ALEXANDRE ARIAS JUNIOR

REGULARIDADE GEVREY DAS SOLUÇÕES DE UMA CERTA CLASSE DE SISTEMAS

CURITIBA
2018

ALEXANDRE ARIAS JUNIOR

REGULARIDADE GEVREY DAS SOLUÇÕES DE UMA CERTA CLASSE DE SISTEMAS

Dissertação de mestrado apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós Graduação em Matemática do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.
Orientador: Prof. Dr. Alexandre Kirilov.
Coorientador: Prof. Dr. Cleber de Medeira.

CURITIBA
2018

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

A696r Arias Junior, Alexandre
Regularidade Gevrey das soluções de uma certa classe de sistemas [recurso eletrônico] /Alexandre Arias Junior. – Curitiba, 2018.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

Orientador: Alexandre Kirilov. Coorientador: Cleber de Medeira.

1. Matemática. 2. Frações contínuas. 3. Análise de Fourier. 4. Operadores diferenciais parciais. I. Universidade Federal do Paraná. II. Kirilov, Alexandre. III. Medeira, Cleber de. IV. Título.

CDD: 510

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ALEXANDRE ARIAS JUNIOR** intitulada: **Regularidade Gevrey das Soluções de uma Certa Classe de Sistemas**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 23 de Fevereiro de 2018.

ALEXANDRE KIRILOV
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

FERNANDO DE AVILA SILVA
Avaliador Interno (UFPR)

Paulo D. Cordaro
PAULO DOMINGOS CORDARO
Avaliador Externo (USP)

RESUMO

Neste trabalho apresentamos condições necessárias e suficientes para a G^s-hipoeliticidade global de uma classe de sistemas com coeficientes variáveis em classes de Gevrey. Na preparação para este estudo recuperamos a condição de Greenfield-Wallach para a G^s-hipoeliticidade global de sistemas com coeficientes constantes. A aplicação da condição de Greenfield-Wallach a uma classe de sistemas traz a tona uma discussão sobre vetores exponenciais Liouville de ordem s, a qual exploramos construindo exemplos usando técnicas de frações contínuas e teoremas de aproximação de números irracionais.

Palavras-chave: Funções Gevrey periódicas; Ultradistribuições periódicas; Hipoeliticidade Gevrey global, Vetores exponenciais Liouville de ordem s.

ABSTRACT

In this work we present necessary and sufficient conditions for the global G^s-hypoeliticity of a class of systems with variable coefficients in Gevrey classes. In the preparation for this study we recovered the Greenfield-Wallach condition for the global G^s-hypoeliticity of constant coefficients systems. Applying the Greenfield-Wallach condition in a class of systems brings up a discussion on Liouville's exponential vectors of order s, which we explore by constructing examples using continued fractions techniques and irrational number approximation theorems.

Keywords: Periodic Gevrey functions; Periodic ultradistributions; Gevrey globally hypoeliticity; Liouville's exponential vectors of order s.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo dessa dissertação é apresentar um estudo sobre a hipoeliticidade Gevrey global da seguinte classe de sistemas

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - c_j(t_j)\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \ldots n, \tag{1.1}$$

sendo $(t_1, t_2 \ldots, t_n, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e coeficientes $c_j(t_j) = a_j(t_j) + ib_j(t_j)$ no espaço $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ das funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$.

Dizer que o sistema $L = (L_1, \ldots, L_n)$ é globalmente G^s-hipoelítico significa que, se uma ultradistribuição periódica $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ é tal que $L_j u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ para todo $j = 1, \ldots, n$, então $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Esta mesma classe de sistema foi estudada por A. Bergamasco em [2], assumindo que os coeficientes $c_j(t_j)$ são funções analíticas-reais periódicas. Bergamasco apresenta condições necessárias e suficientes para que o sistema (1.1) seja globalmente analítico-hipoelítico (ver Teorema 3.3, pg 4120 de [2]). Neste trabalho estendemos esse teorema para o contexto da hipoeliticidade Gevrey global obtendo o seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Dado o sistema*

$$L_j = \partial_{t_j} - c_j(t_j)\partial_x, \ j = 1, \ldots n,$$

com $c_j(t_j) = a_j(t_j) + ib_j(t_j) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_j})$*. Seja* $J = \{j_1, \ldots, j_\ell\}$ *o conjunto de índices* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *tais que* $b_j(t_j)$ *não muda de sinal e* $a_{0j} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} a_j(s)ds$ *a média da função* a_j*.*

Este sistema é globalmente G^s-*hipoelítico se, e somente se, valem as seguintes condições:*

(i) $J \neq \emptyset$*;*

(ii) se $b_j(t_j) \equiv 0$ *para todo* $j \in J$*, então* $a_0 = (a_{0j_1}, \ldots, a_{0j_\ell}) \notin \mathbb{Q}^\ell$ *e* a_0 *não é um vetor exponencial Liouvile de ordem* s

A definição precisa de vetor exponencial Liouvile de ordem s está no Capítulo 3, Definição 3.5, e a demonstração deste teorema ocupa todo o Capítulo 4.

A classe de sistemas com coeficientes constantes também foi estudada neste trabalho. No Teorema (3.2), mostramos que a G^s-hipoeliticidade global de tais sistemas é equivalente a uma condição de crescimento sobre o seu símbolo.

Inspirados pelo artigo [3] de S. Greenfield, utilizamos frações contínuas para mostrar a existência de um número de Liouville que não é exponencial Liouville de ordem s (seja qual for o $s \geq 1$), e também, ainda utilizando frações contínuas, mostramos a existência de um vetor (α, β) que não é exponencial Liouville de ordem s, mas que suas entradas α e β são números exponenciais Liouville de ordem s. Para a construção de tal vetor usamos as ideias de A. Bergamasco presentes em [2].

Ressaltamos que a relação da G^s-hipoeliticidade de sistemas com coeficientes constantes com o comportamento do seu símbolo, é uma extensão do caso da hipoeliticidade analítica global para sistemas com coeficientes constantes, estudada por A. Bergamasco em [1].

Para finalizar, como é de praxe, no Capítulo 2 estabelecemos os pré-requisitos necessários para o estudo desenvolvido nos capítulos posteriores e no Capítulo 5 apresentamos uma série de resultados auxiliares que são bastante úteis para o desenvolvimento do trabalho, mas que julgamos não serem de especial interesse estarem presentes na parte principal do texto.

2 PRÉ-REQUISITOS

Neste capítulo apresentaremos resultados e definições que serão importantes nos capítulos posteriores.

Vamos utilizar $\mathbb{N}$ para o conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\mathbb{N}_0^n$ para o conjunto dos multi-índices. Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ são multi-índices e $t \in \mathbb{R}^n$ usaremos as seguintes notações:

- $|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$ (comprimento do multi-índice);
- $\beta \leq \alpha \iff \beta_j \leq \alpha_j, \ j = 1, \ldots, n$;
- $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$;
- se $\beta \leq \alpha$, então $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$ e
$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!};$$
- $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \ldots t_n^{\alpha_n}$;
- $\partial^\alpha = \partial_{t_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{t_n}^{\alpha_n}$, sendo $\partial_{t_j} = \frac{\partial}{\partial_{t_j}}$;
- $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, sendo $D_j = -i\partial_{t_j}$.

Para t e x em $\mathbb{R}^n$ utilizamos o produto interno usual $t \cdot x = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$. Se a é um número real e $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, escrevemos

$$(a, t_{-j}) = (t_1, \ldots, t_{j-1}, a, t_{j+1}, \ldots, t_n)$$

a fim de destacar a $j-$ésima entrada do vetor. Desta forma podemos escrever $t = (t_j, t_{-j})$.

Há duas fórmulas de derivação bastante usadas neste trabalho. A primeira é a regra de Leibniz para a derivação do produto de funções:

$$D^\alpha(\phi\psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\phi D^\beta \psi.$$

A segunda é a fórmula de Faà di Bruno, que fornece uma expressão para a $k-$ésima derivada de uma composição de funções reais a valores reais

$$(f \circ g)^{(k)}(x) = \sum_{\Delta(k)} \frac{k!}{\alpha!} f^{(|\alpha|)}(g(x)) \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{g^{(j)}(x)}{j!} \right)^{\alpha_j},$$

sendo $\Delta(k) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^k : \sum_{j=1}^n j\alpha_j = k\}$.

Observamos que quando f é uma função real a valores complexos, a fórmula de Faà di Bruno contínua válida. De fato, basta notar que

$$(f \circ g)^{(k)}(x) = (\Re(f) \circ g)^{(k)}(x) + i(\Im(f) \circ g)^{(k)}(x)$$

e aplicar a Fórmula de Faà di Bruno para funções reais.

2.1 Funções Suaves Periódicas e Distribuições Periódicas

As definições e resultados desta seção podem ser encontrados em [8].

Vamos denotar por $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis e $2\pi-$periódicas em cada variável. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ considere a seminorma

$$p_k(f) = \sup\{|D^{\alpha} f(t)| : t \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq k\},\ f \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Também considere a métrica correspondente a essa família de seminormas

$$d(f, g) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(f-g)}{1 + p_k(f-g)},\ f, g \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Definição 2.1. *Sejam $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Diremos que f_k converge para f no sentido de $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, e denotamos por $f_k \to f$ em $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, se $\lim_{k\to\infty} d(f_k, f) = 0$.*

Proposição 2.2. *Sejam $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então $f_k \to f$ em $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $D^{\alpha} f_k$ converge uniformemente para $D^{\alpha} f$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.*

Vamos denotar por $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ o dual topológico de $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o espaço dos funcionais lineares contínuos $u : C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Chamamos os elementos de $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ de distribuições periódicas.

Exemplo 2.3. *Dada $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ contínua e $2\pi-$periódica definimos a distribuição Tu por*

$$< Tu, f >= \int_{[0,2\pi]^n} u(t) f(t) dt,\ f \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Chamamos Tu de distribuição periódica induzida pela função u. Por abuso de notação, denotaremos Tu simplesmente por u. Deste modo podemos considerar que funções são também distribuições. Pode-se provar que $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ está incluso de forma injetiva em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.4. *As seguintes afirmações a respeito de um funcional linear $u : C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ são equivalentes:*

(i) u é contínua;

(ii) Existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$| < u, f > | \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup\{|D^{\alpha} f(t)| : t \in \mathbb{R}^n\}.$$

Definição 2.5. *Sejam* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. *Diremos que* u_k *converge para* u *no sentido de* $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, *e denotamos por* $u_k \to u$ *em* $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, *quando* $< u_k - u, f > \to 0$ *para toda* $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.6. *Dados* $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ *definimos a* $\alpha-$*ésima derivada de* u *e a multiplicação de* f *por* u *como sendo, respectivamente, as distribuições* $D^\alpha u$ *e* uf *definidas por*

$$< D^\alpha u, g > = < u, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g) > \ \ e \ \ < uf, g > = < u, fg >$$

para toda $g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

2.1.1 Séries de Fourier em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Definição 2.7. *Dizemos que uma sequência de números complexos* $(a_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^n}$ *é rapidamente decrescente, quando para cada* $N \in \mathbb{N}$ *existir* $C_N > 0$ *satisfazendo*

$$|a_\xi| \leq C_N |\xi|^{-N}, \ \xi \in \mathbb{Z}^n - \{0\}.$$

Definição 2.8. *Dizemos que uma sequência de números complexos* $(a_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^n}$ *é de crescimento lento, quando existirem* $N \in \mathbb{N}$ *e* $C > 0$ *satisfazendo*

$$|a_\xi| \leq C|\xi|^N, \ \xi \in \mathbb{Z}^n - \{0\}.$$

Definição 2.9. *Dados* $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\xi \in \mathbb{Z}^n$, *definimos o* ξ*-ésimo coeficiente de Fourier de* u *como sendo*

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n} < u, e^{-i\xi\cdot t} > .$$

Teorema 2.10. *Dada uma sequência rapidamente decrescente* $(a_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^n}$, *a função*

$$f(t) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} a_\xi e^{i\xi\cdot t}, \ t \in \mathbb{R}^n,$$

está bem definida e a convergência é no sentido de $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, *ademais*

$$\widehat{f}(\xi) = a_\xi.$$

Reciprocamente, dada $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *a sequência* $(\widehat{f}(\xi))_{\xi\in\mathbb{Z}^n}$ *é rapidamente decrescente e*

$$f(t) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot t}, \ t \in \mathbb{R}^n,$$

sendo a convergência no sentido de $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.11. *Dada uma sequência de crescimento lento* $(a_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^n}$*, então*

$$u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} a_\xi e^{i\xi\cdot t}$$

pertence a $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e a convergência é no sentido de* $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$*, ademais*

$$\widehat{u}(\xi) = a_\xi.$$

Reciprocamente, dada $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *a sequência* $(\widehat{u}(\xi))_{\xi\in\mathbb{Z}^n}$ *é de crescimento lento e*

$$u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi\cdot t},$$

sendo a convergência no sentido $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$*.*

2.1.2 Séries Parciais de Fourier em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Sejam p, q e n números naturais tais que $n = p + q$. Vamos denotar um elemento de $\mathbb{R}^n$ da seguinte maneira $(t, x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Definição 2.12. *Dados* $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\eta \in \mathbb{Z}^q$*, definimos o* η*-ésimo coeficiente parcial de Fourier de* f *em relação a variável* x *como sendo*

$$\widehat{f}_\eta(t) = (2\pi)^{-q} \int_{[0,2\pi]^q} f(t,x) e^{-i\eta\cdot x} dx, \ \ t \in \mathbb{R}^p.$$

Teorema 2.13. *Dados* $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\eta \in \mathbb{Z}^q$*, temos* $\widehat{f}_\eta \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ *e*

$$f(t,x) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^q} \widehat{f}_\eta(t) e^{i\eta\cdot x}, \ \ (t,x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,$$

sendo a convergência no sentido de $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$*. Além disso, dados* $\alpha \in \mathbb{N}^p_0$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *existe* $C_{\alpha,N} = C > 0$ *tal que*

$$|D^\alpha \widehat{f}_\eta(t)| \leq C(1 + |\eta|)^{-N}, \ \ t \in \mathbb{R}^p, \eta \in \mathbb{Z}^q.$$

Reciprocamente, seja $(f_\eta)_{\eta\in\mathbb{Z}^q}$ *uma sequência em* $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ *com a seguinte propriedade: dados* $\alpha \in \mathbb{N}^p_0$ *e* $N \in \mathbb{N}$*, existe* $C_{\alpha,N} = C > 0$ *tal que*

$$|D^\alpha f_\eta(t)| \leq C(1 + |\eta|)^{-N}, \ \ t \in \mathbb{R}^p, \eta \in \mathbb{Z}^q,$$

então a função

$$f(t,x) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^q} f_\eta(t) e^{i\eta\cdot x}, \ \ (t,x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,$$

está bem definida e a convergência é no sentido de $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$*, ademais* $\widehat{f}_\eta = f_\eta$*.*

Definição 2.14. *Dados $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\eta \in \mathbb{Z}^q$, definimos o η-ésimo coeficiente parcial de Fourier de u em relação a variável x como sendo*

$$< \widehat{u}_\eta, g(t) >= (2\pi)^{-q} < u, g(t)e^{-i\eta\cdot x} >, \ g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^p).$$

Definição 2.15. *Dados $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ e $\eta \in \mathbb{Z}^q$, a distribuição periódica $ue^{i\eta\cdot x} \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é definida por*

$$< ue^{i\eta\cdot x}, f(t,x) >= (2\pi)^q < u, \widehat{f}_{-\eta}(t) >, \ f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 2.16. *Dados $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\eta \in \mathbb{Z}^q$, temos que $\widehat{u}_\eta \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ e*

$$u = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^q} \widehat{u}_\eta e^{i\eta\cdot x}$$

sendo a convergência no sentido de $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, existem $k \in \mathbb{N}_0$ e $C > 0$ tais que

$$| < \widehat{u}_\eta, g > | \leq Cp_k(g)(1 + |\eta|)^k, \ g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^p), \eta \in \mathbb{Z}^q.$$

Reciprocamente, seja $(u_\eta)_{\eta\in\mathbb{Z}^q}$ uma sequência em $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ com a seguinte propriedade: existem $k \in \mathbb{N}_0$ e $C > 0$ tais que

$$| < u_\eta, g > | \leq Cp_k(g)(1 + |\eta|)^k, \ g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^p), \eta \in \mathbb{Z}^q,$$

então

$$u = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^q} u_\eta e^{i\eta\cdot x}$$

está bem definida e a convergência é no sentido de $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, ademais $\widehat{u}_\eta = u_\eta$.

2.2 Funções Gevrey Periódicas e Ultradistribuições Periódicas

As definições e resultados desta seção podem ser encontrados em [6]. No decorrer de todo o texto vamos sempre considerar $s \geq 1$.

Definição 2.17. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Dizemos que $f \in C^\infty(\Omega)$ é uma função Gevrey de ordem $s \geq 1$ em Ω, quando para todo compacto $K \subset \Omega$ existir constantes $C_K > 0$ e $h_K > 0$ tais que*

$$|D^\alpha f(t)| \leq C_K h_K^{|\alpha|}(\alpha!)^s, \ t \in K, \alpha \in \mathbb{N}^n_0.$$

Denotamos por $G^s(\Omega)$ o conjunto de todas as funções Gevrey de ordem s em Ω.

A seguinte proposição pode ser encontrada em [7] (*Remark* 1.4.7, pg 22).

Proposição 2.18. *Considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e Λ um aberto de $\mathbb{R}^m$. Seja $g : \Omega \to \Lambda$ tal que $g = (g_1, \dots, g_m)$ e $g_j \in G^s(\Omega)$, para $j = 1, \dots, m$, e suponha $f \in G^s(\Lambda)$. Então $f \circ g \in G^s(\Omega)$.*

Definição 2.19. *Dizemos que* $f \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *é uma função* $2\pi-$*periódica Gevrey de ordem* $s \geq 1$ *e amplitude* $h > 0$*, quando existir uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$|D^{\alpha}f(t)| \leq Ch^{|\alpha|}(\alpha!)^s, \;\; \alpha \in \mathbb{N}^n_0, \, t \in \mathbb{R}^n.$$

Denotamos por $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *o conjunto das funções Gevrey de ordem* $s \geq 1$ *e amplitude* $h > 0$*.*

Exemplo 2.20. *Se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *é uma função analítica-real* $2\pi-$*periódica, então* $f \in G^{1,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *para alguma amplitude* $h > 0$*. Vamos denotar por* $C^{w}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *o conjuntos das funções* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *que são analíticas-reais e* $2\pi-$*periódicas.*

É claro da definição que $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial e que valem as seguintes inclusões $G^{s,h_1}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset G^{s,h_2}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se $h_1 \leq h_2$ e $G^{s_1,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset G^{s_2,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se $1 \leq s_1 \leq s_2$.

A aplicação $\| \cdot \|\colon G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ dada por

$$\| f \|_{s,h} = \sup\{|D^{\alpha}f(t)|h^{-|\alpha|}(\alpha!)^{-s} : \alpha \in \mathbb{N}^n_0, t \in \mathbb{R}^n\}, \;\; f \in G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n),$$

define uma norma em $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Em particular, se $f \in G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então

$$|D^{\alpha}f(t)| \leq \| f \|_{s,h} \, h^{|\alpha|}(\alpha!)^s, \;\; t \in \mathbb{R}^n, \, \alpha \in \mathbb{N}^n_0.$$

Proposição 2.21. *O espaço* $G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *munido da norma* $\| \cdot \|_{s,h}$ *é um espaço de Banach.*

Definição 2.22. *Dizemos que* $f \in C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *é uma função* $2\pi-$*periódica Gevrey de ordem* $s \geq 1$ *quando existir alguma amplitude* $h > 0$ *tal que* $f \in G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$*. Denotamos por* $G^{s}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *o conjunto das funções* $2\pi-$*periódicas Gevrey de ordem* s*, isto é,*

$$G^{s}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{h>0} G^{s,h}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Observação 2.23. *Pode-se provar que se* $s > 1$*, então* $C^{w}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *é um subconjunto próprio de* $G^{s}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e que* $G^{s}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *é um subconjunto próprio de* $C^{\infty}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$*. Também temos* $G^{1}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = C^{w}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$*.*

Proposição 2.24. *O conjunto* $G^{s}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço vetorial fechado em relação a multiplicação e diferenciação de funções.*

No restante do texto vamos fixar uma sequência $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ estritamente crescente de números reais positivos tal que $h_j \to \infty$. É claro que

$$G^{s}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} G^{s,h_j}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Definição 2.25. *Sejam* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $G^{s}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $f \in G^{s}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$*. Dizemos que* f_k *converge para* f *no sentido de* $G^{s}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$*, e denotamos por* $f_k \to f$ *em* $G^{s}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$*, quando existir* h_j *tal que* f_k *pertence a* $G^{s,h_j}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *para todo* k*,* $f \in G^{s,h_j}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\| f_k - f \|_{s,h_j} \to 0$*.*

Observação 2.26. *Existe uma topologia em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ (a saber: o limite indutivo dos espaços $G^{s,h_j}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$) tal que a convergência de sequências nessa topologia coincide com a definição de convergência dada em 2.25.*

Vamos denotar o dual topológico de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ por $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o espaço dos funcionais lineares contínuos $u : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Chamamos os elementos de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ de ultradistribuições Gevrey periódicas, ou apenas ultradistribuições periódicas.

Proposição 2.27. *As seguintes afirmações a respeito de um funcional linear $u : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ são equivalentes:*

(i) u é contínuo;

(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|< u, f >| \leq C_\varepsilon \sup\{|D^\alpha f(t)|\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^{-s} : t \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}, \; f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n);$$

(iii) se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ que converge para zero no sentido de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então a sequência $(< u, f_k >)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para zero.

Seja $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Pode-se provar que a restrição de u ao conjunto $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ resulta num elemento de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, dada $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ sabemos que

$$f(t) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi\cdot t},$$

logo $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, pois as somas parciais da série acima são elementos de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e a convergência da mesma é no sentido de $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Disso segue que podemos identificar $D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ como um subespaço de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ de forma injetiva. Dessa forma podemos considerar

$$G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \subset D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Isso explica o porquê do nome ultradistribuição.

Definição 2.28. *Sejam $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Diremos que u_k converge para u no sentido de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, e denotamos por $u_k \to u$ em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, quando a sequência $(< u_k - u, f >)_{k\in\mathbb{N}}$ convergir para 0, para toda $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 2.29. *Dados $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definimos a $\alpha-$ésima derivada de u e a multiplicação de f por u como sendo, respectivamente, as ultradistribuições $D^\alpha u$ e uf definidas por*

$$< D^\alpha u, g > = < u, (-1)^{|\alpha|}D^\alpha g) > \; e \; < uf, g > = < u, fg >,$$

para toda $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

2.2.1 Séries de Fourier em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Definição 2.30. *Definimos os seguintes espaços de sequências de números complexos:*

$$S_s = \{(a_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^n} : \exists\, C>0, \exists\, \varepsilon>0 \; tal\ que\, |a_\xi| \le Ce^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n\};$$

$$S'_s = \{(a_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^n} : \forall\, \varepsilon>0, \exists\, C_\varepsilon>0 \; tal\ que\, |a_\xi| \le C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \forall\, \xi \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Definição 2.31. *Dados $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\xi \in \mathbb{Z}^n$, definimos o ξ-ésimo coeficiente de Fourier de u como sendo*

$$\widehat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n} < u, e^{-i\xi\cdot t} > .$$

Teorema 2.32. *Dada uma sequência $(a_\xi)_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \in S_s$ a função*

$$f(t) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} a_\xi e^{i\xi\cdot t},\ t \in \mathbb{R}^n,$$

está bem definida e a convergência é no sentido de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, ademais

$$\widehat{f}(\xi) = a_\xi.$$

Reciprocamente, dada $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ a sequência $(\widehat{f}(\xi))_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \in S_s$ e

$$f(t) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi\cdot t},\ t \in \mathbb{R}^n,$$

sendo a convergência no sentido de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.33. *Dada uma sequência $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \in S'_s$ então*

$$u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} a_k e^{i\xi\cdot t}$$

pertence a $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e a convergência é no sentido de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, ademais

$$\widehat{u}(\xi) = a_k.$$

Reciprocamente, dada $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ a sequência $(\widehat{u}(\xi))_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \in S'_s$ e

$$u = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\xi) e^{i\xi\cdot t}$$

sendo a convergência no sentido de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

2.2.2 Séries Parciais de Fourier em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Sejam p, q e n números naturais tais que $n = p + q$. Vamos denotar um elemento de $\mathbb{R}^n$ por $(t, x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

Definição 2.34. *Dados $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\eta \in \mathbb{Z}^q$, definimos o η-ésimo coeficiente parcial de Fourier de f em relação a variável x como sendo*

$$\widehat{f}_\eta(t) = (2\pi)^{-q} \int_{[0,2\pi]^q} f(t,x)e^{-i\eta\cdot x}dx,\ t \in \mathbb{R}^p.$$

Teorema 2.35. *Dados $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\eta \in \mathbb{Z}^q$, temos $\widehat{f}_\eta \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ e*

$$f(t,x) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^q} \widehat{f}_\eta(t)e^{i\eta\cdot x},\ (t,x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,$$

sendo a convergência no sentido de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, existem h_ℓ, $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|D^\alpha \widehat{f}_\eta(t)| \leq Ch_\ell^{|\alpha|}(\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}},\ t \in \mathbb{R}^p,\ \alpha \in \mathbb{Z}^p,\ \eta \in \mathbb{Z}^q.$$

Reciprocamente, seja $(f_\eta)_{\eta\in\mathbb{Z}^q}$ uma sequência em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ com a seguinte propriedade: existem h_ℓ, $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|D^\alpha f_\eta(t)| \leq Ch_\ell^{|\alpha|}(\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}},\ t \in \mathbb{R}^p,\ \alpha \in \mathbb{Z}^p,\ \eta \in \mathbb{Z}^q,$$

então a função

$$f(t,x) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^q} f_\eta(t)e^{i\eta\cdot x},\ (t,x) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,$$

está bem definida e a convergência é no sentido de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, ademais $\widehat{f}_\eta = f_\eta$.

Definição 2.36. *Dados $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\eta \in \mathbb{Z}^q$, definimos o η-ésimo coeficiente parcial de Fourier de u em relação a variável x como sendo*

$$< \widehat{u}_\eta, g(t) >= (2\pi)^{-q} < u, g(t)e^{-i\eta\cdot x} >,\ g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p).$$

Definição 2.37. *Dados $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p)$ e $\eta \in \mathbb{Z}^q$, definimos $ue^{i\eta\cdot x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ como sendo*

$$< ue^{i\eta\cdot x}, f(t,x) > = (2\pi)^q < u, \widehat{f}_{-\eta}(t) >,\ f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 2.38. *Dados $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\eta \in \mathbb{Z}^q$, temos $\widehat{u}_\eta \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p)$ e*

$$u = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^q} \widehat{u}_\eta e^{i\eta\cdot x}$$

sendo a convergência no sentido de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, para todo $\varepsilon > 0$ e h_ℓ existe $C = C_{\varepsilon,h_\ell} > 0$ tal que

$$| < \widehat{u}_\eta, g > | \leq C \parallel g \parallel_{s,h_\ell} e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}},\ g \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^p),\ \eta \in \mathbb{Z}^q.$$

Reciprocamente, seja $(u_\eta)_{\eta\in\mathbb{Z}^q}$ uma sequência em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p)$ com a seguinte propriedade: dados $\varepsilon > 0$ e h_ℓ existe uma constante $C = C_{\varepsilon,h_\ell} > 0$ tal que

$$| < u_\eta, g > | \leq C \parallel g \parallel_{s,h_\ell} e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}},\ g \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^p),\ \eta \in \mathbb{Z}^q,$$

então

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} u_\eta e^{i\eta \cdot x}$$

está bem definida e a convergência é no sentido de $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$*, ademais* $\widehat{u}_\eta = u_\eta$*.*

2.3 Produto Tensorial de Ultradistribuições Periódicas

Como não conhecemos referências para o tópico desta seção vamos descrevê-la com mais detalhes.

Dadas as ultradistribuições $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$ e $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$, considere o funcional

$$\begin{aligned} u \otimes v : G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f(t,x) &\mapsto \; < u(t), < v(x), f(t,x) >> . \end{aligned}$$

Nesta seção vamos provar que a expressão acima define uma ultradistribuição e obter algumas de suas propriedades, as quais serão úteis para o desenvolvimento desta dissertação.

Para verificar que $u \otimes v$ está bem definida basta mostrar que a aplicação $g(t) =< v(x), f(t,x) >$, $t \in \mathbb{R}^p$, pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$, qualquer que seja a função $f(t,x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$.

Lema 2.39. *Considere* $g(t)$ *como anteriormente definida. Então* $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$*, ademais*

$$\partial^\alpha g(t) =< v(x), \partial^{(\alpha,0)} f(t,x) >, \; \alpha \in \mathbb{N}^p_0.$$

Demonstração. Para mostrar que g é contínua, sejam $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}^p$ e $\bar{t} \in \mathbb{R}^p$ tais que $t_k \to \bar{t}$. Como

$$g(t_k) - g(\bar{t}\,) =< v(x), f(t_k, x) - f(\bar{t}, x) >,$$

basta mostrar que a sequência de funções $(f(t_k,\cdot) - f(\bar{t},\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para zero no sentido de $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$, pois assim a continuidade de v implicará que $g(t_k) \to g(\bar{t}\,)$.

Como $f(t,x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$, existe $h_\ell > 0$ tal que $f(t,x)$, $\partial_{x_i} f(t,x)$ e $\partial_{t_j} f(t,x)$ pertencem a $G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$, para $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p$, e $f(t,\cdot) \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}^p$ fixado.

Seja $\beta \in \mathbb{N}^q_0$ e considere $v_k(\theta) = (1-\theta)(t_k, x) - \theta(\bar{t}, x)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Pela desigualdade do valor médio temos

$$\begin{aligned}
|\partial^{(0,\beta)}f(t_k,x)-\partial^{(0,\beta)}f(\bar{t},x)| &\leq |(t_k,x)-(\bar{t},x)|\sup_{\theta\in[0,1]}|(\partial^{(0,\beta)}f)'(v_k(\theta))| \\
&= |t_k-\bar{t}\,|\sup_{\theta\in[0,1]}|<\nabla\partial^{(0,\beta)}f(v_k(\theta)),\cdot>| \\
&= |t_k-\bar{t}\,|\sup_{\theta\in[0,1]}\sup_{|(t,x)|=1}|<\nabla\partial^{(0,\beta)}f(v_k(\theta)),(t,x)>| \\
&\leq |t_k-\bar{t}\,|\sup_{\theta\in[0,1]}\sup_{|(t,x)|=1}|\nabla\partial^{(0,\beta)}f(v_k(\theta))||(t,x)| \\
&= |t_k-\bar{t}\,|\sup_{\theta\in[0,1]}|\nabla\partial^{(0,\beta)}f(v_k(\theta))| \\
&\leq |t_k-\bar{t}\,|\sup_{(t,x)}|\nabla\partial^{(0,\beta)}f(t,x)|.
\end{aligned}$$

Agora vamos estimar $\sup_{(t,x)}|\nabla\partial^{(0,\beta)}f(t,x)|$,

$$\begin{aligned}
|\nabla\partial^{(0,\beta)}f(t,x)| &= |(\partial_{t_1}\partial^{(0,\beta)}f(t,x),\,\ldots\,,\partial_{t_p}\partial^{(0,\beta)}f(t,x),\partial_{x_1}\partial^{(0,\beta)}f(t,x),\,\ldots\,,\partial_{x_q}\partial^{(0,\beta)}f(t,x))| \\
&= |(\partial^{(0,\beta)}\partial_{t_1}f(t,x),\,\ldots\,,\partial^{(0,\beta)}\partial_{t_p}f(t,x),\partial^{(0,\beta)}\partial_{x_1}f(t,x),\,\ldots\,,\partial^{(0,\beta)}\partial_{x_q}f(t,x))| \\
&\leq |\partial^{(0,\beta)}\partial_{t_1}f(t,x)|+\cdots+|\partial^{(0,\beta)}\partial_{t_p}f(t,x)|+|\partial^{(0,\beta)}\partial_{x_1}f(t,x)|+\cdots+|\partial^{(0,\beta)}\partial_{x_q}f(t,x)| \\
&\leq C(\beta!)^s h_\ell^{|\beta|}.
\end{aligned}$$

Disso segue

$$|\partial^{(0,\beta)}f(t_k,x)-\partial^{(0,\beta)}f(\bar{t},x)|\leq|t_k-\bar{t}\,|C(\beta!)^s h_\ell^{|\beta|},\ x\in\mathbb{R}^q,\ \beta\in\mathbb{N}_0^q,\ k\in\mathbb{N},$$

e portanto $\|\ f(t_k,\cdot)-f(\bar{t},\cdot)\ \|_{s,h_\ell}\to 0$, pois

$$\begin{aligned}
\|\ f(t_k,\cdot)-f(\bar{t},\cdot)\ \|_{s,h_\ell} &= \sup_{x,\,\beta}|\partial^{(0,\beta)}f(t_k,x)-\partial^{(0,\beta)}f(\bar{t},x)|(\beta!)^{-s}h_\ell^{-|\beta|} \\
&\leq |t_k-\bar{t}\,|C\to 0.
\end{aligned}$$

Isso garante a continuidade da g.

Para verificar que g é de classe C^1, seja $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}-\{0\}$ tal que $a_k\to 0$. Pelo teorema do valor médio obtemos

$$a_k^{-1}(g(t+a_ke_j)-g(t))=<v(x),a_k^{-1}(f(t+a_ke_j,x)-f(t,x))>=<v(x),\partial_{t_j}f(t+\tilde{a}_ke_j,x)>$$

sendo $0<|\tilde{a}_k|<|a_k|$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Analogamente ao que foi feito na prova da continuidade de g, prova-se que $\partial_{t_j}f(t+\tilde{a}_ke_j,\cdot)\to\partial_{t_j}f(t,\cdot)$ em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$. Utilizando a continuidade da v seque que $\partial_{t_j}g(t)=<u(x),\partial_{t_j}f(t,x)>$. Também de forma análoga a prova da continuidade de g conclui-se a continuidade de $\partial_{t_j}g$. Isso garante que g é C^1. Finalmente, por indução no comprimento do multi-índice $\alpha\in\mathbb{N}_0^p$, mostra-se que $\partial^\alpha g$ é contínua e que

$$\partial^\alpha g(t)=<v(x),\partial^{(\alpha,0)}f(t,x)>.$$

Mostremos agora que g é uma função Gevrey $2\pi-$periódica. A periodicidade de g é clara. Como $f \in G_{2\pi}^{s,h_\ell}(\mathbb{R}_t^p \times \mathbb{R}_x^q)$ segue

$$\sup_{t,\alpha} \sup_{x,\beta} |\partial^{(\alpha,\beta)} f(t,x)| \leq \| f \|_{s,h_\ell} (\alpha!)^s (\beta!)^s h_\ell^{|\alpha|} h_\ell^{|\beta|}.$$

Seja $\varepsilon = h_\ell^{-1}$. Dado que $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_x^q)$, existe $C_\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$| < v, h(x) > | \leq C_\varepsilon \sup_{x,\beta} |\partial^\beta h(x)| \varepsilon^{|\beta|} (\beta!)^{-s}, \; h \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^q),$$

e portanto

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha g(t)| &= | < u(x), \partial^{(\alpha,0)} f(t,x) > | \\
&\leq C_\varepsilon \sup_{x,\beta} |\partial^{(\alpha,\beta)} f(t,x)| \varepsilon^{|\beta|} (\beta!)^{-s} \\
&= C_\varepsilon \sup_{x,\beta} |\partial^{(\alpha,\beta)} f(t,x)| h_\ell^{-|\alpha|} h_\ell^{-|\beta|} (\alpha!)^{-s} (\beta!)^{-s} h_\ell^{|\alpha|} (\alpha!)^s \\
&\leq C_\varepsilon h_\ell^{|\alpha|} (\alpha!)^s \sup_{x,\beta} \sup_{t,\alpha} |\partial^{(\alpha,\beta)} f(t,x)| h_\ell^{-|\alpha|} h_\ell^{-|\beta|} (\alpha!)^{-s} (\beta!)^{-s} \\
&= C_\varepsilon \| f \|_{s,h_\ell} (\alpha!)^s h_\ell^{|\alpha|},
\end{aligned}$$

para $t \in \mathbb{R}_t^p$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$, logo $g \in G_{2\pi}^{s,h_\ell}(\mathbb{R}_t^p)$. Isso completa a demonstração. □

O lema anterior garante que $u \otimes v$ está bem definida e claramente este funcional é linear. Verifiquemos a continuidade de $u \otimes v$. Dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade de u e v existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$| < u, h(t) > | \leq C_\varepsilon \sup_{t,\alpha} |\partial^\alpha h(t)| \varepsilon^{|\alpha|} (\alpha!)^{-s}, \; h \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}_t^p),$$

e

$$| < v, h(x) > | \leq C_\varepsilon \sup_{x,\beta} |\partial^\beta h(x)| \varepsilon^{|\beta|} (\beta!)^{-s}, \; h \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}_x^q).$$

Seja $f(t,x) \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}_t^p \times \mathbb{R}_x^q)$. Então,

$$\begin{aligned}
| < u \otimes v, f(t,x) > | &= | < u(t), < v(x), f(t,x) >> | \\
&\leq C_\varepsilon \sup_{t,\alpha} |\partial_t^\alpha < v(x), f(t,x) > | \; \varepsilon^{|\alpha|} (\alpha!)^{-s} \\
&= C_\varepsilon \sup_{t,\alpha} | < v(x), \partial^{(\alpha,0)} f(t,x) > | \; \varepsilon^{|\alpha|} (\alpha!)^{-s} \\
&\leq C_\varepsilon \sup_{t,\alpha} C_\varepsilon \sup_{x,\beta} |\partial^{(\alpha,\beta)} f(t,x)| \; \varepsilon^{|\beta|} (\beta!)^{-s} \varepsilon^{|\alpha|} (\alpha!)^{-s} \\
&= C_\varepsilon^2 \sup_{t,\alpha} \sup_{x,\beta} |\partial^{(\alpha,\beta)} f(t,x)| \; \varepsilon^{|(\alpha,\beta)|} ((\alpha,\beta)!)^{-s}.
\end{aligned}$$

Portanto $u \otimes v \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}_t^p \times \mathbb{R}_x^q)$.

Definição 2.40. *Sejam $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_t^p)$ e $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_x^q)$. O produto tensorial de u por v é a ultradistribuição $u \otimes v \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}_t^p \times \mathbb{R}_x^q)$ dada por $< u \otimes v, \phi(t,x) > = < u(t), < v(x), \phi(t,x) >>$, para toda $\phi \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}_t^p \times \mathbb{R}_x^q)$.*

Dadas $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$ e $h \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$ facilmente vê-se que $g \otimes h(t,x) = g(t)h(x) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$ e que

$$< u \otimes v, g \otimes h > = < u, g >< v, h > .$$

Proposição 2.41. *Sejam $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$ e $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$. Existe uma única $w \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$ satisfazendo a seguinte propriedade: se $g \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$ e $h \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$, então*

$$< w, g \otimes h > = < u, g >< v, h > .$$

Demonstração. A existência é garantida pela definição de produto tensorial. Considere w satisfazendo a propriedade do enunciado e seja $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{Z}^q$. Note que $e^{-i\xi\cdot(t,x)} = e^{-i\xi_1\cdot t} \otimes e^{-i\xi_2\cdot x}$. Então

$$\widehat{w}(\xi) = (2\pi)^{-(p+q)} < w, e^{-i\xi\cdot(t,x)} > = (2\pi)^{-p} < u, e^{-i\xi_1\cdot t} > (2\pi)^{-q} < v, e^{-i\xi_2\cdot x} > = \widehat{u}(\xi_1)\widehat{v}(\xi_2).$$

Portanto a unicidade de w segue da unicidade dos coeficientes de Fourier. □

De forma inteiramente análoga poderíamos ter definido o tensorial $u \otimes v$ da seguinte maneira

$$< u \otimes v, f(t,x) > = < v(x), < u(t), f(t,x) >>, \; f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x).$$

Aplicando a proposição anterior obtemos uma espécie de teorema de Fubini:

$$< u(t), < v(x), f(t,x) >> = < u \otimes v, f(t,x) > = < v(x), < u(t), f(t,x) >> .$$

Dada $u(t,x) \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$ considere sua série parcial de Fourier, isto é,

$$u(t,x) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \widehat{u}_\eta(t) e^{i\eta\cdot x}.$$

Gostaríamos de observar que a ultradistribuição $\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta\cdot x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^q_x)$ pode ser vista como o produto tensorial das ultradistribuições $\widehat{u}_\eta(t) \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$ e $e^{i\eta\cdot x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$. De fato, basta notar que

$$\begin{aligned} < \widehat{u}_\eta(t) \otimes e^{i\eta\cdot x}, f(t,x) > &= < \widehat{u}_\eta(t), < e^{i\eta\cdot x}, f(t,x) >> \\ &= < \widehat{u}_\eta(t), \int_{[0,2\pi]^q} f(t,x) e^{i\eta\cdot x} dx > \\ &= (2\pi)^q < \widehat{u}_\eta(t), \widehat{f}_{-\eta}(t) >, \end{aligned}$$

ou seja, $\widehat{u}_\eta(t) \otimes e^{i\eta\cdot x}$ coincide com a definição de $\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta\cdot x}$ que demos em 2.37. Desse modo podemos escrever

$$u(t,x) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \widehat{u}_\eta(t) e^{i\eta\cdot x} = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \widehat{u}_\eta(t) \otimes e^{i\eta\cdot x}.$$

Vejamos agora algumas propriedades do produto tensorial.

Proposição 2.42. *Sejam $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^p_t)$, $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$, $w \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^q_x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}^p_0$ e $\beta \in \mathbb{N}^q_0$. Então* *(i)* $u \otimes (v+w) = u \otimes v + u \otimes w$;

(ii) $\lambda(u \otimes v) = \lambda u \otimes v = u \otimes \lambda v$;

(iii) $\partial^{(\alpha,\beta)}(u \otimes v) = \partial^\alpha u \otimes \partial^\beta v$;

(iv) *se* $u_j \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{p_j}_{t_j})$, *para* $j = 1, 2, 3$, *então* $(u_1 \otimes u_2) \otimes u_3 = u_1 \otimes (u_2 \otimes u_3)$.

Demonstração. As propriedades (i), (ii) e (iii) são imediatas, portanto provaremos apenas (iv). Considere $\theta = (u_1 \otimes u_2) \otimes u_3$ e $\gamma = u_1 \otimes (u_2 \otimes u_3)$. Não é difícil ver que se $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{Z}^{p_1} \times \mathbb{Z}^{p_2} \times \mathbb{Z}^{p_3}$, então $\widehat{\theta}(\xi) = (\widehat{u}_1(\xi_1)\widehat{u}_2(\xi_2))\widehat{u}_3(\xi_3)$ e $\widehat{\gamma}(\xi) = \widehat{u}_1(\xi_1)(\widehat{u}_2(\xi_2)\widehat{u}_3(\xi_3))$. Da associatividade do produto em $\mathbb{C}$ e da unicidade dos coeficientes de Fourier segue o resultado. $\square$

Notamos que se $u_j \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{p_j}_{t_j})$, para $j = 1, \ldots, n$, então indutivamente podemos definir $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{p_1}_{t_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{p_n}_{t_n})$. Como o produto tensorial é associativo essa notação não é ambígua e as seguintes propriedades são válidas:

(i) $< u_1 \otimes \cdots \otimes u_n, \theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_n > = < u_1, \theta_1 > \cdots < u_n, \theta_n >$, sendo $\theta_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{p_j}_{t_j})$;

(ii) $u_1 \otimes \cdots \otimes (u_j + v_j) \otimes \cdots \otimes u_n = (u_1 \otimes \cdots \otimes u_j \otimes \cdots \otimes u_n) + (u_1 \otimes \cdots \otimes v_j \otimes \cdots \otimes u_n)$, sendo $v_j \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{p_j}_{t_j})$;

(iii) $\lambda(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) = u_1 \otimes \cdots \otimes \lambda u_j \otimes \cdots \otimes u_n$, sendo $\lambda \in \mathbb{C}$;

(vi) $\partial^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = \partial^{\alpha_1} u_1 \otimes \cdots \otimes \partial^{\alpha_n} u_n$, sendo $\alpha_j \in \mathbb{N}^{p_j}_0$.

Finalizamos esta seção com uma proposição que será útil nos capítulos posteriores.

Proposição 2.43. *Sejam* $(u_{j\eta})_{\eta \in \mathbb{Z}}$ *uma sequência em* $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{p_j}_{t_j})$, $p_j \in \mathbb{N}$, *para* $j = 1, \ldots, n$. *Suponha que para todo* $j = 1, \ldots, n$, $\varepsilon > 0$ *e* h_ℓ *dados, exista* $C_{\varepsilon,h_\ell,j} = C_j > 0$ *tal que*

$$| < u_{j\eta}, \varphi(t_j) > | \leq C_j \parallel \varphi(t_j) \parallel_{s,h_\ell} e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}}, \; \eta \in \mathbb{Z}, \varphi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^{p_j}_{t_j}).$$

Então dados $\varepsilon > 0$ *e* h_ℓ, *existe* $C_{\varepsilon,h_\ell} = C > 0$ *tal que*

$$| < u_{1\eta}(t_1) \otimes \cdots \otimes u_{n\eta}(t_n), \varphi(t_1, \ldots, t_n) > | \leq C \parallel \varphi \parallel_{s,h_\ell} e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}}, \; \eta \in \mathbb{Z}, \varphi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^{p_1}_{t_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{p_n}_{t_n}).$$

Demonstração. Faremos a prova por indução sobre n. Para $n = 1$ não há o que provar. Suponhamos que a propriedade seja válida para $n - 1$ e provemos a validez para n.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $h_\ell > 0$ dados. Por hipótese de indução existe $\tilde{C}_{\varepsilon,h_\ell} = \tilde{C} > 0$ tal que

$$| < u_{1\eta}(t_1) \otimes \cdots \otimes u_{(n-1)\eta}(t_{n-1}), \varphi(t_1, \ldots, t_{n-1}) > | \leq \tilde{C} \parallel \varphi \parallel_{s,h_\ell} e^{\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}},$$

para toda $\varphi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^{p_1}_{t_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{p_{n-1}}_{t_{n-1}})$ e todo $\eta \in \mathbb{Z}$. Por hipótese existe $C'_{\varepsilon,h_\ell} = C' > 0$ tal que

$$| < u_{n\eta}(t_n), \varphi(t_n) > | \leq C' \parallel \varphi \parallel_{s,h_\ell} e^{\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}}, \; \varphi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^{p_n}_{t_n}), \eta \in \mathbb{Z}.$$

Vamos escrever: $(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n) = (t', t_n)$, $p_1 + \cdots + p_{n-1} = p'$ e $u_{1\eta} \otimes \cdots \otimes u_{(n-1)\eta} = v_\eta$, para todo $\eta \in \mathbb{Z}$. Então, se $\varphi(t', t_n) \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^{p'}_{t'} \times \mathbb{R}^{p_n}_{t_n})$ temos

$$\begin{aligned}
| < v_\eta \otimes u_{n\eta}, \varphi(t', t_n) > | &= | < v_\eta(t'), < u_{n\eta}(t_n), \varphi(t', t_n) >> | \\
&\leq \tilde{C} \, \| < u_{n\eta}(t_n), \varphi(\cdot, t_n) > \|_{s,h_\ell} \, e^{\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \\
&= \tilde{C} \sup_{t',\alpha} |\partial^\alpha_{t'} < u_{n\eta}(t_n), \varphi(t', t_n) > |(\alpha!)^{-s} h_\ell^{-|\alpha|} e^{\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \\
&= \tilde{C} \sup_{t',\alpha} | < u_{n\eta}(t_n), \partial^\alpha_{t'}\varphi(t', t_n) > |(\alpha!)^{-s} h_\ell^{-|\alpha|} e^{\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq \tilde{C} \sup_{t',\alpha} C' \, \| \, \partial^\alpha_{t'}\varphi(t', \cdot) \, \|_{s,h_\ell} \, e^{\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}} (\alpha!)^{-s} h_\ell^{-|\alpha|} e^{\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \\
&= \tilde{C}C' \sup_{t',\alpha} \sup_{t_n,\beta} |\partial^{(\alpha,\beta)}_{t',t_n}\varphi(t', t_n)|(\beta!)^{-s} h_\ell^{-|\beta|} (\alpha!)^{-s} h_\ell^{-|\alpha|} e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \\
&= C \, \| \, \varphi(t', t_n) \, \|_{s,h_\ell} \, e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}},
\end{aligned}$$

sendo $C = \tilde{C}C'$, para todo $\eta \in \mathbb{Z}$. □

Corolário 2.44. *Sejam* $(u_j) \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{p_j}_{t_j} \times \mathbb{R}_x)$, *para* $j = 1, \ldots, n$. *Então,*

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_{1\eta}(t_1) \otimes \cdots \otimes \widehat{u}_{n\eta}(t_n) e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{p_1}_{t_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{p_n}_{t_n} \times \mathbb{R}_x).$$

2.4 Frações Contínuas

As definições e resultados desta seção podem ser encontrados em [5].

Definição 2.45. *Dada uma sequência (finita ou infinita)* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *de números naturais, chamamos de fração contínua (simples) a expressão*

$$[a_1, a_2, a_3, \ldots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}.$$

E para cada $n \in \mathbb{N}$, *o* n*-ésimo convergente da fração contínua acima é o número racional*

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_1, \ldots, a_n],$$

sendo p_n *e* q_n *naturais e primos entre si.*

Teorema 2.46. *Dada uma sequência (infinita) de números naturais* $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, *existe um único número irracional* $\alpha \in (0, 1)$ *tal que*

$$[a_1, \ldots, a_n] \to \alpha.$$

Reciprocamente, dado um número irracional $\alpha \in (0, 1)$, *existe uma única sequência (infinita) de números naturais* $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *tal que*

$$[a_1, \ldots, a_n] \to \alpha.$$

Dado $\alpha \in (0,1)$ irracional, escrevemos $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ para indicar que $[a_1 \dots, a_n] \to \alpha$.

Proposição 2.47. *Os convergentes p_n/q_n de uma fração contínua $[a_1, a_2, a_3, \dots]$ satisfazem as seguintes relações de recorrência: $p_1 = 1$, $q_1 = a_1$, $p_2 = a_2$, $q_2 = a_2 a_1 + 1$ e para $n \geq 2$*

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Da proposição anterior podemos concluir que as sequências (p_n) e (q_n) são estritamente crescentes e portanto $p_n \to \infty$ e $q_n \to \infty$.

Finalizamos esta seção enunciando alguns teoremas que nos dizem o quão boa são as aproximações de um irracional $\alpha \in (0,1)$ por meio dos convergentes de sua respectiva fração contínua, e que, em um certo sentido, os convergentes nos fornecem todas as boas aproximações de α por racionais.

Teorema 2.48. *Os convergentes p_n/q_n de uma fração contínua $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots]$ satisfazem a seguinte desigualdade:*

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < |\alpha - p_n/q_n| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.49. *Sejam p_n/q_n os convergentes de $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots]$. Se $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \leq q_n$, então*

$$|p_n - \alpha q_n| < |p - q\alpha|.$$

Teorema 2.50. *Sejam p_n/q_n os convergentes da fração contínua $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots]$. Se $p, q \in \mathbb{N}$ satisfazem*

$$|\alpha - p/q| < \frac{1}{2q^2},$$

então $p/q = p_n/q_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

3 SISTEMAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

Neste capítulo mostramos que a G^s-hipoeliticidade global de sistemas de operadores diferenciais com coeficientes constantes é equivalente a uma condição sobre o crescimento do símbolo deste sistema.

Em seguida, aplicamos o resultado obtido em uma classe particular de sistemas, assim relacionando a G^s-hipoeliticidade global do mesmo com vetores exponenciais Liouville de ordem s.

Por fim, utilizamos frações contínuas para mostrar a existência de números de Liouville que não são exponencial Liouville de ordem s; e a existência de um vetor que não é exponencial Liouville de ordem s, mas que suas entradas são números exponenciais Liouville de ordem s.

3.1 Sistemas de Operadores Diferenciais

Considere um sistema de operadores diferenciais parciais lineares

$$P = (P_1, \dots, P_m),$$

no qual cada operador $P_j : D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n) \to D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ possui ordem $k_j \in \mathbb{N}_0$ e coeficientes no espaço das funções Gevrey $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, para cada $j = 1, \dots, m$, temos

$$P_j = \sum_{|\alpha| \leq k_j} \phi_{j,\alpha} \, D^\alpha,$$

com cada $\phi_{j,\alpha} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Vamos denotar por $P(x,t)$ o símbolo do sistema, isto é,

$$P(x,t) = (P_1(x,t), \dots, P_m(x,t)), \; x, t \in \mathbb{R}^n,$$

sendo

$$P_j(x,t) = \sum_{|\alpha| \leq k_j} \phi_{j,\alpha}(x) t^\alpha, \; t \in \mathbb{R}^n,$$

o símbolo do operador P_j.

Definição 3.1. *Dizemos que o sistema $P = (P_1, \dots, P_m)$ é globalmente G^s-hipoelítico (G^sH) quando*

$$u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n) \text{ e } P_j u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n), \; j = 1, \dots, m \implies u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente, dizemos que P é globalmente hipoelítico (GH) quando

$$u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \text{ e } P_j u \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n), \; j = 1, \dots, m \implies u \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

No caso particular em que os operadores diferenciais P_j têm coeficientes constantes, isto é,

$$P_j = \sum_{|\alpha| \leq k_j} c_{j,\alpha}\, D^\alpha,\ j = 1, \ldots, m,$$

com $c_{j,\alpha} \in \mathbb{C}$, o símbolo do sistema é dado por

$$P(t) = (P_1(t), \ldots, P_m(t)),\ t \in \mathbb{R}^n,$$

sendo cada $P_j(t) = \sum_{|\alpha| \leq k_j} c_{j,\alpha} t^\alpha$ o símbolo do operador P_j.

Na próxima seção apresentaremos a relação entre a G^s-hipoeliticidade global de sistemas de operadores com coeficientes constantes e o comportamento assintótico do símbolo deste mesmo sistema.

Durante todo o capítulo vamos utilizar $|\cdot|$ para representar a norma do máximo.

3.2 A Condição de Greenfield-Wallach

Em 1972, S. Greenfield e N. Wallach obtiveram uma condição necessária e suficiente para a hipoeliticidade global (e também para hipoeliticidade analítica global) de operadores diferenciais parciais lineares com coeficientes constantes (ver [3] e [4]). Em 1989, A. Bergamasco estendeu tais condições para sistemas de operadores com coeficientes constantes (ver [1]). O teorema a seguir é uma versão desses resultados para o contexto da hipoeliticidade Gevrey global.

Teorema 3.2 (Greenfield-Wallach para sistemas). *Seja $P = (P_1, \ldots, P_m)$ um sistema de operadores diferenciais parciais com coeficientes constantes. Então*

(i) P é G^sH se, e somente se, vale a condição

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, C_\varepsilon > 0 : \xi \in \mathbb{Z}^n, |\xi| \geq C_\varepsilon \Rightarrow |P(\xi)| \geq exp(-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}); \tag{3.1}$$

(ii) P é GH se, e somente se, vale a condição

$$\exists\, N \in \mathbb{N}, \exists\, C > 0 : \xi \in \mathbb{Z}^n, |\xi| \geq C \Rightarrow |P(\xi)| \geq |\xi|^{-N}. \tag{3.2}$$

Demonstração. Provemos inicialmente o item (i).

Suponha que a condição (3.1) não seja verdadeira. Neste caso existem $\varepsilon > 0$ e $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^n$ tais que $|\xi_k| \to \infty$ quando $k \to \infty$ e $|P(\xi_k)| < \exp(-\varepsilon|\xi_k|^{\frac{1}{s}})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Defina

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{i\xi_k\cdot t}.$$

Note que $\widehat{u}(\xi) = 1$, se $\xi = \xi_k$ para algum k natural, e $\widehat{u}(\xi) = 0$, caso contrário. Logo u pertence a $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, mas não pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Defina $f_j = P_j u$, para $j = 1, \ldots, m$.

Como os operadores P_j tem coeficiente constantes, vale que $\widehat{f}_j(\xi) = P_j(\xi)\widehat{u}(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Em particular, $\widehat{f}(\xi) = 0$, se $\xi \neq \xi_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e

$$|\widehat{f}_j(\xi_k)| = |P_j(\xi_k)||\widehat{u}(\xi_k)| \leq \exp(-\varepsilon|\xi_k|^{\frac{1}{s}}),\ k \in \mathbb{N},\, j = 1, \dots, m.$$

Isso prova que $f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ para todo j, e portanto P não é $G^s H$.

Reciprocamente, suponha que a condição (3.1) seja verdadeira e considere $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $P_j u = f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para todo j. Como $f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para cada j existem C_j e ε_j positivos tais que

$$|\widehat{f}_j(\xi)| \leq C_j \exp(-\varepsilon_j|\xi|^{\frac{1}{s}}),\ \xi \in \mathbb{Z}^n.$$

Fazendo $\tilde{C} = \max\{C_j : j = 1, \dots, m\}$ e $\varepsilon = \min\{\varepsilon_j : j = 1, \dots, m\}$ temos

$$|\widehat{f}_j(\xi)| \leq \tilde{C} \exp(-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}),\ \xi \in \mathbb{Z}^n,\, j = 1, \dots, m.$$

Defina $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2$. Por (3.1), existe $C_{\tilde{\varepsilon}} > 0$ tal que se $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e $|\xi| \geq C_{\tilde{\varepsilon}}$, então $|P(\xi)| \geq \exp(-\tilde{\varepsilon}|\xi|^{\frac{1}{s}})$. Para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$, seja $j(\xi)$ o índice tal que $|P_{j(\xi)}(\xi)| = |P(\xi)|$. Para $\xi \in \mathbb{Z}^n$ tal que $|\xi| \geq C_{\tilde{\varepsilon}}$ temos

$$|\widehat{f}_{j(\xi)}(\xi)| = |P(\xi)||\widehat{u}(\xi)| \Rightarrow |\widehat{u}(\xi)| = \frac{|\widehat{f}_{j(\xi)}(\xi)|}{|P(\xi)|} \leq \tilde{C} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}\right).$$

Considere $K = \max\{|\widehat{u}(\xi)| \exp(\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}) : |\xi| < C_{\tilde{\varepsilon}}\}$ e seja $C = \max\{K, \tilde{C}\}$, então

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}\right)$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, e portanto $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Agora vejamos o item (ii).

Suponha que a condição (3.2) não seja verdadeira. Então existe uma sequência $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^n$ tal que $|\xi_k| \geq k$ e $|P(\xi_k)| < |\xi_k|^{-k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Defina

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{i\xi_k \cdot t}.$$

Claramente $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $u \notin C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Defina $f_j = P_j u$, para $j = 1, \dots, m$. A fim de provar que $f_j \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para todo j, seja $N \in \mathbb{N}$ dado. Como P_j tem coeficientes constantes, temos $\widehat{f}_j(\xi) = P_j(\xi)\widehat{u}(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Então, se $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e $\xi \neq \xi_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue $\widehat{f}_j(\xi) = 0$ e se $k \geq N$, obtemos

$$|\widehat{f}_j(\xi_k)| = |P_j(\xi)||\widehat{u}(\xi_k)| \leq |P(\xi_k)| < |\xi_k|^{-k} \leq |\xi_k|^{-N}.$$

Daí existe $C_N > 0$ tal que $|\widehat{f}_j(\xi)| < C_N|\xi|^{-N}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ e todo $j = 1, \dots, m$. Portanto $f_j \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ para todo j, o que implica que P não é GH.

Reciprocamente, suponha que a condição (3.2) seja verdadeira e considere $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $P_j u = f_j \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para $j = 1, \dots, n$. Por hipótese existem $N_1 \in \mathbb{N}$ e $C_1 > 0$ tais que se $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e

$|\xi| \geq C_1$, então $|P(\xi)| \geq |\xi|^{-N_1}$. Seja $N \in \mathbb{N}$ dado. Como $f_j \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para $j = 1, \dots m$, existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$|\widehat{f}_j(\xi)| \leq \tilde{C}|\xi|^{-(N+N_1)}, \ \xi \in \mathbb{Z}^n, \ j = 1, \dots, m.$$

Como P_j tem coeficientes constantes vale que $\widehat{f}_j(\xi) = P_j(\xi)\widehat{u}(\xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e todo $j = 1, \dots, m$. Para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$, seja $j(\xi)$ o índice tal que $|P_{j(\xi)}(\xi)| = |P(\xi)|$. Se $|\xi| > C_1$, então $|P(\xi)| \geq |\xi|^{-N_1}$, e portanto

$$|\widehat{u}(\xi)| = \frac{|\widehat{f}_{j(\xi)}(\xi)|}{|P(\xi)|} \leq \tilde{C}|\xi|^{-N}.$$

Então existe $C_N > 0$ tal que $|\widehat{u}(\xi)| \leq C_N|\xi|^{-N}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$, daí P é GH. $\square$

Corolário 3.3. *Seja $P = (P_1, \dots, P_m)$ um sistema de operadores diferenciais parciais com coeficientes constantes. Se P é GH, então P é G^sH para qualquer $s \geq 1$.*

Demonstração. Vamos provar que a condição (3.2) implica a condição (3.1). Suponha que existam $N \in \mathbb{N}$ e $C > 0$ tais que se $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e $|\xi| > C$, então $|P(\xi)| \geq |\xi|^{-N}$. Seja $M \in \mathbb{N}$ tal que $M/s > N$ e considere $\varepsilon > 0$ dado. Então, para $\xi \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$,

$$\exp\left(\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}\right) \geq \frac{(\varepsilon/2)^M|\xi|^{\frac{M}{s}}}{M!} \geq \frac{(\varepsilon/2)^M|\xi|^N}{M!},$$

o que implica

$$|\xi|^{-N} \geq \frac{(\varepsilon/2)^M}{M!}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}\right) = \frac{(\varepsilon/2)^M}{M!}\exp\left(\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}\right)\exp\left(-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}\right).$$

Seja $C_\varepsilon > C$ tal que se $|\xi| \geq C_\varepsilon$, então $\frac{(\varepsilon/2)^M}{M!}\exp(\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{\frac{1}{s}}) > 1$. Então, para $|\xi| > C_\varepsilon$, obtemos

$$|P(\xi)| \geq |\xi|^{-N} \geq \exp(-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}).$$

$\square$

Veremos adiante que a recíproca do corolário acima não é verdadeira (Observação 3.15).

Observação 3.4. *O sistema $P = (\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_n})$ é GH e G^sH em $\mathbb{R}^n$ para qualquer $s \geq 1$. De fato, basta notar que se $\xi \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$, então $|P(\xi)| = |\xi| > |\xi|^{-1}$. Daí segue que (3.2) é satisfeita e portanto P é GH e G^sH.*

3.3 Uma Aplicação da Condição de Greenfield-Wallach

Vamos aplicar a condição de Greenfield-Wallach, Teorema 3.2, na seguinte classe de sistemas com coeficientes constantes

$$L = (L_1, \dots, L_n), \ \text{com } L_j = \partial_{t_j} - (a_j + ib_j)\partial_x, \ \text{e } a_j, b_j \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Aqui cada L_j está agindo no espaço $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ e escrevemos $(t,x) = (t_1,\ldots,t_n,x)$ para representar vetores em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Também observamos que o símbolo de cada operador L_j é dado por

$$L_j(\xi,q) = i(\xi_j - (a_j + ib_j)q),\ (\xi,q) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z},\ j = 1,\ldots,n.$$

Vamos analisar algumas situações particulares:

- $b_j \neq 0$, para algum $j = 1, 2\ldots,n$.

  Neste caso, para $\xi \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$ e $q = 0$, temos $|L_\ell(\xi,0)| = |\xi_\ell| \geq 1$ para algum ℓ, pois $\xi \neq 0$; e para $q \neq 0$ temos
  $$|L_j(\xi,q)| = |(\xi_j - a_j) + i(-b_j q)| \geq |b_j q| \geq |b_j|.$$
  Disso segue que $|L(\xi,q)| \geq \min\{1, |b_j|\}$, para todo $(\xi,q) \neq (0,0)$, e portanto L é G^sH, para $s \geq 1$.

- $b_j = 0$, para todo $j = 1, 2\ldots,n$ e $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{Q}^n$.

  Neste caso começamos escrevendo $a = (p_1/q_1,\ldots,p_n/q_n)$ com p_j e q_j inteiros para todo j e definindo $q = \prod_{j=1}^n q_j$ e $\xi_j = p_j \prod_{\ell\neq j} q_\ell$, para $j = 1,\ldots,n$. Então
  $$|L_j(\xi_1,\ldots,\xi_n,q)| = |\xi_j - \frac{p_j}{q_j} q| = 0,$$
  para todo $j = 1, 2\ldots,n$. Dessa forma o símbolo de L se anularia em todos os vetores da forma $k(\xi_1,\ldots,\xi_n,q) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ com $k \in \mathbb{Z}$, violando a condição (3.1), logo L não é G^sH, para $s \geq 1$.

- $b_j = 0$, para todo $j = 1, 2\ldots,n$ e $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$.

  Este caso requer uma abordagem muito mais cuidadosa e a G^s-hipoeliticidade global de L dependerá de como o vetor $a = (a_1,\ldots,a_n)$ pode ser aproximado por vetores de números racionais com denominador comum. Aqui é onde estabelecemos a relação da G^s-hipoeliticidade de L com vetores exponenciais Liouville. A resposta para este caso encontra-se no Teorema 3.7.

Definição 3.5. *Dizemos que o vetor $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$ é exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$ (E^sL), se existir $\varepsilon > 0$ tal que a inequação*

$$|p/q - a| = \max_{1\leq j\leq n} |p_j/q - a_j| < exp(-\varepsilon|q|^{\frac{1}{s}})$$

admite uma infinidade de soluções $(p,q) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} - \{0\}$.

Quando $s = 1$ diremos simplesmente que a é um vetor exponencial Liouville (EL).

Observação 3.6. *Verifica-se que $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$ é E^sL se, e somente se, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(\xi^\ell, q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} - \{0\}$ de vetores dois a dois distintos satisfazendo*

$$|\xi^\ell_j/q_\ell - a_j| \leq exp(-\varepsilon|q_\ell|^{\frac{1}{s}}),$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$ e $\ell \in \mathbb{N}$.

Ademais, na sequência $(\xi^\ell, q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ pode-se assumir que $q_\ell \in \mathbb{N}$, para todo ℓ, e que $q_\ell \to \infty$. De fato, suponha que $|q_\ell| \leq K$ para todo ℓ. Então

$$|\xi_j^\ell/q_\ell| - |a_j| \leq \max_{1\leq j\leq n} |\xi_j^\ell/q_\ell - a_j| \leq e^{-\varepsilon|q_\ell|^{\frac{1}{s}}} \leq 1,$$

o que implica

$$|\xi_j^\ell| \leq |q_\ell| + |a_j||q_\ell| = |q_\ell|(1 + a_j) \leq K(1 + |a|),$$

portanto pode-se concluir que a sequência $(\xi^\ell, q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ é limitada, o que é uma contradição já que a mesma possuí termos dois a dois distintos. O fato de poder considerar $q_\ell \in \mathbb{N}$, para todo ℓ, é evidente.

Teorema 3.7. *Dado $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$, considere o sistema $L = (L_1, \ldots, L_n)$, com $L_j = \partial_{t_j} - a_j\partial_x$. Então, L é G^sH se, e somente se, a não é E^sL.*

Demonstração. Suponha que a seja E^sL. Vamos provar que não vale (3.1). Como a é E^sL, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(\xi^\ell, q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}$, tais que $q_\ell \geq 2$, $q_\ell \to \infty$ e

$$|\xi_j^\ell/q_\ell - a_j| < \exp(-\varepsilon q_\ell^{\frac{1}{s}}),$$

para todo $\ell = 1, 2, 3, \ldots,$ e $j = 1, 2, \ldots, n$.

Note que

$$\begin{aligned}|L_j(\xi^\ell, q_\ell)| = |\xi_j^\ell - a_jq_\ell| &= q_\ell|\xi_j^\ell/q_\ell - a_j| \\ < q_\ell\exp(-\varepsilon q_\ell^{\frac{1}{s}}) &= q_\ell\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}q_\ell^{\frac{1}{s}}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}q_\ell^{\frac{1}{s}}\right).\end{aligned}$$

Como $q_\ell \to \infty$, existe $\ell_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $\ell > \ell_1$, então $q_\ell\exp(-\frac{\varepsilon}{2}q_\ell^{\frac{1}{s}}) < 1$, portanto

$$\ell > \ell_1 \Rightarrow |L_j(\xi^\ell, q_\ell)| < \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}q_\ell^{\frac{1}{s}}\right) < 1, \; j = 1, \ldots, n.$$

Logo, para $\ell > \ell_1$, tem-se $|\xi_j^\ell| < 1 + |a_j|q_\ell$, para todo j, e portanto

$$\begin{aligned}|(\xi^\ell, q_\ell)| < |\xi^\ell| + q_\ell < q_\ell(2 + |a|) &\Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}q_\ell^{\frac{1}{s}} < -\frac{\varepsilon}{2}(2 + |a|)^{-\frac{1}{s}}|(\xi^\ell, q_\ell)|^{\frac{1}{s}} \\ &\Rightarrow \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}q_\ell^{\frac{1}{s}}\right) < \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}(2 + |a|)^{-\frac{1}{s}}|(\xi^\ell, q_\ell)|^{\frac{1}{s}}\right).\end{aligned}$$

Defina $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}(2 + |a|)^{-\frac{1}{s}}$ e seja $C > 0$ dado. Existe $\tilde{\ell} \in \mathbb{N}$ tal que $|(\xi^{\tilde{\ell}}, q_{\tilde{\ell}})| \geq q_{\tilde{\ell}} \geq C$ e $\tilde{\ell} > \ell_1$, então

$$|L_j(\xi^{\tilde{\ell}}, q_{\tilde{\ell}})| < \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}q_{\tilde{\ell}}^{\frac{1}{s}}\right) < \exp(-\tilde{\varepsilon}|(\xi^{\tilde{\ell}}, q_{\tilde{\ell}})|^{\frac{1}{s}}), \; j = 1, \ldots, n.$$

Disso segue que não vale (3.1) e portanto L não pode ser G^sH.

Reciprocamente, suponha que L não seja G^sH. Então a condição (3.1) não é verdadeira. Logo existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência de vetores $(\xi^\ell, q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}$ dois a dois distintos tais que

$$|L(\xi^\ell, q_\ell)| = \max_{1\leq j\leq n} |\xi_j^\ell - a_jq_\ell| < \exp(-\varepsilon|(\xi^\ell, q_l)|^{\frac{1}{s}}) < \exp(-\varepsilon q_\ell^{\frac{1}{s}}), \; \ell = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dividindo a desigualdade acima por q_ℓ concluímos que o vetor a é E^sL. $\square$

Reunindo a discussão inicial desta seção com o resultado acima, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.8. *Dados $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ em $\mathbb{R}^n$, considere o sistema $L = (L_1, \dots, L_n)$, com $L_j = \partial_{t_j} - (a_j + ib_j)\partial_x$. Então*

1. *Se $b \neq 0$, então L é G^sH;*

2. *Se $b = 0$, temos:*

   (i) se $a \in \mathbb{Q}^n$, então L não é G^sH;

   (ii) se $a \in \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$, então L é G^sH se, e somente se, a não é E^sL.

De forma análoga ao que fizemos acima, podemos relacionar a hipoeliticidade global do sistema (3.3) com vetores Liouville.

Definição 3.9. *Dizemos que o vetor $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$ é Liouville se, para cada $N \in \mathbb{N}$, a inequação*

$$|p/q - a| = \max_{1 \leq j \leq n} |p_j/q - a_j| < |q|^{-N}$$

admite uma infinidade de soluções $(p, q) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} - \{0\}$.

Observação 3.10. *Pode-se provar que $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$ é um vetor Liouville se, e só se, existe uma sequência $(\xi^\ell, q_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z} - \{0\}$ de vetores dois a dois distintos tais que*

$$|\xi_j^\ell/q_\ell - a_j| \leq |q_\ell|^{-\ell},$$

para $j = 1, 2, \dots, n$ e $\ell \in \mathbb{N}$.

Ademais, na sequência $(\xi^\ell, q_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ pode-se assumir que $q_\ell \in \mathbb{N}$, para todo ℓ, e que $q_\ell \to \infty$.

Teorema 3.11. *Dados $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ em $\mathbb{R}^n$, considere o sistema $L = (L_1, \dots, L_n)$, com $L_j = \partial_{t_j} - (a_j + ib_j)\partial_x$. Então*

1. *Se $b \neq 0$, então L é GH;*

2. *Se $b = 0$, temos:*

   (i) se $a \in \mathbb{Q}^n$, então L não é GH;

   (ii) se $a \in \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$, então L é GH se, e somente se, a não é um vetor Liouville.

A demonstração do Teorema 3.11 é feita de modo bastante similar a prova de 3.8 e por esta razão será omitida.

Observação 3.12. *Se $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$ é exponencial Liouville de ordem s, então a é um vetor Liouville. De fato, considere o sistema*

$$L = (L_1, \ldots, L_n), \qquad L_j = \partial_{t_j} - a_j \partial_x.$$

Como a é E^sL segue que L não é G^sH. Pelo Corolário 3.3, L não pode ser GH. Portanto a é um vetor Liouville. A recíproca de tal resultado não é verdadeira. De fato, vamos mostrar que existe um número α que é Liouville, mas não é exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$.

Considere a fração contínua $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$, com $a_n = 10^{n!}$. Em [3], S. Greenfield provou que α é um número de Liouville que não é exponencial Liouville. Vamos mostrar que α também não é exponencial Liouville de ordem s, para qualquer $s \geq 1$. Para isso precisaremos do seguinte lema técnico.

Lema 3.13. *Seja $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Então α é E^sL se, e só se, existe $\varepsilon > 0$ tal que a inequação*

$$|p - \alpha q| < e^{-\varepsilon |q|^{\frac{1}{s}}}$$

admite uma infinidade de soluções $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Demonstração. Suponha que α seja E^sL. Se para todo $\varepsilon > 0$ a inequação

$$|p - \alpha q| < e^{-\varepsilon |q|^{\frac{1}{s}}}$$

admite apenas um número finito de soluções p e q, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$|(p, q)| > R \Rightarrow |p - \alpha q| \geq e^{-\varepsilon |q|^{\frac{1}{s}}}.$$

Como α é E^sL existe $\varepsilon > 0$ tal que a inequação

$$|p/q - \alpha| < e^{-\varepsilon |q|^{\frac{1}{s}}}$$

admite uma infinidade de soluções (p, q). Para $\varepsilon' = \varepsilon/2$ existe $R > 0$ tal que

$$|(p, q)| > R \Rightarrow |p - \alpha q| \geq e^{-\varepsilon' |q|^{\frac{1}{s}}}.$$

Então

$$e^{-\varepsilon' |q|^{\frac{1}{s}}} \leq |p - \alpha q| = |q||p/q - \alpha| < |q| e^{-\varepsilon |q|^{\frac{1}{s}}}$$

para uma infinidade de inteiros p e q e portanto

$$e^{\frac{\varepsilon}{2} |q|^{\frac{1}{s}}} < |q|$$

para uma infinidade de inteiros q, o que seria uma contradição. Disso seque que deve existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$|p - \alpha q| < e^{-\varepsilon |q|^{\frac{1}{s}}}$$

admite uma infinidade de soluções $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$. A prova da recíproca é inteiramente análoga. $\square$

Proposição 3.14. *O número* $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots]$, *sendo* $a_n = 10^{n!}$, *não é exponencial Liouville de ordem* s, *para qualquer* $s \geq 1$.

Demonstração. Sejam p_n/q_n os convergentes da fração contínua $\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots]$.

Vamos provar que vale a seguinte condição

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, Q \in \mathbb{N} : p \in \mathbb{N}, q \geq Q \Rightarrow |p - \alpha q| \geq e^{-\varepsilon q^{\frac{1}{s}}}. \tag{3.4}$$

Utilizando o lema anterior vemos que 3.4 implica que α não é $E^s L$. Do Teorema 2.49 segue que para mostrar 3.4 basta provar a condição

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |p_n - \alpha q_n| \geq e^{-\varepsilon q_{n-1}^{\frac{1}{s}}}. \tag{3.5}$$

De fato, seja $\varepsilon > 0$ dado. Por 3.5 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \Rightarrow |p_n - \alpha q_n| \geq e^{-\varepsilon q_{n-1}^{\frac{1}{s}}}.$$

Defina $Q = q_{N-1}$. Sejam $p \in \mathbb{N}$ e $q \geq Q$. Afirmamos que $|p - \alpha q| \geq e^{-\varepsilon q^{\frac{1}{s}}}$. Com efeito, assuma que $|p - \alpha q| < e^{-\varepsilon q^{\frac{1}{s}}}$. Então

$$|p - \alpha q| < e^{-\varepsilon q^{\frac{1}{s}}} \leq e^{-\varepsilon q_{N-1}^{\frac{1}{s}}} \leq |p_N - \alpha q_N|.$$

Pelo Teorema 2.49 segue que $q > q_N$. Então

$$|p - \alpha q| < e^{-\varepsilon q^{\frac{1}{s}}} \leq e^{-\varepsilon q_N^{\frac{1}{s}}} \leq |p_{N+1} - \alpha q_{N+1}|.$$

Pelo Teorema 2.49 segue que $q > q_{N+1}$. Repetindo esse argumento, obteríamos que $q > q_n$ para qualquer $n \geq N$, o que seria um absurdo, já que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência estritamente crescente de números naturais. Portanto vamos nos concentrar em provar 3.5.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Note que

$$a_{n+1} = 10^{(n+1)!} = (10^{n!})^{n+1} = a_n^{n+1}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Lembre que (Teorema 2.48)

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2) q_n^2} \leq |p_n/q_n - \alpha|, \; n \in \mathbb{N},$$

o que implica

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2) q_n} \leq |p_n - \alpha q_n|, \; n \in \mathbb{N}.$$

Como $(a_n)^{n+2} = (a_n)^{n+1} a_n = a_{n+1} 10^{n!} \geq (a_{n+1} + 2)$, obtemos

$$\frac{1}{a_n^{n+2} q_n} \leq \frac{1}{(a_{n+1} + 2) q_n} \leq |p_n - \alpha q_n|, \; n \in \mathbb{N}.$$

Lembrando que vale a seguinte relação de recorrência $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, $n \geq 2$, vemos que $q_n \geq a_n$ e portanto

$$\frac{1}{q_n^{n+3}} \leq |p_n - \alpha q_n|, \ n \geq 2.$$

Disso segue que 3.5 fica provada se mostrarmos

$$q_n^{n+3} \leq e^{\varepsilon q_{n-1}^{\frac{1}{s}}}, \ n >> 0.$$

Estamos usando a notação $n >> 0$ no lugar de dizer para todo n suficientemente grande.

Note que

$$q_n^{n+3} \leq e^{\varepsilon q_{n-1}^{\frac{1}{s}}}(n >> 0) \Leftrightarrow (n+3)\log(q_n) \leq \varepsilon q_{n-1}^{\frac{1}{s}}(n >> 0).$$

Se

$$n\log(q_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} q_{n-1}^{\frac{1}{s}} = \varepsilon' q_{n-1}^{\frac{1}{s}}, \ n >> 0,$$

então

$$(n+3)\log(q_n) \leq \varepsilon q_{n-1}^{\frac{1}{s}}, \ n >> 0.$$

De fato, basta observar que $(n+3)/2 \leq n$ para $n >> 0$. Portanto basta mostrar que $n\log(q_n) \leq \varepsilon' q_{n-1}^{\frac{1}{s}}$, para $n >> 0$.

De $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \leq (a_n + 1)q_{n-1} \leq a_n^2 q_{n-1}$, $n \geq 3$, temos $n\log(q_n) \leq 2n\log(a_n) + n\log(q_{n-1})$. Portanto para mostrar que $n\log(q_n) \leq \varepsilon' q_{n-1}$, para $n >> 0$, é suficiente mostrar

(1) $2n\log(a_n) \leq \frac{\varepsilon'}{2} q_{n-1} = \varepsilon'' q_{n-1}^{\frac{1}{s}}$ para $n >> 0$ e

(2) $n\log(q_{n-1}) \leq \frac{\varepsilon'}{2} q_{n-1} = \varepsilon'' q_{n-1}^{\frac{1}{s}}$ para $n >> 0$.

Para finalizar a demonstração vamos provar que as afirmações (1) e (2) são válidas. Lembre que $q_n \geq a_n = 10^{n!}$, para $n \geq 3$.

Para provar (1), observe que $2n\log(a_n) = 2n\log(10^{n!}) = 2n(n!)\log(10)$. Como $q_{n-1}^{\frac{1}{s}} \geq a_{n-1}^{\frac{1}{s}} = 10^{\frac{(n-1)!}{s}}$ segue que $\varepsilon'' q_{n-1}^{\frac{1}{s}} \geq \varepsilon'' 10^{\frac{(n-1)!}{s}}$, portanto basta mostrar que $2n(n!)\log(10) \leq \varepsilon'' 10^{\frac{(n-1)!}{s}}$, para $n >> 0$. Mas isso segue de

$$\frac{2n(n!)}{10^{\frac{(n-1)!}{s}}} \to 0, n \to \infty.$$

Para provar (2), veja que $\frac{\log(x)}{x^{\frac{1}{s}}}$ é uma função decrescente para $x >> 0$. Então

$$n\frac{\log(q_{n-1})}{q_{n-1}^{\frac{1}{s}}} \leq n\frac{\log(10^{(n-1)!})}{10^{\frac{(n-1)!}{s}}}, \ (n >> 0).$$

Como

$$n\frac{\log(10^{(n-1)!})}{10^{\frac{(n-1)!}{s}}} = \frac{n!\log(10)}{10^{\frac{(n-1)!}{s}}} \to 0, \ n \to \infty,$$

obtemos

$$n\frac{\log(q_{n-1})}{q_{n-1}^{\frac{1}{s}}} \to 0,\ n \to \infty,$$

e portanto podemos concluir a validade de (2). $\square$

Observação 3.15. *Finalizamos esta seção observando que a recíproca do Corolário 3.3 não é verdadeira. Com efeito, considere α um número de Liouville que não seja E^sL. Então o operador $L_\alpha = \partial_t - \alpha\partial_x$ não é GH, mas é G^sH.*

3.4 Um Exemplo Interessante de Vetor E^sL

Começamos observando que, se $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \mathbb{Q}^n$ é um vetor E^sL, então cada coordenada irracional de a é um número E^sL. De fato, suponha que a_j seja irracional, para algum j. Como a é E^sL, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência de vetores $(\xi_1^\ell, \dots, \xi_n^\ell, q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}$ distintos dois a dois tais que $q_\ell \to \infty$ e

$$\max_{1\leq i\leq n} |a_i - \xi_i^\ell/q_\ell| < e^{-\varepsilon q_\ell^{\frac{1}{s}}},\ \ell \in \mathbb{N}.$$

Disso segue

$$0 < |a_j - \xi_j^\ell/q_\ell| < e^{-\varepsilon q_\ell^{\frac{1}{s}}},\ \ell \in \mathbb{N}.$$

Como $q_\ell \to \infty$ conclui-se que a_j é um número E^sL.

Naturalmente surge a pergunta se vale a recíproca de tal resultado, isto é, "sabendo que todas as entradas irracionais de a são números E^sL, é possível garantir que a é um vetor E^sL?" A resposta para tal pergunta é negativa e veremos isso através de um contraexemplo.

Definição 3.16. *Diremos um número racional p/q é uma boa aproximação para o número irracional $\alpha \in (0,1)$ se*

$$|p/q - \alpha| < \frac{1}{3q^2}.$$

E, dado $x \in \mathbb{R}$, definimos o maior inteiro menor ou igual que x como sendo o número

$$[x] = \max\{y \in \mathbb{Z} : y \leq x\}.$$

Vamos construir números irracionais α e β pertencentes ao intervalo $(0,1)$ tais que α e β são números E^sL, mas o vetor (α, β) não é E^sL. Construiremos α e β utilizando frações contínuas.

Vamos denotar $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$ e $\beta = [b_1, b_1, \dots]$, sendo $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sequências de números inteiros e positivos a serem determinadas, também vamos considerar $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{r_n}{s_n}$ como sendo os convergentes de α e β respectivamente.

Começamos fazendo algumas observações a respeito de $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$ (observações análogas valem para $\beta = [b_1, b_1, \dots]$):

(i) se $a_{n+1} = 1$, então $\frac{p_n}{q_n}$ não é uma boa aproximação para α. De fato, temos

$$|p_n/q_n - \alpha| > \frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} = \frac{1}{3q_n^2}.$$

(ii) se $a_{n+1} = [\exp(q_n^{\frac{1}{s}})] + 1$, então p_n/q_n é uma boa aproximação para α. Com efeito, como $q_n \geq 1$ segue que $a_{n+1} > 3$ e portanto

$$|p_n/q_n - \alpha| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} < \frac{1}{3q_n^2}.$$

(iii) se $a_{n+1} = [\exp(q_n^{\frac{1}{s}})] + 1$, $t_n = 1 + \max\{2, [\exp(q_n^{\frac{1}{s}}/2)]\}$ e $t \geq t_n$, então tp_n/tq_n não é uma boa aproximação para α. De fato, note que $t^2 \geq \exp(q_n^{\frac{1}{s}})$, pois

$$t_n \geq 1 + [\exp(q_n^{\frac{1}{s}}/2)] > \exp(q_n^{\frac{1}{s}}/2),$$

e que $2t^2 \geq 3 + t^2$, pois $t \geq 3$. Então

$$\begin{aligned} |\alpha - tp_n/tq_n| = |\alpha - p_n/q_n| &\geq \frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} \\ &\geq \frac{1}{(3+\exp(q_n^{\frac{1}{s}}))q_n^2} \geq \frac{1}{(3+t^2)q_n^2} \geq \frac{1}{2t^2q_n^2} = \frac{1}{2(tq_n)^2}. \end{aligned}$$

Seja $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números naturais estritamente crescente. Vamos escolher a sequência $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de tal forma que $a_{k_\ell+1} = [\exp(q_{k_\ell}^{\frac{1}{s}})] + 1$ para todo ℓ ímpar e $a_j = 1$ caso contrário. Para a a sequência $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, escolhemos $b_{k_\ell+1} = [\exp(q_{k_\ell}^{\frac{1}{s}})] + 1$ para todo ℓ par e $b_j = 1$ caso contrário. Dessa forma, temos

$$\alpha = [1, \ldots, 1, a_{k_1+1}, 1, \ldots, 1, a_{k_3+1}, 1, \ldots]$$

e

$$\beta = [1, \ldots, 1, b_{k_2+1}, 1, \ldots, 1, b_{k_4+1}, 1, \ldots].$$

Nessas condições α e β são E^sL. Com efeito, basta notar que

$$|\alpha - p_{k_\ell}/q_{k_\ell}| < \frac{1}{a_{k_\ell+1}q_{k_\ell}^2} = \frac{1}{([\exp(q_{k_\ell}^{\frac{1}{s}})]+1)q_{k_\ell}^2} < \frac{1}{\exp(q_{k_\ell}^{\frac{1}{s}})},$$

para todo ℓ ímpar. Como $q_{k_\ell} \to \infty$ segue que α é um número E^sL. Analogamente prova-se que β é um número E^sL.

Para garantir que o vetor (α, β) não seja E^sL vamos escolher a sequência (k_j) de tal forma que $k_1 \geq 2$, $q_{k_1} \geq 2^s$, $s_{k_1} \geq 2^s$,

$$s_{k_\ell} > q'_{\ell-1} := q_{k_{\ell-1}}(1 + [\exp(q_{k_{\ell-1}}^{\frac{1}{s}}/2)]),\ \ell = 2, 4, 6, \ldots,$$

e

$$q_{k_\ell} > s'_{\ell-1} := s_{k_{\ell-1}}(1 + [\exp(q_{k_{\ell-1}}^{\frac{1}{s}}/2)]),\ \ell = 3, 5, 7, \ldots.$$

Como $s_n \to \infty$ e $q_n \to \infty$ podemos fazer tal escolha. Note que

$$q_{k_1} < q'_1 < s_{k_2} < s'_2 < q_{k_3} < q'_3 < \dots .$$

Defina $I_\ell = \{q \in \mathbb{N} : q_{k_\ell} \leq q \leq q'_\ell\}$ para ℓ ímpar e $J_m = \{q \in \mathbb{N} : s_{k_m} \leq q \leq s'_m\}$ para m par. Claramente $I_\ell \cap J_m = \emptyset$, para todo ℓ ímpar e todo m par.

Afirmamos que se p/q é uma boa aproximação para α (respectivamente para β), então $q \in I_\ell$, para algum ℓ ímpar (respectivamente $q \in J_m$, para algum m par). Com efeito, seja p/q uma boa aproximação para α. Segue do Teorema 2.50 que $p/q = p_n/q_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Seja $t = mdc(p,q)$, então $p = tp_n$ e $q = tq_n$, já que p_n e q_n são primos entre si. Tal n deve ser igual a k_ℓ para algum ℓ ímpar, pois caso contrário $a_{n+1} = 1$ e pela observação (i) teríamos que p_n/q_n não seria uma boa aproximação para α e portanto tp_n/tq_n não poderia ser uma boa aproximação para qualquer $t \geq 1$. Então $n = k_\ell$ para algum ℓ ímpar. Temos $t < t_{k_\ell}$, pois do contrário teríamos $t \geq t_{k_\ell}$ e pela observação (iii) concluiríamos que tp_{k_ℓ}/tq_{k_ℓ} não seria uma boa aproximação. Como $k_\ell \geq k_1$ seque que $q_{k_\ell} \geq 2^s$ e portanto $q_{k_\ell}^{\frac{1}{s}}/2 \geq 1$. Logo $t_{k_\ell} = 1 + [\exp(q_{k_\ell}^{\frac{1}{s}}/2)]$. Finalmente concluímos

$$q_{k_\ell} \leq tq_{k_\ell} = q = tq_{k_\ell} \leq t_{k_\ell} q_{k_\ell} = q'_\ell,$$

isto é, $q \in I_\ell$. Analogamente prova-se o resultado referente a β.

Segue do que vimos que α e β não possuem boas aproximações com denominador comum. Vejamos que isto implica que (α, β) não é E^sL. De fato, suponha que (α,β) seja E^sL, então existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(\xi_1^\ell, \xi_2^\ell, q_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}$ tais que $q_\ell \to \infty$,

$$|\xi_1^\ell/q_\ell - \alpha| < \exp(-\varepsilon q_\ell^{\frac{1}{s}}), \ \ell \in \mathbb{N},$$

e

$$|\xi_2^\ell/q_\ell - \beta| < \exp(-\varepsilon q_\ell^{\frac{1}{s}}), \ \ell \in \mathbb{N}.$$

Como α e β não tem boas aproximações de denominador comum segue que

$$|\xi_1^\ell/q_\ell - \alpha| \geq \frac{1}{3q_\ell^2}$$

ou

$$|\xi_2^\ell/q_\ell - \beta| \geq \frac{1}{3q_\ell^2},$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Portanto

$$\frac{1}{3q_\ell^2} < \exp(-\varepsilon q_\ell^{\frac{1}{s}}), \ \ell \in \mathbb{N},$$

o que seria um absurdo, pois $q_\ell \to \infty$.

Fica então construído um vetor (α, β) não E^sL tal que α e β são números E^sL. Finalizamos esta seção com uma interessante observação proveniente da existência de tal vetor.

Observação 3.17. *Consideremos* $L = (L_1, \dots L_n)$ *como em* (3.3). *Utilizando o Teorema 3.8 podemos concluir que se* L *não é* G^sH*, então nenhum dos operadores* L_j *restrito as variáveis* $(t_j, x) \in \mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x$ *pode ser* G^sH.

O vetor (α, β) *construído acima serve para mostrar que a recíproca deste resultado não é verdadeira. De fato, considere o sistema* $L' = (L_\alpha, L_\beta)$*, sendo* $L_\alpha = \partial_{t_1} - \alpha\partial_x$ *e* $L_\beta = \partial_{t_2} - \beta\partial_x$*. Note que* L' *é* G^sH*, porém tanto* L_α *quanto* L_β *não são* G^sH *restrito a duas variáveis.*

4 UMA CLASSE DE SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

Neste capítulo vamos demonstrar o principal resultado deste trabalho, que consiste em encontrar condições necessárias e suficientes para garantir a G^s-hipoeliticidade global do sistema

$$L = (L_1, \ldots, L_n), \quad L_j = \partial_{t_j} - c_j(t_j)\partial_x, \tag{4.1}$$

com $c_j(t_j) = a(t_j) + ib_j(t_j) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_j})$.

Recordamos que o sistema (4.1) é dito globalmente G^s-hipoelítico (G^sH) quando

$$u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ e } L_j u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}),\ j = 1, \ldots, n \implies u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Para enunciar e demonstrar o principal resultado deste trabalho precisamos introduzir algumas notações, que serão utilizadas no restante desse capítulo capítulo.

▷ $(t, x) = (t_1, \ldots, t_n, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $|\cdot|$ representa a norma do máximo;

▷ $c_{0j} = a_{0j} + ib_{0j}$, para cada $j = 1, \ldots, n$, sendo

$$a_{0j} = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} a_j(s)ds \quad \text{e} \quad b_{0j} = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} b_j(s)ds,$$

e $c_0 = (c_{01}, \ldots, c_{0n})$;

▷ $C(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ é a função definida por

$$C(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{t_j} c_j(s)ds - c_{0j}t_j,\ t \in \mathbb{R}^n,$$

logo $\partial_{t_j} C(t) = c_j(t_j) - c_{0j}$, para todo $t \in \mathbb{R}^n$ e $j = 1, \ldots, n$.

▷ $J = \{j \in \{1, \ldots, n\} : b_j(t_j) \text{ não muda de sinal}\}$.

Após uma reordenação das variáveis, caso seja necessário, podemos supor

$$J = \{1, \ldots, \ell\},$$

isto é:

$b_j(t_j)$ não muda de sinal para $j \in \{1, \ldots, \ell\} = J$; e

$b_j(t_j)$ muda de sinal para $j \in \{\ell + 1, \ldots, n\} = \{1, \ldots, n\} - J$.

Aqui convencionamos que $J = \emptyset$ quando $\ell = 0$.

A partir de agora assumiremos que o sistema (4.1) está ordenado de tal forma.

Observação 4.1. *Dizer que uma função f muda de sinal significa que existem pontos x_1 e x_2 em seu domínio tais que $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$. Desse modo a função identicamente nula não muda de sinal.*

Com as notações acima, podemos enunciar o principal resultado deste trabalho.

Teorema 4.2. *O sistema L definido em* (4.1) *é globalmente G^s-hipoelítico se, e somente se, valem (simultaneamente) as seguintes condições:*

(i) $J \neq \emptyset$ *(existe j tal que $b_j(t_j)$ não muda de sinal);*

(ii) se $b_j(t_j) \equiv 0$, para todo $j \in J$, então o vetor $a = (a_{01}, \ldots, a_{0\ell})$ não está em $\mathbb{Q}^\ell$ e não é E^sL.

A demonstração deste teorema está dividida em duas partes, que correspondem as duas seções a seguir.

A prova da suficiência das condições (i) e (ii) possui duas partes principais: a primeira consiste em estimar os coeficientes parciais de Fourier do candidato a solução do sistema, quando alguma das funções b_j não é identicamente nula e não muda de sinal; na segunda, usamos um automorfismo para conjugar o sistema L a um sistema $\tilde{L}$ mais simples, na sequência provamos que L é G^sH se e somente se $\tilde{L}$ é G^sH e concluímos a prova mostrando a G^s-hipoeliticidade de $\tilde{L}$.

A prova da necessidade passa pela construção de uma solução singular para o sistema $\tilde{L}$, ou seja, a partir da negação das condições (i) e (ii) acima, construímos uma ultradistribuição u tal que $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ e $\tilde{L}_j u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

4.1 Prova do Teorema 4.2 - Suficiência

Nesta seção vamos provar que se as condições (i) e (ii) do Teorema 4.2 estão satisfeitas, então o sistema (4.1) é G^sH. Essa demonstração foi divida em dois casos, que correspondem as duas subseções seguintes: primeiro supomos que existe $j \in J$ tal que b_j não seja identicamente nula e, em seguida, consideramos o caso em que b_j é identicamente nula para cada $j \in J$.

4.1.1 Caso $b_j \not\equiv 0$, para algum $j \in J$

Suponha que exista algum $j \in J$ tal que b_j não seja identicamente nula. Por simplicidade vamos supor $j = 1$ e $b_1(t_1) \geq 0$ para todo $t_1 \in \mathbb{R}_{t_1}$ (o caso em que $b_1(t_1) \leq 0$ é tratado de forma similar).

Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $L_j u = f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Vamos provar que $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Escrevendo

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_\eta(t) e^{i\eta x} \quad \text{e} \quad f_j = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_{j\eta}(t) e^{i\eta x}, \; j = 1, \ldots, n,$$

segue da continuidade dos operadores L_j em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ (ver Lema 5.1) que

$$\begin{aligned} L_j u &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}} L_j \widehat{u}_\eta(t) e^{i\eta x} = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}} (\partial_{t_j} - c_j(t_j)\partial_x)\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}} (\partial_{t_j}\widehat{u}_\eta(t) - i\eta c_j(t_j)\widehat{u}_\eta(t))e^{i\eta x}. \end{aligned}$$

Dado que $L_j u = f_j$, para $j = 1, \dots, n$, da unicidade dos coeficientes parciais de Fourier, para cada $\eta \in \mathbb{Z}$, o coeficiente $\widehat{u}_\eta$ satisfaz o seguinte sistema

$$(\partial_{t_j} - i\eta c_j(t_j))\widehat{u}_\eta(t) = \widehat{f}_{j\eta}(t),\ j = 1, \dots, n. \tag{4.2}$$

Como as funções $e^{\pm i\eta C(t)}$, $t \in \mathbb{R}^n$, pertencem a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ (Proposição 2.18), segue que (4.2) é equivalente ao sistema

$$(\partial_{t_j} - i\eta c_{0j})e^{-i\eta C(t)}\widehat{u}_\eta(t) = e^{-i\eta C(t)}\widehat{f}_{j\eta}(t),\ j = 1, \dots, n. \tag{4.3}$$

De fato, basta notar que

$$(\partial_{t_j} - i\eta c_{0j})e^{-i\eta C(t)}\widehat{u}_\eta(t) = [(\partial_{t_j} - i\eta c_j(t_j))\widehat{u}_\eta(t)]e^{-i\eta C(t)},$$

e como $e^{i\eta C(t)} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ segue que (4.2) é equivalente a (4.3).

A fim de descrever as soluções periódicas de (4.3), veja que como $b_1(t_1) \geq 0$ e $b_1(t_1)$ não é identicamente nula, segue que $b_{01} > 0$, portanto $-i\eta c_{01} \notin i\mathbb{Z}$ para todo $\eta \neq 0$. Logo o vetor $-i\eta c_0 \notin i\mathbb{Z}^n$ para todo $\eta \neq 0$. Além disso, como os operadores $L_{0j} = \partial_{t_j} - i\eta c_{0j}$ e $L_{0k} = \partial_{t_k} - i\eta c_{0k}$ comutam, então

$$\begin{aligned} L_{0j}\,(e^{-i\eta C(t)}\widehat{f}_{k\eta}) &= L_{0j}\,(L_{0k}\,e^{-i\eta C(t)}\widehat{u}_\eta) \\ &= L_{0k}\,(L_{0j}\,e^{-i\eta C(t)}\widehat{u}_\eta) \ = \ L_{0k}\,(e^{-i\eta C(t)}\widehat{f}_{j\eta}). \end{aligned}$$

Desse modo podemos aplicar o Lema 5.5 no sistema (4.3), então, para $\eta \neq 0$, utilizando a forma (5.3), obtemos

$$\widehat{u}_\eta(t) = \frac{1}{1 - e^{i2\pi\eta c_{01}}} \int_0^{2\pi} e^{i\eta(c_{01}r + C(t) - C(t_1 - r, t_{-1}))}\widehat{f}_{1\eta}(t_1 - r, t_{-1})dr, \tag{4.4}$$

e utilizando a forma equivalente (5.4), temos

$$\widehat{u}_\eta(t) = \frac{1}{e^{-i2\pi\eta c_{01}} - 1} \int_0^{2\pi} e^{i\eta(-c_{01}r + C(t) - C(t_1 + r, t_{-1}))}\widehat{f}_{1\eta}(t_1 + r, t_{-1})dr. \tag{4.5}$$

Observação 4.3. *Lembramos que a notação $(t_1 - r, t_{-1})$ representa o vetor $(t_1 - r, t_2 \dots, t_n)$.*

Analisando melhor o expoente da exponencial que aparece no integrando de (4.4), vemos que

$$\begin{aligned} c_{01}r + C(t) - C(t_1 - r, t_{-1}) &= c_{01}r + \int_0^{t_1} c_1(y)dy - c_{01}t_1 + \sum_{j=2}^{n}\left(\int_0^{t_j} c_j(y)dy - c_{0j}t_j\right) \\ &- \left(\int_0^{t_1 - r} c_1(y)dy - c_{01}(t_1 - r)\right) - \sum_{j=2}^{n}\left(\int_0^{t_j} c_j(y)dy - c_{0j}t_j\right) \\ &= \int_0^{t_1} c_1(y)dy - \int_0^{t_1 - r} c_1(y)dy = \int_{t_1 - r}^{t_1} c_1(y)dy. \end{aligned}$$

Denotamos

$$H(t_1, r) = \int_{t_1 - r}^{t_1} c_1(y)dy,$$

para todo $(t_1, r) \in \mathbb{R}_{t_1} \times [0, 2\pi]$. Então podemos escrever

$$\widehat{u}_\eta(t) = \frac{1}{1 - e^{i2\pi\eta c_{01}}} \int_0^{2\pi} e^{i\eta H(t_1,r)} \widehat{f}_{1\eta}(t_1 - r, t_{-1})dr, \tag{4.6}$$

para todo $\eta > 0$.

Usaremos a expressão acima e o Teorema 2.35 para provar que

$$\sum_{\eta > 0} \widehat{u}_\eta(t) e^{i\eta x} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Para fazer isso, precisamos obter boas estimativas para as derivadas de $\widehat{u}_\eta(t)$, $\eta \in \mathbb{N}$, e os próximos lemas vão nos auxiliar neste sentido.

Lema 4.4. *A função $\widehat{u}_\eta(t)$ pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para todo $\eta \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Fixado $\eta \in \mathbb{N}$, considere a função $\phi(t_1) = e^{i\eta t_1}$, com $t_1 \in \mathbb{R}$. Claramente $\phi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$. Portanto existem $C_\phi > 1$ e uma amplitude $h > 1$ tais que

$$|\partial^j_{t_1} \phi(t_1)| \leq C_\phi h^j (j!)^s, \ t_1 \in \mathbb{R}, \ j \in \mathbb{N}_0.$$

Como $c_1(t_1) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$, $H(t_1, r)$ é $2\pi-$periódica em t_1 e $\partial_{t_1} H(t_1, r) = c_1(t_1) - c_1(t_1 - r)$, existem $C_H > 1$ e $h_1 > 1$ tais que

$$|\partial^j_{t_1} H(t_1, r)| \leq C_H h_1^j (j!)^s, \ (t_1, r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi], \ j \in \mathbb{N}_0.$$

Aplicando a fórmula de Faà di Bruno na composição $\phi \circ \psi(t_1)$, sendo $\psi(t_1) = H(t_1, r)$, com $t_1 \in \mathbb{R}$ e $r \in [0, 2\pi]$ fixado, segue das estimativas anteriores que

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha_{t_1} \phi \circ \psi(t_1)| &= |\sum_{\Delta(\alpha)} \frac{\alpha!}{k!} \phi^{(|k|)}(\psi(t_1)) \prod_{j=1}^{\alpha} \left(\frac{\psi^{(j)}(t_1)}{j!} \right)^{k_j} | \\
&\leq \alpha! \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{1}{k!} C_\phi h^{|k|} (|k|!)^s \prod_{j=1}^{\alpha} \left(\frac{C_H h_1^j (j!)^s}{j!} \right)^{k_j} \\
&\leq C_\phi (C_H h h_1)^\alpha \alpha! \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{1}{k!} (|k|!)^s \prod(\alpha),
\end{aligned}$$

sendo $\Delta(\alpha) = \{k = (k_1, \ldots, k_\alpha) \in \mathbb{N}_0^\alpha : \sum_{j=1}^\alpha j k_j = \alpha\}$ e $\prod(\alpha) = \prod_{j=1}^\alpha ((j!)^{s-1})^{k_j}$.

Utilizando os Lemas 5.10 e 5.9 segue que

$$\begin{aligned}
|\partial_{t_1}^{\alpha} e^{i\eta H(t_1,r)}| &= |\partial_{t_1}^{\alpha} \phi \circ \psi(t_1)| \\
&\leq C_\phi (C_H h h_1)^\alpha \alpha! \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{1}{k!} (|k|!)^s \prod(\alpha) \\
&\leq C_\phi (C_H h h_1)^\alpha \alpha! \sum_{\Delta(\alpha)} \frac{|k|!}{k!} (\alpha!)^{s-1} \\
&= C_\phi (C_H h h_1)^\alpha (\alpha!)^s 2^{\alpha-1} \\
&\leq C_\phi (2 C_H h h_1)^\alpha (\alpha!)^s,
\end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0$ e $(t_1, r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

Como $\widehat{f}_{1\eta}(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ segue que existem $K > 1$ e $h_2 > 1$ satisfazendo

$$|\partial^\alpha \widehat{f}_{1\eta}(t)| \leq K h_2^{|\alpha|} (\alpha!)^s, \ t \in \mathbb{R}^n, \, \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Escreva $\alpha = (\alpha_1, \beta) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0^{n-1}$. Utilizando as estimativas anteriores vem que

$$\begin{aligned}
|1 - e^{i2\pi\eta c_{01}}||\partial^\alpha \widehat{u}_\eta(t)| &= |\int_0^{2\pi} \partial_{t_1}^{\alpha_1} (e^{i\eta H(t_1,r)} \partial^{(0,\beta)} \widehat{f}_{1\eta}(t_1 - r, t_{-1})) dr| \\
&\leq \int_0^{2\pi} |\sum_{\gamma_1 \leq \alpha_1} \binom{\alpha_1}{\gamma_1} \partial_{t_1}^{\gamma_1} e^{i\eta H(t_1,r)} \partial^{(\alpha_1 - \gamma_1, \beta)} \widehat{f}_{1\eta}(t_1 - r, t_{-1})| dr \\
&\leq \int_0^{2\pi} \sum_{\gamma_1 \leq \alpha_1} \binom{\alpha_1}{\gamma_1}^s C_\phi (2 C_H h h_1)^{\gamma_1} (\gamma_1!)^s K h_2^{|(\alpha_1 - \gamma_1, \beta)|} ((\alpha_1 - \gamma_1, \beta)!)^s dr \\
&\leq 2\pi K C_\phi (4 C_H h h_1 h_2)^{|\alpha|} (\alpha!)^s,
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Portanto $\widehat{u}_\eta(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Lema 4.5. *Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|\partial_{t_1}^{\alpha_1} e^{i\eta H(t_1,r)}| e^{-\varepsilon \eta^{\frac{1}{s}}} \leq C_\varepsilon^{\alpha_1} (\alpha_1!)^s, \ (t_1, r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi], \, \alpha_1 \in \mathbb{N}_0, \, \eta \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Como vimos no lema anterior, existem $C_H > 1$ e $h > 1$ tais que

$$|\partial_{t_1}^{\alpha_1} H(t_1, r)| \leq C_H h^{\alpha_1} (\alpha_1!)^s, \ \alpha_1 \in \mathbb{N}_0, \, (t_1, r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi].$$

Também observamos que como $b_1 \geq 0$ segue que $|e^{i\eta H(t_1,r)}| \leq 1$ para todo $(t_1, r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ e $\eta > 0$. Agora vamos aplicar a fórmula de Faà di Bruno na composição das funções $\phi(t_1) = e^{i\eta t_1}$ e

$\psi(t_1) = H(t_1, r)$, sendo $t_1 \in \mathbb{R}$ e $r \in [0, 2\pi]$ fixo. Então, para $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\partial_{t_1}^{\alpha_1} \phi \circ \psi(t_1)| &= |\sum_{\Delta(\alpha_1)} \frac{\alpha_1!}{k!} \phi^{(|k|)}(\psi(t_1)) \prod_{j=1}^{\alpha_1} \left(\frac{\psi^{(j)}(t_1)}{j!} \right)^{k_j} | \\
&= |\sum_{\Delta(\alpha_1)} \frac{\alpha_1!}{k!} (i\eta)^{|k|} e^{i\eta H(t_1,r)} \prod_{j=1}^{\alpha_1} \left(\frac{\partial_{t_1}^{j} H(t_1, r)}{j!} \right)^{k_j} | \\
&\leq \sum_{\Delta(\alpha_1)} \frac{\alpha_1!}{k!} |\eta|^{|k|} \prod_{j=1}^{\alpha_1} \left(\frac{C_H h^j (j!)^s}{j!} \right)^{k_j} \\
&\leq (C_H h)^{\alpha_1} \sum_{\Delta(\alpha_1)} \frac{\alpha_1!}{k!} \frac{\eta|^{|k|}}{(|k|!)^s} (|k|!)^s \prod(\alpha_1),
\end{aligned}
$$

sendo $\Delta(\alpha_1) = \{k = (k_1, \ldots, k_{\alpha_1}) \in \mathbb{N}_0^{\alpha_1} : \sum_{j=1}^{\alpha_1} jk_j = \alpha_1\}$ e $\prod(\alpha_1) = \prod_{j=1}^{\alpha_1}((j!)^{s-1})^{k_j}$.

Aplicando o Lema 5.10 na desigualdade acima e notando que $k! \leq |k|!$ obtemos

$$
|\partial_{t_1}^{\alpha_1} \phi \circ \psi(t_1)| \leq (C_H h)^{\alpha_1} (\alpha_1!)^s \sum_{\Delta(\alpha_1)} \frac{|k|!}{k!} |\frac{\eta|^{|k|}}{(k!)^s}.
$$

Multiplicando a desigualdade acima por $e^{-\varepsilon \eta^{\frac{1}{s}}}$ e utilizando os Lemas 5.8 e 5.9 segue que existe $C_\varepsilon > 1$ tal que

$$
\begin{aligned}
|\partial_{t_1}^{\alpha_1} e^{i\eta H(t_1,r)}| e^{-\varepsilon \eta^{\frac{1}{s}}} &\leq (C_H h)^{\alpha_1} (\alpha_1!)^s \sum_{\Delta(\alpha_1)} \frac{|k|!}{k!} |\frac{\eta|^{|k|}}{(k!)^s} e^{-\varepsilon \eta^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq (C_H h)^{\alpha_1} (\alpha_1!)^s \sum_{\Delta(\alpha_1)} \frac{|k|!}{k!} C_\varepsilon^{|k|} \\
&\leq (C_H h C_\varepsilon)^{\alpha_1} (\alpha_1!)^s \sum_{\Delta(\alpha_1)} \frac{|k|!}{k!} \\
&= (C_H h C_\varepsilon)^{\alpha_1} (\alpha_1!)^s 2^{\alpha_1 - 1} \leq (2 C_H h C_\varepsilon)^{\alpha_1} (\alpha_1!)^s,
\end{aligned}
$$

para todo $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0$, $\eta \in \mathbb{N}$ e $(t_1, x) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$. □

Agora estamos em condições de calcular estimativas para as derivadas de $\widehat{u}_\eta(t)$, a fim de usar o Teorema 2.35 e concluir que $\sum_{\eta > 0} \widehat{u}_\eta(t) e^{i\eta x} \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^{n+1})$.

Começamos observando que como $f_1(t) \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^n)$ existem $\varepsilon > 0$, $C_f > 0$ e $h > 1$ tais que

$$
|\partial^\alpha \widehat{f}_{1\eta}(t)| \leq C_f h^{|\alpha|} (\alpha!)^s e^{-\varepsilon |\eta|^{\frac{1}{s}}}, \tag{4.7}
$$

para todo $t \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $\eta \in \mathbb{Z}$. Utilizando os Lemas 4.5 e 5.7 segue que existem $C_1 > 1$ e $C_\varepsilon > 1$ satisfazendo

$$
|1 - e^{i2\pi\eta c_{01}}|^{-1} \leq C_1, \ \eta \in \mathbb{N}, \tag{4.8}
$$

e

$$
|\partial_{t_1}^{\alpha_1} e^{i\eta H(t_1,r)}| e^{-\frac{\varepsilon}{2} \eta^{\frac{1}{s}}} \leq C_\varepsilon^{\alpha_1} (\alpha_1!)^s, \ (t_1, r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi], \ \alpha_1 \in \mathbb{N}_0, \ \eta \in \mathbb{N}. \tag{4.9}
$$

Seja $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e escreva $\alpha = (\alpha_1, \beta) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0^{n-1}$. Então, utilizando as estimativas (4.7), (4.8) e (4.9) obtemos

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha \widehat{u}_\eta(t)| &= |\frac{1}{1-e^{i2\pi\eta c_{01}}}\int_0^{2\pi} \partial_{t_1}^{\alpha_1}(e^{i\eta H(t_1,r)}\partial^{(0,\beta)}\widehat{f}_{1\eta}(t_1-r,t_{-1}))dr| \\
&\leq C_1\int_0^{2\pi} |\partial_{t_1}^{\alpha_1}(e^{i\eta H(t_1,r)}\partial^{(0,\beta)}\widehat{f}_{1\eta}(t_1-r,t_{-1}))|dr \\
&\leq C_1\int_0^{2\pi} \sum_{\gamma_1\leq\alpha_1}\binom{\alpha_1}{\gamma_1}|\partial_{t_1}^{\gamma_1}e^{i\eta H(t_1,r)}||\partial^{(\alpha_1-\gamma_1,\beta)}\widehat{f}_{1\eta}(t_1-r,t_{-1}))|dr \\
&\leq C_1\int_0^{2\pi} \sum_{\gamma_1\leq\alpha_1}\binom{\alpha_1}{\gamma_1}|\partial_{t_1}^{\gamma_1}e^{i\eta H(t_1,r)}|C_f h^{|(\alpha_1-\gamma_1,\beta)|}((\alpha_1-\gamma_1,\beta)!)^s e^{-\varepsilon\eta^{\frac{1}{s}}}dr \\
&= C_1C_f h^{|\alpha|}((0,\beta)!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}}\int_0^{2\pi} \sum_{\gamma_1\leq\alpha_1}\binom{\alpha_1}{\gamma_1}|\partial_{t_1}^{\gamma_1}e^{i\eta H(t_1,r)}|e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}}((\alpha_1-\gamma_1)!)^s dr \\
&\leq C_1C_f h^{|\alpha|}((0,\beta)!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}}\int_0^{2\pi} \sum_{\gamma_1\leq\alpha_1}\binom{\alpha_1}{\gamma_1}^s C_\varepsilon^{\gamma_1}(\gamma_1!)^s((\alpha_1-\gamma_1)!)^s dr \\
&= C_1C_f h^{|\alpha|}((0,\beta)!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}}\int_0^{2\pi} \sum_{\gamma_1\leq\alpha_1}(\alpha_1!)^s C_\varepsilon^{\gamma_1}dr \\
&\leq C_1C_f h^{|\alpha|}((0,\beta)!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}}\int_0^{2\pi} (\alpha_1!)^s C_\varepsilon^{\alpha_1}\sum_{\gamma_1\leq\alpha_1}dr \\
&\leq C_1C_f(C_\varepsilon h)^{|\alpha|}(\alpha!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}}\int_0^{2\pi} \sum_{\gamma_1\leq\alpha_1}dr \\
&\leq 2\pi C_1C_f(2C_\varepsilon h)^{|\alpha|}(\alpha!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}},
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $\eta \in \mathbb{N}$. Disso segue que $\sum_{\eta>0}\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^{n+1})$.

Utilizando a forma equivalente (4.5), analogamente podemos concluir que $\sum_{\eta<0}\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x}$ pertence a $G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^{n+1})$.

Para $\eta = 0$ temos $\widehat{u}_0 \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^n)$. De fato, basta utilizar (4.2) e a Observação 3.4.

Finalmente concluímos que

$$u(t,x) = \sum_{\eta<0}\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} + \widehat{u}_0(t)e^{i0x} + \sum_{\eta>0}\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x}$$

pertence a $G_{2\pi}^s(\mathbb{R}^{n+1})$, e portanto L é G^sH.

Isso encerra a demonstração do caso em que existe algum $j \in J$ tal que b_j não é identicamente nula.

4.1.2 Caso $b_j \equiv 0$, para todo $j \in J$

Suponha agora $b_j \equiv 0$, para todo $j \in J$, e considere a função $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$A(t) = \Re C(t) = \sum_{j=1}^n \int_0^{t_j} a_j(y)dy - a_{0j}t_j, \ t \in \mathbb{R}^n.$$

Claramente $A(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $\partial_{t_j} A(t) = a_j(t_j) - a_{0j}$, para $j = 1, \ldots, n$, e a função $e^{i\eta A(t)}$ pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para todo $\eta \in \mathbb{Z}$ (ver Proposição 2.18).

Considere a aplicação $S : D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}) \to D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ dada por

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_\eta(t) e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}) \longmapsto Su = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_\eta(t) e^{i\eta A(t)} e^{i\eta x}. \tag{4.10}$$

Vamos mostrar que a aplicação S é um automorfismo e através de uma conjugação, passaremos o problema de estudar a G^s-hipoeliticidade do sistema L para o estudo da G^s-hipoeliticidade de um sistema $\tilde{L}$ mais simples.

Para mostrar que S está bem definida e de fato é um automorfismo precisamos do seguinte resultado técnico.

Lema 4.6. *Para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|\partial^\alpha e^{i\eta A(t)}| e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq C_\varepsilon^{|\alpha|} (\alpha!)^s, \ \alpha \in \mathbb{N}^n_0, \, t \in \mathbb{R}^n, \ \eta \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Aplicando a fórmula de Faà di Bruno segue que, para $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ e $\eta \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \partial^\alpha e^{i\eta A(t)} &= \partial^{\alpha_1}_{t_1} \ldots \partial^{\alpha_n}_{t_n} e^{i\eta A(t)} = (\partial^{\alpha_1}_{t_1} \ldots \partial^{\alpha_{n-1}}_{t_{n-1}}) \partial^{\alpha_n}_{t_n} e^{i\eta A(t)} \\ &= (\partial^{\alpha_1}_{t_1} \ldots \partial^{\alpha_{n-1}}_{t_{n-1}}) \sum_{\Delta(\alpha_n)} \frac{\alpha_n!}{k^{(n)}!} (i\eta)^{|k^{(n)}|} e^{i\eta A(t)} \prod_{j_n=1}^{\alpha_n} \left(\frac{\partial^{j_n}_{t_n} A(t)}{j_n!} \right)^{k^{(n)}_{j_n}}, \end{aligned}$$

sendo $\Delta(\alpha_n) = \{k^{(n)} = (k^{(n)}_1, \ldots, k^{(n)}_{\alpha_n}) \in \mathbb{N}^{\alpha_n}_0 : \sum_{j_n=1}^{\alpha_n} j_n k^{(n)}_{j_n} = \alpha_n\}$.

Notando que $\partial^{j_n}_{t_n} A(t)$ depende apenas de t_n, pois $\partial_{t_n} A(t) = a_n(t_n) - a_{0n}$, segue que

$$\partial^\alpha e^{i\eta A(t)} = \sum_{\Delta(\alpha_n)} \frac{\alpha_n!}{k^{(n)}!} (i\eta)^{|k^{(n)}|} [(\partial^{\alpha_1} \ldots \partial^{\alpha_{n-1}}_{t_{n-1}}) e^{i\eta A(t)}] \prod_{j_n=1}^{\alpha_n} \left(\frac{\partial^{j_n}_{t_n} A(t)}{j_n!} \right)^{k^{(n)}_{j_n}}.$$

Aplicando esse processo mais $(n-1)$ vezes obtemos

$$\begin{aligned} \partial^\alpha e^{i\eta A(t)} = \sum_{\Delta(\alpha_1)} \cdots \sum_{\Delta(\alpha_n)} \frac{\alpha_1!}{k^{(1)}!} \cdots \frac{\alpha_n!}{k^{(n)}!} (i\eta)^{|k^{(1)}|} \ldots (i\eta)^{|k^{(n)}|} e^{i\eta A(t)} \\ \prod_{j_1=1}^{\alpha_1} \left(\frac{\partial^{j_1}_{t_1} A(t)}{j_1!} \right)^{k^{(1)}_{j_1}} \cdots \prod_{j_n=1}^{\alpha_n} \left(\frac{\partial^{j_n}_{t_n} A(t)}{j_n!} \right)^{k^{(n)}_{j_n}}, \end{aligned}$$

sendo $\Delta(\alpha_q) = \{k^{(q)} = (k^{(q)}_1, \ldots, k^{(q)}_{\alpha_q}) \in \mathbb{N}^{\alpha_q}_0 : \sum_{j_q=1}^{\alpha_q} j_q k^{(q)}_{j_q} = \alpha_q\}$, para $q = 1, \ldots, n$.

Como $A(t)$ pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, existem $C > 1$ e $h > 1$ satisfazendo

$$|\partial^\alpha A(t)| \leq C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s, \ \alpha \in \mathbb{N}^n_0, \, t \in \mathbb{R}^n.$$

Também note que $|e^{i\eta A(t)}| = 1$ para todo t, pois $A(t) \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha e^{i\eta A(t)}| \leq & \sum_{\Delta(\alpha_1)} \cdots \sum_{\Delta(\alpha_n)} \frac{\alpha_1!}{k^{(1)}!} \cdots \frac{\alpha_n!}{k^{(n)}!} (|\eta|)^{|k^{(1)}|} \ldots (|\eta|)^{|k^{(n)}|} \\
& \prod_{j_1=1}^{\alpha_1} \left(\frac{Ch^{j_1}(j_1!)^s}{j_1!} \right)^{k^{(1)}_{j_1}} \cdots \prod_{j_n=1}^{\alpha_n} \left(\frac{Ch^{j_n}(j_n!)^s}{j_n!} \right)^{k^{(n)}_{j_n}} \\
& \leq (Ch)^{|\alpha|} \alpha! \sum_{\Delta(\alpha_1)} \cdots \sum_{\Delta(\alpha_n)} \frac{1}{k^{(1)}!} \cdots \frac{1}{k^{(n)}!} (|\eta|)^{|k^{(1)}|} \ldots (|\eta|)^{|k^{(n)}|} \prod(\alpha_1) \cdots \prod(\alpha_n) \\
& = (Ch)^{|\alpha|} \alpha! \sum_{\Delta(\alpha_1)} \cdots \sum_{\Delta(\alpha_n)} \frac{1}{k^{(1)}!} \cdots \frac{1}{k^{(n)}!} \frac{(|\eta|)^{|k^{(1)}|}}{(|k^{(1)}|!)^s} \cdots \frac{(|\eta|)^{|k^{(n)}|}}{(|k^{(n)}|!)^s} \\
& (|k^{(1)}|!)^s \prod(\alpha_1) \ldots (|k^{(n)}|!)^s \prod(\alpha_n),
\end{aligned}$$

sendo $\prod(\alpha_q) = \prod_{j_q=1}^{\alpha_q} ((j_q!)^{s-1})^{k^{(q)}_{j_q}}$, para $q = 1, \ldots, n$.

Utilizando o Lema 5.10 e que $(k^{(q)}!)^s \leq (|k^{(q)}|!)^s$ obtemos

$$|\partial^\alpha e^{i\eta A(t)}| \leq (Ch)^{|\alpha|} (\alpha!)^s \sum_{\Delta(\alpha_1)} \cdots \sum_{\Delta(\alpha_n)} \frac{|k^{(1)}|!}{k^{(1)}!} \cdots \frac{|k^{(n)}|!}{k^{(n)}!} \frac{(|\eta|)^{|k^{(1)}|}}{(k^{(1)}!)^s} \cdots \frac{(|\eta|)^{|k^{(n)}|}}{(k^{(n)}!)^s}.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{\varepsilon}{n}|\eta|^{\frac{1}{s}}}$ temos

$$|\partial^\alpha e^{i\eta A(t)}| e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq (Ch)^{|\alpha|} (\alpha!)^s \sum_{\Delta(\alpha_1)} \cdots \sum_{\Delta(\alpha_n)} \frac{|k^{(1)}|!}{k^{(1)}!} \cdots \frac{|k^{(n)}|!}{k^{(n)}!} \frac{(|\eta|)^{|k^{(1)}|}}{(k^{(1)}!)^s} e^{-\frac{\varepsilon}{n}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \cdots \frac{(|\eta|)^{|k^{(n)}|}}{(k^{(n)}!)^s} e^{-\frac{\varepsilon}{n}|\eta|^{\frac{1}{s}}}.$$

Pelo Lema 5.8 segue que existe $C_\varepsilon > 1$ tal que

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha e^{i\eta A(t)}| e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} & \leq (Ch)^{|\alpha|} (\alpha!)^s \sum_{\Delta(\alpha_1)} \cdots \sum_{\Delta(\alpha_n)} \frac{|k^{(1)}|!}{k^{(1)}!} \cdots \frac{|k^{(n)}|!}{k^{(n)}!} C_\varepsilon^{|k^{(1)}|} \ldots C_\varepsilon^{|k^{(n)}|} \\
& \leq (ChC_\varepsilon)^{|\alpha|} (\alpha!)^s \sum_{\Delta(\alpha_1)} \cdots \sum_{\Delta(\alpha_n)} \frac{|k^{(1)}|!}{k^{(1)}!} \cdots \frac{|k^{(n)}|!}{k^{(n)}!}.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando o Lema 5.9 segue que

$$|\partial^\alpha e^{i\eta A(t)}| e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq (ChC_\varepsilon)^{|\alpha|} (\alpha!)^s 2^{\alpha_1} \ldots 2^{\alpha_n} = (2ChC_\varepsilon)^{|\alpha|} (\alpha!)^s.$$

$\square$

Lema 4.7. *A aplicação S definida em* (4.10) *é um automorfismo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ e $S|_{G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})}$ é um automorfismo em $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$.*

Demonstração. Vejamos que S está bem definida, para isso suponha $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ e mostremos que $Su \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Como $e^{i\eta A(t)} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, segue que $\widehat{u}_\eta(t) e^{i\eta A(t)} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para todo $\eta \in \mathbb{Z}$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $h_\ell > 0$ dados. Queremos mostrar que existe $C_{\varepsilon,h_\ell} = C > 0$ tal que

$$| < \widehat{u}_\eta(t) e^{i\eta A(t)}, \varphi > | \leq C \parallel \varphi \parallel_{s,h\ell} e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}}, \ \eta \in \mathbb{Z}, \ \varphi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Considere $\varphi \in G^{s,h_\ell}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Pelo Lema 4.6 existe $C_\varepsilon > 1$ tal que

$$|\partial^\alpha e^{i\eta A(t)}|e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq C_\varepsilon^{|\alpha|}\alpha!, \ \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \ t \in \mathbb{R}^n, \ \eta \in \mathbb{Z},$$

logo

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha e^{i\eta A(t)} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}}\varphi(t)| &= |\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta e^{i\eta A(t)} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}}\partial^{\alpha-\beta}\varphi(t)| \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\partial^\beta e^{i\eta A(t)}|e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}}|\partial^{\alpha-\beta}\varphi(t)| \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}^s C_\varepsilon^{|\beta|}(\beta!)^s \parallel \varphi \parallel_{s,h_\ell} ((\alpha-\beta)!)^s h_\ell^{|\alpha-\beta|} \\
&\leq (\alpha!)^s C_\varepsilon^{|\alpha|}(h_\ell+1)^{|\alpha|}2^{|\alpha|} \parallel \varphi \parallel_{s,h_\ell} = \tilde{C}^{|\alpha|}_{\varepsilon,h_\ell}(\alpha!)^s \parallel \varphi \parallel_{s,h_\ell},
\end{aligned}$$

sendo $\tilde{C}_{\varepsilon,h_\ell} = 2(h_\ell+1)C_\varepsilon$. Utilizando o Lema (5.8) obtemos $\bar{C}_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\eta|^k e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq \bar{C}_\varepsilon^k (k!)^s, \ \eta \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{N}_0.$$

Defina $\delta = (\max\{\tilde{C}_{\varepsilon,h_\ell}, \bar{C}_\varepsilon\})^{-1}$. Da continuidade de u segue que existe $C_\delta > 0$ tal que

$$| < u, \psi > | \leq C_\delta \sup_{t,\alpha}\sup_{x,k}|\partial^{(\alpha,k)}\psi(t,x)|\delta^{|(\alpha,k)|}((\alpha,k)!)^{-s}, \ \psi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

assim

$$\begin{aligned}
| < \widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta A(t)}, \varphi(t) > | &= | < \widehat{u}_\eta(t), e^{i\eta A(t)}\varphi(t) > | \\
&= \frac{1}{2\pi}| < u(t,x), e^{i\eta A(t)}\varphi(t)e^{-i\eta x} > | \\
&\leq \frac{C_\delta}{2\pi}\sup_{t,\alpha}\sup_{x,k}|\partial_t^\alpha\partial_x^k e^{i\eta A(t)}\varphi(t)e^{-i\eta x}|\delta^{|\alpha|}\delta^k(\alpha!)^{-s}(k!)^{-s}.
\end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned}
&|\partial_t^\alpha e^{i\eta A(t)}\varphi(t)e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}}| \ |\partial_x^k e^{-i\eta x}e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}}| \ \delta^{|\alpha|}\delta^k(\alpha!)^{-s}(k!)^{-s}e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \\
&= |\partial_t^\alpha e^{i\eta A(t)}\varphi(t)e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}}| \ |\eta|^k e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \ \delta^{|\alpha|}\delta^k(\alpha!)^{-s}(k!)^{-s}e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq \tilde{C}^{|\alpha|}_{\varepsilon,h_\ell}(\alpha!)^s \parallel \varphi \parallel_{s,h_\ell} \bar{C}_\varepsilon^k(k!)^s\delta^{|\alpha|}\delta^k(\alpha!)^{-s}(k!)^{-s}e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq \max\{\tilde{C}_{\varepsilon,h_\ell}, \bar{C}_\varepsilon\}^{|\alpha|+k} \ \delta^{|\alpha|+k} \parallel \varphi \parallel_{s,h_\ell} e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \\
&= \parallel \varphi \parallel_{s,h_\ell} e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}},
\end{aligned}$$

para todo $\eta \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $k \in \mathbb{N}_0$, $t \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}$, temos

$$| < \widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta A(t)}, \varphi(t) > | \leq \frac{C_\delta}{2\pi} \parallel \varphi \parallel_{s,h_\ell} e^{\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}},$$

e portanto $Su \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, o que implica que S está bem definida.

Da mesma maneira prova-se que a aplicação $S^{-1} : D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}) \to D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ dada por

$$u = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} \mapsto S^{-1}u = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_\eta(t)e^{-i\eta A(t)}e^{i\eta x},\ u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

está bem definida.

Observando que $S \circ S^{-1} = I = S^{-1} \circ S$ concluímos que S define um automorfismo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Para mostrar que $S|_{G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})}$ também define um automorfismo, basta verificar que $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ é $S-$invariante e $S^{-1}-$invariante. Mostraremos que $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ é $S-$invariante.

Seja $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$. Como $e^{i\eta A(t)} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ segue que $\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta A(t)} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para todo $\eta \in \mathbb{Z}$. Para garantir que Su pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ basta provar que existem $C > 0$, $h_\ell > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha \widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta A(t)}| \leq Ch_\ell^{|\alpha|}(\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}},\ \eta \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ t \in \mathbb{R}^n.$$

Como $u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$, existem $C > 0$, $h_\ell > 1$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha \widehat{u}_\eta(t)| \leq Ch_\ell^{|\alpha|}(\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}},\ \eta \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ t \in \mathbb{R}^n.$$

Então

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha \widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta A(t)}| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta \widehat{u}_\eta(t)||\partial^{\alpha-\beta}e^{i\eta A(t)}| \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}^s Ch_\ell^{|\beta|}(\beta!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}} |\partial^{\alpha-\beta}e^{i\eta A(t)}| e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta}^s Ch_\ell^{|\beta|}(\beta!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}} C_\varepsilon^{|\alpha-\beta|}((\alpha-\beta)!)^s \\
&\leq C(2h_\ell C_\varepsilon)^{|\alpha|}(\alpha!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}},
\end{aligned}$$

e portanto $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ é $S-$invariante. Da mesma forma prova-se que $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ é $S^{-1}-$invariante. $\square$

Lema 4.8. *Vale a seguinte conjugação*

$$\tilde{L} = S^{-1}LS = (S^{-1}L_1S, \ldots, S^{-1}L_nS) = (\tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_n),$$

sendo $\tilde{L}_j = \partial_{t_j} - (a_{0j} + ib_j(t_j))\partial_x$ *para* $j = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned}
S^{-1}L_jSu &= S^{-1}L_jS\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x}\\
&= S^{-1}L_j\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta A(t)}e^{i\eta x}\\
&= S^{-1}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}L_j\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta A(t)}e^{i\eta x}\\
&= S^{-1}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}(\partial_{t_j}-c_j(t_j)\partial_x)\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta A(t)}e^{i\eta x}\\
&= S^{-1}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}[\partial_{t_j}\widehat{u}_\eta(t)+i\eta\widehat{u}_\eta(t)\partial_{t_j}A(t)-i\eta\widehat{u}_\eta(t)c_j(t_j)]e^{i\eta A(t)}e^{i\eta x}\\
&= S^{-1}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}[\partial_{t_j}\widehat{u}_\eta(t)+i\eta\widehat{u}_\eta(t)(a_j(t_j)-a_{0j})-i\eta\widehat{u}_\eta(t)(a_j(t_j)+ib_j(t_j))]e^{i\eta A(t)}e^{i\eta x}\\
&= S^{-1}\sum_{\eta\in\mathbb{Z}}[\partial_{t_j}\widehat{u}_\eta(t)-i\eta(a_{0j}+ib_j(t_j))\widehat{u}_\eta(t)]e^{i\eta A(t)}e^{i\eta x}\\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}}[\partial_{t_j}\widehat{u}_\eta(t)-i\eta(a_{0j}+ib_j(t_j))\widehat{u}_\eta(t)]e^{i\eta x}\\
&= \sum_{\eta\in\mathbb{Z}}\tilde{L}_j\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x}\\
&= \tilde{L}_ju,
\end{aligned}$$

para todo $j=1,\ldots,n$ e $u\in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$. □

Lema 4.9. *Seja $S: D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)\to D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ um automorfismo tal que $S|_{G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)}$ também o seja e considere um sistema $P=(P_1,\ldots,P_m)$, com cada P_j agindo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Se P é G^sH, então $S^{-1}PS=(S^{-1}P_1S,\ldots,S^{-1}P_mS)$ também é G^sH.*

Demonstração. Seja $u\in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $S^{-1}P_jSu=f_j\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ para todo j. Por hipótese existe $v\in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $S^{-1}v=u$. Então $P_jv=Sf_j\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ para todo j. Como P é G^sH segue que $v\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e portanto $u=Sv\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, o que implica a G^s-hipoeliticidade de $S^{-1}PS$. □

Observação 4.10. *Combinando os Lemas 4.7, 4.8 e 4.9 obtemos que*

$$L \text{ é } G^sH \text{ se, e somente se, } \tilde{L} \text{ é } G^sH.$$

Logo nos concentraremos em provar que $\tilde{L}$ é G^sH. Além disso, como estamos supondo $b_j\equiv 0$ para $j=1,\ldots,\ell$, temos

$$\tilde{L}_j=\partial_{t_j}-a_{0j}\partial_x,\ j=1,\ldots,\ell.$$

Vamos separar as variáveis da seguinte forma $(t,x)=(t',t'',x)\in\mathbb{R}^\ell\times\mathbb{R}^{n-\ell}\times\mathbb{R}$.

Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ tal que $\tilde{L}_j u = f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ para $j = 1, \ldots, n$. Vamos escrever u e as funções f_j como suas séries parciais de Fourier em relação às variáveis (t', x), isto é,

$$u = \sum_{(p,\eta) \in \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}} \widehat{u}_{(p,\eta)}(t'') e^{i(p,\eta)\cdot(t',x)},$$

e

$$f_j = \sum_{(p,\eta) \in \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}} \widehat{f}_{j(p,\eta)}(t'') e^{i(p,\eta)\cdot(t',x)}, \ j = 1, \ldots, n.$$

Pela continuidade dos operadores $\tilde{L}_j$, para $j = 1, \ldots, \ell$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{L}_j u &= \sum_{(p,\eta) \in \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}} (\partial_{t_j} - a_{0j}\partial_x) \widehat{u}_{(p,\eta)}(t'') e^{i(p,\eta)\cdot(t',x)} \\ &= \sum_{(p,\eta) \in \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}} i(p_j - \eta a_{0j}) \widehat{u}_{(p,\eta)}(t'') e^{i(p,\eta)\cdot(t',x)}. \end{aligned}$$

Como $\tilde{L}_j u = f_j$, segue da unicidade dos coeficientes parciais de Fourier que

$$i(p_j - \eta a_{0j}) \widehat{u}_{(p,\eta)}(t'') = \widehat{f}_{j(p,\eta)}(t''), \ j = 1, \ldots, \ell. \tag{4.11}$$

Se $\eta \neq 0$, existe $j^* = j(\eta)$ tal que

$$p_{j^*} - \eta a_{0j^*} \neq 0 \text{ e } |a - p/\eta| = |a_{0j^*} - p_{j^*}/\eta| > 0,$$

pois $a = (a_{01}, \ldots, a_{0\ell}) \notin \mathbb{Q}^\ell$ (lembre que estamos utilizando a norma do máximo).

Usando (4.11) segue que para todo $\eta \neq 0$ e $p \in \mathbb{Z}^\ell$

$$\widehat{u}_{(p,\eta)}(t'') = \frac{\widehat{f}_{j^*(p,\eta)}(t'')}{i(p_{j^*} - \eta a_{0j^*})}. \tag{4.12}$$

Caso $\eta = 0$ e $p \neq 0$, então existe j tal que $p_j \neq 0$ e de (4.11) obtemos

$$\widehat{u}_{(p,0)}(t'') = \frac{\widehat{f}_{j(0,\eta)}(t'')}{ip_j}. \tag{4.13}$$

Como cada $f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$, utilizando as equações (4.12) e (4.13) podemos concluir que $\widehat{u}_{(\eta,p)}(t'') \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n-\ell})$, para todo $(p, \eta) \neq (0, 0)$.

Agora vamos provar que

$$\sum_{(p,\eta) \neq (0,0)} \widehat{u}_{(p,\eta)}(t'') e^{i(p,\eta)\cdot(t',x)} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Como as funções $f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$, existem $C > 0$, $\varepsilon > 0$ e $h > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha \widehat{f}_{j(p,\eta)}(t'')| \leq Ch^\alpha (\alpha!)^s e^{-\varepsilon |(p,\eta)|^{\frac{1}{s}}}, \tag{4.14}$$

para todo $(p, \eta) \in \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}$, $t'' \in \mathbb{R}^{n-\ell}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^{n-\ell}$ e $j = 1, \ldots, \ell$.

Utilizando o Teorema 2.35, a equação (4.13) e a estimativa (4.14) temos

$$\sum_{\eta=0,p\neq 0} \widehat{u}_{(p,\eta)}(t'')e^{i(p,\eta)\cdot(t',x)} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Como a não é E^sL, existe $C'>0$ satisfazendo

$$\max_{1\leq j\leq \ell}|a_{0j}-p_j/\eta| = |a-p/\eta| \geq C'e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}},$$

para todo $(p,\eta)\in\mathbb{Z}^\ell\times\mathbb{Z}-\{0\}$. Então

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha \widehat{u}_{(\eta,p)}(t'')| &= \frac{|\partial^\alpha \widehat{f}_{j^*(p,\eta)}(t'')|}{|p_{j^*}-\eta a_{0j^*}|} \\
&= \frac{|\partial^\alpha \widehat{f}_{j^*(p,\eta)}(t'')|}{|\eta||p/\eta - a|} \\
&\leq \frac{|\partial^\alpha \widehat{f}_{j^*(p,\eta)}(t'')|}{|p/\eta - a|} \\
&\leq (C')^{-1}e^{\frac{\varepsilon}{2}|\eta|^{\frac{1}{s}}}Ch^\alpha(\alpha!)^s e^{-\varepsilon|(p,\eta)|^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq (C')^{-1}Ch^\alpha(\alpha!)^s e^{\frac{\varepsilon}{2}|(p,\eta)|^{\frac{1}{s}}} e^{-\varepsilon|(p,\eta)|^{\frac{1}{s}}} \\
&= (C')^{-1}Ch^\alpha(\alpha!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}|(p,\eta)|^{\frac{1}{s}}},
\end{aligned}$$

para todo $\eta\in\mathbb{Z}-\{0\}$, $p\in\mathbb{Z}^\ell$, $t''\in\mathbb{R}^{n-\ell}$ e $\alpha\in\mathbb{N}_0^{n-\ell}$.

Portanto, do Teorema 2.35, segue que

$$\sum_{\eta\neq 0,p\in\mathbb{Z}^\ell} \widehat{u}_{(p,\eta)}(t'')e^{i(p,\eta)\cdot(t',x)} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Fica então provado que

$$\begin{aligned}
v = u - \widehat{u}_{(0,0)}(t'') &= \sum_{(p,\eta)\neq(0,0)} \widehat{u}_{(p,\eta)}(t'')e^{i(p,\eta)\cdot(t',x)} \\
&= \sum_{\eta=0,p\neq 0} \widehat{u}_{(p,\eta)}(t'')e^{i(p,\eta)\cdot(t',x)} + \sum_{\eta\neq 0,p\in\mathbb{Z}^\ell} \widehat{u}_{(p,\eta)}(t'')e^{i(p,\eta)\cdot(t',x)}
\end{aligned}$$

pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$, pois $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ é espaço vetorial.

Agora vamos cuidar do termo $\widehat{u}_{(0,0)}(t'')$. Para $j=\ell+1,\ldots,n$, temos

$$\tilde{L}_j\widehat{u}_{(0,0)}(t'') = \tilde{L}_ju - \tilde{L}_jv = f_j - \tilde{L}_jv,$$

logo

$$\partial_{t_j}\widehat{u}_{(0,0)}(t'') = f_j - \tilde{L}_jv \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}),$$

pois $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ é um espaço vetorial fechado para multiplicação e diferenciação. Para $j=1,\ldots,\ell$, $\partial_{t_j}\widehat{u}_{(0,0)}(t'')=0$. Disso segue que $\partial_{t_j}\widehat{u}_{(0,0)}(t'')\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$ para todo $j=1,\ldots,n$, e portanto da Observação 3.4 segue que $\widehat{u}_{(0,0)}(t'')\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Finalmente concluímos que

$$u = \widehat{u}_{(0,0)}(t'')e^{i(0,0)(t',x)} + \sum_{(p,\eta)\neq(0,0)} \widehat{u}_{(p,\eta)}(t'')e^{i(p,\eta)\cdot(t',x)} \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Logo $\tilde{L}$ é G^sH, e portanto L também é.

Isto conclui a prova da suficiência das condições (i) e (ii) no caso em que $b_j \equiv 0$, para todo $j \in J$. E portanto concluímos a demonstração da suficiência no Teorema 4.2.

Finalizamos esta seção observando que uma análise cuidadosa da nossa demonstração da suficiência das condições (i) e (ii) do Teorema 4.2, nos permite enunciar seguinte resultado.

Proposição 4.11. *Considere o sistema L como definido em* (4.1).

1. *Se alguma função $b_j(t_j)$ não é identicamente nula e não muda de sinal, então L é G^sH.*
2. *Se para algum índice j, tem-se que $b_j(t_j) \equiv 0$ e a_{0j} é um núero irracional não exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$, então L é G^sH.*

A proposição acima nos diz é que se existe um campo L_j G^sH em (t_j, x), então o sistema (4.1) é G^sH. Notamos que a recíproca dessa proposição não é válida. De fato, basta usar o vetor (α, β) construído na seção 3.4 e o Teorema 3.8 para obter um contra exemplo.

4.2 Prova do Teorema 4.2 - Necessidade

Começamos observando que a demonstração que faremos nesta seção não se aplica ao caso analítico, isto é, o caso em que $s = 1$, pois utilizaremos funções de corte Gevrey. A existência de funções de corte Gevrey pode ser vista em [7] e a prova para o caso $s = 1$ pode ser encontrada em [2]. Portanto nesta seção consideraremos sempre $s > 1$.

Utilizando o automorfismo S definido em 4.10, provamos na seção anterior que a G^s-hipoeliticidade global do sistema L é equivalente a G^s-hipoeliticidade global do sistema $\tilde{L}$, dado por

$$\tilde{L}_j = \partial_{t_j} - (a_{0j} + ib_j(t_j))\partial_x, \; j = 1, \ldots, n.$$

Portanto, a fim de demonstrar a necessidade das condições (i) e (ii) do Teorema 4.2, basta considerar o sistema $\tilde{L}$ acima. Para não sobrecarregar a notação vamos denotar $\tilde{L}$ por $L = (L_1, \ldots, L_n)$.

Faremos a prova pela contrapositiva, ou seja, vamos provar que se as condições (i) ou (ii) não são válidas, então o sistema L não é G^sH.

Definição 4.12. *Seja $P = (P_1, \ldots, P_m)$ um sistema de operadores diferenciais parciais com cada P_j agindo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é uma solução singular para o sistema P quando $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $P_j u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, para todo $j = 1, \ldots, n$.*

A ideia da demonstração consiste em encontrar uma solução singular para o sistema L quando (i) ou (ii) não são válidas. No caso em que (i) não vale, ou seja, b_j muda de sinal para todo j, podemos considerar os operadores L_j restritos às variáveis t_j e x, isto é, L_j agindo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x)$. Vamos construir soluções singulares $u_j \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x)$ para os operadores L_j (restritos à $\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x$), e então utilizaremos o Corolário 2.44 para definir

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_{1\eta} \otimes \cdots \otimes \widehat{u}_{n\eta}\, e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n_t \times \mathbb{R}_x),$$

a qual será uma solução singular para o sistema L. No caso da não validade de (ii) faremos algo bastante similar. Tendo isso em vista provaremos alguns lemas técnicos.

Lema 4.13. *Considere o operador $L = \partial_t - (a_0 + ib(t))\partial_x$ agindo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)$, com $a_0 \in \mathbb{R}$ e $b(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Seja b_0 a média da função $b(t)$. Se $b(t)$ muda de sinal e $c_0 = a_0 + ib_0 \notin \mathbb{Q}$, então existe*

$$u = \sum_{\eta > 0} \widehat{u}_\eta(t) e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) - G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2),$$

tal que

- *$Lu \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$;*
- *existem $t_0 \in \mathbb{R}$ e $C > 0$ tais que*
$$|\widehat{u}_\eta(t_0)| \geq \frac{C}{\sqrt{\eta}},\ \ \eta \in \mathbb{N};$$
- *para todo $\varepsilon > 0$ existem $C > 0$ e $h > 0$ tais que*
$$|\partial_t^\alpha \widehat{u}_\eta(t)| e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq C h^\alpha (\alpha!)^s,\ \ t \in \mathbb{R},\, \alpha \in \mathbb{N}_0,\, \eta \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Vamos dividir essa prova em três casos: 1) $b_0 > 0$, 2) $b_0 < 0$ e 3)$b_0 = 0, a_0 \notin \mathbb{Q}$.

Caso 1: Considere a função

$$H(t,r) = \int_{t-r}^{t} a_0 + ib(y)dy = a_0 r + i\int_{t-r}^{t} b(y)dy,\ \ t \in \mathbb{R}, r \in [0, 2\pi],$$

e defina

$$B = \min_{t,r \in [0,2\pi]} \Im H(t,r) = \min_{t,r \in [0,2\pi]} \int_{t-r}^{t} b(y)dy = \int_{t_0 - r_0}^{t_0} b(y)dy.$$

Note que

- ⋄ $B < 0$; pois b muda de sinal.
- ⋄ $r_0 \in (0, 2\pi)$; pois $\Im H(t_0, 0) = 0 > B$ e $\Im H(t_0, 2\pi) = 2\pi b_0 > 0 > B$.
- ⋄ podemos supor $t_0 \in (0, 2\pi)$ e $b(0) \neq 0$; caso contrário, basta aplicar uma translação na variável t.

- $b(t_0-r_0)=0$; caso contrário, se $b(t_0-r_0)>0$, então existe $\delta>0$ tal que $r_0-\delta$ e $r_0+\delta$ pertencem a $(0,2\pi)$ e $b(y)>0$ para todo $y\in(t_0-r_0-\delta,t_0-r_0+\delta)$. Então

$$\Im H(t_0,r_0-\delta)=\int_{t_0-r_0+\delta}^{t_0} b(y)dy=\int_{t_0-r_0}^{t_0} b(y)dy-\int_{t_0-r_0}^{t_0-r_0+\delta} b(y)dy<\int_{t_0-r_0}^{t_0} b(y)dy=B,$$

o que seria uma contradição. Analogamente mostra-se que $b(t_0-r_0)$ não pode ser negativo, logo $b(t_0-r_0)=0$;

- $t_0-r_0\in(-2\pi,0)\cup(0,2\pi)$; pois $b(2\pi)=b(0)\neq 0$ e $b(t_0-r_0)=0$. Por simplicidade vamos considerar $t_0-r_0\in(0,2\pi)$.

Seja $\delta>0$ tal que $I_\delta=[t_0-r_0-\delta,t_0-r_0+\delta]\subset(0,2\pi)$ e $\varphi\in G^s(0,2\pi)$ uma função com suporte contido em I_δ tal que $\varphi(t)=1$ para $t\in[t_0-r_0-\frac{\delta}{2},t_0-r_0+\frac{\delta}{2}]$ e $0\le\varphi(t)\le 1$, para todo t.

Para cada $\eta\in\mathbb{N}$ defina

$$\widehat{f}_\eta(t)=\begin{cases}(1-e^{i2\pi\eta c_0})e^{\eta B}\varphi(t)e^{i\eta a_0(t-t_0)}, & t\in[0,2\pi],\\ \widehat{f}_\eta(t+2\pi)=\widehat{f}_\eta(t), & t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Vamos verificar que

$$f=\sum_{\eta>0}\widehat{f}_\eta(t)e^{i\eta x}\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2).$$

Claramente $\widehat{f}_\eta\in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ para todo $\eta\in\mathbb{N}$. Sejam $C>0$ e $h>1$ tais que

$$|\partial^\alpha\varphi(t)|\le Ch^\alpha(\alpha!)^s,\ t\in[0,2\pi],\ \alpha\in\mathbb{N}_0.$$

Pelo Lema 5.8, segue que existe $C_B>1$ satisfazendo

$$\eta^\alpha\le e^{(-B)\eta^{\frac{1}{s}}}C_B^\alpha(\alpha!)^s,\ \eta\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{N}_0.$$

Então

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha\widehat{f}_\eta(t)|&=|1-e^{i2\pi\eta c_0}|e^{\eta B}|e^{-i\eta a_0t_0}||\partial^\alpha\varphi(t)e^{i\eta a_0 t}|\\ &\le 2e^{\eta B}\sum_{\beta\le\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}|\partial^{\alpha-\beta}\varphi(t)||\partial^\beta e^{i\eta a_0 t}|\\ &\le 2e^{B\eta^{\frac{1}{s}}}\sum_{\beta\le\alpha}\frac{\alpha!^s}{\beta!^s(\alpha-\beta)!^s}Ch^{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)!^s|\eta a_0|^\beta\\ &\le 2C((1+|a_0|)h)^\alpha\alpha!^s e^{\frac{B}{2}\eta^{\frac{1}{s}}}\sum_{\beta\le\alpha}\frac{\eta^\beta}{\beta!^s}e^{\frac{B}{2}\eta^{\frac{1}{s}}}\\ &\le 2C((1+|a_0|)h)^\alpha\alpha!^s e^{\frac{B}{2}\eta^{\frac{1}{s}}}\sum_{\beta\le\alpha}C_B^\beta\\ &\le 2C(2(1+|a_0|)hC_B)^\alpha\alpha!^s e^{\frac{B}{2}\eta^{\frac{1}{s}}},\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $\eta > 0$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Isso garante que $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Queremos encontrar $u = \sum_{\eta>0} \widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ tal que $Lu = f$. Para isso, defina os coeficientes parciais de Fourier de u por

$$\widehat{u}_\eta(t) = \frac{1}{1 - e^{i2\pi\eta c_0}} \int_0^{2\pi} e^{i\eta H(t,r)} \widehat{f}_\eta(t-r)dr,\ t \in \mathbb{R},$$

para todo $\eta \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\widehat{u}_\eta(t) = e^{i\eta a_0(t-t_0)} \int_0^{2\pi} e^{\eta(B - \Im H(t,r))}\varphi(t-r)dr,\ \eta \in \mathbb{N}.$$

Vamos verificar que $u = \sum_{\eta>0} \widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x}$ está bem definida. É claro que $\widehat{u}_\eta$ é $2\pi-$periódica e contínua, portanto $\widehat{u}_\eta \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}) \subset D'_{s,2\pi}(\mathbb{R})$ para todo $\eta \in \mathbb{N}$. Note que, para todo $\phi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ e $\eta \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
| < \widehat{u}_\eta(t), \phi(t) > | &= | \int_0^{2\pi} \widehat{u}_\eta(t)\phi(t)dt| \\
&= | \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\eta a_0(t-t_0)} e^{\eta(B-\Im H(t,r))}\varphi(t-r)\phi(t)drdt| \\
&\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(t)|drdt \\
&\leq (2\pi)^2 \sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi(t)|,
\end{aligned}$$

e portanto $u \in D'_{2\pi}(\mathbb{R}^2) \subset D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Pelo Lema 5.6 segue que $Lu = f$.

Para concluir que $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^s)$ vamos analisar o comportamento de $|\widehat{u}_\eta(t_0)|$ quando $\eta \to \infty$. Considere a função $\psi(r) = B - \Im H(t_0, r)$, para $r \in [0, 2\pi]$. Veja que

$$\begin{aligned}
|\widehat{u}_\eta(t_0)| &= | \int_0^{2\pi} e^{\eta\psi(r)}\varphi(t_0 - r)dr| = \int_{r_0-\delta}^{r_0+\delta} e^{\eta\psi(r)}\varphi(t_0-r)dr \\
&\geq \int_{r_0-\frac{\delta}{2}}^{r_0+\frac{\delta}{2}} e^{\eta\psi(r)}dr.
\end{aligned}$$

Note que $\psi(r_0) = 0$ e $\psi'(r_0) = b(t_0 - r_0) = 0$. Utilizando a fórmula de Taylor centrada em r_0 com resto de Lagrange , podemos escrever

$$\psi(r_0 + h) = \psi(r_0) + \psi'(r_0)h + \psi''(r_0 + \theta(h))\frac{h^2}{2} = \psi''(r_0 + \theta(h))\frac{h^2}{2},$$

para $h \in (-\delta, \delta)$, sendo $\theta(h)$ um número entre 0 e h.

Seja

$$A = \sup_{t\in[r_0-\delta, r_0+\delta]} |\psi''(t)|.$$

Temos então duas possibilidades, ou $A = 0$ ou $A > 0$. Se $A = 0$ então ψ'' é identicamente nula numa vizinhança de r_0 e consequentemente ψ também o é, logo

$$\int_{r_0-\frac{\delta}{2}}^{r_0+\frac{\delta}{2}} e^{\eta\psi(r)} = \delta \geq \frac{C}{\sqrt{\eta}},\ \eta \in \mathbb{N},$$

para alguma constante $C > 0$. Suponha agora que $A > 0$. Então, para $h \in (r_0 - \frac{\delta}{2}, r_0 + \frac{\delta}{2})$ temos

$$-\psi(r_0 + h) = [-\psi''(r_0 + \theta(h))] \frac{h^2}{2} \leq \frac{A}{2}h^2 = A'h^2 \Rightarrow \eta\psi(r_0 + h) \geq -\eta A'h^2$$

para todo $\eta \in \mathbb{N}$. Portanto

$$\begin{aligned}
|\widehat{u}_\eta(t_0)| &\geq \int_{r_0-\frac{\delta}{2}}^{r_0+\frac{\delta}{2}} e^{\eta\psi(r)}dr = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} e^{\eta\psi(r_0+h)}dh \\
&\geq \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} e^{-\eta A'h^2}dh = \int_{-\frac{\delta\sqrt{A'}}{2}}^{\frac{\delta\sqrt{A'}}{2}} e^{-\eta w^2}dw.
\end{aligned}$$

Segue do Lema 5.11 que

$$|\widehat{u}_\eta(t_0)| \geq \frac{C}{\sqrt{\eta}}, \ \eta \in \mathbb{N},$$

para alguma constante $C > 0$ que independe de η. Isso garante que $u \notin C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e consequentemente $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Falta mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existem $C > 0$ e $h > 0$ tais que

$$|\partial_t^\alpha \widehat{u}_\eta(t)|e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq Ch^\alpha(\alpha!)^s, \ t \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{N}_0, \ \eta \in \mathbb{Z}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Notando que $e^{\eta(B-\Im H(t,r))} \leq 1$ para todo $(t, r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, analogamente ao que fizemos no Lema 4.5 podemos provar que existe $C_\varepsilon > 1$ tal que

$$|\partial_t^\alpha e^{\eta(B-\Im H(t,r))}|e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}} \leq C_\varepsilon^\alpha(\alpha!)^s, \ (t, r) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi], \ \alpha \in \mathbb{N}_0, \ \eta \in \mathbb{N}.$$

Existem $C_\varphi > 0$ e $h_\varphi > 1$ satisfazendo

$$|\partial^\alpha \varphi(t)| \leq C_\varphi h_\varphi^\alpha(\alpha!)^s, \ \alpha \in \mathbb{N}_0, \ t \in \mathbb{R}.$$

Segue do Lema 5.8 que existe uma constante $K_\varepsilon > 1$ tal que

$$\eta^\alpha \leq e^{\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}} K_\varepsilon^\alpha(\alpha!)^s, \ \alpha \in \mathbb{N}_0, \ \eta \in \mathbb{N}.$$

Então

$$\begin{aligned}
|\partial_t^\alpha e^{i\eta a_0 t}\varphi(t - r)|e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}} &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)!\beta!}|\partial_t^{\alpha-\beta} e^{i\eta a_0 t}||\partial^\beta\varphi(t - r)|e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!^s}{(\alpha - \beta)!^s\beta!^s}|a_0|^{\alpha-\beta}\eta^{\alpha-\beta}C_\varphi h_\varphi^\beta \beta!^s e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq C_\varphi((1 + |a_0|)h_\varphi)^\alpha(\alpha!)^s \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\eta^{\alpha-\beta}}{(\alpha - \beta)!^s} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq C_\varphi(2(1 + |a_0|)h_\varphi K_\varepsilon)^\alpha(\alpha!)^s,
\end{aligned}$$

para todo $(t,r) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi]$, $\eta \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Combinando essas estimativas segue que

$$\begin{aligned}
|\partial_t^\alpha \widehat{u}_\eta(t)|e^{-\varepsilon\eta^{\frac{1}{s}}}| &= |\partial_t^\alpha e^{i\eta a_0(t-t_0)} \int_0^{2\pi} e^{\eta(B-\Im H(t,r))}\varphi(t-r)dr|e^{-\varepsilon\eta^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq \int_0^{2\pi} |\partial_t^\alpha e^{\eta(B-\Im H(t,r))} e^{i\eta a_0 t}\varphi(t-r)|e^{-\varepsilon\eta^{\frac{1}{s}}} dr \\
&\leq \int_0^{2\pi} \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} |\partial_t^{\alpha-\beta} e^{\eta(B-\Im H(t,r))}|e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}} |\partial_t^\beta e^{i\eta a_0 t}\varphi(t-r)|e^{-\frac{\varepsilon}{2}\eta^{\frac{1}{s}}} dr \\
&\leq \int_0^{2\pi} \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!^s}{\beta!^s(\alpha-\beta)!^s} C_\varepsilon^{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)!^s C_\varphi (2(1+|a_0|)h_\varphi K_\varepsilon)^\beta (\beta!)^s dr \\
&\leq (2\pi) C_\varphi (4(1+|a_0|)h_\varphi K_\varepsilon C_\varepsilon)^\alpha (\alpha!)^s,
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $\eta \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Isso completa a prova do primeiro caso.

Caso 2: Este caso é bastante similar ao primeiro, portanto apenas apresentaremos as ideias de sua prova. Considere

$$\tilde{H}(t,r) = \int_t^{t+r} a_0 + ib(y)dy = a_0 r + i\int_t^{t+r} b(y)dy, \ t \in \mathbb{R}, \ r \in [0,2\pi].$$

Seja

$$B = \max_{t,r\in[0,2\pi]} \Im\tilde{H}(t,r) = \max_{t,r\in[0,2\pi]} \int_{t_0}^{t_0+r_0} b(y)dy = \int_{t_0}^{t_0+r_0} b(y)dy.$$

Então $B > 0$, pois b muda de sinal e, como antes, podemos assumir que $r_0, t_0, t_0 + r_0 \in (0,2\pi)$.

Seja $\delta > 0$ tal que $I_\delta = [t_0 + r_0 - \delta, t_0 + r_0 + \delta] \subset (0,2\pi)$ e $\varphi \in G^s(0,2\pi)$ uma função com suporte contido em I_δ tal que $\varphi(t) = 1$ para $t \in [t_0 + r_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + r_0 + \frac{\delta}{2}]$ e $0 \leq \varphi(t) \leq 1$, para todo t.

Para cada $\eta \in \mathbb{N}$, defina

$$\widehat{f}_\eta(t) = \begin{cases} (e^{-i\eta 2\pi c_0} - 1)e^{-\eta B}\varphi(t)e^{i\eta a_0(t-t_0)}, & t \in [0,2\pi], \\ \widehat{f}_\eta(t+2\pi) = \widehat{f}_\eta(t), & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definindo, para $\eta \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{u}_\eta(t) = \frac{1}{e^{-i2\pi\eta c_0} - 1} \int_0^{2\pi} e^{-i\eta\tilde{H}(t,r)} \widehat{f}_\eta(t+r)dr, \ t \in \mathbb{R},$$

concluímos esse caso procedendo como no anterior.

Caso 3: Este caso é inteiramente análogo ao primeiro, portanto omitiremos sua demonstração.

□

Lema 4.14. *Considere o operador $L = \partial_t - (a_0 + ib(t))\partial_x$ agindo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x)$, com $a_0 \in \mathbb{R}$ e $b(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Seja b_0 a média da função $b(t)$. Se $b(t)$ muda de sinal e $c_0 = a_0 + ib_0 = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, então existe*

$$u = \sum_{\eta\in q\mathbb{N}} \widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2) - G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2),$$

satisfazendo:

- $Lu = 0 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$;
- *existe* t_0 *tal que* $|\widehat{u}_\eta(t_0)| = 1$ *para todo* $\eta \in q\mathbb{N}$;
- *para todo* $\varepsilon > 0$ *existem* $C > 0$ *e* $h > 0$ *tais que*

$$|\partial_t^\alpha \widehat{u}_\eta(t)|e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq Ch^\alpha(\alpha!)^s,\ t \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{N}_0,\ \eta \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Considere a função

$$C(t) = \int_0^t c(y)dy - c_0 t,\ t \in \mathbb{R},$$

sendo $c(t) = a_0 + ib(t)$. Então $C(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ e $\partial_t C(t) = c(t) - c_0$.

Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\Im C(t_0) \leq \Im C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Defina

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{u}_{kq}(t)e^{ikqx} = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{kq\Im C(t_0)}e^{ikq(C(t)+c_0t)}e^{ikqx}.$$

Como $kqc_0 \in \mathbb{Z}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que a função $\widehat{u}_{kq}(t)$ é 2π periódica. E do fato que $\Im C(t_0) \leq \Im C(t)$, para todo t, obtemos $|\widehat{u}_{kq}(t)| \leq 1$. Logo

$$| < \widehat{u}_{kq}(t), \phi(t) > | = |\int_0^{2\pi} \widehat{u}_{kq}(t)\phi(t)dt| \leq 2\pi \sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi(t)|,\ \phi \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}),\ k \in \mathbb{N}.$$

E portanto $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

Note que $|\widehat{u}_{kq}(t_0)| = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, logo $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Não é difícil verificar que $Lu = 0$.

Falta provar que para todo $\varepsilon > 0$ existem $C > 0$ e $h > 0$ tais que

$$|\partial_t^\alpha \widehat{u}_\eta(t)|e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq Ch^\alpha(\alpha!)^s,\ t \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{N}_0,\ \eta \in \mathbb{Z}.$$

Seja $\varepsilon > 0$. De forma análoga ao que fizemos no Lema 4.5, podemos provar que existe $C_\varepsilon > 1$ tal que

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha e^{kq(\Im C(t_0) - \Im C(t))}|e^{-\frac{\varepsilon}{2}(kq)^{\frac{1}{s}}} &\leq C_\varepsilon^\alpha(\alpha!)^s \quad \text{e}\\ |\partial^\alpha e^{ikq(\ \Re C(t)\ +\ c_0 t\ )}|e^{-\frac{\varepsilon}{2}(kq)^{\frac{1}{s}}} &\leq C_\varepsilon^\alpha(\alpha!)^s,\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Então

$$\begin{aligned}|\partial^\alpha \widehat{u}_{kq}(t)|e^{-\varepsilon(kq)^{\frac{1}{s}}} &= |\partial^\alpha e^{kq(\Im C(t_0)-\Im C(t))}e^{-\frac{\varepsilon}{2}(kq)^{\frac{1}{s}}}e^{ikq(\Re C(t)+c_0t)}e^{-\frac{\varepsilon}{2}(kq)^{\frac{1}{s}}}|\\ &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}|\partial^\beta e^{kq(\Im C(t_0)-\Im C(t))}e^{-\frac{\varepsilon}{2}(kq)^{\frac{1}{s}}}||\partial^{\alpha-\beta}e^{ikq(\Re C(t)+c_0t)}e^{-\frac{\varepsilon}{2}(kq)^{\frac{1}{s}}}|\\ &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!^s}{\beta!^s(\alpha-\beta)!^s}C_\varepsilon^\beta(\beta)!^s C_\varepsilon^{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)!^s\\ &\leq (2C_\varepsilon)^\alpha(\alpha!)^s,\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0$. □

Lema 4.15. *Sejam $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ um vetor exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$ e $\eta \in \mathbb{N}$. Então existem $\varepsilon > 0$ e $(p^k, q_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \eta\mathbb{Z}^n \times \eta\mathbb{N}$ tais que $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente e vale que*

$$\max_{1\leq j\leq n} |\alpha_j - p_j^k/q_k| = |\alpha - p^k/q_k| \leq e^{-\varepsilon q_k^{\frac{1}{s}}},\ k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Como α é E^sL, segue que existem $\delta > 0$ e uma sequência $(r^k, s_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}$ tais que $s_k \to \infty$ e

$$|\alpha - r^k/s_k| \leq e^{-\delta s_k^{\frac{1}{s}}},\ k \in \mathbb{N}.$$

Passando a uma subsequência caso se faça necessário, podemos supor que $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\eta^{\frac{1}{s}} \leq \delta$. Então $-\delta s_k^{\frac{1}{s}} \leq -\varepsilon(\eta s_k)^{\frac{1}{s}}$. Definindo $p^k = \eta r^k$ e $q_k = \eta s_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$|\alpha - p^k/q_k| = |\alpha - r^k/s_k| \leq e^{-\delta s_k^{\frac{1}{s}}} \leq e^{-\varepsilon(\eta s_k)^{\frac{1}{s}}} = e^{-\varepsilon(q_k)^{\frac{1}{s}}},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Lema 4.16. *Considere o sistema $(L_1, \ldots, L_\ell)$, sendo cada $L_j = \partial_{t_j} - a_{0j}\partial_x$ agindo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_t^\ell \times \mathbb{R}_x)$ e $a = (a_{01}, \ldots, a_{0\ell}) \in \mathbb{R}^\ell$. Se $a = (p_1/q_1, \ldots, p_\ell/q_\ell) \in \mathbb{Q}^\ell$, com $p_j \in \mathbb{Z}$, $q_j \in \mathbb{N}$ e $q = \prod_{j=1}^{\ell} q_j$, então existe*

$$u = \sum_{\eta\in q\mathbb{N}} \widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_t^\ell \times \mathbb{R}_x) - G_{2\pi}^s(\mathbb{R}_t^\ell \times \mathbb{R}_x)$$

tal que:

- *$L_j u = 0 \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}_t^\ell \times \mathbb{R}_x)$, para $j = 1, \ldots, \ell$;*
- *$|\widehat{u}_\eta(0)| = 1$ para todo $\eta \in q\mathbb{N}$;*
- *para todo $\varepsilon > 0$ existem $C > 0$ e $h > 0$ tais que*

$$|\partial_t^\alpha \widehat{u}_\eta(t)|e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq Ch^{|\alpha|}(\alpha!)^s,\ t \in \mathbb{R}^\ell,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^\ell,\ \eta \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Sejam $q = \prod_{j=1}^{\ell} q_j$, $r_j = p_j \prod_{i\neq j} q_i$ para $j = 1, \ldots, \ell$ e $r = (r_1, \ldots, r_\ell)$. Defina

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{i(kr,kq)\cdot(t,x)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{ikr\cdot t}e^{ikqx}.$$

É claro que $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_t^\ell \times \mathbb{R}_x) - G_{2\pi}^s(\mathbb{R}_t^\ell \times \mathbb{R}_x)$, $L_j u = 0$ para $j = 1, \ldots, \ell$ e $|\widehat{u}_{kq}(0)| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Pelo Lema 5.8 existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$(kq)^{|\alpha|} \leq e^{\varepsilon(kq)^{\frac{1}{s}}} C_\varepsilon^{|\alpha|}(\alpha!)^s,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^\ell$ e $k \in \mathbb{N}$. Então

$$|\partial_t^\alpha \widehat{u}_{kq}(t)| = |(ikr)^\alpha| = k^{|\alpha|}|r^\alpha| \leq (kq)^{|\alpha|}|r|^{|\alpha|} \leq e^{\varepsilon(kq)^{\frac{1}{s}}}(C_\varepsilon|r|)^{|\alpha|}(\alpha!)^s,$$

para todo $t \in \mathbb{R}^\ell$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^\ell$ e $k \in \mathbb{N}$. □

Lema 4.17. *Considere o sistema de operadores* $(L_1, \ldots, L_\ell)$*, sendo cada* $L_j = \partial_{t_j} - a_{0j}\partial_x$ *agindo em* $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^\ell_t \times \mathbb{R}_x)$ *e* $a = (a_{01}, \ldots, a_{0\ell}) \in \mathbb{R}^\ell$*. Se* a *é um vetor* E^sL *e* q *é um natural qualquer, então existe* $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset q\mathbb{N}$ *estritamente crescente tal que podemos encontrar*

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{u}_{\eta_k}(t)e^{i\eta_k x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^\ell_t \times \mathbb{R}_x) - G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^\ell_t \times \mathbb{R}_x)$$

satisfazendo:

- $L_j u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^\ell_t \times \mathbb{R}_x)$*, para* $j = 1, \ldots, \ell$*;*
- $|\widehat{u}_{\eta_k}(0)| = 1$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*;*
- *para todo* $\varepsilon > 0$ *existem* $C > 0$ *e* $h > 0$ *tais que*

$$|\partial^\alpha_t \widehat{u}_\eta(t)|e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq Ch^{|\alpha|}(\alpha!)^s, \ t \in \mathbb{R}^\ell, \ \alpha \in \mathbb{N}^\ell_0, \ \eta \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Pelo Lema 4.15 existem $\varepsilon > 0$ e $(p^k, \eta_k) \in q\mathbb{Z}^n \times q\mathbb{N}$ tais que $\eta_k < \eta_{k+1}$ e

$$|a - p^k/\eta_k| < e^{-\varepsilon\eta_k^{\frac{1}{s}}}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Defina

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{i(p^k,\eta_k)\cdot(t,x)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{ip^k\cdot t}e^{i\eta_k x}.$$

Claramente $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^\ell_t \times \mathbb{R}_x) - G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^\ell_t \times \mathbb{R}_x)$.

Vejamos que $L_j u = f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^\ell_t \times \mathbb{R}_x)$ para todo $j = 1, \ldots, \ell$. Faremos isso analisando os coeficientes de Fourier de f_j. Note que

$$f_j = L_j u = \sum_{k\in\mathbb{N}} L_j e^{i(p^k,\eta_k)\cdot(t,x)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} i(p^k_j - a_{0j}\eta_k)e^{i(p^k,\eta_k)\cdot(t,x)},$$

portanto $\widehat{f}_j(p, \eta) = i(p_j - a_{0j}\eta)$ caso $(p, \eta) = (p^k, \eta_k)$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $\widehat{f}_j(p, \eta) = 0$ caso contrário. Note que

$$|p^k_j - a_{0j}\eta_k| = \eta_k|a_{0j} - p^k_j/\eta_k| \leq \eta_k e^{-\varepsilon\eta_k^{\frac{1}{s}}}, \ j = 1, \ldots, \ell, \ k \in \mathbb{N},$$

o que implica

$$|p^k_j| \leq (|a_{0j}| + e^{-\varepsilon\eta_k^{\frac{1}{s}}})\eta_k \leq (|a| + e^{-\varepsilon\eta_k^{\frac{1}{s}}})\eta_k, \ j = 1, \ldots, \ell, \ k \in \mathbb{N},$$

e portanto

$$|(p^k, \eta_k)| \leq |p^k| + \eta_k \leq \eta_k(1 + |\alpha| + e^{-\varepsilon\eta_k^{\frac{1}{s}}}) \leq C_1\eta_k, \ k \in \mathbb{N},$$

para alguma constante $C_1 > 0$ que não depende de k. Disso segue que $-\varepsilon\eta_k^{\frac{1}{s}} \leq -\tilde{\varepsilon}|(p^k, \eta_k)|^{\frac{1}{s}}$, sendo $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon C_1^{-\frac{1}{s}}$. Então

$$|\widehat{f}_j(p^k, \eta_k)| \leq \eta_k e^{-\varepsilon\eta_k^{\frac{1}{s}}} \leq \eta_k e^{-\tilde{\varepsilon}|(p^k,\eta_k)|} \leq \eta_k e^{-\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}|(p^k,\eta_k)|}e^{-\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}|(p^k,\eta_k)|} \leq e^{-\frac{\tilde{\varepsilon}}{2}|(p^k,\eta_k)|},$$

para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Com isso podemos concluir que $f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^\ell_t \times \mathbb{R}_x)$, para todo $j = 1, \dots, \ell$.

Seja $\delta > 0$ dado. Pelo Lema 5.8 segue que existe $C_\delta > 0$ tal que

$$\eta_k^{|\alpha|} \leq e^{\delta \eta_k^{\frac{1}{s}}} C_\delta^{|\alpha|} (\alpha!)^s, \ k \in \mathbb{N}, \ \alpha \in \mathbb{N}_0^\ell.$$

Então,

$$|\partial_t^\alpha \widehat{u}_{\eta_k}(t)| = |\partial_t^\alpha e^{ip^k \cdot t}| = |(p^k)^\alpha| \leq |p^k|^{|\alpha|} \leq C_1^{|\alpha|} \eta_k^{|\alpha|} \leq e^{\delta \eta_k^{\frac{1}{s}}} (C_1 C_\delta)^{|\alpha|} (\alpha!)^s,$$

para todo $t \in \mathbb{R}^\ell$,$\alpha \in \mathbb{N}_0^\ell$ e $k \in \mathbb{N}$. Isso conclui a demonstração. $\square$

Finalmente estamos prontos para provar a necessidade das condições (i) e (ii). Conforme mencionamos anteriormente, vamos construir uma solução singular para o sistema L quando (i) ou (ii) não são válidas.

No que segue, por abuso de notação, vamos usar o mesmo símbolo L_j tanto para representar o operador L_j quanto para denotar L_j restrito a certas variáveis. E recordamos que estamos separando variáveis da seguinte forma $(t, x) = (t', t'', x) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell} \times \mathbb{R}$.

Suponha que não vale (i), isto é, $J = \emptyset$, ou ainda, $b_j(t_j)$ muda de sinal para todo j. Sem perda de generalidade podemos organizar os sistema de tal forma que $c_{0j} \notin \mathbb{Q}$ para $j = \{1, \dots, m\}$ e $c_{0j} = \frac{p_j}{q_j}$, $p_j \in \mathbb{Z}$ e $q_j \in \mathbb{N}$, para $j \in \{m+1, \dots, n\}$. Pelos Lemas 4.13 e 4.14, segue que para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ existe

$$u_j = \sum_{\eta \in \mathbb{N}} \widehat{u}_{j\eta}(t_j) e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x) - G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x),$$

satisfazendo:

- $L_j u_j = f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x)$;
- existem $t_{0j} \in \mathbb{R}_{t_j}$ e $C > 0$ tais que
$$|\widehat{u}_{j\eta}(t_{0j})| \geq \frac{C}{\sqrt{\eta}}, \ \eta \in \mathbb{N};$$
- para todo $\varepsilon > 0$ existem $C > 0$ e $h > 0$ tais que
$$|\partial_{t_j}^\alpha \widehat{u}_{j\eta}(t_j)| e^{-\varepsilon |\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq C h^\alpha (\alpha!)^s, \ t_j \in \mathbb{R}_{t_j}, \ \alpha \in \mathbb{N}_0, \ \eta \in \mathbb{N},$$

e para cada $j \in \{m+1, \dots, n\}$ existe

$$u_j = \sum_{\eta \in q_j \mathbb{N}} \widehat{u}_{j\eta}(t_j) e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x) - G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x),$$

satisfazendo:

- $L_j u_j = f_j = 0 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x)$;

- existem t_{0j} tais que $|\widehat{u}_{j\eta}(t_{0j})| = 1$ para todo $\eta \in q_j\mathbb{N}$;
- para todo $\varepsilon > 0$ existem $C > 0$ e $h > 0$ tais que

$$|\partial_{t_j}^{\alpha} \widehat{u}_{j\eta}(t_j)| e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq Ch^{\alpha}(\alpha!)^s, \ t_j \in \mathbb{R}_{t_j}, \ \alpha \in \mathbb{N}_0, \ \eta \in \mathbb{Z}.$$

Seja $q = \prod_{j=m+1}^{n} q_j$ e defina

$$u = \sum_{\eta \in q\mathbb{N}} \widehat{u}_{1\eta}(t_1) \otimes \cdots \otimes \widehat{u}_{n\eta}(t_n) e^{i\eta x}.$$

Pelo Corolário 2.44, $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n_t \times \mathbb{R}_x)$. Como

$$|\widehat{u}_{\eta}(t_{01}, \ldots, t_{0m}, t_{0(m+1)}, \ldots, t_{0n})| = \prod_{j=1}^{m} |\widehat{u}_{1\eta}(t_{0j})| \geq \frac{C^m}{\sqrt{\eta^m}}, \ \eta \in q\mathbb{N},$$

segue que $u \notin G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n_t \times \mathbb{R}_x)$.

Para garantir que u é uma solução singular para o sistema L, falta verificar que $L_j u$ pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n_t \times \mathbb{R}_x)$, para $j = 1, \ldots, n$.

Note que

$$L_j u = \sum_{\eta \in q\mathbb{N}} \widehat{u}_{1\eta}(t_1) \otimes \cdots \otimes \widehat{f}_{j\eta}(t_j) \otimes \cdots \otimes \widehat{u}_{n\eta}(t_n) e^{i\eta x}, \ j = 1, \ldots, n.$$

Como $f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x)$, segue que existem $\varepsilon > 0$, $h_j > 0$ e $C_j > 0$ tais que

$$|\partial_{t_j}^{\alpha_j} \widehat{f}_{j\eta}(t_j)| \leq C_j h_j^{\alpha_j} (\alpha_j!)^s e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}}, \ t_j \in \mathbb{R}_{t_j}, \ \alpha_j \in \mathbb{N}_0, \ \eta \in \mathbb{Z}.$$

Então

$$\begin{aligned}
|\partial_t^{\alpha} \widehat{L_j u}_{\eta}(t)| &= |\partial_{t_1}^{\alpha_1} \widehat{u}_{1\eta}(t_1)| \ldots |\partial_{t_j}^{\alpha_j} \widehat{f}_{j\eta}(t_j)| \ldots |\partial_{t_n}^{\alpha_n} \widehat{u}_{n\eta}(t_n)| \\
&\leq |\partial_{t_1}^{\alpha_1} \widehat{u}_{1\eta}(t_1)| \ldots C_j h_j^{\alpha_j} (\alpha_j!)^s e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \ldots |\partial_{t_n}^{\alpha_n} \widehat{u}_{n\eta}(t_n)| \\
&= |\partial_{t_1}^{\alpha_1} \widehat{u}_{1\eta}(t_1)| e^{-\frac{\varepsilon}{n}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \ldots C_j h_j^{\alpha_j} (\alpha_j!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{n}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \ldots |\partial_{t_n}^{\alpha_n} \widehat{u}_{n\eta}(t_n)| e^{-\frac{\varepsilon}{n}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \\
&\leq Ch^{\alpha_1}(\alpha_1!)^s \ldots C_j h_j^{\alpha_j} (\alpha_j!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{n}|\eta|^{\frac{1}{s}}} \ldots Ch^{\alpha_n}(\alpha_n!)^s \\
&\leq C_j C^{n-1} (1 + h + h_j)^{|\alpha|} (\alpha!)^s e^{-\frac{\varepsilon}{n}|\eta|^{\frac{1}{s}}},
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $\eta \in \mathbb{Z}$.

Disso segue que $L_j u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n_t \times \mathbb{R}_x)$ para todo $j = 1, \ldots, n$, o que conclui a prova da afirmação: se não vale (i) então L não é $G^s H$.

Agora suponha que não vale (ii), isto é, se $b_j \equiv 0$ para todo $j \in J = \{1, \ldots, \ell\}$, então $a = (a_{01}, \ldots, a_{0\ell})$ pertence a $\mathbb{Q}^{\ell}$ ou é $E^s L$. Lembre que o sistema está organizado de tal forma que b_j

muda de sinal para $j \in \{\ell+1, \ldots, n\}$. Vamos supor que $c_{0j} \notin \mathbb{Q}$ para $j \in \{\ell+1, \ldots, m\}$ e $c_{0j} = \frac{p_j}{q_j}$, $p_j \in \mathbb{Z}$ e $q_j \in \mathbb{N}$, para $j \in \{m+1, \ldots, n\}$. Novamente utilizando os Lemas 4.13 e 4.14, segue que para cada $j \in \{\ell+1, \ldots, m\}$ existe

$$u_j = \sum_{\eta \in \mathbb{N}} \widehat{u}_{j\eta}(t_j) e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x) - G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x),$$

satisfazendo:

- $L_j u_j = f_j \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x)$;
- existem $t_{0j} \in \mathbb{R}_{t_j}$ e $C > 0$ tais que
$$|\widehat{u}_{j\eta}(t_{0j})| \geq \frac{C}{\sqrt{\eta}}, \ \eta \in \mathbb{N};$$
- para todo $\varepsilon > 0$ existem $C > 0$ e $h > 0$ tais que
$$|\partial^\alpha_{t_j} \widehat{u}_{j\eta}(t_j)| e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq C h^\alpha (\alpha!)^s, \ t_j \in \mathbb{R}_{t_j}, \ \alpha \in \mathbb{N}_0, \ \eta \in \mathbb{Z},$$

e para cada $j \in \{m+1, \ldots, n\}$ existe

$$u_j = \sum_{\eta \in q_j\mathbb{N}} \widehat{u}_{j\eta}(t_j) e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x) - G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_j} \times \mathbb{R}_x),$$

satisfazendo:

- $L_j u_j = f_j = 0 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_J} \times \mathbb{R}_x)$;
- existem t_{0j} tais que $|\widehat{u}_{j\eta}(t_{0j})| = 1$ para todo $\eta \in q_j\mathbb{N}$;
- para todo $\varepsilon > 0$ existem $C > 0$ e $h > 0$ tais que
$$|\partial^\alpha_{t_j} \widehat{u}_{j\eta}(t_j)| e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq C h^\alpha (\alpha!)^s, \ t_j \in \mathbb{R}_{t_j}, \ \alpha \in \mathbb{N}_0, \ \eta \in \mathbb{Z}.$$

Caso $a \in \mathbb{Q}^\ell$, escreva $a = (\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_\ell}{q_\ell})$ com $p_j \in \mathbb{Z}$ e $q_j \in \mathbb{N}$. Seja $\tilde{q} = \prod_{j=1}^{\ell} q_j$. Pelo Lema 4.16 segue que existe

$$w = \sum_{\eta \in \tilde{q}\mathbb{N}} \widehat{w}_\eta(t') e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^\ell_{t'} \times \mathbb{R}_x) - G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^\ell_{t'} \times \mathbb{R}_x),$$

satisfazendo:

- $L_j w = 0 \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^\ell_{t'} \times \mathbb{R}_x)$ para $j = 1, \ldots, \ell$;
- $|\widehat{w}_\eta(0)| = 1$ para todo $\eta \in \tilde{q}\mathbb{N}$;
- para todo $\varepsilon > 0$ existem $C > 0$ e $h > 0$ tais que
$$|\partial^\alpha_{t'} \widehat{u}_\eta(t')| e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s, \ t' \in \mathbb{R}^\ell, \ \alpha \in \mathbb{N}^\ell_0, \ \eta \in \mathbb{Z}.$$

Seja $q = \tilde{q}\prod_{j=m+1}^{n} q_j$ e defina

$$u = \sum_{\eta \in q\mathbb{N}} \widehat{w}(t') \otimes \widehat{u}_{(\ell+1)\eta}(t_{\ell+1}) \otimes \cdots \otimes \widehat{u}_{n\eta}(t_n) e^{i\eta x}.$$

Analogamente ao que fizemos no caso anterior, verifica-se que $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n_t \times \mathbb{R}_x) - G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n_t \times \mathbb{R}_x)$ e $L_j u \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n_t \times \mathbb{R}_x)$ para $j = 1, \ldots, n$. Portanto L não é G^sH.

Agora suponha que a é E^sL. Seja $q = \prod_{j=m+1}^{n} q_j$, então o Lema 4.17 garante a existência de uma sequência $(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset q\mathbb{N}$ estritamente crescente tal que existe

$$w = \sum_{k \in \mathbb{N}} \widehat{w}_{\eta_k}(t') e^{i\eta_k x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^\ell_{t'} \times \mathbb{R}_x) - G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^\ell_{t'} \times \mathbb{R}_x),$$

satisfazendo:

- $L_j w \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^\ell_{t'} \times \mathbb{R}_x)$ para $j = 1, \ldots, \ell$;
- $|\widehat{w}_{\eta_k}(0)| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$;
- para todo $\varepsilon > 0$ existem $C > 0$ e $h > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha_{t'} \widehat{w}_\eta(t')| e^{-\varepsilon|\eta|^{\frac{1}{s}}} \leq C h^{|\alpha|} (\alpha!)^s, \; t' \in \mathbb{R}^\ell, \; \alpha \in \mathbb{N}^\ell_0, \; \eta \in \mathbb{Z}.$$

Definindo

$$u = \sum_{\eta \in q\mathbb{N}} \widehat{w}(t') \otimes \widehat{u}_{(\ell+1)\eta}(t_{\ell+1}) \otimes \cdots \otimes \widehat{u}_{n\eta}(t_n) e^{i\eta x},$$

da mesma forma que fizemos anteriormente podemos concluir que L não é G^sH.

Fica então demonstrado que se (i) ou (ii) não estão verificadas, então o sistema L não é G^sH, o que completa a demonstração da necessidade das condições (i) e (ii).

4.3 Comentários Sobre a Hipoeliticidade Global

De forma análoga ao que fizemos na demonstração do Teorema 4.2, podemos provar o seguinte teorema a respeito da hipoeliticidade global do sistema (4.1) (podendo supor coeficientes $c_j(t_j)$ suaves).

Teorema 4.18. *O sistema L definido em* (4.1) *é globalmente hipoelítico se, e somente se, valem (simultaneamente) as seguintes condições:*

(i) $J \neq \emptyset$ (existe j tal que $b_j(t_j)$ não muda de sinal);

(ii) se $b_j(t_j) \equiv 0$, para todo $j \in J$, então o vetor $a = (a_{01}, \ldots, a_{0\ell})$ não está em $\mathbb{Q}^\ell$ e não é Liouville.

Considere $L = (L_1, \ldots, L_n)$ como em (4.1) (com coeficientes Gevrey). Como o conjunto dos vetores exponenciais Liouville de ordem $s \geq 1$ está contido no conjunto dos vetores Liouville, segue que se L é GH, então L é G^sH. Claramente a recíproca deste resultado não é verdadeira, pois existem números Liouville que não são exponenciais Liouville de ordem $s \geq 1$.

4.4 Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos.

1. Considere os seguintes sistemas:

$$L = \begin{cases} L_1 & = & \partial_{t_1} - 2\partial_x \\ L_2 & = & \partial_{t_2} - i\sin(t_2)\partial_x \end{cases}$$

$$\tilde{L} = \begin{cases} \tilde{L}_1 & = & \partial_{t_1} - \sqrt{2}\partial_x \\ \tilde{L}_2 & = & \partial_{t_2} - i\sin(t_2)\partial_x \end{cases}$$

Note que $\sqrt{2}$ é um número algébrico de ordem 2, portanto, do Teorema de Liouville sobre aproximações diofantinas (ver Proposição 8.8, pg 356, de [5]), $\sqrt{2}$ não pode ser um número de Liouville ou exponencial Liouville de ordem s. Por este motivo o sistema $\tilde{L}$ é G^sH e GH. Como $2 \in \mathbb{Q}$, temos que o sistema L não é G^sH nem GH.

2. Considere o sistema $L = (L_1, \ldots, L_n)$, sendo

$$L_j = \partial_{t_j} - ib_j(t_j)\partial_x, \; j = 1, \ldots, n,$$

com $b_j(t_j) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}_{t_j})$ a valores reais. Aplicando o Teorema 4.2 obtemos que L é G^sH se, e somente se, existe j tal que $b_j(t_j)$ não é identicamente nula e não muda de sinal. Ou seja L é G^sH se, e somente se, algum dos campos L_j é G^sH nas variáveis (t_j, x). Isto é um belo contraste com a teoria local, por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} P_1 & = & \partial_{t_1} + it_1\partial_x \\ P_2 & = & \partial_{t_2} - it_2\partial_x \end{cases}$$

é G^sH na origem, mas nem P_1 e nem P_2 são G^sH na origem (restritos a duas variáveis).

5 RESULTADOS AUXILIARES

Neste capítulo apresentaremos um apanhado de resultados importantes para o desenvolvimento dos capítulos precedentes.

Lema 5.1. *As operações de derivação e multiplicação por funções $G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ são contínuas em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Suponha $u_j \to u$ em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Considere $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então

$$< fu_j - fu, \phi > = < u_j - u, f\phi > \to 0, \ \phi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n),$$

o que implica $fu_j \to fu$ em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Agora se $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$, então

$$< D^\alpha u_j - D^\alpha u, \phi > = < u_j - u, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \phi > \to 0, \ \phi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n),$$

e portanto $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$. □

Lema 5.2. *Vale a regra de Leibiniz para a derivada do produto de uma função por uma ultradistribuição, isto é, se $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\partial_{t_j}(fu) = \partial_{t_j} f u + f \partial_{t_j} u, \ j = 1, \ldots, n.$$

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned} < \partial_{t_j}(fu), \phi > &= < fu, -\partial_{t_j}\phi > = < u, -f\partial_{t_j}\phi > = < u, \partial_{t_j} f\phi - \partial_{t_j}(f\phi) > \\ &= < u, \partial_{t_j} f \phi > + < u, -\partial_{t_j}(f\phi) > = < \partial_{t_j} f u, \phi > + < f\partial_{t_j} u, \phi >, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. □

Lema 5.3. *Seja $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\partial_{t_j} u = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Então u é constante, isto é, u coincide com a ultradistribuição induzida por uma função constante.*

Demonstração. Seja $\xi \in \mathbb{Z}^n$ diferente de zero. Então existe j tal que $\xi_j \neq 0$. Logo

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi) &= (2\pi)^{-n} < u, e^{-i\xi\cdot t} > = (2\pi)^{-n}(i\xi_j)^{-1} < u, -(-i\xi_j)e^{-i\xi\cdot t} > \\ &= (2\pi)^{-n}(i\xi_j)^{-1} < u, -\partial_{t_j} e^{-i\xi\cdot t} > = (2\pi)^{-n}(i\xi_j)^{-1} < \partial_{t_j} u, e^{-i\xi\cdot t} > = 0. \end{aligned}$$

Disso segue que $\widehat{u}(\xi) = 0$ para todo ξ não nulo, e portanto podemos concluir $u = \widehat{u}(0) \in \mathbb{C}$. □

Lema 5.4. *Se $\lambda \in \mathbb{C}^n$, então o sistema*

$$\partial_{t_j} v + \lambda_j v = 0, \ j = 1, \ldots, n, \tag{5.1}$$

admite solução não nula $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *se, e só se,* $\lambda \in i\mathbb{Z}^n$*. Ademais, as soluções são da forma*

$$v(t) = Ce^{-\lambda \cdot t}, \ t \in \mathbb{R}^n,$$

sendo C *uma constante complexa.*

Demonstração. Se $v(t) = Ce^{-\lambda\cdot t}$, $t \in \mathbb{R}^n$, é claro que v é uma solução do sistema (5.1). Seja u uma solução de (5.1), então $u_1 = ue^{\lambda\cdot t}$ satisfaz

$$\partial_{t_j} u_1 = \partial_{t_j} u e^{\lambda\cdot t} + u\partial_{t_j} e^{\lambda\cdot t} = (\partial_{t_j} u + \lambda_j u)e^{\lambda\cdot t} = 0,$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Disso segue que u_1 é constante e portanto $u = Ce^{\lambda\cdot t}$. Fica então provado que todas as soluções de (5.1) são da forma $Ce^{\lambda\cdot t}$ com $C \in \mathbb{C}$. Por fim, note que $Ce^{\lambda\cdot t}$ é 2π periódica se, e somente se, $\lambda \in i\mathbb{Z}^n$ ou $C = 0$. $\square$

Lema 5.5. *Considere* $\lambda \notin i\mathbb{Z}^n$ *e sejam* $g_1, \ldots, g_n \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ *tais que*

$$(\partial_{t_k} + \lambda_k)g_j(t) = (\partial_{t_j} + \lambda_j)g_k(t), \ j, k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Então o sistema

$$(\partial_{t_j} + \lambda_j)v(t) = g_j(t), \ j = 1, \ldots, n, \tag{5.2}$$

admite uma única solução $v \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$*, a qual pode ser escrita como*

$$v(t) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi\lambda_j}} \int_0^{2\pi} e^{-\lambda_j r} g_j(t_j - r, t_{-j})dr, \tag{5.3}$$

sendo j *algum índice tal que* $\lambda_j \notin i\mathbb{Z}$*. A solução* (5.3) *também pode ser escrita da seguinte forma*

$$v(t) = \frac{1}{e^{2\pi\lambda_j} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\lambda_j r} g_j(t_j + r, t_{-j})dr. \tag{5.4}$$

Demonstração. Vejamos inicialmente a unicidade. Sejam u_1, $u_2 \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^n)$ soluções de (5.2). Defina $u = u_1 - u_2$. Então u é solução do sistema (5.1), e como $\lambda \notin i\mathbb{Z}^n$ segue que $u = 0$, isto é, $u_1 = u_2$.

Agora vamos verificar que (5.3) define uma solução de (5.2). De fato,

$$
\begin{aligned}
(\partial_{t_k}+\lambda_k)v(t) &= (\partial_{t_k}+\lambda_k)\frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda_j}}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda_j r} g_j(t_j-r,t_{-j})dr \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda_j}}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda_j r}(\partial_{t_k}+\lambda_k) g_j(t_j-r,t_{-j})dr \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda_j}}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda_j r}(\partial_{t_j}+\lambda_j) g_k(t_j-r,t_{-j})dr \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda_j}}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda_j r}(\partial_{t_j} g_k(t_j-r,t_{-j})+\lambda_j g_k(t_j-r,t_{-j}))dr \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda_j}}\int_0^{2\pi} e^{-\lambda_j r}(-\partial_r g_k(t_j-r,t_{-j})+\lambda_j g_k(t_j-r,t_{-j}))dr \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda_j}}(\int_0^{2\pi} (\partial_r e^{-\lambda_j r}) g_k(t_j-r,t_{-j})dr - [e^{-\lambda_j r} g_k(t_j-r,t_{-j})]_0^{2\pi} \\
&+ \int_0^{2\pi} \lambda_j e^{-\lambda_j r} g_k(t_j-r,t_{-j})dr) \\
&= \frac{1}{1-e^{-2\pi\lambda_j}}(g_k(t_j,t_{-j}) - e^{-\lambda_j 2\pi} g_k(t_j-2\pi,t_{-j})) \\
&= g_k(t_j,t_{-j}) = g_k(t).
\end{aligned}
$$

Por fim, para verificar que (5.3) é equivalente a (5.4) basta fazer uma mudança de variáveis adequada, ou então, de forma totalmente análoga, conferir que (5.4) também define uma solução para (5.2) e usar a unicidade. □

Lema 5.6. *Seja $L = \partial_t - c(t)\partial_x$ agindo em $D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$, sendo $c(t) = a(t) + ib(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e suponha que $c_0 = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} c(y)dy \notin \mathbb{Q}$. Sejam $f = \sum_{\eta>0} \widehat{f}_\eta(t)e^{i\eta x}$ e $u = \sum_{\eta>0} \widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x}$, com $f \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ e $u \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$. Se $Lu = f$, então os coeficientes parciais de Fourier de u são dados por*

$$\widehat{u}_\eta(t) = \frac{1}{1-e^{i2\pi\eta c_0}}\int_0^{2\pi} e^{i\eta H(t,r)}\widehat{f}_\eta(t-r)dr,\ t\in\mathbb{R}, \tag{5.5}$$

ou equivalentemente

$$\widehat{u}_\eta(t) = \frac{1}{e^{-i2\pi\eta c_0}-1}\int_0^{2\pi} e^{-i\eta\tilde{H}(t,r)}\widehat{f}_\eta(t+r)dr,\ t\in\mathbb{R}, \tag{5.6}$$

para todo $\eta \in \mathbb{N}$, sendo

$$H(t,r) = \int_{t-r}^{t} c(y)dy, \quad \tilde{H}(t,r) = \int_t^{t+r} c(y)dy,\ (t,r)\in\mathbb{R}\times[0,2\pi].$$

Reciprocamente, se $u = \sum_{\eta>0}\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ é tal que $\widehat{u}_\eta(t)$ é dado por (5.5) *(ou equivalentemente por* (5.6)*) para todo $\eta > 0$, então $Lu = f$.*

Demonstração. Defina $C(t) = \int_0^t c(y)dy - c_0 t$ para $t \in \mathbb{R}$. Claro que $C(t) \in G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$ e $\partial_t C(t) = c(t) - c_0$.

Note que

$$\begin{aligned} Lu &= L\sum_{\eta\in\mathbb{N}} \widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} = \sum_{\eta\in\mathbb{N}}(\partial_t - c(t)\partial_x)\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{N}}(\partial_t\widehat{u}_\eta(t) - i\eta c(t)\widehat{u}_\eta(t))e^{i\eta x}. \end{aligned}$$

Como $Lu = f$ segue da unicidade dos coeficientes parciais de Fourier que

$$\partial_t\widehat{u}_\eta(t) - i\eta c(t)\widehat{u}_\eta(t) = \widehat{f}_\eta(t),\ \ \eta\in\mathbb{N}, \tag{5.7}$$

ou equivalentemente (pois $e^{-i\eta C(t)}$ nunca se anula e $e^{\pm i\eta C(t)}$ pertence a $G^s_{2\pi}(\mathbb{R})$)

$$(\partial_t - i\eta c_0)e^{-i\eta C(t)}\widehat{u}_\eta(t) = e^{-i\eta C(t)}\widehat{f}_\eta(t),\ \ \eta\in\mathbb{N}. \tag{5.8}$$

Como $c_0 \notin \mathbb{Q}$, temos $-i\eta c_0 \notin i\mathbb{Z}$, para todo $\eta\in\mathbb{N}$, então podemos aplicar o lema 5.5 (para $n = 1$) em (5.8) para obter

$$\begin{aligned} \widehat{u}_\eta(t) &= \frac{1}{1-e^{i2\pi\eta c_0}}\int_0^{2\pi} e^{i\eta(c_0 r - C(t-r)+C(t))}\widehat{f}_\eta(t-r)dr \\ &= \frac{1}{e^{-i2\pi\eta c_0}-1}\int_0^{2\pi} e^{-i\eta(c_0 r + C(t+r)-C(t))}\widehat{f}_\eta(t+r)dr. \end{aligned}$$

Agora note que para todo $(t,r)\in\mathbb{R}\times[0,2\pi]$, temos

$$c_0 r - C(t-r) + C(t) = c_0 r - [\int_0^{t-r} c(y)dy - c_0(t-r)] + \int_0^t c(y)dy - c_0 t = \int_{t-r}^t c(y)dy$$

e

$$c_0 r + C(t+r) - C(t) = c_0 r + \int_0^{t+r} c(y)dy - c_0(t+r) - [\int_0^t c(y)dy - c_0 t] = \int_t^{t+r} c(y)dy.$$

Reciprocamente, suponha $u = \sum_{\eta>0}\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} \in D'_{s,2\pi}(\mathbb{R}^2)$ sendo $\widehat{u}_\eta(t)$ dada por (5.5), para todo $\eta > 0$. Como $c_0\notin\mathbb{Q}$, segue do Lema 5.5 que $\widehat{u}_\eta(t)$ é solução de de (5.8) e portanto também é solução de(5.7), para todo $\eta > 0$. Então

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{\eta\in\mathbb{N}} L\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} = \sum_{\eta\in\mathbb{N}}(\partial_t - c(t)\partial_x)\widehat{u}_\eta(t)e^{i\eta x} \\ &= \sum_{\eta\in\mathbb{N}}(\partial_t\widehat{u}_\eta(t) - i\eta c(t)\widehat{u}_\eta(t))e^{i\eta x} = \sum_{\eta\in\mathbb{N}}\widehat{f}_\eta(t)e^{i\eta x} = f. \end{aligned}$$

□

Lema 5.7. *Seja $c_{0,j} = a_{0,j} + ib_{0,j}$, com $b_{0,j} > 0$. Então:*

(i) existe $C > 0$ tal que $|1 - e^{i2\pi\eta c_{0,j}}|^{-1} \le C$, para todo $\eta\in\mathbb{Z}_+ - \{0\}$;

(ii) existe $C > 0$ tal que $|e^{-i2\pi\eta c_{0,j}} - 1|^{-1} \le C$, para todo $\eta\in\mathbb{Z}_- - \{0\}$.

Demonstração. Note que $i2\pi\eta c_{0,j} = -2\pi\eta b_{0,j} + i2\pi\eta a_{0,j}$. Como $-2\pi\eta b_{0,j} \to -\infty$ quando $\eta \to \infty$, segue que $e^{-2\pi\eta b_{0,j}} \to 0$, portanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\eta > N \Longrightarrow e^{-2\pi\eta b_{0,j}} < \frac{1}{2}.$$

Defina $C = \min\{\min_{1\leq\eta\leq N} |\Re(1 - e^{i2\pi\eta c_{0,j}})|, 1/2\} > 0$. Logo

$$|1 - e^{i2\pi\eta c_{0,j}}| \geq |\Re(1 - e^{i2\pi\eta c_{0,j}})| = 1 - e^{-2\pi\eta b_{0,j}} |\cos(2\pi\eta a_{0,j})| \geq C$$

para todo $\eta \in \mathbb{Z}_+ - \{0\}$. Fica então provado o item (i) e analogamente prova-se o item (ii). $\square$

Lema 5.8. *Dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$|\xi|^{|\alpha|} \leq e^{\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}} C_\varepsilon^{|\alpha|} (\alpha!)^s, \ \xi \in \mathbb{Z}^n, \ \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ dados. Considere $f(t) = t^{|\alpha|} e^{-\varepsilon t^{\frac{1}{s}}}$, para $t \in \mathbb{R}$. Não é difícil verificar que $\bar{t} = (\frac{s|\alpha|}{\varepsilon})^s$ maximiza a função $f(t)$. Note que

$$e^{|\alpha|} = \sum_{k\geq 0} \frac{|\alpha|^k}{k!} \geq \frac{|\alpha|^{|\alpha|}}{|\alpha|!}.$$

Utilizando que $|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}(\alpha!)$ (isto decorre da fórmula multinomial), obtemos

$$\frac{|\alpha|^{|\alpha|}}{e^{|\alpha|}} \leq |\alpha|! \leq n^{|\alpha|}(\alpha!).$$

Então, para todo $t \in \mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} t^{|\alpha|} e^{-\varepsilon t^{\frac{1}{s}}} &= f(t) \leq f(\bar{t}) = \left(\frac{s|\alpha|}{\varepsilon}\right)^{s|\alpha|} e^{-s|\alpha|} \\ &= \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^{s|\alpha|} \left(\frac{|\alpha|^{|\alpha|}}{e^{|\alpha|}}\right)^s \leq \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^{s|\alpha|} n^{s|\alpha|} (\alpha!)^s \\ &= C_\varepsilon^{|\alpha|} (\alpha!)^s, \end{aligned}$$

sendo $C_\varepsilon = (\frac{ns}{\varepsilon})^s$. Substituindo t por $|\xi|$ segue o resultado. $\square$

Lema 5.9. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $R \in \mathbb{R}$. Então*

$$\sum_{\Delta(n)} \frac{(m_1 + \cdots + m_n)!}{m_1! \dots m_n!} R^{m_1+\cdots+m_n} = R(1+R)^{n-1},$$

sendo $\Delta(n) = \{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n : \sum_{j=1}^n j m_j = n\}$. Em particular, para $R = 1$,

$$\sum_{\Delta(n)} \frac{(m_1 + \cdots + m_n)!}{m_1! \dots m_n!} = 2^{n-1}.$$

Demonstração. Caso $R = 0$ não temos o que provar, portanto considere $R \neq 0$. Defina as seguintes funções

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{j \geq 0} x^j, \ |x| < 1,$$

e

$$f(x) = \frac{1}{1 - R(x-1)} = \sum_{j \geq 0} R^j (x-1)^j, \ |R(x-1)| < 1.$$

Não é difícil ver que $g^{(j)}(0) = j!$ e $f^{(j)}(1) = R^j j!$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Note que

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= \frac{1-x}{1-x(1+R)} = \frac{1}{1-x(1+R)} - x\frac{1}{1-x(1+R)} \\ &= \sum_{j \geq 0} x^j (1+R)^j - \sum_{j \geq 0} x^{j+1}(1+R)^j \\ &= 1 + \sum_{j \geq 1} x^j (1+R)^j - x^j (1+R)^{j-1} \\ &= 1 + \sum_{j \geq 1} x^j (1+R)^{j-1} R, \end{aligned}$$

para $|x(R+1)| < 1$. Então $(f \circ g)^n(0) = n!(1+R)^{n-1}R$. Substituindo as respectivas derivadas de f, g e $f \circ g$ na fórmula de Faà di Bruno segue o resultado. □

Lema 5.10. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $(m_1, \ldots, m_n) \in \Delta(n) = \{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n : \sum_{j=1}^n j m_j = n\}$. Definindo $\prod(n) = \prod_{j=1}^n ((j!)^{s-1})^{m_j}$ temos que*

$$((m_1 + \cdots + m_n)!)^s \prod(n) \leq (m_1 + \cdots + m_n)!(n!)^{s-1}.$$

Demonstração. Primeiramente note que a sequência $a_n = (n!)^{\frac{1}{n-1}}$ é crescente. De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((n+1)!)^{\frac{1}{n}}}{(n!)^{\frac{1}{n-1}}} = \left(\frac{((n+1)!)^{n-1}}{(n!)^n} \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} \\ &= \left(\frac{(n+1)^n ((n+1)!)^{n-1}}{((n+1)!)^n} \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} = \left(\frac{(n+1)^n}{(n+1)!} \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} > 1. \end{aligned}$$

Logo, para $1 < j \leq n$, temos que $(j!)^{\frac{s-1}{j-1}} \leq (n!)^{\frac{s-1}{n-1}}$ e portanto

$$(j!)^{s-1} \leq ((n!)^{s-1})^{\frac{j-1}{n-1}}.$$

Disso segue que

$$\prod(n) = ((2!)^{s-1})^{m_2}((3!)^{s-1})^{m_3} \ldots ((n!)^{s-1})^{m_n} \leq ((n!)^{s-1})^{\frac{m_2 + 2m_3 + \ldots (n-1)m_n}{n-1}},$$

e que (lembre que $1 < (m_1 + \cdots + m_n) \leq n$)

$$((m_1 + \cdots + m_n)!)^s = (m_1 + \cdots + m_n)!((m_1 + \cdots + m_n)!)^{s-1} \leq (m_1 + \cdots + m_n)!((n!)^{s-1})^{\frac{(m_1 + \ldots m_n) - 1}{n-1}}.$$

Finalmente, multiplicando estas duas últimas desigualdades segue o resultado. □

Lema 5.11. *Considere*

$$I(\eta) = \int_{-a}^{a} e^{-\eta t^{2k}}\, dt$$

para todo $\eta \in \mathbb{N}$, sendo $a > 0$ e $k \in \mathbb{N}$. Então existem $C_a > 0$ e $C_\infty > 0$ tais que

$$\frac{C_a}{\sqrt[2k]{\eta}} \leq I(\eta) \leq \frac{C_\infty}{\sqrt[2k]{\eta}},\ \eta \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Fazendo a mudança de variável $\tau = \sqrt[2k]{\eta}t$ obtemos

$$I(\eta) = \frac{1}{\sqrt[2k]{\eta}} \int_{-\sqrt[2k]{\eta}a}^{\sqrt[2k]{\eta}a} e^{-\tau^{2k}}\, d\tau,\ \eta \in \mathbb{N}.$$

Como $a \leq a\sqrt[2k]{\eta}$ para todo $\eta \in \mathbb{N}$, temos

$$I(\eta) = \frac{1}{\sqrt[2k]{\eta}} \int_{-\sqrt[2k]{\eta}a}^{\sqrt[2k]{\eta}a} e^{-\tau^{2k}}\, d\tau \geq \frac{1}{\sqrt[2k]{\eta}} \int_{-a}^{a} e^{-\tau^{2k}}\, d\tau = \frac{C_a}{\sqrt[2k]{\eta}},\ \eta \in \mathbb{N},$$

sendo $C_a = \int_{-a}^{a} e^{-\tau^{2k}} d\tau$. Agora note que

$$I(\eta) = \frac{1}{\sqrt[2k]{\eta}} \int_{-\sqrt[2k]{\eta}a}^{\sqrt[2k]{\eta}a} e^{-\tau^{2k}}\, d\tau \leq \frac{1}{\sqrt[2k]{\eta}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^{2k}}\, d\tau = \frac{C_\infty}{\sqrt[2k]{\eta}},\ \eta \in \mathbb{N},$$

sendo $C_\infty = \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau^{2k}} d\tau$. □

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BERGAMASCO, A. Hipoeliticidade global para algumas classes de operadores. *Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo.*, 1989.

[2] BERGAMASCO, A. Remarks about global analytic hypoellipticity. *Transactions of the American Mathematical Society*, p. 4113–4126, 1999.

[3] GREENFIELD, S. J. Hypoelliptic vector fields and continued fractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 31, n. 1, p. 115–118, 1972.

[4] GREENFIELD, S. J.; WALLACH, N. R. Global hypoellipticity and liouville numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 31, n. 1, p. 112–114, 1972.

[5] MARTINEZ, F. B.; MOREIRA, C. G.; SALDANHA, N.; TENGAN, E. *Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.* 2013.

[6] PETRONILHO, G. Ultradistribuições gevrey periódicas em $\mathbb{R}^n$. Apostila do curso apresentado na I EBED - UNICAMP, 2003.

[7] RODINO, L. *Linear partial differential operators in gevrey spaces.* World Scientific, 1993.

[8] ZANI, S. Hipoeliticidade global para operadores de segunda ordem. *Dissertação de Mestrado, ICMC-USP*, 1988.