

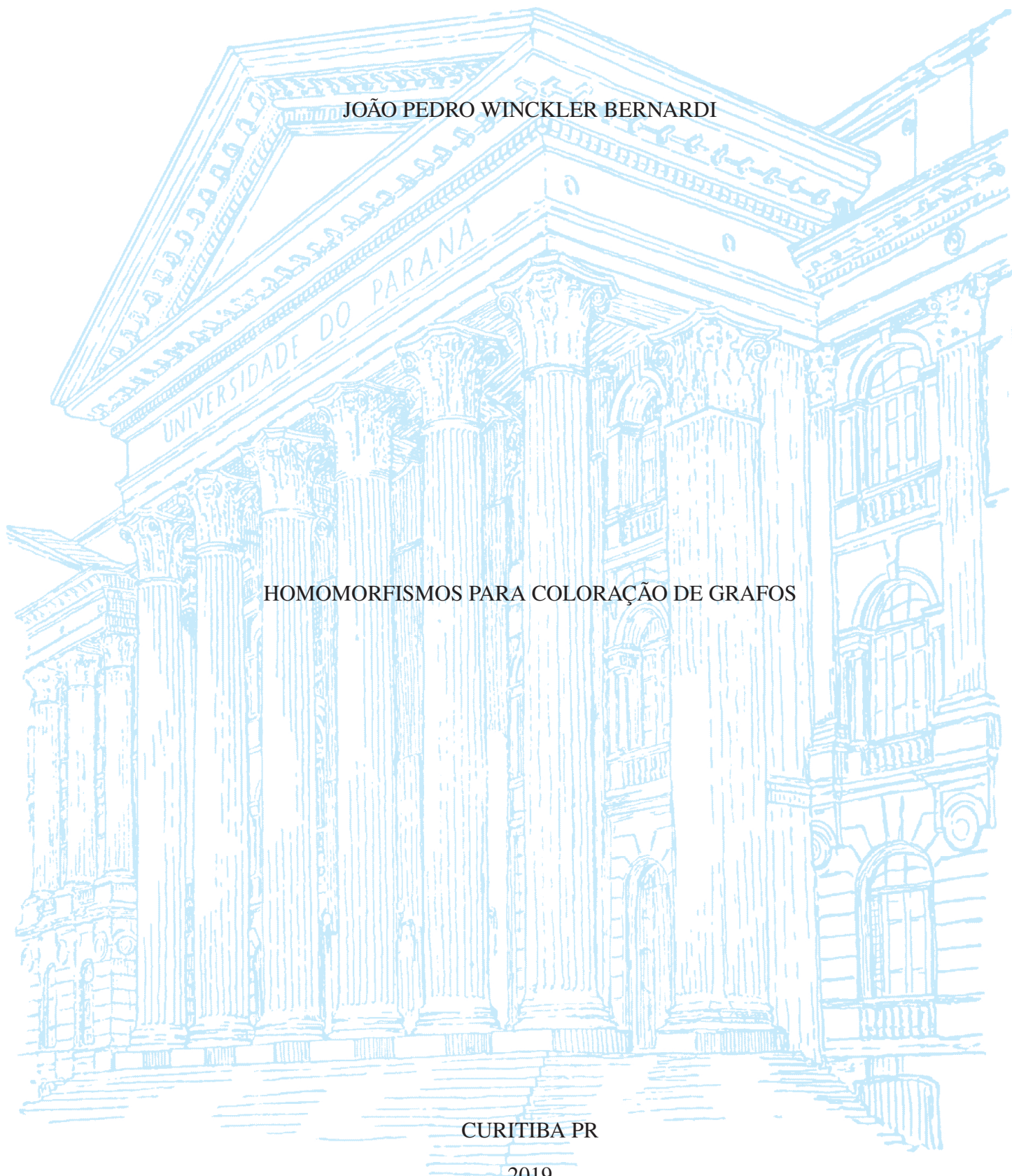
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JOÃO PEDRO WINCKLER BERNARDI

HOMOMORFISMOS PARA COLORAÇÃO DE GRAFOS

CURITIBA PR

2019



JOÃO PEDRO WINCKLER BERNARDI

HOMOMORFISMOS PARA COLORAÇÃO DE GRAFOS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Informática no Programa de Pós-Graduação em Informática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Área de concentração: *Ciência da Computação*.

Orientador: Murilo V. G. da Silva.

Coorientador: Leandro M. Zatesko.

CURITIBA PR

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

B523h Bernardi, João Pedro Winckler  
Homomorfismos para coloração de grafos [recurso eletrônico] / João Pedro  
Winckler Bernardi. – Curitiba, 2020.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de  
Pós-Graduação em Informática, 2020.

Orientador: Murilo Vicente Gonçalves da Silva.

Coorientador: Leandro Miranda Zatesko.

1. Homomorfismos (Matemática). 2. Álgebra homológica. I. Universidade Federal do  
Paraná. II. Silva, Murilo Vicente Gonçalves da. III. Zatesko, Leandro Miranda. IV. Título.

CDD: 512.55

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO INFORMÁTICA -  
40001016034P5

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em INFORMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **JOÃO PEDRO WINCKLER BERNARDI** intitulada: **Homomorfismos para coloração de grafos**, sob orientação do Prof. Dr. MURILO VICENTE GONÇALVES DA SILVA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 17 de Março de 2020.

MURILO VICENTE GONÇALVES DA SILVA  
Presidente da Banca Examinadora

RENATO JOSÉ DA SILVA CARMO  
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

LEANDRO MIRANDA ZATESKO  
Coorientador (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO  
PARANÁ)

SHEILA MORAIS DE ALMEIDA  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO  
PARANÁ)



*Aos meus pais*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente, aos meus pais que me acompanharam durante toda essa jornada; aos meus orientadores (oficiais ou não), Dr Murilo V. G. Silva, Dr Leandro Zatesko e Dr André Luiz P. Guedes por todo o tempo que dedicaram em nossas reuniões e por tudo que aprendi com eles; um agradecimento especial ao Dr Leandro Zatesko e sua esposa Giulia, por terem me acolhido na casa deles quando precisei e por todos os momentos incríveis que já vivemos juntos.

Agradeço também os professores convidados para a banca examinadora, Dr Sheila M. de Almeida, minha professora de iniciação científica, que me fez descobrir um amor pela técnica *pullback* e as classes de grafos nas quais ela pode ser aplicada; e Dr Renato Carmo, cujas observações no texto foram de incrível valia.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro a ida em conferências, através do processo 428941/2016-8 e a bolsa de mestrado.

## RESUMO

A famosa tabela de problemas NP-completos de D. Johnson de 1985 relaciona problemas NP-completos com classes de grafos. Uma entrada da tabela representa a complexidade de um problema para determinada classe de grafo. Desde que foi feita pela primeira vez, a entrada para o Problema de Coloração de Arestas com a classe dos grafos cordais permanece vazia, pois ainda é um problema indeterminado. Uma conjectura de Figueiredo, Meidanis, e Mello da década de 90 diz que todo grafo cordal com grau máximo ímpar tem seu índice cromático igual ao grau máximo do grafo. Com o estudo do problema, foi desenvolvida a técnica *pullback* para colorir um subconjunto dos grafos de intervalos, uma subclasse dos grafos cordais. Nosso trabalho generaliza a *pullback* para colorir um subconjunto dos grafos arco-circulares próprios  $\cap$  cordais, uma superclasse dos grafos de intervalos próprios.

Palavras-chave: *Pullback*. Coloração de arestas. Coloração total.

## ABSTRACT

Each entry from the famous D. Johnson's NP-completeness column of 1985 represents the complexity of a problem for a given graph class. Since it was first made, the entry for the Edge Coloring Problem with chordal graphs remains empty, as it is still undetermined. A conjecture by Figueiredo, Meidanis, and Mello, open since late 1990s, states that every chordal graph with odd maximum degree has its chromatic index equal to the maximum degree of the graph. With the study of the problem, the technique *pullback* was developed to color a subset of interval graphs, a subclass of chordal graphs. Our work generalizes the *pullback* to color a subset of proper circular arc  $\cap$  chordals graphs, a superclass of the proper interval graphs.

Keywords: Pullback. Edge-coloring. Total coloring.



## LISTA DE FIGURAS

1.1	Interseção das classes Arco-circulares próprios e Cordais evidenciando grafos de intervalos próprios . . . . .	10
1.2	Classe de grafos estudada neste trabalho . . . . .	10
1.3	Homomorfismo do grafo diamante para o grafo $K_3$ . . . . .	10
2.1	Grafo $P^*$ . . . . .	12
2.2	Coloração de arestas ótima de um $K_4$ e coloração total ótima de um $K_3$ . . . . .	14
2.3	Um grafo de intervalos e sua representação por intervalos . . . . .	14
2.4	Ordem-indiferença do grafo da Figura 2.3 . . . . .	15
2.5	Exemplo de <i>pullback</i> em um grafo de intervalo com grau máximo ímpar . . . . .	15
2.6	Exemplo de <i>pullback</i> em um grafo de intervalo com grau máximo ímpar . . . . .	16
2.7	Representação por arcos de um grafo arco-circular próprio mas não unitário . . . . .	17
3.1	Exemplo de uma <i>multi-pullback</i> de $G$ para o $K_6$ . . . . .	19
3.2	Estrutura de um grafo ACPC de acordo com o Lema 3.5. . . . .	20
3.3	Os conjuntos $Y_{BC}$ , $Y_C$ , e $Y_{AC}$ . . . . .	23
3.4	Grafo ACPC, primeiro sua representação conforme Lema 3.5 e depois uma coloração de arestas para o grafo. . . . .	25
3.5	Grafo ACPC, primeiro sua estrutura conforme Lema 3.5 adaptado, seguido de uma coloração total para o grafo . . . . .	28
3.6	Emparelhamento das cores num $K_4$ . . . . .	28
3.7	<i>Multi-pullback</i> para representar a coloração de um $K_4$ . . . . .	29
4.1	Grafo $K_5$ colorido com a Equação (2.1) com conflito de cor apenas em arestas que incidem o vértice com rótulo $\Delta$ . . . . .	30

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>9</b>
1.1	ESTRUTURA DO DOCUMENTO. . . . .	11
1.2	OUTRAS DEFINIÇÕES . . . . .	11
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> . . . . .	<b>12</b>
2.1	GRAFOS COMPLETOS . . . . .	13
2.2	GRAFO DE INTERVALOS . . . . .	14
2.3	GRAFOS ARCO-CIRCULARES. . . . .	16
2.4	GRAFOS CORDAIS . . . . .	17
<b>3</b>	<b>RESULTADOS.</b> . . . . .	<b>18</b>
3.1	GRAFOS ARCO-CIRCULARES PRÓPRIOS $\cap$ CORDAIS. . . . .	19
3.2	<i>MULTI-PULLBACK</i> E PROBLEMAS DE COLORAÇÃO . . . . .	28
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO E PRÓXIMOS PASSOS</b> . . . . .	<b>30</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>31</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Uma coloração de arestas com  $k$  cores de um grafo  $G = (V, E)$  é uma função  $\varphi: E(G) \rightarrow \mathcal{C}$ , sendo  $\mathcal{C}$  o conjunto com  $k$  cores, tal que  $\varphi(e) \neq \varphi(f)$  para quaisquer arestas adjacentes  $e$  e  $f$ . O índice cromático de  $G$ , representado por  $\chi'(G)$ , é o menor  $k$  para qual existe uma coloração própria do grafo. Para todo grafo  $G$ , Vizing (1964) mostrou que  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ . Pela própria definição do problema, a quantidade mínima de cores para uma coloração de arestas é  $\Delta(G)$ <sup>1</sup>, pois pelo menos um vértice tem grau  $\Delta(G)$  e todas as arestas que incidem nele devem ter cores diferentes. Sendo assim, um grafo  $G$  é dito Classe 1 se  $\chi'(G) = \Delta(G)$ ; caso contrário, o grafo é dito Classe 2. O problema de decidir se um grafo é Classe 1 é um problema  $\mathcal{NP}$ -completo (Holyer, 1981). O problema permanece  $\mathcal{NP}$ -completo mesmo quando restrito a grafos cúbicos (Holyer, 1981), grafos  $d$ -regulares para qualquer  $d \geq 3$  fixo (Leven e Galil, 1983) e grafos perfeitos, ainda que restritos a grafos-comparabilidade (Cai e Ellis, 1991). E a complexidade do problema continua indeterminada para os grafos arco-circulares e grafos cordais. A Tabela 1.1 a seguir mostra alguns resultados relacionados.

Tabela 1.1: Alguns resultados relacionados

Ano	Autores	Resultado
1964	V. G. Vizing	$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .
1981	I. Holyer	Decidir se um grafo está na Classe 1 é $\mathcal{NP}$ -Completo.
1981	M. J. Plantholt	Coloração dos grafos com vértice universal.
1991	L. Cai e A. Ellis	Decidir se um grafo está na Classe 1 é $\mathcal{NP}$ -Completo, mesmo quando restrito a algumas classes.
1995	J. Senior e R. J. Wilson	Coloração dos grafos potência de caminho.
1997	C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis e C. P. de Mello	Coloração dos grafos-indiferença com grau máximo ímpar.
1998	J. Meidanis	Coloração dos grafos potência de ciclo.
1998	Ortiz, Maculan e Szwarcfiter	Coloração dos grafos <i>split</i> -indiferença.
1999	C. M. H. de Figueiredo e J. Meidanis e C. P. de Mello	Coloração dos grafos dualmente cordais com grau máximo ímpar.
2001	V. A. Bojarshinov	Coloração dos grafos de intervalo com grau máximo ímpar.
2003	C. M. H. de Figueiredo, J. Meidanis, C. P. de Mello e C. Ortiz	Coloração dos grafos-indiferença reduzidos.
2017	J. B. Sousa Cruz and C. N. Silva and S. M. Almeida	Coloração dos grafos <i>split</i> -comparabilidade.
2018	J. P. W. Bernardi, S. M. Almeida e L. Zatesko	Coloração para casos particulares de arco-circulares próprios.

Dos estudos da década de 90 de Figueiredo, Meidanis, e Mello sobre o problema de coloração de grafos cordais temos a conjectura sobre os grafos cordais e a técnica de coloração através de homomorfismos, chamada de *pullback*.

**Conjectura 1.1** (Figueiredo et al. (1999)). *Todo grafo cordal de grau máximo ímpar é Classe 1.*

A conjectura foi provada através da técnica *pullback* para os grafos de intervalos próprios (Figueiredo et al., 1997), também chamados de grafos-indiferença, uma subclasse dos cordais e dos grafos arco-circulares. Porém, mesmo depois de 20 anos, a conjectura permanece em aberto para os grafos cordais. A mesma técnica foi usada para colorir os grafos de intervalo com grau máximo ímpar (Figueiredo et al., 1999). A Figura 1.1 relaciona os cordais com os grafos arco-circulares, destacando a classe na interseção que tem solução polinomial para o Problema de Coloração de Arestas.

<sup>1</sup>A definição deste e de outros termos pode ser encontrada na Seção 1.2

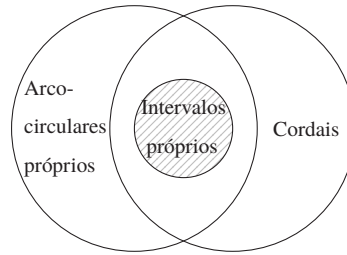


Figura 1.1: Interseção das classes Arco-circulares próprios e Cordais evidenciando grafos de intervalos próprios

A técnica da *pullback* se vale de funções especiais da Teoria dos Grafos chamadas de *homomorfismos*, como discutiremos na sequência. Ao generalizarmos a *pullback*, a nova técnica que surgiu foi chamada de *multi-pullback* e nos permitiu colorir os arco-circulares próprios  $\cap$  cordais com grau máximo ímpar. A Figura 1.2 mostra a contribuição do trabalho, destacando o que já sabemos admitir solução polinomial até então.

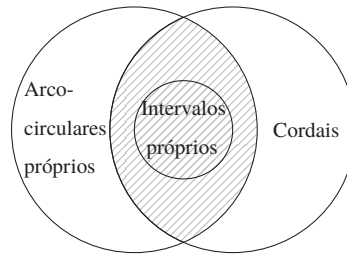


Figura 1.2: Classe de grafos estudada neste trabalho

**Definição 1.2.** Um homomorfismo de um grafo  $G = (V(G), E(G))$  para um grafo  $G' = (V(G'), E(G'))$ , denotado por  $f: G \rightarrow G'$ , é um mapeamento  $f: V(G) \rightarrow V(G')$  tal que se a aresta  $uv \in E(G)$ , então  $f(u)f(v) \in E(G')$ .

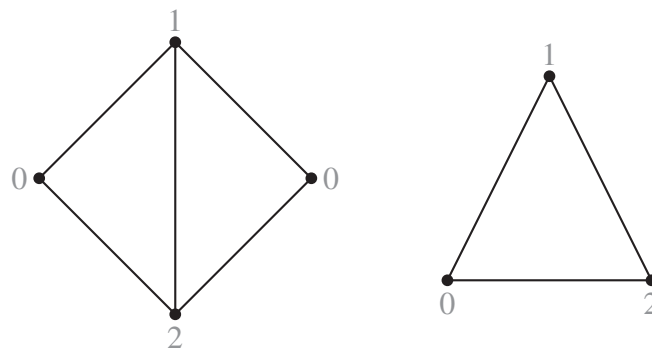


Figura 1.3: Homomorfismo do grafo diamante para o grafo  $K_3$

A *pullback* é uma técnica que pode ser usada tanto para coloração de arestas quanto para coloração total. Assim, estudando a técnica e sua aplicação, foi possível obter resultados para coloração total também, com a *multi-pullback*. Uma coloração total com  $k$  cores de um grafo  $G = (V(G), E(G))$  é uma função  $\varphi: V(G) \cup E(G) \rightarrow \mathcal{C}$ , sendo  $\mathcal{C}$  o conjunto com  $k$  cores de tal forma que elementos adjacentes possuam cores diferentes. O número cromático total de  $G$ , representado por  $\chi''(G)$ , é o menor  $k$  para qual existe uma coloração total própria do grafo. Note que o limitante inferior é dado pela definição do problema, visto que num vértice de

grau máximo, as  $\Delta(G)$  arestas nele incidentes e o vértice devem possuir todas as cores diferentes. Behzad (1965) e Vizing (1968) conjecturam independentemente que  $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$ . Não se conhece nenhum grafo cujo número cromático total seja maior que  $\Delta(G) + 2$ . Por isto, grafos que satisfazem  $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$  são ditos Tipo 1; caso contrário são ditos Tipo 2. Decidir se um grafo é Tipo 1 é um problema  $\mathcal{NP}$ -completo (Sánchez-Arroyo, 1989). Através da técnica desenvolvida, foi possível obter um algoritmo polinomial para coloração total dos grafos arco-circulares próprios  $\cap$  cordais.

## 1.1 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

No restante deste capítulo, há uma seção de definições. No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica principalmente sobre a coloração de arestas através da técnica *pullback*. Essa revisão é essencial para entender como foi desenvolvida a *multi-pullback*, uma generalização da *pullback*, para colorir grafos. A *multi-pullback* é formalmente apresentada no Capítulo 3, no qual é aplicada para mostrar o índice cromático dos grafos arco-circulares próprios  $\cap$  cordais (ACPC) de grau máximo ímpar e o número cromático total de grafos ACPC de grau máximo par. Para concluir, no último capítulo apresentamos os próximos passos da pesquisa, são mostradas classes de grafos nas quais essa técnica talvez possa ser aplicada e os motivos que nos levam a acreditar nessa aplicação.

## 1.2 OUTRAS DEFINIÇÕES

Nesta seção estão listadas algumas definições preliminares elementares, porém outras definições podem aparecer no decorrer do texto. Para um grafo  $G = (V(G), E(G))$ , o conjunto  $V(G)$  representa seus vértices, o conjunto  $E(G)$  suas arestas. No trabalho, são considerados apenas grafos simples, para os quais não existem laços e nem mais de uma aresta entre dois vértices. Uma aresta  $uv$  incide nos vértices  $u$  e  $v$ , e os vértices  $u$  e  $v$  são vizinhos. O grau de um vértice  $u$  é a quantidade de arestas que incidem nele, representado por  $d_G(u)$ . O grau máximo de um grafo é o maior grau dentre os vértices de  $G$ , representado por  $\Delta(G)$ . Se um vértice  $u$  do grafo é adjacente a todos os outros vértices de  $G$ , chamamos  $u$  de vértice universal. O conjunto dos vizinhos de um vértice  $u$  é chamado de vizinhança aberta e pode ser representado por  $N(u)$ . A vizinhança fechada é  $N[u] = N(u) \cup \{u\}$ .

Um subgrafo  $H$  de  $G$  é um grafo para o qual  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Um subgrafo induzido por  $U \subseteq V(G)$  é o grafo tal que  $V(G[U]) = U$  e  $E(G[U]) = \{uv \in E(G) : u, v \in U\}$ . Seja  $U \subseteq E(G)$ , o subgrafo induzido pelo conjunto de arestas  $U$  é o grafo definido por  $V(G[U]) = \{u : uv \in U\}$  e  $E(G[U]) = U$ . Um subgrafo é dito gerador de  $G$  se possui todos os vértices de  $G$ .

O grafo-linha de  $G$  é o grafo cujos vértices são as arestas de  $G$  e as arestas representam as adjacências entre as arestas de  $G$ . O semi-núcleo de um grafo é o subgrafo induzido pelos vértices de grau máximo e seus vizinhos. Um grafo completo é um grafo com aresta entre todo par de vértices. Uma clique  $X$  é um conjunto de vértices de um grafo  $G$  que induzem um grafo completo em  $G$ . Se em  $G$  não existir uma clique maior que contenha  $X$ , dizemos que  $X$  é maximal. Um vértice é simplicial se pertence somente a uma clique maximal ou, equivalentemente, cuja vizinhança fechada é uma clique. Um emparelhamento em um grafo é um conjunto de arestas que não são adjacentes entre si.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Conforme definido no Capítulo 1, um grafo é dito Classe 1 se  $\chi'(G) = \Delta(G)$ , ou Classe 2 se  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ . Uma condição suficiente para um grafo ser Classe 2 é ser *sobrecarregado*. Para um grafo com  $n$  vértices, observe que cada cor forma um emparelhamento com no máximo  $\lfloor n/2 \rfloor$  arestas. Um grafo é chamado de *sobrecarregado* se a quantidade de arestas for maior que  $\Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$ , situação em que o grafo obrigatoriamente precisa de  $\Delta(G) + 1$  cores para ter suas arestas coloridas propriamente.

Da mesma forma, se um grafo  $G$  possui um subgrafo de mesmo grau máximo que é sobrecarregado, também são necessárias  $\Delta(G) + 1$  cores e  $G$  é chamado de *subgrafo-sobrecarregado* ou *sobrecarregado por subgrafo*.

**Conjectura 2.1** (Conjectura dos grafos sobrecarregados). *Um grafo  $G$  com  $\Delta(G) > |V(G)|/3$  é Classe 2 se e somente se  $G$  é subgrafo-sobrecarregado.*

Essa conjectura foi apresentada pela primeira vez em 1984 para grafos regulares (Chetwynd e Hilton, 1984). Em 1986 foi generalizada para grafos não regulares, porém para grafos tal que  $\Delta(G) \geq |V(G)|/3$  (Chetwynd e Hilton, 1986). Em 1987, tomou a forma como conhecemos hoje (Hilton e Johnson, 1987).

Niessen (1994) provou que um grafo é sobrecarregado se e somente se a sua quantidade de vértices for ímpar e respeitar a seguinte soma:  $\sum_{x \in V(G)} \Delta(G) - d_G(x) \leq \Delta(G) - 2$ .

Um grafo ainda pode ser Classe 2 e não ser subgrafo-sobrecarregado. Um exemplo é o  $P^*$ , o grafo de Petersen sem um vértice, mostrado na Figura 2.1. O grafo de Petersen também é Classe 2 e não é sobrecarregado.

Nossos resultados vêm do estudo da técnica *pullback* para coloração de arestas e coloração total (Figueiredo et al., 1995, 1997, 1999). Como dito anteriormente, é conjecturado que o número cromático total é no máximo  $\Delta(G) + 2$ . Por definição,  $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ . Não se conhecem grafos que satisfaçam  $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 3$ . Por isso, quando  $\chi''(G) = \Delta(G) + 1$  o grafo é chamado de Tipo 1 e, caso contrário, Tipo 2. Essa conjectura foi provada para algumas classes, como grafos completos, bipartidos completos (Behzad et al., 1967), grafos com no máximo  $(4\Delta(G))/3$  vértices (Hilton e Hind, 1993) e grafos dualmente cordais (Figueiredo et al., 1999). Mas o problema de decidir o número cromático total de um grafo continua NP-completo mesmo quando restrito para grafos bipartidos.

A *pullback* é uma técnica que pode ser usada para coloração de arestas e total. Uma função *pullback* mapeia os vértices de um grafo  $G$  para um grafo  $G'$  de tal forma que é possível utilizar a coloração de  $G'$  para colorir  $G$ . A definição na página 15 e o lema da página 15 formalizam como isso ocorre. Normalmente, o grafo  $G'$  é um grafo completo e, portanto, o primeiro passo para entender como a *pullback* funciona é entender a coloração dos grafos completos.

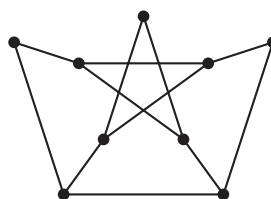


Figura 2.1: Grafo  $P^*$

## 2.1 GRAFOS COMPLETOS

Um grafo completo  $K_n$  possui  $n$  vértices. Quando  $n$  é par, o grafo é Classe 1 e Tipo 2. Quando  $n$  é ímpar, o grafo é Classe 2 e Tipo 1. Esse resultado foi apresentado por Behzad et al. (1967), porém são conhecidos desde muito antes. As funções *pullback* comumente são para grafos completos. O Teorema 2.2, cuja demonstração foi inspirada no trabalho de Figueiredo et al. (1997), mostra que o  $K_n$  é Classe 1, quando  $n$  é par. Quando  $n$  é ímpar, o grafo é Classe 2, pois todo grafo completo com quantidade ímpar de vértices é sobrecarregado. Observe que o número de arestas é  $(n^2 - n)/2$ , que é maior que  $\Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$ , pois  $n$  é ímpar.

**Teorema 2.2.** *Se  $K_n$  é um grafo completo e  $n$  é par, então  $K_n$  é Classe 1.*

*Demonstração.* Rotule os vértices de  $K_n$  com valores de 0 a  $n - 1$ , de forma que todo vértice receba um rótulo diferente. A coloração das arestas será realizada de acordo com a função  $\lambda$  descrita a seguir:

$$\lambda(u, v) = \begin{cases} (u + v) \bmod \Delta(K_n), & \text{se } 0 \leq u, v \leq \Delta(K_n) - 1; \\ (2u) \bmod \Delta(K_n), & \text{se } v = \Delta(K_n); \\ (2v) \bmod \Delta(K_n), & \text{se } u = \Delta(K_n). \end{cases} \quad (2.1)$$

Assuma que  $\lambda$  não é uma coloração válida. Sejam  $u, v$  e  $w$  vértices de  $K_n$  e  $\lambda(u, v) = \lambda(u, w)$ . Assim, existem dois casos.

- Se  $u = \Delta(K_n)$ , então  $2v \equiv 2w \pmod{\Delta(K_n)}$ . E, como  $\Delta(K_n)$  é ímpar,  $v \equiv w \pmod{\Delta(K_n)}$ , implicando que  $v = w$ , uma contradição, pois todos os vértices são números distintos e um grafo completo é um grafo simples.
- Se  $u \neq \Delta(K_n)$ , temos outras duas possibilidades:

–  $v$  ou  $w$  é  $\Delta(K_n)$

Assuma que  $v = \Delta(K_n)$  e, portanto:

$$\begin{aligned} 2u &\equiv w + u \pmod{\Delta(K_n)}, \\ u &\equiv w \pmod{\Delta(K_n)}. \end{aligned}$$

–  $v$  e  $w$  são diferentes de  $\Delta(K_n)$

Então:

$$\begin{aligned} u + v &\equiv w + u \pmod{\Delta(K_n)}, \\ v &\equiv w \pmod{\Delta(K_n)}. \end{aligned}$$

Em ambas possibilidades existe uma contradição, considerando o fato de que não há dois vértices com o mesmo rótulo no grafo  $K_n$ . No primeiro caso,  $u$  é seu próprio vizinho e, no segundo, dois vizinhos de  $u$  são o mesmo vértice. Nenhum dos casos pode ocorrer num grafo simples. Como toda aresta incidente num mesmo vértice tem cor diferente e foram usadas apenas  $\Delta(K_n)$  cores na coloração,  $K_n$  é Classe 1. ■

**Teorema 2.3.**  *$K_n$  é um grafo completo e  $n$  é ímpar, então  $K_n$  é Tipo 1.*

Para coloração total do grafo  $K_n$ , quando  $n$  é ímpar, a prova segue a mesma estrutura, porém a função de coloração é a seguinte:

$$\begin{aligned} \lambda(u, v) &= u + v \pmod{(\Delta(K_n) + 1)}; \\ \lambda(u) &= 2v \pmod{(\Delta(K_n) + 1)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

A Figura 2.2 mostra um exemplo de coloração mínima para os casos apresentados. Na esquerda, uma coloração de arestas para o  $K_4$ , que é Classe 1. Na direita, uma coloração total para o  $K_3$ , que é Tipo 1. Em cinza, seguido do carácter  $\iota$ , estão localizados os rótulos em cada vértice para obter a coloração.

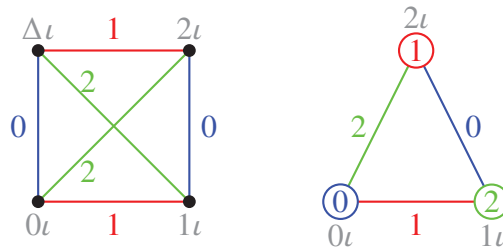


Figura 2.2: Coloração de arestas ótima de um  $K_4$  e coloração total ótima de um  $K_3$

## 2.2 GRAFO DE INTERVALOS

Grafos de intervalos são os grafos-interseção de intervalos sobre a reta real, ou seja, cada vértice representa um intervalo e vértices são adjacentes se os intervalos que representam possuem interseção. Essa representação por intervalos é chamado de modelo de intervalos do grafo. Para um mesmo grafo, podem haver vários modelos. Quando existe um modelo de intervalos tal que nenhum intervalo está propriamente contido em outro, o grafo é chamado de grafo de intervalos próprios. Quando existe um modelo de intervalos tal que todos os intervalos possuem o mesmo tamanho, o grafo é chamado de grafo de intervalos unitários. Essas duas subclasses são equivalentes e também conhecidas como grafos-indiferença (Roberts, 1969).

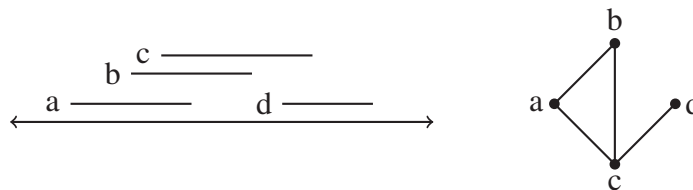


Figura 2.3: Um grafo de intervalos e sua representação por intervalos

Outra forma de caracterizar um grafo de intervalos próprios é pela existência de uma ordem-indiferença para os seus vértices. Uma ordem-indiferença de um grafo é uma ordem linear dos vértices de tal forma que vértices pertencentes a uma mesma clique maximal aparecem consecutivamente nessa ordem (Roberts, 1969). Ou seja, se  $u$  e  $v$  são vértices de um grafo-indiferença, se o grafo está numa ordem-indiferença, e  $u$  é vizinho de  $v$ , então todos os vértices entre  $u$  e  $v$ , na ordem, induzem um grafo completo. A Figura 2.4 mostra o grafo representado por intervalos próprios na Figura 2.3 quando colocado na ordem-indiferença.



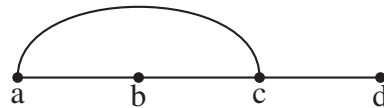


Figura 2.4: Ordem-indiferença do grafo da Figura 2.3

Os grafos de intervalos formam uma subclasse dos dualmente cordais. Para definir o que são grafos dualmente cordais, são necessários os conceitos de clique e árvore geradora. Uma árvore geradora de  $G$  é um subgrafo de  $G$  conexo, sem ciclos, que contém todos os vértices de  $G$ . Um grafo  $G$  é dualmente cordal quando existe uma árvore geradora  $T$  de  $G$  tal que toda clique maximal de  $G$  induz uma subárvore de  $T$ . Para os grafos dualmente cordais com grau máximo ímpar (par) e, conseqüentemente, para os grafos-indiferença que possuem grau máximo ímpar (par), através da técnica *pullback*, existe um algoritmo polinomial para o Problema da Coloração de Arestas (Problema da Coloração Total). A Definição 2.4 apresenta o que é uma função *pullback* e o Lema 2.5 mostra como obter uma coloração a partir da *pullback*. A Figura 2.6 mostra um exemplo de *pullback*.

**Definição 2.4** (*Pullback* (Figueiredo et al., 1995, 1997, 1999)). Uma função  $f : V(G) \rightarrow V(G')$  é uma *pullback* se:

- $f$  é um homomorfismo;
- $f$  é injetiva quando restrita a  $N_G[u]$  para todo  $u \in V(G)$ .

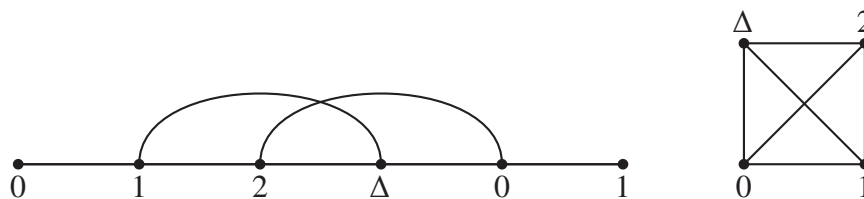


Figura 2.5: Exemplo de *pullback* em um grafo de intervalo com grau máximo ímpar

**Lema 2.5** (Figueiredo et al., 1995, 1997, 1999). Se  $f : V(G) \rightarrow V(G')$  é uma *pullback* e  $\pi'$  é uma coloração de arestas de  $G'$ , então a função  $\pi$  definida por  $\pi(xy) = \pi'(f(x)f(y))$  é uma coloração de arestas de  $G$ . Se  $f : V(G) \rightarrow V(G')$  é uma *pullback* e  $\pi'$  é uma coloração total de  $G'$ , então a função  $\pi$  definida por  $\pi(xy) = \pi'(f(x)f(y))$  e  $\pi(x) = \pi'(f(x))$  é uma coloração total de  $G$ .

**Teorema 2.6** (Figueiredo et al., 1999). Todo grafo dualmente cordal com grau máximo ímpar é Classe 1 e todo dualmente cordal com grau máximo par é Tipo 1.

O Teorema 2.7 é um caso particular do Teorema 2.6, e sua prova foi feita dois anos antes, uma das primeiras vezes que a *pullback* foi usada.

**Teorema 2.7** (Figueiredo et al., 1997, 1999). Todos os grafos-indiferença com grau máximo ímpar são Classe 1.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo-indiferença. Considerando uma ordem-indiferença, rotule os vértices a partir do primeiro vértice, da esquerda para direita, seguindo a sequência  $0, 1, \dots, \Delta(G) - 1, \Delta(G), 0, 1, \dots$  e assim sucessivamente. Seja a função  $l : V(G) \rightarrow \{0, \dots, \Delta(G)\}$  usada para rotular os vértices. Sem perda de generalidade, assumamos que  $V(K_{\Delta(G)+1}) = \{0, \dots, \Delta(G)\}$ . Desta forma, a função  $l : V(G) \rightarrow V(K_{\Delta(G)+1})$  é uma função *pullback*, pois:

- É homomórfica, i.e. se  $uv \in E(G)$ , então  $l(u)l(v) \in E(K_{\Delta(G)+1})$ .
- É injetiva em qualquer vizinhança fechada do grafo, pois a distância de dois vértices  $u$  e  $v$  tal que  $l(u) = l(v)$ , considerando a ordem indiferença, é no mínimo  $\Delta(G) + 1$ . Se acontecesse de  $u$  e  $v$  serem vizinhos, como todas as arestas entre os vértices  $u$  e  $v$  devem existir,  $d_G(u) > \Delta(G)$  e  $d_G(v) > \Delta(G)$ , uma contradição.

Assim, segundo o Lema 2.5, o índice cromático de  $G$  é igual ao índice cromático de  $K_{\Delta(G)+1}$ . Como  $\Delta(G)$  é ímpar,  $G$  é Classe 1. ■

**Teorema 2.8** (Figueiredo et al., 1997, 1999). *Todos os grafos-indiferença com grau máximo par são Tipo 1.*

A demonstração para o Teorema 2.8 é análoga a demonstração do Teorema 2.7, porém usando a função de coloração  $\lambda$  definida em (2.2), pois é uma coloração total. A *pullback* também é feita para o  $K_{\Delta(G)+1}$ , porém são considerados apenas grafos com grau máximo par, pois assim o completo  $K_{\Delta(G)+1}$  é de ordem ímpar e, portanto, Tipo 1. A *pullback* se apropria da coloração de outro grafo, por isso ela não pode ser usada para mostrar que um grafo é Classe 2 ou Tipo 2. O fato de existir uma coloração com  $\Delta(G) + 1$  cores não garante que uma coloração própria para o mesmo grafo com  $\Delta(G)$  cores não possa existir. Por isso, para coloração de arestas  $\Delta(G)$  deve ser ímpar, assim  $K_{\Delta(G)+1}$  é Classe 1, e para coloração total  $\Delta(G)$  deve ser par, pois  $K_{\Delta(G)+1}$  é Tipo 1, garantindo colorações mínimas. A Figura 2.6 mostra um exemplo de *pullback* de um grafo-indiferença, em cinza e identificados com o símbolo  $\iota$  é possível ver os rótulos usados na *pullback*.

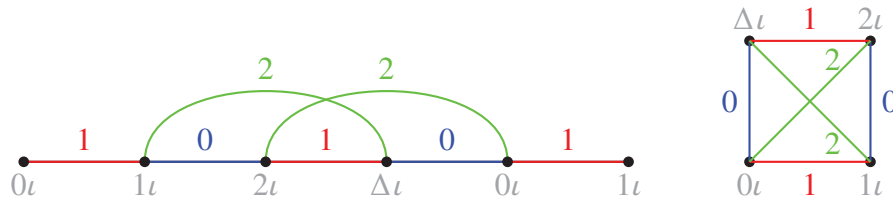


Figura 2.6: Exemplo de *pullback* em um grafo de intervalo com grau máximo ímpar

Recentemente, a *pullback* também foi usada para colorir as arestas de grafos arco-circulares próprios de grau máximo ímpar quando  $|V(G)| \equiv 0 \pmod{(\Delta(G)+1)}$  ou que possuem clique maximal de tamanho 2 e  $|V(G)| \not\equiv 1, \Delta(G) \pmod{(\Delta(G)+1)}$  (Bernardi et al., 2018). Os grafos arco-circulares são uma superclasse dos grafos de intervalo e dos arco-circulares próprios.

### 2.3 GRAFOS ARCO-CIRCULARES

Os grafos arco-circulares são grafos interseção de arcos sobre uma circunferência, uma generalização dos grafos de intervalo. Sua representação por arcos é chamada de modelo arco-circular e não é única para um mesmo grafo. Se existe um modelo tal que todos os arcos possuem o mesmo tamanho, são chamados de unitários. Se existe um modelo tal que nenhum arco está propriamente contido em outro, são chamados de próprios. Diferente dos grafos de intervalos, as classes de arco-circulares próprios e arco-circulares unitários não são equivalentes, como pode ser observado na Figura 2.7.

Além disso, a quantidade de cliques maximais nos grafos de intervalo é linear no número de vértices, enquanto nos grafos arco-circulares pode ser exponencial (Lin e Szwarcfiter, 2009). Isso mostra como um problema pode ficar mais complicado quando trabalhado nos grafos

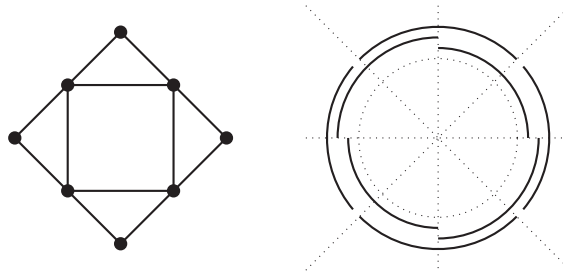


Figura 2.7: Representação por arcos de um grafo arco-circular próprio mas não unitário

arco-circulares, uma superclasse dos grafos de intervalo. Um exemplo é o Problema da Coloração de Vértices, que é NP-completo para essa classe (Garey et al., 1980).

Apenas a *pullback* não é o suficiente para colorir esses grafos. Então, para prosseguir com os estudos do Problema de Coloração de Arestas, foi escolhido restringir a classe, e começamos a estudar o problema para os grafos arco-circulares próprios que também são cordais.

## 2.4 GRAFOS CORDAIS

Os grafos cordais são grafos que não possuem ciclos induzidos de tamanho maior que 3. Uma característica desses grafos é a ordem de eliminação perfeita. Uma ordem dos vértices  $v_1, \dots, v_n$  do grafo é uma ordem de eliminação perfeita se para todo  $i$ , o vértice  $v_i$  é simplicial no grafo induzido pelos vértices  $v_1, \dots, v_i$ . Não se sabe a complexidade de determinar o índice cromático de grafos cordais, mesmo esse problema estando na famosa tabela de problemas NP-completos de D. Johnson de 1985. Figueiredo, Meidanis, e Mello conjecturaram na década de 90 que todo grafo cordal de grau máximo ímpar é Classe 1 (Figueiredo et al., 1999), porém a conjectura permanece aberta até hoje.

Por conta da conjectura e o fato de nenhum grafo arco-circular próprio  $\cap$  cordal (ACPC) de grau máximo ímpar ser sobre-carregado (veja o Lema 3.6), foi escolhido trabalhar com esta classe de grafos. No Lema 3.5 é mostrada uma caracterização parcial desses grafos, embora a caracterização já tenha sido feita por Bang-Jensen e Hell (1994). Obter um algoritmo polinomial para o Problema da Coloração de Arestas para os grafos ACPC de grau máximo ímpar, como foi feito, é uma evidência para a conjectura. Isso foi possível através da técnica desenvolvida chamada de *multi-pullback*.

A *multi-pullback* nada mais é que múltiplas funções *pullback* aplicadas num mesmo grafo, garantindo que não há conflito de cor. No próximo capítulo, definiremos formalmente a nova técnica e mostraremos os resultados obtidos para os grafos ACPC.

### 3 RESULTADOS

Nesse capítulo apresentaremos os resultados obtidos, começando pela técnica *multi-pullback* para coloração de arestas e coloração total. Depois, temos a definição dos grafos arco-circulares próprios  $\cap$  cordais em função da estrutura de seus cliques maximais. Por fim, apresentamos seu índice cromático quando o grau máximo é ímpar e seu número cromático total para os casos em que o grau máximo é par.

**Definição 3.1** (*Multi-pullback* para coloração de arestas). Seja  $G = (V(G), E(G))$  um grafo com  $E(G) \neq \emptyset$  e seja  $\{E_1, \dots, E_t\}$  uma partição de  $E(G)$ . Uma *multi-pullback*  $F$  de  $G$  para uma coleção de  $t$  grafos  $\{G'_1, \dots, G'_t\}$  é uma coleção de  $t$  funções  $\{f_1, \dots, f_t\}$  de tal forma que:

- $f_i$  é uma *pullback* de  $G[E_i]$  para  $G'_i$ ;
- existe um inteiro  $k$  e uma coleção de colorações de arestas de  $k$  cores  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_t$  de  $G'_1, \dots, G'_t$ , respectivamente, e as *pullbacks*  $f_1, \dots, f_t$  não criam conflitos de cor nas arestas de  $G$ , i.e., a função definida por

$$\lambda(uv) := \lambda'_i(f_i(u)f_i(v)), \text{ sendo } E_i \text{ o conjunto da partição a que } uv \text{ pertence,}$$

é uma coloração própria com  $k$  cores de  $G$ .

Note que apenas os conjuntos da partição  $\{E_1, \dots, E_t\}$  são necessariamente disjuntos, enquanto nos outros domínios das funções em  $F$ , que são conjuntos de vértices, isso não acontece. Ou seja, um único vértice  $u$  pode ser mapeado para um vértice  $v$  de  $G'_i$  por uma *pullback*  $f_i$  e para outro vértice  $w$  de  $G'_j$  por uma *pullback*  $f_j$ , dependendo do rótulo necessário para colorir cada aresta incidente em  $u$ .

**Definição 3.2** (*Multi-pullback* para coloração total). Seja  $G = (V(G), E(G))$  um grafo com  $E(G) \neq \emptyset$ , seja  $\{E_1, \dots, E_t\}$  uma partição de  $E(G)$  e seja  $\{V_1, \dots, V_t\}$  uma partição de  $V(G)$  tal que  $V_i \subset V(G[E_i])$  para todo  $i$  de 1 a  $t$ . Uma *multi-pullback*  $F$  de  $G$  para uma coleção de  $t$  grafos  $\{G'_1, \dots, G'_t\}$  é uma coleção de  $t$  funções  $\{f_1, \dots, f_t\}$  de tal forma que:

- $f_i$  é uma *pullback* de  $G[E_i]$  para  $G'_i$ ;
- existe um inteiro  $k$  e colorações totais com  $k$  cores  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_t$  de  $G'_1, \dots, G'_t$ , respectivamente, e a função definida por

$$\begin{aligned} \lambda(uv) &:= \lambda'_i(f_i(u)f_i(v)), & \text{sendo } E_i \text{ o conjunto da partição a que } uv \text{ pertence, e} \\ \lambda(u) &:= \lambda'_i(f_i(u)), & \text{sendo } V_i \text{ o conjunto da partição a que } v \text{ pertence,} \end{aligned}$$

é uma coloração total com  $k$  cores de  $G$ .

Note também que, para coloração total, um vértice pode ter várias cores, uma para cada função *pullback* de que participa, porém a cor aplicada no vértice é dada pela função  $f_i$  tal que  $V_i$  é a partição a qual o vértice pertence. A Figura 3.1 mostra um exemplo de uma coleção de funções  $\{f_1, f_2, f_3\}$  que é uma *multi-pullback* para coloração de arestas de um grafo ACPC  $G$  com  $\Delta(G) = 5$  para o  $K_6$ , com a coloração de arestas própria com 5 cores  $\lambda'_1 = \lambda'_2 = \lambda'_3 =: \lambda'$  do  $K_6$  conforme a Equação 2.1.

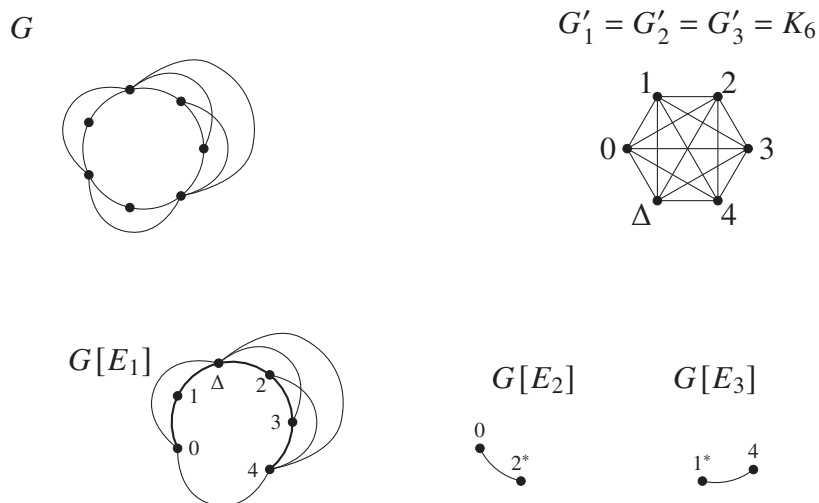


Figura 3.1: Exemplo de uma *multi-pullback* de  $G$  para o  $K_6$  colorido como definido em (2.1). Note que o vértice marcado com asterisco está mapeado para dois vértices distintos por  $f_2$  e  $f_3$ , sem que haja conflito de cor.

### 3.1 GRAFOS ARCO-CIRCULARES PRÓPRIOS $\cap$ CORDAIS

Os ACPC, por serem arco-circulares próprios, possuem a propriedade 1-consecutivos (Tucker, 1971), ou seja, existe uma ordem circular dos seus vértices de tal forma que para toda aresta  $\vec{uv}$ , no sentido horário das arestas nessa ordem, todos os vértices entre  $u$  e  $v$  induzem um grafo completo no grafo não-dirigido. Essa propriedade também é chamada de ordem arco-circular própria. Essa caracterização já foi feita por Bang-Jensen e Hell (1994) através de subgrafos induzidos proibidos, mas foi através da nossa caracterização que foi possível desenvolver a *multi-pullback*. Nossa caracterização é focada na estrutura do grafo na ordem arco-circular e descarta os casos para os quais o Problema de Coloração de Arestas já está resolvido, ou seja, já existe um algoritmo de tempo polinomial que resolva este problema. O Lema 3.3 e o Lema 3.4 descartam os casos já resolvidos do Problema de Coloração das Arestas e do Problema da Coloração Total para os grafos ACPC.

**Lema 3.3.** *Seja  $G$  um grafo ACPC com grau máximo ímpar. Se  $G$  tem um vértice universal, ou se o semi-núcleo de  $G$  é um grafo-indiferença, então  $G$  é Classe 1.*

*Demonstração.* Observe que se  $G$  tem um vértice universal, então  $G$  é um subgrafo do  $K_{\Delta(G)+1}$  e, portanto, é *Classe 1*. Agora, se o semi-núcleo de  $G$  é um grafo-indiferença, então  $G$  também é *Classe 1*, pois o índice cromático de um grafo é igual ao índice cromático de seu semi-núcleo (Machado e Figueiredo, 2010) e todo grafo-indiferença de grau máximo ímpar é *Classe 1* (Figueiredo et al., 1997). ■

**Lema 3.4.** *Seja  $G$  um grafo ACPC com grau máximo par. Se  $G$  tem um vértice universal, então  $G$  é um subgrafo do  $K_{\Delta(G)+1}$  e, portanto, é Tipo 1. Se  $G$  for um grafo-indiferença,  $G$  é Tipo 1 (Figueiredo et al., 1997).*

O Lema 3.5 mostra uma caracterização completa da estrutura dos grafos ACPC que não possuem vértice universal.

**Lema 3.5.** *Se  $G$  é um grafo ACPC sem vértice universal tal que não é um grafo-indiferença, existe uma 6-partição  $\{Y_A, Y_{AB}, Y_B, Y_{BC}, Y_C, Y_{AC}\}$  de  $V(G)$  que separa qualquer ordem arco-circular própria de  $G$  em seis subsequências contíguas (isto é, todos os vértices em cada uma dessas*

subseqüências aparecem consecutivamente na ordem) nesta ordem de uma maneira que, sendo a cardinalidade de cada conjunto denotada pela letra correspondente em minúsculo:

- (i) o grafo  $G$  tem exatamente quatro cliques maximais, as quais podem ser dadas por:  
 $X_A := \{Y_{AB} \cup Y_A \cup Y_{AC}\}$ ,  $X_B := \{Y_{BC} \cup Y_B \cup Y_{AB}\}$ ,  $X_C := \{Y_{AC} \cup Y_C \cup Y_{BC}\}$ , e  
 $Z = \{Y_{AB} \cup Y_{AC} \cup Y_{BC}\}$ ;
- (ii)  $X_A$  é sem perda de generalidade a clique de maior tamanho dentre as três cliques que aparecem contiguamente na ordem arco-circular própria, que são as cliques  $X_A$ ,  $X_B$  e  $X_C$ ;
- (iii) todos os vértices em  $X_{AB}$  possuem grau máximo e, se o seminúcleo de  $G$  não for um grafo-indiferença, todos os vértices de  $X_{AC}$  também;
- (iv)  $\Delta(G) = y_a + y_b + y_{ab} + y_{bc} + y_{ac} - 1$  e se o semi-núcleo de  $G$  não for um grafo-indiferença, também temos que  $\Delta(G) = y_a + y_c + y_{ab} + y_{bc} + y_{ac} - 1$ ;
- (v)  $y_a \geq y_b = y_c$  e  $y_a \geq y_b = y_c$ , se o semi-núcleo de  $G$  não for um grafo-indiferença.

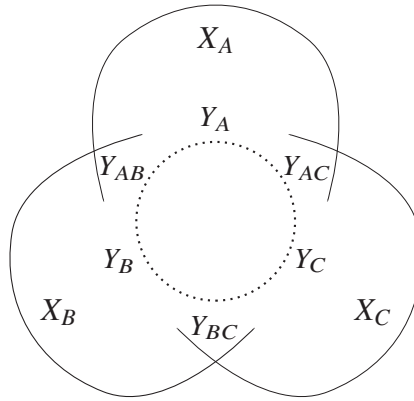


Figura 3.2: Estrutura de um grafo ACPC de acordo com o Lema 3.5.

*Demonstração.* Seja  $\sigma$  uma ordem arco-circular própria de  $G$  e  $(X_0, X_1, \dots, X_{t-1})$  as cliques maximais que aparecem contiguamente em  $\sigma$ . Temos que  $t \geq 3$ , caso contrário é trivial mostrar que  $G$  é um grafo-indiferença.

Alegamos que não existe  $X_i$  tal que  $X_i \subset X_{(i-1) \bmod t} \cup X_{(i+1) \bmod t}$ . Se o que alegamos é verdadeiro, um ciclo induzido de tamanho  $t$  é facilmente obtido escolhendo um vértice de cada  $X_i \cap X_{(i+1) \bmod t}$ . Como  $G$  é cordal e não é um grafo indiferença, temos que  $t = 3$ . Essas três cliques maximais de  $G$  que aparecem contiguamente em  $\sigma$  são  $X_A$ ,  $X_B$  e  $X_C$ , respectivamente.

Como  $G$  não é um grafo-indiferença, temos que a interseção de duas cliques consecutivas em  $\sigma$  não é vazia (caso contrário, em qualquer modelo arco-circular de  $G$  existiria um ponto na circunferência não coberto por arcos). Definimos os conjuntos  $Y_{AB} := X_A \cap X_B$ ,  $Y_{BC} := X_B \cap X_C$ , e  $Y_{AC} := X_A \cap X_C$ , e também  $Y_A := X_A \setminus (Y_{AB} \cup Y_{AC})$ ,  $Y_B := X_B \setminus (Y_{AB} \cup Y_{BC})$  e  $Y_C := X_C \setminus (Y_{AC} \cup Y_{BC})$ . Como todos os vértices de  $Y_{AB} \cup Y_{BC} \cup Y_{AC}$  são vizinhos entre si, existe uma quarta clique maximal  $Z := Y_{AB} \cup Y_{BC} \cup Y_{AC}$  que não aparece contiguamente em  $\sigma$ .

Até este ponto, provamos que se o que alegamos é verdade, então existe exatamente 3 cliques maximais ( $X_A$ ,  $X_B$ , e  $X_C$ ) que aparecem contiguamente em  $\sigma$ , e também a quarta clique  $Z$ . Também provamos que os conjuntos  $Y_{AB}$ ,  $Y_{BC}$ , e  $Y_{AC}$  não são vazios. É possível demonstrar que os conjuntos  $Y_A$ ,  $Y_B$ , e  $Y_C$  são não-vazios, que é equivalente a provar que cada uma das cliques

$X_A$ ,  $X_B$ , e  $X_C$  possui um vértice simplicial. Se  $Y_A = \emptyset$ , então todo vértice de  $Y_{BC}$  é universal (veja a Figura 3.2), contradizendo a hipótese. A prova da existência de vértice simplicial em  $X_B$  e  $X_C$  é análoga.

Agora, provaremos o que alegamos. Por contradição, assuma que existe uma quarta clique maximal  $X_D$  contígua em  $\sigma$ . Como a interseção de  $Y_{AB}$ ,  $Y_{BC}$ , e  $Y_{AC}$  não são vazias, a clique  $X_D$  deve estar contida na união de duas cliques de  $\{X_A, X_B, X_C\}$ . Sem perda de generalidade, seja  $X_D \subset X_A \cup X_B$ . Os quatro conjuntos  $(X_D \cap X_A) \setminus (X_B \cup X_C)$ ,  $(X_D \cap X_B) \setminus (X_A \cup X_C)$ ,  $(X_B \cap X_C) \setminus X_D$ , e  $(X_C \cap X_A) \setminus X_D$  não são vazios, pois ou  $X_D$  não seria maximal, ou o grafo seria indiferença. Portanto, escolhendo quatro vértices, um de cada um desses conjuntos, obtemos um ciclo induzido de tamanho quatro, contradizendo o fato de  $G$  ser cordal. Consequentemente, provamos que  $X_D$  não pode existir e o que foi alegado é verdadeiro. Além disso, como os vértices em  $Y_A$ ,  $Y_B$  e  $Y_C$  são simpliciais, a única clique maximal que pode existir de forma não contígua em  $\sigma$  é a clique  $Z$  (veja a Figura 3.2).

Resta demonstrar (iii)–(v). Assumindo sem perda de generalidade que  $X_A$  é a clique de maior tamanho entre  $X_A$ ,  $X_B$  e  $X_C$ , seguida de  $X_B$  e  $X_C$ , claramente, há vértices de grau máximo de  $G$  em  $Y_{AB}$ . Quando o semi-núcleo do grafo não é um grafo-indiferença, podemos afirmar também que há vértices de grau máximo de  $G$  em  $Y_{AB} \cup Y_{BC} \cup Y_{AC}$ . Devemos mostrar que  $Y_{AB}$  e  $Y_{AC}$ , ou todos os conjuntos de  $\{Y_{AB}, Y_{AC}, Y_{BC}\}$  possuem vértices de grau máximo. Se apenas um conjunto  $I$  de  $\{Y_{AB}, Y_{AC}, Y_{BC}\}$  possui vértices de grau máximo em  $G$ , certamente  $I \neq BC$  pelo que foi assumido da cardinalidade de  $X_A$ . Se  $I = Y_{AB}$ , então o semi-núcleo de  $G$  é um grafo-indiferença, porque a ordem  $Y_B, Y_{BC}, Y_{AB}, Y_{AC}, Y_A$  é uma ordem indiferença. A demonstração do caso  $I = Y_{AC}$  segue de forma análoga. Observe que isto também prova que o semi-núcleo de  $G$  é  $G$  (isto prova (iii)).

Perceba que vértices que pertencem ao mesmo conjunto dentre  $Y_A, Y_{AB}, Y_B, Y_{BC}, Y_C$  e  $Y_{AC}$  têm a mesma vizinhança fechada e, portanto, o mesmo grau. Seja  $u$  um vértice em  $Y_{AB}$ ,  $v$  um vértice em  $Y_{AC}$ , e  $w$  um vértice em  $Y_{BC}$ . Sabemos que  $\Delta(G) = d_G(u) \geq d_G(v) \geq d_G(w)$  e quando o semi-núcleo do grafo não é um indiferença  $\Delta(G) = d_G(u) = d_G(v) \geq d_G(w)$ , e também:

$$\begin{aligned} d_G(u) &= y_{bc} + y_b + y_{ab} + y_a + y_{ac} - 1; \\ d_G(v) &= y_{ab} + y_a + y_{ac} + y_c + y_{bc} - 1; \\ d_G(w) &= y_{ab} + y_b + y_{bc} + y_c + y_{ac} - 1. \end{aligned}$$

Dessas equações temos (iv), e também que  $y_a \geq y_b$  e quando o semi-núcleo não é um indiferença  $y_b = y_c$ , completando a prova de (v). ■

Para o Problema de Coloração de Arestas, sempre consideraremos que o semi-núcleo do grafo não é um grafo-indiferença, conforme o Lema 3.3. O Lema 3.6 mostra como nenhum grafo ACPC com grau máximo ímpar pode ser subgrafo-sobrecarregado.

**Lema 3.6.** *Nenhum grafo ACPC com grau máximo ímpar é subgrafo-sobrecarregado.*

*Demonstração.* Para um grafo ser sobrecarregado, é necessário ele ter ordem ímpar e satisfazer a equação  $\sum_{x \in V(G)} \Delta(G) - d_G(x) \leq \Delta(G) - 2$ . Como  $\Delta(G) = y_a + y_b + y_{ab} + y_{bc} + y_{ac} - 1$  e temos que:

- a soma dos graus dos vértices de  $Y_A$  subtraídos de  $\Delta(G)$  é  $y_a(y_b + y_{bc})$ ;
- a soma dos graus dos vértices de  $Y_{AB}$  subtraídos de  $\Delta(G)$  é 0;
- a soma dos graus dos vértices de  $Y_B$  subtraídos de  $\Delta(G)$  é  $y_b(y_a + y_{ac})$ ;

- a soma dos graus dos vértices de  $Y_{BC}$  subtraído de  $\Delta(G)$  é  $y_{bc}(y_a - y_c)$ ;
- a soma dos graus dos vértices de  $Y_C$  subtraído de  $\Delta(G)$  é  $y_c(y_a - y_{ab})$ ;
- a soma dos graus dos vértices de  $Y_{AC}$  subtraído de  $\Delta(G)$  é 0;

$$y_a(y_b + y_{bc}) + y_b(y_a + y_{ac}) + y_c(y_a - y_{ab}) + y_{bc}(y_a - y_c) \not\leq y_a + y_b + y_{ab} + y_{bc} + y_{ac} - 3.$$

Assim, nenhum grafo ACPC pode ser sobrecarregado. Qualquer subgrafo que não seja o próprio grafo, ou terá como semi-núcleo um indiferença com grau máximo ímpar, todos Classe 1 e, portanto, não sobrecarregados, ou será um subgrafo gerador de algum ACPC, que também não pode ser sobrecarregado. ■

O Teorema 3.7 e o Teorema 3.8 apresentam respectivamente os resultados sobre o índice cromático de grafos ACPC com grau máximo ímpar e o número cromático total de grafos ACPC com grau máximo par.

**Teorema 3.7.** *Todo grafo arco-circular próprio  $\cap$  cordal com grau máximo ímpar é Classe 1.*

*Demonstração.* Tendo em vista o Lema 3.3, seja  $G$  um grafo ACPC de grau máximo ímpar, sem vértice universal, cujo semi-núcleo não é um grafo indiferença. Seja  $\{Y_A, Y_{AB}, Y_B, Y_{BC}, Y_C, Y_{AC}\}$  uma partição de  $V(G)$  como definido no Lema 3.5 (veja a Figura 3.2). Seja  $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  uma partição de  $E(G)$  definida por:

$$\begin{aligned} E_1 &:= E(G[Y_A \cup Y_{AB} \cup Y_B \cup Y_{BC} \cup Y_{AC}]); \\ E_2 &:= \{uv : u \in Y_{BC} \text{ e } v \in Y_C\}; \\ E_3 &:= \{uv : u \in Y_{AC} \text{ e } v \in Y_C\}; \\ E_4 &:= E(G[Y_C]). \end{aligned}$$

Seja  $V(K_{\Delta(G)+1}) = \{0, \dots, \Delta(G)\}$  e  $V(K_c) = \{0, \dots, y_c - 1\}$ . Vamos construir uma *multi-pullback*  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  tal que  $f_i: V_i \rightarrow G'_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, 4\}$ , sendo

$$\begin{aligned} V_1 &:= Y_A \cup Y_{AB} \cup Y_B \cup Y_{BC} \cup Y_{AC}, \\ V_2 &:= Y_{BC} \cup Y_C, \\ V_3 &:= Y_{AC} \cup Y_C, \\ V_4 &:= Y_C, \\ G'_1 &:= G'_2 := G'_3 := K_{\Delta(G)+1}, \\ G'_4 &:= K_{y_c}, \end{aligned}$$

sobre as colorações de arestas  $\lambda'_1 := \lambda'_2 := \lambda'_3 := \lambda'$ , tal que  $\lambda'$  é uma coloração de arestas com  $\Delta(G)$  cores de  $K_{\Delta(G)+1}$  definida por (2.1), e  $\lambda'_4$  que é uma coloração de arestas com  $\Delta(G)$  cores de  $K_c$  definida por:

$$\lambda'_4(u, v) = (2y_{ac} + y_a + y_c + y_{bc} + u + v) \bmod \Delta(G). \quad (3.1)$$

É importante ressaltar que  $\lambda'$  é uma coloração de arestas ótima do  $K_{\Delta(G)+1}$  (que é Classe 1 pois  $\Delta(G)$  é ímpar) e que  $\lambda'_4$  certamente não é ótima, pois  $y_c < \Delta(G) - 2$ , porém não há conflito de cores na coloração.

Observe pelo Lema 3.5 que  $|V_1| = \Delta(G) + 1$ . Para definir  $f_1$ , tome qualquer função de rotulação bijetiva satisfazendo:

$$f_1(Y_{AC}) = \{0, \dots, ac - 1\};$$



$$\begin{aligned}
f_1(Y_A) &= \{ac, \dots, ac + a - 1\}; \\
f_1(Y_B) &= \{ac + a, \dots, ac + a + b - 1\}; \\
f_1(Y_{BC}) &= \{ac + a + b, \dots, ac + a + b + bc - 1\}; \\
f_1(Y_{AB}) &= \{ac + a + b + bc, \dots, ac + a + b + bc + ab - 1\}.
\end{aligned}$$

Usamos  $f_1(Z)$  para denotar  $\bigcup_{z \in Z} \{f_1(z)\}$ . Repare que foram usados  $\Delta(G) + 1$  rótulos distintos, de 0 a  $\Delta(G)$ , e é fácil perceber que essa rotulação é uma *pullback* de  $G[E_1]$  para  $G'_1$ .

Resta colorir as arestas incidentes nos vértices de  $Y_C$ , ou seja, ainda é preciso definir as funções  $f_2, \dots, f_4$ . Observe que  $G[E_2 \cup E_3]$  é um grafo bipartido, com as partes  $Y_C$  e  $Y_{BC} \cup Y_{AC}$ , e  $G[E_4]$  é um grafo completo. A Figura 3.3 representa os conjuntos  $Y_{BC}$ ,  $Y_C$  e  $Y_{AC}$ .

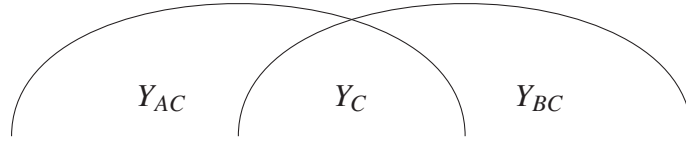


Figura 3.3: Os conjuntos  $Y_{BC}$ ,  $Y_C$ , e  $Y_{AC}$

Analogamente, o grafo  $G[E_2]$  é o bipartido induzido pelas arestas entre  $Y_{BC}$  e  $Y_C$ . Os vértices em  $Y_{BC}$  não são vizinhos dos vértices em  $Y_A$  e, portanto, os rótulos designados por  $f_1$  aos vértices de  $Y_A$  podem ser reusados por  $f_2$  para os vértices em  $Y_C$ , conforme será esclarecido em sequência, e os vértices em  $Y_{BC}$  devem receber os mesmos rótulos em  $f_2$  que receberam por  $f_1$ . Pelo Lemalema:partition, como o semi-núcleo não é um grafo-indiferença,  $a \geq c$ , existem rótulos o suficiente.

Lembre que  $G[E_3]$  é o grafo bipartido induzido pelas arestas entre  $Y_{AC}$  e  $Y_C$ , e perceba que as arestas incidentes nos vértices de  $Y_{AC}$  não incidem nos vértices de  $Y_B$ . Por esse motivo, podemos definir  $f_3$  designando aos vértices de  $Y_{AC}$  os mesmos rótulos que foram designados por  $f_1$ , e aos vértices de  $Y_C$  os mesmos rótulos de  $Y_B$  dados por  $f_1$ , de uma forma que será esclarecida em sequência. Pelo Lemalema:partition, como o semi-núcleo não é um grafo-indiferença,  $y_b = y_c$ , e existem rótulos suficientes para todos os vértices.

Para completar a prova, resta definir quais são os três rótulos designados para cada vértice em  $Y_C$  pelas funções  $f_2$ ,  $f_3$ , e  $f_4$ , e mostrar que a coloração de arestas obtida através dessas pullbacks não cria conflito de cor em  $G$ . Seja  $C = \{u_0, \dots, u_{y_c-1}\}$ . Nós definimos para cada  $u_i \in C$  a tripla  $(f_2(u_i), f_3(u_i), f_4(u_i)) := (y_{ac} + y_a + i, y_{ac} + i, i)$ . Seja  $\lambda$  a coloração de arestas com  $\Delta(G)$  cores de  $G$  conforme a Definição 3.2. Mostraremos que  $\lambda$  é uma coloração de arestas própria, para isso basta mostrar que a cor de todas as arestas incidentes num mesmo vértice  $u_i$  de  $C$  são diferentes.

As cores nas arestas incidentes em  $u_i$  podem ser verificadas como listadas a seguir (todas as cores listadas abaixo são  $\text{mod } \Delta(G)$ , mas essa informação foi omitida para uma descrição mais limpa):

- as cores das arestas de  $G[E_2]$  que incidem em  $u_i$  são as  $y_{ac}$  cores do conjunto

$$\{y_{ac} + y_a + i, \dots, 2y_{ac} + y_a + i - 1\};$$

- as cores das arestas de  $G[E_3]$  que incidem em  $u_i$  são as  $y_{bc}$  cores do conjunto

$$\{2y_{ac} + y_a + y_b + i, \dots, 2y_{ac} + y_a + y_b + y_{bc} + i - 1\};$$

- as cores das arestas de  $G[E_4]$  que incidem em  $u_i$  são as  $y_c - 1$  cores do conjunto

$$\{2y_{ac} + y_a + y_b + y_{bc} + i, \dots, 2y_{ac} + y_a + 2y_b + y_{bc} + i\} \setminus \{2y_{ac} + y_a + y_b + y_{bc} + 2i\};$$

Repare que nas arestas incidentes a  $u_i$ , as  $y_b$  cores entre

$$(2y_{ac} + y_a + i) \bmod \Delta(G)$$

e

$$(2y_{ac} + y_a + y_b + i - 1) \bmod \Delta(G)$$

não foram usadas, assim como a cor

$$(2y_{ac} + y_a + y_b + y_{bc} + 2i) \bmod \Delta(G).$$

Como

$$y_{ac} + y_b + y_{bc} + y_c \leq \Delta(G) = y_{ac} + y_{bc} + y_{ab} + y_a + y_c - 1,$$

não existe conflito de cor em  $u_i$ .

Como mostramos que não há conflito de cor em nenhum vértice  $u_i \in C$ , concluímos que  $G$  é Classe 1. ■

A Figura 3.4 mostra um grafo ACPC conforme a estrutura definida no Lema 3.5 e uma coloração de arestas desse grafo, obtida através da técnica *multi-pullback*. Em cinza, seguido do símbolo  $\iota$ , é possível observar os rótulos que cada vértice recebeu.

**Teorema 3.8.** *Todo grafo arco-circular próprio  $\cap$  cordal com grau máximo par é Tipo 1.*

*Demonstração.* Para coloração total o Lema 3.3 não pode ser usado. A única parte que pode ser considerada é que o grafo não possui vértice universal. Se possuísse, seria um subgrafo do  $K_{\Delta(G)+1}$  com mesmo grau máximo e, portanto, Tipo 1. Seja  $\{Y_A, Y_{AB}, Y_B, Y_{BC}, C, Y_{AC}\}$  uma partição de  $V(G)$  como definido no Lema 3.5 (se necessário, veja a Figura 3.2) e  $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  uma partição de  $E(G)$  definida por:

$$E_1 := E(G[Y_A \cup Y_{AB} \cup Y_B \cup Y_{BC} \cup Y_{AC}]);$$

$$E_2 := \{uv : u \in Y_{BC} \text{ e } v \in Y_C\};$$

$$E_3 := \{uv : u \in Y_{AC} \text{ e } v \in Y_C\};$$

$$E_4 := E(G[Y_C]).$$

Sejam  $V(K_{\Delta(G)+1}) = \{0, \dots, \Delta(G)\}$  e  $V(K_{y_c}) = \{0, \dots, y_c - 1\}$ . Vamos construir uma *multi-pullback*  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  tal que  $f_i: V_i \rightarrow G'_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, 4\}$ , sendo

$$V_1 := Y_A \cup Y_{AB} \cup Y_B \cup Y_{BC} \cup Y_{AC},$$

$$V_2 := Y_{BC} \cup Y_C,$$

$$V_3 := Y_{AC} \cup Y_C,$$

$$V_4 := Y_C,$$

$$G'_1 := G'_2 := G'_3 := K_{\Delta(G)+1},$$

$$G'_4 := K_{y_c},$$

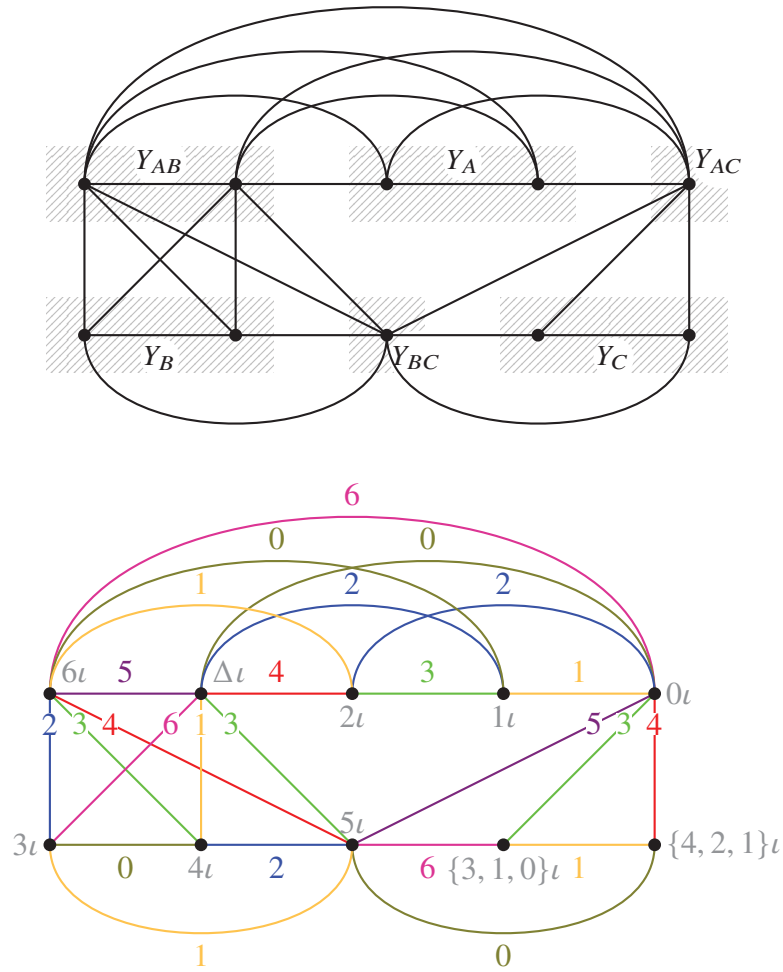


Figura 3.4: Grafo ACPC, primeiro sua representação conforme Lema 3.5 e depois uma coloração de arestas para o grafo.

sobre as colorações totais  $\lambda'_1 := \lambda'_2 := \lambda'_3 := \lambda'$ , tal que  $\lambda'$  é a coloração total com  $\Delta(G) + 1$  cores de  $K_{\Delta(G)+1}$  definida por (2.2), e  $\lambda^{p'}_4$  ou  $\lambda^{i'}_4$ , colorações totais de  $K_{y_c}$ , definidas a seguir. A função  $\lambda^{i'}_4$  deve ser usada quando  $y_b$  for ímpar, e a função  $\lambda^{p'}_4$  quando  $y_b$  for par.

$$\begin{aligned}\lambda^{p'}_4(u, v) &= (2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + u + v) \pmod{\Delta(G) + 1} \\ \lambda^{p'}_4(u) &= (2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + 2u) \pmod{\Delta(G) + 1} \\ \lambda^{i'}_4(u, v) &= (2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + u + v + 1) \pmod{\Delta(G) + 1} \\ \lambda^{i'}_4(u) &= (2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + 2u + 1) \pmod{\Delta(G) + 1}\end{aligned}$$

Note que  $\lambda'$  é uma coloração total ótima do  $K_{\Delta(G)+1}$  (que é *Tipo 1* pois  $\Delta(G)$  é par) e que tanto  $\lambda^p_4$  quanto  $\lambda^i_4$  certamente não são ótimas, porém não há conflito de cores na coloração.

Observe que pelo Lema 3.5 que  $|V_1| = \Delta(G) + 1$ . Para definir  $f_1$ , tome qualquer função de rotulação bijetiva satisfazendo:

$$\begin{aligned}f_1(AC) &= \{0, \dots, y_{ac} - 1\}; \\ f_1(A) &= \{y_{ac} + y_{bc} + y_b, \dots, y_{ac} + y_{bc} + y_b + y_a - 1\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(B) &= \{y_{ac} + y_{bc}, \dots, y_{ac} + y_{bc} + y_b - 1\}; \\ f_1(BC) &= \{y_{ac}, \dots, y_{ac} + y_{bc} - 1\}; \\ f_1(AB) &= \{y_{ac} + y_a + y_b + y_{bc}, \dots, y_{ac} + y_a + y_b + y_{bc} + y_{ab} - 1\}. \end{aligned}$$

Da mesma maneira que na prova anterior, usamos  $f_1(Z)$  para denotar  $\bigcup_{z \in Z} \{f_1(z)\}$ . Repare que foram usados  $\Delta(G) + 1$  rótulos distintos, de 0 a  $\Delta(G)$ , e é fácil perceber que essa rotulação é uma *pullback* de  $G[E_1]$  para  $G'$ . Os vértices de  $G[E_1]$  são coloridos conforme a *pullback*  $f_1$ .

Resta colorir as arestas incidentes nos vértices de  $C$ , ou seja, ainda é preciso definir as funções  $f_2, \dots, f_4$ . Como na prova do Teorema 3.7, o grafo  $G[E_2 \cup E_3]$  é um grafo bipartido, com as partes  $Y_C$  e  $Y_{BC} \cup Y_{AC}$ , e  $G[E_4]$  é um grafo completo. Então, o grafo que ainda resta para colorir é o mesmo da Figura 3.3, mas, como é uma coloração total, os vértices também serão coloridos.

Da mesma forma, o grafo  $G[E_2]$  é o bipartido induzido pelas arestas entre  $Y_{BC}$  e  $Y_C$ . Os vértices em  $Y_{BC}$  não são vizinhos dos vértices em  $Y_A$  e, portanto, os rótulos designados por  $f_1$  aos vértices de  $Y_A$  podem ser reusados por  $f_2$  para os vértices em  $Y_C$ , conforme será esclarecido em sequência, e os vértices em  $Y_{BC}$  devem receber os mesmos rótulos em  $f_2$  que devem receberam por  $f_1$ . Como  $y_a \geq y_c$ , existem rótulos o suficiente.

O grafo  $G[E_3]$  é o bipartido induzido pelas arestas entre  $Y_{AC}$  e  $Y_C$ . Como já comentado, as arestas incidentes nos vértices de  $Y_{AC}$  não incidem nos vértices de  $Y_B$ . Por esse motivo, podemos definir  $f_3$  designando aos vértices de  $Y_{AC}$  os mesmos rótulos que foram designados por  $f_1$ , e aos vértices de  $Y_C$  os mesmos rótulos de  $Y_B$  dados por  $f_1$ , de uma forma que será esclarecida em sequência. Pelo Lema 3.5,  $y_b \geq y_c$ , e existem rótulos suficientes para todos os vértices.

Para completar a prova, resta definir quais são os três rótulos designados para cada vértice em  $Y_C$  pelas funções  $f_2, f_3$ , e  $f_4$ , definir de qual *pullback* serão obtidas as cores dos vértices em  $Y_C$  e mostrar que a coloração total obtida através dessas *pullbacks* não cria conflito de cor em  $G$ .

Seja  $Y_C = \{u_0, \dots, u_{c-1}\}$ . Definimos para cada  $u_i \in Y_C$  a tripla  $(f_2(u_i), f_3(u_i), f_4(u_i)) := (y_{ac} + y_{bc} + i, y_{ac} + y_{bc} + y_b + i, i)$ . A coloração do vértice  $u_i$  é dada pela *pullback*  $f_4$ . Seja  $\lambda$  a coloração total com  $\Delta(G) + 1$  cores de  $G$  conforme a Definição 3.2. Mostraremos que  $\lambda$  é uma coloração total própria, para isso basta mostrar que a cor de todas as arestas incidentes num mesmo vértice  $u_i$  de  $Y_C$  são diferentes.

As cores nas arestas incidentes em  $u_i$  podem ser verificadas como listadas a seguir (todas as cores listadas abaixo são  $(\text{mod } \Delta(G) + 1)$ , mas essa informação foi omitida para uma descrição mais limpa):

- as cores das arestas de  $G[E_2]$  que incidem em  $u_i$  são as  $y_{bc}$  cores do conjunto

$$\{2y_{ac} + y_{bc} + y_b + i, \dots, 2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + i - 1\};$$

- as cores das arestas de  $G[E_3]$  que incidem em  $u_i$  são as  $y_{ac}$  cores do conjunto

$$\{y_{ac} + y_{bc} + i, \dots, 2y_{ac} + y_{bc} + i - 1\};$$

- as cores das arestas de  $G[E_4]$  que incidem em  $u_i$  quando  $y_b$  é par são as  $y_c - 1$  cores do conjunto

$$\{2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + i, \dots, 2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + y_c + i - 1\} \setminus \{2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + 2i\};$$

- as cores das arestas de  $G[E_4]$  que incidem em  $u_i$  quando  $y_b$  é ímpar são as  $y_c - 1$  cores do conjunto

$$\{2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + i + 1, \dots, 2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + y_c + i\} \setminus \{2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + 2i + 1\}.$$

Repare que nas arestas incidentes em  $u_i$ , as  $b$  cores entre  $(2y_{ac} + y_{bc} + i) \pmod{\Delta(G) + 1}$  e  $(2y_{ac} + y_{bc} + y_b + i - 1) \pmod{\Delta(G) + 1}$  não foram usadas, assim como a cor  $(2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + 2i) \pmod{\Delta(G)}$  quando  $y_b$  é par e  $(2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + 2i + 1) \pmod{\Delta(G)}$  quando  $y_b$  é ímpar. Note também que a quantidade de cores no intervalo de cores usado é  $y_{ac} + y_b + y_{bc} + y_c$  quando  $b$  é par e  $y_{ac} + y_b + y_{bc} + y_c + 1$  quando  $b$  é ímpar. Em ambos os casos, esse valor é menor que  $\Delta(G) + 1$  e, portanto, não há conflito de cores.

As cores dos vértices de  $Y_C$  não podem ter conflito com as cores dos vértices  $Y_{AC}$  e de  $Y_{BC}$ . A seguir são listadas as cores dos vértices desses conjuntos:

- as cores dos vértices de  $Y_{AC}$  são  $\{0, 2, \dots, 2y_{ac} - 2\}$ .
- as cores dos vértices de  $Y_{BC}$  são  $\{2y_{ac}, 2y_{ac} + 2, \dots, 2y_{ac} + 2y_{bc} - 2\}$ .
- as cores dos vértices de  $Y_C$ , quando  $y_b$  é par, são  $\{2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b, 2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + 2, \dots, 2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + 2y_c - 2\}$ .
- as cores dos vértices de  $Y_C$ , quando  $y_b$  é ímpar, são  $\{2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + 1, 2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + 3, \dots, 2y_{ac} + 2y_{bc} + y_b + 2y_c - 1\}$ .

Foram utilizadas  $y_{ac}$  cores para colorir os vértices de  $Y_{AC}$ , mais  $y_{bc}$  cores para colorir os vértices de  $Y_{BC}$ , há  $y_b$  cores não utilizadas, e para colorir os vértices restantes em  $Y_C$  são utilizadas mais  $y_c$  cores na mesma sequência. Não existe conflito de cor num vértice  $u_i$  de  $C$  pois são usadas  $y_{ac} + y_b + y_{bc} + y_c$  cores quando  $y_b$  é par, e  $y_{ac} + y_{bc} + y_c + 1$  cores quando  $y_b$  é ímpar. Tanto no caso par, quanto no caso ímpar, o número de cores é no máximo  $\Delta(G) + 1 = y_{ac} + y_{bc} + y_{ab} + y_a + y_b$ . Haveria conflito apenas se esse valor fosse maior que  $\Delta(G) + 1$ , pois as cores foram usadas em sequência. Apenas depois de usar  $\Delta(G) + 1$  cores elas começariam a se repetir.

Como mostramos que não há conflito de cores em nenhum vértice  $u_i \in Y_C$ , concluímos que  $G$  é Tipo 1. ■

A Figura 3.5 mostra um grafo ACPC, conforme a estrutura definida no Lema 3.5, e uma coloração total dele, obtida através da técnica *multi-pullback*. Da mesma forma que usado anteriormente, os rótulos da *multi-pullback* estão em cinza, sinalizados com o símbolo  $\iota$ .

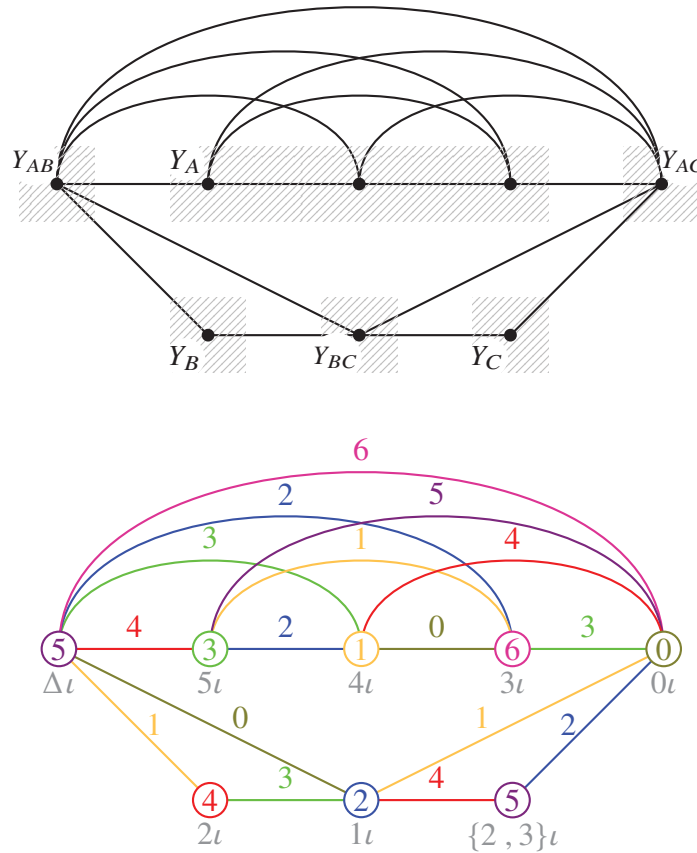


Figura 3.5: Grafo ACPC, primeiro sua estrutura conforme Lema 3.5 adaptado, seguido de uma coloração total para o grafo

### 3.2 MULTI-PULLBACK E PROBLEMAS DE COLORAÇÃO

Até agora, a *multi-pullback* foi utilizada como uma técnica de coloração. Mas não é difícil perceber a equivalência entre a definição da técnica e a definição dos problemas de coloração. Como pode ser observado na Figura 3.6 que mostra uma coloração de arestas para um grafo completo, toda cor induz um emparelhamento.

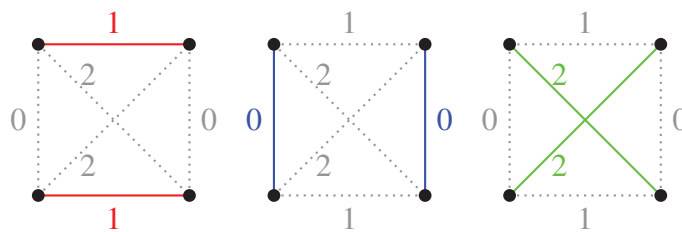


Figura 3.6: Emparelhamento das cores num  $K_4$

Portanto, toda coloração de arestas pode ser representada por no máximo  $\chi'(G)$  *pullbacks*, cada uma delas mapeando as arestas do emparelhamento formado por uma cor  $\lambda$  para um  $K_2$ , cuja aresta é colorida com a cor  $\lambda$ . Isso ocorre de forma análoga para o Problema da Coloração Total e pode ser vista na Figura 3.7.

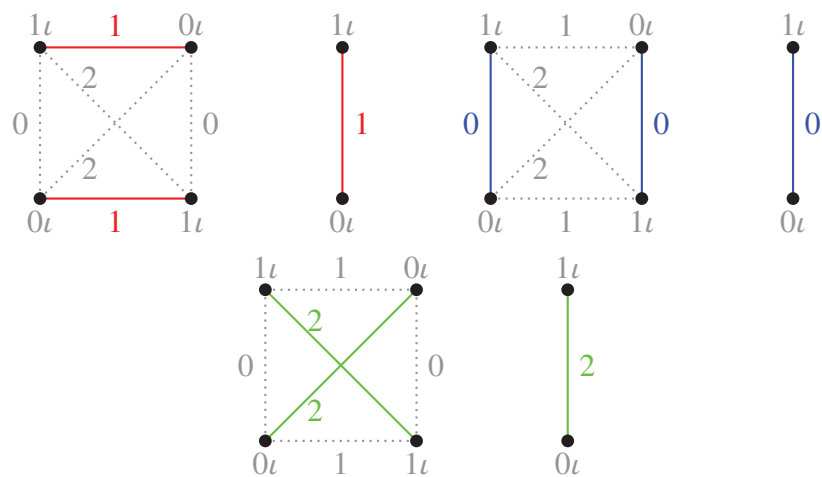


Figura 3.7: *Multi-pullback* para representar a coloração de um  $K_4$

Se toda coloração de arestas (ou total) pode ser representada por uma *multi-pullback*, decidir se um grafo  $G$  é Classe 1 (Tipo 1) é o mesmo que perguntar se existe uma *multi-pullback* para colorir o grafo com  $\Delta(G)$  ( $\Delta(G) + 1$ ) cores.

## 4 CONCLUSÃO E PRÓXIMOS PASSOS

Conjectura-se que todo grafo cordal com grau máximo ímpar é Classe 1 (Figueiredo et al., 1995, 1997, 1999) e nosso resultado traz evidências para essa conjectura. Foi identificado o índice cromático de grafos ACPC com grau máximo ímpar e número cromático total de grafos ACPC com grau máximo par através de uma nova técnica desenvolvida chamada de *multi-pullback*. É interessante observar que nos grafos ACPC, são justamente os vértices simpliciais que recebem múltiplos rótulos. Nos grafos cordais, existe uma ordem de eliminação perfeita dos vértices simpliciais. Isso é um indício que a técnica pode ser explorada nesses grafos, pois a *multi-pullback* surgiu para solucionar conflito de cores causados por rótulos de uma *pullback* em vértices simpliciais. Note que todos os vértices do conjunto  $C$ , de acordo com a caracterização dada dos grafos ACPC, são simpliciais.

Também é interessante explorar a técnica nos grafos-indiferença que possuem  $\Delta(G)$  par que não são subgrafo-sobrecarregados, para os quais o Problema de Coloração de Arestas ainda não foi resolvido. É possível fazer uma *pullback* desses grafos para o  $K_{\Delta(G)+1}$ , porém utilizando a função de coloração conforme a Equação 2.1. Essa coloração não será própria, pois vão ocorrer conflitos de cor em no máximo  $\Delta(G)/2$  arestas e apenas no vértice com rótulo  $\Delta(G)$ . Isso pode ser observado tentando montar um quadrado latino com a Equação 2.1, como exemplos temos a Figura 4.1. A *multi-pullback* poderia resolver esses conflitos de cores.

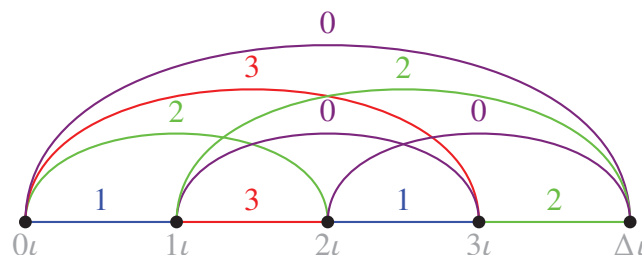


Figura 4.1: Grafo  $K_5$  colorido com a Equação (2.1) com conflito de cor apenas em arestas que incidem o vértice com rótulo  $\Delta$ .

Além disso, foi provado que todos os ACPC de grau máximo par são Tipo 1, então a *multi-pullback* pode ser usada também para coloração total. Assim, foi desenvolvida uma técnica de coloração que funciona tanto para coloração de arestas quanto coloração total e, como comentado anteriormente, essa técnica também pode ser usada como definição dos problemas, abrindo novas possibilidades para quem estuda problemas de coloração. Pretendemos continuar estudando a técnica e em que situações ela pode ser usada para resolver o Problema de Coloração de Arestas e Coloração Total em classes bem estruturadas.



## REFERÊNCIAS

- Bang-Jensen, J. e Hell, P. (1994). On chordal proper circular arc graphs. *Discrete Mathematics*, 128:395–398.
- Behzad, M. (1965). *Graphs and their chromatic numbers*. Tese de doutorado, Michigan State University.
- Behzad, M., Chartrand, G. e Cooper Jr., J. K. (1967). The color numbers of complete graphs. *J. London Math. Soc.*, 42:226–228.
- Bernardi, J. P. W., Almeida, S. M. e Zatesko, L. M. (2018). On total and edge-colouring of proper circular-arc graphs. Em *Proc. 38<sup>th</sup> Congress of the Brazilian Computer Society (CSBC '18/III ETC)*, páginas 73–76, Natal.
- Cai, L. e Ellis, J. A. (1991).  $\mathcal{NP}$ -completeness of edge-colouring some restricted graphs. *Discrete Appl. Math.*, 30:15–27.
- Chetwynd, A. G. e Hilton, A. J. W. (1984). The chromatic index of graphs of even order with many edges. *J. Graph Theory*, 8:463–470.
- Chetwynd, A. G. e Hilton, A. J. W. (1986). Star multigraphs with three vertices of maximum degree. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 100:303–317.
- Figueiredo, C. M. H., Meidanis, J. e de Mello, C. P. (1995). A greedy method for edge-coloring odd maximum degree doubly chordal graphs. *Congressus Numerantium*.
- Figueiredo, C. M. H., Meidanis, J. e Mello, C. P. (1997). On edge-colouring indifference graphs. *Theor. Comput. Sci.*, 181:91–106.
- Figueiredo, C. M. H., Meidanis, J. e Mello, C. P. (1999). Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. *Inf. Process. Lett.*, 70:147–152.
- Garey, M. R., Johnson, D. S., Miller, G. L. e Papadimitriou, C. H. (1980). The complexity of coloring circular arcs and chords. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1(2):216–227.
- Hilton, A. J. W. e Hind, H. R. (1993). The total chromatic number of graphs having large maximum degree. *Discrete Math.*, 117:127–140.
- Hilton, A. J. W. e Johnson, P. D. (1987). Graphs which are vertex-critical with respect to the edge-chromatic number. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 102:103–112.
- Holyer, I. (1981). The  $\mathcal{NP}$ -completeness of edge-colouring. *SIAM J. Comput.*, 10(4):718–720.
- Leven, D. e Galil, Z. (1983).  $\mathcal{NP}$ -completeness of finding the chromatic index of regular graphs. *J. Algorithms*, 4:35–44.
- Lin, M. C. e Szwarcfiter, J. L. (2009). Characterizations and recognition of circular-arc graphs and subclasses: A survey. *Discrete Math.*, 309(18):5618–5635.
- Machado, R. C. S. e Figueiredo, C. M. H. (2010). Decompositions for edge-coloring join graphs and cobipartite graphs. *Discrete Appl. Math.*, 158:1336–1342.

- Niessen, T. (1994). How to find overfull subgraphs in graphs with large maximum degree. *Discrete Appl. Math.*, 51:117–125.
- Roberts, F. S. (1969). Indifference graphs. Em *Proc. 2<sup>nd</sup> Ann Arbor Graph Theory Conference*, páginas 139–146, Ann Arbor, USA.
- Sánchez-Arroyo, A. (1989). Determining the total colouring number is  $\mathcal{NP}$ -hard. *Discrete Math.*, 78:315–319.
- Sousa Cruz, J. B., Silva, C. N. e Almeida, S. M. (2017). The Overfull Conjecture on split-comparability graphs. Submetido. URL: <https://arxiv.org/pdf/1710.03524.pdf>. Acesso em: 13-01-2019.
- Tucker, A. (1971). Matrix characterizations of circular-arc graphs. *Pacific J. Math.*, 39(2):535–545.
- Vizing, V. G. (1964). On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph (in Russian). *Diskret. Analiz.*, 3:25–30.
- Vizing, V. G. (1968). Some unsolved problems in graph theory. *Russian Math. Surveys*, 23:125–141.