LEÔNIA GABARDO NEGRELLI

A CONSIDERAÇÃO DE PROCEDIMENTOS DEDUTIVOS E INDUTIVOS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre. Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná.
Orientador: Dr. Décio Krause.
Co-orientadora: Dra. Maria Tereza Carneiro Soares.

CURITIBA

2000

TERMO DE APROVAÇÃO

A CONSIDERAÇÃO DE PROCEDIMENTOS DEDUTIVOS E INDUTIVOS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre. Curso de Pós-Graduação em Educação, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná, pela comissão formada pelos professores:

Orientador: Prof. Dr. Décio Krause (UFSC)

Co-orientadora: Profª. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares (UFPR)

Banca Examinadora Prof. Dr. José Carlos Cifuentes Vásquez(UFPR)

Profª. Dra. Zélia Milléo Pavão (PUC-PR)

Curitiba, 31 de março de 2000

O que aprendi com simplicidade,
reparto-o sem reserva:
não calarei a sua riqueza.

Sabedoria 7,13

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Décio Krause, pela orientação.

À Profa. Dra. Maria Tereza Carneiro Soares, pela co-orientação.

Aos Professores Dr. Irineu Bicudo, Ms. Carlos Roberto Vianna e Dr. José Carlos Cifuentes pelas sugestões feitas no exame de qualificação.

À Violeta Maria Estephan, pelo companheirismo e amizade.

À CAPES, pela bolsa concedida.

SUMÁRIO

RESUMO

Este estudo teve como objetivos investigar a relevância que procedimentos dedutivos e indutivos podem ter para a formação do professor de matemática e identificar como tais procedimentos têm sido considerados em disciplinas de um curso de licenciatura em matemática. Trata-se de um estudo teórico, seguido de uma pesquisa documental para a qual foi utilizada a metodologia de análise de conteúdo. Os documentos analisados foram programas e planos de ensino de disciplinas ofertadas pelos Departamentos de Física, Matemática e Desenho ao curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná. Com essa pesquisa constatou-se que, em algumas disciplinas, os referidos procedimentos são considerados como conteúdos de ensino e, em outras, podem ser detectados dentre os objetivos de ensino ou competências que se espera que o aluno adquira. Após um estudo sobre a natureza e o papel dos referidos procedimentos e sobre aspectos do desenvolvimento cognitivo humano, considerou-se que o conhecimento de procedimentos dedutivos e indutivos, de sua distinção e importância para o desenvolvimento das ciências, pode desempenhar um papel relevante na formação do professor, ajudando-o a entender o processo de formação do conhecimento matemático e das ciências empíricas e ajudando-o a perceber etapas de raciocínio pelas quais pode passar o aluno até ser capaz de compreender e elaborar demonstrações.

ABSTRACT

This study is aimed to investigate how the relevance that deductives and inductives procedures can have on the math teacher's formation and identify how these procedures has been considered in Mathematics Course's disciplines. This is a theoretical study based on documental research, which it was used the analysis of subject methodology. The documents analyzed were programs and plans teaching of the disciplines offered by Physic, Mathematics and Drawing Departments to the Mathematical Course's from Universidade Federal do Paraná. With this search, it's able to notice that, in some disciplines it was detected that the deductives and inductives procedures are considered as teaching contents and in other disciplines they can figure as teaching objectives. After one study about the nature and the function of these procedures and about the developments human cognitive, it was considered that a good knowledge of the deductive and inductive procedures, of its distinction and importance to the science development, can execute an important function on the teacher formation, helping him to understand the process of the mathematical knowledge formation and the empirical sciences, besides to perceive reasoning steps that the learner is able to pass.

APRESENTAÇÃO

Este estudo foi desenvolvido como trabalho de conclusão do curso de Mestrado em Educação, da Universidade Federal do Paraná, na linha de pesquisa Cognição e Aprendizagem. Mais especificamente, no sub-tema *a formação do professor e o processo ensino-aprendizagem na educação matemática e no ensino de física*.

Trata-se de um estudo teórico, seguido de uma pesquisa documental, situado no âmbito da Educação Matemática, e tendo como foco específico a relevância de uma discussão sobre procedimentos dedutivos e indutivos em disciplinas de um Curso de Licenciatura em Matemática.

Pretendeu-se contribuir na formulação de diretrizes relacionadas à necessidade de se promover uma discussão, nos cursos de licenciatura, sobre os procedimentos de prova utilizados no desenvolvimento de teorias científicas e em diversas situações, comumente exploradas no ensino e presentes no quotidiano dos indivíduos. Isso tudo, frente às dificuldades detectadas na compreensão e na elaboração de demonstrações por alunos dos níveis fundamental e médio e frente à falta de habilidade de futuros professores em lidar com tal procedimento, revelada pelo resultado de uma das questões do Exame Nacional de Cursos de 1998.

No primeiro capítulo, expõe-se um pouco da problemática na qual está inserido o objeto de pesquisa, incluindo uma revisão de literatura sobre o tema. Apresentada-se também uma justificativa pessoal para a realização do estudo, além das questões de investigação e pressupostos iniciais.

No segundo capítulo, foram abordados diversos tópicos que se mostraram relacionados a uma discussão sobre os procedimentos dedutivos e indutivos. Isso inclui considerações sobre o papel da intuição no ensino de matemática e um olhar para o desenvolvimento histórico da matemática, em especial, para sua transformação em uma ciência dedutiva. Também fizeram parte deste capítulo colocações a respeito do método axiomático e de alguns tópicos de lógica, além de uma breve discussão sobre o *problema da indução* e o esboço de uma das soluções propostas ao mesmo. Para concluir, foram feitas algumas considerações sobre a distinção entre verdade e demonstrabilidade e o uso de "provas informais" no ensino de matemática.

No terceiro capítulo, tratou-se de assuntos referentes ao desenvolvimento cognitivo do indivíduo e possíveis relações entre esse desenvolvimento e as possibilidades de aprendizagem/compreensão dos procedimentos abordados no capítulo anterior. Para tanto, foi tomado como referência o modelo teórico piagetiano do desenvolvimento cognitivo, segundo o qual a presença de um raciocínio hipotético-dedutivo caracteriza uma das formas mais avançadas de conhecer do indivíduo. Além disso, foram abordados a relevância e o papel de um projeto pedagógico para um curso de licenciatura.

No quarto capítulo foram descritos os procedimentos metodológicos utilizados na parte do estudo compreendida por uma pesquisa documental, cujo objetivo foi analisar como os procedimentos dedutivos e indutivos têm sido considerados em disciplinas do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná. Além disso, são apresentados os resultados da referida análise e uma discussão acerca dos mesmos.

E para finalizar, foram tecidas algumas considerações finais e foram apresentadas algumas questões suscitadas no desenvolvimento deste estudo.

1

JUSTIFICATIVA PARA A INVESTIGAÇÃO E ABORDAGEM DO PROBLEMA

Nosso interesse por questões pertinentes ao campo da educação matemática provém da nossa experiência tida como aluna do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná. Mais precisamente, provém da participação em atividades extra-curriculares voltadas à investigação de questões concernentes ao ensino e à aprendizagem desta disciplina nos diversos níveis.

Tivemos a oportunidade de fazer parte, no primeiro ano do curso, do Programa de Bolsas de Licenciaturas, o PROLICEN/94-SESu/MEC, e nos três anos seguintes, na condição de aluna-bolsista, de um Projeto de Extensão Universitária que visava promover uma melhoria da qualidade no ensino de matemática.

Nesse último, além do estudo de conteúdos específicos de matemática, realizado sob a orientação dos professores coordenadores do projeto, ocorriam encontros semanais com um pequeno grupo de professores de matemática do ensino fundamental e médio, que se propunham a vir até a universidade para discutir com os alunos-bolsistas, os professores orientadores e, eventualmente, outros professores da universidade, a adequação desses conteúdos à sala de aula. Outro foco de debate nesses encontros eram supostas dificuldades que os professores teriam no ensino de tais conteúdos.

Mas, em várias dessas ocasiões, as estratégias de ensino não eram o centro das discussões, nem as dificuldades dos alunos ou a importância da presença deste ou daquele conteúdo ou procedimento de ensino no currículo escolar. Em muitos casos, o foco das discussões eram os conflitos dos próprios professores na busca de compreender a matemática que estavam ensinando e que, em alguns momentos, não lhes parecia clara. Um consenso a que comumente se chegava era que eles não haviam tido, em seus cursos de formação, acesso a diferentes abordagens dos conteúdos matemáticos que estavam acostumados a ensinar em suas aulas.

E isso levava-nos a uma reflexão sobre a formação que estávamos recebendo na época. Assim, o que percebíamos era que, em boa parte, ela não se distanciava muito da recebida há mais de uma década, por aqueles professores. Não diferentemente daqueles tempos, no curso de licenciatura que fizemos ainda predominava a repetição de procedimentos, a reprodução de demonstrações, a memorização de resultados, deixando pouco espaço para a discussão da gênese e do desenvolvimento das teorias matemáticas e a transformação dessas em conteúdos escolares.

Uma das atividades desenvolvidas nesse período foi o estudo de geometria, partindo de um livro texto[1] no qual ela era apresentada de forma semelhante à dos *Elementos* de Euclides. Isso possibilitou-nos conhecer um pouco mais, além do que é visto nas disciplinas ofertadas no curso de licenciatura em matemática, sobre a primeira sistematização da geometria, a qual é conhecida pelo uso do método axiomático e tomada como exemplo de estruturação do conhecimento dedutivo.

Durante esse processo, nas atividades curriculares específicas para os licenciandos, percebemos o quanto é restrita a abordagem e a discussão de aspectos históricos acerca do conhecimento matemático, de sua transformação em uma ciência dedutiva, da evolução e da fundamentação de seus conceitos e procedimentos, das várias concepções possíveis de matemática. Essa fase marcou o início do nosso interesse por

[1] MOISE, E. E.; DOWNS, F. L. **Geometria moderna**. Parte I. Trad. por Renate G. Watanabe e Dorival A. Mello. São Paulo : Edgard Blucher, 1971.

compreender melhor um procedimento típico dessa ciência: as *provas matemáticas* ou *demonstrações*, como são conhecidas.

É comum, desde o primeiro ano da graduação, o licenciando deparar-se com o uso de demonstrações como forma de apresentação e prova de resultados considerados importantes em uma dada disciplina. Mas essas demonstrações aparecem, geralmente, como reproduções daquelas expostas em livros didáticos, ou então nas notas de aula elaboradas pelos professores. Em muitos casos, elas são apenas apresentadas, quase sem discussão, e de forma tão "óbvia", que os alunos se habituam à sua reprodução, em vez de terem uma atitude crítica diante do que lhes é dado a conhecer. E qual é o resultado da ausência de tal atitude para o desenvolvimento desse futuro professor? Vemos que ele não é difícil de aparecer.

Recentemente, no Exame Nacional de Cursos de 1998, o conhecido 'Provão'[2], constava a seguinte questão[3], que era destinada tanto aos formandos de bacharelado quanto aos de licenciatura em matemática:

> *O losango é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais. A partir desta definição, pode-se demonstrar a seguinte afirmação: "Ter diagonais perpendiculares é uma condição **necessária** para que um quadrilátero seja um losango."*
> *a) enuncie esta afirmação sob a forma de um teorema do tipo "Se... então...".*
> *b) demonstre o teorema enunciado no item a).*
> *c) enuncie a recíproca do teorema no item a) e decida se ela é ou não verdadeira, justificando sua resposta.*
> *Dados/Informações adicionais:*
> *O teorema sobre os ângulos formados por duas paralelas cortadas por uma transversal pode ser considerado conhecido, bem como os casos de congruência de triângulos.*[4]

Tal questão poderia ser considerada acessível a alunos do terceiro grau, caso tivessem uma compreensão dos conteúdos de geometria e lógica que possivelmente foram-

---

[2] Exame utilizado pelo Ministério da Educação e do Desporto para medir a qualidade e a eficiência de cursos de graduação ofertados em todo o país, aplicado a alunos do último ano de alguns cursos, e que não é obrigatório.

[3] Uma solução para esta questão encontra-se no apêndice.

[4] Disponível em: http://www.inep.gov.br/enc_resultados/home/sintese/ProvasQuestionário.htm

lhes ensinados. No entanto, o baixo nível de acertos foi espantoso. A nota média foi de 0,8 pontos, sendo que o valor da questão era de 20 pontos. Além disso, houve um índice de 54,2% de respostas em branco e 34,82% das respostas obtiveram nota zero, conforme mostra o resultado da análise das questões, disponível na Internet, na página cujo endereço foi mencionado.

A ênfase em procedimentos dedutivos no ensino de matemática, nos diversos níveis, tem e teve seus defensores, bem como não simpatizantes, em vários momentos da história da educação. Contudo, o que o resultado exposto acima sugere, é que muitos futuros e até já atuantes professores de matemática estão inaptos para decidir pela recusa ou pela adesão a tal empreendimento, tendo em vista seu revelado despreparo em lidar com demonstrações. Trata-se de algo surpreendente, já que em boa parte de um curso de licenciatura em matemática os alunos "demonstram" teoremas em várias disciplinas, o que é considerado importante para seu aprendizado e sua formação.

Como o Exame Nacional de Cursos é aplicado a alunos em fase de conclusão de curso e, em sua maioria, os que participam da prova são alunos de licenciatura[5], tal resultado apresenta-se preocupante, levando-nos a questionar qual a compreensão que os licenciandos, futuros professores de matemática do ensino fundamental e médio, poderão ter, a partir da formação que recebem, do que vem a ser uma demonstração e do papel dela na matemática e no seu ensino. Como responderiam os licenciandos a questões como: por que tal procedimento "prova" um resultado? O que garante que ele é seguro? Como se elabora uma demonstração? Seria algo possível de ser realizado por qualquer indivíduo? Tal tipo de procedimento pode ser utilizado em qualquer outro campo do conhecimento?

---

[5] O número de alunos que cursam licenciatura em geral é maior do que o dos que cursam bacharelado.

Tais perguntas motivaram-nos a refletir a respeito dos temas que são abordados nesse estudo.

Não raro procedimentos típicos da atividade matemática, como os dedutivos, são empregados no ensino, ancorados à crença de que seu estudo pode favorecer o desenvolvimento de um raciocínio "dedutivo" e a capacidade de argumentação, além de contribuir para a aprendizagem de habilidades úteis à resolução de problemas, estejam eles presentes em situações do dia-a-dia ou em atividades propostas em outras disciplinas ensinadas na escola.

Entretanto, esses mesmos procedimentos têm estado historicamente vinculados a uma prática de ensino que limita as bases intuitivas da aprendizagem, tentando impor ao indivíduo um mecanismo artificial de raciocínio, o que pode ser percebido na seguinte colocação de Davis e Hersh sobre o ensino de matemática: "[...](em muitos casos), Euclides é engolido à força por não se sabe quantos milhares de alunos, a 'prova matemática' foi reduzida a um esquema formal, em que duas colunas adjacentes, 'asserções' à esquerda e 'justificações' à direita, levam, inexoravelmente, dos 'dados' à 'demonstração', das hipóteses à conclusão."(DAVIS; HERSH, 1988, p. 61).

BALACHEFF (1992), relembra que o ensino de matemática comumente tem entre seus propósitos, contribuir para o desenvolvimento de um pensamento dedutivo, da capacidade de construir uma série de deduções e descobrir falhas em alguma argumentação, além de incitar o rigor lógico e desenvolver o senso crítico. No entanto, segundo esse autor, alguns obstáculos como a falta de maturidade do aluno e a confiança na precisão das regras lógicas, além da autoridade do professor, contribuem para retardar o despertar do senso crítico.

Em uma de suas investigações, BALACHEFF (1992) utilizou-se de uma situação experimental de interação e comunicação entre alunos de 11 a 16 anos de idade e propôs uma atividade a respeito da resolução de um problema de análise combinatória. A partir dela, estudou as condições didáticas que conduziam os alunos à tomada de consciência da necessidade de provar e ao domínio de tal atividade.

No contexto da investigação realizada por Balacheff, a *explicação* compreende um discurso que visa tornar inteligível o caráter de verdade que uma proposição ou resultado adquire para o locutor. Já a noção de *prova* contém certas explicações que podem ser discutidas, refutadas ou aceitas, podendo haver um sistema de validação das mesmas comum aos interlocutores. E as *demonstrações* são certos tipos de provas, uma seqüência de enunciados que seguem regras determinadas. Utilizando esse último procedimento, um enunciado é reconhecido como verdadeiro se é obtido a partir daqueles que o precedem, com o auxílio de regras de dedução bem definidas.

Buscando conhecer quais concepções de prova em matemática formavam os alunos, para então saber quais relações eles estabeleciam entre a elaboração de *explicações* em matemática, a *demonstração* e a noção de *prova*, Balacheff constatou que a imagem que os alunos formavam da *explicação* desviava-se da noção de *prova*, e a *demonstração* aparecia como norma do discurso e não como ferramenta de prova. E isso foi visto como um obstáculo relativo ao ensino recebido.

A falta de maturidade do aluno, vista por Balacheff como um obstáculo ao desenvolvimento de um certo tipo de raciocínio considerado importante, não parece tratar-se somente de uma maturidade biológica, mas de uma certa "maturidade matemática" também. E uma das causas de insucessos na aprendizagem dos conteúdos matemáticos pode ser devida à pouca atenção dada, no ambiente escolar, a esses dois condicionantes. Entretanto, pode-se esclarecer melhor tais aspectos, a partir de investigações que busquem descobrir relações entre os níveis de desenvolvimento cognitivo e a compreensão de determinados conteúdos escolares.

Sob diversos aspectos, as demonstrações podem ser vistas como elementos fundamentais na matemática. Porém, o professor não deve exigir do aluno uma demonstração simplesmente porque em matemática é assim que se faz. O que ele precisa, é ter uma idéia clara de que isso *é matemática*, o que tem relação com a colocação de RADFORD (1994) de que "[...] o ensino da demonstração não é simplesmente um problema que envolve somente a idéia de demonstração, mas diz respeito à atividade matemática mesma*[...]" (Id., ibid.)*.

Nessa mesma direção, GARNICA (1995) afirma que a demonstração, ou prova rigorosa, como ele convencionou chamá-la, "[...] é elemento fundamental se pretendemos compreender como funciona o discurso matemático e como são engendradas as concepções que permeiam a sala de aula de Matemática, sendo assim, tema importante à Educação Matemática[...]" (GARNICA, 1995, p. 54). Em seu estudo, Garnica analisa depoimentos de professores de matemática que ensinam em cursos de licenciatura, buscando descobrir o significado da prova rigorosa na formação do professor de matemática. Segundo ele, "[...] são necessários esforços complementares para que seja aberto, na formação do professor, um campo para o estabelecimento da leitura crítica – onde devem ser expostas todas as nuanças da questão, inclusive a da leitura técnica [...]" *(Id., ibid.*, p. 231). Para Garnica, a prática científica fundamenta a leitura técnica, ao passo que a leitura crítica toma lugar no contexto da educação matemática. Complementa ainda que, caso não ocorram tais esforços complementares, "[...] as concepções vigentes, reforçadas e reproduzidas, desempenharão a função de germe destrutivo de toda e qualquer prática que se caracterize pelo dinamismo, visando uma abertura de horizontes[...]"*(Id., ibid.*p.231).

Apesar da grande contribuição que o estudo de procedimentos dedutivos possa ter a oferecer para a aprendizagem de matemática e para o alcance daqueles outros objetivos que o ensino dessa disciplina deve procurar atingir, o que se constata nas avaliações é que muitos alunos encontram dificuldades ao lidar com demonstrações, possivelmente por não terem aprendido a elaborá-las em etapas anteriores do ensino, e muito menos compreendido a importância e o porquê de fazê-lo. Podemos perceber que isso ocorre não somente no ensino fundamental e médio, mas também no superior. O que nos sugere que um olhar para o modo como está sendo conduzido este último é importante quando se pretende minimizar deficiências no ensino e na aprendizagem de matemática no nível fundamental e médio.

O sentido para que em matemática sejam empregados procedimentos dedutivos para estabelecimento de resultados será visto com mais profundidade no Capítulo 2. No entanto, no ensino dessa disciplina e nos avanços que são promovidos em outras áreas do conhecimento, ocorrem situações que não se apóiam exclusivamente em procedimentos dessa natureza. A construção de novos conhecimentos nas várias ciências, ocorre por meio do emprego de outras formas de raciocínio que não se restringem a deduções, como, por exemplo, aquelas presentes no que se conhece como método hipotético-dedutivo. Este, por sua vez, envolve o uso de procedimentos indutivos, que nas ciências empíricas desempenham papel fundamental, como aquele que, na matemática e na lógica, cabe às demonstrações.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997; BRASIL, 1999) que fornecem diretrizes para o ensino de matemática no nível fundamental e médio, ou seja, para aqueles níveis nos quais o licenciando irá atuar, a necessidade do conhecimento dos procedimentos típicos da matemática e outras ciências por parte do professor é pressuposto básico e praticamente explícito. Tais parâmetros sugerem, entre outras coisas, o perfil que os professores devem apresentar a fim de propiciarem aos alunos o desenvolvimento de certas competências e habilidades: "Numa reflexão sobre o ensino da Matemática é de fundamental importância ao professor: identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações [...]" (BRASIL, 1997, p. 37).

A partir disso, espera-se que a função da matemática no nível fundamental de ensino seja desempenhar "[...]equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares." (BRASIL, 1997, p.29).

Já entre os objetivos do ensino de matemática no nível médio está o de levar o aluno a "[...]expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática[...]" (BRASIL, 1999, p. 85). Saber formular hipóteses, prever resultados, distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos estão entre algumas das competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática pelos alunos desse nível.

Se essas são as competências que se espera dos alunos ao concluírem o ensino médio, que dizer das competências necessárias aos professores para atuarem nesse nível?

O próprio Exame Nacional de Cursos, anteriormente mencionado, salienta que, dentre as habilidades básicas e fundamentais para o exercício da profissão ao final da licenciatura estão[6]: a compreensão e capacidade de elaboração de argumentação matemática, além de saber discorrer sobre conceitos matemáticos, definições, teoremas, exemplos, propriedades e trabalhar com conceitos abstratos na resolução de problemas. De posse dessas habilidades, espera-se que o professor então tenha a capacidade de saber organizar os conteúdos matemáticos para serem utilizados em sala de aula, de saber empregar metodologias de ensino e conhecer tendências em educação matemática, sem

---

[6] Disponível em: http://www.inep.gov.br.

falar na capacidade de estabelecer relações entre a matemática e as outras áreas do conhecimento

Em um paradigma educacional como o atual, que tenha como objetivo promover uma aprendizagem construtivista, o aluno tem o papel de agente na elaboração do seu conhecimento. Tal concepção de aprendizagem, bastante difundida nos meios escolares atualmente, defende que a aprendizagem precisa partir do conhecimento que o indivíduo já possui ao entrar em um sistema de ensino formal. A construção dos conceitos deve ser favorecida pelo respeito às possibilidades de aprendizagem do aluno, as quais se acredita que estejam, de alguma forma, submetidas ao nível de desenvolvimento no qual se encontra esse aluno (MARTÍ, 1998). Para tanto, o professor precisa, conforme relatou IMENES (1989), saber como pode se dar o desenvolvimento cognitivo do indivíduo, além de conhecer como se deu a construção histórica dos conceitos da ciência que ensina. Mas, como e onde o professor construirá seus próprios conceitos, para então ensiná-los aos seus alunos?

MOURA (1995), a partir de suas pesquisas sobre a formação do profissional de educação matemática, afirma que, para que o professor promova um ensino condizente à evolução do ser humano e da ciência, ele precisa, antes de tudo, receber uma formação que o capacite para tal função, e alguns dos principais lugares desta formação são os cursos de licenciatura. “A consciência do papel do conteúdo e do conjunto de estratégias que poderão ser adotadas de modo a contribuir com a formação dos educandos é certamente uma competência a ser adquirida pelo educador matemático nos seus centros de formação.” *(Id., ibid.*, p.21). Além disso, o professor de matemática precisa conhecer e compreender os procedimentos utilizados na abordagem das teorias que compõem a ciência matemática, salienta Moura.

Entretanto, o que mostra o resultado do Exame Nacional de Cursos? Embora tenhamos tomado apenas uma das questões desse instrumento de avaliação, sabemos que não é difícil encontrar outras situações semelhantes, partindo dos próprios concursos vestibulares, que revelam um estado de empobrecimento da cultura matemática adquirida na escola básica e nos próprios cursos superiores.

Disso tudo decorre nosso interesse pelo estudo das origens de algumas dificuldades encontradas pelos licenciandos na aprendizagem e no uso de demonstrações, bem como pelo papel que pode (e deve, de acordo com *os Parâmetros Curriculares Nacionais* e as diretrizes *do Exame Nacional de Cursos*) desempenhar na formação do professor de matemática e dos seus alunos o estudo de procedimentos utilizados em matemática e em outras áreas do conhecimento, em especial, os procedimentos dedutivos e indutivos.

Havendo no curso de Mestrado em Educação da Universidade Federal do Paraná, na linha de pesquisa Cognição e Aprendizagem, uma abertura para a investigação de temas referentes à formação do professor e do processo de ensino-aprendizagem na educação matemática, sentimo-nos impulsionados a desenvolver este estudo, ampliando o debate acerca dos tópicos que expusemos até então. E a partir da problemática exposta e de estudos realizados em disciplinas específicas da linha de pesquisa acima mencionada, como, por exemplo, *Educação em ciências exatas e sua relação com o projeto pedagógico* e *Desenvolvimento psicológico e suas implicações educacionais,* e no seminário *Fundamentos da Matemática*, foram delimitadas as seguintes questões de investigação:

Qual a relevância de se considerar procedimentos dedutivos e indutivos na apresentação de disciplinas de um curso de licenciatura em matemática para a formação do professor?

Procedimentos dedutivos e indutivos têm sido considerados explicitamente em disciplinas do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Paraná?

A apresentação de disciplinas de um curso de matemática é vista aqui como o modo como são apresentados os planos de ensino ou programas das mesmas, tendo como foco os conteúdos, os objetivos de ensino, os procedimentos e os demais itens comumente existentes nesses documentos.

No momento em que as avaliações de competências e habilidades nos diferentes níveis de ensino mostram haver dificuldades nesse ensino e que parâmetros e diretrizes curriculares sugerem a necessidade de rever as formas de acesso ao conhecimento matemático de modo que se privilegie sua compreensão, a formação do professor vem sendo identificada como um dos pontos fundamentais de discussão.

Assim sendo, temos como pressuposto que a discussão sobre os tópicos levantados se mostra fundamental devido ao que sugerem as diretrizes para o ensino de matemática fornecidas por recentes documentos como os *Parâmetros Curriculares Nacionais* e as diretrizes do *Exame Nacional de Cursos*, e também devido aos diversos estudos que propõem que sejam buscadas formas mais adequadas de tratamento para os procedimentos dedutivos, aos quais nós acrescentamos os indutivos. A viabilização de tal discussão pode ser favorecida, em um primeiro momento, a partir da explicitação, no projeto pedagógico dos cursos de licenciatura, de como esses procedimentos poderão ser abordados em disciplinas de tais cursos, objetivando a preparação do futuro professor para o tratamento deles em sua atuação profissional.

2

PROCEDIMENTOS DEDUTIVOS E INDUTIVOS

2.1 A INTUIÇÃO EM MATEMÁTICA E NO SEU ENSINO

> Sem a intuição os jovens espíritos não poderiam iniciar-se na inteligência da matemática; não aprenderiam a amá-la, e [..] sobretudo, jamais se tornariam capazes de aplicá-la.
>
> Poincaré

Uma das censuras comumente feitas ao ensino de matemática é que ele encobre o processo de descobrimento, de construção do conhecimento, mostrando apenas os conteúdos sistematizados, o produto final de um processo de investigação que, para muitos alunos, pode parecer não existir.

Mas quando se pretende explorar e incorporar nas práticas pedagógicas os processos que antecedem o da comprovação, sistematização e exposição, um caminho é observar que mecanismos são utilizados em diversas áreas, em busca de novas descobertas ou invenções. Além disso, um olhar para o desenvolvimento dos próprios mecanismos de investigação, comumente empregados em matemática, também se mostra pertinente. Principalmente quando se pretender atender às atuais diretrizes para o ensino fornecidas, por exemplo, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio, que objetivam, entre outras coisas, levar o aluno "[...]compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele [...] adquirir uma formação científica geral[...]" (BRASIL, 1999, p. 84).

Embora o objeto central de nosso estudo sejam os procedimentos de prova, de comprovação de resultados no sentido que comumente se aceita em matemática, são necessárias algumas considerações sobre a atividade da descoberta, criação ou invenção[7].

Uma investigação em matemática pode ser realizada à procura de novas relações entre objetos matemáticos já conhecidos, ou ainda por impulso de outras disciplinas que utilizam seus mecanismos como ferramentas para resolver seus problemas. A postura do pesquisador ou estudante quando investiga algo nesse âmbito pode ser caracterizada pelos caminhos que ele escolhe para explorar um novo assunto, ou ampliar os conhecimentos acerca de outro já familiar. O matemático francês Henri Poincaré costumava classificar em dois tipos os espíritos matemáticos que conhecia, de acordo com o modo como procediam na busca de novas descobertas: os intuitivos e os lógicos. Os primeiros deixam-se guiar pela intuição, alcançam conquistas rápidas, às vezes de maneira precária, porém muito fecundas. Os demais só avançam passo a passo, sem considerar nada que não possa ser imediatamente justificado, só conhecendo a implacável lógica.

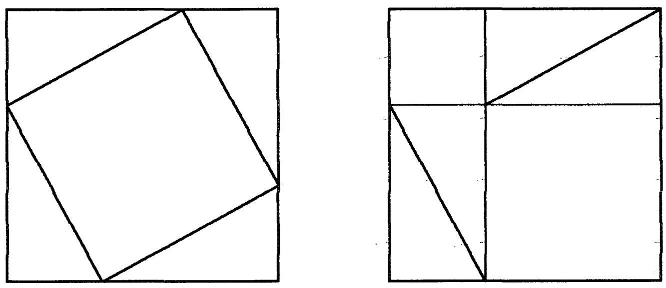
Pela forma como caracteriza a atitude de um intuitivo, podemos perceber que traços ele considerava marcantes nesses espíritos: "Lie era um intuitivo; [...]pensava em imagens."(POINCARÉ, 1995, p. 15). Quanto a Weierstrass, a quem atribuía um espírito lógico, em seus trabalhos sobre a teoria geral das funções, "[...]pode-se percorrer todos os seus livros sem neles encontrar uma figura."(*Id., Ibid.*, p.15). Defensor do papel e da importância da intuição no desenvolvimento da matemática e no seu ensino, Poincaré considerava o uso de figuras e "imagens mentais", grandes aliados ao progresso da matemática na fase em que a sistematização dedutiva ainda não lhe é característica.

---

[7] Esses três termos serão empregados sem maiores distinções neste texto. Mas um estudo acerca dos mesmos pode mostrar diferenças significativas. Não sendo tais distinções e suas conseqüentes fundamentações filosóficas interesse do nosso estudo, não nos ocuparemos delas.

Em exemplos que ilustram formas de proceder de civilizações antigas, as figuras também aparecem tendo, ao que tudo indica, um importante papel na apreensão de relações e na aquisição do conhecimento matemático. Entre eles está o teorema de Pitágoras cuja "prova", exposta abaixo, baseada na comparação de áreas, é atribuída ao próprio Pitágoras (KNEALE; KNEALE, 1962, p.6).

Figura 1- TEOREMA DE PITÁGORAS



Um olhar atento para essa figura leva-nos a crer no conhecido teorema que afirma que em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Em especial, a área do quadrado cujo lado tem a mesma medida que a hipotenusa é igual a área do quadrado cujo lado tem a medida de um dos catetos mais a área do quadrado cujo lado tem a mesma medida do outro cateto.

Uma figura adequadamente apresentada pode servir para convencer um indivíduo a respeito de alguma relação que nela se pode detectar. Mas, mesmo para desenhar uma figura que ilustre uma relação apropriadamente não basta um traçar de linhas ao acaso, e para que um observador consiga "ver" nesta figura algo significativo também é necessário algo mais que o sentido da visão. Como sugeriu HUNTLEY(1985), nesse caso, o olho precisa ser educado para ver. Prova disso é que um caminho para a resolução da questão do Exame Nacional de Cursos exposta no capítulo 1 poderia ser encontrado esboçando-se uma figura que servisse de contra-exemplo para a proposição que deveria ser enunciada e provada no item c) da referida questão.

Porém, para resolver todos os itens da questão, esboçar uma figura teria sido útil, mas para muitos, poderia não ter sido suficiente. A intuição fornecida pelo desenho não dá conta de tudo; o mesmo ocorrendo com os processos puramente dedutivos e formais. Mas, apesar de a intuição não nos dar o rigor, a certeza, é preciso, como afirmou Poincaré, uma faculdade como essa, que nos permita ver o fim de longe.

Contudo, não é somente por meio do uso de figuras que o emprego de tal faculdade pode ser evidenciado. A familiaridade com o assunto e os procedimentos de uma determinada área também pode permitir-nos avançar no descobrimento de novas relações, na elaboração de hipóteses coerentes e na busca de justificativas para as mesmas, ou seja, no uso do método hipotético-dedutivo. Para que uma hipótese formulada seja aceitável, em princípio, ela precisa estar de acordo com os dados disponíveis que de alguma forma relacionam-se a ela. Nas ciências empíricas, por exemplo, ela é colocada à prova vendo se os resultados obtidos por meio de experimentos ou observações corroboram-na. Em seguida, novas implicações poderão ser derivadas de tal hipótese. Desse modo, as hipóteses "[...]tirarão sua certeza apenas das longínquas conseqüências que acarretam, na medida em que estas concordarem com a experiência: essas certezas experimentais são para nós garantias de sua verdade."(BLANCHÉ *apud* BRUYNE, 1991, p.91).

No método hipotético-dedutivo os procedimentos empregados não são todos bem definidos e explícitos. Eles provêm também da inspiração e do gênio de quem formula as hipóteses. Mas a boa elaboração dessas pode estar ligada à maior ou menor intuitividade do pesquisador.

Quando se fala de um indivíduo que possua habilidades matemáticas, em geral pensa-se naquele capaz de raciocinar abstratamente e ter desenvoltura na realização de cálculos, além de possuir boa memória. Um espírito intuitivo nem sempre é citado entre as qualidades do bom aluno em matemática.

Praticamente em todas as áreas, após descobrir, inventar, há que se sistematizar o conhecimento em certo momento. E aí entram o método axiomático, os procedimentos formais e abstratos que, segundo BLANCHÉ (1987), darão às teorias a forma mais acabada que elas podem assumir. Assim sendo, descoberto um resultado, o passo seguinte é reconstruí-lo justificando os procedimentos utilizados para provar que ele é verdadeiro[8].

No caso da matemática esse procedimento é a demonstração.

2.2 ALGUNS PROCEDIMENTOS UTILIZADOS PARA ESTABELECER RESULTADOS

> A matemática na vida real é uma forma de interação social, onde a "prova" é uma composição do formal e do informal, de cálculos e comentários incidentais, de argumento convincente e apelos à imaginação.
> Davis e Hersh

Vários procedimentos são empregados a fim de se obter, com o maior grau de segurança possível, uma prova para os fatos descobertos por meio dos processos de exploração, compreensão e explicação da realidade, característicos da atividade científica.

Em uma investigação dessa natureza esses procedimentos precisam satisfazer certos critérios para que o conhecimento produzido seja tido como científico. Tais critérios, em geral, são elaborados pela comunidade de pesquisadores e aperfeiçoados de acordo com as necessidades provindas do avanço das ciências e dos próprios mecanismos de

---

[8] O termo "verdadeiro" é utilizado aqui sem muito rigor e em um sentido intuitivo.

investigação. No entanto, esses critérios não foram ainda formulados de uma maneira totalmente satisfatória em diversas áreas, como salienta BRUYNE (1991). Várias delas não chegaram a ser reconhecidas como científicas por não terem ainda elaborado e explicitado adequada e suficientemente as normas para a validação de seus resultados.

Todavia, o que se pode afirmar, de um modo geral, é que a atividade científica deve produzir resultados confiáveis. E para assegurar isso, os procedimentos utilizados para estabelecer os resultados encontrados precisam ser passíveis de ser analisados e aceitos quanto à sua objetividade, ou seja, se empregados por algum outro estudioso, nas mesmas condições em que o foram primeiramente, devem fornecer, pelo menos em princípio, os mesmos resultados. Isso significa que não devem prevalecer, sobre a investigação, componentes de natureza subjetiva como, por exemplo, preferências pessoais do pesquisador ou interesses políticos locais, quando se almeja um conhecimento científico BRUYNE (1991).

Dentre os procedimentos comumente empregados para estabelecer resultados em diversos campos do conhecimento destacamos dois tipos: os dedutivos e os indutivos. Pode-se dizer que os procedimentos do primeiro tipo são típicos das ciências formais, ou seja, daquelas que independem da experiência para estabelecer seus resultados, como a matemática e a lógica. Já os do segundo tipo, aparecem nas ciências ditas empíricas, às quais não é adequado estabelecer resultado algum prescindindo da experiência. Exemplos destas seriam a biologia e a física, dentre as ciências reais, a psicologia e a sociologia, dentre as ciências humanas, segundo uma classificação das ciências quanto aos seus métodos de investigação e prova de seus resultados, presente em DA COSTA (1997). Convém salientar que isso não significa que procedimentos dedutivos sejam utilizados somente nas ciências formais e os indutivos fiquem restritos às empíricas.

Uma maneira de se estabelecer uma dada afirmação é verificar diretamente todos os casos que a comprovam. Por exemplo, a afirmação "*todos os moradores da Rua Central têm mais de 30 anos*" pode ser verificada diretamente consultando-se todos os moradores da referida rua quanto à idade dos mesmos. Isto é aparentemente possível, quando se considera que tal rua possui uma extensão limitada e um número finito de moradores. No entanto, há outros tipos de afirmações cuja verificação direta torna-se muito difícil e, em alguns casos, até mesmo impossível. No caso da matemática, um exemplo seria alguma propriedade dos números inteiros. Uma tal verificação torna-se impraticável, haja vista a infinidade de casos para serem verificados. Ou, ainda, alguma afirmação sobre regularidades detectadas na natureza a partir de experimentos e observações. Nesses casos, há a necessidade de outros tipos de procedimento, como os destacados anteriormente.

Nas ciências empíricas, uma prática comum é recorrer a alguma forma de indução. Uma indução pode ser entendida como um procedimento utilizado para estabelecer uma proposição geral com base no conhecimento de certo número de casos particulares.

Nesse caso, diferentemente do que ocorre na dedução, há a possibilidade de se partir de premissas verdadeiras e chegar a uma conclusão falsa. Por exemplo, inferir do fato de que "*todos os indivíduos que se submeteram a determinada dieta alimentar reduziram em 20 quilos o seu peso*" então "*todo indivíduo que venha a submeter-se à mesma dieta perderá 20 quilos*". É possível comprovar que a afirmação inicial é verdadeira, sem que de fato a conclusão o seja. Basta encontrar um caso em que o indivíduo não tenha perdido a quantidade de quilos esperada.

Por isso, resultados estabelecidos por meio de procedimentos indutivos podem ser vistos como inseguros. Mas, tais tipos de procedimentos são imprescindíveis em muitas situações enfrentadas pelo homem quotidianamente.

Sobre os procedimentos indutivos e os questionamentos levantados acerca das possibilidades de sua justificação, bem como sobre as acepções dadas ao termo "indução" por diferentes pesquisadores, falaremos mais adiante.

Já nas ciências formais, em especial na matemática, a verificação de casos particulares não é suficiente para atingir uma lei de caráter geral, apesar de ser de grande utilidade para despertar a crença naquilo que se deseja provar, tanto em uma atividade de pesquisa, como no ensino.

No ensino de matemática, conforme sugere POLYA (1966), os procedimentos indutivos desempenham importante papel. Examinando casos concretos e particulares de um teorema, os alunos podem chegar a compreendê-lo e dar conta de seu significado. Além disso, verificado o teorema em vários casos particulares, terão uma forte evidência intuitiva deles para então partirem para a discussão da necessidade de um procedimento não sujeito a enganos: uma demonstração.

Essa fase indutiva pode ajudar a superar uma suspeita inicial e dar confiança no teorema para então empreender-se na busca de uma prova que, de outro modo, poderia apresentar-se como um trabalho rotineiro. Desse modo, parece razoável e natural que, no ensino, uma fase indutiva preceda a fase dedutiva. Como ressalta POLYA (1966), é importante que a aprendizagem da matemática dê ao estudante alguma oportunidade de resolver problemas nos quais primeiro intua e em seguida prove alguns fatos matemáticos a um nível apropriado.

Assim, espera-se que o estudante perceba que, em matemática, fazer algumas verificações não é suficiente para chegar à conclusão de que um resultado é verdadeiro sempre. Ou seja, a experiência não basta para legitimar seus procedimentos típicos. A partir disso, pode-se despertar no aluno a consciência do valor de uma demonstração.

Uma dedução pode ser entendida como um procedimento que permite passar de uma afirmação a outra justificando esse passo. Tal justificação é feita verificando se os princípios e as regras de inferência fornecidas por uma dada lógica são respeitados. Tais princípios e regras permitem, em particular, passar de uma afirmação verdadeira a outra também verdadeira, de modo que, ao final, pode-se constatar que a conclusão é segura e decorre da veracidade das premissas empregadas. Um exemplo de utilização de um procedimento dedutivo é: "*se todo inseto tem seis patas e todas as moscas são insetos, então, todas as moscas têm seis patas*".

Cada afirmação tem sua presença nesse encadeamento dedutivo autorizada por leis de uma lógica. E esse tipo de processo é o que caracteriza as demonstrações. Mas a explicitação do que vem ser uma demonstração é o resultado de uma longa evolução histórica.

Antigamente o critério comumente adotado para decidir sobre a veracidade ou não de uma proposição matemática era que ela fosse evidente intuitivamente. Bastava que os argumentos utilizados para prová-la fossem convincentes. Entretanto, esse critério estava freqüentemente sujeito a falhas, imprecisões, pois o que é evidente para um indivíduo pode não ser evidente para outro. Isso mostrou a necessidade de se aperfeiçoar os processos de elaboração de uma demonstração, o que incluiu a redução ao máximo do recurso à evidência intuitiva. Por esse motivo, demonstrações feitas ainda na época de Newton e Leibniz não seriam aceitas nos dias de hoje devido às formas com que os resultados foram estabelecidos, geralmente baseados em intuições físicas, geométricas, passíveis de erros. No entanto, tais resultados, em geral, evidenciaram-se válidos.

Essa evolução da noção de demonstração está associada ao desenvolvimento da própria matemática, como mostramos a seguir.

2.3 A TRANSFORMAÇÃO DA MATEMÁTICA EM UMA CIÊNCIA DEDUTIVA E FORMAL

> Uma das principais finalidades a que serve a matemática, quando corretamente ensinada, é despertar no aluno a crença na razão, sua confiança na verdade do que se demonstra, e no valor da demonstração.
>
> Russell

O desenvolvimento inicial da matemática teve como motivação, ao que tudo indica, necessidades práticas de antigas civilizações, como a babilônica e a egípcia. Com as inundações anuais causadas pelas enchentes do rio Nilo e a necessidade de recolocação dos marcos fixados em anos anteriores, os egípcios tornaram-se hábeis delimitadores de terras e possivelmente descobriram e utilizaram inúmeros princípios relativos às características de linhas, ângulos e figuras. Tais princípios provavelmente foram obtidos "[...] por intermédio da observação e da experimentação – isto é, por intermédio de um *raciocínio indutivo*[sem grifo no original] (BARKER, 1976, p.27).

O conhecimento matemático de origem prática e empírica teve sua forma de apresentação transformada em um sistema dedutivo, ao que tudo indica, na antiga cultura grega. Aos povos dessa cultura "[...]não bastou o critério empírico; procuraram encontrar *demonstrações dedutivas*[sem grifo no original] rigorosas das leis acerca do espaço, que governavam as aplicações práticas da Geometria." *(Id., ibid.*, p.28).

Segundo SZABÓ(1964), conceitos fundamentais como os de teorema, demonstração, dedução, definição, axioma, postulado, aparecem, ainda informalmente, somente a partir dos trabalhos matemáticos dessa época e é razoável o consenso de que a matemática torna-se um ciência dedutiva na Grécia antiga, embora não se possa afirmar com exatidão como e em que momento essa transformação se deu, nem por que motivo os gregos não estariam satisfeitos somente com a prática como meio de adquirir conhecimentos.

Essa suposta insatisfação teria levado-os a elaborar argumentos teóricos para justificar a validade dos resultados, que antes estabeleciam por meio da visualização, de aplicações práticas ou pela evidência intuitiva. Essa mudança de uma prática de argumentação, que era característica da dialética informal, para uma atividade que se caracteriza pelo uso de demonstrações para provar seus resultados, também pode ter sido, segundo SZABÓ (1965), resultado da influência da filosofia eleática sobre os matemáticos da época. Eléa era uma cidade da costa ocidental da Itália que no séc. VI a. C. constituiu uma colônia grega naquele país. Zenão de Eléa é tido como um dòs precursores da dialética, nome dado a um método de argumentação. Os diálogos de Platão fornecem muitos exemplos desse tipo de argumentação. Nesses casos, a dialética pode ser entendida como o exame de proposições chamadas hipóteses, das quais se tiram conclusões. Caso uma conclusão não seja aceita, a hipótese da qual ela foi derivada deve ser rejeitada. Acredita-se que esse modo de argumentar utilizado por Platão tenha sido sugerido por Zenão. (KNEALE; KNEALE, 1962)

Como não existem registros originais sobre a matemática dos gregos, o que se conhece a seu respeito apresenta-se como fruto de interpretações de registros feitos a partir de fragmentos da época. Ao que tudo indica, aproximadamente a partir de 600 a.C, a atividade matemática caracteriza-se por fazer uso de demonstrações. Tales de Mileto é tido como um precursores desta prática.

Acredita-se que ele adquiriu seus conhecimentos no Egito, levando-os para a Grécia. É atribuída a ele uma das primeiras demonstrações da história da matemática de que se tem conhecimento: a de que o diâmetro divide o círculo em duas partes iguais. Mas, conforme SZABÓ(1964), há estudos que contestam isso, argumentando que Tales pode ter descoberto tal relação entre o círculo e seu diâmetro, mas não produziu uma prova para ela. É possível que a demonstração feita por Tales não tenha sido aceita por outros matemáticos porque o próprio conceito desse procedimento não era explícito, não era algo livre de questionamentos mesmo nessa época.

Nesse mesmo período, outro personagem bastante conhecido foi Pitágoras de Samos, que parece ter adquirido suas habilidades matemáticas em viagens pelo mundo antigo, principalmente com os egípcios e os babilônicos. Com a sua iniciativa de fundar no sul da Itália, na cidade de Crotona, uma escola para o estudo de filosofia e de matemática, Pitágoras teria favorecido a inclusão dessa última na educação das pessoas livres. Vale lembrar que nessa época, somente as pessoas livres eram dignas da contemplação da teoria, ao passo que, aos menos favorecidos era relegado o trabalho braçal. Pitágoras teria começado a estudar os teoremas da matemática, desprendendo-os de problemas concretos, investigando, por meio do intelecto, os princípios e regras aparentemente tateados por seu precursor Tales. Dessa maneira, acredita-se que ele contribuiu para que ela deixasse de ser uma disciplina exclusivamente prática e passasse a se apoiar em práticas de estudo teórico, sugerindo um tipo de sistematização (o que mais tarde se revelaria com a obra de Euclides) que mudaria o rumo da matemática.

Na realidade, muito do que se credita a Pitágoras pode ser fruto não somente do seu esforço mas também do esforço dos pitagóricos, como foram denominados os membros de sua escola intitulada Irmandade Pitagórica. Segundo SZABÓ (1964), Platão e Aristóteles, em seus trabalhos, referem-se muito mais aos pitagóricos que a Pitágoras. Várias pesquisas históricas posteriores que reconstruíram, pelo menos em parte, a matemática dessa época, sugerem que o início da matemática dedutiva encontra-se nos trabalhos dos pitagóricos

Um momento marcante nessa fase de crescente exigência por exatidão nas provas matemáticas foi a elaboração, no séc. III, a. C da obra *Elementos*, por Euclides, que reuniu e expôs os conhecimentos de geometria e teoria dos números que se tinha até então fazendo uso do método axiomático. Tal método de apresentação de uma teoria consiste em enunciar um pequeno número de afirmações não demonstradas, os axiomas e postulados, e derivar os demais resultados da teoria em questão por meio de procedimentos dedutivos. Uma teoria axiomática, segundo BLANCHÉ (1987), era vista como um conjunto organizado de verdades a respeito de um determinado contexto da realidade.

Euclides enunciou cinco postulados e uma série de axiomas que foram tidos como verdades evidentes que podiam ser captadas por algum tipo de intuição. A diferença entre postulados e axiomas, naquela época, estava no fato de que aqueles diziam respeito a alguma área específica do conhecimento, nesse caso a geometria, e estes não se restringiam a uma área somente (BARKER, 1976). Exemplos daqueles axiomas são: "*o todo é maior do que as partes*" e "*se quantias iguais forem subtraídas das mesmas quantias, os restos serão iguais*". E exemplos daqueles postulados são: "*dados dois pontos quaisquer pode-se traçar uma linha reta de um ponto a outro*" e "*qualquer segmento finito de reta pode ser prolongado indefinidamente para constituir uma reta*". Mas para intuir a veracidade dos postulados euclidianos é preciso ter uma noção do que vem a ser um ponto, uma linha reta, um ângulo. E as definições de ponto, reta, plano e ângulo, entre outras, foram também apresentadas na obra de Euclides.

Ele procurou dar ao seu trabalho uma fundamentação axiomática e, tanto quanto possível, desenvolver suas provas por meio de argumentos teóricos. No entanto, apesar do aparente interesse em restringir o uso de argumentos empíricos, várias demonstrações presentes nos *Elementos*, ao que tudo indica, apoiavam-se em figuras que auxiliavam o leitor. Os próprios postulados possuíam forte apelo à evidência visual, com seus enunciados sugerindo construções, como se pode perceber nos exemplos acima mencionados.

No decorrer de muitos séculos a obra de Euclides foi exposta a vários tipos de questionamentos. Entre eles aqueles que alegavam a existência de algumas imprecisões lógicas em suas demonstrações. Em algumas delas, segundo BARKER (1976), há várias passagens em que as hipóteses enunciadas são insuficientes para fazer com que a conclusão apareça como decorrendo apenas da aplicação da lógica formal.

Segundo REÑÓN (1990), podemos identificar na matemática grega duas vias de investigação, duas maneiras de colocar as questões matemáticas: como *problemas* a resolver e como *teoremas* a demonstrar. Os primeiros envolvem a construção, divisão, subtração, adição de figuras e as mudanças realizadas sobre elas. Na resolução de um problema, buscava-se reduzir um problema a outro mais simples que conduzia a algo já conhecido.

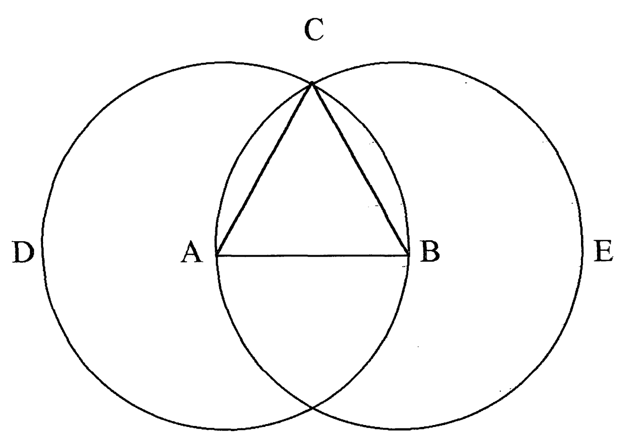
Um exemplo de problema seria a proposição I do livro I dos *Elementos*, na qual, dado um segmento de reta, pede-se para construir um triângulo equilátero de lado igual ao segmento dado. Em seguida, mostramos os passos fornecidos para resolver o problema, exposto e analisado em BARKER (1976) e REÑÓN (1990), e a figura que, ao que tudo indica, acompanhava tais passos.

a) Seja AB o segmento de reta dado.
b) Seja BCD a circunferência com centro A e raio AB (o que é possível ser construído devido a um dos postulados dados) e seja ACE a circunferência com centro B e raio BA. Traça-se os segmentos CA e CB a partir do ponto C no qual as circunferências interceptam-se.
c) Como o ponto A é o cento da circunferência CDB, AC é igual a AB (devido a uma das definições); como o ponto B é o centro da circunferência CAE, BC

é igual a BA (pela mesma definição). Como CA é igual a AB, cada um dos segmentos CA e CB é igual a AB, e como as coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si (axioma), tem-se que CA e CB são iguais entre si. Logo, os três segmentos são iguais entre si.

d) Portanto, o triângulo ABC é equilátero e tem sido construído sobre o segmento AB, como se queria.

Figura 2 – PROPOSIÇÃO I DO LIVRO I DOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES



Vários estudiosos identificaram como falha lógica o fato de Euclides não ter comentado nada a respeito da continuidade das circunferências que ele sugere traçar, pois só ela garantiria que de fato o ponto C de interseção das duas existe. A razão lógica para asseverar que tal ponto existe e é único não estava explícita. Mas a questão pode ser resolvida, conforme pode-se ver em BARKER (1976), acrescentando-se um novo axioma aos anteriores, que assegure a continuidade das circunferências, não mais pondo em discussão a validade da prova. Mas Euclides não menciona esse outro axioma. Na realidade, procede tendo como certa a continuidade da curva, certeza essa que pode ter sido obtida a partir de uma intuição fornecida pela própria figura que se sugere traçar. E nesse sentido é que se pode considerar que as figuras tiveram um papel relevante no desenvolvimento dos métodos matemáticos. Não se trata, pois, de elas darem margem a imprecisões lógicas, mas sim caracterizarem um modo de proceder típico da época.

Já os teoremas mostravam os atributos essenciais de figuras. Enunciavam relações cuja representação por meio de uma figura não era suficiente, ou adequada, para que se edificasse uma prova. Na demonstração dos teoremas, consideram-se algumas proposições primeiras, e o que se estabelece tem um alcance mais geral.

Um exemplo de teorema seria: Dadas duas grandezas positivas que possuem uma razão com uma mesma grandeza, a que tem uma razão maior é maior, e aquela que tem uma razão menor é menor. Ou seja, se $\frac{C}{B} > \frac{C}{B}$ então A > C. Nesse caso, apenas uma argumentação teórica é utilizada para a demonstração. (REÑÓN, 1990).

Assim sendo, podemos afirmar que Euclides serviu-se de problemas e teoremas na elaboração dos *Elementos*. E, embora se acredite que os gregos tinham consciência de que uma simples figura não constituía uma demonstração, elas foram utilizadas na obra de Euclides como elementos de prova, pois os resultados estabelecidos por meio da resolução de um problema, eram utilizados posteriormente na demonstração de outras proposições, que poderiam ser vistas como teoremas, no sentido exposto acima. Segundo (REÑÓN, 1990, p. 359), "[...] figuras como um quadrado ou um polígono não só fazem (nos *Elementos*) referência a noções básicas da geometria plana como também funcionam de fato como instrumento de análise, resolução e demonstração".

Mas, apesar de todas as críticas às quais foi exposto, "nos tempos antigos, na Idade Média, no período moderno, até o séc. XIX, os *Elementos* de Euclides foram não apenas o livro texto da Geometria, mas o modelo daquilo que o pensamento científico devia ser." (BARKER, 1976, p.28).

Com o descobrimento das geometrias não-euclidianas no século XIX, que encerravam entre seus axiomas formas de negar o quinto postulado de Euclides, muitos questionamentos surgiram acerca da veracidade ou não do que se podia afirmar, baseando-se na negação daquilo que se tinha como certo até então. E como comenta MOSTERÍN (1987), na segunda metade do século XIX havia diversos axiomas sobre as paralelas (correspondentes a teorias geométricas distintas) incompatíveis entre si. Todos estes axiomas não podiam ser verdadeiros ao mesmo tempo e, para muitos matemáticos na época, não pareciam razoáveis os motivos pelos quais se deveria considerar um axioma como verdadeiro e outro não.

O lógico Gottlob Frege foi um dos que não concordava com o fato de existirem geometrias distintas da que se conhecia. "Nada pode servir a dois senhores. Não é possível servir à verdade e à falsidade. Se a geometria euclidiana é verdadeira, então a geometria não-euclidiana é falsa; e se a geometria não-euclidiana é verdadeira então a geometria euclidiana é falsa."(FREGE *apud* MOSTERÍN, 1987, p. 117), dizia ele referindo-se ao fato, comumente aceito desde a época dos gregos antigos, de que a geometria de Euclides refletia, de certo modo, a realidade, sendo portanto "verdadeira".

No entanto, quem "desenhará" um triângulo em uma folha de papel e após conferir algumas medidas, manipular algumas equações ou traçar algumas linhas terá dúvida de que a soma de seus ângulos internos é igual a 180 graus? E qual físico atualmente, ao estudar a teoria da relatividade com seriedade, considerará resultados da geometria euclidiana como sendo verdadeiros quando as evidências fornecidas pelo conhecimento razoável do assunto mostra que não é assim que se passa? A geometria de Euclides permanece verdadeira em um certo domínio, como para o engenheiro que constrói um prédio. É difícil negar que em nossa realidade observável as relações euclidianas não sejam verdadeiras. Mas, para distâncias muito pequenas, ou para velocidades muito próximas da velocidade da luz, fazer uso dos sistemas abstratos de alguma das geometrias não-euclidianas pode ser mais adequado.

Do desafio de construir uma fundamentação sólida e definitiva para toda a matemática, surgiram, por volta do século XVIII, algumas correntes do pensamento matemático: o intuicionismo, o logicismo e o formalismo. (DA COSTA, 1992)

Para os intuicionistas a matemática é uma criação do homem e toda ela pode ser construída a partir dos números naturais, os quais se conhece por intuição. O maior defensor dessa corrente foi o matemático holandês Brouwer. O logicismo teve Frege como um dos precursores e sua principal tese era que a matemática se reduz à lógica. Russell e Whitehead também foram expoentes dessa corrente. Já o formalismo teve em David Hilbert seu principal defensor. Para os formalistas, a matemática constitui-se de um conjunto de símbolos desprovidos de significado. A intuição para eles é matematicamente insignificante. O que importa são as combinações simbólicas feitas a partir de regras pré-estabelecidas.

Em conseqüência também desse período de revisão nos fundamentos da matemática, a geometria euclidiana começou a ser revista quanto ao rigor de apresentação.

Entre os reformadores esteve David Hilbert que apresentou uma reformulação da geometria euclidiana com base em uma nova visão de método axiomático no qual os axiomas são concebidos como meros esquemas abstratos, que em si mesmos não são nem verdadeiros nem falsos (MOSTERÍN, 1987).

A partir dos trabalhos de Hilbert, originou-se o que se conhece por método axiomático formal que, ao contrário do método axiomático material utilizado por Euclides, não tem um modelo intuitivo, isto é, não descreve propriedades fundamentais de algum domínio da realidade (KRAUSE, 1999).

Em sua obra, intitulada *Fundamentos da Geometria*, publicada em 1899, Hilbert apresenta inicialmente cinco categorias de axiomas que dizem respeito a certos elementos não definidos como ponto, reta e plano e não faz uso da evidência intuitiva, nem de algum conhecimento prévio sobre esses elementos. O que se sabia a respeito deles era aquilo que poderia ser constatado por meio dos axiomas. Os teoremas deduzidos a partir deles também não expressavam idéias falsas nem verdadeiras sobre algum âmbito determinado da realidade. A noção de verdadeiro ou falso só teria sentido quando tais axiomas fossem interpretados em algum contexto. Conforme teria dito Hilbert, as relações entre esses elementos não definidos, ditos *entes primitivos*, continuarão válidas independente de se tratar de pontos, retas e planos, ou mesas, cadeiras e copos de cerveja. *(Id., ibid.)*. Daí a alusão ao fato de que em matemática nunca se sabe a respeito do que se está falando, nem se o que se está falando é verdade. Frase esta, de Russell, empregada ironicamente por estudantes e até professores de matemática e, infelizmente, na maioria das vezes, sem dar conta do seu significado.

Segundo MOSTERÍN (1987), Hilbert, ao reformular a geometria euclidiana, conservou as mesmas palavras para designar idéias novas, o que, provavelmente, contribuiu para uma não compreensão imediata do novo método axiomático. Por exemplo, o que Frege entendia por axioma (um enunciado verdadeiro, porém não demonstrável) era algo diferente do significado que Hilbert dava a esse mesmo termo. Frege então, após analisar os *Fundamentos da Geometria*, escreveu a Hilbert, tecendo severas críticas a seu trabalho e argumentando que ele expressava-se com excessiva falta de precisão. Não obtendo resposta às suas primeiras observações sobre o método hilbertiano, e após outras tentativas infrutíferas de discussão, Frege publica em 1903 um artigo no qual agrupou e ampliou suas críticas à referida obra de Hilbert.

Frege havia analisado o método axiomático tradicional (pelo qual se entendia que aplicar o método a um determinado âmbito da realidade consistia em organizar nosso saber acerca desse âmbito em forma de teoria axiomática) e chegou a concluir que, para se alcançar um nível de maior rigor nas demonstrações, mais do que explicitar axiomas, como se havia feito até então, era necessário explicitar as formas admissíveis de demonstração, ou seja, as regras de inferência. No entanto, para ele, segundo (MOSTERÍN, 1987), a formalização envolvia somente uma precisão sintática e não uma mudança semântica. Ou seja, os enunciados feitos em linguagem natural eram substituídos por fórmulas de uma linguagem formal, mas estas continuavam expressando idéias que podiam ser caracterizadas como verdadeiras ou falsas.

Após muita discussão acerca das inovações no antigo método axiomático e a partir de uma série de avanços no estudo dos fundamentos da matemática, além do desenvolvimento da própria lógica, a noção de demonstração passou por uma profunda análise e conseqüente evolução. Devido aos trabalhos de Frege e Hilbert, entre outros, chegou-se a explicitar o que seria uma demonstração formal:

> *Primeiro, aplicamos as regras de demonstração aos axiomas e obtemos novas sentenças [...]; em seguida, aplicamos as mesmas regras a novas sentenças, ou a novas sentenças e axiomas conjuntamente, obtendo outras sentenças; depois, continuamos esse processo. Se, depois de um número finito de passos, tivermos chegado à sentença dada, diremos que a sentença foi formalmente demonstrada* (TARSKI, 1991, p. 114).

Para explicitar as combinações simbólicas(sentenças) do novo sistema axiomático-formal dotadas de sentido, apresentaram-se as regras de formações das mesmas e símbolos convenientes para expressá-las. As regras de dedução que permitem obter novos arranjos simbólicos foram também enunciadas de modo preciso. Isso tudo com o auxílio de um conjunto de símbolos que denotavam os objetos da teoria e constituem a *linguagem* da mesma. Com a formalização, o sistema axiomático podia converter-se em uma "[...]espécie de jogo grafomecânico, realizado com símbolos fixos e mediante regras bem definidas."(DA COSTA, 1994, p.22).

Uma teoria pode então ser edificada e exposta sob dois aspectos: o sintático e o semântico. O primeiro diz respeito à sua estrutura puramente simbólica, ou seja, aos símbolos adotados para designar os entes primitivos, as regras de inferência, as sentenças que serão consideradas coerentes. Também farão parte desse contexto as regras assim formuladas, os axiomas e a noção de prova que será adotada. Partindo de axiomas ou premissas, ter-se-á então uma seqüência de sentenças de modo que o último elemento dessa sequência será a proposição que se deseja deduzir. Uma dedução nessa teoria será então um conjunto finito de sentenças, sendo que cada uma delas é um axioma da teoria, uma premissa, ou uma sentença derivada de sentenças anteriores por meio de alguma regra de inferência. Uma sentença será demonstrável se existir um tal conjunto de sentenças que seja uma "prova" para ela (KRAUSE, 1991).

Já o aspecto semântico diz respeito às possíveis interpretações daquela estrutura puramente formal. Em outras palavras, a semântica é a parte relativa ao conteúdo de algum domínio de interpretação, ou seja, é o momento em que uma estrutura formal e abstrata ganha sentido, sendo interpretada a partir de sua relação com um certo âmbito da realidade. A noção de sentença verdadeira será então um conceito semântico, ao passo que a noção de sentença demonstrável será sintático[9]. Para saber se uma dada afirmação de uma teoria é verdadeira recorremos a uma interpretação dessa teoria. E é na multiplicidade de

[9]Até o momento não fizemos distinção entre sentença demonstrável e verdadeira e, como afirmamos anteriormente, o termo "verdadeiro" está sendo utilizado em um sentido intuitivo. Algo sobre a diferença entre verdade e demonstrabilidade ainda será exposto.

interpretações ou modelos possíveis que está a principal vantagem do novo método axiomático, utilizado por Hilbert, salienta MOSTERÍN (1987).

O que Hilbert favoreceu com a sua referida obra foi a separação entre os aspectos puramente sintáticos de uma teoria axiomática e aqueles de natureza semântica.

Para finalizar este item apresentamos o seguinte exemplo que, incluindo a figura, foi extraído de NAGEL e NEWMAM (1973), e pode ajudar a compreender melhor esses dois aspectos.

Consideremos a palavra "classe" como sendo uma coleção ou reunião de elementos distinguíveis. Tais elementos serão tratados por membros. Sejam K e L duas classes cujos membros ficam submetidos aos cinco axiomas a seguir.

Axioma 1 – Quaisquer dois membros de K estão contidos em apenas um membro de L.

Axioma 2 – Nenhum membro de K está contido em mais do que dois membros de L.

Axioma 3 – Os membros de K não estão todos contidos em um único membro de L.

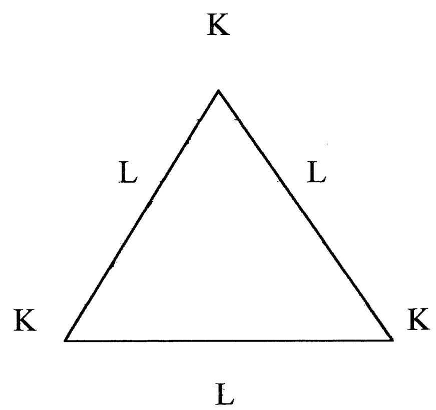
Axioma 4 – Quaisquer dois membros de L contém apenas um membro de K.

Axioma 5 – Nenhum membro de L contém mais do que dois membro de K.

O que temos até aqui são informações a respeito de entes que não sabemos o significado. A partir delas podemos obter uma série de afirmações sobre os membros de ambas as classes utilizando as regras da lógica clássica. E todas essas afirmações serão tidas como demonstráveis. Por exemplo, podemos provar que a classe K contém apenas três membros. No entanto, até esse momento, esse sistema não diz respeito a qualquer domínio da realidade que conhecemos.

Agora, se considerarmos a classe K como sendo a coleção dos vértices de um triângulo e a classe L como sendo a coleção dos segmentos de reta que são os lados desse triângulo, podemos interpretar cada um dos axiomas dados inicialmente, conferindo-lhes significado semântico.

Figura 3 – MODELO NO QUAL OS AXIOMAS 1 A 5 SÃO VERDADEIROS.



A afirmação feita sobre a classe K (que tal classe possui apenas três elementos) pode ser reconhecida como verdadeira nesse modelo ou interpretação, pois a coleção formada pelos vértices de um triângulo possui, de fato, somente três elementos. O que está relacionado com o significado que atribuímos ao conceito de triângulo.

2.4 O MÉTODO AXIOMÁTICO

> Se a axiomática é limitada, por um lado, pela intuição concreta, por outro confina com uma intuição intelectual.
>
> Blanché

Desde sua utilização por Euclides nos *Elementos,* o método axiomático foi utilizado praticamente até o final do século XIX "[...]sem sofrer alterações, nem em seus princípios básicos (os quais, diga-se de passagem, não foram nem mesmo explicitamente formulados por um longo tempo), nem na abordagem geral com respeito ao assunto."(TARSKI, 1991, p. 113). Mesmo tendo sido utilizado por autores como Arquimedes e Newton, pode-se dizer que só atingiu uma certa maturidade a partir dos trabalhos de pessoas como Hilbert, ainda que outros tenham contribuído para tanto, como Peano e Russell.

Durante muito tempo, o uso desse método foi exclusivo da matemática. Em 1900, no II Congresso Internacional de Matemática que foi realizado em Paris, Hilbert expôs em uma comunicação uma lista de 23 problemas matemáticos relevantes a serem investigados no decorrer do séc. XX. Tal lista influenciou profundamente o desenvolvimento da matemática a partir de então. O sexto desses problemas previa o emprego do método axiomático às ciências empíricas, mais precisamente a teorias da física. Mas para essas teorias, por exemplo, os axiomas devem estar de acordo com a evidência experimental, conforme salientam DALLA CHIARA e TORALDO DI FRANCIA(1979).

A fecundidade do sexto problema de Hilbert pode ser vista analisando-se alguns trabalhos já desenvolvidos neste sentido e outros em desenvolvimento. Dentre estes últimos, podemos mencionar um estudo referente à aplicação do método axiomático à biologia, mais especificamente à teoria da evolução, que trata das transformações dos organismos no tempo. Nele, KRAUSE e MAGALHÃES (1999) caracterizam uma teoria sintética da evolução por meio de conceitos primitivos como gene, entidade biológica e ambiente, dentre outros, e fornecem axiomas que expressam relações entre esses conceitos. "A partir dos conceitos primitivos e axiomas[...], é possível definir os demais conceitos da teoria, como genótipo, fenótipo, cromossomo, etc., bem como obter como teoremas as demais 'leis' da genética clássica." (KRAUSE; MAGALHÃES, 1999, p. 9).

A idéia que comumente se tem acerca do método axiomático é que ele é empregado para organizar uma teoria, e não para produzir conhecimentos que motivam a construção da mesma. Em geral, produz-se novos conhecimentos em ciência por meio do emprego do que se conhece por método hipotético-dedutivo, cuja aplicação envolve a utilização de procedimentos indutivos além dos dedutivos que caracterizam o método axiomático e são empregados nas ciências ditas formais(lógica e matemática). "Nas ciências reais (humanas e da natureza), todas elas dependendo da experiência, lança-se mão de procedimentos indutivos; porém, a reconstrução lógica da ciência, pelos contextos que origina, é dedutiva. A indução, pois, constitui-se sobretudo em método de *descoberta*, enquanto a dedução, em método de exposição e de sistematização." (DA COSTA, 1994, p. 23).

Mas o método axiomático também envolve heurística: que conceitos primitivos usar? Ou, que axiomas usar? Com que finalidade? Além disso, é necessário quando os objetos envolvidos estão fora do alcance intuitivo. Como saber que se está procedendo adequadamente sem ter um "método"? Ou seja, o método axiomático não vem unicamente depois que tudo já está feito.

Imaginemos um piloto de avião: no momento em que sobrevoa uma cidade a uma altitude que lhe permita guiar-se pelo curso de um rio, ou por uma estrada, suas habilidades apoiadas na realidade material, observável, bastam-lhe. No entanto, se voar a uma altitude muito maior, acima das nuvens, durante a noite ou ainda durante uma tempestade, o que lhe permitirá pilotar com segurança e lhe garantirá a chegada ao destino previsto? Certamente não será seu sentido da visão e nem a sua intuição, mas sim, a obediência às instruções que receberá de uma torre de comando por meio dos instrumentos que conhece e nos quais confia, embora fujam de seu alcance sensorial. Ele não precisa "ver" para acreditar que instruções estão certas, apenas utiliza um mecanismo puramente técnico que torna possível realizações antes tidas como impraticáveis.

Analogamente, pode funcionar o método axiomático naquelas ciências que possuírem um considerável grau de formalização. Quando a intuição e os sentidos não forem suficientes para prosseguir, então entram em cena os métodos dedutivos, só que levando em conta a multiplicidade de lógicas(o que será abordado em outro item), o que possibilitará descobrir novas relações que, ao serem dotadas de significado semântico, podem revelar novas descobertas.

Os fatores históricos abordados significaram grandes avanços no desenvolvimento da matemática. Mas, no contexto do seu ensino, o consenso parece não ser esse. Não é difícil encontrar aspectos abstratos, dedutivos e formais sendo apontados como empecilho para a aprendizagem dessa disciplina em diversos níveis, sendo vistos como algo que dificulta a compreensão da matemática por parte de estudantes, professores e pessoas comuns de um modo geral. No entanto, a transformação da matemática em uma ciência dedutiva, formal e abstrata favoreceu avanços em diversos campos do saber, emprestando suas teorias, idéias e mecanismos a outras ciências, propiciando a elas novas possibilidades de crescimento. Perceber isso é algo relevante quando se almeja um ensino que possa dar ao indivíduo uma formação básica e atualizada em ciência.

Não é raro, o emprego precoce de procedimentos formais que conferem à matemática escolar características que a tornam depreciada por muitos. No entanto, se se compreendesse o papel e a relevância desses procedimentos, das abstrações e das generalizações para a ciência, antes que eles fossem utilizados no seu ensino e assim se fizesse somente de acordo com fatores didáticos, psicológicos e sociais, entre outros, típicos do contexto educacional, eles não poderiam ser causadores de tão grandes males, como relatou IMENES(1989), ao se referir ao modelo de apresentação formal euclidiano como o principal responsável pelo fracasso no ensino/aprendizagem da matemática.

2.5 MATEMÁTICA E LÓGICAS: A NOÇÃO DE DEDUÇÃO

> O facto de os objetos descritos por axiomas existirem ou não na realidade é irrelevante para o processo de dedução formal.
>
> Davis & Hersh

Ao falar em demonstração ou dedução, remetemo-nos a uma particular lógica subjacente adotada.

A lógica chamada de clássica originou-se com Aristóteles, no séc III a. C., do interesse em investigar as espécies de inferências que podem ser feitas quando se utiliza a linguagem natural. Hoje, ela se aplica a contextos que vão além desse, de modo que o estudo das formas válidas de inferência é apenas um dos ramos da lógica, uma espécie de lógica aplicada às formas válidas de pensamento (KRAUSE, 1991).

Quando se fala em lógica, normalmente, subentende-se a lógica clássica, provavelmente devido ao fato de ser relativamente recente e, na maioria dos casos, desconhecida, a possibilidade de desenvolvimento de outras lógicas, diferentes da clássica.

Desenvolvida a partir dos trabalhos de Boole, Frege, Russell, e muitos outros, a lógica clássica, em seu estado atual, inclui, segundo DA COSTA (1993), a velha silogística aristotélica, convenientemente formulada. Mais do que isso, ela "[...] provê técnicas explícitas para a manipulação dos mais simples ingredientes da linguagem e provê uma clara e sistemática base, sobre a qual podem ser construídas futuras teorias apropriadas às necessidades científicas especiais que surgem de vez em quando."(QUINE, 1996, p. 26).

Para o lógico tradicional, ou seja, até o séc. XX, o sistema lógico que condensava as leis formais do uso legítimo da razão era único. Isto é, lógica era uma só. No entanto, a partir desse século, "constatou-se que há a possibilidade de edificar várias lógicas e que a utilização de uma delas em dado contexto depende não apenas da razão, mas, simultaneamente, do tema estudado" (DA COSTA, 1994, p. 42). Na acepção adotada por este autor, razão é a faculdade, a capacidade de conceber, julgar e raciocinar e, "[...]para que haja aquisição de conhecimento, tem-se de julgar e de inferir. Implícita ou explicitamente, por conseguinte, em qualquer contexto racional ou classe de contextos similares, há sempre uma lógica subjacente"(DA COSTA, 1994, p. 45).

A lógica clássica caracteriza-se por alguns princípios básicos como:

- *princípio da identidade*: todo objeto é idêntico a si mesmo;
- *princípio da contradição*: não se pode ter uma proposição simultaneamente verdadeira e falsa.
- *princípio do terceiro excluído*: dada um proposição, ou ela é verdadeira ou sua negação é verdadeira.

Tais princípios, ao serem flexibilizados, possibilitam o aparecimento de outras lógicas ditas não-clássicas ou heterodoxas e, na opinião de Da Costa, tais lógicas "[...] provaram que o pensamento lógico-racional pode se exercitar mesmo sem obedecer a essas leis fundamentais da razão, libertando esta faculdade do jugo duas vezes milenar de semelhante leis, que pareciam absolutamente impossíveis de serem revogadas." (DA COSTA, 1983, p. 1)

Há certos tipos dessas lógicas que complementam a clássica enquanto que há outros que se comportam como rivais da mesma. Segundo DA COSTA (1983), pode-se ter uma breve caracterização de tais lógicas, a partir dos três princípios básicos da lógica clássica, expostos acima.

Quando se presencia, em um sistema lógico, a invalidade do princípio da identidade, tem-se o que se convencionou chamar de lógicas não-reflexivas.

As lógicas paraconsistentes são aquelas nas quais não é válido o princípio da contradição. No caso de uma lógica paraconsistente, podemos ter como verdadeiras certas proposições e o mesmo acontecendo com a negação destas. Mas isso não significa que todas as proposições da teoria em questão infrinjam o princípio da contradição.

Nos sistemas lógicos em que se derroga o princípio do terceiro excluído, tem-se uma lógica dita paracompleta. Em teorias que possuem tal lógica como subjacente, podem haver proposições de modo que nem a sua afirmação nem a sua negação podem ser verdadeiras. Um exemplo desse tipo de lógica seria a intuicionista.

Assim sendo, um resultado que pode ser provado em um certa teoria, poderá não sê-lo em outra, devido ao fato de a lógica subjacente não ser a mesma.

Por exemplo, uma proposição que seja demonstrada por redução ao absurdo não pode ser demonstrada em outro contexto no qual a lógica subjacente não admite o princípio do terceiro excluído, comumente utilizado em demonstrações do referido tipo. O seguinte exemplo, proposto em SALMON (1993), ilustra essa idéia.

Um número racional é aquele que pode ser expresso como a razão de dois inteiros, ou seja, por meio de uma fração na qual numerador e denominador são números inteiros. Pode-se provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional por meio da redução ao absurdo. Suponha que $\sqrt{2}$ é um número racional. Então ele pode ser expresso pela razão de dois inteiros. Sejam a e b dois números inteiros primos entre si, ou seja, a e b não têm fator comum maior que 1. E seja a razão entre eles igual a $\sqrt{2}$. Então temos que:

$\sqrt{2} = a / b$ e $2 = (a / b)^2$. Ou ainda, $2 = a^2 / b^2$, o que equivale a afirmar que $a^2 = 2b^2$.

Disso temos que a^2 é um número par. Logo, a também é um número par. Como a é par, podemos escrevê-lo como $2c$, sendo c um número inteiro. Logo, $a^2 = 4c^2$. Ou ainda, experiência tem mostrado por muito tempo que o sol nasce todos os dias, o que nos leva a *induzir* que nascerá amanhã. Além disso, não há evidências suficientes para que criemos expectativas de que assim não o seja.

O sucesso dos resultados estabelecidos por meio de procedimentos indutivos está, de alguma forma, ligado à crença de que a natureza se compõe de regularidades. Mas para Poincaré, "a indução aplicada às ciências físicas é sempre incerta porque se baseia na crença de uma ordem geral do Universo [...] que está fora de nós." (POINCARÉ, 1988, p. 29).

No entanto, DALLA CHIARA e TORALDO DI FRANCIA (1979) argumentam que, se não se considera a existência de regularidades na natureza, a edificação das ciências, que se apóia entre, outras coisas, na elaboração de leis, na classificação de fenômenos, tornar-se-ia impossível.

Voltando-se para uma das questões básicas da filosofia do conhecimento, a de se saber se uma certa lei ou teoria pode ou não ser considerada verdadeira, encontramos um problema existente desde os tempos de Aristóteles, mas que somente foi formulado explicitamente por David Hume, em meados do século XVIII: o *problema da indução*. A resposta à questão acerca da verdade dos fatos tradicionalmente tem sido buscada por meio "[...] da dedução e da indução e, com maior freqüência, através da combinação destes dois processos. Assim, o valor de uma teoria ou de uma lei, estaria no valor da indução e da dedução como processos lógicos e seguros para a busca da verdade." (BARRETO; MOREIRA, 1993, p. 33).

Quanto à dedução, não são muitos questionamentos pois as leis da lógica subjacente adotada justificam-na, garantem a coerência das provas realizadas com o emprego de tal tipo de procedimento. A dedução garante a verdade de uma conclusão, embora não possa assegurar a veracidade das premissas adotadas para uma prova. Diante disso, complementam Barreto e Moreira, imaginou-se que a indução poderia ser o método adequado para complementar as lacunas apresentadas pela dedução. Com isso pensou-se que a veracidade das premissas poderia ser estabelecida indutivamente, garantindo assim a veracidade da conclusão. Mas isso não ocorreu, de modo que os procedimentos indutivos continuam sendo objeto de análise e de discussões.

A questão do problema da indução é saber sob que condições as inferências indutivas são justificadas e se o são. Ou seja, como estabelecer a verdade dos enunciados universais que se baseiam em crenças pessoais, na experiência, na análise de casos particulares?

Segundo Popper e Hume, dois grandes debatedores do problema da indução, não há justificativa racional para os procedimentos indutivos. Para Hume, a indução não tem função lógica. A questão se resumia em "[...]determinar se existem razões suficientes que possam justificar as crenças que as pessoas professam."(BARRETO; MOREIRA, 1993, p. 44). Ao contrário de Carnap, para quem a indução é um método de validação, passível de um certo tipo de justificação lógica.

Mas recusar que a indução é um procedimento que pode ser legitimado não ajudaria muito a fundamentação das ciências, conforme argumentaram DALLA CHIARA e TORALDO DI FRANCIA (1979).

Além de serem comuns em situações do quotidiano, inferências indutivas são bastante utilizadas, e de grande importância, nas ciências empíricas, nas quais a dedução também possui importantes aplicações. Na física, por exemplo, muitas leis foram descobertas com o uso de inferências indutivas. A partir de uma série de experiências e observações, respeitadas certas condições de aleatoriedade e considerando-se o número de casos analisados, conclui-se que uma lei é verdadeira sempre, e enquanto não se prova o contrário, não se pode negar que ela o seja. "O procedimento indutivo não é, por assim dizer, um procedimento mecânico regido por regras fixas... Para o cientista é uma questão de engenhosidade e sorte encontrar uma hipótese adequada; e se encontra uma, nunca poderá garantir que não existirá uma outra hipótese que melhor se adeque aos fatos antes mesmo que novas observações sejam feitas."(CARNAP *apud* BARRETO; MOREIRA, 1993, p. 88).

Ou seja, a experiência somente não pode determinar que um fenômeno, por exemplo, ocorra sempre de uma determinada forma, que nunca poderá ser completamente diferente. Em muitos casos, os resultados estabelecidos pela experiência podem não ser definitivos.

Mas a utilização desse tipo de inferência é necessária para articular e promover o desenvolvimento das ciências empíricas. "Por exemplo, quando se está interessado em obter as conseqüências de uma teoria ou as implicações de determinada hipótese, deve-se recorrer à dedução. No entanto, quando se faz realmente avançar a ciência, quando se formulam leis ou teorias, recorre-se à inferência não dedutiva." (DA COSTA, 1993, p. 23).

Segundo BARRETO e MOREIRA (1993), vários foram os estudiosos que procuraram formas de esclarecer o problema da indução. Alguns, vendo-a como um método racional de descoberta do conhecimento (Bacon, Stuart Mill); outros, vendo-a como um método de justificação (Carnap, Reichenbach), ou ainda, como um método não racional de descoberta (Hume). Mas eles se referiram sobretudo a um tipo de indução, a indução simples ou por enumeração, cuja descrição é apresentada adiante. No entanto, na visão de outros autores, entre eles Da Costa, há vários tipos de indução. Na sequência é apresentado um esboço de uma solução para o problema da indução proposta por esse autor.

2.7 A LÓGICA INDUTIVA: UMA CARACTERIZAÇÃO DO CONCEITO DE "INDUÇÃO"

> O método indutivo apresentado pelo cálculo das probabilidades é um instrumento muito mais poderoso do que qualquer outro substituto construído sob o nome de crença racional.
>
> Reichenbach

Em um sistema lógico, uma *sentença* é uma expressão de uma certa linguagem que expressa um pensamento completo, ou seja, em nossa linguagem usual é uma sentença declarativa. Para uma sentença é válido o princípio da bivalência, isto é, dada a sentença, ou ela é falsa ou ela é verdadeira. Um conjunto de sentenças, elaboradas em uma determinada linguagem, constitui um *argumento*. Uma das sentenças desse conjunto é dita *conclusão* e as demais são as *premissas*.

Um argumento é dito *válido* se a veracidade das premissas implicar a veracidade da conclusão. Ou seja, não se pode ter uma conclusão falsa se todas as premissas são verdadeiras, desde que se adotem regras válidas na lógica em questão. Os argumentos válidos, na acepção dada aos mesmos, são conhecidos também por dedutivos. Um exemplo de argumento válido, isto é, dedutivo, seria:

Todo número natural múltiplo de quatro é par.
Vinte é um número natural.
Vinte é um número múltiplo de quatro.
Vinte é um número par.

Uma inferência que pode ser legitimada por um certa lógica L denomina-se L-válida. As inferências não legitimadas por ela denominam-se L-paralogismos. Sendo assim, os argumentos não-válidos em uma lógica podem ser considerados espécies de paralogismos.

Para DA COSTA (1993, p. 23), "[...]qualquer que seja a lógica L, sempre se pode, pelo menos em princípio, tentar estabelecer uma lógica indutiva associada a L."

Em nosso quotidiano, é comum fazermos uso de inferências indutivas, muitas delas, constituindo-se em paralogismos. Por exemplo, afirmar que comer balas de menta após as refeições causa mal estar, é raciocinar utilizando um argumento que não é válido logicamente. Na opinião de um indivíduo, podem ser as balas de menta a causa do mal estar, na de outro pode ser a excessiva ingestão de alimentos, ou ainda, a existência de algum distúrbio no sistema digestivo do organismo. Entretanto, para o estabelecimento de uma comunicação e acordos razoáveis entre as pessoas, os argumentos indutivos são indispensáveis. Não há como pensar dedutivamente o tempo todo. Por isso, a intuição, o erro, a revisão, algo que dê plausibilidade aos procedimentos indutivos, são indispensáveis na vida de qualquer cidadão.

Considerando-se uma lógica L, existem dois tipos de L-paralogismos: os considerados corretos, que são aceitáveis, justificáveis de algum modo, ditos L-induções e os considerados incorretos ditos L-falácias. A lógica indutiva associada a L trata das L-induções, em especial, e de suas justificações. As L-induções podem ser leis da física ou de outra ciência experimental qualquer. Um exemplo de L-falácia, que em uma análise superficial, poderia levar-nos a considerar a conclusão como verdadeira, seria:

> Todo candidato a prefeito que promove comícios é bom.
> Este candidato a prefeito não promove comícios.
> Logo, este candidato a prefeito não é bom.

Os argumentos falaciosos apresentam-se enganosos, ilusórios. Desse modo, torna-se razoável a afirmação de que alguns conhecimentos de lógica podem contribuir para o desenvolvimento, nos estudantes, da habilidade de distinguir raciocínios válidos dos falaciosos, como o acima. Habilidade bastante útil e importante na formação de indivíduos críticos e conscientes da necessidade de conhecer verdades sobre a realidade na qual se inserem.

Os argumentos nos quais a veracidade das premissas não implica necessariamente a veracidade da conclusão, mas a torna aceitável, são ditos indutivos, em uma acepção que difere da de Hume e Popper. A lógica que se ocupa, entre outras coisas, de tais argumentos é a lógica indutiva. Uma das questões da qual se ocupa tal lógica, de acordo com a posição de Da Costa, é como justificar as suas inferências características. As inferências dedutivas justificam-se de acordo com as regras lógicas sob a regência das quais elas são erigidas. Já as indutivas, como não são legitimadas 'logicamente', aparentemente, apresentam-se asseguradas por uma espécie de crença.

Mas, aquilo que aparece para assegurar a validade dos argumentos indutivos não é evidência intuitiva. Tal lógica indutiva "[...] não constitui uma arte de raciocinar. Ela tão-somente procura tornar explícitos critérios probabilísticos de plausibilidade referentes a proposições e hipóteses, que podem auxiliar o cientista e o homem comum na estruturação de suas crenças e na tomada de decisões." (DA COSTA, 1993, p. 65).

Para Popper, as dificuldades da lógica indutiva são insuperáveis e também podem ser insuperáveis as dificuldades da doutrina que diz que embora a inferência indutiva não seja estritamente válida, pode alcançar algum grau de confiança, de probabilidade. Com o que não concorda Da Costa.

Para ele, as inferências indutivas são tratadas como argumentos inválidos (logicamente) mas corretos e, portanto, justificáveis de alguma maneira. Para Popper "[...]não é possível nem necessário justificar as leis da ciência através da justificação do raciocínio indutivo. [...] as teorias científicas não são derivadas indutivamente dos factos; antes, são inventadas como hipóteses, especulações, até mesmo palpites, e, depois sujeitas aos testes experimentais, onde os críticos tentam refutá-las" (DAVIS; HERSH, 1995, p.

323). Segundo Popper, a crítica é um dos pilares da racionalidade e o método das provas e refutações é considerado o processo básico das ciências empíricas, o qual para Da Costa(1993), é o método hipotético-dedutivo; uma das formas de inferência indutiva, na sua acepção de indução.

Considerando-se que a finalidade da lógica indutiva é sistematizar e elucidar os vários tipos de indução importantes para determinados contextos racionais, Da Costa caracterizou-a como uma espécie de lógica probabilística por meio da qual se busca expressar o grau de aceitabilidade da proposição para que esta seja testada e então considerada verdadeira ou não. Ou seja, para ele, há uma forma de 'justificar' as inferências indutivas, conferindo-lhes graus de plausibilidade. Além disso reuniu e caracterizou alguns tipos mais utilizados de inferências indutivas, dentre os quais destacaram-se os seguintes:

a)indução simples (ou por simples enumeração): de uma amostra de elementos que satisfazem uma determinada propriedade, conclui-se que todos os elementos satisfazem a tal propriedade.

Ex.: Todos os atletas da cidade de Santos que participam das olimpíadas são morenos.

Logo, todos os atletas de Santos são morenos.

b) a inferência estatística:

Ex.: 70% dos alunos do interior do estado não vão à escola quando chove.

Euclides mora no interior do estado e estuda na 7ª série.

Portanto, Euclides não vai à escola quando chove.

c) o método hipotético-dedutivo: formula-se uma hipótese que, pode ser aceita a partir de evidências empíricas, enquanto a crítica e novas experiências não evidenciarem que ela é irremediavelmente falsa.

Ex.: A ingestão de conservantes em determinadas quantidades causa diversos tipos de câncer.

d) inferência probabilística: há uma relação de probabilidade entre a conjunção das premissas e a conclusão, ou seja, se as premissas forem verdadeiras, há uma probabilidade de a conclusão também o ser. Neste caso, o argumento indutivo será correto se tal probabilidade for alta.

Poincaré foi um dos que argumentavam sobre a importância do cálculo das probabilidades para as ciências nas quais o uso de procedimentos indutivos é essencial.

> *O método das ciências físicas se baseia na indução, que nos faz esperar a repetição de um fenômeno quando se reproduzem as circunstâncias nas quais, pela primeira vez, ele se produziu. Se todas essas circunstâncias se pudessem reproduzir, ao mesmo tempo, esse princípio poderia ser aplicado sem temor, mas isso nunca acontece; [...] Daí o papel considerável que a noção de probabilidade tem nas ciências físicas* (POINCARÉ, 1988, p. 16).

Desse modo, vemos que há outros procedimentos além da simples enumeração de casos particulares que podem ser interpretados como indutivos. E não é difícil perceber que tais procedimentos são comumente empregados no ensino, o que torna sua discussão pertinente nesse contexto.

Argumentos indutivos e, muitas vezes, falaciosos são utilizados na veiculação de notícias diariamente nos jornais e na televisão, e os telespectadores ou leitores ficam sem compreender realmente o que elas dizem, ou assimilam o que elas não dizem, e não o percebem, por não saberem diferenciar argumentos corretos de falaciosos. A capacidade de discernimento e argumentação em situações como essas são qualidades solicitadas e valorizadas na formação de qualquer indivíduo, principalmente na de um professor de matemática.

Hoje, não diferentemente de outros tempos, a capacidade de resolver problemas que exijam habilidade de raciocínio é um elemento de grande importância nos mais variados setores da atuação humana. Novas tecnologias são desenvolvidas e as já conhecidas são aperfeiçoadas a cada dia. Muito do que o homem fazia há algum tempo atrás hoje é realizado por máquinas e computadores que, em muitos casos, procuram 'imitar' as capacidades humanas. Logo, o homem precisa desenvolver em si, cada vez mais, aquelas aptidões que não cabem às máquinas possuírem, e entre elas está a capacidade de tomar atitudes diante de situações complexas ou inusitadas, com todas as sutilezas e até mesmo aparentes contradições que elas podem apresentar. Raciocinar mesmo na presença de ambiguidades e de informações vagas e imprecisas. Portanto, é de se esperar que conhecimentos de lógica se apliquem nesses contextos de alguma forma e as noções de lógica sejam convenientes mesmo no ensino fundamental.

2.8 AS NOÇÕES DE 'VERDADE' E 'DEMONSTRABILIDADE'

> A crença de que uma demonstração formal pode servir como instrumento adequado para estabelecer a verdade de todos os enunciados matemáticos mostrou-se desprovida de fundamento.
>
> Tarski

A noção de verdade em ciência não é algo totalmente livre de questionamentos, e é uma das mais importantes indagações filosóficas acerca da ciência e da atividade científica. No ensino básico, uma noção intuitiva de verdade, como a que temos empregado neste texto, normalmente é considerada. E, em geral, ela é tomada no sentido da chamada *teoria correspondencial da verdade*, que assevera que a verdade de uma sentença está, dito por alto, em sua adequação com a realidade (DA COSTA, 1994).[10]

Não é difícil encontrar, em textos que tratam de demonstrações, referências ao processo de demonstrar que algum enunciado é verdadeiro. No entanto, a rigor e, para os padrões atuais de uma noção de demonstração formal, não é precisamente a verdade do enunciado que estará sempre sendo demonstrada. Essa diferenciação pode parecer desnecessária nos níveis de ensino fundamental e médio, mas é de grande relevância quando se busca uma melhor compreensão dos métodos utilizados na estruturação de teorias matemáticas e científicas em geral. E essa compreensão pode ser importante também para um professor.

Até aqui utilizamos termos como "verdadeiro" e "demonstrável" sem maiores distinções. Mas consideramos conveniente e útil expor algo acerca da distinção entre eles. Sendo assim, tomamos como referência o artigo de HENKIN(1975).

Segundo esse autor, verdade e demonstrabilidade são propriedades que podem ser atribuídas a sentenças que transmitem informações sobre algum assunto, seja ele empírico ou abstrato. A questão de se saber o que se pretende dizer ao afirmar que uma sentença é verdadeira pode ser encontrada em vários trabalhos filosóficos. Mas, no âmbito da matemática, coube a Alfred Tarski conceber e formular uma teoria da verdade.

Uma noção de verdade a ser aplicada a sentenças pode ser expressa em termos de uma relação entre as sentenças e o assunto a que se referem. Sentenças, conforme já mencionamos em outro item, são certas expressões simbólicas elaboradas em alguma linguagem. Para que a relação acima mencionada seja adequada, é necessário que ela especifique para cada sentença as condições que a tornam verdadeira em certo domínio. Por exemplo, a sentença "Curitiba é a capital do Paraná" será verdadeira se, de fato, a

---

[10] Outras considerações sobre noções lógicas de verdade podem ser vistas em Da Costa(1994).

cidade Curitiba for a capital do Paraná, que será a condição que, caso seja satisfeita, mostrará que a sentença apresentada é verdadeira.

Se admitimos que o conjunto de todas as sentenças é finito, então especificar uma noção de verdade se reduz a elaborar uma longa lista com as condições de verdade para cada uma delas. Mas, embora possamos pensar em um conjunto finito de sentenças elaboradas até hoje, nosso conhecimento acerca da linguagem que utilizamos para formulá-las mostra ser possível elaborar um número ilimitado de sentenças. Diante disso, a noção de verdade acima considerada não se mostra satisfatória. Nesse caso, para tratar de uma infinidade de sentenças necessitamos de uma outra formulação para a noção de verdade.

Sabendo que cada sentença é construída a partir de um conjunto finito de símbolos e segundo certas normas gramaticais, podemos especificar as condições de verdade apenas para aquelas sentenças consideradas elementares, ou "mais curtas", a partir das quais seriam construídas as sentenças mais complexas. Para decidir sobre a verdade destas últimas, poder-se-ia recorrer ao que os matemáticos chamam de "definição recursiva", ou seja, baseada em uma análise estrutural das sentenças. A definição então "[...]indicaria de que modo as condições de verdade poderiam ser consideradas no caso de qualquer sentença complexa, S, através das condições de verdade aplicáveis às componentes elementares em que S se desdobra."(HENKIN, 1975, p. 57).

Mas essa idéia também encerra alguns obstáculos. Um deles seria caracterizar o significado de "sentença" em linguagens que possuem regras gramaticais complicadas e até mesmo imprecisas. Um outro seria a presença de paradoxos que podem surgir quando se procura determinar se uma sentença que faz alguma afirmação sobre ela mesma é verdadeira ou falsa. Por exemplo a sentença "Esta sentença é falsa" é verdadeira se aquilo que ela afirma é verdadeiro. Mas se aquilo que ela afirma é verdadeiro então a sentença é falsa. Ou seja, admitindo que a sentença é verdadeira, concluímos que ela é falsa e viceversa. Isso leva-nos a considerar que a sentença é verdadeira e falsa simultaneamente, o que contradiz a idéia que comumente se tem sobre a distinção entre sentença falsa e verdadeira.

Os dois obstáculos apresentados manifestam a impossibilidade de "[...] apresentar uma definição satisfatória de 'sentença verdadeira' capaz de abranger a totalidade das sentenças de uma linguagem natural."(HENKIN, 1975, p. 58). Foi a partir da atenção que Alfred Tarski deu a esse fato, que ele formulou uma definição de "sentença verdadeira", matematicamente precisa, restringindo-se a certas linguagens artificiais. Tais linguagens, são apoiadas em um formalismo composto por "[...] uma lista explícita de símbolos, distribuídos em várias classes, e uma lista de regras formais que ditavam quais os modos por que os símbolos se combinariam para construir as sentenças."(HENKIN, 1975, p. 62). No entanto, uma linguagem desse tipo pode exprimir somente uma porção das idéias que comumente são formuladas em linguagens naturais, como o português, por exemplo.

Adicionando a uma linguagem os axiomas de alguma teoria e as regras de inferência fornecidas por uma lógica, torna-se possível elaborar demonstrações formais nessa teoria e, a partir disso, decidir se uma dada sentença é também demonstrável ou não.

Uma das propriedades notáveis da definição elaborada por Tarski é o caráter de recursividade, que torna possível estabelecer certas leis gerais sobre o conceito de verdade. Um exemplo seria a lei do terceiro excluído, segundo a qual, dada uma sentença, ou ela é verdadeira ou não é. Mas essa definição, embora forneça condições para saber se cada sentença é verdadeira, ela não fornece informações se, de fato, ela o é. "Para saber se a sentença é, de fato, verdadeira, será preciso combinar a definição e a investigação empírica." (HENKIN, 1975, p. 60). Para essa investigação empírica, pode-se fazer uso da verificação direta da sentença e de procedimentos indutivos e dedutivos anteriormente abordados.

Euclides demonstrava suas proposições e a verdade daquilo que ele demonstrava era dada pela relação de concordância entre tais proposições e a realidade. Até que surgiram as geometrias não-euclidianas, colocando em discussão a validade dessa relação. Já Hilbert não levou em conta o caráter de verdadeiro ou não daquilo que ele demonstrava, restringiu-se somente ao aspecto formal das proposições que demonstrava, conforme também se pôde ver anteriormente.

Mas, em um sistema formal, toda sentença verdadeira seria demonstrável? A resposta é negativa. Existem teorias dedutivas nas quais há sentenças que podem ser identificadas como verdadeiras e, no entanto, não são demostráveis. Isso pode acontecer quando se seleciona um número reduzido de axiomas e de regras de inferência, ou nos casos em que se parte de um sistema no qual todos as verdades são demonstráveis, mas em algum momento abandona-se alguns axiomas ou regras.

Isso tudo diz respeito ao problema da *completude* da teoria dedutiva. As investigações nessa área mostraram que, empregando uma linguagem adequada para descrever os objetos de certos domínios que se pretende explorar, é impossível demonstrar todas as sentenças que são verdadeiras nesse domínio. "Daí segue que a noção de *sentença demonstrável*, seja qual fôr a teoria dedutiva formal selecionada para a linguagem, difere da noção de *sentença verdadeira* – pois a primeira noção pode ser expressa na própria linguagem e a segunda não."(HENKIN, 1975, p. 64).

Disso tudo podemos ter uma noção quanto à distinção entre os termos "verdadeiro" e "demonstrável". No entanto, percebemos que insistir na precisão do uso desses dois conceitos desde o início de nosso texto poderia torná-lo um tanto maçante para o leitor. Além disso, no contexto deste ensino, nos níveis fundamental e médio, a menos que se esteja tratando de um estudo sobre filosofia ou fundamentos da ciência, a exigência de tal diferenciação geralmente não ocorre. Trabalha-se com uma idéia intuitiva desse dois conceitos. Por isso, no decorrer do texto, procuramos utilizar expressões como "provar um resultado", "estabelecer uma afirmação" e "demonstrar uma proposição", embora, em alguns momentos, as noções de verdade e demonstrabilidade tenham sido empregadas inadequadamente, se considerarmos o que foi exposto neste item.

2.9 O ENSINO DE MATEMÁTICA E AS 'PROVAS INFORMAIS'

> Do ponto de vista pedagógico, a boa definição, a boa demonstração, são aquelas que o aluno compreende.
>
> Blanché

Atualmente, para que uma demonstração seja aceita pela comunidade matemática é necessário obedecer rigorosamente as regras da lógica subjacente, assegurar-se da validade dos resultados utilizados como premissas e formular cuidadosamente a afirmação a ser demonstrada, explicitando-se as hipóteses e o que se deseja provar a partir delas, tornando-a, desse modo, precisa e inquestionável. E é, em boa parte, devido às características desse procedimento que a matemática é valorizada pelo "[...] caráter irrefutável de suas conclusões[...] (BRASIL, 1997, p. 26).

Um exemplo recente da importância da observação desses critérios é a análise da demonstração do último teorema de Fermat[11], contendo aproximadamente 130 páginas que

[11] Tal teorema afirma que não existe solução não trivial para a equação $x^n + y^n = z^n$ no conjunto dos números inteiros, para *n* maior do que 2. Uma prova para tal fato teria sido encontrada pelo matemático francês Pierre de Fermat, porém este não a teria redigido em função do pouco espaço que possuía na margem do livro que lia no momento de sua inspiração. Durante mais de 350 anos muitos matemáticos tentaram encontrar a prova de tal relação, sendo ela elaborada recentemente por Andrew Wiles e publicada em 1995 (SINGH, 1999).

foram minuciosamente examinadas por vários matemáticos e lógicos, para então ser finalmente aceita. (SINGH, 1999).

Mas, quando se trata de demonstrações na escola, e até mesmo nos cursos de graduação, sabemos que o que foi exposto no primeiro parágrafo não é o que se faz. Nem mesmo os matemáticos o fazem exatamente, em muitos casos. A rigor, poder-se-ia dizer que somente lógicos e matemáticos servem-se deste recurso em seus trabalhos e ainda com restrições.

No contexto do ensino, e mesmo em vários estágios de uma pesquisa em matemática, explora-se muito mais uma idéia informal de prova, no sentido que SUPPES(1957) expõe. Para ele, uma prova informal é uma prova formal com "brechas", ou seja, uma prova na qual não se faz menção às regras lógicas de inferência utilizadas. Nela,

somente os axiomas específicos são mencionados e em muitos casos, recebem um "nome". Além disso, várias passagens são omitidas, sendo que a ausência delas não impede a compreensão da prova e muitas dessas ausências nem chegam a ser percebidas pelo leitor. Esse tipo de prova pode ser encontrado comumente em livros utilizados nos cursos de graduação e é também o que os matemáticos em geral fazem. Como já possuem familiaridade com a lógica e algumas formas de demonstração, procedem guiados pela intuição fornecida pelo considerável conhecimento de seu campo de pesquisa.

Mas para LAKATOS (1987) isto não constitui uma prova informal, trata-se de

> *[...]uma prova em uma teoria matemática axiomatizada que tem adotado a forma de um sistema hipotético-dedutivo, mas que deixa de especificar sua lógica subjacente. No estágio atual de desenvolvimento da lógica matemática, um lógico competente pode compreender em muito pouco tempo qual é a lógica subjacente necessária de uma teoria, e pode formalizar qualquer prova deste tipo sem esforçar demais o cérebro (Id., ibid., p.93).*

Lakatos considera informal aquela prova que não faz referência a um sistema de axiomas e a uma lógica subjacente bem definida. O que se faz em uma prova desse tipo, salienta ele, é mostrar intuitivamente que um teorema é verdadeiro. "Essa classe de prova está sempre exposta a certa incerteza a respeito da explicação das possibilidades não previstas até o presente." *(Id., ibid.*, p.102).

Se esse for o tipo de prova a ser explorado no ensino, deve-se atentar para o fato de que ele propicia o uso de procedimentos indutivos, o que sugere que uma compreensão de tais procedimentos pode ser tão importante para o professor de matemática como o conhecimento que se espera que ele tenha acerca dos dedutivos.

No ensino de matemática, a relação com o mundo físico é uma forma comumente empregada para convencer o aluno da verdade de um teorema. Por exemplo, ao buscar descobrir ou verificar a relação existente entre o número de faces, vértices e arestas de um poliedro regular o professor pode utilizar modelos manipuláveis (confeccionados com cartolina ou outro material semelhante) ou mesmo figuras desses sólidos. Essa atitude pode ser suficiente para despertar nos alunos a crença no teorema de Euler[12].

Um outro caso seria convencê-los que em qualquer paralelogramo as diagonais interceptam-se no ponto médio, mostrando uma série de exemplos que confirmem tal proposição. Em uma situação como essa, o aluno pode fazer deduções, encadeando seus raciocínios de acordo com regras que ele conhece. Mas, provavelmente, será um raciocínio indutivo, desencadeado pela observação dos diversos exemplos, que lhe possibilitará chegar ao ponto de acreditar na proposição em questão.

Em níveis mais avançados de estudos, por exemplo, nos cursos de graduação, uma demonstração das duas relações seria pertinente. Mas, em níveis elementares, esses procedimentos empíricos e indutivos de comprovação são importantes, como sugeriu Polya, e necessários como mostrarão nossas abordagens teóricas posteriores acerca do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem humanos.

Entretanto, no estudo de matemática, o grau de confiança em uma proposição, fornecido pela análise de alguns casos particulares nos quais ela foi verificada, pode não ser suficiente para que ela seja aceita como verdadeira sempre. O desprendimento da verdade material, ou seja, da relação do conteúdo com a realidade, com o observável, o manipulável, mostrar-se-á necessário. Mas nem todos conseguem prosseguir em seus raciocínios sem esse apoio. Seria isso algo surpreendente? Deveria o indivíduo ser sempre capaz de atingir um maior nível de abstração em seus raciocínios e chegar a perceber que em matemática pode-se tratar de relações que fogem do alcance da nossa intuição e nem por isso deixam de ser verdadeiras? Vários estudos e nossa própria experiência com o ensino, sugerem que não. O apoio à realidade concreta é um componente necessário a muitos alunos em diversos níveis de ensino quando se solicita a eles que elaborem uma demonstração.

Por isso, uma reflexão acerca dos procedimentos de prova, (não somente as demonstrações, mas os procedimentos indutivos também), mostra-se fundamental para a discussão sobre o ensino de matemática, principalmente quando não se pretende somente mostrar verdades ao aluno e exigir dele que as memorize. Quando se pretende explorar os próprios processos de produção do conhecimento, permitindo assim, que o aluno avalie e participe da construção dos seus, a promoção daquilo que GARNICA (1995) chamou de contexto da crítica acerca desses procedimentos, torna-se necessário.

---

[12] O teorema de Euler afirma que, em um poliedro regular convexo, somando-se o número de faces com o número de vértices e subtraindo-se o número de arestas obtém-se 2. $(V + F - A = 2)$

3
O DESENVOLVIMENTO COGNITIVO

3.1 RELAÇÕES ENTRE A LÓGICA E AS OPERAÇÕES DO PENSAMENTO HUMANO

> Qual é a natureza do raciocínio matemático? É, realmente, dedutivo, como comumente se acredita? Uma análise aprofundada nos mostra que não é nada disso, que ele participa, em uma certa medida, da natureza do raciocínio indutivo e que é essa a causa de sua fecundidade.
>
> Poincaré

Segundo o modelo teórico de desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget, o pensamento operatório-formal, que se caracteriza pela presença do raciocínio hipotético-dedutivo, é a forma mais sofisticada de adaptação do ser humano no plano cognitivo. E a ele deve-se a existência das ciências, que são construções do próprio indivíduo.

Mas o que caracteriza esse raciocínio hipotético-dedutivo? Todo indivíduo é capaz de atingir um estágio de desenvolvimento cognitivo no qual apresente as habilidades típicas desse modo de pensar? Por que ele é importante para a formação intelectual à qual se propõe o ensino formal, em especial o de matemática?

Conforme expõe GOMEZ-GRANELL(1998), em geral, há a identificação do pensamento abstrato, almejado e valorizado em atividades das ciências formais (matemática e lógica), com um nível consideravelmente evoluído de conhecimento, ao qual se acredita que o indivíduo tenda naturalmente com o decorrer do seu desenvolvimento. Ou, ainda, considera-se racional o indivíduo que utiliza em seu raciocínio as leis da lógica (clássica).

No entanto, há estudos que sugerem que tais leis não são suficientes e, em alguns casos, nem adequadas para caracterizar certas operações do pensamento humano, pois ele possui componentes que estão muito mais ligados ao quotidiano do indivíduo do que a regras formalizadas pela lógica clássica, complementa Gomez-Granell.

O lógico Wermus, em um de seus artigos, (WERMUS, 1992), discute processos que, segundo ele, produzem significados cognitivos. Para tanto, analisa, entre outras coisas, algumas propriedades dos procedimentos e das operações do que ele chama de "lógica natural" do sujeito. A partir de seus estudos, ele constatou que o indivíduo elabora representações apoiado muito mais no que ele chama de *funções intencionais* do sujeito (atitudes, crenças, medos,...), do que em certas propriedades típicas de um pensamento "racional".

Uma representação cognitiva pode ser entendida como uma representação de um fato, ou expressão, na mente de um sujeito em um determinado instante. E uma representação sozinha, segundo Wermus, sem as funções intencionais, não produz significado cognitivo. Este fica então subordinado a tais funções.

Isso leva-nos a questionar a crença de que um ensino de matemática com ênfase em procedimentos "exclusivamente" dedutivos, favorece diretamente o desenvolvimento do "raciocínio dedutivo". A partir do que expusemos no capítulo anterior, podemos perceber que as operações mentais de um indivíduo, mesmo no momento em que busca elaborar uma demonstração, podem ser caracterizadas pela presença de procedimentos que vão além daqueles que a lógica clássica permite descrever. Às funções intencionais às quais Wermus se refere, por exemplo, poderíamos acrescentar procedimentos intuitivos e indutivos, comumente empregados no ensino-aprendizagem de matemática, sem que se tenha consciência disso na maior parte do tempo.

Para TUNG-SUNG (1977), ao tratarmos de uma teoria do conhecimento, é necessário considerar aspectos culturais. O que pode explicar divergências existentes entre formas de pensamento, por exemplo, é a atribuição da gênese e das particularidades das categorias de pensamento às diferenças culturais: "[...]nascendo em culturas diferentes, as pessoas aprendem a interpretar diferentemente. Podemos, assim, recorrer à cultura para explicar as categorias, e às categorias para explicar as diferenças mentais; por exemplo: as existentes entre o Ocidente e o Oriente."(TUNG-SUNG, 1977, p. 199). Segundo o filósofo chinês, sendo a lógica aristotélica baseada na gramática grega, as discrepâncias entre as formas gramaticais do inglês, do francês, do latim e do alemão, que pertencem à mesma família linguística indo-européia, não causam diferenças entre essa lógica e as regras do raciocínio dessas línguas. No entanto, aplicada ao pensamento chinês, a lógica aristotélica, que se baseia na estrutura de frases caracterizadas pela forma sujeito-predicado, revelar-se-ia inadequada.

> *Na medida em que o objeto da Lógica está nas regras de raciocínio implícitas na linguagem, a expressão desse raciocínio deve ser implicitamente influenciada pela estrutura da linguagem, e as diferentes línguas terão formas de lógica mais ou menos diferentes. Daí a diferença entre a Lógica chinesa e a Lógica aristotélica. O tipo tradicional de proposição 'sujeito-predicado' não existe na Lógica chinesa (Id., ibid.,* p.201).[1].

Assim sendo, não se mostra adequado afirmar que a lógica formal é um conjunto de regras que rege o raciocínio humano de um modo geral. Entretanto, como afirmou o próprio Tung-Sung, "O pensamento do Homem pode não estar necessariamente de acordo com a Lógica Formal, mas não pode deixar de estar de acordo com *uma* lógica." *(Id., ibid.*, p. 194). Mas, essa idéia de atribuir ao pensamento do ser humano uma "lógica" universal

---

[1] Vale mencionar que para Tung Sung a lógica aristotélica é vista como o conjunto das regras do pensamento, a que a concepção de lógica atual não se restringe.

não é algo livre de questionamentos, nem objeto de consenso entre diversos pesquisadores. E isso pode ser percebido no que se segue.

Existem estudos de caso por meio dos quais foram identificadas civilizações que raciocinam segundo outras categorias de pensamento, aparentemente possuindo intuições de tempo e espaço distintas das que conhecemos. JENNINGS (1989) discute a existência de um outro tipo de "lógica" diferente daquela normalmente empregada por ocidentais. Um exemplo desse tipo de lógica seria aquela utilizada por uma tribo indígena denominada Zande. Eis um argumento dessa tribo que revela isso:

> *(1) Todos e somente todos feiticeiros possuem a essência da feitiçaria.*
> *(2) A essência da feitiçaria é sempre herdada pelos filhos do mesmo sexo de um feiticeiro.*
> *(3) A tribo Zande é um grupo de pessoas relacionadas biologicamente através da linhagem masculina.*
> *(4) Um homem A da tribo C é um feiticeiro.*
> *(5) Todo homem da tribo C é um feiticeiro* (JENNINGS, 1989, p. 279*).*

O sistema de crenças da tribo Zande inclui todas as premissas de (1) a (4), mas não aceita a conclusão (5) que, para nós, decorre "naturalmente", se tivermos como subjacente a lógica clássica.

A maneira como pensamos é realmente muito complexa, não sendo fácil sua análise e codificação. Nesse caso, o que ocorre, segundo DA COSTA (1994), é que a atividade racional pode ser expressa por meio de uma linguagem, de modo que os contextos racionais podem ser vistos como contextos linguísticos. Então, o que a lógica formal reflete é a estrutura dedutiva desses contextos, de maneira que "...só indiretamente se pode afirmar que (a lógica formal) retrate o modo como pensamos." (DA COSTA, 1994, p.4).

Não se trata pois de transportar aqueles princípios da lógica formal para as interações cotidianas do indivíduo com seu meio. Por isso, é importante ter consciência de que um ensino de matemática com ênfase em procedimentos dedutivos possivelmente não seja o único caminho para estruturar o pensamento e agilizar o "raciocínio dedutivo" do aluno, que é o que se espera que estudo de matemática favoreça, segundo os *Parâmetros Curriculares Nacionais* para o ensino fundamental.

Nesse sentido é que se poderia estar justificando a importância da aquisição de alguns conhecimentos de lógica por parte dos licenciandos em seus cursos de formação.

3.2 O RACIOCÍNIO HIPOTÉTICO-DEDUTIVO SOB A ÓTICA DA TEORIA PSICOGENÉTICA PIAGETIANA

> O papel do exercício e da experiência adquirida na ação efetuada sobre os objetos é fator essencial e necessário também na formação das estruturas lógico-matemáticas.
>
> Piaget

Em discussões de cunho educacional, é comum a referência aos trabalhos de Jean PIAGET (1896-1980), um dos estudiosos que se preocupou em compreender e descrever como pode dar-se o desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Embora poucos de seus escritos sejam voltados à educação, ao modo como o ensino poderia ser conduzido a fim de favorecer a aprendizagem, muitas de suas obras têm sido tomadas como referência em pesquisas nessa área em vários níveis.

Biólogo e filósofo suíço, consagrou sua vida à explicação biológica do conhecimento e dedicou-se à psicologia por ser um terreno ainda bastante desconhecido. Estudou aspectos do desenvolvimento mental e gênese das noções, abordando-os no campo da epistemologia. Para ele, o conhecimento surge a partir do momento em que é comunicável e controlável. Segundo entrevista relatada em BRINGUIER (1978), Piaget afirma que procurou mostrar a dimensão do seu trabalho no que se refere a relações entre as dimensões biológica e mental dos seres, não enfocando questões psíquicas ou distúrbios nesta área, por opção.

No seu método de trabalho, o clínico-crítico, era mantida uma série de conversações livres sobre assuntos pré-determinados com crianças no mesmo nível de evolução, para uma posterior análise, a fim de saber como elas raciocinavam, como descobriam novos instrumentos que serviriam de auxílio na aquisição de novos conhecimentos (DOLLE, 1974).

Piaget buscou explicar o processo do desenvolvimento cognitivo por meio do que ele chamou de *estruturas cognitivas*: certas estruturas mentais que o organismo elabora ao interagir com o meio. A idéia básica é que, partindo de uma estrutura mais simples, a interação (junto das interferências de fatores diversos) possibilita a construção de novas estruturas, que vão caracterizar sempre uma forma mais sofisticada de conhecer. Para ele, o problema do desenvolvimento é entender a formação, a elaboração, a organização e o funcionamento destas estruturas (PIAGET, 1964). No seu modelo teórico de desenvolvimento cognitivo, o indivíduo não passa somente por um processo de descoberta do mundo, no qual absorve passivamente informações sobre ele. O que o indivíduo faz é construir esquemas cada vez mais abstratos, no sentido que será visto adiante.

Esse desenvolvimento também ocorre em etapas ordenadas, as quais chamou de *estágios* ou *períodos*, caracterizadas por determinados comportamentos que retratam a existência das estruturas mencionadas. E a aprendizagem depende do estágio de desenvolvimento no qual o indivíduo se encontra. (PIAGET, 1995). Sua teoria busca superar as concepções de que a capacidade intelectual é inata ou pode desenvolver-se por puro treinamento. Desse modo, conforme se pode ver em PIAGET (1964), o problema do desenvolvimento geral e o da aprendizagem são diferentes.

O primeiro diz respeito à totalidade das estruturas do conhecimento: é um processo espontâneo, ligado à embriogênese, que se refere ao desenvolvimento do corpo. Já a aprendizagem pode ser provocada por situações, por um experimento psicológico, por um professor. Em geral, ela é provocada, como oposição à espontaneidade do desenvolvimento. Logo, o desenvolvimento explica a aprendizagem, não é uma soma discreta de experiências de aprendizagem, como muitos acham. Em entrevista, Piaget diz que "[...]penso que já temos prova de que o desenvolvimento é mais fundamental do que a aprendizagem. A mesma situação de aprendizagem tem um efeito diferente de acordo com o estágio de desenvolvimento do sujeito." (EVANS, 1980, p. 46).

Para explicar o processo de desenvolvimento, foram considerados quatro grupos de fatores principais: a *maturação*, que é o amadurecimento biológico do organismo; as próprias *experiências* do indivíduo, anteriores e atuais; as *transmissões* e as *interações sociais (*da educação, por exemplo) vividas pelo indivíduo (onde há a linguagem utilizada comumente no meio em que vive); e a *equilibração*, que é um dos elementos fundamentais na sua teoria. (PIAGET, 1964).

A fim de explicar o processo de elaboração cognitiva pelo qual passa o indivíduo, pode-se partir do conceito de *esquema*, ou *esquema de ação*. Um esquema é aquilo que em uma determinada ação é próprio dela, que aparece em toda repetição da mesma. Por exemplo, há o esquema de pegar, de jogar, de dançar. Uma ação é aquilo que é observável, operacionalizável. Os esquemas de ações são os elementos componentes das estruturas. E o papel da ação é tido como indispensável para a elaboração de estruturas.

Uma *estrutura* é o produto de uma construção devida às perturbações do meio e à capacidade do organismo de ser perturbado e responder a essa perturbação. No decorrer do processo de desenvolvimento, as estruturas "[...]não se substituem umas às outras, cada uma resulta da precedente, integrando-a na qualidade de estrutura subordinada." (PIAGET, 1995, p. 30). A função de todas as estruturas é assegurar uma melhor adaptação sempre.

É comum ao indivíduo ativo deparar-se com alguma situação que exige dele uma habilidade ainda não adquirida, à qual reagirá a fim de compensar um desequilíbrio entre suas estruturas e aquelas necessárias à realização de uma nova ação. No processo de busca de um novo estado de equilíbrio estão envolvidos os mecanismos de assimilação e acomodação, com os quais o indivíduo interage com o meio.

Por exemplo, ao tentar apanhar uma bola que lhe é jogada, a criança estica o braço, posiciona mãos e dedos, pondo em prática o esquema de pegar que lhe é conhecido. Há a presença da *assimilação,* que é o mecanismo por meio do qual o organismo desenvolve ações destinadas a atribuir significações, a partir de sua experiência anterior, aos elementos do ambiente com os quais interage numa determinada situação. (PIAGET, 1995). No entanto, esse esquema de pegar modifica-se para se ajustar às características do objeto em questão, no caso a bola. Se o objeto fosse um bastão, as características seriam outras e os ajustamentos necessários também. Nesse momento, por meio do mecanismo de *acomodação,* o organismo buscará ajustar-se à mudança propiciada pela ação do objeto, isto é, a forma da bola impõe uma maneira particular de pegar. Esses dois mecanismos são distintos, mas ocorrem ao mesmo tempo, havendo ocasiões em que um prepondera sobre o outro. (PIAGET, 1964).

A *equilibração* é o processo por meio do qual o sistema cognitivo individual busca um estado de equilíbrio superior, quando momentos anteriores de equilíbrio são abalados na interação com o meio. É um conjunto de reações ativas do sujeito às perturbações externas, que leva à formação de novas estruturas (*Id.*, 1964).

O equilíbrio entre a assimilação e a acomodação é chamado *adaptação,* e a inteligência é uma das formas de adaptação do indivíduo ao meio.

O processo de desenvolvimento cognitivo até a adolescência é descrito por Piaget em quatro períodos, cada um representando diferentes formas de organização mental. Não nos aprofundaremos na descrição desses períodos, por haver uma vasta literatura acerca de suas particularidades. Mencionaremos apenas algumas das principais características de cada um deles para que seja possível perceber o caráter evolutivo no desenvolvimento da inteligência do ser humano, mais precisamente, da capacidade de um raciocínio cada vez mais abstrato e formal.

Nosso intuito é, tendo em mente o modo tradicional (e, em muitos casos, o atual) de ensino da matemática, provocar uma reflexão quanto à adequação e a conveniência desse modo de proceder frente aos novos direcionamentos que se tem buscado dar ao ensino. O que se ensina e o que se espera que o aluno aprenda em determinada série escolar leva em conta suas capacidades e potencialidades naquele momento?

Quando se discutem dificuldades na aprendizagem de matemática e se acaba atribuindo essas dificuldades à ausência de certas "bases" que o aluno deveria ter, geralmente, refere-se à falta de conteúdo e não à falta de estruturas que permitam a aprendizagem de novos conteúdos. Além disso, deixa-se de considerar os demais fatores determinantes do desenvolvimento cognitivo expostos anteriormente. Embora sejam fatores referentes a uma abordagem teórica em especial, servem ao propósito de instigar uma reflexão necessária quando se almeja um ensino que, além de valorizar o conhecimento de assuntos de alguma área específica, respeite e tome como aliadas as potencialidades do aluno, não subestimando assim suas capacidades, nem distorcendo aspectos fundamentais da ciência que se ensina a fim de torná-la acessível.

O primeiro dos estágios do desenvolvimento cognitivo descritos por Piaget vai do nascimento aos dois anos de idade, aproximadamente. É caracterizado pela *inteligência sensório-motora*, que é guiada pela percepção e se apresenta essencialmente prática. As estruturas típicas desse período são compostas por esquemas de ações com os quais o bebê conhece o mundo. Ao nascer, ele possui estruturas anatômico-fisiológicas, esquemas reflexos inatos, como a sucção, que podem ser entendidos como ações espontâneas que aparecem automaticamente em presença de certos estímulos. Pegar um objeto, levá-lo à boca, balançá-lo, também são formas de conhecer típicas desse estágio. Nessa fase, segundo PIAGET (1995), não há ainda a presença da linguagem, que lhe permitirá comunicar ao outro suas idéias, e nem da função semiótica, que só se manifestará no período seguinte, o *pré-operatório.*

Esse segundo período é marcado pelo surgimento da referida função que permite a representação e o pensamento. Ela inclui a linguagem, a imagem mental e a utilização de símbolos para representar objetos quando estes encontram-se ausentes. (PIAGET, 1995). Aqui, a criança não está mais restrita às ações, já existe o pensamento, a capacidade de imitação, de representação em atos materiais. Imitar um motorista simulando um volante de automóvel com algum objeto de forma circular é um exemplo de manifestação dessas capacidades. Essa fase é preparatória para o estabelecimento de novas estruturas no período seguinte como, por exemplo, as operatório-concretas reversíveis. (*Id.*, *ibid.*). Ou seja, a inteligência pré-operatória caracteriza-se como uma fase de transição. Nesse sentido não existem estruturas pré-operatórias, devido ao próprio conceito de estrutura. No entanto, é concebível que "[...]as estruturas que vão se evidenciar ao nível das operações concretas já estejam em ação na maioria das atividades práticas."(DOLLE, 1974, p. 157).

O período *operatório-concreto,* que vai dos sete aos doze anos, aproximadamente, apresenta como característica inicial a possibilidade de reversibilidade mental, o que permite à criança retomar uma ação em pensamento. Mas as ações mentais nessa fase, em geral, aplicam-se somente a objetos concretos, e não ainda a hipóteses. Ou seja, as operações aqui são concretas "[...] no sentido de que se baseiam diretamente nos objetos e não ainda nas hipóteses enunciadas verbalmente.[...]" (PIAGET, 1995, p. 86). Tais operações estabelecem a transição entre a ação e as estruturas lógicas mais gerais como a classificação, a seriação e a correspondência termo a termo.

Piaget identificou duas formas diferentes de experiências ligadas a essas ações materiais do indivíduo: aquelas que consistem em manipular os objetos a fim de descobrir propriedades próprias desses como, por exemplo, cor, forma e textura, e aquelas que provêm da coordenação de ações sobre os objetos. Um exemplo desta última seria perceber que o número de elementos de uma coleção não se altera em função da maneira como são dispostos esses elementos. Por meio dessas experiências, ditas lógico-matemáticas, o indivíduo pode captar certas propriedades para utilizá-las em outras situações.

Essas experiências, segundo PIAGET (1973), não constituem obstáculos para o desenvolvimento posterior do raciocínio hipotético-dedutivo, mas são vistas como uma fase necessária para se chegar até ele. Isso, deve-se ao fato de que a elaboração das estruturas que caracterizarão o tipo de raciocínio acima mencionado dependerá da elaboração das estruturas típicas dessa fase de manipulação concreta. De modo que, a partir do momento em que aquelas se manifestarem, as ações típicas dessa fase, cujo apoio material é indispensável, serão substituídas por ações interiorizadas, revelando o alcance de um estágio superior de desenvolvimento.

Assim sendo, a possibilidade de um indivíduo vir a compreender ou elaborar a demonstração de uma proposição matemática poderá estar sujeita a habilidades que ele tiver adquirido até então por meio da análise de uma série de exemplos concretos/particulares que dêem credibilidade a essa proposição.

Ao analisar o processo de desenvolvimento, Piaget também salienta que é preciso perceber que tipos de relações podem haver entre a linguagem e as ações. Principalmente no âmbito da educação matemática, no qual constitui um grave erro limitar-se à linguagem, deixando de lado o papel das ações.

Nos diversos níveis de ensino, a ação sobre objetos pode mostrar-se indispensável para a compreensão de relações geométricas e aritméticas, entre outras. No que diz respeito a experiências materiais no ensino de matemática, em especial, quando se visa o desenvolvimento de um raciocínio dedutivo, Piaget alega que:

> *[...] a repugnância por parte dos professores no que se refere a qualquer ação ou experiência material resulta sumamente compreensível, posto que vêem nelas um recurso às propriedades físicas e temem que as constatações empíricas constituam um estorvo para o desenvolvimento do espírito dedutivo e puramente racional característico de sua disciplina* (PIAGET, 1973, p.221).

Mas, essa postura por parte dos professores, pode revelar-se inadequada e improdutiva. Ao educador matemático que atua no ensino básico, e principalmente no superior, tão importante quanto compreender a matemática como uma ciência dedutiva, é perceber diferenças e relações entre seus procedimentos típicos e os de outras áreas do conhecimento, em especial, aquelas ciências que necessitam da experiência para estabelecer seus resultados, em geral, fazendo uso de procedimentos indutivos. Além disso, assim como se acredita que ocorreu no desenvolvimento histórico da matemática, também em diversos estágios do desenvolvimento cognitivo humano, as motivações práticas e a experiência podem desempenhar um papel fundamental.

Ao tratar de demonstrações no ensino de matemática, por exemplo, o rigor quanto à linguagem e compreensão dos aspectos lógicos subjacentes pode ser solicitado e justificado de acordo com o grau de desenvolvimento, instrução e interesse de cada estudante, bem como com os objetivos do ensino que lhe é proposto. Em alguns casos,

> *[...] tornar a demonstração demasiado detalhada seria mais prejudicial, para sua legibilidade, do que torná-la demasiado breve. A prova matemática completa não é aquela passível de ser traduzida a um programa de computador. Prova completa*

significa, simplesmente, prova suficientemente detalhada para convencer o público a que ela se dirige – um grupo de profissionais com treinamento e modo de pensar semelhantes ao do autor."(DAVIS; HERSH, 1988, p. 79).

No entanto, ainda nessa direção, a boa demonstração, segundo BLANCHÉ (1987), é aquela que o aluno compreende. No entanto, lembramos que o professor não deve restringir uma abordagem ao nível de compreensão mínimo do aluno. Afinal, os elementos que fogem ao domínio dos alunos em certo momento podem ser os desencadeadores de avanços futuros ou, sob a ótica da teoria piagetiana, os responsáveis por uma ampliação das estruturas cognitivas.

No quarto e último período do desenvolvimento cognitivo, o *operatório formal,* as operações são aplicadas não somente a objetos concretos, mas também, a hipóteses formuladas em palavras; "[...]o sujeito consegue libertar-se do concreto e situar o real num conjunto de transformações possíveis." (PIAGET, 1995, p. 111). A transformação pela qual passa o pensamento possibilita o manejo das hipóteses e o raciocínio sobre proposições destacadas da constatação concreta e atual. O indivíduo então possui capacidade de formalização do raciocínio, no sentido de que pode combinar proposições e conceitos além do que existe na sua realidade.

Há ainda uma diferenciação feita pelo indivíduo entre *forma* e *conteúdo*, o que o torna "[...] capaz de inferir as conseqüências necessárias de verdades simplesmente possíveis o que constitui o início do pensamento hipotético-dedutivo ou formal." *(Id., ibid.*, p.113).

Piaget serviu-se de estruturas formais da matemática e da lógica para descrever as ações do indivíduo nas várias fases do desenvolvimento cognitivo que ele estudou. E para fazer a descrição das operações do pensamento típicas do período operatório-formal reportou-se "[...] à lógica simbólica ou algorítmica moderna, muito mais próxima do trabalho real do pensamento que a silogística de Aristóteles."(*Id.*, *ibid.*, p. 114). Segundo ele,

> *um sistema de proposições admite duas espécies de estruturas: as ligações internas entre os termos contidos na proposição e as ligações externas entre as próprias proposições. Se chamarmos de 'operações' às atividades intelectuais que compõem ou decompõem tais ligações, podemos então considerar as estruturas lógicas como exprimindo as operações do pensamento. A lógica seria então [...] a teoria formal das operações do pensamento* (PIAGET, 1976, p. 9).

Em sua obra *Ensaio de Lógica Operatória*, ele expõe suas pretensões quanto a relacionar estruturas formais às estruturas do pensamento:

> *A preocupação dominante de Russell foi a redução da matemática à lógica. A da maioria dos lógicos matemáticos é a de garantir o rigor das axiomáticas e a de demonstrar a não-contradição dos sistemas. O autor do presente trabalho confessa que sua preocupação essencial [...] consiste em querer esclarecer o mecanismo real do pensamento [...] pela análise das estruturas formais correspondentes* (PIAGET, 1976, p. 24).

No entanto, uma das censuras feita a alguns de seus trabalhos é em relação ao fato de ter tomado a lógica clássica como modelo do pensamento formal. Segundo FREY, "[...] uma Lógica modal parece seguir mais de perto os comportamentos observados do que a Lógica proposicional clássica."(FREY apud DOLLE, 1978, p. 192)[2]. Além disso, ele acredita que "[...] as crianças, como os adultos, não utilizam nem unicamente nem inteiramente a Lógica proposicional clássica".(*Id., Ibid,* p. 192).

Um fato a ser mencionado quanto ao estudo do desenvolvimento do pensamento operatório formal feito por Jean Piaget e uma de suas colaboradoras, Barbel Inhelder, são algumas críticas quanto ao modo como se deu essa parceria, pois, enquanto Inhelder "[...] efetua pesquisas numa população de adolescentes de um estabelecimento secundário para apreender a passagem da lógica da criança à lógica do adolescente, do ponto de vista do raciocínio experimental [...] (Piaget) "teoriza" e formula de algum modo o aparelho

---

[2] A lógica modal é uma lógica não-clássica, no entanto, complementar da clássica. Ou seja, aos princípios desta última acrescentam-se operadores expressando os conceitos lógicos de necessidade, de possibilidade, de impossibilidade e de contingência.(DA COSTA, 1983).

susceptível de caracterizar o pensamento adolescente." (DOLLE, 1978, p. 168). Embora os dados empíricos coletados por Inhelder surpreendentemente tenham convergido para o que havia sido elaborado teoricamente por Piaget "[...]sempre se pode temer que os fatos correspondam por demais à teoria, na medida em que é sobretudo através dela que são interpretados." (*Id.*, *ibid.*, p. 168).

A descrição feita por Piaget e seus colaboradores do processo de desenvolvimento cognitivo humano mostra que a maneira como uma pessoa representa o mundo muda sistematicamente com o desenvolvimento, o que é de extrema relevância, quando se trata de educação.

Como pudemos perceber, nos níveis elementares do desenvolvimento cognitivo, o entendimento tem sua fonte na manipulação de objetos físicos. Mas, à medida em que o indivíduo se desenvolve, a construção dos novos conceitos tende a ser mental, não mais apoiada em tais objetos. E, a partir da manipulação(mental) desses conceitos, são construídas idéias matemáticas. (PIAGET; BETH, 1980).

E nessa fase, o papel do professor, criando situações que alimentem/estimulem o desenvolvimento, torna-se ainda mais importante que nas fases elementares, nas quais o desenvolvimento espontâneo precisa ser respeitado. Práticas educativas nas quais o aluno é reduzido a um receptor do conhecimento, que é transmitido pelo professor, além de menosprezar o uso que poderiam fazer do desenvolvimento espontâneo do indivíduo, podem inibi-lo.

Por isso, uma importante ação do professor, segundo PIAGET (1973), seria ele ser capaz de introduzir as noções gerais que ele normalmente só consegue conceber em sua própria linguagem, nos casos particulares dessas noções que os alunos constroem e utilizam, mas que não chegam a ser para estes objetos de reflexão e nem dão lugar a generalizações.

Por exemplo, em uma situação de ensino, de uma observação de casos particulares, pode-se passar, por meio de um processo indutivo, ao conhecimento de relações passíveis de generalização em matemática. Mas, em seguida, pode-se, a partir de uma discussão acerca desse tipo de procedimento, explorar o próprio desenvolvimento histórico dos métodos matemáticos, servir-se do conhecimento que os alunos têm desses métodos, discutindo-se sobre a natureza dos procedimentos dedutivos, percebendo sua dependência de uma lógica, ao contrário do que ocorre com os procedimentos indutivos, pelo menos em princípio.

Mas o que ocorre no ensino com maior freqüência é uma amostragem de exemplos particulares seguida da reprodução de uma série de demonstrações de resultados considerados importantes no âmbito do tema estudado, sem buscar atingir um nível de compreensão dos dois tipos de procedimentos em questão: os indutivos e os dedutivos. Mas para que isso seja viável é necessário que o professor tenha um certo esclarecimento sobre esses procedimentos.

Piaget sustenta que, para que seja possível uma aproximação entre as estruturas cognitivas do professor e as do aluno, seria necessário, primeiramente, ter em mente que "[...] a compreensão real de uma noção ou uma teoria supõe sua reinvenção pelo sujeito." (PIAGET, 1973, p. 225). Essa compreensão poderá ser detectada pela manifestação da capacidade de aplicar espontaneamente a novas situações o que foi aprendido, a que Piaget chama *generalização ativa*. Caberá então ao professor, organizar situações que incitem os alunos a investigar utilizando os mecanismos desenvolvidos e os conceitos aprendidos.

Disso tudo vemos que se mostra conveniente partir da necessidade de resolver situações e desenvolver modelos cuja compreensão esteja ao alcance dos alunos, sendo a formalização um processo posterior, a título de sistematização dos conhecimentos previamente adquiridos. De acordo com PIAGET (1976), a formalização é um processo que está apoiado nas estruturas que são elaboradas nos vários níveis e não um estado, como muitas vezes o ensino de matemática em escolas e universidades faz parecer.

Em matemática, a formalização está associada à busca de um processo mecânico. A função do símbolo é designar com precisão e clareza e abreviar. Quando se trata desses aspectos no ensino, processar não é o papel fundamental, mas compreender, pois só se pode abreviar aquilo que se compreendeu. Então, para que a simbologia seja útil ao aprendizado, o estudante precisa ser capaz de associar-lhe algum conceito ou imagem mental. Mais do que isso, é necessário que se construa primeiramente o conceito, para depois poder associar-lhe um símbolo que o represente.

Porém, essa capacidade de manipular símbolos, atribuindo-lhes significado ou não, dentre outras, é desenvolvida individualmente e de maneira singular, não surgindo em todos os indivíduos na mesma fase. O ambiente e os estímulos recebidos podem interferir. Tanto que é possível encontrar adolescentes com grande capacidade de abstração e compreensão de formalismos, e adultos incapazes de livrar-se do palpável ou de referir-se a ele.

3.3 A FORMAÇÃO E O PAPEL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

> Idealmente o ensino da matemática diz "venham, vamos raciocinar em conjunto". Porém, o que sai da boca do professor é muitas vezes "ouçam, digo-lhes que é assim".
>
> Davis e Hersh

VIANNA (1988), em seu estudo sobre o papel do raciocínio dedutivo no ensino da matemática, procura as causas para o seu declínio, buscando renovar e realçar esse tipo de raciocínio por meio de um caminho histórico da utilização de procedimentos desta natureza no ensino. Propõe o uso de desafios de natureza lógica para estimular o raciocínio dos alunos e dá exemplos nos quais, a seu ver, o dedutivo não aparece necessariamente ligado à matemática.

Na parte de seu trabalho em que trata do dedutivo em "[...] situações do dia-a-dia que podem ser aproveitadas em sala de aula e [...] inclusive, auxiliar o professor a apresentar algumas regras lógicas subjacentes a demonstrações matemáticas[...]" (VIANNA, 1988, p. 85-6), descreve a seguinte situação:

> *Outro dia eu estava em São Paulo, na Vila Mariana, com pressa de chegar à praça da Sé. Desci correndo as escadarias do Metrô até a plataforma para pegar o trem. Parei e fiquei pensando: qual trem vai passar primeiro, o do meu lado ou o do lado oposto? No meu lado, havia mais gente que no oposto esperando o trem, o que parecia um forte indício de que o trem do lado oposto passara por último. No entanto, quem sabe houvesse mais gente indo para a praça da Sé, o que justificaria meu lado estar mais cheio. Olhei para o relógio, vi que eram 18h e nesse horário sei que o fluxo de pessoas que se dirige do centro para os bairros é maior que o inverso. Concluí que o próximo trem me serviria e, para minha sorte, lá vinha ele chegando.*

Segundo a autora, ficou estabelecido um sistema de premissas e conclusão que pode ser chamado de dedução. Porém, "não parece reinar aqui tão fortemente a 'necessidade' que se verifica em deduções lógico-matemáticas." (VIANNA, 1988, p. 87). Apesar disso, tais situações podem ser de grande proveito para resgatar o ensino do dedutivo não se restringindo à reprodução de demonstrações.

Mas no exemplo exposto, há a presença de argumentos indutivos e talvez até falaciosos. Se o trem do lado oposto chegasse primeiro em função de um atraso do trem do lado em que a pessoa se encontrava, ou se houvesse mais trens em um sentido que no outro, o quê dizer da conclusão a que se chegou? Os argumentos apresentados cairiam por terra. Mas não é a dedução um processo seguro? Assim, em uma situação como essa, além de explorar processos de argumentação utilizados (que não se reduzem a deduções), pode-se chamar a atenção para os possíveis procedimentos a serem empregados para se chegar à conclusão apresentada, evidenciando as diferenças entre deduções, induções e puro acaso.

Tais narrativas de situações cotidianas, além de se constituírem em sistemas nos quais muitos fatores podem intervir, podem ter vários fatores isolados sem que se tenha consciência disso. Isso pode acontecer em muitos outros casos nos quais se utiliza procedimentos indutivos, como é o caso de muitas investigações em física. As restrições impostas pelos procedimentos utilizados e pela própria realidade na qual se insere um fenômeno investigado podem ser algo interessante para ser discutido com os estudantes.

Situações como essa podem ser de grande proveito para estimular o sentido crítico quanto aos argumentos comumente utilizados e aos resultados obtidos por meio do emprego desses procedimentos.

VIANNA (1988), no decorrer da realização de seu estudo que incluiu a aplicação de alguns questionários a professores de matemática, percebeu algumas contradições nos relatos desses professores, devido à presença de "frases feitas" utilizadas por eles quando alegavam por que não consideravam uma abordagem dedutiva em suas atividades de ensino. Tais frases revelavam uma certa ingenuidade para com a questão. Em muitos casos, os professores argumentavam que quem não gostava do ensino dedutivo eram os alunos. Alguns professores achavam tal abordagem de conteúdos muito "certinha" ou, ainda, alegavam que os alunos tinham preguiça de pensar. No entanto, "[...] quem parece primeiro não compreender a Matemática dedutiva é o próprio professor" (*Id., ibid.*, p. 22).

VIANNA (1988), toma o Movimento da Matemática Moderna como referencial para uma análise de como o dedutivo foi empregado no ensino. Antes desse movimento, a presença de demonstrações, principalmente no ensino de geometria euclidiana, era marcante. O dedutivo era enfatizado e, de acordo com alguns professores que lecionavam naquela época e que foram consultados para a sua pesquisa, assim deveria ter continuado até hoje. Mas, após revelado o insucesso do referido movimento, houve uma tendência a ensinar a matemática pelo seu caráter prático, sendo ainda identificada no ensino atual. Além disso, pode-se perceber um crescente interesse em promover um ensino no qual o aluno participe como agente na construção de seus conhecimentos e não como mero receptor.

Em uma perspectiva construtivista de aprendizagem, as ações do sujeito que conhece são fundamentais e devem ser valorizadas, mas não devem ser induzidas como no ensino tradicional. Nessa perspectiva "só a ação espontânea do sujeito, ou apenas nele desencadeada, tem sentido..."(MACEDO, 1994, p. 19). Embora não exista um modelo para a exploração ou para a reprodução de situações a fim de se obter um resultado esperado (pois não se valoriza a repetição de processos), o professor precisa atuar sempre com uma hipótese de trabalho, respeitando e aproveitando a espontaneidade das ações do aluno, ressalta Macedo.

Nesse contexto, ainda de acordo com MACEDO (1994), o conhecimento não pode ser "transmitido" do educador para o aprendiz por meio da linguagem, nem deve ser apresentado sistematizado e formalizado. Embora a linguagem desempenhe um importante papel, ele não é o fundamental. As explicações verbais, a reprodução, os exercícios, devem ser tratados de modo que tenham sentido e importância para o aluno no estágio de desenvolvimento no qual ele se encontra

Quando se adota uma posição na qual os entes matemáticos existem independentemente do sujeito, então, poder-se-ia reduzir o ensino à simples transmissão das verdades matemáticas ao aluno, não se preocupando com as idéias espontâneas do mesmo. Mas essa posição não parece aceitável a muitos educadores e também a Piaget.

Em oposição a essa concepção, ele considera que existe uma construção espontânea e gradual de estruturas, conforme visto, por parte do indivíduo, que lhe permite elaborar conceitos e progredir no processo individual de desenvolvimento cognitivo. O estudo dessas estruturas e seus mecanismos de formação dá-se no campo da psicologia e, segundo Piaget, se os conhecimentos dos educadores acerca desses temas fossem maiores, isto poderia auxiliá-los no seu trabalho, simplificando-o e, o que é mais importante, "[...] favorecendo a aparição de vocações criadoras em vez de converter os alunos em meros receptores conformistas." (PIAGET, 1973, p. 220).

No ensino de matemática, comumente, espera-se que todo o conhecimento construído pelo aluno desde as séries iniciais auxilie na compreensão dos conteúdos comuns às demais séries. Mas, antes é necessário verificar se houve de fato essa construção pelo aluno. Supor a sua existência sem assegurar-se da veracidade dessa suposição tem sido uma atitude comum e muito prejudicial no ensino.

Disso tudo temos que, ao se tratar da formação de professores, além do processo de aprendizagem pelo qual estes profissionais passam no decorrer dos cursos de licenciatura, o estudo de como se pode aprender também é fundamental. Para o educador, conhecer formas de como pode ocorrer o processo de aprendizagem, bem como possibilidades de interferir nesse processo, a fim de obter resultados cada vez mais significativos, é uma necessidade. É inegável a contribuição que áreas como a psicologia têm fornecido para a fundamentação da prática educativa. Provavelmente, devido a isso, encontram-se, geralmente, nos currículos de cursos de licenciatura, disciplinas como *Psicologia da Educação* (FARIA, 1996), nas quais se trata de questões sobre aprendizagem e desenvolvimento humanos.

Mas os estudos e comprovações apontadas pelas teorias psicológicas não podem fornecer receitas para programar a intervenção pedagógica. Não se pode padronizar, para fins de avaliação, tipos de raciocínio, manifestações do pensamento, ou reduzir a aprendizagem "[...] a uma simples inscrição em estruturas *a priori* [...] [pois elas] baseiam-se em um processo de assimilação ativa, que carrega em si mesmo conflitos, erros e reformulações, os quais acabam tornando imprevisíveis e não-padronizáveis tanto os procedimentos de resolução de problemas como a efetiva passagem de um nível estrutural de conhecimento a outro."(LAJONQUIÈRE, 1992, p. 62-3).

Porém, vimos que, assim como nas demonstrações existe uma lógica subjacente, por trás do raciocínio empregado para a compreensão das mesmas existem estruturas cognitivas que permitem ao ser humano raciocinar e resolver problemas por meio de ações interiorizadas, não presas aos objetos físicos e que fazem parte do processo de aprendizagem. É possível que o professor, conhecendo algo sobre como se dá a formação e o funcionamento dessas estruturas, possa orientar os alunos a partir das manifestações destes e perceber de que modo uma determinada metodologia ou procedimento de estudo podem estar ajudando-os na construção de conceitos e na aprendizagem da matemática. E, principalmente, de que maneira os procedimentos dedutivos e indutivos podem estar sendo estudados e empregados, a fim de propiciar uma aprendizagem satisfatória.

3.4 ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS DA OBRA PIAGETIANA E SUA INFLUÊNCIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

> A orientação que se pretenda dar à educação matemática depende, naturalmente, da interpretação que se aceita para a formação psicológica ou para a aquisição das operações e das estruturas lógico-matemáticas.
>
> Piaget

Em 1952, Piaget participou de um colóquio na França consagrado ao estudo das estruturas matemáticas e psicológicas, no qual expôs seus estudos sobre essas últimas. Na mesma ocasião, o matemático Jean Dieudonné falou sobre as estruturas matemáticas caracterizadas pelo grupo Bourbaki (algébricas, de ordem e topológicas). A partir desse evento, acreditou-se que ganhou corpo e forma "[...] a correspondência existente entre *as estruturas matemáticas* e as *estruturas operatórias da inteligência*."(SANGIORGI, 1964, p. 77). Além disso, tal encontro foi tido como uma das atividades fundamentais para a reestruturação do ensino da matemática nas bases da "matemática moderna", anteriormente mencionada.

A partir do nível operatório concreto do desenvolvimento cognitivo, podemos encontrar, segundo PIAGET (1973), uma equivalência entre as "estruturas-mães" do grupo Bourbaki e estruturas cognitivas típicas do indivíduo. Por exemplo, a presença de uma ação reversível está relacionada às estruturas algébricas. Noções como a de entrar e sair sendo vistas como inversas são exemplos que manifestam a existência de tal tipo de estruturas. A capacidade de estabelecer comparações entre objetos, pessoas ou situações, sugere a existência das estruturas de ordem. Identificar o quente e o frio, o claro e o escuro são exemplos de ações ligadas a tais estruturas. E, por fim, a percepção de limites que sugerem um certo domínio de um espaço, revela a presença das estruturas topológicas.

Em entrevista relatada em BRINGUIER (1978), Piaget alega que o objetivo de sua participação no colóquio de 1952, mencionado inicialmente, era somente tratar da comparação das estruturas mentais do homem com as estruturas matemáticas, sem referir-se a procedimento de ensino algum. Mas ele não nega que seus estudos poderiam vir a servir de apoio aos educadores: "No que concerne à matemática moderna, ensinada às crianças, há uma convergência admirável com o que nós temos encontrado do ponto de vista psicológico. E nessa situação, pode haver aplicação direta."(*Id.*, *ibid.*, p. 182).

Mas, após esse colóquio, vários outros aconteceram nos anos seguintes e, em 1954, como conseqüência destes encontros, foi fundada a Comissão Nacional para o Estudo e o Aprimoramento do Ensino da Matemática, da qual faziam parte, além de Piaget e Dieudonné, o matemático Lichnerowicz e o lógico E. Beth, dentre outros.

Com o movimento da matemática moderna no ensino, aquilo que deveria ser ensinado às crianças, bem como os métodos de abordagem, passariam por uma reformulação, evidenciando as estruturas mentais que estão em correspondência com as estruturas matemáticas apresentadas pelo Grupo Bourbaki. Ao relacionar tais estruturas matemáticas com as psicológicas, acreditava-se que se poderia, então "[...] usar a linguagem que a estrutura mental da criança queria ouvir." (SANGIORGI, 1964, p. 77).

"Nicolas Bourbaki" é o pseudônimo dado a um grupo de matemáticos formado na França, após a Primeira Guerra Mundial, cujo propósito inicial era escrever um livro que abrangesse as principais idéias da matemática moderna, de maneira que fosse possível delinear o que seriam as bases essenciais da matemática. "Desse modo, buscou no âmbito das teorias matemáticas já amadurecidas os conceitos que poderiam ser sistematizados em forma logicamente coerente de modo a torná-los facilmente utilizáveis (pelos matemáticos)."(KRAUSE, 1987, p. 79-80).

Jean Dieudonné foi um dos fundadores do grupo e retirou-se dele quando havia atingido a idade de 50 anos (o que era norma do grupo), depois de quase duas décadas de atividades no mesmo. Sua saída ocorreu por volta de 1955 (HALMOS, 1957). Entretanto, o fato de o Grupo Bourbaki não ter tratado de questões referentes ao ensino de matemática, não impede que alguns de seus membros (ou ex-membros) o tenham feito independentemente, o que ocorreu com Dieudonné.

O resultado do estudo realizado por Piaget juntamente com Inhelder sobre o desenvolvimento do pensamento operatório formal, mencionado anteriormente, foi publicado em 1955,[3] o que nos sugere que Piaget pode ter elaborado sua teoria no período em que manteve contato com Dieudonné, Weil e outros matemáticos e lógicos, no auge das discussões sobre o ensino da matemática moderna. A partir disso, pode-se buscar compreender a origem do apego de Piaget a modelos formais da lógica clássica para a descrição do pensamento característico do indivíduo no período operatório formal.

Porém, assim como os trabalhos de Piaget desenvolvidos até então, as estruturas matemáticas das quais falou Dieudonné também não haviam sido elaboradas com a finalidade de utilizá-las no ensino. Haveria a necessidade de um estudo mais aprofundado quanto à aplicação dessas idéias no contexto escolar e, principalmente, quanto à preparação dos educadores para trabalhar com as inovações decorrentes de tais estudos. O revelado despreparo desses profissionais foi um dos principais responsáveis pelo fracasso desse movimento no ensino, que entrou para a história como um lamentável ocorrido, sob vários aspectos, o que se pode verificar em KLINE (1976). Além disso, mostrou a necessidade de se planejar cuidadosamente as inovações que são propostas no ensino, principalmente no que diz respeito à capacitação de professores. E aquilo que, pelo menos idealmente, deveria ser um grande avanço no ensino de matemática, contribuiu para deixar às gerações posteriores uma cultura de aversão a aspectos abstratos, dedutivos e formais da matemática.

O problema do despreparo dos professores ainda existe no contexto educacional atual. Mas conforme (USISKIN, 1994, p. 25), "não podemos esperar que os professores da escola elementar ministrem um programa de matemática diversificado e amplo se, na faculdade, fizeram apenas um curso de ensino de aritmética."

Por isso, é preciso ter como uma das prioridades, neste momento de redimensionamento do ensino de matemática, a partir das novas diretrizes inicialmente

---

[3] Sob o título *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent.* Paris: P U F, 1955.

abordadas, a preparação do professor, pois possivelmente, será ele o principal responsável pelo sucesso ou não das atuais propostas.

3.5 O PROJETO PEDAGÓGICO E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

> Embora a noção de projeto pedagógico incite, por si, a uma proposta globalizante, é prudente delimitar, para saber o chão concreto em que pisamos e o caminho que é viável abrir e seguir.
>
> P.Demo

Embora os recentes documentos consultados que fornece diretrizes para o ensino[4] e, indiretamente, para a formação de professores de matemática que atuarão nesse ensino, sugiram que o aluno adquira a capacidade de utilizar e distinguir raciocínios dedutivos e indutivos, saiba criar estratégias de comprovação, de justificativa e de argumentação, eles não explicitam ao professor como ele irá desenvolver essas capacidades no aluno, para que ele simplesmente não decore demonstrações em matemática e nem tenha como ineficientes os procedimentos indutivos e as comprovações experimentais.

Os possíveis modos de proceder a fim de promover um ensino de acordo com as referidas diretrizes, em geral, ficam a cargo do professor. Mas, antes disso, eles precisam ser discutidos, planejados e explicitados no projeto pedagógico.

Como podemos ver em DEMO (1996), o projeto pedagógico é um instrumento norteador das atividades e objetivos do ensino, e deve colaborar na tarefa de formação do indivíduo cidadão incumbida à escola e à universidade. Trata-se de um documento no qual se deve, entre outras coisas, listar disciplinas a serem ofertadas nos cursos, cuidar da compreensão histórica dos conteúdos a serem ensinados nessas disciplinas, planejar formas

---

[4] Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.

de trabalho, de avaliação, explicitar os objetivos que se pretende alcançar, além de traçar o perfil do aluno que se deseja formar. Enfim, em um projeto dessa natureza, é necessário "[...] delimitar o que se quer fazer, onde se imagina chegar, o que se busca mudar, bem como o que não é o caso fazer." (DEMO, 1996, p. 59). Para isso, o empenho e a competência dos professores é fundamental. Tanto no que se refere ao conhecimento do conteúdo de alguma área específica, nesse caso, a matemática, como ao conhecimento de metodologias por meio das quais esse conteúdo poderá ser ensinado.

Em um curso de graduação em matemática que contemple as modalidades bacharelado e licenciatura, há que se delimitar os objetivos, identificar e procurar suprir as necessidades específicas de cada uma dessas modalidades. E embora a formação de licenciados e bacharéis demande ações diferenciadas sob diversos aspectos, não se pode esquecer que muitos bacharéis tornam-se docentes do ensino superior e, não raro, em cursos de licenciatura. Ensinam a futuros professores do ensino fundamental e médio, tendo, às vezes, pouco esclarecimento sobre a capacitação necessária e adequada a esses profissionais. Porém, isso não significa que bacharéis devam ter a mesma formação didático-pedagógica que licenciados. Já no caso de um curso de licenciatura, deve-se planejar um ensino que, conforme salienta DEMO (1996), não se reduza à capacitação técnica, tornando pequeno o compromisso pedagógico-formativo da educação. Eis um ponto que precisa ser discutido e considerado na elaboração do projeto pedagógico de um curso de matemática que forma licenciados e bacharéis, pois, um ensino comumente ofertado a estes não é suficiente nem adequado àqueles.

Em um curso de licenciatura em matemática, é importante que se tenha claro o modo como aquilo que se ensina poderá estar favorecendo uma melhor compreensão do futuro professor daquilo que ele virá a ensinar. O que não equivale a dizer que ele precisa aprender na universidade somente aquilo que vai ensinar, embora uma das questões comumente feitas por licenciandos seja: 'por que tenho que estudar certos conteúdos difíceis e incompreensíveis se não é isso que vou ensinar no nível fundamental ou médio?'

E talvez não seria um absurdo afirmar que muitos professores que atuam nos cursos de licenciatura não ofereceriam respostas razoáveis a uma questão como essa. O que também não seria um absurdo, pois nem todos que lecionam no terceiro grau são ou devem ser, especialistas em ensino básico. Eis porque é importante e necessária uma discussão entre os professores que possuem maior familiaridade com as especificidades do ensino básico e aqueles cujo conhecimento sobre a ciência que os licenciandos vão ensinar é mais amplo, quando se buscam indicadores para a elaboração de um projeto pedagógico.

Vale lembrar que a apresentação do projeto pedagógico foi uma das solicitações do Ministério da Educação aos cursos de graduação que foram avaliados pelo Exame Nacional de Cursos.

4

PESQUISA DOCUMENTAL

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Levando em conta a discussão acerca de procedimentos dedutivos e indutivos feita até então, decidimos por investigar o projeto pedagógico de um curso de licenciatura em matemática para identificar se tais procedimentos são considerados e como o são, optando pela pesquisa documental. O curso de matemática da Universidade Federal do Paraná foi o escolhido para a referida análise.

No entanto, nossa intenção inicial revelou-se inviável em função da inexistência de um tal projeto para o curso escolhido. Apesar disso, optamos por realizar a análise planejada, embora nos restringindo aos documentos disponíveis.

4.2 O CURSO ANALISADO

O curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Paraná, apesar de poder servir de referência para os demais existentes no Estado por ter obtido conceito A no Exame Nacional de Cursos de 1998 e 1999, encontra-se em fase de reestruturação curricular[1] e procura reunir esforços para a execução da mesma. O que se mostra necessário, devido também a vários desajustes que podem ser detectados no

---

[1] Principalmente devido à criação de um novo curso, *matemática industrial*, que será ofertado a partir do ano 2000.

atendimento às especificidades de cada uma das duas modalidades do curso que a instituição oferece: a licenciatura e o bacharelado.

O curso é ofertado nos turnos da tarde e da noite. A periodização recomendada para a realização do mesmo é de 4 anos para uma das modalidades ou 5 anos para as duas. Seu funcionamento é em regime anual, havendo algumas poucas disciplinas semestrais, entre optativas e específicas de alguma das modalidades.

No decorrer dele, licenciandos e bacharelandos cursam em uma mesma turma uma série de disciplinas comuns. O que pode gerar deficiências na formação dos graduandos, em especial quando se trata de enfocar conteúdos e objetivos importantes para o futuro professor do ensino fundamental e médio, o que acaba sendo difícil, por não constituir interesse da outra modalidade.

Segundo consulta ao então Coordenador do Curso, a documentação existente e disponível para a análise, e que fornece diretrizes para o trabalho dos professores, seriam, em princípio, os programas das disciplinas que compõem a grade curricular, dos quais poderíamos obter fotocópias nos Departamentos que as ofertam. Quanto às avaliações, os professores são orientados a proceder de acordo com a resolução 37/97 do Conselho de Ensino e Pesquisa, cujas normas gerais de avaliação estabelecem que "a aprovação em disciplina dependerá do resultado das avaliações realizadas ao longo do período letivo, segundo critérios de formas e valores previstos no plano de ensino divulgado aos alunos no início do período letivo[...]"(UFPR, 1997, p. 64).

Após consultarmos a grade curricular do curso de matemática, selecionamos, dentre as 22 (vinte e duas) disciplinas obrigatórias da modalidade licenciatura, as que são ofertadas pelos Departamentos de Matemática, Desenho e Física. Tal seleção deveu-se ao fato de *procedimentos dedutivos e indutivos* não aparecerem, explicitamente, como objeto central de estudo daquelas disciplinas que tratam especificamente de aspectos didáticopedagógicos da formação do professor, e que estão locadas em outros Departamentos que ofertam disciplinas para o curso.

Quadro 1 – QUADRO DAS DISCIPLINAS OBRIGATÓRIAS DA MODALIDADE LICENCIATURA OFERTADAS PELOS DEPARTAMENTOS DE MATEMÁTICA, DESENHO E FÍSICA.

ANO	NOME DA DISCIPLINA	DEPARTAMENTO
1^0.	Fundamentos da Matemática C	Matemática
1^0.	Cálculo Diferencial e Integral C	Matemática
1^0.	Geometria Analítica A	Matemática
2^0.	Cálculo Diferencial D	Matemática
2^0.	Álgebra Linear A	Matemática
2^0.	Desenho Geométrico A*	Desenho
2^0.	Física Geral A	Física
3^0.	Análise Matemática A	Matemática
3^0.	Álgebra A	Matemática
3^0.	Tópicos de História da Matemática I*	Matemática
3^0	Elementos de Geometria*	Desenho
4^0.	Fundamentos da Matemática D	Matemática
4^0.	Fundamentos da Matemática Elementar A *	Matemática
4^0.	Geometria Descritiva A*	Desenho
4^0.	Física Geral B	Física

Fonte: Grade curricular do curso de matemática da UFPR fornecida pela Coordenação do Curso.

* Disciplinas exclusivas da licenciatura. As demais são comuns também ao bacharelado.

4.3 ORGANIZAÇÃO DOS DADOS E PLANEJAMENTO DA ANÁLISE

Selecionadas as disciplinas a serem analisadas, recorremos então aos referidos Departamentos obtendo fotocópias da documentação disponível sobre as mesmas. A primeira constatação feita foi que os documentos dos três Departamentos não possuem todos o mesmo formato, havendo variações na quantidade de informações contidas e também na natureza das mesmas.

Os documentos postos à disposição pelo Departamento de Matemática são o que se pode chamar de "programas das disciplinas", nos quais não são explicitados, por exemplo, os procedimentos didáticos a serem adotados e as competências que se espera que o aluno desenvolva. O que nos sugere que as estratégias de ensino e as possíveis formas de tratamento de questões específicas de interesse da licenciatura ou do bacharelado ficam a cargo do professor que lecionar a disciplina.

Já no caso do Departamento de Desenho, a documentação disponível compreende "planos de ensino", nos quais constam os itens ausentes nos programas do Departamento de Matemática. Além disso, para cada plano de ensino há um professor responsável.

Quanto ao Departamento de Física, os dois documentos disponibilizados assemelham-se aos do Departamento de Matemática.

Tais programas e planos de ensino foram os vigentes no ano de 1999[2].

No caso do Departamento de Matemática, há uma ressalva a fazer quanto ao documento referente às disciplinas *Tópicos de História da Matemática I* e *Fundamentos da Matemática Elementar A*. Até alguns anos atrás, tais disciplinas constituíam uma só. No entanto, os programas e/ou planos de ensino de cada uma não estavam disponíveis no

---

[2] Com exceção da documentação referente às disciplinas *Tópicos de História da Matemática I* e *Fundamentos da Matemática Elementar A*, sobre a qual falaremos na sequência.

Departamento. A documentação que nos foi fornecida foi o programa da disciplina que anteriormente englobava as duas. Como a informação que recebemos foi que houve apenas uma divisão da antiga disciplina, sem maiores alterações, pelo menos em princípio, optamos por analisar esse programa.

Para realizarmos a análise documental (LÜDKE; ANDRÉ, 1986; BRUYNE, 1991; LAKATOS, 1991), propriamente dita, do material coletado, recorremos à metodologia de análise de conteúdo. As unidades de análise (LÜDKE; ANDRÉ, 1986) escolhidas foram os seguintes itens de cada documento: *Programa* (conteúdos de ensino) e *Objetivos* (competências que se espera do aluno).

As categorias nas quais foram enquadradas as disciplinas analisadas, de acordo com as informações presentes em seus respectivos programas ou planos de ensino foram:

I. consideram procedimentos dedutivos explicitamente no seu *Programa;*

II. consideram procedimentos indutivos explicitamente no seu *Programa;*

III. consideram procedimentos dedutivos e indutivos implicitamente entre seus *Objetivos.*

Sendo a matemática uma ciência considerada dedutiva, intimamente ligada à lógica, poderíamos concluir que tais procedimentos são considerados explícita ou implicitamente no *Programa* de praticamente todas as disciplinas selecionadas. Nesse caso, a simples presença da palavra "teorema" em alguma das unidades de análise, por exemplo, já indicaria a consideração de procedimentos dedutivos. Mas isso não atenderia ao propósito de nossa pesquisa, que não é identificar o simples emprego ou não, de procedimentos dedutivos ou indutivos, mas sim, identificar alguma proposta de discussão sobre tais procedimentos, incluindo a relevância dessa discussão para a formação do professor.

Acreditamos que os tópicos que destacamos das unidades de análise e expomos no próximo item possibilitem tal identificação.

No caso da unidade de análise *Objetivos* a presença dos procedimentos dedutivos e indutivos é considerada implicitamente devido ao modo amplo como são delimitados esses objetivos.

A partir dessas considerações, partimos para a apresentação do resultado da análise documental.

4.4 APRESENTAÇÃO DO RESULTADO DA ANÁLISE

Na categoria I enquadram-se as seguintes disciplinas, acompanhadas dos conteúdos que sugerem haver uma consideração explícita de uma discussão sobre procedimentos dedutivos em seu *Programa*:

Fundamentos da Matemática C: *Noções sobre o método axiomático; Noções sobre demonstrações.*

Fundamentos da Matemática D: *Sistemas axiomáticos; O papel da lógica subjacente.*

História da Matemática e Fundamentos da Matemática Elementar: *Euclides e os "Elementos"; Análise de um ponto de vista superior dos conceitos que constam nos programas de 1º e 2º graus, em particular das definições, enunciados e demonstrações; Os vários tratamentos para o estudo da geometria elementar: conveniência ou não de um estudo axiomático.*

Na categoria II enquadra-se a seguinte disciplina, acompanhada dos conteúdos que sugerem haver uma consideração explícita de procedimentos indutivos em seu *Programa*:

Fundamentos da Matemática D*: Ciências formais e Ciências empíricas; argumentos indutivos e o seu papel na ciência.*

Na categoria III enquadram-se as seguintes disciplinas, acompanhadas das afirmações que sugerem haver uma consideração implícita de procedimentos dedutivos e indutivos entre seus *Objetivos*:

Desenho Geométrico A: *O aluno deverá ser capaz de desenvolver o raciocínio lógico.*

Elementos de Geometria*: O aluno deverá ser capaz de resolver e justificar as soluções de problemas de desenho geométrico e Geometria descritiva, além de adquirir raciocínio lógico e conhecimento teórico de Geometria Euclidiana.*

4.5 COLOCAÇÕES ACERCA DO RESULTADO DA ANÁLISE

No caso da unidade de análise *Programa*, destacamos, como se pôde notar, alguns conteúdos que sugerem uma consideração explícita dos referidos procedimentos. Mas, o que tomamos como "explicitação" pode carecer de algumas explicações adicionais. Por exemplo, na antiga disciplina História da Matemática e Fundamentos da Matemática Elementar, o item *Euclides e os "Elementos"* sugere a possibilidade de tratamento dos procedimentos dedutivos e indutivos. Mas, se não for esclarecido, em algum outro momento, que nesse item serão discutidos, entre outras coisas, os modos como Euclides elaborou suas demonstrações, fica difícil garantir que uma discussão sobre procedimentos dedutivos e/ou indutivos será promovida. Nesse caso, poder-se-ia enfocar aspectos históricos dos *Elementos*, sem se ocupar das particularidades dos métodos de prova utilizados nessa obra, por exemplo. Analogamente podendo ocorrer com o item *Conjuntos indutivos*, presente no *Programa* da disciplina Fundamentos da Matemática C, que não trata da "indução" no sentido que expomos neste estudo.

Tais colocações mostram que a análise que fizemos não abrangeu ou esgotou todas as possibilidades de consideração da discussão dos procedimentos dedutivos e indutivos que podem ser sugeridas pela documentação analisada.

Além disso, teve como finalidade identificar e não questionar os modos como são considerados os procedimentos dedutivos e indutivos. Mesmo porque, para um tal questionamento seriam necessárias informações além daquelas presentes nos documentos levantados, e uma abordagem teórica que não se limitaria a que foi realizada neste estudo.

No entanto, a análise dos documentos trouxe à tona certos pontos que consideramos relevantes e que merecem atenção, podendo até ser aprofundados com vistas a contribuir no estabelecimento de diretrizes para a estruturação do projeto pedagógico do curso de licenciatura analisado.

No caso dos programas do Departamento de Matemática, havendo a ausência de informações como objetivos a serem alcançados, estratégias de ensino e de avaliação, não há explicitação quanto ao papel que seus conteúdos e, em especial ,os procedimentos que enfocamos, possam ter para a formação do professor.

Mesmo nas disciplinas específicas da licenciatura, nas quais os procedimentos dedutivos e indutivos são considerados de alguma forma, eles não figuram objetivando uma preparação do futuro professor para o tratamento desses procedimentos em sua atuação profissional, com exceção do programa da antiga disciplina *História da Matemática e Fundamentos da Matemática Elementar*.

Nas demais disciplinas, não foram identificados itens nos quais algum tipo de consideração de procedimentos dedutivos e/ou indutivos estivesse presente explicitamente. No entanto, disciplinas como Física Geral A e Física Geral B, poderiam favorecer uma discussão sobre tais procedimentos. O que poderia ser promovido a partir da abordagem de alguns tópicos dos capítulos anteriores como, por exemplo, a axiomatização de teorias da física e algumas particularidades desse empreendimento, como o acordo que deve haver entre os axiomas escolhidos e a evidência experimental, salientado por DALLA CHIARA e TORALDO DI FRANCIA (1979). Tópicos como este podem constituir interessantes pontos a serem discutidos em tais disciplinas, principalmente em comparação com o que ocorre em matemática.

Outro ponto a ser mencionado é que os procedimentos dedutivos são contemplados e, ao que parece, em níveis de aprofundamento diferenciados. Como, por exemplo, nas disciplinas Fundamentos da Matemática C, Fundamentos da Matemática D e História da Matemática e Fundamentos da Matemática Elementar, as quais apresentam, respectivamente os seguintes conteúdos em seu *Programa*: *Noções sobre o método axiomático*, *Sistemas axiomáticos* e *Conveniência ou não de um estudo axiomático* (entre os tratamentos propostos para o estudo de geometria elementar). No entanto, se esses supostos níveis de aprofundamento não forem explicitados, o que pode acontecer é uma repetição em uma disciplina daquilo que foi ensinado em outra. Principalmente se for um mesmo professor que leciona mais de uma delas.

A partir dos resultados dessa análise, percebemos que é possível que algumas deficiências na formação do licenciando no que diz respeito à compreensão que lhes parece faltar acerca das demonstrações, podem estar ocorrendo, em boa parte, devido à ausência de diretrizes explícitas quanto ao papel que podem ter, para cada uma das modalidades, os conteúdos presentes nos programas das disciplinas do curso, bem como à importância de uma discussão que faça o aluno tomar consciência dos procedimentos que ele comumente utiliza. Tais diretrizes deveriam estar previstas no projeto pedagógico do curso e ser do conhecimento dos professores que nele lecionam.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O encaminhamento deste estudo deu-se tendo como pressuposto a necessidade de discussões acerca das demonstrações e da relevância do estudo dessas em cursos de licenciatura. Isso em função dos resultados de recentes avaliações do ensino e da aprendizagem de matemática, como o Exame Nacional de Cursos de 1998, que mostram a falta, nos futuros professores, de certas competências matemáticas consideradas importantes pelos novos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino dessa disciplina, nos níveis fundamental e médio, e pelas diretrizes de avaliação do próprio Exame Nacional de Cursos.

Além de abordarmos a evolução da própria noção de demonstração e seu papel no âmbito da matemática, contemplamos o papel dos procedimentos indutivos comumente utilizados em outras áreas do conhecimento, em especial, nas ciências empíricas. Buscamos também, relacionar esses dois tipos de procedimento com o ensino de matemática nos níveis fundamental, médio e superior.

Tendo como referência a teoria psicogenética piagetiana, vimos como o emprego, pelo indivíduo, de certos tipos de procedimentos pode estar caracterizando formas de raciocínio nos diferentes estágios do seu desenvolvimento cognitivo. Vimos também que a maneira e o momento em que são abordados certos conteúdos no ensino podem desempenhar um papel determinante no favorecimento da aprendizagem de matemática e do desenvolvimento de um raciocínio hipotético-dedutivo.

Na sequência, por meio de uma análise documental, identificamos, em disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná, procedimentos dedutivos e indutivos figurando entre os conteúdos a serem ensinados e, implicitamente, entre as competências esperadas dos alunos. Mas a ausência de um projeto pedagógico dificultou a percepção da relevância que uma discussão desses procedimentos pode ter em tal curso.

Deste modo, a partir do que analisamos nos dados e na literatura apresentamos as seguintes considerações finais:

- Um estudo, por parte dos licenciandos em matemática, sobre procedimentos indutivos além dos dedutivos, sobre sua distinção e relevância para o desenvolvimento das ciências, pode desempenhar um papel importante na formação do professor, principalmente, ajudando-o a entender o processo de formação do conhecimento matemático e das ciências empíricas.
- O estudo descrito acima, associado a tópicos relativos ao desenvolvimento cognitivo do indivíduo, comumente abordados em alguma disciplina de um curso de licenciatura, pode contribuir para a compreensão das etapas de raciocínio pelas quais pode passar o aluno, até ser capaz de compreender e elaborar uma demonstração. Isso pode ajudar no esclarecimento dos futuros professores, de como poderão estar favorecendo a aprendizagem de matemática e a aquisição de habilidades como a de distinguir raciocínios corretos de falaciosos, desenvolvendo assim o senso crítico.
- Várias são as formas possíveis de abordagem de um conteúdo matemático, em especial, as demonstrações. Em diversas disciplinas, e por meio de várias metodologias. Elas podem ser estudadas, por exemplo, a partir do desenho geométrico, de disciplinas que abordem tópicos de lógica, de história da matemática e, até mesmo, de disciplinas que tratem do desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Por isso, é necessário um projeto pedagógico para um curso que forma professores de matemática. Não somente como uma

exigência do Ministério da Educação, mas para promover a integração entre as diversas disciplinas que compõem o currículo de um curso e desencadear ações voltadas para o aprimoramento da formação desses professores.

Longe de esgotarmos as possibilidades de discussão acerca do tema explorado, finalizamos o presente estudo que, mais do que ampliar a nossa compreensão, ainda consideravelmente limitada acerca dos assuntos abordados, suscitou algumas questões que expomos a seguir, e que poderiam ser investigadas na condição de complementares a este estudo ou não.

- Licenciandos em matemática estabelecem relações ou identificam diferenças entre procedimentos indutivos e dedutivos ?
- Em que sentido seria inadequado ou adequado considerar leis da lógica (clássica) para descrever as operações do pensamento do indivíduo?
- Existe, entre professores de matemática, a crença de que o ensino de demonstrações favorece o desenvolvimento de um raciocínio mais habilidoso e confiável? Se existir tal crença, como tais professores acreditam que pode ocorrer esse favorecimento?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 BALACHEFF, Nicolas. Preuve et demonstration en mathematiques au college. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 3, n. 3, p. 261-304, 1982.

2 BARKER, Stephen E. **Filosofia da matemática**. Rio de Janeiro : Zahar, 1989.

3 BARRETO, José A.E.; MOREIRA, Rui V. O. **O problema da indução** : o cisne negro existe. Fortaleza: Edição dos autores, 1993.

4 BLANCHÉ, Robert. **A axiomática**. 2. ed. Trad. por Maria do Carmo Cary. Lisboa: Editorial Presença, 1987.

5 BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. V. 3. Brasília: MEC/SEF, 1997.

6 BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 1999.

7 BRASIL. Secretaria da Educação Superior. **Diretrizes curriculares para cursos de licenciatura em matemática**. Versão preliminar. Brasília, março de 1999a.

8 BRINGUIER, Jean C. **Conversando com Jean Piaget.** Trad. por Maria José Guedes. Rio de Janeiro : Difel, 1978.

9 BRUYNE, Paul de; HERMAN, Jacques; SCHOUTHEETE, Marc de. **Dinâmica da pesquisa em ciências sociais**: os pólos da prática metodológica. Trad. por Ruth Joffily. Rio de janeiro : Francisco. Alves, 1991.

10 CASTI, John L. **Mundos virtuais**: como a simulação está mudando as fronteiras da ciência. Trad.por Paulo Cesar Castanheira. Rio de Janeiro: Revan, 1998.

11 CASTRUCCI, Benedito. **Fundamentos da geometria**: estudo axiomático do plano euclidiano. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

12 CHIAROTTINO, Zélia R. A teoria de Jean Piaget e a educação. *In*: PENTEADO, Wilma M.A. (Org.) **Psicologia e ensino**. São Paulo : Papelivros, 1980, p. 84-100.

13 _____. Organismo, lógica e sociedade no modelo piagetiano do conhecimento. *In*: FREITAG, Barbara. (Org.) **Piaget :** 100 anos. São Paulo : Cortez 1997 p. 111-122.

14 COLL, César; GILLIÈRON, Christiane. O desenvolvimento da inteligência e a construção do pensamento racional. *In*: LEITE, Luci B. (Org.) **Piaget e a escola de Genebra.** 2. ed. São Paulo : Cortez, 1992 p. 13-50.

15 COSTA, Haroldo C. A. da. O ensino da geometria e a solução de Birkhoff. **Monografias da Sociedade Paranaense de Matemática**, Curitiba, n. 2, jul. 1985.

16 COURANT, Richard; ROBBINS, H., **Que es la matemática?** Madrid: Aguilar, 1955.

17 DA COSTA, Newton C. A . **As lógicas não-clássicas**. São Paulo, Folhetim, n. 331, maio 1983.

18 _____ . Universidades modernas reprovariam Newton e Leibniz. **Folha de São Paulo**, 5 maio 1989.

19 _____ . **Introdução aos fundamentos da matemática.** 3. ed. São Paulo: Hucitec, 1992.

20 _____ . **Lógica indutiva e probabilidade**. 2. ed. São Paulo: Hucitec, 1993.

21 _____ . **Ensaio sobre os fundamentos da lógica**. 2. ed. São Paulo: Hucitec, 1994.

22 _____ . **O conhecimento científico**. São Paulo: Discurso Editorial, 1997.

23 DALLA CHIARA, M. L. ; TORALDO DI FRANCIA, G. Formal analysis of physical theories. In: TORALDO DI FRANCIA, G. **Problems in the foundations of phisics**(Ed). North-Holland, 1979, p. 134-201.

24 DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **O sonho de Descartes**. Trad. por Mário C. Moura. Rio de Janeiro : Francisco Alves, 1988.

25 _____ . **A experiência matemática**. Trad. por Fernando Miguel Louro e Ruy Miguel Ribeiro. Lisboa : Gradiva, 1995.

26 DEMO, Pedro. Projeto pedagógico: ensaio metodológico. *In*: FINGER, Almeri Paulo *et al*. **Educação: caminhos e perspectivas**. Curitiba : Champagnat, 1996 p. 53-81

27 _____ . **Metodologia científica em ciências sociais**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1995.

28 DOLLE, J. M. **Para compreender Jean Piaget**. 2. ed. Trad. por Maria José J. G. de Almeida. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

29 DREYFUS, Tommy; HADAS, Nurit. Euclides deve permanecer – e até ser ensinado. **Aprendendo e ensinando geometria**. Trad. por Hygino H. Domingues. São Paulo : Atual, 1994 p. 59-72.

30 DROZ, Rémy; RAHMY, Maryvonne. **Ler Piaget.** Trad. por Emanuel Godinho.

Lisboa : Socicultur, 1977.

31 EVANS, Richard I. **Jean Piaget**: o homem e suas idéias. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1980.

32 FAINGUELERNT, Estela K. O ensino de geometria no 1º e 2º graus. **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, n. 4 , p. 45-53, 1° sem. 1995.

33 FARIA, Paulo Cézar de. **A formação do professor de matemática**: problemas e perspectivas. Curitiba, 1996. Dissertação (Mestrado em Educação) UFPR.

34 FETISSOV, A. **A demonstração em geometria.** Trad. por Pedro Lima. Moscou : Mir, 1985

35 GARDNER, Howard. **O verdadeiro, o belo e o bom**: os princípios básicos para uma nova educação. Trad. por Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Objetiva, 1999.

36 GARNICA, Antônio V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica:** um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. Rio Claro, 1995. Tese (Doutorado em Educação Matemática). UNESP.

37 GOMÉZ-GRANELL, Carmen. Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática. *In*: RODRIGO, María J.: ARNAY, José. (Orgs.) **Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores.** São Paulo : Ática, 1998 p. 15-41

38 HALMOS, Paul R. Nicolas Bourbaki. Trad. De **Scientific American,** V. 196, n. 5, maio1957.

39 HARDY, G. H. O que é Geometria? **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática,** Curitiba, V. 4, n. 3, outubro 1961.

40 HENKIN, Leon. Verdade e demonstrabilidade. *In*: MORGENBESSER, Sidney (Org.) **Filosofia da Ciência**. 2. Ed. Trad. Por Leonidas Hegenberg e Octany Silveira da Mota. São Paulo : Cultrix, 1975.

41 HUNTLEY, H. E. **A divina proporção**: um ensaio sobre a beleza na matemática. Trad. Por Luís C. Ascênio Nunes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

42 IMENES, Luiz M. P. **Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem da matemática**. Rio Claro, 1989. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) UNESP.

43 JENNINGS, Richard C. Zande Logic and Western logic. **The British Journal for the Philosophy of Science**. 40. P. 275-285, 1989.

44 KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna**. Trad. Por Leônidas G. de Carvalho. São Paulo : Ibrasa, 1976.

45 KNEALE, William; KNEALE, Marta. **O desenvolvimento da lógica**. 3. Ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1968.

46 KRAUSE, Décio. O conceito bourbakista de estrutura. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**. Curitiba, v. 8, p. 77-102, 1987.

47 _____ . **Introdução à lógica matemática**: o cálculo proposicional. Curitiba, Departamento de Matemática, UFPR, 1991. (Apostila)

48 _____ . **Introdução à teoria axiomática de conjuntos**. Curitiba, 1999. Texto em preparo.

49 _____ . BÉZIAU, J.-Y; BUENO, ° Estruturas em ciência. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**, Curitiba, n. 1, v. 17, p. 91-111, 2° Sem.1997.

50 _____ . MAGALHÃES, João C. **Axiomatização da genética e o conceito de gene**. Curitiba, 1999. Texto em preparo

51 LAJONQUIÈRE, Leandro de. Acerca da instrumentação prática do construtivismo: a (anti) pedagogia piagetiana, ciência ou arte? **Cadernos de Pesquisa,** São Paulo. N. 81, p. 61-66, maio 1992.

52 LAKATOS, Eva M.; MARCONI, Marina de A. **Fundamentos de metodologia científica**. 3. Ed. Ver. E amp. São Paulo: Atlas, 1991.

53 LAKATOS, Imre. **Matemáticas, ciências y epistemologia**. 2. Ed. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

54 LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, n. 4 , p. 3-13, 1. Sem. 1995.

55 LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986

56 MACEDO, Lino de. **Ensaios construtivistas**. 3. Ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

57 MACHADO, Nilson J. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua**. 4. Ed. São Paulo: Cortez, 1998.

58 MARTÍ, Eduardo. Construtivismo e pensamento matemático. *In*: RODRIGO, María José: ARNAY, José. (Org.) **Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores.** São Paulo : Ática, 1998 p.43-74

59 MAYER, Richard E. **Cognição e aprendizagem humana.** Trad. por Luiz Roberto S. S. Malta. São Paulo : Cultrix, 1981.

60 MOSTERÍN, Jesús. **Conceptos y teorías en ciencia**. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

61 MOURA, Maria L. S. de; FERREIRA, Maria C.; PAINE, Patrícia A. **Manual de elaboração de projetos de pesquisa.** Rio de Janeiro : Editora da UFRJ, 1998.

62 MOURA, Manoel O. A formação do profissional de Educação Matemática. **Temas & Debates,** Blumenau, ano VIII, n. 7, p.16-26. Jul.1995

63 PALANGANA, Isilda C. **Desenvolvimento e aprendizagem em Piaget e Vygotsky**. São Paulo: Plexus, 1994.

64 PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria:** uma visão histórica. Campinas, 1989. Dissertação (Mestrado em Educação). UNICAMP.

65 _____ . **Formação de possibilidades cognitivas em noções geométricas**. Campinas, 1995. Tese (Doutorado em Educação). UNICAMP.

66 PENROSE, Roger. Inteligência matemática. *In*: KHALFA, Jean. (Org.) **A natureza da inteligência**. Trad. por Luiz Paulo Rouanet. São Paulo: Editora da UNESP, 1996 p. 111-138

67 PIAGET, Jean. Development and learning. Trad. por Maria Lucia F. Moro. **Journal of Research in Science Teaching,** V. XI, n. 3, p. 176-86, 1964.

68 _____ . Comments in mathematical education. *In*: HOWSON, A . G. (ed.), **Developments in mathematical education, Proceedings of the second international congress of mathematical education**. Cambrige University Press, 1973, p. 79-87.

69 _____ . **Ensaio de lógica operatória**. Trad. por Maria Ângela V. de Almeida. São Paulo: Editora da USP, 1976.

70 _____ . BETH, Evert W. **Epistemología matemática y psicología**: relaciones entre la lógica formal y el pensamento real. Barcelona: Editorial crítica, 1980.

71 _____ . GARCIA, Rolando. **Psicogénese e história das ciências.** Trad. por Maria Fernanda de Moura R. Jesuíno. Lisboa : Publicações Dom Quixote, 1987.

72 _____ . INHELDER, Barbel. **A psicologia da criança.** 14. ed. Trad. por Octavio Mendes Cajado. Rio de Janeiro : Bertrand Brasil, 1995.

73 _____ . MAYS, W.; BETH, E. W. **Psicología, lógica y comunicaçión**. Buenos Aires : Nueva Visión, 1959.

74 POINCARÉ, Henri. **A ciência e a hipótese.** 2. ed. Trad. Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1988.

75 _____ . **O valor da ciência.** Trad. por Maria Helena F. Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

76 POLYA, G. **Matemáticas y razonamiento plausible**. Trad. por José Luis Abellan. Madrid: Editorial Tecnos, 1966.

77 POPPER, Karl R. **A lógica da investigação científica**. São Paulo: Abril Cultural, 1980. Col. Os Pensadores.

78 QUINE, W. O. **O sentido da nova lógica**. 2. ed. Curitiba: Editora da UFPR, 1996.

79 RADFORD, Luis. La enseñanza de la demonstración: aspectos teóricos y prácticos. **Educación Matemática**, V. 6, n. 3, p. 21-36, dez/1994.

80 RILEY, Richard W. The state of mathematics education: building a strong foundation for the 21st century. **Notices of the American Mathematical Society**. V.45, n. 4, p. 487-491. Apr. 1998.

81 RUSSELL, Bertrand. **Introdução à filosofia matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 1974.

82 _____. **Misticismo e lógica**. Rio de Janeiro: Zahar, 1977.

83 SALMON, Wesley C. **Lógica**. 3. ed. Trad. por Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1993.

84 SANGIORGI, Osvaldo. Matemática moderna no ensino: feliz encontro entre a lógica, a psicologia e a pedagogia. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**, Curitiba, v. 7, p. 75-79, 1964.

85 _____ . Matemática moderna no ensino: feliz encontro entre a lógica, a psicologia e a pedagogia. **Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática**. Curitiba, V. 8(1), p. 5-7, 10, 14, 1965.

86 SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico** : diretrizes para o trabalho didático-científico na universidade. São Paulo : Cortez & Moraes, 1975.

87 SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Trad. por Jorge Luiz Calife. 5. ed. Rio de Janeiro: Recorde, 1999.

88 SUPPES, Patrick. **Introduction to logic**. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1957.

89 SZABÓ, Arpad. The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms. **Scripta mathematica**, v. 27, n. 1, p. 27-48, 1964.

90 _____ . Greek dialectic and Euclid's axiomatics. *In:*. LAKATOS, Imre (Ed.) **Problems in the philosophy of mathematics - Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science**, London, 1965. v. 1. p. 1-27.

91 TARSKI, Alfred. Verdade e demonstração. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, série 3, p. 91-123, jan./jul. 1991.

92 TUNG-SUNG, Chang. A teoria do conhecimento de um filósofo chinês. *In*: CAMPOS, Haroldo de. **Ideograma** : lógica, poesia, linguagem. Trad. por Heloysa de Lima Dantas. São Paulo: Cultrix, 1977

93 UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ – Conselho de Ensino e Pesquisa – CEPE. **Normas de controle e registro da atividade acadêmica dos cursos de graduação da UFPR,** Resolução n. 37/97. Curitiba, 1997.

94 USISKIN, Zalman. Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P.(Org.). **Aprendendo e ensinando geometria**. Trad. por Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

95 RENÓN, Luís Vega. **La trama de la demonstración**. Madrid: Alianza Editorial, 1990.

96 VIANNA, Claudia C. de S. **O papel do raciocínio dedutivo no ensino de matemática.** Rio Claro, 1988. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP.

97 VIGOTSKII, L.S. et al. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. 2. ed. São Paulo : Icone, 1988.

98 WITTER, G. P. Psicologia educacional : base e origem da psicologia do ensino. In: Penteado, W.M.A. (Org.) **Psicologia e Ensino**. São Paulo : Papelivros, 1980.

99 WERMUS, Henri. **Beliefs, reasoning and understanding**. Wokshop on "Parallel processing, logic and organisation. University of Geneva. Munich,, Sept. 14th, 1992.

ANEXOS

CM430 - FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA C

Pré-requisitos	Aulas Semanais	Natureza	Créditos	Aulas Anuais
Não tem	04	Anual	08	120

Ementa: (Aprovada conf. Resol. nº 91/92-CEP, de 27/11/92).

Noções de Lógica. Conjuntos e operações com conjuntos. Relações. Relações de Ordem. Relações de equivalência. Funções. Números naturais. Números inteiros, racionais, reais e complexos. Noções sobre Números Cardinais e Ordinais.

Programa:

01. **NOÇÕES DE LÓGICA.** Noções sobre o método axiomático. A notação matemática comum: a linguagem da teoria dos conjuntos e da Matemática usual. Proposições e conectivos. Tautologias e contradições. Quantificadores. Noções sobre demonstrações.

02. **CONJUNTOS E OPERAÇÕES COM CONJUNTOS.** Aspectos históricos da teoria dos conjuntos. Noções básicas da teoria dos conjuntos. Operações com conjuntos e propriedades. Uniões e Interseções arbitrárias.

03. **RELAÇÕES.** Relações. Gráfico de uma relação. Domínio e Imagem de uma relação. Relação inversa. Relações n-árias. Relações reflexivas, irreflexivas, simétricas, anti-simétricas, assimétricas, transitivas, intransitivas. Composição de relações.

04. **RELAÇÕES DE ORDEM.** Relações de Ordem. Sistemas Parcialmente Ordenados. Diagramas de Hasse. Cadeias. Diversos tipos de ordem. Elementos de um sistema ordenado: máximo e mínimo, elementos maximais e minimais, majorantes e minorantes, supremo e ínfimo. Noções sobre reticulados e Álgebras de Boole.

05. **RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA.** Relações de equivalência. Classes de equivalência e conjunto quociente. Propriedades das classes de equivalência. Partições.

06. **FUNÇÕES.** Conceituação. Imagem inversa. Restrições. Função composta. Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva.

07. **NÚMEROS NATURAIS.** Conjuntos indutivos. Os postulados de Peano. Recursão sobre W(ômega). Aritmética. Ordem sobre W(ômega).

08. **NÚMEROS INTEIROS, RACIONAIS, REAIS E COMPLEXOS.** A construção dos números reais: números inteiros, números racionais e números reais. Números complexos.

09. **NOÇÕES SOBRE NÚMEROS CARDINAIS E ORDINAIS.** Conjuntos equinumerosos. Conjuntos finitos e infinitos. Cardinais. Ordem. O Axioma da Escolha. Conjuntos contáveis. Noções sobre aritmética cardinal. A Hipótese do Contínuo. Ordem parcial. Boa ordem. Números ordinais e rank. Noções sobre aritmética ordinal.

Bibliografia básica:

1. H. B. ENDERTON - Elements of set theory. Academic Press, 1977.
2. A. J. FRANCO DE OLIVEIRA - Teoria dos conjuntos: intuitiva e axiomática. Livraria Escolar Editora, 1981.
3. A. J. FRANCO DE OLIVEIRA - Lógica e Aritmética. Gradiva, 1991.
4. P. R. HALMOS - Teoria ingênua dos conjuntos. Polígono, 1973.
5. P. SUPPES - Introduction to logic. Van Nostrand, 1957.

CM405 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL C

Pré-requisitos	Aulas Semanais	Natureza	Créditos	Aulas Anuais
Não tem	04	Anual	08	120

Ementa: (Aprovada conf. Resol. nº 13/91-CEP, de 29/01/91).

Conjuntos e funções. Números reais. Limites e continuidade. Derivação e suas aplicações. Integração e suas aplicações. Equações Diferenciais.

Programa:

01. **CONJUNTOS E FUNÇÕES.** Conceituação, nomenclatura e notação.

02. **NÚMEROS REAIS.** O conjunto dos números reais.

03. **LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL.** Propriedades dos limites.

04. **DERIVAÇÃO E SUAS APLICAÇÕES.** Derivada de função real de um variável real; fórmulas de derivação; cálculo de máximos e mínimos; regra de L'Hopital; diferencial; fórmula de Taylor.

05. **INTEGRAÇÃO E SUAS APLICAÇÕES.** Integral indefinida; integrais imediatas; integração por partes, por substituição trigonométrica e de funções racionais; integral definida e aplicações geométricas; integrais impróprias.

06. **EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.** Equações diferenciais de la. ordem. Resolução de equação diferencial linear; solução particular.

Bibliografia básica:

LEITHOLD - O Cálculo com Geometria Analítica.
ABUNAHMAN, S. - Equações Diferenciais.
GUIDORIZZI , HAMILTON LUIZ- Um curso de Cálculo, vol. 1.

CM412 - GEOMETRIA ANALÍTICA A

Pré-requisitos	Aulas Semanais	Natureza	Créditos	Aulas Anuais
Não tem	04	Anual	08	120

Ementa: (Aprovada conf. Resol. nº. 13/91-CEP , de 29.01.91).

Formas geométricas. Relações segmentárias e angulares. Projeção ortogonal. Sistemas de coordenadas. Vetores e álgebra vetorial. Co-senos diretores. Reta no plano. Círculo. Plano e reta no espaço. Curvas. Superfícies.

Programa:

01. **Formas geométricas.** Formas geométricas fundamentais. Elementos impróprios.
02. **Relações segmentárias e angulares.** Razão simples.
03. **Projeção ortogonal.**
04. **Sistema de coordenadas.** Sistemas de coordenadas na pontual, nos feixes de retas e planos e no plano e espaço pontilhados.
05. **Vetores e Álgebra Vetorial.** Vetores. Adição de vetores. Multiplicação de vetor por escalar. Expressões lineares de vetores e de pontos. Produtos escalar, vetorial e misto. duplo produto vetorial. Aplicações geométricas.
06. **Co-senos diretores.** Parâmetros e Co-Senos diretores. Angulo de duas direções orientadas.
07. **Reta no Plano.** Equação da reta no plano. Feixe de retas. Ângulo de retas.
08. **Círculo.** Equação da circunferência e da reta tangente. Feixe de circunferências.
09. **Plano e reta no espaço.** Equação do plano. Feixe de planos. Equações da reta no espaço. Interseção de reta com plano. Ângulo de duas retas e de reta com plano. Distância de ponto a reta, de ponto a plano e de duas retas. Normal comum a duas retas.
10. **Curvas.** Equação cartesiana de curvas. Sistemas de curvas. Curvas notáveis. Equações canônicas das cônicas. Translação e rotação dos eixos cartesianos. Classificação das cônicas. Intersecção de cônica com reta. Tangente. Polo e polar. Intersecção e feixe de cônicas. Diâmetros, centro, eixos, assíntotas, focos,diretrizes e invariantes das cônicas.
11. **Superfícies.** Equação cartesiana de superfície. Famílias de superfícies. Superfícies notáveis. Equações reduzidas das quádricas.

Bibliografia básica:

BARSOTTI, L. - Geometria e Vetores.

STEINBRUCH, A. - Geometria Analítica, McGraw-Hill,SP,1987.

VENTURI, J. - Álgebra Vetorial e Geometria Analítica. Artes Gráficas e Editora Unificado, Ctba.,1989.

CM406 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL D

Pré-requisitos	Aulas Semanais	Natureza	Créditos	Aulas Anuais
CM405	04	Anual	08	120

Ementa: (Aprovada conf.Res. nº. 13/91-CEP, 29/01/91).

Noções de topologia do espaço R^n. Funções de R^n em R^m. Limites e continuidade. Derivadas de funções de R^n em R^m. Integrais múltiplas e integral de linha. Séries numéricas e de funções. Solução em série de funções de equações diferenciais.

Programa:

01. **Noções de Topologia no espaço R^n**. Conjunto aberto, fechado e ponto de acumulação. Norma e distância.

02. **Funções de R^n em R^m** . Curvas e superfícies. Funções de várias variáveis.

03. **Limite e Continuidade.**

04. **Derivadas e funções de R^n em R^m**. Derivadas parciais. Acréscimos e diferenciais. Derivadas direcionais. Planos tangentes e retas normais. Extremos de funções.

05. **Integrais Múltiplas e Integral de linha.** Integral dupla e tripla. Área e volume. Funções vetoriais. Integral de linha. Teoremas de Green, Gauss e Stokes. Aplicações. Transformação de Coordenadas.

06. **Séries Numéricas e de Funções.** Seqüências. Séries numéricas. Convergência. Séries de potência.

07. **Solução em Séries de Funções de Equações Diferenciais.**

Bibliografia básica:

GUIDORIZZI, H. L. - Um curso de cálculo, vol. 2 e 3, Ed. LTC.
LEITHOLD - O Cálculo com Geometria Analítica, vol. 2, Ed. Harbra.
ÁVILA, Geraldo - Cálculo Diferencial e Integral, vols. 2 e 3, Ed. LTC.
SWOKOWSKI , earl W.- Cálculo e Geometria Analítica, vol 2.

ALGEBRA LINEAR A

Código: CM413.
Pré-requisitos: CM412-Geometria Analítica A
Co-requisito: Não tem.
Número de aulas por semana: 3.
Créditos: 6.
Número total de aulas da disciplina: 90.

Programa:

1. MATRIZES E EQUAÇÕES LINEARES. Definição de matriz, operações com matrizes, propriedades. Sistemas de equações lineares: resolução por escalonamento de matrizes e por determinantes.
2. ESPAÇOS VETORIAIS. Definição de espaço vetorial, propriedades, base de espaço vetorial.
3. TRANSFORMAÇÕES LINEARES. Definição de transformação linear, matriz de transformação linear.
4. OPERADORES E MATRIZES DIAGONALIZÁVEIS. Auto-valor, auto-vetor, base de auto-vetores, matrizes diagonalizáveis.
5. ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO. Definição de produto interno, processo de diagonalização de Gram-Schmidt.
6. OPERADORES SOBRE ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO. Operadores auto-adjuntos e ortogonais.
7. FUNÇÕES LINEARES E ESPAÇO DUAL. Definição de espaço dual, propriedades.

Bibliografia básica: BOLDRINI et alii - Álgebra Linear
DOMINGUES,H et Alii - Álgebra Linear e Aplicações.

Ementa do Programa: (Aprovada conf. Resol. nº 13/91-CEP, de 29/01/91).

Matrizes e equações lineares. Espaços vetoriais. Transformações Lineares. Operadores e Matrizes diagonalizáveis. Espaços com produto interno. Operadores sobre espaços com produto interno. Funções lineares e espaço dual.

-------------x-------------

CM415 - ANÁLISE MATEMÁTICA A

Pré-requisitos	Aulas Semanais	Natureza	Créditos	Aulas Anuais
CM 410	04	Anual	08	120

Ementa: (aprovada conf. Resol. nº. 13/91-CEP,de 29/01/91).

Conjuntos e funções. Números reais. Sequências e séries de números reais. Topologia da reta. Limites de funções. Funções contínuas. Derivação. Integral de Riemann. Sequências e séries de funções.

Programa:

01. **Conjuntos e funções.** Conjuntos. Operações com conjuntos. Funções. Composição de Funções. Famílias.

02. **Números reais.** Corpos ordenados. Números Reais.

03. **Sequências e Séries de números reais.** Limite de sequências, propriedades dos limites. Subsequências e sequências de Cauchy. Séries numéricas.

04. **Topologia da reta.** Conjuntos abertos, conjuntos fechados, conjuntos compactos. Ponto de acumulação.

05. **Funções contínuas**. Critérios locais e globais da continuidade. Funções de Lipschitz.

06. **Limites de Funções.** A reta estendida. Limite de uma função como extensão continua desta mesma função. Operações com limites.

07. **Derivação.** Funções diferenciáveis. Teorema do valor médio e teorema de Taylor.

08. **Integral de Riemann.** Integral superior e inferior. O teorema fundamental do Cálculo Integral como limite de somas.

09. **Seqüências e Séries de Funções.**

Bibliografia básica:

1.Dieudonné - Foundations of Modern Analysis.
2.Bartle,R.G. - The Elements of Real Analysis.
3.White, A.J. - Real Analysis: An Introduction.
4. Lima, ELON L. - Análise Real-vol.1, Coleção Matemática Universitária - SBM.

CM419 - ÁLGEBRA A

Pré-requisitos	Aulas Semanais	Natureza	Créditos	Aulas Anuais
CM 410	04	Anual	08	120

Ementa: (aprovada conf. Resol. nº. 13/91-CEP , de 21/01/91).

Grupos. Homomorfismos de grupos. Anéis. Homomorfismos de anéis. Ideais de um anel. Anel quociente. Anéis de integridade. Corpo de frações de um anel de integridade. Anéis euclidianos. Polinômios sobre um anel.

Programa:

01. **Grupos.** Grupos de permutações. Grupos diedrais. Outros exemplos. Subgrupos. Classes laterais. Produto de classes laterais. Subgrupos normais.

02. **Homomorfismos de grupos.** Núcleo e imagem de um homomorfismo. Teorema fundamental dos homomorfismos. Grupos solúveis. A insolubilidade do grupo Sn (grupo simétrico de ordem n) para n maior do que 4.

03. **Anéis.** Tipos de Anéis. Subanéis. O anel dos inteiros.

04. **Homomorfismos de Anéis.** Núcleo e imagem de homomorfismo.Teorema fundamental.

05. **Ideais de um anel.** Ideal primo e maximal. Característica de um anel.

06. **Anel quociente.** Anel quociente de um anel qualquer. Os anéis Zn

07. **Anéis de integridade**. Corpos.

08. **Corpo de frações de um anel de integridade.** Exemplos. Corpo dos racionais.

09. **Anéis euclideanos.**

10. **Polinômios sobre um anel.** Anéis de polinômios.

Bibliografia básica:

GONÇALVES , A. - Introdução à Álgebra. IMPA,RJ.1979.
HERSTEIN, I. - Tópicos de Álgebra , Polígono,SP.1970.
DOMINGUES ,H. Tezzi, G.- Introdução à Álgebra.Atual.SP.

CM421 - HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR

Pré-requisitos	Aulas Semanais	Natureza	Créditos	Aulas Anuais
NãoCM415 e CM419	02	Anual	04	60

Ementa:
(aprovada conf. Resol. nº13/91-CEP,de 29/01/91).

Matemática na Grécia. A escola de Alexandria. O Renascimento. Renascimento da Geometria. A matemática nos séculos XIX e XX. Análise e crítica dos conceitos da matemática no ensino de 1° e 2° graus. A importância e o alcance dos conceitos abordados. A generalização em Matemática e o papel da intuição. Análise de textos.

Programa:

01. **MATEMÁTICA NA GRÉCIA.** A matemática pré-hêlenica. Thales de Mileto. Pitagoras. Eudoxio e o método de exaustão. Dinostrato e Menachmo.

02. **A ESCOLA DE ALEXANDRIA.** Euclides e os "Elementos". Teoria dos números. O quinto postulado. A obra de Arquimedes. Apolonio e as cônicas. A aritmética de Diofanto. Trigonometria.

03. **MATEMÁTICA NA IDADE MÉDIA.** Contribuição árabe. Equações do 3° e do 4° graus. Números complesxos. Perspectiva. Logaritmos.

04. **RENASCIMENTO.** Galileu,Descartes e Fermat, Desargues, Newton, Leibniz. O Cálculo infinitesimal.

05. **RENASCIMENTO DA GEOMETRIA.** Geometria Projetiva. Geometrias não euclidianas. Programa de Erlanger. Hilbert, Espaços vetoriais.

06. **A MATEMÁTICA NOS SÉCULOS XIX E XX.** O desenvolvimento da álgebra e da Análise Matemática. A teoria dos conjuntos. A topologia. N. Bourbaki. A Matemática no Brasil.

07. **ANÁLISE E CRÍTICA DOS CONCEITOS DA MATEMÁTICA NO ENSINO DE 1° e 2° GRAUS.** Análise de um ponto de vista superior dos conceitos que constam nos programas de 1° e 2° graus, em particular das definições, enunciados e demonstrações de teoremas. **Geometria Elementar.** Os vários tratamentos para o estudo da geometria elementar; conveniencia ou não de um estudo axiomático; abordagem via Álgebra Linear. Análise das diversas formas de apresentação dos tópicos: perpendicularismo e paralelismo. Ângulos, figuras planas e equivalência de figuras, congruência e semelhança de figuras,

medidas, reta e plano no espaço. **Álgebra.** Análise das conceituações elementares de conjuntos, relações, funções e gráficos. Estruturas algébricas sobre os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, reais e complexos, equações e polinômios. **Análise.** Análise das diversas conceituações de infinito, limite, derivada, diferencial, integral,continuidade, descontinuidade e aproximação local por polinômios.

08. **A IMPORTÂNCIA E O ALCANCE DOS CONCEITOS ABORDADOS.** A importância e o alcance dos conceitos abordados dentro da própria matemática e na vida real.

09. **A GENERALIZAÇÃO DA MATEMÁTICA E O PAPEL DA INTUIÇÃO.**

10. **ANÁLISE DE TEXTOS.** Análise de textos didáticos representativos de Matemáica do 1° e 2° ggraus.

Bibliografia básica:

BOYCE - História da Matemática.
STRUIK - História Concisa das Matemáticas.
COURANT & ROBBINS - Que es la Matemática?
KLEIN - Matemática Elementar desde um ponto de vista superior.
KLINE, M. - O Fracasso da Matemática Moderna.
COSTA,N.A. - As idéias Fundamentais da Matemática e outros ensaios. Editora Convívio.
BOURBAKI - Elementos de História de las Matemáticas. Aliança Universidad.

FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA D

Código: CM431.
Pré-requisitos: CM430-Fundamentos da Matemática C.
Co-requisito: Não tem.
Números de aulas por semana: 3.
Créditos: 6.
Número total de aulas da disciplina: 90.

Programa:

1. SISTEMAS AXIOMÁTICOS. Sistemas axiomáticos. Conceitosprimitivos e conceitos derivados. Proposições primitivas e proposições derivadas. Axiomas lógicos, axiomas matemáticos e axiomas específicos de uma teoria.
2. MODELOS. Estruturas conjuntistas. Os vários sentidos da palavra "modelo" em Ciência. Modelos de uma teoria.
3. CONSISTÊNCIA. Consistência sintática e consistência semântica. O ideal matemático da ausência de contradição.
4. INDEPENDÊNCIA e CATEGORICIDADE. Independência de axiomas. Teorias categóricas.
5. TEORIAS DE PRIMEIRA ORDEM E DE ORDEM SUPERIOR. Axiomáticas de primeira ordem. A "grande lógica": noções sobre Teoria dos Tipos e sobre teoria axiomática dos conjuntos.
6. FUNDAMENTAÇÃO DA MATEMÁTICA. Aspectos históricos acerca da fundamentação da Matemática. O significado atual da palavra "fundamentos".
7. O PAPEL DA LÓGICA SUBJACENTE. O significado de se mudarem os axiomas lógicos e/ou matemáticos de uma teoria. O sentido da palavra "matemáticas". Noções sobre matemáticas não-convencionais.
8. O SENTIDO DA PALAVRA "RIGOR" EM MATEMÁTICA. Os vários níveis de axiomatização de uma teoria. A necessidade do rigor e o seu relativismo histórico. Discussão crítica do método axiomático.
9. AXIOMATIZAÇÃO NAS CIÊNCIAS. Ciências formais e Ciências empíricas. Argumentos indutivos e o seu papel na Ciência. Noções sobre axiomatização das teorias da Física: predicados conjuntistas.

Bibliografia básica:

1. N. C. A. DA COSTA - Ensaio sobre os fundamentos da lógica. Hucitec-EDUSP 1980.
2. W. S. HATCHER - The logical foundations of mathematics. Pergamon Press, 1982.
3. P. SUPPES - Introduction to logic. North-Holland, 1959.
4. P. SUPPES - Set-theoretical structures in science. Stanford Un. Press, mimeografado, 1967.
5. R. L. WILDER - Introdution to the foundations of mathematics. John Wiley, 2nd. ed., 1965.

Ementa do Programa: (Aprovada conf. Resol. nº 91/92-CEP, de 27/11/92).

Sistemas Axiomáticos. Modelos. Consistência. Independência. e Categoricidade. Teorias de Primeira Ordem e de Ordem Superior. Fundamentação da Matemática. O papel da lógica subjacente. O sentido da palavra "rigor" em Matemática. Axiomatização nas Ciências.

-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-x-

PLANO DE ENSINO

Ficha nº 2 (parte variável)

Disciplina: DESENHO GEOMÉTRICO A **Turma:** C e D **Código:** CD 405

Validade: um ano **Semestre:** 1º/2º/99 **Local:** Centro Politécnico

Curso: Matemática **Professor Responsável:** Marlene Tambosi

PROGRAMA(os itens de cada unidade didática)

Construções fundamentais.
Circunferência, mediatriz, retas paralelas, bissetriz, arco capaz.
Congruência e semelhança de triângulos.
Segmentos direta e inversamente proporcionais
Circunferência de Apolônio
Terceira e quarta proporcionais
Potência de um ponto em relação a uma circunferência
Segmento áureo
Média geométrica
Retificação e desretificação da circunferência e de arcos de circunferência
Divisão da circunferência em arcos iguais - polígonos regulares
Construção de arcos quaisquer
Polígonos estrelados
Construção de triângulos
Construção de quadriláteros
Construção de figuras equivalentes e divisão de áreas
Tangência e concordância
Cônicas
Semelhança (homotetia)
Simetria axial
Rotação, translação e inversão

Procedimentos didáticos:

aulas expositivas e
resolução de exercícios

continua no verso

Objetivos:(competência do aluno)

O aluno deverá ser capaz de desenvolver o raciocínio lógico, construir figuras geométricas planas mediante a utilização de régua e compasso e resolver problemas relacionados à Geometria Plana.

Referências Bibliográficas:

PUIG ADAM, P. *Curso de Geometria Métrica.* Madrid. Edição do autor

DOLCE, Osvaldo. *Fundamentos de Matemática Elementar - Volumes 9 e 10*. Editora atual

PINTO, Nilda H. S. Corrêa. *Desenho Geométrico.* Editora Moderna

PUTNOKI, José Carlos "Jota". *Elementos de Geometria e Desenho Geométrico.* Ed. Scipione

PUTNOKI, José Carlos "Jota". *Geometria e Desenho Geométrico. Coleção régua e compasso* Ed. Scipione

MARMO, Carlos M. B. *Curso de Desenho.*

TEIXEIRA, José Carlos. *Cônicas.* EdiPoli. SP

Avaliação:

Serão realizadas no mínimo quatro provas escritas, trabalhos individuais e em equipe, mais uma avaliação final

Observação:

Assinaturas:
Professor Responsável:
Chefe do Departamento:
Coordenador do Curso:

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - Setor de Ciências Exatas - Departamento de Desenho

PLANO DE ENSINO

Ficha nº 2 (parte variável)

Disciplina: ELEMENTOS DE GEOMETRIA **Turma:** A e B **Código:** CD 415

Validade: um ano **Semestre:** 1º/2º/99 **Local:** Centro Politécnico

Curso: Matemática **Professor Responsável:** Paulo Henrique Siqueira

PROGRAMA(os itens de cada unidade didática)

1-Introdução Histórica. Postulados do Desenho Geométrico.

2-Axiomas de Incidência, de ordem, e sobre medição de segmentos e ângulos. Congruência de triângulos. Teorema do ângulo externo. O axioma das paralelas. Paralelogramo. Quadriláteros. Semelhança de triângulos. Teorema de Pitágoras.

3-Lugares geométricos: circunferência, mediatriz, retas paralelas, bissetrizes.

4-Ângulos: central, inscrito e de segmento. Arco Capaz. Ângulos excêntrico interior e exterior.

5-Proporcionalidade de segmentos. Teorema das bissetrizes. Circunferência de Apolônio. Terceira e quarta proporcionais. Média geométrica. Triângulo retângulo. Segmento áureo. Potência de ponto em relação a uma circunferência.

6-Circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro. Pontos da circunferência circunscrita. Retas de Euler e de Simpson.

7-Retificação e desretificação de circunferências. Retificação e desretificação de arcos de circunferência.

8-Divisão da circunferência: métodos exatos e aproximados. Polígonos estrelados.

9-Equivalência de áreas. Axiomas.

10-Ponto, reta e plano no espaço. Posições relativas de duas retas. Posições relativas de uma reta e um plano. Posições relativas de dois planos. Poliedros. Poliedros de Platão. Poliedros regulares.

11-Estudo do prisma. Princípio de Cavalieri. Estudo da pirâmide, do cone de rotação, do cilindro de rotação e da esfera. Áreas no espaço. Volumes dos poliedros e dos corpos de revolução.

Procedimentos didáticos:

aulas expositivas e resolução de exercícios

continua no verso

Objetivos:(competência do aluno)

O aluno deverá ser capaz de resolver e justificar as soluções de problemas de Desenho Geométrico e de Geometria Descritiva, além de adquirir raciocínio lógico e conhecimento teórico de Geometria Euclidiana.

Referências Bibliográficas:

ADAM, P. *Curso de Geometria Métrica.* Madrid. Edição do autor

BARBOSA, João L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. SBM-RJ

BEZERRA, Manoel Jairo. *Curso de Matemática.* Companhia Editora Nacional.

CHAPUT, F. Ignace. *Elementos de Geometria.* F. Briguiet e Cia. Editors.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, J. Nicolau. *Fundamentos de Matemática Elementar - Vol. 9 e 10*.

MARMO, Carlos M. B. *Curso de Desenho.*

PUTNOKI, José Carlos "Jota". *Elementos de Geometria e Desenho Geométrico.* Ed. Scipione

RANGEL, Alcyr Pinheiro. *Poliedros.*

Avaliação:

Serão realizadas no mínimo quatro provas escritas, trabalhos individuais e em equipe, mais uma avaliação final

Observação:

Assinaturas:
Professor Responsável:
Chefe do Departamento:
Coordenador do Curso:

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PLANO DE ENSINO

Ficha nº 2 (parte variável)

Disciplina: GEOMETRIA DESCRITIVA A **Turma:** A e D **Código:** CD 404

Validade: um ano **Semestre:** 1º/2º/99 **Local:** Centro Politécnico

Curso: Eng. Elétrica (A) **Professor Responsável:** Luzia Vidal de Souza Zamboni

Matemática (D)

PROGRAMA(os itens de cada unidade didática)

1-Utilização dos instrumentos de desenho. Conceito de Geometria Descritiva. Conceito de projetar e cortar. Conceito de projeção cilíndrica e projeção cônica.

2-Duplas projeções ortogonais. Representação do ponto.

3-Representação da reta e de seus traços sobre os planos de projeções.

4-Representação do plano. Plano horizontal. Plano frontal. Plano de perfil. Plano de topo. Plano vertical. Plano paralelo à linha de terra. Plano qualquer. Representação de figuras contidas nos planos. Representação de sólidos.

5-Condições de paralelismo entre duas retas, entre dois planos e entre um plano e uma reta. Condições de coplanaridade de duas retas. Condições de ortogonalidade de duas retas. Condições de perpendicularidade entre uma reta e um plano e entre dois planos.

6-Interseção de dois planos. Interseção de uma reta e um plano.

7-Mudança de planos de projeção. Rebatimento.

8-Representação de sólidos com uma face ou seção em um plano qualquer ou em um plano paralelo à linha de terra.

9-Seções planas nos sólidos. Planificação de sólidos seccionados.

10-Interseção de reta com outros sólidos.

11-Interseção de sólidos.

12-Projeções Cotadas: Representação dos elementos fundamentais. Rebatimento. Aplicações Práticas.

Procedimentos didáticos:

aulas expositivas e resolução de exercícios.

continua no verso

Objetivos:(competência do aluno)

O aluno deverá ser capaz de representar os objetos do espaço tridimensional no espaço bidimensional, através de projeções, solucionar problemas relativos a esses objetos através da Geometria Plana.

Referências Bibliográficas:

CAVALLIN, José. *Lições de Geometria Descritiva.* UFPR

COSTA, A. M.; COSTA, D. M. B.; ZAMBONI, L. V. S. *Geometria Descritiva - Método Mongeano*. UFPR.

MARMO, Carlos. *Geometria Descritiva-vol. 7 e 8*. Editora Nobel.

NASCIMENTO Jr. *Geometria Descritiva - Projeção Mongeana.* UFPR.

PINHEIRO, V. A. *Noções de Geometria Descritiva*. Ao Livro Técnico.

PRÍNCIPE JR., A. R. *Noções de Geometria Descritiva*. Editora Nobel.

RODRIGUES, A. J. *Geometria Descritiva*. Ao Livro Técnico.

Avaliação:

Serão realizadas no mínimo quatro provas escritas, trabalhos e avaliação final.

Observação:

Assinaturas:
Professor Responsável:
Chefe do Departamento:
Coordenador do Curso:

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Setor de Ciências Exatas
Departamento de Desenho

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS-DEPARTAMENTO DE FÍSICA

P R O G R A M A D E E N S I N O

DISCIPLINA: "F Í S I C A G E R A L A"

ATIVIDADE DIDÁTICA: AT(4) AP(-) CRÉDITOS:8(oito)

PRÉ-REQUISITOS: não tem

EMENTA: Medidas físicas. Teoria dos Erros. Cinemática. Dinâmica dos pontos materiais. Trabalho, Potência e Energia. Estática dos corpos rígidos. Colisões. Dinâmica do movimento de rotação. Forças inerciais. Gravitação. Estática e Dinâmica dos fluídos. Oscilações. Ondas. Acústica. Calor Termodinâmico.

PROGRAMA: Livro Texto: FÍSICA, D.Halliday e R.Resnick

MEDIDAS FÍSICAS: Grandezas físicas,padrões,unidades,noções de análise dimensional,sistema internacional de unidades,grandezas escalares e vetoriais.

TEORIA DOS ERROS: Definição e classificação dos erros,teoria de Gauss,valor mais provavel,erro médio,propagação de erros,método dos mínimos quadrados.

CINEMÁTICA: Cinemática da partícula em uma,duas ou três dimensões,velocidade e aceleração instantâneas em coordenadas cartesianas e polares,movimento relativo.

DINÂMICA DO PONTO MATERIAL: Lei de Newton e postulados,aplicações em coordenadas cartesianas e polares, forças inerciais, limitações da Mecânica Newtoniana, conservação do momento linear e angular, oscilações.

TRABALHO,POTÊNCIA E ENERGIA: Definições, princípio de conservação de energia mecanica, energia cinetica e potencial, forças conservativas.

ESTÁTICA DOS CORPOS RÍGIDOS: Condições de equilíbrio, centro de gravidade, equilíbrio estavel, instável e indiferentes.

COLISÕES: Estudo do choque em uma e duas dimensões, seção eficaz.

DINÂMICA DE ROTAÇÃO: Sistema de partículas, corpo rígido, leis de conservaçao, forças inerciais,energia cinética e potencial,giroscópio.

GRAVITAÇÃO: Lei de Newton,Lei de Gauss, potencial gravitacional, energia potencial gravitacional, movimento planetário.

ESTÁTICA E DINÂMICA DOS FLUÍDOS: Pressão e massa específica, princípios de Pascal e Arquimedes. Conceitos gerais de escoamento de fluídos. Equação de Bernouille e equação da continuidade.

OSCILAÇÕES-ONDAS: Movimento harmônico simples. Movimento harmônico amortecido. Oscilaçoes forçadas-Ressonância. Gravitação-Distribuição esférica de massa. Ondas em meios elásticos.Ondas sonoras.

ACÚSTICA: Espectro do som. Batimento. Efeito Doppler.

CALOR TERMODINÂMICO: Temperatura-Equilíbrio térmico-Dilatação. Calor e primeiro princípio da termodinâmica. Teoria cinética dos gases. Segundo princípio da termodinâmica-Entropia.

PLANO DE ENSINO

Ficha nº 1 (permanente)

Departamento: FÍSICA

Setor: CIÊNCIAS EXATAS

Disciplina: FÍSICA GERAL B **Código:** CF 407

Natureza: (X) Anual ( ) Semestral

Carga Horária: (04) Teóricas (04) Práticas (00) Total (04) Créd: (04)

Pré-requisito: Física Geral A.

Co-requisito: não tem.

EMENTA: (unidades didáticas)

Campo Elétrico. Potencial Elétrico. Corrente Elétrica. Campo Magnético. Indução Eletromagnética. Leis de Maxwell. Ótica Geométrica. Ótica Física. Teoria da Relatividade. Mecânica Quântica.

Validade: a partir do ano letivo de: 1998

Professor:(a) **Assinatura:** ____________________

Chefe do Departamento: Jair Lucinda **Assinatura:** ____________________

Aprovado pelo CEP - Resolução: ____________________

Pró-Reitor de Ensino e Pesquisa: ____________________

Assinatura: ____________________

PLANO DE ENSINO:

Ficha nº 2 (pa... riável)

Código:

Disciplina:

Validade: **Semestre de :**

Turma: **Local:** **Curso:**

Professor responsável:

PROGRAMA (os ítens de cada unidade):

Objetivos (competência do aluno):

Referências bibliográficas:

Procedimentos Didáticos:

Avaliação:

Observação:

Assinaturas: Professor reponsável:
Chefe do Departamento:
Coordenador do Curso:

APÊNDICE

Questão do Exame Nacional de Cursos de 1998

Fonte: disponível em
http://www.inep.gov.br/enc_resultados/home/sintese/ProvasQuestionario.htm

Questão nº 2

O losango é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais. A partir desta definição, pode-se demonstrar a seguinte afirmação: "ter diagonais perpendiculares é uma condição **necessária** para que um quadrilátero seja um losango."

a) Enuncie esta afirmação sob a forma de um teorema do tipo **"Se... então..."**.
b) Demonstre o teorema enunciado no item **a)**.
c) Enuncie a recíproca do teorema enunciado no item **a)** e decida se ela é ou não verdadeira, justificando a sua resposta.

Dados/Informações adicionais:

O teorema sobre os ângulos formados por duas paralelas cortadas por uma transversal pode ser considerado conhecido, bem como os casos de congruência de triângulos. **(valor: 20,0 pontos)**

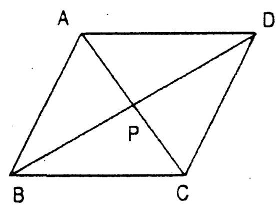
Comentários

Conteúdos estabelecidos na questão:
Geometria Plana.

Habilidades aferidas:
Capacidade de: analisar criticamente textos matemáticos e redigir formas alternativas.

Padrão de Resposta Esperado:

a) Um enunciado pode ser: "Se um quadrilátero é um losango então esse quadrilátero tem as diagonais perpendiculares".
b) A igualdade dos lados acarreta a congruência dos triângulos isósceles ABD e CDB, pelo caso LLL. Daí, tem-se:
$< ABD = < DBC = < CDB = < BDA$.
Raciocínio análogo para os triângulos ABC e ADC implica:
$< CAB = < BCA = < ACD = < DAC$.



Aplica-se então o caso ALA de congruência aos triângulos PAB e PAD. Assim,
$\Delta\ PAB = \Delta\ PAD$ e portanto $< APB = < APD$.
Como a soma desses ângulos é um ângulo raso, cada um deles será reto, ou seja $AC \perp BD$.

c) A recíproca do teorema pode ser enunciada assim: "Se um quadrilátero tem diagonais perpendiculares então esse quadrilátero é um losango." Ela é falsa, como pode ser comprovado pelo contra-exemplo: