

MOACIR JOSÉ QUINTINO  
Licenciado em Física

# ESTUDO MATEMÁTICO E COMPARATIVO DOS MÉTODOS DE ORIENTAÇÃO RELATIVA

Tese de Grau de Mestre em Ciências apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas do Departamento de Geociências, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

CURITIBA — PARANÁ

1975

À MINHA FAMÍLIA

## AGRADECIMENTOS

Ao professor Placidino Machado Fagundes  
por sua valiosa orientação e incentivos ,

ao professor Camil Gemael pelos incenti  
vos e colaboração ,

ao Conselho Nacional de Pesquisas pela  
bolsa de estudo concedida ,

ao Banco Nacional do Desenvolvimento -  
Econômico (BNDE) pela complementação do suporte  
financeiro ,

ã firma Serviços Aerofotogramétricos -  
Cruzeiro do Sul pelos elementos bibliográfica  
e fotográficos fornecidos ,

aos demais colegas que direta ou indire  
tamente contribuíram para o êxito deste traba-  
lho .

## SINOPSE

O presente trabalho é um estudo matemático comparativo da precisão dos métodos de orientação relativa . Como nos últimos anos surgiu uma grande variedade de processos de orientação relativa , para este estudo foram escolhidos , dentre eles , os seguintes : Schut , Thompson, U.S. Coast & Geodetic Survey , British Ordnance Survey , Van Der Weele e Herget , sendo que o primeiro deles é descrito com maior minudência . Como a fotogrametria analítica é bastante precisa e faz uso de matrizes , são apresentados , nos capítulos iniciais , alguns tópicos sobre correções das coordenadas fotogramétricas e sobre álgebra matricial , respectivamente .

## RÉSUMÉ

La présente monographie est une étude mathématique comparative de la précision des méthodes d'orientation relative . Comme pendant ces dernières années a surgi une grande variété de méthodes d'orientation , les suivantes d'entre elles ont été choisies pour cette étude ; Schut , Thompson , U.S. Coast & Geodetic Survey, Van Der Weele et Herget , la première est décrite en détail . Comme la photogrammétrie analytique est assez précise et fait emploi de matrices , quelques données à propos de corrections des coordonnées photogrammétriques et d'algèbre matricielle sont fournies aux chapitres du début.

## SUMÁRIO

TÍTULO.....	i
DEDICATÓRIA.....	ii
AGRADECIMENTOS.....	iii
SINOPSE.....	iv
RÉSUMÊ.....	v
SUMÁRIO.....	vi

### CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO.....	01
-----------------	----

### CAPÍTULO 2

#### MATRIZES ORTOGONAIS

2.1 - Introdução.....	03
2.2 - Definição.....	04
2.3 - Propriedades das matrizes ortogonais.....	06
2.4 - Raízes características das matrizes ortogonais.....	08
2.5 - Fôrmula de Cayley.....	11

### CAPÍTULO 3

#### ROTAÇÃO NO ESPAÇO TRI-DIMENSIONAL

3.1 - Introdução.....	13
3.2 - Teorema de Euler.....	15
3.3 - Rotação com três eixos fixos.....	18
3.4 - Resultante de várias rotações.....	21
3.5 - Matrizes de rotação.....	22
3.6 - Ângulos de Euler.....	27
3.7 - Matriz de Euler.....	28
3.8 - Pequenas rotações.....	30
3.9 - Matriz de Rodrigues.....	32

### CAPÍTULO 4

#### CORREÇÕES DAS COORDENADAS FOTOGRÁFICAS

4.1 - Introdução.....	36
4.2 - Reduções das medidas do comparador.....	37
4.3 - Correções das distorções do filme.....	38
4.4 - Correções das distorções das lentes.....	41
4.5 - Refração atmosférica.....	45

### CAPÍTULO 5

#### ORIENTAÇÃO RELATIVA

5.1 - Introdução.....	51
5.2 - Método preconizado por Schut.....	53
5.3 - Método preconizado por Thompson.....	64
5.4 - Método do U.S. Coast & Geodetic Survey.....	70
5.5 - Método de Van Der Weele.....	80
5.6 - Métodos diversos.....	86

CAPÍTULO 6

CONCLUSÃO..... 88

CAPÍTULO 7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 93

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

## INTRODUÇÃO

Os princípios da fotogrametria analítica foram estabelecidos bem antes do aparecimento da fotografia, com os estudos geométricos das leis da perspectiva e da geometria projetiva. A aplicação a fotografias aéreas, da fotogrametria analítica foi iniciada por S. Finsterwalder por volta de 1900, com a publicação de uma série de trabalhos | 1 |, contendo os princípios da moderna fotogrametria, incluindo os métodos de orientação relativa e absoluta em notação vetorial.

A fotogrametria analítica permaneceu esquecida por várias décadas, ressurgindo quase sessenta anos após os trabalhos de Finsterwalder. Com o aparecimento dos computadores eletrônicos, tomou novo impulso e surgiram vários trabalhos de diversos autores

Dentre os vários trabalhos publicados neste campo, a aerotriangulação foi e continua sendo o assunto de maior importância e sobre ele se tem desenvolvido os mais variados estudos. A aerotriangulação analítica compreende vários passos | 2 |, dentre os quais a ORIENTAÇÃO RELATIVA é o mais importante. Registra-se especificamente neste campo, uma grande quantidade de trabalhos, resultando o aparecimento de

diversos métodos e procedimentos .

Quando se realiza a orientação relativa de um par de fotografias , adota-se um sistema de eixos fixos . Esta orientação é então executada efetuando rotações em torno de três eixos fixos . Estas rotações podem ser traduzidas por matrizes de transformação , as quais são matrizes ortogonais . Por isso , são apresentados nos capítulos dois e três , alguns tópicos sobre matrizes ortogonais e sobre rotações no espaço tri-dimensional .

Como podemos depreender da farta literatura | 2 | sobre o assunto , a fotogrametria analítica atinge grande precisão por que as coordenadas medidas nas fotografias podem ser corrigidas dos erros sistemáticos de que estão eivadas , tais como : deformações do suporte da emulsão , distorções das lentes da câmara , refração atmosférica e curvatura da Terra , para torná-las tão precisas quanto possível . No capítulo quatro , é apresentado um estudo resumido de tais correções , mas não com o rigor com que é analisada em | 4 | , tomando como exemplo a refração atmosférica , mas pelo menos , apresentando as principais fórmulas e algumas deduções delas , para poderem ser melhor compreendidas .

No presente trabalho , são dados os principais métodos dos diversos existentes ou , pelo menos , os mais difundidos . A finalidade a que se propõe é a de oferecer a formulação matemática da orientação relativa e proceder uma análise comparativa dos principais métodos , com o propósito de desenvolver pesquisas no campo da aerotriangulação analítica.

CAPÍTULO 2

MATRIZES ORTOGONAIS

## MATRIZES ORTOGONAIS

### 2.1 - INTRODUÇÃO

No passado , vários matemáticos dedicaram ingentes esforços ao estudo das matrizes ortogonais . O primeiro a formular as propriedades das matrizes de transformação no espaço tri-dimensional foi Leonid Euler , em um trabalho publicado por volta de 1770 e apresentado na Academia de Ciências de Petersburg | 5 | . Outros grandes matemáticos , dentre eles : Cayley , Rodrigues e Hamilton também contribuíram para o desenvolvimento da teoria das matrizes ortogonais .

Todos esses estudos foram dirigidos principalmente para as transformações ortogonais no espaço tri-dimensionais . As transformações no espaço bi-dimensionais não apresentam qualquer dificuldade e os casos de transformações em espaços a mais de três dimensões foge do escopo do presente trabalho .

A aplicação prática das transformações ortogonais é de grande importância em levantamentos , di-



é uma matriz de transformação . Em notação matricial , o sistema (2.2.1) será escrito assim :

$$y = A x \quad (2.2.3)$$

A matriz  $A$  , definida na equação (2.2.2) é arbitrária . Podemos obter tipos especiais de transformações lineares , necessitando apenas que a matriz de transformação preencha certas condições. Então , as transformações são ortogonais se:

- a) - a matriz  $A$  for uma matriz quadrada ,
- b) - o módulo de um vetor  $x$  for igual ao módulo do vetor  $y$  .

Para uma transformação do tipo (2.2.3) satisfazer as duas condições acima , é necessário também, que resulte inalterado a norma dos vetores , ou seja :

$$y^T y = ( A x )^T A x = x^T A^T A x \quad (2.2.4)$$

impondo a condição de que :

$$y^T y = x^T x \quad (2.2.5)$$

comparando a (2.2.4) com a (2.2.5) , vemos que esta só será satisfeita se :

$$A^T A = I \quad (2.2.6)$$

onde  $I$  representa a matriz unitária de mesma ordem que  $A$  . Então podemos dizer que uma matriz é ortogonal se satisfizer a condição (2.2.6) .

Se , na equação (2.2.6) , pós-multiplicarmos ambos os membros por  $A^{-1}$  teremos ;

$$A^T A^{-1} = A^{-1}$$

$$A^T = A^{-1} \quad (2.2.7)$$

donde concluimos que a inversa de uma matriz ortogonal é igual a sua transposta.

Se, na equação (2.2.7), pré-multiplicarmos ambos os membros por  $A$ , teremos ;

$$A A^T = A A^{-1}$$

$$A A^T = I \quad (2.2.8)$$

que é uma definição equivalente à anterior, para uma matriz ortogonal. Donde podemos tirar que : o produto de uma matriz ortogonal por sua transposta é igual à matriz unitária de mesma ordem.

Quando o determinante de  $A$ , representado por  $|A|$ , for igual a  $+1$ , a matriz é chamada de ortogonal própria; quando  $|A|$  for igual a  $-1$ , ela é chamada de ortogonal imprópria. Qualquer matriz ortogonal imprópria pode ser expressa como o produto de uma rotação por uma reflexão  $|6|$ .

## 2.3- PROPRIEDADES DAS MATRIZES ORTOGONAIS

2.3.1 - A soma dos quadrados dos elementos em cada **fila** é igual a 1.

2.3.2 - A soma dos produtos dos elementos nas posições correspondentes a cada duas colunas é igual a zero.

Estas duas propriedades são facilmente demonstradas. Se tomarmos, por exemplo; uma matriz ortogonal de terceira ordem, pela equação (2.2.6), teremos ;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dessa igualdade podemos obter que:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$$

$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1$$

.....

$$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} + a_{31} a_{32} = 0$$

$$a_{11} a_{13} + a_{21} a_{23} + a_{31} a_{33} = 0$$

.....

2.3.3 - Um elemento de uma matriz ortogonal própria é igual ao seu cofator .

2.3.4 - O produto de duas ou mais matrizes ortogonais de mesma ordem é uma matriz ortogonal .

2.3.5 - Se  $A$  é ortogonal então  $A^T$  e  $A^{-1}$  também o são .

As propriedades (2.3.3) , (2.3.4) e (2.3.5) não serão demonstradas aqui , pois, suas demonstrações são fáceis e encontradas na maioria dos livros de algebra linear, como, por exemplo , | 7 | .

## 2.4 - RAÍZES CARACTERÍSTICAS DAS MATRIZES ORTOGONAIS

Podemos enunciar e demonstrar alguns lemas simples | 8 | sobre a natureza das raízes características das matrizes ortogonais .

2.4.1 - O módulo de toda raiz característica real de uma matriz ortogonal  $A$  é unitário .

Se  $\lambda$  é uma raiz característica , então existirá um vetor  $x$  , não nulo , tal que ;

$$\lambda x = A x$$

Representando por  $\bar{x}$  e  $\bar{A}$  o complexo conjugado de  $x$  e  $A$  respectivamente , teremos :

$$\bar{\lambda} \bar{x} = \bar{A} \bar{x}$$

se  $A$  for real , então  $\bar{A} = A$

consequentemente  $\bar{\lambda} \bar{x}^T = \bar{x}^T A^T$

de modo que;  $\bar{\lambda} \bar{\lambda} \bar{x}^T x = \bar{x}^T A^T A x = \bar{x}^T x$

Como  $x$  é um vetor não nulo , consequentemente ,  $\bar{x}^T x \neq 0$  , deste modo teremos :

$$\bar{\lambda} \lambda = 1$$

como  $\lambda$  é real  $\bar{\lambda} = \lambda$

$$|\lambda| = + (\bar{\lambda} \lambda)^{1/2} = 1$$

Se for não singular , teremos :

$$\lambda x = A x$$

implica que

$$A^{-1} x = x$$

Donde se infere que, se  $\lambda$  for uma raiz característica de  $A$ ,  $\lambda^{-1}$  será uma raiz característica de  $A^{-1}$ . Deste modo teremos ;

$$| \lambda^{-1} I - A | = | (\lambda I - A)^T | = | \lambda I - A^T | = 0 \quad (2.4.1)$$

as expressões entre barras da equação (2.4.1) e das equações seguintes representam um determinante e não módulo como vinhamos representando .

Como  $\lambda^{-1}$  é a outra raiz característica de  $A$ . Mas  $\lambda^{-1} = \lambda$ , e tanto  $\bar{\lambda}$  como  $\lambda$  são raízes características .

As raízes características complexas das matrizes ortogonais ocorrem em pares de complexos conjugados os quais podem ser expressos por ;

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha} \\ \lambda_2 &= \cos \alpha - i \sin \alpha = e^{-i\alpha} \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

2.4.2 - Uma matriz ortogonal real de terceira ordem tem, no mínimo, uma raiz característica real .

O auto valor da equação  $y = A x$  pode ser escrito da seguinte maneira :

$$| A - \lambda I | x = 0 \quad (2.4.3)$$

ou, na forma expandida ;

$$\begin{aligned}
 (a_{11} - \lambda) x + a_{12} y + a_{13} z &= 0 \\
 a_{21} x + (a_{22} - \lambda) y + a_{23} z &= 0 \\
 a_{31} x + a_{32} y + (a_{33} - \lambda) z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.4.4}$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as componentes do auto vetor  $x$ .

Em qualquer caso, sendo homogênea a equação (2.4.4), pode ter uma solução somente quando o determinante dos coeficientes se anula. Ou seja:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + (a_{22} - \lambda) + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + (a_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0
 \tag{2.4.5}$$

A equação cúbica para  $\lambda$  tem a forma convencional;

$$\lambda^3 + b \lambda^2 + c \lambda + d = 0
 \tag{2.4.6}$$

Pelo gráfico do polinômio cúbico, o mesmo deve atravessar os eixos pelo menos uma vez entre  $\lambda = -\infty$  e  $\lambda = +\infty$ , provando, desta maneira, o lema.

Vimos, pelo lema anterior (2.4.1), que estas raízes podem ser somente  $+1$  ou  $-1$ .

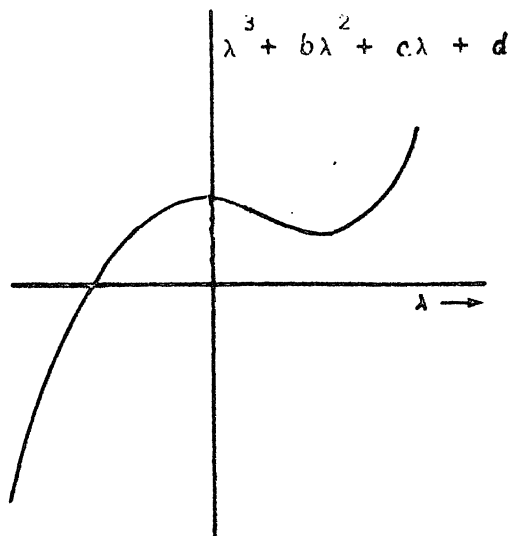


Fig. 2.4.1 - O determinante característico em função de  $\lambda$  .

## 2.5 - FÓRMULA DE CAYLEY

A importância da fórmula de Cayley está em permitir que os elementos sejam expressos por uma matriz ortogonal em termos de um conjunto de elementos arbitrariamente escolhidos, os quais sejam, os da matriz anti-simétrica.

A fórmula de Cayley diz que, se  $S$  é uma matriz anti-simétrica, então :

$$(I - S) (I + S)^{-1} \quad (2.5.1)$$

é ortogonal .

Uma matriz  $S$  é anti-simétrica se  $S = -S^T$ , isto é  $\delta_{ij} = -\delta_{ji}$  .

Vamos inicialmente mostrar que  $(I + S)$  é não singular e conseqüentemente  $(I + S)^{-1}$  existe. Pode ser mostrado em [7] que as raízes características não nulas de uma matriz anti-simétrica real são imaginárias e, conseqüentemente, as raízes características de  $S$  não podem ser unitárias. Portanto não podemos ter:

$$|I - S| = 0$$

$$|I + S| = |(I - S)| = |I - S| \neq 0$$

fazendo  $R = (I - S)(I + S)^{-1}$

$$R^T = [(I - S)(I + S)^{-1}]^T$$

$$= [(I + S)^{-1}]^T (I - S)^T = (I + S)(I - S)^{-1}$$

$$= (I - S)^{-1} (I + S)$$

$$R R^T = (I - S)^{-1} (I + S) (I - S) (I + S)^{-1}$$

mas como  $(I + S)(I - S) = I - S^2 = (I - S)(I + S)$

$$R R^T = (I - S)^{-1} (I - S) (I + S) (I + S)^{-1}$$

$$R R^T = I \cdot I = I$$

logo  $R$  é ortogonal.

## ROTAÇÃO NO ESPAÇO TRI-DIMENSIONAL

### 3.1 - INTRODUÇÃO

A orientação de uma fotografia em relação a outra, consiste em posicionar-la de maneira tal que este posicionamento consiste de uma ou várias rotações. Podemos então considerá-la como sendo um corpo rígido e aplicar a teoria do deslocamento dos corpos rígidos em relação a um sistema de eixos fixos.

Podemos dizer que um corpo material é rígido quando, nêle, as distâncias mútuas de todos os pares de pontos específicos são invariáveis, valendo dizer que o corpo não expande, contrai ou varia a sua forma, mesmo durante o processo de transposição do corpo de sua posição inicial à sua posição final.

Se um corpo rígido é levado de uma posição à outra, a variação da sua posição é chamada de: Deslocamento do corpo. Certas espécies de deslocamento recebem nomes específicos | 10 |; deste modo, se as posições, no espaço, de todos os pontos do corpo que estão sobre uma reta  $L$

não se alteram , o deslocamento é então chamado de rotação sobre a linha  $L$  . Se a posição no espaço de um ponto qualquer  $P$  , do corpo , é inalterada , o deslocamento é chamado de rotação sobre o ponto  $P$  ; e se as linhas ligando as posições, inicial e final de cada um dos pontos do corpo perfazem um conjunto de retas paralelas de comprimento  $l$  , de modo que a orientação do corpo no espaço permaneça inalterada , o deslocamento é então chamado de translação paralela à direção das linhas , ao longo de uma distância  $l$  .

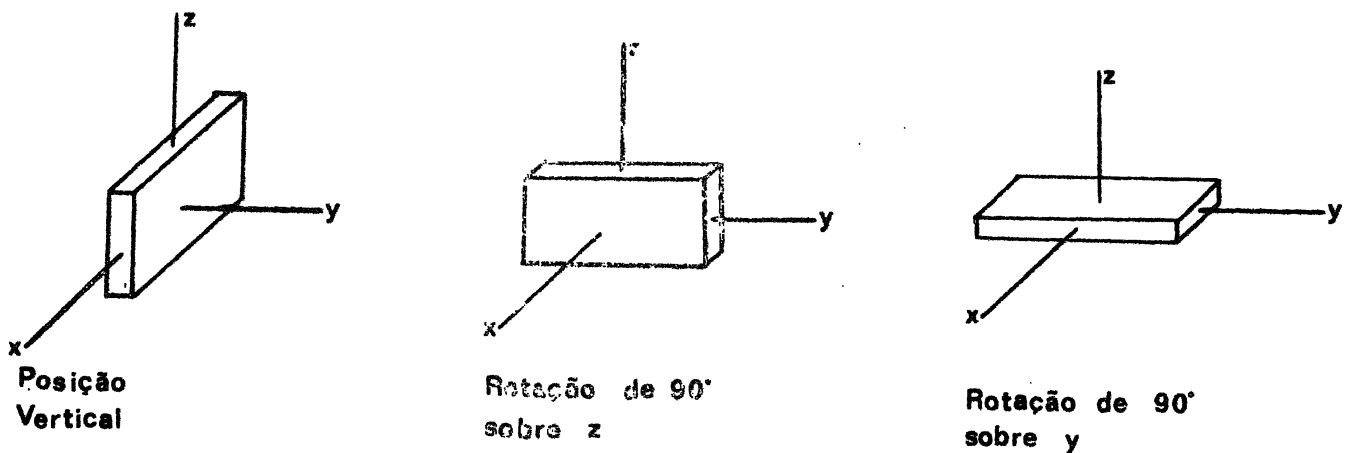


Fig. 3.1.1 - Efeito de duas rotações realizadas em uma determinada ordem .

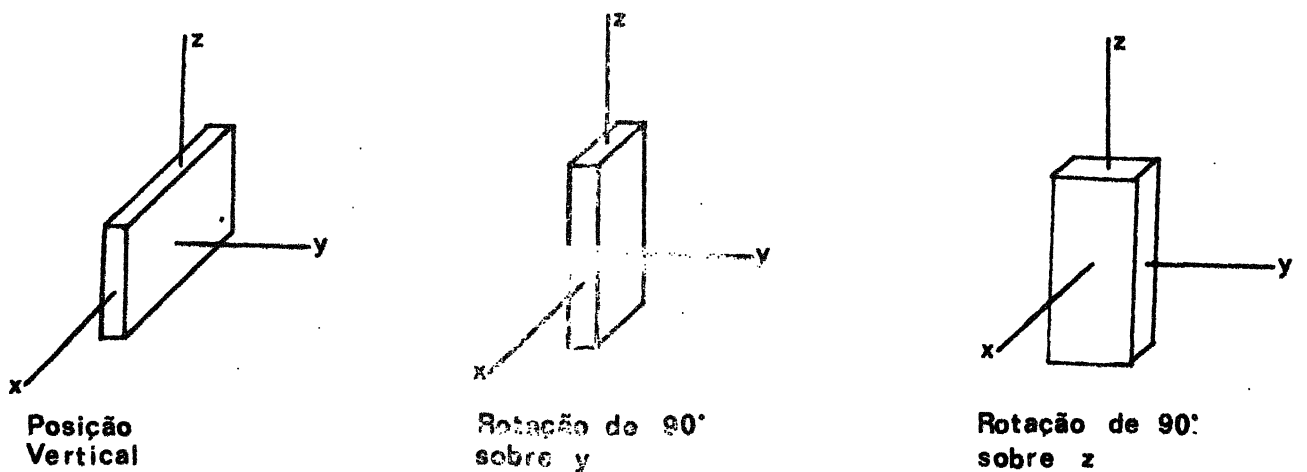


Fig. 3.1.2 - As duas rotações mostradas na figura anterior , mas na ordem inversa .

### 3.2 - TEOREMA DE EULER

Com as bases matemáticas introduzidas no capítulo anterior, podemos agora enunciar um importante teorema sobre o movimento dos corpos rígidos. Tal teorema foi estabelecido por Euler e diz que: " Todos os deslocamentos possíveis de um corpo rígido, no qual um dos pontos permaneça fixo, se resumem numa rotação ".

Seja  $P$ , figura (3.2.1), um ponto genérico de um corpo rígido com coordenadas  $(x, y, z)$ , referenciadas a um sistema fixo de eixos retangulares com a origem em  $O$ . Seja o corpo deslocado, de modo que  $P$  se mova para  $P'$ , com coordenadas  $(x', y', z')$ , permanecendo o ponto origem fixo.

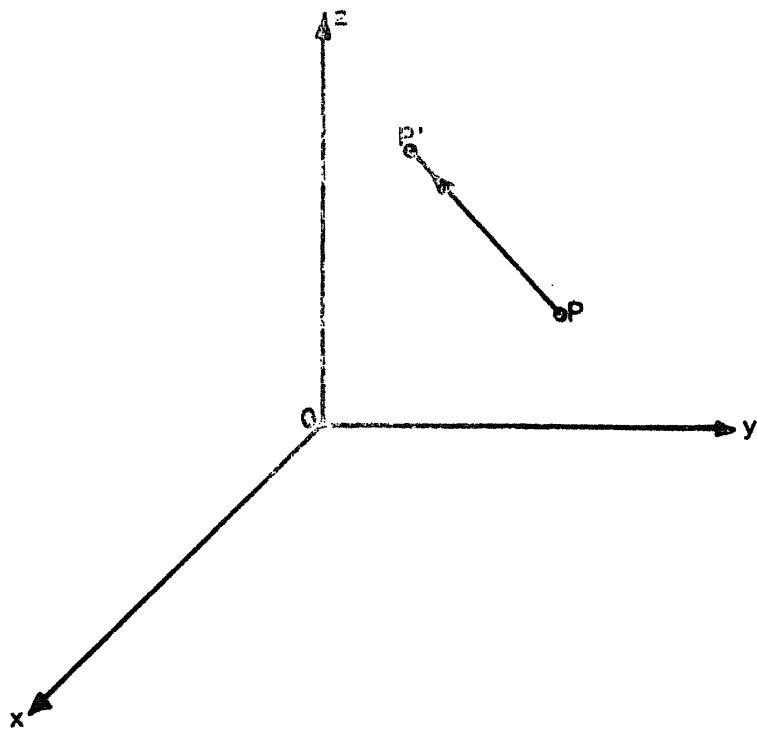


Fig. (3.2.1)

Qualquer mudança nas coordenadas ' de P resultará em um deslocamento que é dado por :

$$p' = f(p) \quad (3.2.1)$$

Onde  $p$  e  $p'$  são os vetores coluna das coordenadas de P e P' respectivamente . Se o ponto de origem permanecer fixo , teremos , então :

$$f(0) = 0 \quad (3.2.2)$$

Qualquer função  $f(p)$  que preserve a distância e para qual  $f(0) = 0$  será uma transformação ortogonal , e vice-versa . Conseqüentemente , o deslocamento de um corpo , tal que um ponto permaneça fixo e as separações são preservadas , é , algébricamente representado por uma transformação linear .

$$p' = A p \quad (3.2.3)$$

Sendo A ortogonal .

A separação deve também ser preservada em todos os estágios do contínuo processo de levar P a P' . Se , agora , considerarmos o deslocamento contínuo de P' de volta a P no sentido oposto , os elementos da matriz A devem continuamente se aproximarem daqueles de uma matriz ortogonal , que não represente um deslocamento . Esta matriz será evidentemente a matriz unitária I . Agora se  $A = I$  , então :

$$p' = I p = p \quad (3.2.4)$$

Qualquer outra matriz não tem a propriedade da equação (3.2.4) .

O determinante de uma matriz ortogonal pode ser  $+1$  ou  $-1$ , e não admite outro valor. Enquanto que  $I$  tem apenas o determinante  $+1$ , portanto, é impossível que  $A$  possa continuamente, se aproximar de  $I$  se o seu determinante for  $-1$ . Concluímos que todos os deslocamentos de um corpo rígido com a origem fixa são representados por transformações ortogonais próprias.

Consideremos agora na fig. (3.2.2), dois pontos quaisquer  $A$  e  $B$ , sobre uma linha fixa passante por  $O$ . Seja  $P$  outro ponto qualquer não pertencente a esta linha.

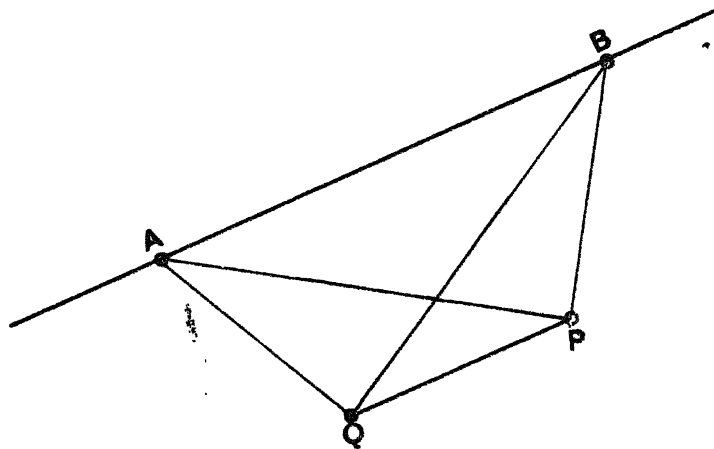


Fig. (3.2.2)

Desde que a transformação deixe  $AP$  e  $BP$  invariante e  $A$  e  $B$  fixos, o lugar de  $P$  será um círculo normal a  $AB$ . Análogamente, o lugar de  $Q$  é também um círculo normal a  $AB$ . Mas  $PQ$  é invariante e, conseqüentemente, os planos  $ABQ$  e  $ABP$  giram ao redor de  $AB$  através do mesmo ângulo. Desde que este argumento seja aplicado a todos os pares de pontos do corpo e não sobre a linha  $AB$ , portanto deixa fixa uma única linha de pontos passando pela origem.

Deste modo, mostramos que todo deslocamento contínuo de um corpo rígido com um ponto fixo pode

ser representado por transformações ortogonais e que estas transformações são rotações . Podemos tirar como corolário do Teorema de Euler , o teorema de Chasle , o qual diz que : " O deslocamento geral de um corpo rígido é uma translação mais uma rotação " , e que pode ser facilmente provado em | 11 | .

### 3.3 - ROTAÇÃO COM TRÊS EIXOS FIXOS

Um corpo rígido com um ponto fixo' pode ser deslocado de uma dada posição por uma simples rotação , como vimos na seção anterior , necessitando apenas encontrar um determinado eixo e uma determinada rotação . Nem todos os deslocamentos dos corpos rígidos são possíveis com um eixo fixo . O ' caso de dois eixos fixos não apresenta dificuldades e não há grande interesse ; portanto trataremos somente dos deslocamentos com três eixos fixos .

Vamos escolher os eixos AO , OB e OC da figura (3.3.1) , representados respectivamente pelos vetores unitários  $\vec{a}$  ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  . Sejam as rotações tomadas ao redor' destes eixos na sequência das letras . Primeiro vamos mostrar que se todos os deslocamentos são possíveis , então OB deve ser necessariamente perpendicular a OA e OC .

Vamos , inicialmente , levar um ' ponto de A para C . Após a primeira rotação A , teremos :

$$A a = a'$$

Após a segunda rotação B , ficará :

$$B a = a'$$

E , após a terceira rotação C , teremos :

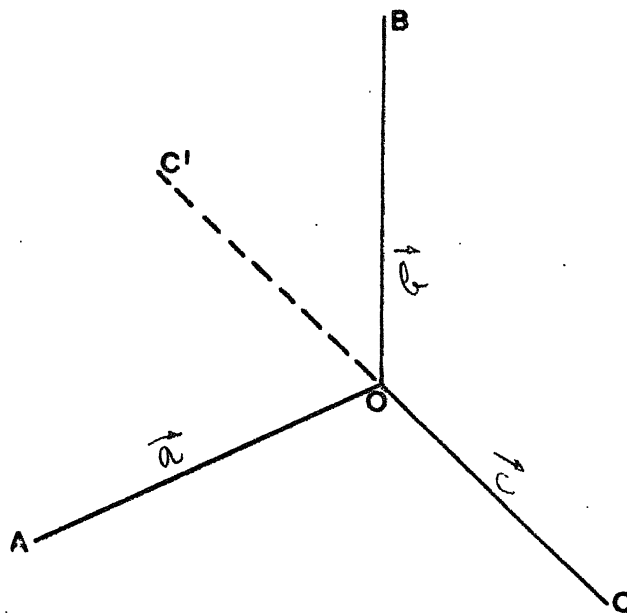


Fig. (3.3.1)

$$C a' = c$$

e 
$$a' = C^T c = c$$

Consequentemente , 
$$b^T c = b^T a' = b^T B a = b^T a$$

e OB é igualmente inclinado a OA e OC .

Devemos também tomar o ponto inicialmente de A para C' , estando C' sobre OC e produzindo uma distância unitária além de O . O vetor das coordenadas de C' é  $-\vec{c}$  . Pelo mesmo argumento , teremos :

$$b^T c = - b^T a$$

e 
$$2 b^T a = 0$$

Deste modo ,  $OB$  é perpendicular a  $OA$  e conseqüentemente , a  $OC$  .

A condição de perpendicularidade é suficiente . Mostraremos que as rotações sobre  $OA$  ,  $OB$  e  $OC$  podem levar dois pontos inicialmente coincidirem com  $A$  e  $B$  em qualquer posição , consistentes com as distâncias da origem e separação . Se iniciarmos com dois pontos  $P$  e  $Q$  arbitrariamente colocados , figura (3.3.2) , mas sujeito ao requisito de que  $OP$  e  $OQ$  sejam de comprimentos unitários , tal que ,  $PQ = AB$  , podemos invertendo as rotações e as suas seqüências , levar  $P$  e  $Q$  à coincidência com  $A$  e  $B$  , respectivamente .

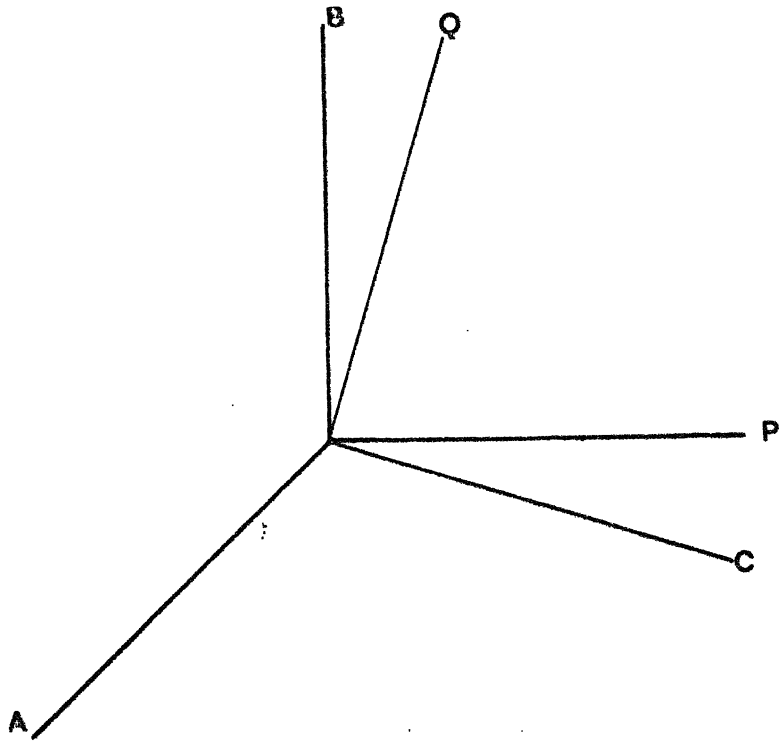


Fig. (3.3.2)

Notamos que o plano AOC divide todo espaço em duas partes . Se considerarmos qualquer ponto do corpo rígido , P , ele estará em qualquer lugar , ou em uma rotação através de OC , a qual está no plano , levará de uma metade do espaço a outra , e assim , levaremos o ponto através do plano. Quando ele está em AOC , OP será perpendicular a OB , que é normal ao plano . Uma rotação sobre OB levará P a coincidir com A , sem afetar a coincidência de P e A . Efetuando estas rotações em sentido contrário , podemos levar os dois pontos , inicialmente coincidir com A e B , em uma posição geral P e Q .

### 3.4 - RESULTANTE DE VÁRIAS ROTAÇÕES

Vamos considerar agora uma extensão do que já vimos anteriormente , ou seja a resultante de várias rotações . Sejam as rotações representadas pelas matrizes ortogonais  $R_1 ; R_2 \dots \dots \dots R_n$  , tomadas na mesma ordem . Seja o vetor das coordenadas de P representado por  $p$  . Então após a primeira rotação , teremos;

$$p_1 = R_1 p$$

após a segunda  $p_2 = R_2 p_1 = R_2 R_1 p$

a resultante será então ;

$$p_n = R_n \dots \dots \dots R_2 R_1 p$$

Mas o deslocamento de P , de  $p$  a  $p_n$  é equivalente , pelo teorema de Euler, a uma simples rota-

ção , cuja matriz representativa  $R$  é dada por ;

$$R = R_n \dots\dots\dots R_2 R_1$$

e como já vimos anteriormente , a resultante desse produto é uma matriz ortogonal .

### 3.5 - MATRIZES DE ROTAÇÃO

Vamos mostrar agora as matrizes que representam as rotações sobre os eixos  $OX$  ,  $OY$  e  $OZ$  . Considerando dois sistemas de eixos cartesianos ortogonais  $( X , Y , Z )$  e  $( x' , y' , z' )$  , um vetor unitário ao longo do

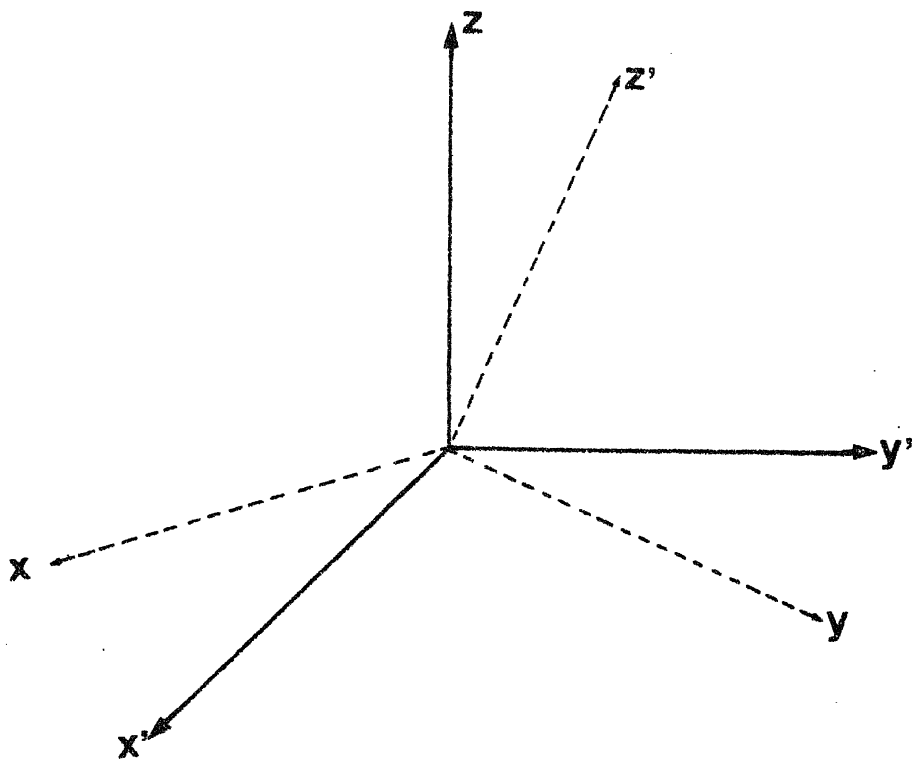


Fig. (3.5.1) - Sistemas de coordenadas Cartesianas

do eixo  $x'$  ( $\vec{i}'$ ), pode ser decomposto em componentes ao longo dos eixos  $(X, Y, Z)$ , pela técnica usual de projeção. O mesmo pode se fazer para os vetores unitários ao longo dos eixos  $y'$  ( $\vec{j}'$ ) e  $z'$  ( $\vec{k}'$ ), ou seja:

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= \vec{i} \cos(x',x) + \vec{j} \cos(x',y) + \vec{k} \cos(x',z) \\ \vec{j}' &= \vec{i} \cos(y',x) + \vec{j} \cos(y',y) + \vec{k} \cos(y',z) \\ \vec{k}' &= \vec{i} \cos(z',x) + \vec{j} \cos(z',y) + \vec{k} \cos(z',z)\end{aligned}\tag{3.5.1}$$

Por conveniência, estes co-senos, os quais são os co-senos diretores, serão designados por:

$$\begin{array}{lll}\cos(x',x) = l & \cos(y',x) = m & \cos(z',x) = n \\ \cos(x',y) = l' & \cos(y',y) = m' & \cos(z',y) = n' \\ \cos(x',z) = l'' & \cos(y',z) = m'' & \cos(z',z) = n''\end{array}$$

Podemos reescrever a equação (3.5.1), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= \vec{i} l + \vec{j} l' + \vec{k} l'' \\ \vec{j}' &= \vec{i} m + \vec{j} m' + \vec{k} m'' \\ \vec{k}' &= \vec{i} n + \vec{j} n' + \vec{k} n''\end{aligned}\tag{3.5.2}$$

Se considerarmos um vetor  $V$  cujas componentes são funções da sua posição no espaço, então:

$$\begin{aligned}V(x,y,z) &= \vec{i} v_x + \vec{j} v_y + \vec{k} v_z = V'(x',y',z') = \\ &= \vec{i}' v'_x + \vec{j}' v'_y + \vec{k}' v'_z\end{aligned}\tag{3.5.3}$$

Desde que os pontos possam ser dados pelas coordenadas  $(x,y,z)$  e

pelas coordenadas  $(x', y', z')$ . A equação (3.5.3) pode ser separada em três equações escalares, ou seja;

$$\begin{aligned} V_{x'} &= l V_x + l' V_y + l'' V_z \\ V_{y'} &= m V_x + m' V_y + m'' V_z \\ V_{z'} &= n V_x + n' V_y + n'' V_z \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Em particular, estas relações para as coordenadas de um ponto  $(x, y, z)$  e  $(x', y', z')$ , ficarão:

$$\begin{aligned} x' &= l x + l' y + l'' z \\ y' &= m x + m' y + m'' z \\ z' &= n x + n' y + n'' z \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

ou, em linguagem matricial;

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & l' & l'' \\ m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.5.6)$$

A equação (3.5.6) pode ser representada por:

$$x' = A x \quad (3.5.7)$$

Lembramos porém que os nove co-senos diretores da matriz  $A$  não são independentes em se tratando de eixos ortogonais.

Consideremos uma rotação em torno do eixo  $Ox$ , sobre o qual um ponto  $P$ , de coordenadas  $(x, y, z)$  é levado a  $P'$  cujas coordenadas são  $(x', y', z')$ . Da figura (3.5.2), podemos tirar que :

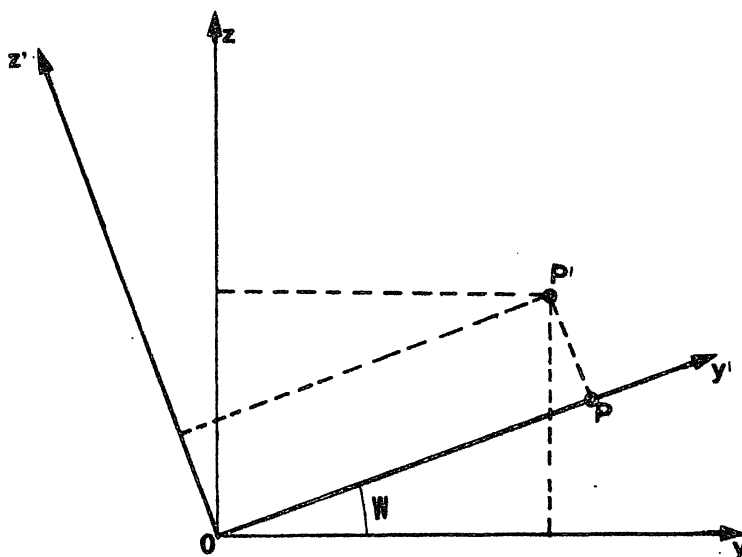


Fig. (3.5.2) - Rotação em torno do eixo  $x$

$$m = n = l' = l'' = 0$$

$$m' = n'' = \cos \omega$$

$$n' = -\text{sen} \omega$$

$$m'' = \text{sen} \omega$$

A equação (3.5.6) pode, agora, ser expressa da seguinte forma:

$$x' = R_1(\omega) x \quad (3.5.8)$$

ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \text{sen } \omega \\ 0 & -\text{sen } \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (3.5.9)$$

onde a matriz  $R_1(\omega)$ , é uma matriz ortogonal representando uma rotação em torno do eixo  $x$ .

Podemos, facilmente obter as outras matrizes de rotação em torno dos eixos  $y$  e  $z$ , que são:

$$R_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\text{sen } \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.5.10)$$

$$R_3(\kappa) = \begin{bmatrix} \cos \kappa & \text{sen } \kappa & 0 \\ -\text{sen } \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembramos que o ângulo de rotação será considerado positivo quando a rotação for anti-horária e o sistema for dextrógiro.

### 3.6 - ÂNGULOS DE EULER

Já vimos na seção (3.5) , que os elementos  $a_{ij}$  da equação (3.5.6) não são independentes , mas é possível exprimi-los em função de três parâmetros .

A transformação de um dado sistema cartesiano em outro pode ser obtido por meio de três rotações sucessivas , formando uma dada sequência ; e os ângulos de rotações são conhecidos como ângulos de Euler , figura (3.6.1) .

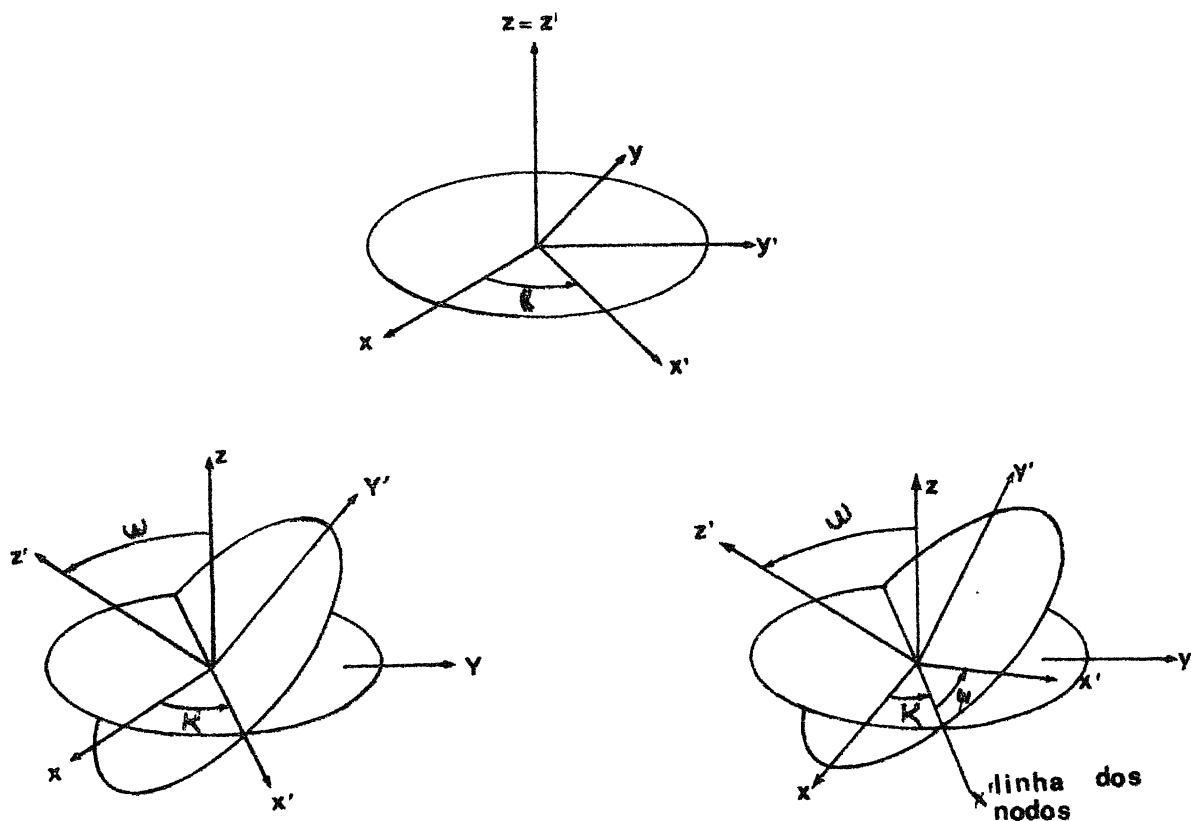


Fig. (3.6.1) - Rotações definindo os ângulos de Euler .

Infelizmente , não há uniformidade nas literaturas sobre a definição dos ângulos de Euler . As diferenças não são grandes , principalmente quanto a notação , mas as vezes o suficiente para gerar certa confusão .

Os elementos de uma transformação  $A$  , podem ser obtidos escrevendo a matriz  $A$  como o triplo produto das rotações individuais , ou seja

$$x' = R_3(\phi) R_1(\kappa) R_3(\omega) x \tag{3.6.1}$$

fazendo ,  $A = R_3(\phi) R_1(\kappa) R_3(\omega)$

Teremos :  $x' = A x$

### 3.7 - MATRIZ DE EULER

Vamos agora encontrar uma matriz devido a Euler , a qual representa uma rotação ao redor de um dado eixo e segundo um dado ângulo .

Designaremos os eixos de rotação pelo seus três co-senos diretores e a magnitude das rotações por  $\theta$  . Na figura (3.7.1) , escolhemos um conjunto de eixos  $Ox'$  ,  $Oy'$  e  $Oz'$  , de maneira tal , que o eixo  $Ox'$  coincida com o eixo de rotação , cujos co-senos diretores são  $(l, m, n)$  . A matriz  $R$  , que define a rotação dos eixos , tem então ,  $(l, m, n)^T$  , como primeira coluna , e formando as três colunas um conjunto de vetores ortonormais .

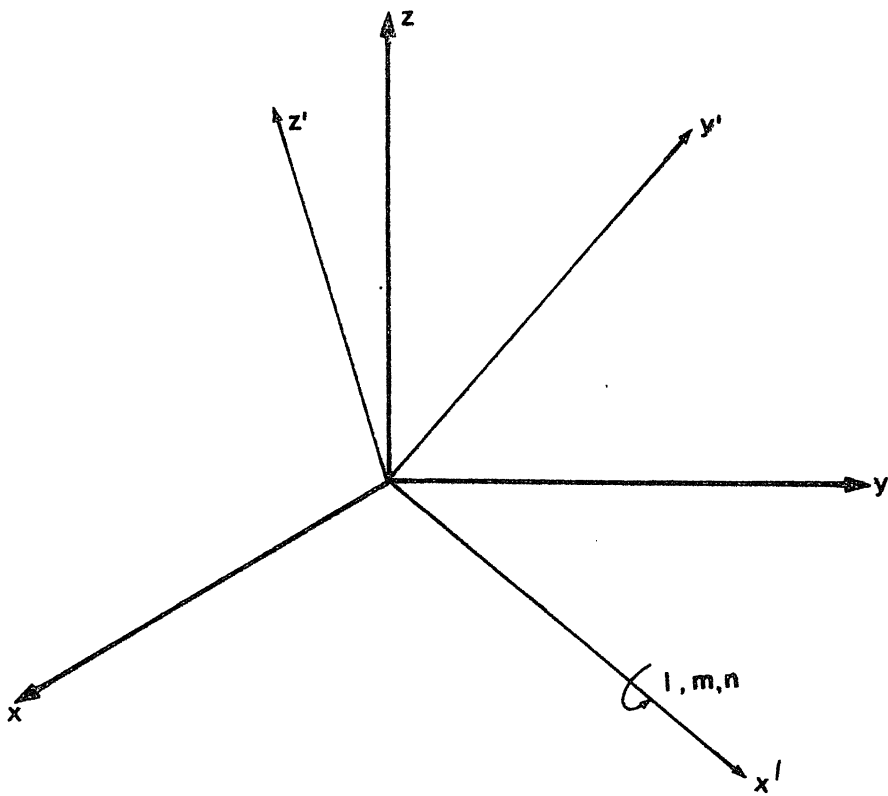


Fig. (3.7.1)

Seja  $R$  definido por ;

$$R = \begin{bmatrix} l & l' & l'' \\ m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \end{bmatrix} \quad (3.7.1)$$

A matriz de rotação  $A'$ , relativa ao sistema girado é igual a  $R_1(\theta)$ , como já vimos anteriormente. Se  $E$  é a matriz de Euler, então :

$$A' = R^T E R \quad (3.7.2)$$

$$E = R A^0 R^T \quad (3.7.3)$$

substituindo  $R$ ,  $A^0$  e  $R^T$  pelos seus respectivos valores e efetuando a multiplicação teremos ;

$$E = \begin{bmatrix} l^2 + (1-l^2) \cos \theta & lm(1-\cos\theta) - n \operatorname{sen}\theta & ln(1-\cos\theta) + \operatorname{sen}\theta \\ m l(1-\cos\theta) + n \operatorname{sen}\theta & m^2 + (1-m^2) \cos \theta & mn(1-\cos\theta) - \operatorname{sen}\theta \\ n l(1-\cos\theta) - m \operatorname{sen}\theta & nm(1-\cos\theta) + l \operatorname{sen}\theta & n^2 + (1-n^2) \cos \theta \end{bmatrix}$$

.....(3.7.4)

para se chegar à equação (3.7.4), foram feitas as seguintes substituições ;

$$l'^2 + l''^2 = 1 - l^2$$

$$l' m' + l'' m'' = - l m$$

$$l'' m' - l' m'' = - n$$

as quais nada mais são que as propriedades decorrentes das matrizes ortogonais .

### 3.8 - PEQUENAS ROTAÇÕES

Uma rotação infinitesimal é uma transformação ortogonal na qual as componentes de um vetor -

são quase as mesmas em ambos os sistemas . A matriz de Euler é facilmente aproximada para pequenas rotações ; fazendo  $\text{sen}\theta = \theta$ ,  $\text{cos}\theta = 1$  , então , a equação (3.7.4) , tornar-se-á :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -n\theta & m\theta \\ n\theta & 1 & -l\theta \\ -m\theta & l\theta & 1 \end{bmatrix} \quad (3.8.1)$$

A qual pode ser escrita sob a forma :

$$E = I + \theta S \quad (3.8.2)$$

Onde  $S$  é uma matriz anti-simétrica . Considerando a resultante de duas pequenas rotações  $E_1$  e  $E_2$  . Teremos :

$$E_2 E_1 = ( I + \theta_2 S_2 ) ( I + \theta_1 S_1 ) = I + \theta_2 S_2 + \theta_1 S_1 + \theta_2 \theta_1 S_2 S_1$$

Dentro de uma certa aproximação , podemos negligenciar o último termo e , conseqüentemente , teremos :

$$E_2 E_1 = I + \theta_2 S_2 + \theta_1 S_1 = I + \theta_1 S_1 + \theta_2 S_2 = E_1 E_2$$

Deste modo , concluímos que as pequenas rotações são comutativas. Se nós fizermos uma aproximação , as equações (3.5.10) , ficarão

$$R_1(\omega) = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente, podemos proceder para  $R_2(\phi)$  e  $R_3(\kappa)$ . Para pequenas rotações  $\omega$ ,  $\phi$  e  $\kappa$ , teremos:

$$\omega = l \theta = l \theta$$

$$\phi = m \theta = m \theta$$

$$\kappa = n \theta = n \theta$$

Se  $\theta$  é uma rotação genérica. Efetuando as substituições acima a equação (3.8.1), ficará:

$$E = I + \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & \phi \\ \kappa & 0 & -\omega \\ \phi & \omega & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8.3)$$

### 3.9 - MATRIZ DE RODRIGUES

A matriz de Rodrigues é muito útil porque ela é uma matriz ortogonal de terceira ordem, em termos de três parâmetros independentes, e sem as funções trigonométricas. Esta matriz é obtida diretamente da matriz de Euler. Se os três parâmetros ( $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ) forem pequenos e negligenciarmos os termos de segunda ordem da matriz (3.7.4), pode-se facilmen-

te se provar em | 12 | , que :

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix} = 2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (3.9.1)$$

onde  $\begin{bmatrix} \ell & m & n \end{bmatrix}^T$  é a primeira coluna da matriz ortogonal (3.7.1) . Da equação (3.9.1) podemos tirar que :

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.9.2)$$

e , da trigonometria

$$1 + \cos \theta = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \quad (3.9.3)$$

Substituindo a (3.9.2) na (3.9.3) , tem-se ;

$$1 + \cos \theta = \frac{2}{1 + \frac{1}{4} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)} = \frac{2}{\Delta} \quad (3.9.4)$$

Tirando o fator  $(1 + \cos \theta)$  da matriz de Euler o termo  $e_{11}$  , ficará :

$$\begin{aligned} \ell^2 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} &= \ell^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} (\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2) \end{aligned}$$

mas como há um fator escalar  $2/\Delta$  fora de toda matriz, então multiplicando  $e_{11}$  por 2, teremos;

$$e_{11} = 1 + \frac{1}{4} (\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2)$$

e análogamente para  $e_{22}$  e  $e_{33}$ . Da mesma maneira podemos tirar;

$$\frac{1}{2} e_{12} = \ell m \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} - \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$$

$$\frac{1}{2} e_{12} = \frac{1}{4} \lambda \mu - \frac{1}{2} \nu$$

$$e_{12} = \frac{1}{2} \lambda \mu - \nu$$

e análogamente para todos os termos  $e_{ij}$  ( $i \neq j$ ). Substituindo todos os  $e_{ij}$  por seus valores, teremos;

$$R = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta' + \frac{1}{2} \lambda^2 & -\nu + \frac{1}{2} \lambda \mu & \mu + \frac{1}{2} \lambda \nu \\ \nu + \frac{1}{2} \mu \lambda & \Delta' + \frac{1}{2} \mu^2 & -\lambda + \frac{1}{2} \mu \nu \\ -\mu + \frac{1}{2} \nu \lambda & \lambda + \frac{1}{2} \nu \mu & \Delta' + \frac{1}{2} \nu^2 \end{bmatrix} \quad (3.9.5)$$

onde  $\Delta' = 1 - \frac{1}{4} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 2 - \Delta$

A equação (3.9.5) é chamada matriz de Rodrigues e, também pode ser colocada na forma :

$$R = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta^2 & -v & \mu \\ v & \Delta^2 & -\lambda \\ -\mu & \lambda & \Delta^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu & v \end{bmatrix} \quad (3.9.6)$$

- x -

CAPÍTULO 4

CORREÇÃO DAS COORDENADAS FOTOGRÁFICAS

## CORREÇÃO DAS COORDENADAS FOTOGRÁFICAS

### 4.1 - INTRODUÇÃO

É sabido que os métodos analíticos são os mais precisos de todos os métodos fotogramétricos, porém, o significado dos métodos analíticos é ainda maior, pois eles constituem também as bases teóricas de outros métodos para a solução de problemas fotogramétricos, tais como; o gráfico, o analógico e o semi-analítico.

Dentre esses métodos, o problema que nos interessa neste trabalho, é a aerotriangulação analítica. Este procedimento de aerotriangulação tem sido considerado um método em potencial desde o início do mapeamento fotográfico, porém, antes do advento dos computadores eletrônicos, a sua execução era praticamente impossível porque o número de equações para solucioná-lo e o tempo de cálculo eram imensos, se executado manualmente ou em calculadores. Com o aparecimento dos

computadores eletrônicos a aerotriangulação analítica ressurgiu.

De vários passos de uma aerotriangulação, o que nos interessa, particularmente, é a orientação relativa, que é o objetivo deste trabalho. Para calcular os parâmetros de orientação relativa é necessário que as coordenadas dos pontos lidas no comparador, tenham sido depuradas de todos os erros sistemáticos, tais como: distorções das lentes da câmara, deformações do suporte da emulsão fotográfica, refração atmosférica e curvatura da Terra.

#### 4.2 - REDUÇÃO DAS MEDIDAS DO COMPARADOR A COORDENADAS FOTOGRÁFICAS

Os estereo e mono comparadores são os instrumentos mais indicados para obter as medidas necessárias em aerotriangulação analítica. Na maioria desses instrumentos | 13 |, a posição de um ponto-imagem no plano de uma fotografia pode ser determinada em relação a um sistema de coordenadas retangulares cuja origem, fica em geral, fora da fotografia.

Como a aerotriangulação analítica requer que as coordenadas tenham a origem no ponto principal, é necessário, então reduzi-las ao sistema de coordenadas da fotografia. Estas coordenadas, por conseguinte, são obtidas subtraindo as coordenadas instrumento do ponto principal, das coordenadas instrumento do ponto-imagem. O ponto principal não é marcado sobre a fotografia e, conseqüentemente, suas coordenadas não são medidas. É necessário, então, medir as marcas fiduciais e calcular as coordenadas do centro fiducial como a média das correspondentes coordenadas dessas marcas. As coordenadas do ponto principal são, então, obtidas através daquelas do centro fiducial, com a ajuda dos dados de calibração da câmara. Na prática esses dois pontos podem ser considerados coincidentes.

Em alguns estereo-comparadores para a fotografia da direita são lidas as paralaxes em vez das pró

prias coordenadas dos pontos-imagem , neste caso , as paralaxes devem ser convertidas às coordenadas instrumento , adicionando ou subtraindo delas as coordenadas lidas na fotografia da esquerda.

#### 4.3 - CORREÇÃO DAS DEFORMAÇÕES DO FILMES

Qualquer material para filmes aéreos sofre variações de maneira não uniforme , entre o tempo em que a fotografia é exposta e o tempo em que a mesma é preparada no laboratório.

Poucas câmaras fotogramétricas são equipadas no plano focal , com uma placa de cristal dotada de um reticulado, o qual se reproduz em cada negativo . Câmaras com tais dispositivo facilitam a correção das deformações dos filmes e, conseqüentemente , dos seus efeitos sobre as coordenadas dos pontos , lidas no comparador . Na ausência dessa placa reticulada, a evidência das deformações é revelada pela comparação das coordenadas das marcas fiduciais , medidas no comparador, com as fornecidas pelos fabricantes das câmaras, determinadas em laboratórios , durante a calibração .

As marcas fiduciais são numeradas no sentido horário , de 1 a 4 . As coordenadas das marcas fiduciais e do ponto principal da câmara , constantes do certificado de calibração, serão designadas neste trabalho por ;  $X_j$  ,  $Y_j$  ,  $X_p$  e  $Y_p$  , respectivamente . As coordenadas das 4 marcas , no sistema de coordenadas do comparador , serão designadas pelas letras  $x_j$  ,  $y_j$  e os termos  $x_i$  ,  $y_i$  ,  $i = 1.....n$  representam as coordenadas de qualquer ponto sobre a fotografia medidas no comparador .

Uma das marcas fiduciais é arbitrariamente escolhida como a origem do sistema de coordenadas . Nosso objetivo, agora, é determinar os coeficientes de uma transformação que converterá as coordenadas  $x_i$  ,  $y_i$  , da imagem , em coordenadas corrigidas,  $x_i^!$  ,  $y_i^!$  ; ao mesmo tempo em que converterá  $x_j$  ,  $y_j$  nos correspondentes  $X_j$  ,  $Y_j$  que são va

lores fixos das 4 marcas fiduciais para cada fotografia , e final<sub>mente</sub> , transladar a origem do sistema de coordenadas para o ponto principal .

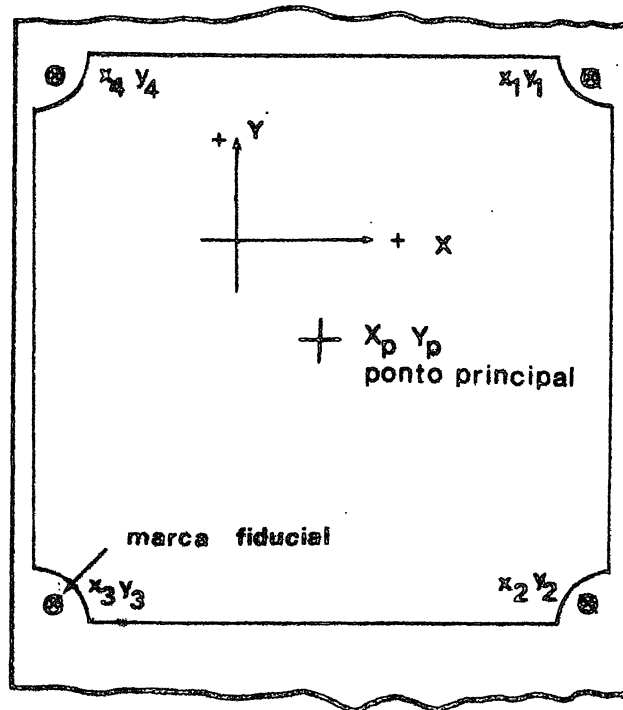


Fig.(4.3.1) Diagrama da fotografia indicando a ordem numérica das marcas fiduciais .

Para efetuar estas transformações<sup>o</sup> consideremos os seguintes passos :

O primeiro passo é fazer , por exemplo , a marca fiducial número 3 como a origem , então ,  $x_3 = y_3 = 0$  , posteriormente subtrair  $x_3$  e  $y_3$  ( valores das coordenadas do vértice 3 lido no comparador ) das coordenadas do ponto imagem (  $x_i, y_i$  ) e chamar as novas coordenadas de  $u_i$  e  $v_i$  , caso em que teremos :

$$u_i = x_i - x_3 \tag{4.3.1}$$

$$v_i = y_i - y_3$$

O segundo passo consiste em uma ro

tação dos eixos sobre o vértice 3 de modo que o eixo  $u$  passe pelo vértice 2 ( $v_2^i = 0$ ) ; o terceiro será um ajustamento do ângulo  $\theta$  entre os eixos  $u$  e  $v$  de modo que o eixo  $v$  passe pelo vértice 4 ( $u_4^i = 0$ ) , o quarto será uma variação de escala ao longo dos eixos  $u$  e  $v$  , de modo que os novos valores sejam  $u_2^i = x_2$  e  $v_4^i = y_4$  . Todas estas condições podem ser satisfeitas pelo uso de uma transformação linear (Helmert) | 14 | , se a transformação não for linear não a estudaremos com minúcias , daremos somente equações de correção para tal caso , conforme equação (4.3.6) .

$$u^i = mu + nv \tag{4.3.2}$$

$$v^i = pu + qv$$

Substituindo as coordenadas conhecidas dos vértices 2 e 4 na equação (4.3.2) , teremos dois pares de equações lineares cujas incógnitas são  $m, n, p, q$  .

$$\begin{aligned} X_2 &= u_2 m + v_2 n & Y_2 &= u_2 p + v_2 q \\ X_4 &= u_4 m + v_4 n & Y_4 &= u_4 p + v_4 q \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Resolvendo a equação (4.3.3) , para as incógnitas teremos :

$$\begin{aligned} m &= ( X_2 v_4 - X_4 v_2 ) / d & p &= ( Y_2 v_4 - Y_4 v_2 ) / d \\ n &= ( X_4 u_2 - X_2 u_4 ) / d & q &= ( Y_2 u_4 - Y_4 u_2 ) / d \\ d &= u_2 v_4 - v_2 u_4 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Com base nos valores encontrados para  $m, n, p, q$  a equação (4.3.1) pode então ser aplicada ao vértice 1 .

$$u_1^i = mu_1 + nv_1 \quad v_1^i = pu_1 + qv_1 \tag{4.3.5}$$

Se as deformações do filme forem lineares , então ,  $u_1^i = X_1$  e  $v_1^i = Y_1$  mas , normalmente , elas não o são , exceto no caso de placas de vidro . Se as transformações no vértice 1 não for linear , as equações abaixo fornecem uma correção .

$$u^* = u^i + \kappa u^i v^i \quad (4.3.6)$$

$$v^* = v^i + \delta u^i v^i$$

Calculando  $\kappa$  e  $\delta$  para o vértice 1 , teremos :

$$\kappa = ( X_1 - u_1^i ) / u_1^i v_1^i \quad (4.3.7)$$

$$\delta = ( Y_1 - v_1^i ) / u_1^i v_1^i$$

Se substituirmos a equação (4.3.7) na equação (4.3.6) e levarmos em conta as coordenadas do ponto principal , aplicadas para trazer a origem do vértice 3 ao centro da fotografia , as novas coordenadas compensadas serão :

$$x_1^o = ( mu_i + nv_i ) \{ 1 + \kappa ( pu_i + qv_i ) \} - X_p \quad (4.3.8)$$

$$y_1^o = ( pu_i + nv_i ) \{ 1 + \delta ( mu_i + nv_i ) \} - Y_p$$

#### 4.4 - CORREÇÃO DAS DISTORÇÕES DAS LENTES

Um ponto qualquer , numa fotografia , acha-se em geral deslocado de sua posição verdadeira devido ao desvio sofrido pelo raio que o produz , desvio esse provocado por distorções das lentes que compõem a objetiva da câmara.

A calibração de uma câmara envolve a determinação das distorções das lentes de sua objetiva, assim como, das suas distâncias focal e principal. Conhecidos estes elementos, é possível reconstruir o feixe de raios não distorcidos que produziu a imagem espacial.

As correções para as distorções radiais das lentes são aplicadas em dois passos, a saber:

- a) distorções assimétricas
- b) distorções radiais simétricas

#### 4.4.1 - CORREÇÃO DA DISTORÇÃO RADIAL ASSIMÉTRICA DAS LENTES

Em todas as câmaras existentes, as distorções radiais das objetivas não são idênticas para diferentes raios, resultando uma discrepância residual em relação a uma distorção uniforme. Isto quer dizer que as linhas de igual distorção não são simétricas ou circulares em relação ao ponto principal. Para corrigir esta assimetria, uma falsa inclinação é introduzida para eliminar de todos os pontos, o efeito de assimetria.

A falsa inclinação defini-se por dois parâmetros, a saber: uma direção e uma grandeza. A extremidade superior do eixo da elipse é considerado formando um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$  da fotografia.

Vamos supor, na figura (4.4.2), que o ponto  $a'$  sobre o lado superior da fotografia necessita ser corrigido para ocupar a posição  $a$ . Sejam as coordenadas do ponto  $a$ ,  $x_\theta$  e  $y_\theta$  e de  $a'$ ,  $x_t$  e  $y_t$ . Do triângulo  $aa'k$  tiramos que:

$$ak = a_1 a_1' = x_\theta^2 (\sin t) / f = Cx_\theta^2 \quad (4.4.1)$$

Da proporcionalidade dos lados nos triângulos  $aka'$  e  $oa_1a$ , obtemos:

$$a^k / ak = aa_1 / oa_1 = y_\theta / x_\theta$$

(4.4.2)

$$a^k = (Cx_\theta^2) y_\theta / x_\theta = Cx_\theta y_\theta$$

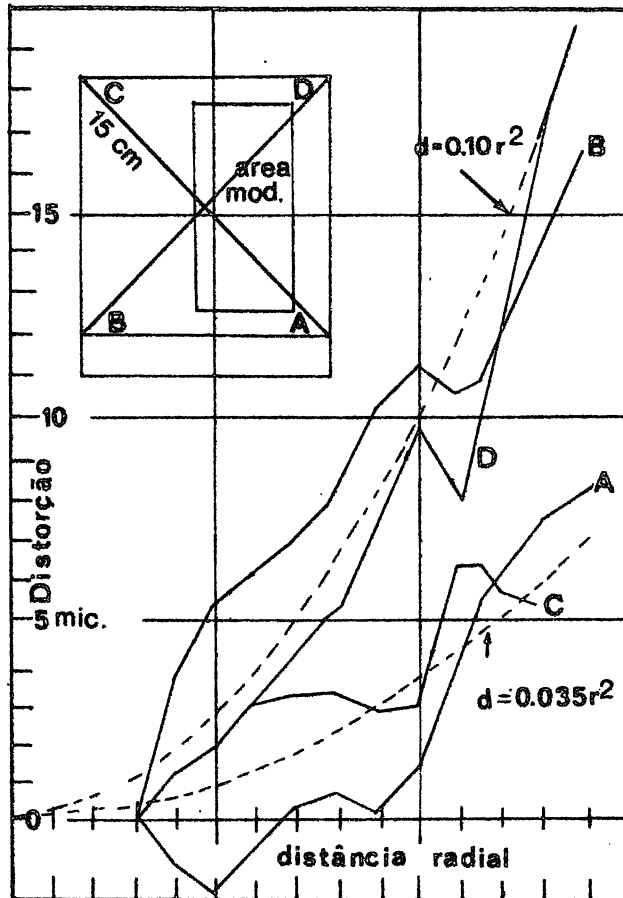


Fig. (4.4.1) Distorção radial assimétrica das lentes , ao longo de 4 semi-diagonais de uma fotografia aérea .

Então, as coordenadas de ' serão:

$$x_t = aa_1 + ak = x_\theta + Cx_\theta = x_\theta ( 1 + Cx_\theta )$$

(4.4.3)

$$y_t = a_1^i a^i + a^k = y_\theta + Cy_\theta x_\theta = y_\theta ( 1 + Cx_\theta )$$

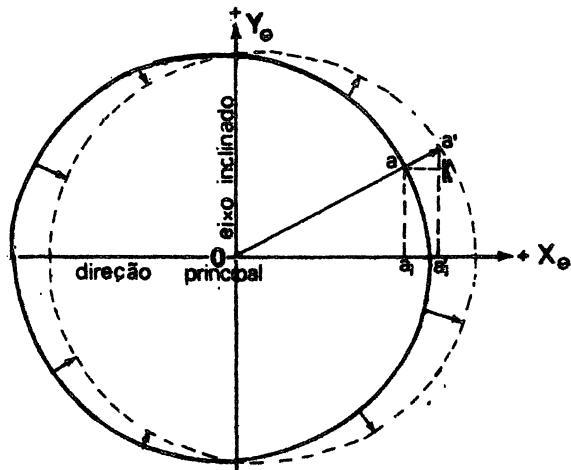


Fig. (4.4.2) Representação gráfica da distorção assimétrica das lentes

#### 4.4.2 - DISTORÇÃO RADIAL SIMÉTRICA DAS LENTES

A palavra simétrica aplicada aqui, para as distorções das lentes, significa que estas distorções, são iguais ao longo de qualquer raio. Na figura (4.4.3)  $\underline{d}$  é uma distorção positiva a qual desloca de uma quantidade  $\underline{d}$  a imagem  $a'$  de sua posição observada  $a$ . As coordenadas de  $a$  são  $x, y$  e as coordenadas corretas de  $a'$  são  $x', y'$ .

Dos triângulos  $aa'b$  e  $Oac$  da figura (4.4.3), tiramos:

$$\overline{a'b} = xd/r$$

$$\overline{ab} = yd/r$$

Da mesma figura podemos tirar:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (4.4.4)$$

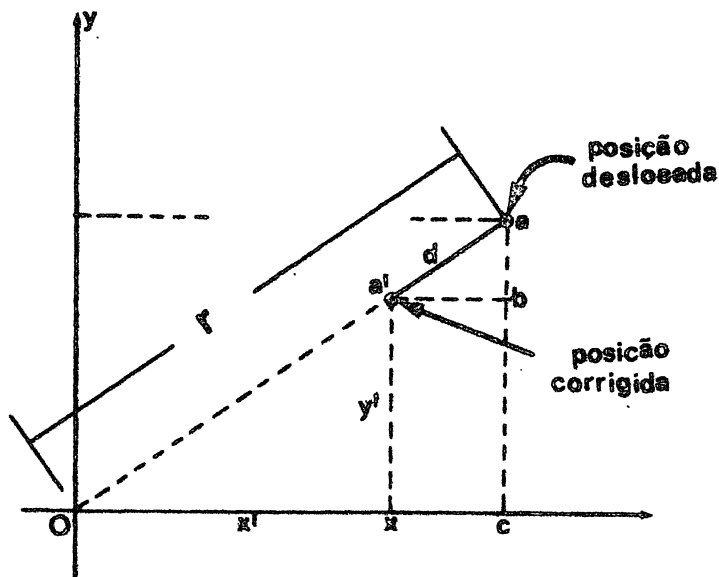


Fig. (4.4.3) Diagrama mostrando a análise das distorções radiais das lentes .

Da mesma figura podemos tirar as coordenadas finais de  $a'$  , as quais serão :

$$\begin{aligned}
 x' &= x - a'b = x - xd/r = x(1 - d/r) \\
 y' &= y - a'b = y - yd/r = y(1 - d/r)
 \end{aligned}
 \tag{4.4.5}$$

#### 4.5 - REFRAÇÃO ATMOSFÉRICA

Enquanto predominou a fotogrametria analógica , os efeitos da refração e da curvatura da Terra sobre fotografias aéreas foram quase sempre considerados negligenciáveis . Com o avanço da tecnologia as precisões também tiveram de ser aumentadas , para tanto , houveram de ser levados em consideração estes dois tópicos .

Sabemos que a geometria de uma fotografia aérea pode ser apreciavelmente distorcida pela refração atmosférica no momento da exposição, e que, para obter a máxima precisão é necessário reduzir a um mínimo a grandeza dessa distorção.

Como mostra a figura (4.5.1), um raio luminoso refletido num ponto  $M$  do terreno produziria sua imagem no ponto  $m$ , se o índice de refração da camada atmosférica ao longo do trajeto do raio fosse constante, mas, como o índice de refração varia continuamente, o raio será deslocado para o ponto  $m'$ .

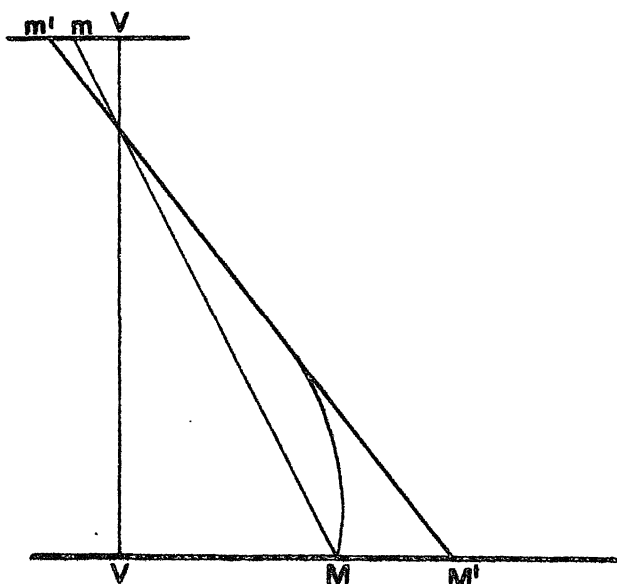


Fig. (4.5.1) Diagrama mostrando o efeito da refração atmosférica.

Na análise dos efeitos da refração atmosférica sobre um raio luminoso, vamos considerar que a atmosfera seja composta de uma série de camadas distintas cujos limites formam um conjunto de esferas concêntricas envolvendo a Terra, admitida aqui como esférica, cujo o centro é o centro da Terra. Vamos supor também que o raio luminoso se re-

frate somente ao passar de uma camada a outra . Então , de acordo com a Lei de Snell , teremos :

$$( n + dn ) \text{sen}\theta = n \text{sen}( \theta + d\theta ) \quad (4.5.1)$$

Desenvolvendo o segundo termo desta equação e levando em conta ' que o ângulo  $d\theta$  é tão pequeno que pode ser confundido com o arco e substituindo estas aproximações na equação (4.5.1) , teremos :

$$dn \text{sen}\theta = n \cos\theta d\theta \quad (4.5.2)$$

Sendo que  $d\theta$  é expresso em radianos .

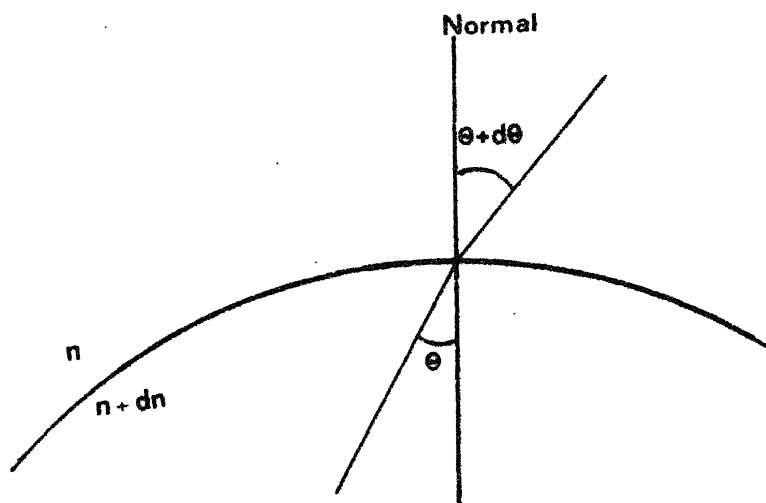


Fig. (4.5.2)

A equação (4.5.2) também pode ser colocada na seguinte forma:

$$d\theta = \frac{dn}{n} \text{tg}\theta$$

Segue-se , da figura (4.5.3) , que cada parcela de refração  $d\theta$  contribui para a refração total , que chamaremos "refração atmosférica " , com um total de :

$$d\alpha = \frac{z - z_t}{z_c - z_t} d\theta \quad (4.5.3)$$

Onde  $z$  ,  $z_t$  e  $z_c$  são as alturas da camada considerada , do terreno e da câmara , respectivamente . A refração fotogramétrica é a soma dos ângulos  $d\theta$  relativos a todos os limites de camadas entre a altitude do terreno e a altura da câmara .

O índice de refração é uma função da temperatura , pressão , umidade relativa e quantidade de  $CO_2$ ; em outras palavras , da densidade do ar . Como estas quantidades não podem ser medidas ao longo de todo o trajeto do raio , então , admitimos que a refração na atmosfera verdadeira seja a mesma que em uma atmosfera -padrão . Existem várias atmosferas padrão , a seguir damos três delas ;

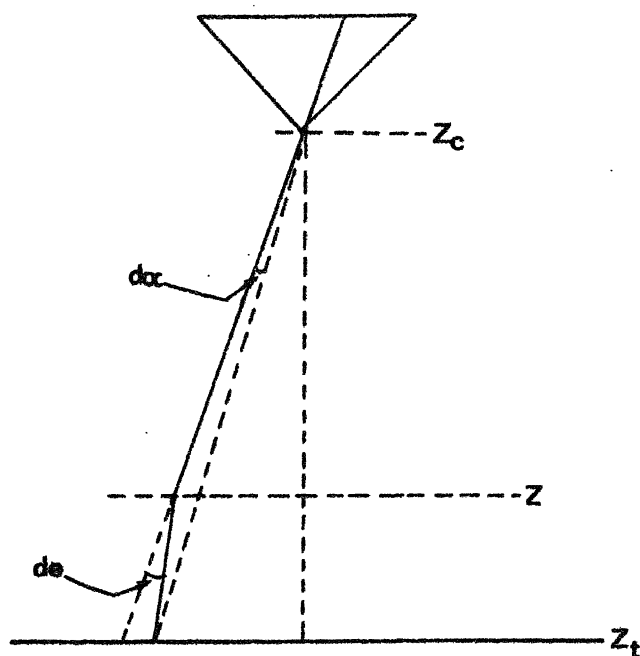


Fig. (4.5.3)

- a) ICAO Standard Atmosphere , 1952 da ICA
- b) ARDC Model Atmosphere , 1959
- c) U.S. Standard Atmosphere ,1962

Até 20 km , estas três atmosferas são praticamente idênticas . As duas últimas se estendem além de 20 km e a diferença entre suas densidades cresce com o aumento da altura na proporção de aproximadamente 3,5 % por metro .

De acôrdo com inúmeros livros de Meteorologia e de Ótica , a relação entre a densidade e o índice de refração tem sido determinada experimentalmente , e pode ser expressa por diversas fórmulas | 15 | , dentre as quais citamos:

$$n^2 = 1 + 2C\rho \quad (4.5.4)$$

Onde  $\rho$  é a massa específica dada em  $\text{kg/m}^3$  , C é uma constante dada em função do comprimento de onda da luz , daqui por diante designado por  $\lambda$  e n representa o índice de refração .

Diferenciando a equação (4.5.4) e dividindo ambos os membros por  $n^2$  , teremos :

$$\frac{dn}{n} = \frac{C}{n^2} d\rho \quad (4.5.5)$$

Desde o nível do terreno até o espaço vazio , n varia de 1,00022 até 1 . Tendo em conta esta variação e para um  $\lambda = 5600 \text{ \AA}$  , teremos a seguinte equação :

$$\frac{dn}{n} = 0,0002266 d\rho \quad (4.5.6)$$

Combinando as equações (4.5.2) , (4.5.3) e (4.5.6) e fazendo o somatório de todos os valores desde o nível do terreno até a altura da câmara , obtem-se , para a refração fotogramétrica , a seguinte expressão :

$$\alpha = 0,0002266 \frac{\text{tg}\theta}{z_c - z_t} \sum | (z - z_t) d\rho | \quad (4.5.7)$$

A equação (4.5.7) permite calcular a refração fotogramétrica para uma atmosfera padrão. O somatório da equação (4.5.7) pode ser escrito como :

$$\sum_n^c z d\rho - \sum_n^t z d\rho - z_t \sum_t^c d\rho \quad (4.5.8)$$

Estes três somatórios tem como limites ; o primeiro , o nível do mar e a altura de vôo , o segundo , o nível do mar e a altitude do terreno e o terceiro , a altitude do terreno e a altura de vôo . Substituindo a equação (4.5.8) na (4.5.7) , teremos :

$$\alpha = \frac{z_c}{z_c - z_t} \alpha_c - \frac{z_c}{z_c - z_t} \alpha_t - 2,266 \times 10^{-4} \text{tg}\theta \frac{z_c}{z_c - z_t} \Delta\rho$$

Onde  $\alpha_c$  e  $\alpha_t$  são as refrações fotogramétricas na altura de vôo e na altura do terreno , respectivamente , ambas em relação ao nível do mar , e  $\Delta\rho$  é a diferença entre as densidades na altura de vôo e na altura do terreno .

O problema da refração atmosférica tratado aqui foi para uma atmosfera-padrão . Devemos lembrar que a temperatura , a pressão e a composição da atmosfera verdadeira nunca são conhecidas completamente , por conveniência , a diferença entre a atmosfera-padrão e a atmosfera verdadeira considera-se desprezível . Entende-se por atmosfera verdadeira a atmosfera no local e no momento em que se efetua o levantamento aerofotogramétrico .

Quando as coordenadas da faixa , obtidas pela aerotriangulação são transformadas diretamente para o sistema de coordenadas de um mapa , sem o uso de um sistema geodésico intermediário , o modelo da Terra apresentado por este sistema é deformado , necessitando então , de uma correção. O problema da correção para a curvatura da Terra , conforme | 16 | desaparece quando se redu todos os dados a um sistema geocêntrico .

CAPÍTULO 5

ORIENTAÇÃO RELATIVA

## ORIENTAÇÃO RELATIVA

### 5.1 - INTRODUÇÃO

Como já foi dito anteriormente , a aerotriangulação analítica de uma faixa singela compreende os seguintes passos , a saber :

- a. Obtenção das coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos de apoio e dos pontos de passagem .
- b. Aplicação das correções a estas coordenadas para - eliminar , tanto quanto possível, os erros sistemáticos .
- c. Orientação relativa analítica de duas fotografias ' sucessivas .
- d. Concatenação das fotos para formar a faixa.
- e. Orientação absoluta da faixa .
- f. Ajustamento da faixa .
- g. Cálculo das coordenadas dos pontos de apoio e de

passagem , em cada modelo .

- h. Cálculo das discrepâncias entre as coordenadas dos pontos de apoio , determinados no terreno e resultantes do item g.
1. Cálculo do erro médio , com base nas discrepâncias para os pontos de apoio não utilizados no ajustamento .

Nos últimos anos , vários trabalhos sobre aerotriangulação foram publicados , enriquecendo a literatura fotogramétrica . Cada qual adotando uma formulação matemática distinta , assim como , com diferentes notações e um grande número de símbolos auxiliares .

Desses trabalhos , infere-se que a orientação relativa pode ser realizada de diferentes maneiras , a saber :

- 1)- Impondo aos raios projetantes a condição de coplanaridade.
- 2)- Tornando a paralaxe  $p_y$  no modelo , igual a zero.
- 3)- Fazendo a menor distância dos raios homólogos igual a zero .

Nos casos de intersecção , a equação de condição para a orientação relativa é uma função não linear dos parâmetros de orientação . Para fins de cálculo , os elementos de orientação relativa dessa função são substituídos por uma aproximação que é , então , linear . A intersecção dos raios homólogos é calculada por meio de fórmulas exatas e substituídas na equação linear . Estas equações são , então , usadas para o cálculo das correções e este processo é repetido até convergir a equação de condição para cada ponto .

Como existem dezenas de métodos de orientação relativa , analisaremos apenas os principais . O primeiro método será descrito com maior minudência , os métodos seguintes serão descritos com menos pormenores , pois muitas equações serão referidas ao primeiro método , tais como , as equações linearizadas e as matrizes de rotação .

## 5.2 - MÉTODO PRECONIZADO POR SCHUT DO NRC

### 5.2.1 - OS ELEMENTOS DE ORIENTAÇÃO RELATIVA

Vamos considerar uma faixa formada num sistema tri-dimensional de coordenadas retangulares ( X , Y , Z ) , como na figura (5.2.1) .

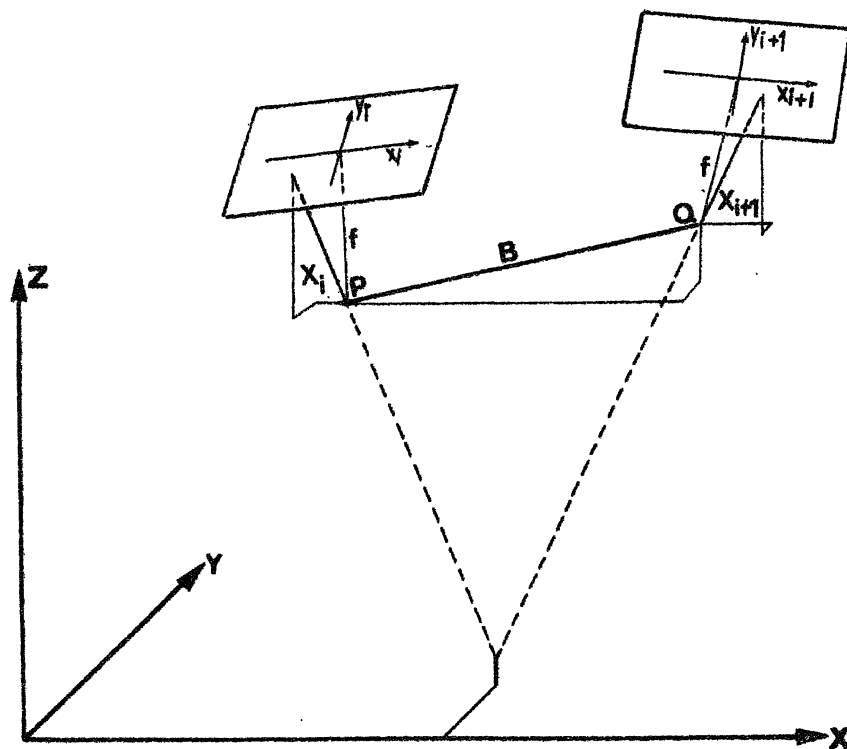


Fig. (5.2.1) Vetores e componentes vetoriais usados na orientação relativa .

Para cada fotografia serão necessários dois sistemas auxiliares de coordenadas (  $X_i$  ,  $Y_i$  ,  $Z_i$  )' e (  $x_i$  ,  $y_i$  ,  $z_i$  ) os quais têm suas origens no centro de projeção , figura (5.2.2) .

Estes dois sistemas usados com o índice adicionado , indicam o número da fotografia . Os eixos'

$( X_i , Y_i , Z_i )$  são paralelos aos eixos  $( X , Y , Z )$  e os eixos  $( x_i , y_i )$  são paralelos ao plano da fotografia .

Para o centro de projeção da primeira fotografia , serão atribuídas coordenadas arbitrárias no sistema de coordenadas  $( X , Y , Z )$  , com a origem no centro de projeção da primeira fotografia , e as coordenadas  $( x_1 , y_1 , z_1 )$  desta fotografia deverão coincidir com  $( X_1 , Y_1 , Z_1 )$  . Obtida essa coincidência a orientação da primeira fotografia está concluída .

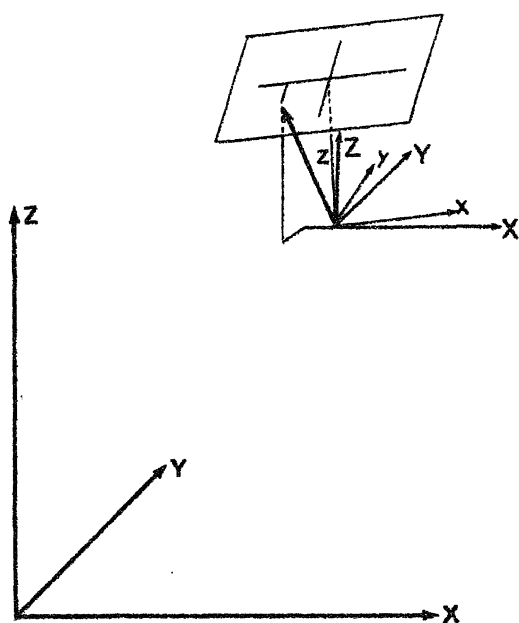


Fig. (5.2.2) Sistema de coordenadas usados para a orientação de uma fotografia , e o vetor de posição de um ponto imagem com suas componentes.

Para realizar a orientação relativa de cada fotografia em relação à anterior , um valor arbitrário é admitido para a componente da base  $b_x$  , enquanto que os eixos  $( x , y , z )$  da fotografia são primeiramente dispostos paralelos aos eixos  $( X , Y , Z )$  . Os elementos de orientação relativa são ; as componentes da base  $b_y$  e  $b_z$  , e mais três parâmetros independentes os quais compõem a matriz de orientação da fotografia .

### 5.2.2 - EQUAÇÃO DE CONDIÇÃO PARA A ORIENTAÇÃO RELATIVA

A orientação relativa da fotografia (  $i + 1$  ) em relação a anterior (  $i$  ) , consiste em posicioná-la de tal maneira que os raios dos pontos-imagens correspondentes das duas fotografias , se interceptem . Esta equação de condição pode ser expressa , analiticamente , pela condição de coplanaridade de duas retas , ou seja :

$$\begin{vmatrix} x^P & y^P & z^P & 1 \\ x^Q & y^Q & z^Q & 1 \\ x^P + x_i & y^P + y_i & z^P + z_i & 1 \\ x^Q + x_{i+1} & y^Q + y_{i+1} & z^Q + z_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.2.1)$$

Nesta equação , as coordenadas dos centros de projeção das fotografias  $i$  e  $i+1$  são indicados pelas letras P e Q , respectivamente . A equação (5.2.1) pelo Teorema de Jacobi , fica reduzida a :

$$\begin{vmatrix} bx & by & bz \\ x_i & y_i & z_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} & z_{i+1} \end{vmatrix} = 0 \quad (5.2.2)$$

Esta é a equação de condição para a orientação relativa . As componentes da base  $bx$  ,  $by$  e  $bz$  na primeira linha da equação (5.2.2) são as diferenças entre as coordenadas dos centros de projeção . As segunda e terceira li-

nhas são as componentes dos vetores  $\vec{X}_i$  e  $\vec{X}_{i+1}$  do centro de projeção ao ponto imagem nas fotografias  $i$  e  $i + 1$ . Elas são função das matrizes de orientação de duas fotografias .

$$X_i = A_i x_i \quad (5.2.3)$$

$$X_{i+1} = A_{i+1} x_{i+1}$$

Alternativamente , a equação de condição para a orientação relativa pode ser obtida partindo-se da coplanaridade de três vetores , ou seja ; para que os vetores  $\vec{X}_i$  ,  $\vec{X}_{i+1}$  e  $\vec{B}$  sejam coplanares é necessário que seu triplo produto escalar seja nulo , isto é :

$$\vec{B} \cdot \vec{X}_i \times \vec{X}_{i+1} = 0 \quad (5.2.4)$$

A equação (5.2.4) é a equação de condição para a orientação relativa , em notação vetorial . Desenvolvendo o triplo produto escalar de três vetores , teremos :

$$\begin{aligned} &bx( Y_i Z_{i+1} - Z_i Y_{i+1} ) + by( Z_i X_{i+1} - X_i Z_{i+1} ) + \\ &bz( X_i Y_{i+1} - Y_i X_{i+1} ) = 0 \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Alternativamente , podemos encontrar a equação (5.2.5) desenvolvendo a equação (5.2.2) .

### 5.2.3 - DIFERENCIAÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONDIÇÃO

Podemos estabelecer uma equação de condição do tipo (5.2.4) para cada par de raios homólogos . Para calcular os elementos de orientação relativa devemos estabelecer no mínimo cinco dessas equações , obtidas de cinco ou mais

pares de pontos .

Como essas equações de condição para a orientação relativa não são lineares em relação aos cinco parâmetros é impossível de resolvê-las diretamente , para tornar isto possível , as equações de condição devem ser substituídas por uma aproximação linear . As equações de condição para a orientação relativa podem ser obtidas diferenciando as equações de condição em relação aos cinco parâmetros de orientação .

Como as equações de condição para a orientação relativa tem como uma aproximação as equações linearizadas , suas soluções fornecem somente valores aproximados para as correções exigidas . Adicionando estes valores aproximados nos parâmetros de orientação relativa obtém-se uma correção a estes parâmetros . Substituindo estes novos parâmetros nas equações linearizadas para obter uma outra aproximação, e o processo é repetido até que as correções se tornem negligenciáveis , formando então , um processo iterativo .

Antes de diferenciar a equação (5.2.4) , vamos introduzir uma modificação para simplificar a equação linear . Esta modificação consiste em pré-multiplicar a matriz  $A_{i+1}$  por uma matriz ortogonal  $R$  . Introduzindo esta modificação na equação (5.2.4) , teremos :

$$\vec{B} \cdot \vec{x}_i \times ( R A_{i+1} \vec{x}_{i+1} ) = 0 \quad (5.2.6)$$

A matriz  $A_{i+1}$  é uma matriz de orientação aproximada , a matriz  $R$  serve para corrigi-la . Desse modo os parâmetros de  $R$  serão usados como incógnitas nas equações lineares em vez de correções aos parâmetros  $A_{i+1}$  .

Esta equação deve ser agora diferenciada em relação as componentes  $b_y$  e  $b_z$  de  $\vec{B}$  e dos três parâmetros de  $R$  . A diferenciação requer o uso de valores aproximados para as cinco variáveis .

A diferenciação de  $R$  dará :

$$R = I + \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2.7)$$

Onde  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  são funções dos parâmetros da matriz ortogonal.

Seja  $d\vec{B}$  um vetor correção às componentes da base e  $R_1$  uma matriz anti-simétrica, que é uma aproximação linear da equação (5.2.7). Introduzindo  $d\vec{B}$  e  $R_1$  na equação (5.2.6), resultará:

$$(\vec{B} + d\vec{B}) \cdot \vec{X}_i \times (\vec{X}_{i+1} + R_1 \vec{X}_{i+1}) = 0 \quad (5.2.8)$$

Esta equação pode ser desenvolvida escrevendo o triplo produto escalar como uma soma de tais produtos (propriedade do triplo produto escalar) e omitindo os termos que contêm  $d\vec{B}$  e  $R_1$ , teremos:

$$\vec{B} \cdot \vec{X}_i \times \vec{X}_{i+1} + d\vec{B} \cdot \vec{X}_i \times \vec{X}_{i+1} + \vec{B} \cdot \vec{X}_i \times (R_1 \vec{X}_{i+1}) = 0 \quad (5.2.9)$$

Podemos escrever também que:

$$R_1 \vec{X}_{i+1} = \vec{k} \times \vec{X}_{i+1} \quad (5.2.10)$$

desde que as componentes de  $R_1 \vec{X}_{i+1}$  sejam as mesmas do vetor  $\vec{k} \times \vec{X}_{i+1}$ . Substituindo a equação (5.2.10) na (5.2.9), teremos:

$$\vec{B} \cdot \vec{X}_i \times \vec{X}_{i+1} + d\vec{B} \cdot \vec{X}_i \times \vec{X}_{i+1} + \vec{B} \cdot \vec{X}_i \times (\vec{k} \times \vec{X}_{i+1}) = 0 \quad (5.2.11)$$

onde , 
$$\vec{h} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

Fazendo uso das propriedades do triplo produto escalar , e separando os termos da equação (5.2.11) convenientemente , teremos :

$$\vec{X}_{i+1} \times ( \vec{B} \times \vec{X}_i ) \cdot \vec{h} + \vec{X}_i \times \vec{X}_{i+1} \cdot d\vec{B} + \vec{X}_i \times \vec{X}_{i+1} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.2.12)$$

A equação (5.2.12) pode ser escrita com um termo específico para cada uma das cinco incógnitas . Para esta finalidade , o termo com o vetor  $\vec{h}$  é escrito da seguinte forma :

$$\vec{B} \times \vec{X}_i \cdot \vec{h} \times \vec{X}_{i+1}$$

ou , 
$$\vec{B} \times \vec{X}_i \cdot ( a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} ) \times \vec{X}_{i+1}$$

efetuando o produto vetorial , tem-se:

$$a_1 \vec{i} \times \vec{X}_{i+1} = ( Y_{i+1} \vec{k} - Z_{i+1} \vec{j} ) a_1$$

$$a_2 \vec{j} \times \vec{X}_{i+1} = ( Z_{i+1} \vec{i} - X_{i+1} \vec{k} ) a_2 \quad (5.2.13)$$

$$a_3 \vec{k} \times \vec{X}_{i+1} = ( X_{i+1} \vec{j} - Y_{i+1} \vec{i} ) a_3$$

como 
$$d\vec{B} = dby \vec{j} + dbz \vec{k} \quad (5.2.14)$$

substituindo as equações (5.2.13) e (5.2.14) na (5.2.12), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \vec{B} \times \vec{X}_i \cdot ( Y_{i+1} \vec{k} - Z_{i+1} \vec{j} ) a_1 + \vec{B} \times \vec{X}_i \cdot ( Z_{i+1} \vec{i} - X_{i+1} \vec{k} ) a_2 \\
& + \vec{B} \times \vec{X}_i \cdot ( X_{i+1} \vec{j} - Y_{i+1} \vec{i} ) a_3 + ( \vec{X}_i \times \vec{X}_{i+1} \cdot \vec{j} ) dby + \\
& ( \vec{X}_i \times \vec{X}_{i+1} \cdot \vec{k} ) dbz + \vec{X}_i \times \vec{X}_{i+1} \vec{B} = 0
\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Desenvolvendo o triplo produto escalar da equação (5.2.15) , obtêm-se :

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} bx & by & bz \\ X_i & Y_i & Z_i \\ 0 & -Z_{i+1} & Y_{i+1} \end{vmatrix} a_1 + \begin{vmatrix} bx & by & bz \\ X_i & Y_i & Z_i \\ Z_{i+1} & 0 & -X_{i+1} \end{vmatrix} a_2 + \\
& \begin{vmatrix} bx & by & bz \\ X_i & Y_i & Z_i \\ -Y_{i+1} & X_{i+1} & 0 \end{vmatrix} a_3 + \begin{vmatrix} Z_i & X_i \\ Z_{i+1} & X_{i+1} \end{vmatrix} ( by + dby ) + \\
& \begin{vmatrix} X_i & Y_i \\ X_{i+1} & Y_{i+1} \end{vmatrix} ( bz + dbz ) + \begin{vmatrix} Y_i & Z_i \\ Y_{i+1} & Z_{i+1} \end{vmatrix} bx = 0
\end{aligned}$$

$$(5.2.16)$$

#### 5.2.4 - DIFERENCIAÇÃO EM RELAÇÃO AS COORDENADAS DA FOTOGRAFIA

Se cinco pontos forem medidos para a orientação relativa, as incógnitas poderão ser encontradas resolvendo a equação linear (5.2.12).

Na prática, para melhorar a precisão da orientação relativa, são medidos mais de cinco pontos e é feito o ajustamento através do Método dos Mínimos Quadrados (M.M.Q). Como o M.M.Q requer que a cada equação (5.2.12) seja dado um peso próprio, a determinação do peso requer a diferenciação da equação de condição (5.2.4) não só em relação às cinco incógnitas, mas também em relação às quantidades medidas, no caso, as coordenadas das fotografias.

Primeiramente podemos efetuar a diferenciação e em seguida adicionar as correções  $dx_i$ ,  $dy_i$ ,  $dx_{i+1}$  e  $dy_{i+1}$  às coordenadas fotogrâficas. Deste modo, os vetores;

$$d\vec{x}_i = dx_i \vec{i} + dy_i \vec{j} \quad (5.2.17)$$

$$d\vec{x}_{i+1} = dx_{i+1} \vec{i} + dy_{i+1} \vec{j}$$

são adicionados aos vetores  $\vec{x}_i$  e  $\vec{x}_{i+1}$ , na equação (5.2.3) e as expressões obtidas para  $\vec{x}_i$  e  $\vec{x}_{i+1}$  são substituídas na equação (5.2.8). Agora podemos linearizar a equação resultante das substituições acima, da mesma maneira que anteriormente e agrupando os termos convenientemente, teremos:

$$\vec{x}_{i+1} \times (\vec{B} \times \vec{x}_i) \cdot \vec{i} + \vec{x}_i \times \vec{x}_{i+1} \cdot d\vec{B} + \vec{x}_i \times \vec{x}_{i+1} \cdot \vec{B} =$$

$$[\vec{B} \cdot \vec{x}_{i+1} \times (A_i \vec{i})] dx_i + [\vec{B} \cdot \vec{x}_{i+1} \times (A_i \vec{j})] dy_i +$$

$$[ \vec{B} \cdot ( A_{i+1} \vec{i} ) \times \vec{X}_i ] dx_{i+1} + [ \vec{B} \cdot ( A_{i+1} \vec{j} ) \times \vec{X}_i ] dy_{i+1} \quad (5.2.18)$$

O peso da equação (5.2.18) é uma função de quatro produtos mistos ( triplo produto escalar) e da precisão da correlação das quatro coordenadas .

No caso de uma faixa de fotografias aéreas tomadas com o eixo da câmara aproximadamente vertical e a triangulação da faixa na direção do eixo X , as componentes da base , by e bz serão pequenas comparadas com bx . Além disso , os eixos x e y serão , aproximadamente , paralelos aos eixos X e Y e , portanto , os elementos da diagonal principal de  $A_i$  e  $A_{i+1}$  serão , aproximadamente , iguais a unidade e os elementos fora da mesma diagonal serão pequenos comparados com a unidade . Então segue-se que , em cada equação , os coeficientes de  $dx_i$  e  $dx_{i+1}$  serão , aproximadamente , iguais a  $( bx \cdot f )$  . Neste caso , os pesos serão todos , aproximadamente , os mesmos e podem ser igualados à unidade .

#### 5.2.5 - FORMAÇÃO E SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES NORMAIS

Cada ponto usado para realizar a orientação relativa fornece uma equação linear do tipo (5.2.12) . No M.M.Q , estas equações são consideradas como equações de correção , que em notação matricial elas podem ser representadas pela equação :

$$A \vec{x} + \vec{b} = 0 \quad (5.2.19)$$

Aquí ,  $A$  é uma matriz que tem como elementos de cada linha os coeficientes de uma das equações (5.2.12) . Sendo  $\vec{x}$  um vetor coluna cujas componentes são as cinco incógnitas , e  $\vec{b}$  o vetor coluna cujas componentes são ter

mos constantes . A notação da equação (5.2.19) não tem relação com as anotações anteriores usadas até aqui.

De acordo com o M.M.Q , o valor mais provável de  $\vec{x}$  é o valor para qual o termo quadrático

$$(A \vec{x} + \vec{b})^T W (A \vec{x} + \vec{b})$$

é igual a um mínimo . Sendo que  $W$  é uma matriz cujos elementos da diagonal principal são os pesos ligados a equação de condição e os elementos fora desta diagonal são todos nulos. Pode ser facilmente provado que a forma quadrática atinge seu mínimo para o valor de  $x$  que satisfaça a seguinte equação matricial :

$$A^T W A \vec{x} = - A^T W \vec{b} \quad (5.2.20)$$

Como  $W$  é uma matriz diagonal , as contribuições de cada equação de correção a estes produtos matriciais podem ser obtidos separadamente . Seja a equação de correção representada por :

$$a_r \vec{x} + \vec{b} = 0 \quad (5.2.21)$$

Onde  $a_r$  é o vetor coluna cujos elementos são os coeficientes na equação ,  $\vec{x}$  é , como já dissemos , o vetor coluna cujas componentes são as cinco incógnitas e  $b$  é um termo constante. Seja agora  $a_c$  um vetor coluna , que é a transposta de  $a_r$  . Para cada equação de correção , a matriz  $w a_c a_r$  é um vetor coluna e  $- w b a_c$  pode ser calculado . Pode facilmente ser demonstrado em | 20 | que a matriz dos coeficientes e o vetor da segunda parte na equação (5.2.20) são simplesmente a soma das matrizes  $w a_c a_r$  e a soma dos vetores  $- w b a_c$  , respectivamente . Desta maneira , as equações normais são calculadas da seguinte maneira :

$$\left[ w a_c a_r \right] x = \left[ - w b a_c \right] \quad (5.2.22)$$

### 5.3 - MÉTODO DE THOMPSON

#### 5.3.1 - CONDIÇÃO PARA A ORIENTAÇÃO RELATIVA

Vimos na secção anterior que a condição necessária para que duas fotografias estejam orientadas relativamente é que os pares de raios homólogos sejam coplanares com a base. Para tanto, vamos adotar os mesmos sistemas de coordenadas e as mesmas considerações iniciais da secção (5.2.1), figuras (5.2.1) e (5.2.2).

Condição para que os três vetores  $\vec{B}$ ,  $\vec{X}_i$  e  $\vec{X}_{i+1}$  com suas componentes sejam coplanares, é necessário que seu triplo produto escalar seja nulo, que em linguagem matemática pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} & (bx \vec{i} + by \vec{j} + bz \vec{k}) \cdot (X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k}) \times (X_{i+1} \vec{i} + \\ & Y_{i+1} \vec{j} + Z_{i+1} \vec{k}) = 0 \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Por conveniência vamos expressar a equação (5.3.1) na forma matricial e vamos representar o vetor  $X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k}$  como uma matriz coluna.

$$p = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad (5.3.2)$$

Podemos facilmente transformar a equação (5.3.2), conforme | 7 |, em uma matriz anti-simétrica, no que resultará:

$$p = \begin{bmatrix} 0 & -Z_i & Y_i \\ Z_i & 0 & -X_i \\ -Y_i & X_i & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.3)$$

Substituindo a equação (5.3.3) na (5.3.1) e expressando esta em notação matricial ficará :

$$\begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -Z_i & Y_i \\ Z_i & 0 & -X_i \\ -Y_i & X_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i+1} \\ Z_{i+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.3.4)$$

Seja  $R_1$  uma matriz ortogonal própria que representa a rotação da fotografia da esquerda em relação ao modelo do sistema. Da mesma maneira  $R_2$  será também uma matriz ortogonal associada com a fotografia da direita, teremos, então :

$$\begin{bmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i+1} \\ Z_{i+1} \end{bmatrix} = R_2 \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

Seja  $S'$  uma matriz anti-simétrica cujos elementos são os componentes de um vetor referido ao

sistema do modelo . Seja  $X$  uma matriz coluna cujos elementos são os componentes de um vetor arbitrário no mesmo sistema . E  $S' X$  representa um vetor , desde que seus elementos sejam os componentes do produto vetorial de dois vetores . Seja  $R$  uma matriz ortogonal própria . Se  $S$  e  $x$  são as transformações de  $S'$  e  $X$  sobre uma rotação de eixos , então :

$$S' X = R S x$$

mas 
$$x = R^T X$$

consequentemente ; 
$$S' X = R S R^T X$$

Desde que  $X$  seja arbitrário , isto implicará que :

$$S' = R S R^T$$

Substituindo as considerações feitas acima na equação (5.3.4) , esta tornar-se-á :

$$\begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} R_1 \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & z_i & 0 \end{bmatrix} R_1^T R_2 \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} = 0$$

(5.3.6)

Esta equação contém nove incógnitas , a saber :  $b_x$  ,  $b_y$  ,  $b_z$  , os três parâmetros independentes de  $R_1$  e os três parâmetros independentes de  $R_2$  . A equação (5.3.6) pode , facilmente , ser transformada em uma equação a cinco incógnitas .

Vamos primeiro escolher um sistema do modelo de modo que ele coincida com a fotografia da esquerda, isto é,  $\alpha_1 = 0$ . Então a equação (5.3.6) pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_y & \beta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} R_2 \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} = 0$$

(5.3.7)

Onde  $\beta_y = b_y/b_x$  e  $\beta_z = b_z/b_x$ , como já vimos anteriormente na seção (5.3) os cinco parâmetros de orientação relativa são as incógnitas da equação (5.3.6), as quais são  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_y, \beta_z$  e os três parâmetros independentes de  $R_2$ .

Em seguida, vamos escolher o eixo X do sistema do modelo de modo a coincidir exatamente com a base, de modo que  $\beta_y = \beta_z = 0$ . Se dividirmos a equação (5.3.6) por  $\alpha_1$ , teremos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} R_1^T R_2 \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} = 0$$

(5.3.8)

O produto  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1$  é um vetor cujas componentes são os elementos da primeira linha de  $R_1$ , isto é,  $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13})$ . O produto  $R_1^T R_2$  é uma matriz ortogonal  $R$ , cujos três elementos podem ser tomados como incógnitas. A equação (5.3.8) pode ser reduzida a:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} R \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix} = 0$$

(5.3.9)

Sendo que a equação (5.3.9) é equivalente à equação (5.3.7).

### 5.3.2 - EXPANSÃO DA EQUAÇÃO DE CONDIÇÃO

Uma vez que  $z_1 = z_{i+1} = f$ , podemos dividir a equação (5.3.7) por  $f^2$  e assim obter algumas simplificações. Teremos :

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta y & \beta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & y_i \\ 1 & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix} R_2 \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

(5.3.10)

Em que  $x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}$  são as coordenadas resultantes da divisão.

O valor de  $R_2$  pode ser representado da mesma maneira que a equação (3.9.6), ou seja :

$$R_2 = \frac{1}{\Delta_2} \begin{bmatrix} \Delta_2' & -v_2 & \mu_2 \\ v_2 & \Delta_2' & -\lambda_2 \\ -\mu_2 & \lambda_2 & \Delta_2' \end{bmatrix} + \frac{1}{2\Delta_2'} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & \mu_2 & v_2 \end{bmatrix} \quad (5.3.11)$$

Onde

$$\Delta_2 = 1 + \frac{1}{4} (\lambda_2^2 + \mu_2^2 + v_2^2)$$

$$\Delta_2' = 1 - \frac{1}{4} (\lambda_2^2 + \mu_2^2 + v_2^2)$$

Substituindo a equação (5.3.11) na (5.3.10) e efetuando os produtos e após algumas simplificações, teremos :

$$y_1 - y_2 + (1 + y_1 y_2) \lambda_2 - y_1 x_2 \mu_2 - x_2 v_2 - (x_1 - x_2) \beta y$$

$$+ (x_1 y_2 - x_2 y_1) \beta z + a_1 \lambda_2 + a_2 \mu_2 + a_3 v_2 + b_1 + b_2 = 0 \quad (5.3.12)$$

Onde os parâmetros da equação (5.3.12) são dados por :

$$a_1 = -\frac{1}{2} x_2 \mu_2 + \frac{1}{2} x_1 y_2 v_2 - x_1 y_2 \beta y - x_1 \beta z$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} y_2 \mu_2 - \frac{1}{2} (1 - y_1 y_2) v_2 + (1 + x_1 x_2) \beta y - y_1 \beta z$$

$$a_3 = -y_2 \beta y + (x_1 x_2 + y_1 y_2) \beta z$$

$$b_1 = \frac{1}{4} ( x_2 \lambda_2 + y_2 \mu_2 + v_2 ) [ ( \lambda_2 - x_1 v_2 ) \beta y - ( y_1 \lambda_2 - x_1 \mu_2 ) \beta z ]$$

$$b_2 = -\frac{1}{4} ( \lambda_2^2 + \mu_2^2 + v_2^2 ) [ ( y_1 - y_2 ) - ( x_1 - x_2 ) \beta y + ( x_1 y_2 - x_2 y_1 ) \beta z ]$$

A equação (5.3.12) é então a equação de correção geral , dando a paralaxe  $y$  (  $y_1 - y_2$  ) em termos dos elementos de orientação relativa em uma forma racional algébrica .

As primeiras linhas da equação (5.3.12) contém os termos lineares , e vemos que eles correspondem exatamente aos termos da fórmula padrão de primeira ordem quando identificamos  $\lambda_2$  ,  $\mu_2$  ,  $v_2$  com  $\omega_2$  ,  $\phi_2$  e  $\kappa_2$  respectivamente . Os termos contendo  $a_1$  ,  $a_2$  e  $a_3$  são como coeficientes de segunda ordem , enquanto que,  $b_1$  e  $b_2$  são termos de terceira ordem . A equação (5.3.12) pode ser obtida diretamente da equação (5.2.4) .

#### 5.4 - MÉTODO DO UNITED STATES COAST & GEODETIC SURVEY

Na figura (5.4.1) os sistemas de coordenadas são os mesmos da secção (5.2). Consideremos , ainda , que o ponto principal  $P$  , a imagem  $I$  e o objeto  $O$  , no espaço , são colineares . Isto pode ser inferida da semelhança de triângulos desta figura .

$$x_i / z_i = ( X - X_p ) / ( Z - Z_p )$$

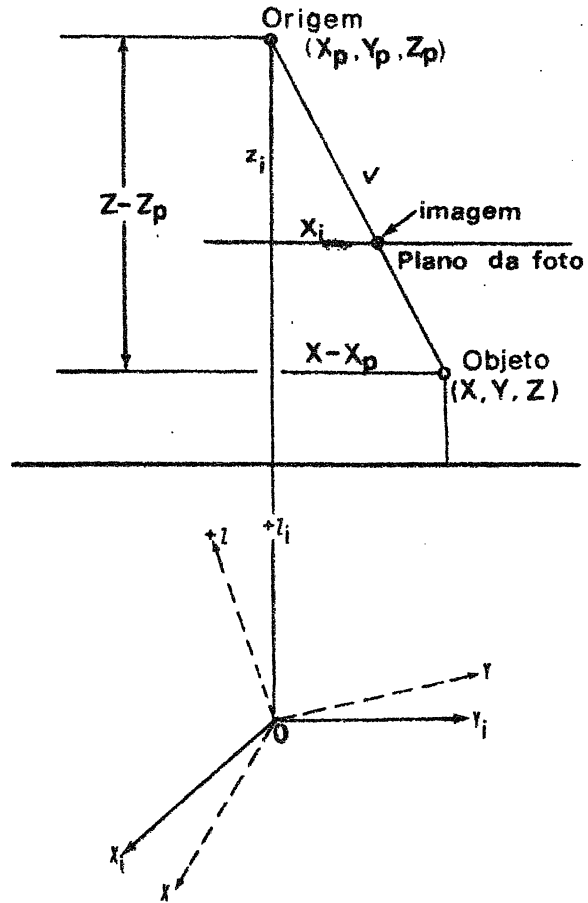


Fig. (5.4.1) - Geometria da colinearidade dos pontos

$$x_i = \frac{(X - X_p)}{(Z - Z_p)} z_i \quad (5.4.1)$$

de modo análogo podemos ter também :

$$y_i = \frac{(Y - Y_p)}{(Z - Z_p)} z_i \quad (5.4.2)$$

Na seção (5.2) vimos que :

$$X_i = A x_i$$

Se  $A$  é definido como representando os três elementos da linha da matriz da equação (2.2), teremos:

$$A = ( a_{11} + a_{12} + a_{13} )$$

$$B = \begin{bmatrix} X - X_p \\ Y - Y_p \\ Z - Z_p \end{bmatrix}$$

Agora se arranjarmos a equação (5.4.5) convenientemente, podemos colocar a mesma sob a forma de determinante, ou seja:

$$\begin{vmatrix} x & z \\ A_1 B & A_3 B \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} y & z \\ A_2 B & A_3 B \end{vmatrix} = 0 \quad (5.4.6)$$

Na prática, a condição de colinearidade não é obtida de forma absoluta e o problema se reduz a uma situação na qual se faz necessária uma correção de  $x$  e de  $y$ . Como já vimos na secção (5.2), se mais de cinco pares de raios homólogos são considerados, a solução é obtida através do M.M.Q.

Como a solução é obtida pelo método acima citado, a equação (5.4.5) deve ser linearizada. Isto pode ser feito por diversos processos com a ajuda do cálculo diferencial.

$$\begin{aligned}
 x &= a_{11} x_i + a_{12} y_i + a_{13} z_i \\
 y &= a_{21} x_i + a_{22} y_i + a_{23} z_i \\
 z &= a_{31} x_i + a_{32} y_i + a_{33} z_i
 \end{aligned}
 \tag{5.4.3}$$

Substituindo as equações (5.4.1) , (5.4.2) na (5.4.3) e arranjando os termos convenientemente , teremos :

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{(X - X_p)}{(Z - Z_p)} a_{11} z_i + \frac{(Y - Y_p)}{(Z - Z_p)} a_{12} z_i + \frac{(Z - Z_p)}{(Z - Z_p)} a_{13} z_i \\
 y &= \frac{(X - X_p)}{(Z - Z_p)} a_{21} z_i + \frac{(Y - Y_p)}{(Z - Z_p)} a_{22} z_i + \frac{(Z - Z_p)}{(Z - Z_p)} a_{23} z_i \\
 z &= \frac{(X - X_p)}{(Z - Z_p)} a_{31} z_i + \frac{(Y - Y_p)}{(Z - Z_p)} a_{32} z_i + \frac{(Z - Z_p)}{(Z - Z_p)} a_{33} z_i
 \end{aligned}
 \tag{5.4.4}$$

Dividindo o conjunto de equações acima pela terceira delas , teremos:

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{z} &= \frac{(X - X_p) a_{11} + (Y - Y_p) a_{12} + (Z - Z_p) a_{13}}{(X - X_p) a_{31} + (Y - Y_p) a_{32} + (Z - Z_p) a_{33}} \\
 \frac{y}{z} &= \frac{(X - X_p) a_{21} + (Y - Y_p) a_{22} + (Z - Z_p) a_{23}}{(X - X_p) a_{31} + (Y - Y_p) a_{32} + (Z - Z_p) a_{33}}
 \end{aligned}
 \tag{5.4.5}$$

### 5.4.1 - EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO

Nas equações (5.4.6) ,  $x$  é uma quantidade observada ,  $z$  é a distância focal da câmara e os termos  $A$  e  $B$  são compostos de vários elementos angulares e parâmetros lineares geométricos associados com a altitude e a posição da câmara.

A equação (5.4.6) pertence a um ponto imagem cujas coordenadas são  $(x, y, z)$  , na fotografia . Se o número de pontos excede o número de parâmetros , a equação (5.4.6) não é válida para todos eles , e , para se ter uma solução, será necessário atribuir um valor residual  $v$  ao seu segundo membro .

Podemos , então escrever a equação (5.4.6) , do seguinte modo :

$$v_x = \begin{vmatrix} x & y \\ A_1 & B \\ A_3 & B \end{vmatrix} \quad v_y = \begin{vmatrix} x & z \\ A_2 & B \\ A_3 & B \end{vmatrix} \quad (5.4.7)$$

onde  $v_x$  e  $v_y$  são as correções necessárias às coordenadas de placa para satisfazer o procedimento adotado .

Se o lado direito da equação (5.4.7) for representado por  $F$  , como valores iniciais de  $A$  e  $B$  , então podemos dizer que :

$$V = F + dF \quad (5.4.8)$$

Na qual  $dF$  é a correção necessária a  $F$  . A equação (5.4.8) pode ser linearizada através da aplicação de derivadas parciais de todos os parâmetros da foto .

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial F}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa + \frac{\partial F}{\partial X_p} dX_p + \frac{\partial F}{\partial Y_p} dY_p - \frac{\partial F}{\partial Z_p} dZ_p +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial X} dX + \frac{\partial F}{\partial Y} dY + \frac{\partial F}{\partial Z} dZ \quad (5.4.9)$$

Substituindo  $F$  por  $p_{11}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \omega}$  por  $p_{12}$ , etc. A equação acima pode ser expressa como:

$$A_3 B v_x = p_{11} + p_{12} d\omega + p_{13} d\phi + p_{14} d\kappa - p_{15} dX_p -$$

$$- p_{16} dY_p - p_{17} dZ_p + p_{15} dX + p_{16} dY + p_{17} dZ$$

$$A_3 B v_y = p_{21} + p_{22} d\omega + p_{23} d\phi + p_{24} d\kappa - p_{25} dX_p -$$

$$- p_{27} dZ_p - p_{26} dY_p + p_{25} dX + p_{26} dY + p_{27} dZ$$

..... (5.4.10)

Sendo que os coeficientes básicos usados na orientação relativa são :

$$p_{11} = \begin{vmatrix} x & z \\ A_1 B & A_3 B \end{vmatrix} \quad p_{21} = \begin{vmatrix} y & z \\ A_2 B & A_3 B \end{vmatrix}$$

$$p_{12} = \begin{vmatrix} x & z \\ \frac{\partial A_1}{\partial \omega} B & \frac{\partial A_3}{\partial \omega} B \end{vmatrix}$$

$$p_{22} = \begin{vmatrix} y & z \\ \frac{\partial A_2}{\partial \omega} B & \frac{\partial A_3}{\partial \omega} B \end{vmatrix}$$

$$p_{13} = \begin{vmatrix} x & z \\ \frac{\partial A_1}{\partial \phi} B & \frac{\partial A_3}{\partial \phi} B \end{vmatrix}$$

$$p_{23} = \begin{vmatrix} y & z \\ \frac{\partial A_2}{\partial \phi} B & \frac{\partial A_3}{\partial \phi} B \end{vmatrix}$$

$$p_{24} = \begin{vmatrix} y & z \\ \frac{\partial A_2}{\partial \kappa} B & \frac{\partial A_3}{\partial \kappa} B \end{vmatrix}$$

$$p_{14} = \begin{vmatrix} x & z \\ \frac{\partial A_1}{\partial \kappa} B & \frac{\partial A_3}{\partial \kappa} B \end{vmatrix}$$

$$p_{15} = \begin{vmatrix} x & z \\ a_{11} & a_{31} \end{vmatrix}$$

$$p_{25} = \begin{vmatrix} y & z \\ a_{21} & a_{31} \end{vmatrix}$$

$$p_{16} = \begin{vmatrix} x & z \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$p_{26} = \begin{vmatrix} y & z \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$p_{17} = \begin{vmatrix} x & z \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$p_{27} = \begin{vmatrix} y & z \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (5.4.11).$$

A equação (5.4.10) é usada , neste método para resolver três problemas diferentes ; a orientação relativa , a tri-secção inversa no espaço e o ajustamento em bloco. Se os valores aproximados de ( X, Y, Z ) estão suficientemente próximos dos valores corretos , os termos contendo dX , dY e dZ podem ser negligenciados restando , portanto , 6 incógnitas . Na orientação relativa isto já não acontece , e , o termo dX<sub>0</sub> não tem significado. Mostraremos abaixo como os três termos podem ser eliminados , restando somente, cinco incógnitas.

#### 5.4.2 - CONCEITO DE ELEVAÇÃO

Considerando um objeto , cujas coordenadas são representadas simplesmente por : X, Y, Z e resolvendo a equação (5.4.1) para X , teremos :

$$X = X_p + x_i ( Z - Z_p ) / z_i \quad (5.4.12)$$

Sendo que a equação acima pode ser adotada para ambas as fotografias ; portanto , teremos :

$$X = X_p + x_i ( Z - Z_p ) / z_i \quad (5.4.13)$$

$$X = X_q + x_{i+1} ( Z - Z_q ) / z_{i+1}$$

Sendo que os índices  $q$  e  $(i+1)$  referem-se a segunda fotografia. Subtraindo a segunda das equações (5.4.13) da primeira, teremos :

$$\left\{ X_p + x_i(Z - Z_p) / z_i \right\} - \left\{ X_q + x_{i+1}(Z - Z_q) / z_{i+1} \right\} = 0$$

.....(5.4.14)

Isolando o valor de  $Z$ , teremos :

$$Z = \frac{(X - X_q)z_i z_{i+1} + Z_p x_i z_{i+1} - Z_q x_{i+1} z_i}{x_i z_{i+1} - x_{i+1} z_i} \quad (5.4.15)$$

Na orientação relativa estas equações se reduzem a :

$$Z = \frac{Z_p x_i - z_i}{x_i - Xz/z_i} \quad X = x Z / z \quad Y = y Z / z \quad (5.4.16)$$

Isto porque, a primeira fotografia é considerada sem inclinação e, a posição da primeira câmara pode ser selecionada como origem e a abcissa da segunda fotografia pode ser escolhida como unitária.

### 5.4.3 - EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO MODIFICADAS PARA A ORIENTAÇÃO RELATIVA

Visto que somente cinco parâmetros são determinados na orientação relativa, as equações de observação podem ser modificadas. Como consequência da equação (5.4.16), os termos em  $dX$ ,  $dY$  e  $dZ$ , na equação (5.4.10), podem ser eliminados por substituição e expressos em termos de outras

incógnitas :  $d\omega$  ,  $d\phi$  ,  $d\kappa$  e  $dZ_p$  , teremos a equação de observação , para a orientação relativa da seguinte forma :

$$A_3 B v_x = p_{11} + ( p_{12} + S_1 T_2 ) d\omega + ( p_{13} + S_1 T_3 ) d\phi + ( p_{14} - S_1 T_4 )$$

$$d\kappa - p_{16} dY_p = ( p_{17} - S_1 T_7 ) dZ_p$$

(5.4.17)'

$$A_3 B v_y = p_{21} + ( p_{22} + S_2 T_2 ) d\omega + ( p_{23} + S_2 T_3 ) d\phi + ( p_{24} - S_2 T_4 )$$

$$d\kappa - p_{26} dY_p = ( p_{27} - S_2 T_7 )$$

na qual

$$T_2 = \begin{vmatrix} X - 1 & Z - Z_p \\ ( \partial A_1^T / \partial \omega ) C & ( \partial A_3^T / \partial \omega ) C \end{vmatrix}$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} X - 1 & Z - Z_p \\ ( \partial A_1^T / \partial \phi ) C & ( \partial A_3^T / \partial \phi ) C \end{vmatrix}$$

$$T_4 = \begin{vmatrix} X - 1 & Z - Z_p \\ ( \partial A_1^T / \partial \kappa ) C & ( \partial A_3^T / \partial \kappa ) C \end{vmatrix}$$

Onde se tem :

$$S_1 = ( 1/u_2 ) ( p_{15} u_3 + p_{15} u_4 + p_{17} )$$

$$S_2 = ( 1/u_2 ) ( p_{25} u_3 + p_{25} u_4 + p_{27} )$$

$$u_1 = Z x' - z' \qquad u_3 = x / z$$

$$u_2 = x' - u z' \qquad u_4 = y / z$$

$$T = A^T C ( = x )$$

$$x' = A^T C$$

$$z' = A^T$$

$$C = \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{bmatrix}$$

### 5.5 - MÉTODO DE VAN DER WEELE

A orientação relativa de um par de feixes de raios reconstruídos é realizada se os correspondentes feixes de raios projetantes se interceptam no espaço . Esta condição pode ser expressa pela anulação da paralaxe  $p_y$  , ( observada em qualquer ponto arbitrariamente escolhido ) . As correções a serem aplicadas aos elementos de orientação , são estabelecidas em função da própria expressão da paralaxe .

A expressão geral da paralaxe em  $y$  conforme | 17 | , será dada por : <sup>A</sup>

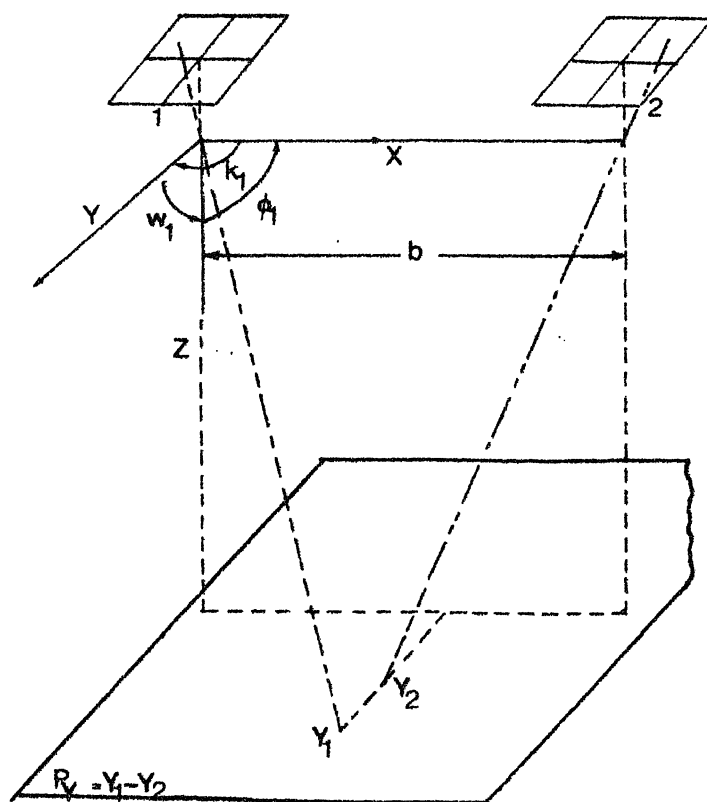


Fig. (5.5.1)

$$\begin{aligned}
 - p_y = & \text{dby}_1 - Y/Z \text{dbz}_1 + X \text{dk}_1 - \frac{(Z^2 + Y^2)}{Z} \text{d}\omega_1 + \frac{X Y}{Z} \text{d}\phi_1 \\
 & - \text{dby}_2 + Y/Z \text{dbz}_2 - (X - b) \text{dk}_2 + \frac{Z^2 + Y^2}{Z} \text{d}\omega_2 - \\
 & - \frac{(X - b)}{Z} Y \text{d}\phi_2
 \end{aligned}$$

Onde  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são as respectivas coordenadas do ponto em questão .

A fórmula da paralaxe contém dez elementos de orientação , dos quais , cinco são necessários para obter um modelo livre de paralaxe e , conseqüentemente , os cinco podem ser escolhidos arbitrariamente .

Como este método baseia-se na orientação relativa com apenas um projetor, admite-se, então, que seja atribuída à primeira fotografia uma matriz de rotação unitária. Como se trata de uma orientação dependente, os movimentos serão os de um projetor, ou seja, o projetor de vante. A equação da paralaxe, neste caso, ficará:

$$-p_y = dby_2 + Y/Z dbz_2 + \frac{Z^2 + Y^2}{Z} d\omega_2 - \frac{X - b}{Z} Y d\phi_2 - (X - b) dk_2 \dots\dots(5.5.2)$$

Onde as incógnitas são  $d\omega_2$ ,  $d\phi_2$ ,  $dk_2$ ,  $dby_2$  e  $dbz_2$ , que são as correções aos elementos de orientação supostamente conhecidos da segunda foto. A determinação de tais incógnitas necessitará de cinco equações do tipo (5.5.2), para ser feito um ajustamento através do M.M.Q.

Pode-se escrever a equação (5.5.2) como uma equação de correção, ou seja:

$$-v = p_y - dby_2 + Y/Z dbz_2 - (X - b) dk_2 + \frac{Z^2 + Y^2}{Z} d\omega_2 - \frac{X - b}{Z} d\phi_2 \dots\dots(5.5.3)$$

As correções angulares ( $dk_2$ ,  $d\omega_2$ ,  $d\phi_2$ ), são em radianos.

As equações de observação são obtidas de seis pontos padrão, fig. (5.5.2), cuja solução será:

$$dk_2 = -\frac{1}{3b} (p_{y1} + p_{y3} + p_{y5} - p_{y2} - p_{y4} - p_{y6})$$

$$d\phi_2 = \frac{Z}{2bd} (p_{y3} - p_{y5} + p_{y6} - p_{y4})$$

$$d\omega_2 = \frac{Z}{4d^2} ( 2py_1 - py_3 - py_5 - py_4 - py_6 + 2py_2 )$$

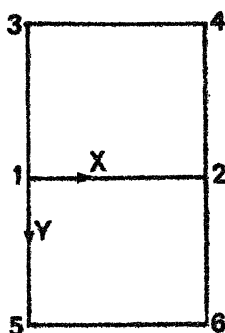
$$dbz_2 = \frac{Z}{2d} ( py_4 - py_6 )$$

$$dby_2 = \frac{1}{12d^2} \left[ 2( 4d^2 + 3z^2 )py_2 + ( 2d^2 + 3z^2 )(2py_1 - py_3 - py_5) + ( 2d^2 - 3z^2 )( py_4 + py_6 ) \right]$$

Para fotografias verticais temos que considerar neste método dois casos principais , a saber : (a)- para terrenos planos , que é o caso até agora visto ; (b) - para terrenos montanhosos . Para o caso de fotografias convergentes não será tratado aqui por fugir ao escopo do presente trabalho .

Em um modelo de terreno montanhoso , onde  $Z$  não é constante , as diferenças de altitudes do terreno terão influência na orientação relativa . Para pequenas diferenças de altura  $\Delta Z$  , menor que 10% do valor médio de  $Z$  , o método para terrenos planos pode ser aplicado nesse caso .

O método de orientação relativa dependente , admite que  $Y/Z = K$  , seja uma constante para cada um dos vértices do modelo (3,4,5,6) . Para terrenos montanhosos podemos incluir as relações :



$$\frac{Y_3}{Z_3} = \frac{Y_4}{Z_4} = \frac{-Y_5}{Z_5} = \frac{-Y_6}{Z_6} = -K$$

As equações da paralaxe para os seis pontos , com a aplicação do M.M.Q , podem ser reescritas da seguinte forma :

$$d\omega_2 = - \frac{(py_1 + py_2) - (py_3 + py_4 + py_5 + py_6)}{2(z_1 + z_2) - K(z_3 + z_4 + z_5 + z_6)}$$

$$d\phi_2 = \frac{1}{2bK} \left| (py_3 - py_4 - py_5 + py_6) - K(z_5 - z_3 - z_6 + z_4) d\omega_2 \right|$$

$$dk_2 = \frac{1}{3b} \left\{ - (py_1 + py_3 + py_5) + (py_2 + py_6 + py_4) - \right. \\ \left. - \left| (z_1 - z_2) + (z_3 + z_5 - z_4 - z_6) K \right| d\omega_2 \right\}$$

$$dbz_2 = \frac{1}{4K} \left[ (py_3 + py_4 - py_5 - py_6) - K(z_5 - z_3 + z_6 - z_4) d\omega_2 \right. \\ \left. - bK d\phi_2 \right]$$

$$dby_2 = \frac{1}{6} \left[ \sum_{i=1}^6 py_i + \left| (z_1 + z_2) + K(z_3 + z_4 + z_5 + z_6) \right| d\omega_2 \right. \\ \left. + 3b dk_2 \right]$$

Nestas equações são admitidos pesos unitários para todas as paralaxes observadas. Na figura (5.5.3), para o caso de um terreno plano,  $Z_A = Z_B = Z_C = Z$ .



onde :

$\vec{X}_i, \vec{X}_{i+1}$  , são os vetores dos centros de projeção a um ponto imagem nas fotografias  $i$  e  $(i+1)$ , respectivamente .

$X_i, X_{i+1}, Z_i, Z_{i+1}$  , são as componentes  $X$  e  $Z$  dos vetores  $\vec{X}_i$  e  $\vec{X}_{i+1}$  em relação a um sistema de coordenadas dextrógiro .

#### 5.6.2 - MÉTODO DE HERGET

Tanto para este método como para o seguinte , não serão fornecidos pormenores . Será somente apresentada a sua equação de condição para a orientação relativa .

O método de Herget estabelece que a menor distância entre os correspondentes raios homólogos seja igual a zero | 18 | .

$$\frac{1}{\sin \theta} \vec{B} \cdot \vec{V}_i \times \vec{V}_{i+1} = 0 \quad (5.6.1)$$

onde:

$\vec{B}$  é o vetor que conecta os dois centros de projeção ,  
 $\vec{V}_i, \vec{V}_{i+1}$  são os vetores unitários na direção de  $X_i$  e  $X_{i+1}$  ,  
respectivamente ,

$\theta$  é o ângulo entre  $X_i$  e  $X_{i+1}$  .

**CAPÍTULO 6**

**CONCLUSÃO**

## CONCLUSÃO

Como já foi dito anteriormente foram descritos aqui os principais métodos de orientação relativa existentes . Como a diversidade de métodos é muito grande , seria impossível descrever-los todos , pois o trabalho tornar-se-ia muito extenso e repetitivo , uma vez que muitos deles são variantes dos aqui descritos.

Qualquer equação de condição para a orientação relativa não é linear , com exceção da que se obtém no método descrito na secção (5.5) , pois nesse método obtemos as correções aos parâmetros de orientação , e não , os parâmetros propriamente dito , como se obtém nos outros métodos . A linearização , excluindo a equação (5.5) , pode ser feita por derivação ou por outro processo qualquer , que os resultados não serão alterados . Alguns trabalhos , tal como o | 20 | , mostram que , se a equação de condição para a orientação relativa for linearizada por meio da série de McLaurin , o tempo de computação empregado será menor .

A convergência da equação de condição para a orientação relativa dos diversos métodos estudados aqui , de um par de fotografias , para o método de Schut , como mostra o trabalho | 21 | , duas a três iterações são suficientes , a mesma rapidez de convergência é esperada para os métodos de

Thompson e Van Der Weele , este último para o caso de um terreno plano . Para o método do U.S. Coast and Geodetic Survey como mostra o trabalho | 26 | , são necessárias de três a quatro iterações . Tanto para o método de Herget como para o do British Ordnance Survey , a velocidade de convergência é muito menor que nos outros métodos descritos aqui , devido aos fatores adicionais introduzidos nas equações de condição .

Se tomarmos , no método de Thompson , a equação (5.3.1) e ao invés de usarmos as componentes dos vetores  $\vec{B}$  ,  $\vec{X}_i$  ,  $\vec{X}_{i+1}$  , usarmos os próprios vetores , a equação (5.3.1) ficará reduzida à equação (5.2.4) . Da mesma maneira , a equação (5.3.12) pode ser obtida diretamente da equação (5.2.4) , resultando :

$$\begin{aligned} & ( Y_i Y_{i+1} + Z_i Z_{i+1} ) d\omega_{i+1} - Y_i Y_{i+1} d\phi_{i+1} - Z_i Z_{i+1} dk_{i+1} + \\ & + X_i Y_{i+1} d\phi_i + X_i Z_{i+1} dk_i + Y_i Z_{i+1} - Z_i Y_{i+1} = 0 \end{aligned}$$

Podemos ver facilmente que a equação de condição para a orientação relativa , proposta pelo método de Thompson , a equação (5.3.1) é facilmente reduzida a equação (5.2.4) , do método de Schut , e vice-versa , dando , a mesma precisão .

A seguir damos uma tabela mostrando os resultados dos cálculos dos elementos de orientação relativa usando os métodos descritos aqui . No cálculo desses elementos não foram efetuadas todas as correções dos erros sistemáticos por falta de dados complementares . Os elementos das tabelas 1 , 2 , 3 e 4 são dados em radianos .

	Schut	Thompson	B. O. S	U.S.C&GS	Herget	V.D. Weele
$d\omega$	0.0058	0.0048	0.0052	0.0044	0.0046	0.0060
$d\phi$	0.0052	0.0037	0.0047	0.0048	0.0048	0.0031
$d\kappa$	0.0034	0.0032	0.0030	0.0034	0.0037	0.0058

Tab. 1 - Desvio padrão em relação a média para o primeiro modelo da primeira faixa .

	Schut	Thompson	B. O. S	U.S.C&GS	Herget	V.D. Weele
$d\omega$	0.0085	0.0086	0.0070	0.0074	0.0076	0.0061
$d\phi$	0.0095	0.0094	0.0090	0.0091	0.0086	0.0080
$d\kappa$	0.0062	0.0060	0.0058	0.0062	0.0057	0.0048

Tab. 2- Desvio padrão em relação a média para o segundo modelo da primeira faixa .

	Schut	Thompson	B. O. S	U.S.C&GS	Herget	V.D. Weele
$d\omega$	0.0089	0.0088	0.0097	0.0055	0.0096	0.0045
$d\phi$	0.0045	0.0047	0.0052	0.0060	0.0049	0.0092
$d\kappa$	0.0056	0.0056	0.0047	0.0056	0.0060	0.0075

Tab. 3 - Desvio padrão em relação a média para o primeiro modelo da segunda faixa .

	Schut	Thompson	B. O. S	U.S.C&GS	Herget	V.D. Weele
$d\omega$	0.0066	0.0064	0.0058	0.0070	0.0065	0.0060
$d\phi$	0.0038	0.0039	0.0034	0.0031	0.0040	0.0031
$dk$	0.0089	0.0088	0.0097	0.0055	0.0089	0.0080

Tab. 4 - Desvio padrão em relação a média para o segundo modelo da segunda faixa .

Tanto no método de Herget como no do British Ordnance Survey , as equações de condição para a orientação relativa são mais complexas que as outras , por possuírem um fator adicional , o qual é uma função das coordenadas fotográficas e da orientação da fotografia . Como podemos ver nas tabelas 1,2,3 e 4 esses métodos são de igual precisão , conseqüentemente , os fatores adicionais não afetariam o resultado de uma aerotriangulação .

Para todos os métodos descritos aqui , o resultado de uma aerotriangulação é independente do método de orientação relativa escolhido . A seguir damos o resultado de uma faixa triangulada usando os métodos da secção (5.2 ) e (5.4) , extraído da |19| .

Comparação	Métodos	X (pés)	Y (pés)	Z (pés)
1	Schut	0.58	0.61	0.62
	U.S.C & G.S.	0.60	0.64	0.58
2	Schut	0.55	0.58	0.62
	U.S.C & G.S.	0.54	0.51	0.48

Tab. 5 - Desvio padrão das coordenadas em relação aos pontos de apoio .

Na tabela 6 , apresentamos os resultados de uma faixa triangulada usando os métodos do British Ordnance Survey (B.O.S) e o método de Schut (N.R.C) , extraído da referência | 20 | .

	B O . S	N. R. C
X	0.016	0.013
Y	0.010	0.010
Z	0.60	0.60

Tab. 6 - Desvio padrão por modelo na faixa triangulada.

Como podemos inferir , das tabelas ( 1,2,3,4) os métodos para a orientação relativa , fornecem igual precisão , portanto , o resultado de uma aerotriangulação independe do método de orientação relativa escolhido (Tab. 5 e 6). A diferença de um método para outro está no tempo de computação requerido , donde concluímos que , a escolha de um método de orientação relativa pode ser uma função do tempo de computação .

CAPÍTULO 7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- | 1 | DOYLE, Frederick J. The historical developmente of analytical photogrammetry . Photogrammetri-Engineering , Virginia , 30(5): 260 - 265 ,dec. 1964 .
- | 2 | EL-ASSAL, A. A. Analytical aerotriangulation at the University of Illinois . Photogrammetric -Engineering , Virginia , 29(1): 199 - 206 ,jan. 1969 .
- | 3 | LOBANOV, A. N. Analytic photogrammetry and its - future development . Geodesy and Aerophotogra-phy . Washington, D.C. , (5): 281 - 285 , 1967.
- | 4 | SAASTAMOINEN, J. Refraction . Photogrammetric En-gineering , Virginia , 38(8): 799 - 810 , aug. 1972 .
- | 5 | TIENSTRA, M. Calculation of ortogonal matrices . Enschede , ITC ,1974 , 55p.
- | 6 | WELLS, E. D. Matrices. Canada, University of New Brunswick, Dep. of Surveying Engineering . 1971. (Lectures notes ) 87 p.
- | 7 | THOMPSON, E. H. Introduction to the algebra of matrices with some applications . London. The University of Toronto Press , 1969 , 228p.

- | 8 | GOLDSTEIN, Herbert . Classical mechanics . London  
Addson - Wesley , 1950 . 398 p.
- | 9 | WESTLAKE, Joan R. A handbook of numerical matrix-  
inversion and solution of linear equations . -  
New York , John Wiley & Sons, 1968 . 228 p.
- | 10 | WHITTAKER, E. T. A treatise on the analytical di-  
namics of particles and rigid bodies . Edimburg  
Cambridge University Press , 1950 , 230 p.
- | 11 | LAMB, H. Higher mechanics . London , University  
Press , 1929 . 530 p .
- | 12 | SCHUT, G. H. Construction of ortogonal matrices -  
and their aplication in analytical photogramme-  
try. Photogrammetria , Amsterdam , 15(4): 149 -  
162 , 1959
- | 13 | FRITZ, Lawrence W. Evaluation of the Space Optic  
monocomparator . Rockville , U. S. Department-  
of Commerce , jun. 1971 (NOAA Technical Memo-  
randum NOS )
- | 14 | ABDEL-AZIZ, Youssef I. Lens distortion at close -  
range . Photogrammetric Engineering , Virginia  
35(6): 611 - 620 , 1963 .
- | 15 | SCHUT, G. H. Photogrammetric refraction . Photo-  
grammetric Engineering , Virginia , 35(1): 79 -  
86 , jan. 1969 .

- | 16 |           ANDRADE, J. B. de . O problema dos sistemas de coordenadas nas aerotriangulações. Curitiba , Universidade Federal do Paraná , 1973, 72 p.
- | 17 |           WEELE, A. J. Van der . The relative orientation' of photographs of mountainous terrain . Photogrammetria, Washington, D.C. , 16(3): 161 - 169 , 1959 .
- | 18 |           HORSFALL, C. T. Electronic computer programs for analytical photogrammetry. Photogrammetric Engineering , Virginia , 27(5): 766 - 882,dec. 1961.
- | 19 |           CHAVES, Jesse R. Two methods of analytic triangulation for highways . Photogrammetric Engineering , Virginia, 34(7): 697 - 706 , jul. 1968.
- | 20 |           SCHUT, G. H. Remarks on the theory of analytical aerial triangulation . Photogrammetria . Washington,D. C. , 16(2): 57 - 66 , 1959 .
- | 21 |           \_\_\_\_\_. An introduction to analytical strip triangulation with a fortran program. National Research Council of Canada , Ottawa, (34): 38 - 50 , dec. 1966 .
- | 22 |           GHOSH, Sanjib K. Relative orientation improvemente. Photogrammetric Engineering, Virginia , 32(3): 410 - 415 , may 1966 .