UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JULIANO FOGAÇA DE LIMA

TRIÂNGULOS MULTINOMIAIS

CURITIBA

2019

JULIANO FOGAÇA DE LIMA

TRIÂNGULOS MULTINOMIAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho.

CURITIBA

2019

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

L732t Lima, Juliano Fogaça de
Triângulos multinomiais [recurso eletrônico] / Juliano Fogaça de Lima. – Curitiba, 2019.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT, 2019.

Orientador: Alexandre Luis Trovon de Carvalho .

1. Pascal, Triângulo de. 2.Triângulos. 3. Equações. 4. Expansão Multinomial. I. Universidade Federal do Paraná. II. Carvalho, Alexandre Luis Trovon de. III. Título.

CDD: 516.154

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **JULIANO FOGAÇA DE LIMA** intitulada: **Triângulos Multinomiais**, sob orientação do Prof. Dr. ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 13 de Dezembro de 2019.

ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

JOAO LUIS GONCALVES
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

ROBERTO PETTRES
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por ter me dado capacidade, disposição e força para superar as dificuldades ao longo do percurso.

A minha família pela fraternidade, apoio e carinho incondicionais dedicados e compartilhados durante toda minha história.

A Universidade Federal do Paraná e seu corpo docente, que oportunizaram minha formação inicial e a conclusão deste mestrado.

Ao meu orientador pela atenção, paciência, palavras de motivação e as suas brilhantes ideias nas muitas horas de orientação que foram fundamentais na elaboração desse trabalho.

A minha amada esposa que segurou forte em minhas mãos nos momentos mais difíceis me encorajando a vencer este desafio, minha eterna gratidão.

RESUMO

Utilizando equações a coeficientes inteiros, investigamos os coeficientes aritméticos da expansão multinomial de $(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m)^n$. Problemas de contagem, que surgiram no curso dessa investigação, exigiram uma análise mais cuidadosas de soluções combinadas de diferentes equações a coeficientes inteiros. Isso nos permitiu obter uma descrição geral de regularidades numéricas de tais coeficiente que, em certa medida, podem ser encarados como uma generalização do triângulo aritmético de Pascal. Por outro lado, ainda que o teorema multinomial se preste a uma generalização do teorema binomial clássico, a estrutura aritmética de seus coeficientes não permite observar as regularidades que aqui apresentamos.

Palavras-chave: Triângulo de Pascal, Equação com coeficientes inteiros, Expansão Multinomial

ABSTRACT

By means of equations with integer coefficients, we investigate the arithmetic coefficients of the multinomial expansion of $(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m)^n$. Counting problems that arose in the course of this investigation required a more careful analysis of combined solutions of different equations with integer coefficients. This allowed us to obtain a general description of numerical regularities of such coefficients that to some extent can be viewed as a generalization of Pascal's arithmetic triangle. On the other hand, although the multinomial theorem bring us a generalization of the classical binomial theorem, the arithmetic structure of its coefficients does not allow us to observe the regularities presented here.

Keywords: Pascals' Triangle, Equations with Integer Coefficients, Multinomial Expansion

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Inicialmente apresentamos ferramentas básicas da análise combinatória, com intuito de formalizar técnicas de contagem ou enumeração, como arranjo, combinação ($A_{n,p}$, $C_{n,p}$) teoremas de equações com coeficientes inteiros. A partir dessas ferramentas obtemos o Teorema Binomial:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

Associado a esse resultado apresentamos o triângulo aritmético de Pascal e o fato histórico de sua descoberta. Visualizamos algumas relações entre os coeficientes binomiais, como a soma da n-ésima linha e as de Stiffel, com o intuito de estabelecer um parâmetro de comparação para o que virá a seguir.

Modelamos alguns problemas de contagem objetivando resolvê-los com as funções geradoras, sendo que o raciocínio desenvolvido nos leva à investigação dos coeficientes para outras expansões polinomiais, tais como

$$(x+x^2+x^3+\cdots+x^n)^m$$

Na tentativa de calculá-los utilizamos a combinatória, exemplificando para o desenvolvimento de $(x+x^2+\cdots+x^6)^3$, nesta busca compreendemos que se tratava de um caso particular de $(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m)^n$, em que seus coeficientes são soluções com restrições de equações do tipo $y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n=m$.

Uma vez obtida a maneira de limitar as soluções, ou seja, encontrar os coeficientes na forma binomial, generalizamos o desenvolvimento de $(1+x+x^2+\cdots+x^m)^n$ para um inteiro positivo m qualquer, encontrando um coeficiente generalizado:

$$A_k = \binom{k+n-1}{n-1} - n \cdot \binom{k-m+n-1}{n-1}$$

Para cada valor de m no desenvolvimento anterior arranjamos os coeficientes em tabela, verificando uma relação que produz triângulos aritméticos Δ_2, Δ_3, ... , Δ_k que generalizam o triangulo de Pascal.

Mostramos que nesses novos triângulos ainda valem relações generalizadas envolvendo a soma dos coeficientes da linhas.

Por fim, destacamos o teorema multinomial usando a fórmula de Leibnz-Bernoulli:

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k)^n = \sum \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\cdots\alpha_k!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}\cdots x_k^{\alpha_k}$$

Observe que não é possível inferir diretamente propriedades aritméticas dos coeficientes desta expansão. Nossa abordagem por uma outra via mostra sim, que há relações aritméticas generalizadas dos coeficientes, dando origem a uma infinidade de triângulos aritméticos semelhantes ao triângulo de Pascal

2 COMBINATÓRIA

Este capítulo apresentará ferramentas básicas da análise combinatória a fim de formalizar as técnicas de contagem ou enumeração.

Definição 1. Chamamos o número de agrupamentos que podem ser formados com n elementos, $n \in N$ e $n \geq 1$, escolhendo p elementos $p \in N$ e $1 \leq p \leq n$, onde diferem entre si pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo, de arranjo de n elementos escolhendo p, denotado por $A_{n,p}$.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{n-p!}$$

Exemplo. Num campeonato de 7 times, quantas opções distintas existem para os três primeiros colocados? Devemos contar quantos grupos de 3 times podemos formar, onde a ordem de seus elementos é importante pois difere a posição de cada time.

Logo podemos usar arranjo de 7 elementos escolhendo 3.

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Ou seja, existem 210 maneiras para os três primeiros colocados

Definição 2. Chamamos o número de agrupamentos que podem ser formados com n elementos $n \in N$ e $n \geq 1$, escolhendo p elementos $p \in N$ e $1 \leq p \leq n$, de combinação de n elementos escolhidos p a p, e denotado por $C_{n,p}$ ou $\binom{n}{p}$.

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{n!(n-p)!}$$

Observação. Aqui importa somente quem participa do grupo, não importa a ordem dos elementos escolhidos.

Exemplo. Um pelotão especial consiste em 3 oficiais, 6 sargentos e 60 soldados. De quantas maneiras pode-se formar um grupo para uma missão consistindo em 1 oficial, 2 sargentos e 20 soldados?

Para escolher 1 oficial $C_{3,1}$

Para escolher 2 sargentos $C_{6,2}$

Para escolher 20 soldados $C_{60,20}$

Tomar 3 decisões sucessivamente: escolher 1 oficial, 2 sargentos e 20 soldados, pelo princípio multiplicativo, temos:

$$C_{3,1} \cdot C_{6,2} \cdot C_{60,20}$$

Vejamos agora a situação onde precisamos contar o número de soluções naturais diferentes de zero de :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Escrevendo o número 10 como:

1_1_1_1_1_1_1_1_1_1

Cada traço na horizontal representa os possíveis lugares para o sinal de +, sendo necessário por 3 sinais de + .

Uma solução seria:

1_1 + 1_1_1 + 1_1 + 1_1_1 Que representa $2+3+2+3=10$

1 + 1_1 + 1_1_1_1_1 + 1_1 Que representa $1+2+5+2=10$

Ou seja todas as demais soluções podem ser calculadas usando combinação de 9 espaços vazios para 3 sinais de +, logo $C_{9,3}$.

Analogamente podemos indicar

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_6 = 15$$

Como

1_1_1_1_1_1_1_1_1_1_1_1_1_1_1

Temos 14 espaços vazios para 5 sinais de +, logo $C_{14,5}$.

Generalizando para m um inteiro positivo o número de soluções naturais diferentes de zero de:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m$$

Consideramos m traços na vertical e $(m-1)$ espaços entre eles destinados para $(r-1)$ sinais de +, logo teríamos $C_{m-1,r-1}$.

Agora se consideramos que o número zero faça parte das soluções da equação, temos que contar mais soluções que antes não apareciam.Vejamos agora outra situação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Chamando $y_1 = x_1 + 1, \cdots, y_4 = x_4 + 1$, temos:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10 + 4 = 14$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 14$$

Resolver essa nova equação cujas soluções são Inteiras positivas e diferentes de zero é o mesmo que resolver a equação inicial que admite zero como solução.

O número de soluções dessa equação será $C_{13,3}$.

Ao encontrarmos soluções dessa equação, entre elas teremos algumas com $y_i = 1$, neste caso $x_i = 0$.

Desta forma, estamos contando todas as soluções naturais para:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Generalizando para m um inteiro positivo, o número de soluções inteiras positivas da equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m$$

Lembrando que agora consideramos o número zero podendo fazer parte da solução.

Chamando $y_1 = x_1 + 1, y_2 = x_2 + 1, \cdots, y_r = x_r + 1$ temos:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_r = x_1 + x_2 + \cdots + x_r + r = m + r$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_r = m + r$$

Resolver essa nova equação cujas soluções são Inteiras positivas e diferentes de zero é o mesmo que resolver a equação inicial que admite zero como solução.

Logo o número soluções dessa equação para y_i com $i = 1, 2, \cdots, r$ é dado por $C_{m+r-1,r-1}$.

Para as soluções dessa equação onde tivermos $y_i = 1$ implica que o termo $x_i = 0$.

Maiores informações e exemplos tratando desse tipo de equações, podem ser encontradas em Morgado e Carvalho (2014).

2.1 LEMA DE KAPLANSKI

Exemplo. De quantas formas pode-se escolher 3 elementos entre $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ não podendo haver números consecutivos?

Para resolver o problema vamos associar cada possível escolha a uma sequência. Da seguinte forma:

O subconjunto $(1,4,6)$ será associado à sequência $+--+-+-$

O subconjunto $(1,3,7)$ será associado à sequência $+-+---+$

Onde a sequência é dado por:

Se n pertence ao subconjunto escolhido, então o n-ésimo termo dessa sequência é um sinal $+$.

Se n não pertence ao subconjunto escolhido, então o n-ésimo termo dessa sequência é um sinal $-$.

Assim, cada subconjunto possível está associado à uma sequência de 7 sinais, sendo 3 de + e 4 de $-$ onde entre dois sinais de + há pelo menos 1 sinal de $-$.

Esta associação é uma bijeção pois cada sequência é associada a um único subconjunto e, cada subconjunto, a uma única sequência. Logo, contar o número de subconjuntos possíveis é o mesmo que contar o número de sequências possíveis.

Dessa forma o problema passou a ser: Quantas sequências contendo 3 sinais + e 4 sinais $-$ existem se não há 2 sinais + consecutivos?

Primeiramente posicionando os sinais de + Temos: + + +

Chame de x_1 o número de sinais de $-$ que vem antes do 1º sinal de +

Chame de x_2 o número de sinais de $-$ que vem entre o 1º e o 2º sinal de +

Chame de x_3 o número de sinais de $-$ que vem entre o 2º e o 3º sinal de +

Chame de x_4 o número de sinais de $-$ que vem depois do 3º sinal de +

O problema, então, passa a ser: Quantas são as soluções:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

com $x_1, x_4 \geq 0$ e $x_2, x_3 \geq 1$ (não pode haver sinais de + consecutivos).

Sendo $y_2 = x_2 + 1$ e $y_3 = x_3 + 1$.

Temos: $x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 6$

O número de soluções é, então $C_{5,3}$.

Lema 3. *O número de maneiras de escolher subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos não havendo elementos consecutivos é dado por*

$$C_{n+1-k,k}$$

Demonstração. Associamos cada escolha a uma sequência de n sinais sendo k sinais + e $(n-k)$ sinais $-$ de forma que:

Se n pertence ao subconjunto escolhido, então o n-ésimo termo dessa sequência é um sinal +

Se n não pertence ao subconjunto escolhido, então o n-ésimo termo dessa sequência é um sinal $-$

Se não podemos ter 2 números consecutivos, então não podemos ter 2 sinais + consecutivos.

Então basta contar o número de sequências possíveis.

Para isso colocamos os n sinais "+"em uma fila.

Onde x_1 é o número de sinais de $-$ antes do 1º sinal +

x_2 é o número de sinais de $-$ que vem entre o 1º e o 2º sinal +

Chamando de x_k o número de sinais de $-$ que vem entre o $(n-1)$ -ésimo e o n-ésimo sinal +

Chamando de x_{k+1} o número de sinais de $-$, que vem depois do n-ésimo sinal de +

Logo, temos que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n - k$$

Onde $x_2, x_3, \cdots, x_k \geq 1$ e $x_1, x_{k+1} \geq 0$

Resolvemos da mesma forma que antes.

$$x_2 = y_2 + 1, x_3 = y_3 + 1, \cdots, x_k = y_k + 1$$

Onde $y_2, y_3, \cdots, y_k \geq 0$

Assim

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = n - k$$

$$x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + \cdots + y_k + 1 + x_{k+1} = n - k$$

Logo

$$x_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k + x_{k+1} + k - 1 = n - k$$

$$x_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k + x_{k+1} = n + 1 - 2k$$

Cuja a solução é dada por:

$$C_{n+1-k,k} \quad \square$$

Explanações a respeito do lema de Kaplansky podem sem encontrados no trabalho de Trovão (2015)

3 A FÓRMULA BIONOMIAL E OS COEFICIENTES NUMÉRICOS

Dado um binômio do tipo $(a+b)$, estamos interessados aqui no cálculo dos coeficientes das expansões de suas potências. Consideramos inicialmente um exemplo:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Para formar um termo devemos escolher uma letra em cada um dos 4 binômios. Como temos duas opções de escolha para cada binômio, logo temos 2^4 termos formados, sendo que entre eles possuem termos semelhantes.

Por exemplo se tomarmos a letra a nos 3 primeiros binômios e b no último formando assim o termo a^3b, que irá aparecer toda vez que a letra a for escolhida 3 vezes entre os 4 binômios, ou seja $C_{4,3}$, que é o mesmo que dizer que o termo a^3b irá aparecer toda vez que letra b for escolhida uma única vez entre os 4 binômios, ou seja $C_{4,1}$. Assim temos que $C_{4,3} = C_{4,1}$ chamados de coeficientes binomiais complementares.

Como todo termo consiste do produto de 4 letras o termo geral é da forma $a^{4-p}b^p$ onde cada termo desse aparece multiplicado por $C_{4,4-p} = C_{4,p}$. Vamos fazer uso da segunda forma. Temos:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$$

No caso geral $(a+b)^n$, devemos escolher uma letra em cada um dos n binômios. Sendo 2^n termos, porem semelhantes. Cada termo será da forma a^qb^p onde $q+p=n$, assim temos $a^qb^p = a^{n-p}b^p$ sendo que esse termo irá aparecer em p escolhas da letra b , esta escolha é feita de $C_{n,p}$ modos.

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} \cdot b^p$$

Onde um termo geral é dado por

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

Chamamos de *coeficientes binomiais* aos coeficientes numéricos dos termos na expansão de $(a+b)^n$. Eles podem ser organizados na forma de um triângulo. A seguir, como exemplo, temos esse desenvolvimento para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4.

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^4$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^3 + 4ab^3 + 1b^4$

Chamamos de Triângulo de Pascal ao triângulo formado pelos coeficientes das expansões acima, isto é:

(Linha 0) 1

(Linha 1) 1 1

(Linha 2) 1 2 1

(Linha 3) 1 3 3 1

(Linha 4) 1 4 6 4 1

(Linha 5) 1 5 10 10 5 1

(Linha 6) 1 6 15 20 15 6 1

$\vdots \qquad \vdots$

A numeração da linha é dada pelo expoente da potência da qual os coeficientes foram retirados.

Segundo Eves (2008), Blaise Pascal não foi o primeiro explorar o triângulo aritmético. Vários séculos antes esse arranjo numérico já aparece nos trabalhos Yang Hui, com livros datados de 1261 e 1275. É a ele que se deve a mais antiga apresentação preservada do chamado Triângulo aritmético de Pascal. Outra manifestação do triângulo aparece em um livro posteriormente escrito por Chu Shi-Kié em 1303, afirmado que o triângulo já era conhecido em seu tempo.

Pascal foi por longo tempo considerado o descobridor do triângulo no mundo ocidental e devido ao desenvolvimento e aplicações que fez de muitas das propriedades, este tornou-se conhecido como Triângulo de Pascal.

Vejamos algumas relações entre os coeficientes binomiais. Quando há uma igualdade entre coeficientes, chamado de coeficientes complementares, tem-se:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$$

$$(a+b)^n = (b+a)^n$$

$$(b+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{n-p} b^p a^{n-p}$$

Concluímos que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. Isto garante que na expansão de $(a+b)^n$ os termos equidistantes dos extremos são iguais.

Exemplo.

$$\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$$

$$\binom{12}{5} = \binom{12}{7}$$

$$\binom{100}{99} = \binom{100}{1}$$

A soma de dois coeficientes consecutivos do Triângulo de Pascal, chamada de Relação de Stifel:

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Esta propriedade pode ser obtida, considerando a expressão:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{(n-p)!p!} + \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!} \\
&= \frac{n!(p+1)}{(n-p)!(p+1)!} + \frac{n!(n-p)}{(n-p)!(p+1)!} \\
&= \frac{n!(p+1+n-p)}{(n-p)!(p+1)!} \\
&= \frac{n!(1+n)}{(n-p)!(p+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-(p+1))!(p+1)!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

Uma outra propriedade é quando somamos os elementos da n-ésima linha do triângulo de Pascal (soma dos elementos da linha).

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Para verificar isso, basta considerar $a = b = 1$ na expansão binomial de $(a+b)^n$:

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^{n-p}.1^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$

Também poderíamos demonstrar calculando o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos.

4 COEFICIENTES E CONTAGEM

A princípio nosso trabalho tinha como objetivo estudar problemas que seriam resolvidos por funções geradoras. Durante a solução de alguns problemas apresentado neste capítulo, a curiosidade nos levou a um questionamento de como descobrir os coeficientes no desenvolvimento de $(x+x^2+\ldots+x^6)^3$, então nosso objetivo tomou outros rumos, procurando ferramentas que nos levassem ao processo de contagem desses coeficientes. Vejamos alguns desses problemas:

Suponhamos que num parque de diversões existam 4 tipos de bilhetes: a, b, c e d, e uma pessoa deseje comprar dois deles. De quantas modos ela poderá fazer essa escolha?

Ela terá 4 opções para primeira escolha e 4 opções para a segunda escolha. Então, usando o principio multiplicativo teríamos as $4 \cdot 4 = 16$ opções:

$$aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd$$

Porém dentre essas, há algumas idênticas, por exemplo: $ab = ba$, $ac = ca$, $ad = da$, $bc = cb$, $bd = db$, $cd = dc$, totalizando 6. Logo a solução do problema seria $16 - 6 = 10$ possibilidades.

Uma outra maneira de se pensar consiste em escolher duas das quatro possibilidades. Fazendo isso, obtemos $C_{4,2} = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$ escolhas diferentes. Além disso, observe que temos as repetições aa,bb, cc, dd, produzindo outras 4 possibilidades adicionais. Desse modo, haverá 6+4=10 possibilidades de se escolher dois bilhetes dentre quatro possibilidades.

Considere agora a situação de escolha de três bilhetes dentre as quatro possibilidades. Tentando resolvê-lo usando o princípio multiplicativo, obtemos $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ possibilidades. Entretanto, há aqui uma dificuldade em contar os casos idênticos.

Podemos iniciar observando que temos $C_{4,3} = \dfrac{4!}{1!3!} = 4$ escolhas diferentes. Considerando os casos em que há repetições, por exemplo, escolhendo dois bilhetes a, restam três possibilidades para a escolha do próximo: aab, aac, aad. Já com 3 bilhetes a só resta a possibilidade aaa. O mesmo ocorre para os bilhetes b, c e d. Para cada um dos quatro bilhetes temos quatro possibilidades, totalizando $4 \cdot 4 = 16$ possibilidades. Desse modo, os casos sem repetição somados aos com repetições totalizam $4+16 = 20$ possibilidades.

Uma maneira de formalizar esse raciocínio é considerar o polinômio

$$(a+b+c+d)^3$$

Imaginando que a, b, c e d sejam variáveis. Coloquemos então

x_1 = número de bilhetes a

x_2 = Número de bilhetes b

x_3 = Número de bilhetes c

x_4 = Número de bilhetes d

A quantidade de escolhas de três bilhetes dentre as quatro possibilidades, corresponderá ao número de termos da forma $a^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}d^{x_4}$, em que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3.$$

O total dessas escolhas será então:

$$\binom{3+4-1}{3} = 20$$

De modo semelhante, podemos estender esse raciocínio, escolhendo mais bilhetes, por exemplo 5. Isso corresponderá ao número de soluções inteiras não negativas de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$

que é $\binom{5+4-1}{3} = 56$.

Generalizando, o número de maneiras de selecionar m objetos dentre r objetos distintos, onde cada objeto pode ser escolhido de até m vezes, corresponderá ao número de soluções não negativas de

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = m$$

que é

$$\binom{m+r-1}{r-1}$$

Considere agora a situação em que temos 3 urnas, cada uma contém 3 saquinhos com dinheiro, da seguinte maneira:

A primeira urna temos saquinhos com 2 reais, 3 reais e 4 reais.

A segunda urna é idêntica a primeira urna.

A terceira urna temos saquinhos com 5 reais, 6 reais e 7 reais.

Qual a probabilidade de se tirar um saquinho de cada urna somando 12 reais?

Observação. Podemos pensar na probabilidade como o número de possibilidades favoráveis da ocorrência de um evento, dividida pelo número de possibilidades de todo espaço amostral.

Dê quantos modos podemos retirar 12 reais? Para responder a essa pergunta vamos reescrever o problema da seguinte forma:

Quantas são as soluções de $x_1 + x_2 + x_3 = 12$ onde:

x_1 representa o valor retirado da urna 1, logo $x_1 = 2, 3, 4$

x_2 representa o valor retirado da urna 2, logo $x_1 = 2, 3, 4$

x_3 representa o valor retirado da urna 3, logo $x_1 = 5, 6, 7$

Fazemos as associações para x_1 do polinômio $P_1(x) = x^2 + x^3 + x^4$

Para x_2 do polinômio $P_2(x) = x^2 + x^3 + x^4$

Para x_1 do polinômio $P_3(x) = x^5 + x^6 + x^7$

Onde

$$\begin{aligned} P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot P_3(x) &= (x^2 + x^3 + x^4)(x^2 + x^3 + x^4)(x^5 + x^6 + x^7) \\ &= 1x^9 + 3x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 6x^{13} + 3x^{14} + 1x^{15} \end{aligned}$$

Além disso, os coeficientes do polinômio nos dão o número de soluções de

$$x_1 + x_2 + x_3 = m$$

Onde m varia entre $9, 10, \ldots, 15$, com x_1, x_2, x_3 restritos.

Ou seja, $1x^9$ representa que há 1 possibilidade de que o valor retirado das três urnas seja de 9 reais. De mesmo modo o termo $3x^{10}$ representa que há 3 possibilidades de que o valor retirado das três urnas seja de 10 reais e assim sucessivamente.

O número de possibilidades no evento desejado é justamente o coeficiente 7, enquanto que para o espaço amostral é a soma dos coeficientes

$$1 + 3 + 6 + 7 + 6 + 3 + 1 = 27$$

Logo a solução do problema será: a Probabilidade $\dfrac{7}{27}$

O raciocínio que desenvolvemos acima, leva à investigação da possibilidade de obter os coeficientes para outras expansões polinomiais, tais como

$$(x + x^2 + x^3 + \ldots + x^m)^n$$

Essa situação será o foco do próximo capítulo.

5 COEFICIENTES EM EXPANSÕES POLINOMIAIS

Neste capítulo usaremos as ferramentas da análise combinatória abordadas anteriormente para encontrar os coeficientes de:

$$(x+x^2+x^3+...+x^m)^n = A_1x^m + A_2x^{m+1} + ... + A_{mn-m+1}x^{nm}$$

Primeiramente vamos nos ater ao seguinte exemplo:

$$\begin{aligned}(x+x^2+...+x^6)^3 &= (x+x^2+...+x^6)(x+x^2+...+x^6)(x+x^2+...+x^6)\\ &= A_1x^3 + A_2x^4 + A_3x^5 + ... + A_{16}x^{18}\end{aligned}$$

Sejam y_1, y_2, y_3 os expoentes da variável x de cada uma das parcelas dos polinômios respectivamente.

Então A_1 é o número de soluções inteiras positivas diferente de zero de:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3$$

Usando o resultado da análise combinatória, temos:

$$A_1 = \binom{2}{2}$$

A_2 é o número de soluções inteiras positivas diferente de zero de:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

Usando novamente a ferramenta da análise combinatória, temos:

$$A_2 = \binom{3}{2}$$

A_3 é o número de soluções inteiras positivas diferente de zero de:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 5$$

$$A_3 = \binom{4}{2}$$

Analogamente para os demais coeficientes:

$$A_4 = \binom{4}{2}, \quad A_5 = \binom{6}{2}, \quad A_6 = \binom{7}{2}, \quad A_7 = \binom{8}{2}, \quad A_8 = \binom{9}{2},$$

$$A_9 = \binom{10}{2}, \quad A_{10} = \binom{11}{2}, \quad A_{11} = \binom{12}{2}, \quad A_{12} = \binom{13}{2}, \quad A_{13} = \binom{14}{2}$$

$$A_{14} = \binom{15}{2}, \quad A_{15} = \binom{16}{2}, \quad A_{16} = \binom{17}{2}.$$

Ao desenvolver a expressão $(x + x^2 + \ldots + x^6)^3$ obtemos

$$(x + x^2 + \ldots + x^6)^3 = 1x^3 + 3x^4 + 6x^5 + 10x^6 + 15x^7 + 21x^8 + 25x^9 + 27x^{10} + 27x^{11} + \\ + 25x^{12} + 21x^{13} + 15x^{14} + 10x^{15} + 6x^{16} + 3x^{17} + 1x^{18}$$

Onde se percebe que há um erro de contagem! E o erro se dá, pois quando calculamos

$$y_1 + y_2 + y_3 = 9$$

$$A_7 = \binom{8}{2}$$

Estamos contabilizando as soluções

$$\begin{cases} 7+1+1 \\ 1+7+1 \\ 1+1+7 \end{cases}$$

que não ocorrem, uma vez que o expoente é no máximo 6. Assim também para os demais coeficientes.

Vamos então condicionar as soluções da equação a respeito do y_i, por exemplo o coeficiente A_7

$$y_1 + y_2 + y_3 = 9$$

As soluções $y_1, y_2, y_3 \leq 6$ devem ser menores ou iguais a 6.

Vejamos:

$$y_1 \leq 6$$

$$y_1 - 7 \leq -1$$

Logo $7 - y_1 \geq 1$. Chamamos de $z_1 = 7 - y_1$, $z_2 = 7 - y_2$, $z_3 = 7 - y_3$. Assim,

$$z_1 + z_2 + z_3 = 7 - y_1 + 7 - y_2 + 7 - y_3 = 21 - (y_1 + y_2 + y_3) = 21 - 9 = 12$$

Resolver a equação $y_1 + y_2 + y_3 = 9$ com restrição é equivalente a resolver a equação

$$z_1 + z_2 + z_3 = 12$$

Cuja as soluções são naturais diferentes de zero.

Logo

$$A_7 = \binom{11}{2}$$

Para o coeficiente A_8

$$y_1 + y_2 + y_3 = 10$$

As soluções $y_1, y_2, y_3 \leq 6$

$$y_1 \leq 6$$

$$y_1 - 7 \leq -1$$

Logo $7 - y_1 \geq 1$. Chamamos de $z_1 = 7 - y_1$, $z_2 = 7 - y_2$, $z_3 = 7 - y_3$. Desse modo

$$z_1 + z_2 + z_3 = 7 - y_1 + 7 - y_2 + 7 - y_3 = 21 - (y_1 + y_2 + y_3) = 21 - 10 = 11$$

Logo candidato a ser o A_8 é o número de soluções inteiras positivas diferentes de zero de:

$z_1 + z_2 + z_3 = 11$

Temos que:

$$A_8 = \binom{10}{12}$$

Analogamente para os demais casos, teríamos:

$A_9 = \binom{9}{2}$, $A_{10} = \binom{8}{2}$, $A_{11} = \binom{7}{2}$, $A_{12} = \binom{6}{2}$;

$A_{13} = \binom{5}{2}$, $A_{14} = \binom{4}{2}$, $A_{15} = \binom{3}{2}$, $A_{16} = \binom{2}{2}$.

Onde se percebe que há novamente um erro de contagem para os coeficientes A_7, A_8, A_9, A_{10} (termos centrais), continuamos contando a mais, e mesmo que tentemos repetir o processo de condicionar as soluções, obteremos outra situação em que devemos condicionar as soluções, levando-nos a um ciclo infinito.

Exemplo. No caso do termo A_7

$$y_1 + y_2 + y_3 = 9$$

As soluções onde $y_1, y_2, y_3 \leq 6$

$$y_1 \leq 6$$

$$y_1 - 7 \leq -1$$

Logo $7 - y_1 \geq 1$. Chamamos de $z_1 = 7 - y_1; z_2 = 7 - y_2; z_3 = 7 - y_3$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 7 - y_1 + 7 - y_2 + 7 - y_3 = 21 - (y_1 + y_2 + y_3) = 21 - 9 = 12$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 12$$

Estamos contando soluções do tipo $\{8+2+2\}$,$\{9+1+2\}$ porém se $z_1 = 8$ logo teríamos $y_1 = -1$

Nesse caso teríamos que condicionar $z_1, z_2, z_3 < 7$

$$z_1 - 8 < -1$$

$8 - z_1 > 1$. Chamando $8 - z_1 = w_1$, $8 - z_2 = w_2$, $8 - z_3 = w_3$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 8 - z_1 + 8 - z_2 + 8 - z_3 = 24 - (z_1 + z_2 + z_3) = 24 - 12 = 12$$

$$w_1 + w_2 + w_3 = 12$$

Porém $w_1, w_2, w_3 < 8$.

Procedendo de maneira análoga, observamos que o repetindo o método, mesmo assim não produz todos os coeficientes, havendo necessário de impor condições sobre os valores das variáveis.

Concluímos que para o desenvolvimento de:

$$(x + x^2 + \ldots + x^6)^3 = A_1x^3 + A_2x^4 + A_3x^5 + \ldots + A_{16}x^{18}$$

$A_1 = \binom{2}{2}$, $A_2 = \binom{3}{2}$, $A_3 = \binom{4}{2}$, $A_4 = \binom{5}{2}$,

$$A_5 = \binom{6}{2}, \quad A_6 = \binom{7}{2}, \quad A_7 = ?, \quad A_8 = ?,$$

$$A_9 = ?, \quad A_{10} = ?, \quad A_{11} = \binom{7}{2}, \quad A_{12} = \binom{6}{2}$$

$$A_{13} = \binom{5}{2}, \quad A_{14} = \binom{4}{2}, \quad A_{15} = \binom{3}{2}, \quad A_{16} = \binom{2}{2}.$$

Onde os 4 termos centrais não foram possíveis de descobrir usando as ferramentas apresentadas até aqui.

Vamos agora colocar uma restrição nos coeficientes e subtrair as soluções inexistentes, ou seja as soluções que ainda assim não poderiam fazer parte.

O coeficiente A_1 é o número de soluções inteiras positivas da equação

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3$$

De modo que $1 \leq y_1, y_2, y_3 \leq 6$

Nesse caso não encontramos problemas pois não há possibilidade dos números y_i serem maiores que 6. Encontramos problemas a partir do coeficiente A_7

Como exemplo, vamos calcular A_{10}:

O número de soluções inteiras positivas (podendo ser zero)

$$y_1 + y_2 + y_3 = 12$$

$$\binom{11}{2}$$

Porém considerando $y_1 \geq 7$ temos que $y_1 - 6 \geq 1$, chamando $y_1 - 6 = z_1$

Temos:

$$y_1 - 6 + y_2 + y_3 = 12 - 6$$

$$z_1 + y_2 + y_3 = 6$$

Temos $\binom{5}{2}$ situações envolvendo y_2 e y_3, que não podem ocorer.

Então multiplicamos por 3, obtendo $3 \cdot \binom{5}{2}$

Sendo assim, temos:

$$A_{10} = \binom{11}{2} - 3 \cdot \binom{5}{2}$$

Desta forma repetimos o procedimento para os demais termos. No capítulo a seguir serão exibidos os coeficientes dessa expansão.

6 GENERALIZAÇÕES PARA EXPANSÕES MULTINOMIAIS

O exemplo visto no capítulo anterior pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(x+x^2+\cdots+x^6)^3 &= A_1x^3+A_2x^4+A_3x^5+\cdots+A_{16}x^{18}\\ &= x^3(A_1+A_2x+A_3x^2+\cdots+A_{16}x^{15})\\ &= x^3(1+x^2+x^3+\cdots+x^5)^3\end{aligned}$$

Desse modo, notamos que se trata de um caso particular de uma infinidade de outros desenvolvimentos. Para analisá-lo, vamos considerar o desenvolvimento multinomial da expressão:

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n$$

Antes de aplicar os métodos discutidos acima para generalizar, vejamos alguns casos particulares:

6.1 EXEMPLIFICANDO CASOS PARTICULARES

Cosidere o caso $(1+x+x^2)^n$

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^n = A_0x^0+A_1x^1+A_2x^2+A_3x^3+\cdots+A_nx^n+\\ +A_{n+1}x^{n+1}+\cdots+A_{2n-3}x^{2n-3}+A_{2n-2}x^{2n-2}+A_{2n-1}x^{2n-1}+A_{2n}x^{2n}\end{aligned}$$

Os métodos desenvolvidos na seção anterior permitem primeiramente obter A_0, A_1 e A_2, e em seguida os demais coeficientes até A_n

Provaremos que há uma simetria para os demais termos, não havendo necessidade de utilizar outro método para encontrá-los.

Teorema 4. *No desenvolvimento do polinômio:*

$$\begin{aligned}(1+x+x^2)^n = A_0x^0+A_1x^1+A_2x^2+A_3x^3+\cdots+A_nx^n+A_{n+1}x^{n+1}+\cdots+\\ +A_{2n-3}x^{2n-3}+A_{2n-2}x^{2n-2}+A_{2n-1}x^{2n-1}+A_{2n}x^{2n}\end{aligned}$$

Os coeficientes dos termos equidistantes do termo central são iguais. Ou seja:

1. $A_{2n} = A_0$
2. $A_{2n-1} = A_1$

3. $A_{2n-2} = A_2$

4. Para $3 \leq k \leq n$ *temos* $A_k = A_{2n-k}$

Demonstração. 1) Calculamos primeiramente A_0, o qual é o número de soluções inteiras positivas de:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0(*)$$

A_{2n}, por sua vez, é o numero de soluções de:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 2n = 2 + 2 + 2 + \ldots + 2$$

$$y_1 - 2 + y_2 - 2 + \ldots + y_n - 2 = 0$$

Chamando $y_i = z_i$ temos:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0(**)$$

O número de soluções inteiras positivas de $(*)$ e $(**)$ é o mesmo.

$$\binom{n-1}{n-1} = A_0 = A_{2n}$$

2) Para A_1 calculamos o número de soluções inteiras positivas da equação

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$$

ou seja

$$A_1 = \binom{n}{n-1}(*)$$

Para A_{2n-1} é o número de soluções inteiras positivas da equação

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 2n - 1$$

$$-y_1 - y_2 - \ldots - y_n = -2n + 1$$

Para $y_i \leq 2$, chamamos $2 - y_i = z_i$

$$2 - y_1 + 2 - y_2 + 2 - y_3 \ldots + 2 - y_n = 1$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = 1$$

Temos que

$$A_{2n-1} = \binom{n}{n-1} (**)$$

O número de soluções inteiras positivas de $(*)$ e $(**)$ é o mesmo.

Para 3) Analogamente $A_2 = A_{2n-2}$

A_2 é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 2$$

E A_{2n-2} é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 2n-2$$

Que é equivalente a resolver:

$$-y_1 - y_2 - \ldots - y_n = -2n+2$$

$$2 - y_1 + 2 - y_2 + 2 - y_3 \ldots + 2 - y_n = 2$$

Chamamos $2 - y_i = z_i$

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = 2$$

Assim temos que $A_2 = A_{2n-2} = \binom{n+1}{n-1}$. $\square$

Para $3 \leq k \leq n$ temos $A_k = A_{2n-k}$

A_k é o número de soluções de

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k$$

A_{2n-k} é o número de soluções de

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 2n-k$$

$$-y_1 - y_2 - y_3 - \cdots - y_n = -2n+k$$

$$2 - y_1 + 2 - y_2 + 2 - y_3 + \cdots + 2 - y_n = k$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n = k$$

Logo

$$(1+x+x^2)^n = A_0x^0 + A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots + A_nx^n + A_{n+1}x^{n+1} + \cdots +$$
$$+ A_{2n-3}x^{2n-3} + A_{2n-2}x^{2n-2} + A_{2n-1}x^{2n-1} + A_{2n}x^{2n}$$

Podemos reescrever da seguinte forma:

$$(1+x+x^2)^n = A_0x^0 + A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots + A_{n-1}x^{n-1} + A_nx^n + A_{n+1}x^{n-1} +$$
$$+ A_{n-2}x^{n+2} + \cdots + A_3x^{2n-3} + A_2x^{2n-2} + A_1x^{2n-1} + A_0x^{2n}$$

Onde calculamos A_k da seguinte forma:

O número de soluções inteiras positivas de

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k$$

Contando sem restrição será : $\binom{n+k-1}{n-1}$

Porém não podemos contar os casos onde $y_1 \geq 3$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = k$$

$$(y_1 - 3) + y_2 + \ldots + y_n = k - 3$$

$$(z_1) + y_2 + \ldots + y_n = k - 3$$

Logo o número de soluções desta equação será:

$$\binom{n+k-3-1}{n-1} = \binom{n+k-4}{n-1}$$

Como repetimos esse procedimento para $y_1, y_2, \ldots, y_n$ então o que não pode ser contabilizado é

$$n \cdot \binom{n+k-4}{n-1}$$

Logo

$$A_k = \binom{n+k-1}{n-1} - n \cdot \binom{n+k-4}{n-1}$$

Abaixo listamos alguns resultados encontrados efetuando os cálculos.

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2)^0 &= \binom{0}{0}x^0\\
(1+x+x^2)^1 &= \binom{0}{0}x^0+\binom{1}{0}x^1+\binom{0}{0}x^2\\
(1+x+x^2)^2 &= \binom{1}{1}x^0+\binom{2}{1}x^1+\binom{3}{1}x^2+\binom{2}{1}x^3+\binom{1}{1}x^4\\
(1+x+x^2)^3 &= \binom{2}{2}x^0+\binom{3}{2}x^1+\binom{4}{2}x^2+[\binom{5}{2}-3\binom{2}{2}]x^3+\binom{4}{2}x^4+\binom{3}{2}x^5+\binom{2}{2}x^6\\
(1+x+x^2)^4 &= \binom{3}{3}x^0+\binom{4}{3}x^1+\binom{5}{3}x^2+[\binom{6}{3}-4\binom{3}{3}]x^3+[\binom{7}{3}-4\binom{4}{3}]x^4+\\
&\qquad +[\binom{6}{3}-4\binom{3}{3}]x^5+\binom{5}{3}x^6+\binom{4}{3}x^7+\binom{3}{3}x^8\\
\vdots &\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Assim concluímos:

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2)^n &= \binom{n-1}{n-1}x^0+\binom{n}{n-1}x+\binom{n+1}{n-1}x^2+[\binom{n+2}{n-1}-n\binom{n-1}{n-1}]x^3+[\binom{n+3}{n-1}-n\binom{n}{n-1}]x^4+\cdots+\\
&+[\binom{n+k-1}{n-1}-n\binom{n+k-4}{n-1}]x^k+\cdots+[\binom{2n-1}{n-1}-n\binom{2n-4}{n-1}]x^n+\cdots+\binom{n+1}{n-1}x^{2n-2}+\\
&+\binom{n}{n-1}x^{2n-1}+\binom{n-1}{n-1}x^{2n}
\end{aligned}$$

Consideremos agora a expressão $(1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^m)^n$, analisando o caso particular em que $m = 3$, ou seja:

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2+x^3)^n &= A_0x^0+A_1x^1+A_2x^2+A_3x^3+\cdots+A_{3n-4}x^{3n-4}+\\
&+A_{3n-3}x^{3n-3}+A_{3n-2}x^{3n-2}+A_{3n-1}x^{3n-1}+A_{3n}x^{3n}
\end{aligned}$$

Os métodos desenvolvidos na seção anterior permitem primeiramente obter os 4 primeiros termos, e em seguida os demais até $A_{\frac{3n}{2}}$ se n for par ou $A_{(\frac{3n}{2}-1)}$ se n for ímpar.

Provaremos que há uma simetria para os demais coeficientes, não havendo necessidade de utilizar outro método para encontrá-los.

Teorema 5. *No desenvolvimento*

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2+x^3)^n &= A_0x^0+A_1x^1+A_2x^2+A_3x^3+\cdots+A_{3n-4}x^{3n-4}+A_{3n-3}x^{3n-3}+\\
&+A_{3n-2}x^{3n-2}+A_{3n-1}x^{3n-1}+A_{3n}x^{3n}
\end{aligned}$$

Os coeficientes dos termos equidistantes do termo central são iguais. Ou seja:

1. $A_{3n} = A_0$

2. $A_{3n-1} = A_1$

3. $A_{3n-2} = A_2$

4. $A_{3n-3} = A_3$

5. Para $4 \leq k \leq n$ *temos* $A_k = A_{3n-k}$ $\square$

Demonstração. Análoga ao caso onde $m = 2$ $\square$

Logo

$$(1+x+x^2+x^3)^n = A_0x^0 + A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5 + \cdots + A_5x^{3n-5} + \cdots + A_0x^{3n}$$

Onde A_k calculamos da seguinte forma:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k$$

Contando sem restrição $\binom{n+k-1}{n-1}$, porém não podemos contar os casos onde $y_1 \geq 4$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k$$

$$(y_1 - 4) + y_2 + \cdots + y_n = k - 4$$

$$(z_1) + y_2 + \cdots + y_n = k - 4$$

Logo o número de soluções desta equação será:

$$\binom{n+k-4-1}{n-1} = \binom{n+k-5}{n-1}$$

Como repetimos esse procedimento para $y_1, y_2, \cdots, y_n$ então o que não pode ser contabilizando é

$$n \cdot \binom{n+k-5}{n-1}$$

Logo

$$A_k = \binom{n+k-1}{n-1} - n \cdot \binom{n+k-5}{n-1}$$

Abaixo listamos alguns resultados encontrados feitos os cálculos.

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2+x^3)^0 &= \tbinom{0}{0}x^0 \\
(1+x+x^2+x^3)^1 &= \tbinom{0}{0}x^0 + \tbinom{1}{0}x^1 + \tbinom{1}{0}x^2 + \tbinom{0}{0}x^3 \\
(1+x+x^2+x^3)^2 &= \tbinom{1}{1}x^0 + \tbinom{2}{1}x^1 + \tbinom{3}{1}x^2 + \tbinom{4}{1}x^3 + \tbinom{3}{1}x^4 + \tbinom{2}{1}x^5 + \tbinom{1}{1}x^6 \\
(1+x+x^2+x^3)^3 &= \tbinom{2}{2}x^0 + \tbinom{3}{2}x^1 + \tbinom{4}{2}x^2 + \tbinom{5}{2}x^3 + [\tbinom{6}{2} - 3\tbinom{2}{2}]x^4 + [\tbinom{7}{2} - 3\tbinom{3}{2}]x^5 + \tbinom{5}{2}x^6 + \\
&\qquad \tbinom{4}{2}x^7 + \tbinom{3}{2}x^8 + \tbinom{2}{2}x^9 \\
(1+x+x^2+x^3)^n &= \tbinom{n-1}{n-1}x^0 + \tbinom{n}{n-1}x^1 + \tbinom{n+1}{n-1}x^2 + \tbinom{n+2}{n-1}x^3 + [\tbinom{n+3}{n-1} - n\tbinom{n-1}{n-1}]x^4 + \cdots + \\
&\qquad + \tbinom{n-1}{n-1}x^{3n} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

6.2 O CASO GERAL

Aqui vamos generalizar os resultados do capítulo anterior, estudando os coeficientes de um polinômio da forma $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n$. Para isso, inicialmente vamos verificar que os resultados obtidos anteriormente continuam válidos.

Teorema 6. *No desenvolvimento do polinômio:*

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n = A_0x^0+A_1x^1+A_2x^2+\cdots+A_mx^m+A_{m+1}x^{m+1}+\cdots+A_{mn}x^{mn}$$

Os coeficientes dos termos equidistantes do termo central são iguais. Ou seja:

1. $A_0 = A_{mn}$
2. $A_1 = A_{mn-1}$
3. $A_2 = A_{mn-2}$
4. $A_m = A_{mn-m}$

Demonstração. 1) A_0 é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n = 0(*)$$

A_{mn} é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n = mn$$

$$y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n = m+m+m+\ldots+m$$

$$y_1-m+y_2-m+y_3-m+\ldots+y_n-m = 0$$

Chamando $y_i - m = z_i$ temos :

$$z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n = 0(**)$$

Logo o número de soluções de $(*)$ e $(**)$ é o mesmo:

$$A_0 = A_{mn} = \binom{n-1}{n-1}$$

Vejamos a demonstração de 2.

A_1 é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = 1(*)$$

A_{mn-1} é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = mn - 1$$

$$-y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_n = -mn + 1$$

$$-y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_n = -m - m - m \ldots - m + 1$$

$$m - y_1 + m - y_2 + m - y_3 + \ldots + m - y_n = 1$$

Chamando $m - y_i = z_i$ temos :

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = 1(**)$$

Logo o número de soluções de $(*)$ e $(**)$ é o mesmo.

$$A_1 = A_{mn-1} = \binom{1+n-1}{n-1} = \binom{n}{n-1}$$

Vejamos a demonstração de 3.

A_2 é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = 2(*)$$

A_{mn-2} é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = mn - 2$$

$$-y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_n = -mn + 2$$

$$-y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_n = -m - m - m \ldots - m + 2$$

$$m - y_1 + m - y_2 + m - y_3 + \ldots + m - y_n = 2$$

Chamando $m - y_i = z_i$ temos :

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = 2(**)$$

Logo o número de soluções de $(*)$ e $(**)$ é o mesmo:

$$A_1 = A_{mn-2} = \binom{2+n-1}{n-1} = \binom{n+1}{n-1}$$

Vejamos a demonstração de 4.

A_m é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = m(*)$$

A_{mn-m} é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = mn - m$$

$$-y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_n = -mn + m$$

$$-y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_n = -m - m - m \ldots - m + m$$

$$m - y_1 + m - y_2 + m - y_3 + \ldots + m - y_n = m$$

Chamando $m - y_i = z_i$ temos :

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = m(**)$$

Logo o número de soluções de $(*)$ e $(**)$ é o mesmo:

$$A_1 = A_{mn-1} = \binom{m+n-1}{n-1} \quad \square$$

Para $m < k < \frac{mn}{2}$, temos que:

$$A_k = A_{mn-k}$$

A_k é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = k(*)$$

A_{mn-k} é o número de soluções inteiras positivas de

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = mn - k$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = mn - k$$

$$-y_1 - y_2 - \ldots - y_n = -mn + k$$

$$m - y_1 + m - y_2 + \ldots + m - y_n = k$$

Chamando $m - y_i = z_i$ temos :

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = k(**)$$

Logo o número de soluções de $(*)$ e $(**)$ é o mesmo, ou seja:

$$A_k = A_{mn-k}$$

Calculando A_k para $m < k < \frac{mn}{2}$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k.$$

Primeiramente o casos sem restrição $\binom{k+n-1}{n-1}$

Contabilizando os casos onde $y_1 \geq m$

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = k$$

$$y_1 - m + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = k - m$$

Chamamos $y_1 - m = z_1$

$$z_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = k - m$$

O número de soluções inteiras positivas é $\binom{k-m+n-1}{n-1}$

Isto se repete para $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, ou seja temos $n\binom{k-m+n-1}{n-1}$ soluções para excluir.

Assim

$$A_k = \binom{k+n-1}{n-1} - n\binom{k-m+n-1}{n-1}$$

Logo a respeito do desenvolvimento multinomial $(1+x+x^2+x^3+...+x^m)^n$, concluímos:

- Para os primeiros termos $(A_0, A_1, \ldots, A_m)$contamos sem restrições, pois não há possibilidade de contarmos soluções a mais.
- Para os termos $(A_{m+1}, A_{m+2}..., A_{\frac{mn}{2}})$ contamos todas as possibilidades e subtraímos as soluções não desejadas.
- Para os demais termos usamos o fato da simetria, não havendo necessidade de calcularmos.

Logo temos:

$$\begin{aligned}(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^m)^n = A_0x^0+A_1x^1+A_2x^2+\cdots+A_mx^m+A_{m+1}x^{m+1}+\\ +A_{m+2}x^{m+2}+\cdots+A_{\frac{mn}{2}}x^{\frac{mn}{2}}+A_{\frac{mn}{2}-1}x^{\frac{mn}{2}+1}+\cdots+\\ +A_{m+1}x^{mn-m+1}+A_mx^{mn-m}+\ldots+A_2x^{mn-2}+\\ +A_1x^{mn-1}+A_0x^{mn}\end{aligned}$$

7 TRIÂNGULOS MULTINOMIAIS E RELAÇÕES DE STIFEL GENERALIZADAS

Uma vez obtido um método para descrever os coeficientes binomiais, abaixo listamos a expansão de $(1+x+x^2)^n$ e tiramos algumas conclusões:

$$
\begin{aligned}
(1+x+x^2)^0 &= 1\\
(1+x+x^2)^1 &= 1+1x+1x^2\\
(1+x+x^2)^2 &= 1+2x+3x+2x^3+1x^4\\
(1+x+x^2)^3 &= 1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+1x^6\\
(1+x+x^2)^4 &= 1+4x+10x^2+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+1x^8\\
(1+x+x^2)^5 &= 1+5x+15x^2+30x^3+45x^4+51x^5+45x^6+30x^7+15x^8+5x^9+1x^{10}\\
(1+x+x^2)^6 &= 1+6x+21x^2+50x^3+90x^4+126x^5+141x^6+126x^7+90x^8+50x^9+\\
&\qquad +21x^{10}+6x^{11}+1x^{12}\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Chamamos de Δ_3 ao triângulo formado pelos coeficientes das expansões acima, no qual os resultados estão listados na tabela.

Tabela 1:

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
L_0	1												
L_1	1	1	1										
L_2	1	2	3	2	1								
L_3	1	3	6	7	6	3	1						
L_4	1	4	10	16	19	16	10	4	1				
L_5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1		
L_6	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50	21	6	1

C_n: Coluna com o $n-1$ resultado da expansão ; L_n: Linha com os coeficientes da n-ésima potência;

Indicamos por $[p,q]$ o elemento que ocupa a posição linha p e coluna q.

Teorema 7. *Os termos do Δ_3 são construídos da seguinte forma:*

$$[p,q] = [p-1,q]+[p-1,q-1]+[p-1,q-2]$$

Caso não exista $[j,k]$ o respectivo elemento consideramos sendo 0.

Demonstração. Se escrevermos os coeficientes $[p-1,q]+[p-1,q-1]+[p-1,q-2]$ na forma binomial para o caso onde eles ocupam as primeiras posições teríamos:

Tabela 2:

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6				$C_{2(p-1)}$		C_{2p}
L_0	$\binom{0}{0}$												
L_1	$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{0}$	$\binom{0}{0}$										
L_2	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{1}{1}$								
L_3	$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{2}$	$[\binom{5}{2}-3\binom{2}{2}]$	$\binom{4}{2}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{2}{2}$						
$L_{(p-1)}$	$\binom{p-2}{p-2}$	$\binom{p-1}{p-2}$	$\binom{p}{p-2}$	$\cdots$							$\binom{p-2}{p-2}$		
L_p	$\binom{p-1}{p-1}$	$\binom{p}{p-1}$	$\binom{p+1}{p-1}$	$\cdots$									$\binom{p-1}{p-1}$

- $\binom{p-2}{p-2}=\binom{p-1}{p-1}$ (trivial)
- $\binom{p-2}{p-2}+\binom{p-1}{p-2}=\binom{p}{p-1}$

$\binom{p-2}{p-2}=\binom{p-1}{p-1}$,

Logo

$$\binom{p-1}{p-1}+\binom{p-1}{p-2}=\binom{p}{p-1}$$

Direto pela Relação de Stifel.

$$\binom{n-2}{n-2}+\binom{n-1}{n-2}+\binom{n}{n-2}=\binom{n+1}{n-1}$$

$$\binom{n-2}{n-2}+\binom{n-1}{n-2}+\binom{n}{n-2}=\binom{n-1}{n-1}+\binom{n-1}{n-2}+\binom{n}{n-2}=$$

$$=\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}=\binom{n+1}{n-1} \quad \square$$

Tiramos algumas conclusões a respeito do número de termos para cada linha da tabela:

$a_0 = 1$ Representa o número de termos da linha 0 da tabela

$a_1 = 3$ Representa o número de termos da linha1 da tabela

$a_2 = 5$ Representa o número de termos da linha2 da tabela

$a_3 = 7$ Representa o número de termos da linha3 da tabela

$a_4 = 9$ Representa o número de termos da linha4 da tabela

E assim sucessivamente, temos aqui uma P.A de razão 2

$$a_p = a_0 + p \cdot r = 1 + p \cdot 2$$

Na linha p temos $2p+1$ elementos

Onde os termos são da forma:

$$[p,0],[p,1],[p,2],\ldots,[p,2p]$$

Listamos abaixo a expansão de $(1+x+x^2+x^3)^n$

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2+x^3)^0 &= 1\\
(1+x+x^2+x^3)^1 &= 1+1x+1x^2+1x^3\\
(1+x+x^2+x^3)^2 &= 1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+1x^6\\
(1+x+x^2+x^3)^3 &= 1+3x+6x^2+10x^3+12x^4+12x^5+10x^6+6x^7+3x^8+1x^9\\
(1+x+x^2+x^3)^4 &= 1+4x+10x^2+20x^3+31x^4+40x^5+44x^6+40x^7+31x^8+20x^9+\\
&\qquad +10x^{10}+4x^{11}+1x^{12}\\
(1+x+x^2+x^3)^5 &= 1+5x+15x^2+35x^3+65x^4+101x^5+135x^6+155x^7+155x^8+\\
&\qquad +135x^9+101x^{10}+65x^{11}+35x^{12}+15x^{13}+5x^{14}+1x\\
(1+x+x^2+x^3)^6 &= 1+6x+21x^2+56x^3+120x^4+216x^5+336x^6+456x^7+546x^8+\\
&\qquad +580x^9+556x^{10}+456x^{11}+336x^{12}+216x^{13}+120x^{14}+56x^{15}+\\
&\qquad +21x^{16}+6x^{17}+1x^{18}\\
\vdots & \qquad \vdots
\end{aligned}$$

Chamamos de Δ_4 ao triângulo formado pelos coeficientes das expansões acima, isto é:

Tabela 3:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}	C_{19}
L_0	1																		
L_1	1	1	1	1															
L_2	1	2	3	4	3	2	1												
L_3	1	3	6	10	12	12	10	6	3	1									
L_4	1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1						
L_5	1	5	15	35	65	101	135	155	135	101	65	35	15	5	1				
L_6	1	6	21	56	120	216	336	456	546	456	336	216	120	56	21	6	1		

C_n: Coluna com o $n-1$ resultado da expansão ; L_n: Linha com os coeficientes da n-ésima potência;

Teorema 8. *Os termos do Δ_4 são construídos da seguinte forma:*

$$[p,q] = [p-1,q] + [p-1,q-1] + [p-1,q-2] + [p-1,q-3]$$

Caso não exista $[j,k]$ o respectivo elemento consideramos sendo 0*.*

Demonstração. Se escrevermos os coeficientes $[p-1,q]+[p-1,q-1]+[p-1,q-2]+[p-1,q-3]$ na forma binomial para o caso onde eles ocupam as primeiras posições teríamos:

Tabela 4:

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6			$C_{3(p-1)}$			C_{3p}
L_0	$\binom{0}{0}$												
L_1	$\binom{0}{0}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{1}{1}$	$\binom{0}{0}$									
L_2	$\binom{1}{1}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{4}{1}$	$\cdots$								
L_3	$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{2}$	$\cdots$								
L_{p-1}	$\binom{p-2}{p-2}$	$\binom{p-1}{p-2}$	$\binom{p}{p-2}$	$\binom{p+1}{p-2}$						$\binom{p-2}{p-2}$			
L_p	$\binom{p-1}{p-1}$	$\binom{p}{p-1}$	$\binom{p+1}{p-1}$	$\binom{p+2}{p-1}$	$\cdots$	$\cdots$							$\binom{p-1}{p-1}$

O primeiro caso é trivial pela igualdade entre os coeficientes binomiais

$$\binom{p-2}{p-2} = \binom{p-1}{p-1}$$

O segundo caso usamos a relação de Stifel

$$\binom{p-2}{p-2} + \binom{p-1}{p-2} = \binom{p}{p-1}$$

$$\binom{p-2}{p-2} + \binom{p-1}{p-2} = \binom{p-1}{p-1} + \binom{p-1}{p-2} = \binom{p}{p-1}$$

O terceiro caso, novamente usamos a relação de Stifel

$$\binom{p-2}{p-2} + \binom{p-1}{p-2} + \binom{p}{p-2} = \binom{p+1}{p-1}$$

$$\binom{p-2}{p-2} + \binom{p-1}{p-2} + \binom{p}{p-2} = \binom{p}{p-1} + \binom{p}{p-2} = \binom{p+1}{p-1}$$

Usando varias vezes a relação de Stifel

$$\binom{p-2}{p-2}+\binom{p-1}{p-2}+\binom{p}{p-2}+\binom{p+1}{p-2}=\binom{p+2}{p-1}$$

$$\binom{p-2}{p-2}+\binom{p-1}{p-2}+\binom{p}{p-2}+\binom{p+1}{p-2}=\binom{p+1}{p-1}+\binom{p+1}{p-2}=\binom{p+2}{p-1} \quad \square$$

Tiramos algumas conclusões a respeito do número de termos para cada linha da tabela:

$a_0 = 1$ Representa o número de termos da linha 0

$a_1 = 4$ Representa o número de termos da linha 1

$a_2 = 7$ Representa o número de termos da linha 2

$a_3 = 10$ Representa o número de termos da linha 3

$a_4 = 13$ Representa o número de termos da linha 4

E assim sucessivamente, temos aqui uma P.A de razão 3

$$a_p = a_0 + p \cdot r = 1 + p \cdot 3$$

Na linha m temos $3p+1$ elementos

Onde os termos são da forma:

$$[p,0],[p,1],[p,2],\cdots,[p,3p]$$

De forma análoga, poderíamos repetir o procedimento para Δ_5 resultando num triângulo onde os elementos serão dados por:

$$[p,q]=[p-1,q]+[p-1,q-1]+[p-1,q-2]+[p-1,q-3]+[p-1,q-4]$$

Onde os termos na linha p são da forma:

$$[p,0],[p,1],[p,2]\ldots[p,4p]$$

7.1 $(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^n$

Vamos generalizar para os coeficientes no desenvolvimento de

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^n$$

ou seja Δ_k

Cada Elemento é formada pela regra:

$$[p,q] = \sum_{i=o}^{q-1} [p-1, q-i]$$

O que resulta em:

$$\binom{p-1}{p-1} + \binom{p}{p-1} + \binom{p+1}{p-1} + \cdots + \binom{p+q}{p-1} = \binom{p+q+1}{p}$$

8 SOMA DOS COEFICIENTES

Vamos verificar que a propriedade da soma dos elementos da n-ésima linha do Triangulo de Pascal 2^n pode ser generalizada para os demais triângulos obtidos.

Teorema 9. *Generalizando, a soma dos elementos das linhas do Δ_k da linha p é:*

$$\sum_{q=0}^{(k-1)p} [p,q] = k^p$$

Demonstração. A soma dos coeficientes na expansão de

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})^m$$

Basta trocar x por 1.

$$(1+1+1^2+\cdots+1^{k-1})^m = k^m \quad \square$$

Exemplo. A soma dos elementos das linhas do Δ_3

A soma dos elementos da linha 0 =1

A soma dos elementos da linha 1 = 3

A soma dos elementos da linha 2 = 9

A soma dos elementos da linha 3 = 27

A soma dos elementos da linha 4 = 81

A soma dos elementos da linha 5 = 243

Logo, a soma dos elementos da linha p é:

$$\sum_{q=0}^{2p} [p,q] = 3^p$$

Exemplo. A soma dos elementos das linhas do Δ_4

A soma dos elementos da linha 0 =1

A soma dos elementos da linha 1 = 4

A soma dos elementos da linha 2 = 16

A soma dos elementos da linha 3 = 64

Logo, a soma dos elementos da linha p é:

$$\sum_{q=0}^{3p} [p,q] = 4^p$$

Assim generalizamos a soma dos coeficientes das linhas do Δ_K como:

$$\sum_{q=0}^{(K-1)p} [p,q] = K^p$$

9 A FÓRMULA DE LEIBNIZ - BERNOULLI

Por fim, apresentaremos a fórmula de Leibniz-Bernoulli, que nos possibilita obter os coeficientes de uma expansão multinomial qualquer. Tratando a expansão multinomial como um caso geral sem olhar para suas variadas facetas.

Não apresentaremos aqui todas as provas dos resultados descritos, tendo em vista que nosso objetivo é indicar desdobramentos do tratamento apresentado anteriormente.

Para tanto, inicialmente considere

$$(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k)^n = (x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k)\cdots(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k)$$

De cada parcela desse desenvolvimento se escolhe um elemento dos n polinômios.

Feita a escolha temos

$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\cdots x_k^{\alpha_k}$$

onde α_i representa a quantidade de vezes que escolhemos x_i

Desse modo

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_k = n$$

A escolha de α_i letras x_i pode ser feita de C_{n,α_1} , o que representa a quantidade de vezes que podemos formar o monômio $x_1^{\alpha_1}$. Sobrando $n-2$ fatores para escolher x_2. Logo $C_{n-\alpha_1,\alpha_2}$ representa a quantidade de vezes que podemos formar o monômio $x_2^{\alpha_2}$. O número de termos da forma $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\cdots x_k^{\alpha_k}$ pelo principio multiplicativo é dado por:

$$C_{n,\alpha_1}\cdot C_{n-\alpha_1,\alpha_2}\cdot C_{n-\alpha_1-\alpha_2,\alpha_3}\cdots C_{\alpha_k,\alpha_k} =$$

$$= \frac{n!}{(n-\alpha_1)!(\alpha_1)!}\cdot\frac{(n-\alpha_1)!}{(n-\alpha_2)!\alpha_2!}\cdot\frac{(n-\alpha_2)!}{(n-\alpha_3)!\alpha_3!}\cdots\frac{\alpha_k!}{\alpha_k!} =$$

$$= \frac{n!}{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3\cdots\alpha_k}$$

$$(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_k)^n = \sum\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\cdots\alpha_k!}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_3^{\alpha_3}\cdots x_k^{\alpha_k}$$

Conforme nossa discussão anterior, apresentamos alguns exemplos:

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k} = \frac{n!}{n_1!,n_2!,\cdots,n_k!} = P_n{}^{n_1,n_2,\cdots,n_k}$$

Representa o coeficiente de

$$x_1{}^{n_1}x_2{}^{n_2}\cdots x_k{}^{n_k}$$

Então vamos calcular o coeficiente de $x^4y^3zw^2$ na expansão de $(x+y+z+w)^{10}$

$$\binom{10}{4,3,1,2} = \frac{10!}{4!3!1!2!} = 12600$$

De modo análogo vamos calcular o coeficiente de xx^3y^4 na expansão de $(1+x+y)^{10}$.

Devemos nos atentar, pois a soma dos expoentes deve resultar em 10, portanto devemos ter: $x^3y^4 = 1^3x^3y^4$.

$$\binom{10}{3,3,4} = \binom{10}{3,3,4} = 4200$$

Tendo em vista que o objetivo deste capítulo é tão somente apresentar a fórmula de Leibniz-Bernoulli, não exploramos exemplos mais complexos, ou seja, com variações nos expoentes das variáveis,

Maiores informações e exemplos tratando desse tipo de equações, podem ser encontradas em Silva (2015).

10 CONCLUSÕES

Partindo das equações cúbicas, utilizando as funções geradoras, Ramanujan se deparou com algumas igualdades algébricas, na busca de uma prova ou contra exemplo para o último teorema de Fermat. Esses apareceram num livro de notas sem demonstração (HIRSHHORN, 1995; HIRSHHORN, 1996; HUNHAN e HIRSHHORN, 2006) . À vista disso, inicialmente, estudamos os resultados que apareciam no manuscrito de Ramanujan, entretanto os achados em nossa pesquisa nos levaram a investigar os coeficientes de expansões multinomiais. No decorrer do estudo de funções geradoras, percebemo-las como uma importante ferramenta na resolução de diversos problemas combinatórios, uma vez que apresentavam uma série de regularidades numéricas por nós desconhecidas. Diante disso, resolvemos investigar essas regularidades, Ao estudar polinômios da forma $(1 + x + \ldots + x^n)^m$ observamos regularidades numéricas em alguns casos particulares. Não sabíamos, entretanto, que se tratava de uma propriedade mais geral, o que nos levou a investigá-los. Isso posto, fazemos uso de uma série de ferramentas da análise combinatória, como apresentados nos estudos precedentes (SANTOS, MELLO e MURARI, 1995; WILSON e WATKINS, 2013; MORGADO e CARVALHO, 2014).

No processo de investigação encontramos diversas problemáticas relacionadas a contagem para obter os coeficientes. Realizamos várias tentativas de construções, resolvendo equações com coeficientes inteiros visando encontrar uma solução que não tínhamos diretamente. A única maneira de resolvê-los fora desmembrando o problema em duas partes, sendo que a primeira se refere aos coeficientes inicias e finais e a seguinte para os demais coeficientes. Consequentemente generalizamos e demonstramos uma forma de obter esses coeficientes mesmo com restrições.

Os coeficientes obtidos, arranjados em uma tabela, possibilitaram a percepção de regularidades com destaque para aquela que generalizava o triângulo de Pascal. De igual modo a soma dos elementos generalizavam a Relação de Stiffel, no qual encontramos ao longo do processo, ou seja, conseguimos infinitos triângulos aritméticos.

Por fim, consideramos o teorema multinomial unicamente para verificar que existe uma generalização para uma situação de qualquer potência com um certo número de variáveis, esta não permite observar as regularidades numéricas que apresentamos. Ou seja, existem diversos teoremas que passam despercebidos quando olhamos pra o teorema multinomial de forma geral apresentado pela fórmula de Leibniz Bernoulli.

Para além, estudos futuros podem ser realizados partindo das questões encontradas neste trabalho, como uma investigação da existência de uma probabilidade multinomial, bem como investigar propriedades em "pirâmides"aritméticas multinomiais.

O presente trabalho se torna útil ao professor porquanto mostra que mesmo temas aritméticos aparentemente simples podem carregar diversas propriedades e regularidades numéricas não observadas diretamente. Tal fato reforça o papel do professor como investigador na construção de sua formação.

Referências

[1] SANTOS, J., MELLO, M., MURARI, I. **Introdução à Análise Combinatória.** Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1995

[2] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2008.

[3] WILF, H. **Generatingfunctionology** Philadelphia: Academic Press, 1994.

[4] MORGADO, A., CARVALHO, P. **Matematica Discreta**. Coleção Profmat. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[5] WILSON, R., WATKINS, J. J. **Combinatorics:** Ancient and Modern.United Kingdom: Oxford University Press, 2013.

[6] COMTET, L. **Advanced Combinatorics:** The Art of Finite and Infinite Expansions. D. Reidel Publishing Company, 1974.

[7] SILVA, M.,R. **Números binomiais: uma abordagem combinatória para o ensino médio.** Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional), Departamento de Matemática, Fortaleza, 2015.

[8] TROVÃO, M.,H. **Métodos de Contagem.** Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional), Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.