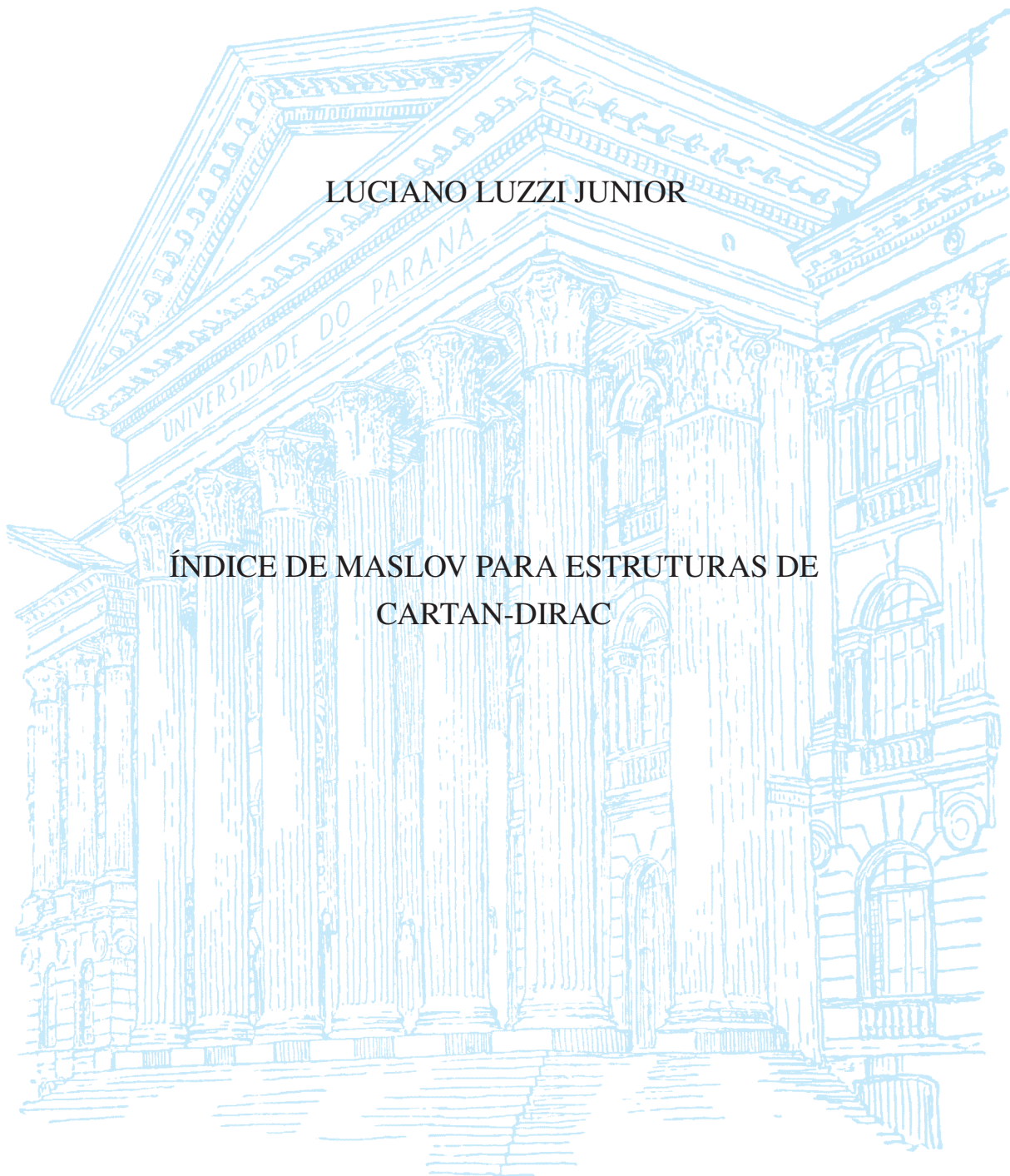


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LUCIANO LUZZI JUNIOR

ÍNDICE DE MASLOV PARA ESTRUTURAS DE
CARTAN-DIRAC



CURITIBA

2020

LUCIANO LUZZI JUNIOR

ÍNDICE DE MASLOV PARA ESTRUTURAS DE
CARTAN-DIRAC

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Olivier Brahic.

Coorientador: Prof. Dr. Hudson do Nascimento Lima

CURITIBA

2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

L979i

Luzzi Junior, Luciano
Índice de Maslov para estruturas de Cartan-Dirac [recurso eletrônico] /
Luciano Luzzi Junior. – Curitiba, 2020.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

Orientador: Olivier Brahic – Coorientador: Hudson do Nascimento Lima

1. Variedades (Matemática). 2. Variedades grassmanianas. 3. Funções
lagrangianas. 4. Maslov, Índice de. 5. Dirac, Equações de. I. Universidade
Federal do Paraná. II. Brahic, Olivier. III. Lima, Hudson do Nascimento. IV.
Título.

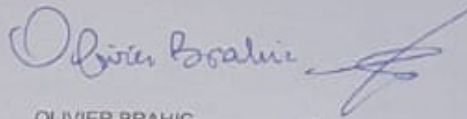
CDD: 516.36

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

TERMO DE APROVAÇÃO

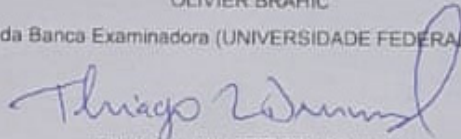
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LUCIANO LUZZI JUNIOR** intitulada: **Índice de Maslov para Estruturas de Cartan-Dirac**, sob orientação do Prof. Dr. OLIVIER BRAHIC, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua Aprovação no rito de defesa. A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 02 de Março de 2020.



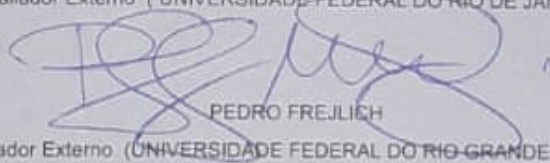
OLIVIER BRAHIC

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



THIAGO LINHARES DRUMMOND

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO)



PEDRO FREILICH

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL)

Agradecimentos

Aqui vão os agradecimentos.
À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

O objetivo desta dissertação é propor uma definição para o Índice de Maslov, onde consideramos o contexto de um espaço vetorial *split*, isto é, um espaço vetorial munido de uma forma bilinear simétrica *split*, ao invés de um espaço vetorial simplético. Para tanto, primeiramente apresentamos alguns resultados fundamentais sobre os espaços vetoriais *split*, com o intuito de generalizar o conceito e propriedades de subespaços isotrópicos maximais. Uma vez apresentada tal definição, somos capazes de introduzir, à chamada, Grassmanniana Lagrangiana relativa à um espaço vetorial *split*, que consiste do conjunto de todos os subespaços isotrópicos maximais, e como feito no caso simplético, mostraremos que tal conjunto possui uma estrutura de variedade homogênea, entre outras propriedades. Por fim, propomos uma definição para o Índice de Maslov para curvas contínuas sobre essa nova Grassmanniana Lagrangiana. E por consequência seremos capazes de propor uma definição para Índice de Maslov relativo a uma estrutura de Cartan-Dirac.

Palavras-chave: Grassmanniana Lagrangiana; Índice de Maslov; Estrutura de Cartan-Dirac.

ABSTRACT

The aim of this dissertation is to propose a definition for the Maslov Index, where we consider the context of a *split* vector space, that is, a vector space provided with a symmetrical bilinear form that is *split*, rather than a symplectic vector space. Therefore, we first present some fundamental results about *split* vector spaces, in order to generalize the concept and properties of maximal isotropic subspaces. Once this definition is presented, we introduce the set of all maximal isotropic subspaces, called Lagrangian Grassmannian, and as done in the symplectic case, we will show that this set has a structure of homogenous manifold, among other properties. Finally, we propose a definition for the Maslov Index for continuous curves on this new Lagrangian Grassmannian. And finally we will be able to propose a definition for Maslov Index relative to a Cartan-Dirac structure.

Keywords: Lagrangian Grassmannian; Maslov Index; Cartan-Dirac structure.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
1 Motivação: Índice de Maslov no Caso Simplético	11
2 Álgebra Linear Generalizada	21
2.1 Formas Bilineares Simétricas	21
2.1.1 Subespaços Isotrópicos	24
2.2 Formas Bilineares Split	27
2.3 Álgebras de Clifford	33
2.3.1 Os Grupos Pin e Spin	35
2.4 A Geometria de $E \oplus E^*$	45
3 Variedades de Grassmann	49
3.1 Ação de Grupos e Variedades Homogêneas	49
3.2 Geometria das Grassmannianas	53
3.2.1 O espaço tangente a Grassmanniana	56
3.2.2 A Grassmanniana como Variedade Homogênea	60
3.2.3 Grassmanniana Lagrangiana	63
3.2.4 As subvariedades $\mathcal{L}^k(L_0)$	73
3.3 A Grassmanniana Lagrangiana de $E \oplus E^*$	76
4 O Índice de Maslov em $E \oplus E^*$	84
4.1 Caso $n = 3$	84
4.2 Caso Geral	94
4.2.1 Forma Canônica em $\text{Spin}(n)$	95
4.2.2 Índice de Maslov via Homologia Relativa	104

5	Índice de Maslov para Estruturas de Cartan-Dirac	113
5.1	Estruturas de Dirac	113
5.1.1	Estruturas de Cartan-Dirac	115
5.2	Índice de Maslov para Estruturas de Cartan-Dirac	116
A	Grupo das Unidades de uma Álgebra	118
B	Espaços de Recobrimento	124
B.1	Resultados Fundamentais	124
B.2	Recobrimento Duplo Universal e o 2-Índice	126
	REFERÊNCIAS	131

INTRODUÇÃO

A célebre Teoria de Morse tem se mostrado de grande interesse e utilidade há décadas. Um dos pontos fundamentais desta teoria é o estudo de pontos conjugados ao longo das geodésicas em uma variedade Riemanniana. Podemos então nos perguntar uma maneira de estender esse maquinário para geodésicas em variedades semi-riemannianas. Uma dessas formas de generalização é dada através do estudo do chamado Índice de Maslov.

Sabemos que o espaço vetorial \mathbb{R}^{2n} possui uma forma simplética canônica, isto é, uma forma bilinear anti-simétrica e não-degenerada. Em coordenadas, podemos expressar tal forma por $\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i$. Dado um subespaço vetorial L , dizemos que o mesmo é isotrópico se $\omega|_{L \times L} = 0$. Dizemos também que L é Lagrangiano quando for isotrópico maximal, isto é, não propriamente contido em qualquer espaço isotrópico. O conjunto de todos os subespaços Lagrangianos é chamado de Grassmanniana Lagrangiana e é denotado por $\Lambda(2n)$.

Grosso modo, o índice de Maslov é um invariante homológico com valores nos inteiros sobre os caminhos contínuos sobre a Grassmanniana Lagrangiana. Uma das propriedades mais interessantes é o fato de o mesmo poder ser estudado do ponto de vista da teoria de transversalidade. De maneira mais precisa, seja L_0 um Lagrangiano e considere $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ o conjunto de todos os Lagrangianos que intersectam L_0 em um subespaço com dimensão maior que 1; então, de certa forma, o Índice de Maslov de uma curva em Λ pode ser visto como o número de interseções desta com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$.

Identificando o espaço \mathbb{R}^n com o seu dual via o produto interno canônico, podemos identificar \mathbb{R}^{2n} com o espaço $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$, e fazendo essa identificação temos que a forma simplética ω é dada pela expressão, $\omega(X + \xi, Y + \eta) = \eta(X) - \xi(Y)$, onde $X + \xi, Y + \eta \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n*}$. Considerando o contexto da Geometria Generalizada e Estruturas de Dirac, observamos que a forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dada por $\langle X + \xi, Y + \eta \rangle = \eta(X) + \xi(Y)$, apresenta um papel fundamental nessas teorias, então é natural se perguntar, se podemos generalizar a teoria sobre Índice de Maslov substituindo ω por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Da mesma forma que definimos subespaços isotrópicos maximais para ω , podemos definir para $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e igualmente podemos introduzir uma Grassmanniana Lagrangiana relativa ao pareamento simétrico. É conhecido que muitas propriedades da Grassmanniana Lagrangiana simplética são generalizadas para a Grassmanniana Lagrangiana simétrica, como o fato de possuir uma estrutura de subvariedade mergulhada da variedade Grassmanniana e apresentar uma estrutura de variedade homogênea, e ao longo dessa dissertação vamos apresentar de forma

detalhada essa generalização. E então utilizaremos a teoria desenvolvida para, no capítulo 4, propor uma definição de Índice de Maslov para esse contexto, e vamos mostrar que este novo índice ainda pode ser estudado de um ponto de vista de transversalidade, de modo similar ao contexto simplético. Por fim no Capítulo 5, vamos introduzir o conceito de Índice de Maslov relacionado à uma estrutura de Cartan-Dirac.

Capítulo 1

MOTIVAÇÃO: ÍNDICE DE MASLOV NO CASO SIMPLÉTICO

As principais referências para a definição e estudo do Índice de Maslov são [8] e [6], para generalidades sobre variedades, grupos de Lie e ação de Grupos indicamos [3].

Grassmanniana Lagrangiana

Considere \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ então obtemos uma forma bilinear ω neste espaço fazendo:

$$\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i.$$

É fácil de verificar que ω é anti-simétrica e não degenerada, uma forma bilinear satisfazendo estas propriedades é chamada de forma simplética e um espaço vetorial real de dimensão finita munido de uma forma simplética é chamado de espaço vetorial simplético, portanto temos que $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ é um espaço vetorial simplético.

Note que o fato de ω ser não degenerada não garante que para todo subespaço $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ vamos ter que $\omega|_{L \times L} : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$ é não degenerada. De fato, fazendo $L = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$ temos que $\omega|_{L \times L} = 0$. Quando um subespaço L satisfaz $\omega|_{L \times L} = 0$ dizemos que o espaço L é isotrópico, e se não existe outro L' isotrópico tal que $L \subsetneq L'$ dizemos que L é isotrópico maximal ou Lagrangiano, temos a seguinte caracterização dos subespaços Lagrangianos.

Lema 1.1. *Seja $L \subset \mathbb{R}^{2n}$. Então são equivalentes:*

- L é isotrópico maximal;
- $L = L^\perp$;
- L é isotrópico e $\dim(L) = n$.

Onde $L^\perp = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \forall w \in L\}$.

Segundo essa caracterização alguns exemplos triviais de espaços lagrangianos são:

Exemplo 1.2. Exemplos de Subespaços Lagrangianos.

- $\mathbb{R}^n \oplus \{0\}$;
- $\{0\} \oplus \mathbb{R}^n$;
- $Gr(T) = \{(v, Tv) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$, para toda aplicação $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ simétrica.

O conjunto de todos os subespaços Lagrangianos é chamado de Grassmanniana Lagrangiana e é denotado por $\Lambda(2n)$, o objetivo dessa seção será estudar as propriedades de Λ . Uma das formas de fazer isso é estudando as propriedades de ω , e uma das propriedades mais interessantes desta forma simplética é que ela se relaciona muito bem com o produto interno canônico de \mathbb{R}^{2n} , denotado aqui por g . Esta relação é dada da seguinte forma: Seja $J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ a aplicação linear dada por $J(x, y) = (-y, x)$, então temos que:

$$g(\cdot, \cdot) = \omega(J\cdot, \cdot). \quad (1.1)$$

Mais do que isto, uma vez que identificamos canonicamente \mathbb{R}^{2n} com \mathbb{C}^n temos que a forma simplética ω também se relaciona de forma interessante com o produto Hermitiano canônico de \mathbb{C}^n , denotado por $g_{\mathbb{C}}$, e esta relação é dada por:

$$g_{\mathbb{C}} = g - i\omega. \quad (1.2)$$

Portanto é claro que para estudar a forma simplética podemos estudar g , $g_{\mathbb{C}}$ e suas relações com ω . Uma forma de fazer isto é analisar os grupos de isomorfismos lineares que preservam estas estruturas, ou seja, o grupo das aplicações ortogonais $O(2n)$ e o grupo das aplicações unitárias $U(n)$, onde vemos $GL(n, \mathbb{C}) \subset GL(2n, \mathbb{R})$ via o morfismo:

$$A + iB \rightarrow \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}.$$

Baseado nestas ideias, podemos também definir o grupo de isomorfismos lineares que preservam ω , em outras palavras definimos:

$$Sp(2n) \doteq \{T \in GL(2n, \mathbb{R}) : \omega(T\cdot, T\cdot) = \omega(\cdot, \cdot)\}.$$

Chamamos este grupo de Grupo Simplético. Observe que as equações (1.1) e (1.2) fornecem um indicativo que existe uma relação entre os grupos simplético, ortogonal e unitário, esta relação é dada pelo seguinte Teorema:

Teorema 1.3. $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{U}(n)$.

Agora vamos mostrar que o Grupo Simplético age na Grassmanniana Lagrangiana e portanto proporciona uma poderosa ferramenta para o estudo do espaço Λ . Para tanto seja $T \in \mathrm{Sp}(2n)$ e $L \in \Lambda$, note que como T preserva a forma simplética $T(L)$ é um subespaço isotrópico de \mathbb{R}^{2n} , mas como T é isomorfismo $\dim(T(L))$ é n , portanto $T(L)$ é um subespaço Lagrangiano assim obtemos uma ação Grupo Simplético na Grassmanniana Lagrangiana dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(2n) \times \Lambda &\rightarrow \Lambda \\ (T, L) &\mapsto T(L). \end{aligned}$$

O Teorema 1.3 nós diz que $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{Sp}(2n)$, portanto temos que a ação de $\mathrm{Sp}(2n)$ em Λ se restringe a uma ação de $\mathrm{U}(n)$ em Λ e esta ação nós permite ver Λ como uma variedade homogênea.

Teorema 1.4. *A ação de $\mathrm{U}(n)$ em Λ é transitiva e o subgrupo estabilizador desta ação é dado por $\mathrm{O}(n)$. Portanto existe uma bijeção entre $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ e Λ , induzindo uma estrutura de variedade suave de dimensão $\frac{1}{2}n(n+1)$ em Λ .*

Demonstração. Para mostrar que a ação é transitiva sejam L_1, L_2 em Λ então podemos tomar bases g -ortonormais $\{b_j\}_{j=1}^n$ e $\{b'_j\}_{j=1}^n$ para L_1 e L_2 respectivamente. Pela equação 1.2 temos que:

$$\begin{aligned} g_{\mathbb{C}}(b_i, b_j) &= g(b_i, b_j) \\ &= \delta_{ij} \\ &= g_{\mathbb{C}}(b'_i, b'_j). \end{aligned}$$

Logo as bases $\{b_j\}_{j=1}^n, \{b'_j\}_{j=1}^n$ podem ser vistas como bases complexas $g_{\mathbb{C}}$ -ortonormais para \mathbb{C}^n , portanto definindo o operador linear $U(b_j) = b'_j$ temos de forma imediata que $U \in \mathrm{U}(n)$. Considerando a decomposição $U = A + iB$, com $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, e definido:

$$T = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},$$

temos que $T \in \mathrm{Sp}(2n)$ e $T(L_1) = L_2$. Provamos assim que $\mathrm{U}(n)$ age de forma transitiva na Grassmanniana Lagrangiana. Agora para calcular o subgrupo estabilizador defina $L_0 = \mathbb{R}^n \oplus \{0\}$, assim:

$$\begin{aligned} \mathrm{Stb}(L_0) &= \{A + iB \in \mathrm{U}(n) : B = 0\} \\ &\cong \mathrm{O}(n). \end{aligned}$$

Onde este isomorfismo é dado por:

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &\rightarrow \mathrm{Stb}(L_0) \\ A &\mapsto A + i0. \end{aligned}$$

Concluindo assim a demonstração. ■

Agora considere um subespaço Lagrangiano $L_0 \subset \mathbb{R}^{2n}$ fixo. Para cada $k = 0, \dots, n$ definimos o seguinte subconjunto de Λ :

$$\Lambda^k(L_0) = \{L \in \Lambda : \dim(L \cap L_0) = k\}.$$

Dois fatos não trivial sobre os conjuntos $\Lambda^k(L_0)$ são que:

Teorema 1.5. *O conjunto $\Lambda^0(L_0)$ é um aberto de Λ difeomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$.*

Teorema 1.6. *Para cada $k = 1, \dots, n$, o subconjunto $\Lambda^k(L_0)$ é uma subvariedade mergulhada de Λ com codimensão $\frac{1}{2}k(k+1)$, e o seu espaço tangente é dado por:*

$$T_L \Lambda^k(L_0) = \{B \in B_{\mathrm{Sym}}(L) : B|_{L \cap L_0} = 0\},$$

para cada $L \in \Lambda^k(L_0)$.

Agora focamos nossas atenções no conjunto $\Lambda^1(L_0)$. Pelo Teorema anterior temos que este é uma subvariedade de Λ com codimensão 1 e a principal propriedade desta subvariedade é que ela possui uma orientação transversal em Λ . Lembrando que se M é uma variedade suave e N é uma subvariedade, uma orientação transversal de N em M é uma escolha de orientação para o espaço quociente $T_p M / T_p N$ que depende continuamente de $p \in N$.

Note que como a codimensão de $\Lambda^1(L_0)$ em Λ é 1, uma orientação transversal é equivalente a um campo vetorial $X : \Lambda^1(L_0) \rightarrow T\Lambda$ tal que $X_L \notin T_L \Lambda^1(L_0)$ para cada $L \in \Lambda^1(L_0)$. De forma grosseira, a existência desse campo nos diz que a subvariedade $\Lambda^1(L_0)$ tem "dois lados" em Λ , e assim nós permite definir o conceito de interseção positiva ou negativa de uma curva com $\Lambda^1(L_0)$, e a existência dessa orientação transversal será crucial para definir o Índice de Maslov.

Observação 1.7. *Considere V um espaço vetorial real de dimensão $2n$ munido de uma forma bilinear simplética ω . Sabemos que existe um isomorfismo linear $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\omega(\cdot, \cdot) = \omega_0(\Phi \cdot, \Phi \cdot)$, onde ω_0 é a forma bilinear canônica de \mathbb{R}^{2n} . Esse isomorfismo induz de forma evidente uma bijeção entre a Grassmanniana Lagrangiana $\Lambda(V, \omega)$ de (V, ω) e a Grassmanniana Lagrangiana de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, portanto toda a discussão realizada nesta seção pode ser estendida/adaptada para $\Lambda(V, \omega)$.*

Índice de Maslov

Nesta seção vamos introduzir o Índice de Maslov (relativo a um subespaço Lagrangiano L_0 fixo) de uma curva na Grassmanniana Lagrangiana Λ de um espaço simplético (V, ω) . Como dito anteriormente este índice é um invariante homológico com valores nos inteiros, portanto o primeiro passo para defini-lo será estudar a homologia de Λ , mais precisamente a homologia relativa à $\Lambda^0(L_0)$. Para tanto começamos estudando o grupo fundamental de Λ , e para isso utilizamos fortemente o fato que a Grassmanniana Lagrangiana é difeomorfa a variedade homogênea $U(n)/O(n)$.

Para tanto considere o seguinte homomorfismo de Lie:

$$d = \det^2 : U(n) \rightarrow S^1,$$

onde $S^1 \subset \mathbb{C}$. Veja que se $A \in O(n) \subset U(n)$ então $\det(A) = \pm 1$, portanto $O(n) \subset \text{Ker}(d)$. Segue que d induz uma aplicação:

$$\bar{d} : U(n)/O(n) \rightarrow S^1, \quad (1.3)$$

dado por $\bar{d}(A \cdot O(n)) = \det^2(A)$. Então temos o seguinte:

Proposição 1.8. *O grupo fundamental da Grassmanniana Lagrangiana $\Lambda \simeq U(n)/O(n)$ é cíclico infinito. Mais explicitamente a aplicação (1.3) induz um isomorfismo:*

$$\bar{d}_* : \pi_1(U(n)/O(n)) \rightarrow \pi_1(S^1).$$

Demonstração. Primeiramente note que o mapa $\bar{d} : U(n)/O(n) \rightarrow S^1$ é uma fibração suave com fibra típica $\text{Ker}(d)/O(n)$. Nosso objetivo vai ser estudar o grupo fundamental de $U(n)/O(n)$ via a sequência exata de homotopia da fibração \bar{d} , para isto precisamos estudar a fibra $\text{Ker}(d)/O(n)$. Para tanto, considere a ação por translação a esquerda de $SU(n)$ em $\text{Ker}(d)/O(n)$, isto é, a ação dada por:

$$\begin{aligned} SU(n) \times \text{Ker}(d)/O(n) &\rightarrow \text{Ker}(d)/O(n) \\ (T, A \cdot O(n)) &\mapsto (TA) \cdot O(n). \end{aligned}$$

Seja $A \in \text{Ker}(d)$, então defina $O \in O(n)$ por:

$$O = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \in O(n),$$

onde $\alpha = \det(A)$, assim $OA^* \in \text{SU}(n)$ e $OA^* \cdot (A \cdot O(n)) = \text{Id} \cdot O(n)$. Portanto essa ação é transitiva. Ainda mais, note que o estabilizador do elemento $\text{Id} \cdot O(n)$ é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Stb}(\text{Id} \cdot O(n)) &= \{T \in \text{SU}(n) : T \cdot O(n) = \text{Id} \cdot O(n)\} \\ &= \text{SU}(n) \cap O(n) \\ &= \text{SO}(n). \end{aligned}$$

Portanto obtemos um difeomorfismo:

$$\text{SU}(n)/\text{SO}(n) \xrightarrow{\cong} \text{Ker}(d)/O(n),$$

dado por $T \cdot \text{SO}(n) \mapsto T \cdot O(n)$, isto é, este difeomorfismo é induzido pela inclusão $\text{SU}(n) \hookrightarrow \text{Ker}(d)$.

Por outro lado, como $\text{SO}(n) \subset \text{SU}(n)$ é um subgrupo fechado temos uma fibração $\text{SU}(n) \rightarrow \text{SU}(n)/\text{SO}(n)$, logo como $\text{SU}(n)$ é simplesmente conexo segue que $\text{SU}(n)/\text{SO}(n)$ é conexo. Tendo em mente que $\text{SO}(n)$ é conexo, e utilizando a sequência exata longa de homotopia associada a fibração $\text{SU}(n) \rightarrow \text{SU}(n)/\text{SO}(n)$, obtemos a sequência exata curta:

$$\pi_1(\text{SU}(n)) \rightarrow \pi_1(\text{SU}(n)/\text{SO}(n)) \rightarrow \pi_0(\text{SO}(n)).$$

Portanto temos que $\pi_1(\text{SU}(n)/\text{SO}(n))$ é trivial, logo $\text{Ker}(d)/O(n) \simeq (\text{SU}(n)/\text{SO}(n))$ é simplesmente conexo.

Assim voltando ao objetivo de estudar a sequência exata longa de homotopia da fibração \bar{d} , obtemos a seguinte sequência exata curta:

$$0 \rightarrow \pi_1(\text{U}(n)/O(n)) \xrightarrow{\bar{d}_*} \pi_1(S^1) \rightarrow 0,$$

obtemos então o desejado. ■

Como o grupo fundamental de Λ é cíclico infinito, portanto abeliano, segue do Teorema de Hurewicz o seguinte corolário:

Corolário 1.9. *O primeiro grupo de homologia singular $H_1(\Lambda)$ de Λ é infinito e cíclico.*

Por fim podemos estudar a homologia relativa, pelo Teorema 1.5 temos que o conjunto $\Lambda^0(L_0)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ portanto obtemos o seguinte:

Corolário 1.10. *Para um subespaço Lagrangiano $L_0 \in \Lambda$, a inclusão:*

$$\mathfrak{q} : (\Lambda, \emptyset) \rightarrow (\Lambda, \Lambda^0(L_0))$$

induz um isomorfismo:

$$\mathfrak{q}_* : H_1(\Lambda) \rightarrow H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0)). \quad (1.4)$$

Em particular, $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$ é cíclico infinito.

Acabamos de provar que, fixado um Lagrangiano $L_0 \in \Lambda$, temos que $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$ é isomorfo a \mathbb{Z} . Então cada curva $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ com extremos em $\Lambda^0(L_0)$, isto é $\ell(a), \ell(b) \in \Lambda^0(L_0)$, define uma classe de homologia relativa em $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$, e portanto se essa classe não for trivial define um isomorfismo com \mathbb{Z} . Vamos mostrar agora que a orientação transversal dada para $\Lambda^1(L_0)$ induz uma escolha canônica de gerador para $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$. Uma vez que esta escolha foi feita, vamos poder associar a cada curva da forma $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ um inteiro, este inteiro será chamado de Índice de Maslov da curva ℓ . Mas antes disso vamos construir explicitamente um gerador para $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$.

Exemplo 1.11. Vamos calcular explicitamente um gerador para $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$. Para tanto, considere a curva:

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \ni t \mapsto A(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & & & \\ & i & & \\ & & \ddots & \\ & & & i \end{pmatrix} \in \mathrm{U}(n),$$

veja que esta curva projeta em uma curva fechada, $\bar{A}(t) = A(t) \cdot \mathrm{O}(n)$, em $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$. Ainda mais, como:

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \ni t \mapsto \det^2(A(t)) = (-1)^{n-1} e^{2it} \quad (1.5)$$

é um gerador do grupo fundamental de $S^1 \in \mathbb{C}$, segue da Proposição 1.8 que a curva \bar{A} define um gerador do grupo fundamental de $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$. Veja que o difeomorfismo $\mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) \simeq \Lambda(2n)$ é dado explicitamente pelo mapa :

$$\begin{aligned} \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) &\rightarrow \Lambda(2n) \\ A \cdot \mathrm{O}(n) &\mapsto A(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n). \end{aligned}$$

Por outro lado, o Lagrangiano $A(t)(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n) \in \Lambda(2n)$ é gerado pelos vetores:

$$\{e_1 \cos(t) + e_{n+1} \sin(t), e_{n+2}, \dots, e_{2n}\},$$

onde $\{e_j\}_{j=1}^{2n}$ denota a base canônica de \mathbb{R}^{2n} . Uma escolha de base simplética $\{b_j\}_{j=1}^{2n}$ de V induz um difeomorfismo de Λ em $\Lambda(2n)$. Então definindo $\ell(t) \in \Lambda$, como sendo o Lagrangiano $A(t)(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n) \in \Lambda(2n)$ via esse difeomorfismo obtemos a curva:

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \ni t \mapsto \ell(t) = \mathrm{span}\{b_1 \cos(t) + b_{n+1} \sin(t), b_{n+2}, \dots, b_{2n}\}. \quad (1.6)$$

Portando da discussão anterior vemos que a curva (1.6) define um gerador para o grupo fundamental de Λ . Pela definição do homomorfismo de Hurewicz a mesma curva induz um gerador para $H_1(\Lambda)$. Por fim, como o isomorfismo 1.4 é dado pela inclusão a curva (1.6) é um gerador para $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$.

Finalmente formalizamos o conceito de interseção de uma curva $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ com a subvariedade Λ .

Definição 1.12. *Seja $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ uma curva de classe C^1 . Dizemos que ℓ intersepta transversalmente o conjunto $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ no instante $t = t_0$ se $\ell(t_0) \in \Lambda^1(L_0)$ e $\ell'(t_0) \notin T_{\ell(t_0)}\Lambda^1(L_0)$. Dizemos que esta interseção transversal é positiva (resp. negativa) se a classe de $\ell'(t_0)$ no quociente $T_{\ell(t_0)}\Lambda/T_{\ell(t_0)}\Lambda^1(L_0)$ define uma base positivamente orientada (resp. negativamente orientada) com relação a orientação transversal de $\Lambda^1(L_0)$ em Λ .*

O próximo Lema mostra como a orientação transversal dada para $\Lambda^1(L_0)$ induz uma escolha canônica de gerador para $H^1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$, mas antes definimos $\Lambda^{\geq 1}(L_0) = \cup_{k=1}^n \Lambda^k(L_0)$.

Lema 1.13. *Seja $L_0 \in \Lambda$ um subespaço Lagrangiano e sejam*

$$\ell_1, \ell_2 : [a, b] \rightarrow \Lambda$$

curvas de classe C^1 com os extremos em $\Lambda^0(L_0)$ e que tem apenas uma interseção com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$, suponha ainda que esta interseção é transversal e positiva. Então temos que ℓ_1 e ℓ_2 são homólogas em $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0))$, e qualquer uma dessas curvas define um gerador para $H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0)) \simeq \mathbb{Z}$.

Agora estamos completamente aptos a definir o Índice de Maslov.

Definição 1.14. *Seja $L_0 \in \Lambda$ um Lagrangiano fixo, definimos um isomorfismo*

$$\mu_{L_0} : H_1(\Lambda, \Lambda^0(L_0)) \rightarrow \mathbb{Z} \tag{1.7}$$

da seguinte forma: tome uma curva ℓ de classe C^1 em Λ com os extremos em $\Lambda^0(L_0)$ tal que ℓ tenha apenas uma interseção com $\Lambda^1(L_0)$, sendo essa interseção transversal e positiva. Defina μ_{L_0} exigindo que a classe de homologia da curva ℓ seja levada no elemento $1 \in \mathbb{Z}$. Pelo Lema 1.13, o isomorfismo (1.7) está bem definido, isto é, independe da escolha de curva ℓ .

Suponha agora que $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ é uma curva arbitrária contínua, com os extremos em $\Lambda^0(L_0)$, então denotamos por $\mu_{L_0}(\ell) \in \mathbb{Z}$ o inteiro correspondente à classe de homologia de ℓ

pelo isomorfismo (1.7). O número $\mu_{L_0}(\ell)$ é chamado de Índice de Maslov da curva ℓ relativo ao Lagrangiano L_0 .

A seguir apresentamos algumas propriedades do Índice de Maslov, que seguem diretamente das propriedades da homologia relativa.

Lema 1.15. *Seja $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ uma curva com extremos em $\Lambda^0(L_0)$, então temos que:*

1. *se $\sigma : [a', b'] \rightarrow [a, b]$ é uma aplicação contínua com $\sigma(a') = a$, $\sigma(b') = b$ então $\mu_{L_0}(\ell \circ \sigma) = \mu_{L_0}(\ell)$;*
2. *se $m : [a', b'] \rightarrow \Lambda$ é uma curva com os extremos em $\Lambda^0(L_0)$ tal que $\ell(b) = m(a')$, então $\mu_{L_0}(\ell \cdot m) = \mu_{L_0}(\ell) + \mu_{L_0}(m)$;*
3. $\mu_{L_0}(\ell^{-1}) = -\mu_{L_0}(\ell)$;
4. *se $\text{Im}(\ell) \subset \Lambda^0(L_0)$ então $\mu_{L_0}(\ell) = 0$;*
5. *se $m : [a, b] \rightarrow \Lambda$ é homotópica a ℓ com pontos livres em $\Lambda^0(L_0)$, então $\mu_{L_0}(\ell) = \mu_{L_0}(m)$;*
6. *existe uma vizinhança \mathcal{U} de ℓ em $C^0([a, b], \Lambda)$ dotado da topologia compacta-aberta tal que, se $m \in \mathcal{U}$ tem extremos em $\Lambda^0(L_0)$, então $\mu_{L_0}(\ell) = \mu_{L_0}(m)$.*

Exemplo 1.16. *O Índice de Maslov no caso que temos apenas interseções transversais.*

Seja $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ uma curva de classe C^1 que tem apenas interseções transversais com o conjunto $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$, então o Índice de Maslov $\mu_{L_0}(\ell)$ pode ser visto como o número de interseções da curva ℓ com o subconjunto $\Lambda^{\geq 1}(L_0) \subset \Lambda$. De fato, vamos mostrar no Lema 1.18 que essas interseções devem ser isoladas portanto finitas, então podemos escrever:

$$\ell = \ell_1 \cdot \dots \cdot \ell_k,$$

onde cada curva ℓ_k tem apenas uma interseção transversal com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$, então pelas Propriedades (2), (3) e (4) temos que $\mu_{L_0}(\ell)$ é o número de interseções positivas menos os número de interseções negativas. No Teorema 1.19 generalizamos esse resultado.

Note que até este momento só exploramos o caso em que temos interseção com a subvariedade $\Lambda^1(L_0)$, então para estudar o caso em que temos interseções com outros estratos do conjunto $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ fazemos a seguinte definição.

Definição 1.17. *Dada uma curva $t \mapsto \ell(t) \in \Lambda$ de classe C^1 dizemos que ℓ tem uma interseção não degenerada com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ no instante $t = t_0$ se $\ell(t_0) \in \Lambda^{\geq 1}(L_0)$ e $\ell'(t_0)$ é uma forma bilinear não degenerada em $L_0 \cap \ell(t_0)$.*

Seja ℓ uma curva de classe C^1 em Λ que tem uma interseção não degenerada com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ em $t = t_0$, então o fato de $\ell'(t_0)|_{L_0 \cap \ell(t_0)}$ ser uma forma não degenerada garante o seguinte resultado:

Lema 1.18. *Se uma curva ℓ em Λ tem uma interseção não degenerada com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ em $t = t_0$, então essa interseção é isolada, isto é, $\ell(t) \in \Lambda^0(L_0)$ para todo t suficientemente próximo de t_0 .*

Como consequência disso temos que se uma curva ℓ tem apenas interseções não degeneradas com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$, então o número de interseções é finito. De fato, suponha que o conjunto de interseções $\{\ell(t_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ fosse infinito, então como $[a, b]$ é compacto $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ teria um ponto limite \bar{t} , e como $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$ é fechado temos que $\ell(\bar{t}) \in \Lambda^{\geq 1}(L_0)$, por hipótese a interseção de ℓ em t_0 é não degenerada, isto é um absurdo pois esta interseção não é isolada. Por fim apresentamos uma generalização do Exemplo 1.16.

Teorema 1.19. *Sejam $L_0 \in \Lambda$ um subespaço Lagrangiano e $\ell : [a, b] \rightarrow \Lambda$ uma curva de classe C^1 com os extremos em $\Lambda^0(L_0)$ que tem apenas interseções não degeneradas com $\Lambda^{\geq 1}(L_0)$. Então, $\ell(t) \in \Lambda^{\geq 1}(L_0)$ apenas uma quantidade finita de vezes e vale a seguinte igualdade:*

$$\mu_{L_0}(\ell) = \sum_{t \in [a, b]} \operatorname{sgn} \left(\ell'(t)|_{(L_0 \cap \ell(t))} \right). \quad (1.8)$$

Note que se $\ell(t) \notin \Lambda^{\geq 1}(L_0)$ então $\ell'(t)|_{L_0 \cap \ell(t)} = 0$, portanto o somatório em (1.8) está bem definido.

Capítulo 2

ÁLGEBRA LINEAR GENERALIZADA

Começamos o Capítulo apresentando a definição e propriedades de espaços vetoriais *split*, para isso nos baseamos em [10] e [7]. Em seguida, introduzimos o conceito de álgebras de Clifford que serão de extrema importância no Capítulo 4. Por fim, nos especializamos no caso onde o espaço vetorial *split* é dado por $E \oplus E^*$, para um espaço vetorial de dimensão finita E qualquer, onde nos baseamos nas notas apresentadas em [5].

2.1 Formas Bilineares Simétricas

Suponha que V é um espaço vetorial real de dimensão finita. Dada uma forma bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a aplicação linear

$$T_B : V \rightarrow V^* \\ v \mapsto B(v, \cdot).$$

A forma bilinear B é dita simétrica se satisfaz $B(v, w) = B(w, v)$ para todos $v, w \in V$, isto é $T_B^* = T_B$. Definimos o núcleo de B como sendo o subespaço

$$\text{Ker}(B) = \{v \in V : B(v, w) = 0, \forall w \in V\},$$

note que $\text{Ker}(B) = \text{Ker}(T_B)$. A forma bilinear B é dita **não degenerada** se $\text{Ker}(B) = 0$, como $n \doteq \dim(V) < \infty$, é fácil ver que B é não degenerada se e somente se T_B é um isomorfismo. O próximo Teorema nós diz que toda forma bilinear simétrica é diagonalizável.

Teorema 2.1. *Sejam V um espaço vetorial real com $\dim(V) = n$ munido de um produto interno g qualquer e $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Então existem p, q inteiros não negativos e uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V tais que $B(e_i, e_j) = g(e_i, e_j) = 0$ e*

$$B(e_i, e_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq p, \\ -1, & p < i \leq p + q + 1, \\ 0, & p + q + 1 < i \leq n, \end{cases}$$

sendo que $n - p - q - 1 = \dim(\ker(B))$. Uma base satisfazendo essas condições é chamada de B -ortonormal.

Sejam V , B e p, q como no Teorema anterior então denominamos q de índice da forma B e p de co-índice da forma B . É possível mostrar que:

$$n_+(B) \doteq p = \sup_{W \subset V} \{\dim(W) : B(w, w) > 0, \forall w \in W\};$$

$$n_-(B) \doteq q = \sup_{W \subset V} \{\dim(W) : B(w, w) < 0, \forall w \in W\}.$$

Ou seja, o índice e o co-índice de B não dependem da escolha de produto interno e nem da escolha de base. Note que se B é uma forma bilinear simétrica não degenerada então $\dim(V) = n_+(B) + n_-(B)$. Assim fazemos a seguinte definição.

Definição 2.2. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e B um forma bilinear não degenerada sobre V . Então definimos a assinatura de B como sendo o par $(n_+(B), n_-(B))$.

Exemplo 2.3. O Espaço $(\mathbb{R}^{n,m}, \mathbf{B}_{n,m})$.

Sejam inteiros positivos n, m e considere a aplicação $B_{n,m} : \mathbb{R}^{n+m} \times \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$B_{n,m}((u, v), (x, y)) = \langle u, x \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle v, y \rangle_{\mathbb{R}^m},$$

onde $u, x \in \mathbb{R}^n$ e $v, y \in \mathbb{R}^m$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^p}$ denota o produto interno canônico do espaço Euclidiano \mathbb{R}^p . É fácil verificar que $B_{n,m}$ é uma forma bilinear simétrica, não degenerada e ainda mais, na base canônica de \mathbb{R}^{n+m} temos que a forma bilinear $B_{n,m}$ é dada por:

$$[B_{n,m}]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{pmatrix},$$

sendo I_n e I_m as matrizes identidades de dimensão n e m respectivamente. Considerando o produto interno $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+m}}$ temos que a base canônica de \mathbb{R}^{n+m} é uma das possíveis bases que provamos a existência no Teorema 2.1 assim temos que a assinatura da forma $B_{n,m}$ é (n, m) . Denotaremos o espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+m} munido da forma bilinear $B_{n,m}$ por $\mathbb{R}^{n,m}$.

Exemplo 2.4. O Espaço $(E \oplus E^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Seja E um espaço vetorial real de dimensão $\dim(E) = n$, então o espaço vetorial $E \oplus E^*$ vem canonicamente munido de uma forma bilinear natural dada pelo pareamento:

$$\langle (X + \xi), (Y + \eta) \rangle = \xi(Y) + \eta(X).$$

Considere E_1, \dots, E_n uma base de E e E_1^*, \dots, E_n^* a sua base dual, então notamos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na base $\{E_1, \dots, E_n, E_1^*, \dots, E_n^*\}$ é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Porém o pareamento $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na base

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{E_1 + E_1^*}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{E_n + E_n^*}{\sqrt{2}}, \frac{E_1 - E_1^*}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{E_n - E_n^*}{\sqrt{2}} \right\},$$

é dada por:

$$[\langle \cdot, \cdot \rangle]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ 0 & -\text{Id}_n \end{pmatrix}.$$

Desta forma temos um isomorfismo linear $T : E \oplus E^* \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ tal que $T^*B_{n,n} = \langle \cdot, \cdot \rangle$, isto é o pull back da forma $B_{n,n}$ pela aplicação T é dado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Tal isomorfismo é obtido enviando a base \mathcal{B} na base canônica de \mathbb{R}^{2n} . Tendo em vista esse isomorfismo concluímos que assinatura de $(E \oplus E^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é dada por (n, n) .

A partir desse momento fixamos um espaço vetorial real V tal que $\dim(V) = n$ e fixamos também uma forma bilinear simétrica e não degenerada B com assinatura (p, q) . Note que se (p, q) é dada por $(n, 0)$ ou $(0, n)$ então $B(v, v) \neq 0$ para todo v em V mas o exemplo a seguir mostra que no caso contrário sempre conseguimos v em V tal que $B(v, v) = 0$.

Exemplo 2.5. Suponha que $p, q > 0$ e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base como no Teorema 2.1, então fazendo $v = e_1 + e_{p+1}$ temos que

$$B(v, v) = B(e_1, e_1) + 2B(e_1, e_{p+1}) + B(e_{p+1}, e_{p+1}) = 1 + 0 + (-1) = 0.$$

Assim temos que $B(v, v) = 0$.

Baseado no exemplo anterior fazemos a seguinte definição.

Definição 2.6. Um vetor $v \in V$ é dito isotrópico se $B(v, v) = 0$.

Para qualquer subespaço $W \subset V$, definimos o subespaço perpendicular de W com relação a B como:

$$W^\perp = \{v \in V : B(v, w) = 0, \forall w \in W\}.$$

Notamos que $T_B(W^\perp) = W^0$, onde W^0 denota o anulador de W , então como $\dim(W) + \dim(W^0) = \dim(V)$ temos que $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$.

2.1.1 Subespaços Isotrópicos

Consideremos ainda um espaço vetorial V de dimensão n e uma forma bilinear simétrica não degenerada B sobre V com assinatura (p, q) .

Definição 2.7. Um subespaço $W \subset V$ é dito isotrópico se $B|_{V \times V} = 0$, isto é $W \subset W^\perp$.

A chamada identidade de polarização, dada por

$$B(v, w) = \frac{1}{2}(B(v + w, v + w) - B(v, v) - B(w, w))$$

mostra que $W \subset V$ é isotrópico se e somente se todos os vetores de W são isotrópicos. Se $W \subset V$ é isotrópico, então

$$\dim(W) \leq \frac{\dim(V)}{2}$$

já que $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V)$. Agora vamos estudar algumas propriedades dos subespaços isotrópicos.

Proposição 2.8. Dado um subespaço isotrópico $W \subset V$, existe $W' \subset V$ isotrópico tal que $V = W^\perp \oplus W'$.

Demonstração. Seja U um subespaço complementar a W^\perp qualquer. Defina a aplicação $T_B|_W : W \rightarrow U^*$ por $w \rightarrow B(w, \cdot)|_U$, é fácil ver que $\ker(T_B|_W) = U^\perp \cap W$, então a identidade

$$U^\perp \cap W = (U \oplus W^\perp)^\perp = 0$$

garante que a aplicação $T_B|_W$ é um isomorfismo. Definimos a aplicação $\phi : U \rightarrow W$ por $\phi = (T_B|_W)^{-1} \circ \psi$, onde $\psi(u) = B(u, \cdot)|_U$ para cada $u \in U$. Assim temos que ϕ satisfaz a seguinte igualdade

$$B(\phi(v), w) = B(v, w), \quad \forall v, w \in U,$$

e portanto temos que

$$B\left(v - \frac{1}{2}\phi(v), w - \frac{1}{2}\phi(w)\right) = \frac{1}{4}B(\phi(v), \phi(w)), \quad \forall v, w \in U.$$

Como $\phi(v), \phi(w) \in W$ e este é isotrópico temos que $B(v - \frac{1}{2}\phi(v), w - \frac{1}{2}\phi(w)) = 0$ para todos $v, w \in U$. Desta forma, o subespaço $W' \doteq \{u - \frac{1}{2}\phi(u) : u \in U\}$ é isotrópico. Por fim notamos que W' é o gráfico do mapa $-\frac{1}{2}\phi : U \rightarrow W \subset W^\perp$ e como U é complementar a W^\perp temos que W' também o é. ■

Definição 2.9. Um subespaço é dito isotrópico maximal se é isotrópico e não está propriamente contido em nenhum outro subespaço isotrópico.

Proposição 2.10. *Um subespaço isotrópico $W \subset V$ é isotrópico maximal se e somente se contém todos os vetores $v \in W^\perp$ tais que v é isotrópico.*

Demonstração. Seja $W \subset V$ isotrópico. Definimos $\widetilde{W} = \{w \in W^\perp : B(w, w) = 0\}$ é fácil de ver que $W \subset \widetilde{W}$. Suponha primeiro que W é isotrópico maximal e suponha por absurdo que existe $w \in W^\perp \setminus W$ tal que $B(w, w) = 0$, isto é $W \subsetneq \widetilde{W}$. Então defina $W' = W \oplus \text{span}\{w\}$, é fácil de ver que W' é isotrópico e contém propriamente W , absurdo pois W é isotrópico maximal. Por outro lado suponha que $W = \widetilde{W}$ e suponha por absurdo que W é isotrópico mas não é maximal então existe uma subespaço $U \subset V$ isotrópico tal que $W \subsetneq U$, assim $U \subset U^\perp \subset W^\perp$ e se como U isotrópico $B(u, u) = 0$ para todo u em U portanto $U \subset \widetilde{W}$ em particular $W \subsetneq \widetilde{W}$, ou seja absurdo. ■

Uma das propriedades mais interessantes dos espaços isotrópicos maximais é que estes tem todos a mesma dimensão, mais precisamente temos a seguinte proposição.

Proposição 2.11. *Sejam $W, W' \subset V$ subespaços isotrópicos maximais, então $\dim(W) = \dim(W')$.*

Demonstração. Primeiramente defina o espaço quociente $U = (W + W')/(W \cap W')$. Como $W \cap W' \subset \text{Ker}(B)$ temos que B induz uma forma bilinear simetria $B|_U : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ em U . Notando que W e W' são isotrópicos maximais $W = \{v \in W^\perp : B(v, v) = 0\}$ e $W' = \{v \in (W')^\perp : B(v, v) = 0\}$, logo se $u \in W^\perp \cap W'$ temos que $u \in W^\perp$ e $B(u, u) = 0$ assim $u \in W$. Em resumo temos as igualdades

$$\begin{aligned} W^\perp \cap W' &= W \cap W' \\ W \cap (W')^\perp &= W \cap W'. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} (W + W') \cap (W + W')^\perp &= (W + W') \cap W^\perp \cap (W')^\perp \\ &= (W + (W' \cap W^\perp)) \cap (W')^\perp \\ &= (W \cap (W')^\perp) + (W' \cap W^\perp) \\ &= (W \cap W'). \end{aligned}$$

Assim o núcleo da restrição de B à $(W + W')$ é dado por $(W + W') \cap (W + W')^\perp = (W + W') = W \cap W'$, consequentemente a forma bilinear $B|_U$ é não degenerada. Considere $\pi : W + W' \rightarrow U$ a projeção quociente então pela definição de $B|_U$ é fácil ver que os subespaços $\pi(W)$ e

$\pi(W')$ são isotrópicos com relação à $B|_U$. Por outro lado uma conta similar à anterior implica que $U = \pi(W) \oplus (\pi(W'))^\perp$. Portanto

$$\begin{aligned}\dim(U) &= \dim(\pi(W)) + \dim(\pi(W'))^\perp \\ &= \dim(\pi(W)) + \dim(U) - \dim(\pi(W)).\end{aligned}$$

Por fim temos que

$$\begin{aligned}\dim(W) &= \dim(\pi(W)) + \dim(W \cap W') \\ &= \dim(\pi(W')) + \dim(W \cap W') \\ &= \dim(W').\end{aligned}$$

■

Baseado na Proposição anterior fazemos a seguinte definição.

Definição 2.12. *O índice de Witt de uma forma bilinear não degenerada é a dimensão de um subespaço isotrópico maximal de V .*

Proposição 2.13. *O índice de Witt é dado por $\text{Witt}(B) = \max\{\dim(L) : L \text{ é isotrópico}\}$.*

Demonstração. Seja $d = \max\{\dim(L) : L \text{ é isotrópico}\}$ e tome $U \subset V$ isotrópico tal que $\dim(U) = d$, notamos que tal U sempre existe pois a dimensão de V é finita. Note que é suficiente provar que um subespaço isotrópico W com dimensão menor que d não pode ser maximal. Para tanto fixamos $W \subset V$ isotrópico tal que $\dim(W) < d$. Como $W^\perp + U \subset (W \cap U)^\perp$ temos que:

$$\begin{aligned}\dim(W^\perp \cap U) &= \dim(W^\perp) + \dim(U) - \dim(W^\perp + U) \\ &\geq \dim(W^\perp) + \dim(U) - \dim((W \cap U)^\perp) \\ &= \dim(V) - \dim(W) + \dim(U) - \dim((W \cap U)^\perp) \\ &= \dim(W \cap U) + \dim(U) - \dim(W) \\ &> \dim(W \cap U).\end{aligned}$$

Então existe $v \in W^\perp \cap U$ não nulo tal que $v \notin W$, como U é isotrópico temos que v é isotrópico, portanto $W \oplus \text{span}\{v\}$ é isotrópico e $W \subsetneq W \oplus \text{span}\{v\}$ como queríamos provar. ■

Corolário 2.14. *Seja $W \subset V$ isotrópico então existe $L \subset V$ isotrópico maximal tal que $W \subset L$.*

O próximo resultado é de grande importância pois relaciona o índice de Witt de B com a sua assinatura.

Proposição 2.15. *O índice de Witt é dado por $\text{Witt}(B) = \min\{n_+(B), n_-(B)\}$.*

Demonstração. Suponha que a assinatura de B é dada por (p, q) e $p \leq q$. O Teorema 2.1 garante a existência de uma base $\{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\}$ de V tal que:

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} \delta_{ij}, & 1 \leq i, j \leq p, \\ -\delta_{ij}, & p < i, j \leq n, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Definindo $W = \text{span}\{e_i + e_{p+i} : 1 \leq i \leq p\}$ é fácil de ver que W é isotrópico e $\dim(W) = p$. Por fim assumamos que exista U isotrópico tal que $\dim(U) > p$, definindo $N = \text{span}\{e_j : p < j \leq n\}$ temos que $N \cap U \neq 0$, já que caso contrário $\dim(N + U) > n$, mais isso é um absurdo por $B(w, w) < 0$ para todo $w \in N$. ■

2.2 Formas Bilineares Split

Agora estudamos um caso especial de formas bilinear simétricas, chamadas formas bilineares Split.

Definição 2.16. *Uma forma bilinear simétrica não degenerada $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Split se a sua assinatura é dada por (n, n) . Um espaço vetorial V munido de uma forma Split é dito um espaço vetorial Split.*

Os Exemplos 2.3 e 2.4 mostram que os espaços $(\mathbb{R}^{n,n}, B_0)$ e $(E \oplus E^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ são espaços vetoriais Split, agora vamos mostrar que um dado um espaço vetorial Split (V, B) e $S \subset V$ um subespaço isotrópico então B define uma forma Split em S^\perp/S .

Exemplo 2.17. *O Espaço Split $(S^\perp/S, \bar{B})$.*

Seja (V, B) um espaço vetorial Split e $S \subset V$ um subespaço isotrópico, primeiramente note que:

$$\text{Ker}(B|_{S^\perp}) = S^\perp \cap S^{\perp\perp} = S \cap S^\perp = S.$$

Então B induz uma forma bilinear simétrica e não degenerada em S^\perp/S dada por:

$$\bar{B}(\pi(v), \pi(w)) = B(v, w),$$

onde $\pi : S^\perp \rightarrow S^\perp/S$ é a projeção canônica ao quociente. Vamos mostrar que \overline{B} é Split, para tanto basta mostra que existe um subespaço $\tilde{L} \subset S^\perp/S$ isotrópico tal que $\dim(\tilde{L}) = \frac{1}{2}\dim(S^\perp/S) = \frac{\dim(V)}{2} - \dim(S)$. De fato, se tal subespaço existe, por uma questão de dimensão, esse será um subespaço isotrópico maximal, e portanto o índice de Witt de \overline{B} será $\frac{1}{2}\dim(S^\perp/S)$. Então, pela Proposição 2.15, a assinatura de \overline{B} dever ser dada por

$$\left(\frac{1}{2}\dim(S^\perp/S), \frac{1}{2}\dim(S^\perp/S) \right).$$

Agora para mostrar a existência de um subespaço $\tilde{L} \subset S^\perp/S$ satisfazendo as condições acima, considere um Lagrangiano $L \subset V$ tal que $S \subset L \subset S^\perp$ (o Corolário 2.14 garante a existência de tal Lagrangiano). Claramente pela definição de \overline{B} temos que $\pi(L)$ é isotrópico em S^\perp/S e ainda mais $\dim(\pi(L)) = \dim(L) - \dim(S) = \frac{\dim(V)}{2} - \dim(S)$. Então fazendo $\tilde{L} = \pi(L)$ temos o desejado.

Pelo resto da seção fixamos (V, B) um espaço vetorial real munido de uma forma bilinear Split. Neste caso temos que o índice de Witt da forma B é dado por $\frac{1}{2}\dim(V)$, neste caso um subespaço isotrópico maximal é chamado de Lagrangiano e pelas Proposições 2.10 e 2.15 temos a seguinte caracterização destes subespaços.

Proposição 2.18. *Seja $L \subset V$ um subespaço vetorial. Então são equivalentes:*

- L é Lagrangiano;
- $L = L^\perp$;
- L é isotrópico e $\dim(L) = n$.

O estudo dos espaços Lagrangianos é um dos pontos principais deste trabalho, denotamos o conjunto de todos os subespaços Lagrangianos de (V, B) por $\mathcal{L}(V, B)$ ou simplesmente $\mathcal{L}(V)$ quando não houver chance de duvidas, e este conjunto é chamado de Grassmanniana Lagrangiana de (V, B) . O resto dessa seção será devoto a estudar algumas propriedades dos subespaços Lagrangianos.

Proposição 2.19. *Dado $L \subset V$ um subespaço Lagrangiano existe $L' \subset V$ Lagrangiano tal que $V = L \oplus L'$. Ainda mais, L' é naturalmente isomorfo a L^* .*

Demonstração. Como $L = L^\perp$ pela Proposição 2.8 sabemos que existe $L' \subset V$ isotrópico tal que $L \oplus L' = V$. Como $\dim(L) = \frac{1}{2}\dim(V)$ segue que $\dim(L') = \frac{1}{2}\dim(V)$ e portanto temos

que L' é Lagrangiano. Resta construir o isomorfismo $L' \simeq L^*$, este é dado explicitamente pela função

$$\begin{aligned} \rho_{L,L'} : L' &\rightarrow L^* \\ v &\mapsto B(v, \cdot)|_L. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para mostrar que $\rho_{L,L'}$ basta mostrar que este é injetor pois $\dim(L') = \dim(L^*)$. Seja $u \in L'$ tal que $B(u, v) = 0$ para todo $v \in L$, mas como $V = L \oplus L'$ e ambos L, L' são isotrópicos temos que $B(u, v) = 0$ para todo $v \in V$ então como B é não degenerada $u = 0$ e temos que $\rho_{L,L'}$ é um isomorfismo. ■

Um par (L_0, L_1) de subespaços Lagrangianos de V , tais que $L_0 \oplus L_1 = V$ é dito uma decomposição Lagrangiana de V , a proposição acima nos diz que dado um Lagrangiano L_0 sempre podemos achar outro Lagrangiano L_1 tal que (L_0, L_1) é uma decomposição Lagrangiana de V .

Agora introduzimos o **grupo de isometrias** de B , isto é, o grupo dado por:

$$O(V, B) = \{T \in GL(V) : B(Tv, Tw) = B(v, w) \forall v, w \in V\}.$$

Notamos que $O(V, B)$ é fechado em $GL(V)$ portanto possui uma estrutura natural de subgrupo de Lie, vamos ver que o grupo $O(V, B)$ tem um papel importante no estudo da Grassmanniana Lagrangiana de (V, B) . Também definimos o grupo especial das isometrias por $SO(V, B)$ como sendo as isometrias com determinante igual à 1.

Exemplo 2.20. O Grupo de Isometrias $O(n, m)$.

Quando o par (V, B) é dado por $(\mathbb{R}^{n,m}, B_{n,m})$ denotamos o grupo de isometrias por $O(n, m)$ e denotamos o grupo especial por $SO(n, m)$.

Notamos que os grupos $O(n, m)$ e $O(m, n)$ são isomorfos como grupos de Lie, de fato tome uma aplicação $T : \mathbb{R}^{n,m} \rightarrow \mathbb{R}^{m,n}$ tal que $B_{m,n}(Tv, Tw) = -B_{n,m}(v, w)$ para cada $v, w \in \mathbb{R}^{n+m}$, então o aplicação

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m} : O(n, m) &\rightarrow O(m, n) \\ A &\mapsto T \circ A \circ T^{-1}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

induz o isomorfismo de Lie desejado. E notamos que esse isomorfismo de Lie se restringe a um isomorfismo $SO(n, m) \simeq SO(m, n)$.

Agora vamos mostrar que dado um Lagrangiano L_0 e um isomorfismo $\tilde{T} : L_0 \rightarrow L_0$ sempre podemos estender esse isomorfismo à uma isometria $T : V \rightarrow V$, isto é, um isomorfismo onde $T \in O(V, B)$.

Lema 2.21. *Considere decomposições Lagrangianas (L_0, L_1) e (L'_0, L'_1) de V então todo isomorfismo $\tilde{T} : L_0 \rightarrow L'_0$ se estende a uma isometria $T : V \rightarrow V$ tal que $T(L_1) = L'_1$.*

Demonstração. Primeiramente considere uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de L_0 . Então fazendo $e'_j = \tilde{T}e_j$, para cada $j = 1, \dots, n$, temos que $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ é uma base de L'_0 . Considerando os isomorfismos naturais $L_1 \simeq L_0^*$ e $L'_1 \simeq (L'_0)^*$ (ver Proposição 2.19), temos que as bases definidas anteriormente se estendem a bases de V da seguinte forma $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n, e_1^*, \dots, e_n^*\}$ e $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n, (e'_1)^*, \dots, (e'_n)^*\}$. Portanto o isomorfismo $T : V \rightarrow V$ que leva a base \mathcal{B} na base \mathcal{B}' estende \tilde{T} e é tal que $T(L_1) = L'_1$, para concluir o teorema resta mostrar que $T \in O(V, B)$ mas para tanto basta notar que

$$[B]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{pmatrix} = [B]_{\mathcal{B}'}. \quad \blacksquare$$

O próximo exemplo mostra que a extensão do Lema anterior não é única.

Exemplo 2.22. *Considere $V = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{2*}$ munido do pareamento natural $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então para qualquer operador anti-simétrico $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2*}$ temos que o isomorfismo:*

$$T = \begin{pmatrix} \text{Id}_2 & 0 \\ C & \text{Id}_2 \end{pmatrix},$$

é uma isometria. E claramente T estende o isomorfismo $\text{Id}_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Corolário 2.23. *Se $L_0 \subset V$ é um subespaço Lagrangiano todo isomorfismo de L_0 se estende a uma isometria $T : V \rightarrow V$.*

O Lema 2.21 nós diz que dados três subespaços Lagrangianos L_0, L, L' tais que $\dim(L_0 \cap L) = 0 = \dim(L_0 \cap L')$ então existe $T \in O(V, B)$ tal que $T(L_0) = L_0$ e $T(L) = L'$, nosso objetivo agora será generalizar esse resultado para o caso que $\dim(L_0 \cap L) = \dim(L_0 \cap L')$. Mas para tanto vamos precisar do seguinte Lema.

Lema 2.24. *Sejam $L_0 \subset V$ um subespaço Lagrangiano, $S \subset L_0$ um subespaço qualquer e considere o espaço vetorial Split $(S^\perp/S, \overline{B})$. Então para cada operador $\overline{T} \in O(S^\perp/S, \overline{B})$ tal que $\overline{T}(\pi(L_0)) = \pi(L_0)$, onde $\pi : S^\perp \rightarrow S^\perp/S$ é a projeção canônica ao quociente, existe um $T \in O(V, B)$ tal que $T(S) = S$, $T(L_0) = L_0$ e o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} S^\perp & \xrightarrow{T|_{S^\perp}} & S^\perp \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ S^\perp/S & \xrightarrow{\overline{T}} & S^\perp/S. \end{array}$$

Demonstração. Tome $R \subset L_0$ subespaço vetorial tal que $L_0 = S \oplus R$ então $L_0^* = S^0 \oplus R^0$ (vale notar que estamos tomando os anuladores dentro de L_0). Seja L_1 um Lagrangiano complementar à L_0 e considere o isomorfismo natural $\rho_{L_0, L_1} : L_1 \rightarrow L_0^*$ assim temos que

$$L_1 = \rho_{L_0, L_1}^{-1}(S^0) \oplus \rho_{L_0, L_1}^{-1}(R^0).$$

Definindo $V_1 = S \oplus \rho_{L_0, L_1}^{-1}(R^0)$ e $V_2 = R \oplus \rho_{L_0, L_1}^{-1}(S^0)$ temos que $V = V_1 \oplus V_2$, agora vamos provar que além disso temos que V_1 e V_2 são B -ortogonais. De fato, tome $v \in V_1$ e $w \in V_2$ então existem $x \in S, y \in R, f \in R^0$ e $h \in S^0$ tais que $v = x + \rho_{L_0, L_1}^{-1}(f)$ e $w = y + \rho_{L_0, L_1}^{-1}(h)$ assim temos que

$$\begin{aligned} B(v, w) &= B(x + \rho_{L_0, L_1}^{-1}(f), y + \rho_{L_0, L_1}^{-1}(h)) \\ &= B|_{L_0}(x, y) + B(\rho_{L_0, L_1}^{-1}(f), y) + B(\rho_{L_0, L_1}^{-1}(h), x) + B|_{L_1}(\rho_{L_0, L_1}^{-1}(f), \rho_{L_0, L_1}^{-1}(h)) \\ &= 0 + h(x) + f(y) + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $V = V_1 \oplus V_2$ é uma decomposição B -ortogonal de V . Como S é isotrópico, é fácil ver que $V_2 \oplus S \subset S^\perp$ e é fácil ver também que a dimensão desses espaços são iguais. Logo temos que $V_2 \oplus S = S^\perp$, portanto a projeção $\pi : S^\perp \rightarrow S^\perp/S$ se restringe a um isomorfismo $\pi|_{V_2} : V_2 \rightarrow S^\perp/S$. Como $\pi|_{V_2}$ é um isomorfismo existe um único isomorfismo linear $T' : V_2 \rightarrow V_2$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} V_2 & \xrightarrow{T'} & V_2 \\ \downarrow \pi|_{V_2} & & \downarrow \pi|_{V_2} \\ S^\perp/S & \xrightarrow{\bar{T}} & S^\perp/S. \end{array}$$

Agora vamos mostra que T' preserva a forma B . Para tanto sejam $v, w \in V_2$ e $\xi, \eta \in S^\perp/S$ tais que $\xi = \pi(v)$ e $\eta = \pi(w)$ então lembrando que $\bar{T} \in O(S^\perp/S, \bar{B})$ vemos que:

$$\begin{aligned} B(T'v, T'w) &= B(((\pi|_{V_2})^{-1} \circ \bar{T})\xi, ((\pi|_{V_2})^{-1} \circ \bar{T})\eta) \\ &= \bar{B}(\bar{T}\xi, \bar{T}\eta) \\ &= \bar{B}(\xi, \eta) \\ &= B(v, w), \end{aligned}$$

como o desejado. Outra propriedade de T' que iremos utilizar é que $T'(R) = R$, para ver isso notamos que $R \subset L_0$ e que \bar{T} preserva L_0 portanto se $v \in R$ temos que $T'(v)$ é único vetor em V_2 tal que

$$\pi(T'(v)) = \bar{T}(\pi(v)) \in \pi(L_0),$$

mas como $\pi(L_0) = \pi(R)$ e $\pi|_{V_2}$ é injetiva, $T'(v) \in R$. Finalmente definimos o mapa $T : V \rightarrow V$ desejado, e este é definido por $T = Id_{V_1} \oplus T'$. Agora vamos provar que T tem as propriedades desejadas, primeiramente como $S \subset V_1$ temos que $T(S) = S$ e como $T'(R) = R$ e $L_0 = R \oplus S$ claramente $T(L_0) = L_0$.

Para provar que $T \in O(V, B)$ suponha $v = v_1 + v_2, w = w_1 + w_2 \in V = V_1 \oplus V_2$ então como T' preserva B e V_1 e V_2 são B -ortogonais temos que

$$\begin{aligned} B(Tv, Tw) &= B(v_1 + T'v_2, w_1 + T'w_2) \\ &= B(v_1, w_1) + B(T'v_2, T'w_2) \\ &= B(v_1, w_1) + B(v_2, w_2) \\ &= B(v, w). \end{aligned}$$

Portanto $T \in O(V, B)$. Resta mostra que $\pi \circ T|_{S^\perp} = \bar{T} \circ \pi$ para isto tome $v \in S^\perp$ então podemos decompor v como $u + w$ onde $u \in S$ e $w \in V_2$ assim:

$$\begin{aligned} \pi(Tv) &= \pi(u + T'w) \\ &= \pi(T'w) \\ &= \bar{T}(\pi(w)) \\ &= \bar{T}(\pi(v)). \end{aligned}$$

Concluindo o Lema. ■

Teorema 2.25. *Sejam $L_0, L, L' \subset V$ subespaços Lagrangianos com $\dim(L_0 \cap L) = \dim(L_0 \cap L')$. Então existe $T \in O(V, B)$ tal que $T(L_0) = L_0$ e $T(L) = L'$.*

Demonstração. Seja $\tilde{A} : L_0 \rightarrow L_0$ um isomorfismo linear tal que $\tilde{A}(L_0 \cap L) = L_0 \cap L$ então pelo Corolário 2.23 podemos estender esse isomorfismo para um mapa $A \in O(V, B)$ tal que $A(L_0) = L_0$ então não há perda de generalidade em assumir que $L_0 \cap L = L_0 \cap L'$.

Defina $S = L_0 \cap L = L_0 \cap L'$ então S é um subespaço isotrópico e temos que $L_0, L, L' \subset S^\perp$. Sejam \bar{B} a forma bilinear Split induzida em S^\perp/S como no Exemplo 2.17 e $\pi : S^\perp \rightarrow S^\perp/S$ a projeção canônica ao quociente. Afirmamos que $(\pi(L_0), \pi(L))$ é uma decomposição Lagrangiana para S^\perp/S . De fato, como visto no Exemplo 2.17 temos que os espaços $\pi(L_0)$ e $\pi(L)$ são Lagrangianos. Ainda mais, seja $\xi \in \pi(L_0) \cap \pi(L)$ então existem $v \in L_0$ e $w \in L$ tal que $\pi(v) = \xi = \pi(w)$, portanto $v - w \in S = L \cap L_0 \subset L$ logo $v \in L_0 \cap L$ e $\xi = 0$, isto é, $L_0 \cap L = 0$. Como $\dim(\pi(L_0) \oplus \pi(L)) = \dim(S^\perp/S)$ temos que $(\pi(L_0), \pi(L))$ é de fato uma decomposição Lagrangiana para S^\perp/S .

Da mesma forma $(\pi(L_0), \pi(L'))$ é uma decomposição Lagrangiana de S^\perp/S então pelo Lema 2.21 temos que existe $\bar{T} \in O(S^\perp/S, \bar{B})$ tal que $\bar{T}(\pi(L_0)) = \pi(L_0)$ e $\bar{T}(\pi(L)) = \pi(L')$ então o Lema 2.24 garante a existência de $T \in O(V, B)$ tal que $T(L_0) = L_0$, $T(S) = S$ e T faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} S^\perp & \xrightarrow{T|_{S^\perp}} & S^\perp \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ S^\perp/S & \xrightarrow{\bar{T}} & S^\perp/S \end{array}$$

Então como $L_0, L, L' \subset S^\perp$ a equação $\bar{T}(\pi(L)) = \pi(L')$ e o diagrama anterior implicam que $\pi(T(L)) = \pi(L')$. Resta prova que $T(L) \subset L'$, para tanto tome $v \in T(L)$ logo $\pi(v) \in \pi(L')$ então existe $w \in L'$ tal que $v - w \in S = L_0 \cap L' \subset L'$ ou seja $v \in L'$ e temos o desejado. ■

2.3 Álgebras de Clifford

O objetivo desta seção é estudar o conceito de *Álgebras de Clifford*, e para tanto nos baseamos fortemente em [2] e [7]. Durante a seção fixamos V um espaço vetorial real de dimensão finita munido de uma forma bilinear não degenerada B .

A *Álgebra de Clifford* $Cl(V, B)$ associada a V e B é uma álgebra associativa com unidade definida da seguinte forma. Seja

$$T(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} V^{\otimes r}$$

a álgebra tensorial de V , e defina I o ideal em $T(V)$ gerado por todos os elementos da forma $v \otimes v - B(v, v)1$ para todo $v \in V$. Então definimos a álgebra de Clifford como o quociente

$$Cl(V, B) = T(V)/I.$$

Exemplo 2.26. $Cl(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ e $Cl(\mathbf{n})$.

Denotamos a álgebra de Clifford de $Cl(\mathbb{R}^{n,m}, B_{n,m})$ por $Cl(n, m)$, e também definimos $Cl(n) = Cl(n, 0)$.

Notamos que a projeção canônica $\pi_B : T(V) \rightarrow Cl(V, B)$ induz um imersão natural $V \hookrightarrow Cl(V, B)$.

Observação 2.27. O produto de elemento φ, ψ da álgebra de Clifford será denotado simplesmente pela concatenação desses vetores, isto é, $\varphi\psi \in Cl(V, B)$.

Por definição notamos que a álgebra de Clifford é gerada pelo espaço vetorial $V \subset Cl(V, B)$ sujeita a relação

$$v^2 = B(v, v)1 \quad (2.3)$$

para todo $v \in V$, desenvolvendo a relação acima para o vetor $v + w$ com $v, w \in V$ obtemos a relação

$$vw + wv = 2B(v, w). \quad (2.4)$$

A relação (2.3) pode ser usada para dar a seguinte caracterização universal da álgebra de Clifford.

Proposição 2.28. *Seja $f : V \rightarrow A$ uma aplicação linear em uma \mathbb{R} -álgebra associativa com unidade, tal que*

$$f(v) \cdot f(v) = B(v, v)1$$

para cada $v \in V$. Então, f se estende unicamente a um homomorfismo de \mathbb{R} -álgebras $\tilde{f} : Cl(V, B) \rightarrow A$. Ainda mais, $Cl(V, B)$ é a única \mathbb{R} -álgebra associativa com essa propriedade.

Agora introduzimos um mapa de particular importância neste teoria, o único automorfismo de $Cl(V, B)$ que estende o mapa $v \rightarrow -v$ em V , denotamos esse mapa por:

$$\alpha : Cl(V, B) \rightarrow Cl(V, B). \quad (2.5)$$

Como $\alpha^2 = \text{Id}$, temos uma decomposição

$$Cl(V, B) = Cl^0(V, B) \oplus Cl^1(V, B)$$

onde $Cl^k(V, B) = \{\varphi \in Cl(V, B) : \alpha(\varphi) = (-1)^k \varphi\}$ são os auto espaços de α . Como α é um homomorfismo, temos que

$$Cl^i(V, B) \cdot Cl^j(V, B) \subset Cl^{i+j}(V, B)$$

onde os índices são tomados módulo 2. Portanto temos que $Cl(V, B)$ é uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada. Notamos que $Cl^0(V, B)$ é uma subálgebra de $Cl(V, B)$ e esta é chamada da parte par de $Cl(V, B)$. O subespaço $Cl^1(V, B)$ é chamado a parte ímpar de $Cl(V, B)$.

Exemplo 2.29. *Se $B \equiv 0$, então $Cl(V, B)$ coincide com a álgebra exterior $\wedge(V)$.*

Vamos ver agora que se B é não nula ainda temos um isomorfismo de $Cl(V, B)$ com a álgebra exterior de V porém um isomorfismo como espaços vetoriais e não como álgebras.

Proposição 2.30. *Existe um isomorfismo canônico entre espaços vetoriais*

$$\mathcal{Q} : \wedge(V) \rightarrow \text{Cl}(V, B),$$

tal que o mapa $\mathcal{Q}|_{\wedge^k(V)}$ é induzido pela aplicação

$$V \times \dots \times V \ni (v_1, \dots, v_k) \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) v_{\sigma(1)} \dots v_{\sigma(k)},$$

onde a soma é feita sobre o grupo simétrico de k elementos.

Corolário 2.31. *Seja e_1, \dots, e_{n+m} uma base $B_{n,m}$ -ortogonal para $\mathbb{R}^{n,m} \subset \text{Cl}(n, m)$. Então $\text{Cl}(n, m)$ é gerada como álgebra por e_1, \dots, e_{n+m} sujeita as relações*

$$e_i e_j + e_j e_i = \begin{cases} 2\delta_{ij}, & \text{se } i \leq n \\ -2\delta_{ij}, & \text{se } i > n. \end{cases}$$

Agora vamos introduzir a aplicação transposição de $\text{Cl}(V, B)$. A álgebra tensorial $T(V)$ tem uma involução natural, definida em elementos simples da seguinte forma

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k \mapsto v_k \otimes \dots \otimes v_1.$$

Esse mapa claramente preserva o ideal I e portanto descende à uma aplicação

$$(\cdot)^t : \text{Cl}(V, B) \rightarrow \text{Cl}(V, B)$$

chamada transposta. Notamos que a transposta é um antiautomorfismo, isto é, $(\varphi\psi)^t = \psi^t \varphi^t$.

2.3.1 Os Grupos Pin e Spin

Consideramos agora o grupo multiplicativo das unidades da álgebra de Clifford, que é definido como

$$\text{Cl}^\times(V, B) = \{\varphi \in \text{Cl}(V, B) : \exists \varphi^{-1} \text{ com } \varphi^{-1} \varphi = \varphi \varphi^{-1} = 1\}.$$

Este grupo contém todos os elementos $v \in V$ com $B(v, v) \neq 0$. Definimos a álgebra de Lie $\mathfrak{cl}(V, B) = (\text{Cl}(V, B), [\cdot, \cdot])$ onde o comutador $[\cdot, \cdot]$ é dado por

$$[x, y] = xy - yx.$$

Então utilizando oa Proposição A.1 temos o seguinte resultado.

Teorema 2.32. *O grupo das unidades $Cl^\times(V, B)$ é um conjunto aberto da álgebra de Lie $cl(V, B)$ e define um grupo de Lie de dimensão 2^n . Ainda mais, existe um isomorfismo de álgebras de Lie entre a álgebra de Lie de $Cl^\times(V, B)$ e $cl(V, B)$.*

O grupo das unidades sempre age como automorfismos da álgebra, isto é, existe um homomorfismo

$$\text{Ad} : Cl^\times(V, B) \rightarrow \text{Aut}(Cl(V, B))$$

chamado representação adjunta, que é dado por

$$\text{Ad}_\varphi(x) = \varphi x \varphi^{-1}.$$

Vamos mostra que para elementos de $v \in V$ tais que $B(v, v) \neq 0$ a representação adjunta é dada de forma simples.

Proposição 2.33. *Seja $v \in V \subset Cl(V, B)$ um elemento com $B(v, v) \neq 0$. Então $\text{Ad}_v(V) = V$. De fato, para todo $w \in V$, temos que*

$$-\text{Ad}_v(w) = w - 2 \frac{B(v, w)}{B(v, v)} v. \quad (2.6)$$

Demonstração. Como $v^{-1} = v/B(v, v)$, temos de (2.4) que

$$\begin{aligned} -B(v, v)\text{Ad}_v(w) &= -B(v, v)v w v^{-1} \\ &= -v w v \\ &= v(v w - 2B(v, w)) \\ &= B(v, v)w - 2B(v, w)v. \end{aligned}$$

■

Corolário 2.34. *Se $v \in V$ é tal que $B(v, v) \neq 0$ então $\text{Ad}_v \in O(V, B)$*

Demonstração. Utilizando a formula (2.6) vemos que para cada $w \in V$ temos que

$$\begin{aligned} B(\text{Ad}_v(w), \text{Ad}_v(w)) &= B\left(w - 2 \frac{B(v, w)}{B(v, v)} v, w - 2 \frac{B(v, w)}{B(v, v)} v\right) \\ &= B(w, w) - 2B\left(w, \frac{B(v, w)}{B(v, v)} v\right) - 2B\left(\frac{B(v, w)}{B(v, v)} v, w\right) \\ &\quad + 4B\left(\frac{B(v, w)}{B(v, v)} v, \frac{B(v, w)}{B(v, v)} v\right) \\ &= B(w, w) - 4 \frac{B(v, w)}{B(v, v)} B(v, w) + 4 \left(\frac{B(v, w)}{B(v, v)}\right)^2 B(v, v) = B(w, w). \end{aligned}$$

Portanto utilizando a identidade de polarização vemos que Ad_v preserva a forma B como queríamos. ■

Note que a equação (2.6) nós diz que o operador Ad_v é uma reflexão à menos de um sinal, então para evitar este sinal considerando a representação adjunta torcida

$$\widetilde{\text{Ad}} : \text{Cl}^\times(V, B) \rightarrow \text{GL}(\text{Cl}(V, B)).$$

definida por

$$\widetilde{\text{Ad}}_\varphi(x) = \alpha(\varphi)x\varphi^{-1},$$

sendo α o operador definido em 2.5. As seguintes propriedades da representação adjunta torcida são imediatas.

Proposição 2.35. *Temos as seguintes propriedades da aplicação $\widetilde{\text{Ad}}$:*

1. $\widetilde{\text{Ad}}_{\varphi_1\varphi_2} = \widetilde{\text{Ad}}_{\varphi_1} \circ \widetilde{\text{Ad}}_{\varphi_2}$ para todos $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Cl}(V, B)$;
2. $\widetilde{\text{Ad}}_v = -\text{Ad}_v$, para cada $v \in V$;
3. $\widetilde{\text{Ad}}_\varphi = \text{Ad}_\varphi$, para cada $\varphi \in \text{Cl}^0(V, B)$;
4. $\widetilde{\text{Ad}}_1 = \text{Id}$.

Corolário 2.36. *A representação adjunta torcida $\widetilde{\text{Ad}} : \text{Cl}^\times(V, B) \rightarrow \text{GL}(\text{Cl}(V, B))$ define um homomorfismo de grupos de Lie.*

Agora caminhamos em direção a definição dos chamados grupos Pin e Spin, que serão de grande importância no decorrer dessa dissertação. Para tanto, introduzimos o chamado grupo de Clifford, e este é dado por:

$$\Gamma(V, B) = \{\varphi \in \text{Cl}^\times(V, B) : \widetilde{\text{Ad}}_\varphi(V) = V\}.$$

Como a aplicação $\varphi \mapsto \widetilde{\text{Ad}}_\varphi$ é contínua e $V \subset \text{Cl}(V, B)$ é um subespaço vetorial, temos que o grupo de Clifford é fechado em $\text{Cl}^\times(V, B)$, portanto tem uma estrutura de subgrupo de Lie. Segue diretamente da definição do grupo de Clifford que a representação adjunta torcida se restringe a um homomorfismo

$$\widetilde{\text{Ad}} : \Gamma(V, B) \rightarrow \text{GL}(V),$$

uma das principais propriedades dessa aplicação é resumida na seguinte Proposição.

Proposição 2.37. *O núcleo do homomorfismo*

$$\widetilde{\text{Ad}} : \Gamma(V, B) \rightarrow \text{GL}(V)$$

é exatamente o grupo \mathbb{R}^\times .

Demonstração. Como B é uma forma bilinear não degenerada em V podemos encontrar uma base v_1, \dots, v_n de V tal que $B(v_i, v_j) = 0 \forall i \neq j$ e $B(v_i, v_i) \neq 0 \forall i$. Suponha que $\varphi \in \text{Cl}^\times(V, B)$ está no núcleo de $\widetilde{\text{Ad}}$, isto é, $\alpha(\varphi)v = v\varphi$ para cada $v \in V$. Escreva $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$ onde φ_0 é um elemento par e φ_1 é um elemento ímpar então

$$\varphi_0v - \varphi_1v = \varphi_0v + \varphi_1v$$

logo temos que

$$\begin{aligned} v\varphi_0 &= \varphi_0v \\ -v\varphi_1 &= \varphi_1v \end{aligned} \tag{2.7}$$

para cada $v \in V$. Os termos φ_0 e φ_1 podem ser escritos como expressões polinomiais em termo de v_1, \dots, v_n . Sucessivamente usando que $v_iv_j = -v_jv_i + 2B(v_i, v_j) = -v_jv_i$ podemos expressar φ_0 como $\varphi_0 = a_0 + v_1a_1$ onde a_0 e a_1 são expressões polinomiais em v_2, \dots, v_n . Note que aplicando α nas equações acima obtemos que

$$\begin{aligned} \alpha(a_0) - v_1\alpha(a_1) &= \alpha(\varphi_0) \\ &= \varphi_0 \\ &= a_0 + v_1a_1, \end{aligned}$$

como $\alpha(a_0)$ e $\alpha(a_1)$ não dependem de v_1 devemos ter que $\alpha(a_0) = a_0$ e $\alpha(a_1) = -a_1$, logo a_0 é par e a_1 é ímpar. Então fazendo $v = v_1$ em (2.7) temos que

$$\begin{aligned} v_1a_0 + v_1^2a_1 &= a_0v_1 + v_1a_1v_1 \\ &= v_1a_0 - v_1^2a_1 \end{aligned}$$

já que a_1 é um elemento ímpar. Portanto $0 = v_1^2a_1 = B(v_1, v_1)a_1$ ou seja $a_1 = 0$. Concluímos que φ_0 não envolve o termo v_1 . Procedendo por indução podemos mostrar que φ_0 não envolve nenhum dos termos v_1, v_2, \dots, v_n e portanto $\varphi_0 = t \cdot 1$ para $t \in \mathbb{R}$.

Um argumento similar mostra que φ_1 não envolve nenhum dos termos v_1, \dots, v_n e levando em consideração que φ_1 é um termo ímpar devemos ter que $\varphi_1 = 0$. Portanto $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 = t1 \in \mathbb{R}$, mas como $\varphi \neq 0$ temos que $\varphi \in \mathbb{R}^\times$. ■

Agora introduzimos o operador norma $N : Cl(V, B) \rightarrow Cl(V, B)$ dado por

$$N(\varphi) = \varphi\alpha(\varphi^t).$$

Note que se $v \in V$, temos:

$$\begin{aligned} N(v) &= v\alpha(v^t) \\ &= v\alpha(v) \\ &= -v^2 = -B(v, v). \end{aligned}$$

A importância da aplicação norma é evidenciada pela seguinte proposição.

Proposição 2.38. *A restrição do operador norma N ao grupo de Clifford $\Gamma(V, B)$ nós dá um homomorfismo de grupos de Lie:*

$$N : \Gamma(V, B) \rightarrow \mathbb{R}^\times.$$

Demonstração. Primeiro vamos provar que $N(\Gamma(V, B)) \subset \mathbb{R}^\times$. Tome $\varphi \in \Gamma(V, B)$ então por definição temos que $\alpha(\varphi)v\varphi^{-1} \in V$ para cada $v \in V$. Aplicando $(\cdot)^t$, que restrita à V é dada pela identidade, temos que

$$(\varphi^t)^{-1}v\alpha(\varphi^t) = \alpha(\varphi)v\varphi^{-1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} v &= \varphi^t\alpha(\varphi)v\varphi^{-1}(\alpha(\varphi^t))^{-1} \\ &= \alpha(\alpha(\varphi^t)\varphi)v(\alpha(\varphi^t)\varphi)^{-1} \\ &= \widetilde{\text{Ad}}_{\alpha(\varphi^t)\varphi}(v). \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha(\varphi^t)\varphi$ está no núcleo de $\widetilde{\text{Ad}}$. Note que como $\varphi \in \Gamma(V, B)$ temos que $\alpha(\varphi^t) \in \Gamma(V, B)$, de fato, dado $v \in V$

$$\begin{aligned} (\alpha(\alpha(\varphi^t))v\alpha(\varphi^t)^{-1})^t &= \alpha(\varphi)^{-1}v\varphi \\ &= \alpha(\varphi^{-1})v\varphi \\ &= \widetilde{\text{Ad}}_{\varphi^{-1}}(v) \in V, \end{aligned}$$

como $(\cdot)^t$ é uma involução temos o desejado. Logo $\alpha(\varphi^t)\varphi \in \Gamma(V, B)$, então pela Proposição 2.37 temos que $\alpha(\varphi^t)\varphi \in \mathbb{R}^\times$. Aplicando α temos que

$$\mathbb{R}^\times \ni \alpha(\alpha(\varphi^t)\varphi) = \varphi^t\alpha(\varphi) = N(\varphi^t).$$

Como a transposição é um antiautomorfismo resta mostra que se $\psi \in \Gamma(V, B)$ então $\psi^t \in \Gamma(V, B)$, de fato, seja $v \in V$

$$\begin{aligned}\psi^t v (\psi^t)^{-1} &= (\psi^{-1} v \psi)^t \\ &= \left(\widetilde{\text{Ad}}_{\psi^{-1}}(v) \right)^t \\ &= \widetilde{\text{Ad}}_{\psi^{-1}}(v) \in V.\end{aligned}$$

Portanto temos o desejado.

Agora observe que se φ e ψ pertencem a $\Gamma(V, B)$, então utilizando que $N(\varphi), N(\psi) \in \mathbb{R}$ vemos que

$$\begin{aligned}N(\varphi\psi) &= \varphi\psi\alpha(\psi^t)\alpha(\varphi^t) \\ &= \varphi N(\psi)\alpha(\varphi^t) \\ &= N(\varphi)N(\psi).\end{aligned}$$

Portanto concluímos que N é um homomorfismo em $\Gamma(V, B)$, para ver N é suave basta notar que é a composição de aplicações lineares α e $(\cdot)^t$ e a multiplicação do grupo. ■

Corolário 2.39. *A transformação linear $\widetilde{\text{Ad}}_\varphi : V \rightarrow V$, para $\varphi \in \Gamma(V, B)$, preserva a forma bilinear B . Portanto temos um homomorfismo de grupos de Lie*

$$\widetilde{\text{Ad}} : \Gamma(V, B) \rightarrow \text{O}(V, B).$$

Demonstração. Para começar notamos, que $N(\alpha(\varphi)) = N(\varphi)$ para cada $\varphi \in \Gamma(V, B)$, de fato:

$$\begin{aligned}N(\alpha(\varphi)) &= \alpha(\varphi)\varphi^t \\ &= \alpha(\varphi\alpha(\varphi^t)) \\ &= \alpha(N(\varphi)) \\ &= N(\varphi),\end{aligned}$$

já que $N(\varphi) \in \mathbb{R}^\times$. Agora definimos o conjunto $V^\times = \{v \in V : B(v, v) \neq 0\}$ notamos que $V^\times \subset \Gamma(V, B)$ e então temos que:

$$\begin{aligned}N\left(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi(v)\right) &= N(\alpha(\varphi)v\varphi^{-1}) \\ &= N(\alpha(\varphi))N(v)N(\varphi)^{-1} \\ &= N(\alpha(\varphi))N(\varphi)^{-1}N(v) \\ &= N(v).\end{aligned}$$

Como $N(w) = B(w, w)$ para $w \in W$, vemos que $\widetilde{\text{Ad}}_\varphi$ preserva todos os vetores v tais que $B(v, v) \neq 0$. Aplicando $\widetilde{\text{Ad}}_{\varphi^{-1}}$ temos que $\widetilde{\text{Ad}}_\varphi(V^\times) = V^\times$, e portanto $\widetilde{\text{Ad}}_\varphi$ deixa invariante o conjunto de vetores tais que $B(v, v) = 0$. ■

Agora estamos aptos a definir os grupos Pin e Spin do par (V, B) .

Definição 2.40. O grupo Pin relacionado ao par (V, B) é definido como:

$$\text{Pin}(V, B) = \{\varphi \in \Gamma(V, B) : N(\varphi) = \pm 1\}.$$

E definimos o grupo Spin como a interseção de Pin com os elementos pares da álgebra de Clifford, i.é,

$$\text{Spin}(V, B) = \text{Pin}(V, B) \cap \text{Cl}^0(V, B).$$

Primeiramente notamos que como N é uma aplicação contínua e $\text{Cl}^0(V, B)$ é um subespaço vetorial temos que os subgrupos $\text{Pin}(V, B)$ e $\text{Spin}(V, B)$ são fechados, portanto são subgrupos de Lie.

Definição 2.41. Os grupos Pin e Spin associados a álgebra de Clifford $\text{Cl}(n, m)$ são denotados por $\text{Pin}(n, m)$ e $\text{Spin}(n, m)$. Também denotamos os grupos Pin e Spin relacionados a álgebra $\text{Cl}(n)$ por $\text{Pin}(n)$ e $\text{Spin}(n)$.

Agora que já definimos os grupos Pin e Spin vamos mostrar algumas propriedades desses grupos. A primeiro objetivo será mostrar que estes grupos definem as seguintes seqüências exatas curtas:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Pin}(V, B) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{O}(V, B) \longrightarrow 1 \\ 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}(V, B) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{SO}(V, B) \longrightarrow 1. \end{aligned}$$

Mas para tanto relembremos o seguinte resultado clássico envolvendo grupos ortogonais.

Teorema 2.42. (Cartan-Dieudonné) Seja B uma forma bilinear não degenerada em um espaço vetorial de dimensão finita V . Então todo elemento $T \in \text{O}(V, B)$ pode ser escrito como o produto de k reflexões, onde $k \leq \dim(V)$.

Teorema 2.43. Seja V um espaço vetorial real com $\dim(V) = n$ e B uma forma bilinear não degenerada sobre V . Então existem sequencias exatas de grupos

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Pin}(V, B) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{O}(V, B) \longrightarrow 1 \\ 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}(V, B) \xrightarrow{\widetilde{\text{Ad}}} \text{SO}(V, B) \longrightarrow 1. \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos primeiro estudar o caso $\text{Pin}(V, B)$. Para sobrejetividade considere $T \in \text{O}(V, B)$, então pelo Teorema de Cartan-Dieudonné e pela Proposição 2.33, existem v_1, \dots, v_k em $\Gamma(V, B)$ tais que

$$\widetilde{\text{Ad}}_{v_1 \dots v_k} = \widetilde{\text{Ad}}_{v_1} \circ \dots \circ \widetilde{\text{Ad}}_{v_k} = T.$$

Mas para cada $j = 1, \dots, k$, existe $t_j \in \mathbb{R}$ tal que $B(t_j v_j, t_j v_j) = \pm 1$, portanto $N(t_1 v_1 \dots t_k v_k) = N(t_1 v_1) \dots N(t_k v_k) = \pm 1$, e assim $t_1 v_1 \dots t_k v_k \in \text{Pin}(V, B)$. Ainda mais,

$$\widetilde{\text{Ad}}_{t_1 v_1 \dots t_k v_k} = \widetilde{\text{Ad}}_{v_1 \dots v_k} = T,$$

e temos que o homomorfismo $\widetilde{\text{Ad}} : \text{Pin}(V, B) \rightarrow \text{O}(V, B)$ é sobrejetor. Por outro lado suponha que $\varphi \in \text{Pin}(V, B)$ está no núcleo de $\widetilde{\text{Ad}}$. Então $\varphi \in \mathbb{R}^\times$ pela Proposição 2.37, e portanto $\varphi^2 = N(\varphi) = \pm 1$, assim concluímos que $\text{Ker}(\widetilde{\text{Ad}}) \subset \mathbb{Z}_2$.

Por fim, vamos demonstrar o resultado para o caso $\text{Spin}(V, B)$, para tanto basta mostrar que $\widetilde{\text{Ad}}(\text{Spin}(V, B)) = \text{SO}(V, B)$. Para ver isso notamos primeiramente que $\det(\widetilde{\text{Ad}}_v) = -1$ para todo $v \in \Gamma(V, B)$, agora pela discussão anterior temos que se $\varphi \in \text{Spin}(V, B)$ então

$$\varphi = v_1 \dots v_k,$$

onde $B(v_j, v_j) = \pm 1$ para cada $j = 1, \dots, k$, mas como φ é um elemento par na álgebra de Clifford, devemos ter que k é um número par e portanto

$$\det(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi) = \det(\widetilde{\text{Ad}}_{v_1}) \cdots \det(\widetilde{\text{Ad}}_{v_k}) = 1,$$

e temos portanto temos que $\widetilde{\text{Ad}}(\text{Spin}(V, B)) \subset \text{SO}(V, B)$. Agora seja $T = \widetilde{\text{Ad}}_{v_1} \circ \dots \circ \widetilde{\text{Ad}}_{v_k} \in \text{SO}(V, B)$ com $v_1 \dots v_k \in \text{Pin}(V, B)$, notamos que como o determinante de T é 1 devemos ter que k é par logo o vetor $v_1 \dots v_k \in \text{Spin}(V, B)$ e assim concluímos a prova. ■

Agora apresentamos dois corolários desse Teorema.

Corolário 2.44. *Os grupos Pin e Spin são dados por:*

$$\text{Pin}(V, B) = \{v_1 \dots v_k \in \Gamma(V, B) : N(v_j) = \pm 1, \text{ onde } j = 1, \dots, k\};$$

$$\text{Spin}(V, B) = \{v_1 \dots v_k \in \Gamma(V, B) : N(v_j) = \pm 1, \text{ onde } j = 1, \dots, k \text{ e } k \text{ é par}\}.$$

Corolário 2.45. *Existe um isomorfismo de grupos de Lie $\Phi_{n,m} : \text{Spin}(n, m) \rightarrow \text{Spin}(m, n)$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(n, m) & \xrightarrow{\Phi_{n,m}} & \text{Spin}(m, n) \\ \downarrow \widetilde{\text{Ad}} & & \downarrow \widetilde{\text{Ad}} \\ \text{SO}(n, m) & \xrightarrow{\Psi_{n,m}} & \text{SO}(m, n) \end{array}$$

onde o mapa $\Psi_{n,m}$ é definido em (2.2) para alguma aplicação anti-ortogonal $T : \mathbb{R}^{n,m} \rightarrow \mathbb{R}^{m,n}$.

Demonstração. O mapa $\Phi_{n,m}$ é dado explicitamente por

$$\Phi_{n,m}(v_1 \dots v_{2k}) = (-1)^k T(v_1) \dots T(v_{2k}),$$

onde $v_1 \dots v_{2k} \in \text{Spin}(n, m)$. Para ver que esse mapa é um isomorfismo de Lie considere $\{e_1, \dots, e_{n+m}\}$ uma base $B_{n,m}$ -ortonormal de $\mathbb{R}^{n,m}$, então temos que E_1, \dots, E_{n+m} é uma base $B_{m,n}$ -ortonormal de $\mathbb{R}^{m,n}$, onde $E_j = T(e_j)$. Assim temos que aplicação $\tilde{\Phi} : \mathcal{C}l^0(n, m) \rightarrow \mathcal{C}l^0(m, n)$ definida nos elementos da base por

$$e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} \mapsto (-1)^k E_{i_1} \dots E_{i_{2k}},$$

é um isomorfismo de álgebras, e a restrição desse isomorfismo ao grupo $\text{Spin}(n, m)$ induz a aplicação $\Phi_{n,m}$. Agora resta mostrar que $\Phi_{n,m}$ satisfaz o diagrama acima, para tanto notamos que a equação (2.6) implica que

$$\Psi_{n,m}(\tilde{\text{Ad}}_v) = \tilde{\text{Ad}}_{T(v)}$$

para cada $v \in \mathbb{R}^{n,m}$ tal que $B_{n,m}(v, v) \neq 0$, então concluímos o desejado. ■

O Grupo $\text{Spin}(n)$

Agora vamos nos aprofundar no caso $\tilde{\text{Ad}} : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ com $n \geq 3$, o nosso objetivo vai ser mostrar que o mapa $\tilde{\text{Ad}}$ é o recobrimento universal duplo de $\text{SO}(n)$, e depois vamos calcular a álgebra de Lie $\mathfrak{spin}(n)$.

Proposição 2.46. *O mapa $\tilde{\text{Ad}} : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ é um 2-recobrimento suave.*

Demonstração. Utilizando o Teorema 2.43 vemos que o mapa $\tilde{\text{Ad}} : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ é um homomorfismo de Lie com núcleo \mathbb{Z}_2 , portanto temos que $\text{Spin}(n)/\mathbb{Z}_2$ é um grupo de Lie e existe um isomorfismo de Lie $F : \text{Spin}(n)/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{SO}(n)$ tal que $\tilde{\text{Ad}} = F \circ \pi$. Assim basta mostrar que a projeção $\pi : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Spin}(n)/\mathbb{Z}_2$ é uma aplicação de recobrimento. Mas note que o grupo \mathbb{Z}_2 age em $\text{Spin}(n)$ por translação a esquerda, então como o grupo \mathbb{Z}_2 é finito o Teorema B.5 garante que a projeção canônica é um 2-recobrimento se ação for livre. Mas de fato, seja $g = -1 \in \mathbb{Z}_2$ e suponha que $g \cdot \varphi = \varphi$, para $\varphi \in \text{Spin}(n)$, logo teríamos que $-\varphi = \varphi$, e portanto $\varphi = 0$, absurdo pois $\varphi \in \text{Spin}(n)$, assim a ação é livre e temos o desejado. ■

Corolário 2.47. *O grupo $\text{Spin}(n)$ é compacto.*

Para provar que o mapa $\widetilde{\text{Ad}}$ é de fato o recobrimento universal de $\text{SO}(n)$, para $n \geq 3$, temos que estudar algumas propriedades topológicas dos grupos $\text{SO}(n)$ e $\text{Spin}(n)$.

Lema 2.48. *Para $n \geq 3$, o Grupo Fundamental de $\text{SO}(n)$ é isomorfo à ao grupo abeliano \mathbb{Z}_2 .*

Demonstração. Ver [8], Exemplo 3.2.37 e também [4], Corolário 4.1. ■

Proposição 2.49. *O grupo $\text{Spin}(n)$ é conexo por caminhos e simplesmente conexo para $n \geq 3$.*

Demonstração. Primeiro vamos provar que existe um caminho contínuo ligando 1 e -1 em $\text{Spin}(n)$, para tanto considere uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n e defina a curva $\gamma : [0, \pi/2] \rightarrow \text{Spin}(n)$, por $\gamma(t) = (\cos(t)e_1 + \text{sen}(t)e_2)(\text{sen}(t)e_2 - \cos(t)e_1)$, então notamos que:

$$\gamma(0) = e_1(-e_1) = -1$$

$$\gamma(\pi/2) = e_2(e_2) = 1.$$

Claramente a curva γ é contínua, e como visto conecta 1 e -1 , assim temos o desejado. Agora vamos provar que o grupo Spin é conexo por caminhos. Para tanto considere $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Spin}(n)$, como o grupo ortogonal $\text{SO}(n)$ é conexo por caminhos, existe um caminho contínuo $\sigma : [0, 1] \rightarrow \text{SO}(n)$ tal que, $\sigma(0) = \widetilde{\text{Ad}}_{\varphi_1}$ e $\sigma(1) = \widetilde{\text{Ad}}_{\varphi_2}$. Agora como $\widetilde{\text{Ad}}$ é uma aplicação de recobrimento suave, a Proposição B.7 garante que existe um levantamento $\tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \text{Spin}(n)$ de σ , tal que $\tilde{\sigma}(0) = \varphi_1$. Ainda mais, como $\widetilde{\text{Ad}}$ é um 2-recobrimento $\tilde{\sigma}(1)$ é dado por $\pm\varphi_2$, mas como provamos que existe um caminho conectando 1 e -1 podemos encontrar um caminho conectando $\tilde{\sigma}(1)$ à φ_2 como o desejado.

Agora para provar que $\text{Spin}(n)$ é simplesmente conexo, recorreremos ao fato que o grupo $\pi_1(\text{SO}(n))$ é isomorfo a \mathbb{Z}_2 para $n \geq 3$, e portanto utilizando o Teorema B.9 notamos que, a cardinalidade do grupo fundamental de $\text{SO}(n)$ é igual a cardinalidade da fibra do recobrimento $\widetilde{\text{Ad}}$, e como ambas são finitas devemos ter que $\text{Spin}(n)$ é simplesmente conexo. ■

Corolário 2.50. *O 2-recobrimento $\widetilde{\text{Ad}} : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ é o recobrimento universal de $\text{SO}(n)$.*

Para estudar a álgebra de Lie do grupo Spin definimos o seguinte subespaço vetorial de $\text{Cl}^0(n)$

$$\overline{\text{Cl}}^2(n) = \text{span}\{e_i e_j : 1 \leq i < j \leq n\},$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n . Uma vez definido esse conjunto temos o seguinte resultado.

Proposição 2.51. *A subálgebra de Lie de $\mathfrak{cl}(n)$ correspondente ao subgrupo $\text{Spin}(n) \subset \text{Cl}^\times(n)$ é dada por:*

$$\mathfrak{spin}(n) = \overline{\text{Cl}}^2(n).$$

Em particular, o espaço $\overline{\text{Cl}}^2(n)$ é fechado para o colchete $[\cdot, \cdot]$.

Demonstração. Por definição a subálgebra de Lie $\mathfrak{spin}(n)$, é dada pelos vetores de $\text{Cl}(n)$ gerados por vetores tangentes à subvariedade $\text{Spin}(n)$ em 1. Fixe uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n e considere para cada par $i < j$ a curva $\gamma(t) = (\cos(t)e_i + \text{sen}(t)e_j)(\text{sen}(t)e_j - \cos(t)e_i)$, pelo Corolário 2.44 temos que essa curva está contida no grupo Spin . Ainda mais, temos

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos(t)e_i + \text{sen}(t)e_j)(\text{sen}(t)e_j - \cos(t)e_i) \\ &= \cos(2t) + \text{sen}(2t)e_i e_j. \end{aligned}$$

Portanto o vetor tangente a curva em $\gamma(0) = 1$ é dado por $2e_i e_j$. Assim, $\mathfrak{spin}(n)$ contém o subespaço vetorial $\overline{\text{Cl}}^2(n)$. Como $\dim(\mathfrak{spin}(n)) = \frac{1}{2}n(n-1) = \dim(\overline{\text{Cl}}^2(n))$, concluímos a prova. ■

2.4 A Geometria de $E \oplus E^*$

Todo espaço vetorial real E com dimensão $n > 0$, induz um espaço vetorial split $(E \oplus E^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ como no exemplo 2.4. Os subespaços Lagrangianos de $E \oplus E^*$ são chamados de Estruturas de Dirac Lineares, o objetivo dessa seção é se especializar no estudo de tais estruturas.

Dado um subespaço vetorial $W \subset E$ relembramos que o aniquilador de W é o subespaço vetorial $W^0 \subset E^*$ dado por $W^0 = \{\xi \in E^* : \xi|_W = 0\}$.

Exemplo 2.52. *Seja $W \subset E$ um subespaço vetorial e defina $L = W \oplus W^0$, então L é um subespaço Lagrangiano de $E \oplus E^*$. De fato, note que $\dim(L) = \dim(W) + \dim(W^0) = \dim(E) = n$ então basta mostrar que é isotrópico mas note que se $X, Y \in W$ e $\xi, \eta \in W^0$ então*

$$\langle X + \xi, Y + \eta \rangle = \xi(Y) + \eta(X) = 0,$$

portanto L defina uma estrutura de Dirac Linear. Exemplos importantes dessa construção são os espaços $W = \{0\}$ e $W = E$ que geram os subespaços Lagrangianos E^ e E .*

O espaço vetorial $E \oplus E^*$ vem munido de duas projeções canônicas nos subespaços E e E^* vamos denotar esses mapas por $p_E : E \oplus E^* \rightarrow E$ e $p_{E^*} : E \oplus E^* \rightarrow E^*$.

Lema 2.53. Para cada subespaço Lagrangiano L de $E \oplus E^*$ temos que:

$$\ker(p_E|_L) = L \cap E^* = (p_E(L))^0.$$

Demonstração. A primeira igualdade é trivial. Denote $W = p_E(L)$ então dado $\xi \in W^0$ e $Y + \eta \in L$ temos que

$$\langle \xi, Y + \eta \rangle = \xi(Y) + \eta(0) = 0,$$

já que $Y \in W$, portanto $W^0 \subset L$ e então $W^0 \subset L \cap E^* = \ker(p_E|_L)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \dim(W^0) &= \dim(E) - \dim(W) \\ &= \dim(L) - \dim(p_E(L)) = \dim(\ker(p_E|_L)), \end{aligned}$$

concluindo a prova. ■

Retomamos o conceito de subespaços Lagrangianos transversais, isto é, suponha que temos L_0 e L_1 subespaços Lagrangianos de $E \oplus E^*$ tais que $L_0 \cap L_1 = 0$ então dizemos que estes subespaços Lagrangianos são transversais e denotamos esse fato por $L_0 \pitchfork L_1$, a Proposição 2.19 garante que fixado um Lagrangiano L sempre existe um outro Lagrangiano transversal a este. No próximo exemplo vamos caracterizar os subespaços Lagrangianos transversais à E^* .

Exemplo 2.54. O objetivo desse exemplo é caracterizar todos os subespaços Lagrangianos de $E \oplus E^*$ que são transversais a E^* , pelo Lema 2.53 isso é equivalente ao mapa $p_E|_L : L \rightarrow E$ ser um isomorfismo linear.

Fixe $L \subset E \oplus E^*$ Lagrangiano tal que $L \pitchfork E^*$, então a inversa do mapa $p_E|_L$ é dado pela aplicação $X \mapsto X + AX$ para uma aplicação linear $A : E \rightarrow E^*$, portanto

$$L = \{X + AX : X \in E\}.$$

Como L é Lagrangiano temos que para $X, Y \in E$ a aplicação A satisfaz

$$0 = \langle X + AX, Y + AY \rangle = AX(Y) + AY(X),$$

ou seja, a aplicação A é anti-simétrica, i.é, $A^* = -A$. Mas relembramos que existe uma bijeção entre as aplicações anti-simétricas $A : E \rightarrow E^*$ e as forma bilineares anti-simétricas em E , dada por:

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 V^* &\longleftrightarrow \{A : E \rightarrow E^* : A^* = -A\} \\ \omega &\longleftrightarrow A : X \mapsto \iota_X \omega \end{aligned}$$

onde ι_X é a contração pelo vetor X . Portanto L é dado pelo gráfico de ω , i.é, $L = \text{Graf}(\omega) \doteq \{X + \iota_X \omega : X \in E\}$, e assim obtemos uma bijeção entre subespaços Lagrangianos transversais à E^* e o espaço vetorial $\bigwedge^2 V^*$.

Podemos generalizar o exemplo anterior da seguinte forma. Seja $L \subset E \oplus E^*$ um subespaço Lagrangiano então pela Proposição 2.4 existe $L' \in \text{Lag}(E \oplus E^*)$ tal que $L \oplus L' = E \oplus E^*$ e ainda mais L' é naturalmente isomorfo à L^* , assim identificando $E \oplus E^* \simeq L \oplus L^*$ e aplicando o Exemplo anterior obtemos uma bijeção entre os subespaços Lagrangianos de $E \oplus E^*$ e o espaço vetorial $\bigwedge^2 L^*$, no próximo capítulo vamos mostrar que essas bijeções induzem uma estrutura de variedade diferenciável na Grassmanniana Lagrangiana de $E \oplus E^*$. Agora vamos apresentar uma importante caracterização dos subespaços Lagrangianos.

Exemplo 2.55. *Seja $W \subset E$ um subespaço qualquer e $\omega \in \bigwedge^2 W^*$, então definimos*

$$L(W, \omega) = \{X + \iota_X \tilde{\omega} + \xi : X \in W, \text{ e } \xi \in W^0\},$$

onde $\tilde{\omega} \in \bigwedge^2 E^*$ é qualquer 2-forma que estende ω . Note que $L(W, \omega)$ está bem definido, i.é., não depende da extensão de ω , de fato seja $\hat{\omega}$ outra extensão de ω então defina $\eta(X) = \iota_X(\tilde{\omega} - \hat{\omega})$ assim dado $X \in W$ e $\xi \in W^0$ temos que

$$X + \iota_X \tilde{\omega} + \xi = (X + \iota_X \hat{\omega}) + (\eta(X) + \xi) \in L(W, \omega).$$

Agora vamos mostrar que $L(W, \omega)$ é um subespaço Lagrangiano, tome $X, Y \in W$ e $\xi, \eta \in W^0$ então

$$\begin{aligned} \langle X + \iota_X \tilde{\omega}, Y + \iota_Y \tilde{\omega} \rangle &= (\iota_X \tilde{\omega})(Y) + (\iota_Y \tilde{\omega})(X) \\ &= \omega(X, Y) + \omega(Y, X) + \xi(X) + \eta(Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto temos que $L(W, \omega) \subset L(W, \omega)^\perp$. Agora tome $X + \xi \in L(W, \omega)^\perp$, como $\eta \in L(W, \omega)$ para cada $\eta \in W^0$ temos que

$$0 = \langle X + \xi, \eta \rangle = \eta(X),$$

assim vemos que $X \in W$. Por outro lado para cada $Y \in W$ temos que $Y + \iota_Y \tilde{\omega} \in L(W, \omega)$ então

$$0 = \langle X + \xi, Y + \iota_Y \tilde{\omega} \rangle = (\xi - \iota_X \tilde{\omega})(Y),$$

e então $\xi - \iota_X \tilde{\omega} \in W^0$, concluímos que $X + \xi \in L(W, \omega)$ o que implica o fato de $L(W, \omega)$ ser um subespaço Lagrangiano.

O exemplo anterior mostra que dado $W \subset E$ e $\omega \in \bigwedge^2 W^*$ podemos construir um subespaço Lagrangiano $L(W, \omega)$, agora vamos mostrar que todo subespaço Lagrangiano é da forma $L(W, \omega)$ para um $W \subset E$ e $\omega \in \bigwedge^2 W^*$.

Teorema 2.56. *Para cada $L \in \text{Lag}(E \oplus E^*)$ existe um único subespaço $W \subset E$ e uma única 2-forma ω , tais que $L = L(W, \omega)$. Ainda mais, o par (W, ω) é definido por $W \doteq p_E(L)$ e $\omega(X, Y) = \xi(Y) = -\eta(X)$, para, $X + \xi, Y + \eta \in L$.*

Demonstração. Fazendo $W = p_E(L)$ temos pelo Lema 2.53 que $\ker(p_E|_L) = W^0 \subset L$, portanto obtemos uma sequência exata de espaços vetoriais

$$0 \rightarrow W^0 \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p_E} W \rightarrow 0,$$

onde $i : W^0 \hookrightarrow L$ é a inclusão. Como toda sequência exata de espaços vetoriais é separável temos que existe uma aplicação linear $q : W \rightarrow L$ tal que $q \circ p_E|_L = Id$ e $L = W^0 \oplus q(W)$. Portanto devemos ter que existe uma aplicação linear $A : W \rightarrow E^*$ tal que $q(X) = X + AX$. Fixando um q dessa forma o subespaço Lagrangiano L pode ser descrito como:

$$L = \{X + AX + \xi : X \in W, \xi \in W^0\}.$$

Como L é Lagrangiano devemos ter que $AX(Y) + AY(X) = 0$ para cada $X, Y \in W$ portanto temos que aplicação $W \ni X \mapsto AX|_W \in W^*$ é anti-simétrica então podemos ver essa aplicação como uma 2-forma $\omega \in \bigwedge^2 W^*$, portanto tomando uma extensão $\tilde{\omega} \in \bigwedge^2 E^*$ de ω temos que para cada vetor $X \in E$ o funcional $AX - \iota_X \tilde{\omega}$ está contido no anulador de W portanto:

$$\begin{aligned} L &= \{X + AX + \xi : X \in W, \xi \in W^0\} \\ &= \{X + \iota_X \tilde{\omega} + \xi : X \in W, \xi \in W^0\}. \end{aligned}$$

Resta mostra que $\omega(X, Y) = \xi(Y) = -\eta(X)$, para $X + \xi, Y + \eta \in L$. De fato, dados $X_1 + \xi_1, X_2 + \xi_2 \in L$ temos que existe $\eta_i \in W^0$ tal que $\xi_i = \iota_{X_i} \tilde{\omega} + \eta_i$ para $i = 1, 2$, portanto $\xi_1(X_2) = \omega(X_1, X_2)$ e da mesma forma $\xi_2(X_1) = \omega(X_2, X_1)$ como o desejado. ■

Capítulo 3

VARIETADES DE GRASSMANN

O objetivo desse Capítulo é estudar as propriedades geométricas da Grassmanniana Lagrangiana associada à um espaço vetorial *split*. Para tanto, começaremos com uma revisão de conceitos básicos de Grupos de Lie e ação de Grupos, essa revisão é baseada em [3]. Em seguida, partiremos para o estudo da geometria da Grassmanniana Lagrangiana, que em boa parte será uma adaptação, para o caso *Split*, dos resultados obtidos em [8].

3.1 Ação de Grupos e Variedades Homogêneas

Uma ferramenta muito útil para estudar variedades suaves são as ações de grupos de Lie, dedicamos essa seção para revisar alguns resultados importantes desta teoria. Se G é um grupo e M é um conjunto, uma ação a esquerda de G em M é uma aplicação $G \times M \rightarrow M$, usualmente escrita como $(g, p) \mapsto g \cdot p$, que satisfaz:

- $g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p$. Para todo $g_1, g_2 \in G$ e $p \in M$,
- $e \cdot p = p$ para cada $p \in M$.

Onde $e \in G$ denota o elemento neutro. Uma ação a direita é definida de maneira análoga. Se G é um grupo de Lie e M uma variedade suave a ação é dita suave se a aplicação $G \times M \rightarrow M$ (ou $M \times G \rightarrow M$) é suave. Neste caso, M é dita um G -espaço. Suponha que temos uma ação $G \times M \rightarrow M$, então dados $g \in G$ obtemos uma aplicação

$$\begin{aligned} \beta_p: G &\rightarrow M \\ g &\mapsto g \cdot p \end{aligned} \tag{3.1}$$

e para cada $g \in G$ obtemos uma bijeção:

$$\begin{aligned} \gamma_g: M &\rightarrow M \\ p &\mapsto g \cdot p. \end{aligned}$$

Note que se a ação dada for suave então para todo $p \in M$ e $g \in G$ temos que β_p é suave e γ_g é um difeomorfismo.

Uma ação a direita sempre pode ser convertida a uma ação a esquerda pelo truque de definir $g \cdot p$ sendo $p \cdot g^{-1}$. Então, qualquer resultado sobre ações a esquerda pode ser traduzido para um resultado sobre ações a direita. Agora apresentamos alguns notações clássicas sobre ações, suponha que $G \times M \rightarrow M$ é uma ação de um grupo G em um conjunto M .

- Para $p \in M$, a órbita de p , denotada por $G \cdot p$, é o conjunto de todas as imagens de p sobre a ação de elementos de G :

$$G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}.$$

- Para cada $p \in M$, o estabilizador de p , denotado por G_p , é o subconjunto de G que fixa p :

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}.$$

A definição de ação garante que G_p é um subgrupo de G .

- A ação é dita transitiva se para cada de pontos $p, q \in M$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot p = q$.
- A ação é dita livre se $g \cdot p = p$ para algum $p \in M$ implica que $g = e$, ou equivalente se todo subgrupo estabilizador é trivial.
- A ação é dita efetiva se $g \cdot p = p$ para todo $p \in M$ implica que $g = e$.

Exemplo 3.1. Se H é um subgrupo de G , denotamos por G/H o conjunto de cosets a esquerda de H em G , isto é

$$G/H = \{gH : g \in G\}.$$

Temos uma ação natural de G em G/H dada por:

$$\begin{aligned} G \times G/H &\rightarrow G/H \\ (g_1, g_2H) &\mapsto (g_1g_2)H; \end{aligned} \tag{3.2}$$

está ação é chamada de ação por traslação a esquerda de G em G/H . Esta ação é sempre transitiva.

Se G age em M e G_p é o estabilizador de $p \in M$, então a aplicação β_p em (3.1) passa ao quociente e define uma bijeção:

$$\overline{\beta}_p : G/G_p \rightarrow G \cdot p \tag{3.3}$$

dada por $\overline{\beta}_p(gG_p) = g \cdot p$.

Definição 3.2. Dada ações de G em M em N , dizemos que o mapa $\phi : M \rightarrow N$ é G -equivariante se:

$$\phi(g \cdot p) = g \cdot \phi(p),$$

para cada $g \in G$ e $p \in M$. Se ϕ é uma bijeção equivariante, dizemos que ϕ é um isomorfismo equivariante.

A bijeção $\overline{\beta}_p$ é um isomorfismo equivariante quando consideramos a ação de G em G/G_p por transição a esquerda e ação de G em $G \cdot p$ obtida pela restrição da ação de G em M .

Deste momento em diante assumimos que G é um grupo de Lie e M é uma variedade suave, e vamos assumir também que G age de forma suave em M . Neste contexto um resultado de grande utilidade é o seguinte:

Teorema 3.3. *Seja G um grupo de Lie e seja H um subgrupo fechado de G . Então o espaço G/H é uma variedade topológica de dimensão igual a $\dim G - \dim H$, e possui uma única estrutura de variedade diferenciável tal que a aplicação quociente $\pi : G \rightarrow G/H$ é uma submersão suave. Ainda mais a ação de G em G/H dada por $g_1 \cdot (g_2 H) = (g_1 g_2) H$ é suave e transitiva.*

Demonstração. Ver [3], Teorema 21.17. ■

Ainda mais, o núcleo da aplicação $d\pi(e)$, onde $e \in G$ é o elemento neutro, é precisamente a álgebra de Lie \mathfrak{h} de H , então o espaço tangente de G/H no ponto eH pode ser identificado com o espaço quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, onde \mathfrak{g} é a álgebra de Lie de G .

Por continuidade, para cada $p \in M$, o estabilizador de p é um subgrupo fechado de G , e utilizando o resultado anterior podemos induzir uma estrutura diferenciável em G/G_p , e pode ser mostrado que o mapa $gG_p \mapsto g \cdot p$ é uma imersão suave, então obtemos o seguinte:

Proposição 3.4. *Se G é um grupo de Lie que age de forma suave na variedade M , então para cada $p \in M$ a órbita $G \cdot p$ tem uma única estrutura de variedade suave tal que o mapa (3.3) é um difeomorfismo, com tal estrutura $G \cdot p$ é uma subvariedade imersa de M , e o espaço tangente de $T_p(G \cdot p)$ coincide com a imagem do mapa*

$$d\beta_p(e) : \mathfrak{g} \rightarrow T_p M,$$

onde β_p é a aplicação definida em (3.1).

Dois resultados de grande utilidade desta Proposição são os seguintes:

Corolário 3.5. *Sejam M, N variedades e G um grupo de Lie que age de forma suave em M e N . Se a ação de G em M é transitiva, então toda aplicação equivariante $\phi : M \rightarrow N$ é suave.*

Corolário 3.6. *Se G age de forma transitiva em M , então para todo $p \in M$ o mapa (3.3) é um difeomorfismo suave de G/G_p em M , em particular o mapa β_p é uma submersão suave.*

No caso que a ação é transitiva, quando identificamos G/G_p com M pelo difeomorfismo (3.3), dizemos que p é o ponto base dessa identificação e que M é uma *variedade homogênea*. Agora estudamos as condições para que a subvariedade $G \cdot p$ de M seja uma subvariedade mergulhada. Para tanto precisamos da seguinte definição:

Definição 3.7. *Seja X um espaço topológico e $S \subset X$ um subconjunto. Dizemos que S é localmente fechado se S é dado pela intersecção de um conjunto aberto e um fechado de X .*

Teorema 3.8. *Seja G um grupo de Lie agindo de forma suave na variedade M . Dado $p \in M$, a órbita $G \cdot p$ é uma subvariedade mergulhada de M se e somente se $G \cdot p$ é localmente fechada em M .*

Concluimos esta seção com alguns resultados relacionados com fibrações.

Definição 3.9. *Dadas variedades F, E e M e uma aplicação suave $\pi : E \rightarrow M$, dizemos que π é uma fibração suave com fibra típica F se para todo $b \in B$ existe um difeomorfismo:*

$$\alpha : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$$

tal que $\pi_1 \circ \alpha = \pi|_{\pi^{-1}(U)}$, onde $U \subset B$ é uma vizinhança aberta de b e $\pi_1 : U \times F \rightarrow U$ é a projeção no primeiro fator. Neste caso dizemos que α é uma trivialização local de π em torno de b .

Teorema 3.10. *Seja G um grupo de Lie e H, K subgrupos fechados de G com $K \subset H$, então o mapa:*

$$p : G/K \rightarrow G/H$$

dado por $p(gK) = gH$ é uma fibração diferenciável com fibra típica H/K .

Demonstração. Ver [8], Teorema 2.1.14. ■

Corolário 3.11. *Sobre as hipóteses do Corolário 3.6, a aplicação $\beta_p : G \rightarrow M$ é uma fibração suave com fibra típica G_p .*

Demonstração. Ver [8], Corolário 2.1.15. ■

Corolário 3.12. *Seja $f : G \rightarrow G'$ um homomorfismo de grupo de Lie e sejam $H \subset G$, $H' \subset G'$ subgrupos fechados tais que $f(H) \subset H'$, considere o mapa:*

$$\bar{f} : G/H \rightarrow G'/H'$$

induzido de f pela passagem ao quociente. Se \bar{f} é sobrejetor, então \bar{f} é uma fibração suave com fibra típica $f^{-1}(H')/H$.

Demonstração. Ver [8], Corolário 2.1.16. ■

3.2 Geometria das Grassmannianas

Nesta seção vamos estudar a geometria das Variedades de Grassmann. Primeiramente sejam n, k inteiros fixos com $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$, a *Grassmanniana de subespaços k -dimensionais de \mathbb{R}^n* é o conjunto de todos os subespaços k -dimensionais de \mathbb{R}^n , e denotamos a Grassmanniana por $G_k(n)$.

Nosso objetivo será descrever um atlas suave para $G_k(n)$. Para tanto considere um par de subespaços de \mathbb{R}^n , W_0 e W_1 onde $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$ e com dimensões k e $n - k$ respectivamente. Para cada operador linear $T : W_0 \rightarrow W_1$, o gráfico de T é dado por:

$$Gr(T) = \{v + T(v) : v \in W_0\}.$$

Note que para cada operador T temos que $Gr(T) \in G_k(n)$, ainda mais temos que $Gr(T) \cap W_1 = \{0\}$. A observação central é que dado um subespaço W transversal a W_1 , existe um operador linear $T : W_0 \rightarrow W_1$ tal que $W = Gr(T)$. Assim definido $G_k^0(n, W_1) = \{W \in G_k(n) : W \cap W_1 = \{0\}\}$, obtemos uma bijeção:

$$\phi_{W_0, W_1} : G_k^0(n, W_1) \rightarrow Lin(W_0, W_1), \tag{3.4}$$

dada por $\phi_{W_0, W_1}(W) = T$ onde $W = Gr(T)$.

De forma mais concreta, se π_0 e π_1 denotam as projeções em W_0 e W_1 com relação a decomposição $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$, então o operador $T = \phi_{W_0, W_1}(W)$ é dado por:

$$T = (\pi_1|_W) \circ (\pi_0|_W)^{-1}.$$

Note que a condição de W ser transversal a W_1 é equivalente a condição de $\pi_0|_W$ ser um isomorfismo entre W e W_0 . Agora vamos mostrar que a coleção de mapas ϕ_{W_0, W_1} , para

decomposições de \mathbb{R}^n com dimensão de W_0 igual a k , define um atlas suave para $G_k(n)$. Para tanto vamos estudar as funções de transição entre estas cartas. Para tanto fazemos a seguinte definição:

Definição 3.13. *Dados subespaços $W_0, W'_0, W_1 \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 = W'_0 \oplus W_1$, definimos a aplicação*

$$\eta = \eta_{W_0, W'_0}^{W_1} : W_0 \rightarrow W'_0,$$

dada pela restrição a W_0 da projeção em W'_0 relativa a decomposição $\mathbb{R}^n = W'_0 \oplus W_1$.

É fácil ver que o mapa $\eta_{W_0, W'_0}^{W_1}$ é um isomorfismo e a sua inversa é dada por $\eta_{W'_0, W_0}^{W_1}$, e ainda mais temos o seguinte diagrama comutativo de isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R}^n/W_1 & \\ q|_{W_0} \nearrow & & \nwarrow q|_{W'_0} \\ W_0 & \xrightarrow{\eta_{W_0, W'_0}^{W_1}} & W'_0 \end{array}$$

onde $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/W_1$ é a aplicação quociente. Assim temos a seguinte proposição.

Proposição 3.14. *Sejam $W_0, W'_0, W_1 \subset \mathbb{R}^n$ subespaços tais que $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 = W'_0 \oplus W_1$ e seja π'_1 a projeção em W_1 relativa a decomposição $\mathbb{R}^n = W'_0 \oplus W_1$. Então temos que:*

$$\phi_{W'_0, W_1} \circ (\phi_{W'_0, W_1})^{-1}(T) = (\pi'_1|_{W_0} + T) \circ \eta_{W'_0, W_0}^{W_1}. \quad (3.5)$$

Demonstração. Primeiramente note que o domínio das aplicações $\phi_{W'_0, W_1}$ e ϕ_{W_0, W_1} coincidem. Seja $T \in \text{Lin}(W_0, W_1)$ e defina $W = \text{Gr}(T)$, então

$$\phi_{W'_0, W_1} \circ (\phi_{W'_0, W_1})^{-1}(T) = \phi_{W'_0, W_1}(W) = (\pi'_1|_W) \circ (\pi'_0|_W)^{-1},$$

onde π'_0 é a projeção em W'_0 relativa a decomposição $\mathbb{R}^n = W'_0 \oplus W_1$. Portanto basta estudar o operador $(\pi'_1|_W) \circ (\pi'_0|_W)^{-1}$, para tanto tome $w \in W'_0$, logo podemos escrever $w = a + b$ onde $a \in W_0$ e $b \in W_1$ assim

$$w = a + T(a) + b - T(a),$$

como $a \in W_0$ temos que $a + T(a) \in W$ e $b - T(a) \in W_1$. Portanto $w + T(a) - b$ é a decomposição de $a + T(a)$ com relação a $\mathbb{R}^n = W'_0 \oplus W_1$, logo $\pi'_0(a + T(a)) = w$. Concluimos então que

$$(\pi'_0|_W)^{-1} = (\text{Id} + T) \circ \pi_0|_{W'_0} = (\text{Id} + T) \circ \eta_{W'_0, W_0}^{W_1},$$

por fim compondo com o mapa $\pi'_1|_{W_0}$ obtemos o desejado. ■

Proposição 3.15. *Sejam $W_0, W_1, W'_1 \subset \mathbb{R}^n$ subespaços onde $\dim(W_0) = k$ e $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1 = W_0 \oplus W'_1$. Então dado $T \in \text{Lin}(W_0, W_1)$ temos que $\text{Gr}(T) \in G_k^0(n, W'_1)$ se e somente se o mapa $\text{Id} + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T$ é inversível. Ainda mais, se $\text{Gr}(T) \in G_k^0(n, W'_1)$ então:*

$$\phi_{W_0, W'_1} \circ (\phi_{W_0, W_1})^{-1}(T) = \eta_{W_1, W'_1}^{W_0} \circ T \circ (\text{Id} + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T)^{-1}. \quad (3.6)$$

Demonstração. Primeiro suponha que $T \in \text{Lin}(W_0, W_1)$ é tal que $\text{Gr}(T) \in G_k^0(n, W'_1)$, i.é., $\text{Gr}(T) \cap W'_1 = \{0\}$. Seja $v \in W_0$ tal que $(\text{Id} + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T)(v) = 0$, se mostrarmos que $v = 0$ temos que a aplicação é injetiva então por uma questão de dimensão o mesmo será isomorfismo. Sejam $a \in W_0$ e $b \in W'_1$ com $T(v) = a + b$ então:

$$(\text{Id} + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T)(v) = v + a.$$

Por hipótese temos então que $v = -a$, aplicando T vemos que: $a + b = T(v) = -T(a)$, o que implica que $-b = a + T(a)$, por consequência $b \in \text{Gr}(T) \cap W'_1$, logo $b = 0$, disto concluímos que $T(v) = a$, isto é, $a \in W_0 \cap W_1 = \{0\}$, finalmente $v = -a = 0$.

Agora suponha que $\text{Id} + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T$ é isomorfismo, tome $w \in \text{Gr}(T) \cap W'_1$, então existe $a \in W_0$ tal que $w = a + T(a)$, logo $(\pi'_0|_{W_1})(T(a)) = -a$. Assim:

$$(\text{Id} + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T)(a) = a + (-a) = 0,$$

consequentemente $a = 0$ e $w = 0$ como queríamos.

Resta mostrar a identidade em (3.6), para tanto tome $T \in \text{Lin}(W_0, W_1)$ tal que $W = \text{Gr}(T) \in G_k^0(n, W_1)$. Então temos que

$$\phi_{W_0, W'_1} \circ (\phi_{W_0, W_1})^{-1}(T) = \phi_{W_0, W'_1}(W) = (\pi'_1|_W) \circ (\pi'_0|_W)^{-1},$$

onde π'_0 e π'_1 são as projeções relacionadas a decomposição $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W'_1$. Basta portanto estudar o mapa $(\pi'_0|_W)^{-1}$, para isto tome $w \in W_0$ então pelo que vimos anteriormente existe $u \in W_0$ tal que:

$$w = (\text{Id} + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T)(u) = u + \pi'_0(T(u)).$$

Mas como $u \in W_0$,

$$\pi'_0(u + T(u)) = u + \pi'_0(T(u)) = w.$$

Assim temos que:

$$(\pi'_0|_W)^{-1}(w) = (\text{Id} + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T)^{-1}(w) + T((\text{Id} + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T)^{-1}(w)),$$

então aplicando o mapa $\pi'_1|_W$ obtemos o desejado. ■

Portanto mostramos o seguinte:

Proposição 3.16. *O conjunto de todas as cartas ϕ_{W_0, W_1} in $G_k(n)$, sobre os conjuntos (W_0, W_1) que formam uma decomposição de \mathbb{R}^n com $\dim(W_0) = k$, é um atlas diferenciável para $G_k(n)$.*

Demonstração. A única passagem não trivial da demonstração é a compatibilidade entre as cartas no caso geral, isto é, entre cartas da forma ϕ_{W_0, W_1} e $\phi_{W'_0, W'_1}$, mas este segue da compatibilidade de ϕ_{W_0, W_1} com $\phi_{W'_0, W_1}$ e $\phi_{W'_0, W_1}$ com $\phi_{W'_0, W'_1}$, utilizando um argumento de transitividade notando que ϕ_{W_0, W_1} e $\phi_{W'_0, W_1}$ tem o mesmo domínio. ■

Finalmente provamos que $G_k(n)$ é uma variedade suave.

Teorema 3.17. *O atlas suave na Proposição 3.16 faz de $G_k(n)$ uma variedade suave de dimensão $k(n - k)$*

Demonstração. Se dimensão de W_0 é k e a dimensão de W_1 é $n - k$ temos que a dimensão de $\text{Lin}(W_0, W_1)$ é $k(n - k)$. Resta mostrar que a topologia induzida pelo atlas é Hausdorff e segundo contável. A propriedade de ser Hausdorff segue do fato que dado dois subespaços k -dimensionais em \mathbb{R}^n sempre conseguimos um complementar comum ao dois, logo dado dois pontos na Grassmanniana conseguimos uma carta que o domínio contem esses pontos. A propriedade de ser segundo contável segue do fato que, se consideramos o conjunto finito de cartas ϕ_{W_0, W_1} onde W_0 e W_1 são gerados por permutações de elementos da base canônica de \mathbb{R}^n obtemos um atlas suave de dimensão finita para $G_k(n)$. ■

3.2.1 O espaço tangente a Grassmanniana

Nesta seção vamos descrever o comportamento do espaço tangente $T_W G_k(n)$ para $W \in G_k(n)$, vamos mostrar que este pode ser identificado naturalmente com o espaço $\text{Lin}(W, \mathbb{R}^n/W)$. Para tanto relembramos a definição do funtor $\text{Lin}(\cdot, \cdot)$.

Definição 3.18. *Dados espaços vetoriais V, W, V_1, W_1 e um par (L, M) de operadores lineares, com $L \in \text{Lin}(V_1, V)$ e $M \in \text{Lin}(W, W_1)$, definimos o novo operador:*

$$\text{Lin}(L, M) : \text{Lin}(V, W) \rightarrow \text{Lin}(V_1, W_1)$$

por:

$$\text{Lin}(L, M)(T) = M \circ T \circ L.$$

Para descrever o comportamento do espaço tangente da Grassmanniana vamos primeiro estudar a diferencial das funções de transições das cartas construídas anteriormente.

Lema 3.19. *Sejam $W, W_1, W'_1 \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\dim(W) = k$. Ainda mais, considere a aplicação $\psi : U \rightarrow \text{Lin}(W, W'_1)$ dada por:*

$$\psi(T) = \eta_{W_1, W'_1}^W \circ T \circ (Id + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T)^{-1},$$

onde U é dado por:

$$U = \{T : W \rightarrow W_1 : (Id + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T) : W \rightarrow W \text{ é não singular}\}.$$

Então temos que, $d\psi(0) = \text{Lin}(Id, \eta_{W_1, W'_1}^W)$.

Demonstração. A ideia da demonstração é escrever o mapa ψ em termos de aplicações que conhecemos a diferencial, para tanto considere os seguintes mapas $\xi : U \rightarrow \text{Lin}(W, W'_1)$ e $\zeta : U \rightarrow GL(W)$ dados por: $\xi(T) = \eta_{W_1, W'_1}^W \circ T$ e $\zeta(T) = (Id + (\pi'_0|_{W_1}) \circ T)^{-1}$. Então temos que:

$$\psi(T) = B(\xi(T), \zeta(T)),$$

onde B é aplicação composição. Dado $V \in \text{Lin}(W, W_1)$ é fácil ver que: $d\xi(0) \cdot V = \eta_{W_1, W'_1}^W \circ V$. Portanto, utilizando o fato que B é bilinear temos que:

$$\begin{aligned} d\psi(0) \cdot V &= B(d\xi(0) \cdot V, \zeta(0)) + B(\xi(0), d\zeta(0) \cdot V) \\ &= B(d\xi(0) \cdot V, Id) + B(0, d\zeta(0) \cdot V) \\ &= \eta_{W_1, W'_1}^W \circ V. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. ■

Proposição 3.20. *Seja $W \in G_k(n)$ e W_1 um complementar de W em \mathbb{R}^n . Denote por $q_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}^n/W$ a restrição da aplicação quociente em \mathbb{R}^n/W . Então temos um isomorfismo:*

$$\text{Lin}(Id, q_1) \circ d\phi_{W, W_1}(W) : T_W G_k(n) \rightarrow \text{Lin}(W, \mathbb{R}^n/W). \quad (3.7)$$

O isomorfismo acima não depende da escolha de complementar W_1 .

Demonstração. Como q_1 é um isomorfismo e ϕ_{W, W_1} é uma carta em torno de W , é claro que (3.7) é um isomorfismo. Resta mostrar que este não depende da escolha do subespaço complementar W_1 .

Para tanto, considere W'_1 outro subespaço complementar a W . Então utilizando que $\phi_{W,W_1}(W) = \phi_{W,W'_1}(W) = 0$ e o Lema anterior temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} & T_W G_k(n) & \\ d\phi_{W,W_1}(W) \swarrow & & \searrow d\phi_{W,W'_1}(W) \\ \text{Lin}(W, W_1) & \xrightarrow{\text{Lin}(Id, \eta_{W_1, W'_1}^W)} & \text{Lin}(W, W'_1). \end{array}$$

Portanto temos que:

$$\text{Lin}(Id, q'_1) \circ d\phi_{W,W'_1}(W) = \text{Lin}(Id, q'_1 \circ \eta_{W_1, W'_1}^W) \circ d\phi_{W,W_1}(W),$$

onde q'_1 denota a restrição a W'_1 da aplicação quociente em \mathbb{R}^n/W . O resultado segue então do fato que o seguinte diagrama também é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\eta_{W_1, W'_1}^W} & W'_1 \\ q_1 \searrow & & \swarrow q'_1 \\ & \mathbb{R}^n/W & \end{array}$$

■

Agora nosso objetivo é utilizar a identificação construída anteriormente para estudar a diferencial de curvas sobre a Grassmanniana. Mas precisamente temos o seguinte resultado:

Proposição 3.21. *Seja $W : I \rightarrow G_k(n)$ a $w : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ curvas definidas em um intervalo I contendo t_0 , ambas suaves em $t = t_0$. Suponha que $w(t) \in W(t)$ para cada $t \in I$. Então temos que:*

$$W'(t_0) \cdot w(t_0) = [w'(t_0)] \in \mathbb{R}^n/W(t_0),$$

onde nos identificamos $W'(t_0)$ com um elemento em $\text{Lin}(W(t_0), \mathbb{R}^n/W(t_0))$, usando o isomorfismo (3.7).

Demonstração. Defina $W_0 = W(t_0)$ e tome W_1 um subespaço complementar de W_0 em \mathbb{R}^n . Defina a aplicação $T = \phi_{W_0, W_1} \circ W$, então para t suficientemente perto de t_0 temos que $W(t) = Gr(T(t))$. Denotando por π_0 a projeção em W_0 relativa a decomposição $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$, e definido $u = \pi_0 \circ w$ temos que:

$$w(t) = u(t) + T(t) \cdot u(t), \tag{3.8}$$

para t suficientemente perto de t_0 . Lembrando que $T = \phi_{W_0, W_1} \circ W$, obtemos que $T'(t_0) = d\phi_{W_0, W_1}(W_0)$, portanto utilizando a isomorfismo em (3.7) vemos que $W'(t_0)$ é identificado com:

$$\text{Lin}(Id, q_1) \circ d\phi_{W_0, W_1}(W_0) \cdot W'(t_0) = q_1 \circ T'(t_0) \in \text{Lin}(W(t_0), \mathbb{R}^n/W(t_0)),$$

onde q_1 é a restrição a W_1 da aplicação quociente a \mathbb{R}^n/W . Resta mostrar que:

$$q_1(T'(t_0) \cdot w(t_0)) = [w'(t_0)].$$

Mas diferenciando (3.8) em $t = t_0$ e notando que $T(t_0) = 0$, $u(t_0) = w(t_0)$, obtemos que:

$$w'(t_0) = u'(t_0) + T'(t_0) \cdot w(t_0),$$

a conclusão segue aplicando o operado q_1 na identidade acima e do fato que $u'(t_0) \in W_0$. ■

Observação 3.22. Dada uma curva $W : I \rightarrow G_k(n)$, $t_0 \in I$ e um vetor $w_0 \in W(t_0)$, sempre conseguimos achar uma curva $t \mapsto w(t)$ definida em uma vizinhança de t_0 tal que $w(t) \in W(t)$ de tal forma que $w(t)$ tenha a mesma regularidade de $W(t)$. De fato, para t próximo de t_0 , escrevemos $W(t) = Gr(T(t))$ utilizando uma carta local, como na proposição acima, e então definimos w como $w(t) = w_0 + T(t) \cdot w_0$.

Agora utilizamos essa ferramenta desenvolvida para calcular a diferencial de uma carta ϕ_{W_0, W_1} em um ponto de seu domínio utilizando a identificação $T_W G_k(n) \simeq \text{Lin}(W, \mathbb{R}^n/W)$.

Lema 3.23. Considere uma decomposição $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$, com $\dim(W_0) = k$, e seja $W \in G_k^0(n, W_1)$. Então a diferencial da carta ϕ_{W_0, W_1} em W é o operador:

$$\text{Lin}(\eta_{W_0, W}^{W_1}, q_1^{-1}) : \text{Lin}(W, \mathbb{R}^n/W) \rightarrow \text{Lin}(W_0, W_1),$$

isto é:

$$d\phi_{W_0, W_1}(W) \cdot Z = q_1^{-1} \circ Z \circ \eta_{W_0, W}^{W_1}, \quad Z \in T_W G_k(n) \simeq \text{Lin}(W, \mathbb{R}^n/W).$$

Onde q_1 é a restrição da aplicação quociente de \mathbb{R}^n/W a W_1 .

Demonstração. Seja $Z \in T_W G_k(n) \simeq \text{Lin}(W, \mathbb{R}^n/W)$, então tome $\Gamma : I \rightarrow G_k(n)$ uma curva suave tal que $\Gamma(0) = W$ e $\Gamma'(0) = Z$ tal que $im\Gamma$ está contida no domínio de ϕ_{W_0, W_1} . Escreva $T(t) = \phi_{W_0, W_1}(\Gamma(t))$, portanto $\Gamma(t) = Gr(T(t))$ e $T'(0) = d\phi_{W_0, W_1}(W) \cdot Z$.

Seja $w \in W = Gr(T(0))$, então existe $w_0 \in W_0$ com $w = w_0 + T(0) \cdot w_0$. Definindo a curva $\gamma(t) = w_0 + T(t) \cdot w_0$ em \mathbb{R}^n temos que $\gamma(t) \in \Gamma(t)$ para todo t . E pela proposição anterior:

$$Z \cdot w = \Gamma(0) \cdot w = [\gamma'(0)] = [T'(0) \cdot w_0].$$

Observando que $w_0 = \eta_{W, W_0}^{W_1}(w)$ concluímos que:

$$Z = q_1 \circ T'(0) \circ \eta_{W, W_0}^{W_1}.$$

Assim temos o desejado. ■

3.2.2 A Grassmanniana como Variedade Homogênea

Nessa seção vamos mostrar que existe uma ação natural do grupo $GL(n, \mathbb{R})$ em $G_k(n)$. Ainda mais, vamos mostrar que esta ação é suave e a sua restrição a $SO(n)$ é transitiva, assim podemos provar que a variedade de Grassmann pode ser vista como uma variedade homogênea.

Cada isomorfismo linear $A \in GL(n, \mathbb{R})$ define uma bijeção de $G_k(n)$ que associa a cada subespaço $W \in G_k(n)$ a sua imagem $A(W)$, essa bijeção será denotada por A . Portanto temos uma ação de $GL(n, \mathbb{R})$ em $G_k(n)$ chamada de *ação natural* de $GL(n, \mathbb{R})$ em $G_k(n)$.

Vamos começar provando que esta ação é suave:

Proposição 3.24. *A ação natural $GL(n, \mathbb{R}) \times G_k(n) \rightarrow G_k(n)$ é suave.*

Demonstração. Para ver que esta é suave calculamos a aplicação em termos de cartas locais. Sejam $A \in GL(n, \mathbb{R})$ e $W_0 \in G_k(n)$ fixos. Então tome W_1 um subespaço complementar a W_0 e $A(W_0)$, desta forma o domínio da carta ϕ_{W_0, W_1} contém W_0 e $A(W_0)$. Vamos calculamos $\phi_{W_0, W_1}(B(W))$ para B em uma viz. de A e W em uma viz. de W_0 . Para tanto defina $T = \phi_{W_0, W_1}(W)$ e $S \in Lin(W_0, B(W))$ por $S(u) = B(u) + B(T(u))$, é fácil ver que S é um isomorfismo portanto temos que:

$$\begin{aligned} \phi_{W_0, W_1}(B(W)) &= (\pi_1|_{B(W)}) \circ (\pi_1|_{B(W)})^{-1} \\ &= (\pi_1|_{B(W)} \circ S) \circ (\pi_1|_{B(W)} \circ S)^{-1} \\ &= (B_{10} + B_{11} \circ T) \circ (B_{00} + B_{01} \circ T)^{-1}. \end{aligned}$$

Onde B_{ij} denota os operadores $\pi_i \circ B|_{W_j}$ e π_i , $i = 0, 1$ denota as projeções em W_i relativas a decomposição $\mathbb{R}^n = W_0 \oplus W_1$. Portanto da equação

$$\phi_{W_0, W_1}(B(W)) = (B_{10} + B_{11} \circ T) \circ (B_{00} + B_{01} \circ T)^{-1},$$

concluímos que a ação é suave. ■

Agora vamos ver que esta ação é transitiva:

Proposição 3.25. *A ação natural de $SO(n)$ em $G_k(n)$, obtida restringindo a ação natural de $GL(n, \mathbb{R})$, é transitiva.*

Demonstração. Sejam $W, W' \in G_k(n)$ fixos, tome $\{b_j\}_{j=1}^n$ e $\{b'_j\}_{j=1}^n$ bases ortonormais de \mathbb{R}^n tal que $\{b_j\}_{j=1}^k$ é base de W e $\{b'_j\}_{j=1}^k$ é base de W' . Possivelmente substituindo b_1 por $-b_1$, podemos assumir que estas duas bases definem a mesma orientação em \mathbb{R}^n . Portando definido o isomorfismo A por $A(b_j) = b'_j$ para $j = 1, \dots, n$ temos que $A \in SO(n)$ e em particular $A(W) = W'$, portanto a ação é transitiva. ■

Corolário 3.26. *A Grassmanniana $G_k(n)$ é difeomorfa a variedade homogênea*

$$\frac{O(n)}{O(k) \times O(n-k)}.$$

Em particular a variedade de Grassmann é compacta e conexa.

Demonstração. O estabilizador do ponto $\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{n-k}$ pela ação de $O(n)$ é dado pelo grupo de operadores ortogonais que deixam os subespaços $\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{n-k}$ e $\{0\}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ invariantes, é possível mostrar que este grupo é isomorfo a $O(k) \times O(n-k)$, à conclusão segue do Corolário 3.6 e da proposição anterior. ■

Agora vamos estudar algumas consequências da representação de $G_k(n)$ como variedade Homogênea.

Proposição 3.27. *Em uma vizinhança \mathcal{U} de qualquer ponto de $G_k(n)$ podemos definir uma aplicação suave $A : \mathcal{U} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ tal que*

$$A(W) (\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{n-k}) = W$$

para todo $W \in \mathcal{U}$.

Demonstração. Como a ação natural de $GL(n, \mathbb{R})$ na Grassmanniana é suave e transitiva segue do Corolário 3.6 que a aplicação:

$$GL(n, \mathbb{R}) \ni B \mapsto B (\mathbb{R}^k \oplus \{0\}^{n-k}) \in G_k(n)$$

é uma submersão, portanto o mapa A que queremos é simplesmente uma seção local desta submersão. ■

Corolário 3.28. *Em uma vizinhança aberta \mathcal{U} de qualquer ponto de $G_k(n)$ existem aplicações suaves:*

$$Z_{ker} : \mathcal{U} \rightarrow Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k}) \text{ e } Z_{im} : \mathcal{U} \rightarrow Lin(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$$

tais que $W = Ker(Z_{ker}(W)) = Im(Z_{im}(W))$.

Demonstração. Seja A como na proposição anterior e defina $Z_{\text{ker}} = \pi \circ A(W)^{-1}$ e $Z_{\text{im}} = A(W) \circ \iota$, onde $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ é a projeção nas últimas $n - k$ coordenadas e $\iota : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é inclusão das primeiras k coordenadas. ■

Corolário 3.29. *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço e $r \in \mathbb{Z}$ um inteiro não negativo, então o conjunto de subespaços $W \in G_k(n)$ tal que $\dim(W \cap S) \leq r$ é aberto em $G_k(n)$.*

Demonstração. Nosso objetivo é mostrar que o conjunto $G(S, r) = \{W : \dim(W \cap S) \leq r\}$ é aberto, para tanto fixe $W_0 \in G_k(n)$ agora tome $\mathcal{U} \ni W_0$ uma vizinhança aberta de W_0 onde está bem definida a aplicação $Z_{\text{Ker}} : \mathcal{U} \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$. Para cada $W \in \mathcal{U}$ temos que:

$$W \cap S = \text{Ker}(Z_{\text{Ker}}|_S),$$

então $W \in G(S, r)$ se e somente se o posto do operador $Z_{\text{Ker}}|_S$ é maior que $\dim(S) - r$. Assim derivamos uma condição aberta para definir o conjunto $G(S, r) \cap \mathcal{U}$, isto é, o conjunto $G(S, r) \cap \mathcal{U}$ é dado pela imagem inversa do conjunto aberto $\{T \in \text{Lin}(S, \mathbb{R}^{n-k}) : \text{posto}(T) \geq \dim(S) - r\}$ pelo operador suave $W \mapsto Z_{\text{ker}}(W)|_S$, portanto um conjunto aberto. ■

Agora vamos calcular a diferencial da ação natural de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ em $G_k(n)$.

Proposição 3.30. *Para $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, considere o difeomorfismo de $G_k(n)$, denotado por Φ_A , dado por $W \mapsto A(W)$. Para $W \in G_k(n)$, o diferencial de Φ_A em W é dado pelo operador:*

$$\text{Lin}((A|_W)^{-1}, \bar{A}) : \text{Lin}(W, \mathbb{R}^n/W) \rightarrow \text{Lin}(A(W), \mathbb{R}^n/A(W))$$

definido por $Z \mapsto \bar{A} \circ Z \circ (A|_W)^{-1}$, onde

$$\bar{A} : \mathbb{R}^n/W \rightarrow \mathbb{R}^n/A(W)$$

é induzida por A pela passagem ao quociente.

Demonstração. Seja $t \mapsto W(t)$ uma curva suave em $G_k(n)$ tal que $W(0) = W$ e $W'(0) = Z$. Considere $v \in W$ e tome uma curva suave $t \mapsto w(t)$ tal que $w(0) = v$ e $w(t) \in W(t)$ para todo t . Agora definimos novas curvas γ e Γ por $\gamma(t) = A \cdot w(t)$ e $\Gamma(t) = \Phi_A(W(t))$, portanto $\gamma(t) \in \Gamma(t)$ para todo t . Ainda mais, temos que $d\Phi_A(W) \cdot Z = \Gamma'(0)$ e pela Proposição 3.21 temos que:

$$\Gamma'(0) \cdot \gamma(0) = [\gamma'(0)] = [A(w'(0))] \in \mathbb{R}^n/A(W).$$

Novamente pela Proposição 3.21, obtemos:

$$W'(0) \cdot w(0) = [w'(0)] \in \mathbb{R}^n/W.$$

Combinado as expressões acima e notando que $w(0) = v$, temos que:

$$\begin{aligned}
 (d\Phi_A(W) \cdot Z) \cdot A(v) &= \Gamma'(0) \cdot A(v) \\
 &= [A(w'(0))] \\
 &= \bar{A} \cdot [w'(0)] \\
 &= \bar{A} \cdot (W'(0) \cdot w(0)) \\
 &= \bar{A} \cdot (Z \cdot v).
 \end{aligned}$$

Concluindo a demonstração. ■

Proposição 3.31. Para $W \in G_k(n)$, a diferencial da aplicação:

$$\beta_W : \text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow G_k(n)$$

dada por $\beta_W(A) = A(W)$ é:

$$d\beta_W(A) \cdot X = q \circ X \circ A^{-1}|_{A(W)},$$

para cada $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, $X \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n)$, onde $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/A(W)$ é aplicação quociente.

Demonstração. Seja $t \mapsto A(t)$ uma curva suave em $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ com $A(0) = A$ e $A'(0) = X$. Fixe $v \in W$, segue então que $t \mapsto w(t) = A(t)(v)$ é uma curva suave em \mathbb{R}^n tal que $w(t) \in W(t)$ para todo t , onde $W(t) = \beta_W(A(t))$. Então pela Proposição 3.21 temos que:

$$W'(0) \cdot w(0) = [w'(0)] = [X(v)] \in \mathbb{R}^n/A(W).$$

Assim obtemos que:

$$(d\beta_W(A) \cdot X) \cdot A(v) = W'(0) \cdot A(v) = q(X(v)).$$

Como queríamos demonstrar. ■

Observação 3.32. Finalizamos esta seção com a observação que a teoria de Grassmannianas de subespaços de \mathbb{R}^n desenvolvida nessas últimas seções pode ser generalizada de maneira óbvia para qualquer outro espaço vetorial real de dimensão finita.

3.2.3 Grassmanniana Lagrangiana

Nesta seção vamos mostrar que o conjunto \mathcal{L} de todos os subespaços Lagrangianos de um espaço vetorial split (V, B) de dimensão $2n$ é uma subvariedade da Grassmanniana de todos

os subespaços de dimensão n de V . O conjunto Λ é chamado de Grassmanniana Lagrangiana de (V, B) . A teoria desenvolvida nesta seção será de grande utilidade para definir e estudar propriedades do Índice de Maslov.

Pelo resto desta seção iremos fixar um espaço vetorial split (V, B) de dimensão $2n$. E iremos denotar por $\mathcal{L} = \mathcal{L}(V, B)$, o conjunto de todos os subespaços Lagrangianos de (V, B) :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(V, B) = \{L \in G_n(V) : L \text{ é Lagrangiano.}\}$$

E vamos dizer que Λ é a Grassmanniana Lagrangiana do espaço vetorial split (V, B) .

Vamos começar com uma construindo cartas de subvariedade para \mathcal{L} em $G_n(V)$.

Lema 3.33. *Seja (L_0, L_1) uma decomposição Lagrangiana de V , então um subespaço $L \in G_n^0(L_1)$ é Lagrangiano se e somente se a forma bilinear:*

$$\rho_{L_0, L_1} \circ \phi_{L_0, L_1}(L) \in \text{Lin}(L_0, L_0^*) \simeq B(L_0)$$

é anti-simétrica, onde o mapa ρ_{L_0, L_1} é definido em (2.1).

Demonstração. Como $\dim(L) = n$ temos que L é Lagrangiano se e somente, se é isotrópico, isto é, $B|_{L \times L} = 0$. Seja $T = \phi_{L_0, L_1}(L)$, então $T \in \text{Lin}(L_0, L_1)$ e $L = \text{Gr}(T)$, então se $v, w \in L_0$ temos que:

$$B(v + T(v), w + T(w)) = B(T(v), w) + B(T(w), v).$$

Portanto $B|_L = 0$ se e só se $B(T\cdot, \cdot)|_{L_0}$ é uma forma bilinear anti-simétrica, a conclusão segue do fato que $\rho_{L_0, L_1} \circ \phi_{L_0, L_1}(L) = B(T\cdot, \cdot)|_{L_0}$. ■

Se $L_1 \subset V$ é um subespaço Lagrangiano, denotamos por $\mathcal{L}^0(L_1)$ o conjunto de todos os subespaços Lagrangianos de V que são transversais a L_1 :

$$\mathcal{L}^0(L_1) = \mathcal{L} \cap G_n^0(L_1) = \{L \in \mathcal{L} : L \cap L_1 = 0\}. \quad (3.9)$$

Segue do Lema 3.33 que, associada a cada decomposição Lagrangiana (L_0, L_1) de V temos uma bijeção:

$$\chi_{L_0, L_1} : \mathcal{L}^0(L_1) \rightarrow B_{\text{a-s}}(L_0), \quad (3.10)$$

dada por $\chi_{L_0, L_1}(L) = \rho_{L_0, L_1} \circ \phi_{L_0, L_1}(L)$, onde $B_{\text{a-s}}(L_0) \subset B(L_0)$ denota o subespaço vetorial das formas bilineares anti-simétricas. Portanto obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.34. *A Grassmanniana Lagrangiana \mathcal{L} é uma subvariedade mergulhada de $G_n(V)$ com dimensão $\dim(\mathcal{L}) = \frac{1}{2}n(n-1)$. As cartas χ_{L_0, L_1} definidas em (3.10), para cada decomposição Lagrangiana (L_0, L_1) de V , formam um atlas suave para \mathcal{L} .*

Demonstração. Dada uma decomposição Lagrangiana (L_0, L_1) de V , segue do Lema 3.33 que a carta:

$$G_n^0(L_1) \ni W \mapsto \rho_{L_0, L_1} \circ \phi_{L_0, L_1}(W) \in \text{Lin}(L_0, L_0^*) \simeq B(L_0)$$

de $G_n(V)$ é uma carta adaptada para \mathcal{L} , que induz a carta em (3.10) de \mathcal{L} . A conclusão segue do fato que todo Lagrangiano admite um complementar Lagrangiano, portanto o domínio das cartas χ_{L_0, L_1} cobre \mathcal{L} . Por fim, a questão da dimensionalidade segue do fato que $\dim(B_{a-s}(L_0)) = \frac{1}{2}n(n-1)$. ■

Agora como fizemos para Grassmanniana vamos estudar as funções de transição entre as cartas construídas para a Grassmanniana Lagrangiana.

Lema 3.35. *Sejam (L_0, L_1) , (L'_0, L_1) e (L_0, L'_1) decomposições Lagrangianas de V então temos as seguinte igualdades de operadores:*

- $\rho_{L'_0, L_1} = \left(\eta_{L'_0, L_0}^{L_1} \right)^* \circ \rho_{L_0, L_1}$;
- $\rho_{L_0, L'_1} \circ \eta_{L_1, L'_1}^{L_0} = \rho_{L_0, L_1}$.

Demonstração. Vamos mostrar que a primeira igualdade é válida mostrando que se realiza em cada ponto, para tanto sejam $v \in L_1$ e $u \in L'_0$. Existem $a \in L_0$ e $b \in L_1$ tais que $u = a + b$, como L'_0 é Lagrangiano temos que:

$$\begin{aligned} \rho_{L'_0, L_1}(v) \cdot (u) &= B(v, \cdot)|_{L'_0} \cdot (u) \\ &= B(v, \cdot)|_{L'_0} \cdot (a) \\ &= B(v, a). \end{aligned}$$

A conclusão segue do fato que $\eta_{L'_0, L_0}^{L_1}(u) = a$. Contas semelhantes mostram a segunda igualdade. ■

Lema 3.36. *Dadas decomposições Lagrangianas (L_0, L_1) e (L'_0, L_1) de V temos que:*

$$\chi_{L'_0, L_1} \circ (\chi_{L_0, L_1})^{-1}(\omega) = \chi_{L'_0, L_1}(L_0) + \left(\eta_{L'_0, L_0}^{L_1} \right)^\#(\omega), \quad (3.11)$$

para todo $\omega \in B_{a-s}(L_0)$. Se (L_0, L'_1) é outra decomposição Lagrangiana de V então vale que:

$$\chi_{L_0, L'_1} \circ (\chi_{L_0, L_1})^{-1}(\omega) = \omega \circ \left(\text{Id} + (\pi'_0|_{L_1}) \circ \rho_{L_0, L_1}^{-1} \circ \omega \right)^{-1}, \quad (3.12)$$

para todo $\omega \in \chi_{L_0, L_1}(\mathcal{L}^0(L'_1)) \subset B_{a-s}(L_0)$, onde π'_0 denota a projeção em L_0 relativa a decomposição $V = L_0 \oplus L'_1$.

Observe que então vale a seguinte identidade:

$$(\pi'_0|_{L_1}) \circ \rho_{L_0, L_1}^{-1} = (\rho_{L_0, L_1})^\#(\chi_{L_1, L_0}(L'_1)). \quad (3.13)$$

Demonstração. Seja $\omega \in \text{Ba-s}(L_0)$ e $L \in \mathcal{L}^0(L_1)$ tal que $\chi_{L_0, L_1}(L) = \omega$ então temos que:

$$L = \phi_{L_0, L_1}^{-1} (\rho_{L_0, L_1}^{-1} \circ \omega).$$

Portanto de (3.5) vemos que:

$$\begin{aligned} \chi_{L'_0, L_1} \circ (\chi_{L_0, L_1})^{-1}(\omega) &= \rho_{L'_0, L_1} \circ (\phi_{L'_0, L_1} \circ (\phi_{L_0, L_1})^{-1} (\rho_{L_0, L_1}^{-1} \circ \omega)) \\ &= \rho_{L'_0, L_1} \circ (\pi'_1|_{L_0} + \rho_{L_0, L_1}^{-1} \circ \omega) \circ \eta_{L'_0, L_0}^{L_1}, \end{aligned}$$

onde π'_1 denota a projeção em L_1 relativa a decomposição $V = L'_0 \oplus L_1$. Pelo Lema anterior temos que:

$$\rho_{L'_0, L_1} \circ \rho_{L_0, L_1}^{-1} = \left(\eta_{L'_0, L_0}^{L_1} \right)^* : L_0^* \rightarrow L'^*_0.$$

Combinado estas equações obtemos que:

$$\chi_{L'_0, L_1} \circ (\chi_{L_0, L_1})^{-1}(\omega) = \rho_{L'_0, L_1} \circ \pi'_1|_{L_0} \circ \eta_{L'_0, L_0}^{L_1} + \left(\eta_{L'_0, L_0}^{L_1} \right)^* \circ \omega \circ \eta_{L'_0, L_0}^{L_1}. \quad (3.14)$$

Utilizando a expressão em (3.14) com $\omega = 0$ concluímos que:

$$\chi_{L'_0, L_1}(L_0) = \rho_{L'_0, L_1} \circ \pi'_1|_{L_0} \circ \eta_{L'_0, L_0}^{L_1},$$

o que completa a prova de (3.11).

Agora utilizando (3.6) temos:

$$\begin{aligned} \chi_{L_0, L'_1} \circ (\chi_{L_0, L_1})^{-1}(B) &= \rho_{L_0, L'_1} \circ (\phi_{L_0, L'_1} \circ (\phi_{L_0, L_1})^{-1} (\rho_{L_0, L_1}^{-1} \circ \omega)) \\ &= \rho_{L_0, L'_1} \circ \eta_{L_1, L'_1}^{L_0} \circ \rho_{L_0, L_1}^{-1} \circ \omega \circ (Id + (\pi'_0|_{L_1}) \circ \rho_{L_0, L_1}^{-1} \circ \omega)^{-1}. \end{aligned}$$

E pelo Lema anterior é fácil ver que:

$$\rho_{L_0, L'_1} \circ \eta_{L_1, L'_1}^{L_0} \circ \rho_{L_0, L_1}^{-1} = Id : L_0^* \rightarrow L_0^*.$$

Concluindo assim a prova ■

Nosso próximo objetivo é estudar o espaço tangente $T_L \mathcal{L}$ da Grassmanniana Lagrangiana, para algum $L \in \mathcal{L}$, mas para tanto observamos que a aplicação $V \ni v \mapsto B(v, \cdot)|_L \in L^*$ tem núcleo dado por L portanto obtemos a seguinte aplicação linear injetiva:

$$\begin{aligned} \rho_L : V/L &\rightarrow L^* \\ [v] &\mapsto B(v, \cdot)|_L \end{aligned} \quad (3.15)$$

mas por uma questão de dimensionalidade temos que ρ_L define um isomorfismo linear.

Proposição 3.37. *Seja $L \in \Lambda$ fixo, então o isomorfismo:*

$$\text{Lin}(Id, \rho_L) : \text{Lin}(L, V/L) \rightarrow \text{Lin}(L, L^*) \simeq B(L)$$

dado por $Z \mapsto \rho_L \circ Z$ leva $T_L\Lambda \subset T_LG_n(V) \simeq \text{Lin}(L, V/L)$ no subespaço $B_{a-s}(L) \subset B(L)$.

Demonstração. Seja L_1 um subespaço Lagrangiano complementar a L . Então o mapa:

$$\begin{aligned} \psi : G_n^0(L_1) &\rightarrow B(L) \\ W &\mapsto \rho_{L,L_1} \circ \phi_{L,L_1}(W) \end{aligned}$$

de $G_n(V)$ é uma carta adaptada para subvariedade Λ que induz a carta χ_{L,L_1} . Portanto a diferencial de ψ no ponto L é um isomorfismo que leva $T_L\Lambda$ em $B_{a-s}(L)$. Pela regra da cadeia temos que:

$$d\psi(L) = \text{Lin}(Id, \rho_{L,L_1}) \circ d\phi_{L,L_1}(L),$$

mas o Lema 3.23 nos diz que usando a identificação $T_LG_n(V) \simeq \text{Lin}(L, V/L)$ a diferencial de ϕ_{L,L_1} em L é dada por $\text{Lin}(Id, q_1^{-1})$, onde q_1 denota a restrição a L_1 da aplicação quociente a V/L , isto é, utilizando a identificação $T_LG_n(V) \simeq \text{Lin}(L, V/L)$ obtemos o seguinte diagrama comutativo composto por isomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} T_LG_n(V) & \xrightarrow{d\psi(L)} & B(L) \\ \simeq \uparrow & \nearrow \text{Lin}(Id, \rho_{L,L_1} \circ q_1^{-1}) & \\ \text{Lin}(L, V/L) & & \end{array}$$

A conclusão do resultado segue da comutatividade do diagrama:

$$\begin{array}{ccc} L_1 & & \\ \downarrow q_1 & \searrow \rho_{L,L_1} & \\ V/L & & L^* \\ & \nearrow \rho_L & \end{array}$$

■

Usando a Proposição anterior vamos sempre identificar o espaço tangente $T_L\mathcal{L}$ com $B_{\text{sym}}(L)$. Utilizando esta identificação vamos calcular a diferencial da carta χ_{L_0,L_1} em um ponto L de \mathcal{L} .

Lema 3.38. *Considere uma decomposição Lagrangiana (L_0, L_1) para V e seja $L \in \mathcal{L}^0(L_1)$. Então a diferencial da carta χ_{L_0, L_1} no ponto L é dado pelo operador:*

$$(\eta_{L, L_0}^{L_1})_{\#} : Ba\text{-}s(L) \rightarrow Ba\text{-}s(L_0).$$

Demonstração. Diferenciando a igualdade:

$$\chi_{L_0, L_1} = \text{Lin}(Id, \rho_{L_0, L_1}) \circ \phi_{L_0, L_1}$$

no ponto L e utilizando a identificação $T_L \mathcal{L} \simeq Ba\text{-}s(L)$, obtemos que

$$d\chi_{L_0, L_1}(L) = \text{Lin}(\eta_{L_0, L}^{L_1}, \rho_{L_0, L_1} \circ q_1^{-1} \circ \rho_L^{-1}) : Ba\text{-}s(L) \rightarrow Ba\text{-}s(L_0),$$

onde q_1 denota a restrição a L_1 da aplicação quociente a V/L . Por outro lado utilizando o Lema 3.35 e a relação $\rho_L^{-1} \circ \rho_{L, L_1} = q_1$ obtemos que:

$$\rho_{L_0, L_1} \circ q_1^{-1} \circ \rho_L^{-1} = (\eta_{L_0, L}^{L_1})^*.$$

Concluindo assim a demonstração. ■

Lembramos que dado um espaço vetorial split (V, B) o grupo de isometrias de B é denotado por $O(V, B)$. Sabemos também que $O(V, B) \hookrightarrow GL(V)$ é um subgrupo de Lie de $GL(V)$. Portanto a ação natural suave de $GL(V)$ na Grassmanniana $G_n(V)$ se restringe a uma ação suave do grupo de isometrias $O(V, B)$ na Grassmanniana Lagrangiana, em resumo temos o seguinte:

Proposição 3.39. *A ação natural de $O(V, B)$ em \mathcal{L} é suave.*

Agora como fizemos para o caso da Grassmanniana vamos estudar a diferencial da ação do grupo de isometrias na Grassmanniana Lagrangiana.

Proposição 3.40. *Para $A \in O(V, B)$, considere o difeomorfismo, denotado por Φ_A , de \mathcal{L} dado por $L \mapsto A(L)$. Para $L \in \mathcal{L}$ a diferencial $d\Phi_A(L)$ é o dado pelo operador:*

$$(A|_L)_{\#} : Ba\text{-}s(L) \rightarrow Ba\text{-}s(A(L)).$$

Onde utilizamos a identificação $T_L \mathcal{L} \simeq Ba\text{-}s(L)$.

Demonstração. Primeiramente se $\Psi_A : G_n(V) \rightarrow G_n(V)$ é o difeomorfismo dado por $\Psi_A(W) = A(W)$ temos então o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} G_n(V) & \xrightarrow{\Psi_A} & G_n(V) \\ \uparrow \iota & & \uparrow \iota \\ \mathcal{L} & \xrightarrow{\Phi_A} & \mathcal{L} \end{array}$$

onde $\iota : \mathcal{L} \hookrightarrow G_n(V)$ é a inclusão. Por outro lado, temos que a identificação de $T_L\mathcal{L} \simeq B_{\mathbf{a-s}}(L)$ é dada pelo seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_L\mathcal{L} & \longrightarrow & B_{\mathbf{a-s}}(L) \\ \downarrow d\iota & & \downarrow \\ T_LG_n(V) & \longrightarrow & B(L) \\ \downarrow \tau_L & \nearrow \text{Lin}(Id, \rho_L) & \\ \text{Lin}(L, V/L) & & \end{array}$$

onde $\tau_L : T_LG_n(V) \rightarrow \text{Lin}(L, V/L)$ é a identificação obtida na Proposição 3.20. Então dado $\omega \in B_{\mathbf{a-s}}(L)$ existe único $v \in T_L\mathcal{L}$ tal que:

$$d\iota(L) \cdot v = \tau_L^{-1}(\rho_L^{-1} \circ \omega) \in T_LG_n(V).$$

Portanto queremos mostrar que:

$$\text{Lin}(Id, \rho_{A(L)}) \circ \tau_{A(L)}(d\iota(A(L)) \cdot d\Phi_A(L) \cdot v) = (A|_L)_{\#}(\omega).$$

Mas note que:

$$\begin{aligned} \text{Lin}(Id, \rho_{A(L)}) \circ \tau_{A(L)}(d\iota(A(L)) \cdot d\Phi_A(L) \cdot v) &= \text{Lin}(Id, \rho_{A(L)}) \circ \tau_{A(L)}(d\Psi_A(L) \cdot d\iota(A) \cdot v) \\ &= \text{Lin}(Id, \rho_{A(L)}) \circ \tau_{A(L)}(d\Psi_A(L) \cdot (\tau_L^{-1}(\rho_L^{-1} \circ \omega))). \end{aligned}$$

Porém, utilizando a identificação $T_LG_n(V) \simeq \text{Lin}(L, V/L)$ a Proposição 3.30 nós diz que a diferencial $d\Psi_A(L)$ é dada pelo operador $\text{Lin}((A|_L)^{-1}, \bar{A})$, assim:

$$\begin{aligned} \text{Lin}(Id, \rho_{A(L)}) \circ \tau_{A(L)}(d\Psi_A(L) \cdot (\tau_L^{-1}(\rho_L^{-1} \circ \omega))) &= \\ = \text{Lin}(Id, \rho_{A(L)}) \circ \text{Lin}((A|_L)^{-1}, \bar{A}) \circ \text{Lin}(Id, \rho_L^{-1})(\omega) &= \\ = \text{Lin}((A|_L)^{-1}, \rho_{A(L)} \circ \bar{A} \circ \rho_L^{-1})(\omega). \end{aligned}$$

Por fim, é fácil ver que:

$$\rho_{A(L)} \circ \bar{A} \circ \rho_L^{-1} = (A|_L)^{*^{-1}}.$$

Concluindo a demonstração. ■

Proposição 3.41. Para $L \in \mathcal{L}$, a diferencial do mapa:

$$\beta_L : \mathcal{O}(V, B) \rightarrow \mathcal{L}$$

dado por $\beta_L(A) = A(L)$ é:

$$d\beta_L(A) \cdot X = B(X \circ A^{-1}, \cdot)|_{A(L)},$$

para todos $A \in \mathcal{O}(V, B)$ e $X \in T_A\mathcal{O}(V, B)$.

Demonstração. Considere o operador $\xi_L : \text{GL}(V) \rightarrow G_n(V)$ dado por $\xi_L(W) = L(W)$ então temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \text{GL}(V) & \xrightarrow{\xi_L} & G_n(V) \\ \uparrow & & \uparrow \iota \\ \text{O}(V, B) & \xrightarrow{\beta_L} & \mathcal{L} \end{array}$$

onde $\iota : \mathcal{L} \hookrightarrow G_n(V)$ é a inclusão. Utilizando a identificação $T_{A(L)}\mathcal{L} \simeq B_{\text{a-s}}(A(L))$ e a notação da Proposição anterior temos que:

$$\text{Lin}(Id, \rho_{A(L)}) \circ \tau_{A(L)} \circ d\iota(A(L)) \circ d\beta_L(A) \cdot X = \text{Lin}(Id, \rho_{A(L)}) \circ \tau_{A(L)} \circ d\xi_L(A) \cdot X,$$

para cada $X \in T_A\text{O}(V, B)$. Mas utilizando a identificação $T_{A(L)}G_n(V) \simeq \text{Lin}(A(L), V/A(L))$ a Proposição 3.41 nos diz que o diferencial $d\xi_L(A)$ é dado pela aplicação $X \mapsto q \circ X \circ A^{-1}|_{A(L)}$, onde $q : V \rightarrow V/A(L)$ é o mapa quociente, assim vemos que:

$$\text{Lin}(Id, \rho_{A(L)}) \circ \tau_{A(L)} \circ d\xi_L(A) \cdot X = \text{Lin}(id, \rho_{A(L)}) \left(q \circ X \circ A^{-1}|_{A(L)} \right).$$

A conclusão da Proposição segue da observação simples que:

$$\rho_{A(L)} \circ q \circ X \circ A^{-1}|_{A(L)} = B(X \circ A^{-1}, \cdot)|_{A(L)}.$$

■

Agora vamos mostrar que a variedade Grassmanniana Lagrangiana possui uma estrutura de variedade homogênea, para ver isso primeiro vamos nos especializar no caso $V = \mathbb{R}^{n,n}$.

Teorema 3.42. *A Grassmanniana Lagrangiana de $V = \mathbb{R}^{n,n}$ é dada pela variedade homogênea:*

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n}) \simeq \frac{\text{O}(n) \times \text{O}(n)}{\Delta(\text{O}(n))} \simeq \text{O}(n).$$

Ainda mais, essa caracterização induz o difeomorfismo $\text{O}(n) \ni A \mapsto \{(x, Ax) : x \in \mathbb{R}^n\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n})$.

Demonstração. Primeiro definimos uma ação do grupo de Lie $\text{O}(n) \times \text{O}(n)$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n})$ da seguinte forma, dados $(T, S) \in \text{O}(n) \times \text{O}(n)$ e $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n})$ faça:

$$(T, S) \cdot L = (T \oplus S)(L_0),$$

onde $T \oplus S \in \text{O}(n, n)$ é o operador dado por:

$$T \oplus S(x, y) = (Tx, Sy),$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^{n,n}$. Agora definimos o operador $J : \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$ por $J(x, y) = (x, -y)$ então veja que $J \in O(2n)$ e ainda mais

$$B_{n,n}(J\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}.$$

A correlação entre o operador J e o grupo $O(n) \times O(n)$ é dada pelo seguinte fato, dado $A \in O(n)$ existem $T, S \in O(n)$ tais que $A = T \oplus S$ se e somente se A comuta com o operador J .

Agora vamos mostra que a ação do grupo $O(n) \times O(n)$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n})$ é transitiva. Mas primeiro notamos que se L é um subespaço Lagrangiano então esse é transversal ao subespaço $J(L)$, já que dado $v \in L \cap J(L)$ vemos que sendo L um subespaço Lagrangiano

$$0 = B_{n,n}(Jv, v) = \langle v, v \rangle_{\mathbb{R}^{2n}},$$

ou seja $v = 0$. Portanto $V = L \oplus J(L)$, isso ainda nós diz que dado uma base $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$ -ortonormal de L , digamos $\{v_1, \dots, v_n\}$ temos que a base $\{v_1, \dots, v_n, Jv_1, \dots, Jv_n\}$ é uma base $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$ -ortonormal de $\mathbb{R}^{n,n}$ pois

$$\langle Jv_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = B_{n,n}(J^2v_i, v_j) = B_{n,n}(v_i, v_j) = 0,$$

e como $J \in O(2n)$, temos ainda que

$$\langle Jv_j, Jv_i \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \langle v_j, v_i \rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \delta_{ij}.$$

Dessa maneira, dados $L, L' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n})$ tomamos bases $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$ -ortonormais de L e L' respectivamente dadas por $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ então definindo a transformação ortogonal $A \in O(2n)$ por

$$\begin{aligned} Av_i &= v'_i \\ AJv_i &= Jv'_i, \end{aligned}$$

para cada $i = 1, \dots, n$, vemos que essa transformação satisfaz $A(L) = L'$. Ainda mais, por definição A comuta com operador J portanto temos que existem $T, S \in O(n)$ tais que $A = T \oplus S$, assim a ação de $O(n) \times O(n)$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n})$ é transitiva.

Agora vamos calcular o subgrupo estabilizador dessa ação associado ao elemento $L_0 = \{(x, x) \in \mathbb{R}^{n,n} : x \in \mathbb{R}^n\}$, isto é, o subgrupo de $O(n) \times O(n)$ dado por

$$\text{Stb}(L_0) = \{(T, S) \in O(n) \times O(n) : T \oplus S(L_0) = L_0\}.$$

Mas é fácil de ver que $T \oplus S(L_0) = L_0$ se e somente, se $Tx = Sx$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ assim

$$\begin{aligned} \text{Stb}(L_0) &= \{(T, S) \in O(n) \times O(n) : T = S\} \\ &= \Delta(O(n)). \end{aligned}$$

Como a ação de $O(n) \times O(n)$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n})$ é transitiva, suave e o subgrupo estabilizador do elemento L_0 é dado por $\Delta(O(n))$ temos um difeomorfismo $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n}) \simeq \frac{O(n) \times O(n)}{\Delta(O(n))}$ e tal difeomorfismo é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{O(n) \times O(n)}{\Delta(O(n))} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n}) \\ [(T, S)] &\mapsto T \oplus S(L_0). \end{aligned}$$

Por fim, vamos mostrar que existe um difeomorfismo $O(n) \simeq \frac{O(n) \times O(n)}{\Delta(O(n))}$. Para tanto considere a ação de $O(n) \times O(n)$ em $O(n)$ dada por

$$(T, S) \cdot X = T^{-1} \circ X \circ S,$$

claramente essa ação é transitiva e suave e o subgrupo estabilizador de $Id \in O(n)$ é dado por

$$\begin{aligned} \text{Stb}(Id) &= \{(S, T) \in O(n) \times O(n) : T^{-1}S = Id\} \\ &= \Delta(O(n)). \end{aligned}$$

Portanto temos um difeomorfismo de $\frac{O(n) \times O(n)}{\Delta(O(n))}$ com $O(n)$, e tal difeomorfismo é dado por

$$\begin{aligned} \frac{O(n) \times O(n)}{\Delta(O(n))} &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n}) \\ [(T, S)] &\mapsto T^{-1}S, \end{aligned}$$

facilmente vemos que o inverso dessa mapa é dado por $A \mapsto [(Id, A)]$, concluímos então que a composição desses difeomorfismos induz o seguinte difeomorfismo

$$\begin{aligned} O(n) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n}) \\ A &\mapsto \{(x, Ax) \in \mathbb{R}^{n,n} : x \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Concluindo assim a prova. ■

Corolário 3.43. *Dado um espaço vetorial split (V, B) existe um difeomorfismo entre a Grassmanniana Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(V, B)$ de (V, B) e o grupo ortogonal $O(n)$. Em particular a variedade Grassmanniana Lagrangiana é compacta e possui exatamente duas componentes conexas.*

Demonstração. Utilizando o Teorema 2.1 podemos construir uma isomorfismo linear $T : \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow V$ tal que o pullback da forma bilinear B por T é dada por $B_{n,n}$, então esse isomorfismo linear induz um difeomorfismo $\Phi_T : \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n}) \rightarrow \mathcal{L}$ dado por $\Phi_T(L) = T(L)$, pelo Teorema anterior Temos um difeomorfismo $O(n) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n})$, a composição destes mapas induz o difeomorfismo desejado. ■

3.2.4 As subvariedades $\mathcal{L}^k(L_0)$

Nesta subsecção vamos estudar uma família de subvariedades de \mathcal{L} que serão de grande utilidade no resto da dissertação. Para um subespaço Lagrangiano $L_0 \subset V$ fixado e $k = 0, \dots, n$ definimos os seguintes subconjuntos de \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}^k(L_0) = \{L \in \mathcal{L} : \dim(L \cap L_0) = k\}.$$

Note que para $k = 0$, a definição acima de $\mathcal{L}^k(L_0)$ é compatível com a definição dada em (3.9). O nosso objetivo vai ser mostrar que os conjuntos $\mathcal{L}^k(L_0)$ são subvariedades de \mathcal{L} e também calcular os seus respectivos espaços tangentes.

Denotamos por $O(V, B, L_0)$ o subgrupo fechado de $O(V, B)$ que consiste das isometrias de B que preservam L_0 , isto é:

$$O(V, B, L_0) = \{A \in O(V, B) : A(L_0) = L_0\}$$

Vamos agora calcular a álgebra de Lie deste subgrupo. Mas para tanto vamos primeiro computar a Álgebra de Lie do grupo $B(V, B)$.

Proposição 3.44. *A Álgebra de Lie do grupo $O(V, B)$, vista dentro da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V) = \text{Lin}(V)$, é dada pelo conjunto*

$$\mathfrak{o}(V, B) = \{X \in \text{Lin}(V) : B(X\cdot, \cdot) + B(\cdot, X\cdot) = 0\}.$$

Demonstração. Para calcular a Álgebra de Lie de $O(V, B)$ vamos primeiro mostrar esta variedade pode ser vista como valor regular do zero da seguinte função $\phi : \text{GL}(V) \rightarrow B_{\text{sim}}(V)$ onde $\phi(T) = B(T\cdot, T\cdot) - B(\cdot, \cdot)$.

Para tanto, veja que dado $T \in \text{GL}(V)$ temos que a diferencial de ϕ aplicada em $X \in \text{Lin}(V)$ é dada por

$$d\phi(T) \cdot X = B(X\cdot, T\cdot) + B(T\cdot, X\cdot).$$

Então resta mostrar que se $T \in \phi^{-1}(0)$ a aplicação $d\phi(T) : \text{Lin}(V) \rightarrow B_{\text{sim}}(V)$ é sobrejetora. Primeiramente notamos que se $T \in \phi^{-1}(0)$ temos que

$$d\phi(T) \cdot X = B(T^{-1} \circ X\cdot, \cdot) + B(\cdot, T^{-1} \circ X\cdot).$$

Por outro lado, dado $D \in B_{\text{sim}}(V)$, como B é não degenerada existe $Y \in \text{Lin}(V)$ tal que

$$D(\cdot, \cdot) = B(T\cdot, \cdot),$$

mas como D é simétrica temos também que

$$D(\cdot, \cdot) = B(\cdot, T\cdot).$$

Portanto $D(\cdot, \cdot) = \frac{1}{2}B(T\cdot, \cdot) + \frac{1}{2}B(\cdot, T\cdot)$, fazendo $X = \frac{1}{2}T \circ Y$ temos que:

$$D(\cdot, \cdot) = B(T^{-1} \circ X\cdot, \cdot) + B(\cdot, T^{-1} \circ X\cdot),$$

como o desejado. Por fim, como 0 é um valor regular de ϕ temos que:

$$\mathfrak{o}(V, B) = T_{Id}O(V, B) = \ker(d\phi(Id)),$$

mas é fácil de ver que $\ker(d\phi(Id)) = \{X \in \text{Lin}(V) : B(X\cdot, \cdot) + B(\cdot, X\cdot) = 0\}$ como queríamos mostrar. ■

Corolário 3.45. A Álgebra de Lie $\mathfrak{o}(V, B, L_0)$ do grupo de Lie $O(V, B, L_0)$ consiste do conjunto

$$\mathfrak{o}(V, B, L_0) = \{X \in \mathfrak{o}(V, B) : B(X\cdot, \cdot)|_{L_0} = 0\}.$$

Demonstração. Primeiro vamos provar que $\mathfrak{o}(V, B, L_0) = \{X \in \mathfrak{o}(V, B) : X(L_0) \subset L_0\}$, como $O(V, B, L_0)$ é um subgrupo de Lie de $O(V, B)$ temos a seguinte caracterização para sua álgebra de Lie

$$\mathfrak{o}(V, B, L_0) = \{X \in \mathfrak{o}(V, B) : \exp(tX) \in O(V, B, L_0), \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Suponha então $X \in \mathfrak{o}(V, B)$, tal que $\exp(tX) \in O(V, B, L_0)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, dado $v_0 \in L_0$ defina $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow V$ por

$$\gamma(t) = \exp(tX)v_0,$$

como $\exp(tX) \in O(V, B, L_0)$ temos que $\exp(tX)(L_0) = L_0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, portanto:

$$L_0 \ni \gamma'(0) = Xv_0,$$

assim concluímos que $X(L_0) \subset L_0$ como o desejado. Por outro lado, tome $X \in \mathfrak{o}(V, B)$ tal que $X(L_0) \subset L_0$ então utilizando a Proposição A.3 obtemos que

$$\exp(tX) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k,$$

assim dado $v_0 \in L_0$ temos que

$$\begin{aligned} \exp(tX)v_0 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k \right) v_0 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} (X^k) v_0. \end{aligned}$$

Por indução vemos que $\frac{t^k}{k!} (X^k) v_0 \in L_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e portanto como $L_0 \subset V$ é um subconjunto fechado temos que $\exp(tX) \in L_0$, como queríamos mostrar.

Por fim, vamos mostrar que o conjunto $\{X \in \mathfrak{o}(V, B) : X(L_0) \subset L_0\}$ é dado por $\{X \in \mathfrak{o}(V, B) : B(X \cdot, \cdot)|_{L_0} = 0\}$, mas note que $B(X \cdot, \cdot)|_{L_0} = 0$ se e somente se $X(L_0) \subset L_0^\perp$ e conclusão segue do fato que $L_0^\perp = L_0$, já que L_0 é Lagrangiano. ■

A ação de $O(V, B)$ em \mathcal{L} se restringe de forma suave ao subgrupo de Lie $O(V, B, L_0)$, ainda mais o Teorema 2.25 garante que $\mathcal{L}^k(L_0)$ é dado pela órbita da ação de $O(V, B, L_0)$. Então para provar que os subconjuntos $\mathcal{L}^k(L_0)$ de \mathcal{L} são subvariedades mergulhas basta provar que estes são localmente fechados.

Para cada $k = 0, \dots, n$ definimos:

$$\mathcal{L}^{\leq k}(L_0) = \bigcup_{i=0}^k \mathcal{L}^i(L_0), \quad ; \quad \mathcal{L}^{\geq k}(L_0) = \bigcup_{i=k}^n \mathcal{L}^i(L_0).$$

Então temos o seguinte:

Lema 3.46. *Para todo $k = 0, \dots, n$ os subconjunto $\mathcal{L}^{\leq k}(L_0)$ e $\mathcal{L}^{\geq k}(L_0)$ são respectivamente aberto e fechado em \mathcal{L} .*

Demonstração. Segue do Corolário 3.29 que o conjunto dos espaços $W \in G_n(V)$ tais que $\dim(W \cap L_0) \leq k$ é aberto em $G_n(V)$. Como \mathcal{L} tem a topologia induzida de $G_n(V)$, segue que $\mathcal{L}^{\leq k}(L_0)$ é aberto em \mathcal{L} . Como $\mathcal{L}^{\geq k}(L_0)$ é o complementar de $\mathcal{L}^{\leq k-1}(L_0)$, temos o desejado. ■

Corolário 3.47. *Para todo $k = 0, \dots, n$, os subconjuntos $\mathcal{L}^k(L_0)$ são localmente fechados em \mathcal{L} .*

Demonstração. Basta notar que $\mathcal{L}^k(L_0) = \mathcal{L}^{\leq k}(L_0) \cap \mathcal{L}^{\geq k}(L_0)$. ■

Assim obtemos o seguinte:

Teorema 3.48. *Para cada $k = 0, \dots, n$, os subconjuntos $\mathcal{L}^k(L_0)$ são subvariedades mergulhadas de \mathcal{L} com codimensão $\frac{1}{2}k(k-1)$, e os seus espaços tangentes são dados por:*

$$T_L \mathcal{L}^k(L_0) = \{\omega \in B_{a-s}(L) : \omega|_{L \cap L_0} = 0\}, \quad (3.16)$$

para cada $L \in \mathcal{L}^k(L_0)$.

Demonstração. Pela discussão anterior vimos que para cada k o conjunto $\mathcal{L}^k(L_0)$ é órbita da ação de $O(V, B, L_0)$ para qualquer $L \in \mathcal{L}^k(L_0)$, ainda mais estes são localmente fechados, então pelo Teorema 3.8 segue que $\mathcal{L}^k(L_0)$ é uma subvariedade mergulhada de \mathcal{L} . Resta então provar a identidade em (3.16).

Para tanto veja que pela Proposição 3.4 temos que $T_L \mathcal{L}^k(L_0)$ coincide com a imagem da aplicação:

$$d\beta_L(Id) : \mathfrak{o}(V, B, L_0) \rightarrow T_L \mathcal{L}.$$

Mas pela Proposição 3.41 temos que se $X \in O(V, B, L_0) \subset O(V, B)$ então:

$$d\beta_L(Id) \cdot X = B(X \cdot, \cdot)|_L.$$

Por outro lado, utilizando o Lema 3.45, vemos que se $X \in \mathfrak{o}(V, B, L_0)$ temos que $B(X \cdot, \cdot)|_{L_0} = 0$. Resumindo temos que

$$Im(d\beta_L(Id)) \subset \{\omega \in B_{a-s}(L) : \omega|_{L \cap L_0} = 0\}.$$

Agora vamos mostrar que dada $\omega \in \{\omega \in B_{a-s}(L) : \omega|_{L \cap L_0} = 0\}$ existe $X \in \mathfrak{o}(V, B, L_0)$ tal que $\omega = B(X \cdot, \cdot)$. Para tanto seja $\{b_j\}_{j=1}^{2n}$ uma base de V tal que $\{b_j\}_{j=1}^n$ é uma base de L_0 e $\{b_i\}_{i=n-k+1}^{2n-k}$ é uma base para L , então definimos $\omega' \in B_{a-s}(V)$ por:

$$\omega'(b_i, b_j) = \begin{cases} \omega(b_i, b_j), & \text{se } i, j \in \{n-k+1, \dots, 2n-k\} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Portanto ω' é tal que $\omega'|_L = \omega$ e $\omega'|_{L_0} = 0$. Como B é não degenerada existe $X \in \text{Lin}(V)$ tal que $\omega' = B(X \cdot, \cdot)$, como $\omega'|_{L_0} = 0$ temos que $X(L_0) \subset L_0$ então $X \in \mathfrak{o}(V, B, L_0)$ e como $\omega'|_L = \omega$ temos que $d\beta_L(Id) \cdot X = \omega$, como queríamos mostrar. ■

3.3 A Grassmanniana Lagrangiana de $E \oplus E^*$

Nessa seção vamos nos especializar no estudo da Grassmanniana Lagrangiana do espaço vetorial split $(E \oplus E^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, onde E é um espaço vetorial real de dimensão finita $n > 0$. Primeiramente vamos utilizar o Corolário 3.43 para explicitar um difeomorfismo entre $O(n)$ e $\mathcal{L}(E \oplus E^*) = \mathcal{L}$, ressaltamos a importância desse difeomorfismo para estender as propriedades de \mathcal{L} . Primeiramente fixe uma base $\{E_1, \dots, E_n\}$ de E , então tal base defina um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ em E pela relação $\langle E_i, E_j \rangle_E = \delta_{ij}$, podemos assim considerar o grupo de transformações ortogonais associada a este produto interno, isto é:

$$O(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E) = \{S \in \text{GL}(E) : \langle S \cdot, S \cdot \rangle_E = \langle \cdot, \cdot \rangle_E\}.$$

Dessa forma o isomorfismo linear $Z : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ induzido por $E_j \mapsto e_j$ onde $\{e_j\}_{j=1}^n$ é a base canônica de \mathbb{R}^n , nós permite identificar o grupo $O(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ com o grupo ortogonal $O(n)$ de \mathbb{R}^n pela relação

$$\begin{aligned} O(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E) &\rightarrow O(n) \\ S &\mapsto Z \circ S \circ Z^{-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $\xi_j = E_j^* \in E^*$ temos pelo exemplo 2.4 que o isomorfismo linear T que leva a base canônica de $\mathbb{R}^{n,n}$ na base

$$\left\{ \frac{E_1 + \xi_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{E_n + \xi_n}{\sqrt{2}}, \frac{E_1 - \xi_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{E_n - \xi_n}{\sqrt{2}} \right\},$$

de $E \oplus E^*$, é tal que o pullback do pareamento $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é dado por $B_{n,n}$, então como feito no Corolário 3.43 temos que o mapa $\Phi_T : \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n,n}) \rightarrow \mathcal{L}$, definido por $L \mapsto T(L)$ é um difeomorfismo. Agora vamos estudar o conjunto $\{(x, Ax) \in \mathbb{R}^{n,n} : x \in \mathbb{R}^n\}$ onde $A \in O(n)$ via o difeomorfismo Φ_T , para tanto considere $x \in \mathbb{R}^n$ e escreva esse vetor em coordenadas como $x = (x_1, \dots, x_n)$, assim podemos escrever o vetor Ax em coordenadas como (y_1, \dots, y_n) , onde $y_j = \sum_{i=1}^n A_{ji}x_i$ para cada $j = 1, \dots, n$, sendo que (A_{ji}) são as coordenadas do operador A na base canônica de \mathbb{R}^n . Assim temos que:

$$\begin{aligned} T((x, Ax)) &= \sum_{j=1}^n x_j \frac{E_j + \xi_j}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^n x_j \frac{E_j - \xi_j}{\sqrt{2}} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{x_j + y_j}{\sqrt{2}} E_j + \sum_{j=1}^n \frac{x_j - y_j}{\sqrt{2}} \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \{Z(x + Ax) + (Z(x - Ax), \cdot)\} \\ &= \frac{1}{2} \{Z(x) + (Z \circ A \circ Z^{-1}(Zx)) + \langle Z(x) - (Z \circ A \circ Z^{-1}(Zx)), \cdot \rangle_E\}, \end{aligned}$$

onde $\langle X, \cdot \rangle_E \in E^*$. Portanto identificando $O(n) \simeq O(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ via a aplicação Z vemos que:

$$\Phi_T(\{(x, Ax) \in \mathbb{R}^{n,n} : x \in \mathbb{R}^n\}) = \{(Id + A)X + \langle (Id - A)X, \cdot \rangle_E \in E \oplus E^* : X \in E\}.$$

Portanto segue do Teorema 3.42 que aplicação $A \mapsto \{(Id + A)X + \langle (Id - A)X, \cdot \rangle_E \in E \oplus E^* : X \in E\}$ é um difeomorfismo.

Por uma questão de simplicidade, será mais conveniente trabalhar com esse difeomorfismo composto com a aplicação $A \mapsto -A$. Portanto temos em resumo o seguinte, fixando uma base $\mathcal{B} = \{E_1, \dots, E_n\}$ de E obtemos um difeomorfismo

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{B}} : O(n) &\rightarrow \mathcal{L}(E \oplus E^*) \\ A &\mapsto L_A, \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde $L_A = \{(Id - A)X + \langle (Id + A)X, \cdot \rangle_E \in E \oplus E^* : X \in E\}$ e usamos a base fixada para identificar o grupo ortogonal $O(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$ com o grupo ortogonal $O(n)$ e E com o seu espaço dual E^* .

Até o fim desta seção fixamos uma base $\mathcal{B} = \{E_1, \dots, E_n\}$ para o espaço E e consideramos o seu difeomorfismo associado $\Gamma_{\mathcal{B}} : O(n) \rightarrow \mathcal{L}(E \oplus E^*)$. Nosso objetivo será estudar as subvariedades $\mathcal{L}^k(L_0)$ para um dado Lagrangiano $L_0 \in \mathcal{L}$, via o difeomorfismo $\Gamma_{\mathcal{B}}$. Para tanto, introduzimos os conjuntos $S\mathcal{L}$ e $S\mathcal{L}^-$, que são definidos como a componente conexa de \mathcal{L} contendo, respectivamente, o elemento E^* e o elemento E , dessa forma temos a seguinte decomposição da Grassmanniana Lagrangiana

$$\mathcal{L} = S\mathcal{L} \sqcup S\mathcal{L}^-.$$

Como o difeomorfismo $\Gamma_{\mathcal{B}}$ mapeia a identidade no elemento E^* , vemos que a restrição desse mapa ao subgrupo $SO(n)$ induz um difeomorfismo $\Gamma_{\mathcal{B}} : SO(n) \rightarrow S\mathcal{L}$.

Antes de estudar os conjuntos $\mathcal{L}^k(L_0)$ relembremos algumas propriedades do grupo ortogonal $O(n)$. Dada uma aplicação $A \in O(n)$ denotamos o espectro de A por:

$$\text{Spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Av = \lambda v, \text{ para algum } v \text{ em } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\},$$

e dado $\lambda \in \text{Spec}(A)$, denotamos por $\text{mul}(A, \lambda)$ a multiplicidade do autovalor λ , isto é, a dimensão do núcleo do operador $A - \lambda Id$. Ainda mais, lembramos que existe uma forma canônica para operadores ortogonais, mais especificamente temos o seguinte resultado.

Teorema 3.49. *Dada uma aplicação $A \in O(n)$ existe uma base ortogonal de \mathbb{R}^n e números $\theta_1, \dots, \theta_k \in [0, 2\pi)$, tais que o operador A nessa base é dado pela matriz*

$$\begin{pmatrix} Id_{m \times m} & & & \\ & -Id_{l \times l} & & \\ & & R(\theta_1) & \\ & & & R(\theta_k) \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

onde $m = \text{mul}(A, 1)$, $l = \text{mul}(A, -1)$ e $R(\theta_j)$ é a matriz dada por:

$$R(\theta_j) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}.$$

Corolário 3.50. *Dada uma aplicação $A \in O(n)$, temos que o determinante dessa aplicação é dado por $(-1)^{\text{mul}(A, -1)}$.*

Proposição 3.51. *Seja $A_0 \in O(n)$. Então $L_A \in \mathcal{L}^k(L_{A_0})$ se e somente, se $\text{mul}(A_0^{-1}A, 1) = k$.*

Demonstração. Primeiramente notamos que $L_A \in \mathcal{L}^k(L_{A_0})$ se e somente, se $\dim(L_A \cap L_{A_0}) = k$. Suponha agora que $\dim(L_A \cap L_{A_0}) = k$, então existem vetores $X_1 + \xi_1, \dots, X_k + \xi_k$ em $E \oplus E^*$ tais que $L_A \cap L_{A_0} = \text{span}\{X_1 + \xi_1, \dots, X_k + \xi_k\}$, mas como $X_j + \xi_j \in L_A \cap L_{A_0}$, para cada $j = 1, \dots, k$, temos que existem únicos vetores $Y_j \in E$ tais que:

$$\begin{cases} X_j = (Id - A)Y_j, \\ \xi_j = \langle (Id + A)Y_j, \cdot \rangle_E, \\ A_0 Y_j = AY_j. \end{cases}$$

Vamos mostrar que o conjunto $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ forma uma base para $\ker(A_0^{-1}A - Id)$. De fato, tome $Y \in E$ tal que $A_0 Y = AY$, portanto o vetor $(Id - A)Y + \langle (Id + A)Y, \cdot \rangle_E \in L_A \cap L_{A_0}$ e então existem $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned} (Id - A)Y &= \sum_{j=1}^k \lambda_j (Id - A)Y_j, \\ (Id + A)Y &= \sum_{j=1}^k \lambda_j (Id + A)Y_j. \end{aligned}$$

Somando as equações acima obtemos que $Y = \sum_{j=1}^k \lambda_j Y_j$, logo $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ gera o subespaço $\ker(A_0^{-1}A - Id)$. Resta provar que os vetores são linearmente independentes, para tanto suponha que existem ζ_1, \dots, ζ_k em \mathbb{R} , tais que $\sum_{j=1}^k \zeta_j Y_j = 0$, mas dessa forma teríamos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \zeta_j (Id - A)Y_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^k \zeta_j (Id + A)Y_j &= 0, \end{aligned}$$

o que implicaria $\sum_{j=1}^k \zeta_j (X_j + \xi_j) = 0$, logo $\zeta_1 = \dots = \zeta_k = 0$. Provando que o conjunto $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ forma uma base para $\ker(A_0^{-1}A - Id)$.

Por outro lado, suponha que $\dim(A_0^{-1}A - Id) = k$, então existem vetores Y_1, \dots, Y_k em E , tal que o conjunto $\{Y_1, \dots, Y_k\}$, forma uma base para $\ker(A_0^{-1}A - Id)$. Para cada $j = 1, \dots, k$ defina

$$\begin{cases} X_j = (Id - A)Y_j, \\ \xi_j = \langle (Id + A)Y_j, \cdot \rangle_E, \\ A_0 Y_j = AY_j. \end{cases}$$

Dessa forma $X_j + \xi_j \in L_A \cap L_{A_0}$, para todo $j = 1, \dots, k$. Reciprocamente vamos mostrar que $L_A \cap L_{A_0} = \text{span}\{X_1 + \xi_1, \dots, X_k + \xi_k\}$, para tanto tome $X + \xi \in L_A \cap L_{A_0}$, logo existe

$Y \in E$ tal que:

$$\begin{cases} X = (Id - A)Y, \\ \xi = \langle (Id + A)Y, \cdot \rangle_E, \\ A_0 Y = AY. \end{cases}$$

Portanto $Y \in \text{span}\{Y_1, \dots, Y_k\}$ e por consequente $X + \xi \in \text{span}\{X_1 + \xi_1, \dots, X_k + \xi_k\}$. Por fim, vamos mostrar que o conjunto $\{X_1 + \xi_1, \dots, X_k + \xi_k\}$ é linearmente independente. Então suponha que existam números reais ζ_1, \dots, ζ_k tais que $\sum_{j=1}^k \zeta_j (X_j + \xi_j) = 0$, dessa forma temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \zeta_j (Id - A)Y_j &= 0, \\ \sum_{j=1}^k \zeta_j (Id + A)Y_j &= 0. \end{aligned}$$

Somando as equações acima obtemos que $\sum_{j=1}^k \zeta_j Y_j = 0$ e portanto temos que $\zeta_j = 0$, para cada $j = 1, \dots, k$. Concluimos assim que o conjunto $\{X_1 + \xi_1, \dots, X_k + \xi_k\}$ é uma base para $L_A \cap L_{A_0}$. Em suma, mostramos que $\dim(L_A \cap L_{A_0}) = k$ se e somente, se $\dim(A_0^{-1}A - Id) = k$ como queríamos. ■

Uma consequência da Proposição anterior, que veremos no exemplo abaixo, é que dado dois subespaços Lagrangianos L_0 e L_1 nem sempre é possível achar uma decomposição Lagrangiana simultânea para L_0 e L_1 , isto é, nem sempre existe $L \in \mathcal{L}$, tal que, $V = L_0 \oplus L = L_1 \oplus L$, o que é um contraste quando consideramos o caso simplético onde isso sempre é possível.

Exemplo 3.52. *Suponha que $n = 3$ e tome L_0, L_1 subespaços Lagrangianos de $E \oplus E^*$. Então existem A_0, A_1 tais que $L_0 = L_{A_0}$ e $L_1 = L_{A_1}$, suponha também que $A_0 \in \text{SO}(3)$ e $A_1 \notin \text{SO}(3)$. Dado $L \in \mathcal{L}^0(L_0)$ a Proposição 3.51 diz que $\text{mul}(A_0^{-1}A, 1) = 0$, portanto o Teorema 3.49 implica que $\det(A_0^{-1}A) = -1$, mas como $A_0 \in \text{SO}(3)$ devemos ter que $\det(A) = -1$, isto é, $\mathcal{L}^0(L_0) \subset S\mathcal{L}^-$. Da mesma forma podemos provar que $\mathcal{L}^0(L_1) \subset S\mathcal{L}$, concluimos então que não existe um subespaço Lagrangiano L satisfazendo $V = L_0 \oplus L = L_1 \oplus L$.*

Outra consequência da Proposição 3.51 é que ela fornece uma decomposição dos espaços $S\mathcal{L}$ e $S\mathcal{L}^-$ em termo das subvariedades $\mathcal{L}^k(L_0)$, para algum L_0 Lagrangiano. É uma consequência interessante dessa decomposição é que essa mostra que dado $L_0 \in \mathcal{L}$ temos que $\mathcal{L}^0(L_0)$ e $\mathcal{L}^1(L_0)$ estão em componentes conexas distintas de \mathcal{L} , e ainda mais, ambos os conjuntos são densos nas suas respectivas componentes conexas.

Corolário 3.53. *Sejam $L_0 \in \mathcal{L}$ e $A_0 \in \text{O}(n)$ tais que $L_0 = L_{A_0}$. Então:*

- Se $A_0 \in \text{SO}(n)$ e n é par temos que:

$$S\mathcal{L} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{L}^{2k}(L_0) \text{ e } S\mathcal{L}^- = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{L}^{2k+1}(L_0).$$

- Se $A_0 \in \text{SO}(n)$ e n é ímpar temos que:

$$S\mathcal{L} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{L}^{2k+1}(L_0) \text{ e } S\mathcal{L}^- = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{L}^{2k}(L_0).$$

- Se $A_0 \notin \text{SO}(n)$ e n é par temos que:

$$S\mathcal{L} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{L}^{2k+1}(L_0) \text{ e } S\mathcal{L}^- = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{L}^{2k}(L_0).$$

- Se $A_0 \notin \text{SO}(n)$ e n é ímpar temos que:

$$S\mathcal{L} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{L}^{2k}(L_0) \text{ e } S\mathcal{L}^- = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{L}^{2k+1}(L_0).$$

Demonstração. Vamos provar apenas o caso em que n é par e $A_0 \in \text{SO}(n)$, pois os outros casos são completamente análogos. Tome $k \geq 0$ e suponha que $L_A \in \mathcal{L}^k(L_0)$ para algum $A \in \text{O}(n)$. Então pela Proposição 3.51 temos que $\text{mul}(A_0^{-1}A, 1) = k$, assim pelo Corolário 3.50 temos que $\det(A) = \det(A_0^{-1}A) = (-1)^k$, portanto $A \in \text{SO}(n)$ se k é par e $A \notin \text{SO}(n)$ se k é ímpar, a conclusão segue do fato que $\text{SO}(n) \ni A \mapsto L_A \in S\mathcal{L}$ é um difeomorfismo e que temos a seguinte decomposição $\mathcal{L} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{L}^k(L_0)$. ■

Corolário 3.54. Dado $L_0 \in \mathcal{L}$, os conjuntos $\mathcal{L}^0(L_0)$ e $\mathcal{L}^1(L_0)$ estão em componentes conexas distintas de \mathcal{L} e ambos são densos nas suas respectivas componentes conexas.

Demonstração. O fato dos conjuntos $\mathcal{L}^0(L_0)$ e $\mathcal{L}^1(L_0)$ estarem em componentes conexas distintas segue do Corolário anterior. Para ver que ambos são densos, notamos que pelo Teorema 3.48 o complementar desses conjuntos em suas respectivas componentes conexas é dado pela união de subvariedades de codimensão positiva. ■

Por fim nessa seção, relembramos que o Teorema 2.56 nós diz que para cada $L \in \text{Lag}(E \oplus E^*)$ existe um único subespaço $W \subset E$ e uma única 2-forma ω tais que $L = L(W, \omega) = \{X + \iota_X \tilde{\omega} + \xi : X \in W, \text{ e } \xi \in W^0\}$. Por outro lado, sabemos que também existe única $A \in \text{O}(n)$ tal que $L(W, \omega) = L = L_A$, então é natural a pergunta de qual é a relação entre A e o par (W, ω) , o próximo exemplo é devoto a responder essa pergunta.

Exemplo 3.55. Seja $L \in \mathcal{L}$ fixado. Primeiro suponha que temos $A \in O(n)$ tal que $L = L_A$, então vamos derivar $W \subset E$ e $\omega \in \bigwedge^2 W^*$, em função de A , de tal forma que $L_A = L(W, \omega)$. Para tanto, note que pelo Teorema 2.56 temos que $W = \pi_E(L_A)$, mas como $L_A = \{(Id - A)X + \langle (Id + A)X, \cdot \rangle_E \in E \oplus E^* : X \in E\}$ devemos ter que:

$$W = \pi_E(L_A) = \text{Im}(Id - A).$$

Ainda utilizando o Teorema 2.56, vemos que a forma ω é dada por $\omega(X_1, X_2) = \xi_1(X_2)$, onde $X_1 + \xi_1, X_2 + \xi_2 \in L_A$. Portanto como $(Id - A)X_1 + \langle (Id + A)X_2, \cdot \rangle_E \in L_A$, temos que:

$$\begin{aligned} \omega((Id - A)X_1, (Id - A)X_2) &= \langle (Id + A)X_1, (Id - A)X_2 \rangle_E \\ &= \langle X_1, X_2 \rangle_E + \langle AX_1, X_2 \rangle_E - \langle X_1, AX_2 \rangle_E - \langle AX_1, AX_2 \rangle_E \\ &= \langle X_1, (A^T - A)X_2 \rangle_E. \end{aligned}$$

Onde A^T é a matriz adjunta relativa à g_E . Dessa forma, derivamos completamente o par (W, ω) em termos de A .

Agora suponha que temos $W \subset E$ e $\omega \in \bigwedge^2 W^*$ tais que $L = L(W, \omega)$, nosso objetivo é derivar $A \in O(n)$ em termos do par (W, ω) , de tal forma que $L_A = L(W, \omega)$.

Para tanto, fixe $X \in E$, como $(Id - A)X + \langle (Id + A)X, \cdot \rangle_E \in L(W, \omega)$, existem $Y \in W$ e $\alpha \in W^0$ tais que:

$$\begin{cases} X - AX = Y, \\ \langle (Id + A)X, Y' \rangle_E = \tilde{\omega}(Y, Y') + \alpha(Y'), \quad \forall Y' \in E. \end{cases}$$

Onde $\tilde{\omega} \in \bigwedge^2 E^*$ é uma extensão qualquer de ω . Dessa forma vemos que $AX = X - Y$, então

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(Y, Y') + \alpha(Y') &= \langle (Id + A)X, Y' \rangle_E \\ &= \langle Y', 2X - Y \rangle_E, \end{aligned}$$

em outras palavras:

$$2 \langle Y, Y' \rangle_E - \alpha(Y') = \tilde{\omega}(Y, Y') + \langle Y', Y \rangle_E. \quad (3.19)$$

Agora tome $\{F_1, \dots, F_p\} \subset W$, uma base $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ -ortonormal para W , então existem $\xi_1, \dots, \xi_p \in \mathbb{R}$ tais que $Y = \sum_{j=1}^p \xi_j F_j$. Fazendo $Y' = F_k$ em (3.19), para $k \in \{1, \dots, p\}$, vemos que:

$$\begin{aligned} 2 \langle F_k, X \rangle_E &= \omega(Y, F_k) + \xi_k \\ &= \sum_{j=1}^p \xi_j \omega(F_j, F_k) + \xi_k. \end{aligned}$$

Então definindo:

$$\omega_{jk} = \begin{cases} \omega(F_j, F_k), & \text{para } j \neq k \\ 1, & \text{para } j = k. \end{cases}$$

Obtemos que:

$$2 \langle F_k, X \rangle_E = \sum_{j=1}^p \xi_j \omega_{jk}. \quad (3.20)$$

Portanto, definido a matriz $A_\omega = (\omega_{jk})_{j,k=1}^p \in M_{p \times p}(\mathbb{R})$, a aplicação $\pi_W : E \mapsto \mathbb{R}^p$ dada por $\pi_E(X) = (\langle F_1, X \cdot \rangle_E, \dots, \langle F_p, X \cdot \rangle_E)$ e o vetor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$, podemos reescrever a equação (3.20) como:

$$A_\omega^T \xi = 2\pi_W(x),$$

onde A_ω^T é a matriz transposta de A_ω . Como a matriz A_ω é dada pela soma de uma matriz anti-simétrica com a identidade está deve ser inversível, então podemos expressar $AX = Y - X$, onde:

$$\begin{cases} Y = \sum_{j=1}^p \xi_j F_j, \\ \xi = -2(A_\omega^{-1})\pi_W(X). \end{cases}$$

Assim conseguimos descrever o operador A completamente em termos de W e ω .

Capítulo 4

O ÍNDICE DE MASLOV EM $E \oplus E^*$

Considere E um espaço vetorial real com dimensão finita $n \geq 3$, então podemos munir o espaço vetorial $E \oplus E^*$ com o pareamento canônico $\langle \cdot, \cdot \rangle$, assim obtemos um espaço vetorial split $(E \oplus E^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Denotamos por $\mathcal{L} = \mathcal{L}(E \oplus E^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ a Grassmanniana Lagrangiana associada, e denotamos por $S\mathcal{L}$ a componente conexa do elemento $E^* \in \mathcal{L}$.

O objetivo desse capítulo é desenvolver uma definição para o Índice de Maslov para curvas em \mathcal{L} baseado na definição do índice de Maslov para o caso Simplético (ver [9], [8] e [6]), mais especificamente procuramos um mapa que toma valores em um subconjunto de $C^0([0, 1], \mathcal{L})$, de tal forma que o índice seja um invariante homotópico e também possa ser estudado de um ponto de vista de transversalidade. Dado o fato que estamos interessados em estudar propriedades homotopicas das curvas vamos restringimos nossos estudos para a componente conexa $S\mathcal{L}$ de \mathcal{L} .

4.1 Caso $n = 3$

O objetivo dessa seção é definir o índice de Maslov para o caso que $\dim(E) = 3$, mas mais importante que isso é introduzir os conceitos necessários para estudar o caso geral, e apresentar a necessidade de utilizar ferramentas como espaço de recobrimento, Álgebras de Clifford e o Grupo Spin.

O primeiro passo para desenvolver uma definição para o Índice de Maslov é estudar o grupo fundamental de $S\mathcal{L}$, mas veja que fixada uma base $\mathcal{B} = \{E_1, E_2, E_3\}$ de E a aplicação $\Gamma_{\mathcal{B}} : \text{SO}(3) \rightarrow S\mathcal{L}$, definida em (3.17), é um difeomorfismo, então podemos focar em estudar o grupo fundamental do grupo especial ortogonal $\text{SO}(3)$.

Para estudar o grupo fundamental de $\text{SO}(3)$ vamos introduzir o conjunto dos Quatérnios. De maneira informal, o conjunto dos quatérnios é dado pelo espaço vetorial $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, munido de uma multiplicação $\cdot : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, de tal forma que o par (\mathbb{H}, \cdot) forma uma álgebra associativa com unidade.

De maneira mais explicita, denotando por $\mathbf{1} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{i} = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 0, 1, 0)$

e $\mathbf{k} = (0, 0, 0, 1)$ a base canônica de \mathbb{R}^4 , a multiplicação em \mathbb{H} é definida nos elementos da base pela elegante formula:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1},$$

e estendida por bilinearidade para os elementos gerais de \mathbb{H} .

Como dito anteriormente a multiplicação nos quatérnios é distributiva e associativa, porém não é comutativa. Por outro lado, todo quatérnio não nulo $\varphi \in \mathbb{H}$ possui um inverso multiplicativo φ^{-1} . Para ver isso introduzimos a operação de conjugação, se $\varphi = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, então definimos o conjugado de φ por:

$$\bar{\varphi} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

É fácil ver que $\varphi\bar{\varphi} = \bar{\varphi}\varphi = |\varphi|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, portanto se φ é não nulo temos que:

$$\varphi^{-1} = \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|^2}.$$

É possível mostrar que para todos φ e φ' em \mathbb{H} , temos que $|\varphi\varphi'| = |\varphi||\varphi'|$. Portanto o grupo das unidades da álgebra \mathbb{H} é dado por $G_{\mathbb{H}} = \{\varphi \in \mathbb{H} : |\varphi| \neq 0\}$, e a Proposição A.1 garante que $G_{\mathbb{H}}$ é um grupo de Lie aberto em \mathbb{H} . Ainda mais, como o modulo preserva o produto, o subconjunto $S^3 \subset G_{\mathbb{H}}$ determina um subgrupo fechado, portanto define um subgrupo de Lie. O nosso objetivo é mostrar que S^3 define o recobrimento duplo universal de $SO(3)$.

Assim como é feito nos complexos podemos definir os quatérnios reais e imaginários puros. Mais precisamente, definimos $\mathbb{R} = \{t\mathbf{1} : t \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbb{R}^3 = \{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, e denominamos \mathbb{R} como o conjunto dos quatérnios reais e \mathbb{R}^3 como o conjunto dos quatérnios imaginários puros.

Lema 4.1. *Seja $\varphi \in \mathbb{H}$ tal que φ comuta com todo quatérnio imaginário puro. Então φ é um quatérnio real.*

Demonstração. Se $\varphi = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ então $\mathbf{i}\varphi = -b\mathbf{1} + a\mathbf{i} - d\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, e $\varphi\mathbf{i} = -b\mathbf{1} + a\mathbf{i} + d\mathbf{j} - c\mathbf{k}$. Segue de $\mathbf{i}\varphi = \varphi\mathbf{i}$ que $c = d = 0$, isto é, $\varphi = a\mathbf{1} + b\mathbf{i}$. Da mesma forma, $\varphi\mathbf{j} = a\mathbf{j} + b\mathbf{k}$ e $\mathbf{j}\varphi = a\mathbf{j} - b\mathbf{k}$, então de $\varphi\mathbf{j} = \mathbf{j}\varphi$ temos que $b = 0$, e $\varphi = a\mathbf{1} \in \mathbb{R}$, como o desejado. ■

Proposição 4.2. *Existe um homomorfismo de Lie sobrejetor $\text{Ad} : S^3 \rightarrow SO(3)$, cujo o núcleo é $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$.*

Demonstração. Para cada $\varphi \in S^3$, associamos a transformação linear $\text{Ad}_{\varphi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\text{Ad}_{\varphi}(v) = \varphi v \varphi^{-1}.$$

Primeiro vamos provar que Ad está bem definida, seja $\varphi \in S^3$, considere primeiro Ad_φ definida em \mathbb{R}^4 , evidentemente Ad_φ é linear, e como $|\varphi v \varphi^{-1}| = |v|$, $\text{Ad}_\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ é ortogonal. Ainda mais, como $\text{Ad}_\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, o subespaço dos quatérnios reais é invariante por Ad_φ . Portanto, o seu complemento ortogonal \mathbb{R}^3 também é invariante por Ad_φ . Portanto, a transformação ortogonal $\text{Ad}_\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ está bem definida.

As colunas da matriz de Ad_φ , na base canônica, são dadas pelos vetores $\varphi \mathbf{i} \varphi^{-1}$, $\varphi \mathbf{j} \varphi^{-1}$ e $\varphi \mathbf{k} \varphi^{-1}$, que dependem de forma suave de φ , portanto a aplicação Ad é suave. Temos que $\det(\text{Ad}_\varphi) = \pm 1$, para todo $\varphi \in S^3$. Como S^3 é conexo e $\det(\text{Ad}_1) = 1$, devemos ter que $\det(\text{Ad}_\varphi) = 1$, para cada $\varphi \in S^3$, portanto $\text{Im}(\text{Ad}) \subset \text{SO}(3)$.

Evidentemente a aplicação Ad é um homomorfismo de grupo, e ainda mais o seu núcleo é dado pelo conjunto $\{\varphi \in S^3 : \varphi v = v \varphi \forall v \in \mathbb{R}^3\}$. Pelo Lema anterior concluímos que o núcleo de Ad contém apenas os quatérnios $\{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$. Em particular, Ad é localmente injetiva.

Resta mostra que Ad é sobrejetiva, mas como S^3 é compacta e $\text{SO}(3)$ é conexo basta mostrar que Ad é uma aplicação aberta. De fato, se Ad é aberta, o fato de S^3 ser compacto garante que $\text{Ad}(S^3)$ é um conjunto aberto e fechado em um conexo, portanto deve ser tudo.

Para mostrar que Ad é uma aplicação aberta, notamos que como essa é um homomorfismo de grupos de Lie tem posto constante. Portanto utilizando o Teorema do Posto, segue do fato que Ad é localmente injetiva que seu posto é máximo, agora como $\dim(\text{SO}(3)) = \dim(S^3)$, este mapa deve ser um difeomorfismo local, em particular um mapa aberto. ■

Definindo o subgrupo $\mathbb{Z}_2 = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ de S^3 , vemos que $\mathbb{Z}_2 = \ker(\text{Ad})$. Ainda mais, é fácil ver que \mathbb{Z}_2 age de forma suave e livre, por translação à esquerda, em S^3 . Portanto pelo Teorema B.5 temos que a projeção canônica $\pi : S^3 \rightarrow S^3/\mathbb{Z}_2$ é um recobrimento duplo, e como S^3 é conexa por caminhos e simplesmente conexa temos que esse é o recobrimento universal. Notamos também, que por definição, o espaço S^3/\mathbb{Z}_2 é o espaço projetivo P^3 .

A Proposição anterior nos diz que o mapa $\text{Ad} : S^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ é constante ao longo das fibras de π , portanto como π é uma submersão podemos passar ao quociente de forma suave obtendo uma aplicação $\overline{\text{Ad}} : P^3 \rightarrow \text{SO}(3)$. Da mesma forma, π é constante ao longo das fibras de φ , então novamente podemos passar ao quociente de forma suave, obtendo uma aplicação $\overline{\pi} : \text{SO}(3) \rightarrow P^3$. Concluímos que $\overline{\text{Ad}} : P^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ é um difeomorfismo com inversa dada por $\overline{\pi} : \text{SO}(3) \rightarrow P^3$, em suma temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{SO}(3) \\
 \pi \downarrow & \searrow \overline{\text{Ad}} & \nearrow \overline{\pi} \\
 P^3 & &
 \end{array}$$

Portanto o mapa $\text{Ad} = \overline{\text{Ad}} \circ \pi : S^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ define o recobrimento universal de $\text{SO}(3)$. Então, definido $\rho \doteq \Gamma_B \circ \text{Ad} : S^3 \rightarrow S\mathcal{L}$, temos que o mapa ρ define o recobrimento universal de $S\mathcal{L}$, em particular podemos aplicar a teoria desenvolvida no Apêndice B para estudar o conjunto:

$$\Pi(S\mathcal{L}) = \{\gamma \in C^0([0, 1], S\mathcal{L}) : \gamma(0) = \gamma(1)\}.$$

Utilizando a Definição B.10 e a Proposição B.12, garantimos a existência de uma aplicação $\mu : \Pi(S\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, dada por:

$$\mu(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1); \\ 0, & \text{se } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1), \end{cases}$$

onde, $\gamma \in \Pi(S\mathcal{L})$ e $\tilde{\gamma}$ é um levantamento de γ . Satisfazendo as seguinte Propriedades:

Proposição 4.3. *Sejam $\gamma, \sigma \in \Pi(S\mathcal{L})$. Então:*

1. *Se γ e σ tem o mesmo ponto base, então:*

$$\mu(\gamma * \sigma) = (\mu(\gamma) + \mu(\sigma)) \bmod 2.$$

2. *Se γ e σ são livremente homotópicas¹, então $\mu(\gamma) = \mu(\sigma)$.*

3. *Se $\mu(\gamma) = \mu(\sigma)$, então γ e σ são livremente homotópicas. Caso γ e σ tenham o mesmo ponto base, temos que $\gamma \cong \sigma$.*

4. *Dado $L_0 \in S\mathcal{L}$ e $k \in \mathbb{Z}_2$ existe $\gamma \in \Pi(S\mathcal{L})$, tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = L_0$ e $\mu(\gamma) = k$.*

Corolário 4.4. *Dado $L_0 \in S\mathcal{L}$ temos que o 2-índice $\mu : \Pi(S\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ descende a um aplicação*

$$\begin{aligned} \bar{\mu} : \pi_1(S\mathcal{L}, L_0) &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ [\gamma] &\mapsto \mu(\gamma). \end{aligned}$$

Ainda mais, a aplicação $\bar{\mu}$ é um isomorfismo de grupos.

Uma maneira ingênua de definir o Índice de Maslov para $S\mathcal{L}$, seria através do mapa $\mu : \Pi(S\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, e dessa forma poderíamos provar que essa é a única aplicação $\Pi(S\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ satisfazendo as propriedades da Proposição 4.3.

¹Seja X um espaço topológico, dois caminhos fechados e contínuos $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow X$, são ditos livremente homotópicos, se existe uma aplicação contínua $H : [a, b] \times [a, b] \rightarrow X$, tal que: $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = \beta(s)$ e $H(0, t) = H(1, t)$, para cada $t \in [a, b]$.

Mas a principio essa definição não nós da nenhuma propriedade relacionada a teoria de transversalidade como temos para o caso simplético. Para tanto, inspirado no Lema 1.13 e no Exemplo 1.16, podemos estudar a relação do mapa $\mu : \Pi(S\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, com as subvariedades $\mathcal{L}^k(L_0)$, para algum $L_0 \in \mathcal{L}$. Mas note que diferente do caso simplético, a subvariedade $\mathcal{L}^1(L_0)$ não tem codimensão 1 em \mathcal{L} , de fato tem codimensão 0, ainda mais podemos ter que a intersecção de $\mathcal{L}^1(L_0)$ com $S\mathcal{L}$ é vazia.

Por outro lado, fazendo $L_0 = L_{-Id} = E \in \mathcal{L}$ e utilizando o Corolário 3.53, garantimos a existência de uma decomposição

$$S\mathcal{L} = \mathcal{L}^0(L_0) \sqcup \mathcal{L}^2(L_0),$$

onde $\mathcal{L}^0(L_0)$ é aberto e denso em $S\mathcal{L}$, e $\mathcal{L}^2(L_0)$ é uma subvariedade de codimensão 1 em $S\mathcal{L}$. O resto dessa seção é devoto a estudar as relações da aplicação $\mu : \Pi(S\mathcal{L}) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ com a subvariedade $\mathcal{L}^2(L_0)$.

Primeiramente, notamos que a Proposição 3.51 garante que:

$$\Gamma_{\beta}^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0)) = \{A \in \text{SO}(3) : \text{mul}(A, -1) = 2\}.$$

Como para toda aplicação $A \in \text{SO}(3)$, existe $\varphi \in S^3$ tal que $\text{Ad}_{\varphi} = A$, é natural se perguntar quais condições φ deve satisfazer para que $\text{mul}(\text{Ad}_{\varphi}, -1) = 2$.

Suponha que $\varphi \in S^3$ e existe $w = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, tal que $\text{Ad}_{\varphi}(w) = -w$, ou de forma equivalente:

$$\varphi w + w\varphi = 0.$$

Se $\varphi = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, temos que:

$$\varphi w = (-bx - cy - dz)\mathbf{1} + (ax + cz - dy)\mathbf{i} + (ay - bz + dx)\mathbf{j} + (az + by - cx)\mathbf{k},$$

por outro lado

$$w\varphi = (-bx - cy - dz)\mathbf{1} + (ax + dy - cz)\mathbf{i} + (-dx + ay + bz)\mathbf{j} + (xc - yb + az)\mathbf{k}.$$

Então a equação $\varphi w + w\varphi = 0$ é equivalente ao sistema de equações:

$$\begin{cases} bx + cy + dz = 0, \\ 2ax = 0, \\ 2ay = 0, \\ 2az = 0. \end{cases}$$

Mas como $w \neq 0$, devemos ter que $a = 0$. Então a equação $\text{Ad}_\varphi(w) = -w$, é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} bx + cy + dz = 0, \\ a = 0. \end{cases}$$

Portanto provamos o seguinte Teorema:

Teorema 4.5. *Seja $\varphi = a\mathbf{I} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in S^3$. Então existe $w = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tal que $\text{Ad}_\varphi(w) = -w$, se e somente, se $a = 0$ e $bx + cy + dz = 0$.*

Corolário 4.6. *Dado $\varphi = a\mathbf{I} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in S^3$ temos que $\text{mul}(\text{Ad}_\varphi, -1) = 2$, se e somente, se $a = 0$.*

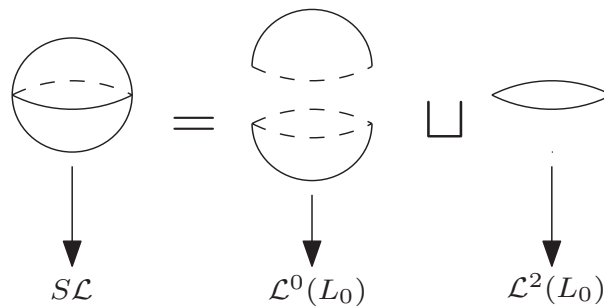
Demonstração. Se $\text{mul}(\text{Ad}_\varphi, -1) = 2$, existe $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tal que $\text{Ad}_\varphi w = -w$, então pelo Teorema anterior temos que $a = 0$.

Agora suponha que $a = 0$, então $\varphi \in \mathbb{R}^3$. Logo existem $\{w_1, w_2\} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tais que $\{w_1, w_2\}$ é uma base para o espaço $\{w \in \mathbb{R}^3 : \langle \varphi, w \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0\}$. Portanto, novamente pelo Teorema anterior, temos que $\text{Ad}_\varphi(w_j) = -w_j$, para todo $j = 1, 2$, assim $\text{mul}(\text{Ad}_\varphi, -1) = 2$. ■

Definindo $S^2 = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in S^3 : a = 0\} \subset S^3$, temos que:

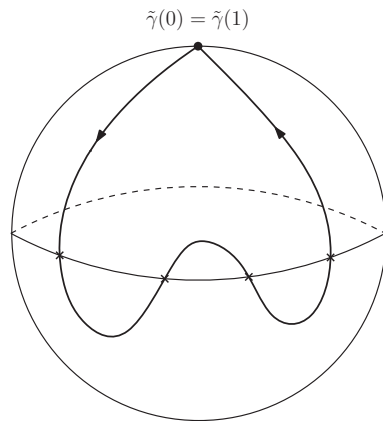
$$\text{Ad}(S^2) = \{A \in \text{SO}(3) : \text{mul}(A, -1) = 2\} = \Gamma_B^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0)).$$

Mas note que utilizando o diagrama (4.1), é fácil ver que podemos induzir uma estrutura de subvariedade em $\text{Ad}(S^2)$, de tal que forma que $\text{Ad}(S^2)$ é difeomorfa ao espaço quociente $S^2/\mathbb{Z}_2 = P^2$. Portanto, devemos ter que $\mathcal{L}^2(L_0)$ é difeomorfo à P^2 , uma consequência muito relevante desse fato é que, a subvariedade $\mathcal{L}^2(L_0)$ não possui uma coorientação em $S\mathcal{L}$, diferente do caso simplético (ver [8]). Em suma, temos a seguinte ilustração do recobrimento $\rho : S^3 \rightarrow S\mathcal{L}$:

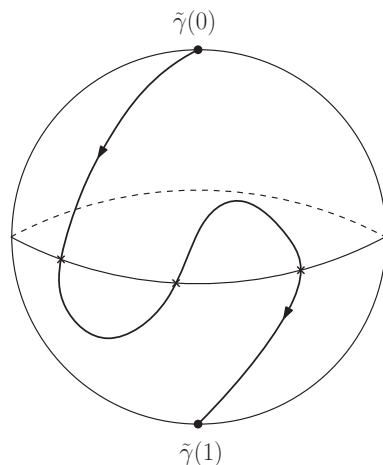


Exemplo 4.7. Interseções Transversais.

De maneira informal considere a seguinte situação, suponha que $\gamma \in \Pi(S\mathcal{L})$ é um loop suave tal que $\gamma(0) = \gamma(1) \in \mathcal{L}^0(L_0)$, e para todo $t_0 \in (0, 1)$ tal que $\gamma(t_0) \in \mathcal{L}^2(L_0)$, temos que essa interseção é transversal (no sentido que o vetor tangente a γ , no tempo $t = t_0$, não está contido no espaço tangente de $\mathcal{L}^2(L_0)$). Então $\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(1) \notin S^2$, e toda interseção com S^2 é transversal, o que garante que a quantidade de interseções é finita. Ainda mais, vemos que $\mu(\gamma) = 0$, se e somente, se $\tilde{\gamma}$ é um loop, e nesse caso temos que a quantidade de interseções com S^2 é par:

Figura 4.1: $\mu(\gamma) = 0$.

E temos que $\mu(\gamma) = 1$, se e somente, se $\tilde{\gamma}$ não é um loop, e nesse caso temos que a quantidade de interseções com S^2 é ímpar:

Figura 4.2: $\mu(\gamma) = 1$.

Já que o número de interseções transversais de $\tilde{\gamma}$ com S^2 , é exatamente o número de

interseções transversais de γ com $\mathcal{L}^2(L_0)$, temos a seguinte formula para o índice $\mu(\gamma)$:

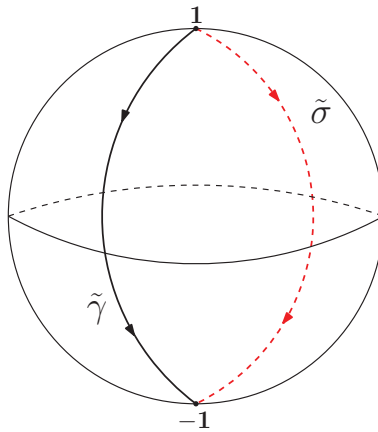
$$\mu(\gamma) = (\#\{t \in (0, 1) : \gamma(t) \in \mathcal{L}^2(L_0)\}) \bmod 2.$$

Na próxima seção vamos voltar a esse exemplo de maneira mais formal e precisa.

Exemplo 4.8. Interseção Não-Orientada.

Recordamos que, no caso simplético, dado um loop γ não trivial, então γ não é homotópico por caminhos ao mesmo loop no sentido oposto γ^{-1} , esse fato é devido a Proposição 1.15, item 3. Essa Proposição reflete o fato que, no caso simplético, estamos lidando com interseções com sinais, isso é, importa o sentido que a curva γ intersecciona a subvariedade $\Lambda^1(L_0)$ (ver Capítulo 1).

Com esse exemplo vamos mostrar que o mesmo não ocorre nesse caso. Para tanto considere $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow S^3$, um grande arco de S^3 conectando os pontos $\mathbf{1}$ e $-\mathbf{1}$ de tal forma que $\tilde{\gamma}(1/2) \in S^2$. Então definindo $\gamma \doteq \rho \circ \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$, temos que $\gamma(1/2) \in \mathcal{L}^2(L_0)$, e ainda mais, pelo Corolário 4.4 o loop γ não é trivial. Note que, $\tilde{\gamma}^{-1}$ é um levantamento de γ^{-1} , porém, a curva $\tilde{\sigma} \doteq -\tilde{\gamma}^{-1}$ também é um levantamento de γ^{-1} , e claramente as curva $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\sigma}$ são homotópicas com pontos fixos, como podemos ver na figura abaixo:



Fazendo \tilde{H} uma homotopia com pontos fixos entre $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\sigma}$, vemos que $H \doteq \rho \circ \tilde{H}$ é uma homotopia por caminhos entre γ e γ^{-1} , como queríamos mostrar.

O próximo passo é descrever o Índice de Maslov como um operador $\mu : H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0)) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, seguindo a teoria desenvolvida para o caso simplético, ver definição 1.14. Para tanto, precisamos provar que existe um isomorfismo $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0)) \simeq \mathbb{Z}_2$, e adaptar o Lema 1.13.

Como o grupo fundamental de $S\mathcal{L}$ é abeliano, segue do Teorema de Hurewicz a seguinte Proposição.

Proposição 4.9. *O primeiro grupo de homologia singular $H_1(S\mathcal{L})$ de $S\mathcal{L}$ é isomorfo à \mathbb{Z}_2 .*

E utilizando o fato que qualquer complementar Lagrangiano L_1 à L_0 , fornece um difeomorfismo $\chi_{L_1, L_0} : \mathcal{L}^0(L_0) \rightarrow \text{Ba-s}(L_1) \simeq \mathbb{R}^3$ (ver Corolário 3.34), obtemos o seguinte resultado:

Corolário 4.10. *A inclusão:*

$$\mathfrak{q} : (S\mathcal{L}, \emptyset) \rightarrow (S\mathcal{L}, \Lambda^0(L_0))$$

induz um isomorfismo:

$$\mathfrak{q}_* : H_1(S\mathcal{L}) \rightarrow H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0)).$$

Em particular, o grupo de homologia relativo $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0))$ é isomorfo a \mathbb{Z}_2 .

Com a finalidade de apresentar uma adaptação do Lema 1.13, fazemos a seguinte definição:

Definição 4.11. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Lambda$ uma curva de classe C^1 . Dizemos que γ intersecta transversalmente o conjunto $\mathcal{L}^2(L_0)$, no instante $t = t_0 \in (0, 1)$, se $\gamma(t_0) \in \mathcal{L}^2(L_0)$, e temos que:*

$$\text{span}\{\gamma'(t_0)\} \oplus T_{\gamma(t_0)}\mathcal{L}^2(L_0) = T_{\gamma(t_0)}S\mathcal{L}.$$

Lema 4.12. *Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$, curvas de classe C^1 com extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$, tais que γ_1 e γ_2 intersectam $\mathcal{L}^2(L_0)$ uma única vez, e tal interseção é transversal. Então γ_1 e γ_2 são homologas em $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0))$. E qualquer uma dessas curvas define um gerador para $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0))$.*

Demonstração. Primeiramente, considere o mapa $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dado pela projeção na primeira coordenada, isto é:

$$f(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) = a,$$

para cada $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in S^3$. Então notamos que $f^{-1}(0) = S^2$, e 0 é um valor regular de f .

Sejam $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 : [0, 1] \rightarrow S^3$ levantados de γ_1 e γ_2 , tais que $f(\tilde{\gamma}_j(0)) > 0$, para $j = 1, 2$. Então para mostrar que γ_1 e γ_2 são homologas em $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0))$ basta mostrar que $f(\tilde{\gamma}_j(0)) < 0$, para $j = 1, 2$. De fato, pois nesse caso existem caminhos suaves $\sigma_1, \sigma_2 : [0, 1] \rightarrow S^3$, com $\text{Im}(\sigma_1) \subset \{\varphi \in S^3 : f(\varphi) > 0\}$ e $\text{Im}(\sigma_2) \subset \{\varphi \in S^3 : f(\varphi) < 0\}$ satisfazendo:

$$\sigma_1(0) = \tilde{\gamma}_1(0), \quad \sigma_1(1) = \tilde{\gamma}_2(0);$$

$$\sigma_2(0) = \tilde{\gamma}_1(1), \quad \sigma_2(1) = \tilde{\gamma}_2(1).$$

Dessa forma, as curvas $\sigma_2 * \tilde{\gamma}_1 * \sigma_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ são homotópicas com pontos fixos em S^3 , já que S^3 é simplesmente conexa. Logo essa homotopia, induz uma homotopia entre γ_1 e γ_2 com extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$ e portanto, γ_1 e γ_2 são homologas em $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0))$, como o desejado.

Resta mostrar que $f(\tilde{\gamma}_j(1)) < 0$, para $j = 1, 2$. Por comodidade, suponha que γ representa alguma das duas curvas γ_1 ou γ_2 , e seja $\tilde{\gamma}$ um levantamento de γ . Como ρ é um difeomorfismo local é fácil ver que as hipóteses do Lema garante que, $\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(1) \notin S^2$, existe único $t_0 \in (0, 1)$ tal que $\tilde{\gamma}(t_0) \in S^2$ e

$$\text{span}\{\tilde{\gamma}'(t_0)\} \oplus T_{\tilde{\gamma}(t_0)}S^2 = T_{\tilde{\gamma}(t_0)}S^3.$$

Vamos mostrar que $f(\tilde{\gamma}(1)) < 0$. Suponha por absurdo que $f(\tilde{\gamma}(1)) > 0$, então se $\xi \doteq f \circ \tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, temos que $\xi(t) > 0$, para cada $t \neq t_0$ e $\xi(t_0) = 0$, logo a função ξ , de classe C^1 , possui um mínimo em $t = t_0$.

Seja g uma métrica Riemanniana em S^3 , então podemos definir o gradiente de f associado à métrica g , e fazendo isto temos que:

$$T_{\tilde{\gamma}(t_0)}S^3 = \text{span}\{\nabla f(\tilde{\gamma}(t_0))\} \oplus T_{\tilde{\gamma}(t_0)}S^2,$$

já que $f(\tilde{\gamma}(t_0)) = 0$, e 0 é um valor regular para f . Por outro lado, o fato de ξ ter um mínimo em $t = t_0$ implica que:

$$0 = \xi'(t_0) = g(\nabla f(\tilde{\gamma}(t_0)), \tilde{\gamma}'(t_0)),$$

dessa forma $\tilde{\gamma}'(t_0) \in [\nabla f(\tilde{\gamma}(t_0))]^{\perp_g} = T_{\tilde{\gamma}(t_0)}S^2$, absurdo pois $\tilde{\gamma}'(t_0)$ é transversal à $T_{\tilde{\gamma}(t_0)}S^2$, então devemos ter que $f(\tilde{\gamma}(1)) < 0$, como o desejado.

Para provar que qualquer uma dessas curvas define um gerador para $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0))$, segundo a Proposição 4.9 e o Corolário 4.10, basta exibir um loop não trivial $\gamma \in \Pi(S\mathcal{L})$ satisfazendo as hipóteses de transversalidade. Para tanto basta considerar a curva $\gamma = \rho \circ \tilde{\gamma}$, onde $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow S^3$ é dada por, $\tilde{\gamma}(t) = \cos(\pi t) + \sin(\pi t)\mathbf{k}$. ■

Agora estamos completamente aptos a definir o Índice de Maslov para o espaço vetorial split $(E \oplus E^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, relativo ao Lagrangiano $L_0 = E \in \mathcal{L}$.

Definição 4.13. *Definimos um isomorfismo:*

$$\mu_{L_0} : H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0)) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \tag{4.1}$$

da seguinte forma: tome uma curva γ de classe C^1 em $S\mathcal{L}$ com os extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$ tal que γ tenha apenas uma interseção com $\mathcal{L}^2(L_0)$, sendo essa interseção transversal. Defina μ_{L_0} exigindo que a classe de homologia da curva γ seja levada no elemento $1 \in \mathbb{Z}_2$. Pelo Lema 4.12, o isomorfismo (1.7) está bem definido, isto é, independe da escolha de curva γ .

Suponha agora que $\gamma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$ é uma curva arbitrária contínua, com os extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$, então denotamos por $\mu_{L_0}(\gamma) \in \mathbb{Z}_2$ o elemento correspondente à classe de homologia de γ pelo isomorfismo (4.1). O número $\mu_{L_0}(\gamma)$ é chamado de Índice de Maslov da curva γ relativo ao Lagrangiano L_0 .

A seguir apresentamos algumas propriedades do Índice de Maslov, que seguem diretamente das propriedades da homologia relativa.

Proposição 4.14. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$ uma curva com extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$, então temos que:*

1. *se $\sigma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$ é uma curva com os extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$ tal que $\gamma(1) = \sigma(0)$, então $\mu_{L_0}(\gamma * \sigma) = (\mu_{L_0}(\gamma) + \mu_{L_0}(\sigma)) \bmod 2$;*
2. *$\mu_{L_0}(\gamma^{-1}) = \mu_{L_0}(\gamma)$;*
3. *se $\text{Im}(\gamma) \subset \mathcal{L}^0(L_0)$ então $\mu_{L_0}(\gamma) = 0$;*
4. *se $\sigma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$ é homotópica a γ com pontos livres em $\mathcal{L}^0(L_0)$, então $\mu_{L_0}(\gamma) = \mu_{L_0}(\sigma)$;*
5. *existe uma vizinhança \mathcal{U} de γ em $C^0([a, b], S\mathcal{L})$ dotado da topologia compacta-aberta tal que, se $\sigma \in \mathcal{U}$ tem extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$, então $\mu_{L_0}(\gamma) = \mu_{L_0}(\sigma)$.*

Observação 4.15. *O objetivo dessa seção é mostrar explicitamente que o recobrimento universal de $S\mathcal{L}$ é uma ferramenta importante para definir o Índice de Maslov, além disso esse caso deixa explícito que assim como no caso simplético, podemos definir o Índice de forma que se relacione de forma esperada com as subvariedades $\mathcal{L}^k(L_0)$. Ainda mais, essas propriedades mostram que o Índice de Maslov, como definido, é uma ferramenta útil para estudar a transversalidade de subespaços Lagrangianos.*

4.2 Caso Geral

O objetivo dessa seção é desenvolver uma definição coerente do Índice de Maslov para a Grassmanniana Lagrangiana $S\mathcal{L} = S\mathcal{L}(E \oplus E^*)$, onde $n \doteq \dim(E) \geq 3$. Para tanto, fixamos o Lagrangiano $L_0 = E \in \mathcal{L}$, e denotamos por $S\mathcal{L}$ a componente conexa de \mathcal{L} referente ao Lagrangiano E^* , que por sua vez é complementar à L_0 .

Tendo como base a seção anterior, os principais pontos à serem abordados para fazer uma definição concisa do Índice de Maslov são, estudar o Grupo Fundamental e o recobrimento universal de $S\mathcal{L}$, e estender o Lema 4.12 para o caso geral.

Para estudar o Grupo Fundamental de $S\mathcal{L}$ podemos fazer como anteriormente. Fixando uma base $\mathcal{B} = \{E_1, \dots, E_n\}$ de E , a aplicação $\Gamma_{\mathcal{B}} : SO(n) \rightarrow S\mathcal{L}$ definida em (3.17) é um difeomorfismo, então para estudar o Grupo Fundamental e o Recobrimento universal de $S\mathcal{L}$, podemos focar nossas atenções em $SO(n)$, onde $n \geq 3$.

Recorrendo ao Lema 2.48 temos que o Grupo Fundamental de $SO(n)$ é isomorfo à ao grupo abeliano \mathbb{Z}_2 . Ainda mais, recordando as definições feitas na Seção 2.3, relembramos que a representação adjunta torcida:

$$\widetilde{\text{Ad}} : \text{Spin}(n) \rightarrow SO(n),$$

é exatamente o recobrimento universal do grupo ortogonal $SO(n)$.

Então definindo:

$$\begin{aligned} \rho &\doteq \Gamma_{\mathcal{B}} \circ \widetilde{\text{Ad}} : \text{Spin}(n) \rightarrow S\mathcal{L} \\ \varphi &\mapsto L_{\widetilde{\text{Ad}}\varphi}, \end{aligned}$$

temos que o mapa ρ é o recobrimento duplo universal de $S\mathcal{L}$. Portanto, podemos utilizar a teoria desenvolvida no Apêndice B para definir o conceito de 2-índice, e assim entender melhor o isomorfismo $\pi_1(S\mathcal{L}) \simeq \mathbb{Z}_2$, como já fizemos para o caso $n = 3$.

Por outro lado, com o objetivo de estender o Lema 4.12, notamos que uma parte crucial de sua prova é estudar a decomposição $S\mathcal{L} = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{L}^{2k}(L_0)$ (proveniente do Corolário 3.53) via o mapa de recobrimento ρ , mais precisamente estamos interessados em responder a seguinte pergunta:

Quais propriedades um elemento $\varphi \in \text{Spin}(n)$ deve satisfazer para que $\rho(\varphi) \in \mathcal{L}^{2k}(L_0)$?

Dedicamos a próxima seção a responder essa pergunta.

4.2.1 Forma Canônica em $\text{Spin}(n)$

Primeiro relembramos que se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n , então a álgebra de Clifford $Cl(n)$, é gerada como álgebra por essa base sujeita as relações:

$$e_i e_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ -e_j e_i, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Portanto definindo, $\overline{Cl}^0(n) = \mathbb{R}$ e $\overline{Cl}^k(n) = \text{span}\{e_{i_1 \dots i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$, temos a seguinte decomposição da álgebra de Clifford:

$$Cl(n) = \bigoplus_{k=0}^n \overline{Cl}^k(n).$$

No caso de $\varphi \in \overline{Cl}^k(n)$, dizemos que φ é um elemento homogêneo de ordem k . Definimos também os mapas $[\cdot]_k : Cl(n) \rightarrow \overline{Cl}^k(n)$, como sendo as projeções canônicas relativas a essa decomposição.

Observação 4.16. A notação com barra sobre o conjunto $\overline{Cl}^k(n)$ é utilizada para não criar ambiguidade com os conjuntos $Cl^0(n)$ e $Cl^1(n)$ já definidos anteriormente.

Agora suponha $L \in S\mathcal{L}$, sabemos que existe $\varphi \in \text{Spin}(n)$, tal que $L = L_{\widetilde{\text{Ad}}_\varphi}$. Portanto, a Proposição 3.51 garante que $L = L_{\widetilde{\text{Ad}}_\varphi} \in \mathcal{L}^{2k}(L_0)$, para $k \geq 0$, se e somente, se

$$\text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, -1) = 2k.$$

Então para estudar as condições que φ deve satisfazer para $L = \rho(\varphi) \in \mathcal{L}^{2k}(L_0)$, devemos estudar as condições que φ deve satisfazer para que $\text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, -1) = 2k$.

Para tanto relembramos que como $\widetilde{\text{Ad}}_\varphi \in \text{SO}(n)$, existem $p, q \in \mathbb{N}$, $Q \in \text{O}(n)$ e números $\theta_1, \dots, \theta_q \in (0, 2\pi)$, tais que:

$$\widetilde{\text{Ad}}_\varphi = Q \circ \mathcal{R}(p, \theta_1, \dots, \theta_q) \circ Q^{-1},$$

onde $p = \text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, 1)$, e o operador $\mathcal{R}(p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ é dado na base canônica pela matriz:

$$\begin{pmatrix} Id_{p \times p} & & \\ & R(\theta_1) & \\ & & R(\theta_k) \end{pmatrix},$$

sendo que a matriz $R(\theta_j)$ é dada por:

$$R(\theta_j) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}.$$

Considerando o recobrimento $\widetilde{\text{Ad}} : \text{Pin}(n) \rightarrow \text{O}(n)$ (ver Teorema 2.43), existem $\xi, \psi = \psi(p, \theta_1, \dots, \theta_p) \in \text{Pin}(n)$ tais que:

$$\widetilde{\text{Ad}}_\xi = Q \text{ e } \widetilde{\text{Ad}}_\psi = \mathcal{R}(p, \theta_1, \dots, \theta_q).$$

Mas como $\det(\mathcal{R}(p, \theta_1, \dots, \theta_q)) = 1$, podemos garantir que $\psi \in \text{Spin}(n)$. Ainda mais, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, -1) &= \frac{1}{2} \text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_\psi, -1) \\ &= \#\{j \in \{1, \dots, q\} : \theta_j = \pi\}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar como construir o vetor ψ explicitamente. Para tanto, notamos que:

$$\mathcal{R}(p, \theta_1, \dots, \theta_q) = \widetilde{\mathcal{R}}(p+1, \theta_1) \widetilde{\mathcal{R}}(p+3, \theta_2) \dots \widetilde{\mathcal{R}}(n-1, \theta_q),$$

onde $\widetilde{\mathcal{R}}(i, \theta)$, para $1 \leq i < n$, é operador que possui a seguinte forma matricial, na base canônica:

$$\begin{array}{c|cc|c} \text{índices} & & i & i+1 & \\ \hline & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ \hline i & & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \\ i+1 & & \sin(\theta) & \cos(\theta) & \\ \hline & & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{array}$$

Novamente, como $\widetilde{\mathcal{R}}(i, \theta) \in \text{SO}(n)$, existe $u(i, \theta) \in \text{Spin}(n)$ tal que $\widetilde{\mathcal{R}}(i, \theta) = \widetilde{\text{Ad}}_{u(i, \theta)}$. É possível exibir o vetor $u(i, \theta)$ explicitamente.

Lema 4.17. *Sejam $1 \leq i < n$ e $\theta \in (0, 2\pi)$. Então, definindo $v = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)e_i e_{i+1}$, temos que $v \in \text{Spin}(n)$ e $\widetilde{\mathcal{R}}(i, \theta) = \widetilde{\text{Ad}}_v$.*

Demonstração. Primeiramente notamos que:

$$\cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)e_i e_{i+1} = (\cos(\theta/2)e_i + \sin(\theta/2)e_{i+1})(e_i).$$

Pela fórmula acima claramente $v \in \text{Spin}(n)$. Ainda mais, $\widetilde{\text{Ad}}_v = \widetilde{\text{Ad}}_{\cos(\theta/2)e_i + \sin(\theta/2)e_{i+1}} \circ \widetilde{\text{Ad}}_{e_i}$, utilizando a equação (2.6) e a Proposição 2.35, temos que para cada $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Ad}}_{e_i}(e_k) &= e_k - 2\langle e_i, e_k \rangle e_i \\ &= (-1)^{\delta_{ik}} e_k. \end{aligned}$$

Portanto, se $k \in \{1, \dots, k\}$ é tal que $k \notin \{i, i+1\}$

$$\begin{aligned}\widetilde{\text{Ad}}_v(e_k) &= \widetilde{\text{Ad}}_{\cos(\theta/2)e_i + \sin(\theta/2)e_{i+1}}(e_k) \\ &= e_k - 2\langle \cos(\theta/2)e_i + \sin(\theta/2)e_{i+1}, e_k \rangle (\cos(\theta/2)e_i + \sin(\theta/2)e_{i+1}) \\ &= e_k.\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}\widetilde{\text{Ad}}_v(e_i) &= -\widetilde{\text{Ad}}_{\cos(\theta/2)e_i + \sin(\theta/2)e_{i+1}}(e_k) \\ &= -(e_i - 2\langle \cos(\theta/2)e_i + \sin(\theta/2)e_{i+1}, e_i \rangle (\cos(\theta/2)e_i + \sin(\theta/2)e_{i+1})) \\ &= (2\cos^2(\theta/2) - 1)e_i + 2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)e_{i+1} \\ &= \cos(\theta)e_i + \sin(\theta)e_{i+1}.\end{aligned}$$

Por fim, temos que:

$$\begin{aligned}\widetilde{\text{Ad}}_v(e_{i+1}) &= \widetilde{\text{Ad}}_{\cos(\theta/2)e_i + \sin(\theta/2)e_{i+1}}(e_{i+1}) \\ &= e_{i+1} - 2\langle \cos(\theta/2)e_i + \sin(\theta/2)e_{i+1}, e_{i+1} \rangle (\cos(\theta/2)e_i + \sin(\theta/2)e_{i+1}) \\ &= -2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)e_i + (1 - 2\sin^2(\theta/2))e_{i+1} \\ &= -\sin(\theta)e_i + \cos(\theta)e_{i+1},\end{aligned}$$

concluindo assim a prova. ■

Utilizando o Lema anterior podemos tomar o vetor $\psi = \psi(p, \theta_1, \dots, \theta_q) \in \text{Spin}(n)$ como sendo:

$$\psi = u(p+1, \theta_1)u(p+3, \theta_2)\dots u(n-1, \theta_q),$$

onde $u(i, \theta) = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2)e_i e_{i+1}$. O objetivo do próximo Teorema é fornecer uma descrição mais precisa do vetor ψ .

Teorema 4.18. *Seja $\psi = u(j_1, \theta_1)\dots u(j_k, \theta_k)$, onde $1 \leq j_1, j_k < n$ e $j_l + 1 < j_{l+1}$. Então podemos escrever:*

$$\psi = \sum_{l=0}^k \psi_{2l},$$

onde para cada $l \in \{1, \dots, k\}$ temos que, $\psi_{2l} \in \overline{\text{Cl}}^{2l}(n)$ e este é dado por:

$$(-1)^l \psi_{2l} = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_l \\ i_m \in \{j_1, \dots, j_k\}}} \psi_{i_1 \dots i_l}^{2l} e_{i_1} e_{i_1+1} \dots e_{i_l} e_{i_l+1}. \quad (4.2)$$

Onde, os coeficientes $\psi_{i_1 \dots i_l}^{2l}$ são dados por:

$$\psi_{i_1 \dots i_l}^{2l} = \sin\left(\frac{\theta_{\zeta(i_1)}}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{\theta_{\zeta(i_l)}}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{\zeta(r_1)}}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta_{\zeta(r_t)}}{2}\right),$$

sendo que o conjunto $\{r_1, \dots, r_t\}$ é dado pelo complementar de $\{i_1, \dots, i_l\}$ em $\{j_1, \dots, j_k\}$, e $\zeta : \{j_1, \dots, j_k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ é a bijeção dada por $\zeta(j_m) = m$, para cada $m \in \{1, \dots, k\}$.

Demonstração. A prova dessa identidade é feita por indução em k . O caso $k = 1$ é trivial pois:

$$u(j_1, \theta_1) = \cos(\theta_j/2) - \sin(\theta_j/2)e_j e_{j+1}.$$

Agora suponha que a identidade vale para vetores da forma $u(j_1, \theta_1) \dots u(j_k, \theta_k)$, e vamos mostrar que vale para o vetor ψ , da forma $\psi = u(j_1, \theta_1) \dots u(j_k, \theta_k) u(j_{k+1}, \theta_{k+1})$, que satisfaz as hipóteses do enunciado.

Definido $\tilde{\psi} = u(j_2, \theta_2) \dots u(j_{k+1}, \theta_{k+1})$, temos por hipótese de indução que existe uma decomposição $\tilde{\psi} = \sum_{l=0}^{2k} \tilde{\psi}_{2l}$, satisfazendo as condições do enunciado. Assim:

$$\begin{aligned} \psi &= (\cos(\theta_1/2) - \sin(\theta_1/2)e_{j_1} e_{j_1+1}) \tilde{\psi} \\ &= \cos(\theta_1/2) \tilde{\psi}_0 + \dots + \cos(\theta_1/2) \tilde{\psi}_{2k} - \sin(\theta_1/2) e_{j_1} e_{j_1+1} \tilde{\psi}_0 - \dots - \sin(\theta_1/2) e_{j_1} e_{j_1+1} \tilde{\psi}_{2k}. \end{aligned}$$

Mas como $j_1 + 1 < j_2$ e $j_m + 1 < j_{m+1}$, para cada $m = \{2, \dots, k-1\}$, temos que para cada $l \in \{1, \dots, k\}$, vale que:

$$\cos(\theta_1/2) \tilde{\psi}_{2l} \in \overline{\mathbb{C}\ell}^{2l}(n), \quad \sin(\theta_1/2) e_{j_1} e_{j_1+1} \tilde{\psi}_{2l} \in \overline{\mathbb{C}\ell}^{2l+2}(n).$$

Portanto definindo:

$$\psi_{2l} = \begin{cases} \cos(\theta_1/2) \tilde{\psi}_0, & l = 0; \\ \cos(\theta_1/2) \tilde{\psi}_{2l} - \sin(\theta_1/2) e_{j_1} e_{j_1+1} \tilde{\psi}_{2(l-1)}, & l \geq 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Temos que $\psi_{2l} \in \overline{\mathbb{C}\ell}^{2l}(n)$, e ainda mais $\psi = \sum_{l=0}^{k+1} \psi_{2l}$. Por fim, é fácil ver que a expressão em (4.3) é igual à expressão em (4.2), para o caso que consideramos $\{j_1, \dots, j_{k+1}\}$. Concluindo assim o passo indutivo e também a prova. \blacksquare

Voltando a discussão do início da seção, fixamos um Lagrangiano $L = L_{\widetilde{\text{Ad}}_\varphi} \in S\mathcal{L}$, onde $\varphi \in \text{Spin}(n)$. Então notamos que existem $\xi \in \text{Pin}(n)$ e $\psi \in \text{Spin}(n)$, tais que $\varphi = \xi \psi \xi^{-1}$, sendo que ψ pode ser tomado da forma:

$$\psi = u(p+1, \theta_1) \dots u(n-1, \theta_q).$$

Onde $p = \text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, 1)$, e $\text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, -1) = \#\{j \in \{1, \dots, q\} : \theta_j = \pi\}$. O Teorema 4.18 nós da uma decomposição de ψ . Porém, estamos interessados em estudar o vetor $\varphi = \xi\psi\xi^{-1}$, então devemos entender como a decomposição de ψ se comporta sobre a conjugação pelo elemento ξ .

Lema 4.19. *Seja $v \in \mathbb{R}^n$ e $\psi \in \overline{\text{Cl}}^{n'}(n)$, onde $n' \leq n$ é par. Então $v\psi v \in \overline{\text{Cl}}^{n'}(n)$.*

Demonstração. Utilizando a linearidade da multiplicação em $\text{Cl}(n)$, e o fato que o vetor $\psi \in \overline{\text{Cl}}^{n'}(n)$ pode ser escrito como:

$$\psi = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{n'} \leq n} \psi_{j_1 \dots j_{n'}} e_{j_1} \dots e_{j_{n'}},$$

basta provar o Lema para o caso que $\psi = e_{j_1} \dots e_{j_{n'}}$, onde $1 \leq j_1 < \dots < j_{n'} \leq n$.

Sejam $m' = n - n'$ e $i_1, \dots, i_{m'}$ o complementar de $\{j_1, \dots, j_{n'}\}$ em $\{1, \dots, n\}$. Então podemos decompor v como $v_0 + v_1$, onde:

$$v_0 = \sum_{k=1}^{n'} v_{j_k} e_{j_k}, \quad v_1 = \sum_{l=1}^{m'} v_{i_l} e_{i_l}$$

onde $v_{j_k}, v_{i_l} \in \mathbb{R}$, para cada k e l . Então:

$$\begin{aligned} v\psi &= v_0\psi + v_1\psi \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n'} v_{j_k} e_{j_k} \right) (e_{j_1} \dots e_{j_{n'}}) + \left(\sum_{l=1}^{m'} v_{i_l} e_{i_l} \right) (e_{j_1} \dots e_{j_{n'}}) \\ &= \sum_{k=1}^{n'} v_{j_k} (-1)^{k+1} e_{j_1} \dots \widehat{e_{j_k}} \dots e_{j_{n'}} + \sum_{l=1}^{m'} v_{i_l} e_{i_l} e_{j_1} \dots e_{j_{n'}}, \end{aligned}$$

sendo que, o chapéu denota a ausência do elemento como usualmente. Dessa forma, definido:

$$\psi^0 = \sum_{k=1}^{n'} v_{j_k} (-1)^{k+1} e_{j_1} \dots \widehat{e_{j_k}} \dots e_{j_{n'}}, \quad \psi^1 = \sum_{l=1}^{m'} v_{i_l} e_{i_l} e_{j_1} \dots e_{j_{n'}}$$

temos que $v\psi v = \psi^0 v_0 + \psi^0 v_1 + \psi^1 v_0 + \psi^1 v_1$. Assim computamos:

$$\begin{aligned}
 \psi^0 v_0 &= \left(\sum_{k=1}^{n'} v_{j_k} (-1)^{k+1} e_{j_1} \dots \widehat{e_{j_k}} \dots e_{j_{n'}} \right) \left(\sum_{k=1}^{n'} v_{j_k} e_{j_k} \right) \\
 &= \sum_{r < k} v_{j_k} v_{j_r} (-1)^{k+1} e_{j_1} \dots \widehat{e_{j_k}} \dots e_{j_{n'}} e_{j_r} + \sum_{r=k} v_{j_k} v_{j_r} (-1)^{k+1} e_{j_1} \dots \widehat{e_{j_k}} \dots e_{j_{n'}} e_{j_r} + \\
 &\quad + \sum_{r > k} v_{j_k} v_{j_r} (-1)^{k+1} e_{j_1} \dots \widehat{e_{j_k}} \dots e_{j_{n'}} e_{j_r} \\
 &= \sum_{r < k} v_{j_k} v_{j_r} (-1)^{k+1} e_{j_1} \dots \widehat{e_{j_k}} \dots e_{j_{n'}} e_{j_k}^2 e_{j_r} + \sum_{k=1}^{n'} -v_{j_k}^2 e_{j_1} \dots e_{j_{n'}} \\
 &\quad + \sum_{r > k} v_{j_k} v_{j_r} (-1)^{k+1} e_{j_1} \dots \widehat{e_{j_k}} \dots e_{j_{n'}} e_{j_k}^2 e_{j_r} \\
 &= \sum_{k=1}^{n'} -v_{j_k}^2 e_{j_1} \dots e_{j_{n'}} - \sum_{k < r} v_{j_k} v_{j_r} e_{j_1} \dots e_{j_{n'}} e_{j_k} e_{j_r} - \sum_{k > r} v_{j_k} v_{j_r} e_{j_1} \dots e_{j_{n'}} e_{j_k} e_{j_r} \\
 &= \sum_{k=1}^{n'} -v_{j_k}^2 e_{j_1} \dots e_{j_{n'}}.
 \end{aligned}$$

Portanto temos que $\psi^0 v_0 \in \overline{\mathbb{C}\ell}^{n'}(n)$. Ainda mais,

$$\begin{aligned}
 \psi^0 v_1 &= \left(\sum_{k=1}^{n'} v_{j_k} (-1)^{k+1} e_{j_1} \dots \widehat{e_{j_k}} \dots e_{j_{n'}} \right) \left(\sum_{l=1}^{m'} v_{i_l} e_{i_l} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{n'} \sum_{l=1}^{m'} v_{j_k} v_{i_l} (-1)^k e_{i_l} e_{j_1} \dots \widehat{e_{j_k}} \dots e_{j_{n'}} \\
 \psi^1 v_0 &= \left(\sum_{l=1}^{m'} v_{i_l} e_{i_l} e_{j_1} \dots e_{j_{n'}} \right) \left(\sum_{k=1}^{n'} v_{j_k} e_{j_k} \right) \\
 &= \sum_{l=1}^{m'} \sum_{k=1}^{n'} v_{i_l} v_{j_k} (-1)^k e_{i_l} e_{j_1} \dots \widehat{e_{j_k}} \dots e_{j_{n'}}.
 \end{aligned}$$

Portanto $\psi^0 v_1 = \psi^1 v_0 \in \overline{\mathbb{C}\ell}^{n'}(n)$, por fim vemos que:

$$\begin{aligned}
 \psi^1 v_1 &= \left(\sum_{l=1}^{m'} v_{i_l} e_{i_l} e_{j_1} \dots e_{j_{n'}} \right) \left(v_1 = \sum_{l=1}^{m'} v_{i_l} e_{i_l} \right) \\
 &= \sum_{l=1}^{m'} \sum_{r=1}^{m'} v_{i_r} v_{i_l} e_{i_l} e_{i_r} e_{j_1} \dots e_{j_{n'}} \\
 &= \sum_{l=1}^{m'} v_{i_l}^2 e_{j_1} \dots e_{j_{n'}}.
 \end{aligned}$$

E assim $\psi^1 v_1 \in \overline{\mathcal{C}\ell}^{n'}(n)$, e então $v\psi v \in \overline{\mathcal{C}\ell}^{n'}(n)$, como queríamos mostrar. ■

Proposição 4.20. *Sejam $\xi \in \text{Pin}(n)$ e $\psi \in \overline{\mathcal{C}\ell}^{n'}(n)$, para $n' \leq n$ onde n' é par. Então temos que $\xi\psi\xi^{-1} \in \overline{\mathcal{C}\ell}^{n'}(n)$.*

Demonstração. Como $\xi \in \text{Pin}(n)$, utilizando o Corolário 2.44, temos que existem vetores unitários $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ com, tais que $\xi = v_1 \dots v_r$. Por outro lado, $\xi^{-1} = v_r \dots v_1$, portanto:

$$\xi\psi\xi^{-1} = v_1 \dots v_r \psi v_r \dots v_1.$$

Então, utilizando o Lema 4.19 indutivamente obtemos que $\xi\psi\xi^{-1} \in \overline{\mathcal{C}\ell}^{n'}(n)$. ■

Acabamos de provar que conjugação por elementos de $\text{Pin}(n)$ preservam a decomposição do Teorema 4.18, vamos utilizar esse fato para estudar as condições sobre $\varphi \in \text{Spin}(n)$, para que $L = L_{\widetilde{\text{Ad}}_\varphi} \in \mathcal{L}^{2k}(L_0)$, para $k \geq 0$, como propomos no começo da seção.

Teorema 4.21. *Sejam $L \in \mathcal{SL}$ e $\varphi \in \text{Spin}(n)$, tais que $L = L_{\widetilde{\text{Ad}}_\varphi}$. Então $L \in \mathcal{L}^{2k}(L_0)$, para $k \geq 0$, se e somente, se $\varphi \in \bigoplus_{l \geq k} \overline{\mathcal{C}\ell}^{2l}(n)$ e $[\varphi]_{2k} \neq 0$.*

Demonstração. Primeiro notamos que pela discussão feita no início da seção existem $p, q \in \mathbb{N}$, $\xi \in \text{Pin}(n)$ e números $\theta_1, \dots, \theta_q \in (0, 2\pi)$ tais que:

$$\widetilde{\text{Ad}}_\varphi = \widetilde{\text{Ad}}_{\xi\psi\xi^{-1}},$$

onde $p = \text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, 1)$, e $\psi = u(p+1, \theta_1)u(p+3, \theta_2) \dots u(n-1, \theta_q)$. Dessa forma, $\varphi = \pm \xi\psi\xi^{-1}$, assim podemos supor sem perda de generalidade, que φ é dado por $\xi\psi\xi^{-1}$.

Por comodidade definimos $\{j_1, \dots, j_q\} = \{p+1, \dots, n-1\}$, utilizando o Teorema 4.18 podemos decompor o vetor ψ na forma:

$$\psi = \sum_{l=0}^q \psi_{2l},$$

onde $\psi_{2l} \in \overline{\mathcal{C}\ell}^{2l}(n)$, para cada $l = 0, \dots, q$, e cada vetor ψ_{2l} tem a forma (4.2). Então, utilizando a Proposição 4.20 podemos decompor o vetor φ como:

$$\varphi = \sum_{l=0}^q \xi\psi_{2l}\xi^{-1},$$

sendo que $\xi\psi_{2l}\xi^{-1} \in \overline{\mathcal{C}\ell}^{2l}(n)$, para cada $l = 0, \dots, q$.

Suponha primeiro que $L = L_{\widetilde{\text{Ad}}_\varphi} \in \mathcal{L}^{2k}(L_0)$, para $k \geq 0$. Primeiro suponha que $k = 0$, então só temos que mostrar que $[\varphi]_0 \neq 0$, mas veja que:

$$\xi^{-1}[\varphi]_0 \xi = \psi_0 = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta_q}{2}\right).$$

Por outro lado:

$$0 = \frac{1}{2} \text{mul}\left(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, -1\right) = \#\{j \in \{1, \dots, q\} : \theta_j = \pi\},$$

portanto é fácil ver que $0 < \theta_m/2 < \pi$ é diferente de $\pi/2$, para todo $m = 1, \dots, q$, e assim $\xi^{-1}[\varphi]_0 \xi$ deve ser não nulo. Agora suponha que $k > 0$, vamos mostrar que $[\varphi]_{2l} = 0$, para todo $l < k$. Para tanto recordamos que:

$$(-1)^l \psi_{2l} = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_l \\ i_m \in \{j_1, \dots, j_k\}}} \psi_{i_1 \dots i_l}^{2l} e_{i_1} e_{i_1+1} \dots e_{i_l} e_{i_l+1},$$

então basta mostra que dado $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n$, com $i_m \in \{j_1, \dots, j_k\}$ para $m = 1, \dots, l$, temos que $\psi_{i_1 \dots i_l}^{2l} = 0$. Mas sabemos que:

$$\psi_{i_1 \dots i_l}^{2l} = \sin\left(\frac{\theta_{\zeta(i_1)}}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{\theta_{\zeta(i_l)}}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_{\zeta(r_1)}}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta_{\zeta(r_t)}}{2}\right),$$

sendo que o conjunto $\{r_1, \dots, r_t\}$ é dado pelo complementar de $\{i_1, \dots, i_l\}$ em $\{j_1, \dots, j_k\}$, e $\zeta : \{j_1, \dots, j_k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ é a bijeção dada por $\zeta(j_m) = m$, para cada $m \in \{1, \dots, k\}$.

Utilizando do fato que $l < k$, vemos que:

$$l < \#\{j \in \{1, \dots, q\} : \theta_j = \pi\},$$

portanto deve existir $r_m \in \{r_1, \dots, r_t\}$ de forma que $\theta_{\zeta(r_m)} = \pi$, assim $\psi_{i_1 \dots i_l}^{2l} = 0$ e então $[\varphi]_{2l} = \xi \psi_{2l} \xi^{-1} = 0$, como queríamos.

Resta mostrar que $[\varphi]_{2k} \neq 0$, para tanto notamos que como $k = \#\{j \in \{1, \dots, q\} : \theta_j = \pi\}$, existem $i_1, \dots, i_k \in \{j_1, \dots, j_q\}$ de forma que $\theta_{\zeta(i_m)} = \pi$, para cada $m = 1, \dots, k$, e $\theta_{m'} \neq \pi$, para cada $m' \in \{1, \dots, q\} \setminus \{\zeta(i_1), \dots, \zeta(i_k)\}$. É fácil ver que o coeficiente $\psi_{i_1 \dots i_k}^{2k}$ é não nulo, e por consequente $[\varphi]_{2k} = \xi \psi_{2k} \xi^{-1} \neq 0$.

Agora suponha que $\varphi = \xi \psi \xi^{-1}$, é tal que $\varphi \in \bigcup_{l \geq 0} \overline{\text{Cl}}^{2l}(n)$ e $[\varphi]_{2k} \neq 0$, então vamos provar que $L = L_{\widetilde{\text{Ad}}_\varphi} \in \mathcal{L}^{2k}(L_0)$, ou de forma equivalente $k = \frac{1}{2} \text{mul}\left(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, -1\right) = \#\{j \in \{1, \dots, q\} : \theta_j = \pi\}$.

Primeiro suponha que $k = 0$, então o fato de que $0 \neq \xi^{-1}[\varphi]_0 \xi = \psi_0$ implica que:

$$0 \neq \psi_0 = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta_q}{2}\right)$$

assim devemos ter que $\theta_m \neq \pi$, para cada $m = 1, \dots, q$. Dessa forma $\text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, -1) = 0$, como queríamos.

Agora suponha que $k > 0$, dessa forma temos que $0 = \xi^{-1}[\varphi]_0\xi = \psi_0$, então:

$$0 = \psi_0 = \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta_q}{2}\right),$$

portanto existe $a_1 \in \{1, \dots, q\}$ tal que $\theta_{a_1} = \pi$. Utilizando o mesmo raciocínio, se temos que $\psi_2 = 0$, então:

$$\begin{aligned} 0 &= \sin\left(\frac{\theta_{a_1}}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \dots \overline{\cos\left(\frac{\theta_{a_1}}{2}\right)} \dots \cos\left(\frac{\theta_q}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \dots \overline{\cos\left(\frac{\theta_{a_1}}{2}\right)} \dots \cos\left(\frac{\theta_q}{2}\right), \end{aligned}$$

logo existe $a_2 \in \{1, \dots, q\} \setminus \{a_1\}$, tal que $\theta_{a_2} = \pi$. Seguindo indutivamente, exibimos uma sequência $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, q\}$, de forma que $\theta_{a_m} = \pi$, para $m = 1, \dots, k$. Portanto, $\text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, -1) \geq 2k$, mas se $\text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_\varphi, -1) > 2k$, teríamos que $\psi_{2k} = 0$, o que é um absurdo pois:

$$0 \neq [\varphi]_{2k} = \xi\psi_{2k}\xi^{-1}.$$

Assim concluímos a prova do Teorema. ■

Corolário 4.22. *Sejam $\varphi, \varphi' \in \text{Spin}(n)$, então $L_{\widetilde{\text{Ad}}_\varphi} \pitchfork L_{\widetilde{\text{Ad}}_{\varphi'}}$ se e somente, se $[\varphi^{-1}\varphi']_0 \neq 0$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.51, temos que $L_{\widetilde{\text{Ad}}_\varphi} \pitchfork L_{\widetilde{\text{Ad}}_{\varphi'}}$ se e somente, se $\text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_{\varphi^{-1}\varphi'}, -1) = 0$. Mas pelo Teorema anterior $\text{mul}(\widetilde{\text{Ad}}_{\varphi^{-1}\varphi'}, -1) = 0$ se e somente, se $[\varphi^{-1}\varphi']_0 \neq 0$, concluindo a prova. ■

4.2.2 Índice de Maslov via Homologia Relativa

O objetivo dessa seção é estender o Lema 4.12 para o caso geral, e fornecer uma definição consistente do Índice de Maslov, relativo ao Lagrangiano $L_0 = E \in \mathcal{L}$, via homologia relativa como feito para o caso $n = 3$.

Reverendo a demonstração do Lema 4.12 notamos que um dos principais passos é realizar a subvariedade $\rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0))$ como valor regular de uma função suave, no caso é possível realizar a subvariedade $\mathcal{L}^2(L_0)$ como um valor regular também, porém apenas de um conjunto aberto de $\text{Spin}(n)$.

Relembramos que o mapa $\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow S\mathcal{L}$, dado por $\varphi \mapsto L_{\widetilde{\text{Ad}}\varphi}$, é o recobrimento duplo universal de $S\mathcal{L}$. Considere o seguinte subconjunto de $\text{Spin}(n)$:

$$\mathcal{F} = \rho^{-1} \left(\bigcup_{k \geq 2} \mathcal{L}^{2k}(L_0) \right).$$

Utilizando o Lema 3.46 e notando que $\mathcal{F} = \rho^{-1}(S\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{\geq 4}(L_0))$, vemos que o conjunto \mathcal{F} define um fechado em $\text{Spin}(n)$. Então definimos o aberto $\mathcal{U} \subset \text{Spin}(n)$, como sendo o complementar de \mathcal{F} em $\text{Spin}(n)$, isto é:

$$\mathcal{U} = \rho^{-1}(\mathcal{L}^0(L_0)) \cup \rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0)).$$

Sendo que $\mathcal{L}^0(L_0)$ é um aberto em $S\mathcal{L}$, e $\mathcal{L}^2(L_0)$ é uma subvariedade de codimensão 1 em $S\mathcal{L}$. Por outro lado, utilizando o Teorema 4.21 podemos decompor o conjunto $\mathcal{L}^0(L_0)$, da seguinte forma, definimos:

$$\text{Spin}_+(n) \doteq \{\varphi \in \text{Spin}(n) : [\varphi]_0 > 0\}, \quad \text{Spin}_-(n) \doteq \{\varphi \in \text{Spin}(n) : [\varphi]_0 < 0\}.$$

Então temos o seguinte resultado.

Lema 4.23. *Seja $\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow S\mathcal{L}$ o recobrimento universal de $S\mathcal{L}$. Então:*

$$\rho^{-1}(\mathcal{L}^0(L_0)) = \text{Spin}_+(n) \sqcup \text{Spin}_-(n).$$

E ainda mais, a aplicação $\rho|_{\text{Spin}_\pm(n)} : \text{Spin}_\pm(n) \rightarrow \mathcal{L}^0(L_0) \simeq \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ é um difeomorfismo.

Demonstração. Primeiro notamos que o Teorema 4.21 nós diz que $\rho^{-1}(\mathcal{L}^0(L_0)) = \{\varphi \in \text{Spin}(n) : [\varphi]_0 \neq 0\}$, portanto provamos que:

$$\rho^{-1}(\mathcal{L}^0(L_0)) = \text{Spin}_+(n) \sqcup \text{Spin}_-(n).$$

Resta mostrar que $\rho|_{\text{Spin}_\pm(n)} : \text{Spin}_\pm(n) \rightarrow \mathcal{L}^0(L_0)$ é um difeomorfismo. Mas utilizando o fato que $\text{Ker}(\widetilde{\text{Ad}}) = \{1, -1\}$, é fácil ver que a aplicação $\rho|_{\text{Spin}_\pm(n)} : \text{Spin}_\pm(n) \rightarrow \mathcal{L}^0(L_0)$ é uma bijeção, por outro lado como ρ é um difeomorfismo local, está deve ter posto máximo constante, portanto pelo Teorema do Posto deve ser um difeomorfismo. ■

Agora vamos mostrar que $\rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0))$, pode ser realizada como o valor regular da seguinte função:

$$f \doteq [\cdot]_0|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi \mapsto [\varphi]_0.$$

Lema 4.24. *Seja $\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow S\mathcal{L}$ o recobrimento universal de $S\mathcal{L}$. Então,*

$$f^{-1}(0) = \rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0)).$$

Demonstração. É fácil ver que:

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= \mathcal{U} \cap \{\varphi \in \text{Spin}(n) : [\varphi]_0 = 0\} \\ &= (\text{Spin}_+(n) \cup \text{Spin}_-(n) \cup \rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0))) \cap \{\varphi \in \text{Spin}(n) : [\varphi]_0 = 0\} \\ &= \rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0)) \cap \{\varphi \in \text{Spin}(n) : [\varphi]_0 = 0\}. \end{aligned}$$

Mas pelo Teorema 4.21 temos que $\rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0)) \subset \{\varphi \in \text{Spin}(n) : [\varphi]_0 = 0\}$, concluindo a prova. ■

Teorema 4.25. *Considere $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por, $f(\varphi) = [\varphi]_0$, então 0 é um valor regular de f .*

Demonstração. Primeiro notamos que a Proposição 2.51 nós diz que a álgebra de Lie $\mathfrak{spin}(n) \subset \mathfrak{cl}(n)$ é dada pelo espaço $\overline{\mathcal{Cl}}^2(n)$. Então, como $\mathcal{U} \subset \text{Spin}(n)$ é aberto, dado $\varphi \in \mathcal{U}$, podemos fazer as seguintes identificações:

$$T_\varphi \mathcal{U} \simeq T_\varphi \text{Spin}(n) \simeq \varphi \cdot \mathfrak{spin}(n) \simeq \varphi \cdot \overline{\mathcal{Cl}}^2(n) \subset \mathfrak{cl}(n).$$

Por outro lado, como a aplicação $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ é a restrição da aplicação linear $\mathfrak{Cl}(n) \ni \varphi \mapsto [\varphi]_0 \in \mathbb{R}$, identificamos o operador $df_\varphi : T_\varphi \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ com a aplicação linear:

$$\begin{aligned} df_\varphi : \varphi \cdot \overline{\mathcal{Cl}}^2(n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \psi &\mapsto [\psi]_0. \end{aligned}$$

Então, mostrar que 0 é valor regular de f , é equivalente à mostrar que para $\varphi \in f^{-1}(0)$ existe $\psi \in \varphi \cdot \overline{\mathcal{Cl}}^2(n)$ tal que $[\psi]_0 \neq 0$.

Mas de fato, utilizando o Lema 4.24 vemos que $\varphi \in \rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0))$, então pelo Teorema 4.21 temos que $[\varphi]_2 \neq 0$. Assim, podemos decompor o vetor φ da seguinte forma:

$$\varphi = \varphi^0 + \varphi^1,$$

onde $\varphi^0 \in \overline{\mathcal{Cl}}^2(n)$ e $\varphi^1 \in \bigoplus_{l \geq 2} \overline{\mathcal{Cl}}^{2l}(n)$, sendo que $\varphi^0 \neq 0$. Podemos escrever φ^0 em termos da base $\{e_1, \dots, e_n\}$ como:

$$\varphi^0 = \sum_{i < j} \varphi_{ij}^0 e_i e_j.$$

Portanto devem existir $1 \leq k < l \leq n$, tais que $\varphi_{kl}^0 \neq 0$. Portanto

$$\varphi^0 e_k e_j = -\varphi_{kl}^0 + \tilde{\varphi}_0,$$

sendo que $\tilde{\varphi}_0 \overline{\mathcal{C}\ell}^1(n) \oplus \overline{\mathcal{C}\ell}^3(n)$. Por outro lado, é fácil ver que $\varphi^1 e_k e_j \in \bigoplus_{l \geq 1} \overline{\mathcal{C}\ell}^{2l}(n)$, portanto:

$$[\varphi e_k e_j]_0 = -\varphi_{kl}^0 \neq 0,$$

e como $\varphi e_k e_j \in \varphi \cdot \overline{\mathcal{C}\ell}^2(n)$, temos que $df_\varphi(\varphi e_k e_j) \neq 0$, e portanto 0 é um valor regular de f , concluindo a prova. ■

Corolário 4.26. *O subconjunto $\rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0))$ de $\text{Spin}(n)$ é uma subvariedade mergulhada de $\text{Spin}(n)$ codimensão 1.*

Demonstração. Utilizando o Lema 4.24, temos que $\rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0)) = f^{-1}(0)$. Pelo Teorema anterior temos que $f^{-1}(0)$ é uma subvariedade mergulhada de \mathcal{U} , como \mathcal{U} é aberto em $\text{Spin}(n)$ e composição de mergulho é mergulho, devemos ter que $f^{-1}(0)$ é uma subvariedade mergulhada de $\text{Spin}(n)$ como o desejado. ■

Como vimos anteriormente, o difeomorfismo $\Gamma_B : \text{SO}(n) \rightarrow S\mathcal{L}$, mostra que o Grupo Fundamental de $S\mathcal{L}$ é isomorfo ao Grupo Abelianio \mathbb{Z}_2 , então o Teorema de Hurewicz garante a seguinte Proposição .

Proposição 4.27. *O primeiro grupo de homologia singular $H_1(S\mathcal{L})$ de $S\mathcal{L}$ é isomorfo à \mathbb{Z}_2 .*

E utilizando o fato que qualquer complementar Lagrangiano L_1 à L_0 , fornece um difeomorfismo $\chi_{L_1, L_0} : \mathcal{L}^0(L_0) \rightarrow \text{Ba-s}(L_1) \simeq \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ (ver Corolário 3.34), obtemos o seguinte resultado:

Corolário 4.28. *A inclusão:*

$$\mathfrak{q} : (S\mathcal{L}, \emptyset) \rightarrow (S\mathcal{L}, \Lambda^0(L_0))$$

induz um isomorfismo:

$$\mathfrak{q}_* : H_1(S\mathcal{L}) \rightarrow H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0)).$$

Em particular, o grupo de homologia relativo $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0))$ é isomorfo a \mathbb{Z}_2 .

Com o objetivo de definir o Índice de Maslov via Homologia Relativa, primeiro definiremos o conceito de interseção transversal de uma curva com a subvariedade $\mathcal{L}^2(L_0)$.

Definição 4.29. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$, uma curva de classe C^1 tal que $\gamma(0), \gamma(1) \in \mathcal{L}^0(L_0)$. Então, dizemos que γ tem uma interseção transversal com a subvariedade $\mathcal{L}^2(L_0)$ em $t = t_0 \in (0, 1)$, se $\gamma(t_0) \in \mathcal{L}^2(L_0)$ e temos que:*

$$\text{span}\{\gamma'(t_0)\} \oplus T_{\gamma(t_0)}\mathcal{L}^2(L_0) = T_{\gamma(t_0)}S\mathcal{L}.$$

Proposição 4.30. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$, uma curva de classe C^1 , tal que $\gamma(0), \gamma(1) \in \mathcal{L}^0(L_0)$. Suponha ainda que γ tem apenas uma interseção com o conjunto $\cup_{k \geq 1} \mathcal{L}^{2k}(L_0)$, em $t = t_0 \in (0, 1)$, e tal interseção é uma interseção transversal com o conjunto $\mathcal{L}^2(L_0)$. Então, dado um levantamento $\tilde{\gamma}$ de γ , relativo ao recobrimento ρ , temos que o levantamento $\tilde{\gamma}$ tem apenas uma interseção com o conjunto $\{\varphi \in \text{Spin}(n) : [\varphi]_0 = 0\}$, e tal interseção é tal que $\tilde{\gamma}(t_0) \in f^{-1}(0)$ e ainda mais:*

$$\text{span}\{\tilde{\gamma}'(t_0)\} \oplus T_{\tilde{\gamma}(t_0)}f^{-1}(0) = T_{\tilde{\gamma}(t_0)}\text{Spin}(n). \quad (4.4)$$

Demonstração. Por hipótese $\gamma(t) \in \cup_{k \geq 1} \mathcal{L}^{2k}(L_0)$, somente se $t = t_0 \in (0, 1)$, então pelo Teorema 4.21, temos que $[\tilde{\gamma}(t)]_0 = 0$, somente se $t = t_0 \in (0, 1)$. Por outro lado, como $\gamma(t_0) \in \mathcal{L}^2(L_0)$ temos pelo Lema 4.24, que $\tilde{\gamma}(t_0) \in f^{-1}(0)$.

Resta provar a identidade (4.4). Para tanto, basta mostrar que $\tilde{\gamma}'(t_0) \notin T_{\tilde{\gamma}(t_0)}f^{-1}(0)$. Suponha por absurdo que $\tilde{\gamma}'(t_0) \in T_{\tilde{\gamma}(t_0)}f^{-1}(0)$, então existem $\varepsilon > 0$ e uma curva suave $\tilde{\sigma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow f^{-1}(0)$, de forma que $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\gamma}(t_0)$ e $\tilde{\sigma}'(0) = \tilde{\gamma}'(t_0)$. Portanto, fazendo $\sigma = \rho \circ \tilde{\sigma}$, temos que $\sigma(0) = \gamma(t_0)$ e $\sigma'(0) = \gamma'(t_0)$, dessa forma obtemos que:

$$\begin{aligned} T_{\gamma(t_0)}\mathcal{L}^2(L_0) \ni \sigma'(0) &= d\rho(\tilde{\sigma}'(0)) \cdot \tilde{\sigma}'(0) \\ &= d\rho(\tilde{\gamma}'(t_0)) \cdot \tilde{\gamma}'(t_0) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \rho \circ \tilde{\gamma}(t) \\ &= \gamma'(t_0). \end{aligned}$$

Absurdo, pois por hipótese temos que a interseção de γ com a subvariedade $\mathcal{L}^2(L_0)$ é transversal. ■

Munido das ferramentas e aparatos desenvolvidos nas últimas seções somos capazes de estender o resultado do Lema 4.12 para o caso geral, utilizando uma demonstração semelhante ao caso $n = 3$, a seguir apresentamos essa demonstração.

Lema 4.31. *Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$, curvas de classe C^1 com extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$. Suponha que γ_1 e γ_2 intersectam $\cup_{k \geq 2} \mathcal{L}^{2k}(L_0)$ uma única vez, e tal interseção é transversal com $\mathcal{L}^2(L_0)$. Então γ_1 e γ_2 são homologas em $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0))$, e qualquer uma dessas curvas define um gerador para $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0))$.*

Demonstração. Sejam $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 : [0, 1] \rightarrow \text{Spin}(n)$, levantes de γ_1 e γ_2 com relação à aplicação de recobrimento ρ , possivelmente substituindo $\tilde{\gamma}_j$ por $-\tilde{\gamma}_j$, para $j = 1, 2$, podemos assumir que:

$$[\tilde{\gamma}_1(0)]_0, [\tilde{\gamma}_2(0)]_0 > 0.$$

Para provar que γ_1 e γ_2 são homologas em $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^2(L_0))$, basta provar que:

$$[\tilde{\gamma}_1(1)]_0, [\tilde{\gamma}_2(1)]_0 < 0.$$

De fato, pelo Lema 4.23 os conjuntos $\text{Spin}_+(n)$ e $\text{Spin}_-(n)$ são conexos por caminhos, então existem curvas suaves $\sigma_1, \sigma_2 : [0, 1] \rightarrow \text{Spin}(n)$, com $\text{Im}(\sigma_1) \subset \text{Spin}_+(n)$ e $\text{Im}(\sigma_2) \subset \text{Spin}_-(n)$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} \sigma_1(0) &= \tilde{\gamma}_1(0), \quad \sigma_1(1) = \tilde{\gamma}_2(0); \\ \sigma_2(0) &= \tilde{\gamma}_1(1), \quad \sigma_2(1) = \tilde{\gamma}_2(1). \end{aligned}$$

Dessa forma, como a variedade $\text{Spin}(n)$ é simplesmente conexa, existe uma homotopia com pontos fixos, digamos $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \text{Spin}(n)$, entre as curvas $\sigma_2 * \tilde{\gamma}_1 * \sigma_1$ e $\tilde{\gamma}_2$. Utilizando o fato que, $\rho^{-1}(\mathcal{L}^0(L_0)) = \text{Spin}_+(n) \cup \text{Spin}_-(n)$, temos que o recobrimento ρ induz uma homotopia, $H = \rho \circ \tilde{H}$, entre γ_1 e γ_2 com extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$. Portanto, γ_1 e γ_2 são homologas em $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0))$, como o desejado.

Resta mostrar que $[\tilde{\gamma}_j(1)]_0 < 0$, para cada $j = 1, 2$. Fixe $j \in \{1, 2\}$ e defina $\gamma = \gamma_j$ e $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_j$, e suponha por absurdo que $[\tilde{\gamma}]_0 > 0$.

Por hipótese existe único $t_0 \in (0, 1)$ de forma que $\gamma(t_0) \in \cup_{k \geq 1} \mathcal{L}^{2k}(L_0)$, e para $t = t_0$ tal interseção é transversal com $\mathcal{L}^2(L_0)$. Então pelo Lema 4.30 temos que $[\tilde{\gamma}(t)]_0 \neq 0$, para cada $t \neq t_0$, $\tilde{\gamma}(t_0) \in \rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0)) = f^{-1}(0)$, e ainda mais:

$$\text{span}\{\tilde{\gamma}'(t_0)\} \oplus T_{\tilde{\gamma}(t_0)}f^{-1}(0) = T_{\tilde{\gamma}(t_0)}\text{Spin}(n). \quad (4.5)$$

Logo $\text{Im}(\tilde{\gamma}) \subset \mathcal{U}$ e dessa forma está bem definida a função, de classe C^1 :

$$\begin{aligned} \xi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(\tilde{\gamma}(t)). \end{aligned}$$

Notamos que, $\xi(0), \xi(1) > 0$ e $\xi(t) = 0$, somente se $t = t_0$. Portanto $\xi(t) > 0$, para todo t diferente de t_0 . Por consequente a função ξ possui um mínimo em $t = t_0 \in (0, 1)$, logo:

$$\xi'(t_0) = 0. \quad (4.6)$$

Por outro lado, tomando g uma métrica Riemanniana qualquer em \mathcal{U} , podemos definir o gradiente da função $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ com relação a métrica g , fazendo isso, e lembrando que 0 é valor dessa função, temos que:

$$T_{\tilde{\gamma}(t_0)}\text{Spin}(n) \simeq T_{\tilde{\gamma}(t_0)}\mathcal{U} = \text{span}\{\nabla f(\tilde{\gamma}(t_0))\} \oplus T_{\tilde{\gamma}(t_0)}f^{-1}(0),$$

já que $f(\tilde{\gamma}(t_0)) = [\tilde{\gamma}(t_0)]_0 = 0$. Então a equação (4.6), nós diz que:

$$0 = \xi'(t_0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} f(\tilde{\gamma}(t)) = g(\nabla f(\tilde{\gamma}(t_0)), \tilde{\gamma}'(t_0)).$$

ou seja, $\tilde{\gamma}'(t_0) \in [\nabla f(\tilde{\gamma}(t_0))]^{\perp_g} = T_{\tilde{\gamma}(t_0)}f^{-1}(0)$, o que é um absurdo pois contradiz a equação (4.5). Então, devemos ter que $[\tilde{\gamma}(1)]_0 < 0$ como queríamos.

Para provar que qualquer uma dessas curvas define um gerador para $H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0))$, basta exibir um loop não trivial $\gamma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$ satisfazendo as hipóteses do Lema. Para tanto, considere a curva $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \text{Spin}(n)$, dada por:

$$\tilde{\gamma}(t) = \cos(\pi t) - \sin(\pi t)e_1e_2 = (\cos(\pi t)e_1 + \sin(\pi t)e_2)(e_1).$$

Então definindo $\gamma = \rho \circ \tilde{\gamma}$, temos pelo Corolário B.13, que γ é um loop não trivial em $S\mathcal{L}$. Por outro lado, vemos que $[\tilde{\gamma}(t)]_0 = 0$ se e somente, se $t = 1/2 \in (0, 1)$. E como $-e_1e_2 = [\tilde{\gamma}(1/2)]_0$, temos pelo Teorema 4.18, que $\tilde{\gamma}(1/2) \in \rho^{-1}(\mathcal{L}^2(L_0))$, portanto γ tem apenas uma interseção com $\cup_{k \geq 2} \mathcal{L}^{2k}(L_0)$, e tal interseção é com $\mathcal{L}^2(L_0)$, resta mostrar que esta é transversal. De fato, note que

$$\begin{aligned} g(\nabla f(\tilde{\gamma}(1/2)), \tilde{\gamma}'(1/2)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\frac{1}{2}} f(\tilde{\gamma}(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\frac{1}{2}} \cos(\pi t) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Então, $\tilde{\gamma}'(1/2) \notin T_{\tilde{\gamma}(1/2)}f^{-1}(0)$, mas é fácil ver que isso implica que $\gamma'(1/2) \notin T_{\gamma(1/2)}\mathcal{L}^2(L_0)$, em outras palavras a interseção de γ com a subvariedade $\mathcal{L}^2(L_0)$ é transversal, como o desejado. Portanto concluímos a prova do Lema. \blacksquare

Nesse momento estamos aptos a definir o Índice de Maslov relativo ao Lagrangiano $L_0 \in \mathcal{L}$, via homologia relativa.

Definição 4.32. *Definimos um isomorfismo:*

$$\mu_{L_0} : H_1(S\mathcal{L}, \mathcal{L}^0(L_0)) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \quad (4.7)$$

da seguinte forma: tome uma curva γ de classe C^1 em $S\mathcal{L}$ com os extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$ tal que γ tenha apenas uma interseção com $\mathcal{L}^2(L_0)$, sendo essa interseção transversal. Defina μ_{L_0} exigindo que a classe de homologia da curva γ seja levada no elemento $1 \in \mathbb{Z}_2$. Pelo Lema 4.31, o isomorfismo (4.7) está bem definido, isto é, independe da escolha de curva γ .

Suponha agora que $\gamma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$ é uma curva arbitrária contínua, com os extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$, então denotamos por $\mu_{L_0}(\gamma) \in \mathbb{Z}_2$ o elemento correspondente à classe de homologia de γ pelo isomorfismo (4.1). O número $\mu_{L_0}(\gamma)$ é chamado de Índice de Maslov da curva γ relativo ao Lagrangiano L_0 .

A seguir apresentamos algumas propriedades do Índice de Maslov, que seguem diretamente das propriedades da homologia relativa.

Proposição 4.33. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$ uma curva com extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$, então temos que:*

1. *se $\sigma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$ é uma curva com os extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$ tal que $\gamma(1) = \sigma(0)$, então $\mu_{L_0}(\gamma * \sigma) = (\mu_{L_0}(\gamma) + \mu_{L_0}(\sigma)) \bmod 2$;*
2. *$\mu_{L_0}(\gamma^{-1}) = \mu_{L_0}(\gamma)$;*
3. *se $\text{Im}(\gamma) \subset \mathcal{L}^0(L_0)$ então $\mu_{L_0}(\gamma) = 0$;*
4. *se $\sigma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$ é homotópica a γ com pontos livres em $\mathcal{L}^0(L_0)$, então $\mu_{L_0}(\gamma) = \mu_{L_0}(\sigma)$;*
5. *existe uma vizinhança \mathcal{U} de γ em $C^0([a, b], S\mathcal{L})$ dotado da topologia compacta-aberta tal que, se $\sigma \in \mathcal{U}$ tem extremos em $\mathcal{L}^0(L_0)$, então $\mu_{L_0}(\gamma) = \mu_{L_0}(\sigma)$.*

Exemplo 4.34. *Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow S\mathcal{L}$ uma curva de classe C^1 . Satisfazendo a propriedade de que, toda interseção com o conjunto $\cup_{k \geq 2} \mathcal{L}^{2k}(L_0)$, é uma interseção transversal com $\mathcal{L}^2(L_0)$, então o Índice de Maslov $\mu_{L_0}(\gamma)$ pode ser visto como o número de interseções da curva γ com o subconjunto $\mathcal{L}^2(L_0)$ módulo 2.*

Primeiro vamos mostrar que nesse caso o número de interseções deve ser finito, para tanto vamos mostrar que cada interseção é isolada. De fato, seja $t_0 \in (0, 1)$, tal que $\gamma(t_0) \in \mathcal{L}^2(L_0)$ e

$$\text{span}\{\gamma'(t_0)\} \oplus T_{\gamma(t_0)}\mathcal{L}^2(L_0) = T_{\gamma(t_0)}S\mathcal{L}.$$

Então se $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \text{Spin}(n)$ é um levantamento de γ , temos que $\text{Im}(\tilde{\gamma}) \subset \mathcal{U}$, já que $\text{Im}(\gamma) \subset \mathcal{L}^0(L_0) \cup \mathcal{L}^2(L_0)$. Um argumento similar à aquele apresentado na Proposição 4.30 mostra que:

$$\text{span}\{\tilde{\gamma}'(t_0)\} \oplus T_{\tilde{\gamma}(t_0)}f^{-1}(0) = T_{\tilde{\gamma}(t_0)}\text{Spin}(n),$$

ou seja, se g é uma métrica Riemanniana qualquer em \mathcal{U} , temos que $g(\nabla f(\tilde{\gamma}(t_0)), \tilde{\gamma}'(t_0)) \neq 0$. Mas isso implica que a derivada da função $\xi = f \circ \tilde{\gamma}$, no instante $t = t_0 \in (0, 1)$, é diferente de 0. Então, como $\xi(t_0) = 0$ e ξ é de classe C^1 , deve existir uma vizinhança do ponto t_0 tal que ξ não se anula nessa vizinhança, então o Teorema 4.21 garante que, $\gamma(t) \in \mathcal{L}^0(L_0)$

para alguma vizinhança de $t = t_0 \in (0, 1)$, e assim as interseções são isoladas. Portanto, utilizando a compacidade de $[0, 1]$ e o fato de toda interseção ser isolada vemos que o número de interseções deve ser finito. Consequentemente podemos decompor a curva γ como:

$$\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_k,$$

onde cada curva γ_j tem apenas uma interseção transversal com $\mathcal{L}^2(L_0)$. Então pelo item (1) da Proposição 4.33, temos que $\mu_{L_0}(\gamma)$ é o número de interseções da curva γ com o subconjunto $\mathcal{L}^2(L_0)$ módulo 2.

Observação 4.35. A definição do Índice de Maslov e os resultados desse Capítulo são fundamentadas na escolha do Lagrangiano $L_0 = E$, e por conseguinte na escolha da componente conexa $S\mathcal{L}$. Mas é possível estender os resultados dessa seção para um Lagrangiano qualquer $L_0 \in \mathcal{L}$. O principal ponto é que possivelmente devemos mudar a escolha de componente conexa $S\mathcal{L}$, já que precisamos estudar aquela componente conexa que contém o conjunto $\cup_{k \geq 0} \mathcal{L}^{2k}(L_0)$.

Para tanto, considere $A_0 \in O(n)$ tal que $L_0 = L_{A_0}$, então pela Proposição 3.51 temos que:

$$E \oplus E^* = L_{A_0} \oplus L_{-A_0}.$$

Então definimos $S\mathcal{L}$ como a componente conexa do elemento L_{-A_0} , portanto utilizando o Corolário 3.53 devemos ter que $S\mathcal{L} = \cup_{k \geq 0} \mathcal{L}^{2k}(L_0)$. Ainda mais, substituindo o difeomorfismo $\Gamma_B : O(n) \rightarrow \mathcal{L}$, pelo difeomorfismo:

$$\begin{aligned} \Xi : O(n) &\rightarrow \mathcal{L} \\ A &\mapsto L_{-A_0 A}, \end{aligned}$$

temos que $\Xi(Id) = L_{-A_0}$ e $\Xi(-Id) = L_0$. Mas mais importante temos que, $\Xi(A) \in \mathcal{L}^k(L_0)$ se e somente, se $\text{mul}(A, -1) = k$. Então, utilizando os mesmas demonstrações apresentadas nesse Capítulo, podemos estender os resultados apresentados e a também a definição de Índice de Maslov relativo ao Lagrangiano L_0 .

Capítulo 5

ÍNDICE DE MASLOV PARA ESTRUTURAS DE CARTAN-DIRAC

Neste Capítulo apresentaremos uma definição para o Índice de Maslov para estruturas de Cartan-Dirac, as definições e resultados sobre estruturas de Dirac são baseados no artigo [1].

5.1 Estruturas de Dirac

Quando estudamos a geometria de uma variedade simplética (V, ω) , é conhecido que certas operações podem comprometer a não degenerescência de ω . Por exemplo, se temos uma subvariedade $\iota : N \hookrightarrow M$, a forma induzida pela inclusão $\iota^*\omega$, geralmente é não degenerada. Para lidar com esse fato são introduzidas, as chamadas, estruturas pré-simpléticas.

Outra forma de obter degenerações é a seguinte, considere G um grupo de Lie agindo livre e propriamente em M , de forma que a ação de G preserve a estrutura simplética. Então se pensarmos a estrutura simplética ω , como um bivector de Poisson não degenerado $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$, podemos projetar π na variedade quociente M/G , já que a ação do grupo preserva a estrutura simplética, porém usualmente o vetor de Poisson induzido em M/G falha em ser não degenerado. Para estudar esse tipo de degeneração são introduzidas, as chamadas, estruturas de Poisson.

Estruturas de Dirac foram introduzidas como uma forma de uniformizar o estudo de ambas estruturas simpléticas degeneradas, estruturas pré-simpléticas e estruturas de Poisson. De maneira informal, estruturas de Dirac, relacionadas a uma variedade M , são subfibrados vetoriais suaves de

$$\mathbb{T}M \doteq TM \oplus T^*M,$$

que satisfazem uma certa condição de integrabilidade. Seja M uma variedade suave, para definir estruturas de Dirac relacionadas a M de forma mais precisa, vamos precisar definir duas estruturas adicionais em $\mathbb{T}M$.

Definição 5.1. Definimos o parâmetro natural $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{T}M \times \mathbb{T}M \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle X + \xi, Y + \eta \rangle_x = \xi(Y) + \eta(X),$$

para $x \in M$, onde $X + \xi, Y + \eta \in T_x M \oplus T_x^* M$.

Então como visto no Exemplo 2.4, para cada $x \in M$, temos que $(T_x M \oplus T_x^* M, \langle \cdot, \cdot \rangle_x)$ define um espaço vetorial Split. Agora definimos o conceito de colchete de Courant.

Definição 5.2. O colchete de Courant é a aplicação $[[\cdot, \cdot]] : \Gamma(\mathbb{T}M) \times \Gamma(\mathbb{T}M) \rightarrow \Gamma(\mathbb{T}M)$ definida por:

$$[[X + \xi, Y + \eta]] = \left([X, Y], \mathcal{L}_X \eta - \mathcal{L}_Y \xi + \frac{1}{2} d(\xi(Y) + \eta(X)) \right).$$

Finalmente formalizamos o conceito de estrutura de Dirac.

Definição 5.3. Uma estrutura de Dirac em M é um subfibrado vetorial $\mathbb{L} \subset \mathbb{T}M$, que satisfaz:

1. $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\perp$, onde o ortogonal é tomado com respeito à $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
2. $[[\Gamma(\mathbb{L}), \Gamma(\mathbb{L})]] \subset \Gamma(\mathbb{L})$, isto é, \mathbb{L} é involutivo com respeito à $[[\cdot, \cdot]]$.

Observamos, que a condição (1) da definição anterior é equivalente à dizer que $\mathbb{L}_x \subset T_x M \oplus T_x^* M$ é um subespaço Lagrangiano, para cada $x \in M$. Um subfibrado vetorial satisfazendo essa propriedade é dito um **subfibrado Lagrangiano**.

Exemplo 5.4. Estruturas Pré-Simpléticas.

Seja $\omega \in \Omega^2(M)$ uma 2-forma qualquer, então definimos o subfibrado Lagrangiano associado à ω por:

$$L_\omega = \{(X, \omega^\#(X)) : X \in \mathbb{T}M\} \subset \mathbb{T}M.$$

É possível mostrar que L_ω é uma estrutura de Dirac se e somente, se ω é uma estrutura pré-simplética.

Exemplo 5.5. Estruturas de Poisson.

Seja $\pi \in \Gamma(\wedge^2 \mathbb{T}M)$ um bivector qualquer, então definimos o subfibrado Lagrangiano associado à π por:

$$L_\pi = \{(\pi^\#(\xi), \xi) : \xi \in T^*M\} \subset \mathbb{T}M.$$

É possível mostrar que L_π é uma estrutura de Dirac se e somente, se π é uma estrutura de Poisson.

5.1.1 Estruturas de Cartan-Dirac

Estruturas de Cartan-Dirac são estruturas de Dirac definidas sobre grupos de Lie, considerando uma modificação no colchete de Courant. Para definir tais estruturas vamos primeiro definir as estruturas de Dirac torcidas.

Seja $H \in \Omega^3(M)$ uma 3-forma fechada, definimos o colchete de Courant H -torcido por:

$$[[X + \xi, Y + \eta]]_H = [[X + \xi, Y + \eta]] + \iota_Y \iota_X H.$$

Definição 5.6. *Uma estrutura de Dirac H -torcida em M consiste de um subfibrado vetorial $\mathbb{L} \subset \mathbb{T}M$, que satisfaz:*

1. $\mathbb{L} = \mathbb{L}^\perp$, onde o ortogonal é tomado com respeito à $\langle \cdot, \cdot \rangle$;
2. $[[\Gamma(\mathbb{L}), \Gamma(\mathbb{L})]]_H \subset \Gamma(\mathbb{L})$, isto é, \mathbb{L} é involutivo com respeito à $[[\cdot, \cdot]]_H$.

Considere agora um grupo de Lie, de forma que sua álgebra de Lie \mathfrak{g} possui um forma bilinear quadrática, não degenerada e Ad -invariante, digamos $\kappa(\cdot, \cdot)$. Então definimos a 3-forma de Cartan, $H \in \Omega^3(G)$, associada por:

$$H(V_1, V_2, V_3) = \kappa(V_1, [V_2, V_3]).$$

Fixamos um par (G, H) onde G é um grupo de Lie como descrito anteriormente e $H \in \Omega^3(G)$ a 3-forma de Cartan associada.

Definição 5.7. *Uma estrutura de Cartan-Dirac sobre (G, H) , é definida como uma estrutura de Dirac H -torcida sobre G .*

Uma das vantagens de se trabalhar com estruturas de Cartan-Dirac, é que sempre podemos trivializar o fibrado vetorial $\mathbb{T}G$, utilizando campos vetoriais invariantes à esquerda ou direita. Vamos mostrar agora, que em certo sentido, essa trivialização preserva o pareamento natural $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Lema 5.8. *Seja $\{E_1, \dots, E_n\}$ uma base para álgebra de Lie de G , considere $\{E_1^L, \dots, E_n^L\}$ os campos vetoriais invariantes à esquerda determinados por essa base, considere também $\{\xi_1^L, \dots, \xi_n^L\}$ o referencial dual associado ao referencial global $\{E_1^L, \dots, E_n^L\}$. Então, a aplicação linear*

$$T : T_1G \oplus T_1^*G \rightarrow T_gG \oplus T_g^*G,$$

dada por $T(E_j^L|_1) = E_j^L|_g$, $T(\xi_j^L|_1) = \xi_j^L|_g$, $\forall j = 1, \dots, n$. É tal que o pull-back de $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ por T é dado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, para cada $g \in G$.

Demonstração. Sejam $X + \xi, Y + \eta \in T_1G \oplus T_1^*G$, então existem X_j, Y_j, ξ_j e $\eta_j \in \mathbb{R}$, para $j = 1, \dots, n$, tais que

$$X + \xi = \sum_{j=1}^n X_j E_j^L|_1 + \xi_j \xi_j^L|_1;$$

$$Y + \eta = \sum_{j=1}^n Y_j E_j^L|_1 + \eta_j \xi_j^L|_1.$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle X + \xi, Y + \eta \rangle_1 &= \eta(X) + \xi(Y) \\ &= \sum_{j=1}^n Y_j \xi_j + X_j \eta_j. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$T(X + \xi) = \sum_{j=1}^n X_j E_j^L|_g + \xi_j \xi_j^L|_g;$$

$$T(Y + \eta) = \sum_{j=1}^n Y_j E_j^L|_g + \eta_j \xi_j^L|_g.$$

Portanto, é fácil ver que

$$\langle T(X + \xi), T(Y + \eta) \rangle_g = \sum_{j=1}^n Y_j \xi_j + X_j \eta_j.$$

E assim obtemos o desejado. ■

Utilizando o Lema anterior temos que ao trivializar o fibrado vetorial $\mathbb{T}G \simeq G \times \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, utilizando campos vetoriais invariantes a esquerda, vemos que subfibrados vetoriais Lagrangianos de $\mathbb{L}G$ são levados em subfibrados vetoriais Lagrangianos de $G \times \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$.

5.2 Índice de Maslov para Estruturas de Cartan-Dirac

Apesar dos esforços para definir a condição de integrabilidade para estruturas de Cartan-Dirac, vamos focar nossas atenções para a condições de tais estruturas definirem subfibrados Lagrangianos.

Sejam G um grupo de Lie conexo, e $\mathbb{L} \subset \mathbb{T}G$ um subfibrado vetorial Lagrangiano suave, então trivializando $\mathbb{T}G \simeq G \times \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ por campos vetoriais invariantes a esquerda, podemos ver \mathbb{L} como uma aplicação:

$$\begin{aligned} \mathbb{L} : G &\rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*) \\ g &\mapsto \mathbb{L}_g. \end{aligned}$$

Utilizando o fato que \mathbb{L} é um subfibrado vetorial suave, é fácil ver que a aplicação $\mathbb{L} : G \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*)$ também é suave.

Como anteriormente, fixamos $L_0 = \mathfrak{g}$, e definimos $S\mathcal{L}$ como, a componente conexa de \mathcal{L} relativa ao subespaço vetorial Lagrangiano \mathfrak{g}^* .

Se $\mathbb{L} \subset \mathbb{T}G$ é um subfibrado Lagrangiano tal que $\mathbb{L}_1 \in S\mathcal{L}$, temos pela conexidade de G que $\mathbb{L}_g \in S\mathcal{L}$, para cada $g \in G$. Assim se $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ é um loop contínuo, podemos computar o índice de Maslov do loop $\mathbb{L} \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow S\mathcal{L}$.

Definição 5.9. *Seja G um grupo de Lie conexo, munido da 3-forma de Cartan $H \in \omega^3(G)$. Então para um loop contínuo $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$, definimos o Índice de Maslov relativo à uma estrutura de Cartan-Dirac $\mathbb{L} \subset \mathbb{T}G$ da curva γ , como $\mu_{L_0}^{\mathbb{L}}(\gamma) = \mu_{L_0}(\mathbb{L} \circ \gamma)$.*

Considere um grupo de Lie G conexo munido de uma 3-forma de Cartan, então apresentamos algumas propriedades do operador $\mu_{L_0}^{\mathbb{L}} : \Pi(G) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ que seguem imediatamente da definição e da Proposição 4.33.

Proposição 5.10. *Sejam $\mathbb{L} \subset \mathbb{T}G$ uma estrutura de Cartan-Dirac, com $\mathbb{L}_1 \in S\mathcal{L}$, e $\gamma \in \Pi(G)$. Então temos que:*

1. *Se $\sigma \in \Pi(G)$ é tal que $\gamma(1) = \sigma(0)$, então $\mu_{L_0}^{\mathbb{L}}(\gamma * \sigma) = (\mu_{L_0}^{\mathbb{L}}(\gamma) + \mu_{L_0}^{\mathbb{L}}(\sigma)) \bmod 2$.*
2. *$\mu_{L_0}^{\mathbb{L}}(\gamma^{-1}) = \mu_{L_0}^{\mathbb{L}}(\gamma)$.*
3. *Se $\text{Im}(\mathbb{L}) \subset \mathcal{L}^0(L_0)$, então $\mu_{L_0}^{\mathbb{L}}(\gamma) = 0$, para todo $\gamma \in \Pi(G)$.*
4. *Se $\tilde{\mathbb{L}} : G \rightarrow S\mathcal{L}$ é uma estrutura de Cartan-Dirac tal que \mathbb{L} e $\tilde{\mathbb{L}}$ são homotópicas, então $\mu_{L_0}^{\mathbb{L}}(\gamma) = \mu_{L_0}^{\tilde{\mathbb{L}}}(\gamma)$, para todo $\gamma \in \Pi(G)$.*

Corolário 5.11. *Seja $\mathbb{L} : G \rightarrow S\mathcal{L}$ uma estrutura de Cartan-Dirac. Se existe $\gamma \in \Pi(G)$, tal que $\mu_{L_0}^{\mathbb{L}}(\gamma) = 1$, então \mathbb{L} não é homotópica à nenhuma estrutura de Poisson trivial.*

Apêndice A

GRUPO DAS UNIDADES DE UMA ÁLGEBRA

Nessa seção \mathcal{A} representa uma álgebra associativa com unidade definida sobre o corpo dos reais, tal que $\dim(\mathcal{A}) = n < \infty$, fixamos a estrutura de variedade suave em \mathcal{A} induzida pela estrutura de espaço vetorial. Associada a essa álgebra podemos definir o chamado grupo das unidades, que consiste nos elementos da álgebra que possuem inverso, i.é:

$$G = \{x \in \mathcal{A} : \exists x^{-1} \text{ com } x^{-1}x = xx^{-1} = 1\}.$$

O objetivo desse apêndice é mostrar que o grupo G é um aberto em \mathcal{A} e define um grupo de Lie. Ainda mais vamos calcular a sua álgebra de Lie e sua aplicação exponencial.

Proposição A.1. *O conjunto G é aberto em \mathcal{A} portanto define uma variedade de dimensão n . Ainda mais, as aplicações de produto e inversão do grupo G definem mapas suaves, conseqüente G tem uma estrutura de Grupo de Lie.*

Demonstração. Primeiramente como a álgebra \mathcal{A} tem dimensão finita existe um homomorfismo injetor $\mathcal{A} \hookrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ na álgebra das matrizes, tome uma norma $|\cdot|$ em $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $|AB| \leq |A||B|$, então o pullback dessa norma define uma norma $|\cdot|$ em \mathcal{A} tal que $|xy| \leq |x||y|$ para cada $x, y \in \mathcal{A}$. Como \mathcal{A} tem dimensão finita temos que a métrica $|\cdot|$ é completa.

Note que se $|x| < 1$ então a sequência $\varphi_n = \sum_{k=0}^n x^k$ é de Cauchy, de fato:

$$|\varphi_n - \varphi_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n x^k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |x|^k.$$

Então existe uma vizinhança U de $0 \in \mathcal{A}$ tal que para cada $x \in U$ temos que a série $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ converge. Agora defina a seguinte vizinhança de $1 \in \mathcal{A}$

$$V = \{1 - x : x \in U\}.$$

Vamos provar que $V \subset G$, para tanto tome $y = 1 - x$, tal que $x \in U$ e defina

$$S_n = \sum_{k=0}^n (1 - y)^k = \sum_{k=0}^n x^k,$$

portanto a sequência S_n converge. Agora se $S = \lim(S_n)$ temos que

$$Sy = \lim_n S_n y$$

e temos que

$$\begin{aligned} S_n y &= \sum_{k=0}^n (1-y)^k y = - \sum_{k=0}^n (1-y)^k (1-y-1) \\ &= - \sum_{k=0}^n (1-y)^{k+1} - (1-y)^k \\ &= 1 - (1-y)^{n+1} = 1 - x^{n+1}. \end{aligned}$$

Assim temos que $|S_n y - 1| = |x^{n+1}| \leq |x|^{n+1}$, logo $Sy = \lim_n S_n y = 1$. Por outro, utilizando um argumento similar é possível mostrar que $yS = 1$. Ou seja, o elemento y tem inverso dado por $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, portanto temos que V é uma vizinhança aberta de 1 em G .

Agora tome $y \in G$ e $x \in \mathcal{A}$ quaisquer, então

$$x = y + (x - y) = y(1 + y^{-1}(x - y))$$

da equação acima concluímos que se $|y^{-1}(x - y)| < 1$ então o elemento x é inversível. Em particular se $|x - y| < 1/|y^{-1}|$ temos que $|y^{-1}(x - y)| < 1$ e x é inversível, definindo

$$V_y = \{x \in \mathcal{A} : |x - y| < 1/|y^{-1}|\}$$

vemos que $V_y \subset G$ é aberto em \mathcal{A} , portanto G é aberto em \mathcal{A} .

Resta mostra que o produto e a inversão são aplicações suaves de G . Como a multiplicação é uma aplicação bilinear em \mathcal{A} temos que esse é um mapa suave em \mathcal{A} , mas como G é um conjunto aberto, também é suave em G . agora considere o mapa $i : G \rightarrow G$ tal que $i(x) = x^{-1}$, dado $y \in V$ temos que $y = (1 - x)$ e

$$i(y) = y^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - y)^k,$$

como a multiplicação é suave e a convergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - y)^k$ é uniforme pelo teste M de Weierstrass temos que a aplicação i deve ser suave em uma vizinhança de 1. Agora seja $y \in G$ qualquer e $x \in V_y$, então $x = y(1 + y^{-1}(x - y))$ onde $|y^{-1}(x - y)| < 1$ portanto:

$$i(x) = x^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (y^{-1})^k (x - y)^k \right) y^{-1},$$

pelo mesmo argumento utilizado anteriormente a inversão é suave quando restrita ao aberto U_y e portanto $i : G \rightarrow G$ define uma aplicação suave em G e temos que G é um grupo de Lie. ■

Notamos que a álgebra \mathcal{A} possui um comutador natural $[\cdot, \cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ dado por

$$[x, y] = xy - yx,$$

onde $x, y \in \mathcal{A}$. É fácil de ver que a álgebra \mathcal{A} munido do comutador $[\cdot, \cdot]$ define uma álgebra de Lie, denotamos essa álgebra de Lie por \mathfrak{a} . A proposição anterior garante que o grupo de Lie $G \subset \mathcal{A}$ é um grupo de Lie aberto em \mathcal{A} portanto obtemos um isomorfismo $\eta : T_1G \rightarrow \mathfrak{a}$, ainda mais denotando por \mathfrak{g} a álgebra de Lie de G temos um isomorfismo $\xi : \mathfrak{g} \rightarrow T_1G$ dado pela avaliação de um campo no elemento neutro, agora vamos mostrar que a composição $\eta \circ \xi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}$ nós dá um isomorfismo de álgebras de Lie.

Proposição A.2. *A seguinte composições de isomorfismos lineares*

$$\mathfrak{g} \xrightarrow{\xi} T_1G \xrightarrow{\eta} \mathfrak{a}$$

define um isomorfismo de álgebras de Lie.

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de \mathcal{A} , usando essa base como coordenadas locais para G , o isomorfismo $\eta : T_1G \rightarrow \mathfrak{a}$ é dado por:

$$\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial e_j} \Big|_1 \mapsto \sum_{j=1}^n a_j e_j.$$

Um elemento $a = \sum_{j=1}^n a_j e_j$ em \mathfrak{a} determina um campo vetorial invariante à esquerda a^L em \mathfrak{g} pela seguinte identidade

$$a^L \Big|_g = d(L_g)_1(a),$$

onde $g \in G$ e L_g é a traslação a esquerda por g em G . Como o mapa L_g é a restrição a G da aplicação linear $a \mapsto ga$ em \mathfrak{a} , temos que a sua diferencial em coordenadas é dada pela própria aplicação linear, i.é., temos que

$$a^L \Big|_g = \sum_{j=1}^n [ga]_j \frac{\partial}{\partial e_j} \Big|_g,$$

onde $[\cdot]_j : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na j -ésima coordenada relativa a base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Para provar que a composição $\eta \circ \xi$ é um isomorfismo de álgebra de Lie temos que mostra que esta preserva o comutador, ou seja, basta provar que

$$[a^L, b^L] = [a, b]^L,$$

onde $a, b \in \mathfrak{a}$ e o colchete da esquerda é dado pelo colchete de Lie em \mathfrak{g} e o colchete da direita é o colchete de \mathfrak{a} . Com o objetivo de computar $[a^L, b^L]$ definimos as funções $f_j, g_j : G \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f_j(x) = [xa]_j$ e $g_j(x) = [xb]_j$, para $j = 1, \dots, n$. Agora note que:

$$\begin{aligned} [a^L, b^L] &= \left[\sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial e_j}, \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial e_i} \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial e_j}, \frac{\partial}{\partial e_i} \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^n \sum_{l=1}^n \{ \delta_{kl} g_k(e_j) f_j - \delta_{jl} f_j(e_k) g_k \} \frac{\partial}{\partial e_l} \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{j,k=1}^n \delta_{kl} g_k(e_j) f_j \right\} \frac{\partial}{\partial e_l} - \left\{ \sum_{j,k=1}^n \delta_{jl} f_j(e_k) g_k \right\} \frac{\partial}{\partial e_l} \\ &= \sum_{j,k=1}^n g_k(e_j) f_j \frac{\partial}{\partial e_k} - \sum_{j,k=1}^n f_j(e_k) g_k \frac{\partial}{\partial e_j} \\ &= \sum_{j,k=1}^n \{ g_k(e_j) f_j - f_k(e_j) g_j \} \frac{\partial}{\partial e_k}. \end{aligned}$$

Então obtemos que:

$$[a^L, b^L]_1 = \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n [e_j b]_k [a]_j - [e_j a]_k [b]_j \right\} \frac{\partial}{\partial e_k} \Big|_1.$$

Mas por outro lado:

$$[a, b] = ab - ba = \sum_{j=1}^n [a]_j e_j b - [b]_j e_j a,$$

portanto a k -ésima coordenada de $ab - ba$ é dada por

$$[ab - ba]_k = \sum_{j=1}^n [a]_j [e_j b]_k - [b]_j [e_j a]_k.$$

Ou seja, obtemos que:

$$[a^L, b^L]_1 = \sum_{k=1}^n [ab - ba]_k \frac{\partial}{\partial e_k} \Big|_1,$$

em outras palavras, provamos que $[a^L, b^L] = [a, b]^L$ como o desejado. ■

Nosso objetivo agora é estudar a aplicação exponencial do grupo de Lie G , vamos mostrar que ela pode ser exibida explicitamente, de forma similar ao que fazemos no caso $GL(\mathbb{R}^n)$.

Proposição A.3. Para qualquer $x \in \mathfrak{a}$ definimos o elemento

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k. \quad (\text{A.1})$$

Então essa série converge para um elemento inversível de \mathfrak{a} , e o subgrupo à um parâmetro gerado por $x \in \mathfrak{a} (\simeq \mathfrak{g})$ é dado pela aplicação $\gamma(t) = e^{tx}$.

Demonstração. Primeiro, verificamos a convergência. Como na demonstração da Proposição A.1, munimos o espaço \mathfrak{a} com uma norma satisfazendo $|ab| \leq |a||b|$. Segue por indução que $|a^k| \leq |a|^k$. O teste M de Weierstrass mostra que (A.1) converge uniformemente em qualquer subconjunto limitado de \mathfrak{a} , por comparação com a série $\sum_k (1/k!)c^k = e^c$, $c \in \mathbb{R}$.

Fixe $a \in \mathfrak{a}$. Sobre a nossa identificação de \mathfrak{a} com \mathfrak{g} o elemento a corresponde ao campo vetorial invariante a esquerda a^L dado por

$$a^L|_g = \sum_{j=1}^n [ga]_j \frac{\partial}{\partial e_j} \Big|_g. \quad (\text{A.2})$$

Então o subgrupo à um parâmetro gerado por a é dado pela curva integral de a^L em G , e portanto satisfaz o problema de valor inicial dado por

$$\begin{cases} \gamma'(t) = a^L|_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) = 1. \end{cases}$$

Usando a equação (A.2) vemos que a condição para γ pode ser uma curva integral pode ser reescrita como

$$[\gamma'(t)]_k = [\gamma(t)a]_k, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

ou em notação vetorial $\gamma'(t) = \gamma(t)a$. Agora vamos mostrar que a curva $\gamma(t) = e^{ta}$ satisfaz essa equação. Como $\gamma(0) = 1$, isso implica que γ é a única curva integral de a^L começando na identidade e portanto é o subgrupo à um parâmetro desejado.

Para ver que $\gamma(t) = e^{ta}$ é uma aplicação suave, notamos que diferenciando a série (A.1) termo à termo de maneira informal obtemos que

$$\gamma'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} t^{k-1} a^k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} a^{k-1} \right) a = \gamma(t)a.$$

Como a diferencial da série converge uniformemente em conjuntos limitados, a diferenciação termo a termo é justificada. Pela suavidade da solução de EDO's temos que a curva $\gamma(t) = e^{ta}$ é suave, uma conta similar a feita anteriormente podemos provar que $\gamma'(t) = a\gamma(t)$.

Resta mostrar que $\gamma(t)$ é inversível para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\text{Im}(\gamma) \subset G$. Para tanto, definimos $\sigma(t) = \gamma(t)\gamma(-t) = e^{ta}e^{-ta}$, então γ é uma curva suave em \mathfrak{a} , então como o produto em \mathfrak{a} é bilinear temos que:

$$\sigma'(t) = (\gamma(t)a)\gamma(-t) - \gamma(t)(a\gamma(-t)) = 0.$$

Segue então que σ é uma curva constante e como $\sigma(t) = \sigma(0) = 1$ temos que $\gamma(-t)\gamma(t) = 1$, o que mostra que o termo γ é inversível e $(\gamma(t))^{-1} = \gamma(-t)$. ■

Apêndice B

ESPAÇOS DE RECOBRIMENTO

B.1 Resultados Fundamentais

O objetivo dessa seção é relembrar alguns conceitos e resultados fundamentais da Teoria de Grupos Fundamentais e Espaços de Recobrimento os resultados apresentados nessa seção e suas respectivas demonstrações podem ser encontrados em [4]. Começamos a seção relembrando a definição de uma aplicação de recobrimento, e durante a seção \tilde{X} e X denotaram espaços topológicos.

Definição B.1. Uma aplicação $p : \tilde{X} \rightarrow X$ contínua e sobrejetora é dita uma aplicação de recobrimento se para cada ponto $x \in X$ existe um aberto $U \ni x$ de X tal que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_{\alpha}$$

é a união de conjuntos abertos $U_{\alpha} \subset \tilde{X}$ de forma que $U_{\alpha} \cap U_{\beta} = \emptyset$ para cada $\alpha \neq \beta$ em \mathcal{A} . E ainda mais temos que $p|_{U_{\alpha}} : U_{\alpha} \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Quando o conjunto \tilde{X} é simplesmente conexo dizemos que o mapa $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um recobrimento universal.

Observação B.2. Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento entre variedades suaves dizemos que esta aplicação de recobrimento é suave se p é uma aplicação suave e cada mapa $p|_{U_{\alpha}} : U_{\alpha} \rightarrow U$ da definição anterior define um difeomorfismo.

Definição B.3. Suponha que $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento e também suponha que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a fibra $p^{-1}(x)$ tenha cardinalidade n para cada $x \in X$. Neste caso temos dizemos que p é um n -recobrimento.

Vamos mostrar como construir aplicações de recobrimento a partir de ações de grupo, para tanto lembramos que um grupo G age de maneira livre em um conjunto S se $g \cdot x = x$ para algum $x \in S$ então $g = e$. Uma das propriedades de ações livres é evidenciada no seguinte Lema.

Lema B.4. Suponha que G é um grupo de Lie finito agindo suave e livremente em uma variedade E , então para cada ponto $p \in E$ existe uma vizinhança $U \subset E$ de p em E tal que $g \cdot U \cap U = \emptyset$ para cada $g \neq e$ em G , onde e representa a identidade do grupo.

Demonstração. Ver [3], Lema 21.11. ■

Teorema B.5. *Suponha que E é uma variedade suave e G é um grupo de Lie finito agindo de maneira suave e livre em E . Então o espaço quociente E/G é uma variedade topológica e tem uma única estrutura tal que a projeção canônica $\pi : E \rightarrow E/G$ é um k -recobrimento suave, onde k é a cardinalidade do grupo G .*

Demonstração. Segue do teorema da variedade quociente (ver [3], Teorema 21.10) que E/G tem uma única estrutura de variedade tal que π é uma submersão. Como todo recobrimento suave é em particular uma submersão, qualquer outra estrutura diferenciável que induz uma estrutura de recobrimento em π tem que ser igual a esta. Como $\dim(E/G) = \dim(E) - \dim(G) = \dim(E)$ devemos ter que π é um difeomorfismo local, então resta provar que π é uma aplicação de recobrimento.

Seja $p \in E$ então pelo Lema anterior existe uma vizinhança $U \ni p$ em E tal que

$$g \cdot U \cap U = \emptyset \text{ para cada } g \neq e \text{ em } G. \tag{B.1}$$

Podemos redefinir U de forma que este seja conexo, $V = \pi(U)$ seja aberto e $\pi|_U : U \rightarrow V$ seja um difeomorfismo. Agora notamos que

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U.$$

O fato do mapa $g : E \rightarrow E$ tal que $g(p) = g \cdot p$ ser um difeomorfismo para cada $g \in G$ garante que os conjuntos $g \cdot U$ são abertos e a equação (B.1) garante que a união desses conjuntos é disjunta, por fim para ver que o mapa $\pi|_{g \cdot U} : g \cdot U \rightarrow V$ é difeomorfismo basta notar que este é a composição dos seguintes difeomorfismos $\pi|_U \circ g^{-1}|_{g \cdot U}$, assim concluímos a prova. ■

A vantagem de se trabalhar com uma aplicação de recobrimento pode ser vista considerando essas propriedades clássicas de espaços de recobrimento.

Proposição B.6. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento e Z um espaço topológico conexo. Se $\tilde{g}, \hat{g} : Z \rightarrow \tilde{X}$ são tais que $p \circ \tilde{g} = p \circ \hat{g}$ então $\tilde{g}(z) \neq \hat{g}(z)$ para cada $z \in Z$ ou $\tilde{g} = \hat{g}$.*

Proposição B.7. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento suave. Dado um caminho de classe C^k , para $k \geq 0$, $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ e um ponto $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{x}) = \gamma(a)$. Existe um único caminho, de classe C^k , $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{\gamma}(a) = \tilde{x}$ e $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.*

Proposição B.8. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento. Se dois caminhos contínuos $\gamma, \sigma : [a, b] \rightarrow X$ tem os mesmos extremos e são homotópicos então os seus levantantes $\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma} : [a, b] \rightarrow \tilde{X}$, que começam no mesmo ponto, terminam no mesmo ponto e ainda mais são homotópicos.*

As Proposições acima mostram que dada uma aplicação de recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ então essa possui a chamada propriedade de Levantamento (Proposição B.7) e estas também nos dão informação a respeito das propriedades homotópicas desses levantantes. Por fim vamos enunciar um resultado que mostra uma importante relação entre o grupo fundamental de X e o grupo fundamental de \tilde{X} , quando \tilde{X} é um conjunto conexo por caminhos.

Teorema B.9. *Seja $p : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento com \tilde{X} conexo por caminhos. Então, para cada $x \in X$, o grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ age transitivamente na fibra $p^{-1}(x)$ e o grupo de isotropia do ponto \tilde{x} em $p^{-1}(x)$ é dado por $p_{\#} \left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \right)$, onde $p_{\#}$ é o mapa induzido à nível de grupo fundamental por p .*

B.2 Recobrimento Duplo Universal e o 2-Índice

Fixe agora um 2-recobrimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ onde o espaço \tilde{X} é conexo por caminhos e simplesmente conexo, neste caso chamamos $p : \tilde{X} \rightarrow X$ o recobrimento universal de X . O Teorema B.9 nós diz então que o grupo de isotropia da ação de $\pi_1(X, x)$ em $p^{-1}(x)$ é trivial portanto temos uma bijeção entre esses espaços, mas como p é um 2-recobrimento a fibra tem cardinalidade 2, concluímos assim que $\pi_1(X, x)$ é isomorfo a \mathbb{Z}_2 . O objetivo dessa seção é exhibir esse isomorfismo explicitamente para tanto introduzimos o conceito de 2-índice.

Para tanto definimos o espaço de loops de X da seguinte forma

$$\Pi(X) = \{\gamma \in C^0([0, 1], X) : \gamma(0) = \gamma(1)\}.$$

Portanto definimos o 2-índice μ no espaço de loops como sendo a seguinte aplicação:

Definição B.10. *Dado $\gamma \in \Pi(X)$ definimos*

$$\mu(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{se } \tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1), \\ 0, & \text{se } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1). \end{cases}$$

Onde $\tilde{\gamma}$ é um levantamento de γ .

Vamos mostrar que o operador μ está bem definido. Primeiro notamos que a Proposição B.7 garante a existência de um levante, agora resta mostrar que o índice não depende da escolha do levante. Para tanto, basta provar que dado um loop $\gamma \in \Pi(X)$ e dois levantes distintos $\tilde{\gamma}$ e $\hat{\gamma}$, então $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$ implica que $\hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}(1)$. Mas de fato, suponha que $\tilde{x}_0 = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$ então $p(\tilde{x}_0) = x_0 = \gamma(0) = \gamma(1)$. Como p é um 2-recobrimento, existe $\tilde{x}_1 \neq \tilde{x}_0$ em X , tal que $p^{-1}(x_0) = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\}$. Agora como os levantes $\tilde{\gamma}, \hat{\gamma}$ são distintos a Proposição B.6 garante que

$$\tilde{\gamma}(t) \neq \hat{\gamma}(t), \text{ para cada } t \in [0, 1], \quad (\text{B.2})$$

Mas como $p(\hat{\gamma}(0)) = x_0 = p(\hat{\gamma}(1))$, devemos ter que $\hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1) \in \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\}$ e portanto a equação (B.2) garante que $\hat{\gamma}(0) = \tilde{x}_1 = \hat{\gamma}(1)$ e assim o 2-índice μ está bem definido.

Observação B.11. Dado um ponto $y_0 \in Y$ vamos denotar por $e_{y_0} \in \Pi(Y)$ o loop constante $e_{y_0}(t) = y_0$. Dados loops γ e σ em $\Pi(Y)$ que tem o mesmo ponto base vamos utilizar a notação $\gamma \cong \sigma$ para denotar o fato que γ e σ são homotópicos por caminho. Por fim, vamos utilizar o símbolo $*$ para denotar a operação concatenação de curvas.

O principal objetivo para se definir o 2-índice é realizado pela seguinte Proposição.

Proposição B.12. Sejam $\gamma, \sigma \in \Pi(X)$. Então:

1. Se γ e σ tem o mesmo ponto base então

$$\mu(\gamma * \sigma) = (\mu(\gamma) + \mu(\sigma)) \bmod 2.$$

2. Se γ e σ são livremente homotópicas então $\mu(\gamma) = \mu(\sigma)$.

3. Se $\mu(\gamma) = \mu(\sigma)$ então γ e σ são livremente homotópicas. Caso γ e σ tenham o mesmo ponto base então $\gamma \cong \sigma$.

4. Dado $x_0 \in X$ e $k \in \mathbb{Z}_2$ existe $\gamma \in \Pi(X)$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ e $\mu(\gamma) = k$.

Demonstração.

1. Suponha que $x_0 \in X$ é o ponto base de γ e σ então tome um levantamento $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ assim $p(\tilde{\gamma}(0)) = \gamma(0) = p(\tilde{\gamma}(1))$, a Proposição B.7 garante que existe um levantamento $\tilde{\sigma}$ de σ tal que $\tilde{\sigma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$.

É fácil ver que $\tilde{\gamma} * \tilde{\sigma}$ é um levantamento da curva $\gamma * \sigma$. Temos que mostrar que

$$\mu(\gamma * \sigma) = (\mu(\gamma) + \mu(\sigma)) \bmod 2,$$

para tanto suponha primeiro que $\mu(\gamma * \sigma) = 0$, então:

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma} * \tilde{\sigma}(0) = \tilde{\gamma} * \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}(1).$$

Se $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$ temos que

$$\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\sigma}(0),$$

assim $\mu(\gamma) + \mu(\sigma) = 0$. Por outro lado, se $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1)$ obtemos

$$\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\sigma}(0),$$

e $\mu(\gamma) + \mu(\sigma) = 2$, portanto obtemos o desejado no caso $\mu(\gamma * \sigma) = 0$.

Agora suponha que $\mu(\gamma * \sigma) = 1$, ou seja

$$\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma} * \tilde{\sigma}(0) \neq \tilde{\gamma} * \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}(1).$$

Novamente assumimos primeiro que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$, portanto

$$\tilde{\sigma}(1) \neq \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\sigma}(0),$$

e temos que $\mu(\gamma) + \mu(\sigma) = 1$. Por fim, se $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1)$ temos que $p^{-1}(x_0) = \{\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(1)\}$ e $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\sigma}(1)$ assim

$$\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\sigma}(0),$$

e concluímos que $\mu(\gamma) + \mu(\sigma) = 1$, finalizando a prova.

2. Primeiramente vamos mostrar que $\gamma \in \Pi(X)$ é homotópico ao caminho constante $e_{\gamma(0)}$ se, e somente se $\mu(\gamma) = 0$. De fato, seja $\tilde{\gamma}$ um levantamento de γ portanto $e_{\tilde{\gamma}(0)}$ é um levantamento de $e_{\gamma(0)}$ que tem o mesmo ponto inicial de $\tilde{\gamma}$. Supondo que γ e $e_{\gamma(0)}$ são homotópicos a Proposição B.8 garante que as curvas $\tilde{\gamma}$ e $e_{\tilde{\gamma}(0)}$ são homotópicas e tem os mesmos extremos, assim $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$ e temos que $\mu(\gamma) = 0$, como desejado. Agora suponha que $\mu(\gamma) \neq 0$, então dado um levantamento $\tilde{\gamma}$ de γ sabemos que $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(1)$, mas como \tilde{X} é simplesmente conexo existe uma homotopia de caminhos $\tilde{H} : \tilde{\gamma} \cong e_{\tilde{\gamma}(0)}$, definindo $H = p \circ \tilde{H}$ temos que H é uma homotopia de caminhos entre γ e $e_{\gamma(0)}$.

Para o caso geral, suponha que γ e σ são livremente homotópicas, como X é conexo por caminhos temos que γ é homotópico à $e_{\gamma(0)}$ se, e somente se σ é homotópico à $e_{\sigma(0)}$. Portanto $\mu(\gamma) = 0$ se e somente, se $\mu(\sigma) = 0$, o que concluí a prova.

3. Suponha que $\mu(\gamma) = \mu(\sigma)$, então vamos mostrar que γ e σ são livremente homotópicas. De fato, tome $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\sigma}$ levantantes de γ e σ . Como \tilde{X} é conexo por caminhos existe uma curva contínua $\tilde{\xi} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{\xi}(0) = \tilde{\gamma}(0)$ e $\tilde{\xi}(1) = \tilde{\sigma}(1)$. Agora considere a curva $\xi = p \circ \tilde{\xi}$ note que está é uma curva contínua em X ligando os pontos $\gamma(0)$ e $\sigma(0)$. Por outro lado, como p é um 2-recobrimento temos que existem pontos $\tilde{\gamma}_-(0)$ e $\tilde{\sigma}_-(0)$ em \tilde{X} tais que $p^{-1}(\gamma(0)) = \{\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}_-(0)\}$ e $p^{-1}(\sigma(0)) = \{\tilde{\sigma}(0), \tilde{\sigma}_-(0)\}$ assim pelas Proposições B.7 e B.6 temos que existe um levantamento $\hat{\xi}$ de ξ tal que $\hat{\xi}(0) = \tilde{\gamma}_-(0)$ e $\hat{\xi}(1) = \tilde{\sigma}_-(0)$.

Definimos a curva contínua $\tilde{\tau} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ por

$$\tilde{\tau} = \begin{cases} \tilde{\xi}, & \text{se } \mu(\gamma) = \mu(\sigma) = 0, \\ \hat{\xi}, & \text{se } \mu(\gamma) = \mu(\sigma) = 1. \end{cases}$$

Notamos que $\tilde{\tau}(0) = \tilde{\gamma}(1)$ e $\tilde{\tau}(1) = \tilde{\sigma}(1)$ e $p \circ \tilde{\tau} = \xi$. Portanto definindo $\tilde{\gamma}' = \tilde{\xi}^{-1} * \tilde{\gamma} * \tilde{\tau}$ temos que as curvas $\tilde{\gamma}'$ e $\tilde{\sigma}$ tem os mesmos extremos. Como \tilde{X} é simplesmente conexo existe uma homotopia com pontos fixos entre as curvas $\tilde{\gamma}'$ e $\tilde{\sigma}$, digamos $\tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$. Agora definindo a função $H = p \circ \tilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ temos que esta satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} H(0, t) &= \xi^{-1} * \gamma * \xi(t), \quad \forall t \in [0, 1], \\ H(1, t) &= \sigma(t), \quad \forall t \in [0, 1], \\ H(s, 0) &= H(s, 1) = \sigma(0) = \sigma(1). \end{aligned}$$

Portanto a curva $\xi^{-1} * \gamma * \xi$ é livremente homotópica à σ , a conclusão da prova segue do fato que a curva $\xi^{-1} * \gamma * \xi$ é livremente homotópica à γ .

Para o caso que as curvas γ e σ possuem os mesmos extremos notamos que pela Proposição B.7 mais o fato que $\mu(\gamma) = \mu(\sigma)$ garantem que podemos tomar os levantamentos $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\sigma}$ de forma que estes tenham os mesmos extremos. Então um argumento similar ao utilizado anteriormente garante que $\gamma \cong \sigma$.

4. Seja $k = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tal que $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, então tome \tilde{x}_1 em \tilde{X} tal que $p^{-1}(x_0) = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1\}$. Tome $\tilde{\xi}$ um caminho contínuo ligando \tilde{x}_0 e \tilde{x}_1 assim definimos

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} \tilde{\tau}, & \text{se } k = 1, \\ e_{\tilde{x}_0}, & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Logo utilizando o item 2 temos que $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ satisfaz o desejado.



Uma consequência imediata dessa Proposição é que o 2-índice μ define um isomorfismo entre o grupo fundamental de X e o grupo \mathbb{Z}_2 , mais especificamente.

Corolário B.13. *Dado $x_0 \in X$ temos que o 2-índice $\mu : \Pi(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ descende a um aplicação*

$$\begin{aligned}\bar{\mu} : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \mathbb{Z}_2 \\ [\gamma] &\mapsto \mu(\gamma).\end{aligned}$$

Ainda mais, a aplicação $\bar{\mu}$ é um isomorfismo de grupos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Henrique Bursztyn. *A brief introduction to Dirac manifolds*, page 4–38. Cambridge University Press, 2013. doi: 10.1017/CBO9781139208642.002.
- [2] H.B. Lawson and M.L. Michelsohn. *Spin Geometry*. Princeton Mathematical Series. University Press, 1994. ISBN 0-691-08542-0.
- [3] John Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag New York, 2 edition, 2012. ISBN 978-1-4419-9981-8.
- [4] E.L. Lima. *Fundamental Groups and Covering Spaces*. Taylor & Francis, 2003. ISBN 9781568811314.
- [5] Ioan Marcut. An introduction to dirac geometry. 10th International Young Researcher Workshop on Geometry, Mini-course notes, URL: https://www.math.ru.nl/~imarcut/index_files/Dirac.pdf, 2016.
- [6] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1998. ISBN 9780198504511.
- [7] E. Meinrenken. *Clifford Algebras and Lie Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN 9783642362163.
- [8] Paolo Piccione and Daniel Victor Tausk. *A Student's Guide to Symplectic Spaces, Grassmannians and Maslov Index*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1 edition, 2009. ISBN 9788524402838.
- [9] V.I. Arnol'd. Characteristic class entering in quantization conditions. *Funct Anal Its Appl*, 1:1–13, 1967. doi: 10.1007/BF01075861. Moscow State University. Translated from *Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya*, Vol. 1, No. 1, pp.1–14, January–March, 1967.
- [10] Aline Zanardini. *Dirac structures and their homotopy classification*. Masters dissertation, Universidade Federal do Paraná, 2016. URI: <http://hdl.handle.net/1884/46204>.