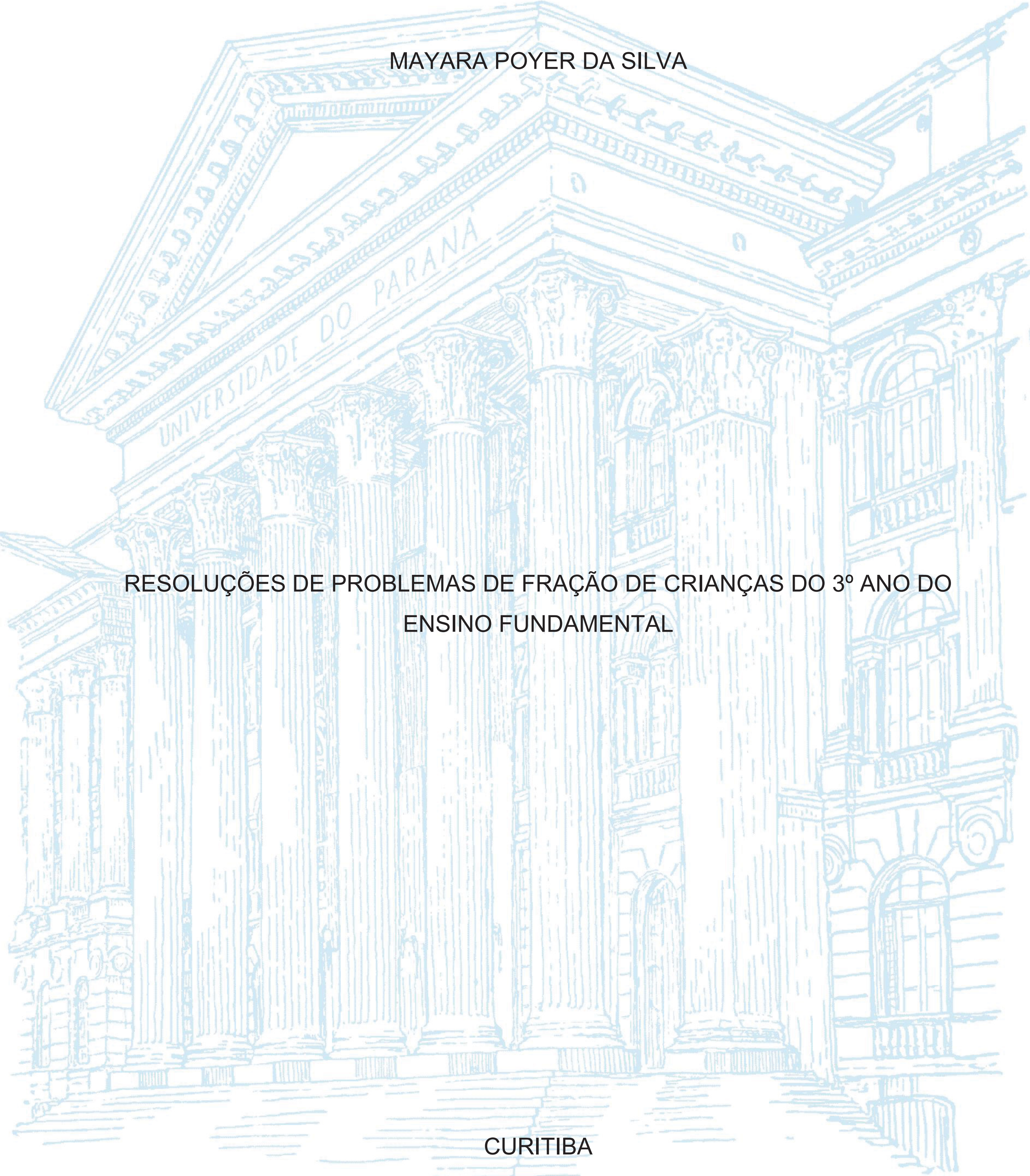
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ



MAYARA POYER DA SILVA

RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE FRAÇÃO DE CRIANÇAS DO 3º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

CURITIBA

2019

MAYARA POYER DA SILVA

RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE FRAÇÃO DE CRIANÇAS DO 3º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em educação em ciências e em matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Neila Tonin Agranionih

CURITIBA

2019

FICHA CATALOGRÁFICA

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

C974r Cordeiro, Mayara Poyer da Silva
Resoluções de problemas de fração de crianças do 3º ano do ensino fundamental [recurso eletrônico] / Mayara Poyer da Silva Cordeiro– Curitiba, 2019.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Ciências e em Matemática.
Orientadora: Neila Tonin Agranionih

1. Matemática -.Aprendizagem. 2. Frações. 3. Ensino Fundamental. I. Universidade Federal do Paraná. II. Agranionih, Neila Tonin. III. Título.

CDD: 372.7

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO EM
CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA - 40001016068P7

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **MAYARA POYER DA SILVA**, intitulada: **RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE FRAÇÃO DE CRIANÇAS DO 3º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.
A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 25 de Abril de 2019.

NEILA TONIN AGRANIONIH
Presidente da Banca Examinadora

JUTTA CORNELIA REUWSAAT JUSTO
Avaliador Externo (ULBRA)

EMERSON ROLKOUSKI
Avaliador Interno (UFPR)

TANIA TERESINHA BRUNS ZIMER
Avaliador Interno (UFPR)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
1912
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
Coordenação de Pós-Graduação

MAYARA POYER DA SILVA CORDEIRO

RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE FRAÇÃO DE CRIANÇAS DO 3º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

AGRADECIMENTOS

É com muita gratidão que chego ao fim dessa pesquisa. Certa vez ouvi dizer que na estrada da vida sempre iremos precisar de uma carona, pois é impossível chegar ao final sozinho. De fato, ao escrever esses agradecimentos, refleti sobre a verdade imposta nessa frase.

Sou grata a Deus por essa oportunidade, pelo caminho traçado até aqui, por me capacitar e me guardar, sem Ele nada poderia acontecer.

Sou grata pelo meu esposo, Wagner Luiz Cordeiro. Por aceitar a missão de se casar com alguém que recém entrara no mestrado, mesmo sabendo que isso implicaria em algumas abdicações, apoiou-me, sustentou-me e me encorajou durante todo o processo. Meu eterno amor a você.

Sou grata à minha família - pai, mãe e irmão - pelo apoio e as palavras de ânimo, por acreditarem no meu potencial e sempre estarem dispostos a oferecer uma palavra encorajadora ou tomar um café, quando parecia que nada saía do lugar.

Sou grata pela vida da querida Prof.ª Neila Tonin Agranionih que não apenas no período do mestrado, mas desde a época da graduação me inspirou a ser uma professora melhor. Obrigada por cada orientação, pela dedicação e companheirismo. Seu apoio foi fundamental para a realização desse estudo.

Sou grata a todos os participantes do Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática pelas discussões e apontamentos que trouxeram tanta contribuição para a pesquisa.

Sou grata a Prof.ª Tania Teresinha Bruns Zimer, Prof.ª Jutta C. Reuwsaat Justo e Prof. Emerson Rolkouski pelas contribuições e valiosas sugestões que muito contribuiu para a evolução desta dissertação.

Por fim, muito obrigada a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a conclusão desse projeto. Amigos, diretores, coordenadores, professores colegas, alunos: Obrigada! Obrigada pela compreensão, paciência e apoio.

“Ninguém é tão grande que não possa aprender, nem tão pequeno que não possa ensinar.”

Esopo

RESUMO

A presente dissertação teve por objetivo investigar conhecimentos que crianças de um 3º ano do Ensino Fundamental do município de Curitiba revelam saber sobre frações. Para tal, buscamos identificar quais esquemas que as crianças de um 3º ano utilizam na resolução de problemas. Verificamos o que sabem sobre conceitos de fração previstos pelo currículo para serem abordados nos anos anteriores de escolarização (metade, terça parte) e identificamos elementos a serem considerados no processo de ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para tanto, aplicamos no formato de entrevista clínica uma ficha composta por 6 problemas envolvendo o conceito de fração, que foram respondidas individualmente por 5 alunos do 3º ano de uma escola municipal de Curitiba – PR. A partir dos dados, concluímos que dentre os esquemas identificados, o esquema de distribuição, o esquema de partição e o esquema de metade foram os mais utilizados pelos alunos entrevistados. Em todas as resoluções, em que utilizaram o esquema de distribuição, os alunos alcançaram algum êxito em sua solução. Já o esquema de partição predominou em casos onde o problema já previa o número de partes que o todo deveria ser dividido e o esquema de metade, apesar de utilizado por alguns alunos ao longo das resoluções, em muitos casos não foi corretamente aplicado, tendo em vista que, em alguns casos, os alunos utilizaram palavras como “metade” e “meio” sem de fato compreender o conceito envolvido. O esquema de unidade, o esquema relacional e o esquema de equivalência foram observados em menos resoluções ou, como no caso do esquema de unidade, promoveram o erro da questão ou se constituíram como um obstáculo na resolução do problema. Os dados evidenciaram também que, provavelmente, os alunos não tenham sido formalmente apresentados aos conceitos de metade e terça parte, conforme previsto no currículo, ou, se apresentados, não se apropriaram desses conceitos. Identificamos que situações que promovam os esquemas de distribuição e partição são interessantes para introduzir o conceito de fração, tendo em vista que esses esquemas são os mais utilizados pelos alunos. Porém, observamos também a necessidade de serem trabalhadas situações que possibilitem o uso de esquemas que ainda não são familiares aos alunos. Além disso, os elementos analisados indicam a necessidade de apresentar aos alunos os números fracionários abordando todos os seus significados: parte-todo, divisão, número, operador multiplicativo e medida.

Palavras-chave: Aprendizagem da matemática. Teoria dos Campos Conceituais. Frações.

ABSTRACT

The aim of this dissertation was to investigate the knowledge that children of a 3rd year of elementary school in the city of Curitiba reveal knowledge about fractions. In order to do this, we try to identify which schemes that the children of a 3rd year use in solving problems, verify what they know about fraction concepts foreseen by the curriculum to be addressed in the previous years of schooling (half, third part) and identify elements to be considered in the process of teaching fractions in the initial years of Elementary School. For this purpose, we applied, in the format of clinical interview, a card composed of 6 problems involving the concept of fraction, which were answered individually by 5 students of the 3rd year of a municipal school in Curitiba - PR. From the data, we conclude that among the schemas identified, the distribution scheme, the partition scheme and the half scheme were the most used by the students interviewed. In all the resolutions in which they used the distribution scheme, the students achieved some success in their solution. Already the partition scheme prevailed in cases where the problem already predicted the number of parts that the whole should be divided and the scheme of half, although used by some students throughout the resolutions, in many cases was not correctly applied, taking into account since in some cases students used words such as "half" and "middle" without actually understanding the concept involved. The whole number scheme, the relational scheme, and the equivalence scheme were observed in fewer resolutions or, as in the case of the whole number scheme, either promoted the error of the question or constituted an obstacle in solving the problem. The data also showed that students were probably not formally introduced to the concepts of one-half and one-third as provided in the curriculum or, if presented, did not appropriate those concepts. We identify that situations that promote the distribution and partition schemes are interesting to introduce the concept of fraction, considering that these schemes are the most used by the students. However, we also observe the need to work on situations that allow the use of schemes that are not yet familiar to students. In addition, the analyzed elements indicate the need to present to the students the fractional numbers addressing all their meanings: part-whole, division, number, multiplicative operator and measure.

Keywords: Mathematics learning. Conceptual Field Theory. Fractions.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com o intuito de ensinar números, quantidades e as relações que os envolvem, a matemática é apresentada desde muito cedo na escola. Dentre os conteúdos matemáticos na vida escolar, as frações podem ser consideradas um dos temas mais difíceis. Uma das explicações para isso apontada por Campos e Rodrigues (2007) é o fato de que a compreensão dos números fracionários envolve uma variedade de aspectos que se configuram como obstáculos para seu aprendizado, pois apesar de os números fracionários serem uma extensão dos naturais, as tentativas de estabelecer conexões entre procedimentos relativos aos dois conjuntos ora são válidas, ora não são, o que torna desorientado o caminho dos alunos que procuram estabelecer essas conexões, sem uma reflexão mais aprofundada.

As frações, assim como os números não fracionários, são utilizadas para representar quantidades. As frações fazem parte de um sistema de representação que pode ser utilizado para expressar quantidades menores que uma unidade (NUNES; BRYANT, 2009).

Bertoni (2008) afirma que ao interrogarmos alunos sobre o que é fração, são comuns respostas do tipo: é pedaço, é aquele negócio de dividir figuras, é cortar tiras. Conforme a autora, a pergunta: “fração é número?” gera muitas dúvidas, e, com certa frequência, alguns alunos afirmam que frações são dois números. Tanto do ponto de vista da compreensão conceitual, quanto do entendimento, aplicação e resolução corretas das operações, as deficiências na aprendizagem dos números fracionários e, de modo mais geral, dos racionais, persistem longamente, não encontrando, por vezes, possibilidades de superação ao longo do ensino básico.

Como professora de matemática, deparei-me com uma turma de 5º ano na qual precisava ensinar o conteúdo de frações. Em um primeiro momento não achei que isso seria um problema, tendo em vista que sempre tive grande afinidade com o conteúdo, porém conforme trabalhava junto às crianças percebia que a maior parte dos alunos não conseguia realizar as atividades propostas e ao perguntar aos alunos sobre o que entendiam sobre frações, seu significado e como o utilizavam no cotidiano percebi a compreensão superficial do conteúdo. Esses fatos despertaram em mim a necessidade de estudar mais sobre frações, sobre o que as crianças já sabem sobre esse assunto, como interpretam situações que envolvem os números fracionários, enfim, como aprendem, para poder elaborar um processo de ensino o qual proporcionasse a aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), diretrizes elaboradas pelo Governo Federal com o objetivo principal de orientar os educadores por meio da normatização de alguns fatores fundamentais concernentes a cada disciplina, orientava, desde 1997, que a fração deveria ser apresentada às crianças, no Brasil, no segundo ciclo dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A nova Base Curricular Nacional (BRASIL, 2018) recomenda que a apresentação de significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte sejam apresentadas no 3º ano e no 4º ano do Ensino Fundamental e que os números racionais, mais especificamente, as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10 e 1/100) sejam trabalhadas com o objetivo de desenvolver a habilidade de que os alunos reconheçam as frações unitárias mais usuais como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso (BRASIL, 2018).

Percebendo a relevância e a necessidade de um estudo mais aprofundado sobre os números fracionários, voltamos nossos olhos para compreender como ocorre a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Para isso nos fundamentamos na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud. O motivo que nos levou a optar por essa teoria, foi o fato de esta ter sido desenvolvida para estudar as condições de compreensão do significado do saber escolar dos alunos (PAIS, 2001).

> As competências e concepções dos alunos desenvolvem-se ao longo do tempo, através de experiências com um grande número de situações, tanto dentro quanto fora da escola. Em geral, quando defrontados com uma nova situação, eles usam o conhecimento desenvolvido através de experiência em situações anteriores e tentam adaptá-lo a essa nova situação (VERGNAUD, 2012)[1]

A Teoria dos Campos Conceituais propicia uma estrutura às pesquisas sobre atividades cognitivas complexas, em específico com referência às aprendizagens e técnicas. (VERGNAUD, 1995). Para Vergnaud a Teoria dos Campos Conceituais é

---

[1] Entrevista disponível em: http://loja.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/7149/a-matematica-alem-dos-numeros.aspx acesso em 02 de maio de 2018.

> [...] resultado de muita pesquisa com estudantes, que nos leva a compreender como eles constroem conhecimentos matemáticos. Ela é fundamental para ensinar a disciplina, pois permite prever formas mais eficientes de trabalhar os conteúdos. Na minha palestra, quero mostrar a relação entre essa teoria e a prática escolar. (VERGNAUD, 2008).[2]

Vergnaud (2012) afirma que é necessário gerar provocações que conduzam os alunos a descobrir novas relações e novos conceitos. Para o autor o papel do professor é intervir como mediador com a função de propor situações que venham a desestabilizar o conhecimento dos alunos para ajudá-los na aquisição do conhecimento.

Tendo em vista que essa pesquisa constitui-se em uma escola municipal de Curtiba, é importante frizar que, de acordo com o plano curricular do município de Curitiba, ao final do 2º ano do Ensino Fundamental, é previsto que o aluno possa resolver e elaborar problemas com o suporte de imagens e/ou materiais manipuláveis, envolvendo as noções de dobro, triplo, metade e terça parte em situações usuais, utilizando estratégias próprias de resolução como a decomposição numérica, desenhos, palavras ou registro oral (CURITIBA, 2016)[3]. Apesar de ainda não apresentarem instrução escolar formal sobre o conteúdo de frações, crianças entre 6 e 7 anos já possuem certos conhecimentos sobre os números fracionários que as possibilitam refletir acerca de situações pertinentes ao campo conceitual das frações. Muitas vezes, ao ensinar um determinado conteúdo, não levamos em conta qual conhecimento o aluno já possui sobre o assunto. Nunes e Bryant (2009) afirmam que pesquisas mostram que crianças possuem algum conhecimento informal que poderiam ser utilizados como base para o ensino de frações, tais como equivalência e ordem de frações.

Considerando os fatos aqui apontados, a fim de contribuir para a compreensão do conhecimento dos alunos sobre frações, nosso interesse está em encontrar respostas para a questão: - O que alunos de um 3º ano do Ensino Fundamental do município de Curitiba sabem sobre frações?

---

[2] Entrevista disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/960/gerard-vergnaud-todos-perdem-quando-a-pesquisa-nao-e-colocada-em-pratica acesso em 30 de maio de 2018.

[3] Documento disponível em: http://multimidia.educacao.curitiba.pr.gov.br/2016/12/pdf/00125294.pdf acesso em 17 de maio de 2018.

Portanto, temos por objetivo geral verificar conhecimentos sobre frações que crianças de um 3º ano do Ensino Fundamental revelam na resolução de problemas que envolvem conceitos de fração com vistas a contribuir para o ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para tal buscaremos:

- identificar esquemas que as crianças utilizam na resolução de problemas que envolvem frações;

- verificar o que as crianças sabem sobre conceitos de fração, previstos no currículo, para serem abordados nos anos anteriores de sua escolarização, ou seja, no primeiro e segundo ano do Ensino Fundamental (metade, terça parte);

- identificar elementos a serem considerados no processo de ensino com vistas a contribuir para o ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Sendo assim organizamos esse trabalho da seguinte forma: nesse primeiro capítulo, apresentamos a relevância e a problemática que nos levou a investigar o tema fração, bem como o objetivo e questão de pesquisa que norteiam o trabalho. No capítulo II, apresentamos um relato sobre a origem dos números fracionários e seus significados, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, que subsidiou o nosso estudo e, por fim, revisamos a literatura evidenciando alguns resultados de pesquisas sobre fração. No capítulo III, descrevemos a metodologia utilizada em nossa pesquisa, a ficha de problemas utilizada para a coleta de dados, e o modo que realizamos a análise dos dados. No capítulo IV fazemos a análise e discutimos os resultados obtidos nessa investigação. Por fim, no capítulo V apresentamos nossas considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Encontramos na literatura que os números fracionários surgiram bem tarde na história da matemática. Ao que tudo indica nas tribos primitivas era desnecessário o uso de frações, embora isto não signifique que esse conceito era desconhecido na antiguidade. Boyer (1974) conta que os homens da idade da pedra, não usavam frações. Porém, com o surgimento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze surgiu a necessidade do conceito e da notação para frações.

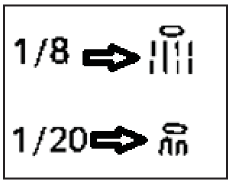
Houve um tempo em que as terras eram propriedades do Estado, e este as arrendava às famílias para sua exploração. Observando que as terras não possuíam o mesmo tamanho uma da outra, percebeu-se a necessidade de um padrão de medida para um sistema mais rigoroso de inspeção a fim de o Estado não ser lesado. A medida e sua expressão numérica foi resposta às relações do indivíduo ao Estado, que cobrava imposto com base na propriedade da terra. Essas exigências numéricas impuseram a criação de padrões de medida ou unidade (LIMA, 1986). Por outro lado, a criação desses padrões de medida levou a percepção de que raramente o padrão de unidade cabia um número exato de vezes na grandeza que se pretendia medir, o que resultou no reconhecimento de que a expressão numérica criada era insuficiente para exprimir todas as medidas necessárias.

Uma história a respeito das frações conta que há cerca de 3000 anos antes de Cristo, os geômetras dos faraós do Egito realizavam marcação das terras que ficavam às margens do rio Nilo, para a sua população. Quando o rio inundava, período de junho a setembro, parte das marcações eram desfeitas, portanto os proprietários dessas terras precisavam remarcá-las. Para isso, eles utilizavam uma marcação com cordas, que chamavam de estiradores de cordas, que consistia em utilizar as cordas, esticando-a. Assim eles verificavam quantas vezes aquela unidade de medida cabia na medida dos lados do terreno. Porém eram raros os casos onde a unidade de medida cabia um número exato de vezes nos lados do terreno, sendo assim eles sentiram a necessidade de criar um novo tipo de número (SILVA; SODRÉ, 2001).

Para superar a impossibilidade de medição e através dos números naturais representar os elementos que fossem considerados partes de um todo criou-se então os números fracionários. O termo fração significa um “fragmento”, um “pedacinho”, "uma parte distinta de um todo". Na linguagem popular, fração é usada para designar alguma parte não especificada de um todo (LIMA, 1986).

Boyer (1974) conta que as inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para as frações unitárias (uma parte). O inverso de qualquer inteiro era representado com um símbolo oval alongado acima do inteiro, veja o exemplo apresentado na FIGURA 1.

FIGURA 1 - REPRESENTAÇÃO EGÍPCIA PARA FRAÇÕES UNITÁRIAS



FONTE: (BOYER, 1974, p.10)

Na atualidade, dentro dos conteúdos matemáticos escolares, a fração é utilizada para representar os elementos que não fazem parte do conjunto dos números inteiros (representados em seu conjunto pela letra Z), onde Z= {-2,-1,0,+1+,+2, ... }, constituindo-se como uma das formas de representação do número racional (representados em seu conjunto pela letra Q) onde Q = {..., 0,..., 1/4,..., 1/2,..., 1,...,2,... } e representa o quociente, ou seja, uma divisão (SILVA; SODRÉ, 2001).

Não é nosso objetivo, no entanto, nos aprofundarmos sobre os números fracionários na história da matemática, mas adentrarmos no tema da compreensão e da aprendizagem destes números pelas crianças.

Os números fracionários são escritos na forma m/n onde m e n são números inteiros, n não nulo e indica uma divisão de m por n, onde m é o numerador e n o denominador dessa fração. Porém, sabemos que para ensinar frações é necessário muito mais do que isso.

O desenvolvimento de uma real compreensão do conceito de números fracionários pode ser considerado um desafio para os educadores (CRUZ, 2003). É possível observar ao longo dos anos um grande avanço em pesquisas e práticas voltadas ao ensino da matemática na educação fundamental, apesar disso, o ensino de frações continua sendo caracterizado por uma prática embasada no ensino e aprendizagem da aplicação mecânica de algoritmos.

Para Campos e Rodrigues (2007) é possível analisar a aprendizagem dos números racionais sobre três pontos de vista: ponto de vista matemático, ponto de vista prático e ponto de vista da psicologia. Do ponto de vista matemático compreender os números fracionários constitui-se como base para a compreensão das operações algébricas elementares. Do ponto de vista prático, ao estudar as frações o aluno aperfeiçoa a habilidade de dividir, auxiliando-o a entender e manipular os problemas do mundo real. Do ponto de vista da psicologia, as frações proporcionam um rico campo, dentro do qual as crianças podem desenvolver e expandir suas estruturas mentais para um desenvolvimento intelectual contínuo.

Kieren (1988) afirma que um caminho possível para o desenvolvimento da compreensão do conceito de fração pode ocorrer através do conhecimento informal dos estudantes nas situações da vida cotidiana. Isso se verifica ao repartir objetos e compartilhar quantidades em partes iguais, quando são estimuladas as conexões com as ideias mais complexas. De maneira complementar, Mack (1988) acrescenta que é do conhecimento informal que emergem os significados dos símbolos e os procedimentos matemáticos sobre fração.

Os números fracionários assumem diferentes significados e é fundamental termos isto em vista estudarmos sobre o tema. Essa ideia não é nova, Kieren em 1976 realizou uma pesquisa que caracterizou os números racionais em termos de um conjunto de subdivisões: parte-todo, quociente, número de relação, operador e medida. (BEHR; HAREL; POST; LESH, 1992).

A partir da classificação apresentada por Kieren (1976), Nunes e Bryant (2009) e Spinillo e Lautert (2006) apresentam uma classificação das frações a partir dos seguintes significados: (a) um número em uma reta numérica, (b) significado de operador multiplicativo, (c) quociente derivado de uma divisão ou (d) uma relação parte-todo.

De uma forma mais detalhada Nunes e Bryant (2009) apresentam estes significados da seguinte forma:

a) Significado de número: nesse tipo de situação precisamos reconhecer, a princípio, a fração 2/3, por exemplo, como um número (significado) e não como uma superposição de dois números inteiros. Devemos perceber, ainda, que todo número tem um ponto correspondente na reta numérica e que sua localização depende do princípio de ordenação (invariante), isto é, 2/3, por exemplo, é um número compreendido entre 0 e 1.

b) Significado de operador: associamos a esse significado o papel de transformação, isto é, a representação de uma ação que se deve imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando esse processo. Exemplo: João tinha 30 soldadinhos de chumbo e deu 1/5 para seu colega. Com quantos soldadinhos João ficou? A solução para esse problema é a compreensão da transformação que a fração 1/5 opera na quantidade 30. Temos que, esses 30 soldadinhos de chumbo foram divididos em 5 partes, e uma dessas partes foi dada ao colega. Portanto, o colega recebeu 6 soldadinhos e 24 ficaram com João.

c) Significado de quociente: Esse significado está presente em situações associadas à ideia da divisão como estratégia para resolver um determinado problema. Exemplo 1 – quantidade contínua: Se dividirmos duas pizzas igualmente entre três pessoas, que fração representa o que cada uma irá comer? Exemplo 2 – quantidade discreta: Tenho 20 bolinhas de gude e vou dividir igualmente entre quatro crianças. Que fração representa essa divisão? Nas situações com o significado quociente, relacionamos duas grandezas distintas. Nos exemplos citados observamos as seguintes relações: pizzas e pessoas, para o exemplo 1, e bolinhas de gude e crianças, para o segundo exemplo. As soluções dos exemplos podem ser expressas da seguinte maneira: para o exemplo 1, temos 2 pizzas para serem dividias entre 3 pessoas, podemos então representar essa situação através da fração 2/3 e afirmar que essa fração representa a quantidade de pizza que cada pessoa comerá. Para o exemplo 2, temos 20 bolinhas para serem divididas entre 4 crianças podemos representar essa divisão através da fração 20/4.

d) Significado parte-todo: a ideia presente nesse significado é a da partição de um todo (contínuo ou discreto) em *n* partes iguais, cada parte podendo ser representada como 1/n. Exemplo 1 – quantidade contínua: Uma barra de chocolate foi dividida em quatro partes. Que fração representa uma parte deste chocolate? Exemplo 2 – quantidade discreta: Na loja há três bolas vermelhas e três bolas brancas. Que fração representa a quantidade de bolas vermelhas em relação ao total de bolas da loja?

Algumas pesquisas recentes mostram que crianças possuem conhecimentos informais sobre fração e seus significados e que estes devem servir como base para o ensino desse conteúdo (NUNES; BRYANT, 2009; NUNES, 2008). Portanto, a questão principal não é sobre o modo de ensinar a fração nos anos iniciais, mas em como os professores podem aproveitar esse conhecimento informal dos alunos (NUNES; BRYANT, 2009; NUNES, 2008). Os autores ainda afirmam que consideram ser razoável buscar a origem do entendimento de crianças sobre números fracionários em seus conhecimentos sobre divisão a fim de contribuir para a compreensão do conhecimento dos alunos sobre frações. A nós cabe perguntar: O que alunos de um 3º ano do Ensino Fundamental do município de Curitiba sabem sobre frações, se desejamos pensar em possibilidades com vista contribuir para o ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental?

Entretanto, antes de apresentarmos a pesquisa realizada e os resultados alcançados apresentaremos fundamentos que consideramos ser importantes para a condução desse estudo. Dessa forma abordaremos o suporte teórico escolhido como apoio para nossa pesquisa: A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, em especial, o Campo Multiplicativo e situaremos os números fracionários dentro desse Campo Conceitual. Posteriormente, sistematizaremos um levantamento de literatura de pesquisas já realizadas envolvendo frações.

2.1 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais foi desenvolvida pelo professor e pesquisador Gerard Vergnaud, matemático, filósofo e psicólogo francês, aluno de Jean Piaget, que se dedicou aos aspectos práticos do ensino. Para Vergnaud "Não podemos fazer uma teoria da aprendizagem da matemática apenas com o cálculo numérico, por isso é necessário trabalhar com uma boa noção epistemológica da matemática" (VERGNAUD, 2012)[4]. O autor afirma, também, que as competências e as concepções dos alunos se desenvolvem ao longo do tempo e de uma forma geral, quando defrontadas com uma nova situação os alunos utilizam o conhecimento adquiridos através das experiências e situações anteriores e tentam adaptá-los à nova situação.

A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud é uma teoria cognitivista que possibilita uma estrutura consistente às pesquisas sobre a aprendizagem matemática, uma vez que permite estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, na perspectiva das relações existentes entre os conceitos (VERGNAUD, 2012).

---

[4] Entrevista disponível em: http://www.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/7149/a-matematica-alea cesso em 02 de maio de 2018.

Vergnaud (1995) comenta que embora a sua teoria tenha sido elaborada para explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas e multiplicativas, das relações número-espaço e da álgebra esta teoria não é específica da matemática. Para Vergnaud, a sua teoria:

> Também possibilita analisar a relação entre os conceitos enquanto conhecimentos explícitos e as invariantes operatórias implícitas nos comportamentos dos sujeitos em determinada situação, bem como aprofundar a análise nas relações entre significados e significantes (VERGNAUD, 1995, p.1).

Vergnaud considera um campo conceitual como sendo um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição (VERGNAUD, 1995, 1996a). O autor define um campo conceitual como sendo

> Ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações. (VERGNAUD, 2009, p. 29)

Além do próprio conceito de campo conceitual, conceitos-chave da Teoria dos Campos Conceituais são: os conceitos de esquema (a grande herança piagetiana de Vergnaud), situação, invariante operatório (teorema-em-ação ou conceito-em-ação), e a sua concepção de conceito (VERGNAUD, 1994, 1995, 1996a, 1996b).

Na Teoria dos Campos Conceituais existe uma série de fatores que influenciam e interferem na formação e no desenvolvimento de um conceito, a formação de um conceito se dá através de situações e problemas (VERGNAUD, 1994, 1995, 1996a). Um conceito matemático assume seus sentidos a partir de uma variedade de situações, de modo que cada situação normalmente não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Em outras palavras, nem um só conceito, nem uma situação isolada dá conta do processo de aquisição de conhecimento.

Na teoria de Vergnaud, o conceito é definido como uma trinca de três conjuntos, C = (S, I, R) onde: S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito (referência), I é um conjunto de invariantes (significante) sobre os quais repousa a operacionalidade dos esquemas e R é um conjunto de representações simbólicas (significado) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (VERGNAUD, 1995).

2.1.1 Situações

As situações são distinguidas por Vergnaud (1990,1994, 1995) em duas categorias: as classes de situações para as quais o sujeito dispõe em seu repertório das competências precisas para tratar imediatamente das situações e a classe de situações onde o sujeito não dispõe das competências necessárias, o que o leva a um período de reflexão, exploração e tentativas, podendo resultar no sucesso ou fracasso da situação. Vergnaud afirma que “O conceito de esquema interessa às duas classes de situações, mas não funciona do mesmo modo nos dois casos” (VERGNAUD, 1995, p.2), isso porque na primeira classe de situações é possível observar em uma mesma classe de situações, comportamentos automatizados, organizados por um só esquema, já na segunda classe de situações, há uma sucessiva utilização de diversos esquemas que para se alcançar a solução precisam ser acomodados, descombinados e recombinados, o que leva, necessariamente, a descobertas.

O conceito de situações para Vergnaud (1996a, 1995) não tem o sentido de situação didática, mas o sentido de tarefa. Para o autor:

> A ideia é que qualquer situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldade próprias é importante conhecer. A dificuldade de uma tarefa não é, nem a soma, nem o produto das dificuldades das diferentes subtarefas, mas é claro que o fracasso numa subtarefa implica o fracasso global (VERGNAUD, 1996a, p.167).

Como são as situações que dão sentido aos conceitos, é natural definir campo conceitual como sendo, sobretudo, um conjunto de situações. Além disso um conceito torna-se significativo através de diferentes situações, mas o sentido não está nas situações em si e sim, na relação do sujeito com situações e significantes. São os esquemas, ou seja, as ações e sua organização, evocados no sujeito por uma situação ou por um significante que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo (VERGNAUD, 1995, 1996a).

2.1.2 Esquemas

Vergnaud considera esquema como sendo a organização invariante do comportamento para uma classe de situações dada. É nos esquemas que encontramos os conhecimentos-em-ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que fazem da ação do sujeito operatória (VERGNAUD, 1995, 1996a, 1996b). A título de ilustração o autor apresenta um exemplo no domínio da motricidade: o esquema que organiza o movimento do corpo de um atleta no momento do salto em altura. Esse esquema representa um conjunto de conhecimentos espaciais e mecânicos. Apesar de a conduta do saltador sofrer inúmeras variações, a análise dos seus movimentos evidencia diversos elementos em comum. Esses elementos comuns dizem respeito ao curso temporal da mobilização dos músculos para garantir a eficácia das diferentes fases do movimento e determinam categorias de ordem espacial, temporal e mecânica, por exemplo: orientação no espaço, distância mínima, força, aceleração, velocidade, bem como conhecimentos-em-ação, que se explícitos poderiam assumir a forma de teoremas da geometria e mecânica.

Da mesma forma, competências matemáticas são sustentadas por esquemas organizadores da conduta. Para exemplificar, temos um problema apresentado por Vergnaud aplicado em Orléans e que se refere a uma fazenda que plantava trigo. O problema proposto foi o seguinte: “Quantas farinhas nós podemos fazer com 972 toneladas de trigo?” A informação inicial dada para as crianças era a de que para se fazer 100 kg de farinha seria necessário 120 kg de trigo. Durante quinze minutos o autor observou as crianças tentarem resolver o problema, o tempo acabou e após uma semana ele retornou. Novamente passaram-se mais 15 minutos, sem solução alguma, até que uma criança sugere que façam a divisão de 972 toneladas por 120 e realiza a operação de divisão: 972000 por 120. Esse algoritmo realizado é uma organização da atividade. “Os algoritmos são esquemas, porque os algoritmos matemáticos são a forma da organização da atividade, mas a maior parte de nossos esquemas não são algoritmos” (VERGNAUD, 1996b, p.16). Quando algoritmos são utilizados repetidamente para tratar as mesmas situações eles se transformam em esquemas ordinários ou hábitos.

Um esquema é um universal para toda uma classe de situações e pode gerar diferentes ordens de ação, de coleta de informações e de controle, dependendo das características de cada situação particular. Sendo assim, pode-se afirmar que não é o comportamento que é invariante, mas a organização do comportamento. Os esquemas podem ser perceptivo-gestuais, como por exemplo, a contagem de objetos, mas há também esquemas verbais, como a fala de um discurso e há, ainda, os esquemas sociais, como o ato de seduzir uma pessoa e o gerenciamento de conflitos (VERGNAUD, 2009).

Voltando a definição de esquema, tem-se que esta é a organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações. Algumas especificações para facilitar a compreensão de esquema são necessárias. Vergnaud (1996a, 1996b, 1995, 2009) chama de ingredientes de esquemas:

1) Regras de ação: São do tipo "se, então", e constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, aquela que permite a geração e a continuidade da sequência de ações do sujeito; são regras de busca de informação e controle dos resultados da ação. É aquele que é, imediatamente, responsável do transcurso temporal da conduta e da atividade.

> A conduta não é formada somente por ações, mas também por informações necessárias à continuidade da atividade, e os controles que permitem ao sujeito ter segurança de que ele fez o que pensava fazer e que ele continua no caminho escolhido. (VERGNAUD, 2009, p.22)

Essas regras são completamente condicionadas pela representação da meta a ser atingida e pelas conceitualizações que permitem identificar os objetos presentes, as propriedades e relações e as transformações ocorridas devido a conduta do sujeito, isto é, a parte intencional do esquema, que é o objetivo (meta) é essencial na organização da atividade.

2) Metas e antecipações: um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, submetas; pode também esperar certos efeitos ou certos eventos.

A meta se decompõe em submetas, sequencialmente e hierarquicamente agenciados, os quais dão lugar a numerosas antecipações. Mesmo quando a meta é somente parcialmente consciente e os efeitos esperados da ação não são previsíveis pelo sujeito, “esse caráter intencional da conduta e da atividade não pode ser ignorado” (VERGNAUD, 2009, p.22).

3) Invariantes operatórios: também conhecidos como teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, são aqueles que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos

esquemas. Os invariantes operatórios, ou seja, os conhecimentos-em-ação e teoremas-em-ação constituem na base conceitual, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e, a partir dela e da meta a atingir, inferir as regras de ação mais pertinentes para abordar uma situação (VERGNAUD, 1996b).

> Ainda mais decisivos do ponto de vista cognitivo são os invariantes operatórios uma vez que os conceitos em ação permitem retirar do meio as informações pertinentes e selecionar os teoremas em ação necessários ao cálculo, ao mesmo tempo, dos objetivos e subobjetivos suscetíveis de serem formados, e de regras em ação, de tomada de informação e de controle permitindo atingi-los. (VERGNAUD, 2009, p.22)

O autor comenta que “O desenvolvimento do pensamento se faz em etapas e que certas grandes etapas são caracterizadas pela construção ou aquisição de novos invariantes operatórios” (VERGNAUD, 2014, p.305).

Vergnaud afirma que teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira. Já conceito-em-ação é uma categoria de pensamento tida como pertinente. Outra explicação também apresentada pelo autor é que se entende por conceito-em-ação “um conceito considerado pertinente na ação em situação” (VERGNAUD, 2009, p. 23), ou seja, como uma categoria de pensamento considerada relevante no processo de resolução da situação a partir da qual o sujeito seleciona objetos, propriedades e relações que podem conduzi-lo ao sucesso na realização da situação, “os conceitos-em-ação não são susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos, apenas de serem pertinentes ou não” (VERGNAUD, 2019, p.7). Já um teorema-em-ação é definido como “uma proposição tida como verdadeira na ação em situação” (VERGNAUD, 2009, p. 23). O autor ainda comenta que os teoremas-em-ação são proposições e interferem no processo da atividade e podem ser considerados verdadeiros ou falsos, porém “um teorema-em-ação falso continua sendo um teorema-em-ação” (VERGNAUD, 2019, p. 7).

Vergnaud (2009) afirma que:

> Em uma dada situação o sujeito dispõe de vários tipos de conhecimentos para identificar os objetos e definir, a partir disso, objetivos e regras de conduta pertinentes. Os conhecimentos são conhecimento em ação, designados aqui pelo termo de “invariantes operatórios” para indicar que esses conhecimentos não são necessariamente explícitos nem explicitáveis, nem mesmo conscientes para alguns deles (VERGNAUD, 2009, p.23)

Para ilustrar os conceitos apresentados observe a situação proposta para crianças entre 10 e 13 anos (VERGNAUD, 1994): “Sabendo que 10 pessoas consomem 3,5 kg de farinha em uma semana, qual quantidade de farinha será preciso para cinquenta pessoas para um período de 28 dias?” A resposta de um aluno foi “5 vezes mais pessoas, 4 vezes mais tempo, 20 vezes mais farinha, portanto 3,5 x 20= 70 kg”. Segundo Vergnaud (1994) é impossível dar conta desse raciocínio sem que o seguinte teorema esteja implícito na mente do aluno:

FIGURA 2 – TEOREMA IMPLÍCITO NO PROBLEMA

$$f(n_1x_1, n_2x_2) = n_1n_2f(x_1, x_2)$$

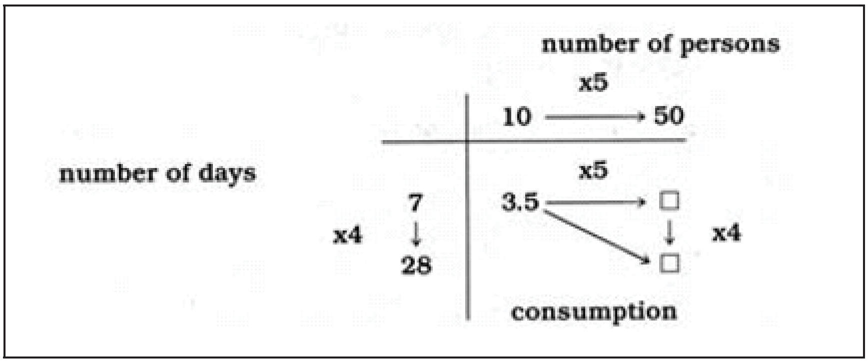
$$\text{Consumption } (5 \times 10, 4 \times 7) = 5 \times 4 \text{ Consumption } (10, 7)$$

FONTE: Vergnaud, 1994, p.49.

O autor comenta que sem dúvida esse teorema é válido porque a razão entre 50 para 10 pessoas e a razão 28 para 7 dias são simples e visíveis, isso poderia não ser tão simples se aplicados a outros valores numéricos, ou seja, o seu âmbito da validade é limitado. Ainda assim, é um teorema matemático e pode ser expresso de diferentes formas:

- Através de palavras: O consumo é proporcional ao número de pessoas quando o número de dias é constante, e é proporcional ao número de dias quando o número de pessoas é mantido constante.
- Através de uma tabela de dupla proporção, conforme a FIGURA 3:

FIGURA 3 – TABELA DE DUPLA PORÇÃO



FONTE: Vergnaud, 1994, p.49.

- Pode ser expresso ainda pela fórmula C = k. P.D, aonde C representa consumo, P o número de Pessoas, D o número de dias e K = C(1,1), consumo por pessoa e por dia. C é proporcional a P quando D é constante e C é proporcional a D quando P é constante.

Vergnaud afirma que “esses diferentes modos de expressar o mesmo raciocínio não são cognitivamente equivalentes: o último é mais difícil.” (VERGNAUD, 1994, p.49, tradução nossa), mas os modos são complementares e exemplificam diferentes formas de tornar explícita a mesma estrutura matemática.

Apesar de haver uma relação clara entre conceitos-em-ação e teoremas-em-ação, tento em vista que conceitos são ingredientes de teoremas e teoremas são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos, seria um erro confundi-los (VERGNAUD,1998). Conceitos-em-ação são ingredientes necessários dos teoremas-em-ação, da mesma forma que funções proposicionais e argumentos são ingredientes necessários de proposições. Porém, conceitos não são teoremas, eles não permitem derivações (ou inferência, ou cálculo), uma derivação requer proposições. As proposições podem ser verdadeiras ou falsas, conceitos podem ser relevantes ou irrelevantes. No entanto, não há proposições sem conceitos. De forma recíproca, não há conceitos sem proposições, pois é a necessidade de derivar ações das representações do mundo e de ter concepções verdadeiras (ou pelo menos adequadas) do mundo que tornam necessários os conceitos. Um modelo computacional do conhecimento intuitivo precisa entender conceitos e teoremas em ação como ingredientes essenciais dos esquemas (VERGNAUD, 1994, 1995).

4) Possibilidades de inferência (ou raciocínios) que permitem "calcular", "aqui e agora", as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos "aqui e imediatamente" em situação.

Vergnaud (2009) enfatiza a importância de mencionar as possibilidades de inferência em situação, devido ao fato de o esquema não ser um estereótipo, mas sim, uma “função temporalizada de argumentos, que permite gerar diferentes sequências de ações e tomadas de informações, em função dos valores das variáveis em situação.” (VERGNAUD,1995, p.6).

2.1.3 Representações

Vergnaud (2014) afirma que são os invariantes que dão o caráter operatório às representações. O autor atribui para as representações o significado de serem categorias de pensamento com os quais um indivíduo capta e integra as informações presentes em uma situação, nesse sentido, permite-se considerar os invariantes operatórios como elementos essenciais da representação (Vergnaud, 2009). O conjunto das representações, sejam elas linguísticas ou simbólicas (algébricas, gráficas...), permitem representar os conceitos e suas relações e, consequentemente, as situações e os esquemas que elas evocam.

Certas representações são objetiváveis, ou seja, através delas podemos perceber indicadores importantes das produções do sujeito, como por exemplo, palavras pronunciadas, desenhos, gestos, operações feitas, etc. Vergnaud (2014) aponta como as principais representações utilizadas no ensino da matemática:

- Expressões linguísticas.
- Esquemas espaciais no plano (linhas, flechas, localizações).
- Expressões algébricas.

Por fim, temos que um conceito não é totalmente um conceito, a menos que seja explícito. Além disso, o processo de tornar os conceitos e os teoremas explícitos ajudam a identificar os invariantes relevantes ou irrelevantes. Portanto, expressões linguísticas, símbolos e representações simbólicas que possam acompanhar, no nível significante, a formação de conceitos e teoremas, também devem ser estudados. Explicação e simbolização são caminhos importantes através das quais a complexidade cognitiva é adquirida. Não só é importante que os estudantes sejam confrontados com uma variedade de ocasiões para ampliar ou restringir o âmbito de validade e disponibilidade de seus esquemas e desenvolver novos esquemas, mas também serem ajudados por meios externos, como significantes linguísticos e extralinguísticos, em reconhecer a estrutura invariante de diferentes problemas e, portanto, a possibilidade de usar os mesmos esquemas ou similares. Além disso, não só é importante que as situações sejam claras e exaustivamente classificadas do ponto de vista de sua estrutura conceitual, mas também que os invariantes (conceitos e teoremas) sejam redigidos, simbolizados, esquematizados ou representados graficamente, de modo que se tornem elementos de concepções racionais explícitos. Esta é provavelmente uma condição necessária para a transferência de conceitos e teoremas para quaisquer valores numéricos e para qualquer domínio de experiência (VERGNAUD, 1994).

2.1.4 Campo conceitual aditivo

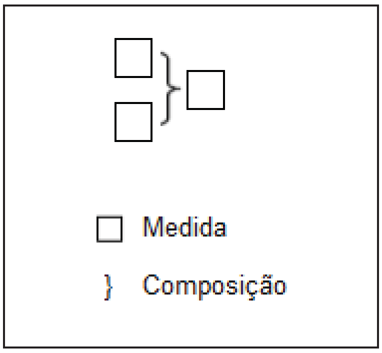
Diante disso, Vergnaud (1990,1994,1995) analisou os tipos de situações matemáticas, seus tipos de formulação aliados às idades psicológicas e à maturação matemática, chegando às estruturas envolvidas na resolução dos problemas, a fim de compreender as relações e a evolução das concepções e prática do sujeito frente a uma dada situação. Dentre muitas estruturas estudadas, destacam-se duas: as aditivas e as multiplicativas.

Ao estudar as estruturas aditivas Vergnaud (1995, 1996a) define o campo conceitual das estruturas aditivas como um conjunto de situações, cujo domínio requer uma ou várias adições, subtrações ou uma combinação de tais operações, e o conjunto de teoremas e conceitos que permitem analisar tais situações. No campo conceitual aditivo as situações podem ser classificadas como: problemas simples de relações entre o todo e suas partes, problemas inversos de relação parte-todo, envolvendo tanto uma transformação, como uma composição ou ainda podem ser classificados como problemas comparativos (MAGINA; CAMPOS, 2004).

Vergnaud (1996a) apresenta seis relações de base, a partir das quais é possível gerar todos os problemas de adição e subtração. Sendo essas relações:

a) A composição de duas medidas numa terceira: é aquela em que duas medidas se compõem para resultar em uma terceira medida, como podemos observar no QUADRO 1.

QUADRO 1 - RELAÇÃO DE BASE (A)



FONTE: Próprio autor, adaptado de Vergnaud (1994)

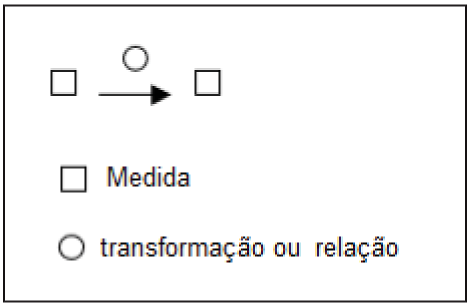
Essa relação é composta por duas classes de problema:

- Conhecendo-se duas medidas é possível encontrar a composta. Exemplo: A sala de aula de Pedro é composta por 9 meninas e 8 meninos. Quantos alunos têm ao todo a sala de Pedro?

- Conhecendo-se uma das medidas e a composição, pode-se determinar a outra medida. Exemplo: Ana tinha 8 lápis novos, dos quais 5 já foram usados. Quantos lápis novos Ana ainda têm para usar?

b) A transformação de uma medida inicial em uma medida final: como podemos observar no QUADRO 2, trata-se de uma relação em que uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida.

QUADRO 2 - RELAÇÃO DE BASE (B)



FONTE: Próprio autor, adaptado de Vergnaud (1994)

Pode-se diferenciar 6 classes de problemas para essa relação, que variam de acordo com a transformação, negativa ou positiva, e conforme a pergunta concernente ao estado inicial, ao estado final e à transformação.

- Conhecendo-se o estado inicial e a transformação positiva, pode-se determinar o estado final. Exemplo: Antônio tinha R$15,00 e ganhou de seu pai R$7,00. Quanto Antônio tem agora?

- Conhecendo-se o estado inicial e o estado final pode-se determinar a transformação positiva. Exemplo: Carol tinha 12 figurinhas. Jogou com seu irmão e ganhou algumas figurinhas de modo que agora ela tem 22. Quantas figurinhas Carol ganhou?

- Conhecendo-se uma transformação positiva e o estado final pode-se obter o estado inicial. Exemplo: Carla achou R$ 2,00 na calçada. Ela guardou em seu cofre. Agora ela tem R$11,00. Quanto Carla possuía antes?

- Conhecendo-se o estado inicial e a transformação negativa pode-se obter o estado final. Exemplo: João tem 8 balas. Ele deu 3 para sua irmã. Com quantas balas ele ficou?

- Conhecendo-se o estado inicial e o estado final pode-se obter a transformação, que nesta classe é negativa. Exemplo: Paulo tinha 11 bolinhas de gude e jogou uma partida com seu primo. Agora ele tem 7 bolinhas de gude. Assim, quantas bolinhas de gude ele perdeu na partida?

- Conhecendo-se o estado final e a transformação negativa, obtém-se o estado inicial. Exemplo: Bianca tem certa quantia de bonecas. Ela deu 8 bonecas para suas amigas brincarem e agora tem 6 bonecas. Quantas bonecas ela possuía?

c) A relação de comparação entre duas medidas: é aquela em que uma relação estática liga duas medidas. Pode-se diferenciar 6 classes de problemas, as quais: em duas o referido é desconhecido, em duas a relação é desconhecida e em duas o referente é desconhecido. É necessário perceber a “relação” como uma comparação entre os grupos. Neste caso, o sujeito deve partir do valor conhecido do grupo de referência (que é o referente), adicionar ou subtrair um valor (que é a relação entre os dois grupos) para obter o valor do outro grupo (referido).

QUADRO 3 - RELAÇÃO DE BASE (C)

FONTE: Próprio autor, adaptado de Vergnaud (1994)

- Conhecendo-se uma das medidas (referente) e a relação, pode-se determinar a outra medida (referido). Exemplo: André possui 14 carrinhos. André tem 5 a mais do que Thiago. Quantos carrinhos tem Thiago?

- Conhecendo-se uma das medidas (referente) e a relação, pode-se determinar a outra medida (referido). No entanto, nesta classe, a relação é negativa. Exemplo: Paulo possui 6 canetas. Paulo tem 5 a menos do que Henrique. Quantas canetas tem Henrique?

- Conhecendo-se as medidas, referente e referido, pode-se determinar a relação negativa. Exemplo: João tem 25 figurinhas e Maria tem 12. Quantas figurinhas Maria têm a menos do que João?

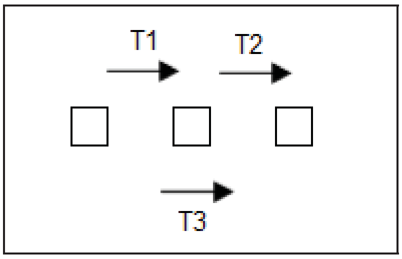
- Conhecendo-se as medidas, referente e referido, pode-se determinar a relação positiva. Exemplo: Paula tem R$13,00 e Laura têm R$24,00. Quantos reais Laura tem a mais do que Paula?

- Conhecendo-se uma das medidas (referido) e a relação positiva, pode-se determinar a outra medida (referente). Exemplo: Paulo possui 3 canetas. João tem 5 canetas a mais do que Paulo. Quantas canetas tem João?

- Conhecendo-se uma das medidas (referido) e a relação negativa, pode-se determinar a outra medida (referente). Exemplo: Antônio tem 12 bolinhas de gude. Carlos tem 5 bolinhas a menos do que Antônio. Quantas bolinhas de gude possui Carlos?

d) A composição de duas transformações: a é aquela em que duas transformações se compõem para resultar em uma transformação (QUADRO 4). Nesta categoria temos duas grandes classes de situações.

QUADRO 4 - RELAÇÕES DE BASE



FONTE: Próprio autor, adaptado de Vergnaud (1994)

- Conhecendo-se duas transformações elementares (T1 e T2), pode-se encontrar a transformação composta (T3). Exemplo 1: Paulo participou de um jogo de bolas de gude. Na primeira partida ele ganhou 13 bolinhas de gude. Na segunda partida ele ganhou 6 bolas. Ao final das duas partidas, quantas bolas ele ganhou?

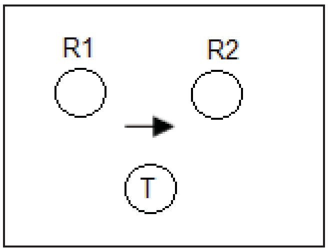
Exemplo 2: Paulo participou de um jogo de bolas de gude. Na primeira partida ele perdeu 15 bolinhas de gude. Na segunda partida ele perdeu 6. Ao final das duas partidas, quantas bolas ele perdeu?

- Conhecendo-se a transformação composta (T3) e umas das transformações elementares (T2), pode-se encontrar a outra transformação elementar (T1). Exemplo 1: Paulo jogou duas partidas de bolas de gude. Na primeira partida ele ganhou 11 bolinhas de gude. No final da segunda partida ele ficou com um total de 18 bolinhas. Ao final das duas partidas, quantas bolas ele ganhou?

Exemplo 2: Paulo jogou duas partidas de bolas de gude. Na primeira partida ele ganhou 11 bolinhas de gude. No final da segunda partida ele ficou com um total de 7 bolinhas. Ao final das duas partidas, quantas bolas ele perdeu?

e) A transformação de uma relação: é aquela em que uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em um estado relativo (QUADRO 5). No entanto, nesta categoria, Vergnaud (2009) afirma que serão reencontradas as classes estudadas no caso da segunda categoria (busca do estado final, da transformação e do estado inicial) com subclasses mais numerosas, levando em conta as várias possibilidades que existem para o sinal e o valor absoluto.

QUADRO 5 - RELAÇÃO DE BASE (E)



FONTE: Próprio autor, adaptado de Vergnaud (1994)

A diferença entre a segunda e essa categoria é que na segunda a transformação opera entre medidas e nesta quinta categoria a transformação opera entre relações. As situações envolvidas nesta quinta categoria envolvem aquelas nas quais se desconhece por vezes a primeira relação (R1), outras a segunda relação (R2) e em outras a transformação (T).

- Conhece-se a primeira relação e a transformação, porém não se sabe a segunda relação. Exemplo: Em 2010 José era 5 centímetros mais alto do que Maria. Passados dois anos, José cresceu 3 centímetros a mais do que ela. Após esses dois anos, José ficou mais alto ou mais baixo do que Maria? Quantos centímetros?

- São conhecidas a transformação e a segunda, é necessário, então, descobrir a primeira relação. Exemplo: No início de 2010, João e Maria possuíam alturas diferentes. No início de 2011 João cresceu 2 cm a mais do que Maria, de modo que no início de 2012 ele tinha 7 cm a mais do que ela. Assim, quantos centímetros a mais ou a menos João possuía no início de 2010 em relação à Maria?

- Conhecemos as relações inicial e final e é necessário descobrir a transformação. Exemplo: Até a rodada passada o time A possuía 5 gols a mais do que o time B. Nessa rodada eles se enfrentaram e o time A agora tem 7 gols a mais do que o time B. Quantos gols a mais o time A marcou em relação ao time B na última rodada?

f) A composição de duas relações: aquela em que duas relações se compõem para resultar em um estado relativo. Serão reencontradas nesta categoria as classes estudadas na primeira categoria, mas, no lugar de medidas temos as relações. Esta categoria pode também estar próxima da quarta categoria, pois temos relações no lugar de transformações, como podemos observar no QUADRO 6. (VERGNAUD, 2009)

QUADRO 6 - RELAÇÕES DE BASE (F)

FONTE: Próprio autor, adaptado de Vergnaud (1994)

Esta categoria pode estar dividida em duas classes:

- Conhecemos a relação elementar (R1) e a relação de composição (R2), para obter a relação desconhecida (R3). Exemplo: Denise tem R$5,00 a menos do que Marli. Por sua vez, Marli tem R$7,00 a mais do que Lilian. Denise tem quanto a mais ou a menos do que Lilian?

- Conhecemos a relação de composição (R2) e a relação (R3), de modo que a relação inicial não é conhecida (R1). Exemplo: Denise tem certa quantia a mais do que Marli. No entanto, Marli tem R$8,00 a mais do que Lilian, de modo que Denise tem R$11,00 a mais do que Lilian. Assim, quanto Denise tem a mais do que Marli?

Por fim, para Vergnaud

> O campo conceptual das estruturas aditivas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtracções, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas. (VERGNAUD, 1996a, p.168)

O campo conceitual das estruturas multiplicativas, por outro lado, é o conjunto de todas as situações que necessitam do domínio de uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações. Vários tipos de conceitos matemáticos estão envolvidos nas situações que constituem o campo conceitual das estruturas multiplicativas e no pensamento necessário para dominar tais situações. Entre tais conceitos estão o de função linear, função não-linear, espaço vetorial, análise dimensional, fração, razão, taxa, número racional, multiplicação e divisão.

Nesse sentido, podemos afirmar que o conceito dos números fracionários está inserido no campo conceitual das estruturas multiplicativas, por esse motivo nos aprofundaremos, em sequência, no estudo do campo multiplicativo.

2.1.5 Campo conceitual multiplicativo

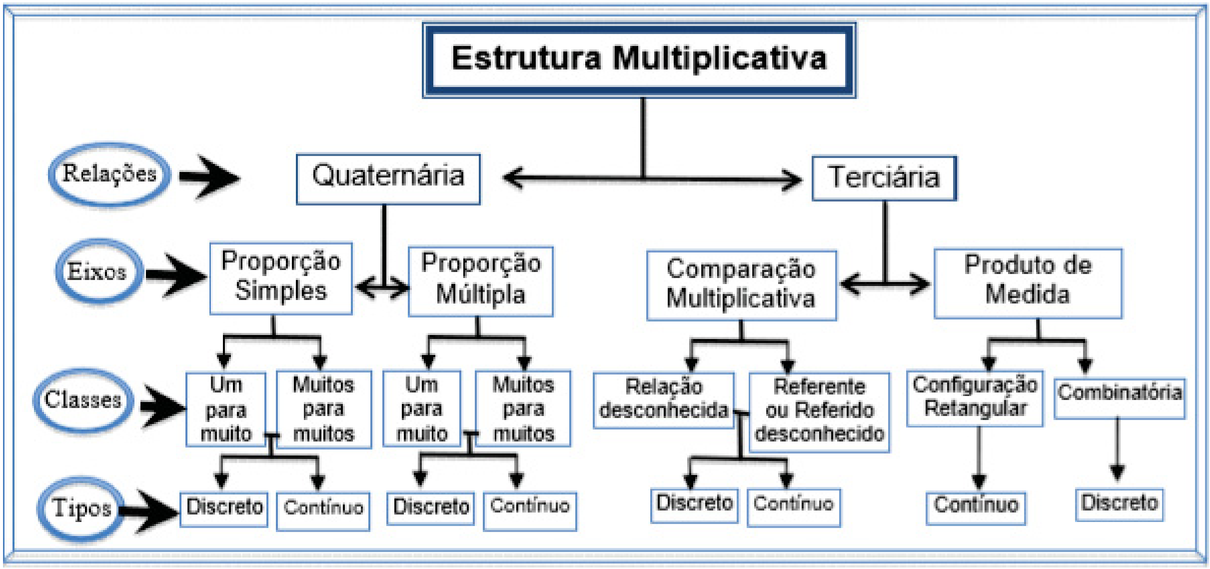
Realizaremos agora um aprofundamento do Campo Conceitual multiplicativo, ou, como também é conhecido, estruturas multiplicativas.

Para Vergnaud (1994) são ingredientes essenciais para as estruturas multiplicativas: multiplicação e divisão, funções lineares e não lineares, razão, partição, fração e números decimais, análises dimensionais, mapeamento linear e combinações lineares de magnitudes. O autor também afirma que o campo multiplicativo abrange muitas situações que precisam ser classificadas e analisadas cuidadosamente, de modo que se possa descrever uma hierarquia de possíveis competências desenvolvidas pelos alunos, dentro e fora da escola (VERGNAUD, 1994).

Magina, Santos e Merlini (2012) apontam as estruturas multiplicativas como sendo um conjunto de problemas ou situações onde a análise e o tratamento necessitam de procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros. Os autores com base nas obras de Vergnaud (1994) elaboraram um esquema, apresentado na FIGURA 4 com o objetivo de sintetizar as ideias centrais do campo multiplicativo.

Os autores (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2012) explicam que o esquema está dividido em duas partes: relações quaternárias e relações ternárias. Cada uma dessas partes (relações) é formada por dois eixos. Os eixos pertencentes às relações quaternárias dividem-se em duas classes: um para muitos e muitos para muitos, e os eixos das relações ternárias se dividem nas seguintes classes: relação desconhecida e referido desconhecido para o eixo de comparação multiplicativa e as classes configuração retangular e combinatória para o eixo produto de medida. Todas as classes podem usar quantidades do tipo discreta ou contínua, exceto a classe configuração retangular (apenas quantidade contínua) e combinatória (apenas quantidade discreta).

FIGURA 4 - ESQUEMA SOBRE O CAMPO MULTIPLICATIVO



FONTE: Magina; Santos; Merlini (2012, p.5).

Vergnaud (2014) apresenta alguns exemplos para diferenciar as relações quaternárias das relações terciárias. As relações terciárias, ou também chamadas de ternárias, são aquelas que ligam três elementos entre si, como por exemplo:

> - Pedro está entre André e Joana
> - Sete é quatro a mais que três
> - Seis multiplicado por cinco dá trinta
> -Os habitantes da França que não são franceses são estrangeiros residentes na França. (VERGNAUD, 2014, p.24)

Já as relações quaternárias são aquelas que relacionam quatro elementos entre si:

> - Londres é para a Inglaterra o que Paris é para França
> - Antônio é tão moreno quanto Brigitte é loira
> - O preço de 6 garrafas está para o preço de uma garrafa assim como 6 garrafas estão para uma garrafa
> - Dezoito sobre quinze é igual a seis sobre cinco: $\frac{18}{15} = \frac{6}{5}$
>
> (VERGNAUD, 2014, p.24)

Ainda sobre as relações, Magina e colaboradores afirmam que as relações são quaternárias quando o problema oferece três elementos e pergunta pelo quarto, já nas relações ternárias, apenas dois elementos são enunciados e se pergunta pelo terceiro (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2016)

A partir das relações quaternárias há uma subdivisão em dois eixos: proporção simples e proporção múltipla. A proporção simples envolve uma relação entre quatro quantidades, duas de um tipo e as outras duas de outro tipo, ou seja, é uma proporção direta entre duas variáveis, como por exemplo, tempo e distância, custo e objeto, entre outras. O eixo de proporção simples se divide ainda em duas classes de situações: a correspondência um para muitos e a correspondência muitos para muitos (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2012).

Observe os exemplos apresentados a seguir:

Exemplo 1: Em um pacote há 5 bolachas. Quantas bolachas há em 4 pacotes?

Exemplo 2: Alessandro pagou 6 reais em 2 chocolates. Quanto ele irá pagar em três chocolates?

Exemplo 3: Na cantina da escola de João, na compra de 5 pirulitos ganham-se 2 chicletes. Se João comprar 15 pirulitos quantos chicletes ganhará?

No exemplo 1 a relação entre as variáveis está explícita, no caso, a relação é um para cinco, ou seja, temos um exemplo de uma relação um para muitos. Nos exemplos 2 e 3 a relação entre as variáveis não é explícita, portanto, se encaixam nas situações de correspondência muitos para muitos, porém há uma diferença entre esses dois exemplos. No exemplo 2 apesar da relação entre as variáveis ser dois para seis conseguimos chegar à correspondência um para três. Ou seja, na classe de correspondência muitos para muitos pode haver dois tipos de situação, aquelas nas quais é possível chegar a relação um para muitos (exemplo 2) e as outras em que não é possível (exemplo 3).

A partir das relações terciárias temos dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medida. O eixo de comparação multiplicativa diz respeito às situações que envolvem uma comparação multiplicativa entre duas variáveis de mesma natureza. Situações que envolvem metade e dobro, por exemplo, são protótipos de problemas que se classificam nesse eixo. O exemplo a seguir ilustra um problema de comparação multiplicativa: “Alessandro e José jogaram duas partidas de vídeo game. José fez o dobro de pontos que Alessandro. Se Alessandro fez 300 pontos quantos pontos Alessandro fez?”. Este eixo pode ser classificado ainda em duas classes distintas: relação desconhecida e referido desconhecido (MAGINA; SANTOS; MERLINI, 2016)

Observe os dois exemplos abaixo:

Exemplo 1: Comprei na cantina da escola um suco que custou R$4,00 e um sanduíche que custou R$2,00. Quantas vezes o suco foi mais caro que o sanduíche?

Exemplo 2: A quantidade de carrinhos de Paulo é 5 vezes menor que a quantidade de carrinhos de João. Paulo tem 4 carrinhos, quantos carrinhos tem João?

No exemplo 1 conhecemos o valor das duas variáveis envolvidas, mas não está estabelecida a relação multiplicativa entre elas, ou seja, esse exemplo pertence à classe de “situações de relações desconhecidas”. Já no exemplo 2 sabe-se o valor de uma das variáveis envolvidas e a relação multiplicativa entre as variáveis, porém desconhecemos o valor da outra variável, sendo assim, é um exemplo que caracteriza as situações da classe “referido desconhecido”.

O eixo produto de medidas se divide em duas classes: configuração retangular e combinatória.

A classe de configuração retangular diz respeito a situações onde as variáveis apresentadas representam medidas dispostas de forma retangular na horizontal e na vertical, normalmente encontramos nessa classe situações envolvendo o cálculo da área de terrenos.

A classe de combinatória remete a noção do produto cartesiano entre dois conjuntos diferentes.

Exemplo: Bruna irá numa festa e tem em seu guarda-roupa quatro blusas e três saias para usar. Qual o total de combinações diferentes ela consegue fazer utilizando todas as saias e blusas?

No quadro apresentado por Magina, Santos e Merlini (2012), figura 6, para cada classe, tanto nas relações quaternárias quanto terciárias, ainda há a divisão em tipos discretos e contínuos. Todos os exemplos, aqui apresentados, envolveram apenas quantidades discretas, mas há uma infinidade de situações envolvendo quantidades contínuas que poderiam ser elaborados.

A respeito disso, Nunes et al. (2005) afirmam que quando comparamos quantidades entre si, vemos que existem diferentes tipos de quantidade. Uma das formas de classificar esses diferentes tipos de quantidades é a diferença entre quantidades contínuas e descontínuas (discretas). As quantidades discretas dizem respeito a quantidades enumeráveis, ou seja, consta de unidades separadas umas das outras, como a quantidade de pessoas, número de balas, números de pessoas, entre outros. Já as quantidades contínuas referem-se a unidades ou partes que não estão separadas, como por exemplo: comprimento, capacidade de um recipiente, uma barra de chocolate. Os autores apontam que é mais difícil para as crianças compreenderem as quantidades contínuas, isso porque, nesse caso as unidades que compõe essa quantidade não podem ser percebidas separadamente. “Apesar das diferenças entre quantidades contínuas e descontínuas, elas estão baseadas na mesma estrutura lógica, que é a relação parte-todo: a soma das unidades é igual ao valor do todo” (NUNES et al., 2005. p. 121).

Por exemplo: Uma barra de chocolate é suficiente para duas crianças comerem. Quantas crianças poderão comer se tivermos 3 barras de chocolate?

Esse exemplo envolve a barra de chocolate, que representa uma quantidade contínua. Poderíamos classificar essa situação em relações quaternárias (o problema oferece três elementos e pergunta pelo quarto) no eixo de proporção simples (envolve uma relação entre quatro quantidades, duas de um tipo e as outras duas de outro tipo), na classe um para muitos (conhecemos a relação um para dois).

Através desse panorama das classes de situações que compõem o Campo Conceitual Multiplicativo é possível perceber que este campo conceitual implica em multiplicações e divisões e, por esse motivo, os números fracionários podem ser analisados dentro do campo das estruturas multiplicativas, “até mesmo porque as crianças compreendem primeiramente as frações como operadores, como relações ou como quantidades, antes de compreendê-las como números que podem ser adicionados, subtraídos, multiplicados e divididos” (CRUZ, 2003, p. 32). Por isso que os números fracionários não aparecem como números puros no campo multiplicativo, mas como medidas e relações, sendo utilizadas em seus diversos significados: representar uma parte de um todo, representando uma medida (não podendo ser expressa por um número inteiro) ou como um par ordenado m/n de símbolos; ou ainda como uma relação que une duas magnitudes do mesmo tipo (VERGNAUD, 1994).

2.2 FRAÇÃO E CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO

Como já apresentado anteriormente, os números fracionários estão inseridos no campo das estruturas multiplicativas. Dedicamos aqui, um espaço para aprofundarmos sobre o conceito de fração.

Cruz (2003) afirma que mesmo que um estudioso dirija sua atenção apenas para um dos conceitos que compõem as estruturas multiplicativas, é impossível estudá-lo separado dos demais conceitos que fazem parte desse campo, pois eles não são matematicamente independentes uns dos outros.

> Estudar frações, por exemplo, sem considerar os conceitos a elas interconectados, (proporção, razão, multiplicação, divisão, entre outros) se constituiria numa falha conceitual irreparável para o estudo de sua origem e desenvolvimento (CRUZ, 2003, p. 32)

Sendo assim, à luz da teoria dos campos conceituais, Spinillo e Lautert (2006) apontam três pontos que precisam ser considerados sobre as frações. O primeiro é a ideia do campo conceitual, onde a fração é relacionada a outros conceitos multiplicativos como a divisão e a equivalência. O segundo ponto é relativo aos invariantes operatórios do conceito de fração e o último ponto considerado pelas autoras é a noção de esquemas.

2.2.1 Campo conceitual da fração

Sobre a ideia de campo conceitual, os números fracionários não aparecem como números puros no campo das estruturas multiplicativas, mas como medidas e relações, sendo utilizadas de diversas maneiras: seja para representar uma parte de um todo; seja como uma magnitude fracionária; seja como um par ordenado m/n de símbolos; seja como uma relação que une duas magnitudes do mesmo tipo, ou seja, a fração é relacionada a outros conceitos multiplicativos (VERGNAUD, 1983).

Nunes e Bryant (2009) afirmam que existem dois tipos de situações de frações comumente apresentadas na escola primária. A primeira envolve medida: se você deseja representar uma quantidade por meio de um número e a quantidade é menor que a unidade de medida, você precisa de uma fração. A segunda envolve divisão: se o dividendo é menor que o divisor, o resultado da divisão é representado por uma fração, por exemplo, se você reparte 3 bolos para 4 crianças, cada criança irá receber ¾ do bolo.

Apesar dessas duas situações parecerem iguais e não haver necessidade de distinção entre elas para os adultos, pesquisas apontam que as crianças pensam diferente sobre essas situações, ou seja, crianças usam diferentes esquemas de ações em cada uma das situações (NUNES; BRYAN, 2009), conforme apresentaremos adiante em 2.5.2.

2.2.2 Invariantes operatórios do conceito de fração

Vergnaud (1996b) afirma que as crianças formam seus conceitos a partir das situações que vivenciam e os invariantes operatórios (conhecimentos-em-ação e teoremas-em-ação) constituem a base conceitual, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e, a partir dela e da meta a atingir, inferir as regras de ação mais pertinentes para abordar uma situação.

> A compreensão do conceito de fração, como pode ser observado, envolve a compreensão de outros conceitos e conhecimentos que poderão, nas fases iniciais da aprendizagem de competências e conceitos, estar implícitos ou mesmo insuscetíveis de explicitação, mas que são extremamente importantes, pois orientam o desenvolvimento da ação. Estes conhecimentos implícitos são denominados por Vergnaud de 'conhecimentos-em-ação'. (CRUZ, 2003)

Bezerra, Magina e Spinillo (2009), Spinillo e Lautert (2006), Lima (1986) e Nunes e Bryant (1997) apontam os seguintes invariantes operatórios para as frações:

- Divisão equitativa das partes: o todo precisa ser dividido em partes iguais para que cada parte seja considerada uma fração.
- Esgotamento do todo: onde existe a impossibilidade da existência de resto.
- Relação entre n-partes e n-cortes: é a relação entre o número de partes e o número de cortes necessários para obter as partes, ou seja, para dividir, por exemplo, um todo contínuo em três partes iguais serão necessários, apenas, dois cortes.
- Relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido: quanto maior o número de partes menor o tamanho de cada parte.

- Princípio de invariância: a soma de todas as partes constituídas a partir do todo é igual ao todo inicial, ou seja, com a divisão do todo em partes, a unidade não é alterada.

Campos (2011) afirma que no que tange aos invariantes operatórios, tanto explícitos (quando as propriedades do objeto e os procedimentos para resolver um problema estão conscientes para o sujeito) ou implícitos (quando o sujeito faz uso correto dos procedimentos, porém não tem consciência das propriedades que subjaz esse procedimento que ele próprio usou para resolver o problema) devemos considerar os invariantes de ordem e equivalência.

Apesar de essenciais para o ensino e compreensão de frações, observamos um enfoque maior na apresentação dos esquemas referentes a esse conteúdo. De modo que, daremos uma atenção maior para esse tópico.

2.2.3 Esquemas de fração

Tendo em vista que os números racionais são números inseridos no domínio do quociente, isto é, trata-se de um número definido por uma operação de divisão, é razoável buscar a origem da compreensão de crianças sobre os números racionais em seu entendimento sobre divisão (NUNES, 2008; NUNES; BRYANT, 2009). Para os autores, em situações de divisão, as crianças podem desenvolver alguma percepção sobre a equivalência e a ordem de quantidades que normalmente seriam representadas por frações, mesmo na ausência de conhecimento de representações para frações, seja na forma escrita ou oral.

Nunes (2008) afirma que tradicionalmente consideram-se dois tipos de situações de divisão: partitiva e por quotas. Os problemas de divisão partitiva são apresentados por um modelo de situação onde um determinado número de objetos ou coleção é dividido igualmente entre fragmentos ou subcoleções. Já nos problemas de divisão por quotas procura-se determinar quantas vezes uma determinada quantidade está contida em uma quantidade maior. A diferença crucial entre os dois tipos de problemas é que na divisão partitiva as crianças são informadas de quantas partes devem existir, mas não do tamanho das partes, enquanto na divisão em cotas elas são informadas sobre o tamanho das partes e são solicitadas a descobrir quantas partes se encaixam no todo (NUNES, 2008; NUNES; BRYANT, 2009)

Nunes (2008) e Nunes e Bryant (2009) também afirmam que os dois esquemas em ação usados por crianças em situações de divisão são: partição e correspondência. Quando as crianças usam o esquema de partição, as percepções que elas obtém sobre quantidades podem ajudá-las a entender alguns princípios que se aplicam ao domínio de números racionais. Eles podem, por exemplo, raciocinar que quanto mais partes o todo for dividido, menores as partes serão. Essa percepção se torna relevante ao nível de que quanto mais elevada a compreensão da criança sobre partição mais ela poderá desenvolver a compreensão sobre equivalência de frações, tendo em vista que elas podem vir a entender que, se elas tiverem o dobro de partes, cada parte terá a metade do tamanho.

Embora a partição seja o esquema mais usado para introduzir os números fracionários às crianças, não é o único esquema de ação relevante para a divisão. Como já apontado acima, outro esquema usado pelas crianças é o de correspondência. Esse esquema usualmente é utilizado em situações onde o dividendo é representado por uma medida e o divisor é representado por outra medida. A diferença entre a partição e a correspondência é que na primeira, há um único todo (medida) e na correspondência há dois todos (medidas). Um exemplo para isso é a situação onde há barras de chocolate para serem distribuídas entre um determinado número de pessoas. Nesse caso o dividendo é um domínio de medida, chocolate, e o divisor um outro domínio, pessoas (NUNES, 2008; NUNES; BRYANT, 2009).

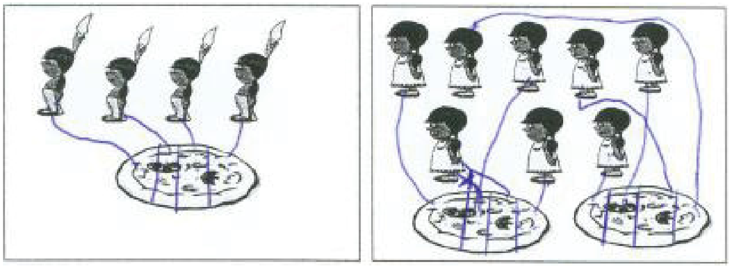
Para Nunes (2008) e Nunes e Bryant (2009), tanto o esquema de partição quanto o esquema de correspondência podem ajudar as crianças a compreenderem algo sobre a equivalência de quantidades. A análise realizada por eles com intuito de saber como as crianças podem realizar uma compreensão de equivalência e ordem de frações ao usar partição e correspondências em situações de divisão indica que pode ser possível que o “esquema de correspondências permita, em certo sentido, uma transição mais suave dos números naturais para os racionais, pelo menos no que diz respeito à compreensão de equivalência e ordem das quantidades” (NUNES, 2008, p. 28, tradução nossa)

Bezerra, Magina e Spinillo (2009) afirmam que os esquemas presentes no conceito de fração que dão sentido à organização das ações do sujeito ao lidar com as frações são a partição e a equivalência. O esquema de partição se origina na compreensão da relação inversa do tamanho do todo e o número de partes em que este foi dividido. Já para o esquema de equivalência é necessário estabelecer relações compensatórias entre o todo e o número de partes iguais em que foi dividido.

Mamede, Nunes e Bryant (2005) em uma análise sobre os procedimentos de crianças, identificaram que os esquemas de correspondência e partição são os mais utilizados para resolver problemas. O particionamento é considerado como sendo a divisão de um item em partes e a correspondência é definida como uma associação estabelecida entre as partes compartilhadas e cada destinatário.

A FIGURA 5 traz a resolução de uma situação, apresentada por Mamede, Nunes e Bryant (2005) onde exemplificam uma solução em que a criança fez uso da correspondência e partição.

FIGURA 5 - O USO DA CORRESPONDÊNCIA E PARTIÇÃO POR CRIANÇAS



FONTE: Mamede, Nunes, Bryant, 2005, p.286.

Cruz (2003) aponta que vários estudos vêm mostrando que, desde muito cedo, as crianças pequenas possuem um conhecimento intuitivo sobre frações, conhecimento este que antecede a iniciação formal (escolar) dos números racionais. Para a autora, esses esquemas intuitivos:

> [...] compreendem as imagens, as experiências vividas e as ferramentas de pensamento, formados a partir de um grande número de situações específicas vivenciadas no dia-a-dia e que servirão de base para a construção do conhecimento formal. (CRUZ, 2003, p.33)

A autora apresenta ainda alguns esquemas que considera necessários para a construção do conceito de fração: a) Esquema de unidade fracionária, b) Esquemas de partição, c) Esquemas relacionais, d) esquemas de equivalência, e) Conhecimento de metade.

a) Esquema de unidade fracionária: assim como o “um” é a unidade de referência do número inteiro, as crianças utilizam esse conhecimento para construir o esquema de unidade fracionária. Através da unidade fracionária a criança poderá contar, dividir e reagrupar, tendo por base a unidade "um".

Lima (1986) afirma que diante de uma situação que envolve os números fracionários, o aluno necessita, previamente, desenvolver algumas competências. Uma delas é a identificação de uma unidade (que o todo é tudo aquilo que considera como a unidade em cada caso concreto) e a realização de divisões, onde o todo é conservado. Para Lima (1986) uma condição essencial para o aprendizado dos números fracionários é a compreensão de que a soma das frações derivadas de um todo constitui o próprio todo. E que, de uma forma geral, a conservação de uma quantidade discreta antecede a conservação de uma quantidade contínua.

Assim como o número um é a unidade de referência para a construção do número inteiro, as crianças utilizam esse conhecimento para construir o esquema de unidade fracionária (CRUZ, 2003). Para ilustrar isso, a autora traz o exemplo que frequentemente é mostrado para as crianças, através de representações gráficas (círculos, retângulos etc.) associadas à representação matemática, que as partes de um todo que foi dividido igualmente, se forem unidas, formarão o todo novamente, isto é, a unidade. É esta flexibilidade do conceito de unidade representada pela possibilidade de sucessivas divisões de uma unidade em partes iguais, das partes em subpartes e da reconstrução da unidade; que se constitui como uma das ações fundamentais para a construção do significado de número racional (PITKETHLY; HUNTING, 1996, apud. CRUZ 2003).

A autora ainda afirma que quando a criança toma uma unidade por referência, ela estará em condições de antecipar o tamanho das partes na qual o todo será dividido.

b) Esquemas de partição: os esquemas de partição podem ser considerados como os precursores cognitivos do número fracionário. Embora existam diferenças na partição de quantidades discretas e contínuas, é no ato de partir que as crianças pequenas começam a compreender que existe uma relação inversa entre o tamanho de *n* e o número de partes em que *n* foi partido. Nunes e Bryant (1997) afirmam que a capacidade das crianças em entender a relação entre o tamanho de *n* e *n*-corte, em quantidades contínuas, antecede o conhecimento das representações fracionais e da habilidade para calcular com frações.

Pepper e Hunting (1998, apud. Cruz, 2003) investigaram o comportamento de crianças entre 4 e 6 anos acerca da organização de suas ações para realizar a divisão entre 12 bolachas para 3 bonecas (quantidades discretas). Os autores observaram que, frequentemente, a primeira ação das crianças era fazer uma correspondência bolacha-boneca, repetindo este movimento até que cada boneca tivesse uma bolacha e em seguida, a correspondência foi repetida em ciclos até que não mais houvesse bolachas para serem distribuídas. Segundo os autores mesmo que o conhecimento necessário não seja sofisticado e embora as crianças não soubessem ao final quantas bolachas cada boneca havia recebido, elas utilizaram com bastante propriedade este método para solucionar a situação. Nessa perspectiva, o método de partição utilizado por crianças pequenas para solucionar tarefas que envolvem quantidades discretas é uma ação básica do pensamento para compreender a linguagem e o simbolismo utilizados na representação fracionária, particularmente das unidades de frações como 1/2, 1/3 e 1/4 (CRUZ, 2003).

c) Esquemas relacionais: envolvem a capacidade das crianças em estabelecer relações de primeira ordem, ou seja, aquelas que englobam dois tipos de comparações: relações parte-parte (razão) e relações parte-todo (fração); e estabelecer relações de segunda ordem, que são as relações entre relações de primeira ordem.

As relações parte-parte são as primeiras relações lógicas utilizadas pelas crianças para quantificar frações. É através da relação parte-parte que as crianças são capazes de comparar partes, identificar qual é maior, menor ou igual à outra. Já a relação parte-todo é considerada fundamental para o desenvolvimento do conceito de número racional, porque se encontra diretamente relacionado com a habilidade do sujeito em dividir todos contínuos e discretos, em partes iguais. Por outro lado, o que diz respeito às relações de segunda ordem, elas são mais facilmente compreendidas pelas crianças quando estão envolvidas comparações parte-parte, do que comparações parte-todo. Por exemplo: Spinillo (2002), citada por Cruz (2003) desenvolveu um estudo com crianças entre 7 e 8 anos de idade para verificar o uso de comparações parte-parte e parte-todo em tarefas de probabilidade. Para conseguir solucionar a tarefa de forma mais segura, a criança precisaria considerar três aspectos da probabilidade: o número de casos favoráveis, o número de casos desfavoráveis e o número de casos possíveis (total de bolinhas em cada arranjo). A autora observou que as crianças sempre realizavam seus julgamentos baseados em comparações em termos absolutos ou relativos de casos favoráveis e desfavoráveis, nunca fazendo referência ao número de casos possíveis. Diante destes resultados, a autora concluiu que as crianças apresentam maior facilidade para fazer estimativas em tarefas de probabilidade baseadas nas relações parte-parte do que nas relações parte-todo.

d) Esquemas de equivalência: os esquemas de equivalência estão relacionados com a habilidade da criança de sintetizar unidades para gerar uma outra unidade, equivalente à soma de suas partes. Lima (1986) afirma que para que a criança entenda a equivalência de quantidades contínuas é fundamental que compreenda que a divisão de um todo em partes iguais não altera o todo.

Cruz (2003) afirma que os esquemas de equivalência estão relacionados com a habilidade da criança sintetizar unidades para gerar uma outra unidade, equivalente à soma de suas partes. Por exemplo, identificar que a combinação de dois 1/4 equivalem a 2/4. A autora ainda afirma que essas noções de equivalência são, inclusive, fundamentais para que a criança possa dominar e operar com frações. Um exemplo apresentado pela autora é o caso onde é apresentado para as crianças duas figuras, retangulares, por exemplo, ambas repartidas ao meio, porém de formas diferentes. É muito difícil para as crianças compreenderem que essas figuras se comparadas após a divisão permanecem equivalentes.

Por outro lado, Lima (1986), citado por Cruz (2003), observou que em atividades de equivalência que envolve quantidades discretas, sem a interferência do aspecto perceptual, as crianças recorrem às equivalências entre coleções, que representam frações, para que possam confirmar os resultados obtidos.

e) Conhecimento de metade: para Aguiar (1980; apud CRUZ, 2003) a noção de metade deveria ser a primeira a ser ensinada no conteúdo de frações, pois, em tarefas de subdivisão de área, a noção de metade além de anteceder a formação de outras unidades fracionárias (1/3, 1/4, 1/5 e 1/6) contribui para a formação das mesmas.

Spinillo e Bryant (1991) relatam três experimentos que mostram a importância crucial da noção de metade nos julgamentos proporcionais das crianças. No primeiro experimento, crianças de 4, 5, 6 e 7 anos de idade tiveram que julgar qual das duas caixas de tijolos azuis e brancos estava representada em uma pequena figura. A proporção de azul para tijolos brancos era diferente nas duas caixas, e a questão era se as crianças poderiam usar essas proporções para fazer suas escolhas. As crianças de 6 e 7 anos resolveram o problema com muito mais sucesso quando as proporções cruzaram o limite "metade" (por exemplo, 3/8 azul vs. 5/8 azul). O segundo experimento mostrou que as discriminações envolvendo metade (por exemplo, 1/2 azul versus 1/4 azul) também são mais fáceis do que aquelas que não cruzam a metade do limite para as crianças de 6 e 7 anos e o terceiro experimento confirmou os resultados dos dois primeiros com imagens de diferentes tamanhos absolutos um do outro. Os autores concluíram que “metade” desempenha um papel crucial no raciocínio proporcional inicial das crianças.

Pothier e Sawada (1983) desenvolveram atividades com o objetivo de investigar a emergência da diferenciação do processo de partição em tarefas de subdivisão de todos contínuos, onde as crianças eram solicitadas a cortar um bolo em duas, três, quatro e cinco partes iguais. Eles observaram que as crianças buscavam utilizar o referencial de metade, fazendo uma divisão na região do meio, como forma de iniciar a divisão das áreas dos bolos e nos casos em que o número de partes era múltiplo de dois, as crianças iam apenas acrescentando linhas para subdividir as partes já estabelecidas.

Para Nunes e Bryant (1997) a compreensão inicial do conceito de metade, também, favorece o estabelecimento das conexões entre os aspectos extensivos (parte-parte) e intensivos (parte-todo) do número racional, podendo, inclusive, ser considerado como um referencial importante para as crianças iniciarem a quantificação de frações.

Cruz (2003) afirma que “o referencial de metade é um recurso poderoso para a compreensão inicial das crianças de conceitos matemáticos como proporção, probabilidade e fração” (p. 43)

Diante disso, é necessário enfatizar que certos esquemas de conhecimentos podem ser considerados como necessários para a construção do conceito de fração.

> O fato é que a construção do conceito de número fracionário não é algo simples, pois requer, além da compreensão de conceitos como razão, proporção, equivalência etc., que a criança descubra quais são as conexões e rupturas destes com o conceito de fração. (CRUZ, 2003, p.47)

Sendo assim, nota-se a complexidade da construção do conceito de fração. Algumas pesquisas vêm sendo realizadas com o intuito de contribuir para o conhecimento de formas de ensino desse conteúdo. Apresentaremos em seguida, algumas pesquisas encontradas nesse sentido.

3 REVISÃO DE LITERATURA SOBRE CAMPOS CONCEITUAIS E FRAÇÃO

Nunes e Bryant (1997) afirmam que em muitos casos as crianças aparentam compreender completamente as frações, porém não o fazem. Para os autores isso pode ser um grande problema, pois a criança passará pela escola sem entender e superar suas dificuldades com o conteúdo sem que ninguém perceba.

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e, ainda assim, não o têm. Elas usam os termos fracionais certos, elas falam sobre frações coerentemente; elas resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam (NUNES; BRYANT, 1997, p.191)

Tendo em vista o reconhecimento da complexidade que envolve o conceito dos números fracionários, alguns pesquisadores têm voltado o olhar para o ensino e aprendizagem das frações.

A fim de realizar um levantamento dos trabalhos já feitos envolvendo o conceito de fração procuramos em três bases de dados: Periódicos CAPES, Scielo e banco de teses e dissertações da CAPES no período de maio de 2018. O QUADRO 7 mostra o resultado da primeira busca nas três bases utilizando as palavras-chaves: “Frações” em seguida “Frações e matemática” refinamos em sequência nossa busca para “Frações e matemática e Campos Conceituais”, nesse momento apesar de Campos Conceituais se referir a teoria de Vergnaud, observamos que alguns trabalhos traziam as palavras campos e conceitual sem se referir à Teoria dos Campos Conceituais por esse motivo, filtramos mais a busca procurando por: “Frações e matemática e campos conceituais e Vergnaud”.

QUADRO 7 - RESULTADO DA PRIMEIRA BUSCA AO BANCO DE TESES E DISSERTAÇÕES DA CAPES, PERIÓDICOS CAPES E SCIELO

Teses e dissertações da Capes			
Frações	Frações e matemática	Frações e matemática e campos conceituais	Frações e matemática e campos conceituais e Vergnaud
11202	347	39	12
Periódicos Capes			
Frações	Frações e matemática	Frações e matemática e campos conceituais	Frações e matemática e campos conceituais e Vergnaud
3787	186	21	4
Scielo			
Frações	Frações	Frações e matemática	Frações e matemática

	e matemática	e campos conceituais	e campos conceituais e Vergnaud
1847	12	1	1

FONTE: Dados gerados pela busca realizada em 31 de maio de 2018

A primeira procura foi realizada na plataforma de teses e dissertações da CAPES. Procuramos os trabalhos que tratassem sobre o conteúdo de frações. Ao buscarmos pela palavra “FRAÇÃO” ao todo foram encontrados 11202 textos, nessa primeira busca os trabalhos encontrados tratavam de fração em campos de pesquisa da medicina, agronomia, entre outros, por esse motivo, refinamos a busca dentre esses 11202 textos com as palavras-chave “Frações e Matemática” e encontramos o número de 347 trabalhos. Desses 347 trabalhos encontrados, refinamos a busca com as palavras-chave “Frações e Matemática e Campos Conceituais” encontrando 39 textos. Para encontrarmos os textos que, dentre esses 39, referenciassem campos conceituais de Vergnaud realizamos a busca pelas palavras-chave “Frações e Matemática e Campos Conceituais e Vergnaud” o que resultou um total de 12 textos, registrados no QUADRO 8.

QUADRO 8 - RESULTADO DA PRIMEIRA BUSCA NA PLATAFORMA DE TESES E DISSERTAÇÕES DA CAPES.

Autor	Título
Pinheiro, Bruno Pereira. (2015)	As diferentes concepções de frações dos estudantes do curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública da Bahia.
Langoni, Danilo Pedro. (2015)	A formação continuada e o uso das frações voltadas para a construção do conhecimento.
Canova, Raquel Factori. (2013)	Um estudo das situações parte-todo e quociente no ensino e aprendizagem do conceito de fração
Malaspina, Maria Da Conceição De Oliveira. (2007)	O início do ensino de fração: uma intervenção com alunos de 2ª série do Ensino Fundamental.
Santos, Rosivaldo Severino Dos. (2016)	Rendimentos e estratégias de estudantes concluintes do ensino fundamental na resolução de itens de avaliações externas.
Castro, Flavia Caraiba De. (2014)	Quantidades intensivas: análises de uma intervenção com alunos do 5° ano no Ensino Fundamental.
Pinheiro, Maria Gracilene De Carvalho (2014)	Formação de professores dos anos iniciais: conhecimento profissional docente ao explorar a introdução do conceito de fração.
Oliveira, Joelma Cruz De. (2015)	Os significados das frações presentes em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental.
Silva, Angélica Da Fontoura Garcia. (2007)	O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações.

Filho, Dario Vieira De Oliveira. (2011)	Concepções de professores da rede pública estadual de São Paulo acerca do ensino das frações no ensino fundamental.
Machado, Cacilda Tenório Oliveira. (2007)	Concepções epistemológicas de professores de matemática sobre números fracionários, suas experiências e as implicações em suas práticas na 5ª série do ensino fundamental.
Bolognani, Ana Carla De Almeida. (2015)	Ensino e aprendizagem de frações mediados pela tecnologia: uma análise à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud.

FONTE: Dados gerados na busca do dia 31 de maio de 2018

A segunda base de dados que pesquisamos foi o portal de periódicos da CAPES. Na primeira busca pela palavra "FRAÇÃO" encontramos 3.787 textos. Pelos mesmos motivos da busca na primeira base refinamos a procura dentre esses 3.787 textos com as palavras-chave "Frações e Matemática" e encontramos o número de 186 trabalhos. Desses 186 trabalhos encontrados, refinamos a busca com as palavras-chave "Frações e Matemática e Campos Conceituais" encontrando 21 textos, para encontrarmos os textos que, dentre esses 21, referenciassem campos conceituais de Vergnaud realizamos a busca pelas palavras-chave "Frações e Matemática e Campos Conceituais e Vergnaud" o que resultou um total de 4 textos, apresentados no QUADRO 9.

QUADRO 9 - RESULTADO DA PRIMEIRA BUSCA NA PLATAFORMA DE PERIÓDICOS DA CAPES.

Autor	**Título**
Peixoto, Jurema. (2015)	Gestos, sinais e esquemas de aprendizes surdos na multiplicação.
Silva, Angélica; Serrazina, Maria; Campos, Tânia. (2014)	Formação continuada de professores que lecionam matemática: desenvolvendo a prática reflexiva docente.
Brandt, Celia Finck; Méricles, Thadeu Moretti. (2016)	Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa.
Sperafico, Yasmini; Dorneles, Beatriz; Golbert, Clarissa. (2015).	Competência cognitiva e resolução de problemas com equações algébricas do 1° grau.

FONTE: Dados gerados na busca do dia 31 de maio de 2018

Por fim, realizamos a mesma busca na base de dados Sciello. Aqui na primeira busca houve um resultado de 1847 artigos para a palavra-chave "fração", desses refinamos a busca e encontramos 12 para "frações e matemática". Desses 12 refinamos a busca para "Frações e Matemática e Campos Conceituais" e encontramos 1 texto: "*The comprehension of numerical relationships in the learning of fractions: a comparative study with Brazilian and Portuguese children*" (VASCONCELOS; MAMEDE; DORNELES, 2017) que foi novamente encontrado ao utilizar as palavras-chave “Frações e matemática e campos conceituais e Vergnaud”.

Ao longo das leituras realizadas percebemos que alguns trabalhos que envolviam a Teoria do Campos Conceituais estavam presentes na área da Psicologia, por essa razão realizamos uma nova busca nas mesmas bases de dados utilizadas anteriormente. Porém utilizando as Palavras-chave “Frações e psicologia”, “Frações e psicologia e matemática” e “Frações e psicologia e matemática e campos conceituais”. Podemos observar no QUADRO 10 o número de pesquisas encontradas.

QUADRO 10 - RESULTADO DA SEGUNDA BUSCA AO BANCO DE TESES E DISSERTAÇÕS DA CAPES, PERÓDICOS DA CAPES E SCIELO.

Teses e dissertações da Capes		
Frações e psicologia	frações e psicologia e matemática	Frações e psicologia e matemática e campos conceituais
14	1	1
Periódicos da Capes		
Frações e psicologia	frações e psicologia e matemática	Frações e psicologia e matemática e campos conceituais
58	29	5
Scielo		
Frações e psicologia	frações e psicologia e matemática	Frações e psicologia e matemática e campos conceituais
5	1	1

FONTE: Dados gerados pela busca realizada 31 de maio de 2018

Utilizamos as mesmas palavras chaves nos três bancos de dados. No banco de teses e dissertações da CAPES encontramos 14 pesquisas para a busca das palavras-chave “frações e psicologia”, desses 14 textos refinando para “frações e psicologia e matemática” encontramos uma pesquisa que apareceu novamente ao buscarmos por “frações e psicologia e matemática e campos conceituais”. A pesquisa encontrada foi: O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental (MERLINI, 2006).

Na plataforma de periódicos CAPES, na primeira busca procuramos por pesquisas sobre “frações e psicologia” e encontramos um total de 58 trabalhos, refinamos a busca para “frações e psicologia e matemática” e obtivemos 29 pesquisas, refinando mais um pouco encontramos 5 artigos para “frações e psicologia e matemática e campos conceituais". No QUADRO 11 podemos ver os 5 artigos encontrados nessa etapa de busca.

Utilizando o mesmo processo de busca no banco de dados Scielo encontramos cinco pesquisas para "frações e psicologia", refinando essas cinco pesquisas encontramos apenas um texto para as palavras-chave: "frações e psicologia e matemática" e "frações e psicologia e matemática e campos conceituais". O texto encontrado foi**:** Adição de frações por estimativa a partir do referencial de metade e de inteiro (CRUZ; SPINILLO, 2014).

QUADRO 11 - RESULTADO DA SEGUNDA BUSCA NA PLATAFORMA DE PERIÓDICOS DA CAPES.

Autor	**Título**
Proença, Marcelo. (2015)	O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia.
Peixoto, Jurema (2015)	Gestos, sinais e esquemas de aprendizes surdos na multiplicação.
Magina, Sandra; Bezerra, Francisco Brabo; Spinillo, Alina. (2009)	Como desenvolver a compreensão de crianças sobre frações
Campos (2011)	Sobre ensino e aprendizagem de frações
Nilza Eigenheer Bertoni, Nilza Eigenheer (2008)	A construção do conhecimento sobre número fracionário

FONTE: Dados gerados na busca do dia 31 de maio de 2018

As buscas resultaram no total 24 pesquisas. Dessas 24 pesquisas após a leitura do título e resumo, 17 foram excluídas por abordarem as frações em uma perspectiva que não consideramos relevante para nossa pesquisa. Portanto as sete pesquisas registradas no QUADRO 12 são as que contribuíram para a escrita do nosso trabalho.

QUADRO 12 - TRABALHOS ENCONTRADOS NAS BUSCAS

Banco de dados	**Trabalho**	**Autores**
Teses e dissertações da Capes	Um estudo das situações parte-todo e quociente no ensino e aprendizagem do conceito de fração.	Raquel Factori Canova (2013)
	O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do ensino fundamental	Vera Lucia Merlini (2006)
Periódicos da Capes	A construção do conhecimento sobre número fracionário	Nilza Eigenheer Bertoni (2008)
	Sobre ensino e aprendizagem de frações	Campos (2011)
	Como desenvolver a compreensão de crianças sobre frações	Sandra Magina Francisco Brabo Bezerra Alina Spinillo (2009)

Scielo	The comprehension of numerical relationships in the learning of fractions: a comparative study with Brazilian and Portuguese children	Isabel Cristina peregrina vasconcelos, Ema Paula Botelho da Costa Mamede, Beatriz Vargas Dorneles. (2017)
	Adição de frações por estimativa a partir do referencial de metade e de inteiro	Maria Soraia Silva Cruz Alina Galvão Spinillo (2014)

FONTE: Dados gerados pela busca realizada em 31 de maio de 2018

Apresentaremos agora um relato sobre cada uma dessas pesquisas e os resultados obtidos pelos autores.

Em uma proposta de abordar diferentes significados das frações Merlini (2006) realizou uma pesquisa que teve por objetivo investigar as estratégias que os alunos, de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, adotando a classificação teórica proposta por Nunes et al. (2003). O estudo realizado pela autora teve a seguinte questão norteadora: "Quais estratégias de resolução alunos de 5ª e 6ª séries utilizam frente a problemas que abordam o conceito de fração, no que diz respeito aos cinco diferentes significados da fração: número, parte-todo quociente, medida e operador multiplicativo? Para responder essa pergunta Merlini (2006) realizou um estudo diagnóstico com 120 alunos, sendo 60 alunos da 5ª série e 60 alunos da 6ª série do Ensino Fundamental, de duas escolas da rede pública estadual da cidade de São Paulo. A pesquisa foi dividida em dois momentos: no primeiro foi aplicado um questionário coletivamente, envolvendo o conceito de fração, onde a resolução dos problemas foi feita de forma individual. No segundo momento foram realizadas entrevistas clínicas em 12% da amostra. A análise dos dados também foi separada em dois processos, em um primeiro passo foi realizada uma análise quantitativa e o outro para análise qualitativa. O percentual geral de sucesso dos alunos pesquisados das duas séries foi baixo (aquém de 25%), portanto, a autora optou por analisar as estratégias que resultaram em erro (insucesso) dos estudantes. Através dos resultados Merlini pode concluir que não houve, em nenhuma das duas séries pesquisadas, um desempenho equitativo entre os cinco significados da fração e que quanto às estratégias de resolução dos problemas não houve uma regularidade, ou seja, para um mesmo significado encontraram-se diferentes estratégias de resolução. Através desses resultados a autora concluiu que a abordagem que se faz do conceito de fração, não garante que o aluno construa o conhecimento desse conceito.

Em 2008, Bertoni escreveu um artigo relatando uma pesquisa cujo objetivo era apresentar uma sequência histórica das diversas propostas que já havia elaborado e experimentado para o ensino e a aprendizagem do número fracionário e de como elas levaram a autora em direção às ideias de Vergnaud sobre a formação de conceitos e a uma proposta fundamentada nessas ideias. Outro objetivo do texto exposto pela autora era mostrar como a necessidade de novos números – quantificadores para novas situações – surgiu no bojo de situações, como as relações entre eles foram progressivamente elaboradas e de como esses números imiscuíram-se entre os números naturais, já conhecidos dos alunos. Dessa forma, Bertoni (2008) passou a investigar como seria uma proposta para o ensino e a aprendizagem dos números fracionários segundo as ideias de Vergnaud para a formação de um conceito em geral. A autora subdividiu sua pesquisa em: situações, esquemas e representações. Para situações ela apresentou três tipos: contagem estendida, divisão e medida como situações significativas, que tornam o surgimento das frações, como números, útil e necessário. Na contagem estendida, "a emergência do número fracionário está associada à quantificação de coleções que não apresentam apenas objetos inteiros, contáveis pelos números naturais" (BERTONI, 2008, p.222). Para exemplificar a situação, a autora apresentou o seguinte problema: Saber quanto de melancia há em uma banca com melancias inteiras e outras partidas em metades ou quartos. As crianças podiam descrever em termos de melancias inteiras e pela metade, mas a autora afirma que a situação se revelou conveniente para a introdução do número quantificador um quarto. Bertoni (2008) afirma que um aspecto relevante dessa abordagem é que essa situação ressalta o aspecto de quantificação. A respeito das situações de divisão Bertoni (2008) afirma que em situações envolvendo a partilha do resto, o fato de o resultado final envolver, muitas vezes, números naturais acompanhados de números fracionários menores do que a unidade, permite uma compreensão mais ampla do que aquela obtida pela relação parte-todo, a partir de uma única unidade (com obstáculo posterior à aceitação de frações maiores do que a unidade). Para a autora, o terceiro tipo de situações, o de medidas, ocorreu historicamente e ocorre no cotidiano. Ao determinar um comprimento, o aluno pode ter necessidade de expressá-lo em metros e meio metro, metros e quartos de metro, metros e décimos de metro ou metros e centésimos de metro, como no caso de sua altura. Mais ainda, mostra os números naturais e os novos números inter-relacionados. A autora também identifica alguns tipos de esquemas baseados em seus estudos:

a) Esquema numérico-conceituais: diz respeito a identificação e formação do todo e metades;

b) Esquema Comparativo: a autora esboça esse esquema com o seguinte exemplo: “Angelina, questionada sobre o que seria maior: 2/3 ou ¾, respondeu, com certa rapidez, que era ¾. Solicitada a explicar como pensara, disse: Se eu como ¾, sobra ¼. Se eu como 2/3, sobra 1/3. ¼ é menor do que 1/3. Quando sobra menos, é porque eu comi mais” (BERTONI, 2008, p. 227). Portanto, a resolução da aluna para a situação, segundo a autora, se utilizou do esquema de comparação.

c) Equivalência em ação: Bertoni (2008) traz os seguintes exemplos para expressar esse esquema: “em meio litro de leite há 2 quartos de litro” ,“em meio litro mais metade de meio litro há 3 quartos de litro”, a autora afirma que esses processos intuitivos, de reconhecimento das quantidades fracionárias na realidade, contrastam com processos escolares do tipo “transforme 1¼ em fração imprópria” que é resolvido, segundo o processo ensinado, multiplicando o número inteiro pelo denominador e somando com o numerador. Bertoni (2008) considera que esse reconhecimento do número fracionário representando diferentes decomposições de uma mesma quantidade é básico para um entendimento significativo de equivalências.

d) Esquema de variações e permanência da quantidade representada: A autora explica que a construção mental da lógica das frações equivalentes poderia estar apoiada na percepção da redução de cada parte ao aumentar o divisor ou o aumento da quantidade total por aumento do número de partes consideradas, e na articulação entre esses dois processos, que resultam em números fracionários iguais embora com representações distintas. A autora chegou a essa conclusão através da observação de situações semelhantes a essa: “O bolo foi dividido, e Maria pegou um pedaço. Um bolo igual foi dividido no dobro de pedaços e Luísa comeu 2 pedaços. Quem comeu mais?” Um ponto de apoio para essa percepção, como afirma Bertoni (2008), é que dividindo cada pedaço ao meio, tem que pegar 2 para ficar com o mesmo tamanho. Ressaltando esse raciocínio a cada vez que surgem situações análogas, a hipótese da autora é que

> chegaríamos, talvez na 5ª ou 6ª série, a algo equivalente a “se dividirmos cada pedaço em n partes, temos que pegar n vezes a quantidade de pedaços para ficar com o mesmo” ou “multiplicando o denominador por n, cada pedaço fica dividido por n. Então, para não alterar a fração, é preciso pegar n vezes a

> quantidade de pedaços, o que corresponde a multiplicar o numerador por n". (BERTONI, 2008, p.228)

e) Esquemas divisivos: A autora apresenta a seguinte situação afim de ilustrar o esquema: "Três colegas foram a uma pizzaria e pediram uma pizza, que veio dividida em quatro partes iguais. O garçom serviu uma parte a cada um. Ao terminarem de comer, pediram ao garçom que dividisse o pedaço restante entre os três. Quanto de pizza cada um comeu?" Ao aplicar esse problema a autora conta que várias soluções foram apresentadas, com respostas em formas diferenciadas: "1 quarto mais 1 terço de 1 quarto", "4 terços de ¼", "1 quarto mais 1 doze avos", "4 doze avos", "1 terço". Bertoni (2008) afirma que ao exporem as soluções, os alunos conseguiam mostrar como compreendiam a situação. O grupo que respondeu "1 terço" ilustra a organização de pensamento presente nesse esquema. Pode-se observar isso na explicação desses alunos sobre como haviam pensado. Disseram: "Não eram 3 meninos? Não comeram a pizza toda? Todos comeram igual. Então cada um comeu 1 terço" (BERTONI, 2008).

f) Esquemas operatórios: sobre esse esquema, Bertoni (2008) afirma que desde o início da aprendizagem dos números racionais na forma fracionária surgem naturalmente relações comparativas e operatórias entre eles. A junção desses números com os números naturais estende para o conjunto, ampliado os significados das operações que já existiam, mantendo forte analogia entre elas.

> Nesse sentido, embora os PCN do 1º e 2º ciclos omitam, nos conteúdos conceituais e procedimentais do 2º ciclo, o cálculo de operações de números racionais na forma fracionária, consideramos possível o trabalho com essas operações, desde que especificado por meio de estratégias não convencionais. (BERTONI, 2008, p.231)

O último aspecto apresentado pela autora é sobre representações. A respeito disso, Bertoni (2008) afirma que as representações, inicialmente são verbais ou através de desenhos e que primeiro surgem representações linguísticas, gráficas, escritas usando palavras e que as representações numérico-simbólicas são depois introduzidas. A autora conclui que os resultados obtidos (variedade de esquemas, inferências, raciocínio usando o significado do número, independente de regras) permite julgar válido investir na divulgação de um ensino de frações baseado na formação de conceitos entre os professores e em experimentação continuada, com acompanhamento dos resultados, principalmente em termos do rendimento do aluno.

Em outro trabalho que visou desenvolver o conceito de frações em crianças de oito a dez anos, Magina, Bezerra e Spinillo (2009) realizaram uma pesquisa de intervenção com 57 crianças, 39 alunos da 3ª série, sem instrução prévia sobre frações, e 18 alunos da 4ª série, que já haviam tido instrução sobre frações por meio de uma abordagem mecanicista e de aplicação de regras no ensino. Na pesquisa as 57 crianças foram divididas em três grupos: Grupo Experimental, Grupo Controle e Grupo Referência, os dois primeiros formados por alunos da 3ª série do Ensino Fundamental, e o Grupo de Referência formado pelas crianças da 4ª. O Grupo experimental passou por uma intervenção no ensino baseada na resolução de situações-problema de frações como quociente e como relação parte-todo. Essas situações foram apresentadas por meio da combinação e das comparações entre diferentes suportes de representação, fomentando discussões em que as crianças refletiam acerca dos processos de resolução adotados. Foram aplicados para todos os participantes um pré-teste, com o objetivo de examinar o conhecimento das crianças sobre frações, e um pós-teste, com o intuito de examinar se haviam ou não progredido quanto o conhecimento sobre fração, tanto o pré quanto o pós-teste consistia na resolução de 15 itens. Durante o intervalo de oito semanas entre o pré e o pós teste as crianças do Grupo de Referência continuaram tendo aulas regulares de matemática, inclusive sobre frações. Já com o Grupo Controle e o Grupo experimental isso não ocorreu, pois, por se tratar de alunos da 3ª série, não recebiam instrução sobre fração. No entanto, durante esse período, foi oferecida às crianças do Grupo Experimental uma intervenção instrucional que se caracterizava por intervenções em que o pesquisador: atuava como professor que propunha atividades, levantava questões e direcionava discussões, fornecia *feedback* e explicações acerca do acerto/erro dos estudantes, corrigindo-os quando necessário, colocava a forma de raciocinar dos alunos em evidência, tornando-a objeto de discussão, reflexão e análise, tomava o raciocínio dos estudantes como ponto de partida da ação didática, apresentava uma conclusão acerca de toda a atividade realizada, fosse ela correta ou incorreta. A análise dos dados coletados pelas autoras apontou que o Grupo Experimental mostrou um progresso mais expressivo do que os demais grupos. A intervenção realizada com o Grupo Experimental foi capaz de gerar uma compreensão mais apropriada sobre frações, em específico, sobre a sua forma simbólica. Além disso, essa intervenção permitiu que crianças de 3ª série tivessem um melhor desempenho do que: - crianças de mesma idade e de mesma série que ainda não haviam sido formalmente instruídas sobre fração no contexto escolar e que -crianças mais velhas e em série mais adiantada que já haviam sido instruídas sobre fração por meio de ensino tradicional. Magina, Bezerra e Spinillo (2009) apontam que apesar dos benefícios trazidos, a intervenção oferecida apresentou limitações que poderão ser superadas em estudos posteriores, no caso, o fato de que na intervenção não foram exploradas todos os significados e situações que as frações apresentam, uma vez que a ênfase da intervenção recaiu sobre as relações parte-todo e sobre a fração enquanto quociente. As autoras concluem o estudo sugerindo que em futuras pesquisas poderiam propor intervenções que englobassem os outros significados das frações.

Campos (2011) em um artigo “Sobre ensino e aprendizagem de frações”, realizado com o objetivo de analisar o nível de compreensão dos alunos de 4º e 5º ano do ensino fundamental e verificar se estes alunos têm maior facilidade de lidar com a equivalência e ordenação de frações em situações quociente, realizou um estudo com 37 alunos e 2 professoras do 4º e 5º ano. Ela realizou três sessões com o propósito de verificar o nível de compreensão dos alunos ao analisar problemas de frações em situações quociente e parte-todo. Os problemas aplicados foram retirados das tarefas do protocolo de pesquisa elaborado pela professora Terezinha Nunes e sua equipe na Universidade de Oxford. Durante o estudo os alunos foram distribuídos em grupos e orientados a resolverem individualmente os problemas propostos, após a resolução o grupo discutia as soluções encontradas e elegiam uma solução para apresentar para toda a turma. Através da análise a pesquisadora constatou que os alunos adotaram a linguagem de frações com facilidade e sem necessidade de usar a partição; para a maioria dos alunos, a divisão igual e exaustiva, utilizando a correspondência, foi argumento suficiente para demonstrar a equivalência das frações (CAMPOS, 2011) A autora também afirma que os resultados deste estudo apontam que, para os alunos envolvidos na pesquisa, o fato de utilizar frações com situações de quociente pode promover novas reflexões sobre o conceito deste conteúdo matemático levando a um desenvolvimento da aprendizagem deste conceito.

Canova (2013) realizou um estudo onde o objetivo foi investigar se o ensino de fração por meio de determinados problemas elaborados na situação parte-todo ou quociente, poderia favorecer a construção desse conhecimento pelos alunos do 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental. Para tanto a autora realizou uma pesquisa de campo que envolveu 378 crianças de duas escolas públicas da cidade de São Paulo, onde 36 frequentavam o 4º ano, 163 o 5º ano e 79 o 6º ano do Ensino Fundamental. Os alunos foram divididos entre grupos experimentais (GE) e grupos de controle (GC). Os grupos experimentais foram considerados aqueles que passaram por intervenção de ensino de fração, o que totalizava 10 salas de aula, sendo que cinco salas passaram pela intervenção com situação parte-todo e cinco salas passaram pela intervenção com a situação quociente (CANOVA,2013). No primeiro encontro de cada turma, tanto de grupos experimentais quanto de grupos controle, a pesquisadora aplicou um pré-teste. No último encontro, depois das intervenções, os grupos experimentais tiveram ensino com o conteúdo de fração e os grupos controle com outros conteúdos que não envolveram fração, a autora aplicou um pós-teste. Esse teste foi constituído por 12 problemas. A autora faz a análise de oito deles, sendo que estes problemas foram traduzidos e adaptados do estudo de Nunes, Bryant, Pretzlik, Bell, Evans e Wade (2004). Dos oito problemas, quatro tratavam da situação parte-todo e quatro de situação quociente. Dos quatro problemas, tanto de uma situação como de outra, dois envolviam o invariante de ordem e outros dois o invariante de equivalência. Uma vez que a proposta da autora foi identificar se houve mudanças no desempenho dos alunos antes e após a intervenção, o pré-teste e o pós-teste apresentaram questões idênticas. Diante dos resultados obtidos a autora afirma que “os dois tipos de situações tiveram papel importante para melhor desempenho dos alunos.” (CANOVA, 2013, p.161). A autora afirma que cada tipo de situação favoreceu a aprendizagem dos alunos de maneiras diferentes. Além disso, a autora afirma que não se pode confirmar que os alunos obtêm um melhor desempenho nos problemas que contemplaram a mesma situação da intervenção, mas que há uma tendência para isso, principalmente no grupo quociente. Outro apontamento da pesquisa foi o fato de que os alunos que aprenderam em uma situação conseguiram transferir o conhecimento para outra situação. Quanto à aprendizagem por ano de escolaridade, Canova (2013) afirma que a intervenção com a situação parte-todo, no geral, pareceu favorecer mais a aprendizagem dos alunos dos anos iniciais, apresentando uma melhora crescente em relação à escolaridade. Já o grupo que passou pela intervenção na situação quociente não demonstrou favorecer mais uma série em relação às outras. O desempenho dos alunos por ano de escolaridade não teve relação com os tipos de questão ou situação.

Cruz e Spinillo (2014) realizaram uma pesquisa com 42 crianças entre 8 e 9 anos de uma escola particular da cidade de Recife para investigar o papel desempenhado pelos referenciais inteiro e metade na resolução de adição de fração por estimativa. Os dados foram coletados através de dois encontros com o intervalo de uma semana, no primeiro encontro foram aplicados um teste de sondagem e a Tarefa 1, no segundo encontro foram aplicadas as Tarefa 2 e 3. As crianças que participaram da pesquisa ainda não haviam sido formalmente instruídas sobre adição de frações, porém para realizar as Tarefas 1, 2 e 3 era necessário que fossem capazes de identificar a representação simbólica das frações 1/2, 1/3, 1/4 e 1/6, portanto a tarefa de sondagem teve por objetivo garantir que participassem da pesquisa apenas crianças capazes de identificar as representações simbólicas e diagramáticas dessas frações. A Tarefa 1 e 2 tiveram por objetivo examinar se as crianças seriam capazes de realizar adição de frações, por estimativa, usando o referencial de metade, para a Tarefa 1 e utilizando o referencial de inteiro para a Tarefa 2, a Tarefa 3 investigou o desempenho das crianças ao resolver adição de frações usando o simbolismo matemático (a/b). Os resultados da investigação mostraram que em algumas situações as crianças foram capazes de resolver adições de frações nas tarefas lhes foi dada a oportunidade de estimar ao invés de realizar cálculos numéricos precisos. Outro ponto observado pelas autoras foi que os dados mostraram que não há distinção entre a utilização do referencial I de metade ou o de inteiro, os dados mostraram que as crianças igualmente se beneficiam de ambos os referenciais. Cruz e Spinillo (2014) apontam também que foi mais fácil resolver adições de frações com parcelas iguais do que com parcelas diferentes. Para concluir as autoras alertam para a possibilidade que uma melhor compreensão acerca da adição de frações venha facilitar a ideia de que a fração pode ser concebida como um número ou uma quantidade que pode ser adicionada a outras quantidades, e não apenas como parte de um todo como enfaticamente tratado no contexto escolar.

Vasconcelos, Mamede e Dorneles (2017) realizaram uma pesquisa onde os objetivos foram: verificar como a compreensão da relação inversa entre quantidades menores do que a unidade, apresentadas nas situações de quociente e parte-todo, podem influenciar na aprendizagem das frações; perceber se existe diferença no desempenho entre alunos brasileiros e portugueses quanto à compreensão da relação inversa entre quantidades em problemas de fração. Para isso participaram da pesquisa 90 brasileiros e 73 portugueses. As crianças tinham idade entre 9 e 10 anos e cursavam a 4ª série de escolas públicas de Porto Alegre, no Brasil, e Braga, em Portugal. Vasconcelos, Mamede e Dorneles (2017) observaram que nenhuma das

163 crianças haviam recebido qualquer instrução formal sobre o conceito de fração. Foi aplicado um questionário com 16 problemas com o objetivo de verificar a compreensão da relação inversa entre quantidades menores que a unidade. Os problemas aplicados foram adaptados de um estudo de Mamede, Nunes e Bryant (2005). Os resultados do estudo indicam que o entendimento das crianças sobre a relação inversa entre numerador e denominador é mais fácil em situações com a fração em situações quociente que em situações parte-todo. Outro apontamento das autoras é o fato que os resultados sugerem, também, que as situações de quociente e parte-todo, contribuem de diferentes maneiras para compreender a relação inversa entre o numerador e o denominador na aprendizagem de frações. Ao compararem o desempenho dos estudantes brasileiros e portugueses, as autoras concluíram que os estudantes portugueses obtiveram maior sucesso em todos os tipos de problemas. As autoras afirmam que esses resultados são semelhantes aos relatados por Dorneles, Mamede e Nunes (2008), que estudaram crianças portuguesas, com idade entre seis e sete anos, que ainda não haviam recebido uma educação formal sobre frações, e obtiveram um desempenho melhor que o de seus pares brasileiros (VASCONCELOS; MAMEDE; DORNELES, 2017). Para as autoras os resultados da pesquisa oferecem implicações para o ensino, especialmente por apontar o fato de que as crianças têm um conhecimento informal sobre a lógica das frações das experiências cotidianas. Este conhecimento prévio pode ser usado para avançar na compreensão da relação inversa entre quantidades, apoiando assim a aprendizagem de frações.

As pesquisas encontradas e relatadas em nosso trabalho trouxeram alguns aspectos importantes para a nossa pesquisa. O primeiro deles diz respeito aos esquemas apresentados pelos alunos em questões envolvendo os números fracionários em seus diferentes significados (número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo). As pesquisas apresentadas mostram que não há um desempenho equitativo ao longo desses cinco significados da fração e que para um mesmo significado é possível identificar diferentes estratégias de resolução (Merlini, 2006). Outro ponto importante observado é o fato de que o uso de frações com situações de quociente pelos alunos pode promover novas reflexões sobre o conceito deste conteúdo matemático levando a um desenvolvimento da aprendizagem deste conceito (Campos, 2011). Observamos também que assim como no estudo de Canova (2013) onde cada tipo de situação favoreceu a aprendizagem dos alunos de maneiras diferentes e que não se pode confirmar que os alunos obtém um melhor desempenho nos problemas que contemplaram a mesma situação da intervenção, Magina, Bezerra e Spinillo (2009) concluíram que embora a intervenção realizada (focada no ensino através de situações-problema, englobando os significados de parte-todo e quociente) tenha permitido que crianças de uma 3ª série tivessem um melhor desempenho do que as demais crianças, a intervenção oferecida apresentou limitações que poderiam terem sido superadas ao explorar todos os significados e situações que as frações apresentam. O que nos leva a destacar a necessidade da abordagem do conteúdo de frações ao longo de suas diferentes situações e significados.

O segundo aspecto observado nas pesquisas é o fato que as crianças têm um conhecimento informal sobre a lógica das frações das experiências cotidianas (VASCONCELOS; MAMEDE; DORNELES, 2017). Inclusive, pudemos observar que em algumas situações as crianças são capazes de resolver até mesmo adições de frações através de estimativas ao invés de realizar cálculos numéricos precisos. Este conhecimento prévio pode ser usado para avançar na compreensão do conceito, apoiando assim a aprendizagem de frações.

Por fim, através das leituras realizadas destacamos alguns esquemas que estão presentes em situações que envolvem os números fracionários. Pudemos perceber que alguns esquemas encontrados foram apresentados pelos autores com nomes diferentes, mas apresentavam as mesmas características. Sintetizaremos esses esquemas no QUADRO 13, a fim tê-los como referência na análise dos dados da nossa pesquisa.

QUADRO 13 – QUADRO SÍNTESE DOS ESQUEMAS REVISADOS NA LITERATURA

Esquema	Literatura	Característica
Esquema de unidade	-Esquema de unidade (CRUZ, 2003); - Esquemas de variações e permanência de quantidade representada (BERTONI, 2008).	Diz respeito à identificação e formação do todo. Através da unidade fracionária é possível contar, dividir e reagrupar com a unidade como referência.
Esquema de partição	-Esquemas de partição (CRUZ, 2003); (MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005); -Esquema de divisão (NUNES; BRYANT, 2009); -Esquemas divisivos (BERTONI, 2008).	Processo de dividir um todo em partes guiado com o objetivo de obter um número pré-determinado de partes iguais.
Esquemas relacionais	-Esquemas relacionais (CRUZ, 2003); -Esquema comparativo (BERTONI, 2008).	Envolvem a capacidade de estabelecer relações de comparação.

Esquema de equivalência	-Esquemas de equivalência (CRUZ, 2003); -Equivalência em ação (BERTONI, 2008).	Habilidade de sintetizar unidades para gerar uma outra unidade, equivalente à soma de suas partes.
Esquema de metade	- Esquema de metade (CRUZ, 2003); - Esquema numérico-conceitual (BERTONI, 2008); - Metade como referência (POTHIER, SAWADA, 1983).	Identificação e formação de metades, utilizar o referencial de metade, fazendo uma divisão na região do meio, por exemplo, como forma de resolução de uma situação.
Esquema de distribuição	-Esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009); -Esquema de correspondência (MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005).	Associação estabelecida entre as partes compartilhadas e cada destinatário.
Esquema operatórios	-Esquemas operatórios (BERTONI, 2008).	Cálculo de operações de números racionais na forma fracionária por meio de estratégias não convencionais.

FONTE: próprio autor

Com isso, conhecemos quais esquemas sobre o conceito de fração já puderam ser apontados na literatura. Torna-se importante então, saber quais os esquemas destacados podem ser evidenciados na resolução de crianças e de que forma eles aparecem.

Com o objetivo de verificar conhecimentos sobre frações que crianças de um 3º ano do Ensino Fundamental revelam na resolução de problemas que envolvem conceitos de fração apresentaremos a seguir o caminho percorrido em nossa pesquisa.

4 METODOLOGIA

A pesquisa foi realizada utilizando a abordagem qualitativa, ou seja, seus resultados estão descritos de modo que não nos preocuparemos com sua representatividade numérica. Optamos pela utilização da pesquisa qualitativa uma vez que os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas, nem se submetem à prova de fatos. A pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa possui cinco características:

- Na investigação qualitativa a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto, além disso, para ele divorciar o ato, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado. Para o investigador qualitativo o comportamento humano é significamente influenciado pelo contexto em que ocorre.

- A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Além disso, também incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Os investigadores qualitativos tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, da forma mais possível, o modo em que estes foram registrados ou transcritos.

- Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados. Nessa abordagem preocupa-se mais com o modo como as definições se formam.

- Os investigadores qualitativos tendem a analisar seus dados de forma indutiva. O investigador não recolhe dados ou provas com o intuito de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente, as abstrações são construídas à medida que os dados vão sendo analisados e agrupados.

- O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Para o investigador qualitativo o importante é o modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas. Voltado ao investigador em educação, o questionamento gira em torno de perceber do sujeito aquilo que eles experimentam, o modo como interpretam suas experiências.

Os autores ressaltam que “Nem todos os estudos que consideraríamos qualitativos patenteiam estas características com igual eloquência. Alguns deles são, inclusivamente, totalmente desprovidos de uma ou mais das características” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.47).

Nossa pesquisa atende a estas características pois investiga as crianças em contextos de sala de aula e de resolução de problemas, o que caracteriza o ambiente natural dos entrevistados. Além disso, nosso interesse não esteve em analisar apenas os resultados obtidos nas respostas dos alunos, mas principalmente no processo que se deu a obtenção desses dados. Por fim, outra característica presente foi o fato de não termos a intenção de analisar os dados a fim de confirmar uma hipótese, mas sim construir ao longo das análises quais possíveis abstrações podemos obter.

Para a realização dessa pesquisa seguimos o método clínico descrito por Delval (2002). Tendo em vista que, comparado com outros métodos, este é caracterizado pela flexibilidade que permite o ajuste às condutas do sujeito e leva a possibilidade de encontrar o sentido daquilo que ele vai fazendo (DELVAL, 2002). De acordo com Delval (2002), o método clínico consiste nos seguintes passos: primeiramente se escolhe e define um problema, examinando o que já foi estudado sobre o assunto, é preciso também planejar o procedimento que será adotado para a coleta de dados. Em sequência, realiza-se essa coleta de dado através de uma entrevista clínica. Após esse passo, deve-se analisar os dados a fim de extrair o máximo de informações dele e por último, elabora-se uma reflexão sobre os resultados do trabalho.

4.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Considerando que as crianças trazem muitos conhecimentos informais sobre fração ao chegar à escola (NUNES; BRYANT, 2009; NUNES 2008) e que estes conhecimentos, conforme Nunes e Bryant (2009) podem ser utilizados como base para o ensino de frações, a fim de contribuir para o conhecimento da compreensão dos alunos sobre frações, definimos como problema de pesquisa:

- O que alunos de um 3º ano do Ensino Fundamental do município de Curitiba sabem sobre frações?

4.2 OBJETIVOS

A pesquisa tem como objetivo geral:

Verificar conhecimentos sobre frações que crianças de um 3º ano do Ensino Fundamental revelam na resolução de problemas que envolvem conceitos de fração com vistas a contribuir para o ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para tal buscaremos:

- identificar esquemas que as crianças utilizam na resolução de problemas que envolvem frações;
- verificar o que as crianças sabem sobre conceitos de fração, previstos no currículo, para serem abordados nos anos anteriores de sua escolarização, ou seja, no primeiro e segundo ano do Ensino Fundamental (metade, terça parte);
- identificar elementos a serem considerados no processo de ensino frações com vistas a contribuir para o ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

4.3 POPULAÇÃO ENVOLVIDA

A coleta de dados dessa pesquisa deu-se na forma de entrevistas clínicas e foi realizada em uma turma com 30 alunos de um 3º ano de uma Escola Municipal da cidade de Curitiba, Paraná, Brasil. Dos alunos devidamente matriculados na turma, cinco fizeram parte da coleta de dados por considerarmos um número adequado para a pesquisa a ser realizada.

Os cinco alunos participantes da pesquisa serão identificados por: A1, A2, A3 A4 e A5. Para a seleção desses alunos, nosso critério foi que os participantes estivessem devidamente matriculados no terceiro ano do Ensino Fundamental e deixamos que a professora regente da turma fizesse a seleção. Delval afirma que “quando se trata de sujeitos comuns, que não têm de se apresentar nenhuma característica particular, o mais adequado é fazer a escolha dos sujeitos de forma aleatória" (DELVAL, 2002, p.113) e que caso o professor deseje escolher algum aluno determinado, deve-se ter a preocupação de questionar o motivo da escolha (DELVAL, 2002).

Em conversa com a professora regente da turma em relação à escolha dos participantes da pesquisa, a mesma sugeriu escolher alunos que já tivessem terminado a atividade proposta em aula, a fim de não interferir no desenvolvimento do cotidiano em sala de aula, uma vez que as entrevistas foram realizadas no mesmo dia. Atendemos a sugestão da professora regente e tivemos o cuidado de convidar apenas crianças que estivessem se sentindo à vontade de participar da pesquisa. Foi enviado para todos os responsáveis o documento TCLE[5] (Termo de Consentimento de Livre Esclarecimento) e nos certificamos que todos os alunos participantes da entrevista estivessem munidos do documento devidamente assinado. Além disso, todos os responsáveis foram informados que estaríamos à disposição para eventuais dúvidas e esclarecimento.

4.4 COLETA DE DADOS

A coleta de dados envolveu uma entrevista com cada aluno. As entrevistas foram filmadas e transcritas, conforme o protocolo de entrevista proposto por Delval (2002). Todas as entrevistas foram realizadas em uma mesma manhã, de forma que conforme um aluno terminava a entrevista, outro aluno era retirado da sala para ser entrevistado.

Os instrumentos de registros dos dados da pesquisa foram filmadora, gravador de áudio e fichas de resolução de problemas. A entrevista foi feita de forma individual e seguiu os moldes da entrevista clínica.

Para Delval (2002) uma boa entrevista clínica é aquela onde o sujeito se expressa livremente e consegue comunicar aspectos básicos de seu pensamento. O método clínico é suscetível de diferentes níveis de concretização. Podemos contemplar entrevistas inteiramente abertas, semiestruturadas e estruturadas. Na

---

[5] O projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética sob o CAAE 79933917.8.0000.0102.

pesquisa que aqui desenvolvemos a entrevista corresponde à entrevista do tipo semiestruturada que pode ser caracterizada como

> Perguntas básicas comuns para todos os sujeitos, que vão sendo ampliadas e complementadas de acordo com as respostas dos sujeitos para poder interpretar o melhor possível o que vão dizendo. As respostas orientam o curso do interrogatório, mas se retorna aos temas essenciais estabelecidos inicialmente. É o tipo de entrevista mais empregado na pesquisa. (DELVAL, 2002, p.147)

Para o autor em uma entrevista clínica as perguntas do pesquisador seguem o roteiro que foi estabelecido previamente de acordo com seus objetivos, vale aqui ressaltar que, como afirma o autor (DELVAL, 2002), o roteiro elaborado para a coleta de dados é feito, sobretudo mediante perguntas e respostas do sujeito, porém para estimular essas respostas, é possível recorrer a outros elementos, como histórias, desenhos ou situações em que ele tem de fazer alguma coisa. No entanto, ao longo da entrevista, perguntas vão sendo necessárias para esclarecer o que o entrevistado está dizendo. Essas perguntas podem se distinguir em dois tipos: básicas, que correspondem àquelas que fazem parte do roteiro, e complementares, que podem ser diferenciadas em exploração, justificação e controle. As perguntas do tipo exploração tendem a desvelar a noção da existência e estruturação do que se busca; as do tipo justificação levam o sujeito entrevistado a legitimar seu ponto de vista (geralmente englobam perguntas como: “por quê?”, “como você sabe?”) e as do tipo controle buscam a coerência ou até mesmo a contradição das respostas através da contra-sugestão.

Na entrevista clínica, quando se interroga os sujeitos, eles podem proporcionar diferentes tipos de respostas, que diferem no grau de vinculação com suas representações sobre o problema de que tratamos (DELVAL, 2002). Essas respostas podem ser classificadas como:

- Respostas espontâneas: são aquelas que o entrevistado dá espontaneamente sem a intervenção do pesquisador.

- Respostas desencadeadas: corresponde àquelas respostas que são geradas ao longo da entrevista, mas que resultam de uma elaboração por parte do sujeito e estão de acordo com o conjunto de seu pensamento.

- Respostas sugeridas: são produtos da entrevista e sofrem influência da intervenção do pesquisador.

- Respostas fabuladas: possuem o formato de história, são criadas pela criança ao longo da entrevista, possuem caráter pessoal e fogem do tema abordado.

- Respostas não importistas: a criança apresenta qualquer resposta apenas para se livrar do entrevistador.

A entrevista desta pesquisa envolveu a proposição de problemas matemáticos envolvendo o conceito de frações a serem resolvidos pelos participantes da pesquisa. Foram propostos ao todo seis problemas. Esses problemas foram elaborados a partir de elementos essenciais do conceito de fração, identificados na revisão de literatura, sendo eles: invariantes operatórios, princípios, representações e os diferentes significados dos números fracionários. Durante a resolução dos problemas pelos alunos entrevistados realizamos intervenções com perguntas complementares do tipo exploração, justificação e controle. Na maior parte do tempo questionamos os alunos com perguntas como: “me explique como pensou”, “como chegou a essa resposta?”, “poderia me explicar como fez isso?”, além disso, foram disponibilizados aos alunos materiais manipuláveis feitos em EVA, tais como: barras de chocolate, pedaços de bolo e pizzas.

4.4.1 Problemas

Apresentaremos aqui os problemas aplicados para os alunos entrevistados, explicaremos e anunciaremos os objetivos esperados para cada problema.

Problema 1

Ana, João e Leticia querem comer chocolate. A mãe deles foi ao mercado comprar chocolates para os seus três filhos. No mercado percebeu que só tinha dinheiro para comprar duas barras de chocolate. Como ela poderá fazer para que os três filhos comam chocolate, se comprou duas barras apenas?

Este problema teve como objetivo investigar a forma como os alunos distribuíram os chocolates para as crianças. Faz-se necessário apontar que nele o enunciado não dá ao aluno nenhuma informação sobre a necessidade de todos comerem a mesma quantidade de chocolate e a necessidade de que todo o chocolate seja comido. Outro apontamento sobre esse problema é que ele envolve a fração como significado quociente.

Problema 2

A mãe de Ana fez um bolo de chocolate para Ana e seus três amigos lancharem. Como a mãe pode cortar o bolo, para que todas as crianças comam a mesma quantidade de bolo e não sobre nenhum pedaço?

No problema 2 é informado ao aluno que todas as crianças devem comer a mesma quantidade de bolo e que não devem restar pedaços. Além disso, é colocado a questão de como a mãe deverá cortar o bolo para que as condições informadas sejam cumpridas. Nesse problema a fração se apresenta com o significado quociente.

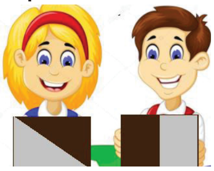
Problema 3

A mãe de Pedro fez duas pizzas do mesmo tamanho para que Pedro e seus amigos comessem. Uma das pizzas é sabor queijo e a outra calabresa. A pizza de queijo foi dividida em 4 pedaços e a pizza de calabresa em 8. Pedro comeu um pedaço de cada sabor. Qual dos dois pedaços era maior?

No problema 3 a resolução da situação está em identificar de qual sabor de pizza Pedro comeu mais, sendo que as pizzas são de tamanhos iguais, porém repartidas em números de pedaços diferentes. Com esse problema buscamos identificar a relação inversa entre o número de cortes e o tamanho das partes. Esse problema envolve significado de fração como parte-todo.

Problema 4

Leticia e André compraram uma barra de chocolate para cada. Nenhum deles aguentou comer a barra inteira, veja no desenho o pedaço que eles conseguiram comer pintado de cinza:



Alguém comeu mais? Leticia ou André? Por quê?

Pelo problema 4 pudemos analisar a presença do princípio de equivalência, tendo em vista que o problema se constitui em verificar que, independentemente da forma como foram divididos os chocolates, ambos constituem metades de um mesmo inteiro. Esse problema envolve uma comparação entre frações com o significado parte-todo.

Problema 5

Usando os pedaços de barbante que você recebeu, meça o comprimento da mesa e responda:

a) Quanto do barbante vermelho você usou? Como você pode escrever quanto do barbante você usou?
b) Quanto do barbante azul você usou? Como você pode escrever quanto do barbante você usou?

Para a resolução do problema 5, os alunos receberam pedaços de barbante (vermelho e azul) que foram previamente cortados pela pesquisadora, a fim de contemplar duas situações: na primeira (barbante vermelho) ao medir a mesa, conforme o problema solicita, o aluno deveria utilizar uma vez o barbante inteiro (medida igual à 67,5 cm) e mais a terça parte do barbante (67,5:3), como a mesa tinha medida igual a 90 cm temos que 67,5 + (67,5:3) = 90. Na segunda situação (barbante azul), o comprimento da mesa (90 cm) corresponderia à metade da medida do barbante, ou seja, o barbante media 180 cm. O objetivo desse problema foi analisar a forma como os alunos resolvem a situação e as possíveis formas de representação de números que representam quantidades menores que o inteiro. Esse problema envolve a fração com seu significado de número.

Problema 6

Bia ganhou 15 balas. Ela dividiu de forma igual as suas balas em 3 pacotinhos. Depois disso ela deu 10 dessas balas para seu amigo João. Quantos pacotinhos de balas Bia deu para João?

O problema 6 teve como objetivo analisar a resolução da fração como significado de operador multiplicativo. Um problema que envolve a fração com esse significado consiste em encontrar a fração de uma determinada quantidade. Como os alunos participantes dessa pesquisa ainda não passaram por um ensino escolar formal sobre frações, elaboramos o problema 6 com o intuito de verificar os possíveis esquemas utilizados pelos alunos para encontrar quanto é 2/3 de 15 balas, tendo em vista que a situação proposta é: 15 balas são divididas em 3 partes e em sequência, duas dessas partes são dadas ao amigo.

Todos os problemas elaborados levaram em conta elementos considerados essenciais para a construção do conceito de fração: os invariantes operatórios apontados por Bezerra, Magina e Spinillo (2009), Lima (1986) e Nunes e Bryant (1997), o esquema de equivalência, o esquema de unidade (invariância), a representação dos números fracionários e os diferentes significados apresentados por Nunes e Bryant (2009) e Spinillo e Lautert (2006) que uma fração pode assumir.

4.5 ANÁLISE DE DADOS

Na análise de dados seguimos os moldes do método clínico proposto por Delval (2002). Apesar de alguns acreditarem que a análise não faz parte propriamente do método clínico, o autor considera que "os dados obtidos mediante a entrevista clínica apresentam características muito particulares e não se poderiam obter por outros meios, mas exigem uma análise adequada a essas características" (DELVAL, 2002, p. 161). O autor aponta o fato de que uma possibilidade para que nunca tenha sido tratado detalhadamente a questão da análise é a não existência de um procedimento geral e que a análise depende muito do objetivo de cada pesquisa.

No método clínico a análise já deve começar no processo de coleta de dados. Reunidos os dados iniciamos a leitura dos protocolos gerados e começamos assim a estabelecer categorias iniciais de análise. “A análise de dados utilizando o método clínico requer sobretudo a leitura atenta e repetida dos protocolos das entrevistas até estarmos muito familiarizados com eles, ao ponto de quase tê-los decorado” (DELVAL, 2002, p. 169). O autor ainda destaca que o pesquisador precisa ir encontrando uma estrutura comum nas respostas dos sujeitos.

Em nossa pesquisa, a organização e análise dos dados foram feitas a partir da identificação dos esquemas utilizados pelos alunos participantes na resolução dos problemas propostos. Optamos por identificar e analisar os esquemas presentes na resolução de cada problema, uma vez que cada um corresponde a um significado de fração. A análise buscou também relacionar os esquemas encontrados na pesquisa com os esquemas identificados na literatura.

5 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

Este capítulo destina-se a apresentar os dados obtidos através das respostas dos alunos aos problemas. Já mencionamos anteriormente que, no método clínico a análise começa no processo de coleta de dados. Em nossa pesquisa iniciou com a observação das crianças durante o processo de resolução de problema. A seguir foi realizada a transcrição das entrevistas a partir dos vídeos, a leitura detalhada das mesmas e a identificação dos esquemas e conhecimentos sobre frações presentes na resolução de cada problema.

Apresentamos no QUADRO 14, os esquemas identificados na pesquisa e por nós nominados.

QUADRO 14 - RELAÇÃO DE ESQUEMAS IDENTIFICADOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DA PESQUISA

Problema	Esquemas
Problema 1 – Ana, João e Leticia querem comer chocolate. A mãe deles foi ao mercado comprar chocolates para os seus três filhos. No mercado percebeu que só tinha dinheiro para comprar duas barras de chocolate. Como ela poderá fazer para que os três filhos comam chocolate, se comprou duas barras apenas?	Divisão das duas barras em três partes: partição das duas barras de chocolate em três partes cada uma e dar a cada criança dois pedaços.
	Divisão de uma barra em duas partes: partição de uma barra ao meio. Duas crianças recebem metade de uma barra de chocolate e a outra um chocolate inteiro.
	Divisão das duas barras em duas partes: partição das duas barras ao meio. Cada criança recebe metade da barra e sobra uma metade.
Problema 2 - A mãe de Ana fez um bolo de chocolate para Ana e seus três amigos lancharem. Como a mãe pode cortar o bolo, para que todas as crianças comam a mesma quantidade de bolo e não sobre nenhum pedaço?	Divisão na metade e novamente na metade: Partição do bolo em quatro partes, através de dois cortes perpendiculares na metade do bolo.
	Divisão e distribuição um-a-um com resto: Partição do bolo de acordo com o número de pedaços que se deseja obter e distribuição dos pedaços da mesma forma.

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td></tr>
<tr><td>Divisão do bolo em quatro pedaços com resto: Para obter quatro pedaços de bolo, são necessários quatro cortes.</td></tr>
<tr><td>Divisão na metade, e cada parte resultante novamente na metade: Realização de três cortes. O primeiro dividindo o bolo em duas partes iguais, e em seguida, a divisão de cada parte obtida na metade novamente, resultando em 4 pedaços de bolo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Problema 3 - A mãe de Pedro fez duas pizzas, do mesmo tamanho, para que Pedro e seus amigos comessem. Uma das pizzas é sabor queijo e a outra calabresa, a pizza de queijo foi dividida em 4 pedaços e a pizza de calabresa em 8. Pedro comeu um pedaço de cada sabor, qual dos dois pedaços era maior?</td><td>Divisão do inteiro em várias partes: divisão da pizza em partes, ou seja, para que os alunos pudessem chegar a resposta, fizeram o desenho das pizzas e a divisão dela em partes</td></tr>
<tr><td>Contar o número de pedaços: estratégia de resolução através da contagem dos números naturais em ordem: 0,1,2,3,4,..., .</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Problema 4 - Leticia e André compraram uma barra de chocolate para cada um deles. Nenhum deles aguentou comer a barra inteira, veja no desenho o pedaço que eles conseguiram comer pintado de cinza:

Alguém comeu mais? Leticia ou André?
Por quê?</td><td>Desenhar os retângulos e comparar: Realizar o desenho dos retângulos para comparar as quantidades.</td></tr>
<tr><td>Sobrepor os retângulos e comparar: sobrepor as quantidades de Leticia e André para realizar a comparação.</td></tr>
<tr><td>Comparar visualmente e apontar: realizar a comparação visualmente e apontar para as divisões para identificar quem comeu mais</td></tr>
<tr><td>Comparar visualmente: realizar a comparação do tamanho através de percepção visual.</td></tr>
</table>

Problema 5 - Usando os pedaços de barbante que você recebeu, meça o comprimento da mesa e responda: Quanto do barbante vermelho você usou? Como você pode escrever quanto do barbante você usou?	Usar um barbante inteiro e outro menor que o inteiro: um barbante inteiro para medir a mesa e a necessidade de utilizar mais um barbante, porém, não inteiro, mas sim um barbante menor que o inteiro.
	Medir mais que a metade: é possível medir a metade da mesa, porém, o barbante é insuficiente para medir a mesa inteira.
	Dobrar o barbante em duas partes: estratégia de resolução baseada na ação de dobrar o barbante em duas partes.
	Medir a mesa e dobrar o barbante: estratégia de resolução baseada na ação de medir a mesa e em seguida dobrar o barbante a fim de constatar que a outra parte do barbante corresponde a medida da mesa também.
	Usar um pedaço do barbante é o mesmo que metade dele: quando utilizamos um pedaço do barbante para medir a mesa é o mesmo que utilizássemos metade desse barbante.
	Se as duas partes forem iguais representam metades: Se duas partes do barbante são iguais então cada uma delas representa metade.
	Se o barbante é menor não há solução: se o comprimento do barbante é menor que o comprimento da mesa, então não há como resolver a situação.
Problema 6 - Bia ganhou 15 balas, ela dividiu de forma igual as suas balas em 3 pacotinhos. Depois disso ela deu 10 dessas balas para seu amigo João. Quantos pacotinhos de balas Bia deu para João?	Soma de parcelas: soma das parcelas de cinco em cinco até obter o número 15, no caso, “cinco mais cinco mais cinco”. E usar o mesmo procedimento para chegar ao número 10, ou seja, “cinco mais cinco”, para obter a resposta do número de pacotes.

	Distribuição um a um e soma de parcelas: distribuição das balas, uma por uma, nos três pacotes até esgotar todas as balas. Em seguida, verifica-se o número de balas em cada pacote e realiza a soma das parcelas 5 mais 5.
	Divisão em partes iguais e subtração: divisão do total de balas em três partes iguais e na sequência utilizar o raciocínio de subtração para obter o resultado.

FONTE: Próprio autor – dados da pesquisa

Após identificarmos os esquemas presentes nas resoluções dos alunos, buscamos relacionar cada esquema por nós identificado e nominado com os esquemas descritos na literatura.

Descrevemos e analisamos a seguir os esquemas que identificamos. Os alunos estão identificados como A1, A2, A3, A4 e A5 de acordo com a ordem em que foram entrevistados.

5.1 PROBLEMA 1

Ana, João e Leticia querem comer chocolate. A mãe deles foi ao mercado comprar chocolates para os seus três filhos. No mercado percebeu que só tinha dinheiro para comprar duas barras de chocolate. Como ela poderá fazer para que os três filhos comam chocolate, se comprou duas barras apenas?

Nesse problema buscamos verificar como o aluno resolve problemas que envolvem o conceito de fração em uma situação de divisão. Para Streefland (1997 apud NUNES et al., 2005) esse problema é considerado um problema de divisão que os alunos podem resolver utilizando um esquema de distribuição, pois é baseado na seguinte lógica: temos mais de uma unidade (dois chocolates) para serem divididos para três crianças.

Para resolver esse problema os alunos tinham disponível em uma mesa separada, duas barras fictícias de chocolate confeccionadas de material EVA, que poderiam utilizar caso julgassem necessário.

Nas resoluções desse problema pudemos observar a presença dos seguintes esquemas:

a) Esquema 1: divisão das duas barras em três partes

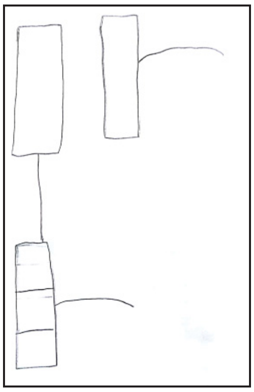
Esse esquema consiste na partição das duas barras de chocolate em três partes cada uma e dar a cada criança dois pedaços.

Esse esquema esteve presente na resolução apresentada pelo aluno A1. Inicialmente, o aluno afirmou que o problema poderia ser solucionado devolvendo uma barra para o mercado e cortando a outra em 3 pedaços.

> A1 – [...] *e ela pode fazer [...] devolver o chocolate e uma barra cortar em três pedaços iguais e dar pros três filhos.*

Podemos observar também esse raciocínio através do desenho feito pelo aluno, FIGURA 6, onde ele representa os chocolates através de retângulos e em um deles faz riscos horizontais representando os cortes.

FIGURA 6- RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 1 PELO A1



FONTE: A1- dados da pesquisa

Após ser questionado sobre o que faria se a barra não pudesse ser devolvida, ele afirmou que poderia dividir essa barra em três pedaços também e resultaria em dois pedaços para cada criança:

> A1 - *Dá pra cortar as duas em três pedaços ... e dá as duas ... uma, duas pra uma ... duas pra outro e duas pra outro*.

Podemos observar que esse esquema de resolução do aluno A1 envolve dois esquemas identificados na literatura: o esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005; NUNES; BRYANT, 2009; BERTONI, 2008) e o esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE; NUNES; BRYANT, 2005).

Esses dois esquemas estiveram presentes da seguinte forma: em um primeiro momento o aluno partiu uma barra de chocolate em partes e em seguida distribuiu cada pedaço para cada criança um-a-um. A seguir partiu a outra barra em partes e, considerando os pedaços das duas barras, distribui dois pedaços para cada criança. Tendo em vista que o esquema de distribuição se caracteriza como uma associação estabelecida entre as partes compartilhadas e cada destinatário, podemos afirmar que o aluno dispôs em sua resolução esse esquema.

Nunes e Bryant (2009) afirmam que o esquema de partição é definido como o processo de dividir um todo em partes. Este processo é entendido não como a atividade de cortar algo em partes de qualquer forma, mas como um processo que deve ser guiado desde o início com o objetivo de obter um número pré-determinado de partes iguais. Isso se confirma na resolução de A1, quando ele explica que dividirá a barra em três pedaços ainda antes de fazer o desenho.

> A1 – *E aí eu corto ela...essa barra...em três partes iguais*

Sendo assim, podemos afirmar que o esquema de partição esteve presente na resolução do aluno A1.

É possível perceber que na resolução do aluno A1 não houve consideração de possível resto de chocolate. Também podemos observar que houve na resolução do aluno a preocupação que todos os pedaços tivessem o mesmo tamanho.

> A1 – *E aí eu corto ela...essa barra...em três partes iguais (O aluno desenha outro retângulo e começa a fazer traços horizontais indicando os cortes. Na primeira tentativa percebe que o terceiro pedaço fica maior que os outros, apaga e refaz os cortes) e daí eu daria...e aí eles não vão reclamar que ficou sem ou que ganhou mais.*

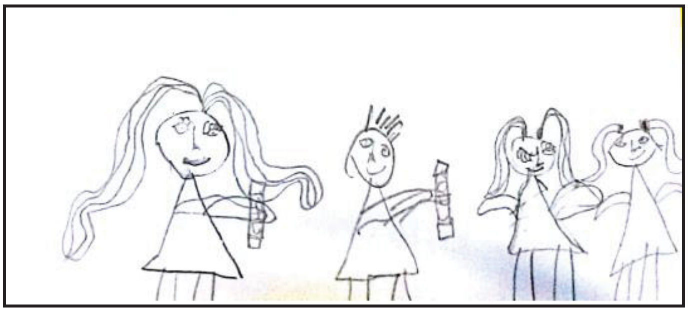
Na explicação de A1 fica evidente a sua preocupação em dividir o chocolate igualmente ao afirmar que "*aí eles não vão reclamar que ficou sem ou que ganhou mais*".

b) Esquema 2: divisão de uma barra em duas partes.

Caracterizamos esse esquema como aquele em que as crianças repartiram uma das barras ao meio e deram para duas crianças as metades das barras de chocolate e para a outra criança uma barra inteira.

Esse esquema esteve presente nas resoluções de A2 e de A4. Na FIGURA 7 podemos observar os registros de A2 ao solucionar o problema. Em seu desenho o aluno representou a mãe segurando uma barra de chocolate para dividir entre as duas meninas e o menino com uma barra inteira em mãos.

FIGURA 7 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 1 POR A2



FONTE: A2 – dados da pesquisa

A aluna explica sua solução da seguinte forma:

> *A2 - Ó aqui (aponta para a menina maior) é a mãe e ela tá dividindo pra essa e essa (aponta para as meninas menores) [...] e o menino ficou com uma barra inteira pra ele.*

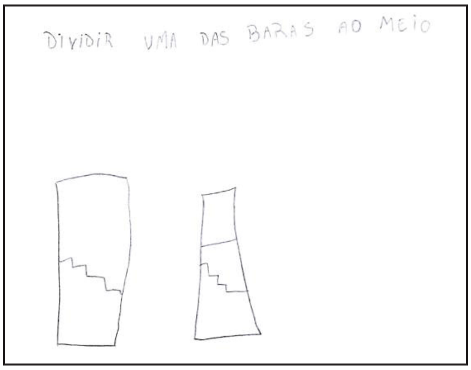
De modo semelhante, o aluno A4 (FIGURA 8) desenhou duas barras de chocolate e, em uma delas, fez um risco horizontal[6] indicando a divisão da barra em duas partes. Portanto, o esquema presente na resolução do aluno foi dividir uma das barras

[6] Nas duas barras o aluno desenha um traçado para ilustrar a embalagem do chocolate. O risco horizontal refere-se à linha contínua desenhada em apenas uma das barras.

de chocolate ao meio para que duas crianças recebessem metade cada e uma criança recebesse uma barra inteira.

> A4 - *Então.... eu reparto esse na metade (faz um risco horizontal em um dos chocolates) dou essa metade pra um, outra pra outro e um fica inteiro.*

FIGURA 8 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 1 POR A4



FONTE: A4 – dados da pesquisa

Nas resoluções de A2 e A4, como podemos observar nas FIGURAS 7 e 8, não há resto e não houve a preocupação de que todos os pedaços distribuídos tivessem o mesmo tamanho. Nas duas resoluções, a solução proposta foi que uma das crianças recebesse um chocolate inteiro e as outras duas crianças recebessem meio chocolate cada uma. Porém, apesar da distribuição dos chocolates não ter sido feito em partes iguais, o chocolate que foi repartido, foi dividido em dois pedaços que representam pedaços iguais.

Nunes e Bryant (2009) afirmam que o esquema de partição é entendido não como a atividade de cortar algo em partes de qualquer forma, mas como um processo que deve ser guiado desde o início com o objetivo de obter um número pré-determinado de partes iguais. Por tal razão não podemos afirmar que o esquema utilizado pelos alunos A2 e A4 ao dividir as barras foi o esquema de partição. O fato de realizarem a divisão das barras de chocolate ao meio nos leva a perceber a presença de um esquema identificado na literatura como: esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER; SAWADA, 1983).

Pothier e Sawada (1983) afirmam que a ação da partição de um objeto ou de um conjunto de objetos é aprendida pelas crianças em situações do cotidiano, e que até mesmo crianças muito novas já convivem com situações onde ouvem expressões do tipo “corte isso no meio” e “pegue essa metade”. Mais tarde as crianças já começam a participar de atividades, onde são estimuladas a repartir, porém com o ensino dos números racionais esse aprendizado se torna mecânico. E isso, para os autores, explica o uso do termo “meio” ou “metade” pela grande parte das crianças. Em alguns casos, os autores afirmam que as crianças não compreendem o significado de metade como número: “Isso é mostrado pelo uso do termo *metade* por crianças em expressões como *partir no meio em quatro pedaços* ou *dividir na metade em três pedaços”. (*POTHIER; SAWADA, 1983, p. 311, tradução nossa). Esse fato explica a presença do esquema metade na resolução dos alunos A2 e A4.

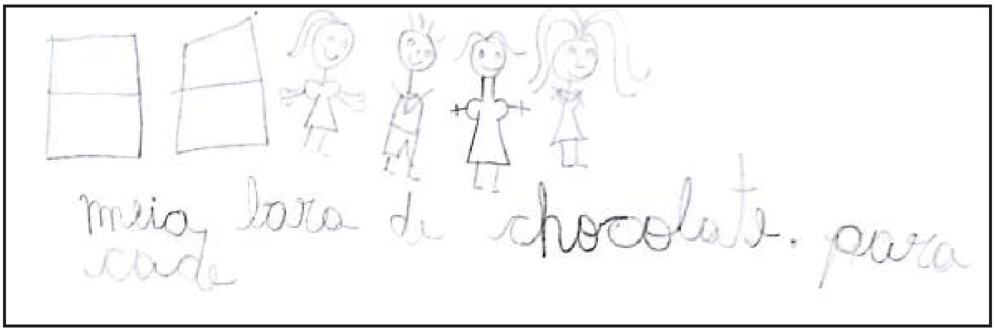
c) Esquema 3: divisão das duas barras em duas partes.

Este esquema envolve a divisão das duas barras ao meio e cada criança recebe um pedaço de chocolate correspondente à metade da barra, resultando um pedaço de chocolate de resto. Os alunos A3 e A5 que em suas soluções apresentaram o Esquema 3, justificaram que esse pedaço que sobrava ficaria com a mãe.

No desenho feito por A3, FIGURA 9, observa-se que ele representa as duas barras divididas na metade e ao lado, para mostrar quem comeu chocolate, desenha a mãe e os três filhos. O aluno explica que

> A3 - *Se tem duas barras que a mãe pode comprar né dá pra dividir no meio [...] fica um pedaço pra cada filho [...] e a mãe pode comer também um pedaço [...] ou se sobrar [...] se a mãe não come aí sobra.*

FIGURA 9 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 1 PELO A3

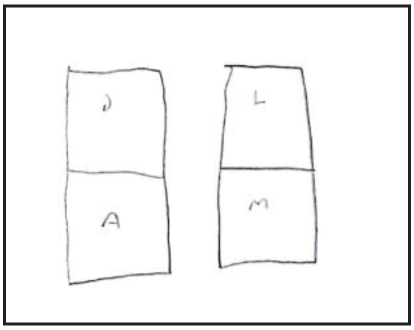


FONTE: A3 – dados da pesquisa

De modo semelhante, A5 faz um desenho (FIGURA 10) com duas barras divididas ao meio e a primeira letra de cada nome escrita na respectiva parte do chocolate: J de João, A de Ana, L de Letícia e M de mãe.

> A5 - *Bom eu acho que ela podia dividir as duas barras no meio [...] aí fica um pedaço pra cada e como vai sobrar ela fica com um pedaço também.*

FIGURA 10 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 1 PELO A5



FONTE: A5 – dados da pesquisa

Nesse esquema os dois alunos dividiram as barras na metade, distribuíram as metades para as três crianças e para que não houvesse resto determinaram que a metade de chocolate que sobrou deveria ficar com a mãe. Ou seja, os alunos não conseguiram encontrar uma maneira de realizar a divisão do chocolate apenas para as três crianças de modo que não houvesse resto. Podemos observar isso na explicação dada pelo aluno A5:

> A5 - A*í fica um pedaço pra cada e como vai sobrar ela fica com um pedaço também.*

Nas duas soluções os alunos repartiram as barras na metade, ou seja, fizeram a divisão das barras em duas partes iguais, ou seja, é possível afirmar que o esquema de metade está presente na resolução dos alunos A3 e A5 (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER; SAWADA, 1983). Podemos verificar isso na explicação dos alunos A3 e A5, ao enfatizarem que dividiram as barras no meio.

A3 - *Se tem duas barras que a mãe pode comprar né dá pra dividir* ***no meio.***

A5 - *Bom eu acho que ela podia dividir as duas barras* ***no meio.***

Nas resoluções dos alunos A3 e A5, foi possível observar a presença de dois esquemas identificados na literatura: o esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE; NUNES; BRYANT, 2005), pois os alunos realizaram a correspondência de cada parte gerada do chocolate para cada criança do problema e para a mãe, como podemos observar na fala do aluno A3.

A3 – *[...] fica um pedaço pra cada filho [...] e a mãe pode comer também um pedaço”*

Em relação ao esquema de partição, tendo em vista que os alunos não encontraram uma solução onde não houvesse resto de chocolate, não é possível afirmar que desde o início a resolução foi guiada pelo objetivo de obter um número pré-determinado de partes iguais, portanto o esquema utilizado foi o esquema de metade como referência.

De forma geral, o QUADRO 15 nos mostra uma síntese sobre quais esquemas, identificados na literatura, pudemos observar nos esquemas elencados ao longo da resolução dos alunos do Problema 1.

QUADRO 15 - RELAÇÃO DE ESQUEMAS PROBLEMA 1

	Esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005; NUNES; BRYANT, 2009; BERTONI, 2008)	Esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005)	Esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER, SAWADA, 1983)
Divisão das duas barras em três partes.	x	x	
Divisão de uma barra em duas partes.		x	X
Divisão das duas barras em duas partes.		x	X

FONTE: Próprio autor

Como pudemos verificar, o esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005) esteve presente na resolução de todas as crianças. De fato, assim como afirmam Nunes e Bryant (2009) uma situação que envolve fração com significado de quociente (divisão) o esquema de correspondência é, frequentemente, o mais utilizado pelas crianças.

Nunes e Bryant (2009) afirmam que ao utilizar o esquema de correspondência, não há a necessidade que a criança estabeleça uma relação entre o tamanho do todo e o tamanho das partes em que o todo é dividido, isso porque a situação envolve duas dimensões distintas. Em contraste, no esquema de partição, o modelo implícito determina que a soma das partes não deve ser maior que o todo. Por exemplo, a criança é facilmente capaz de descobrir que ao dividir 3 barras de chocolate para 2 crianças, cada uma receberá 1 barra mais metade, porém, em uma situação de partição, torna-se desafiador para a criança compreender que a quantidade de chocolate que cada uma ganhará é 3 partes de um chocolate dividido em 2. Isso nos traz uma explicação sobre o fato de o esquema de partição não estar presente na resolução da maioria dos alunos, podendo ser encontrado apenas na resolução do aluno A1.

Para Pothier e Sawada (1983), o nível mais simples de partição é o esquema de metade. Os autores afirmam que as crianças aprendem esse esquema de metade, e que esse esquema parece útil e eficaz para partir regiões retangulares e circulares em duas ou quatro partes. Entretanto, apesar do esquema de metade favorecer para a construção do conceito de frações, os autores alertam que as crianças mesmo quando tinham que dividir o bolo em três ou cinco partes iguais tendiam a utilizar a mesma estratégia de divisão: elas iniciavam a divisão pela região do meio. Nestas situações, dependendo do nível de desenvolvimento em que as crianças se encontravam, elas podiam perceber ou não que era impossível dividir a figura em três (ou cinco) partes iguais a partir de duas metades, buscando, algumas vezes, encontrar outras formas de subdividir os bolos. Em nossa pesquisa, percebemos isso no caso dos alunos A2, A4, A3 e A5 que utilizaram o esquema de metade.

É importante salientar que, de acordo com o Plano Curricular do município de Curitiba, o conceito de metade deve ser apresentado às crianças ao final do 2º ano do Ensino Fundamental, ou seja, é possível que os alunos entrevistados já tenham visto a ideia de metade na escola. Sendo essa uma possível explicação para a presença desse esquema na resolução dos alunos.

Outro aspecto importante diz respeito ao tipo de problema apresentado. O problema 1 é uma situação interessante para ser utilizada ao introduzir o conceito de fração, tendo em vista que possibilita o aluno a encontrar mais de uma solução para o problema e permite que o aluno utilize os esquemas que já dispõe. Por exemplo, os alunos entrevistados em nossa pesquisa apresentaram domínio do esquema de distribuição, porém na resolução deste problema não evidenciaram os esquemas de metade e partição. Um próximo passo para desenvolver o conceito de fração com esses alunos é trabalhar situações que envolvam o esquema de partição e metade.

5.2 PROBLEMA 2

A mãe de Ana fez um bolo de chocolate para Ana e seus três amigos lancharem. Como a mãe pode cortar o bolo para que todas as crianças comam a mesma quantidade de bolo e não sobre nenhum pedaço?

No Problema 2 foi informado ao aluno que todas as crianças devem comer a mesma quantidade de bolo e que não devem restar pedaços. O problema também questiona como a mãe deverá cortar esse bolo para que as condições informadas sejam cumpridas. O material disponibilizado aos alunos contava com dois bolos confeccionados em EVA, um redondo e outro retangular.

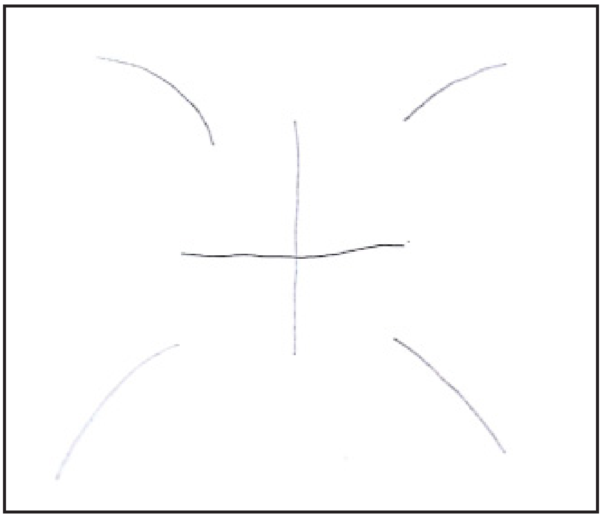
Apresentaremos agora os esquemas identificados na resolução dos alunos no Problema 2. Observamos nas resoluções a presença de quatro esquemas diferentes, sendo eles:

a) Esquema 1: Divisão na metade e novamente na metade.

Esse esquema consiste em o aluno realizar em um primeiro momento um corte horizontal (ou vertical) na metade do bolo. Em seguida no sentido perpendicular realizam novamente um corte na metade do bolo, dividindo-o em quatro partes. Observamos esse esquema na resolução dos alunos A1 e A4.

A FIGURA 11 traz a resolução do problema pelo aluno A1. Na entrevista o aluno afirmou que era necessário realizar os cortes “de cima para baixo [...] de um lado para outro” para resolver o problema para que, dessa forma, os pedaços fossem “um para Ana [...] os outros um pra cada amiguinho dela”. Para representar essa distribuição dos pedaços de bolo o aluno realizou um risco partindo de cada parte representada do bolo.

FIGURA 11 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 2 PELO A1



FONTE: A1 – dados da pesquisa

Na resolução de A4, apresentada na FIGURA 12, podemos observar que o aluno representou o bolo em dois formatos diferentes, porém, o esquema utilizado foi o mesmo.

A solução do problema foi realizar os cortes da forma “metade [...] metade”, como A4 explica:

> A4 - *Porque metade [...] fica em dois [...] aí metade fica quatro.*

FIGURA 12 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 2 PELO A4

FONTE: A4 – Dados da pesquisa

O esquema aqui apresentado identifica-se na literatura como esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER, SAWADA, 1983). Pothier e Sawada (1983) enfatizam que a atividade de dividir uma região no meio, como forma de iniciar a divisão de uma área, e nos casos em que o número de partes é múltiplo de dois, acrescentar linhas para subdividir as partes já estabelecidas, como a característica que define esse esquema. E tanto na resolução do Aluno A1, quanto na resolução do aluno A4, o primeiro passo foi dividir o bolo ao meio. O aluno A4, além de dividir o bolo ao meio, subdivide a região para obter o dobro de pedaços.

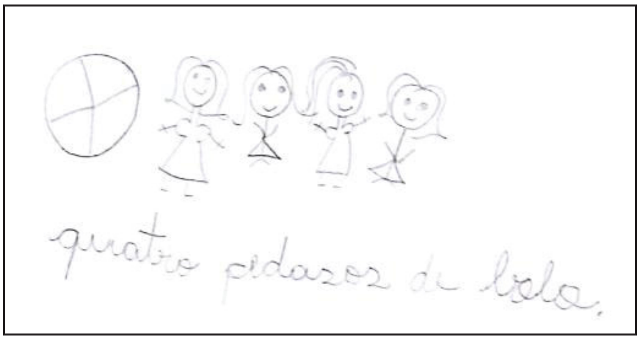
b) Esquema 2: Divisão na metade e de cada parte resultante novamente na metade.

Esse esquema consiste na realização de três cortes: o primeiro dividindo o bolo em duas partes iguais, e em seguida, a divisão de cada parte obtida na metade novamente, resultando em 4 pedaços de bolo. Esse esquema esteve presente na resolução do aluno A3, FIGURA 13. O aluno resolveu o problema dizendo:

> A3 - U*m corte na metade ... finge que aqui é bem metade tá ... outro na metade ... e na outra metade também ... aí fica tudo igual*

Ou seja, realizou três cortes no bolo, primeiro na metade e depois na metade de cada parte, obtendo 4 pedaços.

FIGURA 13 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 2 PELO A3



FONTE: A3 - dados da pesquisa

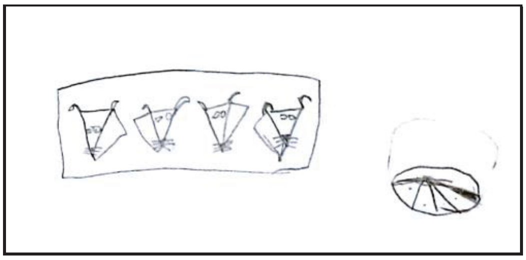
Diferente do Esquema 1, onde os alunos realizaram dois cortes (metade e novamente metade) aqui temos um esquema que começa de forma semelhante: divisão na metade, porém o aluno A3 divide cada uma das partes obtidas novamente na metade.

Novamente podemos observar a presença do esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER, SAWADA, 1983), descrito na literatura, tendo em vista que o aluno A3 apoiou a resolução do problema na divisão do todo em metades.

c) Esquema 3: Divisão do bolo em quatro pedaços com resto.

Esse esquema esteve presente na resolução de A2 (FIGURA 14) e se caracterizou da seguinte forma: com o intuito de obter 4 pedaços de bolo, o aluno desenhou um círculo e desenhou nele os cortes que realizaria nos bolos: cortou o primeiro pedaço, resultando em dois pedaços, e fez mais 3 cortes para poder obter 4 pedaços.

FIGURA 14 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 2 PELO A2



FONTE: A2 – dados da pesquisa

Porém ao analisar a figura obtida, percebe que há uma parte que sobra e afirma:

> A2 - M*as esse resto aqui não conta [...] é só o prato. Então ó um, três [...] quatro [...] esse resto não vale. Essa parte aqui era só o prato [...].*

Ou seja, o aluno realiza o corte do bolo, FIGURA 14, mas para obter o número exato de pedaços descarta o restante (metade) do bolo afirmando: "*ela fez só metade do bolo na verdade".*

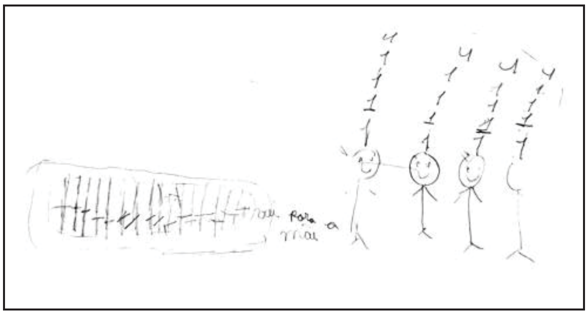
Podemos observar que aqui temos a presença do esquema identificado na literatura como esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005), tendo em vista que o aluno A2 estabelece uma associação entre as partes compartilhadas e cada destinatário. Para cada corte realizado no bolo, há um pedaço sendo gerado e cada pedaço é "ligado" a uma pessoa.

Destacamos também o fato de o aluno A2 se deparar com a situação em que essa forma de distribuição ocasiona um resto, situação que não pode ser solucionada pelo aluno, o que nos mostra que ele não estabelece relação entre número de cortes necessários para se obter um determinado número de partes.

d) Esquema 4: Divisão e distribuição um-a-um com resto.

Esse esquema consiste na realização de cortes de acordo com o número de pedaços que desejo obter, e a distribuição sendo feita da mesma forma. Podemos observar a presença desse esquema na resolução do problema 2 pelo aluno A5. Observa-se na FIGURA 15 que o aluno desenha um retângulo, representando o bolo, e realiza cortes no bolo. Em um primeiro momento o aluno realizou oito riscos no retângulo, e em seguida distribuiu os pedaços obtidos, registrando o número 1 para cada pedaço que cada criança recebia. Ao perceber que sobrou um pedaço aumentou o bolo, e realizou mais sete riscos. Distribuiu novamente os pedaços, incluindo o que havia sobrado, registrou os pedaços que cada criança recebeu novamente, e contou o total de pedaços, resultando em 4 pedaços para cada criança. Percebendo que mesmo assim, restava um pedaço de bolo, determinou que este "vai para a mãe".

FIGURA 15 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 2 PELO A5



FONTE: A5 – dados da pesquisa.

Assim como no esquema 3, o esquema 4 também apresenta o esquema, identificado na literatura como esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE; NUNES; BRYANT, 2005). De acordo com Nunes e Bryant (2008) podemos afirmar que, tanto no esquema 3 quanto no esquema 4 identificados no Problema 2, o uso do esquema de correpondência foi no intuito de distribuir/corresponder um pedaço para cada indivíduo.

De modo geral, o QUADRO 16 nos mostra uma síntese sobre quais esquemas, identificados na literatura, pudemos observar nos esquemas elencados ao longo da resolução dos alunos do Problema 2.

QUADRO 16 - RELAÇÃO DE ESQUEMAS PROBLEMA 2

Esquemas	Esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005)	Esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER, SAWADA, 1983)
Divisão na metade e novamente na metade		x
Divisão na metade e de cada parte resultante novamente na metade.		x
Divisão do bolo em quatro pedaços com resto.	x	
Divisão e distribuição um-a-um com resto.	x	

FONTE: próprio autor

Portanto, vemos no problema 2 que dentre os esquemas identificados na literatura observamos a presença de dois esquemas: o esquema de distribuição

(NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE; NUNES; BRYANT, 2005) e o esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER; SAWADA, 1983).

Sobre o uso do esquema de distribuição nesse problema, Nunes (2008) afirma que é comum o uso do esquema de distribuição em problema que envolvem o conceito de fração e divisão tendo em vista que as crianças usam correspondências para estabelecer equivalências entre as quantidades geradas por meio de uma divisão. Outro ponto importante é a pesquisa realizada por Mamede, Nunes e Bryant (2005), na qual os autores já haviam constatado que as crianças entrevistadas utilizavam em todos os problemas que envolviam situações quociente o esquema de distribuição.

Quanto ao esquema de metade, presente na resolução dos alunos A1 e A2 (Esquema 1) e o aluno A3, Spinillo e Lautert (2006) observaram, em uma pesquisa de 2004, que em tarefas que envolvem o esquema de metade, o desempenho dos alunos é expressivamente mais alto. Para as autoras esse esquema auxilia os alunos a realizar composições e decomposições de quantidades fracionárias, indicando, ainda que intuitivamente, uma compreensão acerca da equivalência de frações.

Aqui novamente a presença do esquema de metade nos leva a destacar que uma possibilidade da presença desse esquema é o fato de que, de acordo com o Plano Curricular de Curitiba, é previsto que ao final do 2º ano os alunos tenham visto situações que envolvessem o conceito de metade.

Por meio da resolução dos alunos no Problema 2, identificamos um elemento importante a ser considerado no ensino de frações. Os alunos que se apoiaram no esquema de metade para solucionar o problema encontraram êxito em suas respostas, porém um aspecto importante a se considerar é a necessidade de trabalhar situações que não envolvam apenas a divisão em partes que correspondem a múltiplos de dois, afim de que o aluno possa desenvolver outros esquemas de resolução. Isso porque observamos em nossa pesquisa que os alunos que não dispuseram do esquema de metade não encontraram outra forma de solucionar o problema. Portanto, é importante apresentar ao aluno situações que estimulem a construção de novos esquemas, além do esquema de metade em situações de fração que envolvem partição.

É relevante apontar que nas resoluções dos alunos A2 e A4, ambos iniciaram a resolução do problema através de uma ação que identificamos como um teorema-em-ação, tendo em vista que um teorema em ação é uma proposição que interfere no "cálculo" da atividade (VERGNAUD, 2009).

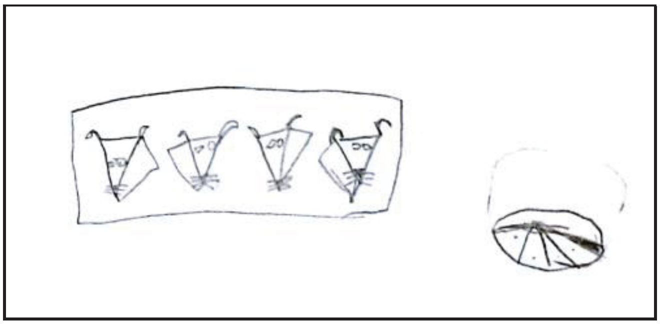
Teorema-em-ação 1: Quanto menor o todo menos pedaços obtenho

Note que na resolução do aluno A2, FIGURA 16, antes de desenhar o círculo que representa o bolo de sua resposta, um círculo maior havia sido desenhado e foi apagado. Isso porque de acordo com o aluno:

> A2 - *A mãe tinha o bolo (desenha o círculo) aí ela pegou a espátula e fez assim (começa a realizar os cortes ... percebe que sobra um pedaço) hummmm tem que ser menor o bolo (apaga e faz um círculo menor.... e começa a fazer os cortes novamente)*

Para esse aluno, o fato de ter sobrado um pedaço de bolo está relacionado ao tamanho do bolo e por esse motivo afirma a necessidade de um bolo menor para poder obter o número de pedaços desejados.

FIGURA 16 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 2 PELO A2



FONTE: A2 – dados da pesquisa

De forma semelhante, na resolução do Aluno A4, FIGURA 17, podemos observar que há o esboço de um círculo que foi desenhado e apagado. O aluno ao apagar diz que:

> A4 - *Vixe....desenhei grande demais deu 5 pedaços.*

FIGURA 17- RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 2 PELO ALUNO A4

FONTE: dados da pesquisa

Como a intenção do aluno era obter 4 pedaços, ele apaga e faz um círculo menor, acreditando que o número de cortes obtidos está relacionado com o tamanho do inteiro.

As ações dos alunos A2 e A4 foram guiadas pelo seguinte pensamento: "para se obter um número menor de partes, o todo não pode ser grande", ou seja, se o inteiro que quero dividir for menor, obtenho um número menor de partes, se for maior, obtenho maior número de partes".

QUADRO 17 - RELAÇÃO DE TEOREMAS-EM-AÇÃO DO PROBLEMA 2

Teoremas-em-ação	
Teorema- em- ação 1: Quanto menor o todo menos pedaços obtenho	"se o inteiro que quero dividir for menor, obtenho um número menor de partes, se for maior, obtenho maior número de partes"

FONTE: próprio autor

O teorema-em-ação "Quanto menor o todo menos pedaços obtenho" foi observado nas resoluções dos Alunos A2 e A4, e foi o único teorema-em-ação observado no problema 2. É importante destacar que esse teorema-em-ação é considerado falso, pois o número de partes que posso dividir um todo independe do tamanho deste todo. Relembrando que, para Vergnaud (2019), os teoremas-em-ação são proposições e interferem no "cálculo" da atividade, ou seja, susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos, porém, um teorema-em-ação falso continua sendo um teorema-em-ação.

5.3 PROBLEMA 3

A mãe de Pedro fez duas pizzas do mesmo tamanho para que Pedro e seus amigos comessem. Uma das pizzas é sabor queijo e a outra calabresa, a pizza de queijo foi dividida em 4 pedaços e a pizza de calabresa em 8. Pedro comeu um pedaço de cada sabor, qual dos dois pedaços era maior?

No problema 3 a resolução da situação está em identificar qual dos dois pedaços possui maior tamanho, sendo que as pizzas são de tamanhos iguais, porém repartidas em números de pedaços diferentes. Nesse problema identificamos 2 esquemas e 3 teoremas-em-ação:

a) Esquema 1: Divisão do inteiro em várias partes

Esse esquema consiste na divisão da pizza em partes, ou seja, para que os alunos pudessem chegar a resposta, fizeram o desenho das pizzas e a divisão dela em partes. Pudemos observar esse esquema na resolução de quatro alunos: A1, A3 A5 e A4.

Ao longo dos registros desses 4 alunos observamos que a resolução de A1, A3 e A5 resultaram em uma resposta diferente da resposta encontrada pelo aluno A4. Isso porque os esquemas apresentados, embora iguais, foram guiados por uma proposição diferente. Ou seja, nesse esquema identificamos 2 teoremas-em-ação distintos: Teorema-em-ação 1: Quanto maior o número de cortes, menor o tamanho das partes e Teorema-em-ação 2: Quanto mais pedaços, maior. Explicaremos, portanto, cada um deles em separado.

- Teorema-em-ação 1: Quanto maior o número de cortes, menor o tamanho das partes.

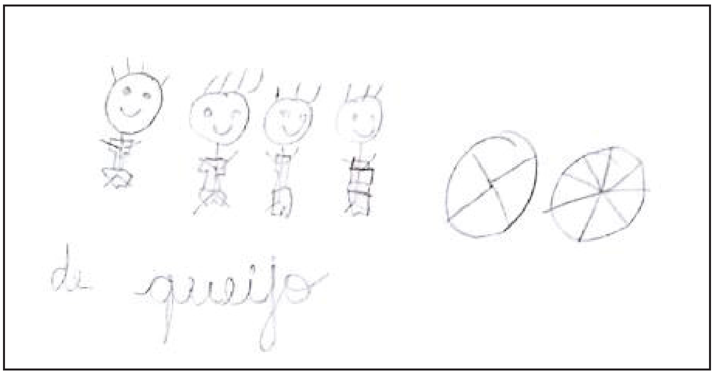
Nesse teorema-em-ação foi possível perceber que os alunos verificaram que, conforme aumentava o número de cortes na pizza, menor ficava o tamanho das partes.

Os alunos que apresentaram esse esquema em suas resoluções foram os alunos A1, A3 e A5 e em todas as soluções pudemos verificar que a conclusão veio por meio da utilização de desenhos, como podemos observar nas FIGURAS 18, 19 e 20.

Na resolução dos três alunos pudemos identificar a presença desse esquema através do desenho de dois círculos, um representando a pizza de queijo, dividida em quatro pedaços e outro a pizza de calabresa, dividida em oito. O aluno A3 (FIGURA 18) relatou, na entrevista, que apontou a pizza de queijo como resposta.

> A3 - *Porque essa dividida em 8...foi em mais pedaço cortado.... elas foram ficando menorzinha .... né ... a de queijo é maior porque tem menos pedaço cortado.*

FIGURA 18 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 3 PELO A3



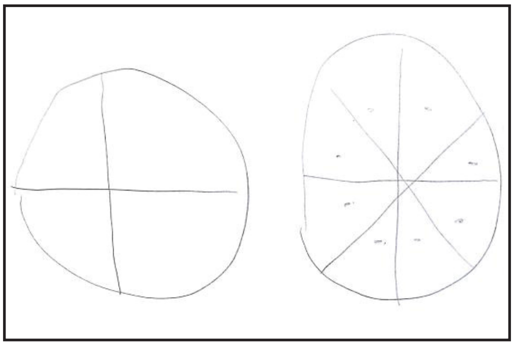
FONTE: A3 – dados da pesquisa

Essa resposta foi semelhante à justificativa dos alunos A1 e A5 que afirmaram que perceberam, através do desenho, diminuição do tamanho dos pedaços ao cortarem a pizza em um número maior de vezes.

O aluno A1, FIGURA 19, explicou sua resolução da seguinte forma:

> A1 - *Só que daí ... uma com que tá 4....vai ficar com as fatias maiores...e a outra com que tá oito vai ficar com as menores [...] é que ... ó quando eu fui cortando a pizza ... os pedaços vão diminuindo.... porque preciso de mais pedaço.*

FIGURA 19 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 3 PELO A1

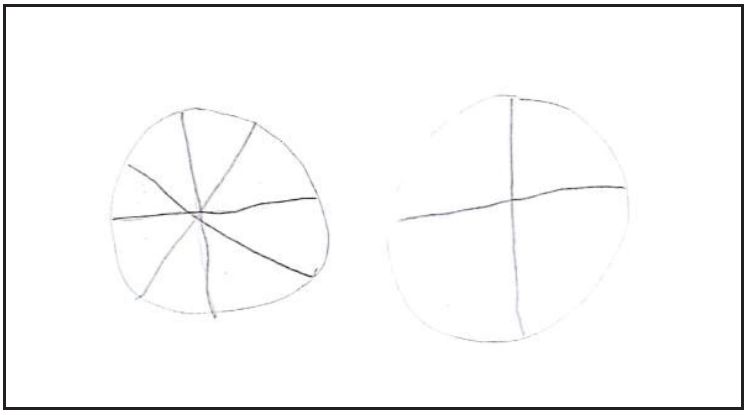


FONTE: A1 - dados da pesquisa

O aluno A5, FIGURA 20, afirmou que

> A5 - *Porque aqui (aponta para a pizza dividida em 8) tá dividida em mais...aí fica pequenininho...e na outra se eu dividir em mais vai diminuir também.... então como não é ... ficou maior.*

FIGURA 20 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 3 PELO A5



FONTE: A5 – dados da pesquisa

A partir desse esquema pudemos identificar dois esquemas previstos na literatura: Esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE; NUNES; BRYANT 2009; BERTONI, 2008) e esquema relacional (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008).

Tendo em vista que o esquema de partição tem como característica o processo de dividir um todo em partes, guiado com o objetivo de obter um número pré-determinado de partes iguais, podemos afirmar que o esquema de partição esteve presente nesse esquema, tendo em vista que o enunciado já determinava o número de partes que as pizzas deveriam ser partidas e o desenho dos alunos mostra que eles desenharam o todo e dividiram no número de partes determinado no enunciado.

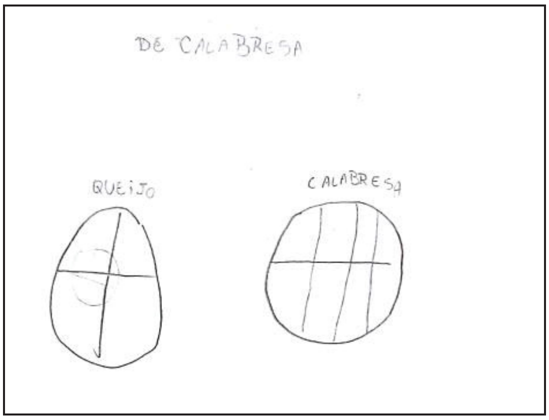
O esquema relacional é considerado como básico para a formação do conceito de fração (CRUZ, 2003), pois envolve a habilidade das crianças de estabelecerem relações de primeira ordem (parte-parte e parte-todo) e segunda ordem (relação entre as relações de primeira ordem). No esquema identificado nesse problema, os alunos A1, A3 e A5 apresentaram uma relação de segunda ordem, pois precisaram estabelecer primeiramente uma relação entre parte-todo de cada pizza (tamanho do pedaço em relação ao todo) e uma relação entre essa relação, através da comparação entre os pedaços de pizza. Ao utilizar esse esquema os alunos foram capazes de enunciar que conforme aumentou o número de partes em que o todo foi dividido, menores as partes se tornaram.

- Teorema-em-ação 2: Quanto mais pedaços, maior.

Esse teorema-em-ação reflete o pensamento de que a pizza que possui mais pedaços é maior. Pudemos observar a presença desse esquema na resolução do problema pelo aluno A4. Na FIGURA 21 podemos observar que o aluno faz um desenho representando as duas pizzas e as reparte, uma em quatro e a outra em oito pedaços, conforme descrito no enunciado, e registra que o maior pedaço de pizza era a de calabresa, isso porque:

> A4 - *... aí eu vi que ela tem mais pedaço ... tem 8 pedaços ... (faz dois círculos e divide uma em 4 e outra em 8) e essa daqui (aponta para a de queijo) tem menos ... então 8 é maior (...) é a de calabresa mesmo ... porque ela tem mais pedaços ... então é maior.*

FIGURA 21 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 3 POR A4



FONTE: A4 – dados da pesquisa

No Esquema 1: Divisão do inteiro em várias partes, foi possível observar dois esquemas que identificamos na literatura: O esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT 2009; BERTONI, 2008) e o esquema relacional (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008).

Assim como no último esquema por nós apresentado (Teorema-em-ação 1: quanto maior o número de cortes, menor o tamanho das partes) o esquema de partição, é identificado nesse problema tendo em vista que o aluno A4 faz a divisão do todo (pizza) no número de partes determinado pelo enunciado (4 e 8 pedaços). É importante destacar a forma como o aluno realiza esses cortes, é comum que ao realizar uma divisão de figuras circulares o corte seja feito com linhas que representam o diâmetro do objeto, a fim de que os pedaços resultem em tamanhos iguais. Porém na pizza dividida em 8 pedaços, observamos que não houve para o aluno essa preocupação, tendo em vista que os cortes foram realizados em linhas horizontais e verticais e resultaram em pedaços com tamanhos diferentes.

Assim como anteriormente, o esquema relacional está presente na resolução do aluno. Porém aqui, não é possível observar uma relação de segunda ordem, pois o aluno faz a relação entre o pedaço de pizza e o todo (parte-todo) e conclui que a pizza de calabresa *"tem mais pedaços ... então é maior",* ou seja, o aluno ao realizar uma relação apenas de primeira ordem (parte-todo), não estabelece uma relação entre os pedaços, e ao observar as partes em relação ao todo, conclui que a pizza com mais pedaços é maior.

b) Esquema 2: Contar o número de pedaços

Esse esquema se caracteriza pela estratégia de resolução através da contagem dos números naturais em ordem: 0,1,2,3,4, ..., descobrindo assim o maior número. O esquema contar o número de pedaços leva a identificar a presença de outro teorema-em-ação:

-Teorema-em-ação 3: Quanto maior o número maior o pedaço

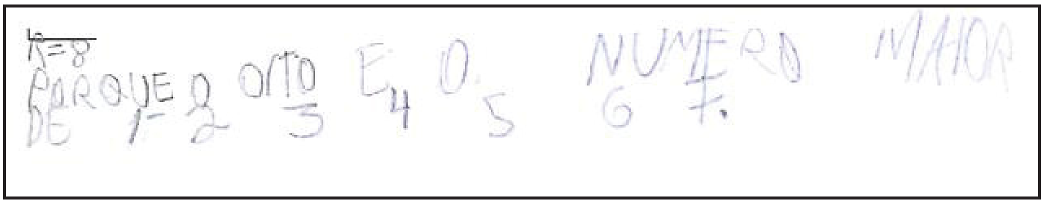
Esse teorema-em-ação se caracteriza pela ideia de que, como o número oito é maior que o número quatro, a pizza que foi dividida em oito terá pedaços maiores, como podemos identificar na fala do aluno A2.

O aluno afirma que:

A2 - *Ele perguntou qual era o pedaço maior ... eu acho que é o de oito porque ... a pizza ... a de calabresa tinha oito ... e a de queijo tinha 4 (...) porque oito é sempre um número maior ... não tão maior ... maior do que 1,2,3,4,5,6,7 e só. É maior que 4 então.*

Na sua resposta, FIGURA 23, o aluno A2 escreve que a resposta é 8, pois, assim como explicou em entrevista, o número oito é maior que o número 4.

FIGURA 22 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 3 POR A2



FONTE: A2 – dados da pesquisa

Nesse caso, esse teorema-em-ação é tido como falso. Como já mencionamos, de acordo com Vergnaud (2019) os teoremas-em-ação são susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos, e que um teorema-em-ação falso continua sendo um teorema-em-ação. Podemos afirmar que esse teorema-em-ação é falso pois quanto maior o número de pedaços em que a pizza é dividida menores se tornam os pedaços obtidos.

Podemos observar a presença do esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008), descrito na literatura, nesta resolução. Assim como afirma Cruz (2003) este esquema pode ser considerado como um auxiliador para as crianças terem uma unidade de referência para o número racional, porém, assim como observado na resolução do aluno A2, pode ser um inibidor deste conceito, tendo em vista que o conhecimento do número inteiro na aprendizagem de frações interfere no aspecto relacionado à compreensão de seu simbolismo. Esta interferência pode ser identificada nas interpretações das crianças sobre a representação simbólica da fração (a/b) onde demonstram não a compreender como um número, mas como dois números inteiros distintos (CRUZ, 2003). Percebemos isso na resolução desse aluno, quando este deixa de perceber a relação que existe entre o todo e as partes e leva em conta apenas a sequência numérica.

No QUADRO 18 é possível observar uma relação de todos os esquemas identificados nas resoluções do problema 3.

QUADRO 18 - RELAÇÃO DE ESQUEMAS PROBLEMA 3

Esquemas		Esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008)	Esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES e BRYANT 2009; BERTONI, 2008)	Esquemas relacionais (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008)
Divisão do inteiro em várias partes	Terorema-em-ação 1: Quanto maior o número de cortes, menor o tamanho das partes.		x	x
	Teorema-em-ação 2: Quanto mais pedaços, maior.		x	x
Contar o número de pedaços	Teorema-em-ação 3: Quanto maior o número maior o pedaço.	x		

FONTE: próprio autor

Nesse problema foi possível observar a presença de três esquemas: o esquema de partição e esquema relacional e o esquema de unidade. O esquema de partição esteve presente na resolução de 4 alunos (A1, A3, A4 e A5). Isso provavelmente tenha ocorrido devido ao fato de o problema envolver uma relação parte-todo, no caso, a pizza e seus pedaços. Nunes e Bryant (1997) apontam que aproximadamente entre 6 e 7 anos, as crianças já são capazes de antecipar a relação entre as partes e o todo e realizar a divisão do todo em um número pré-determinado de partes aproximadamente iguais, como, de fato, observamos na resolução do Problema 3.

O esquema relacional esteve presente nas mesmas resoluções. Provavelmente a presença desse esquema se dá devido a relação estabelecida entre as relações parte-todo. Nunes e Bryant (1997) comentam que a comparação de partes perceptualmente dissemelhantes e de frações diferentes está diretamente ligada a capacidade dessas crianças de estabelecer conexões entre as relações parte-todo.

O esquema de unidade esteve presente na resolução de apenas um aluno. De fato, Cruz (2003) aponta para o cuidado que é preciso ter quanto ao esquema de unidade e como este pode se constituir como um obstáculo para a construção do conceito de número fracionário. Ela argumenta que, como os números inteiros são, durante muito tempo, os únicos que têm o significado de número para as crianças, elas buscam aplicar todo o conhecimento de que dispõem para as frações. O que pode resultar futuramente em uma compreensão da fração como dois números naturais, um em cima do outro, e não como um único número em si.

Nas resoluções do Problema 3 não encontramos indícios de conceitos relativos à fração que possivelmente foram abordados na escola em anos anteriores. Porém apontamos aqui alguns aspectos importantes a serem considerados no processo de ensino dos números fracionários. É importante que o aluno compreenda que os números fracionários correspondem de fato a um número e, além disso, que o aluno compreenda o conceito de conservação do todo. De fato, apenas dois alunos conseguiram observar que a pizza cortada em 8 fatias possui pedaços menores que aquela que foi cortada em 4, o que evidencia a necessidade de apresentar aos alunos situações que possibilitem a compreensão da relação inversa entre o número de cortes e o tamanho das partes.

5.4 PROBLEMA 4

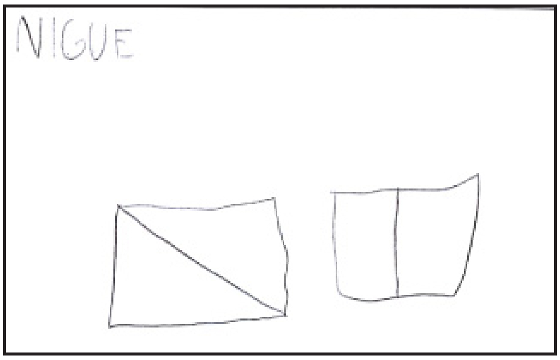
Leticia e André compraram uma barra de chocolate para cada um deles. Nenhum deles aguentou comer a barra inteira, veja no desenho o pedaço que eles conseguiram comer pintado de cinza:

Alguém comeu mais? Leticia ou André? Por quê?

Esquema 1: Desenhar os retângulos e comparar

Esse esquema se caracteriza pela estratégia presente na resolução do aluno A1 (FIGURA 23). O aluno realizou o desenho das duas barras e as respectivas divisões como apoio para sua resolução.

FIGURA 23 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 4 POR A1



Fonte: A1 – Dados da pesquisa

Através do desenho, o aluno A1 concluiu que ninguém comeu mais do chocolate e argumentou:

> A1 – *Se eu cortar (desenha dois retângulos na folha) uma barra assim (corta a barra na diagonal) e uma barra assim (corta a outra na vertical) vai dar a mesma coisa.... porque uma pode estar em uma forma e a outra na outra.... só que se for na mesma forma igual então pode ... pode.... não pode comer mais ... então tá a mesma coisa aqui (...) porque esse (aponta para o desenho que está dividido na vertical) comeu bem na metade ... e o outro eu acho que ... parece também ser metade.... eu já comi metade assim.*

Esquema 2: Sobrepor os retângulos e comparar

Observamos a presença desse esquema na resolução do aluno A3. A estratégia desse aluno foi que para ser possível descobrir quem comeu mais, poderia comparar a quantidade que cada um comeu sobrepondo as figuras.

O aluno A3 chegou à conclusão que Leticia comeu mais chocolate que André. Para isso, o aluno utilizou o material manipulável disponível e comparou, colocando a parte comida por Leticia em cima da parte comida por André, o tamanho das figuras. Para ele Letícia comeu mais, porque:

> A3 - *Porque se eu colocar o que eles comeram em cima um de outro ... o dela sobra uma pontinha.*

Esquema 3: Comparar visualmente e apontar

Observamos esse esquema na resolução dos alunos A2 e A5. O esquema consiste na realização de uma comparação visual, ou seja, através da observação do desenho do problema, e para indicar a divisão das barras e a comparação realizada os alunos fazem indicações com o dedo.

O aluno A2 primeiramente respondeu que André comeu mais, porém ficou em dúvida e pegou o material manipulável. Nesse momento mudou de ideia e afirmou que Leticia havia comido mais. Ao ser questionado sobre sua resposta diz que:

> A2 - *Porque aqui (pega o material de Leticia) porque essa aqui vale muito mais ... é só olhar ... quando come assim (aponta a linha diagonal) é muito maior ... porque dá pra perceber...o outro é só metade.*

Da mesma forma, o aluno A5 responde que Letícia comeu o maior pedaço de chocolate pois

> A5 - *... se for ve ... por esse aqui ... (aponta para a figura do André) ele vai ficar metade e ele vai fica menos, e esse aqui (aponta para o da Leticia) ela comeu mais.*

Esquema 4: Comparar visualmente

Esse esquema, observado na resolução do aluno A4, consistiu em chegar na solução através da comparação visual da quantidade comida por André e Letícia.

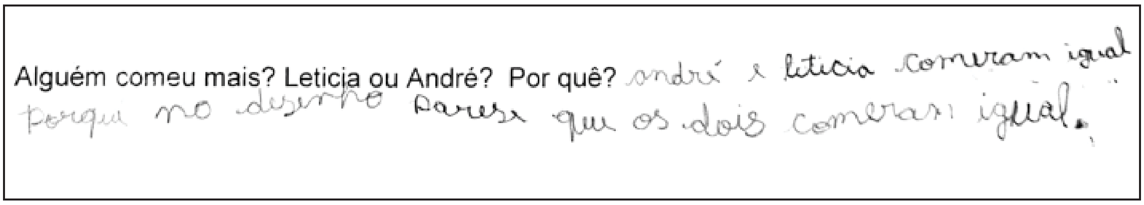
Podemos observar isso, em entrevista com o aluno A4 (FIGURA 24) da seguinte forma:

> A4 - *É..... parece que tá meio a meio.... Ah eu acho que foi nenhum dos dois*

Ao ser questionado pela pesquisadora sobre como chegou a essa conclusão, responde que:

> A4 - *Eu não sei.... porque parece que é meio.*

FIGURA 24 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 4 POR A4


Alguém comeu mais? Leticia ou André? Por quê? andré e leticia comeram igual porque no desinho parese que os dois comeram igual.

FONTE: A4 – dados da pesquisa

Nesse problema, através dos esquemas, identificamos, na resolução dos alunos, dois teoremas-em-ação distintos: Teorema-em-ação 1 (Se dividido em duas partes iguais obtenho metades) e teorema-em-ação 2 (Se dividido na diagonal então é maior que metade).

- Teorema-em-ação 1: Se divido em duas partes iguais obtenho metades

Esse teorema-em-ação representa a ideia que os dois modos de dividir representam metades. Consiste no aluno chegar a conclusão que independente de a barra de chocolate ser dividida ao meio na forma diagonal ou vertical, ambas estarão representando metades e, portanto, equivalem à mesma quantidade, poderíamos enunciar esse teorema-em-ação como: “Se dividirmos um todo em duas partes e essas partes são iguais, ambas representam metades”. Podemos observar esse esquema na solução dos alunos A1 e A4.

- Teorema-em-ação 2: Se dividir na diagonal então é maior que metade

Esse teorema-em-ação consiste na ideia de que para resolver o aluno parte do princípio que uma figura que esteja dividida ao meio por uma linha diagonal resulta em partes maiores do que quando a figura está dividida na metade por uma linha vertical. Poderíamos enunciar esse teorema-em-ação da seguinte forma: “se um todo é dividido em duas formas dissemelhantes não representam a mesma quantidade”. Observamos a presença desse teorema-em-ação na resolução dos alunos A2, A3 e A5.

Três esquemas descritos na literatura foram identificados na resolução desse problema: esquema relacional (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008), esquema de equivalência (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008) e esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008).

O esquema relacional é considerado como básico para a formação do conceito de fração (CRUZ, 2003) pois envolve a habilidade das crianças de estabelecerem relações de primeira ordem (parte-parte e parte-todo) e segunda ordem (relação entre as relações de primeira ordem). No esquema identificado nesse problema, os alunos A1 e A4 apresentaram uma relação de primeira ordem, mais especificamente, uma relação parte-parte através da comparação entre os pedaços de pizza. De acordo com Bertoni (2008), são as relações parte-parte as primeiras relações lógicas utilizadas pelas crianças para quantificar frações, pois é o conhecimento da relação parte-parte que permite à criança comparar que parte é maior, menor ou igual à outra. Nesse caso, as crianças foram capazes de, através da comparação realiza observar que as duas partes representavam o mesmo tamanho. O que nos leva ao próximo esquema: esquema de equivalência.

O esquema de equivalência diz respeito a habilidade de sintetizar unidades para gerar uma outra unidade, equivalente à soma de suas partes. Podemos afirmar que esse esquema esteve presente na resolução dos alunos A1 e A4 pois eles foram capazes de identificar que as partes geradas, apesar de serem diferentes, representavam a mesma quantidade. Para Cruz (2003) para que as crianças possam compreender sobre equivalência de frações é importante que haja o entendimento da relação compensatória entre a área e o número de partes iguais em que foi dividida a unidade. Nesse aspecto, para Lima (1993) para que a criança entenda a equivalência de quantidades contínuas é fundamental que compreenda que a divisão de um todo em partes iguais não altera a sua totalidade. Com isso podemos então afirmar que nesse esquema podemos observar também o esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008).

O esquema de unidade é importante porque, quando a criança toma uma unidade por referência, ela estará em condições de antecipar o tamanho das partes na qual o todo será dividido. Dessa forma, o aluno tem condições de concluir que ao dividir o todo em duas partes iguais, independente da forma que esta divisão ocorra, essa divisão sempre representará a metade do todo. Como pudemos observar na resolução dos alunos A1 e A4.

Podemos observar no QUADRO 19 um relação dos esquemas identificados nas resoluções do problema 4.

QUADRO 19 - RELAÇÃO DE ESQUEMAS DO PROBLEMA 4

Esquemas	Esquema de unidade (CRUZ, 2003;	Esquema de equivalência (CRUZ,	Esquema relacional (CRUZ, 2003;

	BERTONI, 2008)	2003; BERTONI, 2008	BERTONI, 2008)
Desenhar os retângulos e comparar	x	x	x
Sobrepor os retângulos e comparar			x
Comparar visualmente e apontar			x
Comparar visualmente	x	x	x

FONTE: Próprio autor

É possível verificar que o esquema relacional (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008) esteve presente em todos os esquemas identificados no problema 4, isso porque o problema envolvia uma comparação entre parte-parte e parte-todo dos chocolates. Nunes e Bryant (1997) comentam que antes mesmo que as crianças possam começar a entender as relações parte-todo elas são capazes de usar um tipo mais elementar de relação: a relação parte-parte, e que as relações “maior/menor que” e “igual a”, poderiam ser as primeiras relações lógicas usadas no conhecimento da quantificação de fração. Observamos nesse problema, que de fato os alunos A1 e A4 realizaram com sucesso essa relação parte-parte, pois foram capazes de perceber que a relação existente entre as partes dos dois chocolates era “uma parte é igual a outra”, porém os alunos A2, A3 e A5 apesar de apresentarem a presença dessa relação não foram capazes de estabelece-la corretamente.

O esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008) e o esquema de equivalência (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008) aparecem na resolução dos alunos A1 e A4. De acordo com Nunes e Bryant (1997) isso se explica através do fato de que é apenas quando as crianças compreendem a conservação do todo/conservação da unidade é que elas se tornam capazes de antecipar a relação entre as partes e o todo e, portanto, as relações de segunda ordem. Os autores ainda afirmam que a compreensão de frações está intimamente conectada à compreensão da conservação do todo.

O Problema 4 nos leva a pensar sobre dois apontamentos. O primeiro pode nos dizer que alguns alunos de fato não compreendem o significado do conceito metade, previsto pelo Plano Curricular de Curitiba para ser abordado ao final do 2º ano do Ensino Fundamental, isso porque, para esses alunos não houve a compreensão que dois todos, do mesmo tamanho, ao serem divididos em duas partes iguais resultam em metades que correspondem a mesma quantidade. Ou então, poderíamos dizer que esses alunos compreendem o conceito de metade, porém não conseguem estabelecer uma equivalência entre áreas. De toda forma, uma possível abordagem é, antes de trabalhar situações que permitam que o aluno utilize o referencial metade, como proposto por Spinillo e Lautert (2006), é apresentar ao aluno situações que possibilitem a construção do próprio conceito de metade.

5.5 PROBLEMA 5

Usando os pedaços de barbante que você recebeu, meça o comprimento da mesa e responda:

a. Quanto do barbante vermelho você usou? Como você pode escrever quanto do barbante você usou?
b. Quanto do barbante azul você usou? Como você pode escrever quanto do barbante você usou?

Para a resolução do problema 5 os alunos receberam pedaços de barbante (vermelho e azul) que foram previamente cortados pela pesquisadora, a fim de contemplar duas situações: na primeira (barbante vermelho) ao medir a mesa, conforme o problema solicita, que o aluno precisasse utilizar uma vez o barbante inteiro e mais terça parte do barbante. Lembrando que a mesa tinha medida igual a 90 cm e o barbante 67,5 cm. Na segunda situação (barbante azul, que o aluno precisasse utilizar metade do barbante apenas, uma vez que o comprimento da mesa correspondia 90 cm e o barbante tinha medida igual a 180 cm.

O objetivo desse problema foi analisar a forma como os alunos representariam a quantidade de barbante menor que o inteiro e de que forma eles interpretariam essas quantidades menores que o inteiro. Esse problema pode ser categorizado como um problema onde a fração aparece como significado de número, pelo fato de a fração representar a medida da mesa. Vamos apresentar primeiro os esquemas observados na letra a do problema 5 e em seguida os esquemas correspondentes ao problema 5b.

5.5.1 Problema 5a

No problema 5a observamos dois esquemas e a presença de dois teoremas-em-ação.

a) Esquema 1: usar um barbante inteiro e outro menor.

Esse esquema consiste na utilização de um barbante inteiro (67,5 cm) para medir a mesa (90 cm) e o conhecimento da necessidade de utilizar mais um barbante, porém, não inteiro, mas sim um barbante menor que o inteiro. Esse esquema apareceu na solução do Aluno A1.

Na entrevista, para resolver o problema o aluno esticou o barbante a partir de uma das extremidades da mesa e faz o mesmo para o outro lado, afirmando que resolveria desse modo. Ao ser questionado se os dois lados utilizam a mesma quantidade de barbante, o aluno afirma que sim, porém, quando indagado se então cabem dois barbantes, ele afirma que não. Ele afirma que: " - Cabe um barbante e outro de outro tamanho [...] não igual", porém não sabe determinar o tamanho que deve ter. Afirma que para descobrir precisaria "- [...] cortar um pedaço dele [...] no pedaço que faltar". Percebemos então que para esse aluno o esquema utilizado para resolver o problema foi usar o barbante inteiro uma vez e um tamanho menor que ele. Sobre a continuação da questão que pergunta se há outra maneira de representar quanto do barbante usou o aluno responde que "Escrever não ... só falando igual ... igual já ... é ... igual falei".

Observamos a presença do esquema de unidade descrito na literatura (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008) na resolução do aluno A1. Esse esquema diz respeito à identificação e formação do todo. Apesar do aluno não conseguir contar, dividir e reagrupar tendo a unidade como referência, ele conseguiu perceber a necessidade de uma parte do todo para realizar a atividade solicitada. Para Cruz (2003) é a flexibilidade do conceito de unidade, representada pela possibilidade de sucessivas divisões de um todo em partes iguais, das partes em subpartes e da reconstrução da unidade, que se constitui como uma das ações fundamentais para a construção do significado de número racional. Apesar de não saber o modo como subdividir a medida em partes de modo que o pedaço resultante seja do tamanho que precisa, o aluno já identifica ser esse o caminho da solução.

b) Esquema 2: medir mais que a metade

Esse esquema consiste em utilizar o barbante e verificar que é possível medir um pouco mais da metade da mesa, porém, o barbante é insuficiente para medir a mesa inteira. Por exemplo, o Aluno A2 apresentou esse esquema na sua resolução através das afirmações

> A2 – [...] uhmmm passa um pouco da metade [...] é porque aqui (aponta aonde acaba o barbante) não é o meio e não é o fim.

Porém, não consegue desenvolver o raciocínio e responde: "- Ai eu não sei fazer essa [...] só sei isso [...] passou da metade e não chegou no fim", ou seja, apesar de não avançar em sua resolução, o aluno afirma que com o barbante é possível medir mais da metade da mesa, mas não ela completa.

Podemos observar dois esquemas identificados na literatura nesse esquema: esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER, SAWADA, 1983) e esquema relacional (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008).

Tendo em vista que o aluno inicia a sua resolução através da identificação e formação de metade, utilizando o referencial de metade como forma de resolução de uma situação, é possível afirmar a presença do esquema de metade na resolução do aluno A2. Na verdade, mais do que isso, o aluno utiliza um esquema relacional de segunda ordem, onde envolve uma relação entre parte-todo (metade da mesa em relação ao todo) e o barbante, e esta relação é uma comparação apoiando-se no "referencial metade", classificado por Bertoni (2008) como um esquema comparativo mais elaborado: comparando com a metade.

Spinillo e Bryant (1999) afirmam que o 'referencial de metade' pode favorecer o sucesso das crianças em tarefas de proporção, tanto em quantidades discretas como em quantidades contínuas, tendo em vista que esse referencial é utilizado pelas crianças como uma estratégia de comparação entre quantidades (equivalências). Percebemos a utilização deste esquema ao identificar que o aluno estabelece uma relação entre o barbante e o tamanho da mesa, que o leva a concluir que é possível medir metade da mesa, mas não ela completa.

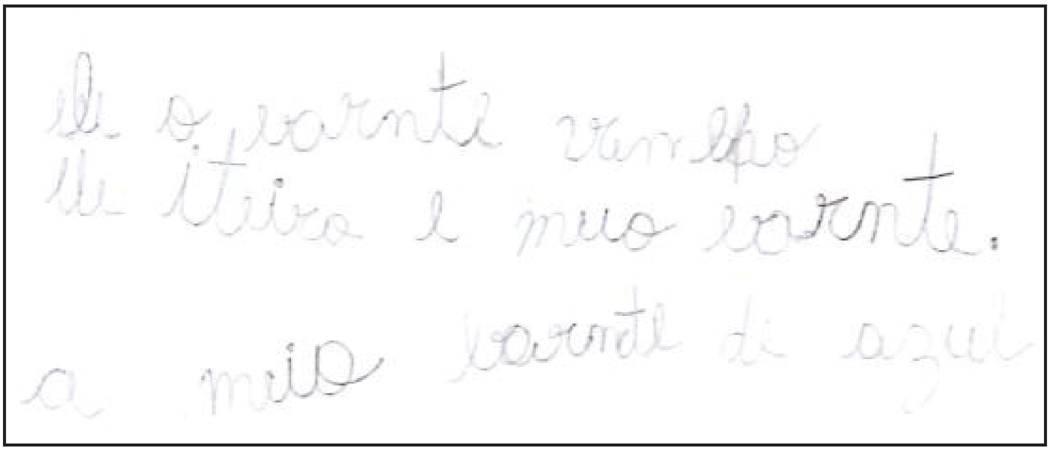
Nas resoluções dos alunos também foram identificados dois teoremas-em-ação tendo em vista que, foi possível perceber que a ação dos alunos ao resolver o problema foi guiada por uma proposição.

Teorema-em-ação 1: se uso um pedaço do barbante uso a metade do barbante

Esse teorema-em-ação esteve presente na resolução do aluno A3 e A4. Ao resolver o problema o aluno A3 verifica que para medir a mesa seria necessário um pedaço do barbante e mais um pedaço dele. Ao registrar sua resposta anota que usou o barbante inteiro e meio barbante (FIGURA 25). Ao ser questionado em relação a como chegou a essa resposta, o aluno afirma que "- Se ele usou ele inteiro e mais um pedaço [...] usou inteiro e metade" o que exemplifica um caso onde está presente o teorema-em-ação de que um pedaço do barbante é a metade dele. Poderíamos enunciar esse teorema-em-ação da seguinte forma: Se eu uso um pedaço do barbante então é metade do barbante".

A respeito da segunda parte da questão, o aluno afirma que para escrever essa quantidade de outra forma só é possível se tivesse uma régua para medir.

FIGURA 25 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 5A POR A3



Fonte: A3 – dados da pesquisa

De forma semelhante, o aluno A4 afirma que usou um barbante e meio para medir o comprimento da mesa. Justifica sua resposta dizendo que

> A4 - *Hummm porque falta bem pouquinho [...] e esse pouquinho que tá sobrando é meio [...] porque não dá o barbante inteiro [...] então é um pedaço dele [...] é meio [...] assim ó [...] (a aluna risca a mesa na parte onde o barbante alcança, e mede com o barbante a partir do risco) e agora cabe só metade [...] por olhar [...] porque é um pedaço, é metade".*

Sobre a segunda parte da pergunta, o aluno não soube como representar a quantidade de barbante de outra maneira.

Esse teorema-em-ação nos traz a ideia apresentada pelo esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER; SAWADA, 1983). Porém, é importante destacar que para os alunos A3 e A4 qualquer pedaço, resultante de uma parte de um todo, pode ser considerado como metade. Pothier e Sawada (1983) apontam para a necessidade de atenção quanto ao conhecimento de metade porque este pode ser compreendido ora como um favorecedor do conceito de número fracionário ora como um inibidor do mesmo. Pois apesar de ser uma estratégia importante para fazer a divisão de um todo em duas partes iguais (ou em partes que sejam múltiplas de dois), não favorece a divisão em partes diferentes (não-múltipla) de dois. Em casos como este, é preciso que a criança perceba que a divisão ao meio, embora a mais lógica para ela, nem sempre será a mais apropriada para iniciar qualquer divisão. Nesse caso, percebemos então que o esquema metade funcionou como inibidor do conceito de fração, pois esses alunos não evidenciaram a compreensão do conceito de metade.

Outro teorema-em-ação identificado na resolução do Problema 5a foi:

Teorema-em-ação 2: Se o barbante é menor não há solução.

O aluno A5 não conseguiu resolver a questão, para ele não havia como resolver o problema, ou, ele não sabia como resolver o problema devido ao fato do barbante ser menor que a mesa. Nas suas palavras: “- Não tem como [...] ele é menor que a mesa [...] é impossível, eu não sei fazer”.

Observamos indícios do esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008, SILVA, 1997), previsto na literatura. Silva (1997) afirma que como os números inteiros são, durante muito tempo, os únicos que têm o status de número para as crianças, elas buscam aplicar todo o conhecimento de que dispõem para as frações. No caso desse problema, para o aluno A5 não há a possibilidade de resolução do problema, devido ao fato de o tamanho da mesa não corresponder a uma medida ‘inteira’ do barbante.

5.5.2 PROBLEMA 5b

Lembramos que neste problema o comprimento do barbante (180 cm) correspondia à metade da mesa (90 cm) e que foi questionado ao aluno: Quanto do barbante azul você usou? Como você pode escrever quanto do barbante você usou?

O esperado seria que o aluno verificasse que a metade do barbante corresponderia à resposta esperada.

Observamos na resolução dos alunos no problema 5b dois esquemas e um teorema-em-ação que já havia sido identificado no item a.

a) Esquema 1: dobrar o barbante em duas partes.

Esse esquema representa a ideia de dobrar o barbante de modo que as duas partes geradas sejam iguais, e consequentemente resultem na metade do barbante. Esse esquema foi observado na resolução dos Alunos A1 e A2.

Primeiramente A1 esticou o barbante a partir de uma das extremidades da mesa e observou que o tamanho do barbante *“dava pra medir duas mesas”.* Ao ser questionado sobre quanto usaria do barbante para medir uma mesa apenas respondeu “a metade dele” e justifica sua resposta afirmando:

> A1 - *Porque parece quando eu dobro aqui... se é igual aqui é que [...] que é metade.*

Sobre se poderia escrever quanto do barbante usou, respondeu: “- Não, só assim! Metade *[...]* tipo se fosse 10 o tamanho do barbante, podia colocar 5. ”

De forma semelhante, esse esquema aparece também na resolução de A2. O aluno primeiro mede a mesa com o barbante e verifica que o barbante é maior que a mesa, porém afirma que “- Eu não sei quanto é esse tamanho ao certo [...] o número certo [...] eu não usei inteiro [...] eu usei isso aqui do barbante”. Ao ser questionado sobre quanto era “isso aqui do barbante” respondeu achar que é meio barbante. Para confirmar sua resposta o aluno solicitou o auxílio da pesquisadora para segurar o barbante

> A2 - D*á pra descobrir assim [...] me ajuda aqui [...] segura pra mim, é isso! ó teu dedo tá na metade*.

Justifica saber que a resposta do problema corresponde à metade do barbante, dizendo: “- Ué [...] porque tá igual [...] foi metade”. Portanto, para esse aluno, o fato de dobrar o barbante e as duas partes geradas serem iguais confirma a ideia de que foi utilizado meio barbante para medir a mesa.

Entre os esquemas identificados na literatura observamos a presença de dois deles: esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT 2009; BERTONI, 2008) e esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER; SAWADA, 1983).

O esquema de partição é observado devido ao fato dos alunos dividirem o barbante em duas partes, guiados pelo objetivo de obter duas partes iguais de barbante. Como os alunos apoiaram a resolução do problema tendo por referência a medida de metade do barbante, pudemos identificar o do esquema de metade.

Esse esquema possivelmente foi orientado por um teorema-em-ação enunciado da seguinte maneira:

- Teorema-em-ação 3: Se as duas partes são iguais representam metades.

Tanto o aluno A1, quanto o aluno A2 chegaram a conclusão que utilizariam metade do barbante pois ao dobrarem o barbante e obterem partes iguais, estão utilizando metade do barbante.

b) Esquema 2: Medir a mesa e dobrar o barbante

Observamos a presença desse esquema na resolução do Aluno A5. Para solucionar esse problema ele ficou em pé e esticou o barbante no comprimento da mesa, segurou o barbante na parte que correspondia ao comprimento da mesa e usou o pedaço que sobrou para medir novamente, com isso, concluiu que utilizou metade do barbante para medir a mesa, pois “- Ele dá duas vezes a mesma [...] o mesmo tamanho”. Com respeito a segunda pergunta, respondeu que não há outra forma de escrever a quantidade de barbante que usou.

Esse esquema se assemelha em alguns aspectos ao esquema anterior, exceto pelo fato de não estar presente o esquema de partição, apenas o esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER; SAWADA, 1983) identificado na literatura. Isso porque para resolver o problema o aluno A5 usa como referência meio barbante.

Esse esquema envolve saber que ao utilizar duas vezes a mesma medida, cada uma delas corresponde à metade, ou seja, ao utilizar a mesma quantidade de barbante para medir o comprimento da mesa, essa quantidade de barbante corresponde à metade dele. Tendo em vista que o pensamento norteador na solução do aluno é "- Se duas medidas são iguais então cada uma delas representa metade", identificamos aqui novamente o teorema-em-ação 1: Se as duas partes são iguais representam metades.

Assim como no problema 5a, novamente os alunos A3 e A4 resolveram o problema afirmando que utilizaram metade do barbante. Portanto, temos novamente aqui a presença do teorema-em-ação 1 (Se uso um pedaço do barbante uso metade do barbante).

Na resposta de A3 é possível identificar que o aluno pensa que se utilizar um pedaço do barbante, esse pedaço corresponde a metade do barbante. Tal teorema-em-ação fica explícito quando o aluno A3 reforça a justificativa de sua resposta afirmando que: "- Ainda sobra bastante [...] porque se eu usei só um pedaço é metade". Ainda comenta que é metade porquê:

> A3 - *Porque se uma parte é maior e a outra é um pedaço também é meio [...]. porque não usou inteiro*

Sobre a segunda parte da pergunta o aluno afirma que há outra forma de escrever a quantidade de barbante que usou "- Se eu medir o barbante com os centímetros [...] e for 100 [...] aí é 50".

O aluno A4 conclui que utilizou metade do barbante azul para medir o comprimento da mesa, para isso, segurou o barbante no alto posicionando os dedos na marcação até onde acabava a medição da mesa e disse:

> A4: Ó *eles são quase iguais [...] então é [...] deve ser metade, porque é um pedaço.*

Novamente aqui temos o esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER; SAWADA, 1983) presente nesse esquema. Porém aqui, o esquema não contribui para a resolução correta do problema. Pois, apesar de os alunos afirmarem que utilizaram metade do barbante (resposta correta) eles encontraram um pedaço do barbante, que não representava, necessariamente a metade dele. Como já comentamos anteriormente, Pothier e Sawada (1983) explicam que, desde muito cedo as crianças começam a conviver com expressões como “metade” e “meio”, e a partir disso muitas delas, começam a empregar o uso dessas expressões sem compreenderem o significado de metade como número. Temos aqui um exemplo de situação onde os alunos empregam o uso desses termos sem representar a quantidade.

No QUADRO 20 é possível observar uma relação dos teoremas-em-ação identificados nas resoluções do problema 5.

QUADRO 20 - RELAÇÃO DE TEOREMAS-EM-AÇÃO DO PROBLEMA 5

Teoremas-em-ação	
Se uso um pedaço do barbante uso metade do barbante	“Se eu usei uma parte do barbante, então usei metade dele”
Se as duas partes são iguais representam metade	“Se duas medidas são iguais então cada uma delas representa metade”
Se o barbante é menor não há solução	“Se o barbante é menos que a mesa então não há solução”

Fonte: Próprio autor

No QUADRO 21, encontramos uma relação entre os esquemas identificados na literatura e os esquemas que identificamos no problema 5.

QUADRO 21 - RELAÇÃO DE ESQUEMAS DO PROBLEMA 5

Esquemas	Esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008)	Esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER, SAWADA, 1983)	Esquema relacional (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008)	Esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT 2009; BERTONI, 2008)
Usar um barbante inteiro e outro menor que o inteiro	x			

Medir mais que a metade		**x**	**x**	
Dobrar o barbante em duas partes		**x**		**x**
Medir a mesa e dobrar o barbante		x		

Fonte: próprio autor

Observamos no problema 5, conforme QUADRO 21, que o esquema mais presente foi o esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER, SAWADA, 1983), em alguns casos utilizado de forma correta em outros causando o erro na resposta encontrada pelo aluno. O fato do problema envolver a fração com significado de número pode ser um motivo para a presença do esquema metade, tendo em vista que, de acordo com o currículo o conceito de metade já é para ser trabalho ao longo do 2º ano do ensino fundamental, portanto seria esse o primeiro contato com os alunos sobre elementos pertinentes ao conceito de fração. Outro aspecto a ser considerado, como já comentado anteriormente, é o fato de que no cotidiano as crianças já vivenciam situações onde usualmente se deparam com termos como “metade” e “meio” (POTHIER, SAWADA, 1983). Nunes e Bryant (1997) sugerem que o uso do “limite do meio” pode representar o primeiro passo no uso das crianças nas relações para quantificar frações.

O esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT 2009; BERTONI, 2008), que foi observado no esquema “dobrar o barbante em duas partes” esteve diretamente conectado ao esquema de metade, tendo em vista que para chegar a resposta o aluno teve que perceber a necessidade da divisão do barbante em duas partes para medir a mesa, reforçando mais uma vez o possível fato do conceito de metade já ter sido trabalho em anos anteriores.

O esquema relacional (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008) foi observado em um esquema (medir mais que a metade) onde a estratégia do aluno foi comparar aos dois tamanhos obtidas após a medição da mesa. Como já apontamos anteriormente, de acordo com Nunes e Bryant (1997) a metade desempenha um papel central no processo de quantificação pois oferece à criança uma oportunidade de utilizar relações que elas já dominam como “igual a”/ “maior que” em um novo domínio.

No problema 5 o esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008), embora apareça com menos frequência ainda evidência o cuidado necessário em relação à ideia da conservação do todo. Pois, neste caso o esquema de unidade aparece como um inibidor da construção do conceito de fração. Tendo em vista que a ideia construída pelo aluno é que para solucionar o problema ele necessita de um novo barbante cujo tamanho seja menor que o barbante que ele possui. Ou seja, o aluno desconhece a possibilidade de desconstrução do todo para se alcançar o tamanho desejado. Nunes e Bryant (2009) comentam que isso ocorre pois, como os números naturais são os únicos que esses alunos já conheceram, é comum que tentem transferir seus conhecimentos já adquiridos para a nova situação e que até o momento o que os alunos sabem é que não nenhum número natural entre os números naturais 1 e 2, por exemplo. E isto pode ser uma das causas da dificuldade encontra pelos alunos para compreender a representação de frações.

Apesar desse problema envolver o conceito de terça parte, não observamos a presença desse conceito em nenhuma das resoluções. Isso pode ter ocorrido por dois motivos: apesar de ser previsto a abordagem desse conteúdo ao final do 2º ano do Ensino Fundamental, não podemos afirmar que isso de fato ocorreu ou então, é possível que o conceito tenha sido abordado, porém os alunos não se apropriaram desse conceito. Já o conceito de metade, esteve presente, porém como afirmamos anteriormente, em alguns casos a utilização desse conceito foi através de um teorema-em-ação falso.

É importante destacar também que nenhuma das crianças respondeu de que forma poderiam representar (numericamente) a quantidade de barbante que utilizou, o que possivelmente pode apontar para um dos fatores mais desafiantes na compreensão dos números fracionários: sua representação.

5.5 PROBLEMA 6

Bia ganhou 15 balas. Ela dividiu de forma igual as suas balas em 3 pacotinhos. Depois disso ela deu 10 dessas balas para seu amigo João. Quantos pacotinhos Bia deu para João?

No problema 6 tivemos a intenção de analisar a compreensão dos alunos da fração como significado de operador multiplicativo. Nesse problema verificamos a presença de três esquemas:

a) Esquema 1: Soma de parcelas

Esse esquema consiste em realizar a soma das parcelas de cinco em cinco até obter o número 15, no caso, cinco mais cinco mais cinco. E usar o mesmo procedimento para chegar ao número 10, ou seja, cinco mais cinco, para obter a resposta do número de pacotes. Esse esquema apareceu na resolução do aluno A1.

O aluno A1 explicou que chegou à solução de 2 pacotes da seguinte forma:

> A1 - *Ó 15 [...] tem 5 mais 5 mais 5 que vai dar 15 [...] então ela deu 10 balas que era cinco mais cinco [...] dois pacotinhos [...] para ele e ficou cinco pra ela.*

Para confirmar sua resposta o aluno apenas registrou o número 2 na folha de resolução.

Diante dos esquemas encontrados na literatura sobre o conceito de fração, percebemos que não havia a presença de nenhum deles na resolução através do esquema soma de parcelas. Isso porque, como mencionamos anteriormente, esse problema traz a fração como significado de operador multiplicativo. Procuramos então dentre os esquemas de divisão qual esquema esteve presente na resolução do aluno A1.

Nunes, Campos, Magina e Bryant (2005) afirmam que a ação do aluno somar parcelas que são iguais é considerado um esquema de adição repetida. Segundo os autores isso ocorre, pois, o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo (pertinentes ao campo multiplicativo) mostra muitas semelhanças com o desenvolvimento do raciocínio aditivo. Além disso, é comum que em situações de multiplicação ou divisão as crianças recorram à esquemas de adição por sentirem segurança em sua operação.

b) Esquema 2: Distribuição um a um e soma de parcelas.

Esse esquema consiste na distribuição das balas, uma por uma, nos três pacotes até esgotar todas as balas. Em seguida, verificar o número de balas em cada pacote e realizar a soma das parcelas 5 mais 5, concluindo que para receber 10 balas João ganhará 2 pacotes. Esse esquema esteve presente na resolução dos alunos A2 e A3.

Na resolução de A2 (FIGURA 26) podemos observar que ele desenhou 3 pacotes. Na sequência, desenhou uma bala em cada pacote até esgotar as 15 balas, verificou a quantidade de balas em cada pacote, desenhou dez balas fora do pacote e respondeu que seriam 2 pacotinhos de bala, explicando:

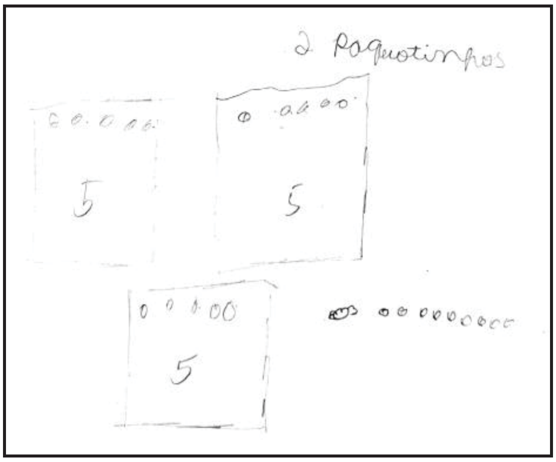
> A2 - *Eu coloquei as balas uma de cada vez nos pacotinhos ... então cada um ficou 5 [...]. e 5 mais 5 é 10 então foi 2*

Utilizou nesse segundo momento a soma de parcelas, onde 5 mais 5 é 10 para alcançar seu resultado.

Na resolução do aluno A3, também pudemos observar a presença desse esquema da seguinte forma: primeiro o aluno buscou encontrar quantas balas tinham em cada pacote. Para isso fez 15 risquinhos na folha de papel, e 3 retângulos logo embaixo. Em sequência ligou cada risquinho com um dos quadrados, repetiu isso até esgotar os risquinhos, depois contou quantos riscos ligou para cada retângulo e concluiu que João ganhou 2 pacotinhos. Justificou a sua resposta afirmando que

> A3 - *cada pacotinho tem 5 ... daí ela ficou com 5 balas que é um pacote ... e 5 mais 5 é 10.*

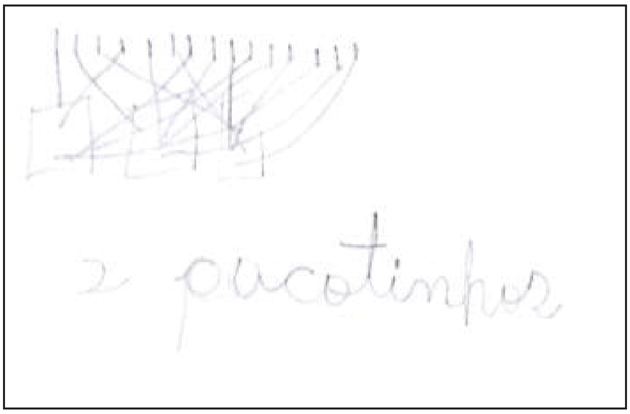
FIGURA 26 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 6 POR A2



FONTE: A2 – dados da pesquisa

Na FIGURA 27 podemos observar o registro feito pelo aluno A3.

FIGURA 27 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 6 POR A3



FONTE: A3 - dados da pesquisa

Podemos afirmar que nesse esquema encontramos o esquema identificado na literatura como esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005). Tendo em vista que há, na resolução dos dois alunos, uma clara correspondência entre cada bala e os pacotes. Em ambos os casos os alunos realizam o processo de distribuição até não haver mais balas, ou seja, até o esgotamento do todo.

c) Esquema 3: Divisão em partes iguais e subtração

Esse esquema representa o processo de divisão do total de balas em três partes iguais e na sequência subtração para obter o resultado. Por exemplo, o aluno A4 chegou a resposta que João ganharia 2 pacotinhos através do seguinte raciocínio:

> A4: *15 balas então ela pode [...] pode dividir em 3 [...] em um fica 5 [...] ela põe 5 [...] se ela der 10 pro joão, ela fica com 5 balas! Aí ela ficou com 1 [...] e deu 2 pacotinhos*

Ou seja, em um primeiro momento realizou a divisão de 15 por 3 e obteve o número 5. Na sequência fez a conta das 15 balas totais menos as 10 dadas ao João, descobrindo que Bia ficaria com 5 balas, equivalente à 1 pacote, dessa forma, os 2 pacotes restantes foram dados ao João.

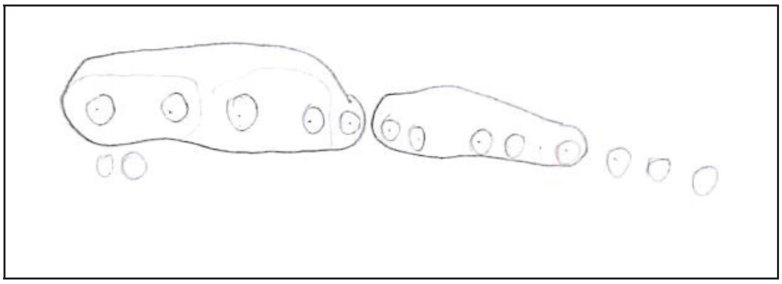
Esse mesmo esquema apareceu na solução do aluno A5:

> A5 - V*ou tentar dividir em forma igual [...] 15 por 3 é 5 né!? Então cada pacote fica com 5 [...] Ahh já sei, se ela deu 10, ahn 15 menos 10 é 5, então ela ficou com 5 que é 1 [...] é 2 pacotinhos.*

Após a afirmação A5 começa a circular as balas duas a duas, porém afirma que "- Ah não. [...] é cinco né", apaga e circula 5 balas e depois outras 5.

Podemos observar na FIGURA 28 a resolução do aluno A5.

FIGURA 28 - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 6 POR A5



FONTE: A5 – dados da pesquisa

No desenho da FIGURA 28 podemos ver as 15 balas desenhadas e dois grupos com 5 balas em cada contornadas, representando os pacotes de balas que foram dadas a João, totalizando 10 balas.

Nessa resolução também observamos o esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT 2009; BERTONI, 2008) pois os alunos resolvem o problema realizando uma divisão entre o total de balas e o número de pacotes disponíveis.

No QUADRO 22 podemos observar uma síntese de todos os esquemas, identificados na literatura, que observamos nas resoluções do problema 6.

QUADRO 22 - RELAÇÃO DE ESQUEMAS DO PROBLEMA 6

Esquemas	Esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005)	Esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT 2009; BERTONI, 2008)	Esquema de adição repetida (NUNES, CAMPOS, MAGINA; BRYANT, 2005)
Soma de parcelas			x
Distribuição um a um e soma de parcelas.	x		
Divisão em partes iguais e subtração		x	

FONTE: próprio autor

Em síntese, no problema 6 todos os alunos entrevistados responderam o problema corretamente. Ao longo da resolução do problema 3 esquemas identificados na literatura foram observados: Esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE; NUNES; BRYANT, 2005), esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE; NUNES; BRYANT 2009; BERTONI, 2008) e esquema de adição repetida (NUNES; CAMPOS; MAGINA; BRIANT, 2005), sendo que os dois primeiros, distribuição e partição, são esquemas propriamente do campo multiplicativo e o esquema de adição repetida pertence ao campo multiplicativo e aditivo. Isso se deve ao fato do problema 6, ao se apresentar como um problema que envolve a fração como operador multiplicativo envolve uma ação de divisão e então uma multiplicação.

É importante destacar, como um ponto importante a ser considerado na construção do conceito de fração, a importância de problemas com a fração em seus diferentes significados, tendo em vista, conforme Nunes e Bryant (1997) existe uma enorme discrepância entre a compreensão de divisão e números racionais fora da escola e seu conhecimento de representações ensinadas na escola. Nesse problema os alunos foram levados a resolver problemas usando seu conhecimento do cotidiano e representações simbólicas já adquiridas.

A partir da análise apresentada realizamos uma síntese em relação a todos os esquemas observados nos problemas e os esquemas identificados na literatura, como podemos observar no QUADRO 23.

QUADRO 23 – SÍNTESE DE ESQUEMAS E TEOREMAS-EM-AÇÃO IDENTIFICADOS NOS PROBLEMAS

Esquemas identificados na literatura	**Esquemas/teoremas-em-ação identificados na resolução dos problemas**	**Problema**
Esquema de distribuição (NUNES ; BRYANT, 2009; MAMEDE; NUNES; BRYANT, 2005)	Esquema 1: divisão das duas barras em três partes.	Problema 1
	Divisão de uma barra em duas partes.	
	Divisão das duas barras em duas partes.	
	Divisão do bolo em quatro pedaços com resto.	Problema 2
	Divisão e distribuição um-a-um com resto.	
	Distribuição um a um e soma de parcelas.	Problema 6
Esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER; SAWADA, 1983)	Divisão de uma barra em duas partes.	Problema 1
	Divisão de uma barra em duas partes.	
	Divisão na metade e novamente na metade	Problema 2
	Divisão na metade e de cada parte resultante novamente na metade.	
	Medir mais que a metade	Problema 5
	Usar um pedaço do barbante é o mesmo que metade dele	
	Medir a mesa e dobrar o barbante	
	Usar duas partes do barbante	
Esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005; NUNES; BRYANT, 2009; BERTONI, 2008)	Divisão das duas barras em três partes.	Problema 1
	Quanto maior o número de cortes, menor o tamanho das partes.	Problema 3
	Quanto mais pedaços, maior.	
	Quanto maior o número maior o pedaço.	

	Dobrar o barbante em duas partes	Problema 5
	Divisão em partes iguais e subtração	Problema 6
Esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008)	Quanto maior o número maior o pedaço.	Problema 3
	Dividir em duas partes iguais é metade	Problema 4
	Usar um barbante inteiro e outro menor que o inteiro	Problema 5
Esquema relacional (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008)	Quanto maior o número de cortes, menor o tamanho das partes.	Problema 3
	Quanto mais pedaços, maior.	
	Dividir em duas partes iguais é metade	Problema 4
	Diagonal é maior que metade	
	Medir mais que a metade	Problema 5
Esquema de equivalência (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008	Dividir em duas partes iguais é metade	Problema 4

FONTE: Próprio autor – dados da pesquisa

Dentre os esquemas identificados na literatura, observamos a presença dos seguintes esquemas: Esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005), esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER, SAWADA, 1983), esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005; NUNES; BRYANT, 2009; BERTONI, 2008), esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008), esquema relacional (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008) e esquema de equivalência (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008).

Conforme observamos no QUADRO 23, o esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005) foi observado em seis esquemas: três do problema 1, dois do problema 2 e um do problema 6.

O esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER, SAWADA, 1983) esteve presente em oito esquemas: dois esquemas relativos ao problema 1, dois do problema 2 e quatro no problema 5. Já o esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005; NUNES; BRYANT, 2009; BERTONI, 2008) esteve presente em 6 esquemas: um no problema 1, três esquemas do problema 3, um esquema do problema 5 e um relativo ao problema 6. O esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008) em 4 esquemas: um esquema do problema 3, um do problema 4 e 2 esquemas relativos ao problema 5. O esquema relacional (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008) foi identificado na em 5 esquemas: dois esquemas do problema 3, dois do problema 4 e um do problema 5. Por fim, o esquema de equivalência pode ser observado em um único esquema do problema 4.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A literatura tem apresentado diversos trabalhos que visam estudar a compreensão de crianças acerca do conceito de fração. Alguns desses estudos apontam que as crianças trazem muitos conhecimentos informais sobre fração ao chegar à escola (NUNES; BRYANT, 2009; NUNES 2008) e que estes conhecimentos podem ser utilizados como base para o ensino de frações (NUNES, BRYANT, 2009). Para contribuir com a compreensão do conhecimento dos alunos sobre frações, e com o intuito de responder ao problema de pesquisa: “- O que alunos de um 3º ano do Ensino Fundamental do município de Curitiba sabem sobre frações com vistas a contribuir para o ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental? ”, o objetivo geral desse estudo foi verificar conhecimentos sobre frações que crianças de um 3º ano do Ensino Fundamental revelam na resolução de problemas que envolvem conceitos de fração com vistas a contribuir para o ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para tal buscamos identificar esquemas que as crianças utilizaram na resolução de seis problemas que envolviam fração, verificar o que as crianças sabiam sobre conceitos de fração, previstos no currículo, para serem abordados nos anos anteriores de sua escolarização, ou seja, no primeiro e segundo ano do Ensino Fundamental (metade, terça parte) e identificar elementos a serem considerados no processo de ensino com vistas à contribuir para o ensino de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

De acordo com o currículo escolar os alunos de um 3º ano do Ensino Fundamental deveriam receber alguma instrução sobre o conceito de metade e terça parte, porém sem que haja um ensino escolar formal sobre os números fracionários. Por esse motivo, os problemas propostos aos alunos em nossa investigação não envolviam a representação e a fração propriamente, mas sim conceitos pertinentes aos números fracionários.

Através das resoluções apresentadas observamos a presença de esquemas que já haviam sido identificados na literatura, sendo eles: esquema de distribuição (NUNES; BRYANT, 2009; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005), esquema de metade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008; POTHIER, SAWADA, 1983), esquema de partição (CRUZ, 2003; MAMEDE, NUNES; BRYANT, 2005; NUNES; BRYANT, 2009; BERTONI, 2008), esquema de unidade (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008), esquema relacional (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008) e esquema de equivalência (CRUZ, 2003; BERTONI, 2008).

Observamos que dentre os esquemas identificados, o esquema de distribuição, o esquema de partição e o esquema de metade foram os mais utilizados pelos alunos entrevistados.

Confirmamos em nossa pesquisa, constatação feita por Nunes e Bryant (1997), que o esquema de distribuição é desenvolvido pelas crianças relativamente cedo e que a maior parte das crianças entre 6 e 8 anos são capazes de resolver problemas através desse esquema em questões que envolvem quantidades fracionárias. De fato, em todas as resoluções onde os alunos utilizaram esse esquema eles realizaram algumas inferências acerca da resolução do problema proposto e, em grande maioria, alcançaram algum êxito em sua solução.

Percebemos também que o esquema de partição, embora presente em grande parte das resoluções, predominou em casos onde o problema já previa o número de partes em que o todo deveria ser dividido. De fato, assim como observado por Nunes e Bryant (2009), para que a criança tenha sucesso em situações que envolvem o esquema de partição precisa prever o número exato de partes que deseja, para então realizar os cortes de modo que não obtenha resto, o que torna a utilização desse esquema muito mais complexa.

Outro ponto importante observado é relativo ao esquema de metade. Percebemos que apesar de utilizado por alguns alunos ao longo das resoluções, em muitos casos o esquema de metade não foi corretamente aplicado. Em alguns casos, percebemos que os alunos utilizam palavras como “metade” e “meio” sem de fato compreender o conceito envolvido. Pothier e Sawada (1983) já haviam apontado para essa questão.

O esquema de unidade, o esquema relacional e o esquema de equivalência foram observados em poucas resoluções ou, como no caso do esquema de unidade, foram utilizados de forma que promoveram o erro da questão ou se constituíram como um obstáculo na resolução do problema.

Como já mencionamos, é previsto pelo currículo que ao fim do 2º ano do ensino Fundamental o aluno possa resolver e elaborar problemas com o suporte de imagens e/ou materiais manipuláveis, envolvendo as noções de dobro, triplo, metade e terça parte em situações usuais, utilizando estratégias próprias de resolução como a decomposição numérica, desenhos, palavras (CURITIBA, 2016). Através das resoluções pudemos observar alguns aspectos a serem considerados a respeito desses conhecimentos. O primeiro deles diz respeito ao fato de que a compreensão e o conhecimento do conceito de metade estiveram presentes em alguns esquemas, tendo em vista que os alunos se apoiaram no “referencial metade” para resolver o problema, porém, como já mencionamos anteriormente, percebemos que alguns alunos utilizaram as palavras “meio” e “metade” sem compreender que isso implica na divisão de duas partes exatamente iguais. O segundo aspecto diz respeito ao fato de nenhuma resolução ter indicado a presença do conhecimento do conceito de terça parte. Esses dois aspectos nos levam a pensar que talvez esses alunos não tenham sido formalmente apresentados aos conceitos de metade e terça parte, conforme previsto no currículo, ou, se apresentados, não se apropriaram desses conceitos.

Os dados apontaram que muito do conhecimento apresentado pelos alunos em suas resoluções, derivam da compreensão e conhecimento que eles possuem sobre situações de divisão. Portanto, situações que promovam os esquemas de distribuição e partição são interessantes para introduzir o conceito de fração, tendo em vista que esses esquemas são os mais utilizados e de forma apropriada pelos alunos. Porém, destacamos a necessidade de também serem trabalhadas situações que possibilitem o uso de esquemas que ainda não são familiares aos alunos. Como, por exemplo, o esquema de unidade, o esquema de equivalência e o conceito de metade e terça parte.

Enfatizamos a necessidade de promover o desenvolvimento do esquema de unidade, com situações que promovam a compreensão da conservação do todo onde o aluno possa conhecer a possibilidade de divisão do todo em diversas partes sem que o “tamanho” do todo seja alterado. Esse esquema é de extrema importância, pois sem ele torna-se ainda mais difícil a construção do conceito de equivalência.

Além disso, os elementos aqui analisados nos levam a acreditar na necessidade de apresentar aos alunos os números fracionários abordando todos os seus significados: parte-todo, divisão, número, operador multiplicativo e medida.

É relevante também destacar que os alunos entrevistados não apresentaram nenhum conhecimento sobre a forma como poderiam representar quantidades que correspondem a frações, o que era esperado, uma vez que conhecimentos sobre representações fracionárias não estão previstos no currículo escolar para os primeiros anos do Ensino Fundamental. Talvez tenham tido algum contato com representações fracionárias no contexto extraescolar, mas estas não tenham sido muito presentes nos contextos em que as crianças se inserem nesta faixa etária.

Além disso, algumas resoluções nos levaram a perceber que os alunos tendem a transferir seus conhecimentos sobre números naturais ao resolver problemas que envolvem conceitos de fração e se não houver o devido cuidado podem considerar que a representação fracionária m/n é a representação de dois números naturais sobrepostos sem estabelecer uma relação entre eles e compreender a sua existência como número.

Por fim, ao que parece, de fato as crianças trazem consigo alguns conhecimentos acerca dos números fracionários. Por isso os elementos aqui abordados ao serem aproveitados podem favorecer situações de ensino e reflexão, onde devem ser dadas à criança oportunidades de falar, agir, julgar e refletir sobre diversas situações envolvendo frações.

Ao iniciar a apresentação dessa pesquisa, apontamos que uma das motivações que levou ao tema dessa investigação foi de cunho pessoal, no que diz respeito ao meu papel como docente. Posso afirmar que esse trabalho trouxe grande contribuição nesse sentido. Foi possível perceber a possibilidade de abordar o conceito de fração antes mesmo que esse assunto seja de fato o conteúdo a ser estudado na escola, oportunizando os alunos a refletirem sobre situações que envolvem os números fracionários. Além disso, a forma como acreditava ser correto ensinar frações, baseada apenas na ideia de fração como parte-todo, se constituía como um obstáculo para a compreensão da plenitude desse conceito, apontando para a necessidade de abordar os números fracionários em todos os seus significados. Outro aspecto que trouxe grande reflexão foi a necessidade de se trabalhar a conexão existente entre o conceito de divisão, multiplicação e frações, tendo em vista que os alunos se basearam nesse conhecimento para resolver os problemas.

É fato que essa pesquisa não contempla todas as questões que podemos ter sobre o ensino de frações e a compreensão dos alunos acerca desse conceito. Pois, ainda que apresente elementos que possibilitem um maior conhecimento a respeito da compreensão das crianças sobre os números fracionários, são necessários mais estudos que avancem nesse mesmo sentido. A pesquisa que realizamos contribui com identificação de teoremas em ação presentes nas resoluções dos problemas que dão indicativos do que devem ser trabalhados em sala de aula, uma vez eles dizem o que as crianças sabem sobre frações em um determinado momento. Entendemos que pesquisas futuras devam dedicar-se mais à identificação dos mesmos.

Além disso, é necessário que a partir dos elementos apontados nessa pesquisa juntamente com elementos já abordados na literatura, pensemos em possibilidades e situações a serem apresentadas ao introduzir os números fracionários na vida escolar dos alunos, de forma que promovam a compreensão do conceito de fração.

REFERÊNCIAS

BEHR, M; HAREL, G. Understanding the Multiplicative Structure. In: G. Booker, P. Cobb, & T.N. de Merldicutti (Eds.) **Proceedings of the PME**. XIV Conference Volume III. Mexico: Consejo Nacional de Ciencia y Technologia, Gobierno del Estado de Morelos, 1990. p. 27-34.

BERTONI, N. E. A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário. **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008. p. 209 a 237.

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em maio de 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em abril de 2018.

BRASIL. **Relatório SAEB** (ANEB e ANRESC) 2005-2015: panorama da década. – Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2018. Disponível em: http://download.inep.gov.br. Acesso em abril de 2018.

CAMPOS, T. M. M. Sobre ensino e aprendizagem de frações. **XIII CIAEM-IACME**, Recife, Brasil, 2011.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática.** V2.4, p.68-93, UFSC: 2007.

CAMPOS, T. M. M; MAGINA, S; NUNES, T. **O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino**. Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 125-136, 2006.

CANOVA, R. F. **Um estudo das situações parte-todo e quociente no ensino e aprendizagem do conceito de fração**. Universidade Bandeirante Anhanguera, SP, 2013.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2003.

CURITIBA, Prefeitura municipal de Curitiba. **Currículo do Ensino Fundamental 1º ao 9º ano**, volume III. 2016.

CRUZ, M. S. S. **Resolvendo adição de frações através de estimativas: um estudo exploratório**. Universidade Federal De Pernambuco, Recife, maio, 2003.

CRUZ, M. S. S. SPINILLO, A. G. **Adição de frações por estimativa a partir do referencial de metade e de inteiro**. Estudos de Psicologia, 2014. p. 241-249.

DELVAL, J. **Introdução à prática do Método Clínico: descobrindo o pensamento das crianças**. Porto Alegre: Artmed, 2002.

GOLDENBERG, M. A arte de pesquisar. Rio de Janeiro: Record, 1997. in **Métodos de pesquisa** / [organizado por] Tatiana Engel Gerhardt e Denise Tolfo Silveira; coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

KIEREN, T. E. Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. In: CARPENTER, T.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Eds.). **Rational Numbers: An Integration of Research**. Hillsdale. N. J.: Lawrence Erlbaum Associates. p. 49-84, 1976.

___________. Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle-grades**. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics. p. 53-92, 1988.

LIMA, J. M. F. Iniciação ao conceito de fração e o desenvolvimento da conservação de quantidade. In: CARRAHER, T. N. **Aprender pensando Contribuições da Psicologia Cognitiva para a educação**. Editora Vozes, Petrópolis, RJ, 1986.

MACK, N. K. **Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge**. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. New Orleans, LA, April, 1988.

MAGINA. S. A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente. **Anais do ERPM**-Unicamp – SP 2005

BEZERRA, F. B.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração: uma experiência de Ensino. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos,** v. 90, n. 225, maio/ago. 2009. p. 489-510.

MAGINA, S; CAMPOS, T. As estratégias dos alunos na resolução de problemas aditivos: um estudo diagnóstico. **Educ. Mat. Pesqui.,** São Paulo, v. 6, n. 1, 2004. p. 53-71

MAGINA, S; CAMPOS, T. A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental. **Boletim de Educação matemática**, vol. 21, núm. 31. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil, 2008. p. 23-40.

MAGINA, S. M. P; SANTOS, A; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciênc. educ. Bauru**.vol.20, n.2. ISSN 1516-7313. 2012. p. 517-533.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A. dos; MERLINI, V. L. A Estrutura Multiplicativa à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão com foco na aprendizagem. In: CASTRO FILHO, J. A. de. et al. **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais.** 1. ed. Curitiba, PR: CRV, 2016. p. 65-82.

MAMEDE, E; NUNES, T; BRYANT, P. The equivalence and ordering of fractions in partwhole and quotient situations. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). **Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Vol. 3. Melbourne: PME. 2005. p. 281-288.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

MOREIRA, A. M. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o Ensino de ciências e a pesquisa nesta área Investigações em Ensino de Ciências**. V7(1), 2002. p. 7-29.

NUNES, T. **Understanding rational numbers**. University of Oxford. 2008. p. 23-52.

NUNES, T.; BRYANT, P; trad. COSTA, S. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes médicas. p. 191-217. 1997

NUNES, T, BRYANT, P. U. e HURRY, J. **The effect of situations on children's understanding of fractions.** Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, June. 2003.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities**. Key Understanding in Mathematics learning. Departamento de educação da Universidade de Oxford. 2009.

NUNES, T; et al. **Educação Matemática 1: números e operações numéricas**. São Paulo: Cortez, 2005.

PAIS, L. C. **DIdática da matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte. Autêntica, 2001.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Curitiba: SEED, 2016.

PORTHIER, Y; SAWADA, D. (1983). **Partitioning: the emergence of rational number ideas in young children**. Journal for Research in Mathematics Education, 14 (5), 307-317.

QUEIROZ, K. J. M. e LIMA, V. A. A. **Método Clínico piagetiano nos estudos sobre Psicologia Moral: o uso de dilemas**. V. 3 N. 5 – Jan-Jul/2010

SILVA, P. E. & SODRÉ, U. Projeto MatWeb: Matemática pela Internet – Frações. Disponível em: http://www.interaula.com/matweb/fundam/104/mod104.htm. Acesso em: 03 de março de 2018. 2001.

SÃO PAULO, Secretaria dos Negócios da Educação. Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar. São Paulo. 2000.

SILVA, M. J. F. (1997). **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. Dissertação de Mestrado não-publicada, Mestrado em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, SP.

SÍNTRIA L. L. e SPINILLO A. G Os princípios invariantes da divisão como foco de um estudo de intervenção com crianças. **V seminário internacional de pesquisa em educação matemática**. Petrópolis, Rio de janeiro, Brasil, 2012.

SÍNTRIA L. L; SPINILLO A. G. **As Relações Entre o Desempenho em Problemas de Divisão e as Concepções de Crianças Sobre a Divisão**: Universidade Federal de Pernambuco, Psicologia: Teoria e Pesquisa, Vol. 18 n. 3, 2002. p. 237-246.

SPINILLO, A. G; BRYANT, P. **Children´s proportional judgments: the importance of “half”.** Child Development, 62,1999. P. 427-440.

SPINILLO, A. G.; LAUTERT, S. L. O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. In: MEIRA L.; SPINILLO A. G. (Orgs.). **Psicologia cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem**. Recife: Editora da UFPE, 2006. p. 46-80.

VASCONCELOS, I. C. P. MAMEDE, P. B. C. DORNELES, B. V. **The comprehension of numerical relationships in the learning of fractions: a comparative study with Brazilian and Portuguese children**. Rev. bras. Estud. pedagog., Brasília, v. 98, n. 249, 2017. p. 251-269.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? In Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany, N.Y.: State University of New York Press. 1994. p. 41-59.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão,1995.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: **Didáctica das Matemáticas**, Brun, J. Instituto Piaget, Lisboa, p.155-189, 1996a.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, Nº 4: 9-19, 1996b.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. In: Bryant, P; Nunes, T. **Learning and teachind Mathematics**. Na international perspective. P. 5-29, 1997.

VERGNAUD, G. **A criança a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar**. Tradução Maria Lucia Faria Moro. Editora UFPR, Curitiba, 2014.

VERGNAUD, G. O que aprender? In: Bittar, M & Muniz, A. C (Orgs). **A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais** (1ª edição). Curitiba: Editora CVR, 2009.

VERGNAUD, G. Entrevista. A matemática além dos números. **Pátio Revista Pedagógica**, 13 ed. Junho/2012. Disponível em: http://loja.grupoa.com.br/revista-patio/artigo/7149/a-matematica-alem-dos-numeros.aspx Acesso em: 28 de janeiro de 2018.

VERGNAUD, G. Entrevista. Fala, mestre! Entrevista – Gerard Vergnaud. **Revista Nova Escola**, Edição 215 – set. 2008. Disponível em: http://antigo.revistaescola.abril.com.br/edicoes/0215/aberto/mt_298583.html. Acesso em: 16 de fevereiro de 2018.