. *Influência da representação de carga no fluxo de potência ótimo trifásico*. 105 p. Monografia (Trabalho de conclusão de curso) — Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Graduação em Engenharia Elétrica, Curitiba, Junho 2018. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.

BORGES, S. S.; FERNANDES, T. S. P.; ALMEIDA, K. C. de. Pré-despacho hidrotérmico de potência ativa e reativa via método dos pontos interiores e coordenadas retangulares. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, FapUNIFESP (SciELO), v. 22, n. 5, p. 479–494, out. 2011. Citado na página 21.

BRUNO, S. et al. Unbalanced three-phase optimal power flow for smart grids. *IEEE Transactions on Industrial Electronics - IEEE TRANS IND ELECTRON*, v. 58, p. 4504–4513, 10 2011. Citado na página 21.

BURKILL, J. C. Functions of intervals. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Wiley, s2-22, n. 1, p. 275–310, 1924. Citado na página 25.

CAIN, M. B.; O'NEILL, R. P.; CASTILLO, A. History of optimal power flow and formulations. *Federal Energy Regulatory Commission*, v. 1, p. 1–36, 2012. Citado na página 61.

CARPENTIER, J. Contribution a l'étude du dispatching économique. *Bulletin de la Societe Francaise des Electriciens*, v. 3, n. 1, p. 431–447, 1962. Citado na página 61.

COMBA, J. L. D.; STOL, J. A ne arithmetic and its applications to computer graphics. In: CITESEER. *Proceedings of VI SIBGRAPI (Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing)*. [S.l.], 1993. p. 9–18. Citado na página 25.

DAS, B. Radial distribution system power flow using interval arithmetic. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier BV, v. 24, n. 10, p. 827–836, dez. 2002. Citado na página 48.

DING, T. et al. Interval radial power flow using extended DistFlow formulation and krawczyk iteration method with sparse approximate inverse preconditioner. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 9, n. 14, p. 1998–2006, nov. 2015. Citado na página 49.

GRANVILLE, S. Optimal reactive dispatch through interior point methods. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 9, n. 1, p. 136–146, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 55, 65 e 73.

GWALTNEY, C. R. et al. Interval methods for nonlinear equation solving applications. In: _____. [S.l.: s.n.], 2008. p. 81–96. Citado na página 25.

HANSEN, E. Global optimization using interval analysis ? the multi-dimensional case. *Numerische Mathematik*, Springer Science and Business Media LLC, v. 34, n. 3, p. 247–270, set. 1980. Citado na página 44.

HANSEN, E.; GREENBERG, R. An interval newton method. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier BV, v. 12, n. 2-3, p. 89–98, maio 1983. Citado na página 45.

HANSEN, E.; SENGUPTA, S. Bounding solutions of systems of equations using interval analysis. *BIT*, Springer Science and Business Media LLC, v. 21, n. 2, p. 203–211, jun. 1981. Citado na página 45.

HANSEN, E.; WALSTER, G. Nonlinear equations and optimization. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier BV, v. 25, n. 10-11, p. 125–145, maio 1993. Citado 3 vezes nas páginas 34, 35 e 37.

HANSEN, E.; WALSTER, G. W. *Global optimization using interval analysis: revised and expanded*. [S.l.]: CRC Press, 2003. v. 264. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 37.

IBRAEV, S. *A new parallel method for verified global optimization*. 145 p. Tese (Doutorado) — Bergischen Universität Gesamthochschule Wuppertal, Wuppertal, 2001. Citado na página 46.

ICHIDA, K. Constrained optimization using interval analysis. *Computers & Industrial Engineering*, Elsevier BV, v. 31, n. 3-4, p. 933–937, dez. 1996. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 45.

JUNIOR, A. R. B.; FERNANDES, T. S. P.; BORBA, R. A. Voltage regulation planning for distribution networks using multi-scenario three-phase optimal power flow. *Energies*, MDPI AG, v. 13, n. 1, p. 159, dez. 2019. Citado na página 69.

KEARFOTT, R. An interval branch and bound algorithm for bound constrained optimization problems. *Journal of Global Optimization*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2, n. 3, 1992. Citado na página 45.

KJØLLER, S. et al. Non-linear global optimization using interval arithmetic and constraint propagation. In: _____. [S.l.: s.n.], 2007. v. 4, p. 45–58. Citado na página 45.

KRAWCZYK, R. Newton–algorithmen zur bestimmung von nullstellen mit fehlerschranken. *Computing*, Springer Science and Business Media LLC, v. 4, n. 3, p. 187–201, set. 1969. Citado 3 vezes nas páginas 25, 37 e 44.

KRAWCZYK, R.; NEUMAIER, A. An improved interval newton operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier BV, v. 118, n. 1, p. 194–207, ago. 1986. Citado na página 37.

LIAO, X. et al. Interval method for uncertain power flow analysis based on taylor inclusion function. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 11, n. 5, p. 1270–1278, mar. 2017. Citado na página 37.

LITVINOV, G. L.; SOBOLEVSKIĪ, A. N. Idempotent interval analysis and optimization problems. *Reliable Computing*, Springer, v. 7, n. 5, p. 353–377, 2001. Citado na página 46.

LU, F. et al. Affine arithmetic-based power flow algorithm considering uncertainty for hybrid AC/DC grids incorporating VSCs. *IET Generation, Transmission & Distribution*, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 13, n. 10, p. 1856–1864, maio 2019. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 50.

MICHEL, D.; ZIDNA, A. Interval-krawczyk approach for solving nonlinear equations systems in b-spline form. In: *Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences*. [S.l.]: Springer, 2015. p. 455–465. Citado na página 46.

- MONEGO, A. C. D. *Fluxo de potência ótimo utilizando a matemática intervalar*. 117 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Curitiba, Dezembro 2017. Citado 16 vezes nas páginas 22, 23, 25, 44, 48, 50, 51, 54, 57, 58, 59, 62, 67, 76, 82 e 117.
- MONTICELLI, A. J. *Fluxo de carga em redes de energia elétrica*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1983. v. 1. Citado na página 50.
- MOORE, R. *Interval analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1966. (Prentice-Hall series in automatic computation). Citado 4 vezes nas páginas 25, 34, 37 e 44.
- MOORE, R. *Methods and Applications of Interval Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979. (Studies in Applied and Numerical Mathematics). ISBN 9780898711615. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0IJrpBIIdXe4C>>. Citado 3 vezes nas páginas 25, 37 e 50.
- MOORE, R. E. *Automatic error analysis in digital computation*. Sunnyvale, California: Lockheed Missiles and Space Division, 1959. (Technical Report LMSD-4842). Citado na página 25.
- MOORE, R. E. *Introduction to Interval Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 0898716691. Citado 11 vezes nas páginas 25, 26, 27, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 e 50.
- MORI, H.; YUIHARA, A. Calculation of multiple power flow solutions with the krawczyk method. In: *ISCAS'99. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems VLSI (Cat. No.99CH36349)*. [S.l.]: IEEE, 1999. Citado 7 vezes nas páginas 35, 44, 48, 51, 53, 54 e 59.
- NEUMAIER, A. *Interval methods for systems of equations*. [S.l.]: Cambridge university press, 1990. v. 37. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 37.
- NEUMAIER, A. Complete search in continuous global optimization and constraint satisfaction. *Acta numerica*, Cambridge University Press, v. 13, p. 271–369, 2004. Citado na página 25.
- NOBLET, V. et al. 3-d deformable image registration: a topology preservation scheme based on hierarchical deformation models and interval analysis optimization. *IEEE Transactions on image processing*, IEEE, v. 14, n. 5, p. 553–566, 2005. Citado na página 46.
- OLIVEIRA, P. W.; CLAUDIO, D. M.; DIVERIO, T. A. *Fundamentos de matemática intervalar*. 2^a. ed. Porto Alegre, Brasil: Editora Sagra Luzzato, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 37.
- PALMEIRA, E.; BEDREGAL, B.; SANTIAGO, R. Homotopia intervalar. v. 12, 01 2011. Citado na página 25.
- PEREIRA, G. M. dos S.; FERNANDES, T. S. P.; AOKI, A. R. Allocation of capacitors and voltage regulators in three-phase distribution networks. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer Nature, v. 29, n. 2, p. 238–249, jan 2018. Citado na página 21.

PEREIRA, H. Q. *Fluxo de Potência Trifásico: Um Estudo Comparativo e Uma Nova Metodologia de Solução*. 162 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora-UFJF, fev 2006. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 70.

PEREIRA, H. Q.; COSTA, V. M. da. Uma avaliação crítica das formulações de fluxo de potência para sistemas trifásicos via método de newton-raphson. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, FapUNIFESP (SciELO), v. 18, n. 1, p. 127–140, mar 2007. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 69.

PEREIRA, L.; COSTA, V. da. Interval analysis applied to the maximum loading point of electric power systems considering load data uncertainties. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, Elsevier BV, v. 54, p. 334–340, jan. 2014. Citado na página 48.

PEREIRA, L. E. de S. *Metodologia intervalar para tratamento de incertezas em problemas de fluxo de potência*. Juiz de Fora, MG: [s.n.], 2011. 137 p. Citado 15 vezes nas páginas 22, 44, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 59, 66, 75, 95, 103, 116 e 118.

PEREIRA, L. E. de S. *Metodologias generalizadas de solução do fluxo de potência intervalar considerando dados incertos*. 137 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Juiz de Fora, MG, 2015. Citado na página 49.

PEREIRA, L. E. S.; COSTA, V. M. Análise de incertezas em sistemas elétricos via fluxo de potência intervalar. *Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática*, p. 4147–4179, mar 2012. Citado 6 vezes nas páginas 22, 44, 48, 51, 54 e 59.

PIRNIA, M. et al. A novel affine arithmetic method to solve optimal power flow problems with uncertainties. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 29, n. 6, p. 2775–2783, nov. 2014. Citado na página 49.

PIZZALI, L. F. O. *Cálculo de Fluxo de Potência em Redes de Distribuição com Modelagem a Quatro Fios*. 120 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, Maio 2003. Citado na página 71.

RATSCHEK, H.; ROKNE, J. Experiments using interval analysis for solving a circuit design problem. *Journal of Global Optimization*, Springer Science and Business Media LLC, v. 3, n. 4, p. 501–518, 1993. Citado na página 45.

RATSCHEK, H.; VOLLER, R. L. What can interval analysis do for global optimization? *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 1, n. 2, p. 111–130, 1991. Citado na página 45.

RAY, S.; RALHAN, S. Interval load flow solution for systems with uncertainties. In: *2015 Annual IEEE India Conference (INDICON)*. [S.l.]: IEEE, 2015. Citado na página 48.

RAY, S.; RALHAN, S. Reliable power flow and short circuit analysis of systems with uncertain data. *International Journal of Reliability and Safety*, v. 12, p. 166, 01 2018. Citado na página 50.

RUBACK, R. O.; COSTA, V. M. da. A new method for analyzing three-phase faults under data uncertainties. *IEEE Latin America Transactions*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 16, n. 5, p. 1395–1401, maio 2018. Citado na página 50.

RUMP, S. INTLAB - INTerval LABoratory. In: CSENDES, T. (Ed.). *Developments in Reliable Computing*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. p. 77–104. <<http://www.ti3.tuhh.de/rump/>>. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 50.

SALAS, C. S. S. *Alocação de capacitores em redes de distribuição primárias e secundárias incluindo restrições de ressonância*. 203 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Campinas, SP, 2010. Citado na página 72.

SCHICHL, H.; NEUMAIER, A. Interval analysis on directed acyclic graphs for global optimization. *Journal of Global Optimization*, Springer Science and Business Media LLC, v. 33, n. 4, p. 541–562, dez. 2005. Citado na página 46.

SETA, F. da S. *Reconfiguração de sistemas de distribuição considerando incertezas através de fluxo de potência intervalar e sistemas imunológicos artificiais*. Juiz de Fora, MG: [s.n.], 2015. 127 f. Citado na página 38.

STAUNING, O.; BENDTSEN, C. *Flexible automatic differentiation using templates and operator overloading in ANSI C++*. Technical University of Denmark, 2003. Citado na página 45.

SUNAGA, T. Theory of interval algebra and its application to numerical analysis. *RAAG memoirs*, Gakujutsu Bunken Fukyu-kai, v. 2, n. 29-46, p. 209, 1958. Citado na página 25.

UTURBEY, W.; COSTA, A. S. Short term hydrothermal coordination in the presence of price-responsive loads. In: *2005 IEEE Russia Power Tech*. [S.l.]: IEEE, 2005. Citado na página 21.

VACCARO, A.; CANIZARES, C. A.; VILLACCI, D. An affine arithmetic-based methodology for reliable power flow analysis in the presence of data uncertainty. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 2, p. 624–632, maio 2010. Citado na página 49.

VARGAS, R. de et al. Incerteza de dados em fluxo de potência: uma abordagem com a matemática intervalar do c-xsc. *TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, v. 9, n. 3, p. 491–502, 2008. ISSN 2179-8451. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 49.

WANG, S.; HAN, L.; WU, L. Uncertainty tracing of distributed generations via complex affine arithmetic based unbalanced three-phase power flow. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 30, n. 6, p. 3053–3062, nov. 2015. Citado na página 49.

WANG, Z.; ALVARADO, F. Interval arithmetic in power flow analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 7, n. 3, p. 1341–1349, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 22, 44 e 48.

WARMUS, M. Calculus of approximations. *Série des Sciences Mathématiques*, Bulletin de L'Académie Polonaise des Scinces, IV, n. 5, p. 253–259, 1956. Citado na página 25.

WU, H. et al. A mixed uncertainty power flow algorithm-based centralized photovoltaic (PV) cluster. *Energies*, MDPI AG, v. 12, n. 20, p. 4008, out. 2019. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 50.

YOUNG, R. The algebra of many-valued quantities. *Mathematische Annalen*, v. 104, p. 260–290, 1931. Citado na página [25](#).

Apêndices

APÊNDICE A – Dados das cargas e geração

- FPOMP

Tabela 44 – Peso das cargas e geração

Período	Peso de carga		Peso de geração solar	
	Ativa	Reativa	Ativa	Reativa
1	0.63	0.63	0	0
2	0.58	0.58	0	0
3	0.565	0.565	0	0
4	0.565	0.565	0	0
5	0.58	0.58	0	0
6	0.64	0.64	0	0
7	0.73	0.73	0.0010065	0.0010065
8	0.78	0.78	0.079517	0.079517
9	0.84	0.84	0.30523	0.30523
10	0.86	0.86	0.53246	0.53246
11	0.86	0.86	0.72974	0.72974
12	0.83	0.83	0.87921	0.87921
13	0.83	0.83	0.97182	0.97182
14	0.87	0.87	1	1
15	0.89	0.89	0.99019	0.99019
16	0.9	0.9	0.83518	0.83518
17	0.92	0.92	0.5531	0.5531
18	0.96	0.96	0.37292	0.37292
19	1	1	0.30448	0.30448
20	0.91	0.91	0.12531	0.12531
21	0.88	0.88	0.0062909	0.0062909
22	0.86	0.86	0	0
23	0.77	0.77	0	0
24	0.65	0.65	0	0

Tabela 45 – Dados da geração solar

Barra	Geração ativa [kW]	Geração reativa [$kVar$]
812	174.9	74.51
828	174.9	74.51
838	174.9	74.51
848	174.9	74.51
858	174.9	74.51
868	174.9	74.51
874	174.9	74.51

Anexos

ANEXO A – Dados de linha – *IEEE* 34 Barras

Tabela 46 – Dados de linha *IEEE* 34 barras – Resistência

De	Para	Resistência [Ω]					
		A	B	C	AB	BC	CA
800	802	0.6553	0.6489	0.6517	0.1029	0.1044	0.1013
802	804	0.4394	0.4351	0.437	0.0691	0.07	0.0679
804	806	8.1862	8.1066	8.1408	1.2866	1.3043	1.2652
806	808	3.0872	3.0872	3.0872	0	0	0
806	810	9.5247	9.4321	9.472	1.497	1.5176	1.472
810	812	7.5512	7.4777	7.5094	1.1868	1.2032	1.167
812	814	0.0018	0.0018	0.0018	0.0002	0.0002	0.0005
814	816	0.027	0.027	0.027	0	0	0
816	818	0.0018	0.0018	0.0018	0.0002	0.0002	0.0005
820	822	0.9096	0.9096	0.9096	0	0	0
820	828	3.744	3.7163	3.7283	0.4514	0.4576	0.4438
822	824	25.611	25.611	25.611	0	0	0
824	826	7.3084	7.3084	7.3084	0	0	0
828	830	1.6117	1.6117	1.6117	0	0	0
828	832	0.308	0.3058	0.3067	0.0371	0.0376	0.0365
832	834	7.4953	7.4398	7.4639	0.9037	0.9161	0.8886
834	836	0.1907	0.1893	0.1899	0.023	0.0233	0.0226
846	852	1.7968	1.7835	1.7893	0.2166	0.2196	0.213
846	848	0.019	0.019	0.019	0	0	0
856	866	0.7407	0.7352	0.7376	0.0893	0.0905	0.0878
856	858	0.1027	0.1019	0.1022	0.0124	0.0126	0.0122
868	870	0.3154	0.313	0.314	0.038	0.0385	0.0378
868	872	0.1027	0.1019	0.1022	0.0124	0.0126	0.0122
858	860	0.495	0.4914	0.493	0.0597	0.0605	0.0587
860	862	1.3348	1.3249	1.3292	0.1609	0.1632	0.1582
862	864	0.1944	0.1929	0.1935	0.0234	0.0238	0.023
818	820	0.1137	0.1128	0.1132	0.0137	0.0139	0.0135
840	842	0.0018	0.0018	0.0018	0.0002	0.0002	0.0002
842	844	0.025	0.025	0.025	0	0	0
844	846	0.0018	0.0018	0.0018	0.0002	0.0002	0.0002
836	838	12.409	12.409	12.409	0	0	0
836	840	13.506	13.405	13.449	1.6284	1.6508	1.6011
852	854	0.8617	0.8617	0.8617	0	0	0
852	856	2.1379	2.122	2.1289	0.2578	0.2613	0.2534
866	868	0.9828	0.9755	0.9786	0.1185	0.1201	0.1165
872	874	1.7745	1.7745	1.7745	0	0	0
848	850	2.6822	2.6561	2.6673	0.4215	0.4274	0.4145

Tabela 47 – Dados de linha *IEEE* 34 barras – Reatância

De	Para	Reatância [Ω]					
		A	B	C	AB	BC	CA
800	802	0.6541	0.6651	0.6603	0.2833	0.2458	0.225
802	804	0.4386	0.446	0.4428	0.19	0.1648	0.1509
804	806	8.1709	8.3092	8.2492	3.5389	3.071	2.8114
806	808	1.6381	1.6381	1.6381	0	0	0
806	810	9.5069	9.6679	9.5981	4.1175	3.5732	3.2711
810	812	7.5371	7.6647	7.6094	3.2644	2.8328	2.5933
812	814	0.0013	0.0014	0.0013	0.0006	0.0005	0.0005
814	816	0.016	0.016	0.016	0	0	0
816	818	0.0013	0.0014	0.0013	0.0006	0.0005	0.0005
820	822	0.4826	0.4826	0.4826	0	0	0
820	828	2.7382	2.7704	2.7564	1.2497	1.104	1.0161
822	824	13.59	13.59	13.59	0	0	0
824	826	3.878	3.878	3.878	0	0	0
828	830	0.8552	0.8552	0.8552	0	0	0
828	832	0.2253	0.2279	0.2268	0.1028	0.0908	0.0836
832	834	5.4817	5.5462	5.5182	2.5018	2.2102	2.0342
834	836	0.1395	0.1411	0.1404	0.0636	0.0562	0.0517
846	852	1.3141	1.3296	1.3229	0.5998	0.5298	0.4877
846	848	0.0408	0.0408	0.0408	0	0	0
856	866	0.5417	0.5481	0.5453	0.2472	0.2184	0.201
856	858	0.0751	0.076	0.0756	0.0343	0.0303	0.0279
868	870	0.2306	0.2333	0.2322	0.1053	0.093	0.0856
868	872	0.0751	0.076	0.076	0.0343	0.0303	0.0279
858	860	0.362	0.3663	0.3645	0.1652	0.146	0.1344
860	862	0.9762	0.9877	0.9827	0.4455	0.3936	0.3623
862	864	0.1421	0.1438	0.1431	0.0649	0.0573	0.0527
818	820	0.0831	0.0841	0.0837	0.0379	0.0335	0.0308
840	842	0.0013	0.0014	0.0013	0.0006	0.0005	0.0005
842	844	0.015	0.015	0.015	0	0	0
844	846	0.0013	0.0014	0.0013	0.0006	0.0005	0.0005
836	838	6.5848	6.5848	6.5848	0	0	0
836	840	9.8773	9.9934	9.943	4.5079	3.9824	3.6654
852	854	0.4572	0.4572	0.4572	0	0	0
852	856	1.5635	1.5819	1.5739	0.7136	0.6304	0.5802
866	868	0.7187	0.7272	0.7235	0.328	0.2898	0.2667
872	874	1.3123	1.3123	1.3123	0	0	0
848	850	2.6771	2.7225	2.7028	1.1595	1.0062	0.9211

ANEXO B – Dados de carga – *IEEE* 34 Barras

Tabela 48 – Dados das cargas – *IEEE* 34 Barras

Barra	Carga ativa [<i>kW</i>]			Carga reativa [<i>kVar</i>]		
	A	B	C	A	B	C
800	0	0	0	0	0	0
802	0	15	12.5	0	7.5	7
804	0	15	12.5	0	7.5	7
806	0	8	0	0	4	0
808	0	8	0	0	4	0
810	15	30	100	90	0	0
812	0	0	0	0	0	0
814	0	60	0	0	60	0
816	0	0	0	0	0	0
818	0	0	0	0	0	0
820	0	2.5	0	0	1	0
822	17	0	0	8.5	0	0
824	84.5	0	0	43.5	0	10
826	67.5	0	0	35	0	0
828	40	22.5	2	0	0	10
830	10	45	40	0	150	0
832	30.5	15	30	20	0	10
834	13.5	45	10	6.5	5	10
836	0	2	0	0	1	0
838	0	2	0	0	1	0
840	0	0	0	0	0	0
842	0	0	0	0	0	0
844	0	0	0	0	0	0
846	3.5	1	3	1.5	0.5	1.5
848	0	0	0	0	0	0
850	150	150	150	75	75	75
852	6.5	8.5	9.5	3	4.5	5
854	0.5	0	0	0.5	0	0
856	10	17.5	61.5	5	9	31
858	4.5	0	0	2.5	0	0
860	139.5	147.5	145	107.5	111	110.5
862	0	24	10	0	11.5	5.5
864	20	31.5	20	16	21.5	16
866	43	35	96	27.5	24	54.5
868	24	16	21	12	8.5	11
870	18	20	9	11.5	12.5	7
872	0	14	0	0	7	0
874	0	14	0	0	7	0