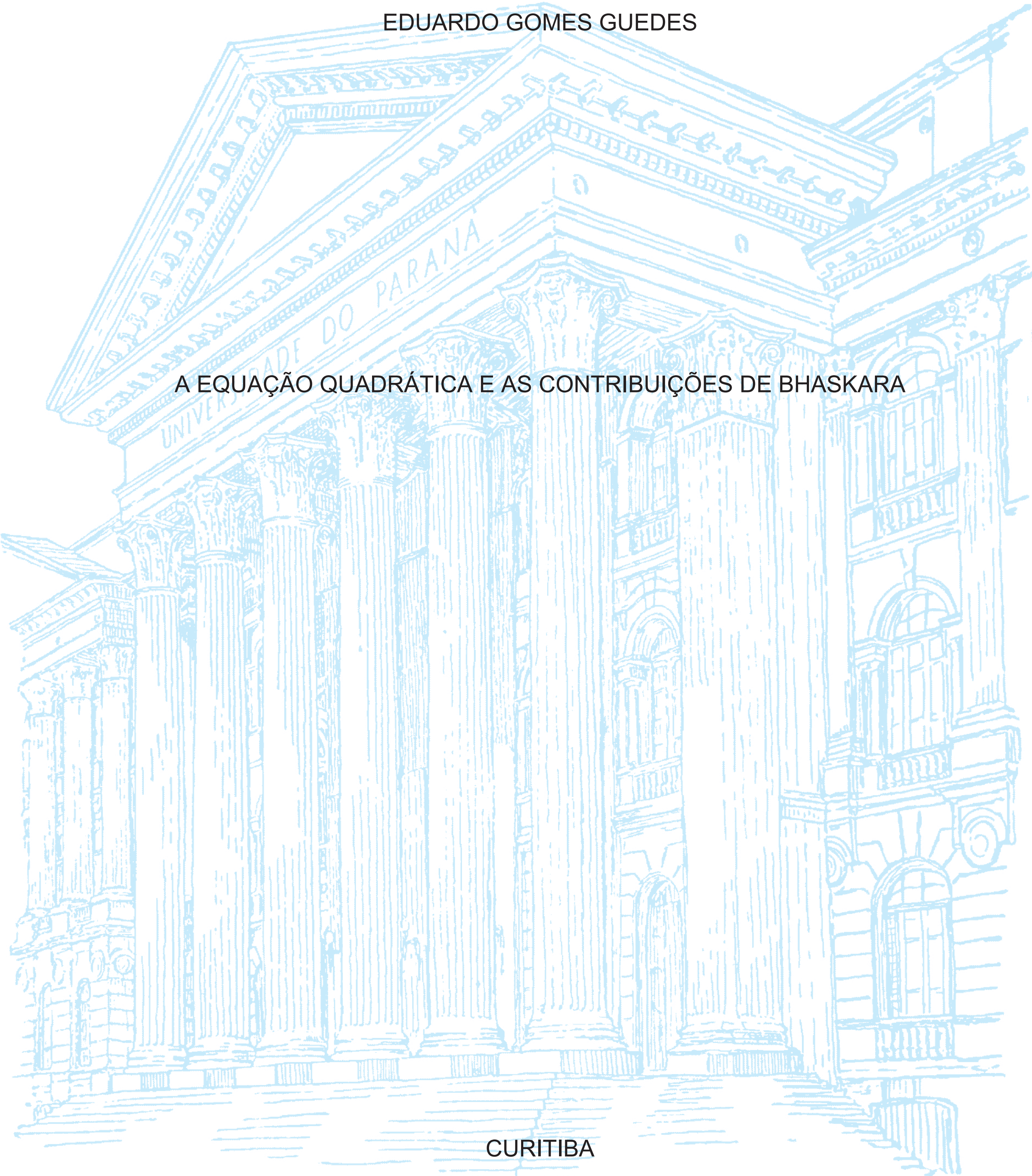
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDUARDO GOMES GUEDES



A EQUAÇÃO QUADRÁTICA E AS CONTRIBUIÇÕES DE BHASKARA

CURITIBA

2019

EDUARDO GOMES GUEDES

A EQUAÇÃO QUADRÁTICA E AS CONTRIBUIÇÕES DE BHASKARA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr Alexandre Luis Trovon de Carvalho.

CURITIBA

2019

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

G924e Guedes, Eduardo Gomes
A equação quadrática e as contribuições de Bhaskara [recurso eletrônico] / Eduardo Gomes Guedes. – Curitiba, 2019.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2019.

Orientador: Alexandre Luis Trovon de Carvalho.

1. Matemática – Historiografia. 2. Matemática (Segundo grau). 3. Equações quadráticas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Carvalho, Alexandre Luis Trovon de. III. Título.

CDD: 510

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **EDUARDO GOMES GUEDES** intitulada: **A EQUAÇÃO QUADRÁTICA E AS CONTRIBUIÇÕES DE BHASKARA**, sob orientação do Prof. Dr. ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 26 de Novembro de 2019.

ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

RODOLFO GOTARDI BEGIATO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

CARLOS ROBERTO VIANNA
Avaliador Externo (DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UFPR)

Dedico esse trabalho ao meu pai (*in memoriam*) e à minha mãe (*in memoriam*) pelo cuidado e amor dispensados na criação de seus três filhos.

AGRADECIMENTOS

Essa pesquisa não seria possível sem a colaboração de algumas pessoas e a torcida de muitas outras. Entendendo que essa pesquisa surge não somente pelo esforço exclusivo de uma única pessoa, sou grato pela contribuição de todos que estiveram presentes nesse caminhar possibilitando o seu acontecimento.

Agradeço ao professor Paulo Cesar Tavares de Souza, o PC, pela sua insistência ao conversarmos sobre o PROFMAT para que eu me inscrevesse no processo de seleção, pontuando os benefícios que me traria a realização desse curso.

Ao professor Rodrigo Luis da Rocha pelo gentil convite para participar do trabalho final do curso PROFMAT, sugerindo que eu pesquisasse sobre o tema que aqui é abordado.

À professora Ana Maria Irribarem pela sua generosidade em me ajudar com a tradução do resumo para o inglês.

À amiga Fabiana Martins da Silveira, a Bibi, virtuosa escaladora, Engenheira Ambiental e Mestre em Desenvolvimento de Tecnologia, pela sua cordial disposição em colaborar no processo de formatação.

À minha companheira Angela pelo amor e dedicação compartilhando o convívio de tantos anos, na mistura de poucas tristezas e muitas alegrias, sem a qual o meu caminhar não teria o encanto que tem.

Agradeço a tão bem-vinda orientação do professor Alexandre Trovon que soube, em nossas conversas, esclarecer as dúvidas pertinentes e, quando foi necessário, redirecionar a pesquisa para o seu foco, complementando e enriquecendo a bibliografia com autores significativos, possibilitando que fosse atendida a intenção do estudo que estava previsto.

A todos os professores do curso pelas boas aulas ministradas e aos colegas com os quais dividimos dúvidas e certezas no âmbito de nosso estudo.

Agradeço também à credibilidade e o apoio que tive para finalizar este trabalho por parte dos meus chefes imediatos do Colégio Militar de Curitiba no transcurso do tempo de realização do PROFMAT, o então Major Penna, quando do início do curso, e no final do curso, o Capitão Galvez.

A matemática depende de certas intuições que podem ser o produto das características de nossos órgãos sensoriais, nosso cérebro e o mundo externo. (MORRIS KLINE, 1980 em **Matemática: a perda da certeza**, citado em *El Cerebro Matemático* de Stanislas Dehaene, 2016, p. 347).

RESUMO

A pesquisa aqui apresentada investiga as contribuições de Bhaskara em relação a resolução da equação quadrática. Para tanto, são analisados vários aspectos históricos que contribuíram na composição do que hoje é conhecido como equação do 2° grau ou equação quadrática. Alguns métodos de solução desse tipo de equação foram estudados, permeados inicialmente pela questão se foi Bhaskara o criador da fórmula que leva seu nome. Entretanto, tendo em vista que inúmeros trabalhos acadêmicos sobre esse tema e textos de história da matemática apontam para a não veracidade da criação por Bhaskara da fórmula resolutiva da equação quadrática, inquiriu-se em seguida sobre as contribuições desse matemático indiano acerca do método de resolução que leva à fórmula. A expressão “Fórmula de Bhaskara” ocorre em livros didáticos de matemática escritos em determinados períodos no Brasil. Para a realização deste trabalho são recordados alguns métodos utilizados por povos em tempos e locais distintos para resolverem certos tipos de problemas que hoje são resolvidos com equações quadráticas. O método de Bhaskara, com seu viés algébrico próprio, produzido historicamente na Índia, é considerado em seguida. É proposta uma comparação dos métodos visando reconhecer a contribuição de Bhaskara na construção de um modelo mais geral de resolução da equação quadrática. A pesquisa bibliográfica realizada teve por base livros de história da matemática e trabalhos acadêmicos que tratam sobre o assunto em questão. Na composição da bibliografia, muitas foram as contribuições dos diversos textos, particularmente a tradução de Colebrooke de 1817, apresentando as obras de Bhaskara e Brahamagupta e a tradução de Karpinski de 1915, apresentando a obra de al-Khwarizmi.

Palavras-chave: Método de Bhaskara; Equação Quadrática; História da Matemática.

ABSTRACT

The research presented here investigates Bhaskara's contributions to solving the quadratic equation. To this end, we analyze various historical aspects that contributed to the composition of what is now known as the 2nd degree equation or quadratic equation. Some methods of solving this kind of equation have been studied, initially permeated by the question of whether Bhaskara was the creator of the formula that bears his name. However, given that numerous scholarly works on this topic and mathematical history texts point out that Bhaskara's creation of the solving formula of the quadratic equation was not true, we then inquired about the contributions of this Indian mathematician to the method of solving. that leads to the formula. The expression “Bhaskara Formula” occurs in math textbooks written in certain periods in Brazil. To carry out this work, some methods used by people in different times and places to solve certain types of problems that are solved today with quadratic equations are remembered. Bhaskara's method, with its own algebraic bias, historically produced in India, is considered next. A comparison of the methods proposed to recognize Bhaskara's contribution to the construction of a more general model of quadratic equation resolution model is proposed. The bibliographical research carried out was based on history books of mathematics and academic works that deal with the subject in question. In the composition of the bibliography, there were many contributions from the various texts, particularly the 1817 Colebrooke translation, featuring the works of Bhaskara and Brahamagupta, and the 1915 Karpinski translation, featuring al-Khwarizmi's.

Keywords: Bhaskara’s Method; Quadratic Equation; Mathematics History.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A presença da extração da raiz quadrada em equações costuma aparecer, na escola brasileira, no 9º ano do Ensino Fundamental, anteriormente denominado 8ª série e mais distante no tempo conhecido como 4º ano ginasial. A equação quadrática e a função quadrática, denominadas também de equação do 2º grau e função do 2º grau em livros didáticos, surgem no estudo escolar da matemática como modelos apropriados para a investigação de problemas em diversas áreas das Ciências, ocorrendo seus estudos a partir do Ensino Fundamental, o que permite ao aluno ter tempo de amadurecer o tratamento com raízes e potências em equações, novidade que marca uma transição na resolução de equações do 1º grau para resolução de equações quadráticas.

O presente estudo recorrerá a episódios que se situam no âmbito da história da matemática. A história da matemática incluída nas aulas de matemática pode ser vista como uma Tendência dentro da Educação Matemática. Carlos Roberto Vianna (Vianna, 2000) propõe uma discussão sobre a existência de um lugar para a história da matemática como tendência dentro da Educação Matemática em um texto apresentado numa intervenção de mesa redonda no VI EPREM (Encontro Paranaense de Educação Matemática) ocorrido no ano 2000 em Londrina/Pr intitulado “Sobre História da Matemática na Educação Matemática”, no qual encerra a sua análise dizendo:

> [...] Todavia, sou a favor do “Uso Didático da História da Matemática” como uma Tendência dentro da Educação Matemática. Como? Ora, é muito simples: associando o conhecimento da História da Matemática às demais tendências; por exemplo: a história da matemática pode ser uma fonte relevante de problemas para serem trabalhados na resolução de problemas, o estudo da solução dada aos problemas reais que foram enfrentados em épocas diversas pode fornecer contribuições relevantes para o desenvolvimento de técnicas de modelagem e para o aprimoramento de modelos já elaborados, o conhecimento da história da matemática dos diversos povos entrelaça-se inevitavelmente com os trabalhos de Etnomatemática... Assim, tal como temos que falar em um determinado idioma, também deveríamos pensar os conteúdos matemáticos, as tendências em educação matemática, de um modo histórico, imersos na história, e diríamos que o problema de “usar” a história da matemática deixaria de ser um “problema” teórico e se tornaria uma ação didática efetiva. (VIANNA 2000, p. 4)

Tomando por base essa orientação de imersão na história, atenta-se para o fato de que a equação quadrática é um objeto matemático capaz de oferecer uma gama ampla de possibilidades de usos didáticos, haja vista o histórico que está associado à gênese de sua formação, precedendo-o no decorrer de um tempo que abarca uma ampla variedade de civilizações, de cotidianos específicos e diferenciados. São diversos os problemas reais, como diz o professor Vianna, que tiveram suas urgências ao longo do tempo para serem pensados, capazes de serem modelados com o que hoje é conhecido como equação quadrática. O estudo desses problemas possibilitou estabelecer formas de resolvê-los, criando passos de ações de cálculos que levam ao conhecimento do desconhecido, da medida que está sendo procurada, da incógnita. A pesquisa sobre história das equações quadráticas e das diferentes estratégias para resolvê-las abre perspectivas de investigação em diversas frentes, como por exemplo, no estudo do sistema de numeração de base sexagesimal que os babilônios utilizavam, no estudo de soluções aproximadas com o método dos babilônios (extração de raiz quadrada), no estudo do alcance do método chinês com suas barras de contagem, no estudo da geometria de áreas utilizada pelos gregos para resolverem problemas nos quais aspectos algébricos estão presentes, no estudo do conjunto numérico no qual é resolvida uma equação quadrática em determinada época e em diversos outros enlaces de temas possíveis que poderiam ser fomentados por esse estudo.

Nessa pesquisa investiga-se a contribuição do matemático Bhaskara com relação à resolução da equação quadrática. Bhaskara era hindu, denominação comum dos indianos orientais, termo que faz referência à religião dominante naquela região (EVES, 2004, p. 247). A grafia de seu nome surge de variados modos em livros didáticos (ROCHA, 2019), aparecendo como Báscara, Bháskara, Báskara e em muitos desses textos, esse nome está associado à fórmula que hoje é conhecida no Brasil com a seguinte escrita:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esse recurso é lembrado por quem já o estudou, em determinada época, no Brasil, como *Fórmula de Bhaskara*. Rocha (2019) investiga esse modo de identificar tal expressão resolutiva da equação quadrática nos livros didáticos brasileiros no percurso do século XX até o momento atual, observando que a manifestação inicial de tal atribuição se dá em Perez y Marin (1909, pp. 212 e 213), na 1ª edição do livro

"Lições de Álgebra". A citação nesse texto é feita em nota de rodapé, na qual credita a Bhaskara o método apresentado no item 114, *Resolução da Equação Completa* (do 2º grau).

O panorama histórico sobre o qual incidiu a pesquisa permitiu certos questionamentos sobre o modo de entender a resolução de equações quadráticas no tempo de Bhaskara: Qual método era empregado para resolver equações quadráticas? Quais tipos de soluções admitiam (positiva, negativa, nula)? Dividiam em casos específicos ou generalizavam os casos com um único processo? A linguagem usada era adequada a um público mais amplo permitindo seu fácil acesso? O processo resolutivo era algébrico, aritmético ou geométrico?

Vailati (2008, pp. 5 e 6) observa que a fórmula geral para resolver equações quadráticas resulta de uma sistematização do conhecimento que atravessou séculos, iniciando com os babilônios (~2000 a.C.) e culminando na Renascença Europeia (Séc. XV e XVI).

No intervalo de tempo que separa Bhaskara do século XX houve ampla divulgação de seus textos, sobretudo os textos de cunho didático, nos quais esse matemático se expressa com versos, tradição na Índia observada a partir da obra de Aryabhata, denominada *Aryabhatiya*, que data de cerca do ano 500. Essa prática da escrita com versos tornava o texto de difícil compreensão segundo Roque (2012, p. 238), porém exemplos ilustravam as orientações dadas em bases poéticas, e comentários vinham a seguir a fim de complementar a explicação. Nesse sentido, Pereira (2017, p. 60) observa que os "trajes poéticos" que revestiam os problemas apareciam tanto em textos escolares, escritos em versos, como nos problemas frequentemente usados para entretenimento social. Ressalta-se aqui que Bhaskara provinha dessa escola de matemáticos do período medieval da Índia. Boyer (1996, pp. 151 e 152) observa que ele foi o matemático mais importante do século doze tendo preenchido algumas lacunas deixadas por seus predecessores indianos, sendo sua obra "a culminação de contribuições hindus anteriores".

1.1 JUSTIFICATIVA

Na literatura encontrada conseguiu-se reunir subsídio que sustenta que não teria sido Bhaskara o criador da fórmula que resolve a equação quadrática.

No artigo *Revisitando Uma Velha Conhecida*, Pitombeira (2004) expressa a surpresa da maioria dos alunos ao saberem que a equação quadrática tem uma longa história que se estende por mais de quatro mil anos e que envolve muitos matemáticos importantes de várias civilizações. Ao mencionar que em nossas escolas é ensinada a resolução da equação quadrática utilizando-se a fórmula de Bhaskara, Pitombeira comenta o advento da notação algébrica ressaltando que ela surge posteriormente a esse matemático. Segundo ele:

> Convém lembrar inicialmente que a notação algébrica simbólica manejada automaticamente por nós, hoje, é criação recente dos matemáticos, começando com François Viète (1540-1603) e colocada praticamente na forma atual por René Descartes (1596-1650). Assim, os processos (algoritmos) para achar as raízes de equações dos babilônios, gregos, hindus, árabes e mesmo dos algebristas italianos do século XV e do início do século XVI eram formulados com palavras (às vezes, por exemplo na Índia, mesmo em versos!). (PITOMBEIRA, 2004 – p. 1)

Na nota (A FÓRMULA, 1999) são elencados alguns fatos tentando convencer o leitor de porque não é adequado dar o nome de Bhaskara para a fórmula que resolve a equação quadrática, citando, dentre outros, argumento similar ao do professor Pitombeira acima mencionado, dizendo que até o fim do século XVI não se usava fórmula para obter as raízes de uma equação quadrática, pois os coeficientes de uma equação não eram representados por letras, tendo essa representação iniciado com Viète que viveu de 1540 a 1603. Entretanto, apesar da inadequação do uso desse nome dado à fórmula, o autor diz que não se deve negar a importância e a riqueza da obra de Bhaskara. Essa importância pode ser atestada também por uma das observações que seguem no artigo, na qual ele diz que no livro *Bija-Ganita* é afirmado pela primeira vez que um número positivo pode ter duas raízes quadradas (uma positiva e outra negativa), indicando que entre os indianos já havia o manejo de números negativos.

Parece haver unanimidade em afirmar que de fato não teria sido Bhaskara o criador da fórmula que resolve a equação quadrática, no entanto suas contribuições se fizeram notar desde a época em que viveu, pois pouco depois de sua morte, em

1185, uma instituição educacional em Ujjain, na Índia, foi em 1207 criada para estudar o seu trabalho.

O fio da meada parece ter sido perdido. A origem da expressão *Fórmula de Bhaskara* parece ter um início que se justifica por uma alusão não ao seu criador, mas uma referência ao matemático que soube de forma elegante, didática e criativa apresentar o método de resolução da equação quadrática, possibilitando que esse método fosse acessível a mais pessoas. Entretanto, a análise dos textos principais de Bhaskara, com base nas traduções em inglês de Colebrooke (1817), dá um tom diferente para essa questão: em tempo anterior a Bhaskara já existe uma argumentação algébrica indiana, com símbolos específicos para representar valores tanto desconhecidos como conhecidos, sendo desenvolvida e apresentada com suas regras operatórias, com semelhanças que se aproximam da álgebra moderna. Deve-se observar que autores mais antigos como Perez y Marin (1909), Stavale (1935), Castrucci e Lima Filho (1960), dentre outros, referenciaram o processo de solução como "Método de Bhaskara" e não como "Fórmula de Bhaskara" (ROCHA, 2019). Desse modo fica claro o entendimento daqueles autores sobre um processo e não uma fórmula. Tal fato se mostra, inclusive, na análise do original de Bhaskara, em que o autor cita o processo como "Método atribuído a Sridhara". Ou seja, não se trata de uma fórmula, mas de um método resolutivo.

Rocha (2019) propõe uma análise do uso do método de Bhaskara em livros didáticos, nos quais, vários autores, segundo ele, afirmam que tal referência é utilizada apenas no Brasil. O seu trabalho procura retomar o fio da meada sobre esse costume, dando uma clareza melhor sobre seu uso na escola brasileira, sobretudo nos livros didáticos.

Com base no exposto, essa pesquisa reúne informação sobre os métodos concebidos para resolver a equação quadrática ao longo do tempo, trazendo um panorama que possibilita um olhar comparativo entre esses métodos com o método aplicado pelo matemático indiano Bhaskara. A intenção aqui é compreender qual a participação desse matemático na construção e/ou divulgação de algum método de resolução da equação quadrática, percebendo desse modo a importância de seu nome vinculado a ele. Segundo Roque (2012, p. 241), a tradução do método apresentado por Bhaskara no *Bija-Ganita* (às vezes escreve-se *Vija-Ganita*), é dada assim:

Para resolver a equação $ax^2 + bx = c$:

> Multiplicamos ambos os lados por $4a$, obtendo $4a^2x^2 + 4abx = 4ac$.
> Em seguida, adicionamos b^2 a ambos os lados, $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$.
> Agora podemos reescrever essa igualdade como $(2ax + b)^2 = 4ac + b^2$ e o membro contendo as quantidades desconhecidas possui uma raiz quadrada para obter: $2ax + b = \sqrt{4\mathrm{ac} + \mathrm{b}^2}$ e $x = \frac{\sqrt{4\mathrm{ac}+\mathrm{b}^2}-\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$.

Na tradução de Colebrooke a regra de Sridhara, que é o método citado acima apresentado por Bhaskara, está assim:

"Multiplique ambos os lados da equação por um número igual a quatro vezes o [coeficiente] do quadrado, e adicione a eles um número igual ao quadrado do [coeficiente] original da quantidade desconhecida (Em seguida, extraia a raiz.)."

Essa regra está demonstrada em nota de rodapé por um dos comentaristas do *Bija-Ganita*.

Como observa a professora Tatiana Roque, esse método é conhecido hoje como "completar quadrados". Ainda que esse método indique o mesmo procedimento que é usado atualmente, Heaton (1896) diz que até a data do seu artigo não se tinha notícia da fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e nem de algum método de solução de equações quadráticas que fosse direto, sem a imposição do argumento geométrico.

Tem-se então, como proposta, observar não a origem de uma simbologia algébrica que indique na sua síntese a sequência de operações que são realizadas, mas investigar a originalidade do método que Bhaskara propõe, tendo em vista que ele utiliza o argumento algébrico indiano, já consagrado na época que escreve seus textos matemáticos.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Esta pesquisa investiga qual teria sido a contribuição do matemático Bhaskara quanto a divulgação de um método de resolução da equação quadrática e em que medida havia um raciocínio algébrico por detrás desse método. É sabido que muito antes da época desse matemático indiano, certos tipos de equações quadráticas eram resolvidas. Essa investigação é motivada, como já dito anteriormente, por haver um método conhecido na escola brasileira adjetivado com o nome desse matemático, levando a crer que haja real participação de Bhaskara na construção desse processo específico. Ainda que Bhaskara não utilize a notação algébrica atual, que justificaria o uso do termo “fórmula”, havia por parte desse autor um sofisticado raciocínio algébrico que, como será visto, tem estreita similaridade com o raciocínio que ainda hoje é utilizado no processo de solução das equações quadráticas. Bhaskara faz uso de uma notação proveniente da cultura matemática indiana ao apresentar o método de resolução da equação quadrática com argumentação algébrica.

1.2.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo acima expresso, seguem os seguintes objetivos específicos, desenvolvidos com base em pesquisa bibliográfica:

I) Estudar métodos de resolução da equação quadrática que foram desenvolvidos ao longo de séculos por diferentes povos, comparando--os;

II) Estudar a resolução de equações quadráticas apresentadas nos textos de aritmética e álgebra escritos por Bhaskara, a partir da leitura da primeira tradução em inglês dos mesmos, visando a compreensão do método aritmético e do método algébrico que foram empregados por esse matemático.

1.3 METODOLOGIA

A investigação desenvolvida foi realizada com base em pesquisa bibliográfica. Os textos pesquisados, entre livros e trabalhos acadêmicos, físicos ou digitais, forneceram o conjunto de informações que compõem o corpo do texto. Os materiais no formato digital foram encontrados disponíveis na internet. Assim foi com boa parte dos trabalhos acadêmicos e com livros como o de Burton (2011), que serviu de base para observar certo tipo de investigação na Mesopotâmia envolvendo a resolução de equação quadrática.

A leitura e a tabulação das informações que foram realizadas permitiram observar que as diferentes fontes corroboram conjuntamente entre si, havendo, na rede de informações provenientes dessas leituras, complementação no que dizem.

2 REVISÃO DE LITERATURA

O presente trabalho reúne certos métodos que no desenrolar civilizatório foram sendo compostos e desenvolvidos para a resolução de equações quadráticas. As abordagens contemplam momentos anteriores à época em que Bhaskara viveu, podendo se ter ideia do quanto, antes dele, já havia sido realizado e produzido sobre equações quadráticas e suas resoluções. Também há indícios de tratamentos da equação quadrática, como será visto, posteriores ao período de sua vida, que se deu de 1114 até 1185, a partir dos quais buscam-se dados que possam indicar a importância de Bhaskara com relação ao método de resolução de equações quadráticas completas.

O matemático indiano que dá nome à fórmula não foi o primeiro a entender como encontrar a solução de problemas quadráticos e nem o primeiro a instruir como fazê-lo, mas surge na cultura escolar brasileira como quem teria dado um desfecho que generaliza o procedimento para resolver uma equação quadrática, pois seu nome adjetivando o método, naturalmente sugere esse pensamento. Roque (2012, p. 257) afirma que não se pode dizer que os indianos ou árabes tivessem inventado a fórmula de resolução de equações quadráticas, ainda que soubessem resolver "o análogo a uma equação desse tipo" segundo o encaminhamento dado pela matemática de seu local e tempo. Percebe-se pela natureza da pesquisa dessa professora que seria inadequado perguntar quem, pessoa única, teria deduzido a fórmula, pois essa se daria pela contribuição de muitos, em tempos e locais diversos.

Dos textos pesquisados, a tradução de Colebrooke (1817) das obras matemáticas de Bhaskara e a tradução de Karpinski (1915) da álgebra de Al-Khwarizmi, foram considerados aportes primários para o estudo em questão por serem as primeiras traduções para o inglês dessas respectivas obras.

Procedimentos para resolver situações que hoje são interpretadas com equações quadráticas, estavam no rol dos fazeres de escribas da Mesopotâmia cerca de dois mil anos antes de Cristo. Essa região abrigou um povo de muita expressividade, possibilitando que a mesma também fosse chamada de *babilônica*, segundo Boyer (1996, p. 16), de 2000 até 600 a.C.

A história da matemática da Mesopotâmia compõe-se de informações que surgem dos estudos dos tabletes de argila. Os primeiros estudos desses tabletes revelam parcialmente a matemática daquele povo. Investigações posteriores realizaram traduções dos tabletes levando em conta não somente os números que estão registrados e as operações que são realizadas com eles, nessa nova investida certos termos que estão associados a esses números são considerados, desse modo revelam-se pistas que indicam como os problemas quadráticos eram pensados em termos de sua resolução.

Textos clássicos de história da matemática apresentam relatos mais antigos sobre a Mesopotâmia. Os textos mais recentes, por exemplo o de Robson (2001), trazem um pouco desse novo rumo que tomou a pesquisa relacionada a traduções de tabletes matemáticos.

Os gregos resolviam questões dessa natureza utilizando *aplicação de áreas*, fundamental na geometria grega (ALMEIDA, 2011, p. 321) que consistia em sobrepor um retângulo com um dos seus lados sobre um segmento que, ou igualaria a medida do segmento, ou excederia ou ficaria menor que tal medida. Essa ferramenta geométrica permitia aos gregos resolverem questões quadráticas conforme as formulações presentes nos *Elementos* de Euclides, evitando, segundo a hipótese de Waerden (1988, p. 125) a dificuldade conceitual com frações e irracionais. O rigor grego matemático foi instigado a solicitar o uso de um conjunto de segmentos de reta como domínio conveniente de elementos já que certos números irracionais, como por exemplo $\sqrt{2}$, são construtíveis com régua e compasso. Esse clássico da antiguidade, os *Elementos*, é constituído de treze livros e sua primeira tradução completa, diretamente do grego para o português foi feita pelo professor Irineu Bicudo, com a 1ª edição ocorrendo em 2009.

O povo árabe lidava de forma retórica com situações cuja natureza imprimiu a necessidade de solucionar problemas que levavam à equação quadrática, explicando com palavras como proceder a partir da ideia de “completar quadrados”.

O povo antigo chinês trabalhou com barras de contagem, através das quais realizavam operações aritméticas para resolver o problema de encontrar raízes de equações polinomiais dos mais variados graus.

O povo indiano abordou a resolução das equações quadráticas com uma álgebra simbólica, indo além do processo retórico e, tal qual era feito em sua cultura, expressando os problemas com versos.

Posteriormente, o francês François Viète, segundo Carvalho *et al* (2001, p. 13), propõe um método diferenciado em relação aos seus predecessores, fazendo uso da simbologia matemática como ferramenta principal e apresenta uma novidade algébrica fundamental: introduz o simbolismo para os coeficientes, permitindo generalizar os diferentes casos de equações quadráticas. Sua abordagem de resolução fundamenta-se na ideia de substituição de variáveis para obter uma equação do 2º grau incompleta no intuito de simplificar a resolução da equação inicial.

O francês René Descartes no século XVII apresenta construções geométricas para resolver, dentre outras, equações quadráticas, sendo que na sua obra surge o formato escrito desse tipo de equação que é muito próximo do atual.

O trabalho reúne algumas situações que se passaram em épocas diversas, cujas bases bibliográficas que as revelam, necessitaram de trabalhos exaustivos de traduções que ainda hoje persistem. O conhecimento que se tem, por exemplo, sobre a Mesopotâmia, está sendo obtido ao longo de séculos pelo trabalho de decifração dos tabletes de argila, escritos com a impressão de uma vareta na peça de barro ainda maleável. A garantia da permanência dos conhecimentos impressos era feita através do cozimento dessas peças ao calor do sol ou em fornos. As impressões marcavam o barro com incisões em forma de cunha ou v, além de pequenos círculos e linhas. Esse conjunto de caracteres revelou uma escrita, que foi denominada de "cuneiforme" por Thomas Hyde em 1700, professor de árabe na Universidade de Oxford (ALMEIDA, 2011, p. 163). Escavações arqueológicas lograram encontrar diversos desses tabletes, e conforme Roque (2012, p. 36), centenas de milhares desses artefatos já fazem parte de museus ou de universidades em várias partes do mundo. A mesma autora também lembra que muitos dos tabletes estão disponíveis em imagem na internet em uma biblioteca digital cuneiforme chamada *The Cuneiform Digital Library Initiative-CDLI* cujo endereço eletrônico é http://cdli.ucla.edu/.

Na apresentação de seu livro, Roque (2012, pp. 15 e 16) diz que para fazer história da matemática há, em essência, duas razões, sendo que uma delas vai solicitar que se exiba "um conjunto de práticas, muitas vezes desordenadas, que, apesar de distintas das atuais, também podem ser ditas matemáticas", nesse sentido ela complementa dizendo:

> Quando encarado como uma prática múltipla e diversa, esse conhecimento se apresenta composto por ferramentas, técnicas e resultados desenvolvidos por pessoas em momentos e contextos específicos, com suas próprias razões para fazer matemática e com ideias singulares sobre o que isso significa.

Os acontecimentos aqui narrados apresentam a pluralidade de métodos. São eventos que ocorreram com pessoas de fazeres diversos em busca de métodos e padronizações para resolverem seus problemas, tendo alguns desses problemas permitido que contribuíssem com técnicas de resolução do que veio a ser conhecido na atualidade por equação quadrática. O olhar moderno e distante, torna capaz a aproximação dessas diversas situações segundo certo ponto de vista, mas a natureza de cada técnica pressupõe um entendimento próprio por parte de cada uma das “escolas” aqui mencionadas, com relação aos objetos matemáticos, frente aos seus reais problemas modelados e sua diversidade de ações na busca das soluções.

2.1 BREVE HISTÓRICO

As descrições reunidas neste trabalho tratam de procedimentos que hoje, pode ser dito, são elencados como técnicas de resolução de equação quadrática. Atualmente, tanto a formalização quanto a simbologia permitem uma tarefa que traz uma democratização mais ampla em relação ao tratamento algébrico, particularmente no que tange ao tema aqui em estudo, a resolução de equações quadráticas, se comparado com processos de outros tempos, quando uma padronização no uso de símbolos não era de uso comum.

A pesquisa reúne o procedimento de um passado muito remoto e também o de um passado mais recente, comparando-os.

O conhecimento sobre os babilônios revela que, segundo os primeiros trabalhos de decifração dos tabletes com interesse matemático, realizados boa parte na década de 1930, as equações quadráticas eram resolvidas por eles com processos algébricos. Estudos mais recentes, iniciados entre 1980 e 1990, tendo por base novas traduções, apontam outra hipótese de interpretação dos tabletes, na qual o aspecto geométrico é tido como fundamental na argumentação dos antigos babilônios.

Roque (2014, p. 170) nos conta que a história vista pela perspectiva de historiografias mais recentes, não corrobora a tese de um desenvolvimento linear. No caso aqui em estudo, a resolução de equações quadráticas, há pesquisadores que observam que a herança atual traz argumento e simbolização algébrica capazes de darem o suporte necessário para resolvê-las, exclusivamente de forma algébrica, e por isso deve-se estar vigilante a fim de não supor que a maneira como hoje se lida com equação quadrática tenha sido a mesma em todas as épocas. A formalização da escrita algébrica, que permitiu diminuir a distância entre a linguagem e o fenômeno modelado pela equação, foi grandemente desenvolvida em época recente e posterior as práticas realizadas por povos que tinham fazeres diferentes dos atuais.

Quando é usual o surgimento da raiz quadrada em equações no Ensino Fundamental da escola brasileira? Lembrando-se de sua época na escola básica, o autor assegura que é no atual 9º ano do Ensino Fundamental, ano escolar que era conhecido como 8ª série antes da mudança ocorrida em todo território nacional no ano de 2010, segundo a lei federal regulamentando o Ensino Fundamental agora com nove anos. As soluções de equações quadráticas completas são ensinadas com o auxílio do método de Bhaskara, conhecido por estudantes brasileiros que já lograram realizar os estudos desse ano escolar. A resolução de uma equação quadrática requer que se façam procedimentos que permitirão condensar um trinômio de grau dois em um binômio de grau um elevado ao expoente dois. Para isso, um dos passos que deve ser realizado é reescrever a equação, dada normalmente na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em um formato cujo trinômio formado permita dar sequência ao plano de isolar a incógnita x. Para realizá-lo passo a passo, convém ter visto para tentar fazer, para tentar repetir a proeza da construção, o que não significa que para qualquer um seja simples recriar os passos em qualquer equação quadrática, aplicando o método com valores numéricos.

Ao resolver uma equação quadrática, o processo generalizado consiste em identificar os coeficientes a, b e c do trinômio a partir da forma dada acima, e em seguida, substituí-los onde são indicados na fórmula, como se fosse uma receita *algébrico-aritmética*, realizando por fim as operações para obtenção das raízes da equação.

Esse modo de resolver uma equação quadrática, com base no uso corriqueiro da fórmula no ensino desse objeto de estudo, é fruto de um desenvolvimento que percorreu muitos milênios, tendo sua origem sido observada na civilização desenvolvida na região da Mesopotâmia, nos primórdios da humanidade, quando cidades, aperfeiçoadas dos agrupamentos humanos, começam a se desenvolver.

Originalmente a questão de encontrar resposta para problemas que recaem em equações quadráticas foi enfrentada com base em ideias que germinam e transitam próximas dos campos geométrico, aritmético e algébrico.

A equação quadrática e sua resolução teve um desenvolvimento que contou com a colaboração de inúmeras pessoas, que a trataram de diferentes modos, cada qual na sua época com o argumento matemático que era pertinente ao seu local. Uma ideia usualmente presente nas abordagens, fundamental para esse tipo de equação, é a de completar um quadrado.

A narrativa de acontecimentos que está aqui descrita inicia-se com a primeira civilização que deixou registros escritos, impressos em tabletes de argila, a civilização que se desenvolveu na região conhecida como Mesopotâmia, onde hoje se situam partes dos territórios dos países Síria, Iraque e Turquia. Ali, naquela região, ao longo dos rios Tigre e Eufrates foram edificados os centros de uma bem estabelecida cultura, onde foi criada a escrita cuneiforme, possivelmente a mais antiga forma de comunicação escrita, segundo Boyer (1996, p. 16).

Diversas civilizações tiveram contingências que culminaram na abordagem da equação quadrática. Os mesopotâmicos, indianos, chineses, árabes, europeus, foram povos que contribuíram com estratégias diversificadas para o entendimento da resolução desse tipo de equação.

Pode-se imaginar que o ápice do desenvolvimento desse objeto de estudo passa pela síntese dada pelo método de Bhaskara. É ainda no transcurso dos acontecimentos que o conjunto solução dessas equações será ampliado, considerando o surgimento de novos tipos de números, os negativos e os complexos.

Estar no mundo pressupõe naturalmente como necessidade humana a ocupação de espaço, ocupação de área, a organização territorial. Como a equação quadrática é um modelo matemático que permite a associação com questões relacionadas à área, as práticas matemáticas que a concebem vêm sendo desenvolvidas desde muito tempo. Isso não significa que seu estudo se deve unicamente em função desse uso. Do mundo árabe, por exemplo, destaca-se que a partilha de herança era calculada com uso da resolução de equação quadrática, lembra Roque (2012, p. 244). A preocupação pedagógica desse tema foi observada na análise de escritos dos tabletes mesopotâmicos. Questões da astronomia motivaram o estudo desse tipo de equação pelos indianos. Colaborações de civilizações diferentes no turno de muitos séculos promoveram o desenvolvimento do estudo da equação quadrática.

Não há a intenção nesse histórico de apresentar uma abordagem exaustiva, nem estabelecer uma ordem cronológica, mas trazer ao leitor o cenário pelo qual perpassaram os métodos de solução da equação quadrática.

2.2 PROBLEMAS QUADRÁTICOS NA MESOPOTÂMIA

Nas regiões onde os rios Tigres e Eufrates atravessam, que, sem sua presença, seriam condenadas a uma aridez quase total, problemas que podem ser analisados hoje com equações quadráticas faziam parte das preocupações dos escribas das civilizações que ali se desenvolveram. A luta tenaz pela sobrevivência e um vigoroso processo de produção de alimento e de geração de trabalho, desenvolvidos por organizações sociopolíticas, no decorrer de séculos, em meio a crises e interrupções geradas por ordem natural ou por confrontos em disputas, eventualmente sofrendo epidemias, tornam a possibilidade de atingir os resultados técnicos realizados por tais populações um feito grandioso, consideradas as condições de vida em que viviam (LIVERANI, 2016, p. 57).

Na resolução de equações quadráticas, segundo Roque (2012, p. 71), um dos raciocínios que é suposto terem empregado, se assemelha com a ideia geométrica de “completar o quadrado”, na qual áreas são relacionadas, possibilitando que essas equações fossem classificadas de acordo com qualidades apresentadas pelos seus coeficientes já que áreas são pensadas com números positivos.

Waerden (1975, p. 72) diz ser certo que a matemática mesopotâmica identificava um produto como a área de um retângulo, e a segunda potência do desconhecido como a área de um quadrado, já que a terminologia usada deixava claro tal relação. É evidenciado desse modo um manejo de objetos geométricos, sendo cada um identificado com sua área. Entretanto, esse autor observa que problemas que foram formulados em termos geométricos buscavam algum valor desconhecido, e nunca uma construção ou prova específica, assegurando a presença de um núcleo algébrico, ainda que o exterior geométrico se pronunciasse.

Eleanor Robson (KATZ 2007, p. 60) diz que a partir dos anos 1970 em diante as atitudes mudaram lentamente no sentido de reavaliar o modo de pensar a matemática mesopotâmica, o que levou Jens Høyrup a analisar a linguagem dos textos matemáticos da antiga Babilônia em vez de forçá-la a adaptar-se a modelos algébricos modernos. Ela observa que Jens Høyrup escreveu extensivamente e com autoridade sobre a álgebra geométrica da antiga Babilônia revelando que subjacentes aos textos aparentemente de abordagem aritmética há formulações fundamentalmente concretas que descrevem como manipular medidas de áreas e comprimentos a fim de encontrar valores desconhecidos (KATZ, 2007, p. 102).

Exemplificando a presença do argumento geométrico, tem-se as equações do tipo $x^2 + px = q$, com p e q positivos, que poderiam ser resolvidas considerando x^2 como a área de um quadrado de lado medindo x e px como a área de um retângulo de lados medindo p e x. A soma das áreas do quadrado e do retângulo seria então q. A abordagem com geometria de áreas, desse modo, encaminha o processo tomando px e fracionando-o ao meio, sendo cada metade $\frac{px}{2}$ localizada em uma lateral de x^2. Em seguida é completada a figura com o quadrado pequeno $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ para formar então um quadrado maior que tem lado medindo $x + \frac{p}{2}$. Esse quadrado maior tem área medindo $q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$. A questão seguinte é buscar em uma tabela a informação sobre qual é a medida do lado que tem esse último resultado como seu quadrado. O valor de x será dado pela parcela que é somada com $\frac{p}{2}$ para gerar tal medida. A FIGURA 1, a FIGURA 2 e a FIGURA 3 seguintes esclarecem melhor essa ideia.

FIGURA 1 – IDEIA GEOMÉTRICA PARA RESOLVER EQUAÇÃO QUADRÁTICA: Situação 1.

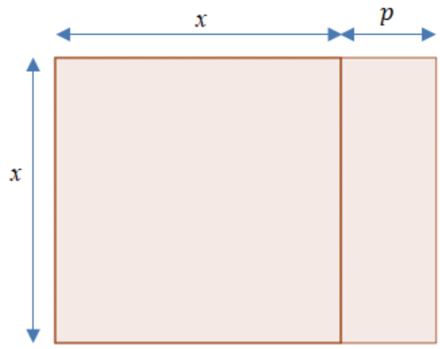


FIGURA 2 – IDEIA GEOMÉTRICA PARA RESOLVER EQUAÇÃO QUADRÁTICA: Situação 2.

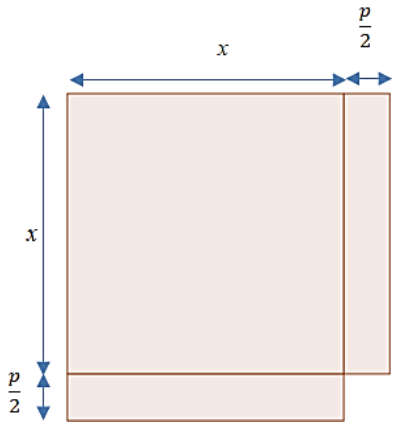
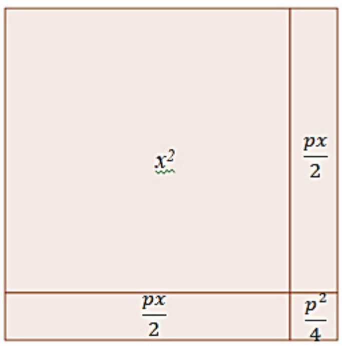


FIGURA 3 – IDEIA GEOMÉTRICA PARA RESOLVER EQUAÇÃO QUADRÁTICA: Situação 3.



Esse era um dos tipos de equações quadráticas que os babilônios resolviam para encontrar a raiz positiva, cujo método equivale ao de substituição de valores numa fórmula geral, dada por uma receita ou algoritmo que descreve, passo a passo, as operações que devem ser realizadas para se obter tal raiz. Constitui-se de operações aritméticas, sendo encaminhado pela ideia geométrica condutora de completar quadrados. Segundo Boyer (1996, p. 22):

> Até os tempos modernos não havia ideia de resolver uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q$, onde p e q são positivos, pois a equação não tem raiz positiva. Por isso as equações quadráticas na antiguidade e na Idade Média, e mesmo no começo do período moderno, foram classificadas em três tipos:
>
> 1) $x^2 + px = q$,
> 2) $x^2 = px + q$,
> 3) $x^2 + q = px$.

Essas equações eram escritas desse modo pois não tinham o conceito de número negativo.

As fontes que trazem o conhecimento sobre a matemática dos babilônios são tabletes de argila encontrados por arqueólogos que vêm trabalhando sistematicamente desde antes da metade do século XIX, tendo já desenterrado mais de 500 mil tabletes, dos quais quase 400 versando sobre matemática, como listas de problemas e tabelas numéricas (EVES, 2008, p. 58-60). A maior parte do conhecimento do conteúdo desses tabletes não é anterior a 1935, devendo-se grande parte ao trabalho de F. Thureau-Dangin e Otto E. Neugebauer. Thureau-Dangin considerou o trato babilônico dispensado às equações quadráticas semelhante à álgebra retórica da Idade Média e Neugebauer deu ênfase ao caráter *numérico* da disciplina sem se comprometer com qualquer interpretação específica (ALMEIDA, 2011, p. 285).

Convém notar que a técnica geométrica dos babilônios para resolver equação quadrática é suposta por interpretação, pois em nenhum tablete há algum diagrama esclarecedor de tais procedimentos geométricos que outrora pudessem ter sido usados (ALMEIDA, 2011, p. 320). A matemática da antiga Babilônia, o mais antigo corpo de conhecimento matemático do mundo, deriva de duas tradições separadas, uma de base oral, a "álgebra dos agrimensores" fortemente relacionada com enigmas relativos à geometria de "cortar e colar" e uma cultura burocrática de contabilidade, estabelecida pela tradição literária dos escribas (ROBSON, 2001, p. 170).

Almeida (2011, p. 297) diz que há certos tipos de problemas babilônicos nos quais devem ser encontrados os lados de um retângulo do qual a área e a soma (ou a diferença) entre seus dois lados é conhecida. Knuth (1972, p. 672) observa esse tipo de situação em um problema que pede as medidas do comprimento e da largura de uma cisterna, conhecidos a altura, o volume e a diferença entre o comprimento e a largura.

O exemplo seguinte, apresentado no tablete YBC 6967, mostra a sequência de operações realizadas pelos babilônios para solucioná-lo. O problema pede o recíproco[1] de um número se esse excede o número de 7. Um número e o seu recíproco, no sistema de numeração babilônico, devem ter produto igual a 60 que é a base desse sistema, portanto as condições do problema, adaptadas à notação atual e ao sistema decimal de numeração, podem ser formuladas assim:

$$x.y = 60 \text{ e } x - y = 7$$

Para resolvê-lo, as operações dadas passo a passo são:

(i) Divida 7 por 2 e o resultado é $\frac{7}{2}$ → $7 \div 2 = \frac{7}{2}$;

(ii) Multiplique $\frac{7}{2}$ por $\frac{7}{2}$ obtendo $\frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$ → $\frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$;

(iii) Adicione 60 a $12\frac{1}{4}$ obtendo $72\frac{1}{4}$ → $60 + 12\frac{1}{4} = 72\frac{1}{4}$;

(iv) Encontre a raiz quadrada de $72\frac{1}{4}$ obtendo $8\frac{1}{2}$ → $\sqrt{72\frac{1}{4}} = 8\frac{1}{2}$;

(v) Escreva $8\frac{1}{2}$ duas vezes;

(vi) De um subtraia $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ e em outro adicione essa mesma quantidade;

(vii) O recíproco é 12 e o número é 5. → $8\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - 3\frac{1}{2} = 5$ e $8\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + 3\frac{1}{2} = 12$.

Alguns dos passos descritos eram realizados consultando tabletes de tábuas numéricas, como multiplicações, quadrados, raízes, recíprocos, afirma Roque (2012, p. 64). Assim era feito, por exemplo, no passo (iv) acima, no qual se procura na tábua a raiz quadrada de $72\frac{1}{4}$ obtendo daí o resultado $8\frac{1}{2}$.

Nesse exemplo os números recíprocos seriam os comprimentos desconhecidos dos lados de um retângulo de área 60, com o maior deles excedendo o menor de 7 unidades. As condições do problema traduzidas com as duas

---

[1] A ideia de recíproco e sua utilização pelos babilônios é apresentada em detalhes em WAERDEN, 1988 – p. 43.

equações geram facilmente uma equação quadrática fazendo $x - 7 = y$ e em seguida $x(x-7) = 60$ ou $x^2 - 7x = 60$.

Essa última equação pode ser resolvida com os sete passos citados, como se fosse uma equação e sua fórmula. A escrita seguinte dá esse encaminhamento:

$$x = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 60} + \frac{7}{2} \tag{1}$$

$$x = \sqrt{\frac{49}{4} + 60} + 3\frac{1}{2} \tag{2}$$

$$x = \sqrt{12\frac{1}{4} + 60} + 3\frac{1}{2} \tag{3}$$

$$x = \sqrt{72\tfrac{1}{4}} + 3\tfrac{1}{2} \tag{4}$$

$$x = 8\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} \quad e \quad y = 8\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} \tag{5}$$

$$x = 12 \qquad e \qquad y = 5 \tag{6}$$

Esse exemplo, assim como outros, teve nova tradução na década de 1980, conforme dito em Almeida (2011, p. 285) e Roque (2012, p. 66), e foi entendido por meio da técnica geométrica de “copiar e colar” para a obtenção de equivalência de áreas, na forma apresentada pelas FIGURA 1, FIGURA 2 e FIGURA 3 que é a sequência que resolve equações do tipo $x^2 + px = q$. Equações do tipo $x^2 - px = q$ entretanto, que é o caso do exemplo anterior, não têm um retângulo acrescido ao quadrado, mas retirado dele, pois aqui é a diferença conhecida e não a soma. O retângulo formado nesse primeiro passo é tratado em seguida da mesma forma que as três figuras anteriores descrevem, isto é, rearranja-se um retângulo de largura igual ao que foi retirado, criando-se uma figura em forma de L de lados iguais, denominada *gnomon* (hexágono côncavo), no mesmo formato da FIGURA 2, para em seguida ser completada com um quadrado pequeno que falta para se obter uma figura quadrada maior, da qual se sabe a área. A consulta a um tablete que relaciona números quadrados com suas raízes dá o lado do quadrado formado, donde se pode concluir a medida não conhecida.

Segundo Katz *apud* Pitombeira (2004, p. 6) os procedimentos para resolver muitos problemas que conduzam a equações quadráticas são dados sob a forma do sistema $x + y = a$ e $x \cdot y = b$, sugerindo que houvesse a investigação por parte dos escribas babilônios da relação entre o perímetro e a área de uma superfície retangular. Nas palavras de Katz[2]:

> Parece que antigamente muitos acreditavam, por exemplo, que a área de um terreno dependia somente de seu perímetro. Há várias histórias que indicam que os que sabiam que isso não era verdade se aproveitavam dos que nisso acreditavam. É assim plausível que os escribas babilônios, a fim de demonstrarem que retângulos de perímetros iguais podiam ter áreas diferentes, construíram tabelas de áreas b relacionando-as com o perímetro constante $2a$, usando valores diferentes para a base x e a altura y.

Com base nessa ideia, Burton (2011, p. 67) sugere uma tabela com a qual poderiam os babilônios ter trabalhado, na qual as diversas áreas dos retângulos, de mesmo semiperímetro, mas de lados diferentes, são tabuladas, no intuito de observar como a variação dessas áreas ocorreria, considerando as diferentes medidas dos lados do retângulo. O exemplo dele fornece o semiperímetro $x + y = a = 20$, com a tabulação das variações dos lados x e y conforme as igualdades $x = \frac{a}{2} + z$ e $y = \frac{a}{2} - z$ para valores inteiros de z variando de 0 até 9, conforme a tabela da FIGURA 4.

FIGURA 4: TABELA RELACIONANDO SEMIPERÍMETRO FIXO E ÁREA VARIÁVEL

	$x = \frac{a}{2} + z$	$y = \frac{a}{2} - z$	$b = xy$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$
$z = 0$	10	10	100	0
$z = 1$	11	9	99	1^2
$z = 2$	12	8	96	2^2
$z = 3$	13	7	91	3^2
$z = 4$	14	6	84	4^2
$z = 5$	15	5	75	5^2
$z = 6$	16	4	64	6^2
$z = 7$	17	3	51	7^2
$z = 8$	18	2	36	8^2
$z = 9$	19	1	19	9^2

FONTE: Burton (2011, p. 67)

[2] KATZ, Victor J. – *A History of mathematics – an introduction*. New York: HarperCollins, 1993, p. 32.

O professor Burton explica que os números na tabela permitem concluir que as áreas decrescem com o crescimento de z, e que a diferença $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$ sempre fica igual ao quadrado de z, isto é, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = z^2$.

Em algum momento, sugere o professor, os babilônios perceberam que poderiam inverter o procedimento e determinar z a partir do valor de $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$, desse modo teriam $z = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$, o que permitiria obter as medidas x e y, dos lados, com as expressões seguintes:

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \quad \text{e} \quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\ .$$

Um exemplo que merece ser citado é o problema 7 do tablete BM 13901. Esse tablete foi classificado por Thureau-Dangin e Otto Neugebauer como um dos mais velhos do período babilônico antigo, ~1800 a.C. (ALMEIDA, 2011, p. 291 e 294). Diz o problema: “Adicionei sete vezes o lado de meu quadrado a onze vezes a superfície, obtive $6;15$”. Klukovits (2011, p. 150) observa que a solução apresentada para esse problema, expresso na forma atual pela equação $11x^2 + 7x = 6\frac{1}{4}$, faz uso da transformação $y = 11x$ ao multiplicar num primeiro passo toda a equação por 11, permitindo que o termo linear $b = 7$ não mude, favorecendo assim uma interpretação geométrica que era usual. A equação quadrática $11x^2 + 7x = 6\frac{1}{4}$ multiplicada por 11, fica $(11x)^2 + 7(11x) = 66\frac{11}{4}$, ou $(11x)^2 + 7(11x) = 68\frac{3}{4}$. Isso seria equivalente hoje à mudança de variável $y = 11x$, transformando a equação original em $y^2 + 7y = 68\frac{3}{4}$. O texto do tablete, por sua vez, contém um método de solução similar ao que foi mencionado anteriormente, isto é, tomando 7 pela metade $\left(\frac{7}{2}\right)$; multiplicando $\frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ $\left(\frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}\right)$; somando com $68\frac{3}{4}$ $\left(12\frac{1}{4} + 68\frac{3}{4}\right)$ obtém-se 81 que é o quadrado de 9, por fim, subtrai-se $\frac{7}{2}$ de 9 para determinar y, que fica $\frac{11}{2}$, retoma-se então a troca de variáveis para encontrar $x = \frac{1}{2}$, ou $x = 30$ na base 60.

Pitombeira (2004, p. 4) sugere que esse seja um método precursor da ideia de mudança de variável, ainda que fundamentado numa ideia geométrica.

Notadamente, nos exemplos de equações quadráticas resolvidos pelos babilônios, os dois métodos famosos creditados ao matemático árabe al-Khwarizmi, *al-jabr* e *al-muqabala*, eram conhecidos e usados pelos escribas da Mesopotâmia do Antigo Império Babilônico. No entanto, Klukovits (2011) observa, os babilônios nunca formularam o uso desses métodos como regra geral aplicável a qualquer equação. Foi al-Khwarizmi o primeiro estudioso que os indicou como regra geral.

2.3 UM POUCO SOBRE A ABORDAGEM GREGA

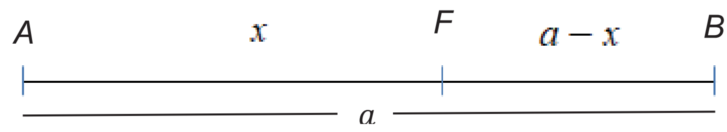
Eves (2004, p. 90) comenta que parece não haver dúvida de que os maiores cientistas do mundo antigo viveram na Grécia. Entre 1700 a.C. e 1200 a.C. despontou na ilha de Creta uma civilização que dominava a escrita e a leitura, os minoicos. A parte continental era habitada por um povo menos adiantado, mas também alfabetizado, os micênicos. Passando esse período, tanto uma quanto outra civilização foi destruída por invasores bárbaros vindos da Ásia, os dórios. A escrita desaparecera dado o colapso dessas civilizações, porém foi reintroduzida por volta de 800 a.C. pelos mercadores fenícios do Oriente Médio.

O período seguinte da história grega é conhecido como Período Helênico, com progresso intelectual e científico surpreendentes. São desse período, por volta do sexto século a.C., os matemáticos Tales e Pitágoras. Esses matemáticos e outros relatam ter viajado para o Egito e para a Babilônia encontrando nessas culturas o material para o desenvolvimento de suas geometria e astronomia (WAERDEN, 1988, p. 83).

A resolução que os gregos deram às equações quadráticas não foi em termos de números, mas por meio de segmentos e áreas, supostamente, segundo Waerden (1988, p. 125), por terem dificuldade conceitual com irracionais, entretanto há que se considerar que essa dificuldade não existia, tendo em vista que os gregos não concebiam os irracionais.

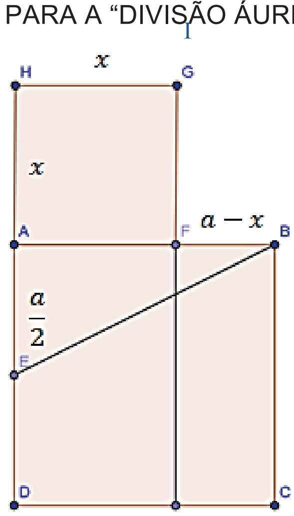
Os pitagóricos sabiam dividir um segmento de reta em média e extrema razão, cuja construção, possivelmente feita de forma análoga ao processo geométrico que se encontra nos *Elementos* de Euclides, pelo processo conhecido como “aplicação de áreas”, equivale à resolução de uma equação quadrática. Para isso, seja $AB = a$ e $AF = x$, como na FIGURA 5. A questão é encontrar o ponto F que divide o segmento de medida a de tal forma que $\frac{a}{x} = \frac{x}{(a-x)}$.

FIGURA 5: O PONTO F PROPORCIONA A DIVISÃO ÁUREA PARA $\overline{AB}$



Em um segmento de reta $\overline{AB}$, o ponto que o divide segundo essa proporção, é encontrado construindo inicialmente o quadrado $ABCD$ sobre $\overline{AB}$. Encontra-se E, ponto médio do segmento $\overline{AD}$. A medida de $\overline{EB}$ é então transportada, a partir de E, para o prolongamento da semirreta $\overrightarrow{EA}$ determinando desse modo H tal que $\overline{EH} = \overline{EB}$. O quadrado $AHGF$ fornece o ponto F procurado. Essa construção é mostrada na FIGURA 6 a seguir.

FIGURA 6: SOLUÇÃO DE EUCLIDES PARA A “DIVISÃO ÁUREA” (Produz uma equação quadrática).



Essa construção dá a solução da situação proposta pela proposição 11 do livro II dos *Elementos*, encontrando a medida x que resolve a igualdade entre as áreas do retângulo $FBCI$ e do quadrado $AHGF$. Essa igualdade pode ser escrita assim:

$$(a - x)a = x^2$$

ou

$$x^2 + ax = a^2$$

Pode ainda a igualdade ser escrita como é usualmente enunciada pela proporção áurea cujo texto diz “o todo está para a maior parte assim como a maior parte está para a menor”, isto é:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{(a-x)} \qquad (1)$$

A construção apresentada permite encontrar a raiz positiva da equação quadrática estabelecida.

A validade do processo geométrico é verificada observando o triângulo EAB, retângulo em A. Aplicando Pitágoras tem-se:

$$(EB)^2 = (AE)^2 + (AB)^2$$

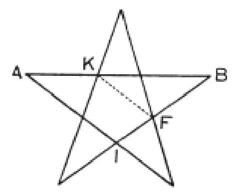
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = (a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + ax = a^2$$

A proporção (1) apresentada acima é observada na figura seguinte, conhecida como pentagrama. Nessa figura, K é o ponto que divide $\overline{AB}$ em média e extrema razão e F é o ponto que divide $\overline{IB}$ segundo essa mesma proporção. Essa figura foi encontrada nos desenhos babilônicos antes dos gregos, sendo esse, outro ponto de contato entre a Babilônia e a mais antiga matemática pitagórica (WAERDEN, 1988, p. 101).

FIGURA 7: PENTAGRAMA



(FONTE: Waerden, 1988, p. 101)

O livro II dos *Elementos* apresenta uma “álgebra geométrica” que tomara o lugar da antiga “álgebra aritmética” herdada da babilônia, servindo aos mesmos fins que a atual álgebra simbólica. Diagramas construídos com régua e compasso permitiam criar argumentos com base em somas e diferenças de áreas e desse modo equações eram resolvidas.

2.4 ABORDAGEM CHINESA

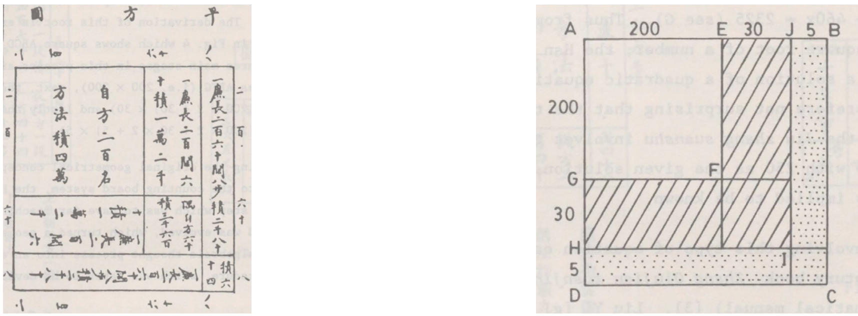
A matemática antiga da China tem seus registros mais longínquos provenientes de dois textos, *Zhou bi suan jing* (clássico aritmético do *gnomon* e dos caminhos circulares do céu) no qual surgem pela primeira vez as equações quadráticas, a partir do modo como demonstravam o Teorema de Pitágoras, e o *Jiu zhang suan shu* (Nove capítulos sobre a arte matemática). O primeiro desses textos é estimado que tenha surgido em torno do ano 100 a.C. enquanto o segundo tem sua origem considerada dentro de um intervalo de 200 anos a partir do ano 100 a.C. (Yong, 1986, p. 9).

A professora Lam Lay Yong, da Universidade Nacional de Singapura, no seu texto de março de 1986 apresentado à Sociedade Matemática de Singapura, revela a pesquisa que realizou sobre o desenvolvimento das equações quadráticas na China desde a antiguidade até o início do século XIV. Nesse estudo ela esclarece como era no mundo antigo conceituada inicialmente uma equação quadrática, observando que símbolos matemáticos eram inexistentes e expressões matemáticas estavam em forma verbalizada. Em seguida mostra como eram resolvidas essas equações.

Uma segunda aparição das equações quadráticas surge na China antiga a partir do método de extração da raiz quadrada, diz a professora Yong.

O método chinês de extração da raiz quadrada determina, passo-a-passo, cada um dos algarismos que compõe o número que é a raiz procurada, iniciando pela maior ordem e indo até a ordem das unidades, sendo um quadrado perfeito. A ideia é encontrar o maior quadrado de lado inteiro que “cabe” no radicando, subtraí-lo do radicando e, para o resto, que é um *gnomon*, encontra-se a aproximação seguinte, fazendo nesse passo $x^2 = x$. A figura seguinte mostra o quadrado de onde se origina esse processo.

FIGURA 8: EXTRAÇÃO DE RAIZ QUADRADA NA CHINA (em chinês à esquerda)



(FONTE: Yong, 1986, p. 15)

O quadrado da figura acima exemplifica a extração da raiz quadrada do número 55225, que é o problema 12 do Capítulo 4 do texto *Zhou bi suan jing*. Sabiam os chineses que esse número tem como raiz um número de três algarismos $(5.52.25)$, isto é, seria preciso encontrar a, b e c tais que $(a\times 100 + b\times 10 + c\times 1)^2 = 55225$.

Deve-se encontrar primeiro a, algarismo das centenas, tal que o maior quadrado de lado $a\times 100$ esteja contido no quadrado de área 55225, isto é,

$$(a\times 100)^2 \leq 55225.$$

Encontra-se $a = 2$. Tem-se então um quadrado de lado 200, contornado em dois de seus lados por um *gnomon* de área $55225 - 40000 = 15225$.

Na segunda etapa encontra-se o algarismo das dezenas, b. É preciso então que se tenha

$$2\times b\times 200\times 10 + (b\times 10)^2 \leq 15225$$

$$100b^2 + 4000b \leq 15225.$$

Tanto para encontrar o algarismo b como o algarismo c, valores envolvidos nas medidas dos *gnomos*, faz-se uso da substituição x^2 por x, nesse caso, b^2 por b. Tem-se portanto $b = 3$, logo a medida a mais encontrada é 30, totalizando 230.

Para esse exemplo a última etapa é encontrar c. Do quadrado inicial, 55225, já foi encontrado o quadrado $230^2 = 52900$. Como $55225 - 52900 = 2325$, essa é a medida do último *gnomon* que falta considerar. Deve ocorrer então

$$2 \times c \times 230 + c^2 \leq 2325$$

$$c^2 + 460c \leq 2325.$$

Aqui mais uma vez faz-se a substituição x^2 por x, nesse caso, c^2 por c. O valor encontrado é $c = 5$. Portanto o valor final é $23\sqrt{55225}$.

Esse modo de extrair a raiz quadrada foi amadurecido por matemáticos da Dinastia *Han* que realizavam as operações com barra de contagem adaptado do conceito geométrico. Com as barras de contagem conseguiam os chineses antigos, além das equações de 2º grau, resolver as de 3º grau, 4º grau, 5º grau, 10º grau, 14º grau. No caso da extração da raiz quadrada, um problema de 2º grau, foi desenvolvido um método geral, transformando o conceito geométrico envolvendo um processo de pensamento algébrico em uma linguagem de procedimento aritmético, que mais tarde seria consolidado como um algoritmo (Yong, 1986, p. 16). Esse algoritmo de extração da raiz quadrada foi ensinado no ensino fundamental no Brasil até a década de 1990.

Problemas envolvendo esse tipo de equação são encontrados em um texto do século V de Zhang Qiujian, diz a professora Yong. Porém foi Liu Yi (séc. XII) no seu texto *Yi gu gen yuan* (Discussões Sobre as Fontes Antigas) quem registrou uma gama maior de métodos para resolver equações quadráticas. Esse texto se perdeu mas diversos desses métodos foram registrados e analisados por Yang Hui (1275) em seu texto *Tian mu bilei cheng* chu *jiefa* (Regras Práticas de Matemática para Agrimensura). Os métodos resgatados de Liu Yi levam em consideração geometria de áreas. A ideia geométrica é apresentada com diagramas retangulares que revelam diferentes fracionamentos e formas, tornando impossível, segundo Yong, abstrair um método geométrico comum para resolver uma equação quadrática geral. No entanto, continua Yong, quando esses vários métodos foram transcritos para operações com as barras de contagem, foi revelado que havia semelhanças correspondentes nas etapas das diferentes operações. Assim, um método aritmético geral para extrair a raiz de uma equação quadrática, foi percebido no quadro de contagem.

2.5 RESOLUÇÃO APRESENTADA POR VIÈTE

Conforme dito na apresentação, François Viète (1540-1603) se diferencia de seus predecessores por apresentar "uma proposta sistemática para o uso de letras na teoria das equações" conforme Carvalho *et al* (2001, p. 13). Com base nessa ideia, Viète propõe a resolução de uma equação quadrática geral fazendo uso de substituição de variáveis, cujo objetivo dessa estratégia é transformar a equação inicial em uma equação quadrática incompleta. Esse método de Viète para solucionar a equação $ax^2 + bx + c = 0$, é apresentado por Fragoso (1999, pp. 56, 57 e 58) e descrito a seguir:

Na equação $ax^2 + bx + c = 0$ é feita a substituição $x = u + v$, ficando:

$$a(u + v)^2 + b(u + v) + c = 0$$

$$au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0$$

Fazendo o agrupamento dos termos em $\boldsymbol{u}$ obtém-se:

$$a\boldsymbol{u}^2 + (2av + b)\boldsymbol{u} + av^2 + bv + c = 0 \qquad \text{(i)}$$

O próximo passo constrói uma equação incompleta de grau 2, para tanto impõe que o coeficiente do termo em $\boldsymbol{u}$ seja igual a zero:

$2a\boldsymbol{v} + b = 0$, obtém-se $\boldsymbol{v} = \frac{-b}{2a}$

Isso pode ser feito uma vez que $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são arbitrárias e a é diferente zero, sendo imposta apenas uma condição a mais sobre essas parcelas que compõe o valor de x.

Substituindo o valor encontrado para $\boldsymbol{v}$ na equação (i) obtém-se a igualdade:

$$4a^2\boldsymbol{u}^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Conclui-se então que:

$$\boldsymbol{u} = \pm \frac{\sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

Mas como $x = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v} = \frac{-b}{2a}$, a expressão obtida para a incógnita x fica:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

Esse método devido a Viète é apresentado em diversos livros didáticos brasileiros, conforme Rocha (ROCHA, 2019).

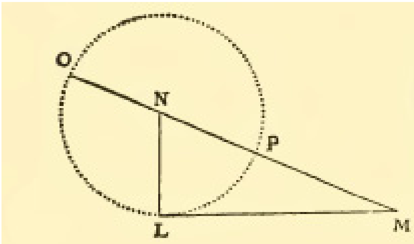
Pitombeira (2004, p. 33) observa que Viète trata as equações quadráticas pensando os números negativos como quantidades a serem subtraídas, assim também era pensado por Stifel (1487-1567), o que permitia que uma única forma padrão pudesse expressar os diferentes tipos de equações quadráticas. É somente com Stevin (1548-1620) que os coeficientes negativos nesse tipo de equação passam a ser considerados como números negativos propriamente ditos.

2.6 UMA DAS RESOLUÇÕES APRESENTADAS POR DESCARTES

No final do século XVI nasce na França René Descartes. Seu mais célebre tratado, escrito quando estava na Holanda e finalizado em 1637, foi *Discours de la méthode*, o qual contém três textos tidos como apêndices, um dos quais intitula-se *La géométrie*. Nessa obra, pela primeira vez, as letras iniciais do alfabeto $a, b, c,$ ... são utilizadas para representar constantes e as últimas $x, y, z,$ ... para representar variáveis e incógnitas e é nesse contexto que a fórmula para resolver equação quadrática aparece segundo a notação atual (SORELL, 2000, p. 19). Esse autor afirma ainda que foi Descartes quem mostrou como todas as quantidades entre as quais há relações que podem ser expressas em números podem ser representadas na geometria por linhas, retas e curvas, podendo ser também representadas por notação algébrica.

Segundo Roque (2014, p.181), a Geometria de Descartes descreve as propriedades das curvas por meio de proporções. A primeira parte de *La géométrie* contém instruções para resolver equações quadráticas geometricamente, nas quais parâmetros e incógnitas são interpretados como segmentos. Para resolver a equação $x^2 = ax + b^2$ o procedimento era feito com base em um diagrama construído com régua e compasso conforme construção apresentada na FIGURA 9.

FIGURA 9: SOLUÇÃO DE DESCARTES PARA $x^2 = ax + b^2$.



(FONTE: Descartes, 1637, p. 302)

Constrói-se um triângulo retângulo com o cateto $\overline{LM}$ medindo b, raiz quadrada da quantidade conhecida, e $\overline{LN}$ medindo $\frac{a}{2}$. Traça-se a reta unindo M e N, determinando com a circunferência de centro N e raio a os pontos O e P. A medida x, raiz da equação quadrática, é dada por $\overline{MO}$ pois, sendo semelhantes os triângulos ΔMOL e ΔMLP, tem-se que $\frac{MO}{LM} = \frac{LM}{MP}$ ou, de outro modo, $MO \cdot MP = LM^2$. Sendo $MO = x$ e $MP = x - a$, conclui-se que $b^2 = x \cdot (x - a)$ ou $x^2 = ax + b^2$. A resolução dada por Descartes é textual entremeada com expressões algébricas cujas notações simbólicas são muito parecidas com as atuais.

2.7 OUTRAS CONTRIBUIÇÕES

Os matemáticos que estão citados a seguir foram mencionados pelo professor Pitombeira (2004, p. 30-40), sendo o primeiro deles, Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, alcunha que significa filho de Bonacci.

Entre os séculos XII e XIII viveu esse matemático, que embora não tenha contribuído de forma original sobre o tema aqui em estudo, destaca-se também por ter difundido a matemática árabe no ocidente, apresentando a resolução de equações quadráticas no seu livro *Liber Abbaci*, escrito em 1202, a partir do qual deu-se início no progresso da matemática ocidental comparativamente à matemática árabe da época.

Outro matemático, que o autor faz referência, é Benedetto de Florença, do século XV. Sua obra mais importante foi publicada em 1463, *Trattato di praticha d'arismetica*. Nessa obra Benedetto mostra como resolver algumas equações quadráticas com exatamente as mesmas resoluções apresentadas por al-Khwarizmi. Além das equações que já haviam sido resolvidas pelo árabe, esse matemático apresenta a resolução de certo tipo de equação do 3º grau e algumas equações biquadradas do 4º grau.

Outros tantos italianos, segundo Pitombeira, contribuíram para o estudo das equações algébricas, inclusive a quadrática.

Retomada por Jacob Steiner, matemático suíço que viveu de 1796 a 1863, a equação quadrática recebe uma nova abordagem geométrica, na qual as soluções reais, positivas ou negativas, são obtidas por construção.

Pitombeira ainda cita outro método utilizando determinante, o qual parte da equação $x^2 + px + q = 0$ e da igualdade $x = u + z$. Um sistema de três equações em x^3, x^2 e x é construído; ao determinante dos coeficientes impõe-se certa restrição e decorrendo do manuseio algébrico conclui-se o valor para a incógnita x em função dos coeficientes p e q da equação inicial. Esse método foi apresentado primeiramente pelo matemático francês Bézout (1730-1783) e pelo suíço Euler (1707-1783) e depois pelo inglês Sylvester (1814-1874) e pelo alemão Hesse (1811-1874).

2.8 UM POUCO SOBRE A ABORDAGEM ÁRABE

Entre os séculos IX e XI, Roque (2012, p. 246) diz ter sido fundada uma instituição importante em Bagdá, comparável ao Museu de Alexandria, conhecida como Casa do Saber. Durante cerca de cinco séculos, a cidade de Bagdá foi um dos maiores centros científicos do mundo, com seus matemáticos tendo conhecimento tanto das obras gregas quanto das indianas. A grande influência das obras clássicas não impediu o surgimento de uma produção matemática original que tinha na álgebra um de seus pontos fortes. Entre os mestres que ensinavam na Casa do Saber havia um matemático e astrônomo que teria sido o mais ilustre do século IX, Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi. Dois de seus escritos, um de aritmética e outro de álgebra, tiveram papéis muito importantes na história da matemática. As traduções latinas de sua obra circularam pela Europa divulgando a numeração hindu com seus numerais, feito que levou alguns leitores descuidados a atribuírem ao autor não só o livro, mas também a numeração. Derivam então de seu nome dois termos, algarismo e algoritmo. Através de seu livro mais importante, *Al-jabr Wa'l muqabalah*, tem-se o vocábulo álgebra como sinônimo de ciência das equações.

Roque (2012, p. 249) afirma ser provável que al-Khwarizmi não conhecesse a obra de Diofanto, pois sua álgebra é inteiramente expressa em palavras, sem nada da sincopação que se encontra na Aritmética de Diofanto. Depois de mostrar como efetuar as quatro operações sobre expressões com quantidades desconhecidas e radicais, al-Khwarizmi descreve seis tipos de problemas possíveis, com coeficientes sempre positivos, envolvendo três espécies de quantidades, as raízes (x), os quadrados (x^2) e os números (a, b, c). A TABELA 1 descreve os tipos de problemas com a respectiva representação atual.

TABELA 1: EQUAÇÕES DE AL-KHWARIZMI (COM TODOS COEFICIENTES POSITIVOS).

Problemas de al-Khwarizmi	Equivalência em notação simbólica atual
1. Quadrados iguais a raízes.	$ax^2 = bx$
2. Quadrados iguais a um número.	$ax^2 = c$
3. Raízes iguais a um número.	$bx = c$
4. Quadrados e raízes iguais a um número.	$ax^2 + bx = c$
5. Quadrados e um número igual a raízes.	$ax^2 + c = bx$
6. Raízes e um número igual a quadrados.	$bx + c = ax^2$

FONTE: Adaptado Roque (2012).

A resolução de cada um deles empregava uma combinação de métodos, aparentemente algébrico, porém realizando operações aritméticas, cuja justificativa tinha suporte geométrico, isto é, era a geometria que assegurava a procedência do método empregado. Cada caso era tratado com exemplos, sendo o método válido para quaisquer dados numéricos dentro daquele caso. Esses seis tipos não eram agrupados, como se faz hoje em dia, numa generalização dada por $ax^2 + bx + c = 0$, admitindo implicitamente que a, b e c são números quaisquer ($a \neq 0$).

As equações de al-Khwarizmi foram estabelecidas combinando as três diferentes quantidades consideradas por ele, de modo a oferecer os tipos possíveis de equações quadráticas conforme observado por Ribeiro (2009, p. 6):

> Percebe-se na obra de al-Khwarizmi uma preocupação na busca pelas formas canônicas possíveis para se resolver qualquer tipo de equação quadrática. Embora ele não dispusesse de uma linguagem simbólica, como temos atualmente, al-khwarizmi conseguiu elaborar um catálogo com as formas canônicas utilizando-se unicamente de linguagem natural e *algumas figuras geométricas*. (Itálico do autor)

Fragoso (1999, pp. 39 e 40) faz notar que para al-Khwarizmi, expressões da forma $x^2 + q = px$ e $px + q = x^2$ com p e q positivos, seriam consideradas equações se a expressão $(x^2 - px) + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ resultasse em número positivo. Desse modo, al-Khwarizmi não considerava $x^2 + 10 = 6x$ como equação, ao passo que $x^2 + 10 = 8x$ representava sim uma equação.

O texto de álgebra de al-Khwarizmi teve mais de uma tradução para o latim segundo a versão em inglês de Louis Charles Karpinski (1915, p. 57). A obra desse autor, apresentada em latim e inglês, é a tradução da versão em latim de Robert of Chester de 1145.

O texto desse matemático, durante séculos, desfrutou de ampla popularidade no original, conforme Karpinski (1915, p. 12), e por séculos mais recentes estendeu sua popularidade através de traduções e adaptações. Segundo Karpinski, o estudo do conteúdo desse trabalho permite uma excursão ao pensamento medieval, sendo o texto tão semelhante ao original quanto possível. Alguns textos de álgebra que surgiram posteriormente ao trabalho de al-Khwarizmi atestam a fama desse matemático, pois a aparição de exemplos numéricos é recorrente por séculos (KARPINSKI, 1915, p. 29). Assim é, por exemplo, com a equação $x^2 + 10x = 39$, que segundo Karpinski “corre como um fio de ouro” através dos textos de álgebra. Luca Pacioli, que teria escrito o primeiro trabalho impresso de álgebra (em 1494) conforme Karpinski (1915, p. 49 e 50), fornece essa equação como exemplo, justificando sua resolução geometricamente do mesmo modo que foi feito pelo matemático árabe. Essa equação resolvida a seguir mostra como al-

Khwarizmi propunha a resolução de uma equação para o quarto caso, sendo essa justamente a equação que ele utilizou como exemplo. Al-Khwarizmi expressava-se dizendo “um *Mal* e dez *Jidhr* igualam 39 dinares”, onde *Mal* designa o quadrado (da quantidade desconhecida), *Jidhr* a raiz (a quantidade desconhecida) e 39 era o *Adad* (a quantidade conhecida) (ROQUE, 2012, p. 252).

Na sua resolução, al-Khwarizmi ia recitando textualmente como realizar os cálculos que forneceriam a raiz da equação, para em seguida determinar o quadrado procurado. Ele inicia dizendo que a equação pergunta qual é o quadrado que combinado com dez de suas raízes dará uma soma total de 39 ($x^2 + 10x = 39$). O algoritmo de resolução foi descrito em Roque do seguinte modo (ROQUE, 2012, p. 252):

> (i) Tome a metade da quantidade de Jidhr (da raiz) ($\frac{10}{2} = 5$).
> (ii) Multiplique essa quantidade por si mesma (5x5=25).
> (iii) Some no resultado os Adad (número) ($25 + 39 = 64$).
> (iv) Extraia a raiz quadrada do resultado ($\sqrt{64} = 8$).
> (v) Subtraia desse resultado a metade dos Jidhr (raiz), encontrando a solução (a solução nesse caso é 8 – 5 = 3).

Esse processo dá a solução positiva de uma equação do tipo $x^2 + bx = c$, pois os passos realizados equivalem a:

(i) $\frac{b}{2}$

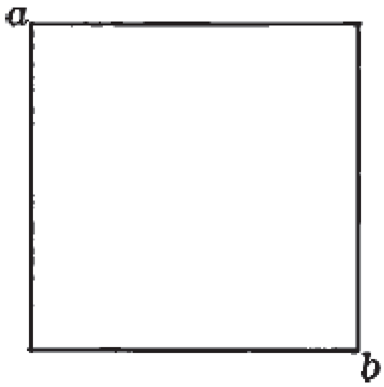
(ii) $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

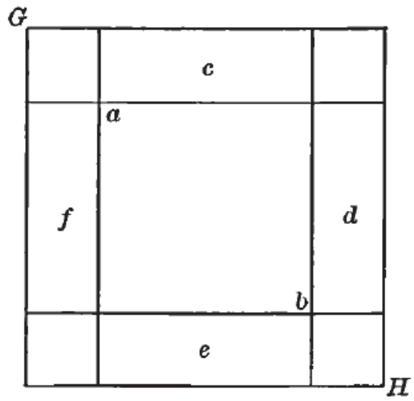
(iii) $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$

(iv) $\sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$, subtraindo por fim $\frac{b}{2}$, resulta $x = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}$.

Em cada tipo de problema um exemplo particular era proposto. A sua resolução dava a ideia de como proceder para problemas similares. Para que o leitor se convença da resolução apresentada, al-Khwarizmi considera necessário fundamentar geometricamente os problemas que eram resolvidos aritmeticamente. Na sua argumentação, a ideia que ele apresenta é a de “completar o quadrado". A seguir, O QUADRO 1 dá a sequência de passos que al-Khwarizmi propõe para justificar as operações que foram realizadas com os números na resolução da equação $x^2 + 10x = 39$.

QUADRO 1: UM MÉTODO DE AL-KHWARIZMI PARA RESOLVER $x^2 + 10x = 39$.

<table>
<tr><th>Demonstração geométrica de al-Khwarizmi</th><th>Construção associada</th></tr>
<tr><td>Construímos um quadrado de lados desconhecidos representando o quadrado (x^2) e junto a sua raiz (x). O quadrado então é ab, do qual qualquer lado representa uma raiz (x).</td><td>

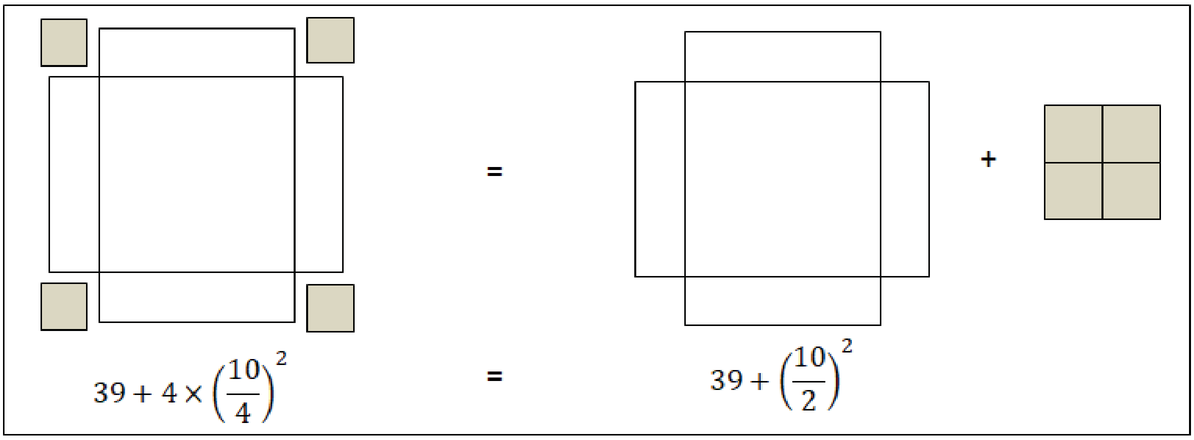
(FONTE: Karpinski, 1915, p. 100)</td></tr>
<tr><th>Demonstração geométrica de al-Khwarizmi</th><th>Construção associada</th></tr>
<tr><td>O tamanho das áreas em cada um dos quatro cantos, que é encontrado multiplicando $2\frac{1}{2}$ por $2\frac{1}{2}$, completa o que falta na área maior ou inteira. Completamos o desenho da área maior pela adição dos quatro produtos, cada um $2\frac{1}{2}$ por $2\frac{1}{2}$; toda essa multiplicação dá 25. E agora é evidente que a primeira figura quadrada, que representa o quadrado do desconhecido (x^2), e as quatro áreas circunvizinhas ($10x$) fazem 39. Quando adicionamos 25 a isto, isto é, os quatro quadrados menores que, de fato, são colocados nos quatro ângulos do quadrado a b, o desenho do quadrado maior, chamado GH, é completado.</td><td>

(FONTE: Karpinski, 1915, p. 102)</td></tr>
<tr><td colspan="2">A soma total disto é 64, dos quais 8 é a raiz, e por isto é designado um lado da figura completa. Portanto, quando subtrairmos de oito duas vezes a quarta parte de 10 $\left(8 - 2 \times 2\frac{1}{2}\right)$, que foram colocadas nas extremidades do quadrado maior GH, permanecerá 3. Cinco subtraídos de 8, 3 necessariamente permanecem, o que é igual a um lado do primeiro quadrado ab.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Portanto 3 expressa uma raiz da figura quadrada (lado), e 9 o próprio quadrado.</td></tr>
</table>

FONTE: Adaptado de Karpinski (1915).

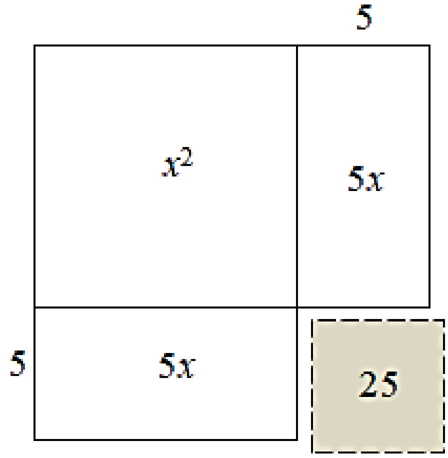
Al-Khwarizmi argumenta que é por isso que se toma a metade de 10 e multiplica-se por ela mesma. Ele faz notar que os quatro quadrados menores que foram colocados, um em cada canto da figura, para torná-la um quadrado, podem ser arranjados formando um quadrado, conforme FIGURA 9. Isso significa que, tirando de um número, duas vezes a sua quarta parte, restará certamente metade do número, que é o mesmo que tirar desse número uma metade, portanto, quatro vezes o quadrado da quarta parte de qualquer número é o mesmo que o quadrado da metade do número. Nos seis passos citados anteriormente para resolver equações quadráticas desse tipo, o passo *(iii)* é justificado de acordo com a FIGURA .

FIGURA 10: JUSTIFICATIVA GEOMÉTRICA DE AL-KHWARIZMI SOMANDO $\left(\frac{10}{2}\right)^2$ NO PASSO (i).



Esse foi um dos argumentos geométricos apresentados por al-Khwarizmi. Outra argumentação geométrica desse matemático, um segundo método, um pouco diferente, conforme Karpinski (1915, p. 104), faz uso também da ideia de “completar o quadrado”, porém fracionando as dez raízes ($10x$) em duas partes iguais, preservando a medida x e dividindo a medida 10 ao meio, gerando dois retângulos (de área $5x$ cada um) localizados um em cada lado do quadrado (x^2), sendo esse o mesmo argumento citado na resolução dos babilônios. A FIGURA 10 a seguir mostra esse fracionamento, ressaltando o acréscimo do quadrado 25 com $x^2 + 2 \cdot (5x)$, isto é, 25 com 39, sendo 64 essa soma. Como foi “completado o quadrado”, a partir daí o procedimento é similar ao método do exemplo anterior. O quadrado completo representa, portanto, a equação $(x + 5)^2 = 64$, isto é, um quadrado cujo lado mede $x + 5$.

FIGURA 10: SEGUNDO MÉTODO DE AL-KHWARIZMI PARA RESOLVER GEOMETRICAMENTE $x^2 + 10x = 39$



Consoante ainda ao quarto caso, isto é, quadrados e raízes iguais a um número, al-Khwarizmi propõe ajustar para um único quadrado as equações que apresentam quadrados a mais ou que apresentam menos que um quadrado na formulação do problema. Ele explica que com as raízes e com os números que acompanham os quadrados o tratamento deve ser similar. A exemplificação segue com duas equações. Uma é $2x^2 + 10x = 48$, que deve ser reduzida inicialmente para $x^2 + 5x = 24$, o que equivale a dividir todos os coeficientes por a, que é o número de quadrados. A outra equação é $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$, reduzida para $x^2 + 10x = 56$, obtida a partir do dobro dos coeficientes da equação dada. Essas equações obtidas, nas quais foi produzido $a = 1$, têm a mesma resolução do caso anterior.

O trabalho de al-Khwarizmi desempenhou um papel importante na história da matemática, pois é uma das principais fontes que chegaram à Europa ocidental apresentando os numerais indianos e a álgebra árabe. Karpinski (1915, p. 44) salienta esses dois aspectos dizendo que, com sua aritmética, apresentando a arte hindu de calcular, houve uma revolução nos processos comuns de cálculo e que as bases para a análise moderna foram lançadas com sua álgebra.

Não foi estabelecida definitivamente as datas de nascimento e morte de al-Khwarizmi. No entanto, segundo Karpinski (1915, p. 25), ele trabalhou na biblioteca do califa al-Mamun que era astrônomo e que reinou de 809 a 833 (EVES, 2008, p. 261). Karpinski diz ser provável que cedo no reinado de al-Mamun, al-Khwarizmi teria trabalhado com tabelas astronômicas indianas, que lhe trouxeram fama imediata, donde surge o estímulo de empreender o trabalho sobre a álgebra e em seguida sobre a aritmética, encorajado pelo interesse do califa na ciência. Completa dizendo ser razoável que o auge de sua atividade literária se deu em torno de 825 d.C.

Karpinski, dedica o capítulo IV para tratar da influência da álgebra de al-Khwarizmi no desenvolvimento da matemática, citando diversos trabalhos que foram escritos depois da álgebra desse matemático, antes e após o advento da imprensa, com os seis modelos de problemas possíveis tal qual ele apresentou. Karpinski considera ainda que esse matemático árabe foi o primeiro a destacar nitidamente o paralelismo entre as soluções analíticas e geométricas das equações quadráticas (Karpinski, 1915, p. 21). Nesse mesmo sentido Høyrup (1990, p. 38) afirma que o método de solução era, na realidade, a aritmetização de processos geométricos, que esse autor se refere como uma “geometria ingênua”, para diferenciá-la da geometria grega. É sob essa ótica que al-Khwarizmi, apresenta um método de solução para equações quadráticas, influenciado pelo legado do método babilônico.

O método de al-Khwarizmi é denominado em livros didáticos de “método árabe” ou “método dos árabes” (ROCHA, 2019).

2.9 A ABORDAGEM NA ÍNDIA E OS TRABALHOS DE BHASKARA

A seguir são apresentadas algumas contribuições devidas aos indianos sobre a resolução de equações quadráticas. Recorrendo a um exemplo do *Lilavati* e a um exemplo do *Bija-Ganita* são apresentados os métodos utilizados por Bhaskara.

Conforme Eves (2008, pp. 247 e 248), a matemática indiana é carente de registros históricos autênticos. Dos registros indianos mais antigos de matemática estão os *Sulvasutras* ou “regras de corda”, um livro de regras de medições feitas com corda. Boyer (1996, p. 142) referindo-se à incerteza da origem desses textos, diz serem atribuídas datas que variam do século VIII a.C. até o século II d.C., numa imprecisão de mil anos. Posterior a essa época, no século V d.C., há o primeiro trabalho astronômico considerado relevante, o *Surya Siddhanta* (“O Conhecimento do Sol”), direcionando a partir daí a matemática mais subordinada à astronomia do que à religião. No decurso de um milênio a Índia sofre nesse período, diversas invasões, durante o qual despontam vários matemáticos indianos eminentes.

Com os matemáticos indianos a álgebra atinge um estágio geralmente reconhecido como intermediário. De retórico ou escrito em palavras passa a ter um certo número de abreviações, denominando-se estágio sincopado (BOYER, 1996, p. 151). Essa caracterização é devida a Georg H. F. Nesselmann, historiador matemático que em 1842 propõe três estágios no desenvolvimento da álgebra, que são: o retórico, o sincopado e o simbólico. Segundo uma nota explicativa (ROQUE, 2012, p. 488), há estudos mais recentes sobre história da álgebra que sugerem uma distinção alternativa, como encontrado em (HEEFER, 2007).

É nos *Sulvasutras* que surgem pela primeira vez na matemática hindu as equações quadráticas, segundo Pitombeira (2004, p. 19), sob as formas $ax^2 = c$ e $ax^2 + bx = c$, sem apresentar as soluções.

No tempo do matemático Brahmagupta (viveu em 628), os indianos aceitavam os números negativos e irracionais e sabiam que uma equação quadrática, com soluções reais, tem duas raízes formais (EVES, 2008, p. 256). Eles unificaram a resolução algébrica de equações quadráticas pelo método familiar de "completar o quadrado".

Na tradução de Colebrooke (1817), além dos textos de Bhaskara, há também a tradução de uma parte do texto de Brahamagupta que trata de aritmética. Nesse texto, observa-se que esse matemático resolvia equações quadráticas com regra aritmética, porém representando a equação com símbolos, mesma representação que Bhaskara, cerca de 500 anos após, também usará (COLEBROOKE, 1817, p. 346). Uma vez estabelecida a escrita da equação quadrática, sua resolução era feita exclusivamente com os coeficientes, não argumentando nesse processo o que ocorria nos dois lados da equação, isto é, a regra era puramente realizada com números, sendo de fato aritmética.

Dentre tantos matemáticos que a Índia produziu na segunda metade da Idade Média, Bhaskara (algumas vezes citado como Bhaskara II), como dito anteriormente, foi o mais importante matemático do século doze que aí surgiu (BOYER,1996, p. 151). Os procedimentos utilizados por Brahmagupta para resolver equação quadrática foram citados em seus escritos, tanto no *Lilavati* quanto no *Bija-Ganita*. Esses textos abordam regras aritméticas e algébricas, respectivamente, visando a orientação na resolução de problemas envolvendo quantidades desconhecidas.

Esses dois textos de Bhaskara foram escritos originalmente em sânscrito, língua que sobrevive, sendo o meio de expressão mais importante para a literatura sacra de algumas religiões mundiais, dentre elas o hinduísmo (HOUBEN, 2014, p. 3). Tanto um texto quanto outro foram escritos segundo métricas literárias ditadas por essa língua, imprimindo a eles um caráter de oralidade com ritmo e cadência que conduziam e organizavam os expedientes linguísticos. No caso do *Bija-Ganita*, a nota de rodapé 3 da página 275 da tradução de Colebrooke informa que esse tratado foi elaborado segundo um medidor de métrica que se enquadra numa classificação denominada *Anushtubh*, indicando que cada estrofe consiste de quatro versos de oito sílabas, totalizando 32 sílabas por estrofe, entre longas e curtas, formando um número de sub-rotinas, regras e exemplos que chega a 210, ou, com a "peroração", isto é, a conclusão, vai para 219. Na tradução de Colebrooke a numeração dos "versos" do *Bija-Ganita* vai até 225. Ambos os textos recebem de outros matemáticos comentários que surgem em nota de rodapé visando esclarecer as regras de cálculos apresentadas nos temas abordados. Ressalta-se que na Índia, desde tempos imemoriais, existe a tradição de transmitir o conhecimento oralmente. Famílias são incumbidas de estudar, memorizar e repassar aos demais o conhecimento específico que lhes coube, sendo, portanto, as escritas realizadas com versos calibrados com palavras certas para compô-los dando-lhes a sonoridade que pode mais facilmente ser lembrada, o que torna mais fiel sua transmissão.

Colebrooke (1817, p. xxviii) nos diz que esses textos foram inicialmente traduzidos para o persa, séculos após a versão original. O tratado *Lilavati* foi traduzido em 1587 para essa língua pelo poeta conhecido como Faizi durante o império muçulmano Mogol, na época sob o comando do imperador Akbar. A tradução do *Bija-Ganita*, empreendida por Ata Ullah Rashid, ocorreu também durante esse império porém posteriormente, em 1634, sob o comando do imperador Shah Jehan, o mesmo que mandou construir o mausoléo Taj Mahal, obra reconhecida como Patrimônio da Humanidade.

O *Lilavati* é o tratado da Aritmética de Bhaskara. Nele o autor discorre sobre oito operações aritméticas que são explicadas no início do texto do segundo capítulo: adição, subtração, multiplicação, divisão, elevação ao quadrado, elevação ao cubo, extração de raiz quadrada e extração de raiz cúbica. O texto segue com diversos outros temas abordados. São tratadas operações com o zero, problemas envolvendo raízes quadradas, regra de três, problemas de pesos e medidas, problemas sobre séries aritméticas e geométricas, permutações e combinações, problemas de aplicações geométricas (COLEBROOKE, 1817).

Para resolver problemas que podem ser tratados com equações quadráticas, Bhaskara orienta no *Lilavati* a regra aritmética que, em uma sequência de passos, permite encontrar o que inicialmente é desconhecido.

O exemplo a seguir, questionando o número de indivíduos de um bando de gansos, é resolvido no *Lilavati*, cuja tradução de Colebrooke (1817, p. 29) o apresenta como o “verso” 64. Em comentário de nota de rodapé, é esclarecido que em certa época do ano, na Índia, um número enorme de gansos selvagens e outras aves se dirigem para o lago sagrado de nome *Manasarovar*.

“64. Exemplo (a raiz é subtraída e a diferença é fornecida). Um par de um bando de gansos permaneceu na água, e viu sete vezes a metade da raiz quadrada do bando ao lado da costa, cansada da diversão. Diga-me, querida garota, o número do bando.”

Para resolvê-lo, Bhaskara dá a regra citando o passo a passo que deve ser realizado com os números, após o qual a raiz (x) é encontrada, para em seguida ser determinada a quantidade desconhecida que é o seu quadrado (x^2).

Na TABELA 2 seguinte tem-se, na coluna da esquerda, a resolução conforme é dada na tradução de Colebrooke e sua respectiva tradução em linguagem moderna à direita.

TABELA 2: RESOLUÇÃO DO *LILAVATI* DE PROBLEMA QUADRÁTICO

Solução aritmética de Bhaskara	Correspondência em linguagem moderna para equações do tipo $x^2 - bx = c$.
Declaração: coeficiente $\frac{7}{2}$; fornecido 2.	$bx + c$
Metade do coeficiente é $\frac{7}{4}$.	$\frac{b}{2}$
Seu quadrado é $\frac{49}{16}$.	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
Acrescentando o número fornecido:	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$

$\frac{49}{16}+2=\frac{49}{16}+\frac{32}{16}=\frac{81}{16}$.	
A raiz quadrada desse é $\frac{9}{4}$.	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$
Somando metade do coeficiente $\frac{9}{4}+\frac{7}{4}=\frac{16}{4}=4$.	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}+\frac{b}{2}$
Seu quadrado é 16, o número do bando requerido.	O valor acima é *x*; o valor pedido é x^2.

(do autor)

O método apresentado por Bhaskara confere um trato aritmético ao problema, fornecendo numa ordenação bem definida, as operações que devem ser realizadas para obtenção do número procurado. Essas operações são realizadas com os dois números que são evidenciados no enunciado do problema: um é o número de vezes que se subtrai a raiz $\left(\frac{7}{2}\right)$ e o outro é essa diferença (2, o par de gansos). A tabela apresenta na coluna da direita os passos que seriam seguidos numa equação quadrática genérica do tipo $x^2-bx=c$.

Esse problema serve de exemplo para o caso em que uma fração da raiz $(\frac{7}{2}x)$ é subtraída do número procurado (x^2) e essa diferença é fornecida (2). O problema seguinte do *Lilavati*, o "verso" 65, exemplifica o caso em que uma quantidade, aumentada pela sua raiz quadrada multiplicada por algum número, é dada, isto é, serve de exemplo para mostrar como resolver de forma aritmética equações que em escrita atual são do tipo $x^2+bx=c$.

Para equações que tenham a quantidade (x^2) aumentada ou diminuída por uma fração $(\frac{1}{n}x^2)$, Bhaskara diz que inicialmente deve-se dividir o número dado (c) e o multiplicador da raiz (b) pela unidade aumentada ou diminuída pela fração $(1\pm\frac{1}{n})$, para somente em seguida ser aplicado o processo mostrado na TABELA 2. Esse passo a mais tem a preocupação de fazer com que o coeficiente a fique igual a 1, tornando possível o uso da regra que resolveu o exemplo anterior. Seria o mesmo que dividir toda a equação por a.

Esse tratamento aritmético para resolver uma situação quadrática é próprio do *Lilavati*. A resolução algébrica de equações quadráticas é apresentada por Bhaskara no seu texto *Bija-Ganita*. A tradução de Colebrooke (1817, pp. 207-226) apresenta no capítulo V a resolução de equações quadráticas com base em regra algébrica, da qual fazem parte *representações de incógnitas* de um modo próprio. Segundo Colebrooke (1817, pp. x-xi) os algebristas indianos usavam símbolos para quantidade desconhecida e também para quantidade conhecida. As sílabas iniciais dos nomes de cores são usadas para representar as incógnitas, sendo, *ka* (*kalaka*, significa preto) é usualmente a segunda incógnita, *ni* (*nilaca*, significa azul), *pi* (*pitaca*, significa amarelo), *lo* (*lohita*, significa vermelho), *pa* (*pandu*, significa branco) e tantas outras (BAUMGART, 1993, p. 262). A primeira incógnita é diferente. A sílaba que a identifica é *ya* inicial de *yávat-távat*, cujo significado é "tanto quanto". É com essa incógnita que é escrita a equação quadrática. Na escrita de uma equação não são usados símbolos de operações e nem o sinal de igualdade. Para escrevê-la, as potências da incógnita (*ya*) são ordenadas de forma decrescente, sendo o número conhecido, ou termo independente, escrito com a sílaba *ru* (*rupa*, significa número puro). Para indicar o produto de duas incógnitas são escritas as simbologias de ambas seguidas do símbolo *bha* (*bhavita*, significa produto). O quadrado de uma incógnita é escrito com a simbologia da incógnita seguida do símbolo *v* (*varga*, significa o quadrado do número). Não há sinal também para identificar uma quantidade positiva, mas uma quantidade negativa tem um ponto sobreposto. Essa notação pode ser vista no exemplo seguinte:

Multiplicando $ya\ \dot{3}\ \ ka\ 2\ ru\ 5$ por $ya\ \dot{6}\ \ ka\ 4\ ru\ 2$

$x\ -3\ \ y\ 2\ \ 5 \qquad x\ -6\ \ y\ 4\ \ 2$

$-3x + 2y + 5 \qquad -6x + 4y + 2$

A resposta nessa notação é apresentada por Bhaskara assim (as caixas tracejadas são do autor):

$\boxed{ya\ \ v\ \ 18}\ \boxed{ka\ \ v\ \ 8}\ \boxed{ya\,ka\ \ bh\ \ \dot{2}\dot{4}}\ \boxed{ya\ \ \dot{3}\dot{6}}\ \boxed{ka\ \ 24}\ \boxed{ru\ \ 10}$

$x\ \begin{matrix} quadrar \\ o\ número \end{matrix}\ 18 \qquad y\ \begin{matrix} quadrar \\ o\ número \end{matrix}\ 8 \qquad x\ \ y\ \ \times -24 \qquad x\ -36 \qquad y\ \ 24$

$\begin{matrix} número \\ puro \end{matrix}\ 10.$

$$18x^2 \quad + \quad 8y^2 \quad - 24xy \quad - 36x + 24y + 10$$

Esse exemplo, na notação atual fica do seguinte modo:

$$(-3x+2y+5)\times(-6x+4y+2)=18x^2+8y^2-24xy-36x+24y+10$$

No texto inicial do capítulo V tem-se a informação de que a “resolução consiste na eliminação do termo médio”, sendo fornecida em seguida a regra. Essa expressão era usada por professores da ciência segundo Bhaskara, subintendendo um uso já consagrado do manejo algébrico desse tipo de equação. Ao solucionar equações quadráticas Bhaskara afirma que a regra utilizada é devida ao matemático, também indiano, Sridhara, que teria vivido pouco mais de um século antes dele. Essa regra, citada no início desse trabalho, é demonstrada em nota de rodapé e o comentador diz ser aplicável apenas no caso em que o mesmo lado da equação compreende o quadrado do desconhecido e o desconhecido também, de modo que se for preciso, a equação deverá ser ajustada para que a regra resolutiva possa ser posta em prática.

Alguns exemplos aparecem em ambos os textos, porém com processos diferentes de resolução, sendo aritmético em um e algébrico em outro. Assim é por exemplo com o “verso” 67 do *Lilavati* e o “verso” 133 do *Bija-Ganita*.

A seguir é apresentado o primeiro exemplo de uma equação quadrática que Bhaskara utilizou no seu texto *Bija-Ganita* com o argumento algébrico de resolução. Na tradução esse exemplo é identificado por “verso” 132 (COLEBROOKE, 1817, p. 211) aparecendo também como exemplo no *Lilavati*, ali identificado como o “verso” 68, (COLEBROOKE, 1817, p. 31). O problema pede para determinar o número de abelhas de um enxame. Há também para esse exemplo um comentário de nota de rodapé esclarecendo que a flor de lótus abre durante o dia e fecha-se à noite, possibilitando que alguma abelha acabe por ficar presa durante um período.

“132. Exemplo: A raiz quadrada de metade do número de um enxame de abelhas se foi para um arbusto de jasmim; e assim são oito nonos de todo o enxame: uma fêmea também está zumbindo para o macho restante, que está zumbindo dentro de um lótus, no qual ele está confinado, tendo sido atraído a ele por sua fragrância à noite. Diga, mulher adorável, o número de abelhas.” (TABELA 3).

TABELA 3: RESOLUÇÃO DO *BIJA-GANITA* DE PROBLEMA QUADRÁTICO.

Solução algébrica apresentada por Bhaskara	Processo correspondente em linguagem atual
Coloque o número de enxames de abelhas *ya v* 2.	$2x^2$
A raiz quadrada da metade é *ya* 1.	$1x$
Oito nonos de todo o enxame são *ya v* $\frac{16}{9}$.	$\frac{16}{9}x^2$
A soma da raiz quadrada e fração, adicionada ao par de abelhas especificado, é igual à quantidade do enxame, ou seja, *ya v* 2.	$x + \frac{8}{9}2x^2 + 2 = 2x^2$
Reduzindo os dois lados da equação para uma denominação comum e descartando o denominador, a equação fica *ya v* 18 *ya* 0 *ru* 0 *ya v* 16 *ya* 9 *ru* 18.	$18x^2 = 16x^2 + 9x + 18$
e, subtração sendo feita, os dois lados ficam *ya v* 2 *ya* $\dot{9}$ *ru* 0 *ya v* 0 *ya* 0 *ru* 18.	$2x^2 - 9x = 18$
(Aqui é aplicada a regra de Sridhara) Multiplicando ambos os lados por oito, adicionando o número 81 e extraindo ambas as raízes, a equação fica *ya* 4 *ru* $\dot{9}$ *ya* 0 *ru* 15.	$16x^2 - 72x = 144$ $16x^2 - 72x + 81 = 225$ $(4x - 9)^2 = 225$ $4x - 9 = 15$
Daí o valor *yávat-távat* sai 6.	$x = 6$
Substituindo o quadrado desse, o número de abelhas do enxame encontrado é 72.	$2x^2 = 72$

(do autor)

Inicialmente, Bhaskara afirma que pela pergunta, há indício que metade do enxame é um número que tem raiz, representa então essa metade por x^2, logo, $2\,x^2$ é a representação para o enxame todo. A regra de Sridhara utilizada por Bhaskara permite eliminar o termo médio pelo método de "completar o quadrado", tornando ambos os lados da equação quadrados perfeitos. Isso ocorre ao multiplicar a equação por $4{\times}2$ e em seguida somando 9^2. No próximo passo, a extração da raiz quadrada produz uma equação do 1º grau, de fácil resolução. Essa equação fornece o valor 6 para a quantidade desconhecida; o dobro do seu quadrado dá o número 72 de abelhas do enxame. Vê-se nessa resolução a forma escrita dada por Bhaskara de cada equação parcial que é promovida durante o processo. Não há a necessidade de justificativa geométrica na sua argumentação.

O exemplo seguinte mostra um problema com duas soluções. Como a regra de sinais para a multiplicação já era conhecida na Índia bem antes do tempo de Bhaskara, é sabido que a raiz quadrada de um número positivo admite duas soluções, uma positiva e outra negativa. Porém, isso não é garantia para o problema ter duas soluções. Neste exemplo, a equação tem a raiz do lado absoluto menor que o número, tendo o sinal negativo, compreendido na raiz do lado que envolve o desconhecido, então colocando-o negativo ou positivo, serão produzidos dois valores para a quantidade desconhecida, sendo casos como esse previstos e orientados por uma regra que justifica a duplicidade de soluções. O argumento no texto de Bhaskara para a ocorrência das duas soluções é dado desse modo.

"139. Exemplo: A oitava parte de uma tropa de macacos, ao quadrado, pulava em um bosque e se deleitava com seu esporte. Doze remanescentes foram vistos na colina, divertindo-se em conversar uns com os outros. Quantos são ao todo?"

TABELA 4: RESOLUÇÃO DO *BIJA-GANITA* DE PROBLEMA QUADRÁTICO (Tropa de macacos).

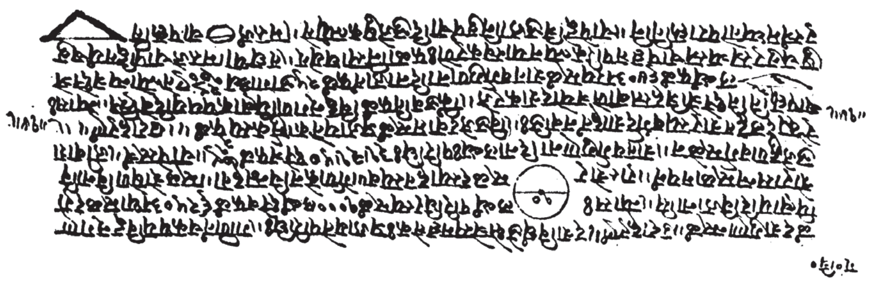
Solução algébrica de Bhaskara	Correspondência em linguagem atual
Nesse caso a tropa de macacos é colocada *ya* 1.	$1x$
O quadrado da oitava parte, somado com 12, sendo igual a toda a tropa, os dois lados da equação ficam *ya v* $\frac{1}{64}$ *ya* 0 *ru* 12 *ya v* 0 *ya* 1 *ru* 0.	$\frac{1}{64}x^2 + 12 = 1x$
Reduzindo estes para uma denominação comum, deixando sair o denominador, e fazendo subtração igual, eles ficam *ya v* 1 *ya* $6\dot{4}$ *ru* 0 *ya v* 0 *ya* 0 *ru* $7\dot{6}8$.	$1x^2 - 64x = -768$
Destes, com o quadrado de trinta e dois adicionados a eles, as raízes são extraídas *ya* 1 *ru* $3\dot{2}$ *ya* 0 *ru* 16	$[x^2 - 64x + 32^2 = 32^2 - 768]$ $[(x - 32)^2 = 256]$ $1x - 32 = 16$
O número da raiz no lado absoluto é aqui menor que o número conhecido, com o sinal negativo, na raiz do lado do desconhecido. Tornando-o então positivo e negativo, obtém-se um valor duplo de *yávat-távat*, 48 e 16.	$1x - 32 = 16$ $x = 48$ ou $1x - 32 = -16$ $x = 16.$

(do autor)

Esses exemplos mostram que entre os indianos havia um método para resolver equações quadráticas que era associado à ideia de completar quadrados, sendo expresso de modo retórico e com desenvolvimento feito a partir de símbolos e representações específicas, propiciando uma roupagem algébrica própria manipulada segundo o uso dos princípios que permeiam a resolução de equações, não necessitando de geometria de áreas para o argumento ser entendido. A comparação que as tabelas acima permitem fazer dos dois formatos apresentados, a notação de Bhaskara e a notação atual, revela estruturas que asseguram similaridades. É o algébrico que encaminha o raciocínio, não havendo figuras que sugiram completar quadrados, mas incógnitas que são manipuladas com regras próprias da álgebra. Nos demais exemplos de resolução de equações quadráticas apresentados no *Bija-Ganita*, o procedimento é igual, as operações são recitadas e seus resultados são registrados com a escrita simbólica. As ações que as operações vão solicitando no decorrer do processo, ao serem realizadas, produzem a escrita da equação. Após prepará-la na forma conveniente, é completado o quadrado e retirado o termo médio, produzindo-se a escrita em forma de potência nos dois lados da equação. A conclusão é realizada a partir de equações mais simples daí originadas, encontrando-se o valor único ou duplicado que a incógnita pode assumir. Para que duas soluções ocorram, a equação que é produzida, do tipo $x - a = \pm b$, com a e b positivos, deve ter $b < a$.

O método dado pela regra creditada a Sridhara, permite um modelo geral para resolver equações quadráticas valendo-se exclusivamente de operações algébricas e aritméticas. Bhaskara nos exemplos do *Bija-Ganita* faz uso desse método, resolvendo as equações procurando eliminar o termo médio, porém, dispensa algum passo que não seja necessário, por exemplo, a multiplicação da equação por $4a$ quando $a = 1$.

FIGURA 11: TRATADO DE SRIDHARA



(FONTE: Cajori, 1928, p. 81)

Sridhara é merecidamente lembrado por Bhaskara. Cajori (1928) diz que esse matemático indiano nasceu em torno de 100 anos antes de Bhaskara, em 991 d.C., porém não há concordância quanto a essa data. Outra fonte sugere que ele teria vivido no final do século IX e começo do século X. Esse matemático explica o método hindu de completar quadrados para a resolução de equações quadráticas (CAJORI, 1928, p. 81). O texto de Sridhara na FIGURA 11 aborda medidas da circunferência. Colebrooke diz ser muito provável que os comentaristas dos textos de Bhaskara tivessem os manuais anteriores dos matemáticos que são citados, sendo o de Sridhara um deles.

3 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Inúmeros problemas capazes de serem resolvidos com equação quadrática podem ser elencados como estando na origem da preocupação dos matemáticos em determinadas épocas no curso de milênios. São questões relacionadas à medição de áreas, construção de cisternas, divisão de heranças, construção de altares de formato geométrico bem definido, interpretação do movimento dos astros conforme estudado na astronomia indiana, e até mesmo questões pedagógicas referindo-se ao ensino dos métodos de resolução de uma equação quadrática.

A seguir, os métodos apresentados nesse trabalho são relembrados em síntese no QUADRO 2. A primeira coluna da esquerda tem meramente a intenção de situar o leitor, sua presença não é para compor uma cronologia.

QUADRO 2: MÉTODOS DE ABORDAGEM DAS EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Época ou ano	**Matemático ou povo**	**Método empregado**	**Alcance do método ou, segundo a perspectiva atual, o tipo de equações quadráticas que resolviam**	**Observações complementares**
Textos de dois períodos: 1800 a.C. – 1600 a.C. e 300 a.C. até o início de nossa era	**Babilônios**	Algoritmo aritmético indicando os passos que devem ser realizados, utilizando-se tábuas em certos passos, como por exemplo, relacionando números e seus quadrados ou raízes. É suposto que o roteiro de resolução era raciocinado com o uso de geometria de áreas, completando o quadrado.	Equações $x^2 = a$ $x^2 + ax = b$ $x^2 - ax = b$ e Sistemas de equações $x \pm y = a$ e $xy = b$ $x \pm y = a$ e $x^2 + y^2 = b$ $xy = s$ e $x^2 + y^2 = b$.	• Eram admitidas apenas as soluções positivas. • Mudança de variável era utilizada para adequar uma equação ao método de resolução. • Não resolviam equação com duas soluções positivas, mas o sistema de equações que a origina.
Entre o séc.VI a.C. e o séc.V a.C.	**Gregos / Euclides / Pitágoras**	Aplicação de áreas com base em construções com régua e compasso.	$x^2 = a.b$ $x^2 + ax = b$ $x^2 = ax + b$ $x^2 + b = ax$	• *Os Elementos* apresenta as soluções. • A aplicação de áreas era conhecida pelos babilônios.
Época ou ano	**Matemático ou**	**Método empregado**	**Alcance do método**	**Observações**

	povo		**ou, segundo a perspectiva atual, o tipo de equações quadráticas que resolviam**	**complementares**
100 a.C. e no séc. XII	**Liu Yi**	Método geométrico originado a partir da extração da raiz quadrada	Equações quadráticas de modo geral.	• Um método mais geral é desenvolvido com base em barras de contagem.
~598 – 665 d.C.	**Indianos / Brahmagupta**	Solução algébrica com notação própria cujo roteiro era justificado com base na ideia de completar o quadrado.	$ax^2 + bx = c$	• Soluções genéricas com apresentação de duas raízes, mesmo quando uma é negativa.
Séc. IX d.C.	**Árabes / al-Khwarizmi**	Álgebra na classificação das equações; solução aritmética cujo roteiro era justificado com base na ideia de completar o quadrado.	$ax^2 = bx$ $ax^2 = c$ $ax^2 + bx = c$ $ax^2 + c = bx$ $bx + c = ax^2$	• Sua resolução era retórica, sem uso de simbolismos, porém usava vocabulário padrão para designar os objetos surgidos nos problemas. • Os coeficientes eram números positivos. • Não eram vistos como casos particulares de uma única equação genérica.
1114 – 1185	**Indianos / Bhaskara**	Solução algébrica com notação própria tendo por base a ideia de completar o quadrado em uma equação; não necessitava da geometria de áreas.	$ax^2 = bx$ $ax^2 = c$ $ax^2 + bx = c$ $ax^2 + c = bx$ $bx + c = ax^2$	• Método geral para resolução de equações quadráticas (**Sridhara**), expresso de modo retórico.
1540 – 1603	**François Viète**	Resolução algébrica com base na substituição da incógnita x pela soma de duas parcelas: $x = u + v$	$ax^2 + bx + c = 0$	• Seu método permitia obter uma equação quadrática incompleta na variável auxiliar u, tornando fácil deduzir o valor de x.
Época ou ano	**Matemático ou povo**	**Método empregado**	**Alcance do método ou, segundo a**	**Observações complementares**

			perspectiva atual, o tipo de equações quadráticas que resolviam	
1596 – 1650	**René Descartes**	Álgebra com construção geométrica de segmentos.	$x^2 = ax + b^2$ $x^2 = ax - b^2$ $x^2 + ax - b^2 = 0$	• Soluções feitas com construções geométricas. O produto de dois números, por proporções, era visto como a medida de um segmento. Apresenta a equação quadrática no formato próximo ao que conhecemos.

De modo geral, as equações quadráticas com as quais esses povos trabalhavam eram originadas por problemas de ordem prática, interpretadas e manipuladas geometricamente. Com os árabes e com os indianos há cada vez mais um caráter algébrico vinculado ao trato dessas equações.

Observa-se na álgebra de árabes e indianos a busca pela listagem de equações de todas as formas canônicas com a respectiva resolução de cada tipo elencado. Al-Khwarizmi fornece uma lista de possibilidades para situações expressas por trinômios de grau inferior a três, possibilitando resolver qualquer problema quadrático de raiz e coeficientes positivos. É esse matemático, como dito anteriormente, que registra como regra geral as duas operações básicas para resolução de equações, a transposição de termos com a operação inversa e a redução de termos semelhantes.

Quando Viète escreveu sua álgebra na segunda metade do século XVI, quatro séculos após Bhaskara apresentar sua obra, o terreno preparado por matemáticos anteriores a ele, com relação ao estudo da equação quadrática, estava bem sedimentado. Viète apresenta com esse cenário uma inovação algébrica, criando uma representação com letras para simbolizar os coeficientes em uma equação, dando a possibilidade da escrita de fórmulas gerais com letras tanto para as incógnitas (usava as vogais) quanto para os coeficientes (usava as consoantes), sem a necessidade do algoritmo ser dado a partir da explicação na forma retórica. Entretanto, segundo Roque (2012, p. 277), não sendo a álgebra uma disciplina constituída na época, a preocupação em enunciar fórmulas gerais era suplantada pela preocupação em usar os métodos algébricos na resolução de variados problemas, tirando Viète de cena como o inventor da fórmula de resolução de equações quadráticas, ainda que sua inovação tenha sido fundamental para a questão.

A ideia de "completar o quadrado" é tão antiga quanto a resolução de equações quadráticas, porém estratégias distintas foram pensadas de modo a adequar a equação para o quadrado ser completado.

Os registros babilônicos indicam que as equações quadráticas completas com o coeficiente de x^2 diferente de 1, eram multiplicadas por esse coeficiente no primeiro passo, em seguida era feito o equivalente a substituição $ax = y$, sendo a partir daí resolvida a equação formada com a incógnita y, pois detinham o conhecimento para resolver equações do tipo $y^2 + by = c$, nas quais o coeficiente de y^2 é 1. Conhecido y, não havia problema em encontrar x.

Os roteiros de resolução de equações quadráticas dos babilônios, permitiam aos escribas encontrar as soluções, mas não necessariamente compreender as justificativas das etapas que são realizadas a cada momento. Segundo Høyrup (1990, pp. 35 e 36) não há nenhuma indicação do padrão de pensamento por trás do método. Esse estudioso exclui a hipótese de que os babilônios usavam álgebra simbólica.

Dos matemáticos árabes que abordaram resoluções de equações quadráticas, deu-se destaque nesse trabalho para al-Khwarizmi, considerada a posterior influência que tiveram seus textos de matemática. Sua *Álgebra* foi terminada por volta de 830, dois séculos após Brahmagupta escrever seu tratado, e com provável influência desse matemático, porém sem o uso de sincopação como fez o indiano (BOYER, 1996, pp.155, 157). Conforme Ribeiro (2009, p. 6), al-Khwarizmi constrói um conjunto de equações possíveis que surgem do trato com situações reais como transações comerciais ou relações geométricas, e as expressa na língua árabe. Usa palavras diferentes para identificar os tipos de números que aparecem nos cálculos assim como o termo *shay* (coisa) para designar uma quantidade desconhecida, possibilitando que fossem expressas as operações aritméticas de forma retórica. As regras são dadas com exemplos para cada tipo de equação, cujas resoluções fornecem somente a solução positiva. Para poder "completar o quadrado", esse matemático necessitava de $a = 1$, caso isso não ocorresse, dividia por a todos os coeficientes.

As orientações do método árabe para resolver equação quadrática, promovem a realização exclusivamente de operações aritméticas e não algébricas, após as quais é encontrada a raiz, de forma similar ao que era feito pelos babilônios. Nesse método é necessário o uso de argumento geométrico para que as operações aritméticas que são realizadas sejam justificadas. Esse é o modo que al-Khwarizmi encontrou para que o leitor se convença de que o método empregado resolve corretamente a equação.

Dentre os matemáticos indianos deu-se destaque para Brahamagupta. Ele viveu em torno de três séculos antes de Sridhara, e esse viveu pouco mais de um século antes de Bhaskara. Brahamagupta apresenta em seu texto de 628 regra geral para resolução de equações quadráticas do tipo $ax^2 - bx = c$, com regra similar a apresentada por Bhaskara, devida, segundo esse, a Sridhara. No caso de Brahamagupta, após a preparação da equação na forma padrão, era aplicada a regra cujo enunciado fornecia uma receita numérica capaz de dar o valor da incógnita ao término das operações indicadas nesse processo retórico. Não havia demonstração da regra, após o seu enunciado era fornecida a resolução de alguns exemplos (aplicações em situações da astronomia).

Em 1150 na Índia, Bhaskara apresenta no *Bija-Ganita* sua álgebra com as equações escritas na forma simbólica, expressando seus dois membros, com regras específicas para essa escrita e valendo-se dos princípios que ordenadamente são utilizados na resolução de uma equação, aqui considerados o agrupamento de termos semelhantes quando no mesmo membro e o uso da operação inversa quando é necessário transpor um termo de um lado da equação para o outro. Bhaskara apresenta um método generalizado diferente dos demais, dado pela regra de Sridhara, cujo processo sintetiza o mesmo conjunto de ações na resolução de qualquer tipo possível de equação quadrática. A argumentação e o formato algébricos é um ponto forte no diferencial evidenciado por esse matemático.

Diferentemente de Brahamagupta, Bhaskara justifica no seu texto o método de resolução das equações quadráticas que emprega, apresentando em seguida aplicações em variados contextos, com exemplos resolvidos algébrica e numericamente para ilustrar o procedimento.

A leitura do texto de Bhaskara promove a compreensão do método cuja justificativa é dada exclusivamente pela via algébrica.

Um aspecto observado no capítulo final do *Bija-Ganita*, a conclusão, é que os tratados de álgebra anteriores, de Brahmagupta, Sridhara e Padmanabha são muito difusos sendo fundamental a compilação trazida pelo *Bija-Ganita*, tornando-se um compêndio bem fundamentado, para satisfação daqueles que o estudam. Nesse texto, um dos temas mais expressivos é a resolução da equação quadrática e sua abordagem com o método de resolução algébrico que Bhaskara apresenta.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudar a história da matemática traz aprendizados favoráveis ao ato de lecionar pois permite observá-la, a matemática, como construção humana, instigada a sua produção pelas necessidades que vão sendo impostas no decorrer dos acontecimentos, dando possibilidade de percebê-la mais como fruto do vigor coletivo do que exclusivamente por genialidade individual.

O trabalho trouxe curtas passagens de povos que viveram em tempos distantes, como por exemplo, os mesopotâmicos. A escrita desses povos, a sua numeração sexagesimal e o trabalho de compor tábuas numéricas, juntamente com tudo o mais que se sabe sobre suas ideias foi obtido a partir da decifração dos tabletes de argila encontrados em escavações. Os mesopotâmicos, tão distantes no tempo, tiveram a sabedoria e a necessidade de cozê-los. Os arqueólogos e toda equipe de profissionais dos tempos modernos souberam encontrar os locais certos para realizar suas escavações e contaram com a sorte para encontrar milhares de tabletes.

A resolução da equação quadrática é um tema de estudo que pode ser pensado de modos diferentes. E isso não acontece unicamente por povos distintos, em lugares distantes ou em tempos diversos. Quando se finaliza o Ensino Médio os alunos já se envolveram com esse tipo de equação de diferentes maneiras. Um método de resolução, por exemplo, que é conhecido dos estudantes é a regra que relaciona a soma e o produto das raízes da equação quadrática com os coeficientes. Com o conhecimento que se tem atualmente sobre álgebra e os recursos simbólicos para escrever equações, é possível criar uma “receita” para encontrar as raízes com base na soma e no produto. Por exemplo, na equação $1x^2 + 2x + 3 = 0$ partindo da soma das raízes (-2) e sabendo que essas raízes são conjugadas, as primeiras parcelas que as formam são iguais em ambas, então cada uma fica com metade de -2, sendo -1. Como o produto de números conjugados encerra um produto notável, o quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo, obtém-se $(-1)^2 = 1$ para o quadrado do primeiro termo; o outro quadrado tem que gerar um número que subtraído de 1 dê 3, isto é, $1 - (?) = 3$ portanto deve ser -2. Isso significa que o produto das segundas parcelas, que são números iguais, deve produzir o número negativo -2, sendo, portanto, números imaginários. Logo a segunda parcela em cada raiz deve ser $\sqrt{2}i$. Assim concluímos que as raízes são:

$$x' = -1 - \sqrt{2}i \quad \text{e} \quad x'' = -1 + \sqrt{2}i$$

A adequação desse método se dá em função da notação que há hoje em dia, fruto do conjunto de saberes que foram sendo acumulados ao longo do tempo sobre esse tema, dentre eles por exemplo, o advento dos números negativos e dos números complexos, assim como também a síntese e a generalização dadas pela álgebra simbólica. Não seria exagero supor que esse método acaba voltando ao passado, porém com recursos atuais, isto é, pode ser realizado com desenvoltura, bastando para isso treinar, sendo possível ensiná-lo, como faziam os babilônios, a partir de uma “receita algorítmica” que indicaria passo a passo o que fazer para a obtenção das raízes da equação quadrática. Note-se que o que é conhecido para sua execução são os dados básicos dos problemas quadráticos desde os babilônios: a soma e o produto das raízes. Esse método, desenvolvido algebricamente, é apresentado por Pitombeira (2004) e Lima, *et al* (2005, pp. 36-40).

Esse trabalho teve como perspectiva identificar as contribuições de Bhaskara para a resolução de equações quadráticas, tendo para isso reunido os métodos de resolução desenvolvidos pelos diferentes matemáticos e povos citados. Ao compará-los foi observado que há uma generalização no método desse matemático indiano que é diferente dos demais. A regra de Bhaskara é citada por ele como sendo de Sridhara, surgindo muito tempo antes do trabalho de Viète, que foi quem introduziu a representação dos coeficientes de uma equação com letras, permitindo a partir daí a escrita da fórmula para resolver equações quadráticas de modo generalizado, unindo no contexto de um único aparato simbólico os casos particulares. Convém notar que a possibilidade dada pela fórmula é, no seu poder de síntese, apresentar o algoritmo de resolução simbolicamente, não excluindo com isso a originalidade do método expresso anteriormente na álgebra de Bhaskara que já permitia a resolução das diferentes equações quadráticas possíveis.

REFERÊNCIAS

A FÓRMULA é de Bhaskara? REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA nº 39, 1º Quadrimestre de 1999, p. 54. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/39/12.htm>. Acesso: 29 out. 2019.

ALMEIDA, Manoel de C. **Origens da matemática:** a pré-história da matemática: o neolítico e o alvorecer da história. Curitiba: Editora Progressiva Ltda., 2011.

BAUMGART, John K. **Historical Topics for the Mathematics Classroom** 2nd ed. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1993.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2ª Edição. São Paulo: Editora Edgar Blucher Ltda., 1996.

BURTON, David M. **The history of mathematics** – An Introduction. Disponível em: <http://www.maths.sci.ku.ac.th/suchai/02731141/hmath2.pdf>. Acesso em: 23 mar. 2018.

CAJORI, F. **A History of mathematical notations**. v 1. Chicago: The University of Chicago Press, 1928. Disponível em: <https://archive.org/details/historyofmathema031756mbp/page/n7>. Acesso: 29 out. 2019.

CARVALHO, F.; BARONE, Jessica; MIORIM, Maria A.; MUNSIGNATTI Jr, Mauro; BEGIATO, Rodolfo G. **Por que Bhaskara?** In *História e Educação Matemática*, v. 2, n. 2, jun./dez. 2001, jan./dez. 2002, p. 123-171.

CASTRUCCI, B., LIMA FILHO, G. **Matemática para a quarta série ginasial.** São Paulo: Livraria Francisco Alves, 1960.

COLEBROOKE, Henry T. **Algebra, with arithmetic and mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bháscara**. London: John Murray, 1817. Disponível em: < https://archive.org/details/algebrawitharith00brahuoft/page/n5>. Acesso: 29 out. 2019.

COPELLO, Karen R. **O uso da história da matemática enquanto recurso didático ao ensino da matemática**: Pareceres de educadores matemáticos. UFSM. Santa Maria–RS, 2014. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/coordmat/images/TCC_2-2014/TCC_KAREN.pdf>. Acesso: 16 mai. 2018.

DESCARTES, René. **The Geometry**. Traduzido do francês e latim por David E. Smith e Marcia L. Latham (fac-símile da 1ª edição de 1637) Chicago, 1925.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FRAGOSO, Wagner da C. **Equações do 2º grau:** uma abordagem histórica. Ijuí: Editora Unijuí, 1999.

HEATON, Henry. **A Method of Solving Quadratic Equations**. The American Mathematical Monthly, Vol. 3, No. 10 (Oct.), pp. 236-237. Mathematical Association of America, 1896. Disponível em: < http://www.jstor.org/stable/2971099>. Acesso: 17 set. 2012.

HEEFER, Albrecht. **On the Nature and Origin of Algebraic Symbolism**. Post-Doctoral Thesis. Ghent University, 2007.

HOUBEN, Jan E. M. **A Tradição Sânscrita entre Memética Védica e Cultura Literária**. Revista Linguagem e Ensino, v.17, n.2, p. 441-469. Pelotas - RS, 2014. Disponível em: < https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01413920/document>. Acesso: 08 fev. 2019.

HØYRUP, J. **Algebra and Naïve Geometry**. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought I. Altorientalische Forschungen, 17, 1, 27 – 69, 1990.

KARPINSKI, Louis C. **Contributions to the history of science**. Part I. Robert of Chester's Latin translation of the Algebra of Al-Khowarizmi. New York: The Macmillan Company, 1915. Disponível em: <https://www.wilbourhall.org/pdfs/MBP/robertofchesters00khuw.pdf>. Acesso: 28 jul. 2018.

KNUTH, Donald E. **Ancient Babylonian Algorithms**. Communications of the ACM. Volume 15–Number 7. Stanford University, July 1972.

LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. **Temas e problemas elementares**, 2ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática–SBM, 2005.

LIVERANI, M. **Antigo Oriente:** História, Sociedade e Economia. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2016.

PEREIRA, Arminda M. Q. **Equações algébricas:** Alguns episódios históricos. Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências – Matemática. Lisboa-Portugal, 2017. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/30373/1/ulfc121576_tm_Arminda_Pereira.pdf>. Acesso: 29 mai. 2018.

PEREZ Y MARIN, A. **Elementos de álgebra**. São Paulo: Escolas Profissionaes Salesianas, 1909.

PITOMBEIRA, João B. **Revisitando uma velha conhecida**. II Bienal da SBM. Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2004.

RIBEIRO, Alessandro J. **A noção de equação e suas diferentes concepções:** uma investigação baseada em aspectos históricos e epistemológicos. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, vol. 2, n° 1, jan./abr. 2009.

ROBSON, Eleanor. **Neither Sherlock Holmes nor Babylon:** A Reassessment of Plimpton 322. Historia Mathematica **28**, pp. 167–206, 2001.

ROCHA, Rodrigo L. da. **Método resolutivo da equação do 2º grau:** uma análise sobre o uso da expressão *fórmula de Bhaskara* nos livros didáticos brasileiros (1883-2019). (Em preparação.)

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 2012.

ROQUE, Tatiana. **Desmascarando a equação:** a história no ensino de que matemática? Revista brasileira de história da ciência, v. 7, n. 2, p. 167–185, jul./dez., 2014.
Disponível em: <www.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=1955>. Acesso: 28 fev. 2018.

SORELL, T. **Descartes:** a very short introduction. New York: Oxford University Press, 2000.

STAVALE, J. **Terceiro ano de matemática**. Segunda Edição. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1935.

VAILATI, Janete de S. **Equações algébricas** – Intrigas e desafios intelectuais. UNICENTRO, Laranjeiras do Sul–PR, 2008. Disponível em:
<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/702-2.pdf>. Acesso: 26 mar. 2018.

WAERDEN, B. L. Van Der. **Science Awakening**. Fifth edition. New Jersey: Princeton Junction, 1988.

YONG, L. Lay. T**he Development of Polynomial Equations in Traditional China**. Texto apresentado no Relatório Anual Geral da Sociedade Matemática de Singapura. Singapura, China, 19 de março de 1986. Disponível em:<https://sms.math.nus.edu.sg › smsmedley › Vol-14-1>. Acesso 5 de agosto de 2019.