UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CLEBER BARRETO DOS SANTOS

UM ESTUDO SOBRE A TEORIA τ-INCLINANTE EM EPIMORFISMOS DE ÁLGEBRAS

CURITIBA

2017

CLEBER BARRETO DOS SANTOS

UM ESTUDO SOBRE A TEORIA τ-INCLINANTE EM EPIMORFISMOS DE ÁLGEBRAS

Dissertação de mestrado apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós Graduação em Matemática do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Profª Dra. Heily Wagner.

CURITIBA

2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

S237e Santos , Cléber Barreto dos
Um estudo sobre a teoria Tau-inclinante em epimorfismos de álgebras / Cléber Barreto dos Santos . – Curitiba, 2017.
153 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

Orientador: Heily Wagner .
Bibliografia: p. 146-148.

1. Álgebra. 2. Teoria inclinante. 3. Teoria Tau-inclinante. I. Universidade Federal do Paraná. II.Wagner, Heily. III. Título.

CDD: 512

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva – CRB-9/1894

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **CLÉBER BARRETO DOS SANTOS** intitulada: **UM ESTUDO SOBRE A TEORIA TAU-INCLINANTE EM EPIMORFISMOS DE ÁLGEBRAS**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 22 de Fevereiro de 2017.

Heily Wagner
HEILY WAGNER
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

FERNANDO ARAÚJO BORGES
Avaliador Externo (UFPR)

Flávio U. Coelho
FLAVIO ULHOA COELHO
Avaliador Externo (USP)

EDSON RIBEIRO ALVARES
Avaliador Interno (UFPR)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor CIÊNCIAS EXATAS
Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA

ATA Nº077

ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE MESTRADO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA

No dia vinte e dois de Fevereiro de dois mil e dezessete às 16:00 horas, na sala Anfiteatro B, Rua Cel. Francisco H. dos Santos, 100 - Jardim das Américas, foram instalados os trabalhos de arguição do mestrando **CLÉBER BARRETO DOS SANTOS** para a Defesa Pública de sua Dissertação intitulada **UM ESTUDO SOBRE A TEORIA TAU-INCLINANTE EM EPIMORFISMOS DE ÁLGEBRAS**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: HEILY WAGNER (UFPR), FERNANDO ARAÚJO BORGES (UFPR), FLAVIO ULHOA COELHO (USP), EDSON RIBEIRO ALVARES (UFPR). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais e, depois, solicitou que os presentes e o mestrando deixassem a sala. A Banca Examinadora, então, reuniu-se sigilosamente e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela APROVAÇÃO do aluno. O mestrando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, HEILY WAGNER, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 22 de Fevereiro de 2017.

Heily Wagner
HEILY WAGNER
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

FERNANDO ARAÚJO BORGES
Avaliador Externo (UFPR)

FLAVIO ULHOA COELHO
Avaliador Externo (USP)

EDSON RIBEIRO ALVARES
Avaliador Interno (UFPR)

À minha família, que sempre me apoiou nessa longa caminhada.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Lourdes e Edivaldo pelo apoio em todos esses anos de estudo e que sempre estiveram à disposição quando eu precisei.

À minha orientadora Heily Wagner que teve tanta paciência nesses dois anos e meio de parceria acadêmica, profissional e pessoal.

Aos meus colegas de graduação, mestrado e doutorado que me acompanharam todo esse tempo de estudo, e pelas maravilhosas discussões matemáticas ocorridas nesse período.

Aos meus amigos Wilian, André, Ingrid, Vivian e tantos outros que puderam dividir um pouco de seu tempo e vida acadêmica comigo.

Aos professores do Departamento de Matemática que sempre estiveram dispostos a transmitir o conhecimento.

À Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro ao projeto de mestrado.

Em especial, agradeço todos os colegas, amigos e professores que tanto me ajudaram nos momentos mais difíceis dessa jornada.

"Magna culpa nostra
Poena danda nobis
Usque ad finem erit dierum."

Epica
"The Last Crusade", 2005.

"Tenhamos as cabeças abertas, mas não tão abertas ao ponto de nossos cérebros se desprenderem delas."

Richard Dawkins
"Ciência, Desilusão e o Apetite pelo Mistério", 1996.

RESUMO

Neste trabalho estudamos a Teoria τ-inclinante introduzida por Adachi, Iyama e Reiten em 2013, como uma generalização da Teoria Inclinante Clássica (**HR82**). É bem conhecido que um módulo inclinante quase completo nem sempre possui dois complementos a módulos inclinantes. Em (**AIR14**), os autores criaram um ambiente que de certa forma contém os módulos inclinantes quase completos, no qual cada objeto, chamado de par de suporte τ-inclinante, possui exatamente dois complementos. Nosso principal objetivo é relacionar esses objetos definidos em certas álgebras A, B, C e R quando R é um produto fibrado dos epimorfismos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$.

Palavras-chaves: Teoria inclinante, teoria τ-inclinante, epimorfismos de álgebras.

ABSTRACT

In this work we study the τ-tilting theory introduced by Adachi, Iyama and Reiten in 2013, as a generalization of the Classic Tilting Theory (**HR82**). Is well known that a almost complete tilting module does not always have two complements to tilting modules. In (**AIR14**), the authors created an environment that contains the almost complete tilting modules in which each object has exactly two complements, these objects are called support τ-tilting pairs. Our main goal is to relate these objects defined in algebras A, B, C and R when R is a pullback of epimorphisms $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$.

Key-words: Tilting theory, τ-tilting theory, epimorphisms of algebras.

SUMÁRIO

NOTAÇÕES BÁSICAS

Abaixo listamos as principais notações usuais utilizadas no texto.

$a = b$	os termos (números, conjuntos, elementos, etc.) a e b são iguais
$a \doteq b$	o termo a é igual ao termo b por definição
$a \neq b$	o termo a é diferente do termo b
$a \leqslant b$	o inteiro a é menor ou igual ao inteiro b
$a \geqslant b$	o inteiro a é maior ou igual ao inteiro b
$a + b$	soma dos elementos a e b
$a - b$	diferença entre os elementos a e b
(a, b)	par ordenado com primeiro termo a e segundo termo b
$a \in A$	a é elemento do conjunto A
$\varnothing$	conjunto vazio
$A \subset B$	A é subconjunto do conjunto B
$A \supset B$	o conjunto A contém o conjunto B
$A \subsetneq B$	A é subconjunto próprio do conjunto B
$A \supsetneq B$	o conjunto A contém propriamente o conjunto B
$A \coprod B$	união disjunta dos conjuntos A e B
$A \times B$	produto cartesiano dos conjuntos A e B
A^n	produto cartesiano $A \times A \times \cdots \times A$ (n vezes)
$A \cup B$	união dos conjuntos A e B
$A \cap B$	interseção dos conjuntos A e B
$A \setminus B$	o conjunto dos elementos de A que não são elementos de B
$\#(A)$	cardinalidade do conjunto A
$f : A \longrightarrow B$	função de domínio A e contradomínio B
$f(x)$	avaliação da função f no elemento x (do domínio de f)
$g \circ f$ (ou gf)	composição das funções f e g
$A \ni a \leftrightarrow b \in B$	relação biunívoca entre os elementos do conjunto A e os elementos do conjunto B
$p \Leftrightarrow q$	as sentenças p e q são equivalentes
$p \Rightarrow q$	a sentença p implica a sentença q
k	corpo algebricamente fechado
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$V \oplus W$	soma direta dos espaços vetoriais V e W
V/W	espaço vetorial quociente de V por W

INTRODUÇÃO

A Teoria Inclinante Clássica começou a surgir nas décadas de 1970 e 1980 no contexto das categorias de módulos sobre álgebras de dimensão finita e atualmente se faz útil para o estudo de diversas áreas da Matemática como, por exemplo, teoria de grupos finitos, geometria algébrica, topologia algébrica, teoria cluster, entre outras.

Esta teoria começou a ser delineada no ano de 1973 por Bernstein, Gelfand e Ponomarev no estudo do Teorema de Gabriel utilizando determinados funtores. Gabriel mostrou em 1972 que uma álgebra de caminhos kQ (onde Q é um quiver finito e k um corpo algebricamente fechado) admitir uma quantidade finita de (classes de isomorfismo de) módulos indecomponíveis é equivalente ao grafo subjacente do quiver Q ser um dos diagramas Dynkin $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$ ou $\mathbb{E}_8$. Ainda mais, nesse caso as classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis estão em bijeção com as raízes de uma álgebra de Lie semissimples. Na tentativa de entender este problema, Bernstein, Gelfand e Ponomarev forneceram uma outra prova do Teorema de Gabriel explorando técnicas relacionadas ao estudo da construção das raízes do grupo de Weyl associado, mostrando que todos os módulos indecomponíveis podem ser construídos a partir de módulos simples. Nesse artigo são definidos os funtores de Coxeter (que são funtores de reflexão, ver (**Mar80**) por exemplo) e mais adiante alguns objetos que são a "primeira versão" de um módulo inclinante que podemos encontrar.

Em 1979, a construção de módulos indecomponíveis através dos funtores de reflexão foi generalizada no artigo (**APR79**), onde surgiram casos particulares de módulos inclinantes, que ainda não eram chamados dessa forma. Supondo que a álgebra A admite um módulo simples $S = eA$ projetivo e não injetivo, define-se o módulo $T = \tau^{-}S \oplus (1-e)A$ e a álgebra de endomorfismos $B = \mathsf{End}_A T$ (onde τ^{-} é o funtor inverso à translação de Auslander-Reiten). O funtor $\mathsf{Hom}_A(T, -)$ pode ser usado para comparar as categorias $\mathsf{mod}A$ e $\mathsf{mod}B$.

Uma outra contribuição efetiva para o desenvolvimento da Teoria Inclinante foi dada por Brenner e Butler (**BB80**) com a axiomatização da noção de módulo inclinante (ainda não utilizando essa nomenclatura), e a equivalência entre certas subcategorias de $\mathsf{mod}A$ e $\mathsf{mod}B$ para $B = \mathsf{End}_A T$ em geral. Nesse artigo ainda é exibido o Teorema de Brenner-Butler que mostra que se T_A é um A-módulo inclinante e $B = \mathsf{End}_A(T_A)$ então ${}_BT$ também é um B-módulo inclinante e $A = \mathsf{End}_B({}_BT)$. Dizemos que uma álgebra B é inclinada se existe um módulo inclinante T sobre uma álgebra hereditária A tal que $B = \mathsf{End}_A T$, isto é, B é a álgebra de endomorfismos de T. Estas noções são importantes pois permitem estudar algumas propriedades da álgebra B, através das propriedades da álgebra A.

O conjunto de axiomas dos módulos inclinantes foi aperfeiçoado e simplificado por Happel e Ringel em (**HR82**) considerando os funtores $\mathrm{Ext}_A^1(T,-)$ e fornecendo a definição que conhecemos hoje:

Um módulo T é dito inclinante parcial se T não possui auto-extensões (isto é, satisfaz $\mathrm{Ext}_A^1(T,T)=0$) e se sua dimensão projetiva é tal que $\mathrm{dp}\, T \leqslant 1$. Se além disso existem dois módulos T_0 e T_1, cujos somandos diretos são também somandos diretos de T e que formam uma sequência exata $0 \longrightarrow A \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow 0$, então T é dito módulo inclinante.

Se T é um módulo inclinante parcial, podemos mostrar que T é inclinante se, e somente se, $|T| = |A|$, onde $|T|$ denota a quantidade de somandos diretos indecomponíveis de T não isomorfos entre si. Além disso, em (**HR82**) podemos ver de forma mais forte a relação entre pares de torção, pares de torção cindidos e módulos inclinantes.

Todo módulo inclinante parcial pode ser completado a um módulo inclinante, isto é, se N é um módulo inclinante parcial, existe um módulo E de tal forma que $N \oplus E$ é um módulo inclinante. O processo de completar módulos inclinantes parciais é denominado de complemento de Bongartz (Teorema 2.14, (**Bon81**)).

No final dos anos 90, Riedtmann-Schofield e Unger ((**RS91**), (**Ung90**)) mostraram que um módulo inclinante básico quase completo, isto é, um módulo inclinante parcial T que satisfaz $|T| = |A| - 1$, pode ser completado a um módulo inclinante básico de, no máximo, duas formas distintas. Além disso, mostrou-se também que existem exatamente duas formas de completar o módulo inclinante básico quase completo T a um módulo inclinante básico se, e somente se, T é um módulo fiel.

Seja $\mathrm{tilt} A$ a subcategoria plena de $\mathrm{mod} A$ formada pelos módulos inclinantes básicos sobre a álgebra A. É possível definir um quiver $Q(\mathrm{tilt} A)$ cujo conjunto de vértices é o conjunto dos módulos inclinantes básicos e onde há uma flecha $T_1 \longrightarrow T_2$ sempre que existir um módulo M, de tal forma que $T_1 = M \oplus X$, $T_2 = M \oplus Y$, com X e Y indecomponíveis, e uma sequência exata $0 \longrightarrow X \longrightarrow M' \longrightarrow Y \longrightarrow 0$. Este quiver define uma ordem parcial em $\mathrm{tilt} A$ da seguinte forma: definimos que $M_1 \geqslant M_2$ se existe um caminho $M_1 \to \cdots \to M_2$ no quiver $Q(\mathrm{tilt} A)$. Neste caso dizemos que um módulo inclinante é mutação do outro. Esta definição consegue recuperar, sob determinado aspecto, a ideia de mutações para as álgebras cluster (ver por exemplo (**Rei10**)).

Esta propriedade pode ser reformulada para a álgebra original considerando os módulos de suporte inclinante que nada mais são do que módulos inclinantes sobre quocientes da forma $A/\langle e\rangle$ onde $e \in A$ é um idempotente da álgebra A. Com isto temos uma generalização razoável para a existência de dois complementos para o caso inclinante básico quase completo. Porém esta generalização é válida apenas para o caso hereditário, ou seja, para o caso de uma k-álgebra de dimensão finita qualquer essa generalização não é válida.

Sabemos que mesmo para uma álgebra hereditária kQ (onde Q é um quiver sem ciclos) nem todos os módulos inclinantes básicos quase completos são fiéis. Desta forma, nem todos os módulos inclinantes básicos quase completos possuem exatamente dois complementos. Desde então diversas tentativas para "corrigir" esta condição têm sido realizadas. Por exemplo em (**BMRRT06**) define-se a categoria cluster $\mathcal{C}_Q$ para uma álgebra hereditária kQ, onde temos objetos cluster-inclinantes (cluster-tiltings) que possuem exatamente dois complementos. Este fato pode ser generalizado para categorias 2-Calabi-Yau, como pode ser visto em (**IY08**).

Uma das tentativas de generalizar a "duplicidade de complementos" é flexibilizar a exigência de dimensão projetiva menor ou igual a 1 por uma condição de finitude da dimensão projetiva, como pode ser visto em (**Hap88**) e (**Miy86**). Esta generalização não satisfaz as propriedades que queremos generalizar.

Outra possível generalização dos módulos inclinantes utiliza a categoria derivada da álgebra A definindo os complexos tiltings e siltings. Pode-se mostrar que os complexos siltings quase completos (que nessa generalização são os equivalentes aos módulos inclinantes quase completos da teoria inclinante clássica) não possuem exatamente dois complementos, e em alguns casos podem possuir uma quantidade infinita de complementos (ver (**Aih13**) e (**AI12**)).

Recentemente, Adachi, Iyama e Reiten introduziram o conceito de Teoria τ-inclinante em (**AIR14**). Um módulo τ-rígido é um módulo M que satisfaz $\mathrm{Hom}_A(M, \tau M) = 0$. Módulos τ-inclinantes são módulos τ-rígidos que possuem $|A|$ somandos indecomponíveis não isomorfos dois a dois. As Fórmulas de Auslander-Reiten (Proposição 3.6) permitem mostrar que módulos inclinantes parciais são módulos τ-rígidos. Desta forma módulos inclinantes são módulos τ-inclinantes (Teorema 3.9), uma vez que para um módulo inclinante M temos que $|M| = |A|$. Isto que mostra que o conceito de módulo τ-inclinante generaliza o conceito de módulo inclinante. Em (**YX16**), Yang e Xu mostraram que esses conceitos coincidem para uma álgebra hereditária e, mais ainda, que esse fato caracteriza a classe das álgebras hereditárias (ver Seção A.1 do Apêndice).

Um módulo de suporte τ-inclinante é um módulo para o qual existe um idempotente $e \in A$ de forma que M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-inclinante. É fácil ver que os módulos τ-inclinantes são módulos de suporte τ-inclinante, e além disso, M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-rígido, se e somente se, M é um A-módulo τ-rígido. Isso permite buscar por módulos τ-rígidos em quocientes da álgebra A da forma $A/\langle e\rangle$. Em (**Ada16**), Adachi usa esse conceito para construir um algoritmo que permite classificar e construir todos os módulos τ-inclinantes sobre uma álgebra da Nakayama (ver Seção A.2 do Apêndice).

Os módulos τ-inclinantes generalizam o conceito de módulos inclinantes com relação a existência de idempotentes no anulador do módulo M, ou seja, enquanto módulos inclinantes são fiéis (e portanto sinceros), os módulos τ-inclinantes são sinceros. Além disso, um módulo τ-inclinante é fiel se, e somente se, é um módulo inclinante (Proposição 3.24 e Corolário 3.25).

Um módulo inclinante parcial satisfaz a condição $|M| \leqslant |A|$. Podemos mostrar que os módulos τ-rígidos também satisfazem esta condição. Cada módulo τ-rígido pode ser completado a um módulo τ-inclinante por um processo também chamado de complemento de Bongartz (Teorema 3.29). Um módulo τ-rígido é dito módulo τ-inclinante quase completo se $|M| = |A| - 1$. Pode-se ver que um módulo τ-inclinante quase completo possui dois complementos se, e somente se, é sincero. Esta condição generaliza a propriedade análoga dos módulos inclinantes do ponto de vista de que um módulo inclinante possui dois complementos se, e somente se, são fiéis. Com estes complementos podemos construir o quiver $Q(\tau\text{-tilt}A)$ dos módulos τ-inclinantes básicos através da ordem parcial definida no conjunto τ-tilt$A$ dos A-módulos τ-inclinantes dada por

$$T \leqslant T' \Leftrightarrow \mathsf{Fac}T \subset \mathsf{Fac}T'.$$

Esta mesma ordem parcial pode ser estendida para os módulos de suporte τ-inclinante, determinando um quiver $Q(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$. Vemos que o quiver $Q(\mathsf{tilt}A)$ é um subquiver pleno de $Q(\tau\text{-tilt}A)$, que por sua vez é um subquiver pleno de $Q(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$.

Um par de suporte τ-inclinante é um par ordenado de A-módulos (M, P) onde M é um A-módulo τ-rígido, P é um A-módulo projetivo e $\mathsf{Hom}_A(P, M) = 0$. Dizemos que um par τ-rígido (M, P) é de suporte τ-inclinante (respectivamente, quase completo) se satisfaz $|M| + |P| = |A|$ (respectivamente, $|M| + |P| = |A| - 1$). Vemos que os conceitos de pares τ-rígidos, de suporte τ-inclinante e de suporte τ-inclinante quase completo generalizam, respectivamente, os conceitos de módulos τ-rígidos, τ-inclinantes e de suporte τ-inclinante. Outra generalização estabelecida pelos pares de suporte τ-inclinante é que cada par de suporte τ-inclinante possui exatamente dois complementos, independente da sinceridade ou fidelidade dos módulos envolvidos. Desta forma construímos o grafo de pares de suporte τ-inclinante $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$, onde arestas ligam dois pares de suporte τ-inclinante que possuem como somando direto um par de suporte τ-inclinante quase completo em comum. Mostramos que o grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ é n-regular (Proposição 4.20) e, além disso, é o grafo subjacente do quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ (Proposição 4.41). Este quiver é construído de tal forma que é possível exibir as características dos complementos de um par de suporte τ-inclinante quase completo baseando-se nos módulos simples que aparecem nas séries de composição dos módulos que constituem esse par.

Contribuição deste trabalho

Neste trabalho estamos interessados em estabelecer relações nas teorias inclinantes e nas teorias τ-inclinantes de duas álgebras A e B que estejam envolvidas em um epimorfismo $A \longrightarrow B$, tais que existe um idempotente $e \in A$ tal que $B = A/\langle e \rangle$. Aqui comparamos principalmente os quivers $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ e $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}B)$ (e seus grafos subjacentes) e o que ocorre com os módulos τ-inclinantes nas álgebras A e B quando estas estão envolvidas em um epimorfismo de álgebras $A \longrightarrow B$. Em particular, quando R é o produto fibrado dos epimorfismos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ estabelecemos relações entre os quivers $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ e $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$ com o quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$. O objetivo deste trabalho é procurar um método natural de construir todos os módulos de suporte τ-inclinante da álgebra R conhecendo apenas os módulos de suporte τ-inclinante de A, B e C. Este problema ainda não foi concluído.

Com esse objetivo destacamos abaixo os principais resultados que obtivemos. Um dos casos mais simples de tentar responder a questão que originou nosso trabalho é observar o que ocorre com o grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ e o quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ quando A é uma álgebra de tipo finito. Neste sentido temos o nosso primeiro resultado:

Teorema A (Proposição 5.1): Uma álgebra A possui somente uma quantidade finita de módulos τ-rígidos básicos se, e somente se, o quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ é finito.

Desta forma podemos mostrar que álgebras de tipo (de representação) finito possuem o quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ e o grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ finitos. Neste caso mostramos uma relação entre a quantidade de módulos de suporte τ-inclinante e a quantidade de pares de suporte τ-inclinante quase completos.

Teorema B (Teorema 5.4): Se A é de tipo finito e s é a quantidade de pares de suporte τ-inclinante quase completo então $\#(\text{s}\tau\text{-tilt}A) \cdot |A| = 2s$.

Também mostramos neste trabalho que se $A \longrightarrow B$ é um epimorfismo de álgebras então podemos comparar os grafos (e quivers) associados aos pares de suporte τ-inclinante (e módulos de suporte τ-inclinante) através do seguinte teorema:

Teorema C (Proposição 5.10 e Teorema 5.12): Se $A \longrightarrow B$ é um epimorfismo de álgebras então:

(1) $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}B)$ é um subgrafo de $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$;

(2) $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}B)$ é um subquiver de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$.

Sejam $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ dois epimorfismos de álgebras. Na categoria das k-álgebras básicas de dimensão finita é possível construir o produto fibrado destes epimorfismos. Podemos construir o produto fibrado do tipo árvore destes epimorfismos, cujas classes de módulos indecomponíveis satisfazem $\text{ind}\,R = \text{ind}\,A \cup \text{ind}\,C$ e $\text{ind}\,B = \text{ind}\,A \cap \text{ind}\,C$ (ver (**BCW15**)). Com isso podemos nos questionar se é possível construir todos os pares de suporte τ-inclinante de R a partir dos pares de suporte τ-inclinante de A, B e C, como vemos no teorema seguinte:

Teorema D (Teorema 5.29): Se $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ são epimorfismos de álgebras com R o produto fibrado árvore orientado então:

(1) $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}B)$ está em bijeção com subgrafos de $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ e $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$, de forma que $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}B) = Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A) \cap Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$;

(2) $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ e $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$ são finitos se, e somente se, $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$ é finito;

(3) $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R) \neq Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A) \cup Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$.

Organização do Trabalho

No Capítulo 1 apresentamos algumas definições básicas para o estudo da categoria de módulos finitamente gerados à direita $\text{mod}A$, onde A é uma k-álgebra básica de dimensão finita e k é um corpo algebricamente fechado, as quais podem ser descritas como quocientes de álgebras de caminhos. Destacamos também alguns funtores definidos em $\text{mod}A$ que são relevantes para o nosso trabalho.

No Capítulo 2 destacamos alguns resultados da Teoria Inclinante Clássica que servem como motivação para as generalizações que aparecem nos demais capítulos. Em especial, o complemento de Bongartz ((**Bon81**)) e o fato de que nem todo módulo inclinante quase completo possui dois complementos são abordados nesse capítulo.

O Capítulo 3 é dedicado a uma primeira generalização para a Teoria Inclinante, introduzida em (**AIR14**), que é a Teoria τ-Inclinante. Na primeira seção deste capítulo definimos os módulos τ-inclinantes. Na segunda seção enunciamos as fórmulas de Auslander-Reiten e mostramos que módulos inclinantes são módulos τ-inclinantes, evidenciando que o conceito de módulo τ-inclinante generaliza o conceito de módulo inclinante. Na Seção 3.3 mostramos como se relacionam os módulos τ-rígidos e algumas classes de torção (ver Proposição 3.11, e Corolários 3.12 e 3.13). Ainda nesta seção vemos como se relaciona a quantidade de somandos indecomponíveis não isomorfos de um A-módulo τ-rígido, que módulos τ-inclinantes são sinceros (Proposição 3.21) e que módulos τ-inclinantes são fiéis se, e somente se, são inclinantes. Por fim, na Seção 3.4 mostramos que cada módulo τ-rígido pode ser completado a um módulo τ-inclinante, generalizando o complemento de Bongartz para módulos inclinantes.

No Capítulo 4 apresentamos um estudo sobre os pares de suporte τ-inclinante associados a uma k-álgebra A. Vemos na Seção 4.1 os conceitos de pares τ-rígidos e de suporte τ-inclinante mostrando que estes conceitos generalizam o conceito de módulo τ-rígido e módulo de suporte τ-inclinante. Na segunda seção mostramos a ideia de complemento de par de suporte τ-inclinante quase completo, e mostramos que cada par de suporte τ-inclinante quase completo possui exatamente dois complementos. Esta forma de completar os pares de suporte τ-inclinante quase completos generaliza os complementos que são feitos para os módulos inclinantes e para os módulos τ-inclinantes. Na terceira seção definimos as mutações de pares de suporte τ-inclinante e um grafo cujos vértices representam os pares de suporte τ-inclinante e as arestas representam estas mutações. Na Seção 4.4 mostramos algumas propriedades acerca dos complementos, principalmente com relação à forma como obtemos os dois complementos para os pares de suporte τ-inclinante quase completos. Por fim, na quinta seção, mostramos uma relação entre o quiver dos módulos de suporte τ-inclinante e o grafo dos pares de suporte τ-inclinante.

O último capítulo é dedicado a parte original do trabalho no qual discutimos os Teoremas A, B, C e D. Neste capítulo buscamos observar quais as relações entre os módulos de suporte τ-inclinante e pares de suporte τ-inclinante das álgebras A, B e C e o produto fibrado dos epimorfismos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$. Para isto começamos observando na Seção 5.1 quais as relações entre a quantidade de A-módulos τ-rígidos e de suporte τ-inclinante e a finitude do grafo $\mathcal{P}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}A)$ e do quiver $Q(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}A)$ (Proposição 5.1 e Teorema 5.4). Na Seção 5.2 analisamos como o epimorfismo de álgebras $A \longrightarrow B$ induz uma inclusão do grafo $\mathcal{P}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}B)$ no grafo $\mathcal{P}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}A)$ e uma inclusão do quiver $Q(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}B)$ no quiver $Q(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}A)$. Na terceira seção definimos o conceito de produto fibrado de epimorfismos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ e utilizamos as inclusões da Seção 5.2 para obter inclusões no caso dos produtos fibrados. Na última seção usamos o caso particular do produto fibrado árvore orientado R de epimorfismos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$, cujas classes de módulos indecomponíveis satisfazem $\text{ind}\, R = \text{ind}\, A \cup \text{ind}\, C$ e $\text{ind}\, B = \text{ind}\, A \cap \text{ind}\, C$, para relacionar os quivers $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$, $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}B)$, $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$ e $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$. Além disso, tentamos encontrar uma forma de obter todos os módulos de suporte τ-inclinante de R a partir dos módulos de suporte τ-inclinante de A, B e C. Por fim, exemplificamos os conceitos abordados no capítulo.

Finalmente, incluímos no apêndice um estudo da teoria τ-inclinante para casos particulares de álgebras. Na Seção A.1 vemos como o fato de todo módulo τ-inclinante ser um módulo inclinante caracteriza as álgebras hereditárias. Na Seção A.2 exibimos o algoritmo de (**Ada16**) que classifica os τ-inclinantes para álgebras de Nakayama.

1 PRELIMINARES

Neste primeiro capítulo introduziremos as noções básicas necessárias para a leitura do texto. O principal objeto de estudo é a categoria de A-módulos à direita finitamente gerados denotada por $\text{mod}A$, cujas propriedades vão ser discutidas ao longo do capítulo. Inicialmente veremos as k-álgebras de dimensão finita e seus A-módulos; na sequência veremos como os A-módulos podem ser representados através do quiver ordinário de A e por fim analisaremos a categoria $\text{mod}A$ e alguns funtores definidos sobre categorias desta forma.

1.1 ANÉIS E ÁLGEBRAS

O objetivo desta seção é introduzir os principais conceitos para o estudo das k-álgebras de dimensão finita, os A-módulos finitamente gerados e os diferentes tipos de morfismos. Além disso, também observamos as álgebras quociente obtidas a partir das k-álgebras. Os detalhes dos assuntos abordados nesse capítulo podem ser vistos em (**ASS06**).

1.1.1 Álgebras

Vamos lembrar que um **anel** é um conjunto não vazio A munido de duas operações binárias associativas $+ : A \times A \longrightarrow A$ e $\cdot : A \times A \longrightarrow A$, de tal forma que $(A, +)$ é um grupo abeliano e valem as propriedades distributivas: $a(b + c) = ab + ac$ e $(a + b)c = ac + bc$ para todos os elementos a, b, c em A. Em particular, dizemos que um anel k é um **corpo** se além de $(k, +)$ ser um grupo abeliano com a operação de soma, temos que $(k^*, \cdot)$ é um grupo abeliano, onde $k^* = k \setminus \{0\}$. Diremos que o corpo k é **algebricamente fechado** se qualquer polinômio com coeficientes em k possui uma raiz ainda em k. Em todo o texto k denotará um corpo algebricamente fechado.

Dizemos que uma **k-álgebra** é um anel que possui uma estrutura de k-espaço vetorial compatível com as operações de soma e produto. Isto significa que se a, b são elementos de A e $\lambda \in k$ é um escalar então $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$. Além disso, dizemos que B é uma **k-subálgebra** de A se B é um k-subespaço vetorial de A que também é um anel com as operações induzidas de A. Todos os anéis tratados aqui possuem elemento neutro para o produto, isto é, existe um elemento $1_A \in A$ denominado **unidade** do anel, de tal forma que $1_A a = a 1_A = a$ para qualquer $a \in A$. Em particular, todos os anéis e álgebras tratados neste texto possuem unidade.

Dizemos que uma função $f : A \longrightarrow B$ é um **morfismo de anéis** se A e B são anéis de tal forma que para quaisquer $a, b \in A$ temos que $f(a + b) = f(a) + f(b)$,

$f(ab) = f(a)f(b)$ e $f(1_A) = 1_B$. Se A e B são k-álgebras e $f : A \longrightarrow B$ é um morfismo de anéis k-linear dizemos que f é um **morfismo de k-álgebras.**

1.1.2 Módulos

Se A é uma k-álgebra, dizemos que M é um **A-módulo à direita** se M é um k-espaço vetorial munido de uma ação de grupo à direita $\cdot : M \times A \longrightarrow M$ de tal forma que para quaisquer $m, n \in M$, $a, b \in A$ e $\lambda \in k$ valem as propriedades distributivas $(m+n)\cdot a = m\cdot a+n\cdot a$ e $m\cdot(a+b) = m\cdot a+m\cdot b$, vale a propriedade de compatibilidade da ação $m\cdot(ab) = (m\cdot a)\cdot b$, vale $m\cdot 1_A = m$ e a ação à direita comuta com os escalares, ou seja, $(m\lambda)\cdot a = m\cdot(a\lambda) = (m\cdot a)\lambda$. Analogamente podemos definir os **A-módulos à esquerda** utilizando a ideia de ação à esquerda e propriedades análogas às citadas anteriormente.

Dizemos que um módulo M é **finitamente gerado** se existem $s \in \mathbb{N}$ e elementos $m_1, m_2, \ldots, m_s$ em M tais que qualquer elemento de M pode ser escrito como combinação A-linear dos geradores $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Pode-se mostrar que um módulo é finitamente gerado se, e somente se, possui dimensão finita como k-espaço vetorial. A menos de menção em contrário, sempre que nos referirmos a um módulo estaremos falando de um A-módulo à direita finitamente gerado.

Observando a estrutura de espaço vetorial, podemos estender a noção de soma direta de espaços vetoriais para a **soma direta de módulos**. Se considerarmos M e N dois A-módulos, o k-espaço vetorial $M \oplus N$ possui estrutura de A-módulo dada pela ação $(m, n)\cdot a \doteq (m\cdot a, n\cdot a)$, i.e., definimos a ação à direita em $M \oplus N$ em cada uma de suas coordenadas. Podemos usar a mesma ideia para uma quantidade finita qualquer de A-módulos, definindo a ação coordenada a coordenada na estrutura de soma direta. Desta forma dizemos que o A-módulo N é **somando direto** do A-módulo M se existir algum A-módulo M' de tal forma que $M = N \oplus M'$. Além disso, se um dado A-módulo não nulo M não possui nenhum somando direto próprio não nulo N ($0 \subsetneq N \subsetneq M$), dizemos que M é um **módulo indecomponível**. Se A é uma álgebra de dimensão finita, podemos escrever qualquer módulo de dimensão finita como uma soma direta de A-módulos $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_s$, onde cada M_i é indecomponível para $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Dizemos que N é um **submódulo** de M se N é um k-subespaço vetorial de M que é fechado pela ação à direita, isto é, sempre que $n \in N$ e $a \in A$ temos que $n\cdot a \in N$. Se N é um submódulo de M, definimos o A-módulo **quociente** M/N como o k-espaço vetorial quociente $M/N \doteq \{m + N \mid m \in M\}$ munido da estrutura de A-módulo dada por

$$(m + N)\cdot a \doteq m\cdot a + N.$$

1.1.3 Morfismos de módulos

Seja A uma k-álgebra e sejam M e N dois A-módulos. Dizemos que $f : M \longrightarrow N$ é um **morfismo de A-módulos** se f é uma aplicação k-linear e para quaisquer $m \in M$ e $a \in A$ temos que $f(m \cdot a) = f(m) \cdot a$. Denotaremos por $\mathsf{Hom}_A(M, N)$ o conjunto de todos os morfismos que possuem M como domínio e N como contradomínio.

Dizemos que $f : M \longrightarrow N$ é um **monomorfismo** se f é um morfismo de módulos injetor. Por outro lado, se f é um morfismo de módulos sobrejetor dizemos que f é um **epimorfismo**. Desta forma diremos que f é um **isomorfismo** se é um morfismo de módulos bijetor, isto é, um monomorfismo e epimorfismo simultaneamente.

Observação 1.1. Seja $f : M \longrightarrow N$ um morfismo de A-módulos. Temos que:

(1) f é um monomorfismo se, e somente se, para quaisquer dois morfismos de A-módulos $g_1, g_2 : L \longrightarrow M$ tais que $f \circ g_1 = f \circ g_2$ temos que $g_1 = g_2$. Em particular, se existe um morfismo de A-módulos $g : N \longrightarrow M$ tal que $gf = 1_M$ dizemos que f é um **monomorfismo que cinde**;

(2) f é um epimorfismo se, e somente se, para quaisquer dois morfismos de A-módulos $g_1, g_2 : N \longrightarrow Q$ tais que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ temos que $g_1 = g_2$. Em particular, se existe um morfismo de A-módulos $g : N \longrightarrow M$ tal que $fg = 1_N$ dizemos que f é um **epimorfismo que cinde.**

Definimos o **núcleo** de um morfismo $f : M \longrightarrow N$ como o A-módulo dado por $\mathsf{Ker}\, f \doteq \{m \in M \mid f(m) = 0\}$. Da mesma forma, dizemos que o A-módulo dado por $\mathsf{Im}\, f \doteq \{f(m) \mid m \in M\}$ é a **imagem** do morfismo f. Dualizando o conceito de núcleo, definimos o **conúcleo** do morfismo f como sendo o A-módulo quociente $\mathsf{Coker}\, f \doteq N/\mathsf{Im}\, f$. Desta forma temos a seguinte observação:

Observação 1.2. Seja $f : M \longrightarrow N$ um morfismo de A-módulos. Temos que:

(1) f é monomorfismo se, e somente se, $\mathsf{Ker}\, f = 0$;

(2) f é epimorfismo se, e somente se, $\mathsf{Coker}\, f = 0$.

Portanto dizer que f é um isomorfismo é equivalente a dizer que $\mathsf{Ker}\, f = \mathsf{Coker}\, f = 0$, e como já havíamos visto estas afirmações são equivalentes a dizer que f é bijetor. Diremos que os módulos M e N são **isomorfos** se existe um isomorfismo $f : M \longrightarrow N$ e quando este for o caso denotaremos por $M \cong N$.

Em particular quando $f : M \longrightarrow M$ é um morfismo o chamaremos de **endomorfismo**. Assim define-se o conjunto dos endomorfismos de M por $\mathsf{End}_A M \doteq$

$\mathrm{Hom}_A(M, M)$. Os conjuntos $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ tem estrutura natural de k-módulo para quaisquer M e N. Além de $\mathrm{End}_A M$ ter estrutura de k-módulo, $\mathrm{End}_A M$ também possui estrutura de k-álgebra induzida pela soma e produto de morfismos. Ainda mais, se $f \in \mathrm{End}_A M$ é um isomorfismo diremos que f é um **automorfismo**, e o conjunto de todos os automorfismos de M será denotado por $\mathrm{Aut}_A M$.

1.1.4 Quocientes de álgebras

Sabemos que cada A-módulo finitamente gerado M pode ser escrito como uma soma direta finita de módulos indecomponíveis $M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_s$ quando A é uma álgebra de dimensão finita. Diremos que M é um módulo **básico** quando não existirem dois somandos diretos distintos isomorfos na soma acima. Isto significa que se escrevemos $M \cong M_1^{n_1} \oplus M_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus M_t^{n_t}$, com $M_i \ncong M_j$ quando $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, t\}$, então M é básico se, e somente se, $n_1 = n_2 = \cdots = n_t = 1$. Em geral, se $M \cong M_1^{n_1} \oplus M_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus M_t^{n_t}$, com $M_i \ncong M_j$ para $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, denotamos a quantidade de somandos diretos indecomponíveis de M não isomorfos entre si por $|M| = t$.

Sempre que A é uma k-álgebra de dimensão finita podemos enxergá-la como um A-módulo à direita (e também à esquerda). Desta forma existe uma decomposição (única a menos de isomorfismos) de A como soma direta de A-módulos $A = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$. Dizemos que a k-álgebra A é **básica** se ela é um módulo básico quando vista como um A-módulo à direita. Neste trabalho consideraremos apenas **k-álgebras básicas de dimensão finita**, de forma que daqui em diante, sempre que nos referirmos à uma álgebra estaremos falando de álgebras desse tipo, a menos de menção em contrário.

Na decomposição em soma direta de módulos indecomponíveis da álgebra A dada por $A = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$, temos que os A-módulos P_i, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, satisfazem a seguinte propriedade: se $h : M \longrightarrow N$ é um epimorfismo e $f : P_i \longrightarrow N$ é um morfismo qualquer, existe um morfismo $g_i : P_i \longrightarrow M$ de tal forma que $f = hg_i$, i.e., o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[dl, "g_i"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "h"] & N \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Se P é um A-módulo que satisfaz as mesmas propriedades dos módulos P_i (com relação a construção do diagrama) diremos que P é um **módulo projetivo**. Dualmente dizemos que um A-módulo I é um **módulo injetivo** se para cada monomorfismo $h : L \longrightarrow M$, e para cada morfismo $f : L \longrightarrow I$, existe um morfismo $g : M \longrightarrow I$ de tal forma que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & M, \arrow[dl, "g"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

ou seja, $f = gh$.

Observação 1.3 ((**ASS06**), I.5.14)**.** Dizemos que um monomorfismo de A-módulos $u : L \longrightarrow M$ é **monomorfismo minimal** se todo submódulo não nulo X de M tem interseção não nula com Im u, i.e.,

$$\operatorname{Im} u \cap X \neq \{0\} \text{ para todo submódulo não nulo } X \text{ de } M.$$

Em particular, se $u : L \longrightarrow E$ é um monomorfismo minimal e E é um módulo injetivo diremos que E é a **envolvente injetiva** de L. Pode-se mostrar que qualquer módulo L possui envolvente injetiva.

Um dos tipos de álgebras mais importantes para o nosso trabalho são as álgebras quociente, isto é, álgebras obtidas a partir do quociente feito através de relações de equivalência em uma álgebra A. Elas serão necessárias para a construção de módulos inclinantes e τ-inclinantes nas álgebras, a partir dos módulos inclinantes e τ-inclinantes dos seus quocientes. Porém, precisaremos que esses quocientes sejam feitos por ideais bilaterais (como veremos abaixo) para que os quocientes estejam bem definidos e tenham as propriedades semelhantes às propriedades da álgebra original.

Seja I um k-subespaço vetorial de A. Dizemos que I é um **ideal à direita** de A se para cada $x \in I$ e cada $a \in A$ temos que $xa \in I$. De forma análoga, dizemos que I é um **ideal à esquerda** de A se para cada $x \in I$ e cada $a \in A$ temos que $ax \in I$. Além disso, um ideal é dito **bilateral** se é um ideal à esquerda e à direita.

Seja A uma álgebra com um ideal bilateral I. Definimos a **álgebra quociente** A/I como o k-espaço vetorial quociente $A/I \doteq \{a + I \mid a \in A\}$, onde as operações são herdadas de A. Esta álgebra quociente possui uma única estrutura natural de álgebra dada pelas operações $(a + I) + (b + I) \doteq (a + b) + I$ e $(a + I)(b + I) \doteq ab + I$ e também $\lambda(a + I) \doteq \lambda a + I$, para cada $a, b \in A$ e $\lambda \in k$.

Observação 1.4. Sejam A uma álgebra, I um ideal bilateral de A e M um (A/I)-módulo. Pode-se mostrar que a operação $m \cdot a \doteq m \cdot (a + I)$ definida para cada $m \in M$ e $a \in A$ induz uma estrutura de A-módulo no (A/I)-módulo M. Desta forma o conjunto de todos os (A/I)-módulos está contido no conjunto dos A-módulos.

Um dos casos de maior interesse é o da álgebra quociente A/I quando $I = \langle e \rangle$ é o ideal bilateral gerado por um elemento $e \in A$ que satisfaz a condição $e^2 = e$, isto é, o menor ideal bilateral que contém o elemento e. Ao longo do texto outros ideais também serão de extrema importância, como por exemplo os definidos a seguir.

Exemplo 1.5. Seja A uma álgebra.

(1) Dizemos que um ideal à direita I de A é **maximal** se não existe nenhum ideal à direita J tal que $I \subsetneq J \subsetneq A$, isto é, I não está propriamente contido em um ideal próprio de A.

(2) O **radical** $\mathrm{rad}A$ da álgebra A é a interseção de todos os ideais maximais à direita de A. Vale a pena observar que $\mathrm{rad}A$ é um ideal bilateral de A.

Sempre que A/I é uma álgebra quociente da álgebra A, obtemos um epimorfismo $\varphi : A \longrightarrow A/I$ denominado **projeção canônica** dado por $\varphi(a) = a + I$ para qualquer $a \in A$. Nos próximos capítulos veremos como utilizar estes epimorfismos para estudar como se relacionam os módulos de suporte τ-inclinante de alguns quocientes de álgebras.

1.1.5 Séries de composição

Dada uma álgebra A, dizemos que um A-módulo não nulo S é **simples** se seus únicos submódulos são 0 ou S. A dimensão de um A-módulo simples S como k-espaço vetorial é igual a 1.

Diremos que N é um **submódulo maximal** de um módulo M se $N \subsetneq M$ e não existe nenhum outro submódulo Q de M tal que $N \subsetneq Q \subsetneq M$. Assim, definimos o **radical** $\mathrm{rad}M$ do módulo M como a interseção de todos os submódulos maximais de M. Como no caso de $\mathrm{rad}A$, o radical $\mathrm{rad}M$ de M tem estrutura de A-módulo à direita.

Também podemos definir outros dois A-módulos associados ao módulo M da seguinte forma:

Definição 1.6. Seja M um A-módulo.

(1) O submódulo de M gerado por todos os submódulos simples de M é denominado **socle** de M e denotado por $\mathrm{soc}\, M$.

(2) Dizemos que o **topo** de M é o A-módulo quociente $\mathrm{top}\, M \doteq M/\mathrm{rad}M$.

Os topos dos A-módulos exercerão um papel fundamental no momento de construírmos os pares de suporte τ-inclinante no Capítulo 4, principalmente na definição de suporte de par de suporte τ-inclinante.

Seja M um A-módulo. Dizemos que uma sequência de A-módulos

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_t = 0$$

é uma **série de composição** se os quocientes $N_i = M_i/M_{i+1}$ são módulos simples para cada $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$. Neste caso dizemos que os módulos N_i são **fatores de composição de** M. Se para o A-módulo M existir uma única série de composição diremos que M é um módulo **unisserial.**

1.2 ÁLGEBRA DE CAMINHOS E REPRESENTAÇÕES DE MÓDULOS

Na seção anterior definimos os A-módulos associados a uma álgebra de dimensão finita A. Nesta seção iremos utilizar o Teorema de Gabriel para associar a cada álgebra A um quiver Q_A munido de relações. Desta forma poderemos representar os A-módulos sobre este quiver Q_A associado a álgebra A.

1.2.1 A álgebra de caminhos

Inicialmente vamos dizer que um **grafo** G é dado por um conjunto G_0 de **vértices** e um conjunto G_1 de **arestas** entre estes vértices. Além disso, diremos que um **ciclo** em um grafo G é uma concatenação de arestas de forma que duas arestas consecutivas concatenadas possuam exatamente um ponto em comum, e a última aresta está conectada com a primeira por exatamente um vértice. Por fim, diremos que um grafo G é uma **árvore** se G não possui nenhum ciclo.

Utilizando a mesma ideia, no lugar de arestas podemos considerar flechas (arestas orientadas), para isso temos a seguinte definição.

Definição 1.7. Um **quiver** é uma quádrupla $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ onde:

(1) Q_0 é um conjunto, cujos elementos são chamados de **vértices**;

(2) Q_1 é um conjunto, cujos elementos são chamados de **flechas**;

(3) $s : Q_1 \longrightarrow Q_0$ é uma função que associa a cada flecha o seu **início**;

(4) $t : Q_1 \longrightarrow Q_0$ é uma função que associa a cada flecha o seu **final**.

Por simplicidade denotaremos o quiver (Q_0, Q_1, s, t) apenas por Q. Ainda mais, diremos que Q é um quiver **finito** se Q_0 e Q_1 são conjuntos finitos. Esse será o nosso caso de principal interesse.

Um **subquiver** de $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ é um quiver $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$, onde Q'_0 e Q'_1 são subconjuntos de Q_0 e Q_1 respectivamente e as funções s' e t' coincidem com as restrições de s e t ao conjunto Q'_1. Estes quivers nos fornecerão, ao longo do texto, subálgebras e álgebras quociente associadas a uma álgebra dada.

Um **caminho** em um quiver é a concatenação de flechas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tal que o início de uma flecha coincida com o final da sua flecha anterior, ou seja, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$

para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Desta forma, dado um quiver Q definimos a **álgebra de caminhos** kQ como a álgebra gerada pelos caminhos de Q, isto é, os elementos de kQ são combinações k-lineares de

- **caminhos estacionários** (ou caminhos de comprimento zero), onde para cada vértice $i \in Q_0$ temos um caminho estacionário e_i associado;
- flechas de Q, denominadas caminhos de comprimento 1;
- caminhos de comprimento n, que são caminhos da forma $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$, onde α_1, α_2, ... , α_n são flechas de Q e $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$,

e a estrutura de produto de k-álgebra em kQ é dada por

$$\alpha \cdot \beta \doteq \begin{cases} \alpha\beta, & \text{se } t(\alpha) = s(\beta) \\ 0, & \text{se } t(\alpha) \neq s(\beta). \end{cases}$$

Exemplo 1.8. Considere o quiver dado por $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta\}$ tais que $s(\alpha) = 1$, $t(\alpha) = s(\beta) = 2$ e $t(\beta) = 3$. Este quiver pode ser representado da seguinte forma:

$$Q: \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3.$$

Os caminhos estacionários em Q são e_1, e_2 e e_3, os caminhos de comprimento 1 são α e β e o caminho de comprimento 2 é $\alpha\beta$. As combinações $\mathbb{C}$-lineares $2\,e_2 + 3\,\alpha + \alpha\beta$ e $\pi\,\alpha + e_1$ são elementos de $\mathbb{C}Q$ e

$$\begin{aligned} (\pi\,\alpha + e_1) \cdot (2\,e_2 + 3\,\alpha + \alpha\beta) &= 2\pi\,\alpha e_2 + 3\pi\,\alpha\alpha + \pi\,\alpha\alpha\beta + 2\,e_1 e_2 + 3\,e_1\alpha + e_1\alpha\beta \\ &= 2\pi\,\alpha + 3\,\alpha + \alpha\beta = (2\pi + 3)\alpha + \alpha\beta. \end{aligned}$$

Uma **relação** em um quiver Q é uma combinação linear $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$ de caminhos de comprimento maior ou igual a 2. Se A é uma álgebra, qualquer subconjunto de A determina um ideal bilateral em A. Em particular, um conjunto de relações em Q gera um ideal I na álgebra kQ, o que permite definir a álgebra quociente kQ/I, cujo quiver é denotado por (Q, I). Neste texto o ideal I sempre é escolhido de forma que kQ/I seja uma álgebra de dimensão finita.

Exemplo 1.9. Seja $A = kQ$ a álgebra de caminhos do Exemplo 1.8. A relação $\rho = \alpha\beta$ define um ideal bilateral $I = \langle \alpha\beta \rangle$ em A. Neste caso a base de kQ/I como k-espaço vetorial é o subconjunto $\{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta\}$. Observe que $\alpha \cdot \beta = 0$, pois $\alpha\beta$ é um elemento do ideal I. Denotamos o quiver (Q_A, I) desta álgebra por

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend left, dashed, dash] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3. \end{tikzcd}$$

1.2.2 O Teorema de Gabriel

Dada uma álgebra A, dizemos que $e \in A$ é um **idempotente** se temos que $e^2 = e$. No nosso caso todas as álgebras tem pelo menos dois idempotentes: a unidade 1_A e o elemento neutro da soma. Além disso, dizemos que dois idempotentes e_1 e e_2 são **ortogonais** se $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. Dizemos também que um idempotente e é **primitivo** se e não pode ser escrito como uma soma de dois idempotentes $e = e_1 + e_2$, onde e_1 e e_2 são idempotentes ortogonais não nulos.

Se A é uma álgebra de dimensão finita é possível encontrar um **conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos** $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Logo o conjunto $\mathcal{E}_A \doteq \left\{ \sum_{j\in J} e_j \;\middle|\; J \subset \{1, 2, \ldots, n\} \right\}$, onde $\sum_{j\in\varnothing} e_j \doteq 0$ e $\sum_{j=1}^{n} e_j = 1_A$ contém vários idempotentes da álgebra A. A partir de agora, o conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ sempre denotará um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos.

Definição 1.10. Sejam A uma álgebra, M um A-módulo e $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos fixado. Dizemos que o **suporte de** M é o conjunto

$$\mathrm{Supp}(M) \doteq \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid Me_j \neq 0\}.$$

Estamos interessados em associar a cada álgebra um quiver e uma álgebra de caminhos. O próximo teorema permitirá associar a cada k-álgebra básica de dimensão finita um quiver finito, que será útil no momento de representar os módulos desta álgebra.

Teorema 1.11 (Teorema de Gabriel)**.** Seja k um corpo algebricamente fechado.

(1) Seja Q um quiver e seja R_Q o ideal bilateral gerado pelas flechas de kQ. Se I é um ideal de kQ para o qual existe um inteiro $m \geqslant 2$ tal que $R_Q^m \subset I \subset R_Q^2$, onde $R_Q^s \doteq \{\rho_1\rho_2\cdots\rho_s \mid \rho_j \in R_Q, j \in \{1, 2, \ldots, s\}\}$ para cada $s \in \mathbb{N}$, então kQ/I é uma k-álgebra de dimensão finita.

(2) Se A é uma k-álgebra básica de dimensão finita, existe um quiver com relações (Q_A, I), de tal forma que é possível exibir um isomorfismo de álgebras $A \cong kQ_A/I$. Além disso, tal quiver Q_A está unicamente determinado por A.

Portanto o Teorema de Gabriel permite associar a cada álgebra de dimensão finita uma álgebra de caminhos (com relações) isomorfa a álgebra A. Diremos que o quiver Q_A (com relações) é o **quiver ordinário** da álgebra A. Neste caso temos que as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) o quiver ordinário Q_A da álgebra A possui n vértices;

(2) qualquer conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A possui exatamente n elementos;

(3) a quantidade de A-módulos projetivos indecomponíveis, a menos de isomorfismos, é exatamente n;

(4) a quantidade de A-módulos injetivos indecomponíveis, a menos de isomorfismos, é exatamente n;

(5) a quantidade de A-módulos simples, a menos de isomorfismos, é exatamente n;

(6) os A-módulos projetivos indecomponíveis são da forma e_iA para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Na seção seguinte veremos como utilizar o quiver Q_A obtido nesse teorema para associar a cada A-módulo uma representação, ou seja, um (kQ_A/I)-módulo. E assim, trabalharemos apenas com as representações da álgebra A.

1.2.3 Representações de módulos

Podemos utilizar o quiver (Q_A, I) para descrever como são os módulos sobre uma álgebra A. Dizemos que uma **representação** da álgebra $A = kQ_A/I$ é dada por uma família de k-espaços vetoriais $\{M_i \mid i \in Q_0\}$ e uma família de transformações k-lineares $\{\varphi_\alpha : M_i \longrightarrow M_j \mid \alpha : i \longrightarrow j \in Q_1\}$, de forma que:

(1) se $\rho = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ é uma concatenação de flechas de Q definimos
$$\varphi_\rho \doteq \varphi_{\alpha_m} \circ \cdots \circ \varphi_{\alpha_2} \circ \varphi_{\alpha_1}.$$

(2) se $\mu = t_1\rho_1 + t_2\rho_2 + \cdots + t_d\rho_d$ é uma combinação k-linear de elementos em I então $\varphi_\mu \doteq t_1\varphi_{\rho_1} + t_2\varphi_{\rho_2} + \cdots + t_d\varphi_{\rho_d} = 0$.

Denotaremos esta representação por $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$.

Exemplo 1.12. Seja $A = kQ_A$ a álgebra de caminhos dada pelo quiver sem relações
$$Q_A : \; 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3.$$

Uma representação desta álgebra é dada por $M_1 = M_2 = M_3 = k$ e $\varphi_\alpha = \varphi_\beta = 1_k$. Isso pode ser visto através do diagrama
$$k \xrightarrow{1_k} k \xrightarrow{1_k} k.$$

Esta representação pode ser denotada simplesmente por $\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$.

Sejam $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ e $N = (N_i, \psi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ duas representações de uma álgebra A. Um **morfismo de representações** $\theta : M \longrightarrow N$ de A é uma família de transformações k-lineares $\{\theta_i : M_i \longrightarrow N_i \mid i \in Q_0\}$ tal que para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$ o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_j \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_i} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_j} \\ N_i & \xrightarrow{\psi_\alpha} & N_j. \end{array}$$

Se M é um A-módulo podemos associar a M uma representação da seguinte forma: para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ associamos o espaço vetorial $M_i = Me_i$, e as transformações lineares φ_α entre M_i e M_j são dadas por

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\alpha : & Me_i & \longrightarrow & Me_j \\ & me_i & \longmapsto & m\alpha, \end{array}$$

para cada flecha $\alpha : i \longrightarrow j$, ou seja, φ_α é a multiplicação à direita por α.

Pode-se mostrar que a relação entre os módulos finitamente gerados e as representações $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, onde cada M_i é de dimensão finita, é biunívoca. Desta forma sempre que estivermos falando sobre módulos podemos utilizar as representações. Mostra-se também que a cada morfismo de módulos temos um morfismo de representações biunivocamente associado.

1.3 CATEGORIA DE MÓDULOS

Nesta última seção estamos interessados em ressaltar as propriedades categóricas de $\operatorname{mod} A$, observando principalmente sua estrutura. Também estamos interessados em definir alguns funtores associados a estas categorias que serão importantes no decorrer do texto.

1.3.1 Categorias

Dizemos que uma tripla $\mathcal{C} = (\operatorname{Obj} \mathcal{C}, \operatorname{Hom} \mathcal{C}, \circ)$ é uma **categoria** (pequena) se:

(1) $\operatorname{Obj} \mathcal{C}$ é um conjunto, cujos elementos são chamados de **objetos** de $\mathcal{C}$;

(2) para cada dois objetos A e B de $\mathcal{C}$, temos um conjunto $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Definimos $\operatorname{Hom} \mathcal{C}$ como a coleção dos elementos de todos estes conjuntos. Os elementos destes conjuntos serão chamados de **morfismos**;

(3) existe uma **composição parcial** em $\mathcal{C}$, que é uma operação definida em $\operatorname{Hom} \mathcal{C}$, de tal forma que para cada par de morfismos $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(L, M)$ e $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$

associamos um único elemento $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, N)$ chamado de **composição** dos morfismos g e f. Essa composição deve ser associativa quando estiver definida e além disso, para cada objeto M de $\mathcal{C}$ existe um morfismo $1_M \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$ tal que $g \circ 1_M = g$ e $1_M \circ f = f$ para quaisquer $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, M)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, L)$ e L em $\mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$.

A nossa principal categoria de estudo é a categoria $\mathrm{mod}\,A$ dos A-módulos à direita finitamente gerados que é definida da seguinte forma:

(1) os objetos desta categoria são todos os A-módulos à direita finitamente gerados;

(2) para cada par de objetos M e N o conjunto de morfismos entre M e N é simplesmente o conjunto $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ de todos os morfismos de A-módulos com domínio M e contradomínio N;

(3) a composição parcial entre os morfismos nesta categoria é dada pela composição usual de funções, quando estiver bem definida.

1.3.2 Quiver de Auslander-Reiten

Dizemos que $f : M \longrightarrow N$ é um **morfismo irredutível** em $\mathrm{mod}\,A$ se f não possui inverso à esquerda nem à direita e se escrevemos $f = gh$, onde $h : M \longrightarrow S$ e $g : S \longrightarrow N$ para algum módulo S, então ou g é um epimorfismo que cinde ou h é um monomorfismo que cinde.

Definição 1.13. Seja A uma álgebra básica de dimensão finita. Seja $\Gamma(\mathrm{mod}\,A)$ o quiver que satisfaz as seguintes condições:

(1) seu conjunto de vértices é o conjunto das classes de isomorfismo de A-módulos indecomponíveis M: $[M] \doteq \{N \in \mathrm{mod}\,A \mid N \cong M\}$;

(2) para cada par de classes de isomorfismo $[M]$ e $[N]$, a quantidade de flechas entre os respectivos vértices é dada pela dimensão do k-espaço vetorial formado por todos os morfismos irredutíveis de domínio M e contradomínio N. Essa dimensão não depende da escolha dos representantes M e N.

Dizemos que $\Gamma(\mathrm{mod}\,A)$ é o **Quiver de Auslander-Reiten** da álgebra A.

1.3.3 Subcategorias plenas

Dizemos que uma categoria $\mathcal{C}'$ é uma **subcategoria** de uma categoria $\mathcal{C}$ se temos que $\mathrm{Obj}\,\mathcal{C}' \subset \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$, para cada $M, N \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}'$ temos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(M, N) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$ e as composições em ambas categorias coincidem quando estiverem bem definidas. Em particular, dizemos que a subcategoria $\mathcal{C}'$ é **plena** se para cada par de objetos M, N em Obj $\mathcal{C}'$ temos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, N)$.

Exemplo 1.14.

(1) Uma das subcategorias plenas de $\mathrm{mod}A$ importantes para o nosso estudo será a subcategoria $\mathrm{proj}A$ cujos objetos são os A-módulos projetivos e o conjunto de morfismos é dado por $\mathrm{Hom}_A(P_1, P_2)$ para cada par de módulos projetivos P_1 e P_2.

(2) De forma análoga se define $\mathrm{inj}A$ como a subcategoria plena de $\mathrm{mod}A$, cujos objetos são todos os módulos injetivos munidos dos conjuntos de morfismos de A-módulos $\mathrm{Hom}_A(I_1, I_2)$ para cada par de A-módulos injetivos I_1 e I_2.

(3) Seja I um ideal bilateral de A. A categoria $\mathrm{mod}(A/I)$ é uma subcategoria plena de $\mathrm{mod}A$, pois vimos na Observação 1.4 que (A/I)-módulos são A-módulos, e também temos que qualquer morfismo de (A/I)-módulos é um morfismo de A-módulos, o que significa que $\mathrm{Hom}_{A/I}(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)$ para quaisquer (A/I)-módulos M e N.

1.3.4 Estrutura de $\mathrm{mod}A$

A categoria $\mathrm{mod}A$ possui propriedades boas quando observamos o que acontece com as somas diretas e com a soma de morfismos em geral. Por exemplo, existem propriedades aditivas em $\mathrm{mod}A$ com relação aos objetos e seus morfismos. Abaixo listamos algumas dessas propriedades:

(1) para cada coleção finita de objetos $M_1, M_2, \ldots, M_s$ em $\mathrm{mod}A$ a soma direta $M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_s$ também está em $\mathrm{mod}A$;

(2) para cada par de A-módulos M e N o conjunto $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ possui estrutura de grupo abeliano com a operação de soma;

(3) a operação de composição de A-módulos é bilinear, isto é, se $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$, $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_A(M_2, M_3)$ são morfismos e $\lambda \in k$ é um escalar então temos as igualdades $(g_1 + g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_1$ e $g_1 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_1 \circ f_2$ com relação à soma e $(\lambda g_1) \circ f_1 = g_1 \circ (\lambda f_1) = \lambda(g_1 \circ f_1)$ com relação à composição;

(4) existe um A-módulo 0, denominado **módulo nulo**, de tal forma que se M é um outro A-módulo qualquer temos que $\mathrm{Hom}_A(M, 0) = \mathrm{Hom}_A(0, M) = 0$.

Estas propriedades tornam $\mathrm{mod}A$ uma categoria **aditiva**. Além disso, como todos os morfismos $f : M \longrightarrow N$ em $\mathrm{mod}A$ possuem núcleo e conúcleo temos que

$\mathsf{mod}A$ possui estrutura de categoria **abeliana**. Mais propriedades com relação as categorias aditivas e abelianas podem ser vistas em (**ASS06**).

Em geral, se $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana dizemos que uma sequência da forma

$$\cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

é uma **sequência exata** se $\mathsf{Ker}\, f_{n-1} = \mathsf{Im}\, f_n$ para todo n natural. Além disso, se a sequência anterior se resume a uma sequência exata da forma

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

dizemos que esta sequência exata é uma **sequência exata curta**.

Exemplo 1.15. Seja M um A-módulo. Então existem algumas classes de módulos associadas a M que são notáveis, e que serão de extrema utilidade no decorrer do texto, como:

(1) a classe $\mathsf{add}M$ formada por todas as somas diretas finitas de somandos diretos de M;

(2) a classe $\mathsf{Fac}M$ formada por todos os quocientes de somas diretas finitas de M;

(3) a classe $\mathsf{Sub}M$ formada por todos os submódulos de somas diretas finitas de M.

Pode-se mostrar que estas três subcategorias de $\mathsf{mod}A$ são subcategorias plenas abelianas. Utilizaremos estas três subcategorias nos próximos capítulos com o objetivo de associar classes a alguns módulos específicos.

Observação 1.16. Se M é um A-módulo e $N \in \mathsf{Fac}M$ então existem um inteiro positivo d e um epimorfismo $M^d \longrightarrow N$. Isto faz com que, em algumas referências, a classe $\mathsf{Fac}M$ seja chamada de $\mathsf{Gen}M$, ou seja, o conjunto de todos os módulos gerados por M. Analogamente, se $N \in \mathsf{Sub}M$ então existe um inteiro positivo d e um monomorfismo $N \longrightarrow M^d$, de forma que estes módulos são chamados de módulos cogerados por M, formando a classe $\mathsf{Cogen}M$ que coincide com a classe $\mathsf{Sub}M$.

1.3.5 Categorias quociente $\underline{\mathsf{mod}}A$ e $\overline{\mathsf{mod}}A$

Dados dois A-módulos M e N podemos definir um conjunto $\mathcal{P}(M,N)$ de todos os morfismos em $\mathsf{Hom}_A(M,N)$ que se fatoram por algum projetivo. Isto é, $\mathcal{P}(M,N)$ é o conjunto de todos os morfismos $f : M \longrightarrow N$ para os quais existe um módulo projetivo P e morfismos $g : M \longrightarrow P$, $h : P \longrightarrow N$ que fazem o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N. \\ & P \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Isto permite definir na classe de morfismos $\mathrm{Hom}(\mathrm{mod}A)$ uma subclasse $\mathcal{P}$ formada por todos os morfismos pertencentes aos conjuntos $\mathcal{P}(M,N)$, variando-se os A-módulos M e N. Esta subclasse $\mathcal{P}$ pode ser vista como um ideal categórico, ou seja, uma subclasse de $\mathrm{Hom}(\mathrm{mod}A)$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(1) se $f, f' : M \longrightarrow N$ são morfismos em $\mathcal{P}(M,N)$ e $\lambda \in k$ é um escalar, os morfismos $f + f'$ e λf também estão em $\mathcal{P}(M,N)$;

(2) se $f : M \longrightarrow N$ é um morfismo em $\mathcal{P}(M,N)$ e $g : N \longrightarrow Q$ é um morfismo qualquer então $g \circ f : M \longrightarrow Q$ está em $\mathcal{P}(M,Q)$;

(3) se $f : M \longrightarrow N$ é um morfismo em $\mathcal{P}(M,N)$ e $h : L \longrightarrow M$ é um morfismo qualquer então $f \circ h : L \longrightarrow N$ está em $\mathcal{P}(L,N)$.

De acordo com **(1)**, $\mathcal{P}(M,N)$ tem estrutura de k-subespaço vetorial de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ e então o quociente $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) \doteq \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathcal{P}(M,N)$ está bem definido e tem estrutura de k-módulo. Assim podemos definir uma nova categoria $\underline{\mathrm{mod}}A$ cujos objetos são todos os A-módulos e para cada par de A-módulos M, N o conjunto dos morfismos é dado por $\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathcal{P}(M,N)$. Analogamente define-se a categoria $\overline{\mathrm{mod}}A$ cujos objetos são todos os A-módulos e $\overline{\mathrm{Hom}}_A(M,N) \doteq \mathrm{Hom}_A(M,N)/\mathcal{I}(M,N)$, onde $\mathcal{I}(M,N)$ é o k-subespaço vetorial de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ formado por todos os morfismos que se fatoram por algum módulo injetivo.

1.3.6 Funtores em $\mathrm{mod}A$

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um **funtor covariante** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é dado por uma regra que associa:

(1) a cada objeto X em $\mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$ um objeto $F(X)$ em $\mathrm{Obj}\,\mathcal{D}$;

(2) a cada morfismo $\alpha : X \longrightarrow Y$ em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ um morfismo $F(\alpha) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, de forma que para quaisquer morfismos $\alpha : X \longrightarrow Y$ e $\beta : Y \longrightarrow Z$ temos que $F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha)$;

(3) ao morfismo $1_X : X \longrightarrow X$ o morfismo $F(1_X) = 1_{F(X)} : F(X) \longrightarrow F(X)$.

Se $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é uma regra entre as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ que satisfaz os axiomas **(1)**, **(3)** e que associa:

(2') a cada morfismo $\alpha : X \longrightarrow Y$ em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ um morfismo $F(\alpha) : F(Y) \longrightarrow F(X)$ em $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y),F(X))$, de forma que para quaisquer morfismos $\alpha : X \longrightarrow Y$ e $\beta : Y \longrightarrow Z$ temos que $F(\beta \circ \alpha) = F(\alpha) \circ F(\beta)$, dizemos que F é um **funtor contravariante**.

Exemplo 1.17. Vamos considerar a categoria $\text{mod}A$ de todos os A-módulos à direita finitamente gerados e M um A-módulo.

(1) Existe um funtor covariante $\text{Hom}_A(M,-) : \text{mod}A \longrightarrow \text{mod}k$ que associa a cada A-módulo N o k-espaço vetorial $\text{Hom}_A(M,N)$ e a cada morfismo $f : L \longrightarrow N$ associa um morfismo $\text{Hom}_A(M,f) : \text{Hom}_A(M,L) \longrightarrow \text{Hom}_A(M,N)$ dado por
$$\text{Hom}_A(M,f)(g) \doteq f \circ g, \text{ para cada } g \in \text{Hom}_A(M,L).$$

(2) Existe um funtor contravariante $\text{Hom}_A(-,M) : \text{mod}A \longrightarrow \text{mod}k$ que associa a cada A-módulo N o k-espaço vetorial $\text{Hom}_A(N,M)$ e a cada morfismo $f : L \longrightarrow N$ associa um morfismo $\text{Hom}_A(f,M) : \text{Hom}_A(N,M) \longrightarrow \text{Hom}_A(L,M)$ dado por
$$\text{Hom}_A(f,M)(g) \doteq g \circ f, \text{ para cada } g \in \text{Hom}_A(N,M).$$

Estes funtores satisfazem as seguintes propriedades:

(1) $\text{Hom}_A(M, N_1 \oplus N_2) = \text{Hom}_A(M,N_1) \oplus \text{Hom}_A(M,N_2)$ para quaisquer A-módulos M, N_1 e N_2;

(2) $\text{Hom}_A(M_1 \oplus M_2, N) = \text{Hom}_A(M_1,N) \oplus \text{Hom}_A(M_2,N)$ para quaisquer A-módulos M_1, M_2 e N;

(3) se $f_1, f_2 : L \longrightarrow N$ são morfismos quaisquer e $\lambda \in k$ é um escalar então para qualquer módulo M temos que $\text{Hom}_A(M, f_1+\lambda f_2) = \text{Hom}_A(M,f_1)+\lambda\, \text{Hom}_A(M,f_2)$ e $\text{Hom}_A(f_1+\lambda f_2, M) = \text{Hom}_A(f_1,M) + \lambda\, \text{Hom}_A(f_2,M)$.

Exemplo 1.18. Uma sequência exata curta da forma
$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$
é chamada de **extensão** de L por N. Seja $\text{Ext}(N,L)$ o conjunto de todas as extensões de L por N. Definimos uma relação de equivalência em $\text{Ext}(N,L)$ da seguinte forma: se $\varepsilon :\ 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ e $\varepsilon' :\ 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N \longrightarrow 0$ são duas extensões dizemos que a extensão ε é equivalente a extensão ε' se existe um isomorfismo $h : M \longrightarrow M'$ que faz o seguinte diagrama comutar:
$$\begin{array}{lccccccccc}
\varepsilon : & 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle 1_L} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle 1_N} & & \\
\varepsilon' : & 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Com esta relação de equivalência definimos o conjunto $\text{Ext}_A^1(N,L) \doteq \text{Ext}(N,L)/\simeq$ onde $\simeq$ é a relação de equivalência em $\text{Ext}(N,L)$ mencionada acima. Analogamente definimos o espaço vetorial quociente $\text{Ext}^n_A(N,L) \doteq \text{Ext}^n(N,L)/\simeq_n$, onde $\text{Ext}^n(N,L)$ é o conjunto de todas as sequências exatas da forma

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} N \longrightarrow 0,$$

e $\simeq_n$ é a relação de equivalência onde diz-se que as sequências η e η' são equivalentes (por $\simeq_n$) se existem isomorfismos $h_i : M_i \longrightarrow M_i'$ para cada $i \in \{1,2,\dots,n\}$ que fazem o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
\eta : & 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "1_L"] & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & \cdots \arrow[r, "f_{n-1}"] & M_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "h_n"] & N \arrow[r] \arrow[d, "1_N"] & 0 \\
\eta' : & 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f_0'"] & M_1' \arrow[r, "f_1'"] & M_2' \arrow[r, "f_2'"] & \cdots \arrow[r, "f_{n-1}'"] & M_n' \arrow[r, "f_n'"] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Seja então X um módulo. Por simplicidade, vamos definir apenas os funtores $\text{Ext}^1_A(X,-)$ e $\text{Ext}^1_A(-,X)$. Os funtores $\text{Ext}^n_A(X,-)$ e $\text{Ext}^n_A(-,X)$ para $n>1$ podem ser definidos de forma análoga.

(1) O funtor covariante $\text{Ext}^1_A(X,-)$ associa a cada A-módulo M o k-espaço vetorial $\text{Ext}^1_A(X,M)$. Além disso, se $f : M \longrightarrow N$ é um morfismo de A-módulos, definimos o morfismo de k-espaços vetoriais $\text{Ext}^1_A(X,f) : \text{Ext}^1_A(X,M) \longrightarrow \text{Ext}^1_A(X,N)$ da seguinte forma: considere $\varepsilon :\ 0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{h} X \longrightarrow 0$ uma extensão de M por X e S o A-módulo dado por $S = (Q \oplus N)/\{(g(m), -f(m)) \mid m \in M\}$. Existem únicos morfismos $v : N \longrightarrow S$, $u : Q \longrightarrow S$ e $w : S \longrightarrow X$ (a menos de composição com isomorfismos) que fazem o diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon : & 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Q \arrow[r, "h"] \arrow[d, "u"] & X \arrow[r] \arrow[d, "1_X"] & 0 \\
\varepsilon' : & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "v"] & S \arrow[r, "w"] & X \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dizemos que S é a **soma amalgamada** dos morfismos f e g e definimos

$$\text{Ext}^1_A(X,f)(\varepsilon) \doteq \varepsilon'.$$

(2) Analogamente, o funtor contravariante $\text{Ext}^1_A(-,X)$ associa a cada A-módulo M o k-espaço vetorial $\text{Ext}^1_A(M,X)$. Se $f : M \longrightarrow N$ é um morfismo de A-módulos, definimos o morfismo de k-espaços vetoriais $\text{Ext}^1_A(f,X) : \text{Ext}^1_A(N,X) \longrightarrow \text{Ext}^1_A(M,X)$ da seguinte forma: considere $\eta :\ 0 \longrightarrow X \xrightarrow{g} Q \xrightarrow{h} N \longrightarrow 0$ uma extensão de X por N e P o A-módulo dado por $P = \{(q,m) \in Q \oplus M \mid f(m) = h(q)\}$. Existem únicos morfismos $s : X \longrightarrow P$, $t : P \longrightarrow M$ e $r : P \longrightarrow Q$ (a menos de composição com isomorfismos) que fazem o diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
\eta' : & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "1_X"] & P \arrow[r, "t"] \arrow[d, "r"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\eta : & 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "g"] & Q \arrow[r, "h"] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dizemos que P é o **produto fibrado** dos morfismos f e h e definimos

$$\mathrm{Ext}^1_A(f,X)(\eta) \doteq \eta'.$$

Os funtores $\mathrm{Ext}^i(-,-)$ satisfazem as seguintes propriedades para cada inteiro positivo i:

(1) $\mathrm{Ext}^i_A(M, N_1 \oplus N_2) = \mathrm{Ext}^i_A(M,N_1) \oplus \mathrm{Ext}^i_A(M,N_2)$ para quaisquer A-módulos M, N_1 e N_2;

(2) $\mathrm{Ext}^i_A(M_1 \oplus M_2, N) = \mathrm{Ext}^i_A(M_1,N) \oplus \mathrm{Ext}^i_A(M_2,N)$ para quaisquer A-módulos M_1, M_2 e N;

(3) se $f_1, f_2 : L \longrightarrow N$ são morfismos quaisquer e $\lambda \in k$ é um escalar então para qualquer A-módulo M temos que $\mathrm{Ext}^i_A(M, f_1 + \lambda f_2) = \mathrm{Ext}^i_A(M,f_1) + \lambda\ \mathrm{Ext}^i_A(M,f_2)$ e $\mathrm{Ext}^i_A(f_1 + \lambda f_2, M) = \mathrm{Ext}^i_A(f_1,M) + \lambda\ \mathrm{Ext}^i_A(f_2,M)$.

Observação 1.19. Sejam X e Y dois A-módulos. Pode-se mostrar que dada uma sequência exata curta $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ obtemos duas sequências exatas longas:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N,X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(g,X)} \mathrm{Hom}_A(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,X)} \mathrm{Hom}_A(L,X) \xrightarrow{\delta}$$

$$\mathrm{Ext}^1_A(N,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_A(g,X)} \mathrm{Ext}^1_A(M,X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_A(f,X)} \mathrm{Ext}^1_A(L,X) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Ext}^2_A(N,X) \longrightarrow \cdots$$

e

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Y,L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(Y,f)} \mathrm{Hom}_A(Y,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(Y,g)} \mathrm{Hom}_A(Y,N) \xrightarrow{\delta}$$

$$\mathrm{Ext}^1_A(Y,L) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_A(Y,f)} \mathrm{Ext}^1_A(Y,M) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1_A(Y,g)} \mathrm{Ext}^1_A(Y,N) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Ext}^2_A(Y,L) \longrightarrow \cdots.$$

Os morfismos δ e δ_1 aparecem de forma natural na construção destas sequências exatas, porém não entraremos nos detalhes desta construção.

Os funtores $\mathrm{Hom}_A(-,-)$ e $\mathrm{Ext}^i_A(-,-)$ permitem definir algumas subcategorias em $\mathrm{mod}\,A$ que serão importantes no decorrer do texto. Para uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $\mathrm{mod}\,A$ definimos:

(1) $\mathcal{C}^{\perp} \doteq \{X \in \mathrm{mod}\,A \mid \mathrm{Hom}_A(C,X) = 0,\ \forall\, C \in \mathcal{C}\}$;

(2) ${}^{\perp}\mathcal{C} \doteq \{X \in \mathrm{mod}\,A \mid \mathrm{Hom}_A(X,C) = 0,\ \forall\, C \in \mathcal{C}\}$;

(3) $\mathcal{C}^{\perp_1} \doteq \{X \in \mathrm{mod}\,A \mid \mathrm{Ext}^1_A(C,X) = 0,\ \forall\, C \in \mathcal{C}\}$;

(4) ${}^{\perp_1}\mathcal{C} \doteq \{X \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Ext}^1_A(X, C) = 0,\ \forall\, C \in \mathcal{C}\}$.

Exemplo 1.20. Sejam A uma álgebra e I um ideal bilateral de A. Com a estrutura de A-módulo dada aos (A/I)-módulos na Observação 1.4 induz-se um funtor inclusão $\operatorname{mod}(A/I) \longrightarrow \operatorname{mod} A$ que a cada conjunto M munido de estrutura de (A/I)-módulo associa o mesmo conjunto M munido de estrutura de A-módulo, e a cada morfismo de (A/I)-módulos associa a função subjacente a este morfismo, porém vista como um morfismo de A-módulos.

Exemplo 1.21. Para cada A-módulo à direita M definimos um A-módulo à esquerda (que chamaremos de A^{op}-módulo à direita) por $\mathrm{D}(M) \doteq \operatorname{Hom}_k(M, k)$ e definimos a aplicação do funtor D nos morfismos por $\mathrm{D}(f) \doteq \operatorname{Hom}_k(f, k)$. Desta forma a aplicação $\mathrm{D} = \operatorname{Hom}_k(-, k) : \operatorname{mod} A \longrightarrow \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ define um funtor k-linear entre as categorias $\operatorname{mod} A$ e $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$.

Exemplo 1.22. Outra espécie de funtor "dual" é o funtor $(-)^*$, que é dado nos objetos por $M^* \doteq \operatorname{Hom}_A(M, A)$ e estendido da mesma forma nos morfismos por $f^* \doteq \operatorname{Hom}_A(f, A)$. É importante ressaltar que além da estrutura de k-espaço vetorial, $\operatorname{Hom}_A(M, A)$ possui estrutura de A-módulo à esquerda (ou A^{op}-módulo à direita) qualquer que seja o A-módulo M.

Tanto D quanto $(-)^*$ são funtores contravariantes definidos entre $\operatorname{mod} A$ e $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$. Considerando a álgebra A^{op} nos exemplos anteriores encontramos dois funtores contravariantes de $\operatorname{mod}(A^{\mathrm{op}})$ em $\operatorname{mod}(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$: $\mathrm{D} : \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \operatorname{mod} A$ e $(-)^* : \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \operatorname{mod} A$. Vale a pena lembrar que $(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \cong A$, donde $\operatorname{mod}(A^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \operatorname{mod} A$.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é uma **dualidade** se é uma equivalência de categorias contravariante, isto é, um funtor contravariante para o qual existe um funtor $F^{-1} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tais que $F^{-1}(F(X)) \cong X$ e $F(F^{-1}(Y)) \cong Y$ para quaisquer objetos X em $\mathcal{C}$ e Y em $\mathcal{D}$.

Exemplo 1.23. Compondo os funtores D e $(-)^*$ obtemos um novo funtor em $\operatorname{mod} A$, chamado de **funtor de Nakayama**, dado por $\nu \doteq \mathrm{D}(-)^* : \operatorname{mod} A \longrightarrow \operatorname{mod} A$, i.e., se M é um A-módulo então definimos

$$\nu(M) \doteq \mathrm{D}(M^*) = \mathrm{D}\operatorname{Hom}_A(M, A) = \operatorname{Hom}_k(\operatorname{Hom}_A(M, A), k).$$

Este funtor é uma dualidade e possui quase inversa ν^{-1} dada por $\nu^{-1}(M) \doteq \operatorname{Hom}_A(\mathrm{D}A, M)$ para cada A-módulo M.

Na reta final deste capítulo vamos falar sobre o funtor mais importante deste trabalho: a translação de Auslander-Reiten τ, e também falaremos de sua inversa.

Seja M um A-módulo. Vamos definir o módulo $\text{Tr}\, M$ que será utilizado para a construção do funtor τ. Para cada A-módulo M diremos que um epimorfismo $p_0 : P_0 \longrightarrow M$ é uma **cobertura projetiva** de M se P_0 é um módulo projetivo e satisfaz a seguinte propriedade: se existir um módulo P' tal que $\text{Ker}\, p_0 + P' = P$ então $P' = P$.

Podemos repetir o mesmo processo realizado com M, construindo a cobertura projetiva do módulo $\text{Ker}\, p_0$. Diremos que a sequência exata

$$P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

é uma **apresentação projetiva minimal** para o módulo M se temos que $p_0 : P_0 \longrightarrow M$ e $p_1' : P_1 \longrightarrow \text{Ker}\, p_0$ são coberturas projetivas de M e $\text{Ker}\, p_0$, respectivamente.

Observe que se M é um módulo projetivo então a apresentação projetiva minimal de M é dada por $0 \longrightarrow M \xrightarrow{1_M} M \longrightarrow 0$. Suponha então que M não seja um módulo projetivo. Aplicando o funtor $(-)^*$ na sequência exata (1.1) obtemos uma sequência exata de A^{op}-módulos à direita (ou A-módulos à esquerda):

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{p_0^*} P_0^* \xrightarrow{p_1^*} P_1^* \longrightarrow \text{Coker}\, p_1^* \longrightarrow 0.$$

O A^{op}-módulo $\text{Coker}\, p_1^*$ será chamado de **transposto** do módulo M e será denotado por $\text{Tr}\, M \doteq \text{Coker}\, p_1^*$. Esta associação pode ser estendida nos morfismos, induzindo um funtor contravariante $\text{Tr} : \underline{\text{mod}}A \longrightarrow \underline{\text{mod}}A^{\text{op}}$, através da construção dos morfismos $\text{Tr}\, f : \text{Tr}\, N \longrightarrow \text{Tr}\, M$ sempre que $f : M \longrightarrow N$ é um morfismo na categoria $\text{mod}\, A$.

Vamos lembrar novamente que não estamos distinguindo os funtores contravariantes $\text{D} : \text{mod}\, A \longrightarrow \text{mod}\, A^{\text{op}}$ e $\text{D} : \text{mod}\, A^{\text{op}} \longrightarrow \text{mod}\, A$, e também não vamos diferenciar os funtores contravariantes $\text{Tr} : \underline{\text{mod}}A \longrightarrow \underline{\text{mod}}A^{\text{op}}$ e $\text{Tr} : \underline{\text{mod}}A^{\text{op}} \longrightarrow \underline{\text{mod}}A$.

Definição 1.24. As **translações de Auslander-Reiten** são dois funtores covariantes $\tau : \underline{\text{mod}}A \longrightarrow \overline{\text{mod}}A$ e $\tau^{-1} : \overline{\text{mod}}A \longrightarrow \underline{\text{mod}}A$ definidos pelas composições dos funtores contravariantes D e Tr , isto é,

$$\tau = \text{DTr} \qquad \text{e} \qquad \tau^{-1} = \text{Tr}\, \text{D}.$$

As translações de Auslander-Reiten são úteis para a construção do quiver de Auslander-Reiten, por exemplo, como pode ser visto em (**ASS06**). Além disso, utilizaremos o funtor τ largamente ao longo do texto.

2 TEORIA INCLINANTE

Neste capítulo veremos de forma resumida os principais resultados a respeito da Teoria Inclinante Clássica. Os módulos inclinantes (tilting) foram axiomatizados em 1982 por Happel e Ringel, e desde então eles apresentam uma enorme importância para o estudo da Teoria de Representações. O estudo das propriedades da categoria de A-módulos pode não ser simples, a depender da álgebra A. A Teoria Inclinante nos permite reescrever alguns problemas relacionados a uma álgebra A no contexto de uma álgebra B, onde estes problemas podem ser resolvidos de uma forma mais simples.

Começaremos o capítulo falando sobre os pares de torção na categoria $\operatorname{mod} A$. Feito isso, vamos falar sobre os módulos inclinantes de A e associaremos um quiver ao conjunto de módulos inclinantes. Também associaremos a certos módulos inclinantes certas classes de torção e livres de torção. Durante o capítulo discutiremos alguns resultados da Teoria Inclinante Clássica e definiremos o quiver $Q(\operatorname{tilt} A)$. Aqui A denota uma k-álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k e que possui n módulos simples.

2.1 PARES DE TORÇÃO

Neste trabalho estamos interessados em estudar alguns pares de torção associados aos módulos inclinantes (que serão definidos na seção seguinte) e aos módulos τ-inclinantes (a serem definidos no capítulo seguinte). Neste sentido definimos os pares de torção como segue.

Definição 2.1. Sejam $\mathcal{T}$ e $\mathcal{F}$ duas subcategorias plenas de $\operatorname{mod} A$. Dizemos que o par ordenado $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ é um **par de torção** se são satisfeitas as seguintes condições:

(1) $\operatorname{Hom}_A(M, N) = 0$ para cada M em $\mathcal{T}$ e cada N em $\mathcal{F}$;

(2) se M é tal que $\operatorname{Hom}_A(M, X) = 0$ para todo X em $\mathcal{F}$ então M é um objeto de $\mathcal{T}$;

(3) se M é tal que $\operatorname{Hom}_A(X, M) = 0$ para todo X em $\mathcal{T}$ então M é um objeto de $\mathcal{F}$.

Se este é o caso, dizemos que $\mathcal{T}$ é uma **classe de torção** e $\mathcal{F}$ é uma **classe livre de torção**. Da mesma forma dizemos que os objetos de $\mathcal{T}$ são **objetos de torção** e os objetos de $\mathcal{F}$ são chamados de **objetos livres de torção**. Isto significa que pela propriedade **(1)**, os objetos de $\mathcal{T}$ e $\mathcal{F}$ são "ortogonais" uns aos outros e por **(2)** e **(3)**, estas classes são maximais com relação a esta "ortogonalidade".

Seja $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ um par de torção em $\operatorname{mod} A$. Se M é um A-módulo, existe uma sequência exata da forma $0 \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow Y \longrightarrow 0$, com $X \in \mathcal{T}$ e $Y \in \mathcal{F}$. Além disso, se $0 \longrightarrow X' \longrightarrow M \longrightarrow Y' \longrightarrow 0$ é outra sequência exata com $X' \in \mathcal{T}$ e $Y' \in \mathcal{F}$ então mostra-se que $X \cong X'$ e $Y \cong Y'$. Deste modo podemos associar uma única sequência exata $0 \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow Y \longrightarrow 0$ (a menos de isomorfismos) ao módulo M sob as condições $X \in \mathcal{T}$ e $Y \in \mathcal{F}$. Tal sequência será chamada de **sequência exata canônica** de M.

As subcategorias mais importantes para este trabalho são as subcategorias plenas cujos objetos conservem certas propriedades. Neste sentido vamos definir as seguintes subcategorias fechadas em $\operatorname{mod} A$.

Definição 2.2. Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria plena de $\operatorname{mod} A$.

(1) Dizemos que $\mathcal{C}$ é **fechada por somas diretas finitas** se para qualquer par de A-módulos M e N em $\mathcal{C}$ tivermos que $M \oplus N$ também está em $\mathcal{C}$. É fácil ver que esta condição pode ser estendida para uma quantidade finita qualquer de A-módulos.

(2) Dizemos que $\mathcal{C}$ é **fechada por extensões** se para qualquer sequência exata curta $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ em que os A-módulos L e N estejam em $\mathcal{C}$, o A-módulo M também esteja em $\mathcal{C}$.

(3) Dizemos que $\mathcal{C}$ é **fechada por submódulos** se para qualquer A-módulo M em $\mathcal{C}$ e N submódulo de M, temos que N também está em $\mathcal{C}$. Em particular, se $\mathcal{C}$ é uma subcategoria fechada por somas diretas finitas dizer que $\mathcal{C}$ é fechada por submódulos é equivalente a dizer que $\operatorname{Sub} M$ é subcategoria de $\mathcal{C}$ para qualquer M em $\mathcal{C}$.

(4) Dizemos que $\mathcal{C}$ é **fechada por imagens** se para qualquer morfismo de A-módulos $f : M \longrightarrow N$, com M em $\mathcal{C}$, o A-módulo $\operatorname{Im} f$ também estiver em $\mathcal{C}$. Isto é equivalente a dizer que se M é um A-módulo e M' é um submódulo de M então o quociente M/M' também está em $\mathcal{C}$. De fato, podemos construir a projeção canônica $\pi : M \longrightarrow M/M'$ cuja imagem é o quociente $\operatorname{Im} \pi = M/M'$ e por outro lado se $f : M \longrightarrow N$ é um morfismo temos que $\operatorname{Im} f \cong M/\operatorname{Ker} f$, ou seja, existe um isomorfismo entre as imagens e os quocientes. Por este motivo também chamaremos este tipo de subcategoria de **fechada por quocientes**.

Utilizando a definição anterior podemos caracterizar as classes de torção e as classes livres de torção usando um determinado critério de fechamento pelas propriedades acima citadas de acordo com a seguinte proposição.

Proposição 2.3 ((**ASS06**), VI.1.4).

(1) Seja $\mathcal{T}$ uma subcategoria plena de $\text{mod}A$. Então $\mathcal{T}$ é uma classe de torção para algum par de torção $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ em $\text{mod}A$ se, e somente se, $\mathcal{T}$ é uma subcategoria fechada por imagens, somas diretas e extensões.

(2) Seja $\mathcal{F}$ uma subcategoria plena de $\text{mod}A$. Então $\mathcal{F}$ é uma classe livre de torção para algum par de torção $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ em $\text{mod}A$ se, e somente se, $\mathcal{F}$ é uma subcategoria fechada por submódulos, somas diretas e extensões.

Como consequência desta proposição podemos encontrar dois pares de torção (dos mais importantes) como vemos nos exemplos a seguir.

Exemplo 2.4 ((**ASS06**), VI.1.9). Seja M um A-módulo de forma que $\text{Ext}_A^1(M,X)=0$ para cada $X\in\text{Fac}M$. De acordo com a Proposição 2.3 temos que $\text{Fac}M$ é uma classe de torção. De fato, $\text{Fac}M$ é fechada por quocientes, por extensões e por somas diretas. Também pode-se mostrar que $M^{\perp}\doteq(\text{add}M)^{\perp}=\{N\in\text{mod}A\mid\text{Hom}_A(M,N)=0\}$ é a classe livre de torção associada a $\text{Fac}M$. Logo temos que $(\text{Fac}M,M^{\perp})$ é um par de torção.

Exemplo 2.5 ((**ASS06**), VI.1.9). Seja M um A-módulo tal que $\text{Ext}_A^1(X,M)=0$ para cada $X\in\text{Sub}M$. Então $\text{Sub}M$ é uma classe livre de torção de acordo com a Proposição 2.3, pois é fechada por submódulos, somas diretas e extensões. Pode-se mostrar que a classe de torção associada é a classe ${}^{\perp}M\doteq{}^{\perp}(\text{add}M)=\{N\in\text{mod}A\mid\text{Hom}_A(N,M)=0\}$. Desta forma $({}^{\perp}M,\text{Sub}M)$ é um par de torção.

2.2 MÓDULOS INCLINANTES

No capítulo anterior definimos os módulos projetivos, as coberturas projetivas e as apresentações projetivas para um A-módulo M qualquer. Nesta seção falaremos sobre os módulos inclinantes e suas relações com os módulos projetivos. Também descreveremos como obter um A-módulo inclinante a partir de um módulo "quase" inclinante.

Seja M um A-módulo. Uma **resolução projetiva** de (ou para) M é uma sequência exata da forma

$$\cdots\longrightarrow P_m\xrightarrow{h_m}P_{m-1}\xrightarrow{h_{m-1}}\cdots\xrightarrow{h_2}P_1\xrightarrow{h_1}P_0\xrightarrow{h_0}M\longrightarrow 0,\quad(2.1)$$

onde cada P_j é um A-módulo projetivo e $j\in\mathbb{N}$. Além disso, dizemos que a sequência exata (2.1) é uma **resolução projetiva minimal** de (ou para) M se $h_j:P_j\longrightarrow\text{Ker}\,h_{j-1}$ é uma cobertura projetiva para cada natural $j\geqslant 1$ e $h_0:P_0\longrightarrow M$ é uma cobertura projetiva. Não necessariamente os módulos P_j precisam ser distintos. Neste sentido temos a seguinte definição.

Definição 2.6. Seja A uma k-álgebra. A **dimensão projetiva** de um A-módulo M é o menor inteiro não negativo m para o qual existe uma resolução projetiva para M da forma

$$0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{h_m} P_{m-1} \xrightarrow{h_{m-1}} \cdots \xrightarrow{h_2} P_1 \xrightarrow{h_1} P_0 \xrightarrow{h_0} M \longrightarrow 0$$

e não existe uma resolução projetiva para M da forma

$$0 \longrightarrow P'_{m-1} \xrightarrow{h'_{m-1}} \cdots \xrightarrow{h'_2} P'_1 \xrightarrow{h'_1} P'_0 \xrightarrow{h'_0} M \longrightarrow 0.$$

Neste caso denotamos este inteiro m por $\mathsf{dp}\, M \doteq m$. Se M não admite resolução projetiva de comprimento finito (i.e., todas as resoluções projetivas de M como em (2.1) possuem infinitos módulos projetivos P_j não nulos) então diz-se que a dimensão projetiva de M é infinita.

Observação 2.7. Em alguns casos podemos estimar a dimensão projetiva de um determinado A-módulo através das dimensões projetivas conhecidas de outros A-módulos como podemos ver nos seguintes casos.

(1) Se M e N são A-módulos então $\mathsf{dp}\,(M \oplus N) = \max\{\mathsf{dp}\, M, \mathsf{dp}\, N\}$.

(2) Se $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ é uma sequência exata em $\mathsf{mod} A$ então $\mathsf{dp}\, M \leqslant \max\{\mathsf{dp}\, L, \mathsf{dp}\, N\}$.

No capítulo anterior definimos o bifuntor $\mathsf{Ext}^1_A(-,-)$. Queremos utilizar este funtor para definir os módulos inclinantes. Mas antes disso vamos utilizá-lo para definir os módulos rígidos.

Definição 2.8. Seja M um A-módulo. Dizemos que M é um A-módulo **rígido** se M não possui auto-extensões, i.e., $\mathsf{Ext}^1_A(M,M) = 0$.

Por exemplo, se A é uma álgebra e i um vértice do quiver ordinário de A, pode-se mostrar que o i-ésimo módulo simples é rígido, pois satisfaz a condição $\mathsf{Ext}^1_A(S_i,S_i) = 0$. O próximo lema mostra que a dimensão projetiva está intimamente ligada com o funtor $\mathsf{Ext}^1_A(-,-)$.

Lema 2.9 ((**ASS06**), A.4.6)**.** Seja M um A-módulo. Se $\mathsf{dp}\, M \leqslant t$ então $\mathsf{Ext}^{t+1}_A(M,N) = 0$ para qualquer módulo N.

De acordo com este lema podemos ver que qualquer A-módulo projetivo é também um módulo rígido, i.e., $\operatorname{Ext}_A^1(P,P) = 0$. De fato, como P é um módulo projetivo temos que $\operatorname{dp} P = 0$, pois $0 \longrightarrow P_0 = P \longrightarrow P \longrightarrow 0$ é uma resolução projetiva de P. Pelo Lema 2.9, como $\operatorname{dp} P = 0$ temos que $\operatorname{Ext}_A^1(P,N) = 0$ para qualquer A-módulo N. Em particular, tomando $N = P$ temos que $\operatorname{Ext}_A^1(P,P) = 0$, ou seja, P é um módulo rígido.

Vamos utilizar os módulos rígidos para definir os módulos inclinantes parciais.

Definição 2.10. Seja A uma álgebra. Dizemos que um A-módulo M é **inclinante parcial** se M é um módulo rígido tal que $\operatorname{dp} M \leqslant 1$.

A dimensão projetiva definida anteriormente mede o quão próximo um dado módulo está de ser um módulo projetivo. Temos que $\operatorname{dp} P = 0$ para qualquer módulo projetivo P e vimos que P é um módulo que não possui auto-extensões. Portanto concluímos que qualquer A-módulo projetivo é um módulo inclinante parcial.

Definição 2.11. Seja M um A-módulo inclinante parcial. Dizemos que M é um A-módulo **inclinante** se existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0,$$

com $M_1, M_2 \in \operatorname{add} M$.

Nem todo módulo inclinante parcial é um módulo inclinante. Por exemplo, o módulo inclinante parcial 0 não é inclinante, pois $0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$ não é uma sequência exata e é a única sequência exata curta possível de obter-se com $M_1, M_2 \in \operatorname{add} 0$, como na definição anterior. Estamos interessados em obter módulos inclinantes a partir de módulos inclinantes parciais, i.e., queremos completar os módulos inclinantes parciais de uma certa forma que obtenhamos módulos inclinantes.

Definição 2.12. Seja M um módulo inclinante parcial. Dizemos que o módulo X é um **complemento** de M (a um módulo inclinante) se $M \oplus X$ é um A-módulo inclinante.

O Teorema 2.14 mostrará que qualquer módulo inclinante parcial pode ser completado a um módulo inclinante. Iremos reproduzir a demonstração de (**ASS06**) pois veremos mais a diante que este resultado pode ser generalizado na realização do complemento de módulos τ-inclinantes. Antes do teorema, mostraremos o seguinte lema:

Lema 2.13. Seja $0 \longrightarrow P \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$ uma sequência exata em $\operatorname{mod} A$, onde P é um módulo projetivo e N é um módulo rígido. Se $\operatorname{Ext}_A^1(N,L) = 0$ então $L \oplus N$ é um módulo rígido. Além disso, se $\operatorname{dp} N \leqslant 1$ então $L \oplus N$ é um módulo inclinante parcial.

Demonstração. Como P é um módulo projetivo, temos que $\text{dp}\, P = 0$ e logo pelo Lema 2.9 temos que $\text{Ext}^1_A(P, X) = 0$ para qualquer A-módulo X. Em particular para L e N temos que $\text{Ext}^1_A(P, N) = 0$ e $\text{Ext}^1_A(P, L) = 0$. De acordo com a Observação 1.19, quando aplicamos os funtores contravariantes $\text{Hom}_A(-, N)$ e $\text{Hom}_A(-, L)$ na sequência exata curta $0 \longrightarrow P \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0$ obtemos respectivamente as sequências exatas

$$\text{Ext}^1_A(N, N) \longrightarrow \text{Ext}^1_A(L, N) \longrightarrow \text{Ext}^1_A(P, N) \tag{2.2}$$

e

$$\text{Ext}^1_A(N, L) \longrightarrow \text{Ext}^1_A(L, L) \longrightarrow \text{Ext}^1_A(P, L). \tag{2.3}$$

Como N é rígido temos que $\text{Ext}^1_A(N, N) = 0$, e já havíamos visto que $\text{Ext}^1_A(P, N) = 0$. Pela exatidão da sequência (2.2) temos que $\text{Ext}^1_A(L, N) = 0$. Analogamente temos que $\text{Ext}^1_A(L, L) = 0$ pois $\text{Ext}^1_A(N, L) = 0$ por hipótese e $\text{Ext}^1_A(P, L) = 0$ pois P é um módulo projetivo, além do fato de que a sequência (2.3) é exata. Logo

$$\text{Ext}^1_A(L \oplus N, L \oplus N) = \text{Ext}^1_A(L, L) \oplus \text{Ext}^1_A(L, N) \oplus \text{Ext}^1_A(N, L) \oplus \text{Ext}^1_A(N, N) = 0.$$

Portanto $L \oplus N$ é um módulo rígido.

Além disso, pela Observação 2.7 temos que $\text{dp}\, L \leqslant \max\{\text{dp}\, P, \text{dp}\, N\}$. Como P é projetivo temos que $\text{dp}\, P = 0$ e $\text{dp}\, N \leqslant 1$ por hipótese. Logo $\text{dp}\, L \leqslant 1$. Novamente pela Observação 2.7 temos que $\text{dp}\,(L \oplus N) = \max\{\text{dp}\, L, \text{dp}\, N\} = 1$. Logo $L \oplus N$ é um módulo rígido tal que $\text{dp}\,(L \oplus N) \leqslant 1$. Portanto $L \oplus N$ é um módulo inclinante parcial. □

Então estamos prontos para mostrar que qualquer módulo inclinante parcial pode ser completado a um módulo inclinante.

Teorema 2.14. Seja M um módulo inclinante parcial. Então existe um A-módulo X tal que $M \oplus X$ é um módulo inclinante.

Demonstração. Seja $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_d\}$ uma base do k-espaço vetorial $\text{Ext}^1_A(M, A)$. Vimos no Exemplo 1.18 que cada ε_i representa uma sequência exata da forma:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{g_i} M \longrightarrow 0,$$

para algum módulo X_i. Sejam $f : A^d \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{d} X_i$ e $g : \bigoplus_{i=1}^{d} X_i \longrightarrow M^d$ os morfismos induzidos pelos morfismos $f_i : A \longrightarrow X_i$ e $g_i : X_i \longrightarrow M$ respectivamente para cada $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$, isto é, os morfismos dados por

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_d) = (f_1(a_1), f_2(a_2), \ldots, f_d(a_d)) \in \bigoplus_{i=1}^{d} X_i \text{ e}$$

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_d) = (g_1(x_1), g_2(x_2), \ldots, g_d(x_d)) \in M^d.$$

Considere também o morfismo $\mu : A^d \longrightarrow A$ dado por

$$\mu(a_1, a_2, \ldots, a_d) = a_1 + a_2 + \cdots + a_d.$$

Seja X o push-out dos morfismos μ e f, como definido no Exemplo 1.18. Pela definição do bifuntor $\mathrm{Ext}^1_A(-,-)$ temos que existem $u : \bigoplus_{i=1}^{d} X_i \longrightarrow X$, $v : A \longrightarrow X$ e $w : X \longrightarrow M^d$ que fazem o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu"] & \bigoplus_{i=1}^{d} X_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & M^d \arrow[r] \arrow[d, "1_{M_d}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "v"] & X \arrow[r, "w"] & M^d \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Como vimos no Exemplo 1.18, a sequência exata inferior do diagrama (2.4) é um elemento de $\mathrm{Ext}^1_A(M^d, A)$, que denotaremos por ε. Se $u_i : M \longrightarrow M^d$, $u'_i : X_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{d} X_i$ e $u''_i : A \longrightarrow A^d$ são as inclusões nas i-ésimas coordenadas, podemos ver que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "u''_i"] & X_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "u'_i"] & M \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A^d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu"] & \bigoplus_{i=1}^{d} X_i \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & M^d \arrow[r] \arrow[d, "1_{M_d}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "v"] & X \arrow[r, "w"] & M^d \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Se $a_i \in A$ é um elemento qualquer temos $\mu(u''_i(a_i)) = \mu(0, \ldots, a_i, \ldots, 0) = a_i$, o que significa que $\mu u''_i = 1_A$. Desta forma, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "1_A"] & X_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "uu'_i"] & M \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "v"] & X \arrow[r, "w"] & M^d \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

donde podemos concluir que $\varepsilon_i = \mathrm{Ext}^1_A(u_i, A)(\varepsilon)$, pela definição do morfismo $\mathrm{Ext}^1_A(u_i, A)$.

Se aplicarmos o funtor covariante $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ na sequência exata representada por ε obtemos a seguinte sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, M^d) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_A(M, A) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, M^d) = 0,$$

onde $\mathrm{Ext}_A^1(M, M^d) = \mathrm{Ext}_A^1(M, M)^d = 0$ pois M é inclinante parcial. Portanto teremos que $\varepsilon_i = \mathrm{Ext}_A^1(u_i, A)\varepsilon = \delta(u_i)$, e logo cada elemento da base de $\mathrm{Ext}_A^1(M, A)$ está na imagem do homomorfismo de conexão δ. Portanto δ é sobrejetivo. Como a sequência acima é exata e $\mathrm{Ext}_A^1(M, M^d) = 0$, concluímos que $\mathrm{Coker}\,\delta = \mathrm{Ext}_A^1(M, X) = 0$.

Portanto temos que $0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow M^d \longrightarrow 0$ é uma sequência exata onde A é projetivo, M^d é rígido, $\mathrm{Ext}(M^d, X) = \mathrm{Ext}_A^1(M, X)^d = 0$ e $\mathrm{dp}\, M \leqslant 1$ pois M é inclinante parcial. Pelo lema anterior concluímos que $M \oplus X$ é um módulo inclinante parcial. Finalmente, observando que nessa sequência temos $X, M^d \in \mathrm{add}\,(M \oplus X)$ concluímos que o A-módulo $M \oplus X$ é um módulo inclinante. □

Portanto, temos que para qualquer módulo inclinante parcial M dado é possível obter um outro módulo X de tal forma que $M \oplus X$ seja um módulo inclinante. Chamaremos esse módulo X de **complemento de Bongartz** de M.

2.3 TEORIA CLÁSSICA

Se M é um A-módulo inclinante e L, N são dois A-módulos na classe em $\mathrm{mod}\,A$ dada por $\mathcal{T}(M) \doteq \{X \in \mathrm{mod}\,A \mid \mathrm{Ext}_A^1(M, X) = 0\}$ e $B = \mathrm{End}_A M$ é a álgebra de endomorfismos de M então existem isomorfismos funtoriais:

$$\mathrm{Hom}_A(L, N) \cong \mathrm{Hom}_B\,(\mathrm{Hom}_A(M, L), \mathrm{Hom}_A(M, N)) \text{ e}$$
$$\mathrm{Ext}_A^1(L, N) \cong \mathrm{Ext}_B^1(\mathrm{Hom}_A(M, L), \mathrm{Hom}_A(M, N)).$$

Estes isomorfismos permitem transferir as propriedades do estudo da categoria dos A-módulos para o estudo da categoria dos B-módulos. Vamos discorrer mais um pouco sobre esta relação.

Proposição 2.15. Sejam A uma álgebra e M um A-módulo inclinante. Então existe um par de torção $(\mathcal{X}(M), \mathcal{Y}(M))$ na categoria $\mathrm{mod}\,B$, onde $B = \mathrm{End}_A M$ e

$$\mathcal{X}(M) \doteq \{X \in \mathrm{mod}\,B \mid \mathrm{Hom}_B(X, \mathrm{D}M) = 0\} = \{X \in \mathrm{mod}\,B \mid X \otimes_B M = 0\},$$

$$\mathcal{Y}(M) \doteq \{Y \in \mathrm{mod}\,B \mid \mathrm{Ext}_B^1(Y, \mathrm{D}M) = 0\} = \{Y \in \mathrm{mod}\,B \mid \mathrm{Tor}_1^B(Y, M) = 0\}.$$

Os detalhes sobre o produto tensorial $X \otimes_B M$ e o funtor derivado $\mathrm{Tor}_1^B(-,-)$ podem ser encontrados em (**Ass97**). Desta forma conseguimos construir dois pares de torção para um dado módulo inclinante M: o par de torção $(\mathcal{T}(M), \mathcal{F}(M))$ em $\mathrm{mod}\,A$ e o par de torção $(\mathcal{X}(M), \mathcal{Y}(M))$ em $\mathrm{mod}\,B$, onde $\mathcal{F}(M) \doteq \{X \in \mathrm{mod}\,A \mid \mathrm{Hom}_A^1(M, X) = 0\}$. Desta forma temos que:

(1) M é inclinante como B-módulo à esquerda (i.e., um B-módulo à esquerda que satisfaz as condições da Definição 2.11). A fim de evitar confusão com o A-módulo à direita M denotaremos o B-módulo à esquerda M por ${}_BM$;

(2) existe um isomorfismo de k-álgebras entre A e $\text{End}({}_BM)^{\text{op}}$ dado por

$$A \ni a \longmapsto (a \mapsto (t \mapsto ta)) \in \text{End}({}_BM)^{\text{op}};$$

(3) os funtores $\text{Hom}_A(M,-) : \text{mod}\,A \longrightarrow \text{mod}\,B$ e $-\otimes_B M : \text{mod}\,B \longrightarrow \text{mod}\,A$ induzem equivalências quase-inversas entre $\mathcal{T}(M)$ e $\mathcal{Y}(M)$, i.e., temos isomorfismos para cada A-módulo X e cada B-módulo Z:

$$\text{Hom}_A(M,X) \otimes_B M \cong X \text{ e } \text{Hom}_A(M, Z \otimes_B M) \cong Z;$$

(4) a aplicação $\text{Hom}_A(M,-) : \text{mod}\,A \longrightarrow \text{mod}\,B$ pode ser restringida a uma equivalência de categorias $\text{Hom}_A(M,-) : \text{add}T \longrightarrow \text{proj}\,B$;

(5) os funtores $\text{Ext}^1_A(M,-) : \text{mod}\,A \longrightarrow \text{mod}\,B$ e $\text{Tor}^B_1(-,M) : \text{mod}\,B \longrightarrow \text{mod}\,A$ induzem equivalências quase inversas entre $\mathcal{F}(M)$ e $\mathcal{X}(M)$.

A figura a seguir ilustra como os funtores $\text{Ext}^1_A(M,-), \text{Hom}_A(M,-) : \text{mod}\,A \longrightarrow \text{mod}\,B$ e $-\otimes_B M, \text{Tor}^B_1(-,M) : \text{mod}\,B \longrightarrow \text{mod}\,A$ relacionam as subcategorias $\mathcal{T}(M)$ e $\mathcal{F}(M)$ de $\text{mod}\,A$ e $\mathcal{X}(M)$ e $\mathcal{Y}(M)$ de $\text{mod}\,B$.

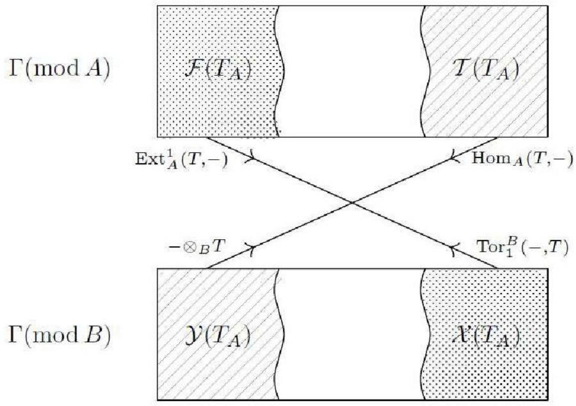


FIGURA 1 – Figura retirada de (**ASS06**), VI.3, p.209, onde T é um A-módulo inclinante e $B = \text{End}_A(T)^{\text{op}}$.

Por fim, temos que se A é um álgebra e M é um A-módulo, podemos escrever o vetor dimensão de M através das dimensões dos espaços vetoriais Me_i obtidos na representação de M sobre Q_A. Mais precisamente, definimos

$$\text{dim}M \doteq [\text{dim}_k Me_1,\ \text{dim}_k Me_2,\ \ldots,\ \text{dim}_k Me_n],$$

onde $\text{dim}_k Me_j$ denota a dimensão de Me_j como k-espaço vetorial para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Pode-se mostrar que se M é um módulo inclinante, para cada par de A-módulos $Q \in \mathcal{T}(M)$ e $N \in \mathcal{F}(M)$ temos que:

$$\text{dim Hom}_A(M,Q) = [\text{dim}_k\text{Hom}_A(M_1,Q),\ \text{dim}_k\text{Hom}_A(M_2,Q),\ \ldots,\ \text{dim}_k\text{Hom}_A(M_n,Q)]$$

e

$$\dim \operatorname{Ext}^1_A(M,N) = [\dim_k \operatorname{Hom}_A(N,\tau M_1),\ \dim_k \operatorname{Hom}_A(N,\tau M_2),\ \ldots,\ \dim_k \operatorname{Hom}_A(N,\tau M_n)]\,.$$

2.4 A QUANTIDADE DE SOMANDOS DIRETOS INDECOMPONÍVEIS DE UM MÓDULO INCLINANTE

Nesta seção estamos interessados em utilizar a Teoria Clássica vista na seção anterior para descobrir a quantidade de módulos indecomponíveis que aparecem na decomposição de um módulo inclinante M. Queremos substituir a sequência exata da Definição 2.11 por uma condição mais simples de ser verificada, por exemplo, em que apenas seja necessário verificar a quantidade de somandos diretos indecomponíveis distintos não isomorfos dois a dois do módulo candidato a ser módulo inclinante.

Considerando A uma k-álgebra vamos definir $\mathcal{F}$ como o grupo abeliano livre cuja base é formada pelas classes de isomorfismo de A-módulos. Este grupo possui um subgrupo $\mathcal{F}'$ gerado pelos elementos $\overline{M} - \overline{L} - \overline{N}$, onde $\overline{L}$, $\overline{M}$ e $\overline{N}$ denotam as classes de isomorfismo de L, M e N respectivamente, e estes módulos formam uma sequência exata

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Com isso definimos o **grupo de Grothendieck** da álgebra A como o grupo quociente $K_0(A) \doteq \mathcal{F}/\mathcal{F}'$. Este grupo satisfaz a seguinte propriedade:

Lema 2.16 ((**ASS06**), III.3.5)**.** O grupo de Grothendieck $K_0(A)$ de A é um grupo abeliano livre com base $\{[S_1],[S_2],\ldots,[S_n]\}$, onde $[S_i]$ denota a classe de equivalência do i-ésimo A-módulo simples S_i no quociente $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$.

Desta forma, dada uma classe $[M]$ de um A-módulo M existem únicas constantes inteiras $m_1(M)$, $m_2(M)$, ..., $m_n(M)$ tais que

$$[M] = m_1(M)[S_1] + m_2(M)[S_2] + \ldots + m_n(M)[S_n].$$

Isto define uma aplicação $\dim : K_0(A) \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ que a cada classe $[M]$ associa os coeficientes definidos acima, i.e., $\dim([M]) \doteq (m_1(M), m_2(M), \ldots, m_n(M))$. Ainda mais, é possível mostrar que essa aplicação é um isomorfismo de grupos abelianos, como pode ser visto em (**ASS06**). Isto significa que o posto do grupo de Grothendieck de A coincide com a quantidade de módulos simples não isomorfos de A. A próxima proposição mostra que a quantidade de somandos diretos indecomponíveis não isomorfos entre si de um A-módulo inclinante está relacionado com o grupo de Grothendieck da álgebra A.

Proposição 2.17. Considere o A-módulo $T = T_1^{t_1} \oplus T_2^{t_2} \oplus \cdots \oplus T_s^{t_s}$ onde T_i é indecomponível para cada $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ e $T_i \ncong T_j$ para $i \neq j$. Então T é um A-módulo inclinante se, e somente se, T é inclinante parcial e s é o posto do grupo $K_0(A)$.

Demonstração. Para ver isto basta mostrar que o número de somandos diretos indecomponíveis de T (não isomorfos entre si) coincide com o posto do grupo $K_0(A)$. Começamos então com duas observações.

(1) [(**ASS06**), VI.3.1(b)] Vimos na Seção 2.3 que o funtor $\mathsf{Hom}_A(T, -)$ induz uma equivalência de categorias entre $\mathsf{add}T$ e $\mathsf{proj}B$, onde $B = \mathsf{End}_A T$.

(2) [(**ASS06**), VI.4.3] A aplicação $\mathsf{dim}M \longmapsto \dim \mathsf{Hom}_A(T, M) - \dim \mathsf{Ext}_A^1(T, M)$ induz um isomorfismo entre os grupos $K_0(A)$ e $K_0(B)$.

($\Rightarrow$): Suponha que T seja um módulo inclinante. Pela observação **(1)** temos que s coincide com o posto do grupo $K_0(B)$, pois a cada somando direto indecomponível T_i de T é associado um B-módulo projetivo indecomponível $\mathsf{Hom}_A(T, T_i)$ e além disso, todos os B-módulos projetivos indecomponíveis são escritos dessa forma. Disto segue que a quantidade de B-módulos simples (que coincide com a quantidade de B-módulos projetivos indecomponíveis) é igual a quantidade s de somandos diretos indecomponíveis de T. De acordo com a observação **(2)**, temos que os grupos $K_0(A)$ e $K_0(B)$ são isomorfos e logo $K_0(A)$ e $K_0(B)$ possuem o mesmo posto. Portanto s coincide com o posto do grupo $K_0(A)$.

($\Leftarrow$): Por outro lado, suponha que s coincida com o posto do grupo $K_0(A)$. Vimos pelo complemento de Bongartz para módulos inclinantes parciais que existe um módulo E tal que $T \oplus E$ é inclinante. Por ($\Rightarrow$), como $T \oplus E$ é inclinante temos que a quantidade de somandos de $T \oplus E$ coincide com o posto de $K_0(A)$. Então temos que $|T \oplus E| = |T|$, uma vez que os dois módulos possuem a mesma quantidade de somandos indecomponíveis não isomorfos. Logo $\mathsf{add}(T \oplus E) = \mathsf{add}(T)$, donde concluímos que T é inclinante.

□

Portanto um módulo inclinante parcial M é um módulo inclinante se, e somente se, $|M| = |A|$. Desta forma dizemos que M é módulo **inclinante quase completo** se M é inclinante parcial e $|M| = |A| - 1$. Ou seja, a menos de um somando indecomponível o módulo M é inclinante. Pelo complemento de Bongartz do Teorema 2.14, vimos que sempre existe um complemento (neste caso indecomponível) para módulos inclinates quase completos. Mais geralmente, se $|M| = s$ e X é um complemento de M então $|X| = |A| - s$.

Seja $M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ um A-módulo inclinante básico, com M_i indecomponível para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Considerando a álgebra $B = \mathsf{End}_A M$, temos que os elementos de $\mathsf{End}_A M$ da forma $e_i = \iota_i \pi_i : M \longrightarrow M$, onde $\pi_i : M \longrightarrow M_i$ é a projeção canônica na i-ésima coordenada e $\iota_i : M_i \longrightarrow M$ é a inclusão na i-ésima coordenada, são idempotentes ortogonais primitivos de B tais que $1_B = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ e então conseguimos os seguintes isomorfismos de B-módulos

$$e_i B \cong \mathsf{Hom}_A(M, M_i) \text{ e } e_i B e_j \cong \mathsf{Hom}_A(M_j, M_i),$$

e para cada A-módulo N temos o isomorfismo

$$\mathsf{Ext}^1_A(e_i M, N) \cong \mathsf{Ext}^1_A(M, N) e_i.$$

2.5 COMPLEMENTOS E O QUIVER $Q(\mathsf{tilt}A)$

Na seção anterior vimos que qualquer módulo inclinante parcial possui um complemento a um módulo inclinante. Agora trataremos especificamente dos complementos dos módulos inclinantes quase completos.

Nesta seção estamos interessados em analisar o que ocorre com um módulo inclinante parcial M que possui dois complementos indecomponíveis (não isomorfos) a módulos inclinantes, ou seja, estamos interessados no caso em que M é um módulo que satisfaz $|M| = |A| - 1$ e que possui dois módulos X e Y indecomponíveis tais que $M \oplus X$ e $M \oplus Y$ são módulos inclinantes. Ressaltamos que nem sempre um módulo inclinante quase completo possui dois complementos indecomponíveis não isomorfos, porém o que faremos nesta seção é estudar o caso específico em que existem (pelo menos) dois complementos.

Lema 2.18. Seja M um módulo inclinante quase completo. Se X e Y são módulos indecomponíveis não isomorfos tais que $M \oplus X$ e $M \oplus Y$ são módulos inclinantes então $\mathsf{Ext}^1_A(X, Y) \neq 0$ ou $\mathsf{Ext}^1_A(Y, X) \neq 0$.

Demonstração. Pela definição de módulo inclinante, X e Y são tais que $\mathsf{dp}\,(M \oplus X) \leqslant 1$ e $\mathsf{dp}\,(M \oplus Y) \leqslant 1$ e logo $\mathsf{dp}\,(X \oplus M \oplus Y) \leqslant 1$. Além disso, para o módulo $X \oplus M \oplus Y$ é possível encontrar uma sequência exata $0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow M^d \longrightarrow 0$, de forma que $X, M^d \in \mathsf{add}(X \oplus M \oplus Y)$. Portanto o módulo $N = X \oplus M \oplus Y$ satisfaz $\mathsf{dp}\, N \leqslant 1$ e a condição de existência de sequência exata da Definição 2.11. Logo, se $\mathsf{Ext}^1_A(X \oplus M \oplus Y, X \oplus M \oplus Y) = 0$ então $X \oplus M \oplus Y$ será um módulo inclinante, porém temos que

$$|X \oplus M \oplus Y| = |X| + |M| + |Y| = n + 1 > n,$$

donde $N = X \oplus M \oplus Y$ não é um módulo inclinante. Como $\operatorname{dp} N \leqslant 1$ e existe a sequência exata $0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow M^d \longrightarrow 0$ com $X, M^d \in \operatorname{add} N$, para N não ser um módulo inclinante resta que $\operatorname{Ext}^1_A(X \oplus M \oplus Y, X \oplus M \oplus Y) \neq 0$. Mas,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ext}^1_A(X \oplus M \oplus Y, X \oplus M \oplus Y) &= \operatorname{Ext}^1_A(X,Y) \oplus \operatorname{Ext}^1_A(Y,X) \oplus \operatorname{Ext}^1_A(M,M) \\
&\oplus \operatorname{Ext}^1_A(X,X) \oplus \operatorname{Ext}^1_A(X,M) \oplus \operatorname{Ext}^1_A(M,X) \\
&\oplus \operatorname{Ext}^1_A(M,Y) \oplus \operatorname{Ext}^1_A(Y,M) \oplus \operatorname{Ext}^1_A(Y,Y),
\end{aligned}$$

onde os módulos da penúltima linha são nulos pois $M \oplus X$ é inclinante, os módulos da última linha são nulos pois $M \oplus Y$ também é um módulo inclinante e $\operatorname{Ext}^1_A(M,M) = 0$ pois M é inclinante parcial. Portanto teremos que $\operatorname{Ext}^1_A(X,Y) \neq 0$ ou $\operatorname{Ext}^1_A(Y,X) \neq 0$. $\square$

No restante desta seção X e Y denotarão dois complementos não isomorfos do módulo inclinante quase completo M e fixaremos, sem perda de generalidade, que $\operatorname{Ext}^1_A(Y,X) \neq 0$.

O que faremos nos próximos resultados tem a intenção de mostrar que um módulo inclinante quase completo possui dois complementos se, e somente se, M é fiel (veremos esta definiçao mais a frente).

Seja $f : M \longrightarrow N$ um morfismo de A-módulos.

(1) Dizemos que f é um morfismo **minimal à direita** se todo endomorfismo $\rho : M \longrightarrow M$ que satisfaz $f = f\rho$ é um automorfismo.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"] & N. \\
M \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) Dizemos que f é um morfismo **minimal à esquerda** se todo endomorfismo $\theta : N \longrightarrow N$ que satisfaz $f = \theta f$ é um automorfismo.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & N \\
& N. \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

Definição 2.19. Seja $\mathcal{X}$ uma subcategoria de $\operatorname{mod} A$ e M um A-módulo.

(1) Seja $\phi : X \longrightarrow M$ um morfismo onde X é um objeto de $\mathcal{X}$.

(a) Dizemos que ϕ (ou X) é uma **$\mathcal{X}$-aproximação à direita de** M se para todo morfismo $\phi' : X' \longrightarrow M$, com $X' \in \mathcal{X}$, existe um morfismo $f : X' \longrightarrow X$ tal que $\phi' = \phi f$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] & M. \\ X' \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\phi'"] & \end{tikzcd}$$

(b) Suponhamos que ϕ seja uma $\mathcal{X}$-aproximação à direita de M. Dizemos que ϕ (ou X) é uma **$\mathcal{X}$-aproximação minimal à direita de** M se ϕ é minimal à direita.

(2) Seja $\phi : M \longrightarrow X$ um morfismo, onde X é um objeto de $\mathcal{X}$.

(a) Dizemos que ϕ (ou X) é **$\mathcal{X}$-aproximação à esquerda de** M se para todo morfismo $\phi' : M \longrightarrow X'$, com $X' \in \mathcal{X}$, existe um morfismo $f : X \longrightarrow X'$ tal que $\phi' = f\phi$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\phi'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & X'. \end{tikzcd}$$

(b) Suponhamos que ϕ seja uma $\mathcal{X}$-aproximação à esquerda de M. Dizemos que ϕ (ou X) é uma **$\mathcal{X}$-aproximação minimal à esquerda de** M se ϕ é minimal à esquerda.

Desta forma vamos obter uma sequência canônica para um módulo inclinante parcial M através das aproximações acima definidas. Nossa intenção é construir uma sequência exata curta em que apareçam os dois complementos X e Y de M e um objeto de $\mathrm{add}M$.

Proposição 2.20 ((**HU89**), 1.1). Sejam X e Y dois complementos indecomponíveis não isomorfos para um módulo inclinante quase completo M que satisfazem a condição $\mathrm{Ext}^1_A(Y, X) \neq 0$. Então existe sequência exata $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0$ onde E é um objeto de $\mathrm{add}M$, f é uma $(\mathrm{add}M)$-aproximação minimal à esquerda e g é uma $(\mathrm{add}M)$-aproximação minimal à direita.

Esta proposição nos permite definir um quiver associado ao conjunto dos módulos inclinantes básicos $\mathrm{tilt}A$. De fato, Riedtmann e Schofield definiram em (**RS91**) o quiver $Q(\mathrm{tilt}A)$ da seguinte forma:

Definição 2.21. Seja A uma álgebra. O quiver $Q(\mathrm{tilt}A)$ é o quiver onde:

(1) o conjunto de vértices de $Q(\mathrm{tilt}A)$ é o conjunto das classes de isomorfismo de A-módulos inclinantes básicos e;

(2) sejam T_1 e T_2 dois módulos inclinantes básicos tais que $T_1 = M \oplus X$ e $T_2 = M \oplus Y$, com X e Y indecomponíveis. Se existe uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow M' \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

com $M' \in \mathrm{add}M$, colocamos uma flecha $T_1 \longrightarrow T_2$ em $Q(\mathrm{tilt}A)$.

Tal quiver é denominado **quiver inclinante** de A.

Por outro lado, o conjunto de módulos inclinantes tem uma ordem parcial dada por: $T_1 \geqslant T_2$ se e somente se $\mathrm{Fac}T_1 \supset \mathrm{Fac}T_2$. Denotaremos por $T_1 > T_2$ se $\mathrm{Fac}T_2 \subsetneq \mathrm{Fac}T_1$. Esta ordem parcial permite definir o quiver da ordem parcial onde:

(1) o conjunto de vértices é o conjunto de classes de isomorfismo de A-módulos inclinantes básicos $\mathrm{tilt}A$;

(2) existe uma flecha entre os vértices T_1 e T_2 se $T_1 > T_2$ (ou seja, $\mathrm{Fac}T_1 \supsetneq \mathrm{Fac}T_2$) e não existe um módulo inclinante T_3 tal que $T_1 > T_3 > T_2$.

Estes quivers estão relacionados através do seguinte teorema.

Teorema 2.22 ((**LZ15**), 4.1)**.** O quiver inclinante $Q(\mathrm{tilt}A)$ coincide com o quiver da ordem parcial definido como acima.

No exemplo a seguir veremos uma álgebra cujo quiver inclinante é finito e conexo. Em geral isso não é verdade, como veremos no caso da álgebra de Kronecker.

Exemplo 2.23. Seja A a álgebra cujo quiver ordinário é

$$Q_A: \ 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3.$$

Então o quiver inclinante desta álgebra é dado por:

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[d] & & 2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[d] \\
3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} & & 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

onde os vértices deste quiver representam todos os módulos inclinantes básicos a menos de isomorfismos.

Exemplo 2.24. Considere a álgebra de Kronecker cujo quiver ordinário é

$$Q:\ 1 \leftleftarrows 2.$$

Então o quiver inclinante dessa álgebra é dado pelas componentes conexas:

$$\cdots \longrightarrow \substack{2222\\111} \oplus \substack{222\\11} \longrightarrow \substack{222\\11} \oplus \substack{22\\1} \longrightarrow \substack{22\\1} \oplus 2;$$

$$\cdots \longrightarrow \substack{222\\1111} \oplus \substack{22\\111} \longrightarrow \substack{2\\11} \oplus \substack{22\\111} \longrightarrow \substack{2\\11} \oplus 1.$$

Observe que neste caso o quiver inclinante é formado por duas componentes conexas e pode-se mostrar que ambas possuem infinitos elementos.

O próximo teorema mostra que cada módulo inclinante quase completo possui no máximo dois complementos não isomorfos. Na sequência mostraremos que cada vértice do quiver $Q(\text{tilt}A)$ está conectado a no máximo n outros vértices de $Q(\text{tilt}A)$.

Teorema 2.25 ((HU89), 1.2). Seja M um módulo inclinante quase completo, então existem no máximo dois complementos básicos indecomponíveis para M.

Demonstração. Sejam X e Y dois complementos indecomponíveis básicos não isomorfos para M tais que $\text{Ext}^1_A(Y,X) \neq 0$, e suponhamos que exista um terceiro complemento indecomponível básico Z não isomorfo a nenhum dos anteriores. De acordo com a Proposição 2.20, existe uma sequência exata $0 \longrightarrow X \longrightarrow E \longrightarrow Y \longrightarrow 0$, com $E \in \text{add}M$. A Observação 1.19 nos diz que aplicando os funtores $\text{Hom}_A(Z,-)$ e $\text{Hom}_A(-,Z)$ nesta sequência exata obtemos respectivamente duas sequências exatas:

$$\text{Ext}^1_A(Z,E) \longrightarrow \text{Ext}^1_A(Z,Y) \longrightarrow \text{Ext}^2_A(Z,X) \quad \text{e} \tag{2.5}$$

$$\text{Ext}^1_A(E,Z) \longrightarrow \text{Ext}^1_A(X,Z) \longrightarrow \text{Ext}^2_A(Y,Z). \tag{2.6}$$

Temos que $Z \oplus M$ é um módulo inclinante, logo $\text{Ext}^1_A(Z \oplus M, Z \oplus M) = 0$ e portanto $\text{Ext}^1_A(Z,M) = 0$ e $\text{Ext}^1_A(M,Z) = 0$. Como $E \in \text{add}M$ temos que $\text{Ext}^1_A(Z,E) = 0$ e $\text{Ext}^1_A(E,Z) = 0$. Além disso, pela Observação 2.7, como $Z \oplus M$ e $Y \oplus M$ são módulos inclinantes temos que $\text{dp}\,Z \leqslant \text{dp}\,(Z \oplus M) \leqslant 1$ e $\text{dp}\,Y \leqslant \text{dp}\,(Y \oplus M) \leqslant 1$. Portanto pelo Lema 2.9 temos que $\text{Ext}^2_A(Z,U) = 0$ para qualquer módulo U e $\text{Ext}^2_A(Y,V) = 0$ para qualquer módulo V. Tomando $U = X$ e $V = Z$ temos $\text{Ext}^2_A(Z,X) = 0$ e $\text{Ext}^2_A(Y,Z) = 0$. Substituindo estas informações nas sequências exatas (2.5) e (2.6) obtemos que $\text{Ext}^1_A(Z,Y) = 0$ e $\text{Ext}^1_A(X,Z) = 0$. De acordo com o Lema 2.18, como Z e X são complementos básicos indecomponíveis não isomorfos do módulo inclinante quase completo M e $\text{Ext}^1_A(X,Z) = 0$, concluímos que $\text{Ext}^1_A(Z,X) \neq 0$. Então pela Proposição 2.20 existe uma sequência exata $0 \longrightarrow X \longrightarrow E' \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ com $E' \in$

$\mathrm{add}\,M$. Aplicando o funtor covariante $\mathrm{Hom}_A(Y,-)$ nesta sequência exata obtemos, de acordo com a Observação 1.19, a sequência exata

$$\mathrm{Ext}^1_A(Y,E') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_A(Y,X).$$

Tomando $V = X$ na igualdade $\mathrm{Ext}^2_A(Y,V) = 0$ temos que $\mathrm{Ext}^2_A(Y,X) = 0$. Além disso, como $Y \oplus M$ é inclinante temos que $\mathrm{Ext}^1_A(Y \oplus M, Y \oplus M) = 0$ e logo $\mathrm{Ext}^1_A(Y,M) = 0$. Desta forma, como $E' \in \mathrm{add}\,M$ temos que $\mathrm{Ext}^1_A(Y,E') = 0$. Substituindo estas informações na sequência exata anterior obtemos que $\mathrm{Ext}^1_A(Y,Z) = 0$. Portanto vimos que $\mathrm{Ext}^1_A(Z,Y) = 0$ e $\mathrm{Ext}^1_A(Y,Z) = 0$, logo $Y \oplus M \oplus Z$ é um módulo inclinante. Isso é uma contradição, pois um A-módulo inclinante tem exatamente $n = |M \oplus Z|$ somandos diretos indecomponíveis não isomorfos e $|Y \oplus M \oplus Z| = n + 1$. □

Vimos nos exemplos de quiver inclinante (Exemplos 2.23 e 2.24) que no caso da álgebra cujo quiver ordinário é $Q_A : \; 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$ cada vértice do quiver $Q(\mathrm{tilt}A)$ está ligado a no máximo dois outros vértices de $Q(\mathrm{tilt}A)$ e no caso da álgebra de Kronecker cada vértice está ligado a no máximo outros dois vértices do quiver inclinante. O corolário a seguir mostra que existe uma relação geral entre a quantidade de vértices ligados a um vértice dado em $Q(\mathrm{tilt}A)$ e a quantidade de módulos simples indecomponíveis de A.

Corolário 2.26. Seja A uma álgebra. Cada vértice no quiver inclinante $Q(\mathrm{tilt}A)$ está conectado a **no máximo** n outros vértices.

Demonstração. Seja $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$ um módulo inclinante básico. Considerando $N_k = \bigoplus_{j \in J_k} M_j$, onde $J_k = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k\}$ para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, temos que N_k é um módulo inclinante quase completo, e além disso, qualquer somando direto de M que seja inclinante quase completo é dessa forma. Pelo teorema anterior, cada módulo N_k possui no máximo dois complementos a módulo inclinante, sendo que um desses complementos é o módulo M_k. Então para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe no máximo um complemento para N_k distinto de M_k. Logo existem no máximo n módulos inclinantes que possuem um somando direto inclinante quase completo em comum com M. Pela definição do quiver inclinante, existem no máximo n vértices conectados ao vértice representado por M. □

Seja M um A-módulo. Diremos que o **anulador à direita de** M é o conjunto

$$\mathrm{Ann}\, M \doteq \{a \in A \mid Ma = 0\}.$$

Este conjunto nunca é vazio, uma vez que $0 \in \mathrm{Ann}\, M$ para qualquer A-módulo M. Além disso, é fácil ver que este conjunto é um ideal bilateral de A. Podemos estender esta definição para subcategorias de $\operatorname{mod} A$ da seguinte forma: seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria de $\operatorname{mod} A$, então o **anulador à direita de** $\mathcal{C}$ é o conjunto

$$\operatorname{Ann} \mathcal{C} \doteq \{a \in A \mid Ma = 0, \ \forall M \in \mathcal{C}\}.$$

Observação 2.27. Vamos dizer que o A-módulo M é **fiel** se $\operatorname{Ann} M = \{0\}$. Pode-se mostrar que dizer que um módulo M é fiel é equivalente a dizer que para qualquer base $\{f_1, f_2, \ldots, f_d\}$ de $\operatorname{Hom}_A(A, M)$ (como k-espaço vetorial) a aplicação $f : A \longrightarrow M^d$ dada por $f = [f_1, f_2, \ldots, f_d]^t$ é injetiva. Dualmente, dizer que M é fiel é equivalente a dizer que para qualquer base $\{g_1, g_2, \ldots, g_d\}$ do k-espaço vetorial $\operatorname{Hom}_A(M, \mathrm{D}A)$ a aplicação $g = [g_1, g_2, \ldots, g_d] : M^d \longrightarrow \mathrm{D}A$ é sobrejetiva.

Com a observação anterior podemos obter uma importante propriedade dos módulos inclinantes que será retomada no Capítulo 3, onde generalizaremos esta propriedade para uma classe de módulos que inclui os módulos inclinantes.

Teorema 2.28. Seja A uma álgebra. Se M é um A-módulo inclinante então M é fiel.

Mais ainda, podemos utilizar a noção de módulo fiel para caracterizar os módulos inclinantes quase completos com relação a quantidade de complementos a módulo inclinante que esse possui.

Teorema 2.29 ((**LZ15**), 3.2)**.** Seja M um módulo inclinante quase completo. Então M tem exatamente dois complementos se é fiel. Caso contrário, existe apenas um complemento.

2.6 CLASSES FUNTORIALMENTE FINITAS EM $\operatorname{mod} A$ E MÓDULOS INCLINANTES

Nesta seção estamos interessados em relacionar os módulos inclinantes com subcategorias de $\operatorname{mod} A$ que fazem parte de pares de torção. Para isso iremos utilizar as aproximações definidas na seção anterior, de acordo com a seguinte definição.

Definição 2.30. Sejam $\mathcal{M}$ uma subcategoria de $\operatorname{mod} A$ e $\mathcal{X}$ uma subcategoria de $\mathcal{M}$. Dizemos que $\mathcal{X}$ é **contravariantemente finita em** $\mathcal{M}$ se todos os A-módulos em $\mathcal{M}$ possuem $\mathcal{X}$-aproximação à direita. Analogamente, se todo A-módulo em $\mathcal{M}$ possui $\mathcal{X}$-aproximação à esquerda, dizemos que $\mathcal{X}$ é **covariantemente finita em** $\mathcal{M}$. Além disso, se $\mathcal{X}$ é covariantemente finita e contravariantemente finita dizemos que $\mathcal{X}$ é **funtorialmente finita em** $\mathcal{M}$.

Durante o texto estaremos interessados em associar pares de torção aos módulos inclinantes (e futuramente aos módulos τ-inclinantes também). Uma das propriedades desejadas para estas classes é que elas sejam funtorialmente finitas. Pode-se mostrar que as classes de torção sempre são contravariantemente finitas e as classes livres de torção são covariantemente finitas.

Seja $\mathcal{C}$ uma subcategoria plena de $\operatorname{mod} A$. Dizemos que o A-módulo $M \in \mathcal{C}$ é Ext**-projetivo em** $\mathcal{C}$ se $\operatorname{Ext}_A^1(M, C) = 0$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Dualmente, dizemos que $M \in \mathcal{C}$ é Ext**-injetivo em** $\mathcal{C}$ se $\operatorname{Ext}_A^1(C, M) = 0$ para cada $C \in \mathcal{C}$. É importante ressaltar que para um A-módulo M ser Ext-projetivo ou Ext-injetivo em uma subcategoria $\mathcal{C}$, este módulo deve pertencer à subcategoria $\mathcal{C}$. Sempre que o módulo nulo estiver na subcategoria $\mathcal{C}$ ele será tanto um módulo Ext-projetivo quanto um módulo Ext-injetivo na referida subcategoria.

Denotaremos por $P(\mathcal{C})$ a soma direta de uma cópia (a menos de isomorfismos) de cada módulo Ext-projetivo indecomponível em $\mathcal{C}$. Analogamente denotaremos por $I(\mathcal{C})$ a soma direta de uma cópia (a menos de isomorfismos) de cada módulo Ext-injetivo indecomponível em $\mathcal{C}$.

O seguinte teorema relaciona as classes $\mathcal{T}$ e $\mathcal{F}$ de um par de torção $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ com os módulos $P(\mathcal{T})$ e $I(\mathcal{F})$ e com as classes de torção e livres de torção funtorialmente finitas.

Teorema 2.31 ((**Sma84**))**.** Seja $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ um par de torção em $\operatorname{mod} A$.

(A) São equivalentes:

- **(1)** $\mathcal{T}$ é funtorialmente finita;
- **(2)** $\mathcal{T} = \operatorname{Fac} X$ para algum A-módulo X;
- **(3)** $P(\mathcal{T})$ é um $(A/\operatorname{Ann} \mathcal{T})$-módulo inclinante;
- **(4)** $\mathcal{T} = \operatorname{Fac}(P(\mathcal{T}))$.

(B) São equivalentes:

- **(5)** $\mathcal{F}$ é funtorialmente finita;
- **(6)** $\mathcal{F} = \operatorname{Sub} Y$ para algum A-módulo Y;
- **(7)** $I(\mathcal{F})$ é um $(A/\operatorname{Ann} \mathcal{F})$-módulo coinclinante;
- **(8)** $\mathcal{F} = \operatorname{Sub}(I(\mathcal{F}))$.

Em (**Sma84**) vemos também que $\mathcal{T}$ é funtorialmente finita se, e somente se, $\mathcal{F}$ é funtorialmente finita. Desta forma, todas as afirmações de **(1)** até **(8)** são equivalentes. Utilizaremos bastante essas equivalências nos próximos capítulos.

Considerando um módulo inclinante parcial M podemos mostrar que as classes $\operatorname{Fac} M$ e $\mathcal{T}(M) = \{X \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Ext}_A^1(M, X) = 0\}$ são classes de torção cujas classes livres de torção associadas são $\mathcal{F}(M) = \{X \in \text{mod}A \mid \text{Hom}_A(M, X) = 0\}$ e $\text{Sub}(\tau M)$ respectivamente. Além disso, pode-se mostrar que M é um módulo Ext-projetivo na classe de torção $\text{Fac}M$, e pela definição de $\mathcal{T}(M)$ temos também que M é Ext-projetivo em $\mathcal{T}(M)$. Desta forma construímos dois pares de torção $(\text{Fac}M, \mathcal{F}(M))$ e $(\mathcal{T}(M), \text{Sub}(\tau M))$. O próximo teorema caracteriza os módulos inclinantes através destes dois pares de torção.

Lema 2.32 ((**ASS06**), VI.2.5)**.** Seja M um módulo inclinante parcial. As seguintes condições são equivalentes:

(1) M é um módulo inclinante;

(2) $\text{Fac}M = \mathcal{T}(M)$;

(3) $\mathcal{F}(M) = \text{Sub}(\tau M)$;

(4) seja X um A-módulo. Então $X \in \text{add}M$ se, e somente se, X é Ext-projetivo em $\mathcal{T}(M)$.

3 TEORIA τ-INCLINANTE

No capítulo anterior definimos os módulos inclinantes e vimos que um módulo inclinante quase completo básico é sempre somando de, no máximo, dois módulos inclinantes básicos. Porém, nem todos os módulos inclinantes quase completos básicos são somandos de exatamente dois módulos inclinantes básicos. Vimos que um módulo inclinante quase completo básico é somando de exatamente dois módulos inclinantes básicos se, e somente se, ele é fiel (ver o Teorema 2.29). Neste capítulo veremos uma generalização para o conceito de módulos inclinantes e algumas propriedades que também podem ser generalizadas como por exemplo, o complemento de Bongartz. Neste capítulo nos basearemos principalmente no artigo "τ-tilting theory" (**AIR14**).

3.1 MÓDULOS τ-INCLINANTES

No Capítulo 1 vimos que existem dois funtores D, $(-)^* : \mathrm{mod}A \longleftrightarrow \mathrm{mod}A^{\mathrm{op}}$ que são usados para definir o funtor de Nakayama $\nu = \mathrm{D}(-)^* : \mathrm{mod}A \longrightarrow \mathrm{mod}A$, que a cada A-módulo M associa o A-módulo $\mathrm{DHom}_A(M, A)$. A partir destes funtores definimos um novo funtor $\tau : \underline{\mathrm{mod}}A \longrightarrow \overline{\mathrm{mod}}A$ denominado translação de Auslander-Reiten da seguinte forma: para cada módulo M construímos sua apresentação projetiva minimal $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$ e aplicamos o funtor $(-)^*$ obtendo a sequência exata

$$0 \longrightarrow M^* \xrightarrow{p_0^*} P_0^* \xrightarrow{p_1^*} P_1^* \longrightarrow \mathrm{Coker}\, p_1^* \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Se aplicarmos o funtor D na sequência exata (3.1) obtemos uma nova sequência exata

$$0 \longrightarrow \tau M \longrightarrow \nu P_1 \xrightarrow{\nu p_1} \nu P_0 \xrightarrow{\nu p_0} \nu M \longrightarrow 0,$$

pois $\mathrm{DTr}\, M = \tau M$ e $\nu = \mathrm{D}(-)^*$, ou seja, τM é o núcleo da aplicação νp_1.

Em outras palavras, o funtor τ é a composição dos funtores D e Tr . Este fato permite definir o funtor inverso de τ, dado por $\tau^{-1} = \mathrm{Tr}\, \mathrm{D}$. No capítulo anterior vimos que um módulo rígido é um A-módulo M que satisfaz a condição $\mathrm{Ext}_A^1(M, M) = 0$. A próxima definição busca generalizar esta definição.

Definição 3.1. Dizemos que M é um A-módulo **τ-rígido** se $\mathrm{Hom}_A(M, \tau M) = 0$.

Esta condição **não** generaliza a definição de módulo rígido. De fato, considere a álgebra A cujo quiver ordinário é dado por

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[rrr, dashed, bend left, no head] & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & 4 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

e o módulo $M = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$. Pode-se mostrar que N é um módulo rígido, pois $\mathrm{Ext}^1_A(N,N) = 0$, tal que $\mathrm{Hom}_A(N, \tau N) \neq 0$, uma vez que $\mathrm{Hom}_A\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right) \neq 0$ e $\tau\left(\begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right) = \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$. Mais a frente veremos qual é a correta generalização fornecida pelos módulos τ-rígidos.

Vamos dizer que M é um A-módulo τ-rígido **de tipo** $m \in \mathbb{N}$ se M é τ-rígido e $|M| = m$. Por exemplo, sobre a álgebra A dada pelo quiver

$$\begin{tikzcd}
1 & 3 \arrow[l] \arrow[d] & 4 \arrow[l] \arrow[ll, bend right, dashed, no head] \\
 & 2 &
\end{tikzcd}$$

pode-se mostrar que o módulo $S_4^2 \oplus S_1$ é um módulo τ-rígido, onde S_i denota o i-ésimo módulo simples, de forma que $|S_4^2 \oplus S_1| = 2$ pois este módulo possui 2 somandos indecomponíveis não isomorfos entre si.

Definição 3.2. Dizemos que M é um A-módulo **τ-inclinante** se M é um módulo τ-rígido e $|M| = |A|$.

Em particular, um módulo τ-inclinante é um módulo τ-rígido de tipo $|A|$. Veremos na próxima seção que este conceito generaliza a definição de módulo inclinante. Por exemplo, na álgebra $A = kQ_A$ cujo quiver ordinário é dado por

$$Q_A: \; 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3,$$

temos que o módulo $M = 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$ é um módulo τ-inclinante, pois $\mathrm{Hom}_A(M, \tau M) = 0$ e $|M| = |A|$.

Definição 3.3. Dizemos que M é um A-módulo **τ-inclinante quase completo** se M é um módulo τ-rígido e $|M| = |A| - 1$.

Os módulos τ-inclinantes quase completos sempre podem ser completados a módulos τ-inclinantes, de uma forma análoga ao complemento de Bongartz para módulos inclinantes quase completos, como visto no Capítulo 2. Este fato será melhor abordado na Seção 3.4. Ainda mais, a próxima definição apresenta uma classe fundamental de módulos em alguns quocientes de álgebras, a serem utilizados nos próximos capítulos.

Definição 3.4. Dizemos que M é um A-módulo de **suporte τ-inclinante** se existe um idempotente $e \in A$ tal que M é um $(A/\langle e \rangle)$-módulo τ-inclinante. Em particular, se tal idempotente e é não nulo, dizemos que M é um módulo de **suporte τ-inclinante próprio**.

Denotaremos por τ-tilt$A$ a subcategoria plena de mod$A$ cujos objetos são todos os módulos τ-inclinantes básicos. Analogamente, denotaremos por sτ-tilt$A$ e tilt$A$ as subcategorias plenas de mod$A$ formadas pelos módulos básicos de suporte τ-inclinante e módulos inclinantes básicos, respectivamente.

Exemplo 3.5. Na álgebra A cujo quiver ordinário é dado por

$$Q_A : \ 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3,$$

temos que o módulo $1 \oplus {}^{2}_{1}$ é τ-inclinante quase completo, pois possui $|A| - 1 = 2$ somandos diretos indecomponíveis não isomorfos entre si. Observe ainda que esse módulo é de suporte τ-inclinante, pois $1 \oplus {}^{2}_{1}$ é um $(A/\langle e_3 \rangle)$-módulo τ-inclinante, uma vez que temos $|1 \oplus {}^{2}_{1}| = |A/\langle e_3 \rangle|$ e $\mathrm{Hom}_{A/\langle e_3 \rangle}(1 \oplus {}^{2}_{1}, \tau(1 \oplus {}^{2}_{1})) = 0$.

Obviamente módulos τ-inclinantes são módulos de suporte τ-inclinante (para ver isto basta tomar o idempotente $e = 0$ na definição anterior). Portanto, dada uma álgebra A podemos ver que

$$\text{s}\tau\text{-tilt}A = \tau\text{-tilt}A \coprod \text{ps}\tau\text{-tilt}A,$$

onde psτ-tilt$A$ denota a subcategoria de mod$A$ formada por todos os módulos de suporte τ-inclinante próprios, i.e., módulos de suporte τ-inclinante que não são τ-inclinantes.

3.2 MÓDULOS INCLINANTES SÃO MÓDULOS τ-INCLINANTES

No capítulo anterior vimos um pouco sobre o estudo da teoria inclinante, e principalmente os módulos inclinantes. Nesta seção mostraremos que os módulos inclinantes são também módulos τ-inclinantes. Isso nos mostrará que a classe dos módulos inclinantes está contida na classe dos módulos τ-inclinantes. Desta forma mostraremos que o conceito de módulo τ-inclinante generaliza o conceito de módulo inclinante. Portanto, se houver algum método para encontrar os módulos τ-inclinantes, usando este mesmo método poderemos encontrar os módulos inclinantes.

Na Subseção 1.3.5 definimos as categorias quociente $\underline{\mathrm{mod}}A$ e $\overline{\mathrm{mod}}A$ que são respectivamente obtidas excluindo-se os morfismos que se fatoram por projetivos e injetivos, respectivamente. Queremos relacionar os conjuntos de morfismos nas categorias mod$A$, $\underline{\mathrm{mod}}A$ e $\overline{\mathrm{mod}}A$. A proposição seguinte, denominada de “Fórmulas de Auslander-Reiten”, estabelece conexões entre os conjuntos de morfismos de mod$A$ e de suas categorias quociente.

Proposição 3.6 ((**ASS06**), IV.2.13)**.** Sejam M, N dois A-módulos. Então existem isomorfismos

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong \mathrm{D}\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}N, M) \cong \mathrm{D}\overline{\mathrm{Hom}}_A(N, \tau M).$$

Como queremos estabelecer uma analogia entre os módulos inclinantes e os τ-incli-nantes, devemos lembrar que uma das condições necessárias para que um A-módulo seja inclinante é possuir dimensão projetiva menor ou igual a 1. Desta forma a próxima proposição mostra o que ocorre com a Proposição 3.6 no caso em que $\mathsf{dp}\, M \leqslant 1$.

Proposição 3.7 ((**ASS06**), IV.2.14)**.** Sejam M, N dois A-módulos onde $\mathsf{dp}\, M \leqslant 1$. Então

$$\mathsf{Ext}^1_A(M, N) \cong \mathsf{D}\overline{\mathsf{Hom}}_A(N, \tau M).$$

Com este último resultado podemos estabelecer uma comparação entre os módulos rígidos e os módulos τ-rígidos sobre uma mesma álgebra A.

Corolário 3.8. Seja M um A-módulo.

(1) Se M é um módulo τ-rígido então M é um módulo rígido.

(2) Se M é um módulo rígido e $\mathsf{dp}\, M \leqslant 1$ então M é um módulo τ-rígido.

Demonstração.

(1) Assumindo que M é um módulo τ-rígido temos que $\mathsf{Hom}_A(M, \tau M) = 0$, e logo pela Proposição 3.6 temos que

$$\mathsf{Ext}^1_A(M, M) \cong \mathsf{D}\overline{\mathsf{Hom}}_A(M, \tau M) \cong \mathsf{D}(0) = 0,$$

pois se $\mathsf{Hom}_A(M, \tau M) = 0$ temos $\overline{\mathsf{Hom}}_A(M, \tau M) = \mathsf{Hom}_A(M, \tau M)/\mathcal{I}(M, \tau M) = 0$. Portanto M é um módulo rígido.

(2) Suponhamos que M seja um módulo rígido tal que $\mathsf{dp}\, M \leqslant 1$, então pela Proposição 3.7 temos que

$$\mathsf{Hom}_A(M, \tau M) \cong \mathsf{D}(\mathsf{D}\mathsf{Hom}_A(M, \tau M)) \cong \mathsf{D}(\mathsf{Ext}^1_A(M, M)) = \mathsf{D}(0) = 0.$$

Portanto M é um módulo τ-rígido.

□

Portanto conseguimos relacionar os módulos rígidos e τ-rígidos. Na sequência vamos utilizar estas relações para mostrar que a ideia dos módulos τ-inclinantes generaliza a ideia dos módulos inclinantes.

Teorema 3.9. Se M é um A-módulo inclinante então M é um A-módulo τ-inclinante.

Demonstração. Suponhamos que M seja um módulo inclinante. Primeiramente temos que $\text{Ext}_A^1(M,M) = 0$ e $\text{dp}\, M \leqslant 1$. Logo pelo item **(2)** do Corolário 3.8, temos que M é um módulo τ-rígido. Além disso, vimos no Teorema 2.17 que a quantidade de somandos indecomponíveis não isomorfos dois a dois de um módulo inclinante é o posto do grupo $K_0(A)$, que coincide com $|A|$. Logo $|M| = |A|$ e portanto M é um módulo τ-inclinante. □

3.3 MÓDULOS τ-INCLINANTES, SINCERIDADE E FIDELIDADE

Na seção anterior vimos através das Fórmulas de Auslander-Reiten que existem isomorfismos $\text{Ext}_A^1(M,N) \cong \text{D}\underline{\text{Hom}}_A(\tau^{-1}N,M) \cong \text{D}\overline{\text{Hom}}_A(N,\tau M)$. Nesta seção utilizaremos esta ideia para observar certas propriedades acerca dos módulos τ-inclinantes.

Como definido antes, se $\mathcal{C}$ é uma subcategoria de $\text{mod}\, A$, dizemos que $M \in \mathcal{C}$ é um módulo Ext-projetivo em $\mathcal{C}$ se $\text{Ext}_A^1(M,X) = 0$ para qualquer $X \in \mathcal{C}$. Por simplicidade denotaremos esta última condição por $\text{Ext}_A^1(M,\mathcal{C}) = 0$. Essa noção pode ser dualizada para o caso dos módulos Ext-injetivos em $\mathcal{C}$, que são módulos M tais que $\text{Ext}_A^1(\mathcal{C},M)$ (i.e., $\text{Ext}_A^1(X,M) = 0$ para cada $X \in \mathcal{C}$). Como dito anteriormente, denotaremos por $P(\mathcal{C})$ a soma direta de um representante de cada classe de isomorfismo de módulos Ext-projetivos indecomponíveis de $\mathcal{C}$, e por $I(\mathcal{C})$ a soma direta de um representante de cada classe de isomorfismo de módulos Ext-injetivos indecomponíveis em $\mathcal{C}$.

Lema 3.10. Seja M um A-módulo com envolvente injetiva $h : M \longrightarrow I(M)$. Se $g : I(M) \longrightarrow Q$ é um morfismo tal que $gh : M \longrightarrow Q$ é monomorfismo então g também é monomorfismo.

Demonstração. Sabemos que $\text{Ker}\, g$ é um submódulo da envolvente injetiva $I(M)$ de M. Se $\text{Ker}\, g = 0$ então temos que g é um monomorfismo pela Observação 1.2. Suponhamos então que $\text{Ker}\, g \neq 0$. De acordo com a Observação 1.3 temos que $\text{Im}\, h \cap \text{Ker}\, g \neq 0$, ou seja, existe $0 \neq x \in \text{Im}\, h \cap \text{Ker}\, g$. Como $x \in \text{Im}\, h$ é não nulo, existe $m \in M$ não nulo tal que $x = h(m)$. Logo $g(h(m)) = 0$, pois $x = h(m) \in \text{Ker}\, g$. Porém gh é um monomorfismo, e acabamos de mostrar que $g(h(m)) = 0$ para um elemento m de M que é não nulo. Então temos um absurdo, donde concluímos que $\text{Ker}\, g = 0$, ou seja, g é um monomorfismo. □

Estamos interessados em verificar sob quais condições um módulo M é um módulo Ext-projetivo em $\text{Fac}\, M$. A proposição a seguir será fundamental para o restante do texto e será utilizada em muitos dos teoremas nos próximos capítulos. O dual desta demonstração pode ser encontrado em **(AS81)**.

Proposição 3.11. Sejam M, N dois A-módulos. Então temos que

$$\mathrm{Hom}_A(M, \tau N) = 0 \text{ se, e somente se, } \mathrm{Ext}_A^1(N, \mathrm{Fac}M) = 0.$$

Demonstração. Suponhamos que $\mathrm{Hom}_A(M, \tau N) = 0$ e que M' seja um objeto de $\mathrm{Fac}M$. Seja $f \in \mathrm{Hom}_A(M', \tau N)$ um morfismo e seja $\pi : M^d \longrightarrow M'$ a projeção canônica de M^d no quociente M', para algum inteiro $d \geqslant 1$. Temos que a composição $f \circ \pi \in \mathrm{Hom}_A(M^d, \tau N)$ é nula, pois $\mathrm{Hom}_A(M, \tau N) = 0$. Desta forma $f \circ \pi = 0$ e, como π é um epimorfismo, segue da Observação 1.1 que $f = 0$, donde $\mathrm{Hom}_A(M', \tau N) = 0$. Logo, pelas fórmulas de Auslander-Reiten temos que $\mathrm{Ext}_A^1(N, M') \cong \mathrm{D}\overline{\mathrm{Hom}}_A(M', \tau N) = \mathrm{D}(0) = 0$, donde $\mathrm{Ext}_A^1(N, M') = 0$ para cada $M' \in \mathrm{Fac}M$, i.e., $\mathrm{Ext}_A^1(N, \mathrm{Fac}M) = 0$.

Suponhamos agora que $\mathrm{Ext}_A^1(N, \mathrm{Fac}M) = 0$. Em particular temos que $\mathrm{Ext}_A^1(N, M) = 0$ pois $M \in \mathrm{Fac}M$ e pelas fórmulas de Auslander-Reiten segue que $\overline{\mathrm{Hom}}_A(M, \tau N) = 0$. Vamos mostrar que $\mathrm{Hom}_A(M, \tau N) = 0$. Suponha que exista $f : M \longrightarrow \tau N$ morfismo não nulo. Se M' é a imagem do morfismo f temos que $M' \cong M/\mathrm{Ker}\, f \in \mathrm{Fac}M$. Logo temos que a inclusão $i : M' \longrightarrow \tau N$ é um monomorfismo (pois é uma inclusão) e é não nulo pois supomos que $f \neq 0$, donde $\mathrm{Im}\, f \neq 0$. Por hipótese, como $M' \in \mathrm{Fac}M$ temos que $\mathrm{Ext}_A^1(N, M') = 0$ e pela Proposição 3.6 temos que $\overline{\mathrm{Hom}}_A(M', \tau N) = 0$. Como $i : M' \longrightarrow \tau N$ é um morfismo não nulo e $\overline{\mathrm{Hom}}_A(M', \tau N) = 0$, temos que i se fatora por algum módulo injetivo I, ou seja, existem morfismos $j : M' \longrightarrow I$ e $t : I \longrightarrow \tau N$ tais que $i = tj$. Seja $h : M' \longrightarrow I(M')$ a envolvente injetiva de M'. Como I é injetivo, temos pela definição de módulo injetivo que existe um morfismo $s : I(M') \longrightarrow I$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "j"] & I(M'). \arrow[dl, "s"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Desta forma $i = tj = tsh$, o que significa que i se fatora pelo morfismo h. Como $i = (ts)h$ é monomorfismo e h é a envolvente injetiva, pelo lema anterior ts também é um monomorfismo. Por outro lado, como $I(M')$ é injetivo, $ts : I(M') \longrightarrow \tau N$ é um monomorfismo que cinde e logo $I(M')$ é um somando direto de τN, o que é absurdo pois τN não possui somandos diretos injetivos. □

Além disso, a proposição anterior permite concluir que os módulos τ-rígidos são módulos Ext-projetivos em determinadas classes, como podemos ver no seguinte corolário.

Corolário 3.12. Seja M um A-módulo τ-rígido. Então M é um módulo Ext-projetivo em $\mathrm{Fac}M$.

Demonstração. Como M é um módulo τ-rígido temos que $\mathsf{Hom}_A(M, \tau M) = 0$. Pela proposição anterior temos que $\mathsf{Ext}(M, \mathsf{Fac}M) = 0$. Como $M \in \mathsf{Fac}M$ segue que M é um módulo Ext-projetivo em $\mathsf{Fac}M$. $\square$

Vimos no Teorema 2.31 que se $\mathcal{T}$ é uma classe de torção da forma $\mathcal{T} = \mathsf{Fac}X$ então $\mathcal{T}$ é uma classe de torção funtorialmente finita. O corolário anterior mostrou que cada módulo τ-rígido é um módulo Ext-projetivo na classe adequada. Sob certas condições, este corolário associa cada módulo τ-rígido a uma classe de torção funtorialmente finita. Por outro lado, o próximo corolário mostra que a cada classe de torção temos associado ao menos um módulo Ext-projetivo τ-rígido.

Corolário 3.13. Se $\mathcal{T}$ é uma classe de torção em $\mathsf{mod}A$ então o módulo Ext-projetivo $P(\mathcal{T})$ é um módulo τ-rígido.

Demonstração. Como $P(\mathcal{T})$ é um módulo Ext-projetivo em $\mathcal{T}$, temos por definição que $\mathsf{Ext}^1_A(P(\mathcal{T}), \mathcal{T}) = 0$. Pela Proposição 2.3, a classe de torção $\mathcal{T}$ é fechada por quocientes e logo $\mathsf{Fac}P(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$. Portanto da igualdade $\mathsf{Ext}^1_A(P(\mathcal{T}), \mathcal{T}) = 0$ segue que $\mathsf{Ext}^1_A(P(\mathcal{T}), \mathsf{Fac}P(\mathcal{T})) = 0$. Pela Proposição 3.11 temos que $\mathsf{Hom}_A(P(\mathcal{T}), \tau P(\mathcal{T})) = 0$, ou seja, $P(\mathcal{T})$ é um módulo τ-rígido. $\square$

Desta forma as classes de torção em $\mathsf{mod}A$ nos fornecem módulos τ-rígidos, de forma que dada uma classe de torção $\mathcal{T}$, o módulo Ext-projetivo $P(\mathcal{T})$ é um módulo τ-rígido. Este resultado será usado, por exemplo, no momento de realizar o complemento de Bongartz para módulos τ-rígidos.

Na primeira seção deste capítulo definimos que um módulo τ-rígido M é de tipo m quando $|M| = m$. A princípio, não temos nenhuma limitação sobre os "tipos" de módulos τ-rígidos. Mostraremos a seguir como a quantidade de somandos indecomponíveis (não isomorfos dois a dois) de um módulo τ-rígido se relaciona com a quantidade de módulos simples da álgebra.

Lema 3.14. Sejam A uma álgebra e M um A-módulo. Então existe um idempotente $e \in A$ tal que $|A/\mathsf{Ann}\, M| = |A/\langle e\rangle|$. Em particular $|A/\mathsf{Ann}\, M| \leqslant |A|$.

Demonstração. Sabemos que se A é uma álgebra então $|A|$ coincide com a quantidade de módulos projetivos indecomponíveis de A. Vamos mostrar que as álgebras $A/\mathsf{Ann}\, M$ e $A/\langle e\rangle$ possuem a mesma quantidade de módulos projetivos, onde e é o idempotente maximal que torna M um $(A/\langle e\rangle)$-módulo.

Sejam $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A e I um ideal bilateral de A. Então o conjunto $\{e_i + I \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}, e_i \notin I\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A/I.

Considere $\overline{e_i} = e_i + \text{Ann } M$ a classe de equivalência do idempotente e_i no quociente $A/\text{Ann } M$. Então temos que $\overline{e_i}(A/\text{Ann } M) = e_iA/e_i(\text{Ann } M)$. Se $e_iA/e_i(\text{Ann } M) = 0$ temos que $e_iA \subset e_i(\text{Ann } M)$, o que significa que $e_ia \in e_i\text{Ann } M \subset \text{Ann } M$ para qualquer $a \in A$. Em particular, para $a = 1_A$, temos que $e_i \in \text{Ann } M$.

Analogamente, se $e_i' = e_i + \langle e \rangle$ é a classe de equivalência de e_i em $A/\langle e \rangle$ então a condição $e_i'(A/\langle e \rangle) = e_iA/e_i\langle e \rangle = 0$ também indica que $e_i \in \langle e \rangle$. Além disso, os idempotentes que estão em Ann M são os mesmos idempotentes primitivos ortogonais que estão em $\langle e \rangle$, pois $e_i \in \text{Ann } M$ se, e somente se, $Me_i = 0$. Portanto $\overline{e_i}(A/\text{Ann } M) = 0$ se, e somente se, $e_i'(A/\langle e \rangle) = 0$. Desta forma

$$|A/\text{Ann } M| = |A/\langle e \rangle| \leqslant |A|.$$

□

Vimos no Teorema 2.14 que qualquer módulo inclinante parcial pode ser completado a um módulo inclinante e também vimos que os módulos inclinantes possuem exatamente $|A|$ somandos diretos não isomorfos dois a dois (Proposição 2.17). Isto significa que se M é um módulo inclinante parcial então temos $|M| \leqslant |A|$. Podemos construir um resultado análogo para os módulos τ-rígidos.

Proposição 3.15. Se M é um A-módulo τ-rígido então $|M| \leqslant |A|$.

Demonstração. De acordo com o Corolário 3.12, M é um módulo Ext-projetivo em $\text{Fac}M$, o que significa que $M \in \text{add}P(\text{Fac}M)$. Portanto $|M| \leqslant |P(\text{Fac}M)|$, pois por definição todos os somandos diretos indecomponíveis de M são também somandos diretos de $P(\text{Fac}M)$. Por outro lado, sabemos que $P(\text{Fac}M)$ é um $(A/\text{Ann } M)$-módulo inclinante, uma vez que o Teorema 2.31 nos diz que $P(\text{Fac}M)$ é um módulo inclinante sobre $A/\text{Ann }(\text{Fac}M)$ pois $\text{Fac}M$ é uma classe de torção funtorialmente finita e, por outro lado, temos que $\text{Ann }(\text{Fac}M) = \text{Ann } M$. Logo $|P(\text{Fac}M)| = |A/\text{Ann }(\text{Fac}M)| = |A/\text{Ann } M|$. No Lema 3.14 vimos que $|A/\text{Ann } M| \leqslant |A|$. Portanto:

$$|M| \leqslant |P(\text{Fac}M)| = |A/\text{Ann } M| \leqslant |A|.$$

□

A proposição anterior nos permite enxergar que módulos τ-inclinantes são τ-rígidos maximais, no sentido que, se M é um módulo τ-inclinante e X é um módulo tal que $M \oplus X$ também é um módulo τ-inclinante então $X \in \text{add}M$. De fato, suponhamos que $M \oplus X$ seja τ-rígido também, então temos que $|M| = |A|$ (pois M é τ-inclinante), $|M| \leqslant |M \oplus X|$ (pois M é somando de $M \oplus X$) e $|M \oplus X| \leqslant |A|$ (pois $M \oplus X$ é τ-rígido). Portanto $|A| = |M| \leqslant |M \oplus X| \leqslant |A|$ e logo $|M| = |M \oplus X|$. Deste fato segue que $\text{add}M = \text{add}(M \oplus X)$, donde $X \in \text{add}M$.

Dizemos que M é um módulo **sincero** se não existe idempotente não nulo $e \in A$ tal que $Me = 0$ (isto é, o anulador à direita de M não possui idempotentes não nulos) e se M é um módulo de suporte τ-inclinante vemos que $\#(\mathsf{Supp}(M)) = |M| = s(M)$, onde $s(M)$ denota a quantidade de módulos simples que são fatores de composição de M. Mostraremos mais a frente que um módulo τ-rígido é τ-inclinante se, e somente se, é um módulo τ-rígido sincero. Desta forma um módulo de suporte τ-inclinante M é um módulo sincero se, e somente se, $|M| = s(M) = |A|$. Vale a pena ressaltar que $i \in \mathsf{Supp}(M)$ se, e somente se, o i-ésimo módulo simples S_i é fator de composição de M.

Sejam A uma k-álgebra e I um ideal bilateral de A. Como vimos no Exemplo 1.20, o epimorfismo $A \twoheadrightarrow A/I$ induz uma inclusão de categorias $\mathsf{mod}(A/I) \longrightarrow \mathsf{mod}(A)$, isto é, podemos enxergar (A/I)-módulos como sendo A-módulos.

Lema 3.16. Sejam A uma álgebra, I um ideal bilateral de A e $A \twoheadrightarrow A/I$ um epimorfismo de álgebras. Se M e N são (A/I)-módulos então:

(1) existe uma inclusão $\mathsf{Ext}^1_{A/I}(M,N) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_A(M,N)$ de k-espaços vetoriais;

(2) se $I = \langle e \rangle$, onde $e \in A$ é um idempotente, então a inclusão do item **(1)** é um isomorfismo.

Demonstração.

(1) Seja $\xi : \; 0 \longrightarrow N \longrightarrow X \longrightarrow M \longrightarrow 0$ um elemento de $\mathsf{Ext}^1_{A/I}(M,N)$. Como $\mathsf{mod}(A/I) \subset \mathsf{mod}(A)$ temos que os (A/I)-módulos M, N e X são também A-módulos, donde ξ também é um elemento de $\mathsf{Ext}^1_A(M,N)$. Logo a transformação k-linear $\mathsf{Ext}^1_{A/I}(M,N) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_A(M,N)$ dada por $\xi \longmapsto \xi$ é uma inclusão.

(2) Suponha que $e = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_p}$ é a escrita de e como soma de idempotentes ortogonais primitivos. Considere $\eta : \; 0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ um elemento de $\mathsf{Ext}^1_A(M,N)$. Pelo Teorema de Gabriel podemos associar representações a cada um dos módulos M, N e X, de forma que para cada vértice i do quiver ordinário Q_A de A temos uma sequência exata associada

$$0 \longrightarrow N_i \xrightarrow{f_i} X_i \xrightarrow{g_i} M_i \longrightarrow 0,$$

onde $N_i = Ne_i$, $M_i = Me_i$ e $X_i = Xe_i$. Em particular, temos uma sequência exata para cada i_j, com $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, dada por

$$0 \longrightarrow Ne_{i_j} \xrightarrow{f_{i_j}} Xe_{i_j} \xrightarrow{g_{i_j}} Me_{i_j} \longrightarrow 0.$$

Porém, como M e N são $(A/\langle e\rangle)$-módulos temos que $Ne_{i_j} = Me_{i_j} = 0$. Logo, como a sequência acima é exata, temos que $Xe_{i_j} = 0$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Então $Xe = 0$ e concluímos que X também é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo. Isso mostra que η é um elemento de $\mathrm{Ext}^1_{A/\langle e\rangle}(M, N)$. Desta forma a inclusão dada no item **(1)** é sobrejetora, e portanto é um isomorfismo.

$\square$

Dado um (A/I)-módulo τ-rígido M, queremos descobrir como essa propriedade de τ-rigidez se comporta quando vemos M como um A-módulo. A próxima proposição nos ajuda a ver isto.

Proposição 3.17. Sejam A uma álgebra e I um ideal bilateral de A. Se M e N são (A/I)-módulos tais que $\mathrm{Hom}_A(N, \tau_A M) = 0$ então $\mathrm{Hom}_{A/I}(N, \tau_{A/I} M) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que $\mathrm{Hom}_A(N, \tau_A M) = 0$, então pela Proposição 3.11 temos que para qualquer módulo $N' \in \mathrm{Fac}N$ vale que $\mathrm{Ext}^1_A(M, N') = 0$. Pelo item **(1)** do Lema 3.16, existe uma inclusão $\mathrm{Ext}^1_{A/I}(M, N') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(M, N') = 0$. Logo $\mathrm{Ext}^1_{A/I}(M, N') = 0$ para cada $N' \in \mathrm{Fac}N$. Novamente utilizando a Proposição 3.11 concluímos que $\mathrm{Hom}_{A/I}(N, \tau_{A/I} M) = 0$. $\square$

Vale a pena destacar que nem sempre as translações de Auslander-Reiten sobre A e sobre A/I (respectivamente $\tau_A : \underline{\mathrm{mod}}A \longrightarrow \overline{\mathrm{mod}}A$ e $\tau_{A/I} : \underline{\mathrm{mod}}(A/I) \longrightarrow \overline{\mathrm{mod}}(A/I)$) coincidem, e isto é o que motiva a notação diferenciada para ambas as translações na proposição anterior. De fato, considere a álgebra A cujo quiver ordinário é dado por $1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$, e sua álgebra quociente $A/\langle e_1\rangle$ cujo quiver ordinário é da forma $2 \longleftarrow 3$. Como o módulo $\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ é projetivo sobre $A/\langle e_1\rangle$ temos que $\tau_{A/\langle e_1\rangle}(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = 0$, porém sobre a álgebra A temos $\tau_A(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}) = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$.

Estamos interessados no caso das álgebras quociente cujos quivers ordinários são subquivers plenos de Q_A. Um dos tipos de álgebras que satisfaz esta condição são as álgebras quociente $A/\langle e\rangle$, quando $e \in A$ é uma soma de idempotentes primitivos ortogonais de A. O que faremos no restante desta seção é discutir um pouco sobre o comportamento de módulos sobre as álgebras quociente dessa forma.

Proposição 3.18. Sejam A uma álgebra, $e \in A$ um idempotente, $I = \langle e\rangle$ o ideal bilateral da álgebra A gerado por e, M e N dois (A/I)-módulos. Então $\mathrm{Hom}_A(N, \tau_A M) = 0$ se, e somente se, $\mathrm{Hom}_{A/I}(N, \tau_{A/I} M) = 0$.

Demonstração. Pelo item **(2)** do Lema 3.16, temos um isomorfismo entre $\mathrm{Ext}^1_{A/I}(M,N')$ e $\mathrm{Ext}^1_A(M,N')$ para quaisquer (A/I)-módulos M e N'. Desta forma:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{A/I}(N,\tau_{A/I}M)=0 \;&\Leftrightarrow\; \mathrm{Ext}^1_{A/I}(M,N')=0,\ \forall N'\in \mathrm{Fac}N && (3.2)\\ &\Leftrightarrow\; \mathrm{Ext}^1_A(M,N')=0,\ \forall N'\in \mathrm{Fac}N && (3.3)\\ &\Leftrightarrow\; \mathrm{Hom}_A(N,\tau_A M)=0 && (3.4)\end{aligned}$$

onde as equivalências dadas em (3.2) e (3.4) vêm da Proposição 3.11 e a equivalência dada em (3.3) vêm do isomorfismo $\mathrm{Ext}^1_{A/I}(M,N')\cong \mathrm{Ext}^1_A(M,N')$ para cada $N'\in \mathrm{Fac}N$. □

Desta forma podemos relacionar os módulos τ-rígidos sobre álgebras quociente da forma $A/\langle e\rangle$, para idempotentes $e\in A$, com os módulos τ-rígidos de A.

Corolário 3.19. Sejam A uma álgebra, $e\in A$ um idempotente e M um $(A/\langle e\rangle)$-módulo. Então M é τ-rígido sobre $A/\langle e\rangle$ se, e somente, é τ-rígido sobre A.

Demonstração. De fato, considerando $M=N$ na proposição anterior concluímos que $\mathrm{Hom}_A(M,\tau_A M)=0$ se, e somente se, $\mathrm{Hom}_{A/\langle e\rangle}\big(M,\tau_{A/\langle e\rangle}M\big)=0$. □

O corolário anterior permite que quando mostrarmos que um determinado módulo é τ-rígido sobre um dos quocientes em que estamos interessados, então esse módulo será τ-rígido sobre a álgebra original. Isso é interessante, por exemplo, no caso das álgebras de Nakayama (ver Apêndice A) onde buscamos os módulos τ-inclinantes nos quocientes (e portanto τ-rígidos nos quocientes) para completá-los a módulos τ-inclinantes na álgebra original.

Corolário 3.20. Se M é um A-módulo τ-rígido então $|M|\leqslant \#(\mathrm{Supp}(M))\leqslant |A|$.

Demonstração. A desigualdade $\#(\mathrm{Supp}(M))\leqslant |A|$ sempre é verificada, uma vez que para qualquer A-módulo M é válido que $\mathrm{Supp}(M)\subset\{1,2,\dots,|A|\}$. Por outro lado temos que M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo, onde $e=\sum_{j\in J} e_j$ com $J=\{i\in\{1,2,\dots,|A|\}\mid Me_i=0\}$. De acordo com o corolário anterior, como M é τ-rígido sobre A, também será sobre $A/\langle e\rangle$. Logo

$$|M|\leqslant |A/\langle e\rangle| = |A|-\#(J)=\#(\mathrm{Supp}(M)),$$

onde a desigualdade $|M|\leqslant |A/\langle e\rangle|$ é verificada pela Proposição 3.15. Portanto concluímos que

$$|M|\leqslant \#(\mathrm{Supp}M)\leqslant |A|.$$

□

Lembremos que um A-módulo é fiel se $\operatorname{Ann} M = 0$. Todo módulo fiel é um módulo sincero, porém a recíproca nem sempre é verdadeira. De fato, vimos que os módulos τ-inclinantes sempre são módulos sinceros, porém nem todos módulos τ-inclinantes são fiéis. Por exemplo, vamos considerar a álgebra A cujo quiver ordinário é

$$\begin{tikzcd} 1 & 3 \arrow[l] \arrow[d] & 4. \arrow[l] \arrow[ll, dashed, bend right, no head] \\ & 2 & \end{tikzcd}$$

O módulo $M = \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus S_4 \oplus S_1$ é um módulo τ-inclinante sincero, porém não é um módulo fiel pois $\operatorname{dp} M \geqslant 2$, uma vez que $\operatorname{dp} S_4 = 2$ e a Proposição 3.24 nos mostrará que qualquer módulo τ-rígido fiel é inclinante parcial, ou seja, possui dimensão projetiva menor ou igual a 1.

Como vimos anteriormente, um A-módulo τ-rígido sempre é um módulo rígido. Pois se M é τ-rígido temos que $\operatorname{Hom}_A(M, \tau M) = 0$ e logo $\operatorname{Ext}^1_A(M, M) \cong D\overline{\operatorname{Hom}}_A(M, \tau M) = 0$. Mesmo todos os módulos τ-rígidos sendo rígidos, nem todos os módulos τ-inclinantes são inclinantes, basta ver que o módulo $M = \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus S_4 \oplus S_1$ é τ-inclinante mas não é um inclinante, pois $\operatorname{dp} M \geqslant 2$.

No Teorema 2.28 vimos que qualquer módulo inclinante é fiel. Definimos anteriormente que um A-módulo M é sincero se não existe idempotente não nulo $e \in A$ no anulador à direita de M. Além disso, como todo A-módulo fiel é sincero segue que os módulos inclinantes são sinceros. A próxima proposição generaliza essa propriedade para os módulos τ-inclinantes, mostrando que todos os módulos τ-inclinantes também são sinceros.

Proposição 3.21. Seja M um A-módulo. Então M é um módulo τ-inclinante se, e somente se, M é um módulo sincero de suporte τ-inclinante.

Demonstração. Seja M módulo τ-rígido. Para mostrar que afirmar que M é τ-inclinante é equivalente a afirmar que M é um módulo sincero de suporte τ-inclinante, basta mostrar que M é um A-módulo sincero se, e somente se, $|M| = |A|$.

Suponha que M seja um módulo τ-inclinante, i.e., $|M| = |A|$ e suponha que e_i é um idempotente primitivo tal que $Me_i = 0$. Logo M tem estrutura de $(A/\langle e_i \rangle)$-módulo, e pelo Corolário 3.19 temos que M é τ-rígido sobre $A/\langle e_i \rangle$. Com isso podemos concluir que $|A| = |M| \leqslant |A/\langle e_i \rangle| = |A| - 1$, o que é absurdo. Logo temos que M é um módulo sincero e de suporte τ-inclinante, pois M é um módulo τ-inclinante.

Por outro lado, suponha que M seja um módulo sincero de suporte τ-inclinante. Então existe um idempotente $e \in A$ tal que M é um $(A/\langle e \rangle)$-módulo τ-inclinante. Para que M seja um $(A/\langle e \rangle)$-módulo, e deve ser um idempotente em $\operatorname{Ann} M$. Como

M é sincero, não existe idempotente não nulo $e \in \operatorname{Ann} M$. Portanto $e = 0$, e logo $|M| = |A/\langle e\rangle| = |A|$, donde M é um módulo τ-inclinante. $\square$

Esta última proposição permite separar os módulos de suporte τ-inclinante de acordo com os idempotentes que os tornam módulos de suporte τ-inclinante. O próximo corolário mostra que existe um único idempotente que satisfaz a condição referida.

Corolário 3.22. Seja A uma álgebra, então

$$\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}A = \coprod_{e \in \mathcal{E}_A} \tau\text{-}\mathsf{tilt}\left(A/\langle e\rangle\right),$$

onde $\mathcal{E}_A = \left\{ \sum_{j\in J} e_j \;\middle|\; J \subset \{1,2,\ldots,n\} \right\}$ e $E_A = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A.

Demonstração. Se M é um módulo de suporte τ-inclinante, então existe algum idempotente e de forma que M é um módulo τ-inclinante sobre $A/\langle e\rangle$, logo é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo sincero. Então se $e = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_s}$ é a escrita de e como soma de idempotentes primitivos ortogonais temos que $Me_t \neq 0$ para cada $e_t \in E_A \setminus \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_s}\}$, pois M é sincero sobre $A/\langle e\rangle$. Portanto $\operatorname{Supp}(M) = \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$. Desta forma o idempotente $e \in \mathcal{E}_A$ que torna M um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-inclinante está unicamente determinado pelo suporte de M. $\square$

De acordo com o Corolário 3.8 temos que um módulo τ-rígido é também um módulo rígido. Porém, não necessariamente um módulo τ-rígido M é inclinante parcial, pois podemos ter que $\operatorname{dp} M \geqslant 2$, por exemplo. A Proposição 3.24 mostra uma condição suficiente para que um módulo τ-rígido seja inclinante parcial. Para demonstrá-la usaremos o seguinte lema:

Lema 3.23 (**(ASS06)**, IV.2.7(a))**.** Seja M um A-módulo. Então $\operatorname{dp} M \leqslant 1$ se, e somente se, $\operatorname{Hom}_A(\mathrm{D}A, \tau M) = 0$.

Dessa forma podemos mostrar que para que um módulo seja inclinante parcial é suficiente que este módulo seja τ-rígido fiel.

Proposição 3.24. Se M é um A-módulo τ-rígido fiel então $\operatorname{dp} M \leqslant 1$. Em particular, M é um A-módulo inclinante parcial.

Demonstração. Como M é um módulo fiel, de acordo com a Observação 2.27, existe um inteiro $d \geqslant 1$ e um epimorfismo $M^d \longrightarrow \mathrm{D}A$. Então temos uma sequência exata

$M^d \longrightarrow \mathrm{D}A \longrightarrow 0$. Aplicando o funtor contravariante $\mathsf{Hom}_A(-, \tau M)$ temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(\mathrm{D}A, \tau M) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(M, \tau M)^d = 0,$$

pois $\mathsf{Hom}_A(M, \tau M) = 0$, donde concluímos que $\mathsf{Hom}_A(\mathrm{D}A, \tau M) = 0$. Pelo Lema 3.23 temos que $\mathsf{dp}\, M \leqslant 1$. Como módulos τ-rígidos são módulos rígidos de acordo com o Corolário 3.8, segue que módulos τ-rígidos fiéis são módulos inclinantes parciais. $\square$

Observe que a recíproca desta proposição não necessariamente é verdadeira, isto é, não necessariamente um módulo inclinante parcial é um módulo τ-rígido fiel. Por exemplo, o módulo nulo é inclinante parcial e τ-rígido porém não é fiel, pois $\mathsf{Ann}\, 0 = A$. Desta forma mostramos a seguir uma espécie de recíproca para este caso, onde vemos que afirmar que um módulo M é de suporte τ-inclinante fiel é equivalente a afirmar que este módulo também é inclinante.

Corolário 3.25. Seja A uma álgebra. Um A-módulo de suporte τ-inclinante M é fiel se, e somente se, M é um A-módulo inclinante.

Demonstração. A proposição anterior permite concluir que se M é um módulo τ-rígido fiel então é inclinante parcial. Por outro lado, se M é τ-inclinante fiel então M é τ-rígido e $|M| = |A|$, logo M é inclinante parcial e $|M| = |A|$, donde M é um módulo inclinante.

Por outro lado, se M é um módulo inclinante temos que M também é um módulo τ-inclinante, de acordo com o Teorema 3.9. Pela Definição 3.4 temos que M é um módulo de suporte τ-inclinante. Além disso, o Teorema 2.28 afirma que se M é um módulo inclinante então M é fiel. Portanto M é um módulo de suporte τ-inclinante fiel. $\square$

Em particular, todo A-módulo τ-inclinante pode ser visto como um módulo inclinante sobre $A/\mathsf{Ann}\, M$. De fato, se M é um A-módulo τ-inclinante então M é um A-módulo τ-rígido sobre A, e logo será τ-rígido sobre $A/\langle e \rangle$ sempre que $e \in A$ é um idempotente tal que $e \in \mathsf{Ann}\, M$. Porém, o idempotente maximal presente em $\mathsf{Ann}\, M$ é o idempotente nulo, pois pela Proposição 3.21 qualquer módulo τ-inclinante é sincero. Logo pelo Lema 3.14 temos que $|A/\mathsf{Ann}\, M| = |A/\langle e \rangle| = |A|$. Além disso, como $\mathsf{Ann}\, M$ é um ideal bilateral de A, temos que M é τ-rígido sobre $A/\mathsf{Ann}\, M$. Portanto M é um $(A/\mathsf{Ann}\, M)$-módulo τ-inclinante fiel, e pelo corolário anterior segue que M é um $(A/\mathsf{Ann}\, M)$-módulo inclinante.

3.4 COMPLEMENTO DE BONGARTZ

No Capítulo 2 vimos que qualquer módulo inclinante quase completo pode ser completado a um módulo inclinante pelo método de Bongartz. Nesta seção vamos generalizar esta construção para os módulos τ-inclinantes quase completos.

Dizemos que a subcategoria $\mathcal{C}$ de $\mathsf{mod}\, A$ é uma **subcategoria fiel** se

$$\mathsf{Ann}\, \mathcal{C} \doteq \{a \in A \mid Ma = 0,\ \forall M \in \mathcal{C}\} = \{0\}.$$

Analogamente, $\mathcal{C}$ é dita **subcategoria sincera** se não existe idempotente não nulo em $\mathsf{Ann}\, \mathcal{C}$. Denotaremos por $\mathsf{f\text{-}tors}\, A$ o conjunto formado pelas classes de torção funtorialmente finitas e da mesma forma $\mathsf{sf\text{-}tors}\, A$ e $\mathsf{ff\text{-}tors}\, A$ denotam, respectivamente, o conjunto das classes de torção funtorialmente finitas sinceras e o conjunto das classes de torção funtorialmente finitas fiéis.

Podemos construir uma bijeção entre o conjunto dos módulos básicos de suporte τ-inclinante e o conjunto das classes de torção funtorialmente finitas. De fato:

(1) suponhamos que $\mathcal{T}$ seja uma classe de torção funtorialmente finita. Vimos no Corolário 3.13 que $M = P(\mathcal{T})$ é um módulo τ-rígido. Existe um idempotente maximal $e \in A$ de tal forma que $\mathcal{T} \subset \mathsf{mod}(A/\langle e\rangle)$. Pelo Teorema 2.31 temos que M é um $(A/\mathsf{Ann}\, \mathcal{T})$-módulo inclinante, ou seja, $|A/\mathsf{Ann}\, \mathcal{T}| = |M|$. Além disso, pelo Teorema 2.31 também temos que $\mathcal{T} = \mathsf{Fac}(P(\mathcal{T}))$, donde

$$|M| = |A/\mathsf{Ann}\, \mathcal{T}| = |A/\mathsf{Ann}\, \mathsf{Fac}(P(\mathcal{T}))| = |A/\mathsf{Ann}\, \mathsf{Fac} M| = |A/\mathsf{Ann}\, M| = |A/\langle e\rangle|,$$

pois $\mathsf{Ann}\, \mathsf{Fac} M = \mathsf{Ann}\, M$ e $e \in A$ é o idempotente maximal que torna M um $(A/\langle e\rangle)$-módulo. Como M é um A-módulo τ-rígido temos que $\mathsf{Hom}_A(M, \tau_A M) = 0$ e logo $\mathsf{Hom}_{A/\langle e\rangle}(M, \tau_{A/\langle e\rangle} M) = 0$ pois M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo. Portanto M é um módulo de suporte τ-inclinante;

(2) suponhamos que M seja um módulo de suporte τ-inclinante. Então existe um idempotente $e \in A$ tal que M é um módulo τ-inclinante sobre $A/\langle e\rangle$. Já vimos que $\mathsf{Fac} M$ é uma classe de torção funtorialmente finita pelo Teorema 2.31 e além disso pelo Corolário 3.12 temos que $M \in \mathsf{add}\, P(\mathsf{Fac} M)$, uma vez que M é um módulo τ-rígido e nesse caso M é Ext-projetivo em $\mathsf{Fac} M$;

(3) por fim, as associações dadas nos itens **(1)** e **(2)** são mutuamente inversas. Suponhamos que M seja um módulo de suporte τ-inclinante, onde $e \in A$ é o idempotente que torna M um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-inclinante. Logo $|M| = |A/\langle e\rangle|$ e por outro lado, $P(\mathsf{Fac} M)$ é τ-rígido sobre $A/\langle e\rangle$ donde $|P(\mathsf{Fac} M)| \leqslant |A/\langle e\rangle| = |M|$ pelo Corolário 3.20. Além disso, pelo Corolário 3.12 temos que $M \in \mathsf{add}\, P(\mathsf{Fac} M)$, donde $|P(\mathsf{Fac} M)| \geqslant |M| = |A/\langle e\rangle|$. Logo $|M| = |P(\mathsf{Fac} M)|$ e como $M \in \mathsf{add}\, P(\mathsf{Fac} M)$

temos que $\mathsf{add}M = \mathsf{add}P(\mathsf{Fac}M)$. Como M e $P(\mathsf{Fac}M)$ são básicos segue que $M \cong P(\mathsf{Fac}M)$.

Se considerarmos uma classe de torção funtorialmente finita $\mathcal{T}$, o respectivo módulo de suporte τ-inclinante será $P(\mathcal{T})$ e portanto a classe de torção funtorialmente finita associada a esse novo módulo de suporte τ-inclinante será $\mathsf{Fac}P(\mathcal{T})$, porém já tínhamos visto no Teorema 2.31 que $\mathcal{T} = \mathsf{Fac}P(\mathcal{T})$, pois $\mathsf{Fac}P(\mathcal{T})$ é uma classe de torção funtorialmente finita.

Portanto acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3.26 ((**AIR14**), 2.7)**.** Seja A uma álgebra. Existe uma bijeção entre as classes de isomorfismo de módulos de suporte τ-inclinante e as classes de torção funtorialmente finitas dada por:

$$\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}A \ni M \longmapsto \mathsf{Fac}M \in \mathsf{f}\text{-}\mathsf{tors}\,A \text{ e } \mathsf{f}\text{-}\mathsf{tors}\,A \ni \mathcal{T} \longmapsto P(\mathcal{T}) \in \mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}A.$$

□

Em particular se restringimos a bijeção do teorema anterior aos módulos τ-inclinantes, obtemos uma bijeção entre $\tau\text{-}\mathsf{tilt}A$ e $\mathsf{sf}\text{-}\mathsf{tors}\,A$. De fato, se começarmos com um módulo τ-inclinante T, obtemos uma classe de torção sincera $\mathsf{Fac}T$ pois $\mathsf{Supp}(M) \subset \mathsf{Supp}(T)$ para qualquer módulo $M \in \mathsf{Fac}T$. Por outro lado, se a classe $\mathcal{T}$ é sincera então $\mathsf{Ann}\,\mathcal{T}$ não possui nenhum idempotente não nulo, porém de $\mathsf{Supp}(M) \subset \mathsf{Supp}(T)$ (para cada $M \in \mathsf{Fac}T$) segue que $\mathsf{Ann}\,T = \mathsf{Ann}\,\mathsf{Fac}T$ não possui idempotente não nulo, i.e., T é sincero, e portanto como módulos sinceros de suporte τ-inclinante, pela Proposição 3.21, são τ-inclinantes segue a bijeção entre $\tau\text{-}\mathsf{tilt}A$ e $\mathsf{sf}\text{-}\mathsf{tors}\,A$.

Analogamente podemos restringir a mesma bijeção entre o conjunto dos módulos inclinantes e o conjunto das classes de torção fiéis funtorialmente finitas, usando o mesmo raciocínio de que $\mathsf{Ann}\,\mathcal{T} = 0$ se, e somente se, $\mathsf{Ann}\,T = 0$.

O último resultado nos permite associar a cada módulo de suporte τ-inclinante N uma classe de torção funtorialmente finita $\mathsf{Fac}N$. Por outro lado, podemos associar uma outra classe de torção funtorialmente finita: ${}^{\perp}(\tau N)$. De fato, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.27. Se N é um A-módulo τ-rígido então ${}^{\perp}(\tau N)$ é uma classe de torção funtorialmente finita sincera.

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que $\mathsf{Ext}^1_A(\mathsf{Sub}(\tau N), \tau N) = 0$. Seja X um módulo em $\mathsf{Sub}(\tau N)$. Suponha que exista um morfismo não nulo $f : N \longrightarrow X$ em $\mathsf{Hom}_A(N, X)$. Como X é um submódulo de τN existe uma inclusão $i : X \longrightarrow \tau N$ e logo o morfismo $if \in \mathsf{Hom}_A(N, \tau N)$ é não nulo, o que é absurdo pois N é um módulo

τ-rígido e i é um monomorfismo. Então $\mathsf{Hom}_A(N, X) = 0$ para cada $X \in \mathsf{Sub}(\tau N)$. Logo pelas fórmulas de Auslander-Reiten temos que

$$\mathsf{Ext}^1_A(X, \tau N) \cong \mathsf{D}\underline{\mathsf{Hom}}_A(\tau^{-1}(\tau N), X) \subset \mathsf{D}\underline{\mathsf{Hom}}_A(N, X) = 0$$

para cada $X \in \tau N$. Como vimos no Exemplo 2.5, $\mathsf{Sub}(\tau N)$ é uma classe livre de torção pois satisfaz $\mathsf{Ext}^1_A(X, \tau N) = 0$ para cada $X \in \mathsf{Sub}(\tau N)$, logo a classe de torção associada é ${}^{\perp}(\tau N)$. Além disso, pelo Teorema 2.31 a classe $\mathsf{Sub}(\tau N)$ é livre de torção funtorialmente finita e por consequência ${}^{\perp}(\tau N)$ é uma classe de torção funtorialmente finita.

Além disso, ${}^{\perp}(\tau N)$ é uma classe sincera pois caso contrário existiria um idempotente primitivo $e_i \in \mathsf{Ann}\,({}^{\perp}(\tau N))$ tal que ${}^{\perp}(\tau N) \subset \mathsf{mod}(A/\langle e_i \rangle)$. Isto significa que para qualquer módulo $M \in {}^{\perp}(\tau N)$ temos que $i \notin \mathsf{Supp}M$. Em particular temos que $\mathsf{Hom}_A({}^{\perp}(\tau N), E_i) = 0$ onde $E_i = \mathsf{D}(e_i A)$ é um módulo injetivo. Como $({}^{\perp}(\tau N), \mathsf{Sub}(\tau N))$ é um par de torção temos que E_i está em $\mathsf{Sub}(\tau N)$, isto é, τN possui um submódulo injetivo, o que é absurdo, pois neste caso existiria um monomorfismo $j : E_i \longrightarrow \tau N$, e como monomorfismos cujo domínio é um módulo injetivo cindem, segue que τN teria um somando injetivo. Portanto ${}^{\perp}(\tau N)$ é uma classe de torção funtorialmente finita sincera. $\square$

Desta forma conseguimos associar duas classes de torção funtorialmente finitas para um módulo τ-rígido N. O próximo lema mostra quando é possível colocar uma classe de torção funtorialmente finita entre essas duas classes de torção.

Proposição 3.28. Seja $\mathcal{T}$ uma classe de torção funtorialmente finita em $\mathsf{mod}A$ e N um módulo τ-rígido. Então N é Ext-projetivo em $\mathcal{T}$ se, e somente se, $\mathsf{Fac}N \subset \mathcal{T} \subset {}^{\perp}(\tau N)$.

Demonstração. Vamos supor que N seja Ext-projetivo em $\mathcal{T}$. Então $N \in \mathsf{add}P(\mathcal{T})$ e $N \in \mathcal{T}$, donde imediatamente segue que $\mathsf{Fac}N \subset \mathcal{T}$, pois $\mathcal{T}$ é fechada por quocientes (por ser classe de torção). Além disso, como N é Ext-projetivo em $\mathcal{T}$ temos que $\mathsf{Ext}^1_A(N, \mathcal{T}) = 0$, por definição. Como $\mathcal{T} = \mathsf{Fac}\mathcal{T}$ (novamente por $\mathcal{T}$ ser fechada por quocientes) temos que $\mathsf{Ext}^1_A(N, \mathsf{Fac}X) = 0$ para cada $X \in \mathcal{T}$ e pela Proposição 3.11 podemos concluir que $\mathsf{Hom}_A(X, \tau N) = 0$ para cada $X \in \mathcal{T}$. Portanto $X \in {}^{\perp}(\tau N)$ para cada $X \in \mathcal{T}$, o que significa que $\mathcal{T} \subset {}^{\perp}(\tau N)$.

Por outro lado, se assumirmos que $\mathsf{Fac}N \subset \mathcal{T} \subset {}^{\perp}(\tau N)$ temos de imediato que $P(\mathcal{T}) \in \mathcal{T} \subset {}^{\perp}(\tau N)$, mas isto quer dizer que $\mathsf{Hom}_A(P(\mathcal{T}), \tau N) = 0$. Logo pela Proposição 3.11, temos que $\mathsf{Ext}^1_A(N, \mathsf{Fac}P(\mathcal{T})) = 0$. Como $\mathcal{T}$ é uma classe de torção funtorialmente finita temos $\mathcal{T} = \mathsf{Fac}P(\mathcal{T})$. Portanto $\mathsf{Ext}^1_A(N, \mathcal{T}) = 0$, donde conluímos que N é um módulo Ext-projetivo em $\mathcal{T}$. $\square$

Estes resultados permitem generalizar a ideia de complemento que tínhamos feito para módulos inclinantes vista no Teorema 2.14. Isto é, dado um módulo inclinante parcial podíamos completá-lo a um módulo inclinante, já no caso dos módulos τ-rígidos completaremos a um módulo τ-inclinante.

Teorema 3.29 (Complemento de Bongartz)**.** Seja N um A-módulo τ-rígido. Existe um A-módulo E tal que $M = N \oplus E$ é um A-módulo τ-inclinante.

Demonstração. Vimos que dado um módulo τ-rígido N, a classe de torção $\mathcal{T} = {}^{\perp}(\tau N)$ é funtorialmente finita e sincera, de acordo com a Proposição 3.27. Também havíamos visto que existe uma bijeção entre as classes de $\mathsf{sf\text{-}tors}\, A$ e os módulos τ-inclinantes, i.e., o módulo de suporte τ-inclinante associado a classe de torção ${}^{\perp}(\tau N)$, a saber $P({}^{\perp}(\tau N))$, é τ-inclinante. Pela proposição anterior temos que N é Ext-projetivo em $\mathcal{T} = {}^{\perp}(\tau N)$, donde N é um somando de $P({}^{\perp}(\tau N))$. Desta forma existe um módulo τ-rígido básico E tal que $P({}^{\perp}(\tau N)) = N \oplus E$. Portanto existe um A-módulo básico E tal que $N \oplus E$ é um módulo τ-inclinante. $\square$

Este método de complementar um módulo τ-rígido a um módulo τ-inclinante é chamado de **complemento de Bongartz** (a um módulo τ-inclinante). Diferentemente do que fazíamos no caso dos módulos inclinantes, aqui ressaltamos que estamos chamando de complemento de Bongartz todo o módulo básico $P({}^{\perp}(\tau N))$. Riedtmann e Schofield mostraram em (**RS91**) que se M é um módulo inclinante parcial (e portanto τ-rígido pelo Corolário 3.8) então os complementos de Bongartz de M a um módulo inclinante (construído no Teorema 2.14) e a um módulo τ-inclinante coincidem.

Corolário 3.30. Seja N um módulo τ-rígido cujo complemento de Bongartz é o módulo $T = P({}^{\perp}(\tau N))$. Então ${}^{\perp}(\tau T) = \mathsf{Fac}T$.

Demonstração. Vimos na Proposição 3.27 que ${}^{\perp}(\tau N)$ é uma classe de torção funtorialmente finita sincera, pois N é um módulo τ-rígido. Escolhendo a classe $\mathcal{T} = {}^{\perp}(\tau N)$ na Proposição 3.28 temos que N é um módulo Ext-projetivo em $\mathcal{T} = {}^{\perp}(\tau N)$ e logo $N \in \mathsf{add}\, P(\mathcal{T}) = \mathsf{add}T$. Como N é somando de T temos que ${}^{\perp}(\tau N) \supset {}^{\perp}(\tau T)$.

Mostremos agora que $\mathsf{Fac}T \subset {}^{\perp}(\tau T)$. Suponha que $f : T' \longrightarrow \tau T$ é um morfismo não nulo, com $T' \in \mathsf{Fac}T$. Se $\pi : T^d \longrightarrow T'$ é o epimorfismo canônico temos que a composta $f \circ \pi$ é não nula em $\mathsf{Hom}_A(T^d, \tau T)$, o que é absurdo pois T é τ-rígido. Logo $f \circ \pi = 0$, e como π é epimorfismo temos que $f = 0$. Portanto $T' \in {}^{\perp}(\tau T)$ e concluímos que $\mathsf{Fac}T \subset {}^{\perp}(\tau T)$, logo

$$\mathsf{Fac}T = {}^{\perp}(\tau N) \supset {}^{\perp}(\tau T) \supset \mathsf{Fac}T.$$

Finalmente temos que $\mathsf{Fac}T = {}^{\perp}(\tau T)$. $\square$

Observação 3.31. Em particular podemos concluir que um módulo M é τ-inclinante se, e somente se, temos que ${}^{\perp}(\tau M) = \mathsf{Fac}M$. De fato, basta tomar $N = M$ na proposição anterior, então M é o seu próprio complemento de Bongartz, donde segue o resultado.

Esse último corolário generaliza o Lema 2.32 que mostra que a classe de torção $\mathsf{Fac}M$ podia ser vista como uma classe de torção

$$\mathsf{Fac}M = \mathcal{T}(M) = \{X \in \mathsf{mod}A \mid \mathsf{Ext}^1_A(M,X) = 0\},$$

onde M é um módulo inclinante. De fato, mostramos no Corolário 3.30 que se M é um módulo τ-inclinante então $\mathsf{Fac}M = {}^{\perp}(\tau M) = \{X \in \mathsf{mod}A \mid \mathsf{Hom}_A(X,\tau M) = 0\}$. Porém, todo módulo inclinante é τ-inclinante, e então para os módulos inclinantes também é válido que $\mathsf{Fac}M = {}^{\perp}(\tau M) = \{X \in \mathsf{mod}A \mid \mathsf{Hom}_A(X,\tau M) = 0\}$. Pela Proposição 3.11 temos que se $\mathsf{Hom}_A(X,\tau M) = 0$ então $\mathsf{Ext}^1_A(M,\mathsf{Fac}X) = 0$ e em particular $\mathsf{Ext}^1_A(M,X) = 0$, donde $\mathsf{Fac}M = \{X \in \mathsf{mod}A \mid \mathsf{Ext}^1_A(M,X) = 0\} = {}^{\perp}(\tau M) = \mathcal{T}(M)$.

4 PARES DE SUPORTE τ-INCLINANTE

No Capítulo 3 vimos que o conceito de módulo τ-inclinante generaliza o conceito de módulo inclinante apresentado no Capítulo 2. Além disso, vimos algumas propriedades da teoria inclinante que podem ser generalizadas pela teoria τ-inclinante. Também vimos no segundo capítulo que cada módulo inclinante básico quase completo possui no máximo dois complementos básicos a módulos inclinantes. Neste capítulo veremos que os módulos τ-inclinantes também possuem essa propriedade e criaremos um ambiente em que cada objeto possua exatamente dois complementos: o conjunto dos pares de suporte τ-inclinante básicos. Para criar este ambiente seguiremos as ideias do artigo (**AIR14**).

4.1 PARES DE SUPORTE τ-INCLINANTE

Nesta primeira seção vamos definir o que são os pares de suporte τ-inclinante, que serão uma das generalizações para os módulos inclinantes e τ-inclinantes. Trataremos de algumas propriedades básicas para tais generalizações. Como em todo o texto, todas as álgebras aqui são básicas de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k e os módulos são à direita e finitamente gerados.

A fim de generalizar os conceitos de módulos rígidos, de suporte τ-inclinante e de suporte τ-inclinante quase completo temos a seguinte definição.

Definição 4.1. Sejam M e P dois A-módulos, sendo P um módulo projetivo. Dizemos que o par ordenado (M, P) é:

(1) um **par τ-rígido** (sobre A) se M é um módulo τ-rígido e $\mathrm{Hom}_A(P, M) = 0$;

(2) um **par de suporte τ-inclinante** (sobre A) se (M, P) é um par τ-rígido tal que $|M| + |P| = |A|$;

(3) um **par de suporte τ-inclinante quase completo** (sobre A) se (M, P) é um par τ-rígido tal que $|M| + |P| = |A| - 1$.

Por exemplo, considere a álgebra dada pelo quiver com relações

$$Q_A : \begin{tikzcd} 1 & 3 \arrow[l] \arrow[d] & 4. \arrow[l] \arrow[ll, dashed, dash, bend right] \\ & 2 & \end{tikzcd}$$

Então temos que:

(1) o par $\left(\begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}, 1\right)$ é τ-rígido pois $\begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$ é τ-rígido e $\operatorname{Hom}_A\left(1, \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}\right) = 0$;

(2) o par $\left(\begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus 2, 1\right)$ é de suporte τ-inclinante pois é um par τ-rígido tal que

$$\left|\begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus 2\right| + |1| = 4 = |A|;$$

(3) o par $\left(\begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \oplus 2, 1\right)$ é de suporte τ-inclinante quase completo pois é um par τ-rígido tal que

$$\left|\begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \oplus 2\right| + |1| = 3 = |A| - 1.$$

De fato, o conceito de par de suporte τ-inclinante generaliza o conceito de módulo τ-inclinante, de acordo com o próximo lema:

Lema 4.2. Seja M um A-módulo. Então $(M, 0)$ é um par de suporte τ-inclinante se, e somente se, M é um A-módulo τ-inclinante.

Demonstração. Por definição, se $(M, 0)$ é um par de suporte τ-inclinante então M é um módulo τ-rígido e temos que $|M| + |0| = |A|$, donde obviamente $|M| = |A|$. Portanto M é um módulo τ-rígido tal que $|M| = |A|$, logo é um módulo τ-inclinante.

Por outro lado, se M é um módulo τ-inclinante temos que $|M| = |A|$, e então o par $(M, 0)$ é τ-rígido, uma vez que $\operatorname{Hom}_A(0, M) = 0$ e também temos que $|M| + |0| = |A|$. Logo $(M, 0)$ é um par de suporte τ-inclinante. □

Portanto este lema mostra que existe uma "inclusão" do conjunto dos A-módulos τ-inclinantes no conjunto dos pares de suporte τ-inclinante sobre A.

Algumas definições acerca dos módulos τ-inclinantes podem ser recuperadas com os pares de suporte τ-inclinante, como por exemplo, diremos que um par (M, P) é **básico** se M e P são A-módulos básicos. Todos os pares τ-rígidos tratados nesses capítulos são formados por módulos básicos, a menos de menção ou indicação em contrário. Da mesma forma diremos que o par τ-rígido (N, Q) é um **par somando (direto)** do par (M, P) se N e Q são somandos diretos de M e P, respectivamente. Podemos estender também a mesma noção acerca do "tipo" dos módulos definido no Capítulo 3, i.e., diremos que o par τ-rígido (M, P) é **de tipo** m se M é um módulo τ-rígido de tipo m.

Observação 4.3. Seja P um A-módulo projetivo básico. Se $e \in A$ é um idempotente tal que $P = eA$ então $|A/\langle e\rangle| = |A| - |P|$. De fato, podemos escrever o idempotente e como uma soma de idempotentes primitivos ortogonais $e = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_s}$, obtendo que

$$|A/\langle e\rangle| = \left|\left(\bigoplus_{i=1}^{n} e_iA\right)/\langle e\rangle\right| = \left|\bigoplus_{j\in J} e_jA/e_j\langle e\rangle\right|,$$

onde $J = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$, pois do fato que $e_{i_j} \in e_{i_j}\langle e \rangle$ temos que $e_{i_j}A/\langle e \rangle = 0$.

De acordo com a definição, se (M, P) é um par τ-rígido então $\mathrm{Hom}_A(P, M) = 0$. Além disso, para cada módulo projetivo básico P existe um idempotente e tal que $P = eA$. Desta forma é possível exibir um isomorfismo entre os A-módulos $\mathrm{Hom}_A(eA, M)$ e Me dado por $\mathrm{Hom}_A(eA, M) \ni \varphi \longmapsto \varphi(e)e \in Me$. Neste sentido temos o seguinte resultado.

Lema 4.4. Seja $P_j = e_jA$ o j-ésimo módulo projetivo indecomponível e seja M um A-módulo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $\mathrm{Hom}_A(P_j, M) = 0$;

(2) $Me_j = 0$;

(3) $j \notin \mathrm{Supp}(M)$.

Demonstração.

$(1) \Leftrightarrow (2)$**:** Vimos que existe um isomorfismo $\mathrm{Hom}_A(eA, M) \cong Me$, para cada idempotente $e \in A$ e cada A-módulo M. Então considerando o idempotente $e_j \in A$ tal que $P_j = e_jA$ temos $\mathrm{Hom}_A(P_j, M) \cong \mathrm{Hom}_A(e_jA, M) \cong Me_j$. Logo $\mathrm{Hom}_A(P_j, M) = 0$ se, e somente se, $Me_j = 0$.

$(2) \Leftrightarrow (3)$**:** Por definição de suporte temos que $\mathrm{Supp}(M) = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid Me_i \neq 0\}$. Portanto $Me_j = 0$ se, e somente se, $j \notin \mathrm{Supp}(M)$.

□

Vimos que os módulos τ-inclinantes estão incluídos no conjunto dos pares de suporte τ-inclinante. O próximo resultado mostra que é possível estender esta inclusão para os módulos de suporte τ-inclinante.

Proposição 4.5. Sejam M um A-módulo, P um A-módulo projetivo e $e \in A$ um idempotente tal que $\mathrm{add}\,P = \mathrm{add}\,eA$. Então M é um módulo τ-inclinante sobre $A/\langle e \rangle$ se, e somente se, (M, P) é um par de suporte τ-inclinante sobre A.

Demonstração. Suponhamos que M seja um $(A/\langle e \rangle)$-módulo τ-inclinante. Então temos que $|M| = |A/\langle e \rangle|$ e $\mathrm{Hom}_{A/\langle e \rangle}(M, \tau_{A/\langle e \rangle}M) = 0$. Logo M é τ-rígido sobre A, pois de acordo com o Corolário 3.19 temos que $\mathrm{Hom}_A(M, \tau_A M) = 0$. Além disso temos que

$$|M| + |P| = |A/\langle e \rangle| + |P| = (|A| - |P|) + |P| = |A|.$$

Como M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo, se $e = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_s}$ é a escrita do idempotente e como uma soma de idempotentes ortogonais primitivos temos que $e_{i_j} \notin \mathsf{Supp}(M)$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Pelo Lema 4.4 concluímos que

$$\mathsf{Hom}_A(P, M) = \mathsf{Hom}_A\left(\bigoplus_{j=1}^{s} P_{i_j}, M\right) = \bigoplus_{j=1}^{s} \left(\mathsf{Hom}_A\left(P_{i_j}, M\right)\right) = 0,$$

onde $P = P_{i_1} \oplus P_{i_2} \oplus \cdots \oplus P_{i_s}$. Portanto $\mathsf{Hom}_A(P, M) = 0$, M é τ-rígido sobre A e também $|M| + |P| = |A|$, donde concluímos que (M, P) é um par de suporte τ-inclinante sobre A.

Agora seja (M, P) um par de suporte τ-inclinante. Por definição temos que M é τ-rígido, ou seja, $\mathsf{Hom}_A(M, \tau_A M) = 0$ e que $|M| + |P| = |A|$. Pelo Corolário 3.19 temos que $\mathsf{Hom}_{A/\langle e\rangle}(M, \tau_{A/\langle e\rangle} M) = 0$. De acordo com a Observação 4.3, temos que $|M| = |A| - |P| = |A/\langle e\rangle|$. Logo M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-rígido tal que $|M| = |A/\langle e\rangle|$, donde concluímos que M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-inclinante. □

Observe que se e é o idempotente tal que $\mathsf{add}\, P = \mathsf{add}\, eA$ e (M, P) é um par de suporte τ-inclinante então M tem estrutura de $(A/\langle e\rangle)$-módulo, de acordo com o Lema 4.4, pois $\mathsf{Hom}_A(P, M) = 0$. Com isso a proposição anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

Corolário 4.6. Seja $P = \bigoplus_{j \in J} e_j A$ um módulo projetivo, com $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Então M é um módulo τ-inclinante sobre $A/\left\langle \sum_{j \in J} e_j \right\rangle$ se, e somente se, (M, P) é um par de suporte τ-inclinante.

Ainda podemos estender esta relação para os pares de suporte τ-inclinante quase completos.

Corolário 4.7. Seja (M, P) um par de A-módulos onde P é um módulo projetivo. Então:

(1) (M, P) é um par de suporte τ-inclinante se, e somente se, M é um módulo de suporte τ-inclinante e o idempotente e da Definição 3.4 é tal que $\mathsf{add}\, P = \mathsf{add}\, eA$;

(2) (M, P) é um par de suporte τ-inclinante quase completo se, e somente se, M é um módulo τ-inclinante quase completo sobre $A/\langle e\rangle$ e e é o idempotente tal que $\mathsf{add}\, P = \mathsf{add}\, eA$.

Demonstração. De fato, seja e o idempotente tal que $\mathsf{add}\, P = \mathsf{add}\, eA$. Se (M, P) é um par τ-rígido temos que M é um módulo τ-rígido sobre A, e como já vimos M é um módulo τ-rígido sobre $A/\langle e\rangle$. E da mesma forma, se M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-rígido então (M, P) é um par τ-rígido, pois $\mathsf{Hom}_A(P, M) = 0$.

(1) A proposição anterior mostra que (M, P) é um par de suporte τ-inclinante se, e somente se, M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-inclinante e logo M é um módulo de suporte τ-inclinante. Analogamente, se M é um módulo de suporte τ-inclinante, então será um módulo τ-inclinante sobre $A/\langle e\rangle$ para algum idempotente $e \in A$, e novamente usamos a Proposição 4.5 para concluir que (M, P) é um par de suporte τ-inclinante.

(2) Da mesma forma, (M, P) é um par de suporte τ-inclinante quase completo se, e somente se, M é τ-rígido e $|M| + |P| = |A| - 1$. Fazendo um raciocínio análogo ao do item **(1)**, concluímos que M é τ-rígido sobre $A/\langle e\rangle$ e $|M| = |A| - |P| - 1 = |A/\langle e\rangle| - 1$. Portanto M é um módulo τ-inclinante quase completo sobre $A/\langle e\rangle$.

□

De acordo com estes últimos resultados temos uma "inclusão" do conjunto dos módulos de suporte τ-inclinante básicos no conjunto dos pares de suporte τ-inclinantes básicos, que associa cada módulo de suporte τ-inclinante M ao par (M, P) obtido no Corolário 4.7. Suponha que P e Q são tais que (M, P) e (M, Q) são pares de suporte τ-inclinante, então $\mathsf{add}P = \mathsf{add}Q$. De fato, sejam e_P e e_Q dois idempotentes de A tais que $\mathsf{add}P = \mathsf{add}e_PA$ e $\mathsf{add}Q = \mathsf{add}e_QA$. Então pelos corolários anteriores temos que M é um $(A/\langle e_P\rangle)$-módulo τ-inclinante e também um $(A/\langle e_Q\rangle)$-módulo τ-inclinante. Porém, o idempotente e que torna M um $(A/\langle e\rangle)$-módulo de suporte τ-inclinante é unicamente determinado, pois é o idempotente "maximal" presente em $\mathsf{Ann}\, M$. Como e_P e e_Q satisfazem essa propriedade temos que $e_P = e_Q$ e segue que $\mathsf{add}P = \mathsf{add}e_PA = \mathsf{add}e_QA = \mathsf{add}Q$. Portanto, o módulo projetivo básico P que torna (M, P) um par de suporte τ-inclinante está unicamente determinado. É fácil ver que se M e N são dois módulos distintos de suporte τ-inclinante então os pares associados por esta inclusão são distintos, pois diferem na primeira entrada. Como qualquer par de suporte τ-inclinante é obtido por essa inclusão, obtemos uma bijeção entre o conjunto de módulos de suporte τ-inclinante básicos e o conjunto de pares de suporte τ-inclinante básicos.

Além disso, temos a seguinte caracterização para os pares de suporte τ-inclinante.

Corolário 4.8. Seja (M, P) um par τ-rígido. São equivalentes as seguintes afirmações:

(1) (M, P) é um par de suporte τ-inclinante;

(2) se $(M \oplus X, P)$ é τ-rígido para algum módulo X, então $X \in \mathsf{add}M$;

(3) ${}^{\perp}(\tau M) \cap P^{\perp} = \mathsf{Fac}M$;

(4) se $\mathsf{Hom}_A(M,\tau X) = \mathsf{Hom}_A(X,\tau M) = \mathsf{Hom}_A(P,X) = \mathsf{Hom}_A(X,\tau X) = 0$ para algum A-módulo X, então $X \in \mathsf{add}\, M$.

Demonstração. Observe que se (M,P) é um par de suporte τ-inclinante existe um idempotente $e \in A$ de tal forma que M é um módulo τ-inclinante sobre $A/\langle e\rangle$, de acordo com o Corolário 4.7. Portanto:

$(1) \Leftrightarrow (2)$: Suponhamos que (M,P) seja um par de suporte τ-inclinante. Então M é um módulo τ-inclinante sobre $A/\langle e\rangle$. Pelo Corolário 3.20 podemos ver que M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-rígido maximal. Isto significa que se $M \oplus X$ também é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-rígido então $X \in \mathsf{add}\, M$.

Por outro lado, suponha que sempre que $(M\oplus X, P)$ seja um par τ-rígido tenhamos que $X \in \mathsf{add}\, M$. Como (M,P) é um par τ-rígido temos que $|M| + |P| \leqslant |A|$, pois M é τ-rígido sobre $A/\langle e\rangle$ e logo temos que $|M| \leqslant |A/\langle e\rangle| = |A| - |P|$. Se $|M| < |A/\langle e\rangle|$ é possível encontrar um $(A/\langle e\rangle)$-módulo Y tal que $M \oplus Y$ é τ-inclinante sobre $A/\langle e\rangle$ (e portanto $(M\oplus Y, P)$ é um par τ-rígido), tal que $Y \notin \mathsf{add}\, M$, o que contraria a hipótese. Portanto (M,P) é um par de suporte τ-inclinante.

$(2) \Leftrightarrow (4)$: Se $(M \oplus X, P)$ é um par τ-rígido, então $M \oplus X$ é um A-módulo τ-rígido. Da aditividade do bifuntor $\mathsf{Hom}_A(-,-)$ e do funtor τ temos que

$$\begin{aligned}\mathsf{Hom}_A(M\oplus X, \tau(M\oplus X)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathsf{Hom}_A(M,\tau M) = \mathsf{Hom}_A(M,\tau X)\\ &= \quad \mathsf{Hom}_A(X,\tau M) = \mathsf{Hom}_A(X,\tau X) = 0.\end{aligned}$$

E além disso, como $(M \oplus X, P)$ é um par τ-rígido, então $\mathsf{Hom}_A(P, M\oplus X) = 0$, e logo

$$\mathsf{Hom}_A(P, M\oplus X) = 0 \Leftrightarrow \mathsf{Hom}_A(P,M) = \mathsf{Hom}_A(P,X) = 0.$$

A partir das duas equivalências acima concluímos que os itens **(2)** e **(4)** são equivalentes.

$(1) \Leftrightarrow (3)$: De acordo com o Lema 4.4 temos que $\mathsf{mod}(A/\langle e\rangle) = P^{\perp}$ em $\mathsf{mod}\, A$, uma vez que M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo se, e somente se, $Me = 0$, e além disso

$$Me = 0 \Leftrightarrow \mathsf{Hom}_A(eA, M) = 0 \Leftrightarrow M \in P^{\perp}.$$

Observe também que (M,P) é um par de suporte τ-inclinante se, e somente se, M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-inclinante o que é equivalente a afirmar que $\mathsf{Fac}\, M$ (em $\mathsf{mod}(A/\langle e\rangle)$) coincide com ${}^{\perp}(\tau M)$ (em $\mathsf{mod}(A/\langle e\rangle)$) de acordo com a Observação 3.31. Porém, $\mathsf{Fac}\, M \subset \mathsf{mod}(A/\langle e\rangle)$ pois M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo e ${}^{\perp}(\tau M)$ em $\mathsf{mod}(A/\langle e\rangle)$ é dada por ${}^{\perp}(\tau M) \cap \mathsf{mod}(A/\langle e\rangle) = {}^{\perp}(\tau M) \cap P^{\perp}$.

□

4.2 COMPLEMENTOS DE PARES

Vimos no Capítulo 2 que cada módulo inclinante quase completo básico possui no máximo dois complementos como módulo inclinante. Nesta seção mostraremos que os pares de suporte τ-inclinante generalizam essa propriedade dos módulos inclinantes de forma que cada par de suporte τ-inclinante básico possui **exatamente** dois complementos. Veremos também que um módulo τ-inclinante básico possui dois complementos se, e somente se, é sincero.

Lema 4.9. Seja M um A-módulo τ-rígido. Existe um par de suporte τ-inclinante (N, P) que possui $(M, 0)$ como somando direto onde P é o módulo projetivo maximal com relação a essa propriedade.

Demonstração. Seja $e \in A$ o idempotente maximal que torna M um $(A/\langle e\rangle)$-módulo. Então $\text{Hom}_A(P, M) = 0$, onde $P = eA$. Completando, via Bongartz, o módulo M sobre a álgebra $A/\langle e\rangle$ temos que existe um $(A/\langle e\rangle)$-módulo U tal que $M \oplus U$ é módulo τ-inclinante sobre $A/\langle e\rangle$. Portanto $(M \oplus U, P)$ é um par de suporte τ-inclinante que possui o par $(M, 0)$ como somando direto. A maximalidade de P decorre da maximalidade de $e \in A$. □

Com isso podemos ver que qualquer par τ-rígido pode ser completado a um par de suporte τ-inclinante. Isto generaliza o complemento de Bongartz realizado para módulos inclinantes parciais (Teorema 2.14) e para módulos τ-rígidos (Teorema 3.29).

Corolário 4.10. Se (M, P) é um par τ-rígido, existe no máximo um par de suporte τ-inclinante da forma (M, P') que possui (M, P) como somando direto.

Demonstração. Para que exista um par de suporte τ-inclinante (M, P'), M deve ser um módulo de suporte τ-inclinante. Logo se M não é de suporte τ-inclinante não existe um complemento da forma (M, P'). Vamos supor então que M seja um módulo de suporte τ-inclinante. Suponhamos também que os suportes de M e P sejam respectivamente $\text{Supp}(M) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ e $\text{Supp}(\text{top } P) = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\}$. Então:

- Se $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j, \ldots, j_m\} = \varnothing$, então (M, P) já é um par de suporte τ-inclinante, e não pode ser completado, uma vez que $|M| + |P| = k + m = n$.

- Se $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j, \ldots, j_m\} = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ defina o módulo projetivo $P' = P \oplus \left(\bigoplus_{t=1}^{s} e_{p_t} A \right)$. Logo (M, P') é um par de suporte τ-inclinante e, além disso, é o único dessa forma, pois $|M| + |P'| = |A|$.

□

Vamos lembrar que uma $\mathcal{X}$-aproximação à direita de um A-módulo M é um morfismo $\phi : X \longrightarrow M$, com X em $\mathcal{X}$, de forma que para qualquer outro morfismo $\phi' : X' \longrightarrow M$, com $X' \in \mathcal{X}$, exista um morfismo $f : X' \longrightarrow X$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] & M. \\ X' \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\phi'"] & \end{tikzcd}$$

Lema 4.11 ((**AIR14**), 2.6)**.** Seja $\eta : \; 0 \longrightarrow Y \longrightarrow T' \xrightarrow{f} X$ uma sequência exata em $\mathsf{mod}A$, onde T é um módulo τ-rígido e f é uma $(\mathsf{add}T)$-aproximação à direita. Então $Y \in {}^{\perp}(\tau T)$.

Demonstração. Podemos supor que existe uma sequência exata

$$\eta : \; 0 \longrightarrow Y \longrightarrow T' \xrightarrow{f} X \longrightarrow 0,$$

simplesmente trocando X por $\mathsf{Im}\, f$. Podemos aplicar o funtor contravariante $\mathsf{Hom}_A(-, \tau T)$ na sequência η obtendo, de acordo com a Observação 1.19, a seguinte sequência exata

$$\mathsf{Hom}_A(T', \tau T) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(Y, \tau T) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_A(X, \tau T) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_A(T', \tau T).$$

Como T é um módulo τ-rígido e $T' \in \mathsf{add}T$ temos que $\mathsf{Hom}_A(T', \tau T) = 0$, donde temos que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(Y, \tau T) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_A(X, \tau T) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_A(T', \tau T)$$

é exata. Por hipótese $f : T' \longrightarrow X$ é uma $(\mathsf{add}T)$-aproximação à direita, logo a aplicação $\mathsf{Hom}_A(T, f) : \mathsf{Hom}_A(T, T') \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(T, X)$, que é induzida por f, é sobrejetiva. De fato, seja $x \in \mathsf{Hom}_A(T, X)$ um morfismo, como f é uma aproximação à direita, existe $x' \in \mathsf{Hom}_A(T, T')$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "f"] & X. \\ T \arrow[u, "x'"] \arrow[ur, "x"] & \end{tikzcd}$$

Portanto a aplicação induzida na categoria quociente (por projetivos)

$$\underline{\mathsf{Hom}}_A(T, f) : \underline{\mathsf{Hom}}_A(T, T') \longrightarrow \underline{\mathsf{Hom}}_A(T, X)$$

também é sobrejetiva, uma vez que se o morfismo $x' \in \mathsf{Hom}_A(T, T')$ se fatora por um módulo projetivo P, então $x \in \mathsf{Hom}_A(T, X)$ também se fatora pelo mesmo projetivo:

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "f"] & X. \\ P \arrow[u] & \\ T \arrow[u] \arrow[uu, bend left] \arrow[uur, "x"'] & \end{tikzcd}$$

Por outro lado, pelas Fórmulas de Auslander-Reiten temos que

$$\mathsf{Ext}^1_A(f, \tau T) \cong \mathsf{D}\underline{\mathsf{Hom}}_A(\tau^{-1}(\tau T), f) \cong \mathsf{D}\underline{\mathsf{Hom}}_A(T, f).$$

Portanto se $\underline{\mathsf{Hom}}_A(T, f)$ é sobrejetiva, então $\mathsf{Ext}^1_A(f, \tau T)$ é injetiva. Logo temos que $\mathsf{Ker}\ (\mathsf{Ext}^1_A(f, \tau T)) = 0$ e como $\mathsf{Hom}_A(Y, \tau T) = \mathsf{Ker}\ (\mathsf{Ext}^1_A(f, \tau T)) = 0$, donde temos que $Y \in {}^{\perp}(\tau T)$. □

O lema a seguir mostra que existe uma relação entre $(\mathsf{Fac}T)$-aproximações minimais à esquerda e a classe ${}^{\perp}(\tau T) \cap P^{\perp}$, quando (T, P) é um par τ-rígido.

Lema 4.12 ((AIR14), 2.20). Seja (T, P) um par τ-rígido. Se U é um módulo τ-rígido que satisfaz a condição ${}^{\perp}(\tau T) \cap P^{\perp} \subset {}^{\perp}(\tau U)$ então existe uma sequência exata de A-módulos $U \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$, onde:

(1) f é uma $(\mathsf{Fac}T)$-aproximação minimal à esquerda;

(2) $T' \in \mathsf{add}T$, $C \in \mathsf{add}P(\mathsf{Fac}T)$ e $\mathsf{add}T' \cap \mathsf{add}C = 0$.

Demonstração. Pode-se mostrar que se T é um módulo então qualquer módulo X possui uma $(\mathsf{add}T)$-aproximação minimal à esquerda. Considere então $f : U \longrightarrow T'$ uma $(\mathsf{add}T)$-aproximação minimal à esquerda de U e considere a seguinte sequência exata $U \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$. Então g é um elemento do ideal (categórico) $\mathsf{rad}_A(T', C)$ (ou seja, se $\xi : C \longrightarrow Y$ e $\eta : Y \longrightarrow T'$ são morfismos, então $\xi g \in \mathsf{rad}_A(C, Y)$ e $g\eta \in \mathsf{rad}_A(Y, C)$). Sejam $X \in \mathsf{Fac}T$ um módulo e $s : U \longrightarrow X$ um morfismo. Existe um morfismo h que é uma $(\mathsf{add}T)$-aproximação à direita sobrejetora para o módulo X e, se $Y = \mathsf{Ker}\ h$, temos a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow T'' \xrightarrow{h} X \longrightarrow 0, \tag{4.1}$$

e logo pelo Lema 4.11 temos que $Y \in {}^{\perp}(\tau T)$. Aplicando o funtor covariante $\mathsf{Hom}_A(P, -)$ na sequência exata (4.1) obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(P, Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(P, T'') \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(P, X). \tag{4.2}$$

Como (T, P) é um par τ-rígido temos que $\mathsf{Hom}(P, T) = 0$, e como $T'' \in \mathsf{add}T$ segue que $\mathsf{Hom}_A(P, T'') = 0$. Logo pela exatidão da sequência (4.2) temos que $\mathsf{Hom}_A(P, Y) = 0$. Então temos que $Y \in {}^{\perp}(\tau T)$ e vimos agora que $Y \in P^{\perp}$, portanto concluímos que $Y \in {}^{\perp}(\tau T) \cap P^{\perp} \subset {}^{\perp}(\tau U)$, pois por hipótese temos que ${}^{\perp}(\tau T) \cap P^{\perp} \subset {}^{\perp}(\tau U)$. Vemos então que $\mathsf{Hom}_A(Y, \tau U) = 0$ e pela Fórmula de Auslander-Reiten temos que $\mathsf{Ext}^1_A(U, Y) = 0$. Através da aplicação do funtor covariante $\mathsf{Hom}_A(U, -)$ na sequência exata (4.1) obtemos a sequência exata

$$\mathsf{Hom}_A(U, T'') \xrightarrow{\mathsf{Hom}_A(U,h)} \mathsf{Hom}_A(U, X) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_A(U, Y) = 0.$$

Portanto a aplicação $\mathsf{Hom}_A(U, h) : \mathsf{Hom}_A(U, T'') \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(U, X)$ é sobrejetiva, o que significa que dado um morfismo $s : U \longrightarrow X$, existe $t : U \longrightarrow T''$ tal que $s = ht$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"] & X. \\ T'' \arrow[ur, "h"] & \end{tikzcd}$$

Como $T'' \in \mathsf{add}T$ e f é uma $(\mathsf{add}T)$-aproximação à esquerda, existe algum morfismo $u : T' \longrightarrow T''$ tal que $t = uf$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "t"'] & T' \arrow[d, "u"] \\ & T''. \end{tikzcd}$$

Logo $hu : T' \longrightarrow X$ é um morfismo tal que $(hu)f = h(uf) = ht = s$, o que mostra que f é uma $(\mathsf{Fac}T)$-aproximação à esquerda, pois vimos que para cada morfismo $s : U \longrightarrow X$, existe um morfismo $hu : T' \longrightarrow X$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "s"'] & T' \arrow[d, "hu"] \\ & X. \end{tikzcd}$$

Do fato de que $\mathsf{Im}\, f = \mathsf{Ker}\, g$, obtemos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathsf{Im}\, f \xrightarrow{i} T' \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

da qual obtemos uma nova sequência exata através da aplicação do funtor contravariante $\mathsf{Hom}_A(-, Z)$, para cada $Z \in \mathsf{Fac}T$:

$$\mathsf{Hom}_A(T', Z) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_A(i,Z)} \mathsf{Hom}_A(\mathsf{Im}\, f, Z) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_A(C, Z) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_A(T', Z). \qquad (4.3)$$

Temos que $\mathsf{Hom}_A(f, Z) : \mathsf{Hom}_A(T', Z) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(U, Z)$ é sobrejetiva para cada $Z \in \mathsf{Fac}T$, pois como f é uma $(\mathsf{Fac}T)$-aproximação à esquerda, para cada morfismo $z \in$

$\mathsf{Hom}_A(U, Z)$ existe um morfismo $q \in \mathsf{Hom}_A(T', Z)$ que faz comutar o diagrama:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "z"'] & T' \arrow[d, "q"] \\ & Z. \end{tikzcd}$$

Logo $\mathsf{Hom}_A(i, \mathsf{Fac}T) : \mathsf{Hom}_A(T', \mathsf{Fac}T) \longrightarrow \mathsf{Hom}_A(\mathsf{Im}\ f, \mathsf{Fac}T)$ é sobrejetiva. De fato, sejam dados $Z \in \mathsf{Fac}T$ e $j : \mathsf{Im}\ f \longrightarrow Z$, se $f' : U \longrightarrow \mathsf{Im}\ f$ é a correstrição de f, temos que

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f'"] & \mathsf{Im}\ f \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & T' \\ & Z. & \end{tikzcd}$$

Logo existe $\mu : T' \longrightarrow Z$ tal que $\mu f = jf'$, i.e., $\mu i f' = jf'$, e como f' é epimorfismo temos que $\mu i = j$.

Como T é τ-rígido temos $\mathsf{Hom}_A(T, \tau T) = 0$, o que significa que $\mathsf{Ext}^1_A(T, \mathsf{Fac}T) = 0$ pela Proposição 3.11, e como $T' \in \mathsf{add}T$ temos $\mathsf{Ext}^1_A(T', \mathsf{Fac}T) = 0$. Por outro lado, como existe uma sobrejeção de T' em C, temos que $C \in \mathsf{Fac}T$. Devido ao fato de que $\mathsf{Hom}_A(i, Z)$ é sobrejetiva e $\mathsf{Ext}^1_A(T', \mathsf{Fac}T) = 0$ na sequência exata (4.3) temos

$$\mathsf{Hom}_A(T', Z) \xrightarrow{\mathsf{Hom}_A(i,Z)} \mathsf{Hom}_A(\mathsf{Im}\ f, Z) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_A(C, Z) \longrightarrow 0$$

para cada $Z \in \mathsf{Fac}T$. Desta forma $\mathsf{Ext}^1_A(C, \mathsf{Fac}T) = 0$ e temos que C é Ext-projetivo em $\mathsf{Fac}T$, i.e., $C \in \mathsf{add}P(\mathsf{Fac}T)$ e $C \in \mathsf{Fac}T$.

Para concluir que $\mathsf{add}T' \cap \mathsf{add}C = 0$ basta mostrar que $\mathsf{Hom}(T', C) = \mathsf{rad}_A(T', C)$. Seja $p : T' \to C$ uma aplicação arbitrária, como $0 \longrightarrow \mathsf{Im}\ f \longrightarrow T' \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ é uma sequência exata curta, aplicando o funtor covariante $\mathsf{Hom}_A(U, -)$ temos uma sequência exata

$$\mathsf{Hom}_A(U, T') \xrightarrow{\mathsf{Hom}_A(U,g)} \mathsf{Hom}_A(U, C) \longrightarrow \mathsf{Ext}^1_A(U, \mathsf{Im}\ f).$$

Como $\mathsf{Im}\ f \cong U/\mathsf{Ker}\ f$, temos que $\mathsf{Im}\ f \in \mathsf{Fac}U$ de forma que $\mathsf{Ext}^1_A(U, \mathsf{Im}\ f) = 0$, uma vez que U é um módulo τ-rígido de forma que $\mathsf{Hom}_A(U, \tau U) = 0$ e $\mathsf{Ext}^1_A(U, \mathsf{Fac}U) = 0$. Pela sequência exata acima, $\mathsf{Hom}_A(U, g) : \mathsf{Hom}_A(U, T') \to \mathsf{Hom}_A(U, C)$ é sobrejetiva e como $pf \in \mathsf{Hom}_A(U, C)$ existe $t : U \longrightarrow T'$ tal que $pf = gt$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "pf"] \arrow[d, "t"] & C. \\ T' \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

Além disso, do fato de que f é $(\text{add}T)$-aproximação à esquerda e $T' \in \text{add}T$, existe uma aplicação $v : T' \longrightarrow T'$ tal que $t = vf$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "t"'] & T' \arrow[d, "v"] \\ & T'. \end{tikzcd}$$

Então $(p - gv)f = pf - gvf = pf - gt = pf - pf = 0$, e existe algum $w : C \longrightarrow C$ tal que $p - gv = wg$, pois como $U \xrightarrow{f} T' \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ é exata implica a exatidão da sequência

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(C, C) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(T', C) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(U, C) \\ & & w & \longmapsto & p - gv = wg & \longmapsto & (p - gv)f = 0 \end{array}$$

através do funtor contravariante $\text{Hom}_A(-, C)$. Logo $p = gv + wg$ e, como $g \in \text{rad}_A(T', C)$, temos que $p \in \text{rad}_A(T', C)$. Portanto $\text{Hom}_A(T', C) = \text{rad}_A(T', C)$, e logo concluímos que $\text{add}(T') \cap \text{add}(C) = 0$. □

Desta forma o próximo lema permite concluir que, quando o módulo C do lema anterior é nulo, existem isomorfismos entre $U/U\langle e\rangle$ e T' para algum idempotente $e \in A$. Isto é:

Lema 4.13 ((AIR14), 2.21). Suponha no lema anterior que $C = 0$. Então $f : U \longrightarrow T'$ induz um isomorfismo $U/U\langle e\rangle \cong T'$ para um idempotente maximal $e \in A$ satisfazendo $Te = 0$. Em particular, se T é sincero temos $U \cong T'$.

Demonstração. Temos que a sequência

$$0 \longrightarrow \text{Ker}\, f \longrightarrow U \xrightarrow{f} T' \longrightarrow 0$$

é exata e aplicando o funtor contravariante $\text{Hom}_A(-, \text{Fac}T)$ obtemos uma nova sequência exata

$$\text{Hom}_A(T', \text{Fac}T) \xrightarrow{\text{Hom}_A(f, \text{Fac}T)} \text{Hom}_A(U, \text{Fac}T) \longrightarrow \text{Hom}_A(\text{Ker}\, f, \text{Fac}T) \longrightarrow \text{Ext}^1_A(T', \text{Fac}T).$$

Observe que, como T é a primeira entrada de um par de suporte τ-inclinante, então T é um módulo τ-rígido (por definição), logo para algum idempotente $e \in A$ tem-se que $\text{Hom}_{A/\langle e\rangle}\left(T, \tau_{A/\langle e\rangle}T\right) = 0$ donde $\text{Hom}_A(T, \tau T) = 0$ (pelo Corolário 3.19) e finalmente pela Proposição 3.11 temos que $\text{Ext}^1_A(T, \text{Fac}T) = 0$. Como $T' \in \text{add}T$ temos que $\text{Ext}(T', \text{Fac}T) = 0$.

Do fato de que $\text{Hom}_A(f, \text{Fac}T)$ é sobrejetor (i.e., para cada $Z \in \text{Fac}T$ o morfismo $\text{Hom}_A(f, Z)$ é sobrejetor) segue que $\text{Hom}_A(\text{Ker}\, f, \text{Fac}T) = 0$ e logo $\text{Ker}\, f \in {}^{\perp}(\text{Fac}T)$. Por outro lado, como $Te = 0$ temos que T é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo.

Se $\mathcal{T}$ é uma classe de torção de $\text{mod}A$ que contém $\mathsf{Fac}T$, então ela deve conter todos os módulos simples que são fatores de composição de T. Portanto $\text{mod}\ (A/\langle e\rangle)$ é a menor classe livre de torção de $\text{mod}A$ contendo $\text{Fac}T$. Então temos um par de torção $({}^{\perp}(\mathsf{Fac}T), \text{mod}\ (A/\langle e\rangle))$ e uma sequência canônica associada a X dada por

$$0 \longrightarrow X\langle e\rangle \longrightarrow X \longrightarrow X/X\langle e\rangle \longrightarrow 0. \tag{4.4}$$

Como Ker $f \in {}^{\perp}(\mathsf{Fac}T)$ e $T' \in \mathsf{Fac}T \subset \text{mod}\ (A/\langle e\rangle)$, a sequência canônica de U é dada por (4.4). Então temos que $U/U\langle e\rangle \cong T'$. □

E finalmente podemos observar o que acontece com os somandos de um dado módulo τ-inclinante básico com relação às classes de torção da forma ${}^{\perp}(\tau M)$ e $\mathsf{Fac}M$.

Proposição 4.14 ((AIR14), 2.22). Seja $T = X \oplus U$ um módulo τ-inclinante básico, com X um módulo indecomponível. Então ocorre apenas uma das seguintes afirmações: ou ${}^{\perp}(\tau U) \subset {}^{\perp}(\tau X)$ ou $X \in \mathsf{Fac}U$.

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que sempre ocorre que ${}^{\perp}(\tau U) \subset {}^{\perp}(\tau X)$ ou $X \in \mathsf{Fac}U$ quando $X \oplus U$ é um módulo τ-inclinante básico e X é um módulo indecomponível. Seja $Y \oplus U$ o complemento de Bongartz de U. Então no Corolário 3.30 vemos que ${}^{\perp}(\tau(Y \oplus U)) = {}^{\perp}(\tau U) \supset {}^{\perp}(\tau T)$. Considerando o par τ-rígido $(X \oplus U, 0)$ e a sequência exata

$$Y \oplus U \xrightarrow{F} T' \oplus U \xrightarrow{g} T'' \longrightarrow 0,$$

no Lema 4.12 temos que $F = \left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : Y \oplus U \longrightarrow T' \oplus U$ e $f : Y \longrightarrow T'$ são $(\mathsf{Fac}T)$-aproximações minimais à esquerda, T' e T'' estão em $\mathsf{add}T$ e também $\mathsf{add}(T' \oplus U) \cap \mathsf{add}T'' = 0$. Então $T'' \in \mathsf{add}X$ pois T'' é um somando de $T = X \oplus U$ que não possui somandos diretos em comum com U.

(1) Suponhamos que $T'' \neq 0$. Como $T'' \in \mathsf{add}X$, $T'' \neq 0$ e X é indecomponível temos que existe um inteiro $\ell \geqslant 1$ para o qual $T'' \cong X^{\ell}$. Como o morfismo $T' \oplus U \longrightarrow T''$ da sequência anterior acima é um epimorfismo e $T' \in \mathsf{add}U$ (pois T' e T'' não possuem somando em comum) temos que $T'' \in \mathsf{Fac}(T' \oplus U) \subset \mathsf{Fac}U$.

(2) Assuma que $T'' = 0$. Aplicando o lema anterior, $F : Y \oplus U \longrightarrow T' \oplus U$ é um isomorfismo pois T é um módulo sincero e $T'' = 0$. Então $Y \in \mathsf{add}T$ e logo $Y \cong X$, pois Y e U não tem somandos em comum, afinal Y é o complemento de Bongartz de U. Portanto ${}^{\perp}(\tau X) = {}^{\perp}(\tau Y) \supset {}^{\perp}(\tau U)$.

Agora mostraremos que as condições ${}^{\perp}(\tau U) \subset {}^{\perp}(\tau X)$ e $X \in \mathsf{Fac}U$ não ocorrem juntas. Suponha por absurdo que tenhamos ${}^{\perp}(\tau U) \subset {}^{\perp}(\tau X)$ e $X \in \mathsf{Fac}U$ simultaneamente. Como $X \in \mathsf{Fac}U$ e $T = X \oplus U$ temos que $\mathsf{Fac}U = \mathsf{Fac}T$. Logo pela

Observação 3.31, temos que $\mathsf{Fac}T = {}^{\perp}(\tau T)$. Como por hipótese ${}^{\perp}(\tau U) \subset {}^{\perp}(\tau X)$, temos que ${}^{\perp}(\tau T) = {}^{\perp}(\tau U)$. Portanto $\mathsf{Fac}U = \mathsf{Fac}T = {}^{\perp}(\tau T) = {}^{\perp}(\tau U)$ e logo U também é τ-inclinante pela Observação 3.31, o que é uma contradição pois T e U são τ-inclinantes em uma mesma álgebra, com $|T| \neq |U|$ (pois X é indecomponível e $T = X \oplus U$).

□

Seja (N, Q) um par τ-rígido. Dizemos que o par (M, P) é um **complemento** do par (N, Q) se (M, P) é um par de suporte τ-inclinante e (N, Q) é um par somando de (M, P). O próximo teorema mostra que cada par de suporte τ-inclinante quase completo é somando de exatamente dois pares de suporte τ-inclinante.

Teorema 4.15 ((**AIR14**), 2.18). Seja (U, Q) um par de suporte τ-inclinante (básico) quase completo. Então (U, Q) é um par somando de exatamente dois pares (básicos) de suporte τ-inclinante.

Demonstração.

(1) Vamos considerar primeiro um par de suporte τ-inclinante quase completo da forma $(U, 0)$, ou seja, um par τ-rígido onde a primeira entrada é um módulo τ-inclinante quase completo. Vimos no Capítulo 3 que existe uma bijeção dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\,A & \longleftrightarrow & \mathsf{f}\text{-}\mathsf{tors}\,A \\ M & \longmapsto & \mathsf{Fac}M. \end{array}$$

Suponhamos que X e P sejam módulos tais que $(U \oplus X, P)$ é um par de suporte τ-inclinante. Então $U \oplus X$ é um módulo de suporte τ-inclinante. Por esta bijeção temos que $\mathsf{Fac}(U \oplus X)$ é uma classe de torção funtorialmente finita. Vamos mostrar que $\mathsf{Fac}(U \oplus X)$ pode assumir no máximo duas possibilidades:

$$\text{ou } \mathsf{Fac}(U \oplus X) = \mathsf{Fac}U \text{ ou } \mathsf{Fac}(U \oplus X) = {}^{\perp}(\tau U).$$

Se mostrarmos que existem no máximo essas duas possibilidades para a classe de torção $\mathsf{Fac}(U \oplus X)$ estaremos mostrando que existem no máximo dois módulos de suporte τ-inclinante associados, pois para qualquer módulo de suporte τ-inclinante M temos uma única classe de torção funtorialmente finita associada à M e por outro lado temos que $\mathsf{Fac}U$ e ${}^{\perp}(\tau U)$ são classes de torção funtorialmente finitas distintas pois, se ocorresse que $\mathsf{Fac}U = {}^{\perp}(\tau U)$, pela Observação 3.31 teríamos que U seria um módulo τ-inclinante, que não é o caso.

(a) Suponhamos que $X = 0$. Então o módulo U é (de suporte) τ-inclinante e temos que $\mathsf{Fac}(X \oplus U) = \mathsf{Fac}U$.

(b) Por outro lado, se $X \neq 0$ então $X \oplus U$ é um A-módulo τ-inclinante (pois $|X \oplus U| = |A|$). Logo ou $X \in \mathsf{Fac}U$ ou ${}^{\perp}(\tau U) \subset {}^{\perp}(\tau X)$, de acordo com a Proposição 4.14:

- se $X \in \mathsf{Fac}U$, então $\mathsf{Fac}(X \oplus U) = \mathsf{Fac}U$;
- se ${}^{\perp}(\tau U) \subset {}^{\perp}(\tau X)$ então $\mathsf{Fac}(X \oplus U) = {}^{\perp}(\tau(X \oplus U)) = {}^{\perp}(\tau U)$.

(2) Se (U, Q) é um par de suporte τ-inclinante quase completo, com $Q \neq 0$, existe um idempotente não nulo $e \in A$ tal que $\mathsf{add}Q = \mathsf{add}eA$. Então temos que U é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-inclinante quase completo. Pelo item **(1)** segue que U é somando direto de exatamente dois $(A/\langle e\rangle)$-módulos de suporte τ-inclinante, donde conclui-se o resultado.

□

Desta forma vimos que cada par de suporte τ-inclinante quase completo possui **exatamente** dois complementos como par de suporte τ-inclinante. Em particular podemos considerar casos em que o par de suporte τ-inclinante quase completo é da forma $(M, 0)$, ou seja, M é um módulo τ-inclinante quase completo.

Corolário 4.16. Seja M um módulo τ-inclinante quase completo. Então M possui dois complementos a módulos τ-inclinantes se, e somente se, M é um A-módulo **sincero**.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que M seja um A-módulo sincero, então temos que $\mathsf{Supp}(M) = \mathsf{Supp}(A)$. De acordo com o teorema anterior, o par $(M, 0)$ possui exatamente dois complementos. Se P_i é o i-ésimo módulo projetivo indecomponível então o par (M, P_i) não é τ-rígido pois pelo Lema 4.4 temos que $\mathsf{Hom}_A(P_i, M) \neq 0$, uma vez que $Me_i \neq 0$. Logo existem dois módulos não isomorfos N_1 e N_2 tais que $(M \oplus N_1, 0)$ e $(M \oplus N_2, 0)$ são pares de suporte τ-inclinante, ou seja, N_1 e N_2 são tais que $M \oplus N_1$ e $M \oplus N_2$ são módulos τ-inclinantes.

Por outro lado, suponhamos que M seja um módulo sincero e que não possua dois complementos a módulos τ-inclinantes. Então algum dos complementos do par $(M, 0)$ é da forma (M, P_i) para algum módulo projetivo indecomponível P_i. Se e_i é o idempotente tal que $\mathsf{add}P = \mathsf{add}e_iA$, pelo Lema **4.4** temos que $Me_i = 0$, o que é absurdo com a hipótese de M ser sincero. Portanto M tem dois complementos a módulos τ-inclinantes. □

Este corolário pode ser reescrito da seguinte forma:

Corolário 4.17. Considere (M, P) um par τ-rígido básico em $\mathsf{mod}A$ que satisfaz $\#(\mathsf{Supp}(M) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ P)) = \#(\mathsf{Supp}(A))$ e $|M| + |P| = |A| - 1$. Então existem únicos módulos básicos não isomorfos $N_1, N_2 \in \mathsf{mod}A$ tais que $(M \oplus N_1, P)$ e $(M \oplus N_2, P)$ são pares de suporte τ-inclinante.

Demonstração. Seja $e \in A$ o idempotente tal que $P = eA$. Nesse caso temos que M é um $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-inclinante quase completo. Usando o corolário anterior temos que existem dois complementos N_1 e N_2 de M a $(A/\langle e\rangle)$-módulos τ-inclinantes. $\square$

4.3 MUTAÇÕES DE PARES E O GRAFO $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$

Na seção anterior vimos que cada par de suporte τ-inclinante quase completo possui exatamente dois complementos. Nesta seção veremos algumas propriedades que os complementos de pares τ-rígidos possuem e vamos definir o grafo dos pares de suporte τ-inclinante.

Seja (M, P) um par τ-rígido. Definimos o **suporte do par** (M, P) como sendo o par ordenado de conjuntos $\mathsf{Supp}(M, P) \doteq (\mathsf{Supp}(M), \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P))$. Esse conceito generaliza a ideia de suporte de módulo τ-rígido, pois se temos um par τ-rígido $(M, 0)$, então $\mathsf{Supp}(M)$ está naturalmente identificado com o par $(\mathsf{Supp}(M), \varnothing)$. Convém lembrar que temos inclusões dadas por

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathsf{tilt}A & \longrightarrow & \tau\text{-}\mathsf{tilt}A; & & \tau\text{-}\mathsf{tilt}A & \longrightarrow & \mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}A; & & \mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}A & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}A); \\ M & \longmapsto & M & & M & \longmapsto & M & & M & \longmapsto & (M, e_M A) \end{array}$$

onde $\mathbb{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ denota o conjunto de todos os pares de suporte τ-inclinante e e_M é o idempotente maximal para o qual $Me_M = 0$. Podemos definir um grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ a partir dos pares de suporte τ-inclinante da seguinte forma:

(1) o conjunto de vértices de $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ é o conjunto $\mathbb{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$;

(2) dois pares de suporte τ-inclinante estão conectados por uma aresta se eles possuem um par de suporte τ-inclinante quase completo que é somando direto de ambos.

Exemplo 4.18. Seja A a álgebra cujo quiver ordinário é dado por

$$Q_A : \; 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3.$$

Veja que o quiver de Auslander-Reiten desta álgebra é dado por:

$$\Gamma(\mathsf{mod}A) : \quad \begin{tikzcd} & & {\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}} \arrow[dr] & & \\ & {\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & {\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}} \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & 2 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & 3. \end{tikzcd}$$

Portanto temos que:

(0) o único A-módulo τ-rígido de tipo 0 é o módulo nulo. Este módulo está associado naturalmente ao par de suporte τ-inclinante $(0, P_1 \oplus P_2 \oplus P_3)$, onde P_i denota o i-ésimo módulo projetivo indecomponível para $i \in \{1, 2, 3\}$;

(1) os A-módulos τ-rígidos de tipo 1 são os módulos 1, 2, 3, $\substack{2\\1}$, $\substack{3\\2}$ e $\substack{3\\2\\1}$. Então conseguimos obter os pares de suporte τ-inclinante $(1, P_2 \oplus P_3)$, $(2, P_1 \oplus P_3)$ e $(3, P_1 \oplus P_2)$. Observe que os módulos $\substack{2\\1}$, $\substack{3\\2}$ e $\substack{3\\2\\1}$ não podem ser a primeira entrada de um par de suporte τ-inclinante pois não são A-módulos de suporte τ-inclinante;

(2) os A-módulos τ-rígidos de tipo 2 são os A-módulos:

$$1 \oplus 3;\ \ 1 \oplus \substack{2\\1};\ \ 1 \oplus \substack{3\\2\\1};\ \ 2 \oplus \substack{2\\1};\ \ 2 \oplus \substack{3\\2};\ \ 2 \oplus \substack{3\\2\\1};\ \ 3 \oplus \substack{3\\2};\ \ 3 \oplus \substack{3\\2\\1};\ \ \substack{2\\1} \oplus \substack{3\\2\\1};\ \ \substack{3\\2} \oplus \substack{3\\2\\1}.$$

A partir destes obtemos os pares de suporte τ-inclinante $(1 \oplus 3, P_2)$, $(1 \oplus \substack{2\\1}, P_3)$, $(2 \oplus \substack{2\\1}, P_3)$, $(2 \oplus \substack{3\\2}, P_1)$ e $(3 \oplus \substack{3\\2}, P_1)$. Novamente, os módulos $1 \oplus \substack{3\\2\\1}$, $2 \oplus \substack{3\\2\\1}$, $3 \oplus \substack{3\\2\\1}$, $\substack{2\\1} \oplus \substack{3\\2\\1}$ e $\substack{3\\2} \oplus \substack{3\\2\\1}$ não são módulos de suporte τ-inclinante e portanto não podem ser a primeira entrada de um par de suporte τ-inclinante;

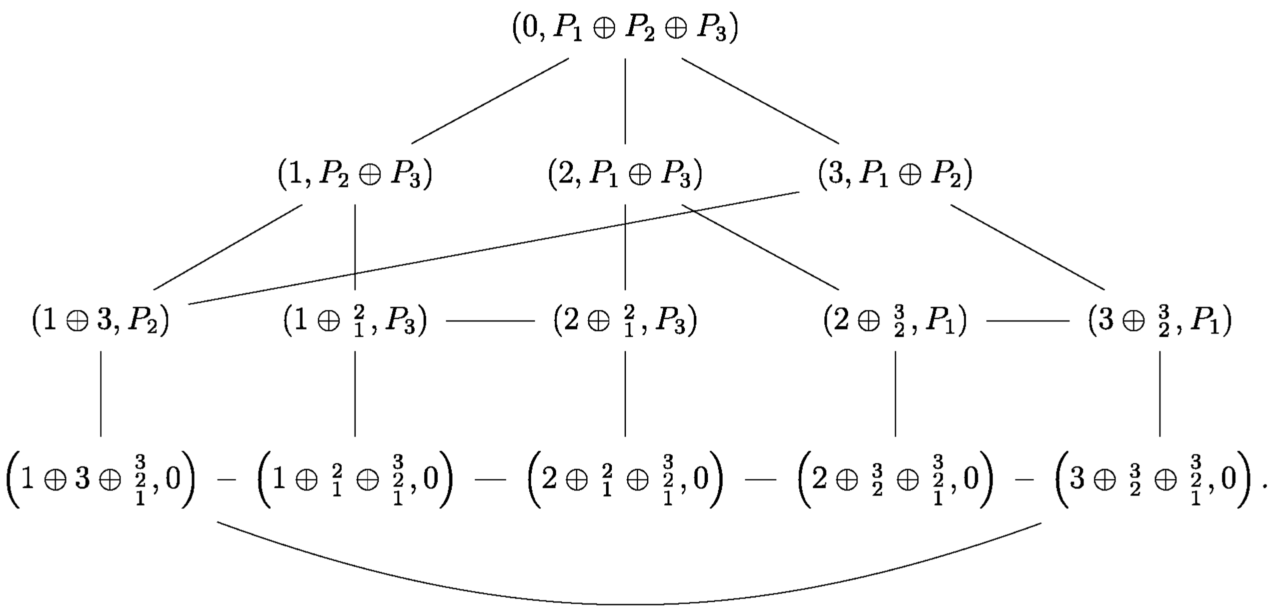
(3) os A-módulos τ-rígidos de tipo 3 são os módulos:

$$1 \oplus 3 \oplus \substack{3\\2\\1};\ \ 1 \oplus \substack{2\\1} \oplus \substack{3\\2\\1};\ \ 2 \oplus \substack{2\\1} \oplus \substack{3\\2\\1};\ \ 2 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{3\\2\\1};\ \ 3 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{3\\2\\1},$$

e estes módulos (de suporte) τ-inclinantes dão origem aos seguintes pares de suporte τ-inclinante

$$\left(1 \oplus 3 \oplus \substack{3\\2\\1}, 0\right);\ \left(1 \oplus \substack{2\\1} \oplus \substack{3\\2\\1}, 0\right);\ \left(2 \oplus \substack{2\\1} \oplus \substack{3\\2\\1}, 0\right);\ \left(2 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{3\\2\\1}, 0\right);\ \left(3 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{3\\2\\1}, 0\right).$$

Podemos então construir o grafo de suporte τ-inclinante $\mathcal{P}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}A)$ para esta álgebra



Observe que todos os pares de suporte τ-inclinante que estão conectados por uma aresta no grafo acima possuem um par de suporte τ-inclinante quase completo que é somando direto de ambos. Por exemplo, os pares $(2 \oplus {}^2_1, P_3)$ e $(2, P_1 \oplus P_3)$ estão conectados por uma aresta pois possuem como somando direto comum o par de suporte τ-inclinante quase completo $(2, P_3)$.

Observe que no exemplo anterior, cada vértice do grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ está conectado a exatamente três vértices. Esta observação sugere lembrar a seguinte definição.

Definição 4.19. Seja $G = (G_0, G_1)$ um grafo. Dizemos que os vértices $a, b \in G_0$ estão conectados por uma aresta se existe uma aresta $\alpha \in G_1$ de extremos a e b. Também dizemos que G é um grafo **n-regular** se para cada vértice $a \in G_0$ existem exatamente n outros vértices $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G_0$ conectados a a por uma única aresta e não existe nenhum outro vértice $b \in G_0 \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ conectado a a por uma aresta.

O que ocorreu com o grafo do exemplo anterior não é uma coincidência. A próxima proposição mostra que esse fato acontece para qualquer álgebra A.

Proposição 4.20. Seja A uma álgebra. Então o grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ é um grafo n-regular.

Demonstração. Seja (M, P) um par de suporte τ-inclinante. Como $|M| + |P| = |A|$, temos que (M, P) tem exatamente n pares somandos diretos que são de suporte τ-inclinante quase completo. Para cada um desses pares de suporte τ-inclinante quase completo existe um outro par de suporte τ-inclinante distinto de (M, P) que é complemento desse par de suporte τ-inclinante quase completo, de acordo com o Teorema 4.15. Logo, cada um desses pares de suporte τ-inclinante quase completo está conectado a (M, P) por uma aresta, e segue que $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ é um grafo n-regular. $\square$

Nos próximos resultados vamos explorar as propriedades que os suportes dos vértices do grafo n-regular $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ possuem. Vejamos inicialmente que se (M, P) é um par de suporte τ-inclinante então os conjuntos $\mathsf{Supp}(M)$ e $\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P)$ induzem uma partição no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Lema 4.21. Seja (M, P) um par τ-rígido. Então $\mathsf{Supp}(M) \cap \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P) = \varnothing$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que exista um índice $i \in \mathsf{Supp}(M) \cap \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P)$. Como $i \in \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P)$, temos que o i-ésimo módulo projetivo indecomponível P_i é somando direto de P, donde $\mathsf{Hom}(P_i, M) = 0$. Por outro lado, se $i \in \mathsf{Supp}(M)$ então temos que $Me_i \neq 0$ pela definição de suporte de M. Logo pelo Lema 4.4 segue que $\mathsf{Hom}_A(P_i, M) \neq 0$. Portanto temos uma contradição e logo por absurdo mostramos que $\mathsf{Supp}(M) \cap \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P) = \varnothing$. $\square$

Isto significa que para qualquer par τ-rígido os conjuntos $\mathsf{Supp}(M)$ e $\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ P)$ são disjuntos. O próximo lema mostra que no caso em que o par (M, P) é um par de suporte τ-inclinante, podemos escrever o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ como união disjunta de $\mathsf{Supp}(M)$ e $\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ P)$.

Lema 4.22. Se (M, P) é um par de suporte τ-inclinante então

$$\mathsf{Supp}(M) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ P) = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Demonstração. Sabemos que se M é um A-módulo τ-inclinante então $|M| = |A|$, donde temos que $\#(\mathsf{Supp}(M)) = \#(\mathsf{Supp}(A))$. Além disso, se (M, P) é um par de suporte τ-inclinante, onde $e \in A$ é um idempotente com $\mathsf{add}P = \mathsf{add}eA$, então M é τ-inclinante quando visto como um $(A/\langle e\rangle)$-módulo. Logo

$$\#(\mathsf{Supp}(M)) = \#(\mathsf{Supp}(A/\langle e\rangle)) = |A/\langle e\rangle| = |A| - |P|.$$

Além disso, tem-se que $|P| = \#(\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ P))$ pois a cada somando projetivo indecomponível P temos um elemento $i \in \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ P)$ no suporte do topo de P. No lema anterior vimos que a união $\mathsf{Supp}(M) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ P)$ é disjunta então segue que

$$\#(\mathsf{Supp}(M) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ P)) = \#(\mathsf{Supp}(M)) + \#(\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ P)) = |A| - |P| + |P| = |A| = n.$$

Logo $\mathsf{Supp}(M) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ P) = \{1, 2, \ldots, n\}$. $\square$

Desta forma temos que a cada par de suporte τ-inclinante é associada uma partição em $\{1, 2, \ldots, n\}$, como podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 4.23. Seja A a álgebra dada pelo quiver $1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$. Considere o par de suporte τ-inclinante $(1 \oplus {}^{2}_{1}, P_3)$. Então

$$\mathsf{Supp}(M) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ P) = \{1, 2\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3\}.$$

Veremos a seguir que as partições associadas aos pares de suporte τ-inclinante quase completos em $\{1, 2, \ldots, n\}$ se relacionam com as partições de seus complementos no mesmo conjunto.

Proposição 4.24. Seja (N, Q) um par de suporte τ-inclinante quase completo. Então

$$\#(\mathsf{Supp}(N) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ (Q)) \in \{n-1, n\}.$$

Demonstração. De fato, suponha que (N, Q) seja um par de suporte τ-inclinante quase completo então $|N| + |Q| = |A| - 1$. No Corolário 3.20 vimos que

$$|N| \leqslant \#(\mathsf{Supp}(N)) \leqslant |A/\langle e\rangle| = |A| - |Q|,$$

onde $e \in A$ é um idempotente tal que $\mathsf{add}Q = \mathsf{add}eA$. Logo

$$|N| + |Q| \leqslant \#(\mathsf{Supp}(N)) + |Q| \leqslant |A| - |Q| + |Q| = |A|.$$

Como $|Q| = \#(\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q))$ temos que

$$|A| - 1 \leqslant \#(\mathsf{Supp}(N)) + \#(\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)) \leqslant |A|,$$

e pelo Lema 4.21 temos que

$$n - 1 \leqslant \#(\mathsf{Supp}(N) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)) \leqslant n,$$

uma vez que $(\mathsf{Supp}(N)) \cap (\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)) = \varnothing$. □

Por consequência esta proposição nos permite contar quantos elementos aparecem no suporte de um módulo τ-inclinante quase completo, como veremos no corolário a seguir.

Corolário 4.25. Se N é um A-módulo τ-inclinante quase completo então

$$\#(\mathsf{Supp}(N)) \in \{n-1, n\}.$$

Demonstração. Se tomarmos $Q = 0$ na proposição anterior teremos que

$$\{n-1, n\} \ni \#((\mathsf{Supp}(N)) \cup (\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q))) = \#(\mathsf{Supp}(N)).$$

□

No Corolário 4.16 vimos que um módulo τ-inclinante quase completo possui dois complementos se, e somente se, é sincero. O próximo teorema mostra uma relação entre a cardinalidade de $\mathsf{Supp}(M)$ e as formas como M pode ser completado a um módulo de suporte τ-inclinante.

Teorema 4.26. Seja M um A-módulo τ-inclinante quase completo.

(1) Se $\#(\mathsf{Supp}(M)) = |A|$ então existem dois módulos N_1 e N_2 básicos não isomorfos tais que $M \oplus N_1$ e $M \oplus N_2$ são A-módulos τ-inclinantes.

(2) Se $\#(\mathsf{Supp}(M)) < |A|$ então existe um único módulo básico indecomponível N tal que $M \oplus N$ é um A-módulo τ-inclinante e existe um único módulo projetivo P básico tal que (M, P) é par de suporte τ-inclinante.

Demonstração. Considere o par $(M, 0)$ naturalmente identificado ao módulo τ-inclinante quase completo M, uma vez que $\mathsf{Supp}(M) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ (0)) = \mathsf{Supp}(M)$.

(1) Suponha que $\#(\mathsf{Supp}(M) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ (0)) = \#(\mathsf{Supp}(M)) = n = |A|$. Então existem únicos módulos básicos N_1 e N_2, não isomorfos, tais que $(M \oplus N_1, 0)$ e $(M \oplus N_2, 0)$ são pares de suporte τ-inclinante. Portanto $M \oplus N_1$ e $M \oplus N_2$ são τ-inclinantes.

(2) Suponha que $\#(\mathsf{Supp}(M)) < |A|$, com M é um módulo τ-inclinante quase completo, temos que $\#(\mathsf{Supp}(M)) = \#(\mathsf{Supp}(M) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\ (0)) = n - 1$, pois temos que $\#(\mathsf{Supp}(M)) < n$ e pelo Corolário 4.25 temos que $\#(\mathsf{Supp}(M)) \in \{n-1, n\}$. Pelo Complemento de Bongartz do Teorema 3.29, o par $(M, 0)$ possui um complemento da forma $(M \oplus N, 0)$ e logo possui um complemento da forma (M, P), onde $P = e_i A$ e i é tal que $\{i\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \mathsf{Supp}(M)$. Logo $M \oplus N$ é um módulo τ-inclinante e P é o módulo projetivo tal que (M, P) é um par de suporte τ-inclinante.

$\square$

Diremos que (T, P) e (T', P') são **mutações** um do outro sempre que (T, P) e (T', P') são pares de suporte τ-inclinante que possuem um par de suporte τ-inclinante quase completo (U, Q) como somando direto comum e existe um módulo indecomponível X que satisfaz $T = U \oplus X$ ou $P = Q \oplus X$.

Anteriormente definimos o grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}A)$ onde:

- o conjunto de vértices é dado pelo conjunto dos pares de suporte τ-inclinante;
- colocamos uma aresta entre dois pares de suporte τ-inclinante se ambos possuem um par de suporte τ-inclinante quase completo que é somando direto de ambos

e de acordo com a seguinte observação é possível definir uma ordem parcial no conjunto de vértices de $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}A)$.

Observação 4.27. Se T e U são módulos de suporte τ-inclinante, denotamos $T \geqslant U$ quando $\mathsf{Fac}T \supset \mathsf{Fac}U$. Esta relação determina uma ordem parcial em $\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}A$. Além disso, se $T \geqslant U$ e $\mathsf{Fac}T \supsetneq \mathsf{Fac}U$ denotaremos por $T > U$.

Vejamos o que acontece com as classes de torção funtorialmente finitas $\mathsf{Fac}T$ quando temos dois vértices conectados por uma aresta no grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}A)$.

Lema 4.28. Seja (U, Q) um par de suporte τ-inclinante quase completo com complementos (T, P) e (T', P'). Então temos que $\{\mathsf{Fac}T, \mathsf{Fac}T'\} = \{\mathsf{Fac}U, {}^{\perp}(\tau U) \cap Q^{\perp}\}$.

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $Q = 0$. Então vimos na demonstração do Teorema 4.15, que a classe de torção $\mathsf{Fac}(X \oplus U)$ é sempre igual a $\mathsf{Fac}U$ ou ${}^{\perp}(\tau U)$, quando X é um módulo indecomponível tal que $X \oplus U$ é τ-inclinante.

Além disso, pelo Teorema 3.26 cada módulo de suporte τ-inclinante M associamos uma classe de torção funtorialmente finita $\mathsf{Fac}M$.

(1) Suponhamos que $T = U$. Logo $\mathsf{Fac}T = \mathsf{Fac}U$. Neste caso temos que $T' = X \oplus U$ para algum módulo indecomponível X. Necessariamente X é o complemento de Bongartz de U e logo ${}^{\perp}(\tau U) \subset {}^{\perp}(\tau X)$. Se $T = U \oplus X$, pelo Corolário 3.30 temos que $\mathsf{Fac}(X \oplus U) = {}^{\perp}(\tau(X \oplus U)) = {}^{\perp}(\tau U)$.

(2) Suponhamos que $T \neq U$ e $T' \neq U$. Pela Proposição 4.14 temos que $X \in \mathsf{Fac}U$ ou ${}^{\perp}(\tau U) \subset {}^{\perp}(\tau X)$.

- Se $X \in \mathsf{Fac}U$ então $\mathsf{Fac}T = \mathsf{Fac}(U \oplus X) = \mathsf{Fac}U$.
- Se ${}^{\perp}(\tau U) \subset {}^{\perp}(\tau X)$, então $\mathsf{Fac}(X \oplus U) = {}^{\perp}(\tau U)$.

Logo $\mathsf{Fac}T = \mathsf{Fac}U$ ou $\mathsf{Fac}T = {}^{\perp}(\tau U)$. O mesmo pode ser feito para $\mathsf{Fac}T'$. Pela bijeção dada no Teorema 3.26, as classes de torção $\mathsf{Fac}T$ e $\mathsf{Fac}T'$ devem ser distintas, e logo temos que $\{\mathsf{Fac}T, \mathsf{Fac}T'\} = \{\mathsf{Fac}U, {}^{\perp}(\tau U)\}$.

Se $Q \neq 0$ basta considerarmos a interseção com a classe $Q^{\perp}$. Desta forma temos que $\{\mathsf{Fac}T, \mathsf{Fac}T'\} = \{\mathsf{Fac}U \cap Q^{\perp}, {}^{\perp}(\tau U) \cap Q^{\perp}\} = \{\mathsf{Fac}U, {}^{\perp}(\tau U) \cap Q^{\perp}\}$, onde $\mathsf{Fac}U \cap Q^{\perp} = \mathsf{Fac}U$ pois como $U \in Q^{\perp}$ (pela definição de par τ-rígido) segue que $\mathsf{Fac}U \subset Q^{\perp}$.

□

Seja A a álgebra cujo quiver ordinário Q_A é dado por $1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$. Vimos no Exemplo 4.18 que $(1, P_2 \oplus P_3)$ e $(1 \oplus {}^{2}_{1}, P_3)$ são dois pares de suporte τ-inclinante que estão conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$. Com isso vemos que $1 \oplus {}^{2}_{1} > 1$, pois $\mathsf{Fac}\,(1) \subsetneq \mathsf{Fac}\,(1 \oplus {}^{2}_{1})$. A próxima proposição mostra que isto sempre ocorre, i.e., se dois pares de suporte τ-inclinante estão conectados em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ então $T > T'$ ou $T' > T$.

Proposição 4.29. Sejam (T, P) e (T', P') dois pares de suporte τ-inclinante conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$. Então $T > T'$ ou $T < T'$.

Demonstração. Como (T, P) e (T', P') são dois pares de suporte τ-inclinante conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$, existe um par de suporte τ-inclinante quase completo (U, Q) que é somando direto comum de ambos. Pelo lema anterior temos que $\{\mathsf{Fac}T, \mathsf{Fac}T'\} = \{\mathsf{Fac}U, {}^{\perp}(\tau U) \cap Q^{\perp}\}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\mathsf{Fac}T = \mathsf{Fac}U$ e $\mathsf{Fac}T' = {}^{\perp}(\tau U) \cap Q^{\perp}$. Pela Proposição 3.28, vimos que se $\mathcal{T}$ é uma classe de torção funtorialmente finita e U é um módulo τ-rígido então $U \in \mathsf{add}P(\mathcal{T})$ se, e somente se, $\mathsf{Fac}U \subset \mathcal{T} \subset {}^{\perp}(\tau U)$. Em particular considere $\mathcal{T} = \mathsf{Fac}U$. Logo temos que

$\mathsf{Fac}U \subset {}^{\perp}(\tau U)$. Além disso, como $\mathsf{Hom}_A(Q, U) = 0$, pois (U, Q) é um par τ-rígido, temos que $\mathsf{Hom}_A(Q, \mathsf{Fac}U) = 0$ e então $\mathsf{Fac}U \subset Q^{\perp}$. Portanto, $\mathsf{Fac}U \subsetneq {}^{\perp}(\tau U) \cap Q^{\perp}$, donde

$$\mathsf{Fac}T = \mathsf{Fac}U \subsetneq {}^{\perp}(\tau U) \cap Q^{\perp} = \mathsf{Fac}T'.$$

Portanto temos que $T' > T$. Analogamente, se $\mathsf{Fac}T' = \mathsf{Fac}U$ e $\mathsf{Fac}T = {}^{\perp}(\tau U) \cap Q^{\perp}$ temos que $T > T'$. □

De acordo com essa proposição, sempre temos que $T > T'$ ou $T' > T$ para quaisquer dois pares (T, P) e (T', P') de suporte τ-inclinante conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$. Neste caso:

(1) se $T > T'$, dizemos que T' é **mutação à esquerda** de T;

(2) se $T < T'$, dizemos que T' é **mutação à direita** de T.

No caso da álgebra $A = kQ_A$ onde Q_A é o quiver $1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$ que vimos no Exemplo 4.18, que $1 \oplus {}^{2}_{1} > 1$, ou seja, $1 \oplus {}^{2}_{1}$ é mutação à direita de 1 ou 1 é mutação à esquerda de $1 \oplus {}^{2}_{1}$. Também temos que $2 \oplus {}^{3}_{2}$ é mutação à direita de $3 \oplus {}^{3}_{2}$, ou equivalentemente, $3 \oplus {}^{3}_{2}$ é mutação à esquerda de $2 \oplus {}^{3}_{2}$. Além disso, essas noções de mutação à esquerda e à direita são compatíveis como evidencia a proposição a seguir.

Proposição 4.30. Sejam T e U dois módulos de suporte τ-inclinantes sobre A. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) U é mutação à esquerda de T;

(2) T é mutação à direita de U;

(3) $T > U$ e não existe $V \in \mathsf{s}\tau\text{-tilt}A$ tal que $T > V > U$.

Portanto concluímos que dois pares de suporte τ-inclinante (T, P) e (T', P') estão conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ se, e somente se, T' é mutação à esquerda de T ou T' é mutação à direita de T, de forma que não temos ciclos de tamanho 3 em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ pois neste caso o item **(3)** da proposição anterior não valeria (conseguiríamos encontrar uma ordem entre os pares de suporte τ-inclinante de forma que suas primeiras entradas satisfizessem a condição $T > V > U$).

Desta forma conseguimos caracterizar os módulos envolvidos nas mutações à esquerda e à direita da seguinte maneira:

Proposição 4.31. Sejam (T, P) e (T', P') dois pares de suporte τ-inclinante conectados por uma aresta. Se $T = X \oplus U$, onde U é um módulo τ-rígido e X é um módulo indecomponível são equivalentes:

(1) T' é mutação à esquerda de T;

(2) $T > T'$;

(3) $X \notin \text{Fac}U$;

(4) ${}^{\perp}(\tau X) \supset {}^{\perp}(\tau U)$.

Demonstração.

$(1) \Leftrightarrow (2)$**:** É a definição de mutação à esquerda.

$(3) \Leftrightarrow (4)$**:** Pela Proposição 4.14 temos que ou $X \in \text{Fac}U$ ou ${}^{\perp}(\tau X) \supset {}^{\perp}(\tau U)$ é válida, donde segue a equivalência.

$(2) \Rightarrow (3)$**:** Se $T > T'$, então pela definição da ordem parcial em $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ temos que $\text{Fac}T \supsetneq \text{Fac}T'$. Logo $\text{Fac}(X \oplus U) = \text{Fac}T \supsetneq \text{Fac}T' = \text{Fac}U$. Portanto segue que $X \notin \text{Fac}T' = \text{Fac}U$, pois teríamos que $\text{Fac}T = \text{Fac}U = \text{Fac}(X \oplus U) = \text{Fac}T'$ se $X \in \text{Fac}T'$, o que contradiz a hipótese de que $\text{Fac}T \supsetneq \text{Fac}T'$.

$(3) \Rightarrow (2)$**:** Supondo que $X \notin \text{Fac}U$, temos que $\text{Fac}(X \oplus U) \supsetneq \text{Fac}U$ e logo segue que $\text{Fac}T \supsetneq \text{Fac}T'$. Logo $T > T'$.

□

Proposição 4.32. Sejam (T, P) e (T', P') dois pares de suporte τ-inclinante conectados por uma aresta. Se $T = X \oplus U$, onde U é um módulo τ-rígido e X é um módulo indecomponível são equivalentes:

(1) T' é mutação à direita de T;

(2) $T < T'$;

(3) $X \in \text{Fac}U$;

(4) ${}^{\perp}(\tau X) \not\supset {}^{\perp}(\tau U)$.

Demonstração. A demonstração deste fato é análoga à demonstração da proposição anterior. □

4.4 COMPLEMENTOS E SUPORTES DE PARES

Nesta seção iremos observar alguns casos particulares de complementos de pares τ-rígidos através do suporte dos pares de suporte τ-inclinantes. Estamos interessados aqui em obter algumas propriedades que facilitem a construção do grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}\, A)$.

Lema 4.33. Sejam A uma álgebra e $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que não exista um laço no vértice m do quiver Q_A. Seja $J = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{m\}$. Então existe um único A-módulo indecomponível M tal que $\mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{j\in J} P_j, M\right) = 0$.

Demonstração. Vimos no Lema 4.4 que $\mathrm{Hom}_A(P_j, M) = 0$ se, e somente se, $j \notin \mathrm{Supp}(M)$. Portanto

$$\mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{j\in J} P_j, M\right) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_A(P_j, M) = 0,\ \forall j \in J \Leftrightarrow j \notin \mathrm{Supp}(M),\ \forall j \in J.$$

Logo $\mathrm{Supp}(M) \subset \{m\}$. Como $\mathrm{Supp}(M)$ possui apenas um elemento, M é indecomponível e não existe laço em M segue que $M = S_m$, i.e., M é o m-ésimo módulo simples. □

Desta forma, sempre que um quiver não possui laços é possível mostrar que os únicos módulos que satisfazem a condição $\mathrm{Hom}_A\left(\bigoplus_{j\in J} P_j, M\right) = 0$ são os módulos simples. Se retirarmos a hipótese de que não exista laço no vértice m quiver Q_A, a única conclusão possível é de que $\mathrm{Supp}(M) = \{m\}$.

Proposição 4.34. Sejam A uma álgebra e $P = \bigoplus_{j\in J} e_j A$ um módulo projetivo, onde $J = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{m\}$ para algum $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tais que não existe um laço em m no quiver ordinário Q_A. Então os complementos do par $(0, P)$ são os pares $(0, A)$ e (S_m, P).

Demonstração. De fato, $(0, A)$ é um complemento de $(0, P)$ pois

$$A = \bigoplus_{j=1}^{n} e_j A = \left(\bigoplus_{j\in J} e_j A\right) \oplus e_m A = P \oplus e_m A.$$

Suponhamos que (M, Q) seja um complemento de $(0, P)$, com $M \neq 0$. Como $M \neq 0$ temos que $|M| \geqslant 1$ e do fato de P ser somando de Q temos que $|Q| \geqslant |P| = n - 1$. Então $|M| = 1$ e $|Q| = n - 1$, pois $|M| + |Q| = n$. Logo $Q = P$ e (M, P) é τ-rígido, donde $\mathrm{Hom}_A(P, M) = 0$. No lema anterior vimos que $M = S_m$. Portanto o par (S_m, P) é o outro complemento de $(0, P)$. □

Se retirarmos a hipótese de que não exista laço em m, a proposição acima não necessariamente é válida, pois é possível encontrar uma álgebra A que possui um módulo simples que não seja τ-rígido. Porém, utilizando a mesma demonstração anterior, pode-se mostrar que existe um único módulo básico M cujo suporte satisfaça a condição $\mathsf{Supp}(M) = \{m\}$ tal que (M, P) seja par de suporte τ-inclinante. Obviamente, o outro complemento continua sendo $(0, A)$.

Corolário 4.35. Se A é uma álgebra que não possui laço no vértice $m \in Q_A$ então o m-ésimo módulo simples S_m é τ-rígido.

Demonstração. De fato, vimos na proposição anterior que as únicas possibilidades de complementos do par $(0, P)$ são os pares $(0, A)$ e (S_m, P), onde $P = \bigoplus_{j \in J} e_j A$ e $J = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{m\}$ para um $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixado. Portanto, S_m é τ-rígido, pois é a primeira entrada de um par τ-rígido. $\square$

Podemos também caracterizar como os suportes de um par de suporte τ-inclinante se relacionam com o suporte do par de suporte τ-inclinante quase completo que é seu somando. Neste sentido temos a seguinte proposição.

Proposição 4.36. Seja (N, Q) um par de suporte τ-inclinante quase completo básico, com complemento básico (M, P).

(1) Se $\#(\mathsf{Supp}(N) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)) = n$ então $\mathsf{Supp}(M) = \mathsf{Supp}(N)$, $P = Q$ e existe X indecomponível tal que $M = N \oplus X$.

(2) Se $\#(\mathsf{Supp}(N) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)) = n - 1$ então existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que ou $\mathsf{Supp}(M) = \mathsf{Supp}(N) \cup \{j\}$ e $P = Q$ ou $M = N$ e $P = Q \oplus e_j A$.

Demonstração. Observe que de acordo com a Proposição 4.24, os itens **(1)** e **(2)** contemplam todas as possibilidades para a cardinalidade de $\mathsf{Supp}(N) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)$.

(1) Pelo Lema 4.21, temos que $\mathsf{Supp}(N) \cap \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q) = \varnothing$. Por hipótese também temos que $\#(\mathsf{Supp}(N) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)) = n$. Isto significa que

$$\#(\mathsf{Supp}(M) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P)) = \#(\mathsf{Supp}(N) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)) = n.$$

Porém como $\#\mathsf{Supp}(N) \subset \#\mathsf{Supp}(M)$ e também $\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q) \subset \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P)$ tem-se que $\mathsf{Supp}(N) = \mathsf{Supp}(M)$ e $\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q) = \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P)$. Como $\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P)$ e $\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)$ coincidem temos que $P = Q$. Além disso, temos que N é somando de M. Porém, como $|N| + |Q| = |A| - 1$ e $|M| + |P| = |A|$, pois (N, Q) é um par de suporte τ-inclinante quase completo e (M, P) é um par de suporte τ-inclinante, logo temos que $|M| = |N| + 1$ e portanto existe $X \in \mathsf{mod}\, A$ indecomponível tal que $M = N \oplus X$.

(2) Suponhamos que $\#(\mathsf{Supp}(N) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)) = n-1$. Então para algum índice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ temos que $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus (\mathsf{Supp}(N) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)) = \{j\}$. E como temos as condições $\mathsf{Supp}(M) \supset \mathsf{Supp}(N)$, $\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P) \supset \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)$ e $\mathsf{Supp}(M) \cup \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P) = \{1, 2, \ldots, n\}$, temos que ou $\mathsf{Supp}(M) = \mathsf{Supp}(N) \cup \{j\}$ ou $\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P) = \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q) \cup \{j\}$. Se $\mathsf{Supp}(M) = \mathsf{Supp}(N) \cup \{j\}$ temos que $\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P) \supset \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q)$ e logo $P = Q$. Observe que neste caso também temos que existe X indecomponível tal que $M = N \oplus X$. Por outro lado, se $\mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, P) = \mathsf{Supp}(\mathsf{top}\, Q) \cup \{j\}$ então $P = Q \oplus e_j A$ e $M = N$.

□

Podemos usar a proposição anterior para obter relações entre a quantidade de somandos da primeira entrada de dois pares de suporte τ-inclinante que estejam conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\, A)$.

Corolário 4.37. Sejam (M, P) e (M', P') pares de suporte τ-inclinante conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\, A)$. Então $\Big|\#(\mathsf{Supp}(M)) - \#(\mathsf{Supp}(M'))\Big| \leqslant 1$.

Demonstração. Se (M, P) e (M', P') estão conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\, A)$, então existe um par de suporte τ-inclinante (N, Q) quase completo que é somando de ambos. Logo, pela proposição anterior temos que

$$\#(\mathsf{Supp}(M)), \#(\mathsf{Supp}(M')) \in \{\mathsf{Supp}(N), \mathsf{Supp}(N) + 1\}.$$

Portanto $\Big|\#(\mathsf{Supp}(M)) - \#(\mathsf{Supp}(M'))\Big| \leqslant 1$. □

Em particular, este resultado pode ser observado com relação a quantidade de somandos de M e M'.

Corolário 4.38. Nas condições do corolário anterior temos que $\Big||M| - |M'|\Big| \leqslant 1$.

Demonstração. De fato, se (M, P) e (M', P') sao pares de suporte τ-inclinante e temos idempotentes $e, e' \in A$ tais que $\mathsf{add}\, P = \mathsf{add}\, eA$ e $\mathsf{add}\, P' = \mathsf{add}\, e'A$ então M e M' são módulos τ-inclinantes sobre $A/\langle e\rangle$ e $A/\langle e'\rangle$, respectivamente. Logo $\#(\mathsf{Supp}(M)) = |M|$ e $\#(\mathsf{Supp}(M')) = |M'|$ donde $\Big||M| - |M'|\Big| = \Big|\#(\mathsf{Supp}(M)) - \#(\mathsf{Supp}(M'))\Big| \leqslant 1$. □

Desta forma o corolário anterior induz uma organização do grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-}\mathsf{tilt}\, A)$. De fato, podemos organizar este grafo por camadas onde:

- a camada superior possui o único par de suporte τ-inclinante de tipo 0: $(0, A)$;
- a camada imediatamente inferior possui os pares de suporte τ-inclinantes de tipo 1, ou seja, pares de suporte τ-inclinante da forma (M, P) com $|M| = 1$;

- a camada imediatamente inferior possui os pares de suporte τ-inclinantes de tipo 2, ou seja, pares de suporte τ-inclinante da forma (M, P) com $|M| = 2$;

$\vdots$

- a última camada possui os pares de suporte τ-inclinante de tipo $|A|$, i.e., os pares identificados com os módulos τ-inclinantes.

Sendo assim, concluímos através deste último corolário que só existem arestas entre duas camadas adjacentes no grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$, e claro, arestas cujos extremos estejam em uma mesma camada. O exemplo a seguir mostra como essas camadas podem ser observadas.

Exemplo 4.39. Seja A a álgebra cujo quiver ordinário é dado por $Q_A: \ 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3.$ Vimos no Exemplo 4.18 que o grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ desta álgebra é dado por:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & (0, P_1 \oplus P_2 \oplus P_3) \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & & \\
 & (1, P_2 \oplus P_3) \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] & (2, P_1 \oplus P_3) \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & (3, P_1 \oplus P_2) \arrow[dlll, no head] \arrow[dr, no head] & \\
(1 \oplus 3, P_2) \arrow[d, no head] & (1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, P_3) \arrow[r, no head] \arrow[d, no head] & (2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, P_3) \arrow[d, no head] & (2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, P_1) \arrow[r, no head] \arrow[d, no head] & (3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, P_1) \arrow[d, no head] \\
\left(1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, 0\right) \arrow[r, no head] \arrow[rrrr, no head, bend right] & \left(1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, 0\right) \arrow[r, no head] & \left(2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, 0\right) \arrow[r, no head] & \left(2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, 0\right) \arrow[r, no head] & \left(3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, 0\right).
\end{tikzcd}$$

Observe que a camada superior desse grafo é formada pelo par de suporte τ-inclinante $(0, P_1 \oplus P_2 \oplus P_3)$; a segunda camada é formada pelos pares que estão na segunda linha; a terceira camada é formada pelos pares que estão na terceira linha; e a última camada é formada pelos pares $(M, 0)$ onde M é um módulo τ-inclinante.

Exemplo 4.40. Seja A a álgebra de Kronecker cujo quiver ordinário é dado por

$$Q_A: \ 1 \leftleftarrows 2.$$

Vimos no Exemplo 2.24 que esta álgebra possui infinitos módulos τ-inclinantes e portanto infinitos módulos de suporte τ-inclinantes. Desta forma o grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ desta álgebra possui infinitos vértices. De fato, o grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ é dado por

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & (0, P_1 \oplus P_2) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & & \\
 & & & (1, P_2) \arrow[d, dash] & & (2, P_1) \arrow[d, dash] & & & \\
\cdots \arrow[r, dash] & \left(\substack{222\\1111} \oplus \substack{22\\111}, 0\right) \arrow[r, dash] & \left(\substack{2\\11} \oplus \substack{22\\111}, 0\right) \arrow[r, dash] & \left(\substack{2\\11} \oplus 1, 0\right) & & \left(\substack{22\\1} \oplus 2, 0\right) \arrow[r, dash] & \left(\substack{222\\11} \oplus \substack{22\\1}, 0\right) \arrow[r, dash] & \left(\substack{222\\11} \oplus \substack{2222\\111}, 0\right) \arrow[r, dash] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Neste grafo a camada superior de $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ contém somente o par de suporte τ-inclinante $(0, P_1 \oplus P_2)$. A camada imediamente inferior possui os pares de suporte τ-inclinante $(1, P_2)$ e $(2, P_1)$. Por fim, todos os demais pares de suporte τ-inclinante pertencem a camada mais inferior (observe que estes aparecem em quantidade infinita), sendo que dois deles estão conectados a um vértice da camada que contém todos os pares de suporte τ-inclinante e todos os demais pares da camada inferior estão conectados apenas entre si.

4.5 O QUIVER $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$

Nas seções anteriores definimos o grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ e vimos diversas propriedades acerca deste grafo. Na presente seção pretendemos ir um pouco mais além: queremos associar ao grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ um quiver que guarde mais informações do que o grafo original, sem que haja perda das mesmas. Nesse sentido definimos o quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ dos módulos de suporte τ-inclinante como sendo o quiver onde:

- o conjunto de vértices é o conjunto $\text{s}\tau\text{-tilt}A$;
- para dois módulos de suporte τ-inclinante M e N existe uma flecha $M \longrightarrow N$ em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ se, e somente se, $M > N$ e não existe módulo de suporte τ-inclinante V tal que $M > V > N$.

O quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ representa a ordem parcial $>$ definida em $\text{s}\tau\text{-tilt}A$. De fato, se $M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_r$ é um caminho em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt})$ então temos que $M_0 > M_1 > M_2 > \cdots > M_r$. Por outro lado, se M e N são módulos τ-inclinantes, escolhemos uma sequência $M = M_0 > M_1 > M_2 > \cdots > M_r = N$ para a qual não exista $V \in \text{s}\tau\text{-tilt}A$ tal que $M_i > V > M_{i+1}$ com $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ então temos uma sequência de flechas:

$$M = M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_r = N.$$

Com isto vemos que $M > N$ em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ se, e somente se, existe um caminho de M para N em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$. Desta forma podemos mostrar que o quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ está relacionado com o grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ da seguinte forma:

Proposição 4.41. O grafo subjacente de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ é $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$.

Demonstração. De fato, a cada módulo de suporte τ-inclinante podemos associar um par de suporte τ-inclinante através da bijeção dada por $\text{s}\tau\text{-tilt}A \ni M \leftrightarrow (M, P) \in \mathbb{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$. Portanto os conjuntos de vértices de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ e $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ coincidem (estão identificados). Por outro lado, se dois vértices de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ estão conectados por uma flecha $M \longrightarrow N$, então $\text{Fac}M \supsetneq \text{Fac}N$, e pela observação anterior, não existe M' tal que $M > M' > N$, e logo existe um módulo U que é somando de ambos, donde pode-se concluir que existem P e Q projetivos tais que (M, P) e (N, Q) são complementos de um par de suporte τ-inclinante quase completo $(U, \widetilde{P})$ que é somando direto de ambos. Então existe uma aresta entre (M, P) e (N, Q). Por outro lado, se (M, P) e (N, Q) estão conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ então existe um par de suporte τ-inclinante que é somando de ambos: (U, R). Vimos na Proposição 4.29 que ou $M > N$ ou $N > M$. Pela Proposição 4.30, não existe $V \in \text{s}\tau\text{-tilt}A$ tal que $M > V > N$ ou $N > V > M$. Logo existe uma flecha entre M e N, pois do contrário, haveria $V \in \text{s}\tau\text{-tilt}A$ satisfazendo $M > V > N$ ou $N > V > M$. Logo o caminho entre M e N possui apenas uma flecha: ou $M \longrightarrow N$ ou $N \longrightarrow M$. □

Além disso, podemos ver que existe uma relação entre o quiver que possui como vértices os módulos τ-inclinantes de A e e o quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$.

Proposição 4.42. O conjunto dos pares de suporte τ-inclinante da forma $(T, 0)$, onde T é um módulo τ-inclinante, formam um subgrafo do grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$. Equivalentemente, os módulos τ-inclinantes formam um subquiver de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$.

Demonstração. Como temos a inclusão $\tau\text{-tilt}A \subset \text{s}\tau\text{-tilt}A$ de subcategorias plenas de $\text{mod}A$, basta tomar o subquiver pleno de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ gerado pelo conjunto de vértices $\tau\text{-tilt}A$. Do fato de que $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ é o grafo subjacente de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$, segue que o subgrafo subjacente do quiver gerado pelos módulos τ-inclinantes é o grafo que possui todos os pares da forma $(T, 0)$, com T um módulo τ-inclinante. Portanto este grafo é um subgrafo de $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$. Observe que a orientação das arestas é a mesma pois a ordem parcial definida em ambos os conjuntos é a mesma. □

Nos exemplos a seguir vemos como estas propriedades se comportam.

Exemplo 4.43. Seja A a álgebra cujo quiver ordinário é dado por $Q_A: \; 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3.$ Vimos no Exemplo 4.18 o grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ desta álgebra. Então o quiver de suporte

τ-inclinante desta álgebra, $Q(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$, é dado por

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & 1 \arrow[urr] & & 2 \arrow[u] & & 3 \arrow[ull] & & \\
1 \oplus 3 \arrow[urr] \arrow[urrrrrr] & & 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[rr] & & 2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] & & 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ull] \arrow[rr] & & 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ull] \\
1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[rrrrrrrr, bend right] & & 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[ll] \arrow[rr] & & 2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[rr] & & 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[rr] & & 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Observe aqui que as flechas em $Q(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ sempre apontam das camadas mais inferiores para as mais superiores, uma vez que vimos que se T e T' estão conectados em $Q(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ (ou em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$) então $T > T'$ ou $T' > T$. Desta forma se T é um módulo de uma determinada camada em $Q(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ (usando a mesma ideia de camadas que havíamos definido para o grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$) conectado a um módulo U de uma camada inferior temos que $\mathsf{Fac}T \subsetneq \mathsf{Fac}U$, uma vez que U tem mais somandos que T. Observe também que existem diversas flechas entre módulos da mesma camada, como por exemplo a flecha que une os módulos $2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ e $3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$.

Exemplo 4.44. Seja A a álgebra de Kronecker cujo quiver ordinário é dado por

$$Q_A: \ 1 \leftleftarrows 2.$$

Vimos no Exemplo 4.40 como é o grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ desta álgebra. Aqui vemos que o quiver $Q(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ de A é dado por:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
1 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ul] \\
\substack{2\\11}\oplus 1 \arrow[u] \arrow[d] & & \substack{22\\1}\oplus 2 \arrow[u] \\
\substack{2\\11}\oplus\substack{22\\111} \arrow[d] & & \substack{222\\11}\oplus\substack{22\\1} \arrow[u] \\
\substack{222\\1111}\oplus\substack{22\\111} \arrow[d] & & \substack{222\\11}\oplus\substack{2222\\111} \arrow[u] \\
\vdots & & \vdots \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Observe como este quiver respeita as camadas que foram definidas no grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$, que podem ser verificadas utilizando-se, por exemplo o quiver de Auslander-Reiten da álgebra de Kronecker que é dado pelas componentés pós-projetiva e pré-injetiva:

$$\begin{tikzcd}
 & \substack{2\\1\ 1} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & \substack{2\ 2\ 2\\1\ 1\ 1\ 1} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \cdots \\
1 \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & \substack{2\ 2\\1\ 1\ 1} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & \substack{2\ 2\ 2\\1\ 1} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & 2. \\
\cdots & & \substack{2\ 2\ 2\ 2\\1\ 1\ 1} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & \substack{2\ 2\\1} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] &
\end{tikzcd}$$

5 O GRAFO $\mathcal{P}$(sτ-tilt$A$) E EPIMORFISMOS DE ÁLGEBRAS

Neste capítulo estudaremos como se comportam os módulos de suporte τ-inclinante com relação a epimorfismos de álgebras. Estamos interessados principalmente em epimorfismos da forma $\Lambda \longrightarrow \Lambda/\langle e \rangle$, onde $e \in \Lambda$ é um idempotente. Começaremos o capítulo analisando a relação entre a finitude do grafo $\mathcal{P}$(sτ-tilt$A$) e o tipo de representação da álgebra A. Na sequência vamos relacionar os grafos $\mathcal{P}$(sτ-tiltΛ) e $\mathcal{P}$(sτ-tiltΓ) no caso em que $\Lambda \longrightarrow \Gamma$ é um epimorfismo de álgebras. Por fim, observaremos o que ocorre com os grafos dos pares de suporte τ-inclinante quando construímos o produto fibrado de epimorfismos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$. Em todo o capítulo, P_j^Λ denota o j-ésimo módulo projetivo indecomponível sobre a álgebra Λ e sempre que nos referirmos a um módulo, estaremos falando de um módulo básico à direita finitamente gerado.

5.1 ÁLGEBRAS DE TIPO FINITO E O GRAFO $\mathcal{P}$(sτ-tilt$A$)

Dizemos que uma álgebra A é de tipo de representação finito, ou simplesmente álgebra de tipo finito, se a quantidade de classes de isomorfismo de A-módulos indecomponíveis é finita, o que é equivalente a dizer que o quiver de Auslander-Reiten Γ(mod$A$) é finito.

Proposição 5.1. Seja A uma álgebra. Então existe uma quantidade finita de A-módulos τ-rígidos básicos se, e somente se, $\mathcal{P}$(sτ-tilt$A$) e $\mathcal{Q}$(sτ-tilt$A$) são finitos.

Demonstração. De fato, suponhamos que A possua uma quantidade finita de módulos τ-rígidos. Vamos denotar por r esta quantidade. Seja M um módulo de suporte τ-inclinante básico com $m \leqslant |A|$ somandos. Então os somandos de M podem ser escolhidos de $\binom{r}{m} = \frac{r!}{m!(r-m)!}$ maneiras, uma vez que todos os seus somandos diretos indecomponíveis são distintos. Desta forma temos que existem no máximo $\binom{r}{m}$ módulos de suporte τ-inclinante com m somandos. Além disso, como todo módulo de suporte τ-inclinante é um módulo τ-rígido, temos pelo Corolário 3.20 que $|M| \leqslant |A|$ para qualquer A-módulo de suporte τ-inclinante M. Desta forma temos que a quantidade de módulos de suporte τ-inclinante satisfaz

$$\#(\text{s}\tau\text{-tilt}A) \leqslant \sum_{m=0}^{|A|} \binom{r}{m}.$$

Como existe uma bijeção entre o conjunto dos módulos de suporte τ-inclinante e os vértices de $\mathcal{Q}$(sτ-tilt$A$) concluímos que $\mathcal{Q}$(sτ-tilt$A$) e $\mathcal{P}$(sτ-tilt$A$) são finitos.

Suponhamos que $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ seja um grafo finito. Então existem finitos módulos de suporte τ-inclinante, pois existe uma bijeção entre o conjunto dos módulos de suporte τ-inclinante e o conjunto de vértices de $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$. Digamos que existam no máximo ℓ pares de suporte τ-inclinante básicos, então existem no máximo ℓ módulos τ-inclinantes básicos (que são os módulos identificados aos pares τ-inclinantes da forma $(M, 0)$). O complemento de Bongartz do Teorema 3.29 mostra que qualquer módulo τ-rígido pode ser completado a um módulo τ-inclinante, e logo todos os módulos τ-rígidos aparecem como somando direto de algum dos módulos τ-inclinantes. Portanto existem no máximo $\ell \cdot |A|$ módulos τ-rígidos pois se $\mathcal{R}$ denota a quantidade de módulos τ-rígidos básicos indecomponíveis temos que

$$\mathcal{R} \leqslant \sum_{M \in \tau\text{-tilt}A} |M| = \ell \cdot |A|,$$

e logo existem finitos módulos τ-rígidos básicos. □

Em particular podemos ver que uma álgebra de tipo de representação finito possui uma quantidade finita de módulos de suporte τ-inclinante.

Exemplo 5.2. Seja A a álgebra cujo quiver ordinário é $Q_A : \; 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3.$ Vimos no Exemplo 4.43 que o quiver $Q(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ é finito e contém exatamente 14 vértices. Logo a quantidade de módulos τ-rígidos básicos nessa álgebra é finita. A saber, os módulos τ-rígidos básicos indecomponíveis são: os módulos $1, 2, 3,$ $\substack{2\\1}$, $\substack{3\\2}$ e $\substack{3\\2\\1}$. Observe que o número de módulos de suporte τ-inclinante é bem menor que a cota superior que usamos na demonstração:

$$\#(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A) = 14 \leqslant \sum_{m=0}^{3} \binom{6}{m} = \binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 1 + 6 + 15 + 20 = 42.$$

Exemplo 5.3. Vimos no Exemplo 4.44 que o quiver $Q(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ da álgebra de Kronecker, que é dada pelo quiver ordinário $Q_A : \; 1 \leftleftarrows 2,$ é infinito. Então neste caso o resultado da proposição anterior é imediato de ser observado, uma vez que cada vértice do quiver $Q(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$ está associado a um módulo de suporte τ-inclinante, que por sua vez é um módulo τ-rígido.

Também podemos calcular a quantidade de módulos de suporte τ-inclinante para uma álgebra de tipo de representação finito apenas sabendo a quantidade de pares de suporte τ-inclinante quase completos, de acordo com o seguinte teorema:

Teorema 5.4. Seja A uma álgebra. Se A é de tipo de representação finito e s é a quantidade de pares de suporte τ-inclinante quase completos então $\#(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A) \cdot |A| = 2s$.

Demonstração. Observe que o número s está bem definido, uma vez que a quantidade de pares de suporte τ-inclinante quase completos é finita pois a quantidade de (classes de isomorfismo de) A-módulos indecomponíveis é finita. Vimos que $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ é um n-grafo regular, logo $v \cdot n = 2a$ onde v é a quantidade de vértices, a é a quantidade de arestas e n é a quantidade de arestas ligadas a cada vértice. Porém $v = \#(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$, pois cada vértice representa um módulo de suporte τ-inclinante, que possui um par de suporte τ-inclinante associado, e além disso $n = |A|$. Cada aresta representa um par de pares de suporte τ-inclinante que possui um par de suporte τ-inclinante quase completo comum como somando direto, i.e., a cada par de suporte τ-inclinante quase completo está biunivocamente associado a uma aresta de $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$. Portanto $a = s$, donde

$$\#(\text{s}\tau\text{-tilt}A) \cdot |A| = 2s.$$

$\square$

Logo, sempre que A é uma álgebra de tipo finito, as quantidades de módulos de suporte τ-inclinantes e de pares de suporte τ-inclinante quase completos está relacionada.

Exemplo 5.5. Vamos ver como o Teorema 5.4 se comporta no caso da álgebra de tipo de representação finito A cujo quiver ordinário é $1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$. Sabemos que se (M, P) é um par de suporte τ-inclinante quase completo então $|M|+|P| = |A|-1 = 2$, logo M é um módulo τ-rígido de tipo 0, 1 ou 2.

(0) O único módulo τ-rígido de tipo 0 é o módulo nulo. Desta forma os pares de suporte τ-inclinantes quase completos (e que portanto são pares τ-rígidos de tipo 0) são os pares: $(0, P_1 \oplus P_2)$, $(0, P_1 \oplus P_3)$ e $(0, P_2 \oplus P_3)$.

(1) Os módulos τ-rígidos de tipo 1 são os módulos 1, 2, 3, $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ e $\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$. Portanto os pares de suporte τ-inclinante quase completos de tipo 1 são os pares: $(1, P_2)$, $(1, P_3)$, $(2, P_1)$, $(2, P_3)$, $(3, P_1)$, $(3, P_2)$, $(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, P_3)$ e $(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, P_1)$.

(2) Os módulos τ-rígidos de tipo 2 são os módulos $1 \oplus 3$; $1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$; $1 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$; $2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$; $2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$; $2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$; $3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$; $3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$; $\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$; $\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$. Obviamente temos os seguintes pares de suporte τ-inclinante de tipo 2: $(1 \oplus 3, 0)$; $(1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 0)$; $\left(1 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, 0\right)$; $(2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}, 0)$; $(2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, 0)$; $\left(2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, 0\right)$; $(3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}, 0)$; $\left(3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, 0\right)$; $\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, 0\right)$; $\left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, 0\right)$.

Portanto temos 21 pares de suporte τ-inclinante quase completos e a partir do teorema anterior podemos concluir que quantidade de A-módulos de suporte τ-inclinante é dada por

$$\#(\text{s}\tau\text{-tilt}A) = \frac{2s}{|A|} = \frac{2 \cdot 21}{3} = 14,$$

como já havíamos visto no Exemplo 4.43.

Observe que o Teorema 5.4 permite calcular a quantidade de módulos τ-inclinantes de uma álgebra de tipo finito apenas conhecendo os módulos de suporte τ-inclinante próprios e os pares de suporte τ-inclinante quase completos. De fato, vimos anteriormente que $\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A = \tau\text{-tilt}A \coprod \mathsf{ps}\tau\text{-tilt}A$, donde temos que

$$\begin{aligned} \#(\tau\text{-tilt}A) &= \#(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A) - \#(\mathsf{ps}\tau\text{-tilt}A) \\ &= \frac{2s}{|A|} - \#(\mathsf{ps}\tau\text{-tilt}A). \end{aligned}$$

No exemplo anterior vimos que A possui 14 módulos de suporte τ-inclinante, sendo que destes apenas 9 módulos são de suporte τ-inclinante próprio (0, 1, 2, 3, $1 \oplus 3$, $1 \oplus {\scriptstyle\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}}$, $2 \oplus {\scriptstyle\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}}$, $2 \oplus {\scriptstyle\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}}$, $3 \oplus {\scriptstyle\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}}$) logo podemos ver que restam 5 módulos a serem módulos τ-inclinantes.

5.2 EPIMORFISMOS DE ÁLGEBRAS E O GRAFO $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A)$

Nesta seção queremos observar algumas relações obtidas entre os pares de suporte τ-inclinante de duas álgebras Λ e Γ para os quais existe um epimorfismo $\Lambda \twoheadrightarrow \Gamma$ onde Q_Γ é um subquiver pleno de Q_Λ. Desta forma enxergaremos Γ como um quociente da forma $\Gamma = \Lambda/\langle e\rangle$ para algum idempotente $e \in \Lambda$. Por conveniência denotaremos a partir de agora a identidade da álgebra Λ por e_Λ. Se $\Gamma = \Lambda/\langle e\rangle$ denotaremos por e'_Λ o idempotente dado por $e'_\Lambda = e_\Lambda - e_\Gamma$.

Observe que se $\Lambda \twoheadrightarrow \Gamma$ é um epimorfismo de álgebras como dito acima, pela Observação 1.4 temos que $\mathsf{mod}\Gamma \subset \mathsf{mod}\Lambda$. Desta forma todo Γ-módulo será também um Λ-módulo. A próxima proposição mostra que é possível associar a cada par de suporte τ-inclinante sobre Γ um novo par de suporte τ-inclinante sobre Λ.

Lema 5.6. Sejam Γ e Λ álgebras para as quais existe um epimorfismo de álgebras $\Lambda \longrightarrow \Gamma$ e Q_Γ é um subquiver pleno de Q_Λ. Se $\left(M, \bigoplus_{j=1}^{p} P^\Gamma_{i_j}\right)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre Γ então $\left(M, e'_\Lambda\Lambda \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{p} P^\Lambda_{i_j}\right)\right)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre Λ.

Demonstração. Se $\left(M, \bigoplus_{j=1}^{p} P^\Gamma_{i_j}\right)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre Γ temos que $|M| + \left|\bigoplus_{j=1}^{p} P^\Gamma_{i_j}\right| = |\Gamma|$, M é τ-rígido sobre Γ e $\mathsf{Hom}_\Gamma(P^\Gamma_{i_j}, M) = 0$ para $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Logo $|M|+p=|\Gamma|$, M é τ-rígido sobre Λ pois $\Gamma=\Lambda/\langle e'_\Lambda\rangle$ e $i_j\notin$ Supp(M). Portanto

$$\begin{aligned}|M|+\left|e'_\Lambda\Lambda\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{p}P^{\Lambda}_{i_j}\right)\right| &= |M|+|e'_\Lambda\Lambda|+\left|\bigoplus_{j=1}^{p}P^{\Lambda}_{i_j}\right|\\ &= |M|+(|\Lambda|-|\Gamma|)+p=(|M|-|\Gamma|+p)+|\Lambda|=|\Lambda|,\end{aligned}$$

pois como $e'_\Lambda=e_\Lambda-e_\Gamma$, temos $|e'_\Lambda\Lambda|=|\Lambda|-|\Gamma|$. Além disso, $\mathrm{Hom}_\Lambda(P^{\Lambda}_{i_j},M)=0$ para $j\in\{1,2,\ldots,p\}$ e $\mathrm{Hom}_\Lambda(e'_\Lambda\Lambda,M)=0$, pois $Me'_\Lambda=0$ uma vez que M é um Γ-módulo e $e'_\Lambda=e_\Lambda-e_\Gamma$. Portanto $\left(M,e'_\Lambda\Lambda\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{p}P^{\Lambda}_{i_j}\right)\right)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre Λ. $\square$

De acordo com este lema podemos incluir o conjunto dos pares de suporte τ-inclinante sobre Γ no conjunto dos pares de suporte τ-inclinante sobre Λ, quando $\Lambda\longrightarrow\Gamma$ é um epimorfismo de álgebras e $\Gamma=\Lambda/\langle e'_\Lambda\rangle$.

Exemplo 5.7. Considere o epimorfismo de álgebras $\Lambda\longrightarrow\Gamma$ onde Λ e Γ são as álgebras dadas respectivamente pelos quivers $Q_\Gamma:\ 2\longleftarrow 3$ e $Q_\Lambda:\ 1\longleftarrow 2\longleftarrow 3$. É fácil ver que os pares de suporte τ-inclinante sobre Γ são os pares $(0,P^{\Gamma}_2\oplus P^{\Gamma}_3)$, $(2,P^{\Gamma}_3)$, $(3,P^{\Gamma}_2)$, $(2\oplus {}^{3}_{2},0)$ e $(3\oplus {}^{3}_{2},0)$. Além disso, temos que $e'_\Lambda=e_\Lambda-e_\Gamma=e_1$ e logo temos que $e'_\Lambda\Lambda=P^{\Lambda}_1$. Portanto os pares de suporte τ-inclinante sobre Λ associados pelo lema anterior são os pares $(0,P^{\Lambda}_1\oplus P^{\Lambda}_2\oplus P^{\Lambda}_3)$, $(2,P^{\Lambda}_1\oplus P^{\Lambda}_3)$, $(3,P^{\Lambda}_1\oplus P^{\Lambda}_2)$, $(2\oplus {}^{3}_{2},P^{\Lambda}_1)$ e $(3\oplus {}^{3}_{2},P^{\Lambda}_1)$. Observe que a associação obtida no lema anterior não é sobrejetora, uma vez que o par de suporte τ-inclinante sobre Λ dado por $\left(2\oplus {}^{2}_{1}\oplus {}^{3}_{\substack{2\\1}},0\right)$ não é um par obtido pela associação do lema anterior. Observe também que temos que $P^{\Gamma}_2=2$ e $P^{\Lambda}_2={}^{2}_{1}$, fato este que evidencia porque indexamos os módulos projetivos com a álgebra que está no contexto.

A função dada no lema anterior associa vértices de $\mathcal{P}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$ a vértices de $\mathcal{P}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$ quando existe um epimorfismo de álgebras $\Lambda\longrightarrow\Gamma$. O próximo lema mostra que além dessa função levar vértices em vértices, ela também leva arestas de $\mathcal{P}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$ em arestas de $\mathcal{P}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$.

Lema 5.8. Seja $\Lambda\twoheadrightarrow\Gamma$ um epimorfismo de álgebras, com Q_Γ subquiver pleno de Q_Λ. Então existe uma função $f:\mathcal{P}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)\longrightarrow\mathcal{P}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$ tal que

$$f\left(M,\bigoplus_{j=1}^{p}P^{\Gamma}_{i_j}\right)=\left(M,\bigoplus_{j=1}^{p}P^{\Lambda}_{i_j}\oplus(e_\Lambda-e_\Gamma)\Lambda\right)$$

que preserva conexidade, ou seja, a cada dois pares de suporte τ-inclinante sobre Γ conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\mathrm{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$, os pares de suporte τ-inclinante sobre Λ associados também estão conectados por uma aresta.

Demonstração. De fato, suponhamos que $\left(M, \bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^{\Gamma}\right)$ e $\left(N, \bigoplus_{t=1}^{m} P_{n_t}^{\Gamma}\right)$ estejam conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}\,\Gamma)$. Então pela definição das arestas em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}\,A)$ existe um par de suporte τ-inclinante quase completo sobre Γ, $\left(U, \bigoplus_{\ell=1}^{q} P_{s_\ell}^{\Gamma}\right)$, que é somando de ambos. Portanto, o par de Λ-módulos $\left(U, \bigoplus_{\ell=1}^{q} P_{s_\ell}^{\Lambda} \oplus (e_\Lambda - e_\Gamma)\Lambda\right)$ é um par de suporte τ-inclinante quase completo sobre Λ, pois U é um módulo τ-rígido sobre Λ (uma vez que já é τ-rígido sobre Γ), $\mathsf{Hom}_\Lambda\left(\bigoplus_{\ell=1}^{q} P_{s_\ell}^{\Lambda} \bigoplus (e_\Lambda - e_\Gamma)\Lambda, U\right) = 0$ (pois U é Γ-módulo e $\mathsf{Hom}_\Lambda\left(\bigoplus_{\ell=1}^{q} P_{s_\ell}^{\Lambda}, U\right) = \mathsf{Hom}_\Gamma\left(\bigoplus_{\ell=1}^{q} P_{s_\ell}^{\Gamma}, U\right) = 0$) e

$$\begin{aligned} |U| + \left|\bigoplus_{\ell=1}^{q} P_{s_\ell}^{\Lambda} \bigoplus (e_\Lambda - e_\Gamma)\Lambda\right| &= |U| + \left|\bigoplus_{\ell=1}^{q} P_{s_\ell}^{\Lambda}\right| + |(e_\Lambda - e_\Gamma)\Lambda| \\ &= (|\Gamma| - 1) + (|\Lambda| - |\Gamma|) = |\Lambda| - 1. \end{aligned}$$

Além disso, o par de suporte τ-inclinante quase completo $\left(U, \bigoplus_{\ell=1}^{q} P_{s_\ell}^{\Lambda} \bigoplus (e_\Lambda - e_\Gamma)\right)$ é somando dos pares de suporte τ-inclinante $\left(M, \bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^{\Lambda} \oplus (e_\Lambda - e_\Gamma)\Lambda\right) = f\left(M, \bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^{\Gamma}\right)$ e $\left(N, \bigoplus_{t=1}^{m} P_{n_t}^{\Lambda} \oplus (e_\Lambda - e_\Gamma)\Lambda\right) = f\left(N, \bigoplus_{t=1}^{m} P_{n_t}^{\Gamma}\right)$. Portanto $f\left(M, \bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^{\Gamma}\right)$ e $f\left(N, \bigoplus_{t=1}^{m} P_{n_t}^{\Gamma}\right)$ estão conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda)$. $\square$

O lema anterior mostra que f induz uma "inclusão" do grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}\,\Gamma)$ no grafo $\mathcal{P}(\mathsf{s}\tau\text{-tilt}\,\Lambda)$. Por outro lado, o próximo lema mostra uma espécie de recíproca para este fato, i.e., se (M, P) é um par de suporte τ-inclinante sobre Λ onde $(e_\Lambda - e_\Gamma)\Lambda$ é um somando de P, então necessariamente (M, P) pertence a imagem da aplicação acima.

Lema 5.9. Sejam $\Lambda \twoheadrightarrow \Gamma$ um epimorfismo de álgebras e M um Γ-módulo tal que $\left(M, \bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^{\Lambda} \oplus (e_\Lambda - e_\Gamma)\Lambda\right)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre Λ, então $\left(M, \bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^{\Gamma}\right)$ é par de suporte τ-inclinante sobre Γ.

Demonstração. Pelo Corolário 3.19, como $\Gamma = \Lambda/\langle e'_\Lambda\rangle$, temos que M é um módulo τ-rígido sobre Λ, e portanto é τ-rígido sobre Γ, uma vez que M é um Γ-módulo. Também temos que $i_j \notin \mathsf{Supp}(M)$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ (pois $\mathsf{Hom}_\Lambda(P_{i_j}^{\Lambda}, M) = 0$), e logo

$\mathrm{Hom}_\Gamma(P_{i_j}^\Gamma, M) = 0$. Por fim, temos que

$$\begin{aligned} |\Lambda| = |M| + \left|\bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^\Lambda \oplus (e_\Lambda - e_\Gamma)\Lambda\right| &= |M| + \left|\bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^\Lambda\right| + |(e_\Lambda - e_\Gamma)\Lambda| \\ &= |M| + p + |\Lambda| - |\Gamma| \\ &\Rightarrow |M| + p = |\Gamma| \end{aligned}$$

Portanto $\left(M, \bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^\Gamma\right)$ é par de suporte τ-inclinante sobre Γ. □

Desta forma a seguinte proposição é imediata.

Proposição 5.10. Se $\Lambda \longrightarrow \Gamma$ é um epimorfismo de álgebras então a função

$$f : \mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}\Gamma) \longrightarrow \mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$$

definida no lema anterior é injetora.

Em outras palavras, os resultados anteriores podem ser condensados no seguinte teorema.

Teorema 5.11. Se $\Lambda \longrightarrow \Gamma$ é um epimorfismo de álgebras então o grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$ é isomorfo a um subgrafo pleno de $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$ formado pelos pares (M, P) tais que o módulo projetivo $(e_\Lambda - e_\Gamma)\Lambda$ é somando direto de P.

Em particular, se $\Lambda \twoheadrightarrow \Lambda/\langle e\rangle$ é um epimorfismo de álgebras então é possível obter todos os pares de suporte τ-inclinante de $\Lambda/\langle e\rangle$ a partir dos pares de suporte τ-inclinante de Λ. De fato, considere $\Gamma = \Lambda/\langle e\rangle$ na proposição anterior, como os pares de suporte τ-inclinante de $\Lambda/\langle e\rangle$ formam um subgrafo pleno do grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$, temos que um par de suporte τ-inclinante (M, P^Γ) sobre $\Gamma = \Lambda/\langle e\rangle$ podem ser obtidos a partir de um par de suporte τ-inclinante $\left(M, P^\Lambda \oplus e'_\Lambda\Lambda\right)$.

Teorema 5.12. Seja $\Lambda \longrightarrow \Gamma$ um epimorfismo de álgebras. Então existe uma inclusão do quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$ em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$, induzida por

$$\left(M, \bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^\Gamma\right) \longrightarrow \left(M, \left(\bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^\Lambda\right) \oplus e'_\Lambda\Lambda\right),$$

onde $P_{i_j}^\Gamma$ e $P_{i_j}^\Lambda$ denotam os i_j-ésimos módulos projetivos indecomponíveis sobre Γ e Λ respectivamente e $e'_\Lambda = e_\Lambda - e_\Gamma$.

Demonstração. Nos resultados anteriores vimos que:

(1) O grafo subjacente de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$ é $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$ e o grafo subjacente de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$ é $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$, de acordo com a Proposição 4.41.

(2) Existe uma inclusão do grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$ no grafo $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$, de acordo com a Proposição 5.10.

(3) O quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$ representa a ordem parcial definida pela relação $T > T'$ sempre que $\text{Fac}T \supsetneq \text{Fac}T'$, para dois Γ-módulos de suporte τ-inclinante. O mesmo vale para o quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$.

Sejam M e N dois Γ-módulos conectados por uma flecha $M \longrightarrow N$ em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$. Então por **(3)**, $\text{Fac}M \supsetneq \text{Fac}N$ em $\text{mod}\Gamma$. Como $\Gamma = \Lambda/\langle e'_\Lambda\rangle$ temos que $\text{Fac}M \supsetneq \text{Fac}N$ em $\text{mod}\Lambda$. Desta forma $M > N$. Vamos mostrar que existe uma flecha $M \longrightarrow N$ em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$. De fato, por (1) se M e N estão conectados por uma flecha em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$ então existe uma aresta que conecta os pares de suporte τ-inclinante (M, P^Γ) e (N, Q^Γ), para dois Γ-módulos projetivos. Por (2) os pares $(M, P^\Lambda \oplus e'_\Gamma\Lambda)$ e $(N, Q^\Lambda \oplus e'_\Gamma\Lambda)$ estão conectados por uma aresta em $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$. Novamente por (1) existe uma flecha $M \longrightarrow N$ em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$. $\square$

Exemplo 5.13. Vamos considerar novamente as álgebras Γ e Λ cujos quivers ordinários sejam respectivamente $Q_\Gamma :\ 2 \longleftarrow 3$ e $Q_\Lambda :\ 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$. Pode-se mostrar que o quiver de suporte τ-inclinante $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$ é dado por

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul] \\
2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[rr] & & 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Logo observamos que o quiver acima é um subquiver (pleno) do quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$

calculado no Exemplo 4.43:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
 & 1 \arrow[ur] & 2 \arrow[u] & 3 \arrow[ul] & \\
1 \oplus 3 \arrow[ur] \arrow[urrr] & 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[r] & 2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] & 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ul] \arrow[r] & 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ul] \\
1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[rrrr, bend right] & 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] & 2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[r] & 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[r] & 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}. \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Observe que em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Gamma)$ os vértices são Γ-módulos, e portanto Λ-módulos, o que permite concluir que faz sentido incluí-los no quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}\Lambda)$.

5.3 PRODUTO FIBRADO DE EPIMORFISMOS DE ÁLGEBRAS

Nesta seção iremos observar o que acontece com os grafos $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$, $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$ e $\mathcal{P}(\text{s}\tau\text{-tilt}B)$ quando construímos o produto fibrado dos epimorfismos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$. Nesta seção iremos basear os conceitos de produto fibrado em (**BCW15**).

Definição 5.14. Sejam $A \twoheadrightarrow B$ e $C \twoheadrightarrow B$ dois epimorfismos de álgebras, tais que $(Q_B)_0 = (Q_A)_0 \cap (Q_C)_0$ é um subquiver pleno de Q_A e Q_C, e $I_A \cap kQ_B = I_C \cap kQ_B = I_B$. Dizemos que a álgebra $R \cong kQ_R/I_R$ é o produto fibrado destes epimorfismos se:

(1) $(Q_R)_0 = (Q_A)_0 \cup (Q_C)_0$;

(2) a cada flecha $x \longrightarrow y$ em Q_A (ou Q_C) colocamos uma flecha $x \longrightarrow y$ em Q_R, sem duplicação;

(3) I_R é o ideal de kQ_R gerado por I_A, I_C e pelos caminhos ligando $(Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0$ e $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$.

Exemplo 5.15. Considere as álgebras A, B e C cujos quiver ordinários são

$$
Q_A : \begin{tikzcd} 1 & 3 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \\ & 2 \end{tikzcd} \quad , \quad Q_B : \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\beta"] \\ 2 \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad Q_C : \begin{tikzcd} 3 \arrow[d, "\beta"] & 4 \arrow[l, "\gamma"'] & 5. \arrow[l, "\theta"'] \arrow[ll, dash, dashed, bend right] \\ 2 & & \end{tikzcd}
$$

Então o produto fibrado dos epimorfismos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ é dado por

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, dashed, no head, bend left, red] & 3 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \arrow[rr, dashed, no head, bend left] & 4 \arrow[l, "\gamma"'] & 5, \arrow[l, "\theta"'] \\
& 2 & &
\end{tikzcd}$$

pois:

(1) o conjunto dos vértices do quiver ordinário de R é dado por

$$(Q_R)_0 = (Q_A)_0 \cup (Q_C)_0 = \{1,3,2\} \cup \{2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5\};$$

(2) as flechas de Q_A são α e β, e as flechas de Q_C são β, γ e θ. Logo as flechas de Q_R são α, β, γ e θ;

(3) o ideal I_R é gerado pela relação $\theta\gamma = 0$ e o acréscimo da relação $\gamma\alpha = 0$ faz com que a álgebra kQ_R/I_R satisfaça a condição (3) da definição anterior.

Se $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ são epimorfismos, é possível construir um diagrama comutativo de epimorfismos dados por

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
C \arrow[r] & B.
\end{tikzcd}$$

Esta construção é feita seguindo uma construção universal conhecida da Teoria de Categorias, que não entraremos em detalhes aqui.

A seguinte proposição estabelece uma relação entre os módulos τ-inclinantes e os pares de suporte τ-inclinante das álgebras envolvidas na construção do produto fibrado R.

Proposição 5.16. Sejam $A \twoheadrightarrow B$ e $C \twoheadrightarrow B$ dois epimorfismos de álgebras, R o produto fibrado destes epimorfismos e $e'_C = e_C - e_B$, $e'_A = e_A - e_B$ e $e'_R = e_R - e_B = e'_A + e'_C$. Então:

(a) um módulo M é τ-inclinante sobre B se, e somente se, $(M, e'_C C)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre C;

(b) um módulo M é τ-inclinante sobre B se, e somente se, $(M, e'_A A)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre A;

(c) um módulo M é τ-inclinante sobre B se, e somente se, $(M, e'_R R)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre R;

(d) um módulo M é τ-inclinante sobre A se, e somente se, $(M, e'_C R)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre R;

(e) um módulo M é τ-inclinante sobre C se, e somente se, $(M, e'_A R)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre R.

Demonstração.

(a): De fato, se M é um módulo τ-inclinante sobre B. Então $(M, 0)$ é um par de suporte τ-inclinante. Pelo Lema 5.8 temos que $(M, e'_C C \oplus 0) = (M, e'_C C)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre C. Por outro lado, se $(M, e'_C C)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre C então M é τ-rígido sobre C, e $|M| + |e'_C C| = |C|$. Como $B = C/\langle e'_C \rangle$ temos que M é τ-rígido sobre B e $|M| = |C| - |e'_C C| = |C| - (|C| - |B|) = |B|$. Portanto M é um B-módulo τ-inclinante.

(b), (c), (d), (e): Seguem de forma análoga ao item (a).

□

No caso do produto fibrado de dois epimorfismos podemos reescrever a Proposição 5.11 da seguinte forma:

Teorema 5.17. Seja R o produto fibrado dos epimorfismos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$. Considere $\Lambda = A$, B ou C. Seja M um Λ-módulo. O par $\left(M, \left(\bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^R\right) \oplus (e_R - e_\Lambda)R\right)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre R se, e somente se, $\left(M, \bigoplus_{j=1}^{p} P_{i_j}^\Lambda\right)$ é um par de suporte τ-inclinante sobre Λ. □

5.4 PRODUTO FIBRADO DO TIPO ÁRVORE

Nesta seção iremos observar algumas propriedades dos grafos $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$, $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}B)$ e $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$ quando construímos um produto fibrado especial dos epimorfismos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$.

Definição 5.18. Sejam $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ dois epimorfismos de álgebras. Dizemos que o produto fibrado $R \cong kQ_R/I_R$ é um produto fibrado do tipo árvore orientado se satisfaz as seguintes condições:

(1) não existe caminho não nulo de $(Q_B)_0$ para $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$ e nem de $(Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0$ para $(Q_B)_0$;

(2) cada componente conexa de Q_B é do tipo árvore (isto é, seu grafo subjacente não possui ciclos) com único poço, sem relações;

(3) para cada flecha $\alpha : x \longrightarrow y$ e $(Q_B)_1$ e cada caminho de $z \in (Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$ para y existe um caminho $\psi : z \longrightarrow x$ tal que $\psi\alpha - \phi$ em I_C.

Exemplo 5.19. Considere as álgebras dadas pelos quivers

$$Q_A: \ 1 \xleftarrow[\alpha]{} 2 \xleftarrow[\beta]{} 3 \ , \ Q_B: \ 2 \xleftarrow[\beta]{} 3 \ , \ Q_C \ 2 \xleftarrow[\beta]{} 3 \xleftarrow[\gamma]{} 4.$$

Então o quiver do produto fibrado árvore orientado dos epimorfimos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ é dado por

$$\begin{tikzcd} Q_R: & 1 & 2 \arrow[l, "\alpha"'] & 3 \arrow[l, "\beta"'] & 4 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[lll, dashed, no head, bend right] \end{tikzcd}$$

com a relação $\gamma\beta\alpha = 0$.

No exemplo anterior vimos o caso de um produto fibrado de álgebras cujos quivers ordinários não possuem relações. O próximo exemplo mostra um caso em que uma das álgebras possui uma relação.

Exemplo 5.20. Vamos supor que as álgebras A, B e C sejam dadas respectivamente pelos seguintes quivers com relações

$$\begin{tikzcd} & 1 & 3 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & & 3 \arrow[d, "\beta"] & & 3 \arrow[d, "\beta"] & 4 \arrow[l, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\theta"'] \arrow[ll, dashed, no head, bend right] \\ Q_A: & & & , \ Q_B: & & \text{e} \quad Q_C: & & & \\ & & 2 & & 2 & & 2 & & \end{tikzcd}$$

onde a marca pontilhada significa que a composição $\theta\gamma$ é nula. Neste caso os quivers Q_A, Q_B e Q_C estão nas condições que queremos: não existem flechas de $(Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0 = \{1\}$ para $(Q_B)_0 = \{2, 3\}$ e nem de $(Q_B)_0 = \{2, 3\}$ para $(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0 = \{4, 5\}$. Além disso, o ideal I_R será gerado pelas relações de I_A (que não possui nenhuma relação não nula) e I_C (que é gerado por $\theta\gamma$) e da relação $\gamma\alpha$, pois $\gamma\alpha$ é um caminho que começa em $4 \in (Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0$ e termina em $1 \in (Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0$.

Assim, concluímos que o quiver ordinário do produto fibrado árvore orientado R é dado por

$$\begin{tikzcd} & 1 & 3 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] & 4 \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[ll, dashed, no head, bend right] & 5. \arrow[l, "\theta"'] \arrow[ll, dashed, no head, bend right] \\ Q_R: & & & & \\ & & 2 & & \end{tikzcd}$$

No caso dos produtos fibrados árvore orientados podemos descrever quais são todos os R-módulos a partir de mod$A$, mod$C$ e mod$B$, ou seja, temos a seguinte proposição:

Proposição 5.21 ((**BCW15**), 2.8)**.** Seja R o produto fibrado árvore orientado dos epimorfismos $A \twoheadrightarrow B$ e $C \twoheadrightarrow B$. Então

(1) ind $R =$ ind $A \cup$ ind C e

(2) ind $B =$ ind $A \cap$ ind C.

Desta forma temos que os módulos indecomponíveis sobre R são, ou indecomponíveis sobre A ou indecomponíveis sobre C. Isto significa também que o suporte dos R-módulos M está contido ou no suporte de A ou no suporte de C. Logo se (M, P) é um par de suporte τ-inclinante então podemos escrever $M = M_A \oplus M_C$ onde $M_A \in \operatorname{mod} A$ ou $M_C \in \operatorname{mod} C$. O próximo corolário nos permite escrever R como uma união disjunta de três subclasses específicas de ind R.

Corolário 5.22. Seja R o produto fibrado árvore dos epimorfismos $A \twoheadrightarrow B$ e $C \twoheadrightarrow B$. Então a união ind $R =$ (ind $A \setminus$ ind B) $\cup$ ind $B \cup$ (ind $C \setminus$ ind B) é disjunta.

O corolário anterior permite escrever um R-módulo M como uma soma direta

$$M = \left(\bigoplus_{i\in I} T_i^A\right) \oplus \left(\bigoplus_{j\in J} T_j^B\right) \oplus \left(\bigoplus_{\ell\in L} T_\ell^C\right)$$

onde $T_i^A \in$ ind $A \setminus$ind B para cada $i \in I$, $T_j^B \in$ ind B para cada $j \in J$ e $T_\ell^C \in$ ind $C \setminus$ind B para cada $\ell \in L$. De fato, cada somando indecomponível de M pertence exclusivamente a ind $A \setminus$ ind B, ind $C \setminus$ ind B ou ind B.

Nossa intenção é construir todos os pares de suporte τ-inclinante sobre um produto fibrado de epimorfismos de álgebras a partir dos pares de suporte τ-inclinante das álgebras envolvidas nesses epimorfismos. Mais explicitamente temos a seguinte questão:

Questão 5.23. Sejam $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ dois epimorfismos de álgebras e R o produto fibrado do tipo árvore orientado desses epimorfismos. Conhecendo apenas os grafos $\mathcal{P}$(sτ-tilt$A$), $\mathcal{P}$(sτ-tilt$B$) e $\mathcal{P}$(sτ-tilt$C$) (ou equivalentemente, conhecendo apenas os quivers Q(sτ-tilt$A$), Q(sτ-tilt$B$) e Q(sτ-tilt$C$)) é possível construir todos os módulos (de suporte) τ-inclinantes sobre R através de um método natural de complementação dos módulos sobre A, B e C?

Para responder esta questão iniciaremos com este primeiro lema.

Lema 5.24. Seja R o produto fibrado árvore orientado dos epimorfismos $A \twoheadrightarrow B$ e $C \twoheadrightarrow B$. Então $|A| + |C| - |B| = |R|$.

Demonstração. Se Λ é uma álgebra, existem bijeções entre as classes de isomorfismo de Λ-módulos simples, vértices no quiver Q_Λ e somandos projetivos indecomponíveis de Λ. No caso de R vimos que $(Q_R)_0 = (Q_A)_0 \cup (Q_C)_0$ e $(Q_B)_0 = (Q_A)_0 \cap (Q_C)_0$ e logo

$$\begin{aligned} |R| = \#(Q_R)_0 &= \#\left([(Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0] \cup [(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0] \cup [(Q_B)_0]\right) \\ &= \#\left[(Q_A)_0 \setminus (Q_B)_0\right] + \#\left[(Q_C)_0 \setminus (Q_B)_0\right] + \#\left[(Q_B)_0\right] \\ &= (|A| - |B|) + (|C| - |B|) + |B| = |A| + |C| - |B|. \end{aligned}$$

□

Sejam $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ dois epimorfismos com produto fibrado árvore orientado R. Suponhamos que M seja um módulo τ-inclinante sobre B. Sabemos que M possui um complemento de Bongartz a um A-módulo τ-inclinante e um complemento de Bongartz a um C-módulo τ-inclinante, digamos L e N, respectivamente. A Questão 5.23 pode ser pensada da seguinte forma:

$L \oplus M \oplus N$ é um R-módulo τ-inclinante?

Para responder esta questão vamos observar inicialmente o que acontece com a quantidade de somandos diretos indecomponíveis do módulo $L \oplus M \oplus N$.

Lema 5.25. Sejam $A \twoheadrightarrow B$ e $C \twoheadrightarrow B$ epimorfismos de álgebras (nas condições anteriores), M um módulo τ-inclinante sobre B, L o complemento de Bongartz de M sobre A, N o complemento de Bongartz de M sobre C então $|L \oplus M \oplus N| = |R|$.

Demonstração. Como L é o complemento de Bongartz de M sobre A, então $L \oplus M$ é τ-inclinante sobre A. Então $|L \oplus M| = |A|$. Analogamente tem-se que $|M \oplus N| = |C|$, pois $M \oplus N$ é τ-inclinante sobre C. Além disso, todos os somandos de L estão em $\operatorname{ind} A \setminus \operatorname{ind} B$: de fato, se algum somando L' de L estivesse em $\operatorname{ind} B$ teríamos que $L' \oplus M$ seria um B-módulo τ-rígido tal que

$$|B| \geqslant |L' \oplus M| > |M| \geqslant |B|,$$

o que é um absurdo. Analogamente nenhum somando de N está em $\operatorname{ind} B$. Portanto L, M e N não possuem nenhum somando indecomponível em comum. Finalmente:

$$|L \oplus M \oplus N| = |L| + |M| + |N| = (|L| + |M|) + (|N| + |M|) - |M| = |A| + |C| - |B| = |R|.$$

□

Logo, a quantidade de somandos de $L \oplus M \oplus N$ torna a resposta positiva para parte da pergunta acima. O próximo teorema mostra uma condição necessária e suficiente para que $L \oplus M \oplus N$ seja um módulo τ-inclinante sobre R.

Teorema 5.26. Sejam $A \twoheadrightarrow B$, $C \twoheadrightarrow B$ epimorfismos de álgebras como anteriormente, M um módulo τ-inclinante sobre B e R o produto fibrado árvore orientado. Considere L e N os complementos de Bongartz de M como A-módulo e C-módulo, respectivamente. Então $L \oplus M \oplus N$ é um R-módulo τ-inclinante se, e somente se, $\mathsf{Hom}_R(L, \tau_R N) = \mathsf{Hom}_R(N, \tau_R L) = 0$.

Demonstração. Pelo lema anterior, temos que $|L \oplus M \oplus N| = |R|$. Além disso, como $L \oplus M$ é um módulo τ-inclinante sobre A (e portanto τ-rígido sobre R) temos por definição que $\mathsf{Hom}_A(L \oplus M, \tau_A(L \oplus M)) = 0$, donde $\mathsf{Hom}_R(L \oplus M, \tau_R(L \oplus M)) = 0$. Analogamente $\mathsf{Hom}_R(M \oplus N, \tau_R(M \oplus N)) = 0$. Portanto

$$\begin{aligned}
& \mathsf{Hom}_R(L \oplus M \oplus N, \tau_R(L \oplus M \oplus N)) = \\
= \; & \mathsf{Hom}_R(L, \tau_R L) \oplus \mathsf{Hom}_R(L, \tau_R M) \oplus \mathsf{Hom}_R(M, \tau_R L) \oplus \mathsf{Hom}_R(M, \tau_R M) && (5.1) \\
\oplus \; & \mathsf{Hom}_R(M, \tau_R N) \oplus \mathsf{Hom}_R(N, \tau_R M) \oplus \mathsf{Hom}_R(N, \tau_R N) && (5.2) \\
\oplus \; & \mathsf{Hom}_R(L, \tau_R N) \oplus \mathsf{Hom}_R(N, \tau_R L) && (5.3)
\end{aligned}$$

onde os módulos da linha (5.1) são nulos pois $\mathsf{Hom}_A(L \oplus M, \tau_A(L \oplus M)) = 0$, os módulos da linha (5.2) são nulos pois $\mathsf{Hom}_c(M \oplus N, \tau_R(M \oplus N)) = 0$.

Portanto o módulo $L \oplus M \oplus N$ é τ-rígido sobre R se, e somente se, $\mathsf{Hom}_R(L, \tau_R N) = 0$ e $\mathsf{Hom}_R(N, \tau_R L) = 0$. Como vimos que $|L \oplus M \oplus N| = |R|$ temos que finalmente $L \oplus M \oplus N$ é um R-módulo τ-inclinante se, e somente se, $\mathsf{Hom}_R(L, \tau_R N) = \mathsf{Hom}_R(N, \tau_R L) = 0$. $\square$

Desta forma, nem sempre $L \oplus M \oplus N$ será um módulo τ-inclinante nas condições anteriores. Para concluir isto basta observar que as condições $\mathsf{Hom}_R(L, \tau_R N) = \mathsf{Hom}_R(N, \tau_R L) = 0$ nem sempre são verificadas.

Exemplo 5.27. Considere as álgebras $A = kQ_A$, $B = kQ_B$ e $C = kQ_C$ onde:

$$Q_A: \; 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3, \;\; Q_B: \; 2 \longleftarrow 3, \;\; Q_C: \; 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4.$$

Vimos que o produto árvore orientado dos epimorfismos é dado pelo quiver com relações

$$\begin{tikzcd} Q_R: & 1 & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & 4 \arrow[l] \arrow[lll, bend right, dashed, no head] \end{tikzcd}$$

Pode-se mostrar que os únicos B-módulos τ-inclinantes básicos são os módulos $M_1 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ e $M_2 = 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$. Também pode-se mostrar que para ambos, o único módulo básico que os complementa a A-módulos inclinantes é o módulo $L = \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$. Mostra-se também que o único módulo básico que os completa a C-módulos τ-inclinantes básicos é o módulo $N = \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$. Como

$$\mathsf{Hom}_A\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}, \tau_R\left(\begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}\right)\right) = \mathsf{Hom}_A\left(\begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}, \tau_R\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\right) = 0,$$

segue que os módulos $2 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{3\\2\\1} \oplus \substack{4\\3\\2}$ e $3 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{3\\2\\1} \oplus \substack{4\\3\\2}$ são R-módulos τ-inclinantes.

Exemplo 5.28. Considere as álgebras $A = kQ_A$, $B = kQ_B$ e $C = kQ_C$ onde:

$$
Q_A : \begin{tikzcd} 1 & 3 \arrow[l] \arrow[d] \\ & 2 \end{tikzcd} \quad Q_B : \; 2 \longleftarrow 3, \quad Q_C : \; 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4.
$$

Podemos ver que o produto árvore orientado dos epimorfismos é dado pelo quiver com relações

$$
Q_R : \begin{tikzcd} 1 & 3 \arrow[l] \arrow[d] & 4. \arrow[l] \arrow[ll, bend right, dashed, no head] \\ & 2 & \end{tikzcd}
$$

Assim como no exemplo anterior, os únicos B-módulos τ-inclinantes são $M_1 = 2 \oplus \substack{3\\2}$ e $M_2 = 3 \oplus \substack{3\\2}$. Pode-se mostrar que os módulos $L_1 = {}_1{}^{3}{}_2$ e $L_2 = \substack{3\\1}$ são os únicos tais que $L_1 \oplus M_1$ e $L_2 \oplus M_2$ são A-módulos τ-inclinantes básicos e que $N = \substack{4\\3\\2}$ é o único C-módulo tal que $M_1 \oplus N$ um C-módulo τ-inclinante básico e o único tal que $M_2 \oplus N$ é um C-módulo básico. Como

$$
\mathrm{Hom}_A \left({}_1{}^{3}{}_2, \tau_R \left(\substack{4\\3\\2} \right) \right) = \mathrm{Hom}_A \left(\substack{4\\3\\2}, \tau_R \left({}_1{}^{3}{}_2 \right) \right) = 0
$$

e

$$
\mathrm{Hom}_A \left(\substack{3\\1}, \tau_R \left(\substack{4\\3\\2} \right) \right) = \mathrm{Hom}_A \left(\substack{4\\3\\2}, \tau_R \left(\substack{3\\1} \right) \right) = 0
$$

concluímos que os módulos $2 \oplus \substack{3\\2} \oplus {}_1{}^{3}{}_2 \oplus \substack{4\\3\\2}$ e $3 \oplus \substack{3\\1} \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{4\\3\\2}$ são R-módulos τ-inclinantes.

Porém, o próximo teorema mostra que, mesmo não conseguindo esta generalização para os complementos, existem relações entre os quivers de suporte τ-inclinante $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$, $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}B)$, $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$ e $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$.

Teorema 5.29. Sejam A, B e C álgebras distintas. Se $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ são epimorfismos de álgebras, com R o produto fibrado árvore orientado, então:

(1) $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}B) = Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A) \cap Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$;

(2) $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ e $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$ são finitos se, e somente se, $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$ é finito;

(3) $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R) \neq Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A) \cup Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$.

Demonstração. Observe que se M e N são A-módulos (ou C-módulos) conectados por uma flecha em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ (ou em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$) então também estarão conectados por uma flecha em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$ pois a ordem parcial definida é a mesma quando olhamos apenas para os A-módulos (ou C-módulos). Logo se $M \longrightarrow N$ é uma flecha em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ (ou $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$) então $M \longrightarrow N$ também é uma flecha em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$.

(1) Suponha que M é um B-módulo de suporte τ-inclinante. Logo M também é um A-módulo (e C-módulo) de suporte τ-inclinante pois $B = A/\langle e'_A \rangle$ (e $B = C/\langle e'_C \rangle$). Logo $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}B) \subset Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A) \cap Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$, pois todos os vértices de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}B)$ estão em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A) \cap Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$.

Por outro lado, se $M \in Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A) \cap Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$ temos que M é um A-módulo e C-módulo e pela Proposição 5.21, temos que M é um B-módulo. Portanto, como $M(e_A - e_B) = M(e_C - e_B) = 0$, M é um B-módulo de suporte τ-inclinante.

(2) Suponha que $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ e $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$ sejam finitos. Então A e C tem finitos módulos τ-rígidos básicos, pela Proposição 5.1. Como $\text{ind}\, R = \text{ind}\, A \cup \text{ind}\, C$, $A = R/\langle e_R - e_A \rangle$ e $C = R/\langle e_R - e_C \rangle$, temos que um R-módulo indecomponível é τ-rígido básico se, e somente se, é τ-rígido sobre A ou C. Logo R tem finitos módulos τ-rígidos básicos. Novamente pela Proposição 5.1 temos que $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$ é finito.

Por outro lado, suponhamos que $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$ seja finito. Se M é um A-módulo τ-rígido então M é um R-módulo τ-rígido. Desta forma, como existem finitos módulos τ-rígidos, pois $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$ é finito, segue que $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ é finito, pois possui finitos módulos τ-rígidos. O mesmo raciocínio pode ser feito para $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$.

(3) Veja que R é um módulo τ-inclinante básico. Logo R representa um vértice de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$. Suponhamos que este vértice esteja em $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$. Então R seria um A-módulo, o que não ocorre pois R tem ao menos um somando direto não nulo em $\text{ind}\, C$ uma vez que $e_R - e_A \neq 0$ (basta tomar o j-ésimo somando projetivo indecomponível $e_j R$ de R, tal que e_j é uma parcela de $e_R - e_A$). Logo R teria um somando direto não nulo em C e um somando direto não nulo em A, donde concluímos que não vem de nenhum dos quivers $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$ e $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$.

$\square$

Vamos observar então como se dão estas inclusões de quivers.

Exemplo 5.30. Sejam A, B e C as álgebras cujos quivers ordinários são dados respectivamente por

$$Q_A : \ 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \ ; \ Q_B : \ 2 \longleftarrow 3 \ ; \ Q_C : \ 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4.$$

A seguir vamos calcular os módulos de suporte τ-inclinante sobre A, B e C.

Veja que o quiver de Auslander-Reiten da álgebra A é dado por

$$\Gamma(\operatorname{mod} A):\quad \begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
 & \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & 2 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & 3.
\end{tikzcd}$$

Podemos ver que os A-módulos de suporte τ-inclinante desta álgebra são os módulos:

(0) τ-rígidos de tipo 0: 0;

(1) τ-rígidos de tipo 1: 1, 2, e 3;

(2) τ-rígidos de tipo 2: $1\oplus 3$, $1\oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$, $2\oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$, $2\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ e $3\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$;

(3) τ-rígidos de tipo 3: $1\oplus 3\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$, $1\oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$, $2\oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$, $2\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$ e $3\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$.

Podemos então construir o quiver de suporte τ-inclinante para esta álgebra

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
 & 1 \arrow[ur] & 2 \arrow[u] & 3 \arrow[ul] & \\
1\oplus 3 \arrow[ur] \arrow[urrr] & 1\oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[r] & 2\oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] & 2\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ul] \arrow[r] & 3\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ul] \\
1\oplus 3\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[rrrr, bend right] & 1\oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[l] \arrow[r] & 2\oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[r] & 2\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[r] & 3\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

O quiver de Auslander-Reiten da álgebra B é dado por

$$\Gamma(\operatorname{mod} B):\quad \begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
2 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & 3.
\end{tikzcd}$$

Então os B-módulos de suporte τ-inclinante são os módulos:

(0) τ-rígidos de tipo 0: 0;

(1) τ-rígidos de tipo 1: 2 e 3;

(2) τ-rígidos de tipo 2: $2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ e $3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$.

Podemos então construir o quiver de suporte τ-inclinante para esta álgebra

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul] \\
2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[rr] & & 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Veja que o quiver de Auslander-Reiten da álgebra C é dado por

$$\Gamma(\mathrm{mod}\, C) : \quad \begin{tikzcd}
 & & \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
 & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
2 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & 3 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & 4.
\end{tikzcd}$$

Podemos ver que os C-módulos de suporte τ-inclinante são os módulos:

(0) τ-rígidos de tipo 0: 0

(1) τ-rígidos de tipo 1: $2, 3$ e 4;

(2) τ-rígidos de tipo 2: $2 \oplus 4$, $2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, $3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, $3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$ e $4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$.

(3) τ-rígidos de tipo 3: $2 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$ e $4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$.

Podemos então construir o quiver de suporte τ-inclinante para esta álgebra:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
 & 2 \arrow[ur] & 3 \arrow[u] & 4 \arrow[ul] & \\
2 \oplus 4 \arrow[ur] \arrow[urr] & 2 \oplus \substack{3\\2} \arrow[u] \arrow[r] & 3 \oplus \substack{3\\2} \arrow[u] & 3 \oplus \substack{4\\3} \arrow[ul] \arrow[r] & 4 \oplus \substack{4\\3} \arrow[ul] \\
2 \oplus 4 \oplus \substack{4\\3\\2} \arrow[u] \arrow[rrrr, bend right] & 2 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{4\\3\\2} \arrow[u] \arrow[l] \arrow[r] & 3 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{4\\3\\2} \arrow[u] \arrow[r] & 3 \oplus \substack{4\\3} \oplus \substack{4\\3\\2} \arrow[u] \arrow[r] & 4 \oplus \substack{4\\3} \oplus \substack{4\\3\\2} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Observe que os epimorfismos de álgebras $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ possuem o produto fibrado árvore orientado dado por

$$\begin{tikzcd}
Q_R: & 1 & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & 4. \arrow[l] \arrow[lll, bend right, dash, dashed]
\end{tikzcd}$$

Além disso temos que o quiver de Auslander-Reiten da álgebra R é dado por:

$$\Gamma(\mathrm{mod}\, A): \quad \begin{tikzcd}
 & & \substack{3\\2\\1} \arrow[dr] & & \substack{4\\3\\2} \arrow[dr] & & \\
 & \substack{2\\1} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \substack{3\\2} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \substack{4\\3} \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & 2 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & 3 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & 4
\end{tikzcd}$$

Podemos ver que os módulos de suporte τ-inclinante sobre R são os módulos:

(0) τ-rígidos de tipo 0: 0;

(1) τ-rígidos de tipo 1: $1, 2, 3$ e 4;

(2) τ-rígidos de tipo 2: $1 \oplus 3$, $1 \oplus 4$, $1 \oplus \substack{2\\1}$, $2 \oplus 4$, $2 \oplus \substack{2\\1}$, $2 \oplus \substack{3\\2}$, $3 \oplus \substack{3\\2}$, $3 \oplus \substack{4\\3}$ e $4 \oplus \substack{4\\3}$

(3) τ-rígidos de tipo 3: $1 \oplus 3 \oplus \substack{4\\3}$, $1 \oplus 3 \oplus \substack{3\\2\\1}$, $1 \oplus 4 \oplus \substack{2\\1}$, $1 \oplus 4 \oplus \substack{4\\3}$, $1 \oplus \substack{2\\1} \oplus \substack{4\\3\\2}$, $2 \oplus 4 \oplus \substack{2\\1}$, $2 \oplus 4 \oplus \substack{4\\3\\2}$, $2 \oplus \substack{2\\1} \oplus \substack{3\\2\\1}$, $2 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{3\\2\\1}$, $2 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{4\\3\\2}$, $3 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{3\\2\\1}$, $3 \oplus \substack{3\\2} \oplus \substack{4\\3\\2}$, $3 \oplus \substack{4\\3} \oplus \substack{4\\3\\2}$ e $4 \oplus \substack{4\\3} \oplus \substack{4\\3\\2}$.

(4) τ-rígidos de tipo 4: $1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $1 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$ e $1 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $2 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$.

Vamos denotar S_1, S_2, S_3 e S_4 os R-módulos simples da álgebra e os demais módulos de suporte τ-inclinante por:

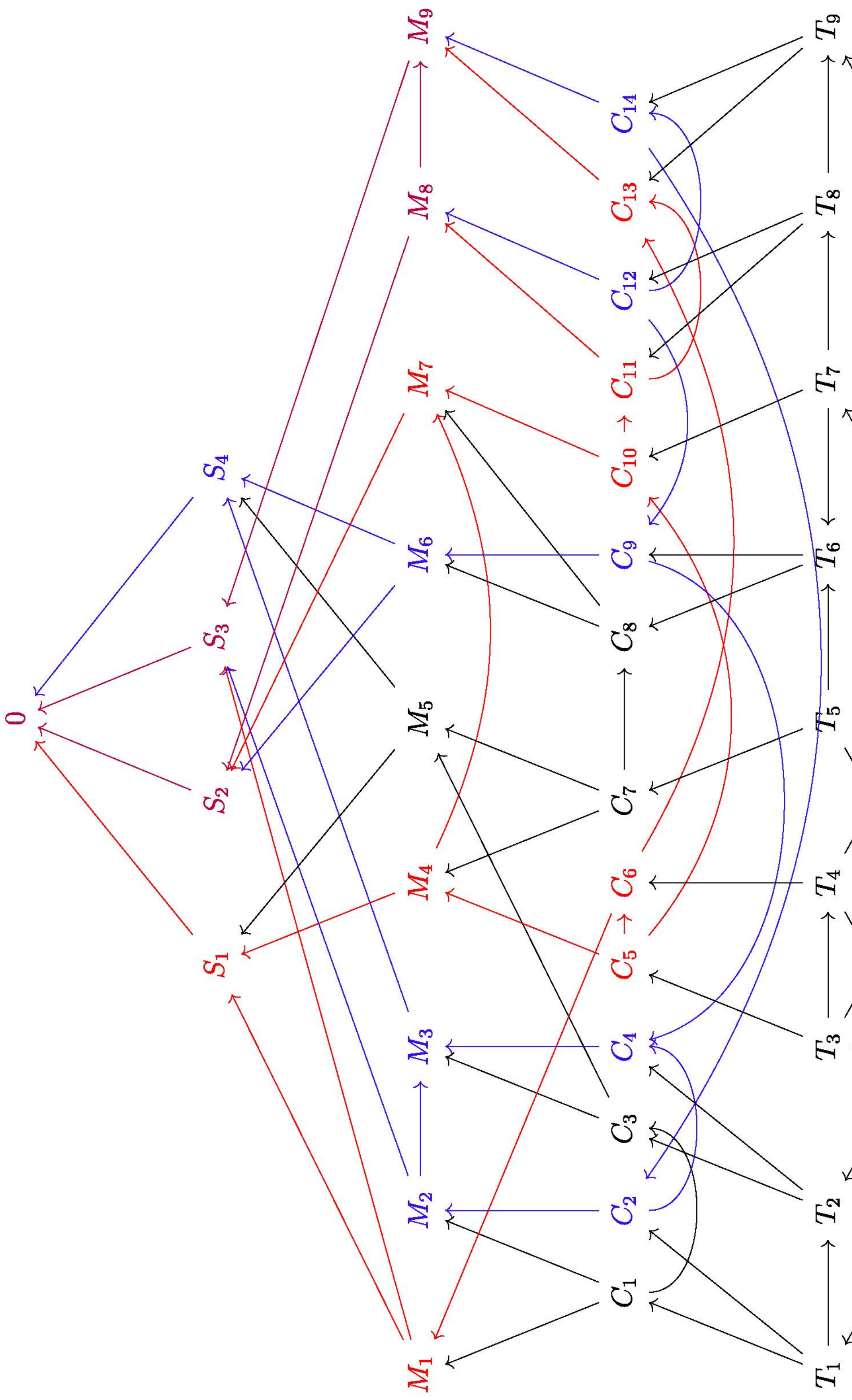
$M_1 = 1 \oplus 3$;
$M_2 = 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$;
$M_3 = 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$;
$M_4 = 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$;
$M_5 = 1 \oplus 4$;
$M_6 = 2 \oplus 4$;
$M_7 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$;
$M_8 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$;
$M_9 = 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$;

$C_1 = 1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$;
$C_2 = 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$C_3 = 1 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$;
$C_4 = 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$C_5 = 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$;
$C_6 = 1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$;
$C_7 = 1 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$;
$C_8 = 2 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}$;

$C_9 = 2 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$C_{10} = 2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$;
$C_{11} = 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$;
$C_{12} = 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$C_{13} = 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}$;
$C_{14} = 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_1 = 1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_2 = 1 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;

$T_3 = 1 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_4 = 1 \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_5 = 1 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_6 = 2 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_7 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_8 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_9 = 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$.

Portanto o quiver de suporte τ-inclinante de R é dado por:


0
S_1 S_2 S_3 S_4
M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 M_7 M_8 M_9
C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8 C_9 C_{10} C_{11} C_{12} C_{13} C_{14}
T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 T_9

Observe que os quiver $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}A)$, $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}B)$ e $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}C)$ são subquivers de $Q(\text{s}\tau\text{-tilt}R)$.

Exemplo 5.31. Sejam A, B e C as álgebras cujos quivers ordinários são dados respectivamente por

$$Q_A : \begin{tikzcd} 1 & 3 \arrow[l] \arrow[d] \\ & 2 \end{tikzcd} \; ; \; Q_B : \; 2 \longleftarrow 3 \; ; \; Q_C : \; 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4.$$

Vamos calcular os módulos de suporte τ-inclinante sobre A, B e C.

Veja que o quiver de Auslander-Reiten da álgebra A é dado por

$$\Gamma(\text{mod}A) : \begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\ & \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, no head] & & 3 \\ 2 \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, no head] & & \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Podemos ver que os módulos de suporte τ-inclinante desta álgebra são os módulos:

(0) τ-rígidos de tipo 0: 0

(1) τ-rígidos de tipo 1: 2, 3 e 1;

(2) τ-rígidos de tipo 2: $2 \oplus 1$, $2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 1$ e $3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$.

(3) τ-rígidos de tipo 3: $2 \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 1$, $2 \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 1$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$ e $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$.

Podemos então construir o quiver de suporte τ-inclinante para esta álgebra:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 0 & & \\
 & 2 \arrow[ur] & 1 \arrow[u] & 3 \arrow[ul] & \\
2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[rrrr, bend right] & 2 \oplus 1 \arrow[u] \arrow[ur] & \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 1 \arrow[u] \arrow[r] & \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3 \arrow[u] & 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ul] \\
2 \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[rrr, bend right] & 2 \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \oplus 1 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] & \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \oplus 1 \arrow[u] \arrow[r] & \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[r] & \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Além disso, já sabemos que os quivers de suporte τ-inclinante das álgebras B e C são respectivamente:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & \\
2 \arrow[ur] & & 3 \arrow[ul] \\
2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[rr] & & 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

e

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 0 & & \\
 & 2 \arrow[ur] & 3 \arrow[u] & 4 \arrow[ul] & \\
2 \oplus 4 \arrow[ur] \arrow[urrr] & 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[r] & 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u] & 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \arrow[ul] \arrow[r] & 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \arrow[ul] \\
2 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[rrrr, bend right] & 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] & 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[r] & 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u] \arrow[r] & 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Observe que para os epimorfismos $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ temos que o produto fibrado R é dado por

$$Q_R : \begin{tikzcd} 1 & 3 \arrow[l] \arrow[d] & 4. \arrow[l] \arrow[ll, bend right, dash, dashed] \\ & 2 & \end{tikzcd}$$

Então pode-se mostrar que o quiver de Auslander-Reiten desta álgebra é dado por

$$\begin{tikzcd}
 & & & \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr] & & \\
1 \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \arrow[dr] & \\
 & \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & 3 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & 4 \\
2 \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Então os R-módulos de suporte τ-inclinante são os módulos:

(0) τ-rígidos de tipo 0: 0;

(1) τ-rígidos de tipo 1: 2, $3, 4$ e 1;

(2) τ-rígidos de tipo 2: $2 \oplus 4$, $2 \oplus 1$, $2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 1$, $3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, $3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$, $4 \oplus 1$ e $4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$.

(3) τ-rígidos de tipo 3: $2 \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 1$, $2 \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, $2 \oplus 4 \oplus 1$, $2 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 1$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$, $3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $4 \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$, $4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$.

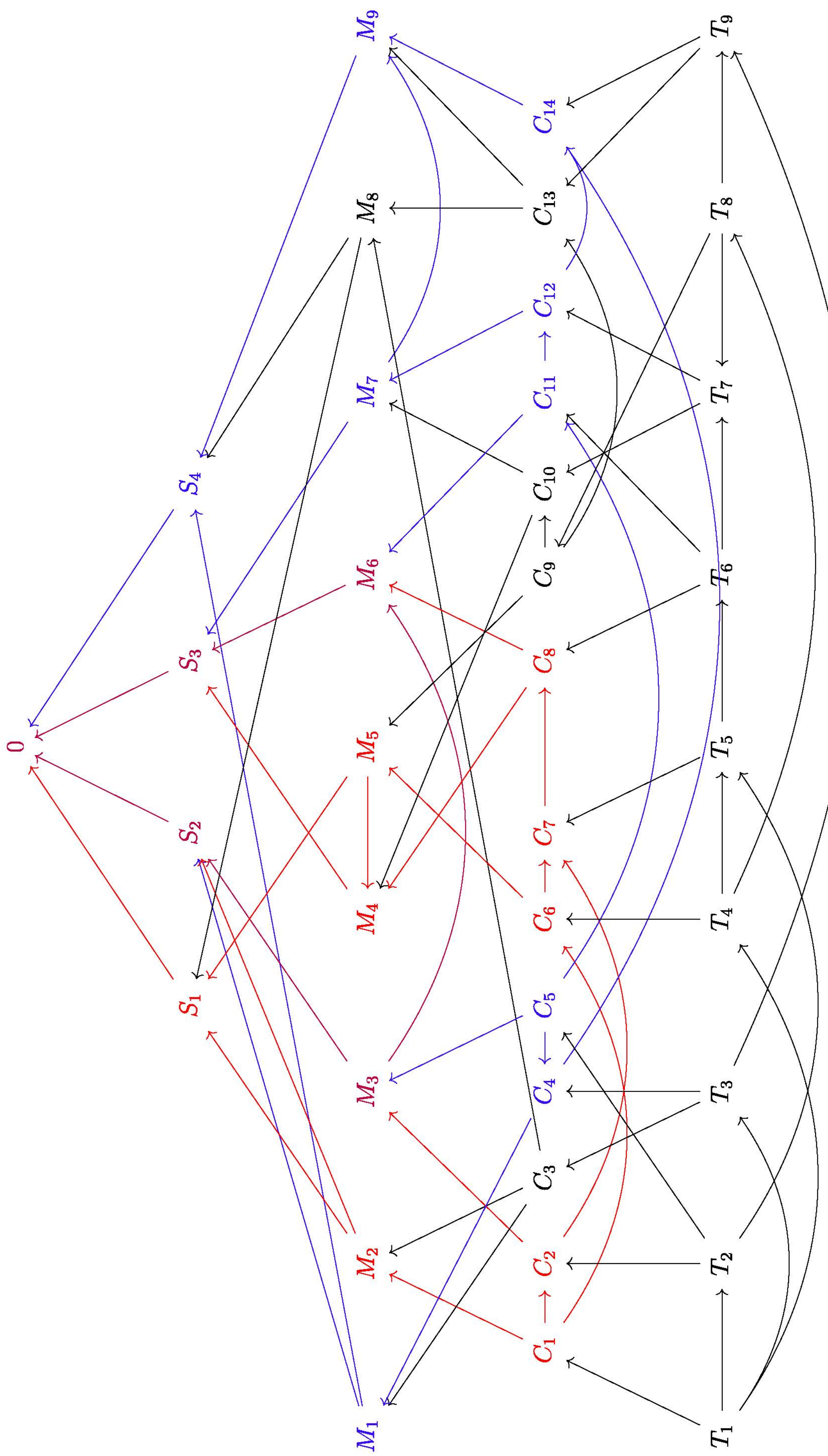
(4) τ-rígidos de tipo 4: $2 \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $2 \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $2 \oplus 4 \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}&4&\\3&&2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$, $4 \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$.

Se denotarmos

0;	$M_1 = 2 \oplus 4$;	$M_6 = 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$;
$S_1 = 1$;	$M_2 = 2 \oplus 1$;	$M_7 = 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$;
$S_2 = 2$;	$M_3 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$;	$M_8 = 4 \oplus 1$;
$S_3 = 3$;	$M_4 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3$;	$M_9 = 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$;
$S_4 = 4$;	$M_5 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 1$;	$C_1 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 1$;

$C_2 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$;
$C_3 = 2 \oplus 4 \oplus 1$;
$C_4 = 2 \oplus 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$C_5 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$C_6 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 1$;
$C_7 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$;
$C_8 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}$;
$C_9 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$;
$C_{10} = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$
$C_{11} = 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$C_{12} = 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$C_{13} = 4 \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix}$;
$C_{14} = 4 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_1 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_2 = 2 \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_3 = 2 \oplus 4 \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_4 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_5 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&3&\\1&&2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_6 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_7 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 3 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_8 = \begin{smallmatrix}3\\1\end{smallmatrix} \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$;
$T_9 = 4 \oplus 1 \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}4\\3\\2\end{smallmatrix}$,

então o quiver de suporte τ-inclinante da álgebra R é dado por


0
S_1 S_2 S_3 S_4
M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 M_7 M_8 M_9
C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8 C_9 C_{10} C_{11} C_{12} C_{13} C_{14}
T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 T_9

Podemos então pensar num processo contrário ao que estávamos tentando fazer. Seja T um R-módulo τ-inclinante. Vimos que $(\text{ind}\, A \cap \text{ind}\, B) \cup (\text{ind}\, B) \cup (\text{ind}\, C \cap \text{ind}\, B)$ é uma união disjunta. Então podemos escrever $T = \left(\bigoplus_{i \in I} T_i^A\right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J} T_j^B\right) \oplus \left(\bigoplus_{\ell \in L} T_\ell^C\right)$, onde $T_i^A \in \text{ind}\, A \setminus \text{ind}\, B$, $T_j^B \in \text{ind}\, B$ são e $T_\ell^C \in \text{ind}\, C \setminus \text{ind}\, B$ para $i \in I$, $j \in J$ e $\ell \in L$. É fácil ver que $T^A = \left(\bigoplus_{i \in I} T_i^A\right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J} T_j^B\right)$, $T^C = \left(\bigoplus_{\ell \in L} T_i^C\right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J} T_j^B\right)$ e $T^B = \bigoplus_{j \in J} T_j^B$ são respectivamente o A-módulo maximal, o C-módulo maximal e o B-módulo maximal que são somandos de T. É natural perguntar se:

- T^A é um A-módulo τ-inclinante?
- T^C é um C-módulo τ-inclinante?
- T^B é um B-módulo τ-inclinante?

Primeiramente, vejamos o que acontece com a τ-rigidez dos módulos T^A, T^B e T^C.

Proposição 5.32. Sejam $A \longrightarrow B$ e $C \longrightarrow B$ dois epimorfismos de álgebras com produto fibrado árvore orientado R. Seja T um R-módulo τ-inclinante, onde T^A, T^B e T^C são respectivamente os somandos maximais de T em $\text{mod} A$, $\text{mod} B$ e $\text{mod} C$. Então T^A, T^B e T^C são módulos rígidos.

Demonstração. De fato, como T é um R-módulo τ-rígido, então T_A também é um R-módulo τ-rígido. Como T^A é um A-módulo e $A = R/\langle e \rangle$, para um certo idempotente $e \in R$, temos que T^A é um A-módulo τ-rígido. Podemos repetir o mesmo argumento para mostrar que T^B é um B-módulo rígido e T^C é um C-módulo rígido. $\square$

Apesar de cada um desses somandos serem τ-rígidos, não necessariamente estes são τ-inclinantes. Por exemplo, considere as álgebras A, B e C dadas respectivamente por

$$Q_A: \ 1 \longleftarrow 2 \ , \ Q_B: \ 2 \ \text{ e } Q_C: \ 2 \longleftarrow 3.$$

Temos que o produto fibrado árvore orientado é dado por

$$\begin{tikzcd} Q_R: 1 & 2 \arrow[l] & 3. \arrow[l] \arrow[ll, dash, dashed, bend right] \end{tikzcd}$$

Então a álgebra R é um módulo τ-inclinante, pois é um módulo projetivo e tem $|R|$ somandos, porém o módulo R^B é nulo, uma vez que R não possui nenhum somando que seja B-módulo não nulo. Logo R^B não pode ser τ-inclinante. O mesmo vale para a componente $R^C = \frac{3}{2}$ que possui apenas um somando direto.

Por mais que a nossa ideia de complemento não funcione para o caso em que M é um B-módulo τ-inclinante com complementos de Bongartz L e N, respectivamente como A-módulo e C-módulo não funcionar, é possível ainda assim relacionar esses complementos da seguinte forma:

Teorema 5.33. Considere M um B-módulo τ-inclinante. Existe um A-módulo L tal que $L \oplus M$ é um A-módulo τ-inclinante. Agora seja N o complemento do módulo $L \oplus M$ como R-módulo τ-inclinante. Então $M \oplus N$ é um C-módulo τ-inclinante.

Demonstração. De fato, supondo M um módulo τ-inclinante sobre B, temos que M é τ-rígido sobre A. Então existe o complemento de Bongartz $L \oplus M$ de M como A-módulo τ-inclinante tal que $L \in \mathsf{add}(\mathsf{ind}\ A \backslash \mathsf{ind}\ B)$. Portanto $L \oplus M$ é τ-rígido sobre R. Da mesma forma, podemos completar via Bongartz obtendo um módulo τ-inclinante sobre R: $L \oplus M \oplus N$. Então $N \in \mathsf{add}(\mathsf{ind}\ C \backslash \mathsf{ind}\ B)$ e $|N| = |R| - |A| = |C| - |B|$. Pela proposição anterior o C-módulo $M \oplus N$ é rígido. Além disso, como $|L \oplus M \oplus N| = |L| + |M| + |N| = |R|$ segue que $|M \oplus N| = |M| + |N| = |B| + |C| - |B| = |C|$. Portanto $M \oplus N$ é um C-módulo inclinante. $\square$

A CASOS PARTICULARES DE τ-INCLINANTES

Nos capítulos anteriores vimos um pouco sobre a teoria τ-inclinante e como esta generaliza algumas propriedades da teoria inclinante clássica. Em geral, o cálculo da classe dos módulos inclinantes e τ-inclinantes pode não ser tão simples de ser efetuado. O que faremos neste capítulo é mostrar o que ocorre com a classe dos módulos τ-inclinantes, $\tau\text{-tilt}A$, em dois casos: o primeiro em que mostraremos que os módulos τ-inclinantes sobre uma álgebra hereditária são também módulos inclinantes como em (**YX16**), e mais ainda que tal propriedade caracteriza essa classe de álgebras; e o segundo em que vamos exibir um algoritmo para o cálculo dos módulos τ-inclinantes sobre álgebras de Nakayama, baseado em (**Ada16**).

A.1 ÁLGEBRAS HEREDITÁRIAS

Dizemos que uma álgebra é **hereditária à direita** se todo ideal à direita de A é um A-módulo projetivo. Dualmente podemos definir álgebra hereditária à esquerda. Pode-se mostrar que dada uma álgebra hereditária todo submódulo de um módulo livre é isomorfo a uma soma direta de ideais de A e com isso mostra-se que uma álgebra é hereditária (à direita) se, e somente se, todo submódulo de um módulo projetivo também é projetivo. Pode-se mostrar também que qualquer morfismo entre dois A-módulos que sejam projetivos indecomponíveis é um monomorfismo.

A.1.1 Conceitos básicos

Vimos pelo Teorema de Gabriel que dada uma k-álgebra básica A de dimensão finita existem um quiver Q_A e um ideal I de kQ_A tais que existe um isomorfismo de k-álgebras $A \cong kQ_A/I$. Em particular no caso das álgebras hereditárias temos a seguinte observação:

Observação A.1.

(a) Seja Q um quiver finito, conexo e acíclico. Podemos construir a álgebra de caminhos $A = kQ$. Então A é uma álgebra hereditária cujo quiver ordinário Q_A coincide com o quiver Q.

(b) Suponhamos que A seja uma álgebra básica, conexa e hereditária e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ seja um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A, então o quiver ordinário Q_A da álgebra A é finito, conexo e acíclico, e seus vértices estão em bijeção com $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, enquanto a quantidade de flechas entre os vértices i e j é dado por $\dim(e_i(\mathrm{rad}A/\mathrm{rad}^2A)e_j)$. Esse quiver é tal que $A \cong kQ_A/I$ (vide Teorema de Gabriel na Seção 1.2).

Lema A.2. Seja A uma álgebra hereditária. Se M é um A-módulo então $\mathrm{dp}\, M \leqslant 1$.

Demonstração. De fato, suponhamos que A seja uma álgebra hereditária então todo submódulo de um A-módulo (finitamente gerado) projetivo é também projetivo. Para cada A-módulo M, existe um A-módulo projetivo P e um epimorfismo $f : P \longrightarrow M$. Além disso, sabemos que $\mathrm{Ker}\, f$ é um submódulo de P, como P é projetivo, logo também é projetivo. Portanto a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow P \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de M, donde $\mathrm{dp}\, M \leqslant 1$. □

Além do mais, na construção do quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra hereditária A temos alguns fatos importantes, como por exemplo:

(1) Para cada A-módulo M existem isomorfismos (funtoriais) $\tau M \cong \mathrm{DExt}^1_A(M, A)$ e $\tau^{-1}M \cong \mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{D}M, A)$. Como vimos na proposição anterior, se A é uma k-álgebra hereditária e M é um A-módulo então $\mathrm{dp}\, M \leqslant 1$, logo existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

onde P_0 e P_1 são A-módulos projetivos. Aplicando o funtor $(-)^* = \mathrm{Hom}_A(-, A)$ temos que a sequência

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, A) \to \mathrm{Hom}_A(P_0, A) \to \mathrm{Hom}_A(P_1, A) \to \mathrm{Ext}^1_A(M, A) \to 0$$

é uma sequência exata pela Observação 1.19. Aplicando o funtor D nesta última sequência obtemos a sequência exata

$$0 \to \mathrm{DExt}^1_A(M, A) \to \mathrm{DHom}_A(P_1, A) \to \mathrm{DHom}_A(P_0, A) \to \mathrm{DHom}_A(M, A) \to 0,$$

ou seja, a seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{DExt}^1_A(M, A) \longrightarrow \nu P_1 \longrightarrow \nu P_0,$$

onde concluímos que $\tau M \cong \mathrm{DExt}^1_A(M, A)$. O outro isomorfismo pode ser mostrado de forma análoga;

(2) os predecessores de vértices em $\Gamma(\mathrm{mod}\, A)$ correspondentes a módulos projetivos indecomponíveis correspondem a módulos projetivos indecomponíveis;

(3) os sucessores de vértices em $\Gamma(\mathrm{mod}\, A)$ correspondentes a módulos injetivos indecomponíveis correspondem a módulos injetivos indecomponíveis.

Mais detalhes sobre sucessores e predecessores podem ser vistos em (**ASS06**).

A.1.2 Inclinantes e τ-inclinantes em Álgebras Hereditárias

Nesta seção estamos interessados em caracterizar as álgebras hereditárias através das suas classes de módulos inclinantes e τ-inclinantes. Mais precisamente, mostraremos que uma álgebra é hereditária se, e somente se, todo módulo τ-inclinante é inclinante, i.e., $\tau\text{-tilt}A = \text{tilt}A$.

Vamos lembrar que M é um módulo inclinante se M é um módulo rígido (ou seja, $\text{Ext}^1_A(M, M) = 0$), sua dimensão projetiva é menor que ou igual a 1 e existem módulos $M_0, M_1 \in \text{add}M$ tais que existe uma sequência exata

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0.$$

Vimos que, quando era esse o caso, a existência da sequência exata era equivalente a condição $|M| = |A|$. Desta forma, havíamos concluído que a classe dos módulos inclinantes formava uma subclasse da classe dos módulos τ-inclinantes (i.e., $\text{Hom}_A(M, \tau M) = 0$ e $|M| = |A|$). Porém temos o seguinte resultado:

Proposição A.3. Sejam A uma álgebra hereditária e M um A-módulo. Então M é inclinante se, e somente se, M é τ-inclinante.

Demonstração. Vimos no Teorema 3.9 que todo módulo inclinante é τ-inclinante. Por outro lado, suponhamos que M seja um módulo τ-inclinante. Pelo Lema A.2 temos que $\text{dp}\, M \leqslant 1$. Como M é τ-rígido (pois é τ-inclinante), pelo Corolário 3.8, M também é rígido. Como M é rígido e $\text{dp}\, M \leqslant 1$, pela Definição 2.10, M é inclinante parcial. Além disso, como M é inclinante parcial e $|M| = |A|$, por M ser τ-inclinante, segue do Teorema 2.17 que M é um módulo inclinante. □

Desta forma, nas álgebras hereditárias temos uma caracterização específica para os módulos τ-inclinantes, i.e., todos são inclinantes. Além disso, pode-se mostrar que essa é uma característica apenas das álgebras hereditárias, de forma que:

Proposição A.4. Seja A uma álgebra cujo quiver ordinário Q_A não possui laço. Se todo módulo τ-inclinante também é inclinante então A é uma álgebra hereditária.

Demonstração. Seja A' uma álgebra cuja dimensão global seja menor ou igual a 1 (a dimensão global é a menor cota superior para a dimensão projetiva dos A'-módulos, e esta coincide com a menor cota superior para a dimensão projetiva dos A'-módulos simples) então a sequência exata $0 \longrightarrow M' \longrightarrow P' \longrightarrow P'/M' \longrightarrow 0$ onde M' é um submódulo do módulo projetivo P' permite mostrar que M' também é projetivo, uma vez que $\text{dp}\,(P'/M') \leqslant 1$. Desta forma, todo submódulo de módulo projetivo também é projetivo, ou seja, A é uma álgebra hereditária.

De acordo com esta observação se a dimensão global da álgebra A é menor ou igual a 1 temos que A é hereditária. Desta forma, vamos supor por absurdo que A é uma álgebra não hereditária, onde todo módulo τ-inclinante também é inclinante. Como A não é hereditária tem-se que a dimensão global de A é maior que 1. Isto significa que existe um módulo simples S_i ($i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) para o qual $\mathsf{dp}\,(S_i) > 1$. Como não existem laços no quiver temos que $\mathsf{Ext}^1_A(S_i, S_i) = 0$, e logo $\mathsf{Ext}^1_A(S_i, \mathsf{Fac}S_i) = 0$ pois como S_i é simples temos que $\mathsf{add}S_i = \mathsf{add}\,\mathsf{Fac}S_i$. Logo pela Proposição 3.11, S_i é um módulo τ-rígido pois $\mathsf{Hom}_A(S_i, \tau S_i) = 0$. Desta forma, pelo complemento de Bongartz do Teorema 3.29, temos que existe um módulo E de forma que $S_i \oplus E$ é τ-inclinante. Por outro lado, temos que $\mathsf{dp}\,(S_i \oplus E) = \max\{\mathsf{dp}\,S_i, \mathsf{dp}\,E\} \geqslant \mathsf{dp}\,S_i > 1$ pela Observação 2.7. Então o módulo $S_i \oplus E$ é τ-inclinante e não é inclinante, o que é absurdo. Portanto a álgebra A é hereditária. □

Utilizando as duas proposições demonstradas acima, concluímos que:

Teorema A.5. Seja A uma álgebra de dimensão finita cujo quiver ordinário Q_A não possui laço. Então A é hereditária se, e somente se, todo A-módulo τ-inclinante é inclinante.

Desta forma podemos utilizar este último teorema para caracterizar álgebras hereditárias e os módulos τ-inclinantes sobre estas álgebras:

Corolário A.6. Seja A uma álgebra de dimensão finita cujo quiver ordinário Q_A não possui laço. Se todo A-módulo sincero é também um módulo fiel então A é hereditária.

Demonstração. De fato, vimos na Proposição 3.21 que módulos τ-inclinantes são sinceros. Logo, por hipótese todos os τ-inclinantes sinceros são fiéis. Pelo Corolário 3.25, se um módulo é τ-inclinante e fiel então este módulo é inclinante. Logo todos os τ-inclinantes são inclinantes e vimos que isso significa que A é hereditária. □

Corolário A.7. Se todo módulo sem extensões é fiel então A é hereditária.

Demonstração. Considere M um módulo τ-inclinante, então $\mathsf{Hom}_A(M, \tau M) = 0$ e pelas Fórmulas de Auslander-Reiten temos que $\mathsf{Ext}^1_A(M, M) = 0$. Por hipótese este módulo é fiel e logo M é um módulo τ-inclinante fiel, donde M é inclinante. Portanto, todos os τ-inclinantes são inclinantes e logo A é hereditária. □

A.2 ÁLGEBRAS DE NAKAYAMA

Nesta seção vamos exibir o algoritmo de (**Ada16**) para o cálculo dos módulos τ-inclinantes sobre álgebras de Nakayama. Mais especificamente, mostraremos como calcular **todos** os módulos τ-inclinantes sobre uma álgebra de Nakayama a partir dos τ-inclinantes sobre as álgebras quociente $A/\langle e\rangle$, quando $e \in A$ é um idempotente.

A.2.1 Conceitos básicos

Dizemos que uma álgebra A é **serial à direita** se cada módulo à direita projetivo indecomponível é unisserial. Lembre que um módulo unisserial é um módulo que possui uma única série de composição. Analogamente, uma álgebra é dita **serial à esquerda** se cada módulo à esquerda projetivo indecomponível é unisserial.

Proposição A.8. Para cada A-módulo M são equivalentes as seguintes afirmações:

(1) o módulo M é unisserial;

(2) a sequência $M \supset \text{rad}M \supset \text{rad}^2 M \supset \cdots \supset \text{rad}^t M \supset 0$ é uma série de composição, chamada de **série radical** ou **série descendente de Loewy**. Neste caso o menor valor de t tal que $\text{rad}^t M = 0$ é chamado de **comprimento da série radical** e é denotado por $t = r\ell(M)$;

(3) a sequência $0 \subset \text{soc}\, M \subset \text{soc}\,^2 M \subset \cdots \subset \text{soc}\,^t M \subset 0$ é uma série de composição, chamada de **série de socles** ou **série ascendente de Loewy**, onde definimos recursivamente $\text{soc}\,^{i+1} M = p^{-1}(\text{soc}\,(M/\text{soc}\,^i M))$, sendo $p : M \longrightarrow M/\text{soc}\,^i M$ a projeção canônica. Neste caso o menor valor de t tal que $\text{soc}\,^t M = M$ é chamado de **comprimento da série de socles**, e o denotamos por $t = s\ell(M)$.

Pode-se mostrar que para qualquer A-módulo M, os comprimentos das séries radical e de socles coincidem. Neste caso, o valor comum $\ell\ell(M) \doteq r\ell(M) = s\ell(M)$ é chamado de **comprimento de Loewy** do módulo M.

Pode-se mostrar que uma álgebra é serial à direita se, e somente se, para qualquer módulo projetivo indecomponível P tem-se que $\text{rad}P/\text{rad}^2 P$ é um módulo simples ou o módulo nulo. Desta forma, concluímos que

Proposição A.9 ((**ASS06**), V.2.6.). Uma k-álgebra básica A é serial à direita se, e somente se, cada vértice do quiver ordinário Q_A é origem de no máximo uma flecha.

Dizemos que uma álgebra A é de **Nakayama** se A é serial à direita e à esquerda. No restante do capítulo, A denotará uma álgebra de Nakayama. Podemos caracterizar as álgebras de Nakayama através de seu quiver ordinário Q_A através da seguinte proposição:

Proposição A.10 ((**ASS06**), V.3.2.). Seja A uma álgebra de dimensão finita. Então A é uma álgebra de Nakayama se, e somente se, o quiver ordinário de A é de uma das seguintes formas:

$$A_n : \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \cdots \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \quad \text{ou} \quad \Delta_n : \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl] & \cdots \arrow[l] & \bullet \arrow[l] & \\ \bullet \arrow[dr] & & & & \bullet \arrow[ul] \\ & \bullet \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

Esta caracterização se refere apenas ao quiver ordinário deste tipo de álgebra. Porém, o Teorema de Gabriel afirma que para cada álgebra A existem um quiver (ordinário) Q_A e um ideal I de kQ tais que $A \cong kQ_A/I$. Vejamos então o que acontece com as álgebras quociente quando A é uma álgebra de Nakayama.

Lema A.11 ((**ASS06**), V.3.3.). Sejam A uma álgebra e J um ideal próprio de A.

(a) Se A é serial à direita, então A/J é serial à direita;

(b) Se A é uma álgebra de Nakayama, então A/J também é de Nakayama.

Desta forma qualquer álgebra quociente obtida de uma álgebra de Nakayama é também uma álgebra de Nakayama.

Ainda mais, se A é uma álgebra de Nakayama e P é um A-módulo projetivo indecomponível tal que $\ell\ell(P) = \ell\ell(A)$, então P também é um módulo injetivo.

A seguinte observação caracteriza os A-módulos sobre álgebras de Nakayama.

Observação A.12 ((**ASS06**), V.3.5.). Seja A uma álgebra de Nakayama básica cujo quiver ordinário é conexo. Considere M um A-módulo qualquer. Pode-se mostrar que existe um A-módulo projetivo P e um inteiro t, com $1 \leqslant t \leqslant \ell\ell(P)$, tais que $M \cong P/\mathrm{rad}^t P$. Desta forma as álgebras de Nakayama sempre são de tipo de representação finito, i.e., possuem uma quantidade finita de classes de isomorfismo de módulos indecomponíveis, o que equivale a dizer que $\Gamma(\mathrm{mod}\, A)$ é um quiver finito.

Também como consequência dessas observações temos que uma álgebra básica e conexa A é de Nakayama se, e somente se, todo módulo indecomponível é unisserial.

A.2.2 Morfismos em álgebras de Nakayama

Seja A uma álgebra de Nakayama. Vimos na seção anterior que cada A-módulo pode ser escrito na forma $M \cong P/\mathrm{rad}^t P$ com P um módulo projetivo e $1 \leqslant t \leqslant \ell\ell(P)$. Além disso, vimos que as álgebras de Nakayama são de tipo de representação finito.

Podemos então tentar construir o quiver de Auslander-Reiten destas álgebras. Para cada A-módulo $M \cong P/\mathrm{rad}^t P$ temos uma sequência de Auslander-Reiten dada por

$$\begin{tikzcd} & & \frac{\mathrm{rad}\, P}{\mathrm{rad}^t P} \arrow[dr, "-j"] & & \\ 0 \arrow[r] & \frac{\mathrm{rad}\, P}{\mathrm{rad}^{t+1} P} \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "i"'] & & \frac{P}{\mathrm{rad}^t P} \arrow[r] & 0 \\ & & \frac{P}{\mathrm{rad}^{t+1} P} \arrow[ur, "p"'] & & \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

com q, p epimorfismos canônicos e i, j inclusões.

Desta forma, para todo A-módulo M que não seja projetivo temos que $\ell(\tau M) = \ell(M)$ e isto significa que os módulos simples estão na mesma órbita.

Já vimos que sempre que J é um ideal bilateral de A, a projeção canônica induz um funtor (inclusão) de $\mathrm{mod}\,(A/J)$ em $\mathrm{mod}\, A$. Além disso, vimos que sempre que M é um (A/J)-módulo τ-rígido sobre A então M será um módulo τ-rígido sobre A/J. Também vimos que se J é o ideal bilateral gerado por um idempotente $e \in A$ então vale a recíproca da afirmação anterior, ou seja, todo (A/J)-módulo τ-rígido é também um A-módulo τ-rígido.

Além disso, pode-se mostrar que se M, P, I são módulos indecomponíveis, com P projetivo e I injetivo, então temos em (**ASS06**) que:

(1) $\mathrm{Hom}_A(P, M) \neq 0$ se, e somente se, $\mathrm{top}\, P$ é um fator de composição de M;

(2) $\mathrm{Hom}_A(M, I) \neq 0$ se, e somente se, $\mathrm{soc}\, I$ é um fator de composição de M;

(3) se $M \ncong P$, a inclusão natural $\mathrm{rad}\, P \longrightarrow P$ induz um isomorfismo $\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{rad}\, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M, P)$;

(4) se $M \ncong I$, a projeção canônica $I \longrightarrow I/\mathrm{soc}\, I$ induz um isomorfismo $\mathrm{Hom}_A(I/\mathrm{soc}\, I, M) \cong \mathrm{Hom}_A(I, M)$

Vamos lembrar que um A-módulo M é dito de suporte τ-inclinante se existe um idempotente $e \in A$ tal que M é um $(A/\langle e \rangle)$-módulo τ-inclinante. Desta forma, vimos no Capítulo 3 que um módulo τ-rígido é de suporte τ-inclinante se, e somente se, $|M| = s(M)$, ou seja, a quantidade de somandos diretos indecomponíveis não isomorfos dois a dois de M coincide com a quantidade de módulos simples não isomorfos que são fatores de composição de M.

A.2.3 Módulos τ-inclinantes sobre álgebras de Nakayama

Para um inteiro $n > 0$ e para um inteiro qualquer i, existem inteiros j e $1 \leqslant k \leqslant n$ tais que $i = nj + k$. Então definimos $(i)_n \doteq k$. Para inteiros $i_1 < i_2$ colocamos

$$[i_1, i_2]_n \doteq \{(i_1)_n, (i_1 + 1)_n, \ldots, (i_2 - 1)_n, (i_2)_n\}.$$

Como A é uma álgebra de Nakayama, cada A-módulo indecomponível M é unicamente determinado, a menos de isomorfismo, pelo seu topo simples S_j e seu comprimento de Loewy. Nesse caso M tem uma única série de composição cujos fatores são:

$$S_{(j)_n}, S_{(j-1)_n}, \ldots, S_{(j-\ell+1)_n}.$$

Lema A.13. Sejam $M = P_j/\mathrm{rad}^\ell P_j$ e $N = P_i/\mathrm{rad}^k P_i$, com $i, j, k, \ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dois A-módulos. Se $\mathrm{Hom}(P_j, N) \neq 0$ e $\ell \geqslant k$ então temos que $\mathrm{Hom}_A(M, N) \neq 0$.

Demonstração. Considere um morfismo não nulo $f : P_j \longrightarrow N$. Como $\ell \geqslant k$, temos que $\mathrm{rad}^\ell N = 0$. Além disso, como $f(\mathrm{rad} P_j) \subset \mathrm{rad} N = 0$, segue que $f(\mathrm{rad}^\ell P_j) \subset \mathrm{rad}^\ell N = 0$. Então f induz um morfismo não nulo $M = P_j/\mathrm{rad}^\ell P_j \longrightarrow N$. □

Dado um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de A podemos gerar um conjunto de idempotentes de A dado por

$$\mathcal{E}_A \doteq \left\{ \sum_{j \in J} e_j \,\middle|\, J \subset \{1, 2, \ldots, n\} \right\}.$$

Desta forma existe uma bijeção $\phi : \mathcal{E}_A \longrightarrow \mathcal{E}_A$ dada por $\phi\left(\sum_{j\in J} e_j\right) = \sum_{j \in J} e_{j-1}$ onde definimos $e_0 \doteq e_n$.

Vamos denotar por $\mathrm{mod}_{\mathrm{np}} A$ a subcategoria plena de $\mathrm{mod} A$ cujos objetos são todos os A-módulos que não possuem somando projetivo. Além disso, vamos denotar por $\mathrm{ps}\tau\text{-}\mathrm{tilt}_{\mathrm{np}} A \doteq \mathrm{ps}\tau\text{-}\mathrm{tilt} A \cap \mathrm{mod}_{\mathrm{np}} A$ a subcategoria plena formada por todos os módulos de suporte τ-inclinante próprios que não possuem somando projetivo. Para cada A-módulo $M \in \mathrm{mod} A$ existem únicos $M_{\mathrm{np}} \in \mathrm{mod}_{\mathrm{np}} A$ e $M_{\mathrm{pr}} \in \mathrm{proj} A$ tais que $M = M_{\mathrm{np}} \oplus M_{\mathrm{pr}}$. Desta forma vamos entender o que ocorre com os somandos projetivos e não projetivos dos módulos τ-inclinantes.

Dado um módulo de suporte τ-inclinante M, vimos que existe um único idempotente $e \in A$ tal que M é um módulo τ-inclinante sobre $A/\langle e \rangle$ (ver Corolário 3.22). Denotaremos esse idempotente associado ao módulo de suporte τ-inclinante M por e_M.

Proposição A.14 ((**Ada16**), 2.7.). Se N é um módulo de suporte τ-inclinante próprio sem somando projetivo não nulo, então temos que $N \oplus \phi(e_N)A$ é um módulo τ-inclinante.

Demonstração. Como N é anulado por e_N, temos que N não tem $\operatorname{top}(e_N A)$ como um fator de composição. Pela sequência (A.1), τN não tem $\operatorname{top}(\phi(e_N)A)$ como fator de composição, logo $\operatorname{Hom}_A(\phi(e_N)A, \tau N) = 0$. Então $N \oplus \phi(e_N)A$ é um A-módulo τ-rígido. Além disso, como $N \in \operatorname{mod}_{\mathrm{np}} A$, temos que

$$|N \oplus \phi(e_N)A| = |N| + |\phi(e_N)A| = |N| + |e_N A| = |A|,$$

donde concluímos que $N \oplus \phi(e_N)A$ é um A-módulo τ-inclinante. □

Logo, a cada módulo de suporte τ-inclinante próprio temos um complemento como módulo τ-inclinante explicitamente dado. Por outro lado, sempre que M possui um somando projetivo ele tem que ser da forma acima, de acordo com o seguinte lema.

Lema A.15. Seja $M = M_{\mathrm{np}} \oplus M_{\mathrm{pr}}$ um A-módulo τ-inclinante básico, onde M_{pr} é não nulo. Então:

(1) M_{np} é um módulo de suporte τ-inclinante próprio;

(2) $M_{\mathrm{pr}} = \phi\left(e_{M_{\mathrm{np}}}\right) A$.

Demonstração. Suponhamos que $e = e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_k} \in A$ é um idempotente não nulo tal que $\operatorname{add} M_{\mathrm{pr}} = \operatorname{add} eA$. Como M é τ-rígido e A é de Nakayama, $\tau M = \tau M_{\mathrm{np}}$ não possui $\operatorname{top} eA$ como fator de composição, donde M_{np} não possui $\operatorname{top}(\phi^{-1}(e)A)$ como fator de composição (pela sequência (A.1)). Portanto M_{np} é um $(A/\langle\phi^{-1}(e)\rangle)$-módulo τ-rígido. Como $|M| = |A|$ e $|M_{\mathrm{pr}}| = |eA|$ tem-se que

$$|M_{\mathrm{np}}| = |M| - |eA| = |A| - k = |A/\langle\phi^{-1}(e)\rangle|.$$

Potanto M_{np} é um $A/\langle\phi^{-1}(e)\rangle$-módulo τ-inclinante, donde tem-se que M_{np} é um módulo de suporte τ-inclinante próprio (pois $e \neq 0$). Pela maximalidade de $e_{M_{\mathrm{np}}}$ temos que $\phi^{-1}(e) = e_{M_{\mathrm{np}}}$ e logo $e = \phi(e_{M_{\mathrm{np}}})$. Portanto $M_{\mathrm{pr}} = eA = \phi(e_{M_{\mathrm{np}}})A$. □

A próxima proposição mostra que todos os módulos inclinantes possuem um somando projetivo.

Proposição A.16 ((**Ada16**), 2.8.). Seja M um módulo τ-inclinante. Então M tem como somando direto um A-módulo projetivo não-nulo.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que M não possua somando direto projetivo não nulo. Vamos escolher um somando direto indecomponível L de M com comprimento de Loewy maximal de forma que $M = L \oplus N$, para algum A-módulo N. Como M

é um módulo τ-rígido e L, N são somandos de M segue que $\mathsf{Hom}_A(L, \tau N) = 0$. O comprimento de Loewy de L é maior que o comprimento de Loewy de qualquer somando de N (pela escolha de N). Se P_L é a cobertura projetiva de L temos que $\mathsf{Hom}_A(P_L, \tau N) = 0$ pelo Lema A.13. Logo $P_L \oplus N$ é um A-módulo τ-inclinante. Além disso, pelo lema anterior N é de suporte τ-inclinante sobre A. Desta forma N dá origem a três módulos básicos de suporte τ-inclinante: N, $L \oplus N$ e $P_L \oplus N$. Estes módulos pertencem a pares de suporte τ-inclinante distintos (N, P_1), $(L \oplus N, P_2)$ e $(P_L \oplus N, P_3)$, para três módulos projetivos P_1, P_2 e P_3. Isto é absurdo pois, pelo Teorema 4.15, cada par de suporte τ-inclinante quase completo possui exatamente dois complementos. □

Estes últimos resultados permitem construir uma bijeção entre os módulos τ-inclinantes e os módulos de suporte τ-inclinante próprio que não possuem somando projetivo.

Teorema A.17. Seja A uma álgebra de Nakayama. Então existem bijeções mutuamente inversas

$$\begin{array}{ccc} \tau\text{-tilt}A & \longleftrightarrow & \mathsf{ps}\tau\text{-tilt}_{\mathsf{np}}A \\ M & \longmapsto & M_{\mathsf{np}} \\ N \oplus \phi(e_N)A & \longleftarrow & N. \end{array}$$

Demonstração. De fato, a Proposição A.16 afirma que cada módulo τ-inclinante M possui um somando projetivo como somando direto. No Lema A.15, vimos que este somando projetivo tem de ser da forma $\phi(e_{M_{\mathsf{np}}})A$. Desta forma a aplicação $\Phi : \tau\text{-tilt}A \longrightarrow \mathsf{ps}\tau\text{-tilt}_{\mathsf{np}}A$, dada por $\Phi(M) = M_{\mathsf{np}}$ é bijetora pois é

injetora: suponha que M, M' são τ-inclinantes tais que $\Phi(M) = \Phi(M') = M_{\mathsf{np}}$, então por A.15 tem-se que $M = M_{\mathsf{np}} \oplus \phi(e_{M_{\mathsf{np}}})A = M'$. Logo Φ é injetora.

sobrejetora: uma vez que para cada módulo M_{np} podemos construir o A-módulo inclinante $M_{\mathsf{np}} \oplus \phi(e_{M_{\mathsf{np}}})A$.

Logo Φ é uma bijeção. Além disso a aplicação $\Psi : \mathsf{ps}\tau\text{-tilt}_{\mathsf{np}}A \longrightarrow \tau\text{-tilt}A$ dada por $\Psi(N) = N \oplus \phi(e_N)A$ é inversa de Φ, por construção. □

Este último teorema também permite encontrar todos os módulos de suporte τ-inclinante sobre uma determinada álgebra da seguinte forma:

Corolário A.18 ((**Ada**), 2.9.). Seja A uma álgebra de Nakayama. Temos que

$$\mathsf{s}\tau\text{-tilt}A = \coprod_{e \in \mathcal{E}_A \setminus \{0\}} \Big(\tau\text{-tilt}(A/\langle e \rangle) \coprod \{ M \oplus \phi(e)A \mid M \in \tau\text{-tilt}_{\mathsf{np}}(A/\langle e \rangle) \} \Big)$$

Demonstração. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \mathsf{s}\tau\text{-tilt}A &= \coprod_{e\in\mathcal{E}_A} \tau\text{-tilt}(A/\langle e\rangle) \\ &= \coprod_{e\in\mathcal{E}_A\setminus\{0\}} (\tau\text{-tilt}(A/\langle e\rangle) \coprod \tau\text{-tilt}A. \end{aligned}$$

Porém o teorema anterior mostra que

$$\tau\text{-tilt}A = \coprod_{e\in\mathcal{E}_A\setminus\{0\}} \{M \oplus \phi(e)A \mid M \in \tau\text{-tilt}_{\mathsf{np}}(A/\langle e\rangle)\},$$

pois a cada módulo τ-inclinante associamos um módulo projetivo $\phi(e)A$, e o idempotente $e \in A$ é unicamente determinado, donde segue que

$$\begin{aligned} \mathsf{s}\tau\text{-tilt}A &= \coprod_{e\in\mathcal{E}_A} \tau\text{-tilt}(A\langle e\rangle) \\ &= \coprod_{e\in\mathcal{E}_A\setminus\{0\}} (\tau\text{-tilt}(A/\langle e\rangle) \coprod \tau\text{-tilt}A \\ &= \left(\coprod_{e\in\mathcal{E}_A\setminus\{0\}} (\tau\text{-tilt}(A/\langle e\rangle)\right) \coprod \left(\coprod_{e\in\mathcal{E}_A\setminus\{0\}} \{M \oplus \phi(e)A \mid M \in \tau\text{-tilt}_{\mathsf{np}}(A/\langle e\rangle)\}\right) \\ &= \coprod_{e\in\mathcal{E}_A\setminus\{0\}} \left(\tau\text{-tilt}(A/\langle e\rangle) \coprod \{M \oplus \phi(e)A \mid M \in \tau\text{-tilt}_{\mathsf{np}}(A/\langle e\rangle)\}\right) \end{aligned}$$

□

A.2.4 Exemplo

Considere a álgebra cujo quiver ordinário sem relações é dado por

$$Q_L = \ 1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \ .$$

A tabela a seguir contém todos os módulos τ-inclinantes sobre a álgebra kQ_L.

Idempotente (e)	$Q_{L/\langle e\rangle}$	τ-tilt $(L/\langle e\rangle)$	τ-tilt$L$
$e_1+e_2+e_3$	$\varnothing$	0	$M_1 = P_1 \oplus P_2 \oplus P_3$
e_1+e_2	3	3	$M_2 = 3 \oplus P_1 \oplus P_3$
e_1+e_3	2	2	$M_3 = 2 \oplus P_2 \oplus P_3$
e_2+e_3	1	1	—
e_1	$2 \longleftarrow 3$	$2 \oplus {}^{3}_{2}$, $3 \oplus {}^{3}_{2}$	$M_4 = 2 \oplus {}^{3}_{2} \oplus P_3$ $M_5 = 3 \oplus {}^{3}_{2} \oplus P_3$
e_2	$1 \qquad 3$	$1 \oplus 3$	—
e_3	$1 \longleftarrow 2$	$1 \oplus {}^{2}_{1}$, $2 \oplus {}^{2}_{1}$	—

Construímos ela considerando que os idempotentes que aparecem na primeira coluna são todos os idempotentes não nulos de $\mathcal{E}_A$. Na segunda coluna construímos o quiver ordinário da álgebra quociente. Na terceira coluna mostramos todos os módulos τ-inclinantes sobre a álgebra $L/\langle e\rangle$ e por fim na última coluna adicionamos os módulos projetivos que faltam para os módulos da terceira coluna serem τ-inclinantes sobre A, i.e., para cada $(A/\langle e\rangle)$-módulo τ-inclinante N obtido na terceira coluna, obtemos o L-módulo $N \oplus \phi(e)L$ que é τ-inclinante, pelo que vimos durante o capítulo.

REFERÊNCIAS

[ACPV08] I. Assem, J. Cappa, M. I. Platzeck, M. Verdecchia. Modulos inclinantes y algebras inclinadas. Notas de Algebras y Análises. Universidade Nacional del Sur, Bahia Blanca - Argentina, 21, 2008.

[Ada16] T. Adachi. The classification of τ-tilting modules over Nakayama algebras. Journal of Algebra, 452 : 227 - 262, 2016.

[AI12] T. Aihara, O. Iyama. Silting mutation in triangulated categories. Journal of the London Mathematical Society, 85 (3) : 633 - 668, 2012.

[Aih13] T. Aihara. Tilting-connected symmetric algebras. Algebras and Representation Theory, 16 (3) : 873 - 894, 2013.

[AIR14] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten. τ-Tilting Theory. Compositio Mathematica, 150 (3) : 415-452, 2014.

[APR79] M. Auslander, M. I. Platzeck, I. Reiten. Coxeter functors without diagrams. Transactions of the Ameican Mathematical Society, 250 : 1 - 17, 1979.

[AR91] M. Auslander, I. Reiten. Applications of contravariantly finite subcategories. Advances in Mathematics, 86 (1) : 111 - 152, 1991.

[ARS95] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø. Representation theory of artin algebra. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v. 36., Cambridge Univ. Press, 1995.

[AS80] M. Auslander, S. O. Smalo. Preprojective modules over Artin algebras. Journal of Algebra, 66 (1) : 61- 122, 1980.

[AS81] M. Auslander, S. Smal. Almost Split Sequences in Subcategories. Journal of Algebra, 69 (2) : 426-454, 1981.

[Ass84] I. Assem. Torsion theories induced by tilting modules. Canadian Journal of Mathematics, 36 (5) : 899 - 913, 1984.

[Ass97] I. Assem. Algèbres et modules. Presses Université Ottawa, 1997.

[ASS06] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1. Techniques of Representation Theory. Londres: Cambridge University Press, 2006. 469 p.

[BB80] S. Brenner, M. C. R. Butler. Generalization of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. Lecture Notes in Mathematics, Springer, 839: 103 - 169, 1980.

[BCW15] V. Bekkert, F. U . Coelho, H. Wagner. Tree Oriented Pullback. Communications in Algebra, 43 (10) : 4247 - 4257, 2015.

[BGP73] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev. Coxeter functors and Gabriel's theorem. Russian Mathematical Serveys, 28 (2) : 17 - 32, 1973.

[BMRRT06] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov. Tilting theory and cluster combinatorics. Advances in Mathematics, 204 (2), 572 - 618, 2006.

[Bon81] K. Bongartz. Tilted algebras. Representations of Algebras. Proceedings ICRA, Lecture Notes in Mathematics, 903 : 26 - 38, 1981.

[CHU94] F. Coelho, D. Happel, L. Unger. Complements to partial tilting modules. Journal of Algebra, 170 (1) : 184 - 205, 1994.

[Dic66] S. E. Dickson. A torsion theory for abelian categories. Transactions of the American Mathematical Society, 121 (1) : 223 - 235, 1966.

[Gab80] P. Gabriel. Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras. Lecture notes in Mathematics, v. 831, Springer-Verlag Berlin and New York : 1 - 71, 1980.

[Hap88] D. Happel. Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras. Bulletin of the American Mathematical Society, 22 (1) : 153 - 158, 1990.

[HHK07] L. A. Hügel, D. Happel, H. Krause. Handbook of Tilting Theory. Cambridge University Press, 2007.

[HL00] F. Huard, S. Liu. Tilted String Algebras. Journal of Pure and Applied Algebra, 153 (2) : 151 - 164, 2000.

[HR82] D. Happel, C. M. Ringel. Tilted algebras. Transactions of the American Mathematical Society, 274 : 399 - 443, 1982.

[HU89] D. Happel, L. Unger. Almost complete tilting modules. Proceedings of the American Mathematical Society, 107 (3) : 603 - 610, 1989.

[HU94] D. Happel, L. Unger. Partial tilting modules and covariantly finite subcategories. Communications in Algebra, 22 (5) : 1723 - 1727, 1994.

[HU05] D. Happel, L. Unger. On a partial order of tilting modules. Algebras and Representation Theory, 8 : 147 - 156, 2005.

[IY08] O. Iyama, Y. Yoshino. Mutations in triangulated categories and rigid Cohen-Macauly modules. Inventiones Mathematicae, 172 (1) : 117 - 168, 172.

[Lev08] J. Levesque. Nakayama oriented pullbacks and stably hereditary algebras. Journal of Pure and Applied Algebra, 212 (5) : 1149 - 1161, 2008.

[LZ15] S. Li, S. Zhang. Some applications of τ-tilting theory. arXiv:1512.03613, 2015.

[Mac91] S. M. Lane. Categories for the Working Mathematician, Springer Verlag, 1991.

[Mar80] N. Marmaridis. Reflection functors, in: Proceedings of ICRA II (Ottawa, 1979), Lecture Notes in Mathematics, v. 832, Springer, Berlin, 1980.

[Miy86] Y. Miyashita. Tilting modules of finite projective dimension. Mathematische Zeitschrigt, 193 : 113 - 146, 1986.

[Rei10] I. Reiten. Tilting theory and Cluster Algebras, arXiv : 1012.6014, 2010.

[Rot79] J. Rotman. An introduction to homological algebra. Academic Press. Inc., 1979.

[RS91] C. Riedtmann, A. Schofield. On a simplicial complex associated with tilting modules. Commentarii Mathematici Helvetici, 66 : 70 - 78, 1991.

[Sma84] S. Smalø. Torsion Theories and Tilting Modules. Bulletin of the London Mathematical Society, 16 (5) : 518 - 522, 1984.

[Ung90] L. Unger. Schur modules over wild, finite-dimensional path algebras with three simple modules. Journal of Pure and Applied Algebra, 64 (2) : 205-222, 1990.

[YX16] Y. Yang, J. Xu. A new caracterizations of hereditary Algebras. Communications in Algebra, 44 (10) : 4196 - 4199, 2016.

ÍNDICE REMISSIVO