

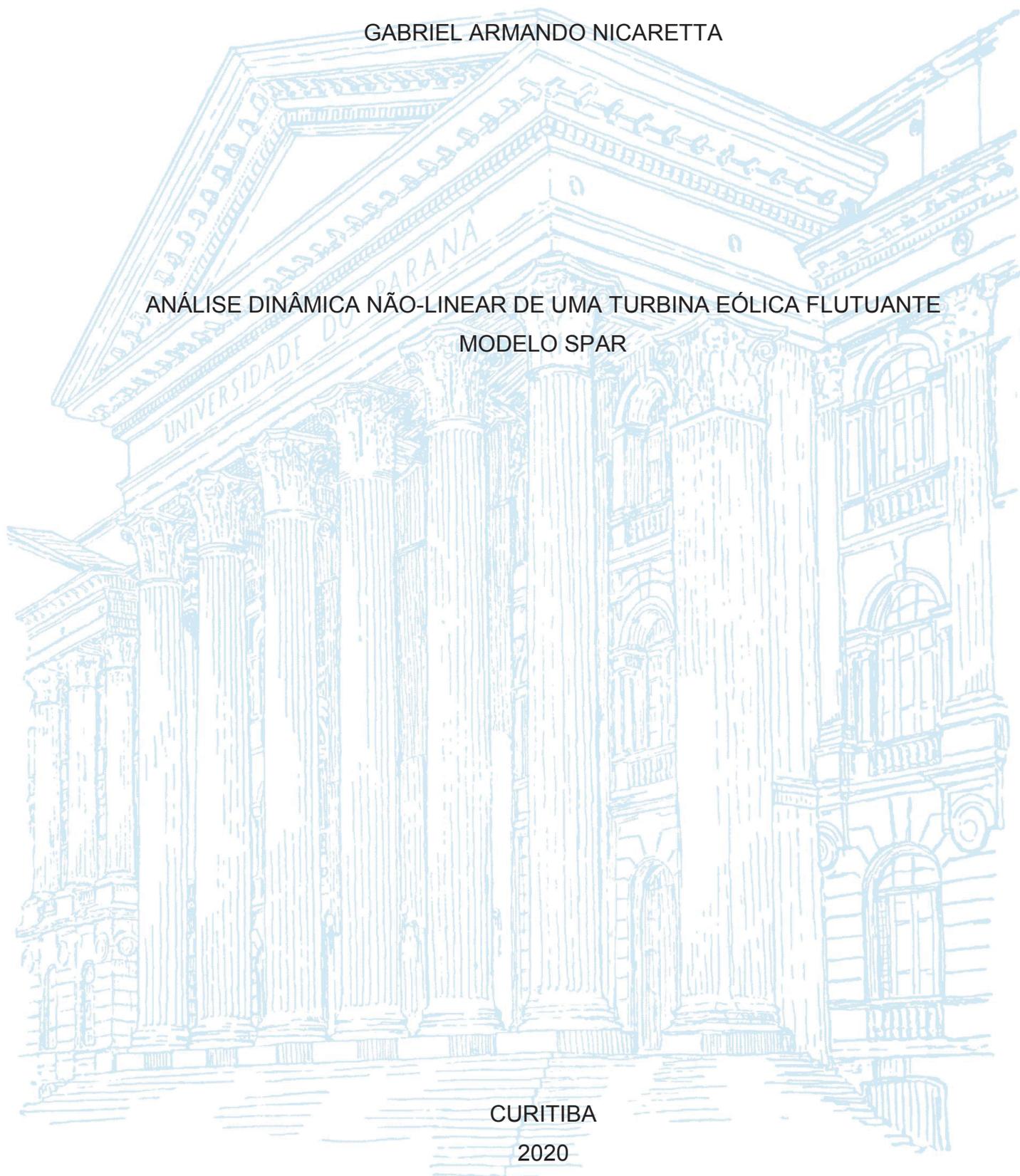
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GABRIEL ARMANDO NICARETTA

ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UMA TURBINA EÓLICA FLUTUANTE  
MODELO SPAR

CURITIBA

2020



GABRIEL ARMANDO NICARETTA

ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UMA TURBINA EÓLICA FLUTUANTE  
MODELO SPAR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Construção Civil.

Orientador: Prof. Dr. Elvidio Gavassoni Neto

CURITIBA

2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE – SIBI/UFPR

---

N583a

Nicaretta, Gabriel Armando

Análise dinâmica não-linear de uma turbina eólica flutuante modelo SPAR [recurso eletrônico]/ Gabriel Armando Nicaretta, 2020.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Construção Civil.

Orientador: Prof. Dr. Elvidio Gavassoni Neto

1. Energia 2. Energia eólica. 3. Recursos naturais renováveis. I. Gavassoni Neto, Elvidio. II. Universidade Federal do Paraná. III. Título.

CDD 333.79

---

Bibliotecária: Vilma Machado CRB9/1563

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE CONSTRUÇÃO CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **GABRIEL ARMANDO NICARETTA** intitulada: **ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR DE UMA TURBINA EÓLICA FLUTUANTE MODELO SPAR**, sob orientação do Prof. Dr. ELVIDIO GAVASSONI NETO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

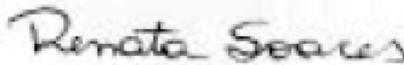
A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 02 de Abril de 2020.



ELVIDIO GAVASSONI NETO

Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)



RENATA MACHADO SOARES

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS)



MARCOS ARNDT

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

## RESUMO

O crescimento da demanda de energia para sustentar a expansão econômica e o desenvolvimento social é um grande desafio. A energia eólica tem se mostrado uma alternativa de fonte renovável interessante às fontes, motivando o estudo do potencial inexplorado desse recurso em áreas offshore. Nesse cenário, as turbinas eólicas offshore têm sido projetadas, inclusive, para serem instaladas em águas profundas sobre plataformas flutuantes. O ambiente oceânico faz com que as turbinas eólicas estejam sujeitas às ações de vento e ondas. Diferentemente das estruturas usuais da construção civil, plataformas flutuantes podem apresentar, em resposta às solicitações do ambiente, deslocamentos significativos, invalidando uma análise linear da estrutura. Este trabalho se insere, portanto, no estudo do comportamento não linear da dinâmica de estruturas, se propondo a analisar uma turbina eólica de 5 MW instalada em uma plataforma flutuante do tipo Spar. O estudo é realizado utilizando-se a análise modal não linear. É feita uma apresentação dos principais componentes de uma turbina eólica, assim como a classificação dos tipos de estrutura de suporte de turbinas eólicas offshore. Apresentam-se as duas principais definições de modos normais não lineares (MNNLs). A primeira pode ser vista como uma expansão do conceito de modos normais lineares (MNLs) para sistemas não lineares. A outra, é baseada em uma fundamentação geométrica, e que pode ser aplicada também a sistemas não conservativos. Na sequência, é mostrado o método das variedades invariantes, uma técnica de derivação analítica dos MNNLs. Discute-se comparativamente os fenômenos da dinâmica linear versus a não linear. Desenvolve-se, para representar uma plataforma Spar, um modelo matemático não linear de dois graus de liberdade, um referente à rotação da plataforma e o outro para a rotação da torre. São deduzidas para esse sistema as equações de equilíbrio estático e dinâmico, através do princípio de Hamilton. Efeitos provenientes de ações de vento, cargas hidrostáticas e ondas são considerados em seu modelo. Estuda-se, como primeira análise, as frequências naturais de vibração e os modos normais lineares quando o sistema é considerado linear. Em seguida, já na análise não linear, o método das variedades invariantes é usado no trabalho para se obter os modelos de ordem reduzida (MORs), que visam desacoplar os MNNLs da dinâmica do sistema. Os MORs obtidos são utilizados para se estudar o sistema à vibração livre. Seu domínio de validade é obtido através da comparação no espaço fase e resposta no tempo com as respectivas soluções numéricas de referência. Estuda-se a variação das frequências de vibração com a amplitude dos MNNLs, utilizando o método do balanço harmônico nos MORs, obtendo-se boa concordância com a resposta utilizando o sistema original de equações. Curvas de energia de frequência para cada MNNLs são geradas. Alguns fenômenos não lineares, como enrijecimento, amolecimento, múltiplas soluções e salto dinâmico são observados. Outras configurações geométricas, menos profundas, de plataformas são estudadas. A análise indicou mudanças nas frequências dos MNNLs e modos de vibração, e principalmente nas amplitudes de vibração na simulação dos efeitos de ondas. Entretanto, os fenômenos não lineares observados são similares aos vistos na configuração sem a variação do comprimento do casco.

**Palavras-chave:** Estruturas offshore. Fontes renováveis de energia. Análise modal não linear. Plataformas flutuantes. Modelos de ordem reduzida.

## ABSTRACT

The increase of energy demand for economic growth and social development is a major challenge. Wind energy has been shown to be an interesting alternative in the search for renewable sources of energy, motivating the study of the potential of interventions in offshore areas. In this scenario, floating offshore wind turbines have been designed to be installed in deep waters on floating platforms. The oceanic environment makes wind turbines subject to the actions of wind and waves. Unlike the usual civil construction structures, floating platforms may present, in response to requests from the environment, significant displacements, invalidating a linear analysis of the structure. This work is therefore included in the study of the nonlinear behavior of the dynamics of structures, proposing to analyze a 5 MW wind turbine installed on a floating platform of the Spar type. The study is carried out using nonlinear modal analysis. It is presented the definition of the main components of a wind turbine, as well as the classification of the support structure types of offshore wind turbines. The two main definitions of nonlinear normal modes (NNMs) are presented. The first can be seen as an expansion of the concept of linear normal modes (LNMs) for nonlinear systems. The other is based on geometric arguments, and can also be applied to nonconservative systems. In the sequence, the invariant manifold approach, an analytical derivation technique of NNMs, is shown. The phenomena of linear versus nonlinear dynamics are discussed comparatively. To represent a Spar platform, a nonlinear mathematical model of two degrees of freedom is developed, one related to the rotation of the platform and the other to the rotation of the tower. Static and dynamic equilibrium equations are deduced for this system, using the Hamilton principle. Effects from wind, hydrostatic loads and waves are considered in your model. As first analysis, the natural frequencies of vibration and the linear normal modes are studied when the system is considered linear. Then, in nonlinear analysis, the invariant manifold method is used in the work to obtain reduced order models (ROMs), which aim to decouple the NNMs from the system dynamics. The obtained ROMs are used to study the system under free vibration. Its validity domain is obtained through comparison in the phase space and time response with the respective reference numerical solutions. Using the harmonic balance method in the ROMs, variations of the vibration frequencies with the amplitude of the NNMs are studied, obtaining good agreement with the answer using the original system of equations. Frequency energy curves for each NNM are generated. Some nonlinear phenomena, such as hardening, softening, multiple solutions and dynamic jumping are observed. Others, less deep, geometric configurations of platforms are studied. The analysis indicated changes in the frequencies of the NNMs and modes of vibration, and mainly in the amplitudes of vibration in the simulation of wave effects. However, the observed non-linear phenomena are similar to those seen in the configuration without varying the hull length.

**Keywords:** Offshore structures. Renewable energy sources. Nonlinear modal analysis. Floating platforms. Reduced order models.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Capacidade instalada de energia elétrica por fonte no Brasil .....	18
Figura 2 – Projeção do desenvolvimento de turbinas offshore .....	20
Figura 3 – Componentes de uma turbina eólica: (a) visão global; (b) detalhe.....	25
Figura 4 – Classificação conforme profundidade de turbinas eólicas .....	26
Figura 5 – Estruturas de fundações fixas.....	27
Figura 6 – Estruturas de fundações flutuantes .....	29
Figura 7 – Espaço configuração dos MNL e MNL: a) resposta em fase; b) resposta fora de fase .....	36
Figura 8 – Ressonância interna de razão 3:1 .....	38
Figura 9 – Superfície bidimensional das variedades invariantes: a) modo em fase; b) modo fora de fase .....	39
Figura 10 – Comparativo entre sistemas linear amortecido x não linear amortecido para a resposta de curva de ressonância; abscissas representam a frequência, e as ordenadas a amplitude .....	47
Figura 11 – Graus de liberdade de um corpo rígido flutuante .....	51
Figura 12 – Modelo estrutural: (a) configuração indeformada; (b) configuração deformada .....	52
Figura 13 – Velocidade da corrente e do vento .....	56
Figura 14 – Parcelas de trabalho realizado pelas forças de corrente e de vento: (a) estrutura deformada; (b) estrutura indeformada .....	58
Figura 15 – Geometria do sistema torre-plataforma .....	66
Figura 16 – (a) Rotações estáticas x velocidade de corrente; (b) forças de corrente x velocidade de corrente.....	68
Figura 17 - (a) Rotações estáticas x velocidade do vento; (b) forças de corrente x velocidade do vento .....	69
Figura 18 – Modos de vibração: a) 1º MNL; b) 2º MNL.....	71
Figura 19 – Frequências de vibração com rotação estática: (a) frequência para o 1º modo de vibração (b) frequência para o 2º modo de vibração .....	72

Figura 20 – Frequências de vibração da estrutura normalizadas à respectiva frequência, quando sujeita a: a) velocidade de corrente; b) velocidade de vento.....	73
Figura 21 – Superfícies comparativas entre o 1º MNNL e 1º MNL: a) equação (4-68); b) equação (4-69).....	77
Figura 22 - Superfícies comparativas entre o 2º MNNL e 2º MNL: a) equação (4-71); b) equação (4-72).....	77
Figura 23 –Comportamento do primeiro MNNL (a) espaço configuração; (b) plano fase.....	79
Figura 24 - Comportamento do primeiro MNNL (a) espaço configuração; (b) plano fase.....	80
Figura 25 – Resposta no tempo utilizando as equações originais com os MORs: Primeiro MNNL com codição inicial do GL mestre de: (a) 0,4 rad; (b) 0,8 rad; Segundo MNNL com condições iniciais do GL mestre de: (c) 0,1 rad; (d) 0,2 rad .....	81
Figura 26 – Relação frequência x amplitude utilizando o método do balanço harmônico: a) 1º MNNL; b)2º MNNL .....	84
Figura 27 – Curvas frequência – energia: a) 1º MNNL; b)2º MNNL.....	85
Figura 28 – a) Potencial total x grau de liberdade mestre; b) Potencial total x rotação da torre x rotação da plataforma.....	85
Figura 29 – Curva de ressonância modo 1: (a) efeito da amplitude de carga externa; (b) efeito do amortecimento .....	88
Figura 30 – Curva de ressonância modo 2: (a) efeito da amplitude de carga externa; (b) efeito do amortecimento .....	90
Figura 31 – Curva carga externa x amplitude os osciladores modais referentes: (a) primeiro MNNL; (b) segundo MNNL .....	91
Figura 32 – Diagrama de bifurcação do modo 1: a) rotações; b) velocidades rotacionais .....	92
Figura 33 – Diagrama de bifurcação do modo 2: a) rotações; b) velocidades rotacionais .....	93
Figura 34 – Resposta no tempo do sistema considerando amortecimento de 1% quando: (a) excitado com frequência igual ao primeiro MNL; (b) excitado com frequência igual ao segundo MNL .....	94

Figura 35 – Curvas de ressonância: efeito da variação da força externa: (a) grau de liberdade da plataforma; (b) grau de liberdade da torre....	95
Figura 36 – Curvas de ressonância: efeito da variação do amortecimento: a) grau de liberdade da plataforma; b) grau de liberdade da torre.	96
Figura 37 – Dimensões principais da plataforma .....	97
Figura 38 - Efeito do vento nas rotações estáticas .....	99
Figura 39 – Efeito da corrente nas rotações estáticas .....	99
Figura 40 – Método do balanço harmônico: para o: (a) primeiro MNNL; (b) segundo MNNL.....	101
Figura 41- Curvas amplitude x frequência: (a) e (c) GL da torre ; (b) e (d) GL da plataforma .....	103
Figura 42 - Diagrama de bifurcação do modo 1 para a configuração de 80 m: a) rotações; b) velocidades rotacionais.....	104
Figura 43 - Diagrama de bifurcação do modo 2 para a configuração de 80 m: a) rotações; b) velocidades rotacionais.....	104

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Energia eólica onshore e offshore no mundo.....	19
Tabela 2 – Propriedades da torre e seus componentes .....	65
Tabela 3 – Parâmetros utilizados na análise da estrutura .....	67
Tabela 4 – Rotações estáticas com efeito do vento e da corrente .....	69
Tabela 5 – Frequências e modos de vibrar.....	71
Tabela 6 – Parâmetros para as novas dimensões.....	98
Tabela 7 – Efeito combinado corrente e vento .....	100
Tabela 8 – Frequência e modos de vibração das novas propostas e caso original .....	100

## LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

CG – Centro de gravidade

GWEC - Global Wind Energy Council

MNL - Modo normal linear

MNNL - Modo normal não linear

TLP – Tension Leg Platform

TMD- Tuned Mass Damper

MOR – Modelo de ordem reduzida

## LISTA DE SÍMBOLOS

$[K_n]$  = matriz de rigidez diagonalizada

$[M_n]$  = matriz de massa diagonalizada

$\{F\}$  = vetor de forças

$[M]$  = Matriz dos termos inerciais (massa)

$[K]$  = matriz de rigidez

$[C]$  = matriz de amortecimento da estrutura

$[\omega_n^2]$  = matriz diagonal das frequências ao quadrado

$[\Phi]$  = modos naturais correspondentes as frequências naturais

$C_A$  = coeficiente de massa adicionada

$C_D$  = coeficiente de arrasto

$E$  = força de empuxo

$E_c$  = energia cinética

$F_0$  = amplitude das cargas externas normalizadas

$F_c$  = força da corrente

$H$  = profundidade do oceano

$H_a$  = distância da superfície até a base da torre

$H_w$  = comprimento submerso da plataforma

$I$  = momento de massa

$I_A$  = inércia adicionada

$I_p$  = momento de massa equivalente da plataforma

$J$  = funcional de energia

$K_t$  = mola rotacional restauradora da torre

$L_g$  = lagrangeano do sistema

$M_t, M_p, M_{turb}$  = massa da torre, plataforma e da turbina, respectivamente

$P_i$  = equação de restrição do deslocamento

$Q_i$  = equação de restrição da velocidade

$T$  = energia cinética do sistema

$T_p, T_t, T_{turb}$  = energia cinética da plataforma, torre e turbina, respectivamente

$T_0$  = período de vibração

$U$  = parcela da energia de deformação

$V$  = potencial das cargas externas atuantes na estrutura  
 $W$  = trabalho das forças externas  
 $W_i$  = trabalho realizado  
 $W_{nc}$  = trabalho realizado por forças não conservativas  
 $M_A$  = massa adicionada  
 $M_0$  = Amplitude de carga externa  
 $V_0$  = volume do fluido deslocado  
 $d_0$  = diâmetro da estrutura  
 $f_i$  = acelerações restauradoras não lineares  
 $g$  = aceleração da gravidade  
 $l_i$  = Distâncias entre a resultante das forças no modelo estrutural  
 $u, v$  = pares de coordenadas mestres (deslocamento e velocidade)  
 $v_c$  = velocidade da corrente  
 $v_i$  = velocidade da corrente na superfície  
 $v_f$  = velocidade do vento no topo da torre  
 $x_i$  = coordenadas generalizadas deslocamento ou rotação  
 $y_i$  = coordenadas generalizada das velocidades  
 $z_c, z_v$  = ponto de aplicação da força da corrente e do vento  
 $\Delta_i$  = deslocamento da resultante da força na vertical  
 $\varepsilon$  = coeficiente do parâmetro não linear  
 $\xi$  = amortecimento  
 $\rho$  = massa específica  
 $\omega_{rot}$  = velocidade angular de rotação  
 $\rho_w, \rho_a$  = massa específica da água e do ar  
 $\omega_n$  = frequências naturais de vibração do sistema  
 $\lambda$  = autovalores generalizados  
 $\theta_t, \theta_p$  = ângulo de rotação da torre e da plataforma  
 $\theta_{tt}$  e  $\theta_{pt}$  = rotação total da torre e da plataforma  
 $\theta_{ts}$  e  $\theta_{ps}$  = rotação de equilíbrio estático da torre e da plataforma  
 $\Pi$  = energia potencial total  
 $\Pi_t, \Pi_s$  = energia potencial total em movimento e na configuração estável

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
1.1	JUSTIFICATIVA .....	18
1.2	OBJETIVOS .....	21
1.2.1	Objetivos específicos .....	21
1.3	Estrutura do trabalho .....	21
<b>2</b>	<b>VISÃO GERAL DAS TURBINAS EÓLICAS OFFSHORE E SUA ESTRUTURA .....</b>	<b>24</b>
2.1	TURBINAS EÓLICAS .....	24
2.1.1	Classificação das turbinas eólicas offshore .....	26
2.2	TIPOS DE FUNDAÇÃO OFFSHORE .....	26
2.2.1	Estruturas de fundações fixas .....	27
2.2.2	Estruturas de fundação flutuantes .....	28
2.3	ESTADO DA ARTE DA ANÁLISE DINÂMICA DE PLATAFORMAS SPAR .....	30
<b>3</b>	<b>ANÁLISE MODAL .....</b>	<b>32</b>
3.1	ANÁLISE MODAL LINEAR .....	32
3.2	MODOS NORMAIS NÃO LINEARES .....	35
3.2.1	Definição de Rosemberg (1962, 1966) .....	35
3.2.2	Definição de Shaw-Pierre (1991) .....	37
3.3	MÉTODOS DE DERIVAÇÃO DOS MODOS NORMAIS NÃO LINEARES .....	39
3.3.1	Método das Variedades Invariantes .....	40
3.4	LIMITAÇÕES E VANTAGENS DO USO DOS MNNL .....	44
3.5	APLICAÇÕES DOS MNNL EM ESTRUTURAS OFFSHORE .....	45
3.6	PROPRIEDADES DOS MNNLS .....	46

3.7	MÉTODOS PARA ANÁLISE DINÂMICA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES.....	48
3.7.1	Método do balanço harmônico.....	49
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DINÂMICA DO PROBLEMA .....</b>	<b>51</b>
4.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	51
4.1.1	Equações do equilíbrio estático .....	54
4.1.2	Equações do Movimento .....	60
4.1.3	EXEMPLO NUMÉRICO .....	65
4.2	Análise estática .....	67
4.3	Análise modal.....	70
4.3.1	Modos normais lineares.....	70
4.4	Modos Normais Não Lineares .....	73
4.4.1	Vibração Livre.....	78
4.4.2	Vibração forçada amortecida .....	86
4.4.3	Diagramas de bifurcação.....	91
4.4.4	Curvas de ressonância no sistema original de equações .....	93
4.5	VARIAÇÕES DO COMPRIMENTO DA SPAR .....	97
4.5.1	Novas dimensões .....	97
4.5.2	Análise estática.....	98
4.5.3	Análise Dinâmica Livre .....	100
4.5.4	Análise dinâmica forçada.....	102
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>105</b>
5.1	Sugestões para futuros trabalhos.....	107
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>108</b>
	<b>Anexo A .....</b>	<b>114</b>
	<b>Anexo B .....</b>	<b>115</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O grau de desenvolvimento de uma sociedade está intimamente ligado à demanda energética de seus habitantes, sendo a pouca quantidade de energia proveniente de fontes renováveis um grande problema global. A energia eólica proveniente de zonas offshore apresenta-se como uma alternativa interessante devido ao seu potencial pouco aproveitado.

Esse potencial em zonas offshore é devido a velocidade do vento ser maior e mais uniforme quando comparada ao ambiente onshore, significando menos desgaste e mais eletricidade gerada por cada turbina. A velocidade dos ventos aumentam rapidamente com o afastamento da costa, podendo em regiões de mar aberto, exceder a velocidade média de 8 m/s à altura de 50 m (KALDELLIS; KAPSALI, 2013). Comparativamente a parques eólicos terrestres, o vento em mar aberto pode ter velocidades 1,2 a 2 vezes maiores, gerando saída de energia elétrica 1,7 vezes mais significativa, e conforme se avança em direção ao mar, o potencial de energia tende a aumentar (WANG et al., 2018). Contudo, a viabilidade técnica e econômica ainda são um impedimento para a instalação de grandes parques eólicos oceânicos.

As principais diferenças entre turbinas eólicas instaladas no continente e as turbinas eólicas offshore é relativo à subestrutura e à condição ambiental offshore mais complexa, podendo trazer requisitos mais complexos para o projeto de fundação (WANG et al., 2018). Turbinas eólicas onshore possuem fundações fixas diretamente no solo, entretanto aerogeradores offshore podem ter fundações flutuantes e, conseqüentemente, sujeitas a maiores deslocamentos. O sistema de fundação fixo é inviável tecnicamente e economicamente em zonas de grandes profundidades por causa do alto custo da estrutura de suporte (MUSIAL; BUTTERFIELD; RAM, 2006). Entretanto, turbinas flutuantes se apresentam como alternativa viável (HARRIGER, 2011). As estruturas de fundações flutuantes, para uma análise adequada, não podem somente ser analisadas estaticamente, os efeitos dinâmicos a que elas estão sujeitas devem ser considerados, tal qual ações de ondas e ventos. Por simplificação, e por ser capaz de resolver uma grande variedade de problemas de engenharia, a análise dinâmica linear geralmente é empregada. Nesse tipo de análise, é possível desacoplar as equações governantes do movimento, e a resposta do sistema pode ser encontrada através de osciladores independentes governados pelas solução do problema de autovalores e autovetores. Como consequência, decorre a propriedade

da invariância, um movimento iniciado em um modo normal linear (MNL) permanecerá nele durante todo o período de tempo, e da superposição modal, que pode ser vista de maneira análoga à superposição dos efeitos.

Entretanto, quando a hipótese de linearidade de um sistema não é mais válida, seja por características físicas do material ou da geometria do sistema, a solução obtida por modelos lineares pode não ser representativa da realidade. As estruturas flutuantes offshore, por não terem uma fundação fixa, são menos rígidas e o efeito da oscilação poderá resultar em efeitos dinâmicos cuja identificação é possível, apenas, por meio da análise não linear. Em contraponto à dinâmica linear, a análise dinâmica não linear é um processo trabalhoso e demorado, e ainda é difícil a identificação de fenômenos exclusivamente não lineares quando se trabalha com sistemas que apresentam um número muito alto de graus de liberdade.

Os primeiros estudos de estruturas Spar para instalação de turbinas eólicas desprezavam boa parte da não linearidade do sistema para se aferirem as frequências naturais de vibração, comportamento frente à solicitações de ondas e à vibração livre amortecida (JONKMAN; MUSIAL, 2010, HARRIGER, 2011). Recentemente, a implementação da não linearidade em softwares de elementos finitos tem sido mais recorrente, propiciando diferentes e mais sofisticadas análises (RAHMAN et al., 2017, AGGARWAL; MANIKANDAN; SAHA, 2017). O uso dos modos normais não lineares (MNNL)s para o entendimento do comportamento não linear de uma plataforma Spar demonstrou capacidade de reduzir a complexidade do sistema através de modelos de ordem reduzidas (MOR)s (GAVASSONI, 2012). Dessa forma, a utilização de um MOR apresenta-se como uma possibilidade de solução a sistemas com muitos graus de liberdade (GAVASSONI, 2012).

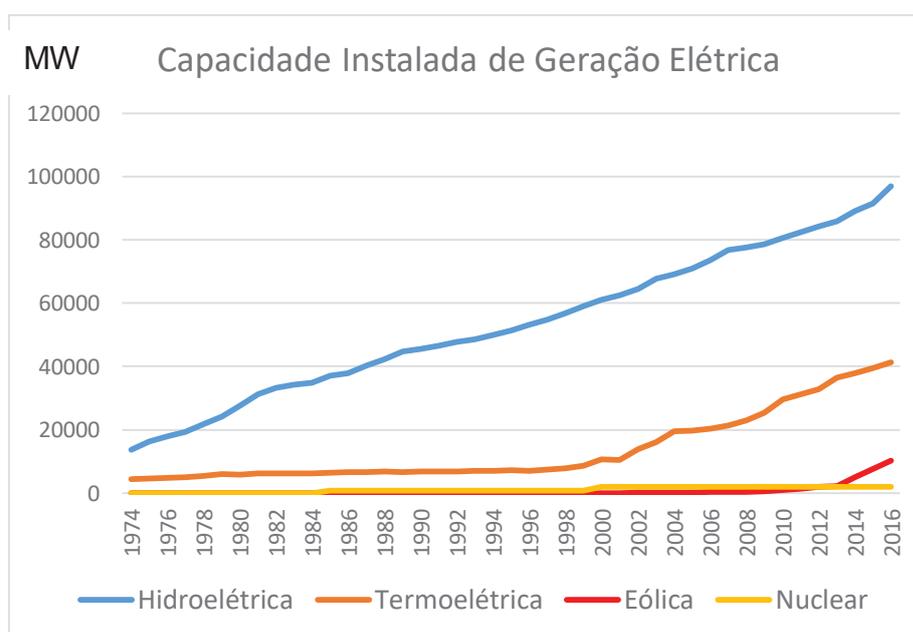
Os MORs podem ser entendidos como modelos matemáticos que visam diminuir a complexidade do sistema por redução do número de graus de liberdade, e que podem ser obtidos de modo analítico ou numérico. Dentre os métodos analíticos, destaca-se o método das variedades invariantes (SHAW; PIERRE, 1991). Esse método pode ser usado para descrever o comportamento de um MNNL, o qual possui propriedades importantes para a compreensão da dinâmica não linear. Fenômenos exclusivos da não linearidade podem ser identificados, tais quais saltos dinâmicos, bifurcação de modos, multiplicidade de modos e relação frequência-amplitude (KERSCHEN et al., 2009).

Dessa forma, para o estudo de estruturas flutuantes offshore, tal qual uma plataforma do tipo Spar, os modelos de ordem reduzida poderão fornecer indicativos da dinâmica não linear do sistema.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

Turbinas eólicas offshore são fontes geradoras de energias renováveis, e têm sido motivo de estudo devido ao aumento da demanda ocasionada pelo desenvolvimento da economia e urbanização ao redor do mundo. Dentre todas as fontes de energias renováveis, a energia eólica é considerada uma das mais promissoras, com menores impactos ambientais, eficiência de custo e sustentabilidade (WANG et al., 2018). Considerando a necessidade de diversificar e complementar as fontes de energia elétrica no país, visto que o Brasil ainda depende muito da produção proveniente de hidrelétricas e termoeletricas (MME, 2017), a geração de energia através do vento surge como uma alternativa viável a outras fontes de energia. Essa fonte, além de ser renovável, apresenta grande potencial de crescimento, não somente em regiões onshore, mas também em regiões offshore. A utilização da energia eólica só começou a ser significativa, em relação às demais fontes, a partir da última década, como demonstra a Figura 1.

Figura 1 Capacidade instalada de energia elétrica por fonte no Brasil



FONTE: (MME, 2017)

O Brasil, em 2017, passou a ocupar a oitava posição no ranking mundial de capacidade instalada de produção de energia eólica (GWEC, 2017) entretanto, a produção de energia eólica proveniente de zonas offshore do Brasil é pouco significativa, não sendo sequer ranqueada. Na Tabela 1 encontram-se os dados dos 10 maiores países produtores de energia elétrica onshore e offshore no ano de 2017.

Tabela 1 – Energia eólica onshore e offshore no mundo

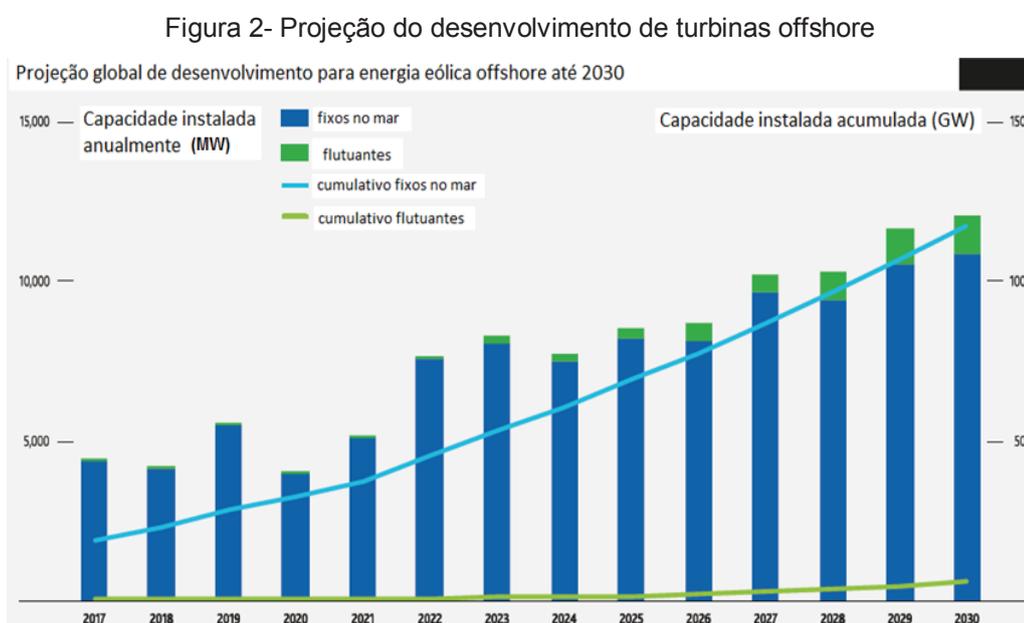
Energia eólica onshore			Energia elétrica offshore	
País	MW	%	País	MW
China	188232	34,9	Reino Unido	6836
Estados Unidos	89077	16,5	Alemanha	5355
Alemanha	56132	10,4	China	2788
Índia	32848	6,1	Dinamarca	1271
Espanha	23170	4,3	Países Baixos	1118
Reino Unido	18872	3,5	Bélgica	877
Fraça	13759	2,5	Suécia	202
Brasil	12763	2,4	Vietnã	99
Canadá	12239	2,3	Finlândia	92
Italia	9479	1,8	Japão	65
Restante do mundo	83008	15,4		

FONTE: (GWEC, 2017)

A extensão do litoral do Brasil é de 7491 Km, representando cerca de 60% da costa do Reino Unido, o maior produtor de energia elétrica offshore. O Brasil tem, portanto, um potencial não explorado para gerar grandes quantidades de energia elétrica offshore. Conforme estudo de Ortiz e Kampel (2011), o potencial de geração de energia eólica offshore na costa brasileira em uma faixa de zero até 10 Km de largura é de 57 GW, valor superior à produção anual global.

Como visto, na maior parte do mundo, pouco se tem aproveitado o potencial de geração de energia elétrica proveniente de energia eólica offshore. No Brasil, a energia eólica utilizada é proveniente, quase que na totalidade, de aerogeradores terrestres. Assim, torna-se atrativo analisar o comportamento dessas estruturas, tendo em vista o potencial de exploração que muitas regiões do mundo possuem.

Diferentemente das estruturas usuais da construção civil, estruturas offshore estão sujeitas a carregamentos distintos, tais quais forças provenientes da ação de ondas e correntes marítimas. A locação da estrutura de suporte das turbinas eólicas offshore pode ser em zonas de profundidade muito elevada, demandando a instalação de plataformas flutuantes ancoradas por cabos no fundo do oceano. Nesse tipo de estrutura, podem ocorrer oscilações significativas, invalidando uma análise linear. A previsão para a indústria de energia eólica offshore é a instalação total de 120 GW até 2030, entretanto o ramo de fundações flutuantes ainda seguirão como nicho até o final da década. A Figura 2 mostra o crescimento estimado desse setor até 2030.



FONTE:GWEC, 2017

Muitos fenômenos dinâmicos são exclusivos de sistemas não lineares, e o seu estudo faz-se necessário para que a estrutura seja utilizada da melhor maneira possível. Dessa forma, este trabalho poderá proporcionar aos engenheiros de estruturas oceânicas orientações mais precisas, de maneira a facilitar a elaboração do pré-projeto, visando atender as normas e orientações técnicas de modo mais eficiente e seguro.

## 1.2 OBJETIVOS

O trabalho tem por objetivo analisar a resposta dinâmica não linear de um sistema composto por uma turbina eólica offshore e uma plataforma do tipo Spar, utilizando modelos de ordem reduzida baseado na determinação de modos normais não lineares, visando identificar os fenômenos da dinâmica não linear presentes nas respostas à vibração livre e forçada.

### 1.2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Mostrar que os MORs, ao serem validados no domínio de análise, podem ser utilizados para o estudo da vibração não linear. Fazer a análise paramétrica do sistema em função do amortecimento, da amplitude da carga externa e de diferentes geometrias da plataforma offshore.

## 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Apresenta-se aqui a disposição do trabalho, o qual é dividido em cinco capítulos e dois anexos.

- No capítulo 2 é apresentado uma visão geral sobre as turbinas eólicas offshore e sua estrutura, sendo apresentado também o estado da arte sobre o tema.
- No capítulo 3 é feita a revisão bibliográfica sobre o tema a ser estudado, iniciando pela análise dinâmica linear, passando pelas definições de modos normais não lineares e o método de derivação das variedades invariantes. Conclui-se abordando as vantagens e limitações do uso dos MNNLs no estudo da dinâmica não linear.
- O capítulo 4 é dedicado a estudar uma turbina eólica de referência, iniciando-se pela dedução das equações de movimento do sistema referente à plataforma Spar em equilíbrio estático e dinâmico, seguido da determinação de seus parâmetros. Posteriormente, é analisada a vibração livre e forçada.

- Na seção 4.1 é feita a descrição do sistema formado por uma turbina eólica offshore Spar, modelado por um sistema de dois graus de liberdade, um relativo a rotação da torre e outro para a rotação da plataforma. As equações do movimento são obtidas através do princípio de Hamilton, juntamente com a aplicação de conceitos do cálculo variacional.
- É feita a análise estática da plataforma na seção 4.2.
- Na seção 4.3, a análise dinâmica linear à vibração livre é realizada para obtenção das frequências naturais de vibração e dos seus respectivos modos lineares de vibração.
- Na seção 4.4, realiza-se a expansão das equações do movimento obtidas, em séries de potências de Taylor com truncamento até a ordem cúbica para aplicação do método das variedades invariantes. Obtém-se as equações de restrições dos modos normais não lineares para que se possa utilizar modelo de ordem reduzida na análise do MNNL.
- Na seção 4.4.1, é feito o estudo da vibração livre para os dois MNNLs, identificando os modos de vibrar e a resposta no tempo. Compara-se a resposta proveniente dos osciladores modais do modelo reduzido com a solução de referência obtida por integração numérica, no espaço fase do sistema e na resposta no tempo para ambos os MNNLs. Analisa-se também, a relação frequência amplitude do sistema obtida utilizando o método do balanço harmônico com a solução de referência. Finaliza-se comparando a energia total do sistema com a variação da frequência para ambos os modos.
- Para o estudo da vibração forçada, disposto na seção 4.4.2, é modelada uma força harmônica para simular os efeitos das ondas do mar, e com o auxílio do método do balanço harmônico, geram-se as curvas de ressonâncias de maneira analítica. Varia-se a amplitude da carga e do amortecimento para identificar possíveis fenômenos não lineares. Na seção 4.4.3, seleciona-se uma faixa de frequências em cada modo, e investiga-se o fenômeno da bifurcação.

- Na seção 4.4.4, estuda-se o comportamento da estrutura no sistema original de equações quando na presença de forças harmônicas para simular o efeito das ondas.
- Na seção 4.5, realiza-se uma análise paramétrica de plataformas Spar de menores profundidades e compara-se estaticamente e dinamicamente os resultados.
- Nos anexos estão apresentados as relações trigonométricas utilizadas, bem como as equações expandidas até o termo cúbico do problema.

## 2 VISÃO GERAL DAS TURBINAS EÓLICAS OFFSHORE E SUA ESTRUTURA

O custo da indústria da geração de energia elétrica offshore, que anteriormente era fator limitante em alguns projetos, tem caído consideravelmente nos últimos anos. Várias são as razões, podendo citar-se: a maturidade da indústria, o desenvolvimento da tecnologia e gerenciamento, aumento da confiança do investidor, introdução e desenvolvimento de novas turbinas com grande área de varredura, e capacidade de geração considerável de energia (GWEC, 2017).

As turbinas eólicas offshore têm o mesmo princípio de funcionamento que as terrestres, e desse modo, possuem os mesmos componentes que as onshore, sendo apresentados na seção 2.1 os principais.

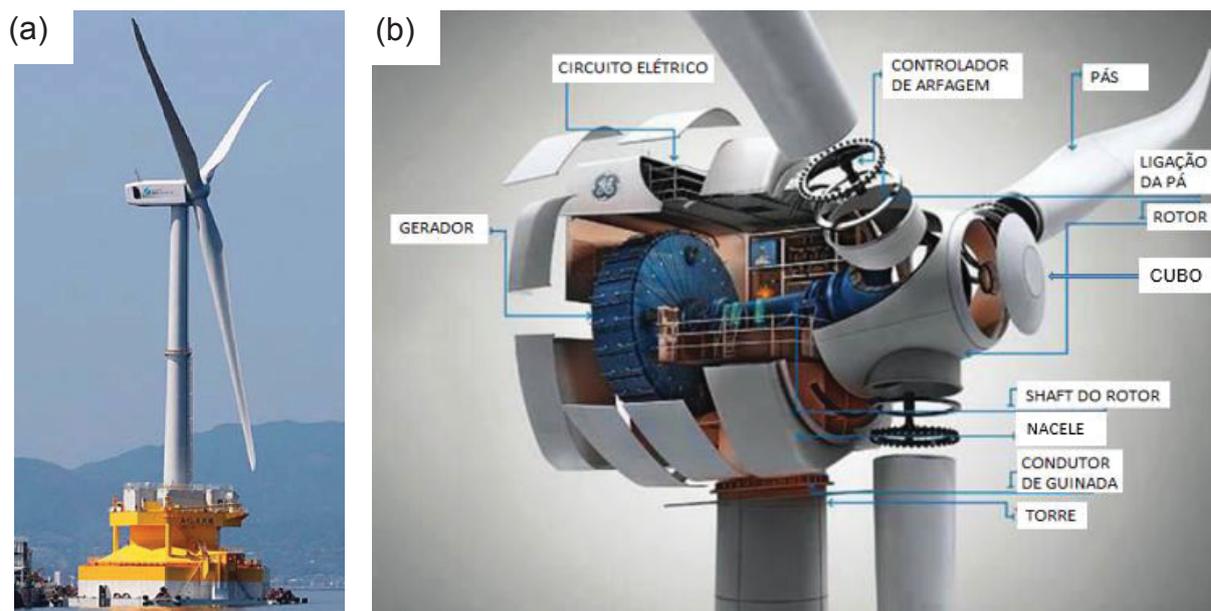
Entretanto, o aspecto mais crítico no desenvolvimento e expansão da energia eólica offshore encontra-se na viabilidade da subestrutura, definida como a parte de suporte da estrutura. A adaptabilidade das subestruturas para turbinas eólicas offshore é fundamentalmente limitada pela profundidade da água, condições geotécnicas e tamanho da turbina eólica (WANG et al., 2018). Conforme a profundidade da água aumenta, é mais provável que o custo das fundações aumente devido à complexidade e recursos necessários para a instalação (MUSIAL et al., 2006). Há também, mais gastos devido a distância de transporte e construção de redes de transmissão de energia até as estações de distribuição na zona continental (MAIOLINO, 2014). Não obstante, há preocupações com o comportamento vibratório em face das cargas ambientais notadamente diferentes, tal qual correntes marítimas e ondas oceânicas.

Nessa indústria, pode-se subdividir a geração de energia conforme a estrutura de suporte em duas categorias: as estruturas offshore de fundação fixa e as estruturas offshore de fundação flutuante, como será visto na seção 2.2.

### 2.1 TURBINAS EÓLICAS

As turbinas eólicas são formadas por vários subsistemas, como é mostrado na Figura 3, cada qual com uma função, os quais são descritos a seguir.

Figura 3 – Componentes de uma turbina eólica: (a) visão global; (b) detalhe



FONTE: a) (GWEC, 2017). b) (BAGBANCI, 2011)

Na nacela, parte fechada no topo da torre, estão contidos os componentes fundamentais da turbina eólica, como a caixa de transmissão, gerador, controlador e shafts (eixo). Também tem como função proteger os equipamentos da turbina eólica (BAGBANCI, 2011).

O propósito do controlador é maximizar a geração de energia, além de controlar o movimento e monitorar as condições da turbina. O sistema de controle é capaz de fazer a mudança de inclinação no sentido de arfagem das pás e no sentido da guinada da nacela, além do controle da carga no gerador. A mudança na inclinação das pás altera o torque produzido pelo rotor (BAGBANCI, 2011).

O rotor é formado pelas pás, que são os aerofólios que capturam a energia do vento, e pelo cubo, que é o componente que recebe as pás. Normalmente as turbinas apresentam de duas a três pás (MELO, 2012).

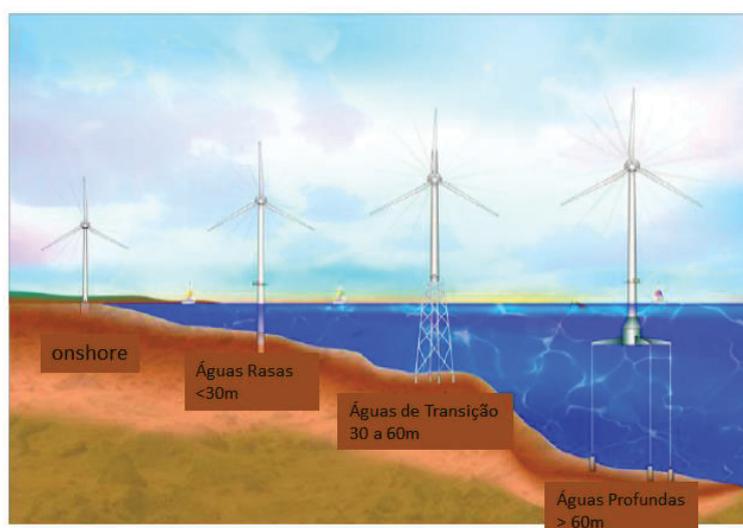
A torre, além de ser responsável por sustentar e posicionar o rotor e a nacela na altura conveniente, geralmente é tubular e feita de aço, podendo ter alturas próximas a 100 m (BAGBANCI, 2011).

A caixa de transmissão da turbina ajuda a aumentar a velocidade de rotação do eixo, transmitindo para o gerador, que converte a energia mecânica de rotação das pás em energia elétrica. Algumas turbinas usam geradores que são capazes de produzir energia mesmo com baixas velocidades de rotação (BAGBANCI, 2011).

### 2.1.1 CLASSIFICAÇÃO DAS TURBINAS EÓLICAS OFFSHORE

As turbinas eólicas offshore são classificadas conforme a profundidade do oceano na região de instalação, sendo o tipo de suporte da estrutura função direta da profundidade na qual a turbina se encontra. Na Figura 4, encontra-se a classificação das turbinas, segundo o tipo de suporte.

Figura 4 – Classificação conforme profundidade de turbinas eólicas



FONTE: (MUSIAL; BUTTERFIELD, 2006)

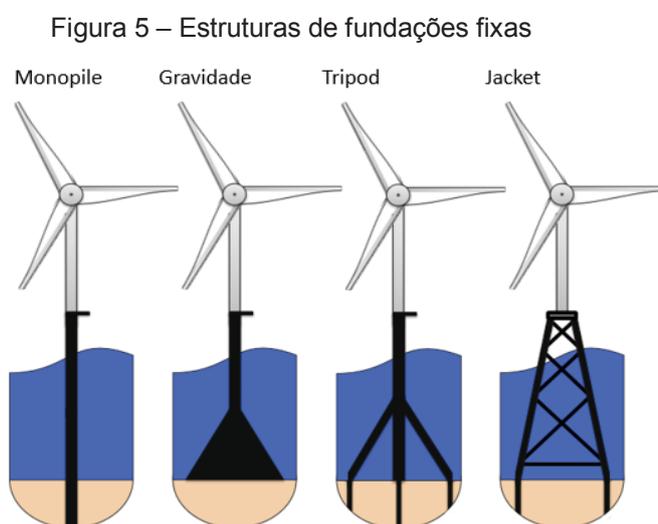
Conforme se aumenta a profundidade de água (até quase 100 m), torna-se inviável tecnicamente e economicamente executar fundações convencionais, portanto o local de instalação é um fator imprescindível na escolha da fundação. A função básica da fundação é dar suporte à estrutura e manter a turbina eólica no lugar adequado, para tanto deve-se considerar as solicitações provenientes das ondas do oceano e da ação vento, agindo durante o processo construtivo e durante a operação (VAN DER TEMPEL; DIEPEVEEN; CERDA SALZMANN, 2010).

### 2.2 TIPOS DE FUNDAÇÃO OFFSHORE

As estruturas de fundação das turbinas eólicas offshore podem ser divididas em duas categorias: as fixas e as flutuantes.

## 2.2.1 ESTRUTURAS DE FUNDAÇÕES FIXAS

Existem vários tipos de fundações fixas para estruturas eólicas offshore, sendo esses classificados de acordo com a maneira que cada um é conectado ao leito oceânico. Para fundações fixas ao leito oceânico tem-se como principais tipos: monopile, tripod, jacket e gravidade. Na Figura 5 os conceitos de fundação fixa são ilustrados.



FONTE: (VAN DER VALK, 2014)

As fundações do tipo monopile consistem em um tubo metálico de dimensões médias de 3 a 6 m de diâmetro. A técnica de cravação é relativamente simples, não exigindo-se qualquer pré-tratamento do terreno. Entretanto durante a instalação são necessários equipamentos com grande capacidade de elevação, ou seja, de erguer uma grande quantidade de peso a uma altura considerável (MANÉ JUNIOR, 2014). Esse tipo de fundação oferece grandes vantagens em áreas com movimentos de sedimentos, contanto que esteja no intervalo de 10 a 40 m de profundidade (HAMMAR; ANDERSSON; ROSENBERG, 2010).

Já as fundações do tipo tripod podem ser consideradas uma fundação do tipo monopile, porém com um formato triangular na base e tubos de menores diâmetros.

É capaz de ser implantada em zonas mais profundas, tendo um comportamento estático similar à fundação tipo Jacket, devido à divisão na base que permite uma maior área de distribuição de força (MANÉ JUNIOR, 2014). Sua utilização normalmente se dá no intervalo de profundidade de 20 a 40 m, pois essa fundação pode oferecer vantagens técnicas e econômicas (HAMMAR; ANDERSSON; ROSENBERG, 2010).

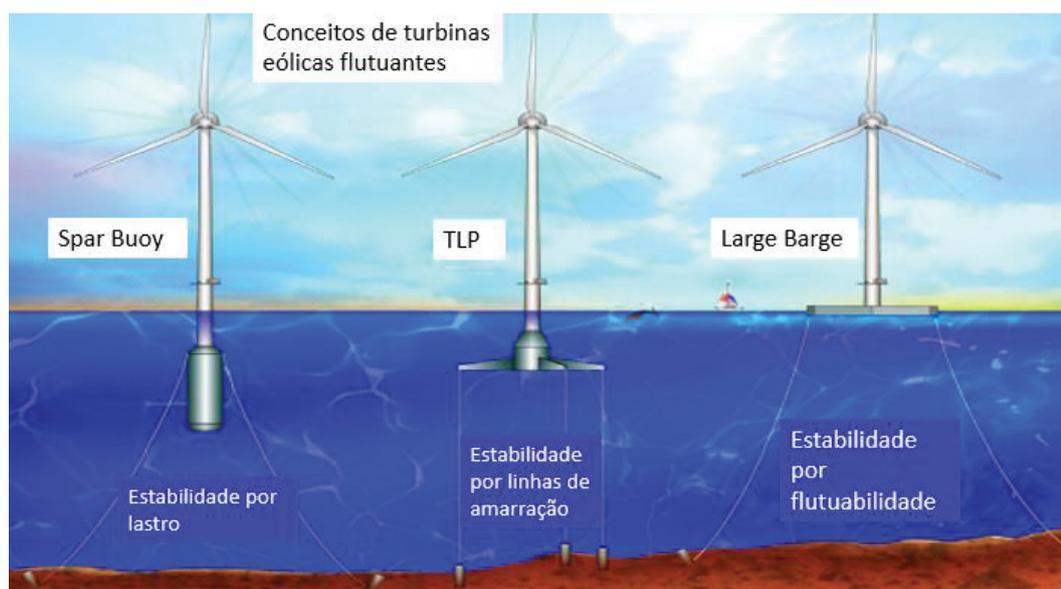
As torres treliçadas do tipo Jacket têm fundações ancoradas no fundo do mar compostas normalmente por quatro pernas principais e por barras secundárias que formam uma treliça. Esta fundação se baseia no aumento da rigidez proporcionada pela malha tridimensional de aço. Requer menos trabalho de cravação que as do tipo monopile (MANÉ JUNIOR, 2014). Sua eficiência de custo está em profundidades superiores a 20 m, contanto que necessite de menos aço que as outras fundações (HAMMAR; ANDERSSON; ROSENBERG, 2010).

Por último, citam-se as fundações de gravidade como exemplo de fundações fixas para estrutura offshore. Esse tipo de fundação usa o próprio peso como ação estabilizante, consistindo principalmente de material de alta densidade (HAMMAR; ANDERSSON; ROSENBERG, 2010). É indicada sua utilização para profundidades de até 30 m.

### 2.2.2 ESTRUTURAS DE FUNDAÇÃO FLUTUANTES

As estruturas flutuantes são ancoradas no fundo do mar, mas não fixas sendo em geral chamadas de estruturas complacentes. Em virtude disso, podem exibir oscilações maiores, demandando análises não lineares do seu comportamento dinâmico-estrutural. Seu diferencial é que podem ser localizadas em regiões de grande profundidade e afastamento da costa. Os principais tipos são: Large Barge, Spar e Tension Leg Platform (TLP). Na Figura 6 esses conceitos são ilustrados.

Figura 6 – Estruturas de fundações flutuantes



FONTE: (VALTORTA, 2016)

As plataformas do tipo **Large Barge** se estabilizam estaticamente pela área em contato com a água, a qual deve ter tamanho suficiente para estabilizar as cargas provenientes da torre e de seu peso próprio com o empuxo atuante (MUSIAL; BUTTERFIELD; BOONE, 2004). Já as plataformas flutuantes do tipo **Spar** consistem de um cilindro grande e pesado, porém com densidade menor do que a água, que mantém o centro de gravidade bem abaixo do centro de empuxo<sup>1</sup> garantindo que a turbina flutue no mar e permaneça na vertical. O sistema de ancoragem é amarrado ao solo permitindo que a turbina eólica gire enquanto o vento muda de direção (BAGBANCI, 2011).

As **TLPs**, ao contrário do modelo Spar que precisa ser montado na água, podem ser montadas em terra, evitando assim as dificuldades logísticas da montagem offshore. A plataforma flutuante é mantida em posição por tendões verticais (também chamados de amarras), que são ancorados no fundo do oceano. A protensão dos

<sup>1</sup> O centro de empuxo é o local onde a resultante da força de empuxo atua, que para fluidos com densidade uniforme se localiza no centro de massa do fluido deslocado. Para que um objeto flutuante permaneça em equilíbrio estável, o momento resultante da força peso e da força de empuxo devem ser restauradores.

cabos fornece a estabilidade necessária ao conjunto da plataforma e das estruturas por ela suportadas (BAGBANCI, 2011).

### 2.3 ESTADO DA ARTE DA ANÁLISE DINÂMICA DE PLATAFORMAS SPAR

Plataformas Spar tem sido projetadas e desenvolvidas para exploração de recursos naturais em águas profundas, dessa forma estudos sobre seu comportamento têm sido realizados, como o de Rahman et al. (2017). Eles consideraram em sua análise dinâmica não linear um modelo em 3D, e para definir precisamente a interação entre os cabos de amarração e a Spar, uma análise dinâmica acoplada foi considerada apropriada em águas profundas. Em seu modelo foram consideradas forças de corrente e de ondas, verificando-se a influência da profundidade do oceano no movimento da estrutura. Seus resultados mostram que a resposta da plataforma com o aumento da profundidade reduz significativamente devido ao aumento do amortecimento das linhas de amarração.

A simulação do comportamento sob condições operacionais e extremas de uma turbina eólica de referência em zonas offshore na Índia foi feita por Aggarwal, Manikandan e Saha (2017). Seus resultados foram obtidos através dos softwares Fast e ANSYS-AQWA.

Harriger (2011) usou como referência em seu trabalho dois modelos de estruturas flutuantes, Barge e Spar. Em sua modelagem, foi adotado o uso de dois graus de liberdade para a estrutura, um referente à rotação de arfagem e outro para o afundamento. Ele mostra que, quando expostas à condições extremas de ondas, o modelo da Barge apresenta maiores movimentos de afundamento e arfagem do que a da Spar. É salientado também que os momentos atuantes na estrutura são maiores na do tipo Barge, fator de interesse para a previsão de fadiga da estrutura.

Uma pesquisa sobre a redução de carregamento em estruturas flutuantes com uso de amortecedores de massa sintonizada foi feita por Stewart (2012). Nesse estudo, foi admitido a possibilidade do controlador estar no topo da turbina eólica, ou dentro da plataforma, abaixo do nível do mar. Para cada situação foram estipulados três massas e obtidos, através de um programa, valores otimizados para amortecimento e rigidez da mola dos controladores. Os resultados demonstraram que

o carregamento na torre e nas linhas de amarração podem ser significativamente reduzidos.

Na tese de Al-Solihat (2017) o foco foi desenvolver um modelo dinâmico que integre a dinâmica estrutural, a hidrodinâmica, a aerodinâmica e carregamentos nos sistemas de amarração. Nele são apresentados novas expressões para o cálculo de momento restaurador de água plana. Os modelos teóricos são implementados através de uma abrangente ferramenta de simulação, obtendo boa concordância com resultados já reportados.

Novos conceitos de “designs” foram sugeridos, utilizando uma coluna de água no interior da plataforma, por Pham e Shin (2019). Foram analisados 12 diferentes modelos candidatos, com diferentes dimensões da plataforma e da coluna da água, bem como diferentes valores de massa específica para o lastro. Foi verificado que a resposta dinâmica horizontal e de rotações podem ser significativamente reduzidas ao se aumentar o momento de inércia e a massa da estrutura. A aceleração da nacelle e o momento fletor na base da torre sofrem reduções com o aumento do diâmetro da coluna da água.

### 3 ANÁLISE MODAL

A análise modal pode ser vista como um processo através do qual é possível descrever a estrutura em termos de suas características naturais, que são a frequência, amortecimento e modos de vibração, ou seja, suas propriedades modais. É aplicável em inúmeros campos da engenharia, tais quais o aeroespacial, automotivo, civil, bélico, bem como a engenharia mecânica em particular. Suas aplicações são diversas, podendo buscar a redução de ruídos em veículos, ou mesmo prever o comportamento de uma edificação frente a abalos sísmicos.

A análise modal linear tem sido fortemente utilizada, mas com o surgimento de novas estruturas mais esbeltas e sujeitas a maiores amplitudes de forças, é necessário refinar o estudo, e portanto, usar métodos não lineares. Sendo assim, modelos mais sofisticados são utilizados, inclusive na área de estudo de plataformas flutuantes offshore, para descrever o comportamento dessas novas estruturas (AL-SOLIHAT, 2017).

#### 3.1 ANÁLISE MODAL LINEAR

A compreensão dos fenômenos da dinâmica linear é fundamental para que se possa avançar aos estudos da dinâmica não-linear. Num sistema linear, a equação matricial que governa o comportamento de um sistema sem perda de energia com  $n$  graus de liberdade pode ser escrita da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}; \quad (3-1)$$

onde os pontos acima das variáveis indicam a sua derivada temporal.

A matriz  $[K]$  é função exclusiva da rigidez do sistema, e a matriz  $[M]$  é função exclusiva dos termos inerciais do sistema. As frequências e os modos normais de vibração são obtidas ao se resolver um problema de autovalores e autovetores generalizados. Os autovalores são as raízes da equação característica dada por:

$$\det[K - \lambda M] = 0; \quad (3-2)$$

onde  $\lambda$  representa os autovalores generalizados do sistema, conduzindo a determinação da frequência.

O autovetor correspondente para cada frequência é obtido por:

$$[K - \lambda M]\{\Phi\} = 0; \quad (3-3)$$

na qual o vetor  $\Phi$  representa a forma do autovetor associado a respectiva frequência.

Os modos normais de vibração são chamados também de vibrações principais do sistema, na qual o movimento de um sistema de dimensão finita se comporta como um sistema conservativo com um único grau de liberdade, de maneira que todas as posições podem ser parametrizadas analiticamente em termos de uma única posição (MIKHLIN et al., 2001).

Para um sistema sem amortecimento, os graus de liberdade quando excitados com condições iniciais relativas a um modo de vibração principal, oscilam, sem perda de energia, e também de forma independente da quantidade de energia disponível ao sistema, em movimento harmônico simples, passando pelos pontos de equilíbrio simultaneamente. Portanto, se a vibração de um sistema for iniciada em um modo normal linear, sua resposta permanecerá nesse modo por todo tempo, de modo invariante.

Outra característica inerente a sistemas lineares, é a superposição modal, sendo possível expressar a resposta à oscilação como combinação linear dos modos normais lineares.

Os termos fora da diagonal nas matrizes de rigidez e de massa são conhecidos como termos de acoplamento (CHOPRA, 2012), entretanto as equações do movimento podem ser desacopladas, pois é verificada a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\{\Phi\}_s^T [M] \{\Phi\}_r = 0, r \neq s; \quad (3-4)$$

$$\{\Phi\}_s^T [K] \{\Phi\}_r = 0, r \neq s; \quad (3-5)$$

em que  $\{\Phi\}_i$  é o vetor modal, e corresponde ao modo de vibração  $i$ .

Pode-se construir matrizes diagonais  $[K_n]$  e  $[M_n]$ , tais que:

$$[K_n] = [\Phi]^T [K] [\Phi]; \quad (3-6)$$

$$[M_n] = [\Phi]^T [M] [\Phi]; \quad (3-7)$$

onde  $[\Phi]$  é a matriz modal na qual os vetores modais estão dispostos nas linhas.

As matrizes  $[K_n]$  e  $[M_n]$ , relacionam-se entre si através da seguinte relação:

$$[K_n] = [\omega_n^2] [M_n]; \quad (3-8)$$

onde  $[\omega_n^2]$  é uma matriz diagonal em que seus termos não nulos são as frequências naturais de vibração do sistema ao quadrado ( $\omega_n^2$ ).

Contudo, nenhum sistema físico real é conservativo. Logo, o modelo matemático precisa incluir as forças de amortecimento. A equação que governa o comportamento dinâmico de uma estrutura amortecida pode ser reescrita de maneira similar à equação (3-1) acrescida de uma parcela de amortecimento proporcional, tal que:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}. \quad (3-9)$$

A matriz  $[C]$  corresponde ao amortecimento na estrutura, sendo a força dissipativa proporcional ao módulo da velocidade do grau de liberdade. Como não há atuação de forças externas, um movimento iniciado num modo dissipará energia tendendo ao equilíbrio estático.

Para os casos de vibração forçada a equação de movimento do sistema é dada por:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (3-10)$$

onde  $\{F\}$  representa o vetor de forças atuando nos graus de liberdade da estrutura. A linearização de sistemas dinâmicos é uma idealização, exceção dos sistemas físicos naturais, na qual a não-linearidade ocorre frequentemente em aplicações práticas (KERSCHEN et al., 2009). Em problemas com oscilações de grande amplitude, a análise linear pode perder sua hipótese de validade, e fenômenos importantes da dinâmica do sistema de origem não linear podem ser negligenciados. Nesse contexto, apresenta-se a análise modal não linear como ferramenta possível para o estudo do sistema não linear.

## 3.2 MODOS NORMAIS NÃO LINEARES

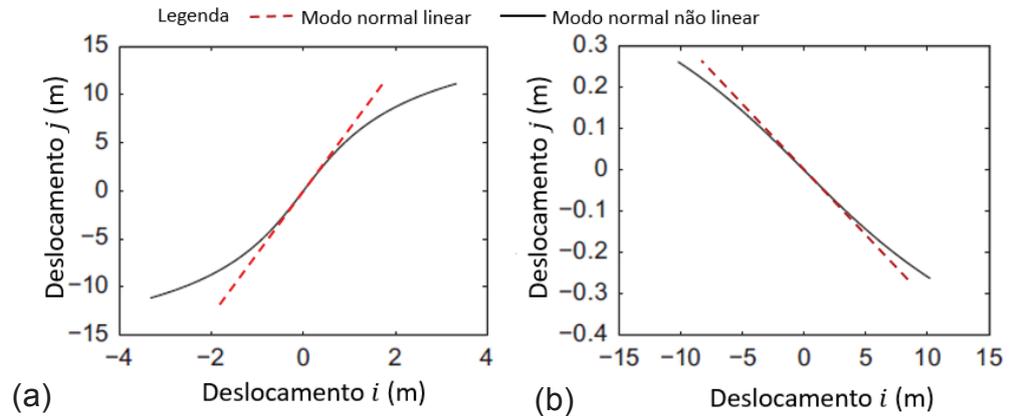
Existem duas definições principais de modos normais não-lineares (MNNL) na literatura, creditadas a Rosemberg (1962,1966) e Shaw e Pierre (1991). A definição de Rosemberg está contida na definição de Shaw-Pierre, ou seja, se aplica em casos mais restritos.

### 3.2.1 DEFINIÇÃO DE ROSEMBERG (1962, 1966)

A definição proposta por Rosemberg é uma busca de estender a análise modal linear para sistemas não lineares. Segundo o autor, um modo normal não linear (MNNL) é uma oscilação periódica e síncrona, requerendo que todos os pontos materiais atinjam a posição de máxima amplitude, e passem pela posição de equilíbrio ao mesmo tempo, mas também que seja possível exprimir todos os deslocamentos e velocidades em termos do deslocamento e velocidade de um ponto de referência.

O espaço configuração de um modo normal linear (MNL) necessariamente é uma reta, ou seja, a relação entre os deslocamentos dos graus de liberdades são constantes. Para os MNNL, a resposta em forma de reta é um caso particular, sendo denominados de modo similar. Os modos não similares, que representam a maior parte, são representados por curvas no espaço configuração. A Figura 7 exemplifica para os MNLs e MNNLs as respostas em fase e fora de fase do sistema.

Figura 7 – Espaço configuração dos MNL e MNNL: a) resposta em fase; b) resposta fora de fase



FONTE: O AUTOR (2020)

É possível perceber que as curvas são tangentes às retas no ponto de equilíbrio estático (origem do sistema). Logo, para pequenas amplitudes, os MNNLs se assemelham às retas dadas pelos MNLs. Para amplitudes maiores, as curvas (MNNLs) tendem a não se sobrepor à reta, nesses casos, a consideração da linearidade não é mais válida, sendo necessário uma análise não linear da estrutura para a representação mais adequada do modelo estrutural

A definição de MNNL por Rosemberg pode ser reescrita de modo mais formal como:

Seja um sistema autônomo e conservativo com  $n$  graus de liberdade cuja aceleração dos graus de liberdade  $\ddot{x}_i$  pode ser descrita como:

$$\ddot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad (3-11)$$

onde  $i = 1, 2, \dots, n$ , e  $x_i$  representam os deslocamentos dos graus de liberdade em relação à posição de equilíbrio e  $f_i$ , as acelerações restauradoras não lineares.

Para que o sistema esteja vibrando em um modo normal, esse deve estar oscilando em uníssono, portanto as seguintes condições tem de ser atendidas:

O período de vibração  $T_0$  de todas as coordenadas são iguais:

$$x_i(t) = x_i(t + T_0), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-12)$$

Existe um instante de tempo  $t_0$  em que todas as massas atingem a posição de equilíbrio:

$$x_i(t_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-13)$$

Existe um instante de tempo  $t = t_1 \neq t_0$  em que as velocidades de todas as coordenadas são iguais a zero, portanto elas estão na sua máxima amplitude, ou seja:

$$\dot{x}_i(t_1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-14)$$

Os deslocamentos de todos os pontos do sistema podem ser relacionados por funções ( $P_i$ ) do par deslocamento x velocidade ( $x_r, \dot{x}_r$ ) de um ponto arbitrário qualquer  $r$  do mesmo sistema:

$$x_i = P_i(x_r, \dot{x}_r), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-15)$$

A definição de Rosemberg apresenta duas importantes limitações: não pode ser aplicada a sistemas não conservativos e nem a problemas que apresentam o fenômeno da ressonância interna. Dessa forma, insere-se a próxima definição.

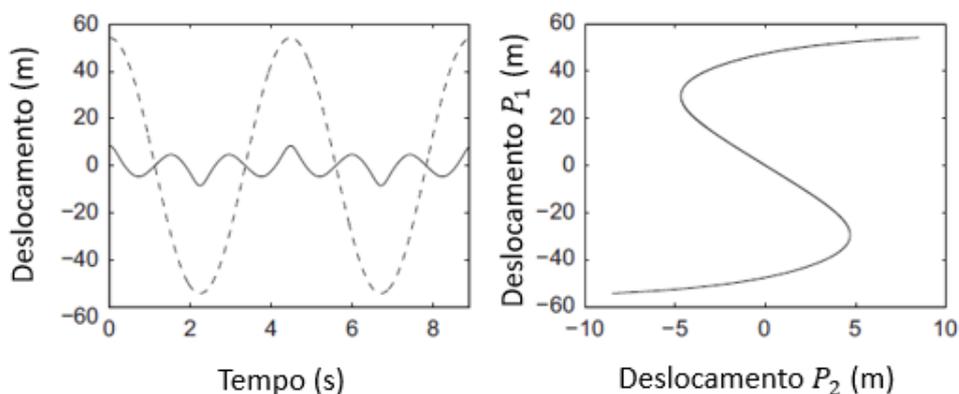
### 3.2.2 DEFINIÇÃO DE SHAW-PIERRE (1991)

Visando contornar as limitações da definição de Rosemberg, Shaw e Pierre propõem com base na teoria das variedades invariantes estender os conceitos de MNL para sistemas com vibração não uníssona.

Na presença de ressonância interna (dois ou mais modos normais não-lineares interagem), algumas coordenadas podem ter uma diferente componente de frequência dominante que as das outras coordenadas. Nesse caso, o sistema não vibra mais em uníssono (KERSCHEN et al., 2009). A Figura 8 ilustra o fenômeno de ressonância interna de um modo normal não linear, num sistema com dois graus de

liberdade, em que a frequência de oscilação de uma coordenada é três vezes a da outra coordenada.

Figura 8 – Ressonância interna de razão 3:1

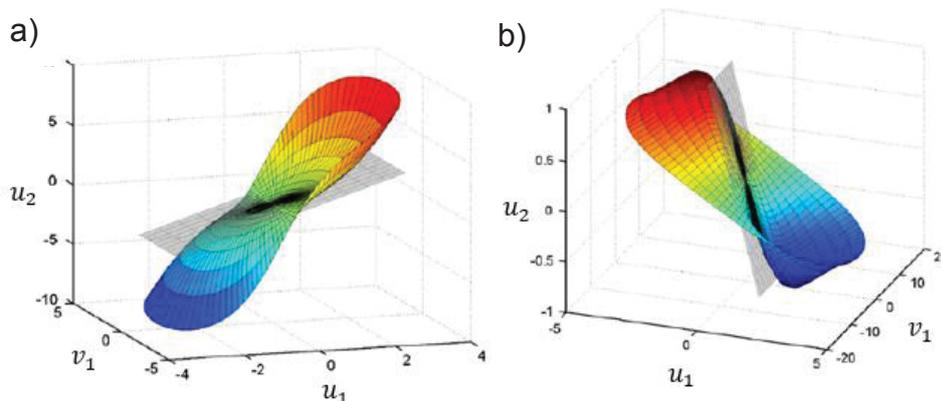


FONTE: (KERSCHEN et al., 2009)

Nessa definição considera-se que um modo normal de um sistema não linear é um movimento que ocorre em variedades invariantes bidimensionais no espaço de fase do sistema. As variedades invariantes podem ser entendidas como uma superfície contida no espaço de fase do sistema dinâmico, possuindo a seguinte propriedade: uma órbita iniciada nessa superfície permanece nela durante todo o curso de sua evolução dinâmica (FALZARANO; CLAGUE; KOTA, 2001). Essas variedades invariantes passam pela posição de equilíbrio estável do sistema, e nesse ponto, são tangentes ao autoespaço bidimensional do correspondente sistema linearizado em relação à posição de equilíbrio. Nas variedades invariantes o sistema dinâmico é governado por uma equação de movimento envolvendo um par de variáveis de estado (deslocamento e velocidade), ou seja, o sistema se comporta como um oscilador não linear de um único grau de liberdade (SHAW; PIERRE; PESHECK, 1999).

Geometricamente, os MNLs são representados por um plano no espaço-fase, e os MNNLs são representados por superfícies bidimensionais tangentes aos planos referentes aos MNLs no ponto de equilíbrio do sistema. Na Figura 9 tem-se uma comparação dos planos correspondentes aos MNLs com as superfícies bidimensionais dos MNNLs.

Figura 9 -Superfície bidimensional das variedades invariantes: a) modo em fase; b) modo fora de fase



FONTE: (KERSCHEN et al., 2009)

### 3.3 MÉTODOS DE DERIVAÇÃO DOS MODOS NORMAIS NÃO LINEARES

Os métodos de derivação dos MNNLs podem ser classificados em duas categorias: técnicas analíticas e técnicas numéricas. Há também métodos que unem ambas as técnicas.

A abordagem numérica pode ser expandida para faixas de amplitude maiores que as analíticas, no entanto, os métodos necessitam de simulações numéricas intensas, demandando grande esforço computacional (KERSCHEN et al, 2009). Métodos baseados em análise de elementos finitos também são utilizados, como no trabalho de Mazzilli e Boracho Neto (2002), Mazzilli (2004), Kuether e Allen (2014), Renson et al. (2016), dentre outros.

As técnicas analíticas têm a vantagem de construírem os MNNLs simbolicamente, o que é útil para ganhar compreensão na dinâmica e para realizar estudos paramétricos. Entre outros aspectos favoráveis as técnicas analíticas elas claramente destacam a dependência da energia x frequência dos MNNL. Porém, na presença de ressonância interna a técnica precisa de tratamento cuidadoso, a resposta dinâmica só é precisa para pequenas amplitudes de movimento e o domínio de validade da solução não é conhecido a priori (KERSCHEN et al., 2009).

Como principais exemplos das técnicas analíticas citam-se: formulação baseada na energia (ROSENBERG, 1966), método das variedades invariantes (SHAW; PIERRE, 1991), métodos de perturbação e método das formas normais.

Métodos de perturbação são válidos apenas para pequenos parâmetros de perturbação, que podem ser nas coordenadas ou nos parâmetros do sistema. O método que mais tem recebido atenção é o método das múltiplas escalas para a identificação de MNNLs (KERSCHEN et al., 2009).

O método das formas normais geralmente é usado na teoria da bifurcação para definir a forma mais simples de sistemas dinâmicos, gerando bifurcações clássicas de crescente codimensão (TOUZÉ, 2012).

A formulação baseada na energia, embora seja uma abordagem elegante, é limitada a problemas de não linearidade ímpar, pois é baseada em argumentos simétricos, e a sistemas sem amortecimento, enquanto o método das variedades invariantes não apresenta essas limitações (KERSCHEN et al., 2009). Com base nisso, apresenta-se a seguir a descrição do método das variedades invariantes.

### 3.3.1 MÉTODO DAS VARIEDADES INVARIANTES

Para a obtenção dos modos normais não lineares com base na definição utilizando as variedades invariantes, é necessário transformar as equações que governam o problema dinâmico, num sistema de equações de Cauchy de primeira ordem, podendo ser expressos da seguinte forma:

$$\dot{x}_i = y_i; \quad (3-16)$$

$$\dot{y}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n); \quad (3-17)$$

onde  $x_i$  são as coordenadas generalizadas (deslocamentos e rotações) em relação a condição de equilíbrio e  $y_i$  são as correspondentes velocidades.

As funções  $f_i$  consistem em forças (por unidade de massa) e momentos não-lineares, que em geral dependem de  $x_i$  e  $y_i$ . O sinal de ponto acima das variáveis indica sua derivada temporal.

Com o propósito de se obterem modos não lineares particulares, assume-se que existe ao menos uma configuração na qual, por meio de equações de restrição, os deslocamentos e velocidades podem ser parametrizados por um único par deslocamento-velocidade. Isto é, se a dinâmica de um par particular de deslocamento-velocidade é conhecida, então todas as outras posições e velocidades podem ser

determinadas a partir deles. Em outras palavras, os graus de liberdade do sistema são "escravizados" em função de um par de graus de liberdade generalizados (deslocamento e velocidade) "mestre", tal que:

$$u = x_1; \quad (3-18)$$

$$v = y_1. \quad (3-19)$$

Os pares dos outros graus de liberdade, chamados pares escravos, são expressos em função do par mestre ( $u$  e  $v$ ), através de equações de restrições, obtidas por:

$$x_i = P_i(u, v); \quad (3-20)$$

$$y_i = Q_i(u, v) \rightarrow i = 1, 2, \dots, n; \quad (3-21)$$

onde  $P_i$  e  $Q_i$ , são, essencialmente, um conjunto de equações que restringem as relações entre os pares mestres e escravos, devendo ser determinadas para cada modo normal não linear.

As relações, quando representadas graficamente, formam uma superfície de restrição (hipersuperfície) no espaço bidimensional formado por  $u$  e  $v$ , caracterizando assim, o subespaço das variedades invariantes para esses modos. Já para um sistema linear, essas relações são lineares, resultando em variedades planas nos autoespaços.

Como consequência da definição de um modo normal não linear, um dado movimento que, iniciado no subespaço formado pelas variedades invariantes, permanecerá nele durante todo o tempo de movimento, derivando daí o adjetivo invariante.

Na sequência é feita a derivada temporal das equações de restrição usando a regra da cadeia para diferenciação:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial v} \dot{v}, \rightarrow i = 1, 2, \dots, n; \quad (3-22)$$

$$\dot{y}_i = \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial v} \dot{v}, \rightarrow i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-23)$$

Ao se considerar a variável de velocidade na obtenção das variedades invariantes, bem como do deslocamento, torna-se possível a inclusão de amortecimento de uma maneira sistemática. Nessa metodologia, a formulação resulta no aparecimento de termos importantes dependentes da velocidade para modos normais de sistemas não lineares (SHAW et al., 1993).

Substituindo as relações (3-22) e (3-23) nas equações do movimento (3-16) e (3-17), e utilizando as equações de restrição dadas por (3-20) e (3-21), chega-se no seguinte sistema de  $2n-2$  equações diferenciais parciais não-lineares:

$$\begin{aligned} Q_i(u, v) &= \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial u} v \\ &+ \frac{\partial P_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v); v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)) \quad (3-24) \\ &\rightarrow i = 2, 3, \dots, n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v); v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)) &= \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial u} v \\ &+ \frac{\partial Q_i(u, v)}{\partial v} f_1(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v); v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)) \\ &\rightarrow i = 2, 3, \dots, n. \quad (3-25) \end{aligned}$$

Exceto para poucos casos especiais, não existem soluções exatas do sistema de equações diferenciais parciais que governam a variedade invariante expressa por (3-24) e (3-25). A solução pode ser obtida de forma analítica e aproximada usando expansão em séries de potência ao redor da configuração de equilíbrio. Desse modo, as funções de restrições podem ser escritas como expansões polinomiais:

$$\begin{aligned} P_i(u, v) &= c_{1,i}u + c_{2,i}v + c_{3,i}u^2 + c_{4,i}uv + c_{5,i}v^2 + c_{6,i}u^3 + c_{7,i}u^2v \\ &+ c_{8,i}uv^2 + c_{9,i}v^3 + \dots \rightarrow i = 1, 2, \dots, n; \quad (3-26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_i(u, v) &= d_{1,i}u + d_{2,i}v + d_{3,i}u^2 + d_{4,i}uv + d_{5,i}v^2 + d_{6,i}u^3 + d_{7,i}u^2v \\ &+ d_{8,i}uv^2 + d_{9,i}v^3 + \dots \rightarrow i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-27) \end{aligned}$$

A substituição das equações (3-26) e (3-27) no sistema de equações de movimento resultam num sistema algébrico de equações em termos dos coeficientes das equações de restrição  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$ , podendo eles serem sequencialmente resolvidos. Quando resolvidas as incógnitas  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$ , a dinâmica do MNL pode ser gerada simplesmente substituindo P e Q nas equações (3-20) e (3-21) e posteriormente nas equações (3-16) e (3-17), resultando no seguinte oscilador modal:

$$\dot{u} = v \quad (3-28)$$

$$\dot{v} = f_1(u, P_2(u, v), \dots, P_n(u, v); v, Q_2(u, v), \dots, Q_n(u, v)) \quad (3-29)$$

O oscilador modal serve para descrever a dinâmica do sistema com base apenas em um grau de liberdade, ou seja, reduz-se a ordem do sistema dinâmico. As relações entre os outros graus de liberdade são feitas através das equações de restrição. A solução obtida é válida localmente, não sabendo-se a priori o domínio de validade, sendo determinado somente por comparações a soluções numéricas do sistema original de equações do problema.

Porém, o foco do trabalho nesta dissertação é o método das variedades invariantes, e o seu procedimento de obtenção foi sumarizado em seis passos por Kerschen et al. (2009), como:

1. Escolher o par mestre de coordenadas,  $u$  e  $v$ ;
2. Expressar as coordenadas escravas em função das funções de restrição  $P_i(u, v)$  e  $Q_i(u, v)$
3. Usar a técnica das variedades invariantes para eliminar a dependência explícita do tempo das equações de movimento;
4. Utilizar aproximações locais usando as expansões polinomiais para  $P_i(u, v)$  e  $Q_i(u, v)$ ;
5. Substituir as aproximações das funções de restrição nas equações diferenciais parciais que governam as variedades invariantes, e resolver o sistema de equações algébricas resultante da expansão polinomial;
6. Substituir as coordenadas escravas na equação de movimento pelas expansões polinomiais, eliminando-as do sistema.

Outro método utilizado mais recentemente nessa área é o método das variedades sub-espectrais (Subspectral manifold) (SSM), que é uma variedade invariante assintótica a um MNNL, e serve como continuação não linear mais suave de um subespaço espectral do sistema linearizado ao longo do MNNL, modelos de ordem reduzida podem ser obtidos em sistemas mecânicos, como demonstrado por Haller e Ponsioen (2016). No trabalho deles, é mostrado que aproximações ao longo de um fluxo de um SSM podem simplificar o estudo a longo prazo da dinâmica do sistema.

### 3.4 LIMITAÇÕES E VANTAGENS DO USO DOS MNNL

O conceito dos modos normais não lineares oferece uma sólida base teórica e matemática para analisar e interpretar uma grande classe dos fenômenos da dinâmica não linear (KERSCHEN et al., 2009). Embora tal noção possa parecer contraditória, em vista da inaplicabilidade do princípio da superposição linear aos sistemas não-lineares, foi demonstrado que empregar o conceito dos MNNLs pode ajudar a entender e explicar melhor a dinâmica livre e forçada de osciladores não lineares (KERSCHEN et al., 2006). Outra limitação é a falta das relações de ortogonalidade entre os MNNLs, o que dificulta sua exploração como bases para redução da dinâmica linear (KERSCHEN et al., 2009).

A identificação de MNNLs individuais podem representar uma limitação quando se considera o movimento arbitrário de um sistema linear, nesse caso, os MNNLs são obrigados a interagir (KERSCHEN et al., 2006). Para avançar nessa direção, o método do multimodo das variedades invariantes foi concebido, sendo o modelo dinâmico obtido capaz de capturar os acoplamentos essenciais entre os modos de interesse enquanto evita acoplamento de outros modos (PESHECK et al., 2001). Esse conceito, embora não muito explorado, pode fornecer base para o desenvolvimento de métodos futuros que englobem a interação entre os MNNLs.

Como primeira motivação para obter e estudar os MNNL é que ressonâncias forçadas em sistemas não lineares ocorrem em sua vizinhança (KERSCHEN et al., 2009). O conhecimento dos MNNL pode, dessa maneira, fornecer informações valiosas da ressonância na estrutura, uma característica de considerável importância na engenharia (VAKAKIS et al., 1996).

A análise completa de um sistema dinâmico não linear geralmente é inviável, com base nisso, a análise modal não linear tem sido identificada como uma ferramenta potencial à obtenção de modelos de ordem reduzida (GAVASSONI, 2012). Os modelos de ordem reduzida podem ser utilizados para estudar a resposta à vibração livre e forçada de um determinado sistema para os respectivos MNNLs que eles descrevem. A razão da melhor precisão dos MNNLs baseados em modelos reduzidos é devido a propriedade da invariância dinâmica e pelo fato de que eles apresentam soluções exatas para a dinâmica não linear forçada e livre dos osciladores considerados (KERSCHEN et al., 2009). Curvas frequência-amplitude podem ser obtidas como estimativa do modelo real e fenômenos de instabilidade podem ser identificados, tal qual a bifurcação. Entretanto, os modelos de ordem reduzida devem ter seu campo de atuação validado, como amplitude e faixa de frequência de excitações.

O estudo de possíveis relações de ortogonalidade exatas ou aproximadas (dependentes de energia) satisfeitas pelos MNNL permitiriam a sua utilização como base para redução de ordem da dinâmica não linear (KERSCHEN et al., 2006).

### 3.5 APLICAÇÕES DOS MNNL EM ESTRUTURAS OFFSHORE

A utilização da análise não linear depende do tipo de não linearidade e do nível de excitação do sistema dinâmico. E, com o interesse contínuo de se projetar estruturas cada vez maiores e desafiadoras do ponto de vista da engenharia, surge a necessidade de se projetar elementos estruturais mais leves e flexíveis, e conseqüentemente, mais não lineares (KERSCHEN et al., 2006).

A dinâmica não linear tem sido usada como ferramenta de estudo em estruturas offshore, como demonstrou Falzarano et al. (2001). Nesse estudo, foram aplicados os conceitos dos MNNLs em uma coluna semi-submersível flutuante estabilizada para perfuração offshore de petróleo, permitindo a identificação de interações não lineares entre dois modos que não poderiam ser capturados usando a abordagem linear. Possibilitou também inferir a reação da estrutura sob excitação de onda externa.

No trabalho de Gavassoni (2012), os MNNLs foram utilizados para a obtenção de uma análise modal não linear de modelos discretos de estruturas offshore. O autor aplicou esses conceitos para ilustrar fenômenos típicos da análise modal não linear

em três modelos estruturais distintos: pêndulo invertido, torre articulada e plataforma do tipo Spar.

Jung e Gavassoni (2015), utilizaram a definição baseada nas variedades invariantes dos MNLS para estudar a vibração não linear forçada de uma torre offshore do tipo triarticulada. O domínio de validade do sistema foi analisado através de curvas de ressonância e espaço fase do sistema.

Zwierzikowski (2019) estudou o comportamento de uma turbina eólica offshore do tipo monopile à vibração livre e forçada, e também os efeitos que a presença de um controlador linear passivo de massa concentrada gera na dinâmica não linear.

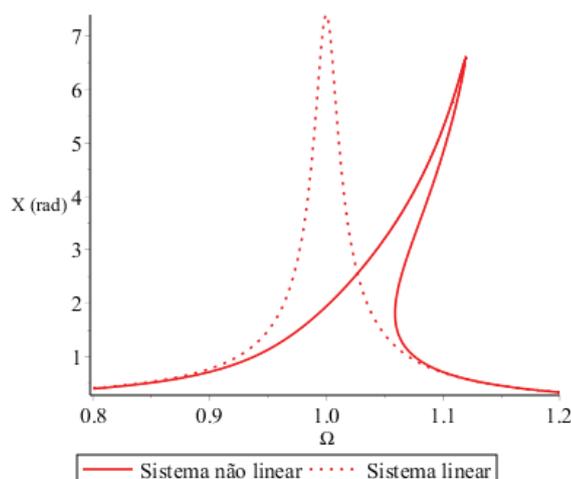
### 3.6 PROPRIEDADES DOS MNLS

Existem propriedades que são características e exclusivas da análise modal não linear, e outras pertinentes apenas à análise modal linear. A diferença mais marcante é devido à impossibilidade de aplicação da superposição modal nas análises não lineares. Desse modo, a resposta do sistema para qualquer combinação de carregamento dinâmico, aplicado simultaneamente, não é igual à soma das respostas individuais de cada resposta ao carregamento agindo separadamente, ou seja os modos não lineares não são desacoplados (KERSCHEN et al., 2006).

Nos modos lineares a troca de energia pode ser reversível e nos modos não lineares pode ser irreversível. No caso linear, os sistemas podem apresentar o fenômeno do batimento, que ocorre quando dois modos com frequências naturais aproximadamente iguais trocam energia entre si de modo reversível. No caso da análise não linear a troca pode ocorrer dos modos excitados para os não excitados devido à interação modal (GAVASSONI, 2012).

Os parâmetros modais de um sistema dinâmico linear para a descrição completa do movimento são a amplitude, frequência de vibração, vetor modal e ângulo de fase. Já a resposta típica de um sistema não linear é dependente da geometria das variedades invariantes e das relações amplitude x frequência (GAVASSONI, 2012). Na Figura 10 tem-se ilustrado uma das diferenças entre as análises linear e não linear.

Figura 10 – Comparativo entre sistemas linear amortecido x não linear amortecido para a resposta de curva de ressonância; as abscissas representam a frequência, e as ordenadas a amplitude



FONTE: O AUTOR (2020)

Isso significa, que em um sistema não linear a frequência de vibração pode variar com um aumento da amplitude de movimento, indicando perdas ou ganhos de rigidez. Essa dependência, impede a separação direta do espaço e do tempo nas equações que governam o movimento, o que dificulta o cálculo analítico (KERSCHEN et al., 2009).

Diferentemente dos sistemas lineares, em que a quantidade de MNLs é limitada ao número de graus de liberdade do sistema, nos sistemas não lineares a quantidade pode exceder esse número. Isso é devido à bifurcação dos MNNL, que podem gerar instabilidades modais, e bifurcações de modos localizados não lineares (KERSCHEN et al., 2006). Uma bifurcação ocorre qualitativamente quando diferentes dinâmicas ocorrem na vizinhança de um ponto no espaço de parâmetros, e é associado com a falha da continuação analítica da ramificação da solução naquele ponto (KERSCHEN et al., 2006). Entretanto, ainda não se tem um método para se determinar quais bifurcações dos MNNL estão relacionadas a resposta forçada e quais podem ser negligenciadas (HILL; CAMMARANO; NEILD, 2017).

O fenômeno da bifurcação pode implicar na coexistência de múltiplas soluções de equilíbrio estável, fazendo com que o movimento seja atraído para ela dependendo das condições iniciais impostas, contrastando com sistemas dinâmicos lineares, em que há apenas uma solução estável (KERSCHEN et al., 2006).

Apenas na análise não linear pode ocorrer a transição de movimento regular para o caótico, que é onde a dinâmica do sistema aparenta ser imprevisível, irregular

e aleatória, sendo esse movimento caótico descrito por uma sensibilidade à perturbações nas condições iniciais do sistema (KERSCHEN et al., 2006).

Ocorrências de transições bruscas, conhecidas também por saltos dinâmicos, são exclusivas da análise não linear, sendo a ocorrência causada pelo fenômeno da histerese. Fisicamente se traduz por mudanças repentinas na amplitude do movimento para pequenas variações na frequência da força externa (GAVASSONI, 2012). Essas transições podem ser especialmente perigosas quando um ponto fixo estável co-existe na faixa de frequência de um ponto fixo instável (KERSCHEN et al., 2006).

### 3.7 MÉTODOS PARA ANÁLISE DINÂMICA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

Equações diferenciais não lineares ocorrem naturalmente em muitas aplicações de engenharia. Soluções gerais dessas equações diferenciais são raramente obtidas, apesar de soluções particulares poderem ser calculadas, de modo específico, por técnicas numéricas padrão (JORDAN; SMITH, 2007).

No estudo da dinâmica não linear, alguns métodos costumam ser utilizados, tais quais o método das múltiplas escalas, método da forma normal direta e o método do balanço harmônico (HILL; NEILD; WAGG, 2017).

Outro método com sua eficiência reconhecida em vários campos da análise estrutural é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Este é um procedimento numérico, para determinar soluções aproximadas para problemas de valores sobre o contorno de equações diferenciais. É utilizado comumente para prover soluções para pequenas e grandes estruturas, e variados casos na dinâmica estrutural, inclusive para situações envolvendo certo grau de não linearidade (COOPER; DIMAIO; EWINS, 2018).

O uso do MEF está atrelado a possibilidade de discretizar a estrutura em vários graus de liberdade, viabilizando o estudo em faixas de frequências mais amplas (KERSCHEN et al., 2006). A solução obtida através do MEF em problemas não lineares normalmente é dada através de relações de incrementos, tal qual o procedimento de resolução de Newton-Raphson (VAZ, 2011).

Contudo, uma das principais limitações apresentadas pelo MEF é devido ao seu alto esforço computacional para obtenção de respostas representativas, especialmente nos casos de estruturas offshore à vibração não linear (HE;

EPUREANU; PIERREM, 2007). Diante disso, e do custo elevado no processo, seu uso na fase de pré projeto ainda é limitado

A seguir apresenta-se o método do balanço harmônico, que é utilizado em algumas situações neste trabalho.

### 3.7.1 MÉTODO DO BALANÇO HARMÔNICO

O método do balanço harmônico é um dos métodos mais simples e práticos para estimar soluções periódicas (JORDAN; SMITH, 2007). Nesses casos, soluções analíticas aproximadas podem ser obtidas, e no geral o método funciona, fornecendo uma aproximação satisfatória para a solução requerida (MICKENS, 1984).

O método baseia-se em assumir uma solução composta por harmônicos, a qual é então substituída na equação do movimento, em seguida, igualando-se os coeficientes dos harmônicos à zero sucessivamente, de tal forma que o problema passa a ser descrito por um sistema de equações algébricas (MICKENS, 1984). Como consequência, os termos de mais alta ordem devem ter menores amplitudes relativas à expressão geral do problema (MICKENS, 1984).

Tomando como exemplo a oscilação livre de uma massa e uma mola não linear, onde o parâmetro não linear é representado por  $\varepsilon$ , a equação que governa o movimento pode ser representada por:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (3-30)$$

Quando  $\varepsilon$  é igual a zero, o sistema torna-se linear com frequência de vibração  $\omega_n$ .

A solução do método é formada em termos de séries do parâmetro  $\varepsilon$ , e o resultado é desenvolvido na vizinhança da solução do problema linearizado. Se a solução do problema linearizado é periódica, e o parâmetro  $\varepsilon$  pequeno, pode-se esperar que a solução perturbada seja periódica também (THOMSON; DAHLEH, 1998).

Admitindo como condição inicial  $x(0) = A$  e  $\dot{x}(0) = 0$ , e considerando apenas dois termos harmônicos na resposta, o que já é suficiente para ilustrar o processo, Thomson e Dahleh (1998) ao igualarem os primeiros harmônicos a zero, apresentam como solução:

$$x = A\cos(\omega t) + \varepsilon \frac{A^3}{32\omega^2} (\cos(3\omega t) - \cos(\omega t)); \quad (3-31)$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 + \frac{3\varepsilon A^2}{4\omega_n^2}}. \quad (3-32)$$

Analisando as respostas em (3-31) e (3-32), percebe-se que a solução encontrada é de forma periódica, e a frequência fundamental  $\omega$  aumenta com a amplitude, como esperado para o tipo de rigidez dessa mola (THOMSON; DAHLEH, 1998). Conforme Mickens (1984), na maioria dos casos de interesse prático, o método do balanço harmônico não precisa ser executado além da primeira aproximação. O método do balanço harmônico, quando na presença de não linearidades grandes, pode ser expandido e ser usado com mais termos harmônicos na solução, fornecendo uma resposta mais precisa do que com menos termos. Entretanto, esse método não pode ser usado em situações na qual a resposta do sistema é não periódica.

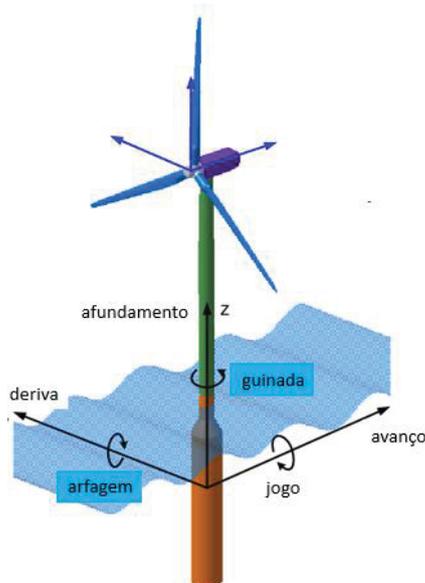
## 4 ANÁLISE DINÂMICA DO PROBLEMA

Neste capítulo é apresentado a análise dinâmica de uma turbina eólica flutuante do tipo Spar com dimensões provenientes de estudos, e no fim, é feita uma análise paramétrica com dimensões menores de profundidade da plataforma. Para tanto, será apresentada a formulação estática e dinâmica do problema. Em seguida, métodos de análise não linear são utilizados para descrever a resposta da estrutura.

### 4.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

É comum na literatura de corpos flutuantes (RAHMAN et al., 2017) e (VALTORTA, 2016), assumir modelos constituídos por corpos rígidos com massas pontuais e características inerciais para o estudo de sua resposta dinâmica. Um corpo rígido flutuante possui 6 graus de liberdade<sup>2</sup> (Figura 11), 3 relativos à rotação (jogo (x), arfagem (y) e guinada (z)) e 3 referentes à translação (avanço (x), deriva (y) e afundamento (z)).

Figura 11 – Graus de liberdade de um corpo rígido flutuante

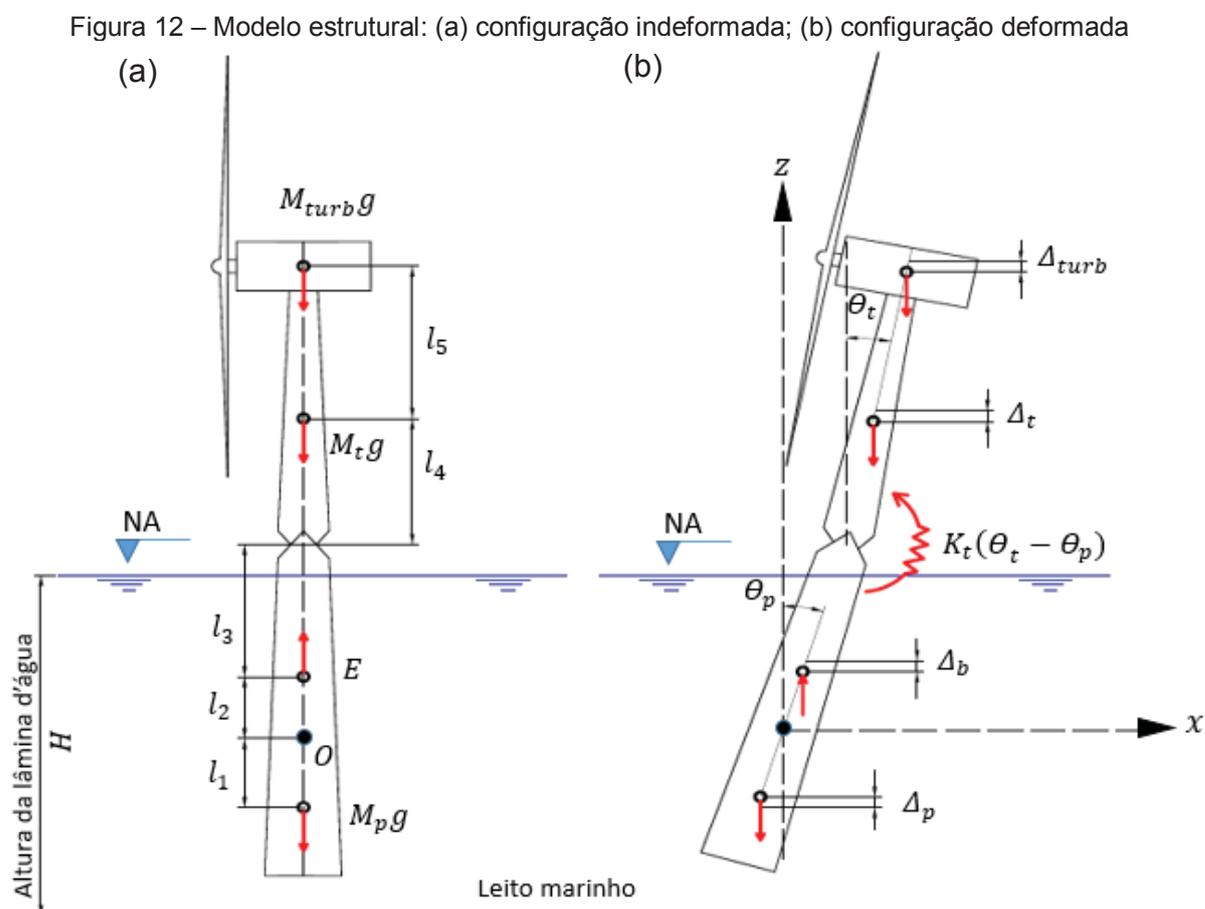


FONTE: Adaptado de Tran et al. (2014)

<sup>2</sup> Em inglês, a nomenclatura dos graus de liberdade de um corpo rígido flutuante são dadas por: surge (avanço), sway (deriva), heave (afundamento), roll (jogo), pitch (arfagem) e yaw (guinada).

Foram mostrados em outros estudos que os graus de liberdade relativos à arfagem causam maiores momentos fletores na torre (JONKMAN, 2007a). Portanto, o modelo físico adotado para a representação da plataforma Spar neste trabalho consiste no uso de dois graus de liberdade rotacionais, relacionados ao movimento de arfagem, um relativo à torre (superestrutura que suporta a turbina) ( $\theta_t$ ) e outro para a plataforma (infraestrutura que suporta a torre) ( $\theta_p$ ).

As rotações  $\theta_t$  e  $\theta_p$  são medidas, respectivamente, entre os eixos da torre e da plataforma com o eixo z conforme ilustrado na Figura 12.



FONTE: O AUTOR (2020)

O ponto de rotação indeslocável e tomado como ponto de origem do sistema foi assumido como sendo o centro de gravidade da estrutura ( $O$ ), mostrado no modelo apresentado na Figura 12. Para que o modelo fosse validado comparou-se a primeira frequência de ressonância de arfagem com a obtida do trabalho de Jonkman e Musial (2010), obtendo-se uma boa concordância. A consideração do centro de gravidade do

sistema leva ao acoplamento nos termos inerciais. Essa consideração é diferente da apresentada por Harriger (2011), onde foi admitido como ponto indeslocável a base da torre, resultando em equações não acopladas nos termos de aceleração.

A turbina eólica é modelada como duas massas pontuais, sendo que  $M_t$  representa a massa da torre e  $M_{turb}$  indica a massa do conjunto composto pelo rotor e a nacele, ambas estão dispostas nos seus respectivos centros de gravidade (CG). Essa simplificação foi adotada pois, por a torre não possuir um eixo de rotação fixo, ela rotaciona em dois eixos, não é possível se calcular um momento de massa resultante. Entretanto, como a maior parte da massa se encontra na turbina, numa pequena faixa de altura, essa consideração pode ser adotada sem prejuízos significantes.

A plataforma é modelada como um corpo extenso rígido de massa  $M_p$ , na qual o seu CG dista  $l_1$  do ponto  $O$ . O empuxo atuante no sistema é designado por  $E$ , com distância  $l_2$  do ponto  $O$ . A base da torre até a resultante do empuxo dista de  $l_3$ .

A distância da base da turbina eólica até o CG da torre, é denotado por  $l_4$ , já  $l_5$  indica a distância do CG do conjunto rotor e nacele até o CG da torre.

Há ainda a consideração de uma mola rotacional linear para a torre ( $K_t$ ), sendo o momento relativo proporcional à diferença das rotações  $\theta_t$  e  $\theta_p$ .

A metodologia utilizada para deduzir as equações do movimento baseou-se no princípio de Hamilton (1834), também conhecido como princípio da mínima ação ou princípio do menor esforço. Matematicamente pode ser expresso por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - \Pi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0; \quad (4-1)$$

onde  $\delta$  é o símbolo utilizado para representar a variação das quantidades à sua direita,  $T$  é a energia cinética,  $\Pi$  a energia potencial total,  $W_{nc}$ , o trabalho realizado por forças não conservativas externas atuantes sobre a estrutura e  $t$  a variável temporal. Em termos gerais, a fórmula indica que a variação de energia cinética e potencial mais a variação do trabalho realizado pelas forças não conservativas deverá ser nula em qualquer intervalo de tempo de  $t_1$  a  $t_2$ .

#### 4.1.1 EQUAÇÕES DO EQUILÍBRIO ESTÁTICO

A configuração de equilíbrio estático da turbina eólica sob ação de uma corrente marinha é obtida utilizando-se o princípio da energia potencial estacionária. Tal princípio é oriundo da mecânica clássica e pode ser encontrado em Aguiar (2019). A energia potencial total ( $\Pi$ ) é expressa por:

$$\Pi = U + V; \quad (4-2)$$

onde  $U$  representa a parcela dada pela energia interna de deformação elástica da estrutura e  $V$  é relativo ao potencial das cargas externas atuantes sobre a estrutura.

As rotações da torre e da plataforma devido aos efeitos estáticos são chamadas, respectivamente, de  $\theta_{ts}$  e  $\theta_{ps}$ .

A energia interna de deformação da mola rotacional da torre é dada por:

$$U = \frac{1}{2} K_t (\theta_{ts} - \theta_{ps})^2. \quad (4-3)$$

O potencial das cargas externas é função do trabalho total realizado pelas forças externas ( $W$ ) e é expresso por:

$$V = -W. \quad (4-4)$$

O trabalho externo, considerando as cargas estáticas do peso da plataforma ( $W_p$ ), do peso da torre ( $W_t$ ), do peso do conjunto rotor e nacele ( $W_{turb}$ ), do empuxo ( $W_E$ ), da força da corrente marítima ( $W_C$ ) e da força do vento ( $W_v$ ), é expresso por:

$$W = W_p + W_E + W_t + W_{turb} + W_C + W_v. \quad (4-5)$$

Os deslocamentos estáticos são descritos em relação ao ponto  $O$ .

O trabalho realizado é o produto da força pelo deslocamento ( $\Delta$ ) na direção de atuação da mesma, que para o caso analisado é:

$$W_p = M_p g \Delta_p; \quad (4-6)$$

$$W_E = -E \Delta_b; \quad (4-7)$$

$$W_t = M_t g \Delta_t; \quad (4-8)$$

$$W_{turb} = M_{turb} g \Delta_{turb}; \quad (4-9)$$

$$W_c = F_c \Delta_c; \quad (4-10)$$

$$W_v = F_v \Delta_v; \quad (4-11)$$

as variáveis  $\Delta_p$ ,  $\Delta_b$ ,  $\Delta_t$ ,  $\Delta_{turb}$ ,  $\Delta_c$  e  $\Delta_v$ , são, respectivamente, os deslocamentos na direção de atuação da resultante das forças de peso da plataforma, empuxo, peso da torre, peso da turbina, força de corrente e força de vento. A aceleração da gravidade é denotada por  $g$ .

A força de empuxo é a única força com sentido vertical para cima. As forças pesos são verticais com sentido para baixo, e as forças de corrente e de vento são horizontais. Para as forças verticais, os deslocamentos são função da distância do centro de gravidade do ponto de atuação da força e da rotação, podendo os deslocamentos das forças verticais serem expressos por:

$$\Delta_b = l_2(1 - \cos(\theta_{ps})); \quad (4-12)$$

$$\Delta_p = -l_1(1 - \cos(\theta_{ps})); \quad (4-13)$$

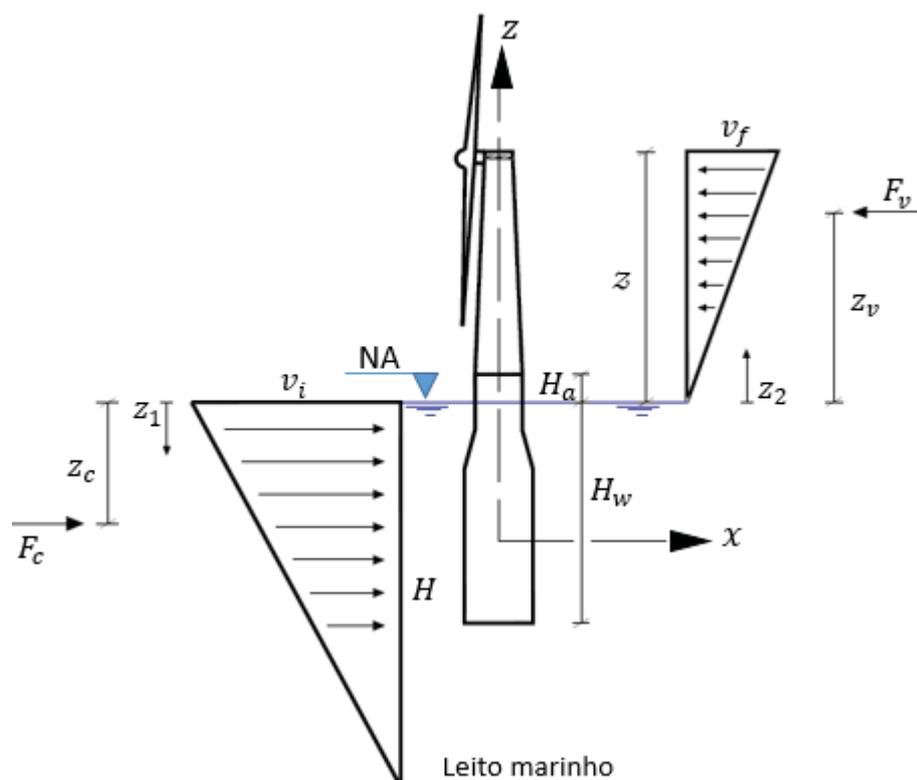
$$\Delta_t = l_4(1 - \cos(\theta_{ts})) + (l_2 + l_3)(1 - \cos(\theta_{ps})); \quad (4-14)$$

$$\Delta_{turb} = (l_4 + l_5)(1 - \cos(\theta_{ts})) + (l_2 + l_3)(1 - \cos(\theta_{ps})); \quad (4-15)$$

O deslocamento da plataforma  $\Delta_p$  é o único com sentido para cima, devido ao fato do eixo indeslocável se situar acima do CG do peso da plataforma, conforme pode ser visto na Figura 12 (a). Dentre as forças atuantes, o empuxo tem sentido contrário à força peso, sendo vertical para cima.

Admite-se que a velocidade da corrente e a velocidade do vento tenham variação linear com o eixo  $z$ , tais que as velocidades máximas se encontram, respectivamente, na superfície do oceano e no topo da torre que sustenta o conjunto rotor e nacele. A velocidade nula se encontra para a corrente no fundo do oceano e para o vento no nível do mar, tal qual ilustrado na Figura 13. A simplificação adotada no caso das correntes é a mesma feita por Gavassoni (2012), e a do vento é uma idealização, pois a mesma varia segundo uma função exponencial com o aumento da altura como descrito em Chakrabarti (2005).

Figura 13 – Velocidade da corrente e do vento



FONTE: O AUTOR (2020)

Definindo um novo eixo  $z_1$  para representação da velocidade da corrente, e  $z_2$  para representação da velocidade do vento, na qual ambas tem como origem a superfície do oceano e são orientadas conforme a Figura 13. Dessa forma, a função que relaciona a velocidade da corrente ( $v_c$ ) com a profundidade em relação a superfície do oceano ( $z_1$ ) é dada por:

$$v_c(z_1) = v_i - \frac{v_i z_1}{H}; \quad (4-16)$$

onde  $H$  é a profundidade da superfície até o leito do oceano.

Considerando uma análise quase-estática, a força de arrasto de um fluido (JONKMAN, 2007b) atuando ao longo de toda parte submersa da plataforma é função, da velocidade relativa entre o fluido e a estrutura, da massa específica do fluido ( $\rho_w$ ), do coeficiente de arrasto ( $C_D$ ), do diâmetro da estrutura que varia com a profundidade ( $d_0$ ) e da profundidade submersa da plataforma ( $H_w$ ). Desse modo, a força da corrente ( $F_c$ ) pode ser dada por:

$$F_c = \frac{\rho_w C_D}{2} \int_0^{H_w} d_0(z_1) v_c^2 dz_1. \quad (4-17)$$

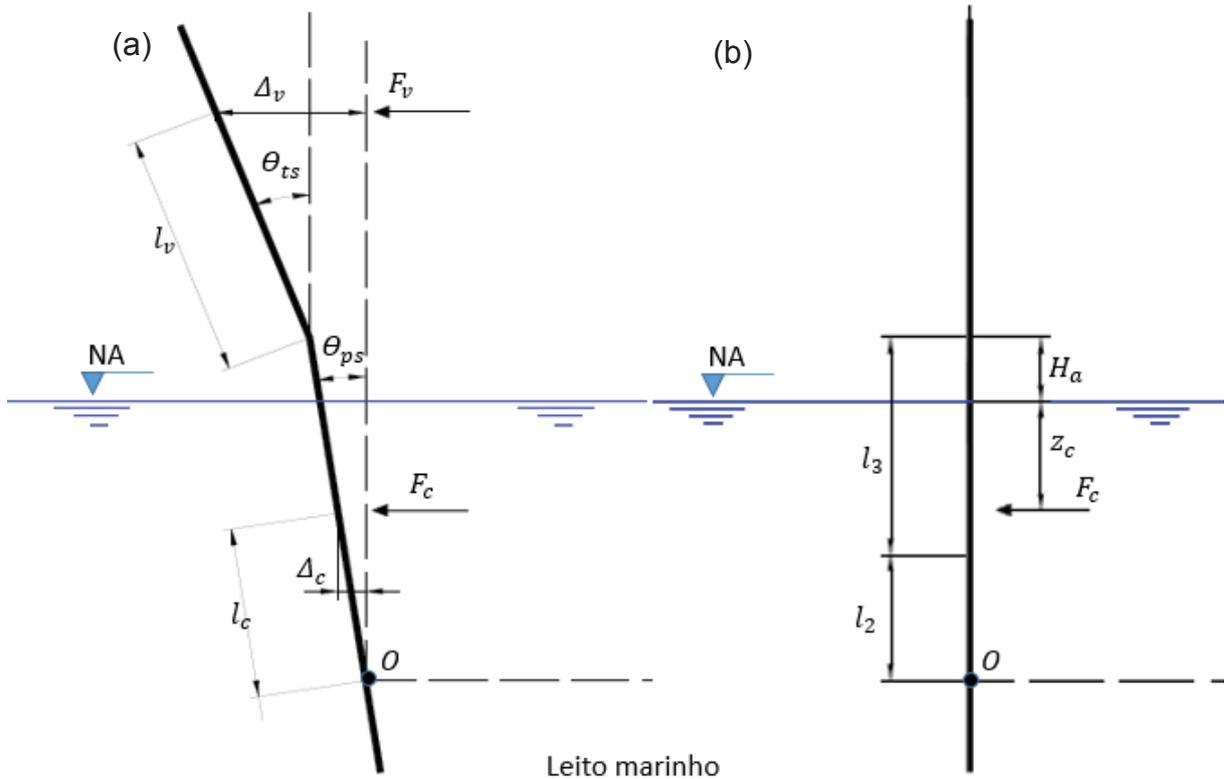
O ponto de aplicação da força da corrente ( $z_c$ ), medido em relação a superfície do oceano, é calculado do seguinte modo:

$$z_c = \frac{\int_0^{H_w} d_0(z_1) v_c^2 z_1 dz_1}{\int_0^{H_w} d_0(z_1) v_c^2 dz_1}. \quad (4-18)$$

O trabalho realizado pela força da corrente ( $W_c$ ), ilustrado na Figura 14, é calculado pelo produto força-deslocamento, onde o deslocamento do ponto de atuação da resultante da força de corrente ( $\Delta_c$ ) é dado por:

$$\Delta_c = l_c \text{sen}(\theta_{ps}). \quad (4-19)$$

Figura 14 – Parcelas de trabalho realizado pelas forças de corrente e de vento: (a) estrutura deformada; (b) estrutura indeformada



FONTE: O AUTOR (2020)

onde  $l_c$  é a distância de atuação da força da corrente em relação ao eixo indesejável  $O$ , sendo seu valor dado por:

$$l_c = -H_a + l_2 + l_3 - z_c; \quad (4-20)$$

onde a variável  $H_a$  é a distância da superfície do oceano até a base da torre.

A função que relaciona a velocidade do vento ( $v_v$ ) pode ser escrita como:

$$v_v(z_2) = \frac{v_f z_2}{z} \quad (4-21)$$

onde  $z_2$  é a altura em relação à superfície do mar,  $z$  é a altura até o topo da torre e  $v_f$  a velocidade máxima do vento.

A força do vento na análise quase estática é dada de maneira similar à força da corrente, pois o ar também é um fluido, bastando trocar para os coeficientes adequados. Dessa forma, a equação é escrita:

$$F_v = \frac{\rho_a C_D}{2} \int_0^z d_0(z_2) v_v^2 dz_2; \quad (4-22)$$

onde  $\rho_a$  é a densidade do ar. O ponto de aplicação da resultante da força do vento é calculado similarmente ao caso da corrente, dado por:

$$z_v = \frac{\int_0^z d_0(z_2) v_v^2 z_2 dz_2}{\int_0^z d_0(z_2) v_v^2 dz_2}. \quad (4-23)$$

O trabalho realizado pela força do vento é calculado de maneira análoga ao trabalho da força da corrente, na qual o deslocamento do ponto de atuação da resultante da força do vento ( $\Delta_v$ ), de acordo com a Figura 14, é dado por:

$$\Delta_v = [(l_v) \text{sen}(\theta_{ts}) + (l_2 + l_3) \text{sen}(\theta_{ps})]; \quad (4-24)$$

onde  $l_v$  é a distância de atuação da força do vento até a base da torre, dada por:

$$l_v = z_v - H_a \quad (4-25)$$

A energia potencial total devido às cargas externas pode ser calculada, combinando as equações de (4-6) a (4-15) e (4-19) a (4-25) na equação (4-4):

$$\begin{aligned} V = & M_p g l_1 (1 - \cos(\theta_{ps})) + E l_2 (1 - \cos(\theta_{ps})) + \\ & - M_t g [l_4 (1 - \cos(\theta_{ts})) + (l_2 + l_3) (1 - \cos(\theta_{ps}))] + \\ & - M_{turb} g [(l_4 + l_5) (1 - \cos(\theta_{ts})) + (l_2 + l_3) (1 - \cos(\theta_{ps}))] + \\ & - F_c (-H_a + l_2 + l_3 - z_c) \text{sen}(\theta_{ps}) - F_v [(z_v - H_a) \text{sen}(\theta_{ts}) + (l_2 + l_3) \text{sen}(\theta_{ps})] \end{aligned} \quad (4-26)$$

A energia potencial total da configuração estática ( $\Pi_s$ ) é obtida pela substituição das equações (4-3) e (4-26) na equação (4-2), resultando em:

$$\begin{aligned} \Pi_s = & \frac{1}{2}K_t(\theta_{ts} - \theta_{ps})^2 + M_p g l_1(1 - \cos(\theta_{ps})) + E l_2(1 - \cos(\theta_{ps})) \\ & - M_t g [l_4(1 - \cos(\theta_{ts})) + (l_2 + l_3)(1 - \cos(\theta_{ps}))] \\ & - M_{turb} g [(l_4 + l_5)(1 - \cos(\theta_{ts})) + (l_2 + l_3)(1 - \cos(\theta_{ps}))] \\ & - F_c l_c \text{sen}(\theta_{ps}) - F_v [(z_v - H_a)\text{sen}(\theta_{ts}) + (l_2 + l_3)\text{sen}(\theta_{ps})]. \end{aligned} \quad (4-27)$$

A configuração de equilíbrio estático estável da estrutura sob ação da força de corrente e de vento é dada pelo par de coordenadas de rotações estáticas  $\theta_{ts}$  e  $\theta_{ps}$ , que satisfaz o sistema de equações (4-28) definido pelo princípio da energia potencial estacionária:

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial \theta_{ps}} = 0; \quad \frac{\partial \Pi_s}{\partial \theta_{ts}} = 0; \quad (4-28)$$

resultando nas seguintes equações não lineares de equilíbrio estático:

$$\begin{aligned} K_t(\theta_{ps} - \theta_{ts}) + M_p g l_1 \text{sen}(\theta_{ps}) - (M_t + M_{turb})g(l_2 + l_3) \text{sen}(\theta_{ps}) \\ + E l_2 \text{sen}(\theta_{ps}) - F_c l_c \text{cos}(\theta_{ps}) - F_v(l_2 + l_3) \text{cos}(\theta_{ps}) = 0; \end{aligned} \quad (4-29)$$

$$\begin{aligned} K_t(\theta_{ts} - \theta_{ps}) - M_t g l_4 \text{sen}(\theta_{ts}) \\ - M_{turb} g(l_4 + l_5) \text{sen}(\theta_{ts}) - F_v(z_v - H_a) \text{cos}(\theta_{ts}) = 0. \end{aligned} \quad (4-30)$$

#### 4.1.2 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

As rotações devido aos efeitos exclusivamente dinâmicos,  $\theta_p$  e  $\theta_t$ , podem ser escritas em função da diferença das rotações totais,  $\theta_{pt}$  e  $\theta_{tt}$ , pelas parcelas da rotações da configuração estável de equilíbrio estático,  $\theta_{ps}$  e  $\theta_{ts}$ , tal que:

$$\theta_p = \theta_{pt} - \theta_{ps}; \quad (4-31)$$

$$\theta_t = \theta_{tt} - \theta_{ts}. \quad (4-32)$$

Utilizando técnicas variacionais, é possível obter as equações do movimento para o modelo da plataforma spar com dois graus de liberdade. A variação da energia potencial total entre a configuração durante o movimento ( $\Pi_t$ ) e a configuração estável ( $\Pi_s$ ), pode ser escrita como:

$$\Delta\Pi = \Pi_t - \Pi_s. \quad (4-33)$$

A energia potencial total da configuração dinâmica é obtida ao se fazer a substituição das rotações estáticas pelas rotações totais:

$$\theta_{pt} = \theta_p + \theta_{ps}; \quad (4-34)$$

$$\theta_{tt} = \theta_t + \theta_{ts}; \quad (4-35)$$

na equação (4-27), resultando em:

$$\begin{aligned} \Pi_t = & \frac{1}{2}K_t(\theta_{ts} + \theta_t - \theta_{ps} - \theta_p)^2 + M_p g l_1 (1 - \cos(\theta_{ps} + \theta_p)) \quad (4-36) \\ & + E l_2 (1 - \cos(\theta_{ps} + \theta_p)) \\ & - M_t g [l_4 (1 - \cos(\theta_{ts} + \theta_t)) + (l_2 + l_3) (1 - \cos(\theta_{ps} + \theta_p))] \\ & - M_{turb} g [(l_4 + l_5) (1 - \cos(\theta_{ts} + \theta_t)) \\ & + (l_2 + l_3) (1 - \cos(\theta_{ps} + \theta_p))] - F_c l_c \text{sen}(\theta_{ps} + \theta_p) \\ & - F_v [(z_v - H_a) \text{sen}(\theta_{ts} + \theta_t) + (l_2 + l_3) \text{sen}(\theta_{ps} + \theta_p)] \end{aligned}$$

A energia cinética da estrutura depende apenas dos deslocamentos dinâmicos da torre e da plataforma. Para calcular a energia cinética ( $E_c$ ) em corpos extensos sujeitos a rotações em torno de um ponto, pode-se utilizar a seguinte relação, descritas em livros de física como Halliday e Resnick (2016):

$$E_c = \frac{I\omega_{rot}^2}{2}; \quad (4-37)$$

onde,  $I$  representa o momento de massa relativo ao eixo de rotação, que no caso analisado fica no centro de gravidade da estrutura como um todo, e  $\omega_{rot}$  a velocidade angular de rotação do corpo.

Para o sistema de dois graus de liberdade analisado, a energia cinética total é dada pela seguinte soma:

$$T = T_p + T_t + T_{turb}; \quad (4-38)$$

onde,  $T_p$ ,  $T_t$  e  $T_{turb}$  indicam, respectivamente, a energia cinética da plataforma, da torre e do conjunto rotor nacele.

Devido ao fato da estrutura se mover num fluido com massa específica da mesma ordem de grandeza da densidade média da plataforma, deve-se considerar o efeito de inércia adicionada ( $I_A$ ). Esse valor pode ser considerado proporcional à inércia do fluido deslocado ( $I_f$ ), multiplicado por um coeficiente adimensional ( $C_A$ ), tal que:

$$I_A = C_A I_f. \quad (4-39)$$

Sendo assim, a inércia resultante do conjunto da plataforma ( $I_p$ ) é dada pela sua inércia individual ( $I_{plat}$ ) mais a inércia adicionada. Posto isso, tem-se:

$$I_p = I_A + I_{plat}. \quad (4-40)$$

A função que relaciona a energia cinética da plataforma com o seu momento de massa ( $I_p$ ), bem como com a velocidades de rotação da plataforma ( $\dot{\theta}_p$ ) é dada por:

$$T_p = \frac{I_p \dot{\theta}_p^2}{2}. \quad (4-41)$$

A energia cinética relativa a torre ( $T_t$ ) e ao conjunto rotor nacele ( $T_{turb}$ ), é calculada admitindo que os corpos são pontuais, cuja massa se encontra no respectivo CG. Essa consideração é adotada, pois não há um eixo de rotação fixo dessas massas como há para a plataforma. A energia cinética será, portanto:

$$T_t = \frac{1}{2} M_t (\dot{X}_t^2 + \dot{Z}_t^2); \quad (4-42)$$

$$T_{turb} = \frac{1}{2} M_{turb} (\dot{X}_{turb}^2 + \dot{Z}_{turb}^2); \quad (4-43)$$

em que as variáveis  $X$  e  $Z$  representam, respectivamente, a posição horizontal e vertical das massas.

A posição dos CGs é dada por:

$$X_t = (l_2 + l_3) \text{sen}(\theta_p) + l_4 \text{sen}(\theta_t); \quad (4-44)$$

$$Z_t = (l_2 + l_3) \text{cos}(\theta_p) + l_4 \text{cos}(\theta_t); \quad (4-45)$$

$$X_{turb} = (l_2 + l_3) \text{sen}(\theta_p) + (l_4 + l_5) \text{sen}(\theta_t); \quad (4-46)$$

$$Z_{turb} = (l_2 + l_3) \text{cos}(\theta_p) + (l_4 + l_5) \text{cos}(\theta_t). \quad (4-47)$$

Ressalta-se que os únicos valores dependentes do tempo nas equações (4-44) a (4-47) são as rotações  $\theta_p$  e  $\theta_t$  dos graus de liberdade da estrutura.

A energia cinética total do sistema é obtida por substituição das equações (4-41) a (4-43) na (4-38), resultando em:

$$T = \frac{I_p \dot{\theta}_p^2}{2} + \frac{1}{2} M_t \left( (l_2 + l_3)^2 \dot{\theta}_p^2 + l_4^2 \dot{\theta}_t^2 + 2l_4(l_2 + l_3) \dot{\theta}_p \dot{\theta}_t \cos(\theta_t - \theta_p) \right) \quad (4-48)$$

$$+ \frac{1}{2} M_{turb} \left( (l_2 + l_3)^2 \dot{\theta}_p^2 + (l_4 + l_5)^2 \dot{\theta}_t^2 + 2(l_4 + l_5)(l_2 + l_3) \dot{\theta}_p \dot{\theta}_t \cos(\theta_t - \theta_p) \right).$$

O Lagrangeano para o sistema conservativo considerado é (THOMSON; DAHLEH, 1998):

$$L_g = T - \Delta\Pi. \quad (4-49)$$

O funcional de energia não linear  $J$  para o sistema estrutural torre mais plataforma tem a seguinte forma (THOMSON; DAHLEH, 1998):

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L_g(\theta_p, \theta_t, \dot{\theta}_p, \dot{\theta}_t, t) dt. \quad (4-50)$$

Utilizando técnicas variacionais, chega-se no sistema de Euler-Lagrange a seguir (THOMSON; DAHLEH, 1998):

$$\frac{\partial L_g}{\partial \theta_p} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_g}{\partial \dot{\theta}_p} \right) = 0; \quad (4-51)$$

$$\frac{\partial L_g}{\partial \theta_t} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_g}{\partial \dot{\theta}_t} \right) = 0. \quad (4-52)$$

As equações não lineares resultantes são acopladas nos termos inerciais, com produtos cruzados nos termos de velocidades, e que por serem muito extensas estão descritas no ANEXO B.

A configuração de equilíbrio estático é caracterizada pelo par de valores  $\theta_{ts}$  e  $\theta_{ps}$ , e substituindo esses valores na equação (4-27) o potencial estático dessa configuração será constante. E, como disposto nas equações (4-49) a (4-52), não interfere nas derivações das equações do movimento. Para a obtenção das equações dinâmicas sem a consideração do efeito da corrente e do vento, basta zerar as rotações estáticas e retirar os termos das força de corrente e do vento.

As equações linearizadas do movimento sem a consideração dos efeitos de corrente e do vento obtidas de (4-51) e (4-52) são escritas como:

$$\begin{aligned}
& ((M_t l_4 (l_2 + l_3) + M_{turb} (l_4 + l_5) (l_2 + l_3)) \ddot{\theta}_t \\
& + (I_p + M_t (l_2 + l_3)^2 + M_{turb} (l_2 + l_3)^2) \ddot{\theta}_p + (E l_2 + K_t) \theta_p \\
& + g ((M_p l_1 - M_t (l_2 + l_3) - M_{turb} (l_2 + l_3)) \theta_p - K_t \theta_t = 0;
\end{aligned} \tag{4-53}$$

$$\begin{aligned}
& (M_t l_4^2 + M_{turb} (l_4 + l_5)^2) \ddot{\theta}_t + (M_t l_4 (l_2 + l_3) + M_{turb} (l_4 + l_5) (l_2 + l_3)) \ddot{\theta}_p \\
& - g (M_t l_4 + M_{turb} (l_4 + l_5)) \theta_t + K_t \theta_t - K_t \theta_p = 0.
\end{aligned} \tag{4-54}$$

#### 4.1.3 EXEMPLO NUMÉRICO

A torre utilizada no modelo aqui adotado consiste numa turbina de referência de 5 MW do National Renewable Laboratory (NREL), cujo financiamento é dado pelo Departamento de Energia dos Estados Unidos, do mesmo modelo apresentado no documento de Jonkman (2010). Sua base está locada 10 m acima do nível do mar, e seu formato é de um cone vazado, no qual o diâmetro e a espessura variam linearmente. Os dados referentes à geometria da torre podem ser vistos na Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades da torre e seus componentes

Propriedades da Torre		
Diâmetro da base	6,50	m
Diâmetro do topo	3,87	m
Espessura da base	0,027	m
Espessura do topo	0,019	m
Altura da torre	77,6	m
Massa específica	8500	Kg/m <sup>3</sup>
Massa do rotor	110000	Kg
Massa do nacele	240000	Kg

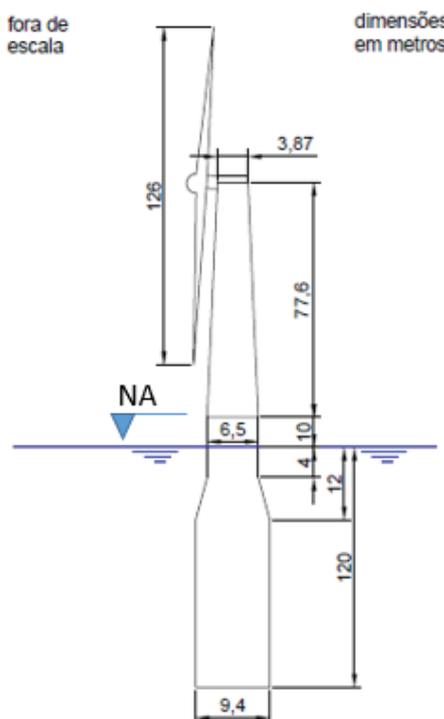
FONTE: (JONKMAN, 2010)

A massa específica efetiva do aço que compõe a torre foi tomada como 8500 kg/m<sup>3</sup>, sendo esse um valor acima do usual de 7850 Kg/m<sup>3</sup> pois estão sendo considerados também: tintas, parafusos, soldas e flanges.

As propriedades geométricas, de massa e de inércia da plataforma foram obtidas do trabalho de Jonkman (2010).

O formato da plataforma consiste na união de dois troncos de cilindro, por um tronco de cone. Na Figura 15 pode-se visualizar, fora de escala, mas com mais clareza as dimensões da estrutura.

Figura 15 – Geometria do sistema torre-plataforma



FONTE: O AUTOR (2020)

A densidade média da plataforma é obtida ao dividir a massa total pelo volume ocupado, e como a estrutura possui grandes quantidades de ar para gerar o efeito de flutuação, sua densidade média é menor, mas ainda assim da mesma ordem de grandeza da água.

Na Tabela 3, estão dispostos os valores utilizados no modelo estrutural.

Tabela 3 – Parâmetros utilizados na análise da estrutura

Símbolo	Parâmetro	Valor	Unidade
$I_{plat}$	Momento de inércia de arfagem da plataforma spar	5,2747E+9	kg.m <sup>2</sup>
$K_t$	Rigidez rotacional da torre	1,548E+9	N.m/rad
$M_p$	Massa da plataforma spar	7,47E+06	kg
$M_t$	Massa da torre	2,496E+05	kg
$M_{turb}$	Massa do conjunto rotor e nacele	3,50E+05	kg
$g$	Aceleração da gravidade	9,81E+00	m/s <sup>2</sup>
$I_A$	Momento de inércia de arfagem adicionada da plataforma spar	1,14E+10	kg.m <sup>2</sup>
$E$	Empuxo	7,913E+07	N
$l_1$	Distância do CG da plataforma até o CG da estrutura	1,183E+01	m
$l_2$	Distância do CG da estrutura até a resultante do empuxo	1,602E+01	m
$l_3$	Distância da resultante do empuxo até a base da torre	7,206E+01	m
$l_4$	Distância da base da torre até o CG da torre	3,34E+01	m
$l_5$	Distância do CG da torre até o CG do conjunto rotor e nacele	4,42E+01	m
$C_A$	Coefficiente adimensional de inércia	1	-
$C_D$	Coefficiente de arrasto	0,6	-
$\rho_w$	Massa específica da água	1025	Kg/m <sup>3</sup>
$z_c$	Distância da resultante da força de corrente à superfície	52,67	m
$z_v$	Distância da resultante da força de vento até a superfície	63,58	m
$H_w$	Profundidade da plataforma	120	m
$H_a$	Distância da superfície até a base da torre	10	m
$H$	Profundidade do oceano	320	m
$\rho_a$	Massa específica do ar	1,3	Kg/m <sup>3</sup>
$l_c$	Distância da resultante da força de corrente até o eixo $O$	25,41	m
$l_v$	Distância da resultante da força de vento até a base da torre	53,58	m

FONTE: Adaptado de (JONKMAN, 2010), (JONKMAN; MUSIAL, 2010)

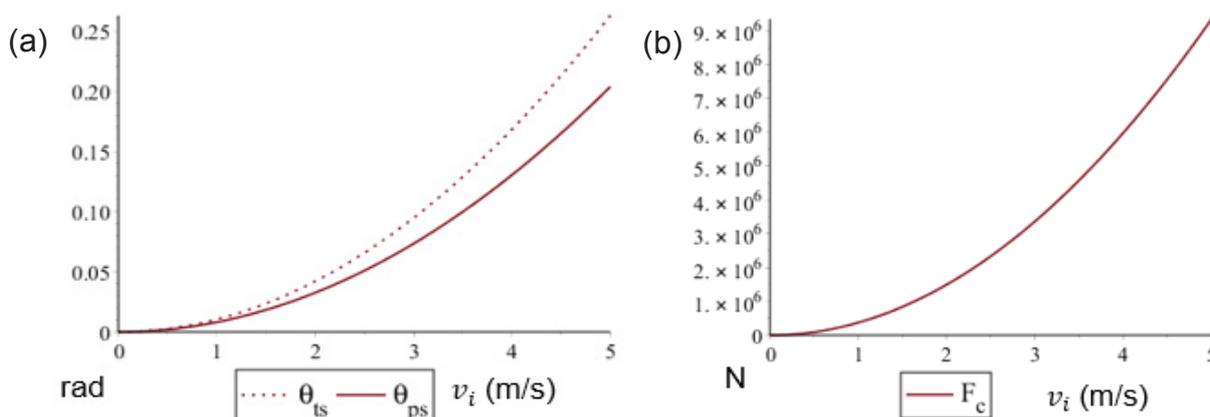
## 4.2 ANÁLISE ESTÁTICA

Nesta etapa é feita a análise estática para se ter uma noção da ordem de grandeza das rotações devido ao efeitos da corrente e do vento, atuando individualmente ou em conjunto.

A posição do ponto de aplicação da força da corrente é calculado resolvendo a equação (4-18). Esse valor é constante para o caso analisado, pois indifere da magnitude das velocidades da corrente, dependendo apenas da razão das velocidades em cada caso, ou seja, do formato da distribuição da velocidade de

corrente, que não se alteram. A Figura 16 mostra um comparativo das rotações com a respectiva velocidade de superfície da corrente, bem como a força resultante. O método de Newton-Raphson foi utilizado para resolver as equações não lineares.

Figura 16 – (a) Rotações estáticas x velocidade de corrente; (b) forças de corrente x velocidade de corrente

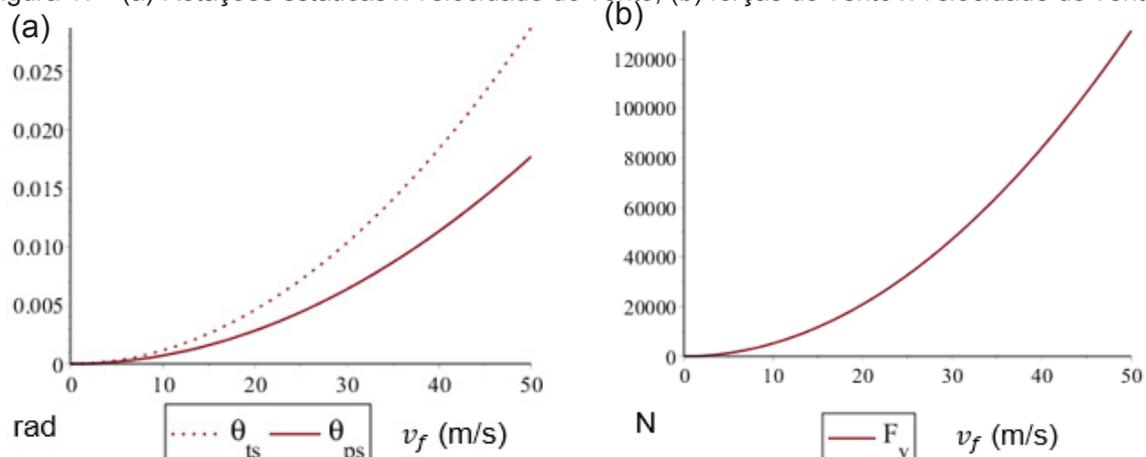


FONTE: O AUTOR (2020)

Percebe-se, analisando a equação (4-17), que a força da corrente é proporcional ao quadrado da velocidade da corrente na superfície, e que as rotações aumentam com o aumento de  $v_i$ . A rotação da torre foi maior em todas as situações analisadas. A velocidade máxima da corrente obtida em trabalhos como o de Yttervik (2004) é de cerca de 1 m/s. Nessa situação a rotação da torre e da plataforma em graus serão de aproximadamente  $0,602^\circ$  e  $0,467^\circ$ , respectivamente.

A força causada pelo vento, analogamente à força da corrente, tem seu ponto de aplicação invariável pela consideração da distribuição das velocidades, e seus efeitos estão representados na Figura 17.

Figura 17 - (a) Rotações estáticas x velocidade do vento; (b) forças do vento x velocidade do vento



FONTE: O AUTOR (2020)

Nota-se que com o aumento da velocidade do vento as rotações aumentam, assim como a força atuante. Em condições extremas do clima, tal qual furacões na região do Golfo do México, a velocidade máxima do vento chega a atingir 44 m/s (CHAKRABARTI, 2005). Na Bacia de Campos, América do Sul, o valor da velocidade chega a 35 m/s (CHAKRABARTI, 2005). Para velocidade do vento de 40 m/s a rotação da torre e da plataforma ficam, respectivamente,  $1,048^\circ$  e  $0,647^\circ$ . Nessa situação a deflexão horizontal causada no topo da torre seria de 2,41 m em relação à configuração indeformada. O sistema começa a gerar energia a partir de velocidades do vento acima de 3 m/s até o limite de 25 m/s (HARRIGER, 2011).

Quando as forças do vento e da corrente atuam em conjunto e com mesmo sentido, as rotações não sofrem aumentos consideráveis, como demonstrado na Tabela 4.

Tabela 4 – Rotações estáticas com efeito do vento e da corrente

$v_i$ (m/s)	$v_f$ (m/s)	$\theta_{ps}$ (rad)	$\theta_{ts}$ (rad)
0,1	10	5,37E-05	8,53E-04
0,5	20	2,15E-04	3,41E-03
1	30	8,60E-04	1,36E-02

FONTE: O AUTOR (2020)

Dentre as 3 combinações realizadas, as maiores rotações para a plataforma e para a torre foram, respectivamente, de  $0,049^\circ$  e  $0,779^\circ$ . Devido ao pequeno valor de rotação, o efeito combinado se aproxima muito da soma dos efeitos isolados da

corrente e do vento, sendo possível, dessa forma assumir um sistema linear para cálculo das rotações estáticas.

### 4.3 ANÁLISE MODAL

A análise modal do problema é realizada, primeiramente, considerando o sistema linear, em seguida, os efeitos da não linearidade são examinados.

#### 4.3.1 MODOS NORMAIS LINEARES

Os modos normais lineares do problema, sem a consideração da atuação da força de corrente e do vento, são obtidos no sistema de equações de movimento linearizadas ao substituírem-se os valores apresentados nas Tabela 2 e Tabela 3 nas equações (4-53) e (4-54), e que, dividindo todos os termos por  $10^9$ , resulta em:

$$2,3861\ddot{\theta}_t + 3,1269\ddot{\theta}_p + 1,1993\dot{\theta}_t - 1,5476\dot{\theta}_p = 0. \quad (4-55)$$

$$3,1269\ddot{\theta}_t + 21,326\ddot{\theta}_p - 1,5476\dot{\theta}_t + 3,16351\dot{\theta}_p = 0. \quad (4-56)$$

As equações (4-55) e (4-56) podem ser escritas matricialmente da forma:

$$\begin{bmatrix} 2,3861 & 3,1269 \\ 3,1269 & 21,326 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_t \\ \ddot{\theta}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,1993 & -1,5476 \\ -1,5476 & 3,16351 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_t \\ \dot{\theta}_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (4-57)$$

Ou, desacoplando os termos das acelerações através da resolução de um sistema de duas equações e duas incógnitas obtido através da regra de Cramer, tem-se:

$$\ddot{\theta}_t - 1,043465651\ddot{\theta}_p + 0,7399029381\dot{\theta}_t = 0; \quad (4-58)$$

$$\ddot{\theta}_p + 0,3013277572\ddot{\theta}_t - 0,1810501123\dot{\theta}_t = 0. \quad (4-59)$$

A solução do sistema é feita ao se resolver o problema de autovalores e autovetores generalizados da equação (4-57). A raiz quadrada dos autovalores correspondem às frequências em rad/s e os autovetores ao respectivos modos de vibração dos MNLs. Na Tabela 5 encontram-se os modos e frequências de vibração do problema linearizado.

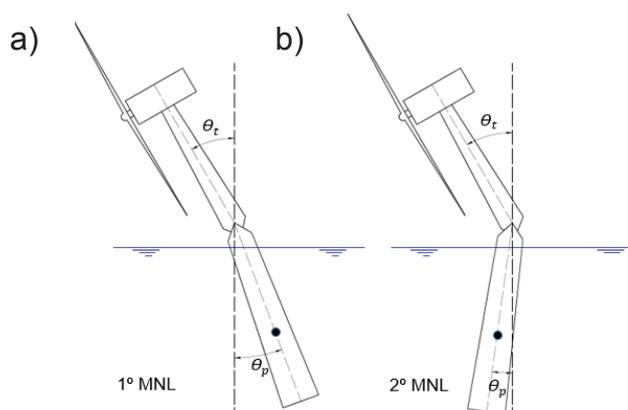
Tabela 5 – Frequências e modos de vibração

Frequência (rad/s)	Modo de vibração	
Primeiro MNL – 0,1838 (0,029252 Hz)	$\theta_p = 0,676707$	$\theta_t = 1$
Segundo MNL – 1,0074 (0,159746 Hz)	$\theta_p = -0,256401$	$\theta_t = 1$

FONTE: O AUTOR (2020)

No modo em fase do sistema (1º MNL), como representado na Figura 18 (a), há uma relação de deslocamento 1,47 vezes maior para o grau de liberdade da torre do que o da plataforma. Para o modo fora de fase do sistema (2º MNL), representado na Figura 18 (b), a relação é de -3,90, valor maior em módulo do que o modo em fase. Para que as respostas de ressonância da estrutura possam ser evitadas, as frequências naturais da estrutura devem estar localizadas distantes das frequências típicas das ondas, que variam de 0,04 a 0,25 Hz (BACHYNSKI, 2018). Para a plataforma Spar analisada, o primeiro modo oscila com frequência inferior à das ondas e o segundo modo está na faixa de frequências das ondas. Uma alternativa para evitar que as frequências naturais estejam nas faixas de frequências das ondas, é a utilização de dispositivos de controle, tal qual o TMD (Tuned Mass Damper).

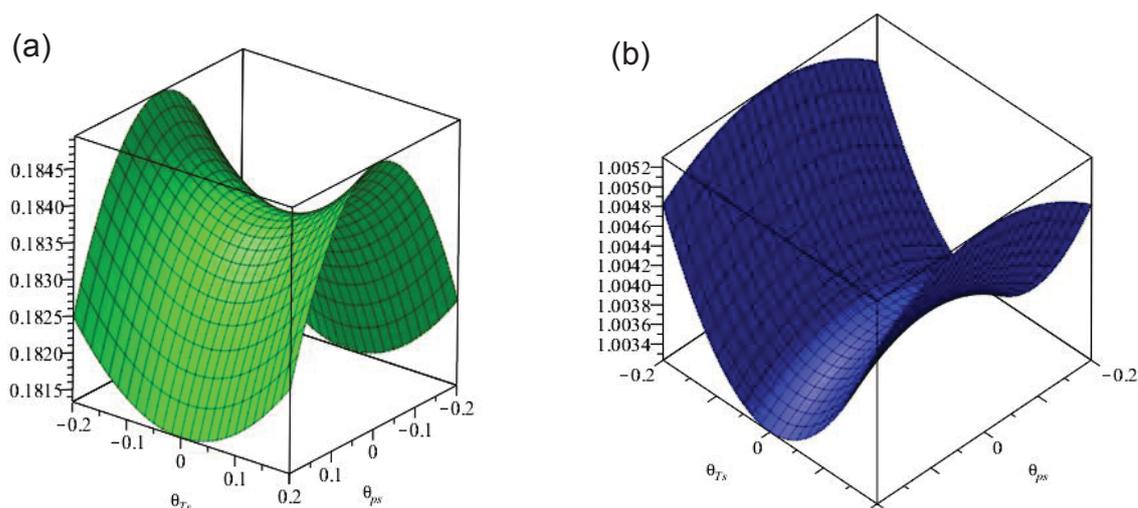
Figura 18 – Modos de vibração: a) 1º MNL; b) 2º MNL



FONTE: O AUTOR (2020)

A seguir, é apresentada na Figura 19 a análise paramétrica da influência das rotações estáticas, ocasionadas pelas forças de corrente e vento, nas frequências de vibração da estrutura no sistema linear.

Figura 19 – Frequências de vibração com rotação estática: (a) frequência para o 1º modo de vibração (b) frequência para o 2º modo de vibração

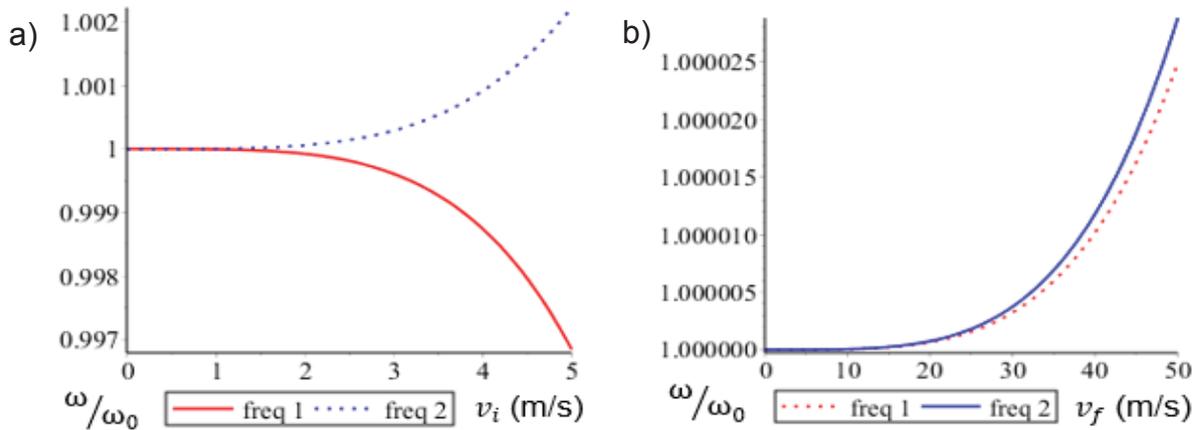


FONTE: O AUTOR (2020)

Ao variar-se estaticamente a rotação do grau de liberdade da torre, houve um pequeno aumento nas frequências dos dois MNLs. O efeito oposto é observado quando se varia a rotação estática da plataforma. Percebe-se que variando as rotações estáticas até 0,2 radianos, valor acima das rotações admissíveis para a estrutura, para ambos os graus de liberdade, as frequências tiveram variações inferiores a 1%, sendo valores desprezíveis para a compreensão adequada da dinâmica do sistema.

Objetivando avaliar a influência da velocidade do vento e da corrente sobre as respectivas frequências de vibração, elaboraram-se os gráficos que estão na Figura 20.

Figura 20 - Frequências de vibração da estrutura normalizadas à respectiva frequência, quando sujeita a: a) velocidade de corrente; b) velocidade de vento



FONTE: O AUTOR (2020)

Na presença de corrente, a primeira frequência de vibração diminui e a segunda aumenta, já na presença de vento, ambas as frequências sofrem acréscimo. A variação em relação às frequências originais do sistema sem rotações estáticas, é muito pequena, podendo ser considerada desprezível no domínio físico de análise.

#### 4.4 MODOS NORMAIS NÃO LINEARES

O método assintótico com abordagem baseada na definição das variedades invariantes é utilizado para a obtenção dos modos normais não lineares. Seleciona-se inicialmente o grau de liberdade de rotação da plataforma como par mestre das variedades invariantes:

$$\theta_p = u, \dot{\theta}_p = v. \quad (4-60)$$

Por consequência o par escravo é relativo ao grau de liberdade da torre, sendo descrito por relações de restrição como:

$$\theta_t = P_2(u, v), \dot{\theta}_t = Q_2(u, v); \quad (4-61)$$

onde  $P_2$  e  $Q_2$  são funções de restrição. A existência de modos similares, os quais são representados no espaço configuração do sistema como retas, está ligada a presença

de certas condições de simetria no sistema. Como os parâmetros do sistema não geram as condições de simetria necessárias, foram identificados apenas modos normais não similares.

Inserindo as funções de restrições  $P_2$  e  $Q_2$  nas equações das variedades invariantes, já mostradas nas equações (3-24) e (3-25), na qual já está eliminada a dependência explícita do tempo, e que para sistemas de dois graus de liberdade é da seguinte forma:

$$Q_2(u, v) = \frac{\partial P_2(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial P_2(u, v)}{\partial v} f_1(u, P_2(u, v), v, Q_2(u, v)); \quad (4-62)$$

$$f_2(u, P_2(u, v), v, Q_2(u, v)) = \frac{\partial Q_2(u, v)}{\partial u} v + \frac{\partial Q_2(u, v)}{\partial v} f_1(u, P_2(u, v), v, Q_2(u, v)); \quad (4-63)$$

onde a função  $f_1$  representa o termo da aceleração do grau de liberdade mestre ( $\ddot{\theta}_p$ ), que é função das coordenadas e velocidades dos graus de liberdade da estrutura.

Para a análise da não linearidade, escolheu-se para as funções de restrição polinômios até o terceiro grau, pois geralmente essa quantidade de termos já é, num primeiro momento, suficiente para estruturas offshore, como utilizado nos trabalhos de Gavassoni (2012) e Jung e Gavassoni (2015). O polinômio é função dos termos não lineares,  $c_{i,j}$  e  $d_{i,j}$ , tal que:

$$P_2 = c_{1,2}u + c_{2,2}v + c_{3,2}u^2 + c_{4,2}uv + c_{5,2}v^2 + c_{6,2}u^3 + c_{7,2}u^2v + c_{8,2}uv^2 + c_{9,2}v^3. \quad (4-64)$$

$$Q_2 = d_{1,2}u + d_{2,2}v + d_{3,2}u^2 + d_{4,2}uv + d_{5,2}v^2 + d_{6,2}u^3 + d_{7,2}u^2v + d_{8,2}uv^2 + d_{9,2}v^3. \quad (4-65)$$

Desconsiderando-se os efeitos de força de vento e corrente e o efeito do amortecimento, ao expandir-se por série de Taylor até o termo cúbico as equações (0-8) e (0-9) do movimento descritas no ANEXO B, o termo inercial da plataforma e da torre são dados por:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_p = & 0,18105\theta_t - 0,30132\theta_p - 0,23783\dot{\theta}_p^2\theta_p + 0,23783\dot{\theta}_p^2\theta_t - 0,18149\dot{\theta}_t^2\theta_p \\ & + 0,18149\dot{\theta}_t^2\theta_t + 0,14615\theta_p^3 - 0,34971\theta_t\theta_p^2 + 0,30786\theta_t^2\theta_p \\ & - 0,08425\theta_t^3 = f_1(u, P_2(u, v), v, Q_2(u, v)) \end{aligned} \quad (4-66)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_t = & -0,73990\theta_t + 1,04346\theta_p + 1,62214\dot{\theta}_p^2\theta_p - 1,62214\dot{\theta}_p^2\theta_t \\ & + 0,23784\dot{\theta}_t^2\theta_p - 0,23784\dot{\theta}_t^2\theta_t - 0,38897\theta_p^3 + 0,9718\theta_t\theta_p^2 \\ & - 0,83815\theta_t^2\theta_p + 0,20472\theta_t^3 = f_2(u, P_2(u, v), v, Q_2(u, v)) \end{aligned} \quad (4-67)$$

Substituindo as aproximações das funções de restrição nas equações (4-66) e (4-67), depois nas equações diferenciais parciais que governam as variedades invariantes (4-62) e (4-63), e resolvendo sequencialmente o sistema de equações algébricas resultantes da expansão polinomial, determinam-se as incógnitas  $c_{i,j}$  e  $d_{i,j}$ . As funções de restrição para o primeiro MNNL são dadas por:

$$P_2 = 1,477743723u - 0,4870246366uv^2 - 0,1825527918u^3; \quad (4-68)$$

$$Q_2 = 1,477743723v - 0,4870246366v^3 - 0,5147529552u^2v. \quad (4-69)$$

Analisando os termos lineares das equações (4-68) e (4-69), ambos são iguais a 1,4777 e indicam a proporção, do deslocamento de rotação entre os graus de liberdade da torre com o da plataforma no primeiro modo de vibração linear. Os termos não lineares são de ordem cúbica, apresentado coeficientes negativos e menores em módulo que os coeficientes dos termos lineares.

A substituição das variáveis de rotação representada pelas equações (4-68) e (4-69) na equação (4-66) resulta no seguinte oscilador modal:

$$\ddot{u} + 0,033782u + 0,0032908u^3 - 0,214791u(\dot{u}^2) = 0. \quad (4-70)$$

O oscilador modal de ordem reduzida apresenta dois termos não lineares de grau ímpar, termos mistos de velocidade x deslocamento, e em seu termo linear o coeficiente é o quadrado da primeira frequência de vibração linear da estrutura.

As funções de restrição para o segundo modo ficam:

$$P_2 = -3,9000140348u - 4,331301972u^3 + 0,8037689654uv^2 \quad (4-71)$$

$$Q_2 = -3,9000140348v - 14,61341776u^2v + 0,8037689654v^3 \quad (4-72)$$

Novamente, observa-se que os termos lineares das equações (4-71) e (4-72) são iguais, e relacionam, agora, com o segundo modo linear de vibração a proporção dos deslocamentos de rotação. Os termos não lineares também são de ordem cúbica, porém com coeficientes em módulo maior do que aqueles apresentados pelas funções de restrição do primeiro MNL, fato que sugere a presença maior de efeitos não lineares.

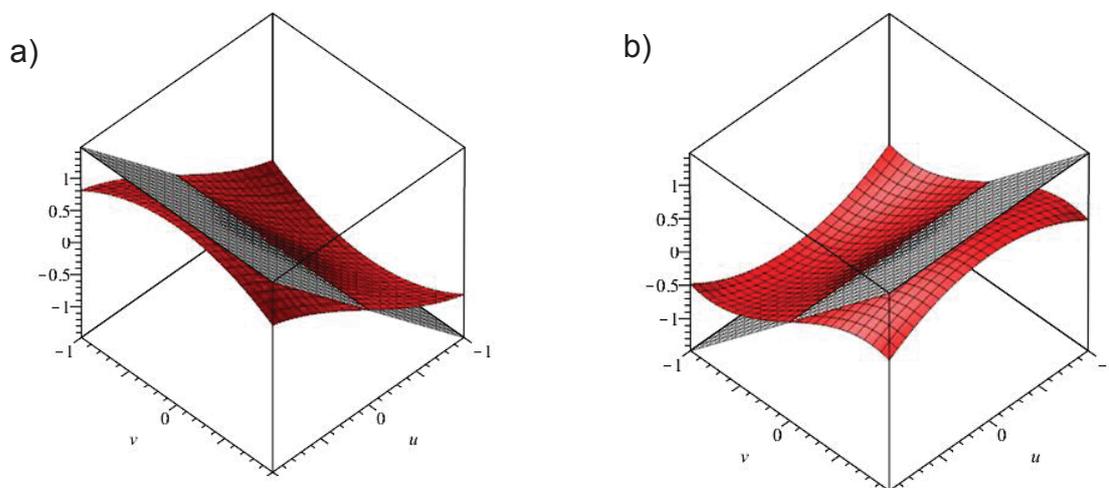
Substituindo as equações (4-71) e (4-72) na equação expandida (4-66), chega-se no seguinte oscilador modal:

$$\ddot{u} + 1,007448u - 10,4076u^3 + 14,54758u(\dot{u}^2) = 0. \quad (4-73)$$

O oscilador modal definido na equação (4-73), apresenta sinais contrários nos termos não lineares do apresentado na equação (4-70), porém seus coeficientes possuem módulos maiores, indicando mais fortes sinais de não linearidade. O termo linear, bem como o do oscilador modal anterior, é referente à frequência linear da estrutura.

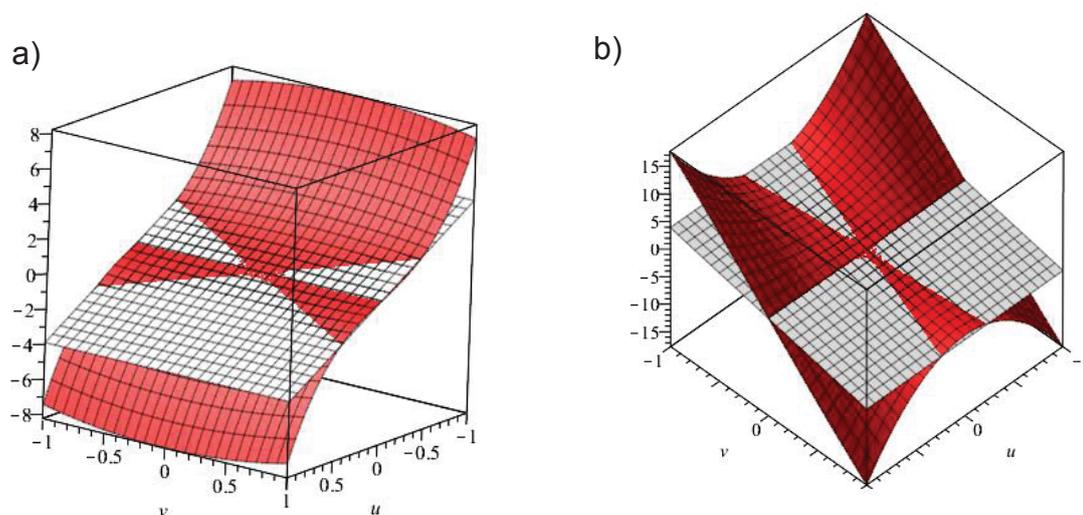
Devido ao fato dos termos lineares das equações (4-70) e (4-73) serem relativos à frequência linear, ao se linearizarem as equações dos osciladores modais, chegam-se nas mesmas equações do movimento do sistema linear desacoplado com o uso das coordenadas modais lineares do sistema. E, portanto, a superfície correspondente ao espaço fase do sistema não linear é tangente no ponto de equilíbrio, com o plano proveniente da análise linear. Na Figura 21 e Figura 22 estão representadas em vermelho as superfícies das equações de restrições definidas por (4-68), (4-69), (4-71) e (4-72) e em branco as correspondentes respostas se o sistema fosse analisado linearmente.

Figura 21 – Superfícies comparativas entre o 1º MNNL e 1º MNL: a) equação (4-68); b) equação (4-69)



FONTE: O AUTOR (2020)

Figura 22 - Superfícies comparativas entre o 2º MNNL e 2º MNL: a) equação (4-71); b) equação (4-72)



FONTE: O AUTOR (2020)

Como previsto, e facilmente identificáveis visualmente, as superfícies provenientes das variedades invariantes com as originadas da análise linear são tangentes entre si em torno da configuração de equilíbrio. Os efeitos da não-linearidade são mais facilmente perceptíveis nos gráficos das funções de restrição do segundo modo normal não-linear. As funções de restrição do primeiro modo normal não-linear se assemelham a um plano para faixas maiores de deslocamentos e

velocidades do grau de liberdade mestre. Portanto, é esperado um comportamento não linear mais perceptível para o segundo MNNL.

#### 4.4.1 VIBRAÇÃO LIVRE

Os modos normais não lineares se constituem de uma ferramenta útil para o estudo da vibração livre do sistema. Como primeira análise verificou-se o comportamento do sistema, rotações dos graus de liberdade da torre e da plataforma, quando excitado nos seus MNNL.

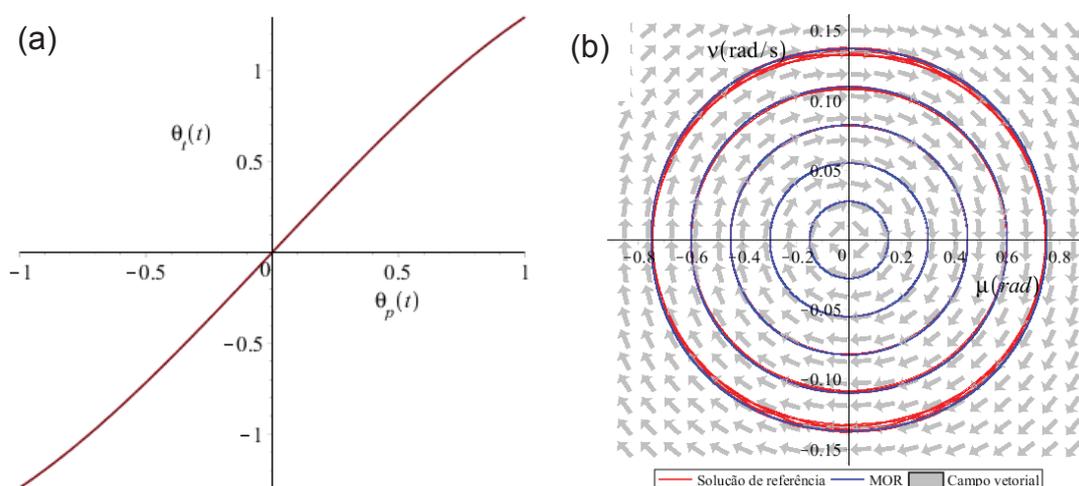
A resposta no tempo dos modos normais não lineares se assemelham em forma à resposta dos modos normais lineares, ou seja, as rotações aparentam seguir uma função harmônica. Quanto menor a amplitude de excitação, mais próximas da análise modal linear será a resposta do sistema não linear.

Deve-se ter a devida precaução ao se excitar o determinado modo normal não linear para que amplitude não atinja valores fisicamente irreais, onde as hipóteses adotadas no modelo estrutural não são mais válidas. Os pares de valores da excitação inicial do sistema, devem satisfazer as relações definidas em (4-68) e (4-69) para o primeiro MNNL e as relações (4-71) e (4-72) para o segundo MNNL.

O limite físico de rotação da estrutura não deve ser grande, pois ocasionará danos e não permitirá o adequado funcionamento. É comum em dimensionamentos desse tipo de plataforma, adotar-se rotações máximas da ordem  $5^\circ$  (0,0873 rad) (PHAM; SHIN, 2019).

Para compreender e estudar o comportamento dos MNNLs, como a resposta no tempo, o seu formato e a validade dos modelos de ordem reduzida, foram geradas respostas no tempo, espaço configuração e planos fases. Para o primeiro MNNL, as respostas estão na Figura 23.

Figura 23 –Comportamento do primeiro MNNL (a) espaço configuração; (b) plano fase



FONTE: O AUTOR (2020)

Observa-se um comportamento quase linear no sistema. O espaço configuração da estrutura tem uma pequena curvatura ao atingir rotações elevadas, se aproximando de uma reta para rotações pequenas, tal qual é indicado na Figura 23 (a).

A validade do modelo de ordem reduzida não é conhecida a priori, devendo-se comparar os osciladores modais com as respectivas soluções de referência, que são as respostas das soluções numéricas do sistema de equações diferenciais.

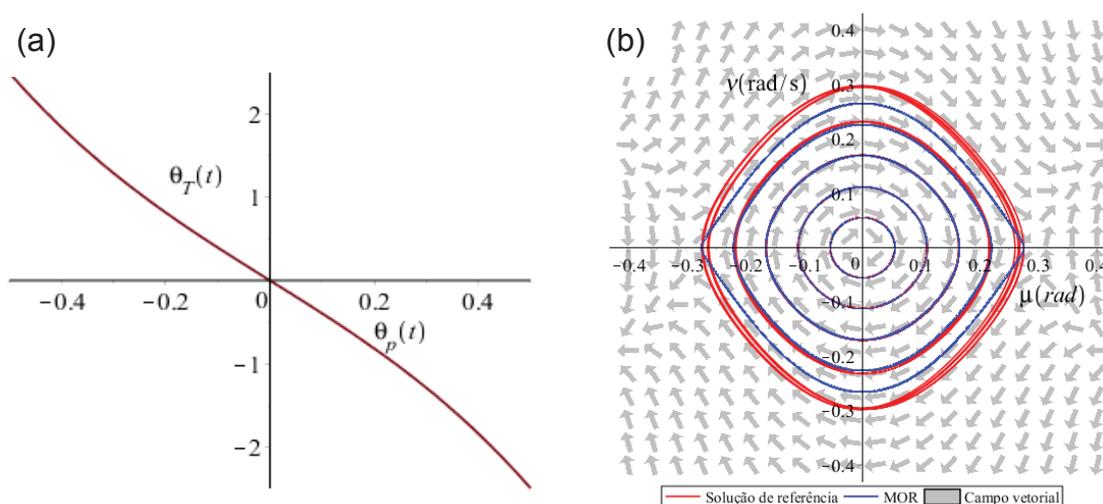
Em sistemas lineares sem amortecimento o plano fase quando excitado num MNL é fechado, elíptico e periódico, indicando um movimento harmônico simples, e que não apresenta trocas de energia entre os modos de vibração. Os MNNL, como definidos anteriormente, são também oscilações periódicas, logo sua curva deverá ser fechada. Entretanto o seu formato poderá não ser mais elíptico, fato que indica sua não linearidade.

Buscando analisar qual a validade do modelo de ordem reduzida frente a resposta da integração numérica do problema, gerou-se planos fases para o respectivo MNNL. É possível perceber na Figura 23 (b) que ao se aumentar a excitação inicial da vibração livre, aumenta-se a discrepância entre as curvas. As curvas da integração numérica que antes eram praticamente coincidentes com a do oscilador modal, começam a se afastar, mostrando que a utilização das equações de restrição para determinação dos MNNLs perderam a concordância com o sistema real.

No plano fase da Figura 23 (b), percebe-se uma boa concordância entre a resposta obtida numericamente das equações originais do problema com o modelo de ordem reduzida, atingindo valores além da validade física do sistema. Seu formato é muito próximo de uma elipse para pequenas rotações, apontando forte comportamento linear.

Para o segundo MNNL, as respostas para vibração livre sem corrente e sem vento estão apresentadas na Figura 24.

Figura 24 - Comportamento do segundo MNNL (a) espaço configuração; (b) plano fase

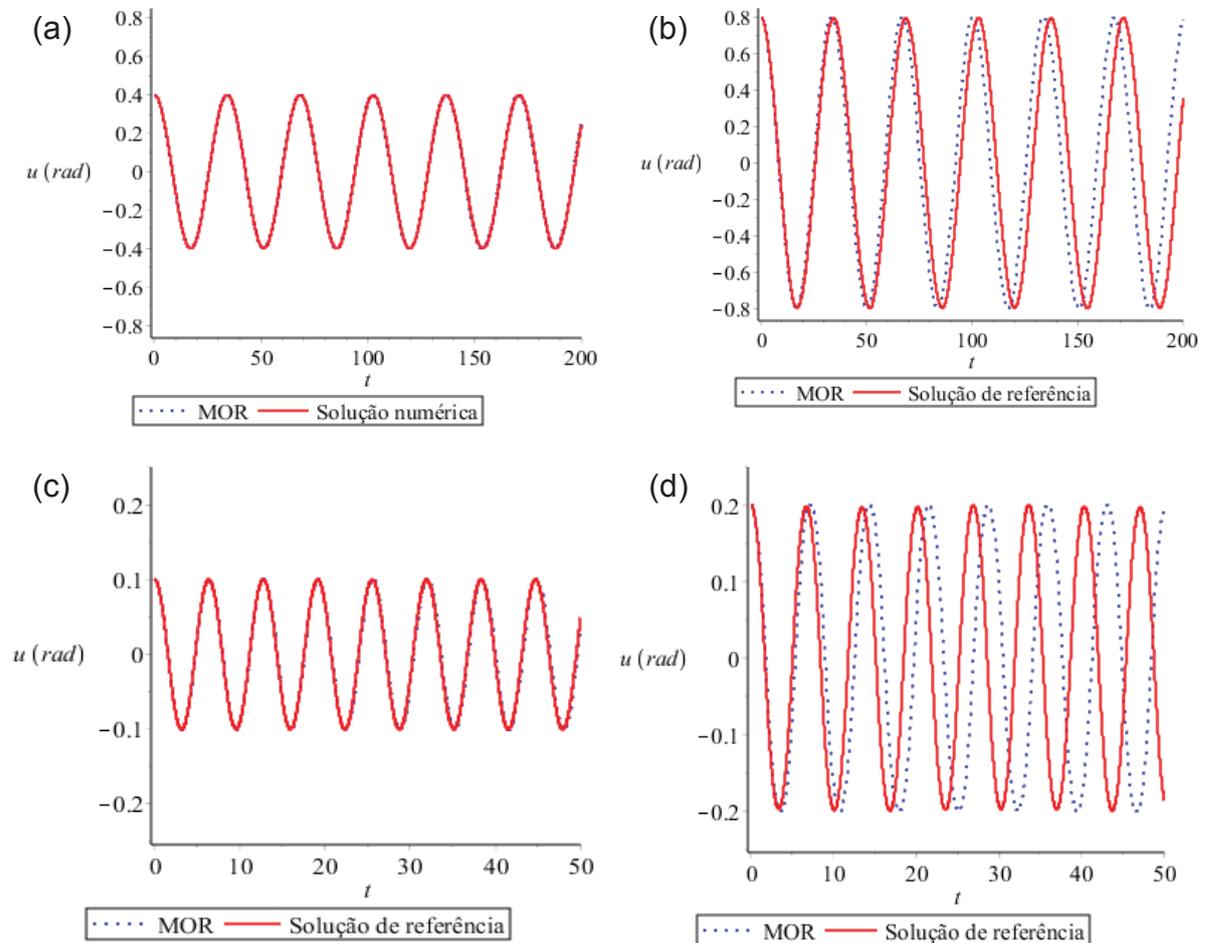


FONTE: O AUTOR(2020)

Analogamente ao primeiro, o segundo MNNL se aproxima do sistema linear para rotações pequenas, valendo-se das mesmas considerações feitas anteriormente. A diferença principal é a menor concordância entre o MOR e a solução de referência devido a maior não linearidade do movimento da estrutura no segundo modo. Embora para o domínio de validade física, a resposta é muito próxima entre a solução numérica e a do oscilador modal, confirmando que o modelo pode ser utilizado em fases de pré projeto ajudando os engenheiros a detectar fenômenos não lineares de importância à segurança operacional das plataformas e também para quais conjuntos paramétricos tais condições são prejudiciais.

A comparação por meio dos planos fases não fornece relações diretas acerca da diferença de frequência de vibração no sistema utilizando as equações originais com as provenientes dos MORs. Dessa forma, elaborou-se os gráficos presentes na Figura 25.

Figura 25 – Resposta no tempo utilizando as equações originais com os MORs com velocidades nulas dos GLs: Primeiro MNNL com condição inicial do GL mestre de: (a) 0,4 rad; (b) 0,8 rad; Segundo MNNL com condições iniciais do GL mestre de: (c) 0,1 rad; (d) 0,2 rad



FONTE: O AUTOR(2020)

Percebe-se que para o oscilador modal referente ao primeiro MNNL, a frequência do modelo reduzido é maior que a solução de referência, entretanto para o segundo MNNL ocorre o oposto. As diferenças nas frequências de oscilação só começam a ser significativas com valores altos de rotações, acima do domínio de validade física ( $5^\circ$  de rotação).

Ao analisar o plano fase comparativo entre as soluções de referência com os MORs de trajetórias com mesmas condições iniciais de movimento (apenas componentes de rotação, velocidade zero), terá maior frequência a resposta que apresentar no plano fase órbita mais externa. Ou seja, as órbitas internas, por possuírem menores valores de velocidade, demorarão mais tempo para fechar um ciclo, desse modo seu período é maior.

Nos sistemas lineares, a frequência de vibração permanece a mesma quando se varia a amplitude do movimento, já para os sistemas não lineares essa correspondência não é mais válida. Buscando-se determinar a curva frequência-amplitude para cada modo de vibrar utilizou-se o método do balanço harmônico no MOR.

A ideia principal por trás do método é “balancear” os diferentes termos harmônicos surgidos nas equações do movimento devido a não-linearidade. Uma abordagem comum é negligenciar os termos de alta ordem, resolvendo desse modo um problema fundamental (SILLER, 2004). Com o desenvolvimento de novas tecnologias, houve um aumento do desenvolvimento utilizando a abordagem dos multi-harmônicos, rendendo resultados mais precisos, mas demandando maior custo computacional (SILLER, 2004).

Esse método pode dar indicativos de perda ou ganho de rigidez no sistema. Ganho de rigidez ocorre quando a resposta do sistema apresenta um aumento da frequência com um aumento da amplitude, e perda de rigidez quando a frequência diminui com o aumento da amplitude.

Nesse trabalho utilizou-se o método do balanço harmônico para uma primeira estimativa, assumindo para as equações de modelo reduzido dos modos normais não-lineares (4-70) e (4-73) a seguinte aproximação para a solução geral:

$$u(t) = X_1 \cos(\omega t); \quad (4-74)$$

em que  $X_1$  é a amplitude e  $\omega$  é a frequência da resposta estimada.

Substituindo nos osciladores modais a relação (4-74) e aplicando relações trigonométricas disposta no **Anexo A**, chega-se numa equação a qual possui termos periódicos entre si dentro da função cosseno. Esse fato, viola a imposição inicial de que o movimento é não ressonante, e conforme o método do balanço harmônico indica, são ignorados os termos de mais alta ordem.

Impondo, portanto, condição que os coeficientes que multiplicam a função  $\cos(\omega t)$  devem ser zeros (JORDAN; SMITH, 2007), e, utilizando ainda, a variável adimensional  $\Omega$ , definida por:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad (4-75)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência do respectivo modo de vibração.

É possível, enfim, obter as curvas frequência-amplitude para cada modo similar.

A solução de referência para o sistema não linear foi obtida por integração numérica para se comparar com a resposta utilizando o método do balanço harmônico. Para se calcular a curva frequência x amplitude, inicialmente dispunha o sistema com condições iniciais no modo de vibração não linear correspondente, e por integração numérica geravam-se as respostas do sistema no tempo. Designando  $A_p$  como a média de dois valores sucessivos de amplitude positiva nos respectivos tempos  $t_1$  e  $t_2$ , e denominando  $A_n$  como o valor do pico negativo entre as amplitudes positivas, a amplitude de referência é calculada por:

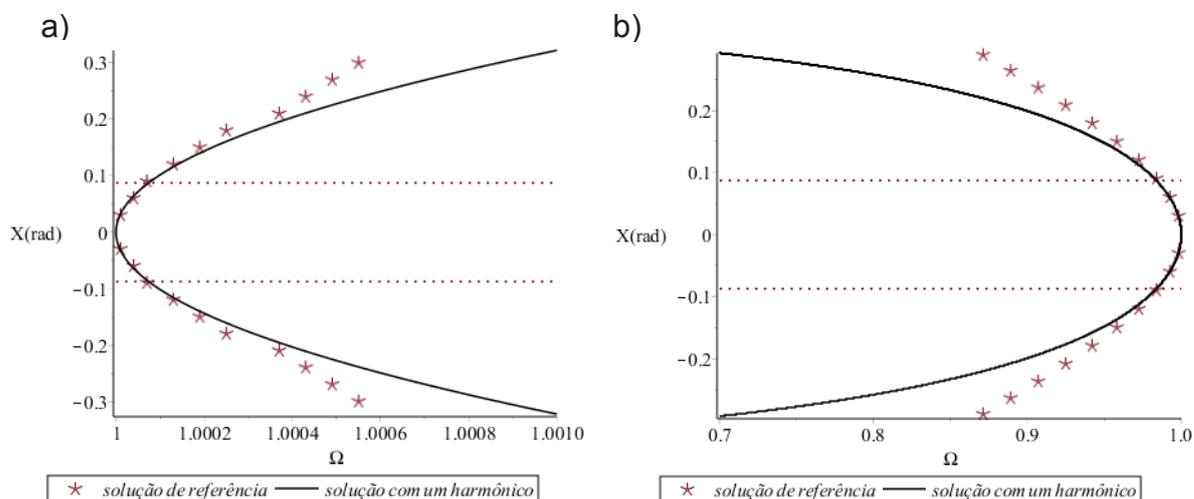
$$A = \frac{(A_p - A_n)}{2}. \quad (4-76)$$

O período de oscilação ( $T_0$ ) é definido como:

$$T_0 = t_2 - t_1. \quad (4-77)$$

Na Figura 26 estão representados comparativamente as soluções de referência com as respostas obtidas dos osciladores modais. Observa-se que, para ambos os modos os valores até 0,2 rad do grau mestre apresentaram boa conformidade, bem acima dos limites de serviço aceitos para turbinas eólicas.

Figura 26 – Relação frequência x amplitude utilizando o método do balanço harmônico: a) 1º MNNL; b) 2º MNNL



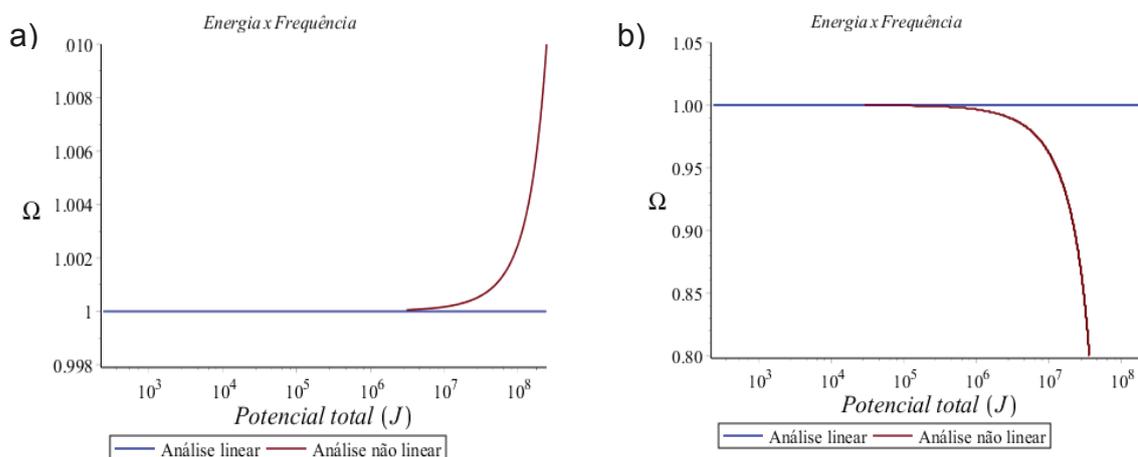
FONTE: O AUTOR (2020)

Percebe-se que para o primeiro MNNL ocorre um aumento de rigidez do sistema, isto é, a frequência de vibração aumenta com a amplitude do movimento. No segundo MNNL, verifica-se o oposto, o sistema perde rigidez, sinalizando que para excitações maiores, a frequência diminui. Ambas as curvas são simétricas, uma vez que a não linearidade é decorrente apenas de termos ímpares nos osciladores modais.

A variação da frequência foi proporcionalmente mais acentuada para o segundo MNNL, variando-se até 2% para amplitudes de até  $5^\circ$ . O primeiro MNNL sofre pequenas variações, não chegando a 0,01% da frequência do sistema linear.

A energia do sistema é calculada substituindo a solução admitida pelo método do balanço harmônico na equação da energia potencial total, disposta na equação (4-27). A variação da energia do sistema é mostrada com eixos logarítmicos na Figura 27, nela também estão representados a energia do sistema caso a análise fosse linear, nessa situação a reta é horizontal com ordenada  $\Omega$  igual a 1.

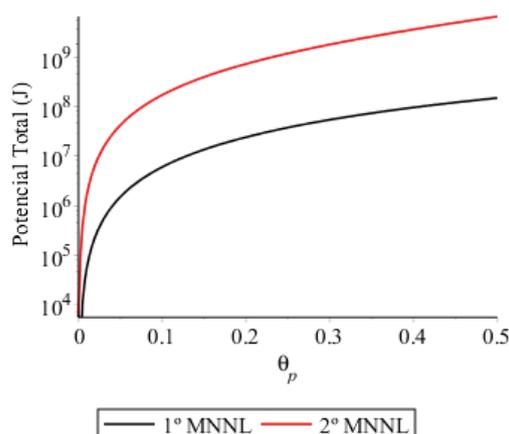
Figura 27 – Curvas frequência – energia: a) 1º MNNL; b) 2º MNNL



FONTE: O AUTOR (2020)

Observa-se que com o aumento da energia para o primeiro MNNL, aumenta-se também a frequência de vibração, o fenômeno oposto ocorre para o segundo MNNL. Esse fato já era esperado, pois para a energia potencial total do sistema aumentar, deve-se aumentar as rotações dos graus de liberdade da estrutura, esse fenômeno está ilustrado na Figura 28.

Figura 28 – a) Energia potencial total x grau de liberdade mestre



FONTE: O AUTOR (2020)

Analisando a Figura 28 (a), a energia potencial total do segundo MNNL aumenta mais rapidamente que a do primeiro. O único ponto que apresenta energia potencial total nula é justamente quando ambos os graus de liberdade não sofrem deslocamentos.

#### 4.4.2 VIBRAÇÃO FORÇADA AMORTECIDA

O entendimento do comportamento dinâmico de uma estrutura offshore quando sujeita à vibração forçada é necessário, pois ela estará sujeita à cargas dinâmicas e cíclicas durante o seu período de utilização. Nesse contexto, uma importante propriedade dos MNNLs refere-se à aplicação em oscilações forçadas, que analogamente aos sistemas lineares, ocorrem na vizinhança do modos normais não-lineares (VAKAKIS et al., 1996). Assim o entendimento dos MNNLs de uma estrutura pode fornecer informações sobre a ressonância da estrutura, característica importante na engenharia (VAKAKIS, 1997).

Nesta seção será feito um estudo preliminar empregando excitações do tipo harmônica nos osciladores modais obtidos com os modos normais não forçados, para simular o efeito das cargas de ondas. Essa simplificação é devido à complexidade das expressões da teoria de ondas planas, sendo comum que no estudo preliminar se utilizem vibrações dessa categoria, como no trabalho de Zwierzikowski (2019)

Utilizando-se os MORs até os termos de ordem cúbica, e incluindo pequenas quantidades de amortecimento proporcional para simular o comportamento da estrutura quando a energia do sistema se dissipa, ou seja, o sistema é não conservativo. Utilizando o modelo de amortecimento proporcional, seu coeficiente é dado por  $2\omega_n\xi$  (CHOPRA, 2012), sendo que para  $\xi$  maiores que 1, o sistema volta ao equilíbrio sem oscilação, e  $\omega_n$  representa a frequência de vibração relativa àquele modo. Dessa forma, resultam-se nas seguintes equações para o primeiro e segundo modo normal não linear:

$$\ddot{u} + 0,03378u + 0,00329u^3 - 0,21479\dot{u}^2u + 2\omega_n\xi\dot{u} = F_0 \cos(\omega t); \quad (4-78)$$

$$\ddot{u} + 1,00745u - 10,40760u^3 + 14,54758\dot{u}^2u + 2\omega_n\xi\dot{u} = F_0 \cos(\omega t); \quad (4-79)$$

O método do balanço harmônico é utilizado, para ambos os modos normais não lineares, com a seguinte solução aproximada:

$$u = X_1 \cos(\omega t) + X_2 \sin(\omega t). \quad (4-80)$$

Utilizando as relações trigonométricas descritas no anexo A e agrupando os termos dos primeiros harmônicos das funções seno e cosseno, tem-se para o primeiro modo o seguinte sistema de equações algébricas:

$$0,36760\xi\omega X_2 + [0,0333782 + 0,002468X^2 - (1 + 0,053697X^2)\omega^2]X_1 = F_0; \quad (4-81)$$

$$0,36760\xi\omega X_1 + [0,0333782 + 0,002468X^2 - (1 + 0,053697X^2)\omega^2]X_2 = 0; \quad (4-82)$$

considerando uma nova variável, função de  $X_1$  e  $X_2$ , dada por:

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad (4-83)$$

Elevando as equações (4-81) e (4-82) ao quadrado e adicionando-as, chega-se a uma relação frequência-amplitude para o sistema forçado amortecido do primeiro modo de vibração.

$$\{0,135132\xi^2\omega^2 + [0,0333782 + 0,002468X - (1 + 0,053697X^2)\omega^2]^2\}X^2 = F_0^2. \quad (4-84)$$

O procedimento descrito anteriormente foi usado também para se obter analiticamente a relação frequência-amplitude do segundo modo, que é descrita a seguir:

$$\{4,059810\xi^2\omega^2 + [1,00744 - 7,80570X - (1 - 3,63689X^2)\omega^2]^2\}X^2 = F_0^2 \quad (4-85)$$

As equações (4-84) e (4-85) podem ser usadas para analisar o comportamento da estrutura frente a diferentes valores de amortecimento e de amplitude de carga externa.

Definiu-se também o parâmetro adimensional  $\Omega_f$ , dado por:

$$\Omega_f = \frac{\Omega_e}{\Omega_n}; \quad (4-86)$$

onde  $\Omega_f$  é a razão entre a frequência da carga externa ( $\Omega_e$ ) e a respectiva frequência natural do modo de vibração de cada oscilador ( $\Omega_n$ ).

O parâmetro de carga  $F_0$  é normalizado em relação à aceleração da plataforma. O vetor de forças da equação (4-57) não é mais considerado nulo, e sim, com uma força atuando no grau de liberdade da plataforma:

$$\begin{bmatrix} 2,3861 & 3,1269 \\ 3,1269 & 21,326 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_t \\ \ddot{\theta}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,1993 & -1,5476 \\ -1,5476 & 3,16351 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_t \\ \theta_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{M_0}{10^9} \cos(\omega t) \end{Bmatrix}; \quad (4-87)$$

onde  $M_0$  representa o momento atuante na estrutura.

Desacoplando os termos inerciais, ao se resolver o sistema de duas equações e duas incógnitas, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_t \\ \ddot{\theta}_p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,73990 & -1,04346 \\ -0,18105 & 0,30132 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_t \\ \theta_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{7,60612M_0}{10^{11}} \cos(\omega t) \\ \frac{-5,80415M_0}{10^{11}} \cos(\omega t) \end{Bmatrix} \quad (4-88)$$

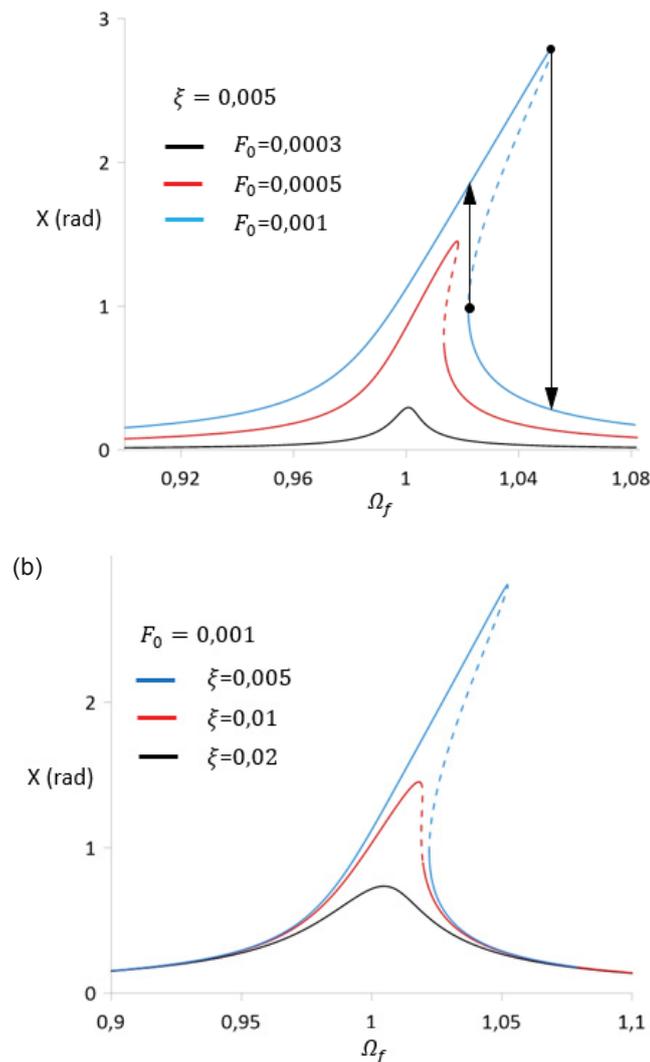
Dessa forma, as variáveis  $F_0$  e  $M_0$  relacionam-se por:

$$M_0 = F_0 \times -1,7229 \times 10^{10} \quad (4-89)$$

Na Figura 29 estão representadas a influência do fator de amortecimento e da amplitude da carga externa, respectivamente, nas curvas de ressonância para movimentos no primeiro modo não linear de vibração.

Figura 29 – Curva de ressonância modo 1: (a) efeito da amplitude de carga externa; (b) efeito do amortecimento

(a)



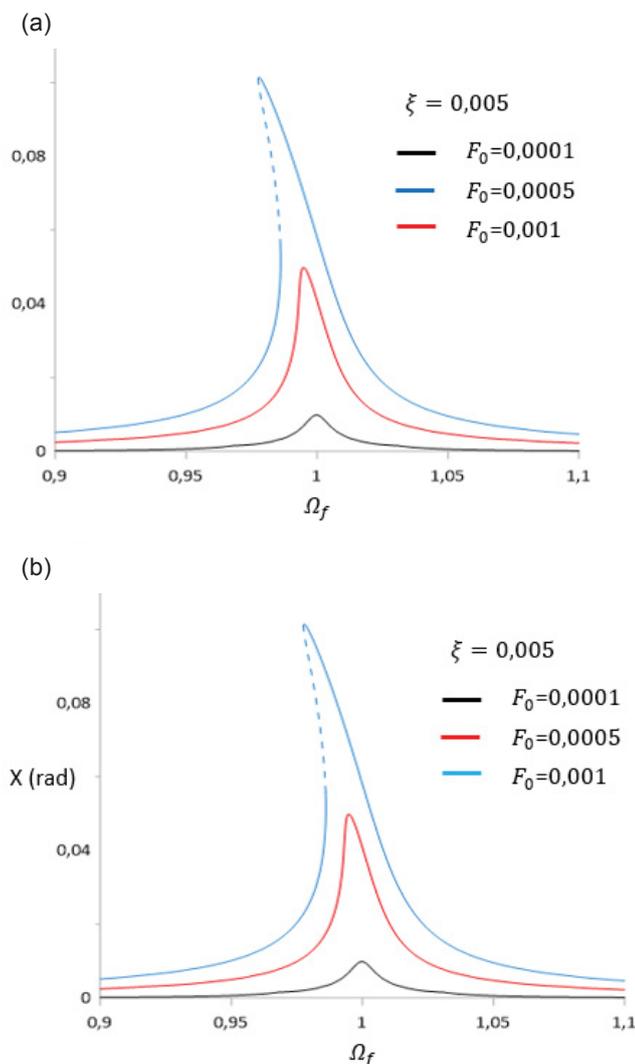
FONTE: O AUTOR(2020)

O salto dinâmico é um fenômeno exclusivo de sistemas não lineares, sendo identificados quando se tem duas soluções para o mesmo valor de frequência. O salto dinâmico se traduz fisicamente por mudanças bruscas na amplitude do movimento para pequenas variações na frequência da força de excitação externa (GAVASSONI, 2012). Na Figura 29 (a), as flechas exemplificam o salto dinâmico, que pode ocorrer com a redução das frequências ou com o aumento delas.

A análise da curva de ressonância do oscilador modal referente ao primeiro modo indica que quando fixada a carga em  $F_0 = 0,001$ , o efeito do salto dinâmico não irá ocorrer para faixas de amortecimento ( $\xi$ ) iguais ou maiores que 0,011 (1,1%). Fixando o amortecimento em 0,005, o salto dinâmico não ocorrerá para valores abaixo de  $F_0 = 0,0003$ .

A curva de ressonância para oscilador modal referente ao segundo modo está representada na Figura 30.

Figura 30 – Curva de ressonância modo 2: (a) efeito da amplitude de carga externa; (b) efeito do amortecimento



FONTE: O AUTOR (2020)

Analisando a curva de ressonância do segundo oscilador modal, a ocorrência do salto dinâmico entre soluções estáveis coexistentes, para  $F_0=0,001$ , se dará quando o amortecimento for menor que 0,007 (0,7%).

Ao se definir o amortecimento igual a 0,005, o fenômeno do salto dinâmico foi observado apenas para  $F_0=0,001$ .

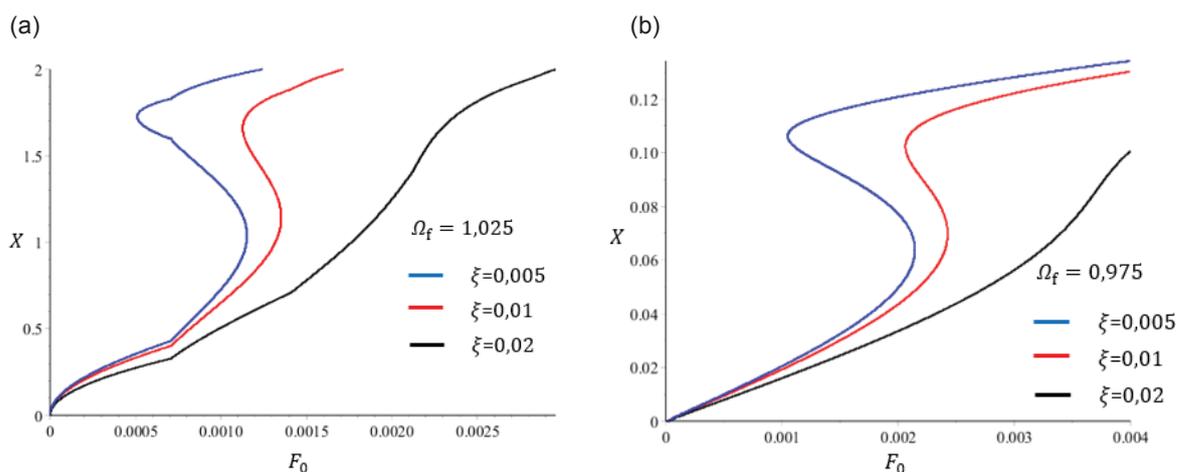
Observando a Figura 29 e a Figura 30 pode-se afirmar que a existência do salto dinâmico está atrelada ao grau de amortecimento do sistema, bem como a

amplitude de carga externa. Quanto maior a amplitude de carga externa e menor o amortecimento, maior a chance da estrutura estar sujeita a esse fenômeno.

Percebe-se que para o primeiro modo normal não-linear, ocorre um ganho de rigidez no sistema, diferentemente do segundo modo, que perde rigidez com o aumento da amplitude.

Os fenômenos dos saltos dinâmicos podem ocorrer quando se varia gradativamente a força que atua no sistema. Desse modo, com o propósito de se analisar, agora, o comportamento dos osciladores modais quando se mantém fixa uma frequência e varia-se a amplitude de carga externa, foram gerados gráficos ilustrados na Figura 31.

Figura 31 – Curva carga externa x amplitude dos osciladores modais referentes: (a) primeiro MNNL; (b) segundo MNNL



FONTE: O AUTOR (2020)

A coexistência de múltiplas soluções para a mesma amplitude de carga externa é mais propícia para menores amortecimentos no sistema. Para o primeiro MNNL o valor de  $F_0$  para o início do salto dinâmico é menor em relação ao segundo MNNL, entretanto a amplitude do sistema é maior.

#### 4.4.3 DIAGRAMAS DE BIFURCAÇÃO

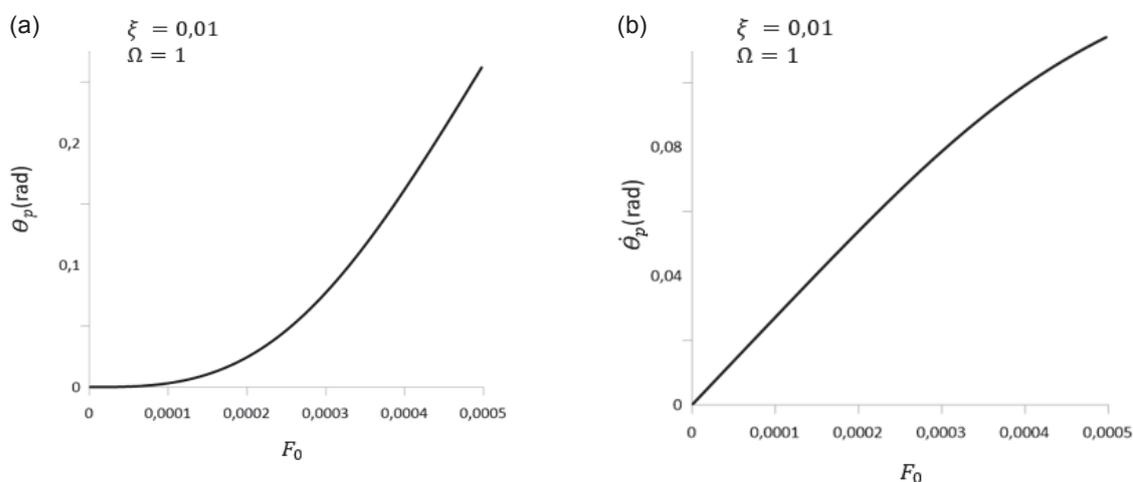
Em sistemas dinâmicos não lineares, o estudo da estabilidade das soluções dos sistemas forçados pode ser feito através de diagramas de bifurcação. Para o caso analisado, obtiveram-se os diagramas de bifurcação utilizando as equações (4-78) e

(4-79) ao se variar a amplitude de carga externa, mas mantendo os parâmetros de amortecimento estrutural e frequência de oscilação da carga externa constantes.

Selecionou-se uma faixa de frequência para cada oscilador modal reduzido. Os valores  $F_0$  foram definidos para não ultrapassar o domínio de validade física das solicitações atuantes na estrutura.

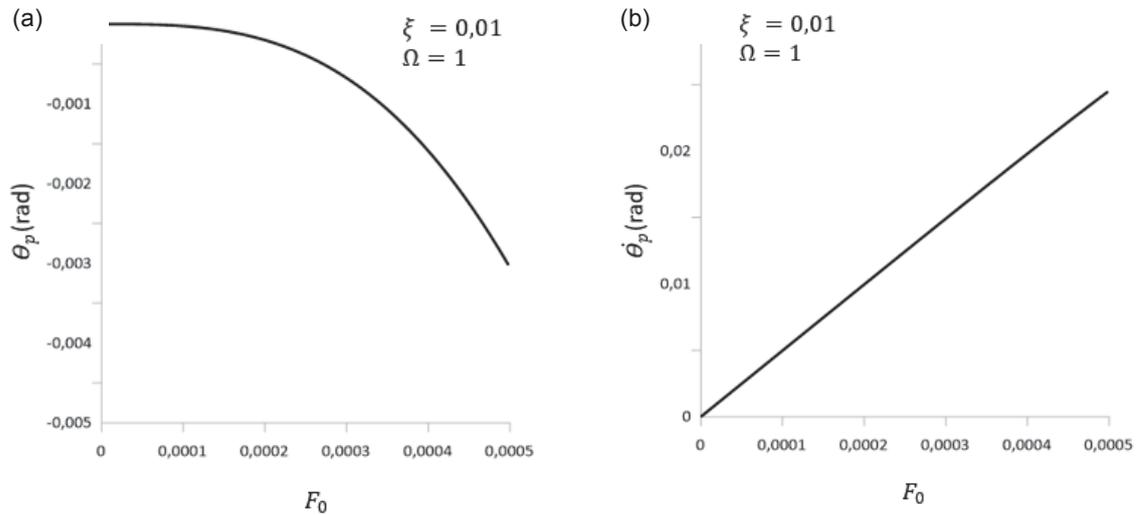
O procedimento numérico adotado para o traçado do diagrama é mesmo utilizado por Gavassoni (2012), no qual a técnica do multimapeamento de Poincaré, o método iterativo de Newton-Raphson e os multiplicadores de Floquet são associados. Nas Figura 32 e Figura 33 estão apresentadas as respostas. É possível notar que em nenhuma das situações aqui analisadas ocorreu o fenômeno da bifurcação, logo o número de MNNL permanecerá o mesmo, e não houve coexistência de múltiplas soluções, o que reflete a não existência de fenômenos não lineares complicados e de uma não linearidade relativamente pequena.

Figura 32 – Diagrama de bifurcação do modo 1: a) rotações; b) velocidades rotacionais



FONTE: O AUTOR (2020)

Figura 33 – Diagrama de bifurcação do modo 2: a) rotações; b) velocidades rotacionais



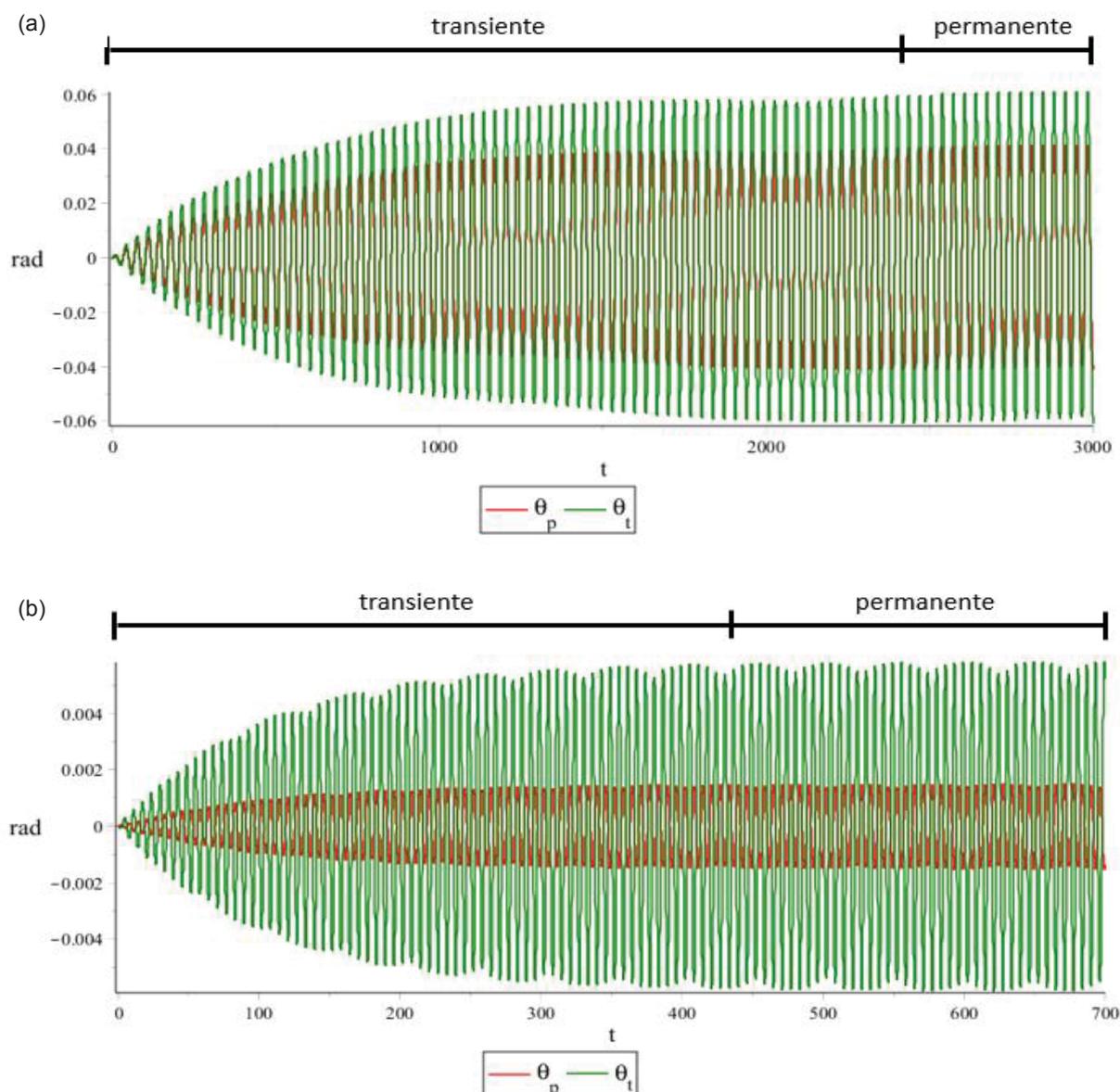
FONTE: O AUTOR (2020)

#### 4.4.4 CURVAS DE RESSONÂNCIA NO SISTEMA ORIGINAL DE EQUAÇÕES

Utilizando as equações do movimento do sistema, foram feitas simulações na estrutura para verificar o comportamento frente a diferentes valores de forças dinâmicas e diferentes valores de amortecimento. Considerou-se como função representativa da atuação das cargas das ondas na plataforma de maneira análoga à equação (4-87), porém no sistema de equações não lineares e com a inclusão de amortecimento proporcional.

Os pontos obtidos para a curva de ressonância foram obtidos no regime permanente. O início de cada regime permanente varia conforme o tipo de excitação e amortecimento do sistema. Na Figura 34, tem-se exemplificado para amortecimento de 1% duas situações distintas de frequência da carga externa.

Figura 34 – Resposta no tempo do sistema considerando amortecimento de 1% quando: (a) excitado com frequência igual ao primeiro MNL; (b) excitado com frequência igual ao segundo MNL

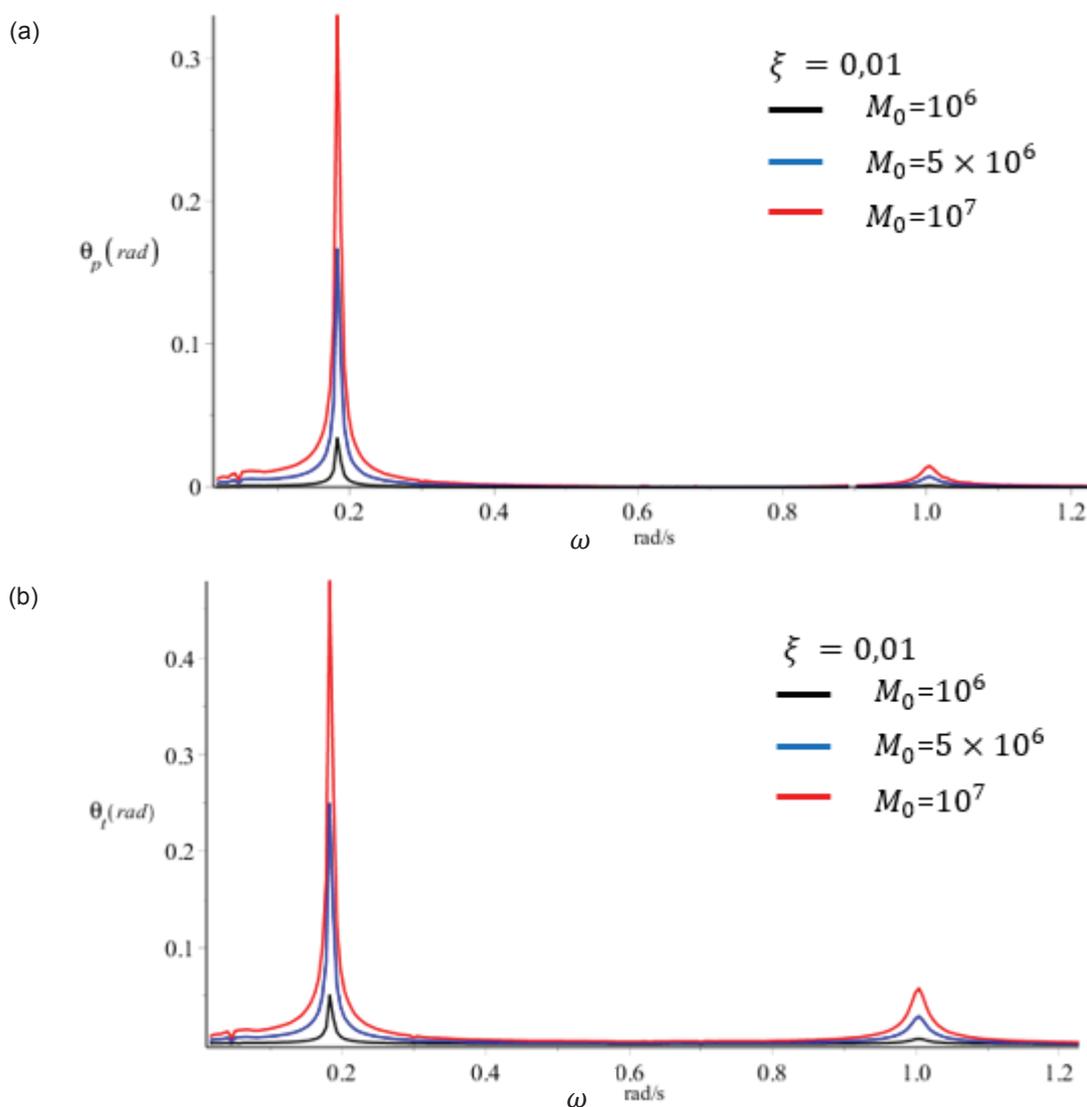


FONTE: O AUTOR (2020)

Percebe-se que o tempo decorrido para início do período permanente para a primeira situação é de aproximadamente 2500 s, e na segunda situação é em torno de 450 s. Esse fato deve ser levado em conta para obtenção das curvas de ressonância, pois nela estarão indicadas as máximas amplitudes no período permanente da estrutura.

Desse modo, excitou-se a estrutura com diferentes valores de força, período e amortecimento. Na Figura 35 e Figura 36 estão representados a resposta da estrutura frente a variações de força externa e amortecimento, respectivamente.

Figura 35 – Curvas de ressonância: efeito da variação da força externa: (a) grau de liberdade da plataforma; (b) grau de liberdade da torre

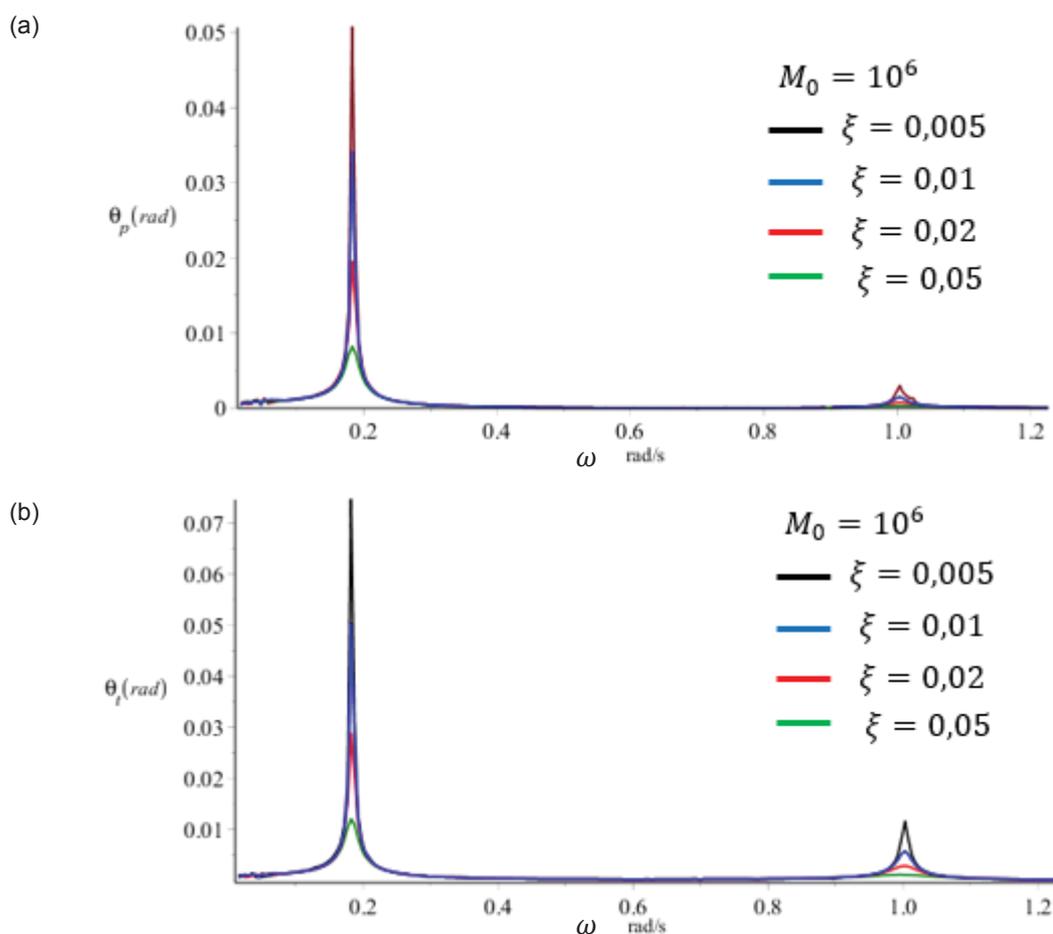


FONTE: O AUTOR (2020)

É possível perceber que ao se variar a força externa atuante na estrutura e mantendo-se constante o amortecimento em 0,01, a amplitude máxima de oscilação no região permanente aumenta, como já era esperado. As regiões de amplitudes máximas são próximas às frequências naturais de vibração da estrutura, não sendo observado variações significativas. A resposta se aproxima muito de um comportamento linear, pois a amplitude máxima de vibração é praticamente proporcional a força aplicada, os efeitos não lineares não são perceptíveis graficamente.

Na região da primeira frequência natural foram observados picos aproximadamente sete vezes maiores do que na segunda frequência. As zonas distantes das frequências naturais tem amplitude muito reduzida se comparada a esses picos.

Figura 36 - Curvas de ressonância: efeito da variação do amortecimento: (a) grau de liberdade da plataforma; (b) grau de liberdade da torre



FONTE: O AUTOR (2020)

Analisando a Figura 36, constata-se que para maiores amortecimentos, menores serão as amplitude máximas. As regiões de pico mantiveram-se próximas às frequências naturais. Percebe-se que, comparando as Figura 35 e Figura 36, o amortecimento influencia nos picos das amplitudes, aumentando ou diminuindo o pico, já a amplitude da carga externa atua na faixa de ressonância, aumentando ou diminuindo a faixa.

Em todas as situações, a amplitude do GL da torre foi maior que o da plataforma.

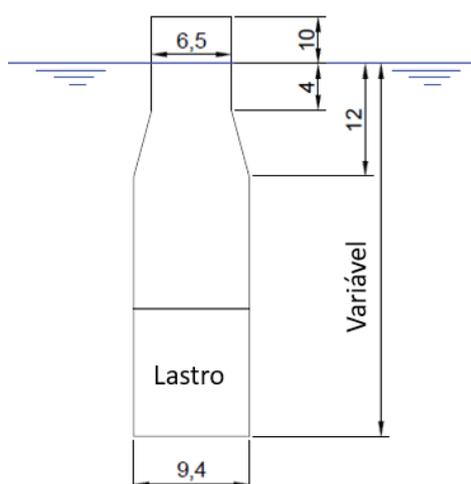
#### 4.5 VARIAÇÕES DO COMPRIMENTO DA SPAR

Busca-se nesta seção observar o comportamento não linear do sistema, alterando-se o comprimento da plataforma spar. O objetivo é de fornecer parâmetros para novos projetos que buscam menores comprimentos, proporcionando economia de material e facilidade de transporte e montagem.

##### 4.5.1 NOVAS DIMENSÕES

O formato da plataforma é o mesmo da configuração inicial, porém o comprimento do trecho de maior diâmetro é alterado nas novas propostas. Admite-se, apenas nessas propostas, que toda a massa da plataforma esteja no lastro com densidade média de  $1800 \text{ Kg/m}^3$ , o qual se encontra disposto no fundo da mesma, tal qual apresentado na Figura 37. Esse valor foi obtido ao fazer essa consideração para a situação original, mantendo-se a massa total e a posição do centro de gravidade.

Figura 37 – Dimensões principais da plataforma



FONTE: O AUTOR (2020)

Desse modo, pode-se calcular os parâmetros atualizados para cada nova proposta. Selecionaram-se três novas configurações de profundidade, as quais podem ser conferidas na Tabela 6, juntamente com as dimensões originais.

Tabela 6 – Parâmetros para as novas dimensões

$H_w$	Profundidade da plataforma				Unidade
	80 m	90 m	100 m	120 m	
$I_p$	5,08E+09	6,86E+09	9,22E+09	1,67E+10	kg.m <sup>2</sup>
$M_p$	4,78E+06	5,50E+06	6,21E+06	7,47E+06	kg
$E$	5,28E+07	5,98E+07	6,68E+07	7,91E+07	N
$l_1$	15,24	13,95	12,86	11,83	m
$l_2$	3,59	7,01	10,24	16,03	m
$l_3$	52,03	57,04	62,05	72,07	m

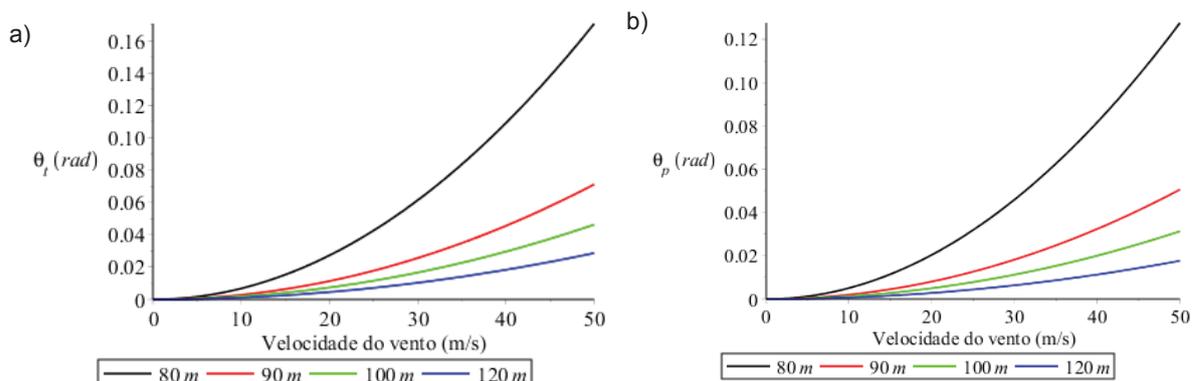
FONTE: O AUTOR (2020)

Como esperado, a massa e a inércia da plataforma diminuem com a diminuição da profundidade. Percebe-se que o momento restaurador causado pelas forças de empuxo e do peso da plataforma, para uma determinada rotação, diminui com a diminuição da profundidade da plataforma, indicando perda de rigidez na direção da arfagem.

#### 4.5.2 ANÁLISE ESTÁTICA

Utilizando as mesmas hipóteses e coeficientes adotados anteriormente, verificou-se a influência da corrente e do vento nas rotações estáticas. Os efeitos isolados, isto é, quando atua somente força oriunda do vento ou somente força oriunda da corrente, podem ser observados nas Figura 38 e Figura 39.

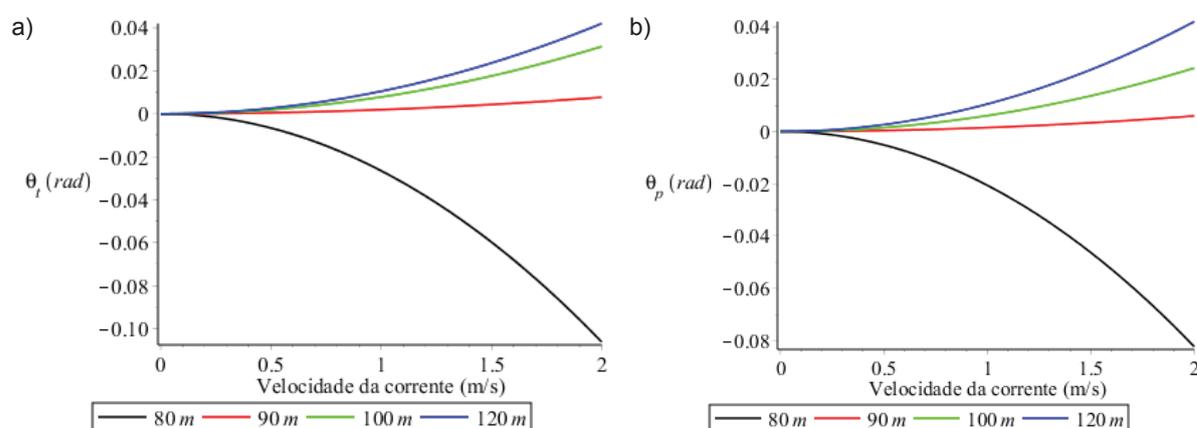
Figura 38 - Efeito do vento nas rotações estáticas: a) GL da torre; b) GL da plataforma



FONTE: O AUTOR (2020)

Ao se analisar a Figura 38, percebe-se que as rotações da torre e da plataforma aumentam com a diminuição da profundidade da plataforma, chegando a quase 6 vezes quando comparada a estrutura original com a de menor profundidade.

Figura 39 – Efeito da corrente nas rotações estáticas: a) GL da torre; b) GL da plataforma



FONTE: O AUTOR (2020)

Diferentemente do caso anterior, ao se considerar apenas o efeito da corrente, o sistema tem um comportamento diferente, diminuindo as rotações com a diminuição da profundidade da plataforma. Esse fato é devido a posição de aplicação da força da corrente e da sua magnitude, pois ela é função do comprimento submerso da plataforma e da distribuição do diagrama de velocidades. Ao se variar as dimensões, o local da resultante da força da corrente em relação ao centro de gravidade da estrutura fica abaixo, invertendo o sentido de rotação dos graus de liberdade.

Analisando, também, o efeito combinado do vento e da corrente na rotação da estrutura, como disposto na Tabela 7, percebe-se que as rotações aumentaram em todos os casos com a redução da profundidade submersa da plataforma, indicando que o efeito da ação do vento sobrepõe-se ao efeito da força da corrente.

A maior rotação foi relativa ao grau de liberdade da torre para a profundidade de 80 m na situação de vento a 30 m/s e corrente a 1 m/s, na qual atingiu 0,0832 rad, que equivale a 4,76°. Nesse mesmo caso, a rotação da plataforma também foi máxima, alcançando 0,0629 rad, equivalente a 3,60°.

Tabela 7 – Efeito combinado corrente e vento

$v_i$ (m/s)	$v_f$ (m/s)	100 m		90 m		80 m	
		$\theta_{ps}$ (rad)	$\theta_{ts}$ (rad)	$\theta_{ps}$ (rad)	$\theta_{ts}$ (rad)	$\theta_{ps}$ (rad)	$\theta_{ts}$ (rad)
1	30	2,07E-02	2,88E-02	2,92E-02	3,98E-02	6,29E-02	8,32E-02
0,5	20	7,36E-03	1,04E-02	1,08E-02	1,49E-02	2,47E-02	3,28E-02
0,1	10	1,35E-03	1,97E-03	2,13E-03	2,99E-03	5,28E-03	7,04E-03

FONTE: O AUTOR (2020)

#### 4.5.3 ANÁLISE DINÂMICA LIVRE

Sabe-se que, variando as características de rigidez e massa de um sistema, alteram-se as respostas dinâmicas referentes às frequências e seus respectivos modos de vibração. Na Tabela 8 estão dispostos esses novos valores ao desconsiderar a não linearidade do sistema.

Tabela 8 – Frequência e modos de vibração das novas propostas e caso original

Profundidade plataforma	Frequência (rad/s)	$\theta_p$	$\theta_t$
80 m	0,08909	0,75509	1
	1,23842	-0,53774	1
90 m	0,13277	0,72892	1
	1,1734	-0,44592	1
100 m	0,15831	0,70695	1
	1,11329	-0,37181	1
120 m	0,18379	0,6767	1
	1,0037	-0,2564	1

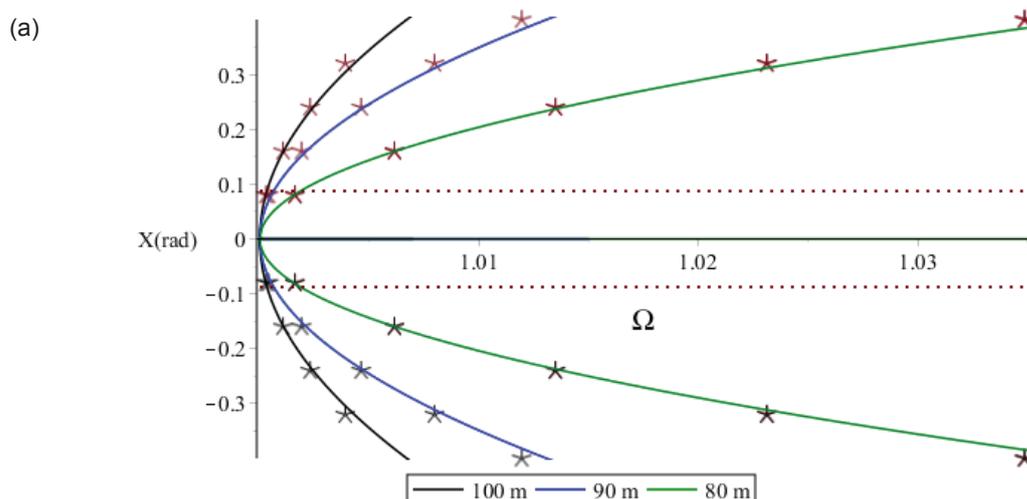
FONTE: O AUTOR (2020)

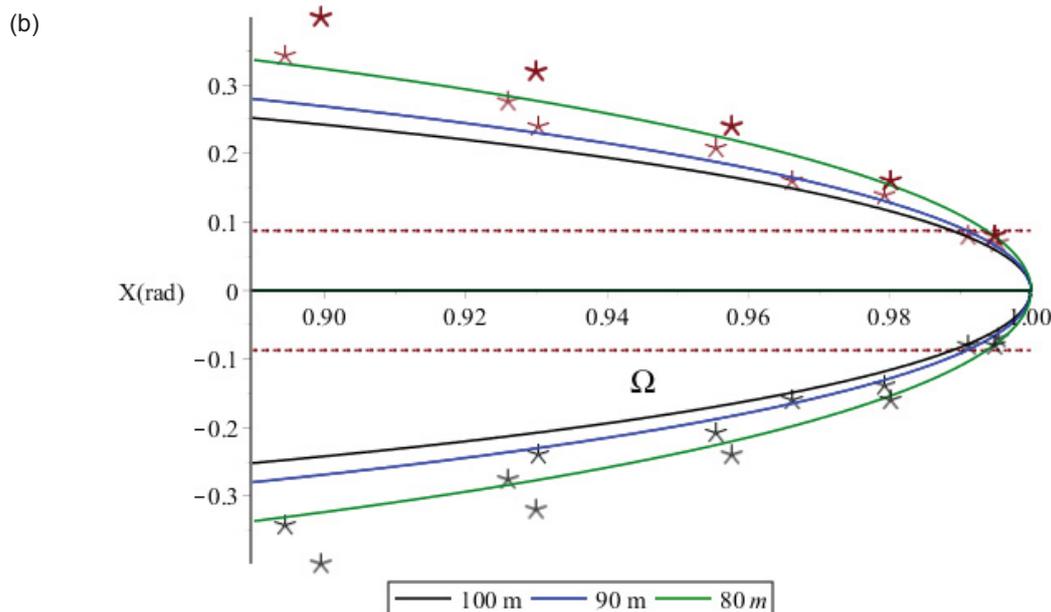
Nota-se que o valor da primeira frequência de vibração diminui com a redução da profundidade da plataforma, já para a segunda frequência, seu valor aumenta. O modo de vibração em fase do sistema ocorreu em todos os casos nas primeiras frequências, e o fora de fase na segundas frequências.

A variação, proporcionalmente, da frequência foi maior para a primeira frequência do sistema, reduzindo até menos da metade do que a original. Essa redução afasta ainda mais da faixa de frequência de vibração das ondas. Para a outra frequência, seu aumento máximo foi de 23%, se situando ainda, porém, na faixa de frequência das ondas.

Utilizando, novamente, o método do balanço harmônico, mas dessa vez aplicando para as três novas propostas, e comparando com a resposta obtida por solução numérica, pode-se observar fenômenos similares a configuração original. As respostas estão apresentadas separadamente por modos normais não lineares e pelo tipo de configuração na Figura 40.

Figura 40 – Método do balanço harmônico: para o: (a) primeiro MNNL; (b) segundo MNNL





FONTE: O AUTOR (2020)

Os 1º MNNLs de todas as configurações apresentam o fenômeno do enrijecimento, assim como na estrutura original, entretanto a variação das frequências em relação à frequência original é mais acentuada para as configurações de menores comprimentos da plataforma. Assim o efeito do enrijecimento é acentuado pela redução do comprimento da plataforma spar.

O efeito do amolecimento foi observado para todas as configurações, assim como para a estrutura original, nos respectivos 2º MNNLs, e sua variação de frequência, significativamente, diminui com a diminuição do comprimento da plataforma. Ou seja, diferentemente do 1º MNNL, o efeito do amolecimento no segundo modo perde intensidade com a redução do comprimento da plataforma Spar.

A concordância entre o método analítico com a resposta numérica apresentou melhores aproximações nos 1º MNNLs, todavia, abrangiu o domínio de validade do sistema em todas as situações, demonstrando a eficácia do método do balanço harmônico.

#### 4.5.4 ANÁLISE DINÂMICA FORÇADA

Com objetivo de verificar o comportamento dinâmico sob ação de cargas externas harmônicas dos 3 casos de variação do comprimento da plataforma Spar, elaborou-se as curvas de resposta amplitude x frequência para cada caso. Utilizou-se

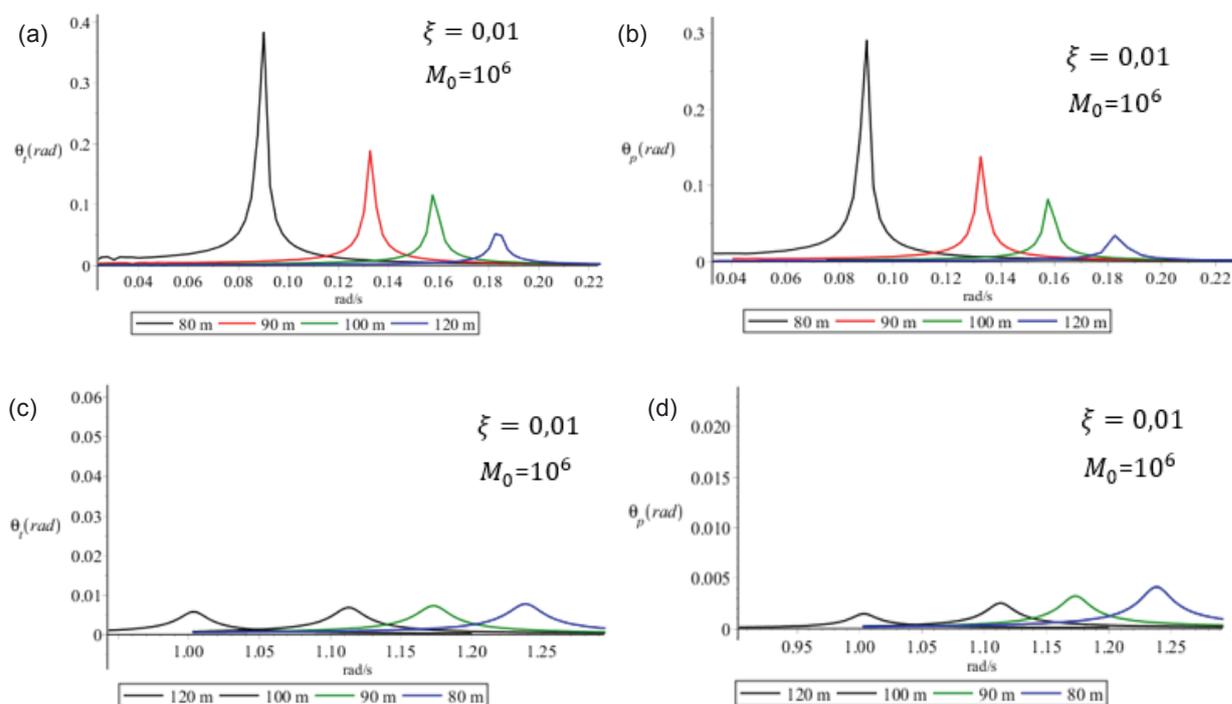
amortecimento proporcional de 1% e amplitude de força harmônica com valor máximo de  $10^6$ . O resultado está representado na Figura 41.

Analisando a faixa de ressonância para a primeira frequência natural, as plataformas com menores profundidades obtiveram maiores amplitudes. As plataformas com profundidades de 80 m, 90 m e 100 m, apresentaram deslocamentos 7, 4 e 2 vezes, respectivamente, maiores que a configuração original.

Para a segunda faixa de ressonância, novamente, o maior pico é referente a plataforma de menor dimensão, entretanto as amplitudes foram consideravelmente menores, ficando abaixo de  $0,5^\circ$ . A relação entre as propostas com maiores e menores amplitudes nesse modo foi de aproximadamente 2,5 vezes, um aumento menos significativo em relação ao primeiro modo.

Dessa forma, maior atenção deve ser dada às frequências de solitação referentes ao primeiros modo, pois os deslocamentos ultrapassam o limite de  $5^\circ$ , embora essa faixa de frequência não esteja dentro das frequências de ondas.

Figura 41- Curvas amplitude x frequência: (a) e (c) GL da torre ; (b) e (d) GL da plataforma



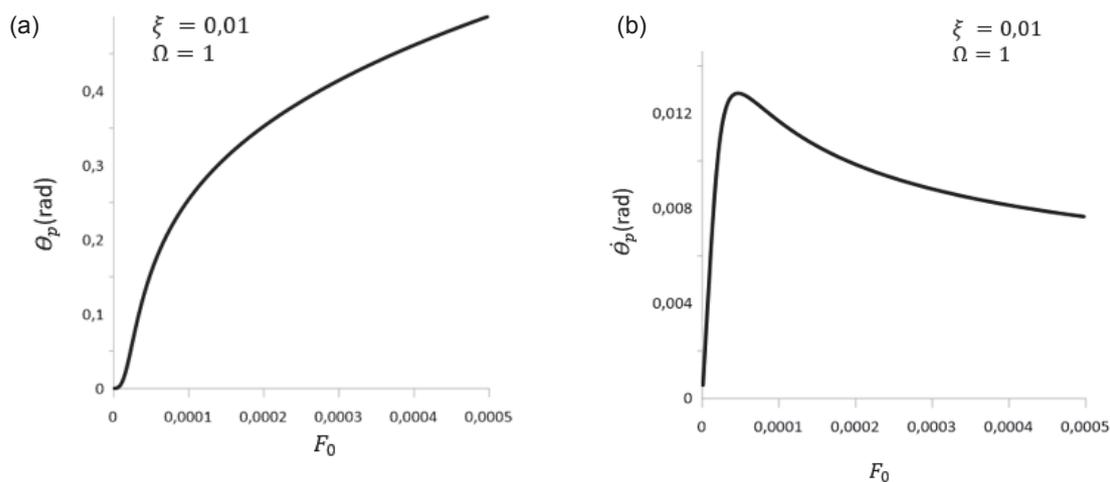
FONTE: O AUTOR (2020)

Prosseguindo o estudo para a possibilidade de ocorrência de bifurcações, selecionou-se a plataforma menos rígida, isto é, a de menores dimensões e analisou-

se o comportamento nos dois MNNLs ao variar-se a amplitude de carga externa solicitante. Os resultados podem ser visualizados nas Figura 42 e Figura 43.

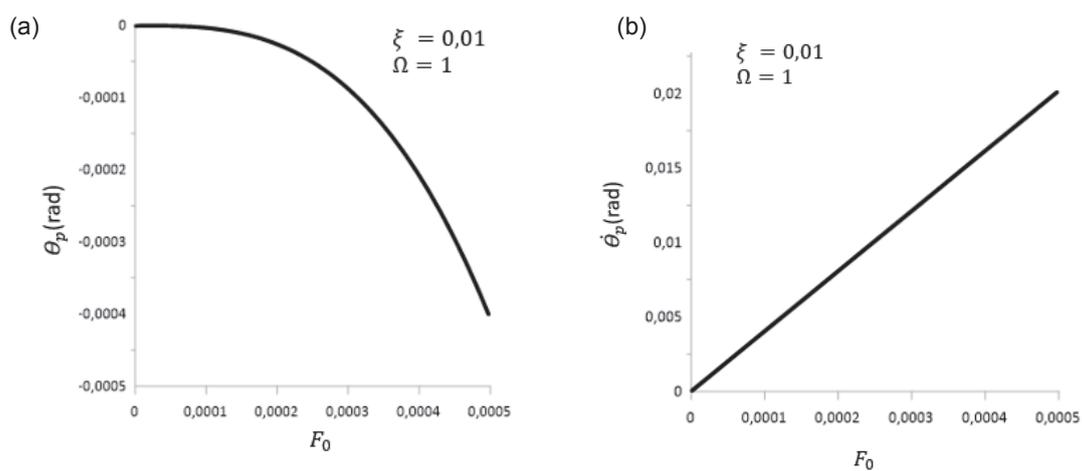
Em nenhum dos casos foi identificado a ocorrência de bifurcações na faixa de cargas externas efetivamente viáveis.

Figura 42 - Diagrama de bifurcação do modo 1 para a configuração de 80 m: a) rotações; b) velocidades rotacionais



FONTE: O AUTOR (2020)

Figura 43 - Diagrama de bifurcação do modo 2 para a configuração de 80 m: a) rotações; b) velocidades rotacionais



FONTE: O AUTOR (2020)

## 5 CONCLUSÕES

Foi realizada nesse trabalho a análise dinâmica não linear, utilizando-se os modos normais não lineares, de uma turbina eólica offshore sobre plataforma do tipo Spar em vibração livre e forçada com o objetivo de se identificar e analisar os fenômenos não lineares presentes no sistema. Para tanto, considerou-se um sistema discreto com dois graus de liberdade referentes ao movimento de arfagem da torre e da plataforma.

As equações que governam a dinâmica do sistema foram deduzidas para a análise estática e dinâmica da estrutura, para tal conceitos de cálculo variacional e o princípio de Hamilton foram utilizados.

Estudou-se a variação da configuração estável da estrutura para diferentes considerações de velocidade de corrente e velocidade do vento, não se detectando nenhuma variação qualitativa na dinâmica do sistema para o conjunto de parâmetros estudados.

O método de expansão utilizado para solução da equação diferencial das variedades invariantes foi realizado na equação expandida por série de Taylor até o terceiro grau. Verificou-se que a identificação dos modos normais não lineares através do método das variedades invariantes se constituíram de uma técnica útil de redução modal e na previsão do comportamento da estrutura em condições determinadas através da análise da resposta no tempo e no espaço de fase do sistema.

Os osciladores modais obtidos foram utilizados para o estudo do comportamento à vibração livre não amortecida do sistema. Analisaram-se planos fases de deslocamento-velocidade do grau mestre (grau relativo à rotação da plataforma) e as curvas frequência-amplitude obtidas através do método do balanço harmônico. As respostas foram comparadas com a solução de referência para verificar a representatividade dos osciladores modais de ordem reduzida. A resposta para o primeiro MNNL foi compatível com a solução de referência até valores de amplitude do grau de liberdade mestre próximas a 0,8 rad, indicando enrijecimento do sistema, e aumento da energia potencial total do sistema. O oscilador modal do segundo MNNL obteve boa precisão para rotações acima de 0,2 rad, valor que já é suficiente para garantir o uso em todo o domínio de análise físico do sistema. Porém, diferentemente do caso anterior, o segundo MNNL apresentou diminuição da frequência de vibração

para maiores amplitudes de excitação, e diminuição da energia potencial com aumento da frequência.

O estudo da vibração forçada foi feito, para os dois MNNLs, através da análise das curvas de ressonância aplicadas nos osciladores modais, obtidas através do método do balanço harmônico, variando-se parâmetros de amplitude de carga e de amortecimento estrutural. Esse método indicou que os saltos dinâmicos são mais suscetíveis de ocorrer para maiores amplitudes de cargas e menores amortecimentos. O primeiro MNNL na vibração forçada apresenta enrijecimento do sistema e o segundo MNNL amolecimento. Ao efetuar a análise através da solução de referência, em uma frequência para cada modo e na faixa de valores fisicamente plausíveis de excitação, não se constatou nenhum fenômeno de bifurcação de modos.

Verificou-se, também, a resposta da estrutura no regime permanente com o uso das equações originais do sistema expandidas até o termo cúbico. Foram analisados parâmetros de amplitude de carga externa e amortecimento estrutural, e influência desses parâmetros nos deslocamentos máximos dos graus de liberdade da torre e da plataforma para diferentes faixas de frequências. O sistema não apresentou indícios de grandes não linearidades, pois a resposta permaneceu praticamente proporcional à força aplicada, não variando as frequências de pico.

Na sequência, realizou-se o estudo de diferentes configurações de plataforma, mais leves, menos profundas e menos rígidas que a original. Investigou-se o comportamento estático e dinâmico da estrutura. Na análise dinâmica, verificou-se as novas frequências e modos de vibração da estrutura, observando maiores contrastes para plataformas menos profundas em relação à original. Estudou-se, da mesma forma, a resposta da estrutura, por solução de referência e pelo método do balanço harmônico, quando excitada nos seus respectivos MNNLs, identificando enrijecimento e amolecimento, assim como o sistema original.

Obtiveram-se as curvas de ressonância, constatando-se maiores amplitudes para as configurações menos profundas. Conclui-se, portanto, que características como o momento de inércia e o momento restaurador proveniente das forças peso e empuxo são fatores fundamentais para manter a estrutura dentro dos limites de utilização de deslocamento.

Por fim, selecionou-se a plataforma menos rígida e analisou-se a possibilidade de ocorrência de bifurcações que não foram identificadas no domínio físico de

amplitude de carga externa estudada. Dessa forma, a dinâmica do sistema possui complexidade semelhante a da plataforma original Spar.

## 5.1 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Nesta seção seguem algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Analisar com o auxílio de MORs o comportamento não linear de diferentes estruturas flutuantes, tal qual a plataforma do tipo barge.
- Consideração na análise da plataforma Spar de mais graus de liberdade de rotação e translação da estrutura.
- Estudar o comportamento dinâmico em funcionamento das turbinas eólicas.
- Verificar maneiras de mitigar as vibrações utilizando sistemas de controle, que podem ser dispostos na nacelle ou na plataforma.
- Adoção de modelos mais representativos para as forças de ondas e ventos para estudo da vibração forçada amortecida.
- Verificação de novas propostas para projetos de plataformas flutuantes considerando diferentes geometrias.

## REFERÊNCIAS

- AGGARWAL, N.; MANIKANDAN, R.; SAHA, N. Nonlinear short term extreme response of spar type floating offshore wind turbines. **Ocean Engineering**, v. 130, p. 199–209, 2017.
- AGUIAR, M. A. M.. **Tópicos de Mecânica Clássica**. [s.l.]. [s.n] - 2019.
- AL-SOLIHAT, M. K. H. **Dynamics Modeling , Simulation and Analysis of a Floating Offshore Wind Turbine**. 2017. Tese (doutorado) - McGill University
- BACHYNSKI, E. E. Fixed and Floating Offshore Wind Turbine Support Structures. **Offshore Wind Energy Technology**, John Wiley & Sons, p. 103, 2018.
- BAGBANCI, H. **Dynamic analysis of offshore floating wind turbines**. Dez. 2011. Diss. (Mestrado) – Universidade Técnica de Lisboa.
- CHAKRABARTI, S. K., **Handbook of Offshore Engineering**. Elsevier, 2005.
- CHOPRA, Anil K. **Dynamics of Structures**. Pearson Education. Fourth. [S.I.]:Prentice Hall, 2012.
- COOPER, S. B.; DIMAIO, D.; EWINS, D. J. Integration of system identification and finite element modelling of nonlinear vibrating structures. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 102, p. 401–430, 2018.
- FALZARANO, J. M.; CLAGUE, R. E.; KOTA, R. S. Application of nonlinear normal mode analysis to the nonlinear and coupled dynamics of a floating offshore platform with damping. **Nonlinear Dynamics**, v. 25, n. 1–3, p. 255–274, 2001.
- GAVASSONI, E. **Aplicação dos modos de vibração não lineares a modelos conceituais de estruturas offshore**. 2012. Tese (Doutorado) – PUC-Rio.
- GWEC (Global Wind Energy Council) . A Snapshot of Top Wind Markets in 2017: **Offshore Wind**. 2017

HALLER, G.; PONSIOEN, S. Nonlinear normal modes and spectral submanifolds : existence , uniqueness and use in model reduction. **Nonlinear Dynamics**, v. 86, n. 3, p. 1493–1534, 2016.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos da Física - Mecânica**. 10. ed. LTC. Rio de Janeiro. 2016.

HAMILTON, W. R. On a general method in dynamics. **Philosophical Transactions Royal Society of London**, p. 247–308, 1834. 105

HAMMAR, L.; ANDERSSON, S.; ROSENBERG, R. **Adapting offshore wind power foundations to local environment Adapting offshore wind power foundations to local environment**. [s.l.] Swedish Environmental Protection Agency, 2010.

HARRIGER, E. **Dynamis analysis of a 5 megawatt offshore floating wind turbine**. Dissertação de mestrado, University of California, 2011.

HE, Z.; EPUREANU, B. I.; PIERRE, C. Parametric study of the aeroelastic response of mistuned bladed disks. **Computers and Structures**, v. 85, p. 852–865, 2007.

HILL, T. L.; CAMMARANO, A.; NEILD, S. A. Identifying the significance of nonlinear normal modes. **Proceedings of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences**, n. November, p. 25, 2017.

HILL, T. L.; NEILD, S. A.; WAGG, D. J. Comparing the direct normal form method with harmonic balance and the method of multiple scales. **Procedia Engineering**, v. 199, p. 869–874, 2017.

JONKMAN, J. M. Dynamics Modeling and Loads Analysis of an Offshore Floating Wind Turbine. **National Renewable Energy Laboratory**, nov. 2007a.

JONKMAN, J. M. Dynamics modeling and loads analysis of an offshore floating wind turbine. **National Renewable Energy Laboratory**, n. November, p. 233, 2007b.

JONKMAN, J. Definition of the Floating System for Phase IV of OC3. **National Renewable Energy Laboratory**, n. May, p. 31, 2010.

JONKMAN, J.; MUSIAL, W. Offshore code comparison collaboration (OC3) for IEA Wind Task 23 offshore wind technology and deployment. **National Renewable Energy Laboratory**, 2010.

JORDAN, D. W.; SMITH, P. **Nonlinear ordinary differential equations: an introduction for scientists and engineers**. 4. ed. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2007. v. 10.

JUNG, G.; GAVASSONI, E. **Análise Não Linear da Vibração de Torres Offshore Multi-Articuladas**. SMNE, 2015

KALDELLIS, J. K.; KAPSALI, M. Shifting towards offshore wind energy-Recent activity and future development. **Energy Policy**, v. 53, p. 136–148, 2013.

KERSCHEN, G.; WORDEN, K. et al. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. **Mechanical systems and signal processing**, Elsevier, v. 20, n. 3, p. 505–592, 2006.

KERSCHEN, G.; PEETERS, M. et al. Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 170–194, 2009.

KUETHER, R. J.; ALLEN, M. S. A numerical approach to directly compute nonlinear normal modes of geometrically nonlinear finite element models. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 46, n. 1, p. 1–15, 2014.

MAIOLINO, P. **Análise Dinâmica de Turbina Eólica offshore do tipo Monocoluna**. setembro de 2014. Dissertação de mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro

MANÉ JUNIOR, A. **Estruturas metálicas offshore para suporte de turbinas eólicas**. janeiro de 2014. Dissertação mestrado, FCTUC, Coimbra

MAZZILLI, C. E. N.; BARACHO NETO, O. G. P. Evaluation of non-linear normal modes for finite-element models. **Computers and Structures**, v. 80, n. 11, p. 957–965, 2002.

MAZZILLI, C. E. N.; SOARES, M. E. S.; BARACHO NETO, O. G. P. Non-linear normal modes of a simply supported beam: Continuous system and finite-element models. **Computers and Structures**, v. 82, p. 2683–2691, 2004.

MELO, M. S. DE M. **Energia eólica: aspectos técnicos e econômicos**. julho de 2012, Dissertação de Mestrado, UFRJ, Rio de Janeiro.

MICKENS, R. E. Comments on the Method of Harmonic Balance. **Journal of Sound and Vibration**, v. 94, n. 3, p. 456–460, 1984.

MIKHLIN, Y. V.; MORGUNOV, B. I. Normal vibrations in near-conservative self-excited viscoelastic nonlinear systems. **Nonlinear Dynamics**, v. 25, p. 33-48, 2001.

MINISTÉRIO DE MINAS E ENERGIA (MME) - **Balanço Energético Nacional (BEN) – ano base 2016** – Ministério de Minas e Energia. 2017.

MUSIAL, W.; BUTTERFIELD, S. **Energy From Offshore Wind**. Houston, Texas: 2006

MUSIAL, W.; BUTTERFIELD, S.; BOONE, A. Feasibility of Floating Platform Systems for Wind Turbines National. **Renewable Energy Laboratory**, 2004.

MUSIAL, W.; BUTTERFIELD, S.; RAM, B. Energy from Offshore Wind Preprint. **National Renewable Energy Laboratory**, v. 1, n. Offshore Technology Conference, p. 14, 2006.

ORTIZ, G. P.; KAMPEL, M. Potencial de energia eólica offshore na margem do Brasil. In: OCEANOGRAFIA e Políticas Públicas. [S.l.: s.n.], 2011.

PESHECK, E. BOIVIN, N. e PIERRE, C. Nonlinear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds. **Nonlinear Dynamics**, v. 25, p. 183-205, 2001.

PHAM, T. D.; SHIN, H. A New Conceptual Design and Dynamic Analysis of a Spar-Type Offshore Wind Turbine Combined with a Moonpool. **Energies**, p. 15, 2019.

RAHMAN, M. SAIFUL Islam A.B.M, et al. Response of nonlinear offshore spar platform under wave and current. **Ocean Engineering**, v. 144, n. April, p. 296–304, 2017.

RENSON, L.; KERSCHEN, G.; COCHELIN, B. Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering. **Journal of Sound and Vibration**, v. 364, p. 177–206, 2016.

ROSEMBERG, R. M. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. **Journal of Applied Mechanics**, p. 7-14, 1962.

ROSENBERG, R. M. On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom. **Advances in Applied Mechanics**, v. 9, p. 155–242, 1966.

SHAW, S. W.; PIERRE, C. Non-linear normal modes and invariant manifolds. **Journal of Sound and Vibration**, v. 150, n. 1, p. 170–173, 1991.

SHAW, S. W.; PIERRE, C. Normal modes for nonlinear vibratory systems. **Journal of Sound and Vibration**, v.164, n. 1, p. 85-124, 1993.

SHAW, S. W.; PIERRE, C.; PESHECK, E. Modal Analysis-Based Reduced-Order Models for Nonlinear Structures—An Invariant Manifold Approach. **The Shock and Vibration Digest**, v. 31, n. 1, p. 3–16, 1999.

SILLER, H. R. E. **Non-linear Modal Analysis Methods for Engineering Structures**. 242 f. Tese de Doutorado – Imperial College London, University of London, London, 2004.

STEWART, G. M. **Load reduction of floating wind turbines using tuned mass dampers**. Fev. 2012. Diss. (Mestrado) – University of Massachusetts - Amherst.

THOMSON, W. T.; DAHLEH, M. D. **Theory of Vibrations with Applications**. 5 ed., 1998

TOUZÉ, C. Normal form theory and nonlinear normal modes : **Theoretical settings and applications**. Springer Series CISM courses and lectures. 2012.

TRAN, T, KIM, D. e SONG, J. Computational Fluid Dynamic Analysis of a Floating Offshore Wind Turbine Experiencing Platform Pitching Motion. *Energies* 5011–26. 2014.

VAKAKIS, A. F.; MANEVITCH, L. I., MIKHLIN, Y.V., PILIPCHUK, V. N. e ZEVIN, A. A. **Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems**, Willey Ed, 552 f., 1996.

VAKAKIS, A. Non-linear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory: An overview. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 11, n. 1, p. 3–22, 1997. 108

VALTORTA, M. **Control of a spar – buoy floating**. [s.l.] Politecnico di Milano, 2016.

VAN DER TEMPEL, J.; DIEPEVEEN, N. F. B.; CERDA SALZMANN, D. J. Design of support structures for offshore wind turbines. **WIT Transactions on State of the Art in Science and Engineering**, v. 33, p. 559–591, 2010.

VAN DER VALK, P. L. C. **Coupled Simulations of Wind Turbines and Offshore Support Structures**. [s.l.] ed. PLC - 2014.

VAZ, L. E. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. [s.l.] Elsevier editora, 2011.

WANG, X. Zeng, X. Li, J. Yang, X. Wang, H. A review on recent advancements of substructures for offshore wind turbines. **Energy Conversion and Management**, v. 158, n. January, p. 103–119, 2018.

YTTERVIK, R. **Ocean current variability in relation to offshore engineering** . 2004, Tese de doutorado, Faculty of Engineering Science and Technology, Noruega.

ZWIERZIKOWSKI, P. D. G. **Análise dinâmica não linear de uma turbina eólica offshore monopile com tmd**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná, 2019.

## ANEXO A – RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste anexo estão apresentadas as relações trigonométricas utilizadas no método do balanço harmônico para redução da ordem das potências das funções seno e cosseno.

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t)) \quad (0-1)$$

$$\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\omega t)) \quad (0-2)$$

$$\cos^3(\omega t) = \frac{3}{4}\cos(\omega t) + \frac{1}{4}\cos(3\omega t) \quad (0-3)$$

$$\sin^3(\omega t) = \frac{3}{4}\sin(\omega t) - \frac{1}{4}\sin(3\omega t) \quad (0-4)$$

$$\cos^5(\omega t) = \frac{5}{8}\cos(\omega t) + \frac{5}{16}\cos(3\omega t) + \frac{1}{16}\cos(5\omega t) \quad (0-5)$$

$$\cos^7(\omega t) = \frac{35}{64}\cos(\omega t) + \frac{21}{64}\cos(3\omega t) + \frac{7}{64}\cos(5\omega t) + \frac{1}{64}\cos(7\omega t) \quad (0-6)$$

$$\begin{aligned} \cos^9(\omega t) = & \frac{63}{128}\cos(\omega t) + \frac{21}{64}\cos(3\omega t) + \frac{9}{64}\cos(5\omega t) + \frac{9}{256}\cos(7\omega t) \\ & + \frac{1}{256}\cos(9\omega t) \end{aligned} \quad (0-7)$$

## ANEXO B – EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Equações do movimento sem simplificações para o sistema de dois graus de liberdade:

(0-8)

$$\begin{aligned}
 & mt l_4 (l_2 + l_3) \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) \right) \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right) \sin(\theta_T(t) - \theta_p(t)) + mturb (l_4 + l_5) (l_2 \\
 & + l_3) \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) \right) \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right) \sin(\theta_T(t) - \theta_p(t)) + kT (\theta_T(t) + \theta_{Ts} - \theta_p(t) - \theta_{ps}) \\
 & - mp g \sin(\theta_p(t) + \theta_{ps}) l_1 + mt g (l_2 + l_3) \sin(\theta_p(t) + \theta_{ps}) + mturb g (l_2 \\
 & + l_3) \sin(\theta_p(t) + \theta_{ps}) - E \sin(\theta_p(t) + \theta_{ps}) l_2 - Ip \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_p(t) \right) - \frac{1}{2} mt \left( 2 (l_2 \right. \\
 & + l_3)^2 \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_p(t) \right) + 2 l_4 (l_2 + l_3) \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_T(t) \right) \cos(\theta_T(t) - \theta_p(t)) - 2 l_4 (l_2 \\
 & + l_3) \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) \right) \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) - \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right) \right) \sin(\theta_T(t) - \theta_p(t)) \left. \right) \\
 & - \frac{1}{2} mturb \left( 2 (l_2 + l_3)^2 \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_p(t) \right) + 2 (l_4 + l_5) (l_2 + l_3) \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_T(t) \right) \cos(\theta_T(t) \right. \\
 & - \theta_p(t)) - 2 (l_4 + l_5) (l_2 + l_3) \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) \right) \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) - \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right) \right) \sin(\theta_T(t) \\
 & \left. - \theta_p(t)) \right) = 0
 \end{aligned}$$

(0-9)

$$\begin{aligned}
 & -mt l_4 (l_2 + l_3) \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) \right) \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right) \sin(\theta_T(t) - \theta_p(t)) - mturb (l_4 + l_5) (l_2 \\
 & + l_3) \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) \right) \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right) \sin(\theta_T(t) - \theta_p(t)) - kT (\theta_T(t) + \theta_{Ts} - \theta_p(t) - \theta_{ps}) \\
 & + mt g l_4 \sin(\theta_T(t) + \theta_{Ts}) + mturb g (l_4 + l_5) \sin(\theta_T(t) + \theta_{Ts}) - \frac{1}{2} mt \left( 2 \right. \\
 & l_4^2 \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_T(t) \right) + 2 l_4 (l_2 + l_3) \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_p(t) \right) \cos(\theta_T(t) - \theta_p(t)) - 2 l_4 (l_2 \\
 & + l_3) \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right) \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) - \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right) \right) \sin(\theta_T(t) - \theta_p(t)) \left. \right) \\
 & - \frac{1}{2} mturb \left( 2 (l_4 + l_5)^2 \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_T(t) \right) + 2 (l_4 + l_5) (l_2 + l_3) \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_p(t) \right) \cos(\theta_T(t) \right. \\
 & - \theta_p(t)) - 2 (l_4 + l_5) (l_2 + l_3) \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right) \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) - \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right) \right) \sin(\theta_T(t) \\
 & \left. - \theta_p(t)) \right) = 0
 \end{aligned}$$

Equações do movimento expandidas até o termo cúbico:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{dt^2} \theta_p(t) - 0.1810501124 \theta_T(t) + 0.3013277573 \theta_p(t) + 0.2378366015 \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right)^2 \theta_p(t) \quad (0-10) \\
 & - 0.2378366015 \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right)^2 \theta_T(t) + 0.1814905553 \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) \right)^2 \theta_p(t) \\
 & - 0.1814905553 \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) \right)^2 \theta_T(t) - 0.1461546827 \theta_p(t)^3 \\
 & + 0.3497187994 \theta_T(t) \theta_p(t)^2 - 0.3078687036 \theta_T(t)^2 \theta_p(t) + 0.08425831279 \theta_T(t)^3 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{dt^2} \theta_T(t) + 0.7399029386 \theta_T(t) - 1.043465651 \theta_p(t) - 1.622138684 \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right)^2 \theta_p(t) \quad (0-11) \\
 & + 1.622138684 \left( \frac{d}{dt} \theta_p(t) \right)^2 \theta_T(t) - 0.2378366015 \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) \right)^2 \theta_p(t) \\
 & + 0.2378366015 \left( \frac{d}{dt} \theta_T(t) \right)^2 \theta_T(t) + 0.3889696506 \theta_p(t)^3 \\
 & - 0.9718019315 \theta_T(t) \theta_p(t)^2 + 0.8381492592 \theta_T(t)^2 \theta_p(t) - 0.2047231930 \theta_T(t)^3
 \end{aligned}$$