UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
FERNANDO STUDZINSKI CARVALHO

ORBIFOLDS COMO GRUPOIDES E O GRUPO FUNDAMENTAL DE UM ORBIFOLD

CURITIBA
2015

FERNANDO STUDZINSKI CARVALHO

ORBIFOLDS COMO GRUPOIDES E O GRUPO FUNDAMENTAL DE UM ORBIFOLD

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Cristian Ortiz González.

CURITIBA
2015

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

C331o Carvalho, Fernando Studzinski

Orbifolds como grupoides e o grupo fundamental de um orbifold [recurso eletrônico] / Fernando Studzinski Carvalho – Curitiba, 2015.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas Programa de Pós-graduação em Matemática.

Orientador: Cristian Ortiz González.

1. Grupoide de Lie (Álgebra). 2. Orbifold. 3. Grupo fundamental de um orbifold. I. Universidade Federal do Paraná. II. Ortiz González, Cristian. III. Título.

CDD: 512.482

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

"ORBIFOLDS COMO GRUPOIDES E O GRUPO FUNDAMENTAL DE UM ORBIFOLD"

por

Fernando Studzinski Carvalho

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre no Programa de Pós-Graduação em Matemática,

pela Comissão Examinadora composta por:

Orientador: ______________________________
Prof. Dr. Cristian Andres Ortiz Gonzalez
PPGM – UFPR

____
Prof. Dr. Ivan Struchiner
Universidade de São Paulo

____
Prof. Dr. Olivier Brahic
PPGM – UFPR

Curitiba, 27 de fevereiro de 2015.

Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM

ATA DA 64ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos vinte e sete dias do mês de fevereiro de 2015, no Anf. B, Bloco das PCs, foi instalada pelo Professor Cristian Andres Ortiz Gonzalez, a Banca Examinadora para a sexagésima quarta Defesa de Dissertação de Mestrado em Matemática. Estiveram presentes ao Ato, professores, alunos e visitantes.

A banca examinadora, homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, ficou constituída pelos professores: Prof. Dr. Ivan Struchiner, da Universidade de São Paulo, Prof. Dr. Olivier Brahic, do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, e o Prof. Dr. Cristian Andres Ortiz Gonzalez, orientador da dissertação, a quem coube a presidência dos trabalhos.

Às dezesseis e trinta horas, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o candidato **FERNANDO STUDZINSKI CARVALHO** a fazer a apresentação do tema da dissertação intitulada "ORBIFOLDS COMO GRUPOIDES E O GRUPO FUNDAMENTAL DE UM ORBIFOLD". Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes. Após a arguição, a banca com pelo menos 03 (três) membros, reuniu-se para apreciação do desempenho do pós-graduando.

A banca considerou que o pós-graduando fez uma apresentação com a necessária concisão. A Dissertação apresenta contribuição à área de estudos e não foram registrados problemas fundamentais de estrutura e redação, resultando em plena e satisfatória compreensão dos objetivos pretendidos.

Tendo em vista a dissertação e a arguição, os membros presentes da banca decidiram pela sua aprovação.

Curitiba, 27 de fevereiro de 2015.

Prof. Dr. Cristian Andres Ortiz Gonzalez
Presidente

Prof. Dr. Ivan Struchiner
Titular

Prof. Dr. Olivier Brahic
Titular

Ministério da Educação
Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Exatas/Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGM

PARECER DA BANCA EXAMINADORA

Após a apresentação, a banca deliberou pela aprovação da dissertação do candidato **FERNANDO STUDZINSKI CARVALHO** devendo, para tanto, incorporar as sugestões feitas pelos membros da banca, no prazo estabelecido pelo regimento correspondente.

Curitiba, 27 de fevereiro de 2015.

Prof. Dr. Cristian Andres Ortiz Gonzalez
Presidente

Prof. Dr. Ivan Struchiner
Titular

Prof. Dr. Olivier Brahic
Titular

Agradecimentos

Agradeço imensamente à minha mãe, Laura e ao meu pai, Renato, por sempre me apoiarem incondicionalmente a continuar meus estudos. Agradeço à Mayumi por ter me dado suporte nesses últimos quatro anos em que estamos juntos e também por ter me suportado nesse último ano de mestrado falando o tempo todo em orbifolds e grupoides.

Agradeço o programa de pós-graduação em matemática da UFPR, por ter me dado a oportunidade ingressar no mestrado e por ter dado boas condições para que eu o concluísse.

Agradeço ao meu orientador, Cristián, por todos esses anos em que ele tem me orientado, sempre me encorajando e contribuindo para que eu evoluísse enquanto estudante. Neste sentido, não poderia deixar de agradecer a alguns professores do departamento de matemática da UFPR, que foram particularmente importantes no meu desenvolvimento desde a graduação, agradeço aos professores Carlos Henrique, Eduardo Hoefel, Edson Alvares e Marcelo Muniz, por todas as conversas que tivemos durante esses anos de graduação e mestrado, tanto em matemática quanto em outros assuntos. Agradeço ainda aos meus colegas de mestrado, por todo o tempo que passamos juntos.

Agradeço aos meus amigos, Thamara, Willian, Cristian, Lilian, Paleari, Gaio, Marcelo, Guilherme e ao meu irmão Felipe, por todos os bons momentos que passamos juntos.

Agradeço a Matias del Hoyo, pelas conversas produtivas que tivemos durante a minha visita ao IME-USP, em outubro de 2014.

Por último mas não menos importante, agradeço novamente ao Cristián e também à Gabriela, por terem me hospedado em seu apartamento no primeiro semestre de 2014, agradeço a todos os idealizadores do programa PICME, e agradeço a CAPES pela bolsa de mestrado fornecida, sem a qual eu jamais poderia ter chegado até aqui.

“In physics, beauty does not automatically ensure truth, but it helps. In mathematics, beauty must be true - because anything false is ugly.”

Ian Stewart
“Why beauty is truth – A history of symmetry”

“Experiment is the sole source of truth. It alone can teach us something new, it alone can give us certainty.”

Henri Poincaré
“Science and Hypothesis”

“Nature never appeals to inteligence until habit and instinct are useless. There is no inteligence where there is no need of change.”

H.G. Wells
“The time machine”

“The world is not enough.”

Ian Fleming
“On her majesty secret service”

RESUMO

Esta dissertação de mestrado tem dois objetivos principais. O primeiro deles é entender as noções de grupoide de Lie e de orbifold e demonstrar que existe uma correspondência biunívoca entre classes de isomorfismo de orbifolds efetivos e classes de equivalência de Morita de grupoides de Lie próprios, étale e efetivos. O segundo objetivo é obter uma noção de grupo fundamental para orbifolds usando caminhos de Haefliger em grupoides de Lie. Especificamente, associamos a cada grupoide de Lie $\mathcal{G}$, um grupo $\pi_{_{\mathrm{Hae}}}(\mathcal{G}, x)$, formado pelas classes de homotopia de caminhos de Haefliger em $\mathcal{G}$, de x para x. Mostramos que este grupo é um invariante da classe de equivalência de Morita de $\mathcal{G}$. Assim, no caso de grupoides próprios e étale, obtemos um invariante da classe de isomorfismo de qualquer orbifold representado por $\mathcal{G}$.

Palavras-chave: *Grupoide de Lie, orbifold, grupo fundamental de um orbifold*

ABSTRACT

In this work we have two main goals. The first one is to understand the notion of Lie groupoid and that of an orbifold and to prove that there exists a one-to-one correspondence between isomorphism classes of effective orbifolds and Morita equivalence classes of proper, étale and effective Lie groupoids. Our second goal is to obtain a notion of a fundamental group for orbifolds using the notion of Haefliger paths in Lie groupoids. Specifically, we associate to each Lie groupoid $\mathcal{G}$ a group $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ defined by homotopy classes of Haefliger paths in $\mathcal{G}$ from x to x. We will prove that this group is an invariant of the Morita equivalence class of $\mathcal{G}$. As a consequence, in the particular case of $\mathcal{G}$ being a proper, étale Lie groupoid we obtain an invariant of the isomorphism class of any orbifold presented by $\mathcal{G}$.

Keywords: *Lie groupoid, orbifold, fundamental group of an orbifold*

SUMÁRIO

Introdução

A teoria de orbifolds começou a ser desenvolvida nos anos 50 quando o matemático Ichiro Satake introduziu o conceito de V-manifolds [Sat56, Sat57]. Satake descrevia os V-manifolds como espaços que generalizam variedades diferenciáveis, onde V-manifolds são pensados como variedades com certos tipos de "singularidades". Satake foi capaz de reconstruir vários conceitos importantes da teoria de variedades para o caso de V-manifolds, dentre eles cohomologia de de Rham, classes características e o teorema de Gauss-Bonnet. Porém, em cada um de seus artigos, Satake dava definições diferentes de V-manifolds e de morfismos entre V-manifolds, e as definições continham problemas. Por exemplo, nunca ficou claro se a composição de dois morfismos era um novo morfismo e pull-backs de fibrados não estavam definidos para quaisquer morfismos. Talvez por essas razões os V-manifolds não despertaram muita atenção da comunidade matemática durante muitos anos. Isso mudou drasticamente no final dos anos 70, quando William Thurston começou a utilizar os V-manifolds seriamente em seu programa de geometrização de 3-variedades. Nessa época, Thurston alterou a definição original de Satake e também trocou o nome de V-manifolds para orbifolds, vide [Thu80].

Enquanto uma carta de uma variedade X é dada por um par (U, φ), onde U é um aberto de X e $\varphi : U \to \tilde{U}$ é um homeomorfismo entre U e um aberto $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, uma carta de orbifold num espaço topológico Q consiste em uma tripla $(\tilde{U}, G, \varphi)$, onde $\tilde{U}$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, G é um subgrupo finito de difeomorfismos de $\tilde{U}$ e $\varphi : \tilde{U} \to U \subset Q$ é uma aplicação contínua sobre um aberto $U \subset Q$, que induz um homeomorfismo entre $\tilde{U}/G$ e U. Ou seja, orbifolds são localmente homeomorfos a abertos de um espaço euclidiano módulo a ação de um grupo finito de difeomorfismos, com uma compatibilidade nas cartas que se intersectam. Além disso, sem perda de generalidade, é possivel tomar as cartas de orbifold com $\tilde{U} = \mathbb{R}^n$ e G como um grupo finito de isometrias de $\mathbb{R}^n$. Nas definições de Satake não eram admitidas reflexões nos grupos de isometrias das cartas, pois ele impunha condições na codimensão do conjunto de singularidades.

Também foi Thurston quem introduziu a noção de grupo fundamental de um orbifold, o primeiro invariante de estruturas de orbifold num espaço topológico, conhecido na literatura. A definição dada por Thurston para o grupo fundamental de um orbifold, vide [Thu80], é feita em termos de recobrimentos de orbifolds. Ou seja, para todo orbifold Q ele provou a existência de um orbifold $\tilde{Q}$ que tem o papel do recobrimento universal de Q, e assim definiu $\pi_{\text{Thu}}(Q) = \text{Aut}(\tilde{Q})$, onde $\text{Aut}(\tilde{Q})$ denota o grupo de automorfismos do recobrimento $\pi : \tilde{Q} \to Q$. A ideia principal é que: dado um orbifold Q, o grupo fundamental $\pi_{\text{Thu}}(Q)$ é um invariante da classe de isomorfismo do orbifold Q, mais fino do que o grupo fundamental usual $\pi_1(Q)$. Por exemplo, se $B(0,1)/C_n$ é o orbifold quociente da bola aberta $B(0,1)$ pela ação do grupo cíclico C_n por rotações, então como espaço topológico $B(0,1)/C_n$ é homeomorfo a $B(0,1)$, portanto tem grupo fundamental usual trivial. Porém, gostaríamos de distinguir $B(0,1)/C_n$ e $B(0,1)/C_m$ como orbifolds não isomorfos para $m \neq n$. E de fato, tem-se $\pi_{\text{Thu}}(B(0,1)/C_n) \simeq C_n$ para todo n natural, assim o grupo fundamental de orbifolds é um invariante mais fino que π_1.

Ao longo dos anos, muitos trabalhos em teoria de folheações, principalmente os de André Haefliger [Hae71, Hae84], levaram a uma reformulação da teoria de orbifolds em termos da teoria de grupoides de Lie. Em particular, os trabalhos de Moerdijk e Pronk [MP97], Moerdijk [Moe02] e Adem e Ruan [ALR07] contribuiram para desenvolver este ponto de vista. Em [MP97] é demonstrado que existe uma correspondência biunívoca entre classes de equivalência de Morita de grupoides de Lie próprios étale efetivos, e classes de isomorfismos de orbifolds. Assim, técnicas de grupoides de Lie, que são objetos suaves na teoria de variedades diferenciáveis, podem ser aplicadas ao estudo de orbifolds que são espaços com singularidades. Como consequência, muitos invariantes fundamentais foram, e tem sido desenvolvidos para orbifolds, *e.g.* espaços classificantes, cohomologia, fibrados... (vide [ALR07]).

Thurston afirma em [Thu80] que daria uma interpretação para o grupo fundamental em termos de classes de homotopia de caminhos, porém isto não foi apresentado nessas notas. Por outro lado, em [HB99] e em [MM05] são apresentadas as noções de grupo fundamental e de recobrimentos de grupoides. Em particular, em um grupoide $\mathcal{G}$ é definida a noção de $\mathcal{G}$-caminhos, também chamados de caminhos de Haefliger em $\mathcal{G}$. O grupo fundamental de $\mathcal{G}$ com base em x é definido como $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)$, o conjunto de classes de homotopia de $\mathcal{G}$-laços com base em x.

Além disso, é possível provar que grupoides Morita equivalentes tem grupos fundamentais isomorfos, desta forma podemos definir uma noção de grupo fundamental para orbifolds: dado um orbifold Q, devido a [MP97], podemos tomar $\mathcal{G}$ um grupoide de Lie próprio, étale associado, e definimos o grupo fundamental de Q como o grupo fundamental de $\mathcal{G}$. Pelas considerações anteriores, esse grupo está bem definido a menos de isomorfismo. Em particular, se $B(0,1)/C_n$ é o orbifold mencionado anteriormente, temos que o grupoide de ação $C_n \ltimes B(0,1)$ representa este orbifold. Podemos demonstrar que $\pi_{_{\text{Hae}}}(C_n \ltimes B(0,1)) \simeq C_n$ e consequentemente $\pi_{_{\text{Hae}}}(B(0,1)/C_n) \simeq C_n$. Recuperando assim o resultado que $B(0,1)/C_n$ e $B(0,1)/C_m$ são isomorfos se, e somente se, $m = n$. A vantagem dessa nova versão de grupo fundamental para orbifolds é que agora utilizamos caminhos de Haefliger em grupoides e homotopias entre estes caminhos. Em particular, fica mais simples e intuitivo como generalizar os resultados da teoria usual de grupo fundamental e recobrimentos para este caso mais geral.

Os objetivos principais desse trabalho são deixar claro a relação entre orbifolds suaves e grupoides de Lie próprios, étale e a partir disso introduzir um conceito de grupo fundamental para orbifolds, cuja construção utiliza caminhos de Haefliger em grupoides.

No capítulo 1 é definida a categoria de grupoides de Lie $\mathbf{Grp}$. De forma concreta, damos as definições básicas de grupoides de Lie e de morfismos entre grupoides de Lie. Apresentamos também vários exemplos destas estruturas, definições e proposições básicas com ênfase em grupoides próprios e étale. Além disso, introduzimos os conceitos de equivalência fraca e de equivalência de Morita entre grupoides de Lie. Em particular, veremos a noção de morfismo generalizado entre grupoides de Lie e obteremos a categoria $\mathbf{GRP}$, que é uma localização da categoria $\mathbf{Grp}$ com respeito às equivalências fracas. As principais referências desta parte são: [MM03, MM05, ALR07] e [Ler10].

No capítulo 2 introduzimos a categoria de orbifolds $\mathbf{Orb}$. Concretamente, são apresentadas as definições de orbifolds suaves e de aplicações diferenciáveis entre orbifolds. Apresentamos vários exemplos interessantes, por exemplo, veremos que se um grupo de Lie K age em uma variedade X de forma própria, efetiva e com estabilizadores finitos, então o espaço quociente X/K é um orbifold suave e efetivo. Apresentamos também a recíproca deste resultado, *i.e.* , todo orbifold efetivo Q é isomorfo a um orbifold da forma X/K como descrito acima. Na última seção deste capítulo é apresentado um teorema devido a Moerdijk e Pronk [MP97], que exibe uma correspondência biunívoca entre classes de isomorfismos de orbifolds suaves, efetivos e classes de equivalência de Morita de grupoides de Lie próprios, étale efetivos. As referências para este capítulo são: [ALR07, Thu80, Moe02] e [MP97].

No capítulo 3 introduzimos o conceito de caminhos de Haefliger em um grupoide $\mathcal{G}$, bem como a noção de homotopias entre estes caminhos e definimos o grupo fundamental de Haefliger $\pi_{_{\text{Hae}}}(\mathcal{G})$. Em seguida, calculamos os grupos fundamentais de vários grupoides de Lie. No caso de um grupoide de ação $K \ltimes X$, provamos que o grupo fundamental de Haefliger $\pi_{_{\text{Hae}}}(K \ltimes X)$ é uma extensão de $\pi_1(X)$ por $\pi_0(K)$. Também veremos que existe um conceito de recobrimento na categoria dos grupoides de Lie, obtendo assim para cada grupoide $\mathcal{G}$ uma categoria $\mathbf{CS}(\mathcal{G})$ formada por todos os recobrimentos de $\mathcal{G}$ e morfismos entre estes recobrimentos. Além disso, mostramos como os principais resultados da teoria de recobrimentos usuais de espaços topológicos se estendem para recobrimentos de grupoides. Por exemplo, veremos que para qualquer recobrimento de um grupoide $\mathcal{G}$ existem ações por monodromia sobre as fibras do recobrimento e para todo grupoide $\mathcal{G}$ conexo por caminhos de Haefliger, existe um recobrimento universal de $\mathcal{G}$, tal que o grupo de automorfismos do recobrimento universal é isomorfo a $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$. Demonstraremos que se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são grupoides Morita equivalentes, então as categorias $\mathbf{CS}(\mathcal{G})$ e $\mathbf{CS}(\mathcal{H})$ são equivalentes. Como consequência, grupoides Morita equivalentes tem grupos fundamentais de Haefliger isomorfos. A partir disso, definimos o grupo fundamental de Haefliger de um orbifold utilizando um grupoide que o representa. Por fim, veremos alguns exemplos de grupos fundamentais de orbifolds, e mostraremos que existem orbifolds que não são isomorfos a nenhum orbifold da forma X/G, onde X é uma variedade e G é um subgrupo finito do grupo de difeomorfismos de X. As principais referências para este capítulo são: [MM05, ALR07, Moe02] e [HB99].

Capítulo 1

Grupoides de Lie

Neste primeiro capítulo introduzimos a teoria básica de grupoide de Lie, com ênfase nos grupoides próprios étale. São definidas as noções de grupoides e morfismos entre grupoides, equivalências fracas (ou essenciais), e estudamos o que se entende por equivalência de Morita entre grupoides. As principais referências utilizadas foram: [MM03, MM05], [Ler10] e [ALR07].

1.1 Grupoides: definições e exemplos

Nesta seção introduzimos os grupoides de Lie que serão um de nossos objetos de estudo durante todo esse trabalho. Daremos vários exemplos de grupoides de Lie para ilustrar a importância destes grupoides em geometria diferencial. Em particular, veremos que variedades diferenciáveis e ações de grupos de Lie em variedades podem ser vistos como grupoides de Lie.

De forma bastante geral um grupoide $\mathcal{G}$ é definido como uma categoria pequena (os espaços de objetos e de morfismos são conjuntos) tal que todos os morfismos dessa categoria são invertiveis. De forma concreta, um grupoide $\mathcal{G}$ consiste num conjunto de objetos $\mathcal{G}_0$, um conjunto de flechas $\mathcal{G}_1$ e aplicações estruturais:

- s(source) e t(target); $s, t : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0$ dadas por $s(x \to y) = x$ e $t(x \to y) = y$.

- m(multiplicação) parcialmente definida, $m : \mathcal{G}_1 \, {}_s\times_t \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_1$ dada por $m(h, g) = hg$, onde $\mathcal{G}_1 \, {}_s\times_t \mathcal{G}_1 = \{((h, g)) \in \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_1 | s(h) = t(g)\}$ é o produto fibrado de s e t. Ou seja, temos $y \xrightarrow{h} z$, $x \xrightarrow{g} y$ e $x \xrightarrow{hg=m(h,g)} z$.

- ε(seção identidade); $\varepsilon : \mathcal{G}_0 \to \mathcal{G}_1$, dada por $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$, satisfazendo para toda flecha $(x \xrightarrow{g} y) \in \mathcal{G}_1, g\varepsilon_x = g$ e $\varepsilon_y g = g$.

- i(inversão); $i : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_1$ dada por $i(x \xrightarrow{g} y) = y \xrightarrow{g^{-1}} x$, satisfazendo para toda $(x \xrightarrow{g} y) \in \mathcal{G}_1$, $gg^{-1} = \varepsilon_y$ e $g^{-1}g = \varepsilon_x$.

Além disso, a multiplicação m deve ser associativa no seguinte sentido, $m(gh, k) = (gh)k = g(hk) = m(g, hk)$ sempre que as composições $gh, (gh)k, hk$ e $g(hk)$ estiverem definidas.

Na definição acima nos referimos a $\mathcal{G}_1$ como espaço de flechas e a $\mathcal{G}_0$ como espaço de objetos do grupoide $\mathcal{G}$.

Embora a definição geral faça sentido, como queremos estudar geometria e topologia de orbifolds/grupoides estaremos interessados em grupoides topológicos e grupoides de Lie, as definições seguem abaixo.

Definição 1.1.1. Um **grupoide topológico** $\mathcal{G}$ é um grupoide tal que os conjuntos de objetos $\mathcal{G}_0$ e de flechas $\mathcal{G}_1$ são espaços topológicos e as aplicações estruturais são todas contínuas.

Definição 1.1.2. Um **grupoide de Lie** é um grupoide topológico $\mathcal{G}$, tal que os espaços $\mathcal{G}_0$ e $\mathcal{G}_1$ ambos tem estrutura de variedade diferenciável (com $\mathcal{G}_1$ não necessariamente de Hausdorff ou segundo contável) tais que as aplicações estruturais s e t são submersões sobrejetoras e as aplicações m, ε, i são todas suaves.

Observação 1.1.3. A exigência que s, t sejam submersões é importante entre outras coisas para garantir que o produto fibrado $\mathcal{G}_1 \ {}_s\!\times_t \mathcal{G}_1$ seja uma subvariedade (mergulhada) de $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_1$, assim a condição de que m seja diferenciável faz sentido. Note também que no caso de um grupoide de Lie i é um difeomorfismo, pois é uma involução suave, e como $s \circ i = t$, basta que uma das aplicações s ou t seja submersão para que a outra também seja.

Observação 1.1.4. É comum denotar por $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide com espaço de flechas $\mathcal{G}$ e espaço de objetos X. Dizemos também que $\mathcal{G}$ é um grupoide sobre X. Essa notação será a mais utilizada daqui em diante.

Exemplo 1.1.5. Tomando $X = \{*\}$ conjunto unitário e K um grupo de Lie, temos um grupoide de Lie $K \times \{*\} \rightrightarrows \{*\}$, com aplicações estruturais naturalmente definidas. Ou seja, um grupo de Lie K pode ser visto como um grupoide de Lie onde a base consiste em apenas um ponto. Reciprocamente, se $\mathcal{G} \rightrightarrows \{*\}$ é um grupoide de Lie, com espaço de objetos um conjunto unitário, então o conjunto de flechas $\mathcal{G}$ é um grupo de Lie.

Exemplo 1.1.6. Seja X uma variedade diferenciável. Podemos definir um grupoide de Lie $X \rightrightarrows X$ com as seguintes aplicações estruturais:

- $s, t = \mathrm{Id} : X \to X$
- $m : X \ {}_s\!\times_t X = \{(x, x) | x \in X\} \to X$, dada por $m(x, x) = x$

- $\varepsilon, i : X \to X$ ambas iguais à identidade.

Este grupoide é chamado de **grupoide unital** sobre X (ou associado a X).

Exemplo 1.1.7. Suponha que K é um grupo de Lie que age suavemente à esquerda numa variedade X via $\mu : K \times X \to X$; $\mu(g, x) = gx$. Então, temos um grupoide de Lie $K \times X \rightrightarrows X$, com as seguintes aplicações estruturais:

- $s, t : K \times X \to X$, tais que $s(g, x) = x$ e $t(g, x) = gx = \mu(g, x)$
- $m : \{((g, x), (h, y)) | x = hy\} \to K \times X$, dada por $m((g, hy), (h, y)) = (gh, y)$
- $\varepsilon : X \to K \times X$, dada por $\varepsilon(x) = (1, x)$, onde 1 denota o elemento identidade do grupo K
- $i : K \times X \to K \times X$, tal que $i(g, x) = (g^{-1}, gx)$

Este grupoide de Lie é chamado de **grupoide de ação** e é usualmente denotado por $K \ltimes X \rightrightarrows X$.

Observação 1.1.8. No exemplo 1.1.7, se tomarmos $K = \{1\}$ o grupo trivial, então o grupoide de ação é exatamente o grupoide $X \rightrightarrows X$ do exemplo Exemplo 1.1.6. No outro extremo, se tomarmos $X = \{*\}$ o grupoide de ação se torna o grupoide do Exemplo 1.1.5.

Exemplo 1.1.9. Seja X uma variedade, então temos um grupoide de Lie $X \times X \rightrightarrows X$, onde (x, y) é pensado como uma flecha com source igual a x e target igual a y. A multiplicação é definida de modo único pois para cada $x, y \in X$ existe uma única flecha de x para y. Tal grupoide é conhecido com **grupoide do par** e é denotado por $\mathrm{Pair}(X) \rightrightarrows X$.

Exemplo 1.1.10. Suponha $p : Y \to X$ submersão sobrejetora. Então, temos um grupoide associado, $Y\ {}_p{\times}_p\ Y \rightrightarrows Y$, com aplicações estruturais dadas por:

- $s, t : Y\ {}_p{\times}_p\ Y \to Y$; $s(x, y) = x$ e $t(x, y) = y$.
- $m : \{((z, w), (x, y)) | z = y\} \to Y$; $m((z, w), (x, y)) = (x, w)$.
- $\varepsilon : Y \to Y\ {}_p{\times}_p\ Y$; $\varepsilon(x) = (x, x)$.
- $i : Y\ {}_p{\times}_p\ Y \to Y\ {}_p{\times}_p\ Y$; $i(x, y) = (y, x)$.

Este grupoide é chamado de **grupoide de submersão**.

O exemplo a seguir é uma caso particular do exemplo anterior, porém é muito importante por si só, por isso o destacamos aqui.

Exemplo 1.1.11. Suponha X uma variedade suave e $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma cobertura de X por abertos, *i.e.* $\mathcal{U}_\alpha$ é aberto em X para todo $\alpha \in \Lambda$ e $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{U}_\alpha$. Então, temos uma submersão $p : \coprod_\alpha \mathcal{U}_\alpha \to X$, tal que $p|_{\mathcal{U}_\alpha}$ é a inclusão de $\mathcal{U}_\alpha$ em X. Neste caso, o grupoide de submersão associado a p é da forma: $\coprod_{\alpha,\beta} \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \rightrightarrows X$. Ou seja, existe uma flecha $x \xrightarrow{g} y$ se, e somente se, existem $\alpha, \beta \in \Lambda$ tais que $x, y \in \coprod_{\alpha,\beta} \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$. Um grupoide obtido desta forma a partir de uma cobertura por abertos é chamado de **grupoide de Čech** ou **grupoide de cobertura**

Exemplo 1.1.12. Seja X uma variedade diferenciável conexa. Definimos $\Pi(X) = \{[\sigma] | \sigma : [0,1] \to X$ é um caminho contínuo$\}$, onde $[\sigma]$ denota a classe de homotopia com extremos fixos de σ. Temos então um grupoide de Lie $\Pi(X) \rightrightarrows X$ com as seguintes aplicações estruturais:

- $s, t : \Pi(X) \to X$, dadas por $s([\sigma]) = \sigma(0)$ e $t([\sigma]) = \sigma(1)$
- $m : \{([\sigma], [\beta]) | \sigma(0) = \beta(1)\} \to \Pi(X)$, tal que $m([\sigma], [\beta]) = [\beta * \sigma]$, onde $\beta * \sigma$ denota a concatenação de caminhos que percorre primeiro β e depois σ.
- $\varepsilon : X \to \Pi(X)$, dada por $\varepsilon(x) = [c_x]$, onde c_x denota o caminho constante igual a x em X.
- $i : \Pi(X) \to \Pi(X)$, tal que $i([\sigma]) = [\sigma^{-1}]$, onde por definição $\sigma^{-1}(u) = \sigma(1-u)$ para todo $u \in [0,1]$

Este grupoide é conhecido como **grupoide fundamental** da variedade X. A estrutura diferenciável no espaço de flechas $\Pi(X)$ é tal que a aplicação $(s,t) : \Pi(X) \to X \times X$ é um recobrimento suave.

Definição 1.1.13. Um grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é dito **transitivo** se a aplicação $(s,t) : \mathcal{G} \to X \times X$ é uma submersão sobrejetora.

Observação 1.1.14. Se X é variedade conexa, então $\Pi(X) \rightrightarrows X$ é um grupoide transitivo, pois neste caso a aplicação $(s,t) : \Pi(X) \to X \times X$ é um difeomorfismo local sobrejetivo.

Definição 1.1.15. Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide e $x \in X$. Definimos a **órbita** de x como o conjunto $t(s^{-1}\{x\}) = \{t(g) \in X | g \in \mathcal{G}$ e $s(g) = x\}$, ou seja, a órbita de x é dada pelos targets de todas as flechas que começam em x. Definimos ainda o **espaço de órbitas** do grupoide por $X/\mathcal{G} := \{t(s^{-1}\{x\}) | x \in X\}$, ou seja, é o conjunto formado por todas as órbitas. De maneira equivalente, $X/\mathcal{G}$ é o quociente de X pela relação de equivalência, $x \sim y$ se, e somente se, x e y estão na mesma órbita. E definimos o **grupo de isotropia** de x por $\mathcal{G}_x = \{g \in \mathcal{G} | s(g) = t(g) = x\}$, ou seja, são todas as flechas que começam e terminam em x.

Observação 1.1.16. Se $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é um grupoide, então $\mathcal{G}_x$ é de fato um grupo, pois a multiplicação parcial m do grupoide restringe-se a uma multiplicação associativa $m : \mathcal{G}_x \times \mathcal{G}_x \to \mathcal{G}_x$.

Exemplo 1.1.17. Se $\Pi(X) \rightrightarrows X$ é o grupoide fundamental de uma variedade conexa X, dado $x \in X$ temos que $\Pi(X)_x = \{[\sigma] | \sigma(0) = x = \sigma(1)\}$ é o conjunto de todas as classes de homotopia de laços com base no ponto x. Ou seja, $\Pi(X)_x = \pi_1(X, x)$ é o grupo fundamental de X com base em x.

Exemplo 1.1.18. É interessante observar o que as definições anteriores significam no caso de um grupoide de ação $K \times X \rightrightarrows X$. É fácil ver que a órbita de um elemento $x \in X$ no sentido da definição 1.1.15 é igual à órbita do elemento x pela ação de K no sentido usual e consequentemente o espaço de órbitas, no sentido da definição 1.1.15, é igual ao espaço de órbitas X/K no sentido usual. Também é fácil ver que o grupo de isotropia de $x \in X$ no sentido de 1.1.15 é igual ao grupo de isotropia de x com respeito à ação de G no sentido usual.

Observação 1.1.19. No caso de um grupoide transitivo $\mathcal{G} \rightrightarrows X$, como (s, t) é sobrejetora, dado $(x, y) \in X \times X$, existe $g \in \mathcal{G}$ tal que $s(g) = x$ e $t(g) = y$, ou seja, existe apenas uma órbita que é todo o espaço de objetos do grupoide.

1.2 Bisseções, órbitas e isotropias de um grupoide de Lie

A seguir vamos estudar quais são as estruturas (topológicas e diferenciáveis) das orbitas e das isotropias de um grupoide de Lie. Para tal vamos fazer uso das chamadas bisseções de um grupoide de Lie. O material desta seção é baseado essencialmente em [MS05].

Definição 1.2.1. Uma **bisseção** de um grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é uma aplicação $\sigma : X \to \mathcal{G}$ tal que $s \circ \sigma = \mathrm{Id}_M$ e $t \circ \sigma$ é um difeomorfismo de X em X.

Definição 1.2.2. Uma **bisseção local** de um grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é uma aplicação $\sigma_U : U \to \mathcal{G}$, onde $U \subset X$ é aberto, tal que $s \circ \sigma_U = \mathrm{Id}_U$ e $t \circ \sigma_U : U \to X$ é um difeomorfismo sobre a imagem.

A princípio a condição para uma aplicação $\sigma : X \to \mathcal{G}$ ser uma bisseção é bastante restritiva, porém sempre existe ao menos uma bisseção, que é dada pela seção unital $\varepsilon : X \to \mathcal{G}, x \mapsto \varepsilon_x$. Já no caso de bisseções locais a situação é bastante simplificada como mostra a seguinte proposição.

Proposição 1.2.3. *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Então, para todo $x \in X$ e para todo $g \in s^{-1}(x)$ existem $U \subset X$ um aberto contendo x e $\sigma : U \to \mathcal{G}$ uma bisseção local de $\mathcal{G}$, tal que $\sigma(x) = g$.*

Demonstração: Sejam $x \in X$ e $g \in s^{-1}(x)$, com $y = t(g)$. Note que $T_g(s^{-1}(x))$ e $T_g(t^{-1}(y))$ são subespaços de $T_g\mathcal{G}$ de mesma dimensão, logo existe $I \subset T_g\mathcal{G}$,tal que $T_g\mathcal{G} = T_g(s^{-1}(x)) \oplus I$ e $T_g\mathcal{G} = T_g(t^{-1}(x)) \oplus I$. Como $s : \mathcal{G} \to X$ é submersão sobrejetora, existe um aberto $\tilde{U} \subset X$ ao redor de x e uma seção local de s, $\sigma : \tilde{U} \to \mathcal{G}$, (isto é, $s \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\tilde{U}}$), satisfazendo $\sigma(x) = g$ e $\mathrm{Im}(d\sigma(x)) = I$. Logo, $dt(g) \circ d\sigma(x)$ é isomorfismo linear. Assim, pelo teorema da função inversa, existe $U \subset \tilde{U}$ aberto contendo x, tal que $t \circ \sigma : U \to X$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. Portanto, $\sigma|_U$ é uma bisseção com as propriedades desejadas. ■

Corolário 1.2.4. *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Então, para cada $x \in X$, o mapa $t|_{s^{-1}(x)} : s^{-1}(x) \to X$ tem posto constante.*

Demonstração: Sejam $x \in X$ e $g, h \in s^{-1}(x)$. Então, $k = gh^{-1} \in \mathcal{G}$ está bem definido e assim pela proposição 1.2.3 existem $U \subset X$ aberto em torno de $s(k) = t(h)$ e uma bisseção $\sigma : U \to \mathcal{G}$, tal que $\sigma(t(h)) = k$. Assim, tomando o aberto $V = (t \circ \sigma)(U)$, podemos definir a translação à esquerda $L_\sigma : t^{-1}(U) \cap s^{-1}(x) \to t^{-1}(V) \cap s^{-1}(x)$, dada por $L_\sigma(g) = \sigma(t(g))g$, que é um difeomorfismo entre abertos de $s^{-1}(x)$ e satisfaz $L_\sigma(h) = \sigma(t(h))h = kh = g$. Como $t|_{s^{-1}(x)} \circ L_\sigma = (t \circ \sigma) \circ t|_{s^{-1}(x)}$ e ambos L_σ e $t \circ \sigma$ são difeomorfismos, segue que os postos de $t|_{s^{-1}(x)}$ em g e em h coincidem. ■

Como consequência, dado um grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ veremos que as órbitas e as isotropias desse grupoide têm estruturas naturais de subvariedades diferenciáveis, dentro de X e de $\mathcal{G}$ respectivamente.

Corolário 1.2.5. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide de Lie sobre X. Então, para todos $x, y \in X$, o conjunto $\mathcal{G}(x, y) = \{g \in \mathcal{G} | s(g) = x$ e $t(g) = y\}$ é uma subvariedade fechada e mergulhada de $s^{-1}(x)$, de $t^{-1}(y)$ e de $\mathcal{G}$. E para todo $x \in X$ a sua órbita $t(s^{-1}(x))$ é uma subvariedade imersa em X.*

Demonstração: Como a aplicação $t|_{s^{-1}(x)} : s^{-1}(x) \to X$ tem posto constante e $\mathcal{G}(x, y) = (t|_{s^{-1}(x)})^{-1}(y)$, segue do teorema do posto que $\mathcal{G}(x, y)$ é uma subvariedade fechada e mergulhada de $s^{-1}(x)$ e consequentemente de $\mathcal{G}$. Para mostrar que $\mathcal{G}(x, y)$ é subvariedade mergulhada de $t^{-1}(y)$ podemos aplicar um argumento análogo utilizando o mapa $s|_{t^{-1}(y)} : t^{-1}(y) \to X$ que também tem posto constante. Ainda pelo teorema do posto, o fato de $t|_{s^{-1}(x)} : s^{-1}(x) \to X$ ter posto constante, implica também que sua imagem $t(s^{-1}(x)) \subset X$ é uma subvariedade imersa. ■

Definição 1.2.6. Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Dizemos que:

- $\mathcal{G}$ é um **grupoide próprio** se o espaço de flechas é Hausdorff e a aplicação $(s,t) : \mathcal{G} \to X \times X$; dada por $(s,t)(g) = (s(g), t(g))$ é uma aplicação própria, *i.e.* para todo compacto $Z \subset X \times X$ tem-se $(s,t)^{-1}(Z)$ compacto.

- $\mathcal{G}$ é um **grupoide de folheação** se $\forall x \in X$ tem-se $\mathcal{G}_x$ discreto.

- $\mathcal{G}$ é um **grupoide étale** se as aplicações s e t são difeomorfismos locais. Equivalentemente, $\mathcal{G}$ é étale se $\dim(\mathcal{G}) = \dim(X)$ como variedades diferenciáveis.

Observação 1.2.7. Suponha $K \ltimes X \rightrightarrows X$ grupoide de ação, então temos $(s,t) : K \times X \to X \times X$, dada por $(s,t)(g,x) = (s(g), t(g)) = (x, gx)$. Logo, o grupoide de ação é próprio se, e somente se, a ação de K em X é própria. Note ainda que $K \ltimes X$ é de folheação se, e somente se, cada grupo de isotropia K_x é discreto. E $K \ltimes X$ é étale se, e somente se, o grupo K é discreto.

Proposição 1.2.8. *Todo grupoide étale $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é um grupoide de folheação.*

Demonstração: Por hipótese temos que s e t são difeomorfismos locais, então para todo $x \in X$, $\mathcal{G}_x = s^{-1}\{x\} \cap t^{-1}\{x\}$ é interseção de conjuntos discretos. Assim, $\mathcal{G}_x$ é discreto e portanto $\mathcal{G}$ é de folheação ■

Proposição 1.2.9. *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Então, para todo $x \in X$ temos que $\mathcal{G}_x$ é um grupo de Lie e se $\mathcal{G}$ é próprio, então $\mathcal{G}_x$ é compacto. Além disso, se $\mathcal{G}$ é próprio e de folheação, então $\mathcal{G}_x$ é finito.*

Demonstração: Note que $\mathcal{G}_x = (s,t)^{-1}(x,y) = \mathcal{G}(x,x)$, logo pelo corolário 1.2.5, a isotropia $\mathcal{G}_x$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathcal{G}$. Assim, a multiplicação $m : \mathcal{G} \ {}_s\!\times_t \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ se restringe a uma aplicação suave e associativa $m : \mathcal{G}_x \times \mathcal{G}_x \to \mathcal{G}_x$. Logo, $\mathcal{G}_x$ é um grupo de Lie. Suponha agora que $\mathcal{G}$ é próprio, então a aplicação (s,t) é própria, e consequentemente $\mathcal{G}_x = (s,t)^{-1}\{(x,x)\}$ é compacto. Por fim, se $\mathcal{G}$ é próprio e de folheação, segue que $\mathcal{G}_x$ é compacto (pelo argumento anterior) e é discreto (pela definição 1.2.6), portanto $\mathcal{G}_x$ é finito. ■

1.3 Morfismos entre grupoides de Lie

Nessa seção veremos qual é a noção usual de morfismo entre grupoides de Lie. Obteremos assim uma categoria $\mathbf{Grp}$ cujos objetos são grupoides de Lie e as flechas são morfismos entre grupoides de Lie. Além disso, veremos qual é a noção de transformação natural entre morfismos de grupoides de Lie, de modo que podemos ver $\mathbf{Grp}$ como uma 2-categoria. Nossas referências são [Ler10, MM03, MM05, ALR07].

Como os grupoides são categorias pequenas é natural pensar que um morfismo entre grupoides deva ser um funtor, mas devido às estruturas extras que um grupoide de Lie possui, para que um funtor seja um morfismo ele deve ser suave em algum sentido, assim temos a seguinte definição:

Definição 1.3.1. Seja $\mathcal{H} \rightrightarrows Y$ e $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ dois grupoides de Lie, um **morfismo de grupoides** entre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ consiste em um par de aplicações diferenciáveis $\phi_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ e $\phi_0 : Y \to X$ que comutam com as aplicações estruturais de $\mathcal{H}$ e de $\mathcal{G}$. Ou seja, para todos $h \in \mathcal{H}$, $y \in Y$ e $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \;{}_s{\times}_t\, \mathcal{H}$ temos

- $\phi_0(s(h)) = s(\phi_0(h))$ e $\phi_0(t(h)) = t(\phi_0(h))$;
- $\phi_1(\varepsilon(y)) = \varepsilon(\phi_0(y))$;
- $\phi_1(m(h_1, h_2)) = m(\phi_1(h_1), \phi_1(h_2))$.

É imediato que o funtor $\mathrm{Id} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ é um morfismo de grupoides de Lie, para todo $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ e que a composição de morfismos de grupoides é um morfismo de grupoides. Ou seja, temos uma categoria denotada por **Grp**, cujos objetos são grupoides de Lie e os morfismos são como definidos em 1.3.1.

Exemplo 1.3.2. Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie e $\mathrm{Pair}(X) \rightrightarrows X$ o grupoide do par associado à variedade X. Então, a aplicação $(s,t) : \mathcal{G} \to X \times X; g \mapsto (s(g), t(g))$ é um morfismo de grupoides de Lie entre $\mathcal{G}$ e $\mathrm{Pair}(X)$.

Assim como a noção de morfismo de grupoides de Lie deve levar em conta as estruturas adicionais de suavidade dos grupoides, a noção de transformação natural entre morfismos também sofre alteração neste contexto.

Definição 1.3.3. Sejam $\phi, \psi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ morfismos de grupoides. Uma **transformação natural** entre ϕ e ψ, denotada por $\alpha : \phi \to \psi$ consiste em uma aplicação suave $\alpha : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{G}_1$, tal que para cada $x \in \mathcal{H}_0$ associa $\phi_0(x) \xrightarrow{\alpha(x)} \psi_0(x)$, ou seja $s \circ \alpha = \phi_0$ e $t \circ \alpha = \psi_0$, natural no sentido que para toda $x \xrightarrow{h} y$ em $\mathcal{H}_1$ o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd} \phi_0(x) \arrow[r, "\alpha(x)"] \arrow[d, "\phi_1(h)"'] & \psi_0(x) \arrow[d, "\psi_1(h)"] \\ \phi_0(y) \arrow[r, "\alpha(y)"] & \psi_0(y) \end{tikzcd}$$

Ou seja, $\psi_1(h)\alpha(x) = \alpha(y)\phi_1(h)$.

1.4 Equivalências fracas e equivalência de Morita

Nesta seção estudaremos o conceito de **equivalência de Morita** entre grupoides de Lie e veremos exemplos básicos desse tipo de equivalência. Teremos como referências principais [MM03, MM05]. Como veremos nesta dissertação, grupoides de Lie próprios, étale e efetivos módulo equivalência de Morita representam classes de isomorfismo de orbifolds efetivos. (vide Capítulo 2 e Seção 2.4). Esta é a nossa motivação pra estudar essa relação de equivalência entre grupoides.

Definição 1.4.1. Um morfismo entre grupoides de Lie $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é chamado de **equivalência fraca** (ou essencial) se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) A aplicação $s\pi_2 : \mathcal{H}_0 \;{}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_0$ é uma submersão sobrejetora.

(ii) O seguinte diagrama é um produto fibrado de variedades:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(s,t)"'] & \mathcal{G}_1 \arrow[d, "(s,t)"] \\
\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0 \arrow[r, "\phi_0 \times \phi_0"] & \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0
\end{tikzcd}$$

Ou seja, a aplicação $\gamma : \mathcal{H} \to (\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0) \;{}_{\phi_0\times\phi_0}\!\times_{(s,t)} \mathcal{G}_1$, definida por $\gamma(g) = (s(g), t(g), \phi(g))$ é um difeomorfismo.

Observação 1.4.2. A condição (i) na definição acima garante que as aplicações $(\phi_0 \times \phi_0)$ e (s,t) são transversais, e como consequência o produto fibrado $(\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0) \;{}_{\phi_0\times\phi_0}\!\times_{(s,t)} \mathcal{G}_1$ tem estrutura de variedade diferenciável, veja por exemplo [del12]. Assim, tem sentido pedir que o mapa γ na condição (ii) seja suave.

Segue do item (i) que para todo $z \in \mathcal{G}_0$, existe $(y,g) \in \mathcal{H}_0 \;{}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{G}_1$ tal que $s\pi_2(y,g) = z$, ou seja, $\phi_0(y) = t(g)$ e $s(g) = z$. Logo, $\forall z \in \mathcal{G}_0$, existe $y \in \mathcal{H}_0$ tal que $\phi_0(y) \simeq z$, onde $\simeq$ denota um isomorfismo na categoria $\mathcal{G}$. Portanto, toda equivalência fraca $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é um funtor essencialmente sobrejetivo (também chamado de denso por alguns autores).

Se $\mathcal{K}$ é um grupoide definamos $\mathcal{K}_1(x,y) := \{k \in \mathcal{K}_1 | s(k) = x$ e $t(k) = y\}$ o conjunto de todas as flechas de x para y no grupoide $\mathcal{K}$. Então, pelo item (ii) concluímos que, para quaisquer $x, y \in \mathcal{H}_0$, ϕ induz uma bijeção $\phi : \mathcal{H}_1(x,y) \to \mathcal{G}_1(\phi_0(x), \phi_0(y))$. Portanto, toda equivalência fraca $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é um funtor fiel e pleno. Assim, se $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é equivalência fraca, como funtor (esquecendo as estruturas diferenciáveis dos grupoides) ϕ é uma equivalência de categorias, pois é um funtor fiel, pleno e denso.

Definição 1.4.3. Se $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é uma equivalência fraca tal que $h : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{G}_0$ é uma submersão sobrejetora, então ϕ é chamada de **equivalência forte**.

Definição 1.4.4. Dois grupoides de Lie $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são ditos **Morita equivalentes** se existe um terceiro grupoide de Lie $\mathcal{K}$ com equivalências fracas: $\phi : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ e $\psi : \mathcal{K} \to \mathcal{G}$.

Exemplo 1.4.5. Sejam $G \rightrightarrows \{x\}$ e $H \rightrightarrows \{y\}$ grupos de Lie vistos como grupoides. Suponha que esses grupoides são Morita equivalentes, então existe $\mathcal{K}$ e equivalências fracas: $\phi : \mathcal{K} \to G$ e $\psi : \mathcal{K} \to H$. Como equivalências fracas são funtores fiéis e plenos, segue que ϕ e ψ induzem isomorfismos $\mathcal{K}_z \to H_y = H$ e $\mathcal{K}_z \to G_x = G$. Assim, G e H são Morita equivalentes se, e somente se, são grupos isomorfos.

Observação 1.4.6. Se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ são Morita equivalentes, então existem $\mathcal{K}'$ e equivalências fortes $\phi' : \mathcal{K}' \to \mathcal{H}$ e $\psi' : \mathcal{K}' \to \mathcal{G}$. (Vide [MM03])

Enunciamos a seguir três proposições que serão utilizadas futuramente nesta dissertação. As duas primeiras faremos uso na seção 1.5. A terceira será utilizada no capítulo 3. A razão para enunciarmos essas proposições aqui é que elas fornecem alguns exemplos básicos de equivalências fracas e consequentemente de equivalência de Morita. As demonstrações podem ser encontradas em [MM03].

Proposição 1.4.7. *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Dado $x \in X$, a órbita $t(s^{-1}(x))$ tem estrutura de variedade imersa em X e a aplicação $t : s^{-1}(x) \to t(s^{-1}(x))$ é um $\mathcal{G}_x$-fibrado principal.*

Proposição 1.4.8. *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- *$\mathcal{G}$ é transitivo.*
- *$\mathcal{G}$ é Morita equivalente a um grupo de Lie.*
- *Existe $x \in X$, tal que $t : \mathcal{G}(x, -) \to X$ é submersão sobrejetora.*
- *A inclusão $j : \mathcal{G}_x \to \mathcal{G}$ é uma equivalência fraca.*

Proposição 1.4.9. *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- *A aplicação $(s, t) : \mathcal{G} \to X \times X$ é um recobrimento.*
- *$\mathcal{G}$ é Morita equivalente a um grupo discreto.*

- *Existe $x \in X$, tal que $t : \mathcal{G}(x, -) \to X$ é aplicação de recobrimento.*
- *Para todo $x \in X$, $t : \mathcal{G}(x, -) \to X$ é aplicação de recobrimento.*
- *$\mathcal{G}_x$ é discreto e a inclusão $j : \mathcal{G}_x \to \mathcal{G}$ é uma equivalência fraca.*

1.5 Morfismos generalizados e equivalência de Morita

Nesta seção introduzimos o conceito de **morfismos generalizados** entre grupoides de Lie, devido a Hilsum e Skandalis [HS87]. Obteremos assim uma categoria $\mathbf{GRP}$ formada pelos grupoides de Lie e morfismos generalizados. Explicaremos também qual é a relação entre a categoria usual $\mathbf{Grp}$ e a categoria $\mathbf{GRP}$. Especificamente, veremos em que sentido $\mathbf{GRP}$ é obtida de $\mathbf{Grp}$ invertendo formalmente as equivalências fracas. Como consequência, veremos que dois grupoides de Lie são Morita equivalentes se, e somente se, eles são isomorfos na categoria $\mathbf{GRP}$. As principais referências para esta seção são [MM05, Ler10].

Definição 1.5.1. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{W}$ uma subclasse de morfismos de $\mathcal{C}$, $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}$. Uma **localização** de $\mathcal{C}$ com respeito a $\mathcal{W}$ é um par $(\mathcal{D}, L)$, onde $\mathcal{D}$ é uma categoria e $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor, satisfazendo as seguintes condições:

(i) $L(w)$ é invertível em $\mathcal{D}$ para todo $w \in \mathcal{W}$.

(ii) Se $L_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ é um funtor com $L_2(w)$ invertível em $\mathcal{E}$, $\forall w \in \mathcal{W}$, então existe um único funtor $\psi : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ tal que $\psi \circ L = L_2$. Ou seja, temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E} \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "L_2"] \arrow[r, "L"'] & \mathcal{D} \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Observação 1.5.2. Se existe uma localização de uma categoria $\mathcal{C}$ com respeito a $\mathcal{W}$, então ela é única a menos de isomorfismo de categorias.

Mencionaremos o seguinte lema apenas por completude, sua demonstração pode ser encontrada em [Ler10].

Lema 1.5.3. *Dados $\mathcal{C}$ uma categoria e $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}_1$ uma subclasse de morfismos de $\mathcal{C}$ sempre existe uma localização de $\mathcal{C}$ com respeito a $\mathcal{W}$. Tal localização é denotada por $L_{\mathcal{W}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}(\mathcal{W}^{-1})$.*

1.5.1 Ações de grupoides de Lie e $\mathcal{G}$-fibrados principais

A seguir estudaremos os conceitos de ações de grupoides de Lie e de $\mathcal{G}$-fibrados principais, onde $\mathcal{G}$ é um grupoide de Lie.

Definição 1.5.4. Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie, E uma variedade e $a_l : E \to X$ aplicação diferenciável chamada de âncora. Uma **ação à esquerda** de $\mathcal{G}$ em E ao longo de a_l é uma aplicação suave $\mu : \mathcal{G}\ {}_s\!\times_{a_l} E \to E$, denotada por $\mu(g,z) = gz$, satisfazendo as condições a seguir:

(i) $g(hz) = (gh)z$ para todo $(g,h,z) \in \mathcal{G}\ {}_s\!\times_t \mathcal{G}\ {}_s\!\times_{a_l} E$.

(ii) $\varepsilon_{a_l(z)} z = z$ para todo $z \in E$.

(iii) $a_l(gz) = t(g)$ para todo $(g,z) \in \mathcal{G}\ {}_s\!\times_{a_l} E$.

Em geral, denotamos uma ação à esquerda de $\mathcal{G}$ em E pelo seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[dr, shift right] \arrow[dr, shift left] & \circlearrowleft & E \arrow[dl, "a_l"'] \\ & X & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Ao contrário do caso usual de ações de grupos, fixando um elemento $g \in \mathcal{G}$ não obtemos um difeomorfismo global de E em E. Ao invés disso, temos uma bijeção $\mu_g : E_{s(g)} \to E_{t(g)}$, onde $E_{s(g)}$ e $E_{t(g)}$ são respectivamente $a_l^{-1}(s(g))$ e $a_l^{-1}(t(g))$. Por exemplo, se a_l for submersão, então μ_g é difeomorfismo. Além disso, se $\mathcal{K} = K \rightrightarrows \{*\}$ é o grupoide associado ao grupo de Lie K, então uma ação de $\mathcal{K}$ em uma variedade E é o mesmo que uma ação suave de K em E.

Observação 1.5.5. Pode-se definir **ação à direita** de um grupoide sobre uma variedade de maneira análoga, a diferença essencial é que numa ação à direita a fibra sobre $t(g)$ é levada por $g \in \mathcal{G}$ na fibra sobre $s(g)$. Toda ação à esquerda pode ser transformada numa ação à direita e vice-versa. No primeiro caso, basta compor a ação μ com a aplicação $i \times \mathrm{Id}_E$, onde i é a inversão do grupoide. Uma ação à direita ao longo de a_r é denotada pelo diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "a_r"'] & \circlearrowright & \mathcal{G} \arrow[dl, shift right] \arrow[dl, shift left] \\ & Y & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Definição 1.5.6. Um espaço E munido de uma ação à esquerda por um grupoide $\mathcal{G}$ é chamado de $\mathcal{G}$-**espaço**. Uma aplicação $\theta : E_1 \to E_2$, entre dois $\mathcal{G}$-espaços é chamada $\mathcal{G}$-equivariante se para todo $g \in \mathcal{G}$ e $z \in E_1$, tem-se $b \circ \theta(z) = a(z)$, onde a e b são as âncoras das ações em E_1 e em E_2 respectivamente e $\theta(gz) = g\theta(z)$.

Observação 1.5.7. Fixado um grupoide de Lie podemos definir a categoria dos $\mathcal{G}$-espaços, denotada $\mathcal{G}$**-Spaces**, cujos objetos são $\mathcal{G}$-espaços e os morfismos são aplicações $\mathcal{G}$-equivariantes.

Definição 1.5.8. Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Uma variedade P com uma ação de $\mathcal{G}$ à direita ao longo de $a_r : P \to X$ (respectivamente à esquerda ao longo de $a_l : P \to X$) é chamada de $\mathcal{G}$-**fibrado principal** à direita (respectivamente à esquerda) sobre B se existe uma submersão sobrejetora $\pi : P \to B$ tal que

(i) $\pi(ph) = \pi(p)$, para todo $(p, h) \in P\ {}_{a_r}\!\times_t \mathcal{G}$ (respectivamente $\pi(hp) = \pi(p)$, para todo $(h, p) \in \mathcal{G}\ {}_s\!\times_{a_l} P$) *i.e.* π *é* $\mathcal{G}$*-invariante.*

(ii) A aplicação $P\ {}_{a_r}\!\times_t \mathcal{G} \to P\ {}_\pi\!\times_\pi P$*, dada por* $(p, h) \mapsto (p, ph)$ *(respectivamente* $\mathcal{G}\ {}_s\!\times_{a_l} P \to P\ {}_\pi\!\times_\pi P$*, dada por* $(h, p) \mapsto (p, hp)$*) é um difeomorfismo. Ou seja, cada fibra de* π *é uma órbita da ação por* $\mathcal{G}$ *e* $\mathcal{G}$ *age livremente e transitivamente sobre cada fibra.*

Em geral representamos um $\mathcal{G}$-fibrado principal à direita pelo seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "a_r"] & \mathcal{G} \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ B & X \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Exemplo 1.5.9. Se $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é um grupoide de Lie, então a submersão $t : \mathcal{G} \to X$ é um $\mathcal{G}$-fibrado principal à direita, onde $\mathcal{G}$ age em $\mathcal{G}$ por multiplicação à direita ao longo de $s : \mathcal{G} \to X$. De fato,

- $m : \mathcal{G}\ {}_s\!\times_t \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ é ação à direita ao longo de s e $t(hg) = t(h), \forall (g, h) \in \mathcal{G}\ {}_s\!\times_t \mathcal{G} \to \mathcal{G}$.
- $\mathcal{G}\ {}_s\!\times_t \mathcal{G} \to \mathcal{G}\ {}_t\!\times_t \mathcal{G}$, dada por $(g, h) \mapsto (g, gh)$ é um difeomorfismo com inverso $(g, k) \mapsto (g, g^{-1}k)$.

Exemplo 1.5.10. Suponha que H é um grupo de Lie e seja $\mathcal{H} := H \rightrightarrows \{*\}$ o grupoide de Lie associado. Vejamos o que é um $\mathcal{H}$-fibrado principal à direita. Se $\pi : P \to B$ é $\mathcal{H}$-fibrado principal, existe uma ação de $\mathcal{H}$ em P ao longo de $a_r : P \to \{*\}$ dada por $\mu : P\ {}_{a_r}\!\times_t H \to P$. Mas note que, neste caso $P\ {}_{a_r}\!\times_t H = \{(p, h) | a_r(p) = t(h)\} = P \times H$. Portanto, μ é uma ação suave no sentido usual, do grupo de Lie H sobre P. Já a segunda condição de $\mathcal{H}$-fibrado principal nos diz que a aplicação $P \times H \to P\ {}_\pi\!\times_\pi P$, dada por $(p, h) \mapsto (p, ph)$ é um difeomorfismo. Ou seja, cada fibra de π é uma órbita da ação por H e H age livremente e transitivamente sobre cada fibra. Portanto, $\pi : P \to B$ é um H-fibrado principal usual.

Agora veremos que podemos definir pull-backs de $\mathcal{G}$-fibrados principais ao longo de aplicações suaves.

Proposição 1.5.11. *Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ grupoide de Lie e $\pi : P \to B$ é $\mathcal{G}$-fibrado principal. Se $f : N \to B$ é uma aplicação suave, defina $f^*(P) := N\ {}_f{\times}_\pi\ P$. Então, o espaço $f^*(P)$ é $\mathcal{G}$-fibrado principal sobre N.*

Demonstração: Seja $\mathrm{pr}_1 : N\ {}_f{\times}_\pi\ P \to N$ a restrição da projeção na primeira coordenada. Se $\mathcal{G}$ age em P à direita ao longo de a_r, então $\mathcal{G}$ age em $N\ {}_f{\times}_\pi\ P$ à direita ao longo de $a_r \circ \mathrm{pr}_2 : N\ {}_f{\times}_\pi\ P \to X$, por $((n,p),h) \mapsto (n,ph)$. Como π é submersão temos que $\mathrm{pr}_1 : N\,{}_f{\times}_\pi P \to N$ é submersão e $\mathrm{pr}_1((n,p),h) = \mathrm{pr}_1(n,ph) = n = \mathrm{pr}_1(n,p)$. Assim, para verificar que $\mathrm{pr}_1 : N\ {}_f{\times}_\pi\ P \to N$ é um $\mathcal{G}$-fibrado principal, falta verificar a condição (ii) da definição. Ou seja, a aplicação a seguir deve ser um difeomorfismo

$$\begin{array}{rcl} (N\ {}_f{\times}_\pi\ P)\ {}_{a_r \mathrm{pr}_2}{\times}_t\, \mathcal{G} & \to & (N\ {}_f{\times}_\pi\ P)\ {}_{a_r \mathrm{pr}_2}{\times}_{a_r \mathrm{pr}_2}\ (N\ {}_f{\times}_\pi\ P) \\ (n,p,h) & \mapsto & ((n,p),(n,ph)) \end{array}$$

mas esta aplicação tem inversa dada por $(((n,p),(n,q))) \mapsto (n,p,h)$, onde $h \in \mathcal{G}$ é o único elemento tal que $ph = q$. Concluindo assim a demonstração. ■

1.5.2 Bifibrados como morfismos entre grupoides de Lie

Nesta seção introduzimos a definição de bifibrado entre dois grupoides de Lie e veremos em que sentido um bifibrado de $\mathcal{G}$ para $\mathcal{H}$, denotado por $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, é uma generalização do conceito de morfismo entre grupoides de Lie. Nossas principais referências são ainda [Ler10, MM05].

Definição 1.5.12. Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ e $\mathcal{H} \rightrightarrows Y$ dois grupoides de Lie. Um **bifibrado** de $\mathcal{G}$ para $\mathcal{H}$ é dado por uma variedade P, duas âncoras $a_l : P \to X$ e $a_r : P \to Y$, tais que $\mathcal{G}$ age em P à esquerda ao longo de a_l, $\mathcal{H}$ age à direita em P ao longo de a_r, satisfazendo as seguintes condições:

(i) $a_l : P \to X$ é um $\mathcal{H}$-fibrado principal com relação à ação de $\mathcal{H}$.

(ii) a_r é $\mathcal{G}$-invariante *i.e.* $a_r(gp) = a_r(p)$ *para todo* $(g,p) \in \mathcal{G}\ {}_s{\times}_{a_l}\ P$.

(iii) As ações de $\mathcal{G}$ e de $\mathcal{H}$ comutam, ou seja $(gp)h = g(ph)$ para todo $(g,p,h) \in \mathcal{G}\ {}_s{\times}_{a_l}\ P\ {}_{a_r}{\times}_t\, \mathcal{H}$.

Um bifibrado de $\mathcal{G}$ para $\mathcal{H}$ é denotado por $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Em alguns casos utilizaremos também um diagrama como em 1.4 abaixo para denotar um bifibrado $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \circlearrowright P \circlearrowleft \arrow[d, "a_l"'] \arrow[dr, "a_r"] & \mathcal{H} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ & X & Y \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

Exemplo 1.5.13. Seja $\phi : (\mathcal{G} \rightrightarrows X) \to (\mathcal{H} \rightrightarrows Y)$ um morfismo de grupoides de Lie. Considere $t : \mathcal{H} \to Y$ o $\mathcal{H}$-fibrado principal como no Exemplo 1.5.9 e seja $\phi_0^*(\mathcal{H}) = X \,{}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{H} \to X$ o $\mathcal{H}$-fibrado principal, pull-back de $t : \mathcal{H} \to Y$ pela aplicação $\phi_0 : X \to Y$. É fácil ver que, $\mathcal{G}$ age à esquerda em $X \,{}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{H}$ pela ação canônica na primeira entrada, *i.e.* $\mathcal{G} \,{}_s\!\times_{\mathrm{pr}_1} (X \,{}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{H}) \to X \,{}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{H}$, *dada por* $(g, (s(g), h)) \mapsto (t(g), \phi(g)h)$. *Além disso,* a_r *é* $\mathcal{G}$*-invariante e as ações de* $\mathcal{G}$ *e de* $\mathcal{H}$ *em* $\phi_0^*(\mathcal{H})$ *comutam. Portanto, para todo morfismo de grupoides* $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *temos um bifibrado denotado* $\langle\phi\rangle : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$*.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \circlearrowright \langle\phi\rangle \circlearrowleft \arrow[dl, "a_l"'] \arrow[dr, "a_r"] & \mathcal{H} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Note que estes fibrados induzidos por morfismos sempre admitem seções globais, i.e. $\nu : X \to X \,{}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{H}$*, dada por* $(x) \mapsto (x, \phi_1(\varepsilon_x))$ *é uma aplicação suave tal que* $a_l \circ \nu = \mathrm{Id}_X$ *(*ε *denota a seção unidade do grupoide* $\mathcal{G}$*).*

Definição 1.5.14. Dois bifibrados $P, P' : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ são ditos isomorfos se existe um difeomorfismo $\alpha : P \to P'$, $(\mathcal{G} - \mathcal{H})$-equivariante, *i.e.* $\alpha(gph) = g\alpha(p)h$ *para todo* $(g, p, h) \in \mathcal{G} \,{}_s\!\times_{a_l} P \,{}_{a_r}\!\times_t \mathcal{H}$*.*

Exemplo 1.5.15. Seja $f : M \to N$ uma aplicação suave entre variedades. Então, temos um morfismo de grupoides $f : (M \rightrightarrows M) \to (N \rightrightarrows N)$. Repetindo a construção do Exemplo 1.5.13 temos um bifibrado $\langle f\rangle : (M \rightrightarrows M) \to (N \rightrightarrows N)$. Note que neste caso o produto fibrado $f^*(N) := M \,{}_f\!\times_{\mathrm{Id}} N = \{(x, f(x) \in M \times N | x \in M)\} = \mathrm{Graf}(f)$ é o gráfico da aplicação f. Portanto, o bifibrado $\langle f\rangle$ é dado por

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \circlearrowright \langle f\rangle \circlearrowleft \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & N \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ M & & N \end{tikzcd}$$

Onde as ações de M e de N são triviais. Note ainda que se $f, g : M \to N$ são duas aplicações suaves e $\langle f\rangle$ e $\langle g\rangle$ são os respectivos bifibrados induzidos, existe $\alpha : \langle f\rangle \to \langle g\rangle$ um isomorfismo de bifibrados se, e somente se, $f = g$.

Exemplo 1.5.16. Sejam M uma variedade, H um grupo de Lie, $M \rightrightarrows M$ o grupoides unital de M e $H \rightrightarrows \{*\}$ grupoide associado a H. Suponha que temos um bifibrado $P : (M \rightrightarrows M) \to (H \rightrightarrows \{*\})$. Como vimos no Exemplo 1.5.10 isto implica que P é um H-fibrado principal à direita, e como o grupoide unital só pode agir de maneira trivial, segue que P é bifibrado se, e somente se, P é H-fibrado principal. Porém, como vimos no Exemplo 1.5.13, se P for induzido por um morfismo $\phi : (M \rightrightarrows M) \to (H \rightrightarrows \{*\})$ (ou isomorfo a um induzido) temos que P admite seção global. Portanto, se P é isomorfo a um bifibrado da forma $\langle \phi \rangle$, então P é um H-fibrado principal trivial.

O leitor pode observar que pela conclusão obtida no Exemplo 1.5.16 acima, em geral existem muito mais bifibrados de $\mathcal{G}$ para $\mathcal{H}$ do que morfismos usuais. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 1.5.17. Um bifibrado $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é chamado de **morfismo generalizado** de $\mathcal{G}$ para $\mathcal{H}$.

Suponha que $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ e $P' : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ são bifibrados. Vamos mostrar que é possível "compor" P' e P, ou seja, vamos construir um bifibrado $P' \circ P : \mathcal{G} \to \mathcal{K}$ e além disso, veremos que essa composição é associativa a menos de isomorfismo de bifibrados. Os detalhes são como a seguir:

Por hipótese temos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & P \arrow[dl, "a_l"'] \arrow[dr, "a_r"] & & \mathcal{H} \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \\ & \mathcal{G}_0 & & \mathcal{H}_0 & \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & P' \arrow[dl, "b_l"'] \arrow[dr, "b_r"] & & \mathcal{K} \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \\ & \mathcal{H}_0 & & \mathcal{K}_0 & \end{tikzcd}$$

O produto fibrado $P \ {}_{a_r}\!\times_{b_l} P'$ é uma variedade, pois b_l é submersão e temos

$$\begin{array}{rcl} (P \ {}_{a_r}\!\times_{b_l} P') \ {}_{a_r \operatorname{pr}_1}\!\times_t \mathcal{H} & \to & P \ {}_{a_r}\!\times_{b_l} P' \\ ((p,q),h) & \to & (ph, h^{-1}p) \end{array}$$

ação de $\mathcal{H}$ à direita em $P \ {}_{a_r}\!\times_{b_l} P'$.

Afirmação 1.5.18. *$\mathcal{G}$ age à esquerda em $P \ {}_{a_r}\!\times_{b_l} P'$ na primeira componente e $\mathcal{K}$ age à direita na segunda componente. Pela definição de bifibrado as ações de $\mathcal{G}$ e de $\mathcal{K}$ comutam com a ação de $\mathcal{H}$ definida acima. Portanto, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{K}$ agem no quociente $(P \ {}_{a_r}\!\times_{b_l} P')/\mathcal{H}$.*

Afirmação 1.5.19. *Como $b_l : P' \to \mathcal{H}_0$ é um $\mathcal{K}$-fibrado principal, temos que a aplicação induzida no quociente por $a_l \operatorname{pr}_1$, $\overline{a_l \operatorname{pr}_1} : (P \ {}_{a_r}\!\times_{b_l} P')/\mathcal{H} \to \mathcal{G}_0$ é um $\mathcal{K}$-fibrado principal.*

Pelas afirmações acima temos um bifibrado $P'P := (P \ {}_{a_r}\!\times_{b_l} P')/\mathcal{H}$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & P'P \arrow[dl, "\overline{a_l \operatorname{pr}_1}"'] \arrow[dr, "\overline{b_r \operatorname{pr}_2}"] & & \mathcal{K} \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \\ & \mathcal{G}_0 & & \mathcal{K}_0 & \end{tikzcd}$$

Observação 1.5.20. A composição de bifibrados como definida acima é associativa a menos de isomorfismo de bifibrados. Suponha que $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $P' : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ e $P'' : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ são bifibrados entre grupoides de Lie. Então temos um isomorfismo de bifibrados $\alpha : P''(P'P) \to (P''P')P$ dado por:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\left[\dfrac{(P \times_{\mathcal{H}_0} P')}{\mathcal{H}}\right] \times_{\mathcal{K}_0} P''}{\mathcal{K}} & \to & \dfrac{P \times_{\mathcal{H}_0} \left[\dfrac{(P' \times_{\mathcal{K}_0} P'')}{\mathcal{K}}\right]}{\mathcal{H}} \\ \left[\left(\left[(p,q)\right], r\right)\right] & \mapsto & \left[(p, [(q,r)])\right] \end{array}$$

Proposição 1.5.21. *Sejam $\mathcal{G}$ grupoide de Lie, $\mathrm{Id} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ o morfismo identidade e $\langle \mathrm{Id} \rangle : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ o bifibrado induzido. Então, $\langle \mathrm{Id} \rangle$ é o morfismo identidade do objeto $\mathcal{G}$, em relação à composição de bifibrados. Em outras palavras: para todo bifibrado $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ temos que $P\langle \mathrm{Id} \rangle$ é isomorfo a P.*

Demonstração: Por definição $P \circ \langle \mathrm{Id} \rangle = (\mathcal{G}_1 \, {}_s\!\times_{a_l} P)/\mathcal{G}$, onde $\mathcal{G}$ age em $\mathcal{G}_1 \, {}_s\!\times_{a_l} P$ por $(h,p)g = (hg, g^{-1}p)$ ao longo de $s \circ \mathrm{pr}_1 = a_l \circ \mathrm{pr}_2$. Assim, a aplicação:

$$\begin{array}{rrcl} \alpha : & (\mathcal{G}_1 \, {}_s\!\times_{a_l} P)/\mathcal{G} & \to & P \\ & (g,p) & \to & gp \end{array}$$

é $(\mathcal{G} - \mathcal{H})$-equivariante com inversa $P \to (\mathcal{G}_1 \, {}_s\!\times_{a_l} P)/\mathcal{G}$, dada por $(p) \mapsto (\varepsilon_{a_l(p)}, p)$. Portanto, α é isomorfismo de bifibrados. ■

Observação 1.5.22. Se $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é bifibrado tal que a ação de $\mathcal{G}$ também é principal, então podemos definir um bifibrado denotado $P^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$. Basta transformar à ação de $\mathcal{G}$ à esquerda em ação à direita e a ação de $\mathcal{H}$ à direita em ação à esquerda. Neste caso P^{-1} satisfaz as seguintes propriedades: PP^{-1} é isomorfo a $\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \rangle$ e $P^{-1}P$ é isomorfo a $\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{G}} \rangle$.

Segue da Observação 1.5.20 e da Proposição 1.5.21 que a tripla (grupoides de Lie, bifibrados, isomorfismo de bifibrados) é uma 2-categoria fraca, denotada por $\mathbf{Bi}$. Isto é, bifibrados podem ser vistos como morfismos entre grupoides em $\mathbf{Bi}$, porém a composição é associativa apenas a menos de isomorfismo logo, o par (grupoides, bifibrados) não é uma categoria, daí a denominação “fraca’. Porém, pelo fato de $\mathbf{Bi}$ ser 2-categoria fraca, segue que o par (grupoides, classes de isomorfismo de bifibrados) forma uma categoria no sentido usual. Tal categoria será denotada por $\mathbf{GRP}$.

Observação 1.5.23. Temos uma associação $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Bi}$ dada por:

- $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ em objetos e
- $(\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}) \mapsto (\langle\phi\rangle : \mathcal{G} \to \mathcal{H})$ em morfismos.

Esta associação induz um funtor $L : \mathbf{Grp} \to \mathbf{GRP}$, dado por $L(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ em objetos e $L(\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}) = ([\langle\phi\rangle] : \mathcal{G} \to \mathcal{H})$ em morfismos, onde $[\langle\phi\rangle]$ denota a classe de isomorfismo de $\langle\phi\rangle$.

Lema 1.5.24. *Um bifibrado $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ representa um isomorfismo na categoria $\mathbf{GRP}$ se, e somente se, a ação de $\mathcal{G}$ à esquerda de P é principal.*

Demonstração: Suponha que $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é tal que a ação de $\mathcal{G}$ à esquerda de P é principal, pela Observação 1.5.22, existe $P^{-1} : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$, tal que $P \circ P^{-1}$ é isomorfo a $\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \rangle$ e $P^{-1} \circ P$ é isomorfo a $\langle \mathrm{Id}_{\mathcal{G}} \rangle$. Portanto, a classe de isomorfismo de P,denotada $[P]$ é um isomorfismo na categoria $\mathbf{GRP}$.

Reciprocamente, suponha que $P' : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ representa um isomorfismo em $\mathbf{GRP}$, então existe $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ bifibrado e isomorfismos de bifibrados $\alpha : P \circ P' \to \langle \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \rangle$ e $\beta : P' \circ P \to \langle \mathrm{Id}_{\mathcal{G}} \rangle$. Como já mencionamos anteriormente podemos definir P'^{-1}, que como variedade é igual a P', porém com ações "opostas", *i.e.* $\mathcal{G}$ age à direita em P' por $pg := g^1 p$ e $\mathcal{H}$ age à esquerda em P' por $hp := ph^{-1}$. Queremos demonstrar que P'^{-1} é um $\mathcal{G}$-fibrado principal à direita sobre $\mathcal{H}_0$. Vamos então demonstrar que existe um difeomorfismo $\nu_1 : P'^{-1} \to P$ que é $(\mathcal{G} - \mathcal{H})$-equivariante. Daí segue que P'^{-1} é $\mathcal{G}$-principal, pois P é $\mathcal{G}$-principal.

Note que existe um difeomorfismo

$$\theta : P' \times_{\mathcal{H}_0} (P' \times_{\mathcal{G}_0} P) \to (P' \times_{\mathcal{G}_0} P); \quad \theta(p, p_1, q) = (p, \delta(p, p_1)q)$$

onde $\delta(p, p_1)$ é o único elemento de $\mathcal{G}$ tal que $p\delta(p, p_1) = p_1$. A inversa de θ é dada por $\theta^{-1}(p, q) = (p, p, q)$. Seja portanto $\nu_1 : P'^{-1} \to P$ a aplicação suave dada por $\nu_1(p) = \mathrm{pr}_2(\theta(p, \alpha^{-1}(\varepsilon_{b_l(p)})))$. Então, ν_1 satisfaz as seguintes propriedades:

$$\nu_1(pg) = g^{-1}\nu_1(p); \quad \nu_1(hp) = \nu_1(p)h^{-1}$$

De maneira análoga à construção acima, existe $\nu_2 : P \to P'$ satisfazendo:

$$\nu_2(qh) = h^{-1}\nu_2(q), \quad \nu_2(gq) = \nu_2(q)g^{-1}$$

Segue que $\nu_1 \circ \nu_2 : P \to P$ e $\nu_2 \circ \nu_1 : P' \to P'$ são isomorfismos de bifibrados, assim são difeomorfismos. Portanto, $\nu_1 : P'^{-1} \to P$ é o difeomorfismo desejado. ■

Lema 1.5.25. *Um morfismo de grupoides $\phi : (\mathcal{G} \rightrightarrows X) \to (\mathcal{H} \rightrightarrows Y)$ é uma equivalência fraca se, e somente se, o bifibrado induzido $\langle \phi \rangle : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é $\mathcal{G}$-principal.*

Demonstração: Relembre que $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é equivalência fraca se satisfaz as seguintes condições:

(i) A aplicação $\gamma : \mathcal{G} \to (X \times X)\ {}_{\phi_0 \times \phi_0}\!\times_{(s,t)} \mathcal{H}$, definida por $\varphi(g) = (s(g), t(g), \phi(g))$ é um difeomorfismo.

(ii) A aplicação $b : X\ {}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{H} \to Y$, $b(x,h) = s(h)$ é uma submersão sobrejetora. Lembre também que $\langle \phi \rangle = X\ {}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{H}$, de modo que a âncora a_r da ação de $\mathcal{H}$ à direita é exatamente b. E a âncora da ação de $\mathcal{G}$ à esquerda é dada por $a_l : X\ {}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{H} \to, a_l(x,h) = x$. Assim, a_r é submersão se, e somente se b é submersão.

Vamos demonstrar agora que a condição de $a_r : X\ {}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{H}$ ser um $\mathcal{G}$-fibrado principal é equivalente à condição (i). Suponha que $a_r : \langle \phi \rangle \to Y$ é $\mathcal{G}$-fibrado principal. Então, a aplicação

$$\psi : \mathcal{G}\,{}_s\!\times_{a_l} \to \langle \phi \rangle\,{}_{a_r}\!\times_{a_r}, \quad \psi(g,x,h) = ((x,h),(t(g),\phi(g)h))$$

é um difeomorfismo. Portanto tem inversa suave. Assim, para cada par $(x,h),(x',h') \in X \times \mathcal{H}$ com $\phi(x) = t(h)$ e $\phi(x') = t(h')$ existe um único $g \in \mathcal{G}$ dependendo suavemente de x, x', h e h', tal que $s(g) = x$, $t(g) = x'$ e $h' = \phi(g)h$. Então, para cada $x, x' \in X$ e $h' \in \mathcal{H}$, com $s(h') = \phi(x)$ e $t(h') = \phi(y)$, existe um único $g \in \mathcal{G}$, dependendo suavemente de x, x', h', tal que $h' = \phi(g)\varepsilon_{\phi(x)}$. Ou seja, a aplicação $\gamma : \mathcal{G} \to (X \times X)\ {}_{\phi_0 \times \phi_0}\!\times_{(s,t)} \mathcal{H}$ definida em (i) tem uma inversa suave. Portanto, se $a_r : X\ {}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{H}$ ser um $\mathcal{G}$-fibrado principal temos que ϕ é equivalência fraca.

Reciprocamente, suponha que γ tem inversa suave. Então, para cada par $(x,h),(x',h') \in X \times \mathcal{H}$ com $\phi(x) = t(h)$ e $\phi(x') = t(h')$ existe um único $g \in \mathcal{G}$, tal que $s(g) = x'$, $t(g) = x$ e $\phi(g) = h(h')^{-1}$. Consequentemente, a aplicação ψ tem inversa suave. Portanto, se ϕ é equivalência fraca, $a_r : \langle \phi \rangle \to Y$ é $\mathcal{G}$-principal.

■

Corolário 1.5.26. *Suponha que $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é uma equivalência fraca. Então, $[\langle \phi \rangle]$ é um isomorfismo na categoria $\mathbf{GRP}$.*

Demonstração: Pelo Lema 1.5.25, se $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é equivalência fraca, então $\langle \phi \rangle$ é $\mathcal{G}$-principal. Pelo Lema 1.5.24 se isto ocorre se, e somente se, $[\langle \phi \rangle]$ é um isomorfismo em $\mathbf{GRP}$. ■

O seguinte teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [Ler10, MM05], implica que a categoria $\mathbf{GRP}$ de grupoides de Lie e morfismos generalizados é uma localização da categoria $\mathbf{Grp}$, com respeito às equivalências fracas.

Teorema 1.5.27. *Suponha que $F : \mathbf{Grp} \to \mathcal{E}$ é um funtor tal que, para toda equivalência fraca $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $F(\phi)$ é um isomorfismo na categoria $\mathcal{E}$. Então, existe $\tilde{F} : \mathbf{GRP} \to \mathcal{E}$ tal que $F = \tilde{F} \circ L$, onde L é o funtor da Observação 1.5.23. Ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E} \\ \mathbf{Grp} \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "L"'] & \mathbf{GRP} \arrow[u, "\tilde{F}"'] \end{tikzcd}$$

Corolário 1.5.28. *Seja $\mathcal{W} \subset \mathbf{Grp}$ a classe de morfismos formada por todas as equivalências fracas. Então, o par $(\mathbf{GRP}, L)$ é a localização da categoria $\mathbf{Grp}$ com respeito a $\mathcal{W}$.*

Demonstração: De fato, pelo Corolário 1.5.26, o funtor $L : \mathbf{Grp} \to \mathbf{GRP}$ leva equivalências fracas em isomorfismos. Logo, o par $(\mathbf{GRP}, L)$ satisfaz a condição (i) da definição de localização. Além disso, pelo teorema Teorema 1.5.27 o par $(\mathbf{GRP}, L)$ satisfaz a condição (ii) da definição de localização. ■

Corolário 1.5.29. *Dois grupoides de Lie $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são Morita equivalentes, se e somente se, existe um bifibrado $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tal que a ação de $\mathcal{G}$ à esquerda de P é principal.*

Definição 1.5.30. Devido ao Corolário 1.5.29, dizemos que um bifibrado $P : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, $\mathcal{G}$-principal, é uma **equivalência de Morita** entre $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$.

1.5.3 Exemplos de grupoides Morita equivalentes

Nesta seção damos vários exemplos de grupoides Morita equivalentes.

Exemplo 1.5.31. Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide transitivo e $x \in X$. Vamos mostrar que existe um bifibrado

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & P \arrow[dl, "t"] \arrow[dr, "s"'] & \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \mathcal{G}_x \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ X & & \{x\} \end{tikzcd}$$

tal que a ação de $\mathcal{G}$ em P é principal.

Defina $P := s^{-1}\{x\}$. Como $\mathcal{G}$ é transitivo, segue que a aplicação $t : s^{-1}\{x\} \to X$ é uma submersão sobrejetora. Além disso, P é um $\mathcal{G}_x$-fibrado principal à direita. De fato, $P \subset \mathcal{G}$, logo $\mathcal{G}_x$ age à direita ao longo de $s : P \to \{x\}$ pela multiplicação do grupoide $\mathcal{G}$. Esta ação é principal, pois a aplicação

$$\begin{array}{rcl} s^{-1}\{x\} \, {}_s\!\times_t \, \mathcal{G}_x & \to & s^{-1}\{x\} \, {}_t\!\times_t \, s^{-1}\{x\} \\ (g, h) & \mapsto & (g, gh) \end{array}$$

é um difeomorfismo. De fato, se $(g,k) \in s^{-1}\{x\}_t\times_t s^{-1}\{x\}$, temos $s(g) = s(k) = \{x\}$ e $t(g) = t(k)$, assim $g^{-1}k \in \mathcal{G}_x$ e o difeomorfismo inverso é dado por $(g,k) \mapsto (g, g^{-1}k)$.

Por outro lado, $\mathcal{G}$ age em P à esquerda ao longo de $t : P \to X$ também pela multiplicação do grupoide $\mathcal{G}$. Queremos mostrar que $s : P \to \{x\}$ é $\mathcal{G}$-fibrado principal. Mas é fácil ver que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G}\ {}_s\times_t\, s^{-1}\{x\} & \to & s^{-1}\{x\}\ {}_s\times_s\, s^{-1}\{x\} = s^{-1}\{x\} \times s^{-1}\{x\} \\ (g,h) & \mapsto & (gh,h) \end{array}$$

é um difeomorfismo com inversa $(k,h) \mapsto (kh^{-1}, h)$.

Assim, $P : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_x$ é uma equivalência de Morita entre $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ e $\mathcal{G}_x \rightrightarrows \{x\}$. Portanto, um grupoide transitivo é Morita equivalente ao grupo de isotropia de qualquer ponto de sua base.

Como consequência do exemplo anterior temos o seguinte.

Exemplo 1.5.32. Seja M uma variedade diferenciável e $\mathrm{Pair}(M) \rightrightarrows M$ o grupoide do par associado a M. Neste caso, temos $(s,t) : M \times M \to M \times M$, dada por $(x,y) \mapsto (s(x,y), t(x,y)) = (x,y)$ é a identidade. Portanto, $\mathrm{Pair}(M)$ é um grupoide transitivo. Seja $x \in M$ um ponto na base, então $\mathrm{Pair}(M)_x = \{(x,x)\}$, ou seja, a isotropia de $\mathrm{Pair}(M)$ num ponto x é o grupoide trivial com um único objeto e uma única flecha $\{(x,x)\} \rightrightarrows \{x\}$ e pelo exemplo acima $\mathrm{Pair}(M)$ é Morita equivalente a este grupoide trivial.

Exemplo 1.5.33. Suponha que $p : N \to M$ é uma submersão e seja $N\ {}_p\times_p N \rightrightarrows N$ o grupoide de submersão associado. Vamos mostrar que existe um bifibrado

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & N \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"] & & N\ {}_p\times_p N \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \\
& M & & N &
\end{tikzcd}$$

De fato, $N\ {}_{\mathrm{Id}}\times_{\mathrm{pr}_2} (N\ {}_p\times_p N) \to N$, dada por $(x,(y,x)) \mapsto y$ é uma ação à direita do grupoide submersão em N ao longo de $\mathrm{Id} : N \to N$. Além disso, $p : N \to M$ é $(N\ {}_p\times_p N)$-fibrado principal com respeito a esta ação, pois $N\ {}_{\mathrm{Id}}\times_{\mathrm{pr}_2} (N\ {}_p\times_p N) \to N\ {}_p\times_p N$, dada por $(x,(y,x)) \mapsto (x, x(y,x)) = (x,y)$ é difeomorfismo com inverso $(x,y) \mapsto (x,(y,x))$.

Por outro lado, $M \rightrightarrows M$ age em N à esquerda ao longo de $p : N \to M$, por $(x,y) \mapsto y$, para todo $(x,y) \in M\ {}_s\times_p N$. É claro que, $\mathrm{Id} : N \to N$ é um M-fibrado principal com respeito a essa ação, pois a aplicação $M\ {}_s\times_p N \to N\ {}_{\mathrm{Id}}\times_{\mathrm{Id}} N$, dada por $(x,y) \mapsto (xy, y)$ é difeomorfismo com inverso $(z,z) \mapsto (p(z), z)$. Portanto, obtivemos um bifibrado $N : (M \rightrightarrows M) \to (N\ {}_p\!\times_p N)$, tal que a ação de M à esquerda também é principal. Logo, $M \rightrightarrows M$ e $N\ {}_p\!\times_p N$ são Morita equivalentes.

Exemplo 1.5.34. Dada uma cobertura $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de uma variedade X por abertos, como no exemplo 1.1.11 temos o grupoide de Čech associado $\bigsqcup_{\alpha,\beta}\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \rightrightarrows X$. Como caso particular do exemplo anterior, o grupoide de Čech é Morita equivalente ao grupoide unital $X \rightrightarrows X$ (independentemente da cobertura escolhida).

Exemplo 1.5.35. Suponha que $\mu : K \times N \to N$ é uma ação livre e própria do grupo de Lie K sobre a variedade N. Então, $M = N/K$ tem única estrutura de variedade diferenciável tal que a projeção $p : N \to N/K$ é submersão. Note que a aplicação $K \ltimes N \to N\ {}_p\!\times_p N$, dada por $(g, y) \mapsto (y, gy)$ é um isomorfismo de grupoides de Lie. E pelo exemplo anterior, $N\ {}_p\!\times_p N$ é Morita equivalente a $M \rightrightarrows M$. Portanto, $K \ltimes N$ é Morita equivalente ao grupoide unital $N/K \rightrightarrows N/K$.

Capítulo 2

Orbifolds

Neste capítulo introduzimos o conceito de orbifold diferenciável efetivo segundo as definições dadas em [ALR07, MM03]. Veremos que, grosso modo, orbifolds são espaços topológicos localmente homeomorfos a abertos de um espaço euclidiano módulo a ação de um grupo finito de difeomorfismos. Portanto, orbifolds são uma generalização da ideia de variedade diferenciável. Nas primeiras seções serão apresentadas as definições básicas, uma noção de morfismos entre orbifolds e exemplos fundamentais. Nas últimas seções, veremos que todo orbifold efetivo –a menos de isomorfismo– é um quociente de uma variedade por uma ação quase-livre e efetiva de um grupo de Lie compacto. Além disso, será apresentada a correspondência entre orbifolds e grupoides de Lie. Ou seja, exibiremos uma correspondência biunívoca entre classes de isomorfismos de orbifolds e classes de equivalência de Morita de grupoides de Lie próprios, étale e efetivos, demonstrada originalmente em [MP97]. As principais referências utilizadas neste capítulo são: [ALR07, Thu80, HB99, MM03, MP97, Moe02]

2.1 Orbifolds: definição e exemplos

Nesta seção apresentamos a definição formal da noção de orbifold efetivo e apresentamos os exemplos básicos de tais espaços.

Por completude vamos começar definindo o conceito de ação efetiva

Definição 2.1.1. Sejam K um grupo e Z um conjunto. Suponha que $\mu : K \times Z \to Z$ é uma ação de K em Z. Então, para cada $k \in K$ temos uma bijeção $\mu_k : Z \to Z$, dada por $\mu_k(z) = \mu(k, z) = kz$. Dizemos que a ação é **efetiva** se a aplicação $\psi : K \to \mathrm{Bij}(Z)$, dada por $\psi(k) = \mu_k$ é injetora, onde $\mathrm{Bij}(Z)$ denota o conjunto de todas as bijeções de Z em Z. De forma equivalente, a ação é efetiva se dado $k \in K$ tal que $\mu_k = \mathrm{Id}_Z$, então $k = 1_K$ é o elemento neutro do grupo K.

Definição 2.1.2. Sejam Q um espaço topológico e $n \geq 0$ um inteiro. Uma **carta de orbifold** em Q é uma tripla $(\tilde{U}, G, \varphi)$, onde $\tilde{U}$ é um aberto conexo de $\mathbb{R}^n$, G é um grupo finito que age efetivamente em $\tilde{U}$ por difeomorfismos e $\varphi : \tilde{U} \to Q$ é uma aplicação contínua, G-invariante, tal que $\varphi(\tilde{U})$ é aberto em Q e a aplicação induzida (também denotada φ) $\varphi : \tilde{U}/G \to \varphi(\tilde{U})$ é um homeomorfismo.

Observação 2.1.3. Se $(\tilde{U}, G, \varphi)$ é uma carta de orbifold no espaço topológico Q, sempre denotaremos por U o aberto $\varphi(\tilde{U})$ contido em Q.

Dadas cartas de orbifold $(\tilde{U}, G, \varphi)$ e $(\tilde{V}, H, \psi)$, dizemos que $\lambda : \tilde{U} \to \tilde{V}$ é um **mergulho entre cartas** se λ é um mergulho de classe C^∞ e $\psi \circ \lambda = \varphi$.

Definição 2.1.4. Seja Q um espaço topológico. Um **atlas de orbifold** em Q é uma família de cartas de orbifold em Q, $\{\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ que cobre Q e tal que duas cartas $(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)$ e $(\tilde{U}_\beta, G_\beta, \varphi_\beta)$ desta família são compatíveis no seguinte sentido:

Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ onde $U_\theta = \varphi_\theta(\tilde{U}_\theta)$ para todo $\theta \in \Gamma$, então para cada $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ existe um aberto $W_p \subset U_\alpha \cap U_\beta$ e uma carta de orbifold $(\tilde{W}_p, G_p, \psi_p)$ com mergulhos entre cartas $\lambda_\alpha : \tilde{W}_p \to \tilde{U}_\alpha$ e $\lambda_\beta : \tilde{W}_p \to \tilde{U}_\beta$.

Dizemos que um atlas $\{\tilde{U}'_\alpha, G'_\alpha, \varphi'_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma'}$ é um refinamento de $\{\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ se para toda carta $(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)$ existe uma carta $(\tilde{U}'_\beta, G'_\beta, \varphi'_\beta)$ e um mergulho $\lambda' : \tilde{U}'_\beta \to \tilde{U}_\alpha$. Dizemos também que dois atlases são equivalentes se eles possuem um refinamento comum.

Definição 2.1.5. Um **orbifold efetivo** de dimensão n é um espaço de Hausdorff e segundo contável Q, munido de uma classe de equivalência de um atlas de orbifold n-dimensional em Q.

Os exemplos mais simples de orbifolds que podemos encontrar são os seguintes:

Exemplo 2.1.6. Suponha X uma variedade diferenciável, com um atlas $(\tilde{U}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$, onde $\tilde{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ e $\varphi_\alpha : \tilde{U}_\alpha \to X$ é um homeomorfismo sobre um aberto de X. Então, é fácil ver que $(\tilde{U}_\alpha, \{1\}, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ é um atlas de orbifold em X. Assim, toda variedade pode ser vista como orbifold.

Exemplo 2.1.7. Suponha que $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, munido de uma ação efetiva de um grupo finito G. Então, claramente o espaço quociente $\tilde{U}/G$ tem estrutura de orbifold, pois pode ser coberto por uma única carta de orbifold $(\tilde{U}, G, \pi : \tilde{U} \to \tilde{U}/G)$. Note que todo orbifold é localmente como um desses.

Definição 2.1.8. Seja X uma variedade diferenciável munida de uma ação de um grupo G. Dizemos que um aberto $S \subset X$ é G-**estável** se satisfaz a seguinte propriedade: para todo $g \in G$, tem-se $g(S) = S$ ou $g(S) \cap S = \emptyset$. Se S é G-estável, vemos que $G_S := \{g \in G | g(S) = S\}$ é um subgrupo de G.

Uma classe de exemplos um pouco menos trivial e que contém os dois exemplos anteriores é dada pela seguinte proposição:

Proposição 2.1.9. *Seja X uma variedade diferenciável munida de uma ação efetiva de um grupo finito G. Então, X/G tem estrutura de orbifold.*

Demonstração: Como G é um grupo finito, podemos cobrir a variedade X por abertos G-estáveis S_α, de modo que cada S_α esteja contido em alguma carta $(\tilde{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ de X. Desta forma, temos uma estrutura de orbifold em X/G, com cartas dadas por $(S_\alpha, \varphi_\alpha^{-1} G_{S_\alpha} \varphi_\alpha, \pi|_{S_\alpha} \circ \varphi_\alpha)$. ■

Observação 2.1.10. Um orbifold da forma X/G como na Proposição 2.1.9 é chamado de **orbifold quociente efetivo global**.

Vejamos dois exemplos de quocientes efetivos globais.

Exemplo 2.1.11. Sejam $X = B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ e C_n o grupo cíclico de ordem n, formado pelas raíses n-ésimas da unidade. Então, C_n age em X por rotações da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} C_n \times X & \to & X \\ (g,z) & \mapsto & m(g,z) \end{array}$$

Onde m é a multiplicação de números complexos. Esta ação é efetiva, logo o quociente X/C_n tem estrutura de orbifold efetivo (coberto por uma única carta de orbifold). Note que topologicamente o quociente é novamente o disco aberto X, porém a origem é o único ponto com isotropia não trivial. Assim, X/C_n é pensado como um cone, onde o vértice corresponde à classe de 0 em X/C_n.

Exemplo 2.1.12. Outro exemplo de quociente efetivo global é o seguinte. Considere $X = \mathbb{R}^2$ e $G < \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^2)$ o subgrupo gerado pela reflexão

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \ \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x,-y) \end{array}$$

Então, X/G é um orbifold. Aqui o espaço topológico subjacente é $\overline{\mathbb{H}} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0\}$. Note ainda que podemos generalizar esse exemplo para mostrar que toda variedade com bordo N admite uma estrutura de orbifold. Basta ver que N é o quociente de seu dobro por uma ação via reflexão através do bordo ∂N.

Exemplo 2.1.13. Suponha que X é uma variedade. Então o grupo simétrico age em X^n via permutação de coordenadas. Assim, X^n/S_n é um orbifold quociente efetivo global.

A seguir vamos fazer algumas definições, enunciar e demonstrar alguns resultados que ajudarão a deixar mais claro o que de fato é um orbifold e quão longe um orbifold está de ser uma variedade diferenciável. O seguinte lema, sobre grupos finitos de difeomorfismos de variedades, é um resultado muito importante para o estudo de questões locais em orbifolds. Sua demonstração pode ser encontrada em [MM03].

Lema 2.1.14. *Sejam X uma variedade diferenciável, $G \leq \mathrm{Diff}(X)$ um subgrupo finito de difeomorfismos de X, e $\pi : X \to X/G$ a aplicação quociente canônica. Se $U \subset X$ é um aberto conexo e $f : U \to X$ é aplicação diferenciável tal que $\pi \circ f = \pi$, então existe um único $g \in G$, tal que $f = g|_U$.*

Proposição 2.1.15. *Valem as seguintes afirmações:*

(i) Dados dois mergulhos $\lambda, \mu : \tilde{U} \to \tilde{V}$ entre duas cartas de orbifold $(\tilde{U}, G, \varphi)$, $(\tilde{V}, H, \psi)$, existe um único $h \in H$ tal que $\mu = h \circ \lambda$.

(ii) Como consequência do item acima cada mergulho $\lambda : \tilde{U} \to \tilde{V}$ induz um homomorfismo de grupos injetor $\lambda' : G \to H$.

(iii) Se $h \in H$ é tal que $\lambda(\tilde{U}) \cap (h \circ \lambda)(\tilde{U}) \neq \emptyset$, então $h \in \mathrm{Im}(\lambda')$ e portanto $\lambda(\tilde{U}) = h \circ \lambda(\tilde{U})$.

(iv) Se as ações dos grupos finitos G_α nos abertos $\tilde{U_\alpha}$ são livres, então X é localmente euclidiano e portanto uma variedade diferenciável.

Demonstração:

(i) Como λ é um difeomorfismo sobre sua imagem, temos $\lambda^{-1} : \lambda(\tilde{U}) \subset V \to \tilde{U}$ diferenciável. Assim, $\mu \circ \lambda^{-1} : \lambda(\tilde{U}) \subset V \to V$ é uma aplicação diferenciável. Por serem mergulhos entre cartas, sabemos que $\psi \circ \lambda = \varphi$ e $\psi \circ \mu = \varphi$. Logo, $\psi \circ \mu \circ \lambda^{-1} = \varphi \circ \lambda^{-1} = \psi$. Portanto, pelo lema $2.1.14$, existe único $h \in H$ tal que $\mu \circ \lambda^{-1} = h$, ou equivalentemente $\mu = h \circ \lambda$.

(ii) De fato, cada $g \in G$ é um difeomorfismo $g : \tilde{U} \to \tilde{U}$, logo $\lambda \circ g : \tilde{U} \to \tilde{V}$ é um mergulho. Então, pelo item (i) existe único $h \in H$ tal que $\lambda \circ g = h \circ \lambda$. Defina $\lambda'(g) = h$. Assim, λ' é homomorfismo, pois $\lambda \circ g_1 = h_1 \circ \lambda$ e $\lambda \circ g_2 = h_2 \circ \lambda$ implicam $\lambda \circ g_1 \circ g_2 = h_1 \circ \lambda \circ g_2 = h_1 \circ h_2 \circ \lambda$, o que implica $\lambda'(g_1 g_2) = \lambda'(g_1)\lambda'(g_2)$. Por fim, λ' é injetor, pois $\lambda'(g) = e$ implica $\lambda(gx) = \lambda(x)$ para todo $x \in \tilde{U}$, como λ é injetora, segue $gx = x$ para todo $x \in \tilde{U}$, como a ação é efetiva temos que $g = e$.

(iii) Seja $Z = \lambda(\tilde{U}) \cap (h \circ \lambda)(\tilde{U})$. Então, temos uma aplicação diferenciável $\lambda^{-1} \circ h \circ \lambda : \lambda^{-1}(Z) \subset \tilde{U} \to \tilde{U}$. Note que, $\varphi \circ (\lambda^{-1} \circ h \circ \lambda) = \psi \circ h \circ \lambda = \psi \circ \lambda = \varphi$. Logo, pelo Lema 2.1.14 existe um único $g \in G$, tal que $\lambda^{-1} \circ h \circ \lambda = g$, ou equivalentemente, $\lambda \circ g = h \circ \lambda$. Portanto, $h = \lambda'(g)$.

■

Sejam Q um orbifold e $x \in Q$. Considere $(\tilde{U}, G, \varphi)$ uma carta em torno de x com $\varphi(\tilde{x}) = x$ e seja $G_{\tilde{x}}$ o grupo de isotropia de $\tilde{x}$. Vamos provar que o grupo $G_{\tilde{x}}$ independe da escolha de uma carta a menos de isomorfismo.

Seja $(\tilde{V}, H, \psi)$ outra carta em torno de x com $\psi(\tilde{y}) = x$. Pela definição de orbifold existe uma carta $(\tilde{W}_x, K, \theta)$ em torno de x, com $\theta(\tilde{w}) = x$, e mergulhos entre cartas $\lambda_1 : \tilde{W}_x \to \tilde{U}$, $\lambda_2 : \tilde{W}_x \to \tilde{V}$ com $\lambda_1(\tilde{w}) = \tilde{x}$ e $\lambda_2(\tilde{w}) = \tilde{y}$. Pela Proposição 2.1.15 existem homomorfismos injetores $\lambda_1' : K \to G$, $\lambda_2' : K \to H$, satisfazendo $\lambda_1(k_1 z) = \lambda_1'(k_1)\lambda_1(z)$ e $\lambda_2(k_2 z) = \lambda_2'(k_2)\lambda_2(z)$, $\forall k_1, k_2 \in K$ e para todo $z \in \tilde{W}_x$. Assim, se $k \in K_{\tilde{w}}$, então $\lambda_1'(k) \in G_{\tilde{x}}$ e $\lambda_2'(k) \in H_{\tilde{y}}$. Logo, existem as restrições (que permanecem injetoras) $\lambda_1' : K_{\tilde{w}} \to G_{\tilde{x}}$ e $\lambda_2' : K_{\tilde{w}} \to H_{\tilde{y}}$.

Além disso, dado $g \in G_{\tilde{x}}$, temos $g\tilde{x} = \tilde{x}$ e por hipótese $\lambda_1(\tilde{w}) = \tilde{x}$. Daí segue que $g \circ \lambda_1(\tilde{W}_x) \cap \lambda(\tilde{W}_x) \neq \emptyset$. E pelo item (iii) da proposição Proposição 2.1.15 temos que $g \in \mathrm{Im}(\lambda_1')$. Logo, λ_1' é isomorfismo entre $K_{\tilde{w}}$ e $G_{\tilde{x}}$. Analogamente λ_2' é isomorfismo entre $K_{\tilde{w}}$ e $H_{\tilde{y}}$. Portanto, $G_{\tilde{x}}$ é isomorfo a $H_{\tilde{y}}$. Note que se tomarmos outro ponto x', tal que $\varphi(x') = x$, temos que $G_{\tilde{x}}$ e $G_{x'}$ são subgrupos conjugados e portanto a escolha de $\tilde{x}$ em $\varphi^{-1}(x)$ não altera a classe de isomorfismo de $G_{\tilde{x}}$. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 2.1.16. Sejam Q um orbifold, $x \in Q$ e $(\tilde{U}, G, \varphi)$ uma carta de Q ao redor do ponto x. Tome $\tilde{x} \in \tilde{U}$ tal que $\varphi(\tilde{x}) = x$. Definimos a **isotropia** do ponto x como $G_{\tilde{x}}$, o grupo de isotropia do ponto $\tilde{x}$. E definimos o **grau de singularidade** do ponto x como $|G_{\tilde{x}}|$, a ordem do grupo $G_{\tilde{x}}$.

Note que pelas observações do parágrafo acima, o grupo de isotropia em x está bem definido a menos de isomorfismo e por este motivo o grau de singularidade de x está bem definido (não depende da escolha da carta $(\tilde{U}, G, \varphi)$ e nem do ponto escolhido em $\varphi^{-1}(x)$)

Definição 2.1.17. Seja Q um orbifold. Dizemos que $x \in Q$ é um ponto **regular** se o seu grau de singularidade é 1, ou seja, se o grupo de isotropia em x é trivial. Caso contrário o ponto x é dito **singular**. Denotaremos por $\Sigma(Q) := \{x \in Q | G_{\tilde{x}} \neq \{1\}\}$ o conjunto dos pontos singulares do orbifold Q.

Observação 2.1.18. O conjunto de singularidades $\Sigma(Q)$ é um conjunto fechado em Q e possui interior vazio. E o complementar deste conjunto, $Q \setminus \Sigma(Q)$ tem estrutura de variedade diferenciável.

Vejamos agora um exemplo de quociente efetivo global por uma ação num toro.

Exemplo 2.1.19. Seja $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$. O grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ age em $\mathbb{R}^n$ levando $\mathbb{Z}^n$ em $\mathbb{Z}^n$, portanto isto induz uma ação de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ em $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$. Assim, para encontrarmos exemplos de orbifolds como quocientes, basta encontrar subgrupos finitos de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Por exemplo, tomando a involução $-\mathrm{Id} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, temos um orbifold quociente $\mathbb{T}^4/\{\sigma, -\sigma\}$, onde

$$\sigma : \mathbb{T}^4 \to \mathbb{T}^4; (e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}, e^{it_4}) \mapsto (e^{-it_1}, e^{-it_2}, e^{-it_3}, e^{-it_4})$$

Este orbifold é chamado de superfície de Kummer e possui 16 pontos singulares isolados.

Definição 2.1.20. Uma ação de um grupo de Lie K em uma variedade X é dita **quase-livre** se, para todo $x \in X$ o grupo de isotropia do ponto x, $K_x := \{g \in K | gx = x\}$ é finito.

Definição 2.1.21. Suponha que K é um grupo de Lie que age em uma variedade X via $\mu : K \times X \to X$. Uma subvariedade mergulhada $S_x \subset X$ é chamada de slice no ponto x se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) O grupo de isotropia do ponto x preserva S_x, *i.e.* para todo $g \in K_x$ e para todo $s \in S_x$ vale $gs \in S_x$.

(ii) Se $g \in K$ é tal que para algum $s \in S_x$, vale $gs \in S_x$, então $g \in K_x$ é um elemento da isotropia.

(iii) O conjunto $KS_x := \{gs \in X | g \in K_x \text{ e } s \in S_x\}$ é um aberto em X.

(iv) A restrição da ação μ, $\mu : K \times S_x \to KS_x \subset X$ induz um difeomorfismo $\overline{\mu} : (K \times S_x)/K_x \to KS_x$. Aqui $(K \times S_x)/K_x$ é o quociente pela ação $K_x \times (K \times S_x) \to (K \times S_x)$, dada por $h(g, s) = (gh^{-1}, hs)$.

A seguir enunciamos o teorema devido a Palais [Pal61] sobre a existência de slices para ações próprias. Uma demonstração acessível pode ser encontrada em [AB09].

Teorema 2.1.22 (Existência de slices)**.** *Suponha que $\mu : K \times X \to X$ é uma ação própria de um grupo de Lie K sobre uma variedade X. Então, para todo $x \in X$, existe um slice S_x no ponto x.*

Agora veremos um teorema que nos dá condições suficientes para que o espaço quociente de uma variedade diferenciável X pela ação de um grupo de Lie K seja um orbifold. O teorema a seguir é consequência do teorema de existência de slices e fornece outra classe de exemplos de orbifolds.

Teorema 2.1.23. *Seja K um grupo de Lie que age suavemente numa variedade X, tal que a ação é efetiva, própria e quase-livre. Então, a ação induz uma estrutura de orbifold efetivo no quociente X/K.*

Definição 2.1.24. Um orbifold X/K obtido como no teorema acima é chamado de **orbifold quociente efetivo**.

Um fato interessante é que, todo orbifold efetivo Q é isomorfo a um orbifold quociente efetivo (ver 2.2.2 para a definição de isomorfismo entre orbifolds). Veremos uma demonstração deste fato mais adiante.(vide Seção 2.3).

Exemplo 2.1.25. Sejam, p, q inteiros primos entre si. Então, temos uma ação efetiva e quase-livre de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, dada por:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3; (w, (z_1, z_2)) \mapsto (w^p z_1, w^q z_2)$$

A ação é própria pos $\mathbb{S}^1$ é compacto. Logo, pelo teorema 2.1.23, segue que $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ tem estrutura de orbifold.

Embora todo orbifold seja um quociente efetivo, pode-se mostrar que existem orbifolds que **não são** quocientes efetivos **globais**. Por exemplo, demonstraremos no capítulo 3 que qualquer orbifold da forma $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ como no Exemplo 2.1.25 não é um quociente global, utilizando para isto a noção de grupo fundamental de um orbifold.(Ver Exemplo 3.1.21 e Exemplo 3.3.13).

2.2 Difeomorfismos entre orbifolds

Nesta seção introduzimos a noção de aplicação diferenciável entre orbifolds seguindo [ALR07, MM03]. Veremos que é possível definir uma categoria **Orb**, formada por orbifolds e aplicações diferenciáveis entre eles.

Definição 2.2.1. Sejam Q_1 e Q_2 orbifolds. Uma aplicação $f : Q_1 \to Q_2$ é dita **diferenciável** (de classe C^∞), se para cada $x \in X$ existem cartas $(\tilde{U}, G, \varphi)$, $(\tilde{V}, H, \psi)$ em torno de x e $f(x)$ respectivamente, tais que $f(U) \subset V$ (onde $U = \varphi(\tilde{U})$ e $V = \psi(\tilde{V})$) e f pode ser levantada a uma aplicação suave $\tilde{f} : \tilde{U} \to \tilde{V}$. Ou seja, $\psi \circ \tilde{f} = f \circ \varphi$.

Definição 2.2.2. Uma aplicação $f : Q_1 \to Q_2$ é chamada de **difeomorfismo** de orbifolds se f é um homeomorfismo diferenciável com inversa f^{-1} diferenciável.

É fácil ver que a aplicação identidade $\mathrm{Id}_Q : Q \to Q$ é diferenciável para todo orbifold Q. Além disso, pode-se provar que a composição de aplicações diferenciáveis é uma aplicação diferenciável. Assim, temos uma categoria **Orb**, formada pelos orbifolds e aplicações diferenciáveis entre eles. Os isomorfismos desta categoria são os difeomorfismos da Definição 2.2.2.

Lema 2.2.3. *Sejam* $f : Q_1 \to Q_2$ *um difeomorfismo de orbifolds,* $(\tilde{U}, G, \varphi)$, $(\tilde{V}, H, \psi)$ *cartas em torno de* x *e* $f(x)$ *respectivamente e* $\tilde{f} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ *é um levantamento como na Definição 2.2.1. Então,* $\tilde{f}$ *é um um difeomorfismo sobre a sua imagem* $\tilde{f}(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$*, a qual é um aberto em* $\tilde{V}$*.*

Demonstração: Por hipótese temos $\psi\tilde{f} = f\phi$. Como f^{-1} também é aplicação diferenciável entre orbifolds, podemos supor que existe um levantamento $\widetilde{f^{-1}} : \tilde{W} \subset \tilde{V} \to \tilde{U}$ tal que $\phi\widetilde{f^{-1}} = f^{-1}\psi$. Logo, a aplicação suave $\tilde{f}\widetilde{f^{-1}} : \tilde{W} \subset \tilde{V} \to \tilde{V}$ satisfaz

$$\psi(\tilde{f}\widetilde{f^{-1}}) = (f\phi)\widetilde{f^{-1}} = f(f^{-1}\psi) = \psi$$

Assim, pelo Lema 2.1.14, existe único $h \in H$ tal que $\tilde{f}\widetilde{f^{-1}} = h$. Analogamente, prova-se que existe único $g \in G$ tal que $\widetilde{f^{-1}}\tilde{f} = g$. Em particular, $\tilde{f}\widetilde{f^{-1}}$ e $\widetilde{f^{-1}}\tilde{f}$ são difeomorfismos, donde segue que $\tilde{f}$ é difeomorfismo sobre sua imagem. ■

Lema 2.2.4. *Sejam* $f : Q_1 \to Q_2$ *um difeomorfismo de orbifolds,* $(\tilde{U}, G, \varphi)$, $(\tilde{V}, H, \psi)$ *cartas em torno de* x *e* $f(x)$ *respectivamente e* $\tilde{f} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ *é um levantamento como na definição 2.2.1. Então,* $\tilde{f}$ *induz um isomorfismo de grupos* $f' : G_{\tilde{x}} \to H_{f(\tilde{x})}$*.*

Demonstração: Como vimos no Lema 2.2.3, $\tilde{f} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem $\tilde{W} \subset \tilde{V}$, com $\psi\tilde{f} = f\phi$. Logo existe uma inversa $\tilde{f}^{-1} : \tilde{W} \to \tilde{U}$. Dado $g \in G$, temos a aplicação suave $\tilde{f}g\tilde{f}^{-1} : \tilde{W} \subset \tilde{V} \to \tilde{V}$ satisfazendo

$$\psi(\tilde{f}g\tilde{f}^{-1}) = (\psi\tilde{f})g\tilde{f}^{-1} = f\phi g\tilde{f}^{-1} = f\phi\tilde{f}^{-1} = \psi\tilde{f}\tilde{f}^{-1} = \psi$$

Assim, pelo Lema 2.1.14, existe único $h \in H$ tal que $\tilde{f}g\tilde{f}^{-1} = h$. Ou ainda, $\tilde{f}g = h\tilde{f}$. Definimos assim um homomorfismo de grupos $f' : G \to H$, dado por $f'(g) = h$, onde h é o único elemento de H tal que $\tilde{f}g = h\tilde{f}$. Claramente, f' leva o grupo de isotropia do ponto $\tilde{x} \in \tilde{U}$ isomorficamente sobre o grupo de isotropia de $\tilde{f}(\tilde{x}) \in \tilde{V}$. ■

Corolário 2.2.5. *Os orbifolds* $B(0,1)/C_m$ *e* $B(0,1)/C_n$ *do exemplo 2.1.11 são isomorfos se, e somente se,* $m = n$*.*

Demonstração: É evidente que se $m = n$, a aplicação $\mathrm{Id} : B(0,1)/C_n \to B(0,1)/C_n$ é isomorfismo de orbifolds. Reciprocamente, suponha que

$$f : B(0,1)/C_n \to B(0,1)/C_m$$

é difeomorfismo de orbifolds. Como $[0]$ é o único ponto singular, tanto de $B(0,1)/C_n$ quanto de $B(0,1)/C_m$, devemos ter $f([0]) = [0]$. Pelo lema acima, existe um isomorfismo entre $(C_n)_0 = C_n$ e $(C_m)_0 = C_m$. Portanto, $m = n$. ■

Observação 2.2.6. Note que, como espaços topológicos $B(0,1)/C_n$ e $B(0,1)/C_m$ são ambos homeomorfos a $B(0,1)$ e portanto simplesmente conexos. Assim, o grupo fundamental usual não distingue $B(0,1)/C_n$ e $B(0,1)/C_m$ do ponto de vista de orbifolds. Porém, a partir do capítulo 3 desta dissertação, iniciaremos o estudo do grupo fundamental de um orbifold e veremos que esta nova noção de grupo fundamental é um invariante mais fino do que π_1, da classe de isomorfismo de um orbifold dado. Além disso, veremos que o grupo fundamental de $B(0,1)/C_n$ é isomorfo a C_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, obtendo assim uma nova demonstração do corolário acima (vide Exemplo 3.3.11).

2.3 Orbifolds efetivos como quocientes por ações de grupos de Lie

Nesta seção vamos indroduzir o conceito de fibrado tangente de um orbifold e a partir disso vamos também definir o fibrado de referenciais ortogonais $OF(Q)$ associado a um orbifold efetivo Q. Veremos ainda que $OF(Q)$ é uma variedade diferenciável que admite uma ação efetiva e quase-livre do grupo compacto $O(n)$ onde $n = \dim Q$, tal que $OF(Q)/O(n)$ é um orbifold isomorfo a Q. Como consequência, a menos de difeomorfismo todo orbifold é da forma X/K como no Teorema 2.1.23.

Suponha que Q é um orbifold com atlas $(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ e considere cartas de Q $(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha), (\tilde{U}_\beta, G_\beta, \varphi_\beta)$ que se intersectam. Então, pela definição de compatibilidade, existem $(\tilde{W}, K, \theta)$ uma outra carta, $\lambda_\alpha : \tilde{W} \to \tilde{U}_\alpha$ e $\lambda_\beta : \tilde{W} \to \tilde{U}_\beta$ mergulhos entre cartas. Assim, a aplicação $\lambda_\beta \circ \lambda_\alpha^{-1} : \lambda_\alpha(\tilde{W}) \to \lambda_\beta(\tilde{W})$ é um difeomorfismo de um aberto de $\tilde{U}_\alpha$ para um aberto de $\tilde{U}_\beta$. Podemos então definir uma relação de equivalência $\varphi_\alpha(\tilde{u}) \sim \varphi_\beta(\tilde{v})$ se, e somente se, $\lambda_\beta \circ \lambda_\alpha^{-1}(\tilde{u}) = \tilde{v}$. A aplicação $\varphi : \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda}(\tilde{U}_\alpha/G_\alpha) \to Q$ induz um homeomorfismo $\Phi : \dfrac{\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda}(\tilde{U}_\alpha/G_\alpha)}{\sim} \to Q$. Isto é, as aplicações $\lambda_\beta \circ \lambda_\alpha^{-1}$ podem ser pensadas como funções de transição entre as cartas do orbifold e, identificando pontos em cartas distintas utilizando essas funções de transição, podemos reobter o espaço Q.

Utilizaremos uma abordagem semelhante agora para construir o fibrado tangente de um orbifold. Primeiro construímos o fibrado tangente carta a carta e depois, utilizando as transições colamos os fibrados sobre cartas que se intersectam.

Seja $(\tilde{U}, G, \varphi)$ uma carta de Q. Como G age em $\tilde{U}$ é fácil ver que G age em $T\tilde{U}$ da seguinte forma: dado $(\tilde{u}, v) \in T_{\tilde{u}}\tilde{U}$, definimos $g(\tilde{u}, v) = (g\tilde{u}, Dg(\tilde{u})v) \in T_{g\tilde{u}}\tilde{U}$.

Se $\pi : T\tilde{U} \to \tilde{U}$ é a projeção do fibrado tangente, então π é G-equivariante. Logo, temos uma aplicação induzida $\overline{\pi} : T\tilde{U}/G \to \tilde{U}/G$ e, compondo com o mapa φ, temos uma projeção $p := \varphi \circ \overline{\pi} : T\tilde{U}/G \to U = \varphi(\tilde{U})$.

Afirmação 2.3.1. *Seja $\tilde{x} \in \tilde{U}$ tal que $\varphi(\tilde{x}) = x \in U$. A fibra $p^{-1}(x)$ da projeção p sobre o ponto x está em bijeção com $T_{\tilde{x}}\tilde{U}/G_x$. Onde G_x é a isotropia no ponto x que age em $T_{\tilde{x}}\tilde{U}$ via diferencial.*

Demonstração: De fato, $p^{-1}(x) = \{G(\tilde{x}, v) | v \in T_{\tilde{x}}\tilde{U}\}$ e assim podemos definir

$$\begin{array}{rcl} f : p^{-1}(x) & \to & T_{\tilde{x}}\tilde{U}/G_{\tilde{x}} \\ G(\tilde{x}, v) & \mapsto & G_{\tilde{x}}(v) \end{array}$$

Note que $G(\tilde{x}, v) = G(\tilde{x}, w) \Leftrightarrow \exists g \in G$ tal que $g(\tilde{x}, v) = (\tilde{x}, w) \Leftrightarrow g\tilde{x} = \tilde{x}$ e $Dg(\tilde{x})v = w \Leftrightarrow g \in G_{\tilde{x}}$ e $Dg(\tilde{x})v = w \Leftrightarrow G_{\tilde{x}}v = G_{\tilde{x}}w$. Portanto, f está bem definida e é injetora, claramente f também é sobrejetora.

■

Portanto, construímos um fibrado sobre U, $p : T\tilde{U}/G \to U \subset Q$, cuja fibra típica não é um espaço vetorial mas sim da forma $\mathbb{R}^n/K$ onde K é um subgrupo finito de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Considere agora um atlas $(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ para Q. Pela construção anterior temos projeções $p_\alpha : T\tilde{U}_\alpha/G_\alpha \to U_\alpha \subset Q$. Se $(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha), (\tilde{U}_\beta, G_\beta, \varphi_\beta)$ se intersectam em Q e $\lambda_\beta \circ \lambda_\alpha^{-1} : \lambda_\alpha(\tilde{W}) \to \lambda_\beta(\tilde{W})$ é uma função de transição, derivando obtemos $D(\lambda_\beta \circ \lambda_\alpha^{-1}) : T\lambda_\alpha(\tilde{W}) \to T\lambda_\beta(\tilde{W})$ como função de transição. Portanto, podemos definir uma relação de equivalência: $G_\alpha(\tilde{x}, v) \in T\tilde{U}_\alpha/G_\alpha \sim G_\beta(\tilde{y}, w) \in T\tilde{U}_\beta/G_\beta$ se, e somente se,$(\lambda_\beta \circ \lambda_\alpha^{-1})(\tilde{x}) = \tilde{y}$ e $D(\lambda_\beta \circ \lambda_\alpha^{-1})(\tilde{x})v = w$.

Definição 2.3.2. Definimos o **fibrado tangente** de Q como $TQ := \dfrac{\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} T\tilde{U}_\alpha/G_\alpha}{\sim}$, onde $\sim$ denota a relação de equivalência obtida acima. O conjunto TQ será munido da menor topologia tal que as aplicações naturais $T\tilde{U}_\alpha/G_\alpha \hookrightarrow TQ$ sejam homeomorfismos. Além disso, temos uma projeção, $p : TQ \to Q$, induzida pelas projeções $p_\alpha : T\tilde{U}_\alpha/G_\alpha \to U_\alpha \subset Q$.

Proposição 2.3.3. *Se Q é um orbifold n-dimensional com cartas $(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)$, então TQ tem estrutura de orbifold $2n$-dimensional, com cartas de orbifold $(T\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \psi_\alpha : T\tilde{U}_\alpha \to T\tilde{U}_\alpha/G_\alpha \hookrightarrow TQ)$.*

Agora construíremos o fibrado de referenciais ortogonais associado a um orbifold efetivo Q. Para tal utilizaremos uma abordagem semelhante à da construção do fibrado tangente. Primeiro construímos carta a carta e depois colamos utilizando as funções de transição.

Considere $(\tilde{U}, G, \varphi)$ uma carta de Q (orbifold n-dimensional) e considere $\langle , \rangle$, um produto interno G-invariante em $T\tilde{U}$. Definimos então $OFr(\tilde{U}) = \{(\tilde{x}, B) | B : \mathbb{R}^n \to T_{\tilde{x}}\tilde{U})$ é isometria$\}$, onde $\mathbb{R}^n$ é tomado com a métrica euclidiana usual e $T_{\tilde{x}}\tilde{U}$ tem a métrica $\langle , \rangle_{\tilde{x}}$. O grupo G age à esquerda em $OFr(\tilde{U})$ da seguinte forma: $g(\tilde{x}, B) = (g\tilde{x}, Dg(\tilde{x})B)$, além disso essa ação é livre, pois $g(\tilde{x}, B) = (\tilde{x}, B) \Rightarrow g \in G_{\tilde{x}}$ e $Dg(\tilde{x})B = B \Rightarrow g \in G_{\tilde{x}}$ e $Dg(\tilde{x}) = \mathrm{Id} \Rightarrow g = 1$. Portanto, como $OFr(\tilde{U})$ é variedade diferenciável e a ação de G é livre e própria, o quociente $OFr(\tilde{U})/G$ é uma variedade diferenciável. Nesta variedade temos uma ação natural do grupo ortogonal $O(n)$ à direita, definida por $[(\tilde{x}, B)]A = [\tilde{x}, BA]$. Esta ação é transitiva nas fibras da projeção $\pi : OFr(\tilde{U})/G \to \tilde{U}/G = U$, dada por $\pi[(\tilde{x}, B)] = \varphi(\tilde{x})$. De fato, dadas duas classes $[(\tilde{x}, B)], [(\tilde{y}, C)]$, tais que $\pi([(\tilde{x}, B)]) = \pi([(\tilde{y}, C)])$, temos que $\varphi(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{y})$. Logo, existe $g \in G$ tal que $g\tilde{x} = \tilde{y}$, e temos isometrias $B : \mathbb{R}^n \to T_{\tilde{x}}\tilde{U}, C : \mathbb{R}^n \to T_{\tilde{y}}\tilde{U}$ e $Dg(\tilde{x}) : T_{\tilde{x}}\tilde{U} \to T_{\tilde{y}}\tilde{U}$. Segue que $C^{-1} \circ Dg(\tilde{x}) \circ B \in O(n)$ e $[(\tilde{y}, C)]C^{-1} \circ Dg(\tilde{x}) \circ B = [(g\tilde{x}, Dg(\tilde{x})B)] = [(\tilde{x}, B)]$, assim $[(\tilde{x}, B)]$ e $[(\tilde{y}, C)]$ estão na mesma órbita pela ação de $O(n)$.

Vejamos quem é a isotropia de um ponto genérico por esta ação de $O(n)$. Considere o ponto $[(\tilde{x}, I)]$ e $A \in O(n)$, então $[(\tilde{x}, I)]A = [(\tilde{x}, I)] \Leftrightarrow \exists g \in G$ tal que $g((\tilde{x}, I)) = (\tilde{x}, IA) \Leftrightarrow (g\tilde{x}, Dg(\tilde{x})I) = (\tilde{x}, IA) \Leftrightarrow g \in G_{\tilde{x}}$ e $Dg(\tilde{x})I = IA$. Portanto o grupo de isotropia no ponto $[(\tilde{x}, I)]$ é dado por $O(n)_{[(\tilde{x}, I)]} = \{I^{-1}Dg(\tilde{x})I | g \in G_{\tilde{x}}\}$ que é isomorfo a $G_{\tilde{x}}$, pois a aplicação $G_{\tilde{x}} \to O(T_{\tilde{x}}\tilde{U})$, dada por $g \mapsto Dg(\tilde{x})$ é injetora.

E por fim, tomando o quociente $OFr(\tilde{U})/G \to \frac{OFr(\tilde{U})/G}{O(n)}$ obtemos a menos de isomorfismo a projeção $\pi : OFr(\tilde{U})/G \to \tilde{U}/G = U \subset Q$.

Definição 2.3.4. Seja Q um orbifold com atlas $(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. Repetindo a construção acima carta a carta obtemos para todo $\alpha \in \Lambda$ uma variedade diferenciável $OFr(\tilde{U}_\alpha)/G_\alpha$ com uma ação à direita do grupo $O(n)$. Definimos então o **fibrado de referenciais ortogonais** de Q como o quociente $OFr(Q) = \frac{\bigsqcup_\alpha OFr(\tilde{U}_\alpha)/G_\alpha}{\sim}$, em que identificamos pontos dos fibrados sobre cartas distintas utilizando as funções de transição da definição do fibrado tangente TQ. Pela construção acima, note que existe uma projeção $\pi : OFr(Q) \to Q$, dada localmente por $\pi_\alpha : OFr(\tilde{U}_\alpha)/G_\alpha \to \tilde{U}_\alpha/G_\alpha = U \subset Q$; $\pi_\alpha([\tilde{x}, B]) = \varphi_\alpha(\tilde{x})$.

Segue do que vimos previamente que o fibrado de referenciais $OFr(Q)$ é uma variedade diferenciável, pois é localmente o quociente de uma variedade por uma ação livre de um grupo finito. Além disso, satisfaz outras propriedades interessantes, uma delas enunciada no próximo teorema:

Teorema 2.3.5. *Se Q é um orbifold n-dimensional, o fibrado de referenciais ortogonais $OFr(Q)$ é uma variedade diferenciável e possui uma ação do grupo ortogonal*

$O(n)$ à direita, obtida a partir das ações de $O(n)$ definidas carta a carta. Tal ação é própria, efetiva e quase-livre e o orbifold quociente $OFr(Q)/O(n)$ é isomorfo a Q.

Demonstração: Note que a projeção $\pi : OFr(Q) \to Q$ induz um homeomorfismo $\overline{\pi} : OFr(Q)/O(n) \to Q$, pois a ação de $O(n)$ em $OFr(Q)$ é transitiva nas fibras de π. Além disso, esta aplicação é um isomorfismo de orbifolds. De fato, localmente $OFr(Q)/O(n)$ tem cartas dadas por $V \times_G O(n) \to V/G$, onde $V \subset OFr(Q)$ é um slice com respeito à ação de $O(n)$. Como vimos na construção de $OFr(Q)$, a projeção $OFr(\tilde{U})/G \to \frac{OFr(\tilde{U})/G}{O(n)}$ é a menos de isomorfismo a projeção $\pi : OFr(\tilde{U})/G \to \tilde{U}/G = U$, portanto $\overline{\pi}$ tem levantamentos locais que são difeomorfismos locais. Para mais detalhes vide [ALR07]. ■

Corolário 2.3.6. *Todo orbifold efetivo Q é difeomorfo como orbifold à um da forma X/K, como no Teorema 2.1.23, onde X é variedade e K é um grupo de Lie que age de forma própria, efetiva e quase-livre.*

Note que o grupo ortogonal $O(n)$ é desconexo, assim o fibrado de referenciais ortogonais $OFr(Q)$ é em geral uma variedade desconexa. Podemos remediar essa situação utilizando a noção de fibrado de referenciais unitários de Q. Ou seja, podemos construir sobre uma carta $(\tilde{U}, G, \varphi)$ um fibrado $UFr(\tilde{U}) := \{(\tilde{x}, B) | B : \mathbb{C}^n \to T_{\tilde{x}}\tilde{U} \otimes \mathbb{C}$ é isometria$\}$. Assim, aplicando as mesmas ideias que utilizamos acima, para todo orbifold Q temos uma variedade $UFr(Q)$, chamada de **fibrado de referenciais unitários** de Q. Temos um teorema análogo ao Teorema 2.3.5.

Teorema 2.3.7. *Se Q é um orbifold n-dimensional, o fibrado de referenciais unitários $UFr(Q)$ é uma variedade diferenciável e possui uma ação do grupo unitário $U(n)$ à direita obtida a partir das ações de $U(n)$ definidas carta a carta. Tal ação é própria, efetiva e quase-livre e o orbifold quociente $UFr(Q)/U(n)$ é isomorfo a Q.*

Agora veremos que, para todo orbifold conexo Q, a variedade $UFr(Q)$ é conexa. isto decorre do seguinte lema:

Lema 2.3.8. *Suponha que K é um grupo topológico que age continuamente sobre um espaço topológico X, de modo que K e X/K são espaços conexos. Então, X é conexo.*

Demonstração: Suponha por absurdo que K e X/K são conexos mas X é desconexo. Então, por definição existem abertos disjuntos $U, V \subset X$, não vazios tais que $U \cup V = X$. Como a ação é contínua, a aplicação de órbita $\mu^x : K \to X$ é contínua para todo x, assim leva o conexo K sobre um conexo, donde segue que a órbita Kx é conexa para todo x. Logo, $Kx \subset U$ ou $Kx \subset V$ e temos que $\pi(U)$ e $\pi(V)$ são conjuntos disjuntos, pois um ponto de U e um ponto de V nunca pertencem a uma mesma órbita. Note que a projeção canônica $\pi : X \to X/K$ é uma aplicação aberta, pois se $U \subset X$ é aberto, então $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{k\in K}(kU)$ é união de abertos, logo $\pi(U)$ é um aberto na topologia quociente. Assim, $\pi(U)$ e $\pi(V)$ são abertos disjuntos em X/K cuja união é X/K. Portanto, concluímos que X/K é desconexo, obtendo uma contradição. ■

Corolário 2.3.9. *Se Q é orbifold conexo, então o fibrado de referenciais unitários $UFr(Q)$ é conexo.*

Demonstração: Note que $U(n)$ é um grupo de Lie conexo que age em $UFr(Q)$ e o quociente $UFr(Q)/U(n)$ é homeomorfo a Q que é conexo por hipótese. Portanto, segue do Lema 2.3.8 que o espaço $UFr(Q)$ é conexo. ■

Corolário 2.3.10. *Todo orbifold efetivo Q* **conexo** *é difeomorfo como orbifold a um da forma X/K, como no Teorema 2.1.23, onde X é variedade* **conexa** *e K é um grupo de Lie* **conexo** *que age de forma própria, efetiva e quase-livre.*

Observação 2.3.11. Para encerrar esta seção, mencionamos que devido ao corolário acima, obtemos no capítulo 3 desta dissertação uma descrição do grupo fundamental de um orbifold efetivo Q (no sentido que deixaremos explícito no referido capítulo) em termos do grupo fundamental usual $\pi_1(UFr(Q))$. (vide Exemplo 3.3.14).

2.4 Orbifolds como grupoides

Nesta seção seguimos [Moe02, MP97, MM03] e [ALR07] para apresentar uma demonstração do teorema demonstrado originalmente por Moerdjik e Pronk [MP97]) que garante que o espaço de órbitas de um grupoide Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ próprio, étale e efetivo tem uma estrutura natural de orbifold efetivo.

Este fato pode começar a ser observado no seguinte lema:

Lema 2.4.1. *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide próprio e étale. Dado $x \in X$, existe uma vizinhança U_x de x, na qual o grupo de isotropia $\mathcal{G}_x$ age por difeomorfismos.*

Demonstração: Seja $g \in \mathcal{G}_x$, então $s(g) = t(g) = x$. Como s é um difeomorfismo local, existem $V_g \subset \mathcal{G}$ e $U_x \subset X$ vizinhanças de g e de x respectivamente, tais que $s : V_g \to U_x$ é um difeomorfismo. Se necessário diminuindo um pouco estas vizinhanças, podemos supor que $t : V_g \to U_x$ também é um difeomorfismo. Logo, podemos definir o difeomorfismo $\tilde{g} := t \circ (s|_{V_g})^{-1} : U_x \to U_x$. Pelo fato de $\mathcal{G}$ ser próprio e étale, podemos supor que existe uma mesma vizinhança U_x, tal que para cada $g \in \mathcal{G}_x$ temos $\tilde{g} = t \circ (s|_{V_g})^{-1} : U_x \to U_x$ é um difeomorfismo. Assim, temos uma ação $\sim: \mathcal{G}_x \to \mathrm{Diff}(U_x)$, dada por $g \mapsto \tilde{g}$. ■

Definição 2.4.2. Um grupoide próprio e étale $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é chamado de **efetivo** se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança U_x de x tal que o homomorfismo $\mathcal{G}_x \to \mathrm{Diff}(U_x)$ é injetor.

Teorema 2.4.3. *Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie próprio, étale e efetivo. Então, o espaço de órbitas $Q = X/\mathcal{G}$ pode ser munido de uma estrutura de orbifold efetivo, construída a partir do grupoide $\mathcal{G}$.*

Demonstração: Dado que $s, t : \mathcal{G} \to X$ são difeomorfismos locais, temos que a aplicação quociente $\pi : X \to X/\mathcal{G}$ é uma aplicação aberta. Logo, o quociente $X/\mathcal{G}$ é um espaço de Hausdorff se o subespaço $\{(x, y) \in X \times X | \pi(x) = \pi(y)\}$ é fechado em $X \times X$. Mas a aplicação $(s, t) : \mathcal{G} \to X \times X$ é contínua e própria, logo é uma aplicação fechada, pois $\mathcal{G}$ é localmente compacto. Assim temos $\mathrm{Im}(s, t) = \{(x, y) \in X \times X | \pi(x) = \pi(y)\}$ fechado e portanto $X/\mathcal{G}$ é de Hausdorff.

Agora vamos construir as cartas de orbifold para $X/\mathcal{G}$. Para tanto, vamos encontrar para cada $x \in X$, uma vizinhança $N_x \subset X$ onde o grupo de isotropia $\mathcal{G}_x$ age efetivamente. Seja $x \in X$, como o grupo de isotropia $\mathcal{G}_x$ é discreto, para cada $g \in \mathcal{G}_x$ podemos tomar W_g vizinhança de g em $\mathcal{G}_1$ de modo que $W_g \cap W_h = \emptyset$, $\forall g \neq h$. Definimos um aberto U_x contendo x por $U_x = \cap_{g \in \mathcal{G}_x} s(W_g)$. Como a aplicação (s, t) é fechada temos que $(s, t)(\mathcal{G} \setminus \cup_{g \in \mathcal{G}_x} W_g)$ é fechado em $X \times X$ e o ponto (x, x) está no complementar desse fechado. Assim, existe uma vizinhança do ponto x, $V_x \subset X$, tal que $(V_x \times V_x) \cap (s, t)(\mathcal{G} \setminus \cup_{g \in \mathcal{G}_x} W_g) = \emptyset$, e podemos supor que $V_x \subset U_x$.

Portanto, para cada $h \in \mathcal{G}_1$, com $s(h), t(h) \in V_x$, temos que $h \in \cup_{g \in \mathcal{G}_x} W_g$, como consequência $h \in W_g$ para algum $g \in \mathcal{G}_x$, e assim podemos definir o difeomorfismo $\tilde{g} = t \circ (s|_{W_g})^{-1}$. Como $V_x \subset s(W_g)$, $\forall g \in \mathcal{G}_x$, obtemos a vizinhança desejada do ponto x, dada por $N_x := \{y \in V_x | \tilde{g}(y) \in V_x, \forall g \in \mathcal{G}_x\}$. Por definição, se $y \in N_x$ então $\tilde{g}(y) \in N_x$, logo temos um homomorfismo de grupos $\mathcal{G}_x \to \mathrm{Diff}(N_x)$, dado por $g \mapsto \tilde{g}$. Além disso, como $\mathcal{G}$ é grupoide efetivo, o homomorfismo é injetor. Em outras palavras, $\mathcal{G}_x$ age efetivamente em N_x. Definindo, para cada $g \in \mathcal{G}_x$, $O_g = W_g \cap s^{-1}(N_x)$, temos que $s^{-1}(N_x) \cap t^{-1}(N_x) = \sqcup_{g \in \mathcal{G}_x} O_g$. Portanto, vemos que $\mathcal{G}|_{N_x} \rightrightarrows N_x$ é isomorfo ao grupoide de ação $\mathcal{G}_x \times N_x \rightrightarrows N_x$ e consequentemente $N_x/\mathcal{G}_x$ é um aberto em $Q = X/\mathcal{G}$.

Já construímos cartas de orbifold $(N_x, \mathcal{G}_x, \pi|_{N_x})$ sobre o espaço topológico $Q = X/\mathcal{G}$. Agora vamos mostrar que essas cartas são compatíveis duas a duas. Suponha $(N_x, \mathcal{G}_x, \pi|_{N_x})$ e $(N_y, \mathcal{G}_y, \pi|_{N_y})$ cartas, tais que $\pi(N_x) \cap \pi(N_y) \neq \emptyset$, então existe $z \in X$ tal que $\pi(z) \in \pi(N_x) \cap \pi(N_y)$. Tome flechas $g : z \to x' \in N_x$ e $h : z \to y' \in N_y$. podemos escolher vizinhanças $W_g \ni g$, $W_h \ni h$ e $(N_z, \mathcal{G}_z, \pi|_{N_z})$ carta, de modo que s, t sejam difeomorfismos quando restritas a W_g e W_h, $s(W_g) = N_z = s(W_h)$ e $t(W_g) \subset N_x$, $t(W_h) \subset N_y$. Desta forma, $\lambda = t \circ (s|_{W_g})^{-1} : N_z \to N_x$ e $\mu = t \circ (s|_{W_h})^{-1}$:

$N_z \to N_y$ são mergulhos entre cartas. Portanto, $(N_x, \mathcal{G}_x, \pi|_{N_x})$ e $(N_y, \mathcal{G}_y, \pi|_{N_y})$ são compatíveis, e $Q = X/\mathcal{G}$ admite estrutura de orbifold como queríamos provar. ∎

2.4.1 Grupoide de germes de difeomorfismos

O objetivo agora será demonstrar a recíproca do Teorema 2.4.3. Isto é, para qualquer orbifold efetivo Q, vamos mostrar que existe um grupoide de Lie próprio, étale e efetivo, naturalmente associado a Q, cujo espaço de órbitas tem estrutura de orbifold isomorfo a Q. Tal grupoide será construído a partir de germes de mudanças de cartas do orbifold Q. Assim, vamos iniciar a seção com a definição de germes de funções contínuas e explicar como obtemos um grupoide de Lie a partir de um pseudogrupo de difeomorfismos. Nossas principais referências são [MM03, HB99].

Definição 2.4.4. Sejam X e Y espaços topológicos. Considere o seguinte conjunto $M(X,Y) = \{(f,x) \in C^0(U,Y) \times U | U \subset X$ é aberto em $X\}$ formado por pares (f,x) onde f é uma função contínua num aberto $U \subset X$ e $x \in U$. Definimos uma relação de equivalência $\sim$ em $M(X,Y)$ da seguinte forma: $(f,x) \sim (g,y)$ se, e somente se $x = y$ e f coincide com g numa vizinhança de x. A classe de equivalência de (f,x) segundo essa relação é denotada por $[f]_x$ e é chamada de **germe** de f em x (ou **germe** de f no ponto x). O conjunto quociente formado pelas classes de equivalência será denotado por $\mathcal{M}(X,Y)$.

Observação 2.4.5. Temos aplicações bem definidas

$$\begin{array}{rcl} s : \mathcal{M}(X,Y) & \to & X \\ [f]_x & \mapsto & x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} t : \mathcal{M}(X,Y) & \to & Y \\ [f]_x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Assim, x é chamado de source do germe $[f]_x$ e $f(x)$ é chamado de target de $[f]_x$. Além disso, podemos munir o conjunto $\mathcal{M}(X,Y)$ com uma topologia tal que a aplicação $s : \mathcal{M}(X,Y) \to X$ seja um homeomorfismo local. De fato, dado um germe $[f]_x$, onde f é uma função definida num aberto $U \subset X$ podemos definir um aberto básico $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}(X,Y)$ como $[f]_x \subset \mathcal{U} := \{[f]_y | y \in U\}$.

Proposição 2.4.6. *Com a topologia gerada pelos abertos básicos de $\mathcal{M}(X,Y)$ definidos acima, temos que a aplicação $s : \mathcal{M}(X,Y) \to X$ é um homeomorfismo local.*

Demonstração: Dado $U \subset X$ um aberto, temos que

$$s^{-1}(U) = \{[f]_x | f \in C^0(V,Y) \text{ onde } V \text{ é aberto e } x \in V \subset U\}$$

logo $s^{-1}(U)$ é aberto e s é contínua. Além disso, se $\mathcal{U} := \{[f]_y | y \in U\}$ é um aberto básico, a aplicação $s|_{\mathcal{U}}$ é uma bijeção sobre U, ou seja, s é uma aplicação contínua, aberta, e $s : \mathcal{U} \to U$ é bijeção. Portanto, s é homeomorfismo local. ■

Definição 2.4.7. Seja $\mathcal{H}$ um conjunto formado por homeomorfismos $h : U \to V$, onde U e V são abertos de um espaço X. Dizemos que $\mathcal{H}$ é um **pseudogrupo** de homeomorfismos locais de X se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Se $h : U \to V$ e $h' : U' \to V'$ então a composição $h \circ h' : h'^{-1}(U \cap V') \to h(U \cap V')$ pertence a $\mathcal{H}$, e h^{-1} pertence a $\mathcal{H}$.

(ii) A restrição de $h|_W$ para qualquer aberto $W \subset X$ pertence a $\mathcal{H}$.

(iii) $\mathrm{Id}_X : X \to X$ pertence a $\mathcal{H}$.

(iv) Se um homeomorfismo h' entre dois abertos de X pode ser escrito como união de elementos de $\mathcal{H}$, então h' pertence a $\mathcal{H}$.

Suponha que $\mathcal{H}$ é um pseudogrupo de homeomorfismos locais de um espaço X. Podemos associar a este pseudogrupo um grupoide topológico étale da seguinte forma: seja $\mathcal{G}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{M}(X, X)$, dado por $\mathcal{G}_{\mathcal{H}} = \{[h]_x | h \in \mathcal{H}$ e $x \in \mathrm{Dom}(h)\}$, ou seja, o conjunto de todos os germes de elementos de $\mathcal{H}$. Vamos mostrar que $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ é um grupoide sobre X. As aplicações s, t de finidas na Observação 2.4.5 se restringem ao subespaço $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$. Assim, definimos as aplicações source e target de $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ por

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathcal{G}_{\mathcal{H}} & \to & X \\ & [h]_x & \mapsto & x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} t: & \mathcal{G}_{\mathcal{H}} & \to & Y \\ & [h]_x & \mapsto & h(x) \end{array}$$

A multiplicação parcial é dada naturalmente por composição de germes, explicitamente

$$\begin{array}{rccc} m: & \mathcal{G}_{\mathcal{H}\ s}\times_t \mathcal{G}_{\mathcal{H}} & \to & \mathcal{G}_{\mathcal{H}} \\ & ([h]_{f(x)}, [f]_x) & \mapsto & [h \circ f]_x \end{array}$$

A inversão i e a seção unidade ε são dadas respectivamente por:

$$\begin{array}{rccc} i: & \mathcal{G}_{\mathcal{H}} & \to & \mathcal{G}_{\mathcal{H}} \\ & [h]_x & \mapsto & [h^{-1}]_{h(x)} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \varepsilon: & X & \to & \mathcal{G}_{\mathcal{H}} \\ & x & \mapsto & [\mathrm{Id}]_x \end{array}$$

Como $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ é um aberto em $\mathcal{M}(X, X)$, temos ainda que s é um homeomorfismo local. Devido ao fato que $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ é formado por germes de homeomorfismos locais a inversão i é homeomorfismo. Portanto, $\mathcal{G}_{\mathcal{H}} \rightrightarrows X$ é de fato um grupoide étale.

Além disso, é fácil ver que um grupoide étale obtido dessa forma, através de um pseudogrupo é sempre efetivo. Ou seja, $\mathcal{G}_{\mathcal{H}} \rightrightarrows X$ é grupoide étale e efetivo.

2.4.2 Grupoide de germes de mudanças de cartas de um orbifold

Nesta seção damos uma demonstração da recíproca do Teorema 2.4.3.

Exemplo 2.4.8. Suponha agora que Q é um orbifold e $(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é um atlas da estrutura de orbifold. Defina $X = \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} \tilde{U}_\alpha$ e $\varphi : X \to Q$ por $\varphi|_{\tilde{U}_\alpha} = \varphi_\alpha$. Diremos que um homeomorfismo h entre dois abertos $\tilde{W}, \tilde{V} \subset X$ é uma **mudança de cartas** se $\varphi \circ h = \varphi$. Considere assim $\mathcal{H} = \{h : \tilde{W} \to \tilde{V} |\ h$ é mudança de cartas $\}$. Pode-se mostrar que $\mathcal{H}$ é um pseudogrupo de difeomorfismos, assim pela construção anterior temos um grupoide topológico $\mathcal{G}_{\mathcal{H}} \rightrightarrows X$ étale. Mas, como neste caso X é uma variedade diferenciável e as flechas são germes de difeomorfismos, temos que $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ tem estrutura de grupoide de Lie tal que s é difeomorfismo local. Portanto, $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ é um grupoide de Lie étale e efetivo.

Definição 2.4.9. Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ pseudogrupos de difeomorfismos locais de X e de X' respectivamente. Uma **transição local** de X para X' é um difeomorfismo $g : V \to V'$ entre abertos $V \subset X$ e $V' \subset X'$. Uma **equivalência** de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{H}'$ é um subconjunto R do conjunto de todas as transições de X para X' que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\cup_{g\in R} \mathrm{Dom}(g) = X$ e $\cup_{g\in R} \mathrm{Im}(g) = X'$.

(ii) Para quaisquer $g_1, g_2 \in R$, $h \in \mathcal{H}$ e $h' \in \mathcal{H}'$ tem-se $g_1 \circ h \circ g_2^{-1} \in \mathcal{H}'$, $g_1^{-1} \circ h' \circ g_2 \in \mathcal{H}$ e $h' \circ g_1 \circ h \in R$.

(iii) R é uma família maximal de transições de X para X' com as propriedades (i) e (ii).

Dois pseudogrupos de homeomorfismos locais $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ são ditos **equivalentes** se existe uma equivalência de um para o outro.

Lema 2.4.10. *Nas condições da Definição 2.4.9, sejam $\mathcal{G}_{\mathcal{H}} \rightrightarrows X$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{H}'} \rightrightarrows X'$ os grupoides de Lie étale e efetivos, associados aos pseudogrupos $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ respectivamente. Então, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ são equivalentes no sentido de 2.4.9 se, e somente se, $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{H}'}$ são Morita equivalentes.*

Demonstração: Seja R uma equivalência de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{H}'$. Então, definimos o espaço $P_R := \{[g]_x \in \mathcal{M}(X, X')|g \in R\}$. Claramente $P_R \subset \mathcal{M}(X, X')$, e temos âncoras $s : P_R \to X$ e $t : P_R \to X'$, como definidas na Observação 2.4.5. Assim, podemos munir P_R de uma estrutura diferenciável tal que s e t são difeomorfismos locais. Além disso, é fácil ver que o grupoide $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ age à esquerda em P_R ao longo de s :

$P_R \to X$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{H}'}$ age à direita em P_R ao longo de $t : P_R \to X'$, ambas as ações dadas por composição entre germes de difeomorfismos. Como estas ações são principais, segue que P_R é uma equivalência de Morita entre $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{H}'}$. Reciprocamente, como equivalências fracas entre grupoides étale são difeomorfismos locais entre as bases dos grupoides, segue que grupoides $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{H}'}$ Morita equivalentes são associados a pseudogrupos equivalentes. ■

Proposição 2.4.11. *Sejam Q e Q' orbifolds, $(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ um atlas para Q, e $(\tilde{U'}_\beta, G'_\beta, \varphi_\beta)_{\beta\in\Gamma}$ um atlas para Q'. Considere $\mathcal{G}_{\mathcal{H}} \rightrightarrows X$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{H}'} \rightrightarrows X'$ os respectivos grupoides de Lie étale e efetivos, como na construção do Exemplo 2.4.8.*

(i) O grupoide $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ é um grupoide próprio.

(ii) $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{H}'}$ são Morita equivalentes se, e somente se, Q e Q' são isomorfos.

Demonstração:

(i) Seja $(x, y) \in \tilde{U}_\alpha \times \tilde{U}_\gamma \subset X \times X$. Temos que encontrar uma vizinhança compacta K de (x, y) tal que $(s, t)^{-1}(K)$ seja compacto. Se $\varphi_\alpha(x) \neq \varphi_\gamma(y)$ é fácil encontrar tal vizinhança, pois Q é de Hausdorff e localmente compacto. Suponha que $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\gamma(y) = q$, como as cartas são compatíveis podemos supor que existe $Z \subset \tilde{U}_\alpha$ um aberto e um mergulho de cartas $\lambda : Z \to \tilde{U}_\gamma$ de modo que Z seja G_α-estável e $(G_\alpha)_Z = (G_\alpha)_x$. Isto implica que $\lambda(Z)$ é G_γ-estável e $(G_\gamma)_{\lambda(Z)} = (G_\gamma)_y$ e pelo Lema 2.1.14 temos

$$(s, t)^{-1}(Z \times \lambda(Z)) = \{[g \circ \lambda]_z | g \in (G_\gamma)_y, z \in Z\} \simeq (G_\gamma)_y \times Z$$

Como podemos escolher um compacto $K_1 \subset Z$ com $(x, y) \in K_1 \times \lambda(K_1)$ e $(G_\gamma)_y$ é finito, segue que $K = K_1 \times \lambda(K_1)$ é compacto e $(s, t)^{-1}(K) \simeq (G_\gamma)_y \times K_1$ é compacto.

(ii) Sabemos pelo Lema 2.4.10 que se $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{H}'}$ são Morita equivalentes, então os pseudogrupos $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ são equivalentes. Tal equivalência entre pseudogrupos de mudanças de cartas induz um isomorfismo entre os orbifolds. Reciprocamente, se $f : Q \to Q'$ é um isomorfismo de orbifolds, segue que f possui levantamentos locais (que são difeomorfismos locais de X para X'), esses levantamentos geram uma equivalencia do pseudogrupo $\mathcal{H}$ para o pseudogrupo $\mathcal{H}'$, e utilizando novamente o Lema 2.4.10 temos que $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{G}_{\mathcal{H}'}$ são Morita equivalentes.

■

Em particular, a Proposição 2.4.11 implica que para um orbifold Q fixado, a classe de equivalência de Morita do grupoide $\mathcal{G}_{\mathcal{H}}$ não depende da escolha do atlas que utilizamos para construir o pseudogrupo $\mathcal{H}$. Assim, para cada orbifold Q podemos associar um grupoide de Lie próprio, étale e efetivo que denotaremos por $\mathcal{G}_Q$, que está bem determinado a menos de equivalência de Morita.

Observação 2.4.12. Suponha que $\mathcal{K} \rightrightarrows Y$ é um grupoide próprio, étale e efetivo. Vimos no Teorema 2.4.3 que $Y/\mathcal{K}$ tem estrutura de orbifold efetivo. Por outro lado, pela Proposição 2.4.11 acima, associado ao orbifold $Y/\mathcal{K}$ temos um outro grupoide próprio, étale e efetivo $\mathcal{G}_{Y/\mathcal{K}}$. Podemos então nos perguntar qual a relação entre o grupoide original $\mathcal{K}$ e o grupoide $\mathcal{G}_{Y/\mathcal{K}}$. O fato é que $\mathcal{K}$ é Morita equivalente a $\mathcal{G}_{Y/\mathcal{K}}$.

Teorema 2.4.13. *Dado Q um orbifold efetivo existe um grupoide de Lie próprio, étale e efetivo $\mathcal{G}_Q \rightrightarrows X$ tal que $X/\mathcal{G}_Q$ é um orbifold isomorfo a Q.*

Demonstração: Se Q é um orbifold com atlas $(\tilde{U}_\alpha, G_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, definimos $X = \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} \tilde{U}_\alpha$ e $\varphi : X \to Q$ tal que $\varphi|_{\tilde{U}_\alpha} = \varphi_\alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda$. Assim, pela Proposição 2.4.11 temos um grupoide $\mathcal{G}_Q \rightrightarrows X$. Pela maneira como definimos o grupoide $\mathcal{G}_Q$ temos que $\varphi(x) = \varphi(y)$ se, e somente se, existe uma flecha $(x \xrightarrow{g} y) \in \mathcal{G}_Q$. Assim, φ induz um homeomorfismo $\overline{\varphi} : X/\mathcal{G}_Q \to Q$. Portanto, $\overline{\varphi}$ é um isomorfismo de orbifold, pois $\overline{\varphi}$ tem levantamentos em cartas dados por restrições da aplicação identidade $\mathrm{Id} : X \to X$. ■

Definição 2.4.14. Seja Q um orbifold efetivo. Se $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é um grupoide próprio, étale e efetivo tal que $X/\mathcal{G}$ é um orbifold difeomorfo ao orbifold Q, dizemos que $\mathcal{G}$ **representa** Q.

Exemplo 2.4.15. Se G é um grupo finito que age efetivamente numa variedade X, então o grupoide de ação $G \ltimes X \rightrightarrows X$ é próprio, étale e efetivo. Portanto, $G \ltimes X$ representa o orbifold X/G.

Exemplo 2.4.16. Suponha que K é um grupo de Lie que age em uma variedade X de maneira própria, efetiva e quase-livre. Sabemos pelo Teorema 2.1.23 que o espaço X/K tem estrutura de orbifold. Porém, neste caso o grupoide de ação $K \ltimes X$ não é etale se K não for discreto. Assim, segundo a Definição 2.4.14, não podemos dizer que $K \ltimes X$ representa X/K. Porém, usando slices é possível provar que o grupoide $K \ltimes X$ é Morita equivalente a um grupoide próprio, étale e efetivo que representa X/K.

O teorema a seguir é uma consequência imediata dos resultados anteriores e do fato que equivalência de Morita é uma relação de equivalência.

Teorema 2.4.17. *Sejam Q, S orbifolds e $\mathcal{G}, \mathcal{K}$ grupoides que representam Q e S respectivamente. Então, Q é isomorfo a S se, e somente se, $\mathcal{G}$ é Morita equivalente a $\mathcal{K}$.*

Pelo Teorema 2.4.17 temos uma correspondência biunívoca entre classes de equivalência de Morita de grupoides de Lie próprios, étale e efetivos e classes de difeomorfismo de orbifolds efetivos.

$$\frac{\{\text{Grupoides de Lie próprios, étale e efetivos}\}}{\text{Equivalência de Morita}} \longleftrightarrow \frac{\{\text{Orbifolds efetivos}\}}{\text{Difeomorfismo}}$$

Devido a esta correspondência, podemos estudar invariantes de estruturas de orbifold em um espaço topológico Q via invariantes de Morita em grupoides de Lie próprios, étale e efetivos. Por exemplo, veremos no capítulo 3 a construção do grupo fundamental de Haefliger de um grupoide de Lie. A cada grupoide conexo $\mathcal{G}$ podemos associar um grupo, que será denotado $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$, e veremos que grupoides Morita equivalentes $\mathcal{G}$ e $\mathcal{K}$ possuem grupos fundamentais $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$ e $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{K})$ isomorfos. Consequentemente, dado um orbifold Q, podemos definir o grupo fundamental de Haefliger de Q como $\pi_{\text{Hae}}(Q) := \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$, onde $\mathcal{G}$ é um grupoide que representa Q. Obtemos do Teorema 2.4.17 dois resultados simultaneamente: o primeiro é que $\pi_{\text{Hae}}(Q)$ está bem definido a menos de isomorfismo e o segundo é que a classe de isomorfismo do grupo $\pi_{\text{Hae}}(Q)$ é um invariante da classe de difeomorfismo do orbifold Q.

Capítulo 3

Grupo Fundamental e Recobrimentos

Neste capítulo estudaremos os conceitos de grupo fundamental de um grupoide de Lie e de recobrimentos de um grupoide de Lie. Veremos que grupoides Morita equivalentes possuem grupos fundamentais isomorfos e a partir disso daremos uma definição de grupo fundamental para orbifolds. As principais referências são [HB99, MM05].

3.1 Grupo fundamental de Haefliger de um grupoide de Lie

Nesta seção introduzimos os conceitos de $\mathcal{G}$-caminho em um grupoide de Lie e de homotopia entre $\mathcal{G}$-caminhos. Assim, obteremos uma noção de grupo fundamental de um grupoide de Lie.

Definição 3.1.1. Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Um **$\mathcal{G}$-caminho** de $x \in X$ para $y \in X$ é uma sequência $\sigma_n g_n \ldots \sigma_1 g_1 \sigma_0$, onde $\sigma_j : [0,1] \to X$ é um caminho contínuo para cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ e $g_j \in \mathcal{G}$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tais que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}, s(g_i) = \sigma_{i-1}(1), t(g_i) = \sigma_i(0)$ e $\sigma_0(0) = x, \sigma_n(1) = y$. Dizemos que x é o começo (ou início) e y é o término (ou final) do $\mathcal{G}$-caminho. O diagrama abaixo ilustra como devemos pensar em um $\mathcal{G}$-caminho.

$$x \overset{\sigma_0}{\rightsquigarrow} \bullet \xrightarrow{g_1} \bullet \overset{\sigma_1}{\rightsquigarrow} \bullet \cdots \bullet \xrightarrow{g_n} \bullet \overset{\sigma_n}{\rightsquigarrow} y$$

Observação 3.1.2. Os $\mathcal{G}$-caminhos aqui definidos são também chamados de caminhos de Haefliger em $\mathcal{G}$ por alguns autores, em homenagem ao matemático André Haefliger que foi o primeiro a introduzir esse conceito de caminho em grupoides.

Definição 3.1.3. Dizemos que $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é um grupoide **conexo por $\mathcal{G}$-caminhos** se para quaiquer $x, y \in X$ existe um $\mathcal{G}$-caminho de x para y.

Observação 3.1.4. Às vezes diremos que $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ é conexo para indicar que o grupoide é conexo por $\mathcal{G}$-caminhos, desde que esteja claro pelo contexto o tipo de conexidade a que nos referimos.

Neste capítulo sempre teremos como hipótese que os grupoides considerados são conexos por $\mathcal{G}$-caminhos (salvo menção contrária).

Exemplo 3.1.5. Se X é uma variedade, seu grupoide unital $X \rightrightarrows X$ é conexo por X-caminhos se, e somente se, X é conexa por caminhos no sentido usual.

Exemplo 3.1.6. Suponha que $G \ltimes X$ é um grupoide de ação. Suponha ainda que $X = \sqcup_\alpha U_\alpha$ é a decomposição de X em suas componentes conexas por caminhos e que dadas U_α e U_β, existem $x \in U_\alpha$ e $y \in U_\beta$, com x e y numa mesma órbita pela ação de G. Então, o grupoide $G \ltimes X$ é conexo por $(G \ltimes X)$-caminhos.

Denotaremos por $P\mathcal{G}$ o conjunto de todos os $\mathcal{G}$-caminhos em um grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows X$. Note que, temos uma multiplicação parcialmente definida em $P\mathcal{G}$, dada por concatenação de $\mathcal{G}$-caminhos:

$$(\sigma'_m g'_m \ldots \sigma'_1 g'_1 \sigma'_0) * (\sigma_n g_n \ldots \sigma_1 g_1 \sigma_0) = \sigma'_m g'_m \ldots \sigma'_1 g'_1 \sigma'_0 \sigma_{\sigma_n(1)} \sigma_n g_n \ldots \sigma_1 g_1 \sigma_0$$

Onde $\sigma_{\sigma_n(1)}$ é o caminho constante igual a $\sigma_n(1)$ e a multiplicação está definida somente quando $\sigma'_0(0) = \sigma_n(1)$.

Queremos a partir dessa nova noção de caminho definir um análogo do grupo fundamental usual, para tanto precisamos definir uma noção de homotopia entre $\mathcal{G}$-caminhos:

Definição 3.1.7. Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Definimos uma relação de equivalência $P\mathcal{G}$ gerada pelas seguintes relações:

(1) $\sigma_n g_n \ldots g_{j+1} \sigma_j g_j \sigma_{j-1} \ldots \sigma_1 g_1 \sigma_0$ é equivalente a $\sigma_n g_n \ldots g_{j+1} g_j \sigma_{j-1} \ldots \sigma_1 g_1 \sigma_0$ se σ_j é um caminho constante.

(2) $\sigma_n g_n \ldots g_{j+1} \sigma_j g_j \sigma_{j-1} \ldots \sigma_1 g_1 \sigma_0$ é equivalente a $\sigma_n g_n \ldots g_{j+1} \sigma_j * \sigma_{j-1} \ldots \sigma_1 g_1 \sigma_0$ se $g_j = \varepsilon_{\sigma_j(0)}$ (flecha identidade). Aqui $\sigma_j * \sigma_{j-1}$ denota a concatenação usual de caminhos em X.

Definição 3.1.8. Considere $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie, $x, y \in X$, $\sigma_n g_n \ldots \sigma_1 g_1 \sigma_0$ e $\sigma'_n g'_n \ldots \sigma'_1 g'_1 \sigma'_0$ dois $\mathcal{G}$-caminhos de inicio x e término y. Dizemos que o caminho $\sigma'_n g'_n \ldots \sigma'_1 g'_1 \sigma'_0$ é uma **deformação** de $\sigma_n g_n \ldots \sigma_1 g_1 \sigma_0$ se existem:

- homotopias $D_j : [0,1]\times[0,1] \to X$ para $j \in \{0,1,\dots,n\}$, tais que $D_j(0,-) = \sigma_j$ e $D_j(1,-) = \sigma'_j$.

- caminhos contínuos $d_j : [0,1] \to \mathcal{G}$ para $j \in \{1,\dots,n\}$, tais que $d_j(0) = g_j$ e $d_j(1) = g'_j$.

Satisfazendo $s \circ d_j = D_{j-1}(-,1)$ e $t \circ D_j(-,0)$ para $j \in \{1,2,\dots,n\}$ e para todo $\tau \in [0,1]$, $D_0(\tau,0) = x$ e $D_1(\tau,1) = y$.

Ou seja, uma deformação de $\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0$ para $\sigma'_n g'_n \dots \sigma'_1 g'_1 \sigma'_0$ é dada por uma família de $\mathcal{G}$-caminhos $D_n(\tau,-)d_n(\tau)\dots d_1(\tau)D_0(\tau,-)$, com $\tau \in [0,1]$, onde todos os $\mathcal{G}$-caminhos tem inicio em x e término em y, para $\tau = 0$ temos $\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0$ e para $\tau = 1$ temos $\sigma'_n g'_n \dots \sigma'_1 g'_1 \sigma'_0$.

Definição 3.1.9. Dois $\mathcal{G}$-caminhos são ditos **homotópicos** com extremos fixos, se um pode ser obtido a partir do outro via a relação de equivalência definida em 3.1.7 e/ou via deformações definidas em 3.1.8. A classe de homotopia de um $\mathcal{G}$-caminho $(\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0)$ será denotada por $[(\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0)]$.

Observação 3.1.10. A multiplicação parcial definida no conjunto de $\mathcal{G}$-caminhos, $P\mathcal{G}$, dá origem a uma multiplicação entre classes de homotopia de $\mathcal{G}$-caminhos. Ou seja, se $(\sigma'_m g'_m \dots \sigma'_1 g'_1 \sigma'_0)$ e $(\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0)$ são $\mathcal{G}$-caminhos tais que $\sigma'_0(0) = \sigma_n(1)$, definimos

$$[(\sigma'_m g'_m \dots \sigma'_1 g'_1 \sigma'_0)] * [(\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0)] := [(\sigma'_m g'_m \dots \sigma'_1 g'_1 \sigma'_0 * \sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0)]$$

Definição 3.1.11. Dado um grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows X$, definimos

$$\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}) := \{[(\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0)] | (\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0) \text{ é } \mathcal{G}\text{-caminho}\}$$

Podemos ver $\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$ como um grupoide de Lie sobre X, com as seguintes aplicações estruturais:

- $s, t : \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}) \to X$, tais que

$$s([\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0)]) = \sigma_0(0) \text{ e } t([\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0)]) = \sigma_n(1)$$

- $m = * : \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}) \;{}_s\!\times_t \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}) \to \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$, a concatenação de $\mathcal{G}$-caminhos como definida acima.

- $\varepsilon : X \to \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$, definida por $\varepsilon(x) = \varepsilon_x = [\sigma_x]$, onde σ_x é o caminho constante igual a x.

- $i : \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}) \to \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$, dada por

$$i([\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0)]) = [\sigma_0^{-1} g_1^{-1} \dots g_n^{-1} \sigma_n^{-1}]$$

Por analogia à construção do grupoide fundamental de uma variedade, pode-se mostrar que existem únicas topologia e estrutura diferenciável em $\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$ tais que a aplicação

$$(s, t) : \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}) \to X \times X$$

é um recobrimento suave. Portanto, $\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}) \rightrightarrows X$ é um grupoide de Lie transitivo. A este grupoide damos o nome de **grupoide fundamental de Haefliger** do grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows X$.

Note que se X é uma variedade e $\Pi(X) \rightrightarrows X$ é o grupoide fundamental (1.1.12), escolhendo $x \in X$ temos que $\pi_1(X, x) = \Pi(X)_x$. Isto é, o grupo fundamental de X com base em x é igual à isotropia de $\Pi(X)$ no ponto x. Isto nos leva à seguinte definição:

Definição 3.1.12. Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Dado $x \in X$, definimos o **grupo fundamental de Haefliger** de $\mathcal{G}$ com base em x como $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x) := \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})_x$. Equivalentemente, podemos definir $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ como o conjunto de todas as classes de homotopia de $\mathcal{G}$-caminhos com inicio e término em x, chamados de **$\mathcal{G}$-laços** com base em x, com a multiplicação dada por concatenação de $\mathcal{G}$-laços.

Observação 3.1.13. Assim como no caso de espaços topológicos conexos, o grupo fundamental de Haefliger de $\mathcal{G}$ não depende do ponto base escolhido, a menos de isomorfismo. Dados $x, y \in X$, por hipótese existe um $\mathcal{G}$-caminho ligando x a y. Utilizando este caminho podemos definir um isomorfismo entre $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ e $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, y)$. Assim, quando não for essencial mencionar o ponto base, escreveremos apenas $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$ para denotar o grupo fundamental de Haefliger de $\mathcal{G}$.

Definição 3.1.14. Dizemos que o grupoide $\mathcal{G}$ é **simplesmente conexo** se o seu grupo fundamental de Haefliger é trivial, ou seja, se $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}) = \{1\}$.

Exemplo 3.1.15. Sejam X uma variedade e $X \rightrightarrows X$ o grupoide unital associado. Como as únicas flechas desse grupoide são unidades $\varepsilon_x; x \in X$, todo X-caminho $\sigma_n \varepsilon_{\sigma_{n-1}(1)} \sigma_{n-1} \dots \varepsilon_{\sigma_0(1)} \sigma_0$ é equivalente ao X-caminho $\sigma = \sigma_n \sigma_{n-1} \dots \sigma_0$, ou seja, todo X-caminho é equivalente a um caminho usual $\sigma : [0, 1] \to X$. Assim, dois X-caminhos $\sigma_n \varepsilon_{\sigma_{n-1}(1)} \sigma_{n-1} \dots \varepsilon_{\sigma_0(1)} \sigma_0$ e $\sigma'_n \varepsilon'_{\sigma_{n-1}(1)} \sigma'_{n-1} \dots \varepsilon'_{\sigma_0(1)} \sigma'_0$ são homotópicos se, e somente se, os caminhos usuais σ e σ' são homotópicos com extremos fixos no sentido usual. Portanto, o grupoide fundamental de Haefliger do grupoide $X \rightrightarrows X$ é isomorfo ao grupoide fundamental de X. Consequentemente, o grupo fundamental de Haefliger de $X \rightrightarrows X$ com base em $x \in X$ é isomorfo a $\pi_1(X, x)$.

Exemplo 3.1.16. Seja $G \rightrightarrows \{x\}$ um grupo discreto visto como grupoide de Lie (vide 1.1.8). Vamos calcular o grupo fundamental de Haefliger de G. Como a base do grupoide é trivial, todo G-caminho $\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0$ é equivalente ao caminho $g = g_n g_{n-1} \dots g_1 g_0$ formado por uma única flecha. Pela definição de deformação, $g \in G$ se deforma em $h \in G$ se, e somente se, existe um caminho contínuo $d : [0,1] \to G$ com $d(0) = g$ e $d(1) = h$, mas G é discreto, logo isto somente pode ocorrer se $g = h$. Assim, concluímos que $\pi_{_{\mathrm{Hae}}}(G, x)$ é isomorfo a G.

Definição 3.1.17. Se G é um grupo topológico, denotaremos por C_g a componente conexa por caminhos de G, que contém o elemento g. Definiremos então, $\pi_0(G) := \{C_g | g \in G\}$ o conjunto das componentes conexas de G.

Note que se G é um grupo topológico, o conjunto $\pi_0(G)$ tem estrutura de grupo, com multiplicação dada por $C_g C_h = C_{gh}$.

Observação 3.1.18. Seja $G \rightrightarrows \{x\}$, onde G é grupo de Lie arbitrário. Note que utilizando a mesma ideia do Exemplo 3.1.16 concluímos que $g \in G$ se deforma em $h \in G$ se, e somente se, g e h estão na mesma componente conexa de G. Portanto, $\pi_{_{\mathrm{Hae}}}(G, x)$ é isomorfo a $\pi_0(G)$. Em particular, se G é conexo $\pi_{_{\mathrm{Hae}}}(G) \simeq \{1\}$.

A seguinte proposição é utilizada frequentemente para ajudar no cálculo de grupos fundamentais de alguns grupoides.

Proposição 3.1.19. *Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie, $\sigma_n g_n \dots g_{j+1} \sigma_j g_j \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0$ um $\mathcal{G}$-caminho e $\alpha : [0,1] \to \mathcal{G}$ um caminho de flechas tal que $s \circ \alpha = \sigma_j$. Ponha $t \circ \alpha = \beta : [0,1] \to X$. Então, os caminhos $\sigma_n g_n \dots g_{j+1} \sigma_j g_j \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0$ e $\sigma_n g_n \dots g_{j+1} \alpha(1)^{-1} \beta \alpha(0) g_j \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0$ são homotópicos (veja o diagrama 3.1).*

Demonstração: Para cada $\tau \in [0,1]$ considere o $\mathcal{G}$-caminho:

$$\sigma_n g_n \dots g_{j+1} \alpha(1)^{-1} \beta|_{[\tau,1]} \alpha(\tau) \sigma_j|_{[0,\tau]} g_j \dots g_1 \sigma_0$$

Note que, para $\tau = 0$ temos um caminho equivalente a

$$\sigma_n g_n \dots g_{j+1} \alpha(1)^{-1} \beta \alpha(0) g_j \dots g_1 \sigma_0$$

e para $\tau = 1$ temos um caminho equivalente a $\sigma_n g_n \dots g_{j+1} \alpha(1)^{-1} \alpha(1) \sigma_j g_j \dots g_1 \sigma_0$. Isto nos dá a homotopia desejada. ■

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, squiggly, "\sigma_0"] & \bullet \arrow[r, "g_1"] & \bullet \cdots \bullet \arrow[r, "g_j"] & \bullet \arrow[r, squiggly, "\sigma_j"] \arrow[d, "\alpha(0)"'] & \bullet \arrow[r, "g_{j+1}"] & \bullet \cdots \bullet \arrow[r, "g_n"] & \bullet \arrow[r, squiggly, "\sigma_n"] & y \\
 & & & \bullet \arrow[r, squiggly, "\beta"] & \bullet \arrow[u, "\alpha(1)^{-1}"'] & & &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Utilizando a Proposição 3.1.19, vamos dar uma descrição do grupo fundamental do grupoide de ação $G \ltimes X \rightrightarrows X$, do Exemplo 1.1.7, generalizando assim os resultados do Exemplo 3.1.16 e da Observação 3.1.18.

Proposição 3.1.20. *Suponha que X é uma variedade conexa. Seja $G \ltimes X \rightrightarrows X$ um grupoide de ação. Fixado $x \in X$, temos uma sequêcia exata curta de grupos:*

$$\{1\} \to \pi_1(X, x) \xrightarrow{i} \pi_{\text{Hae}}(G \ltimes X, x) \xrightarrow{\zeta} \pi_0(G) \to \{1\}$$

Demonstração: Considere um $(G \ltimes X)$-laço com base em $x \in X$, da forma $\sigma_1 g_1 \sigma_0$, com $g_1 = (g, y)$. Defina o caminho $\alpha : [0,1] \to G \times X; \tau \mapsto (g^{-1}, \sigma_1(\tau))$, assim $s \circ \alpha = \sigma_1$. Pondo $\beta(\tau) = t \circ \alpha(\tau) = g^{-1}\sigma_1(\tau)$ e aplicando a Proposição 3.1.19 temos

$$\begin{aligned}
\sigma_1(g, y)\sigma_0 &\sim (g^{-1}, x)^{-1}\beta(g^{-1}, gy)(g, y)\sigma_0 \\
&\sim (g, g^{-1}x)\beta(1, y)\sigma_0 \\
&\sim (g, g^{-1}x)\beta * \sigma_0
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$x \overset{\sigma_0}{\rightsquigarrow} y \xrightarrow{(g,y)} gy \overset{\sigma_1}{\rightsquigarrow} x \qquad \sim \qquad x \overset{\beta * \sigma_0}{\rightsquigarrow} z \xrightarrow{(g, g^{-1}x)} x$$

Portanto, todo $\sigma_1 g_1 \sigma_0$, $(G \ltimes X)$-laço com base em x é homotópico a outro $(G \ltimes X)$-laço da forma

$$x \overset{\sigma}{\rightsquigarrow} z \xrightarrow{(g,z)} x$$

Utilizando indução, a mesma conclusão é válida para qualquer $\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0$, $(G \ltimes X)$-laço com base em x. A partir disso vamos construir a sequêcia exata da proposição. Definindo

$$\begin{aligned}
i : \quad \pi_1(X, x) &\to \pi_{\text{Hae}}(G \ltimes X, x) \\
[\sigma] &\mapsto [\varepsilon_x \sigma] = \begin{tikzcd} x \arrow[r, squiggly, "\sigma"] & x \arrow[loop right, "\varepsilon_x"] \end{tikzcd}
\end{aligned}$$

é imediato verificar que i está bem definida e é injetora.

Agora, defina

$$\begin{aligned}
\zeta : \quad \pi_{\text{Hae}}(G \ltimes X, x) &\to \pi_0(G) \\
[(g, z)\sigma] &\mapsto C_g
\end{aligned}$$

(i) ζ esta bem definida – Suponha que $(x \overset{\sigma_0}{\rightsquigarrow} z \xrightarrow{(g,z)} x) \sim (x \overset{\sigma_1}{\rightsquigarrow} w \xrightarrow{(h,w)} x)$. Então, existe uma família de $(G \ltimes X)$-laços com base em x, $(\gamma(\tau)\sigma_\tau)_{\tau\in[0,1]}$, onde $\gamma : [0,1] \to G \times X$, dada por $\tau \mapsto (\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau))$ é um caminho de flechas, tal que $\gamma(0)\sigma_0 = (g,z)\sigma_0$ e $\gamma(1)\sigma_1 = (h,w)\sigma_1$. Logo, γ_1 é caminho contínuo em G com $\gamma_1(0) = g$ e $\gamma_1(1) = h$, portanto $C_g = C_h$ e $\zeta([(g,z)\sigma_0]) = \zeta([(h,w)\sigma_1])$, isto é, ζ esta bem definida.

(ii) ζ é sobrejetora – Seja C_g a componente conexa por caminhos de $g \in G$. Temos uma flecha $(g^{-1}, gx) : gx \to x$ e como X é conexa por caminhos, existe $\sigma : [0,1] \to X$, caminho contínuo tal que $\sigma(0) = x$ e $\sigma(1) = gx$. Assim, $(g^{-1}, gx)\sigma$ é um $(G \ltimes X)$-laço com base em x e $\zeta([(g^{-1}, gx)\sigma]) = C_{g^{-1}} = C_g$. Portanto, ζ é sobrejetora.

Também é imediato verificar que $\mathrm{Im}(i) \subset \mathrm{Ker}(\zeta)$. Logo, para verificar a exatidão da sequêcia $\{1\} \to \pi_1(X,x) \xrightarrow{i} \pi_{\text{Hae}}(G \ltimes X, x) \xrightarrow{\zeta} \pi_0(G) \to \{1\}$, falta apenas mostrar que $\mathrm{Ker}(\zeta) \subset \mathrm{Im}(i)$. Seja $[(g,z)\sigma] \in \mathrm{Ker}(\zeta)$, então $\zeta([(g,z)\sigma]) = C_1$, ou seja, $g \in C_1$. Assim, existe $\gamma_1 : [0,1] \to G$ caminho contínuo tal que $\gamma_1(0) = 1$ e $\gamma_1(1) = g$. Defina $\gamma(\tau) = (\gamma_1(\tau), \sigma(\tau)), \forall \tau \in [0,1]$ e $\beta(\tau) = \gamma_1(\tau)\sigma(\tau)$, assim $s \circ \gamma = \sigma$ e $t \circ \gamma = \beta$. Aplicando a Proposição 3.1.19, temos que

$$(x \overset{\sigma}{\rightsquigarrow} z \xrightarrow{(g,z)} x) \sim (x \overset{\beta}{\rightsquigarrow} x \xrightarrow{(g^{-1},x)} z \xrightarrow{(g,z)} x) = (x \overset{\beta}{\rightsquigarrow} x \circlearrowleft \varepsilon_x = (1,x))$$

Portanto, $[(g,z)\sigma] = [(1,x)\beta] = i([\beta]) \Rightarrow [(g,z)\sigma] \in \mathrm{Im}(i)$. ■

Exemplo 3.1.21. Seja $\mathbb{S}^1 \ltimes \mathbb{S}^3$ o grupoide de ação associado à ação de $\mathbb{S}^1$ em $\mathbb{S}^3$ definida em Exemplo 2.1.25. Pela Proposição 3.1.20 temos uma sequêcia exata:

$$\{1\} \to \pi_1(\mathbb{S}^3) \xrightarrow{i} \pi_{\text{Hae}}(\mathbb{S}^1 \ltimes \mathbb{S}^3) \xrightarrow{\zeta} \pi_0(\mathbb{S}^1) \to \{1\}$$

Como $\mathbb{S}^1$ é conexo e $\mathbb{S}^3$ é simplesmente conexo, segue que o grupoide $\mathbb{S}^1 \ltimes \mathbb{S}^3$ é simplesmente conexo.

3.1.1 Funtorialidade de Π_{Hae}

Nesta seção estudamos como se comporta o grupo fundamental de Haefliger com respeito a morfismos entre grupoides. Isto é, Se $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é um morfismo de grupoides veremos que ϕ induz um homomorfismo entre os grupos fundamentais $\pi_{\text{Hae}}(\phi) : \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x) \to \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{H}, \phi(x))$.

Se $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ e $\mathcal{H} \rightrightarrows Y$ são grupoides de Lie e $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é um morfismo de grupoides, então temos uma aplicação $P\phi : P\mathcal{H} \to P\mathcal{G}$, dada por:

$$\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0 \mapsto \phi_0 \sigma_n \phi_1 g_n \dots \phi_0 \sigma_1 \phi_1 g_1 \phi_0 \sigma_0$$

Claramente $P\phi$ leva caminhos $\mathcal{H}$-homotópicos em caminhos $\mathcal{G}$-homotópicos. Portanto, temos uma aplicação bem definida $\Pi_{\text{Hae}}(\phi) : \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{H}) \to \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$, dada por:

$$[\sigma_n g_n \dots \sigma_1 g_1 \sigma_0] \mapsto [\phi_0 \sigma_n \phi_1 g_n \dots \phi_0 \sigma_1 \phi_1 g_1 \phi_0 \sigma_0].$$

Segue que $\Pi_{\text{Hae}}(\phi)$ é uma aplicação suave, pois o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{H}) \arrow[r, "\Pi_{\text{Hae}}(\phi)"] \arrow[d, "(s,t)"'] & \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}) \arrow[d, "(s,t)"] \\
Y \times Y \arrow[r, "\phi_0 \times \phi_0"] & X \times X
\end{tikzcd}$$

e as aplicações (s,t) em ambos os lados são difeomorfismos locais e $\phi_0 \times \phi_0$ é diferenciável. Portanto, $\Pi_{\text{Hae}}(\phi)$ assim definido é um morfismo de grupoides de Lie que cobre $\phi_0 : Y \to X$.

Observação 3.1.22. Temos assim um funtor $\Pi_{\text{Hae}} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$, tal que

- $(\mathcal{G} \rightrightarrows X) \mapsto (\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}) \rightrightarrows X)$ em objetos e
- $(\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}) \mapsto (\Pi_{\text{Hae}}(\phi) : \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{H}) \to \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}))$ em morfismos.

Como consequência da existência do funtor da observação acima temos um funtor enviando cada grupoide de Lie em seu grupo fundamental de Haefliger. Porém, como o grupo fundamental depende da escolha de um ponto base, a categoria correta para definir esse funtor é a dos grupoides pontuados, *i.e.* pares $(\mathcal{G} \rightrightarrows X, x)$ formados por um grupoide e um ponto fixado em sua base. No que segue $\mathbf{Grp}_*$ e $\mathbf{Groups}$ denotam a categoria dos grupoides pontuados e a categoria dos grupos, respectivamente.

Observação 3.1.23. Temos um funtor $\pi_{\text{Hae}} : \mathbf{Grp}_* \to \mathbf{Groups}$, dado por

- $(\mathcal{G}, x) \mapsto (\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x))$ em objetos e
- $(\phi : (\mathcal{H}, x) \to (\mathcal{G}, \phi(x))) \mapsto (\pi_{\text{Hae}}(\phi) : \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{H}, x) \to \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, \phi(x)))$ em morfismos, onde $\pi_{\text{Hae}}(\phi) := \Pi_{\text{Hae}}(\phi)|_{\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G},x)}$.

Como corolário da observação acima, temos que grupoides de Lie que são isomorfos na categoria $\mathbf{Grp}$ possuem grupos fundamentais de Haefliger isomorfos. Assim, a classe de isomorfismo de $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$ é um invariante da classe de isomorfismo de $\mathcal{G}$. Na seção seção 3.3 veremos que esse invariante é na verdade mais fino. Especificamente, mostraremos que $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G})$ é um invariante da classe de equivalência de Morita de $\mathcal{G}$.

Vimos que o grupoide de Haefliger $\Pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}) \rightrightarrows X$ é um grupoide transitivo, pois a aplicação (s,t) é um difeomorfismo local sobrejetor neste caso. Além disso, (s,t) é um recobrimento suave. Assim, aplicando a Proposição 1.4.9 para este caso particular temos:

Observação 3.1.24. O grupoide $\Pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}) \rightrightarrows X$ satisfaz todas as propriedades a seguir:

- $\Pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G})$ é Morita equivalente a um grupo discreto.
- Existe $x \in X$, tal que $t : \Pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G})(x,-) \to X$ é aplicação de recobrimento.
- Para todo $x \in X$, $t : \Pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G})(x,-) \to X$ é aplicação de recobrimento.
- $\Pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G})_x = \pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G},x)$ é discreto e a inclusão $j : \pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G},x) \to \Pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G})$ é uma equivalência fraca.

3.2 Recobrimentos de grupoides de Lie

Nesta seção estudaremos o conceito de recobrimento na categoria dos grupoides de Lie, seguindo [HB99, MM05]. Veremos que os principais resultados da teoria usual de espaços de recobrimento podem ser generalizados para o caso de recobrimentos de grupoides. Em particular, veremos que para todo grupoide conexo $\mathcal{G}$, existe um recobrimento universal de $\mathcal{G}$ e o grupo de automorfismos deste recobrimento é isomorfo ao grupo fundamental de Haefliger de $\mathcal{G}$.

Definição 3.2.1. Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie. Um **recobrimento** do grupoide $\mathcal{G}$ é uma tripla (E,p,μ) onde $p : E \to X$ é um recobrimento diferenciável e $\mu : \mathcal{G}\ {}_s\!\times_p E \to E$ é uma ação do grupoide $\mathcal{G}$ em E ao longo de p.

Observação 3.2.2. Não é necessário que a ação seja à esquerda. No que se segue, por vezes utilizamos apenas o par (p,μ) para nos referirmos a um recobrimento (E,p,μ).

Exemplo 3.2.3. Seja $X \rightrightarrows X$ o grupoide unital associado a uma variedade X. Para qualquer recobrimento $p : E \to X$ temos uma ação do grupoide unital de X em E da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} X\ {}_{\mathrm{Id}}\!\times_p E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

Portanto, existe uma correspondência biunívoca entre recobrimentos usuais de X e recobrimentos do grupoide $X \rightrightarrows X$.

Exemplo 3.2.4. Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide de Lie conexo. Pelo terceiro item da Observação 3.1.24, dado $x \in X$, temos que $t : \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) \to X$ é aplicação de recobrimento. Além disso, $\mathcal{G}$ age em $\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -)$ ao longo de t da seguinte forma

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G}\ {}_s\times_t \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) & \to & \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) \\ (y \xrightarrow{g} z, [\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0]) & \mapsto & [\sigma_z g \sigma_y] * [\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0] = [g \sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0] \end{array}$$

onde σ_y e σ_z denotam caminhos constantes em y e em z respectivamente. Portanto, $t : \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) \to X$ é um recobrimento do grupoide $\mathcal{G}$. Veremos a seguir que esse é um recobrimento universal de $\mathcal{G}$.

Definição 3.2.5. Suponha que (E_1, p_1, μ_1) e (E_2, p_2, μ_2) são dois recobrimentos de um grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows X$. Então, E_1, E_2 são $\mathcal{G}$-espaços. Um **morfismo de recobrimentos** entre (E_1, p_1, μ_1) e (E_2, p_2, μ_2) é uma aplicação $\mathcal{G}$-equivariante $\theta : E_1 \to E_2$, com $p_2 \circ \theta = p_1$.

Observação 3.2.6. Temos assim uma categoria, denotada por $\mathbf{CS}(\mathcal{G})$, cujos objetos são recobrimentos do grupoide $\mathcal{G}$ e os morfismos são os morfismos de recobrimento, como definidos em 3.2.5. Além disso, $\mathbf{CS}(\mathcal{G})$ é uma subcategoria plena da categoria $\mathcal{G}$-**Spaces**.

Definição 3.2.7. Fixado um recobrimento (E, p, μ) de um grupoide $\mathcal{G}$, definimos o **grupo de automorfismos** deste recobrimento como

$$\mathrm{Aut}(p) = \{\theta : E \to E | \theta \text{ é morfismo de recobrimentos}\}$$

Ou seja, $\mathrm{Aut}(p) = \mathbf{CS}(\mathcal{G})(E, E)$, *i.e.* $\mathrm{Aut}(p)$ é o grupo de isomorfismos do objeto (E, p, μ) na categoria $\mathbf{CS}(\mathcal{G})$. Em alguns casos utilizamos também a notação $\mathrm{Aut}(E)$ para o grupo de automorfismos de (E, p, μ).

Vimos no capítulo 1 que toda ação de um grupo de Lie em uma variedade dá origem a um grupoide de Lie 1.1.7. Analogamente, se $\mathcal{G}$ age em uma variedade E ao longo de $a : E \to X$, então temos um grupoide de Lie associado

$$\mathcal{G} \ltimes E := \mathcal{G}\ {}_s\times_a E \rightrightarrows E$$

Aqui, cada elemento $(g, z) \in \mathcal{G}\ {}_s\times_a E$ é pensado como uma flecha $z \xrightarrow{(g,z)} gz$ e as aplicações estruturais são análogas às de 1.1.7. A este grupoide, associado a uma ação de um grupoide de Lie, damos também o nome de **grupoide de ação**.

Suponha agora que (E, p, μ) é um recobrimento de um grupoide $\mathcal{G}$. Então, $p : E \to X$ é um recobrimento e temos um grupoide de ação $\mathcal{G} \ltimes E \rightrightarrows E$. Podemos, então estender a aplicação de recobrimento p para um morfismo entre grupoides (que também será denotado p) $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$, dado por $p(g,z) = g$ em flechas. No que se segue, para cada recobrimento (E,p,μ) de um grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows X$, nos referimos ao morfismo de grupoides $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ como recobrimento de $\mathcal{G}$, tendo em vista que a definição de p como morfismo de grupoides engloba a aplicação de recobrimento $p : E \to X$ e a ação μ.

3.2.1 Levantamentos de $\mathcal{G}$-caminhos e de $\mathcal{G}$-homotopias

Vamos mostrar que todo recobrimento $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ possui a propriedade de levantamento único de $\mathcal{G}$-caminhos e a propriedade de levantamento de homotopias. A partir dessas propriedades, vamos mostrar que o grupo fundamental de Haefliger $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G},x)$ age sobre a fibra $p^{-1}(x)$.

Proposição 3.2.8. *Seja $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ um recobrimento de um grupoide $\mathcal{G}$. Dados $\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0$ um $\mathcal{G}$-caminho com início em $x \in X$ e $\tilde{x} \in p^{-1}\{x\}$, existe um único $(\mathcal{G} \ltimes E)$-caminho $\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0$, com início em $\tilde{x}$, tal que $Pp(\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0) = \sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0$. Vide o diagrama 3.2.*

Demonstração: A demonstração é por recorrência e utiliza o fato de que $p : E \to X$ é um recobrimento, portanto possui a propriedade de levantamento único de caminhos contínuos usuais. De fato, por essa propriedade o caminho σ_0 admite um único levantamento $\tilde{\sigma}_0$ com início em $\tilde{x}$. Logo, $p(\tilde{\sigma}_0(1)) = \sigma_0(1) = s(g_1)$, ou seja, $(g_1, \tilde{\sigma}_0(1)) \in \mathcal{G}\ {}_s\!\times_p E$. Assim, $\tilde{g}_1 := (g_1, \tilde{\sigma}_0(1))$ é uma flecha no grupoide $\mathcal{G} \ltimes E$ e pela terceira propriedade na definição de ação de grupoides, temos que $p(g_1 \tilde{\sigma}_0(1)) = t(g_1)$. Mas $t(g_1) = \sigma_1(0)$. Logo, utilizando novamente que p é recobrimento, existe um único $\tilde{\sigma}_1$ levantamento de σ_1 com $\tilde{\sigma}_1(0) = g_1 \tilde{\sigma}_0(1)$. Prosseguindo de maneira análoga ao que fizemos antes, em cada passo obtemos um único caminho $\tilde{\sigma}_j$ levantamento de σ_j e uma flecha $\tilde{g}_j = (g_j, \tilde{\sigma}_{j-1}(1))$. De modo que o $(\mathcal{G} \ltimes E)$-caminho $\tilde{\sigma}_n(g_n, \tilde{\sigma}_{n-1}(1)) \ldots \tilde{\sigma}_1(g_1, \tilde{\sigma}_0(1))\tilde{\sigma}_0$ é o único levantamento de $\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0$. ■

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{x} \arrow[r, squiggly, "\tilde{\sigma}_0"] & \bullet \arrow[r, "{(g_1,\tilde{\sigma}_0(1))}"] & \bullet \arrow[r, "\tilde{\sigma}_1"] & \bullet \cdots \arrow[d, "Pp"] & \bullet \arrow[r, "{(g_n,\tilde{\sigma}_{n-1}(1))}"] & \bullet \arrow[r, squiggly, "\tilde{\sigma}_n"] & \tilde{y} \\
x \arrow[r, squiggly, "\sigma_0"] & \bullet \arrow[r, "g_1"] & \bullet \arrow[r, squiggly, "\sigma_1"] & \bullet \cdots & \bullet \arrow[r, "g_n"] & \bullet \arrow[r, squiggly, "\sigma_n"] & y
\end{tikzcd}
\tag{3.2}
$$

Seguindo o mesmo raciocínio, pode-se demonstrar também que caminhos $\mathcal{G}$-homotópicos são levantados a caminhos $(\mathcal{G} \ltimes E)$-homotópicos.

Proposição 3.2.9. *Sejam $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ um recobrimento de um grupoide $\mathcal{G}$, $\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0$ e $\sigma'_n g'_n \ldots g'_1 \sigma'_0$ caminhos $\mathcal{G}$-homotópicos. Então, seus levantamentos*

$\tilde{\sigma}_n(g_n, \tilde{\sigma}_{n-1}(1)) \ldots \tilde{\sigma}_1(g_1, \tilde{\sigma}_0(1))\tilde{\sigma}_0$ e $\tilde{\sigma'}_n(g'_n, \tilde{\sigma'}_{n-1}(1)) \ldots \tilde{\sigma'}_1(g'_1, \tilde{\sigma'}_0(1))\tilde{\sigma'}_0$ são $(\mathcal{G} \ltimes E)$-homotópicos.

Corolário 3.2.10. *Seja $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ um recobrimento de um grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows X$. Então, para cada $x \in X$, o grupo fundamental de Haefliger $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ age à esquerda em $p^{-1}\{x\}$ da seguinte forma:*

$$\begin{array}{rcl} \pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x) \times p^{-1}\{x\} & \to & p^{-1}\{x\} \\ ([\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0], \tilde{x}) & \mapsto & \tilde{\sigma}_n(1) \end{array}$$

Onde $(\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0)$ é o levantamento de $\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0$ com início em $\tilde{x}$.

Demonstração: Pela Proposição 3.2.9, se $\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0$ e $\sigma'_n g'_n \ldots g'_1 \sigma'_0$ estão na mesma classe de homotopia, seus levantamentos $\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0$ e $\tilde{\sigma'}_n \tilde{g'}_n \ldots \tilde{g'}_1 \tilde{\sigma'}_0$, ambos com início em $\tilde{x}$, também estão numa mesma classe, em particular devem ter mesmo término, assim $\tilde{\sigma}_n(1) = \tilde{\sigma'}_n(1)$. Logo, a aplicação acima está bem definida e é fácil ver que de fato é uma ação. ■

Observação 3.2.11. Uma ação como a que foi definida acima, do grupo fundamental de Haefliger $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ sobre a fibra $p^{-1}(x)$ de um recobrimento, é chamada de **ação por monodromia**.

Corolário 3.2.12. *Sejam $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ um recobrimento de um grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ e $\tilde{x} \in p^{-1}\{x\}$. Então, o homomorfismo induzido $\pi_{\mathrm{Hae}}(p) : \pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, \tilde{x}) \to \pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ é injetor.*

Demonstração: Suponha que $\pi_{\mathrm{Hae}}(p)([\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0]) = [\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0] = [\sigma_x]$. Ou seja, o $\mathcal{G}$-caminho $\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0$ é homotópico ao caminho constante σ_x. Como $\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0$ e $\tilde{\sigma}_{\tilde{x}}$ são levantamentos de $\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0$ e de σ_x respectivamente, ambos com início em $\tilde{x}$, segue da Proposição 3.2.9 que $\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0$ e $\tilde{\sigma}_{\tilde{x}}$ são homotópicos. Logo, a classe $[\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0]$ é trivial e portanto, $\pi_{\mathrm{Hae}}(p)$ é injetor. ■

Proposição 3.2.13. *Considere a ação de $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ na fibra $p^{-1}\{x\}$ como definida no Corolário 3.2.10. Então, dado $\tilde{x} \in p^{-1}\{x\}$, o grupo de isotropia no ponto $\tilde{x}$ é dado por $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)_{\tilde{x}} = \pi_{\mathrm{Hae}}(p)(\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, \tilde{x}))$.*

Demonstração: Seja $[\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0] \in \pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)_{\tilde{x}}$ um elemento da isotropia. Então, $[\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0]\tilde{x} = \tilde{x}$. Equivalentemente, o levantamento $\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0$ com início em $\tilde{x}$ é tal que $\tilde{\sigma}_n(1) = \tilde{x}$, ou seja $\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0$ é um $(\mathcal{G} \ltimes E)$-laço em $\tilde{x}$. Daí temos, $\pi_{\mathrm{Hae}}(p)([\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0]) = [\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0] \in \pi_{\mathrm{Hae}}(p)(\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, \tilde{x}))$. Logo, $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)_{\tilde{x}} \subset \pi_{\mathrm{Hae}}(p)(\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, \tilde{x}))$. Agora vamos provar que $\pi_{\mathrm{Hae}}(p)(\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, \tilde{x})) \subset \pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)_{\tilde{x}}$. Seja $[\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0] \in \pi_{\mathrm{Hae}}(p)(\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, \tilde{x}))$, então existe $[\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \ldots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0] \in \pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes$

$E, \tilde{x})$ tal que $\pi_{\text{Hae}}(p)([\tilde{\sigma}_n\tilde{g}_n \dots \tilde{g}_1\tilde{\sigma}_0]) = [\sigma_n g_n \dots g_1\sigma_0]$. Consequentemente, o levantamento de $\sigma_n g_n \dots g_1\sigma_0$ com início em $\tilde{x}$ é homotópico a $\tilde{\sigma}_n\tilde{g}_n \dots \tilde{g}_1\tilde{\sigma}_0$ e portanto é um $(\mathcal{G} \ltimes E)$-laço em $\tilde{x}$. Consequentemente, $[\sigma_n g_n \dots g_1\sigma_0]$ pertence a $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)_{\tilde{x}}$. ■

3.2.2 Recobrimentos universais de um grupoide $\mathcal{G}$

Nesta seção veremos que existe um recobrimento universal para qualquer grupoide conexo $\mathcal{G}$ e veremos as propriedades que esse recobrimento satisfaz. Em particular, veremos que o grupo de automorfismos do recobrimento universal de $\mathcal{G}$ é isomorfo ao grupo $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$.

Definição 3.2.14. Dizemos que um recobrimento $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ é **universal** se para qualquer outro recobrimento $p' : \mathcal{G} \ltimes E' \to \mathcal{G}$ existe um morfismo de recobrimentos $\theta : E \to E'$. Ou seja, um recobrimento universal de $\mathcal{G}$ recobre qualquer outro recobrimento de $\mathcal{G}$.

Note que a condição de universalidade implica que quaisquer dois recobrimentos universais são necessariamente isomorfos.

Proposição 3.2.15. *Sejam $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ um recobrimento, $\phi : (\mathcal{H} \rightrightarrows Y) \to (\mathcal{G} \rightrightarrows X)$ um morfismo de grupoides com $\phi(y) = x$ e $\tilde{x} \in p^{-1}\{x\}$. Suponha que $\pi_{\text{Hae}}(\phi)(\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{H}, y)) \subset \pi_{\text{Hae}}(p)(\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, \tilde{x}))$. Então existe um morfismo de grupoides $\tilde{\phi} : \mathcal{H} \to \mathcal{G} \ltimes E$ tal que $\tilde{\phi}(y) = \tilde{x}$ e $p \circ \tilde{\phi} = \phi$. Tal morfismo $\tilde{\phi}$ é chamado de* **levantamento** *de ϕ.*

Demonstração: A demonstração segue o mesmo raciocínio que é utilizado para demonstrar a proposição análoga em topologia geral. Um esboço pode ser encontrado em [HB99]. ■

Corolário 3.2.16. *Suponha que $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ e $\phi : \mathcal{G} \ltimes \tilde{E} \to \mathcal{G}$ são recobrimentos com $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes \tilde{E}, \tilde{x}) = \{1\}$. Então, existe um morfismo de recobrimentos $\tilde{\phi}_0 : \tilde{E} \to E$.*

Demonstração: Como o grupo fundamental de Haefliger de $\mathcal{G} \ltimes \tilde{E}$ é trivial as hipóteses da Proposição 3.2.15 são imediatamente satisfeitas, logo a aplicação ϕ admite um levantamento $\tilde{\phi} : \mathcal{G} \ltimes \tilde{E} \to \mathcal{G} \ltimes E$ que é um morfismo de grupoides. Portanto, a aplicação $\tilde{\phi}_0 : \tilde{E} \to E$ entre as bases dos grupoides é $\mathcal{G}$-equivariante. Assim, $\tilde{\phi}_0$ é um morfismo de recobrimentos. ■

Corolário 3.2.17. *Suponha que $\mathcal{G}$ é um grupoide de Lie e $\phi : \mathcal{G} \ltimes \tilde{E} \to \mathcal{G}$ é um recobrimento com $\mathcal{G} \ltimes \tilde{E}$ simplesmente conexo. Então, $\mathcal{G} \ltimes \tilde{E}$ é um recobrimento universal de $\mathcal{G}$.*

Observação 3.2.18. Para todo grupoide conexo $\mathcal{G} \to X$ com ponto base fixado $x \in X$, o recobrimento $t : \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x,-) \to X$ é tal que $\mathcal{G} \ltimes \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x,-)$ é simplesmente conexo. Isso demonstra explicitamente a existência de um recobrimento universal para qualquer grupoide conexo $\mathcal{G}$. Além disso, como recobrimentos universais de $\mathcal{G}$ são isomorfos, segue que todos os recobrimentos universais são simplesmente conexos.

Teorema 3.2.19. *As seguintes afirmações sobre um recobrimento $\phi : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ são equivalentes:*

1. *ϕ é um recobrimento universal.*
2. *Para todo $x \in X$ a ação de $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ na fibra $\phi^{-1}\{x\}$ por monodromia é livre.*
3. *O grupoide $\mathcal{G} \ltimes E$ é simplesmente conexo.*

Demonstração: $(1 \Leftrightarrow 3)$ Vide Corolário 3.2.17 e Observação 3.2.18.
$(2 \Leftrightarrow 3)$ Segue da Proposição 3.2.13 que $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)_e = \pi_{\text{Hae}}(\phi)(\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, e))$ para todo $e \in \phi^{-1}\{x\}$. Logo, a ação na fibra é livre

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)_e = \{1\} \\ &\Leftrightarrow \pi_{\text{Hae}}(\phi)(\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, e)) = \{1\} \\ &\Leftrightarrow \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, e) = \{1\} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{G} \ltimes E \text{ é simplesmente conexo} \end{aligned}$$

onde a penúltima equivalência segue do fato que $\pi_{\text{Hae}}(\phi)$ é injetor. ■

Dado um grupo arbitrário K, podemos associar uma categoria que denotaremos por $\mathbf{K}\text{-}\mathbf{Sets}$, cujos objetos são conjuntos discretos S munidos de uma ação de K à esquerda. Um morfismo entre dois objetos S_1 e S_2 é uma aplicação $\psi : S_1 \to S_2$, K-equivariante com respeito às ações de K.

Teorema 3.2.20. *Sejam $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ um grupoide e $x \in X$. Então, o funtor*

$$\rho : \mathbf{CS}(\mathcal{G}) \to \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)\text{-}\mathbf{Sets}$$

que associa a cada recobrimento $p : E \to X$ a fibra $E_x = p^{-1}\{x\}$ e a cada morfismo de recobrimento $\psi : E \to E'$ associa a restrição $\psi : E_x \to E'_{\psi(x)}$ é uma equivalência de categorias.

Demonstração: Lembremos que pelo Corolário 3.2.10, a fibra E_x tem uma ação à esquerda do grupo $K := \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)$. Reciprocamente, sabemos que existe uma ação à direita, livre e própria de K sobre $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x,-)$, definida por

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x,-) \times \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x) &\to \Pi_{\text{Hae}}(G)(x,-) \\ ([\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0], [\lambda]) &\mapsto [\sigma_n g_n \ldots g_1 \sigma_0 * \lambda] \end{aligned}$$

onde denotamos por $[\lambda]$ um elemento de $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ somente para abreviar a notação. Logo, existe uma ação de $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ à direita no produto $\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) \times S$, dada por

$$([\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0], s)[\lambda] := ([\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0][\lambda], [\lambda]^{-1} s)$$

Claramente esta ação é livre e própria. Assim, o quociente

$$\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) \times_K S := \frac{\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) \times S}{K}$$

é um recobrimento de X via a aplicação $K([\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0], s) \mapsto t([\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0]) = \sigma_n(1)$. Além disso, o espaço $\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) \times_K S$ tem uma ação natural de $\mathcal{G}$ à esquerda (na primeira componente) ao longo da aplicação de recobrimento $\tilde{p} := t \circ \mathrm{pr}_1$ que acabamos de definir. Portanto, temos

$$\tilde{p} : \mathcal{G} \; {}_s\!\times_{\tilde{p}} (\Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) \times_K S) \to \mathcal{G}$$

um recobrimento do grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows X$.

Falta agora mostrar que essa construção fornece um funtor inverso para o funtor $\rho : \mathbf{CS}(\mathcal{G}) \to \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, x)\text{-}\mathbf{Sets}$, a menos de isomorfismo natural. Sejam $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ um recobrimento arbitrário e E_x a fibra sobre o ponto x. Pela construção anterior temos um recobrimento $\tilde{p} : \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) \times_K E_x \to X$, tal que $\tilde{p}(K([\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0], e) = t([\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0]) = \sigma_n(1))$, vamos exibir um isomorfismo entre esse recobrimento e o recobrimento inicial $p : E \to X$. Dado $([\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0], e) \in \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) \times_K E_x$, seja $\tilde{\sigma}_n \tilde{g}_n \dots \tilde{g}_1 \tilde{\sigma}_0$ levantamento de $\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0$ com início em e, com respeito ao recobrimento $p : E \to X$. Definimos então, $\theta : \Pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})(x, -) \times_K E_x \to E$; $\theta(([\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0], e)) := \tilde{\sigma}_n(1)$.

Afirmação 3.2.21. *A aplicação θ está bem definida e é injetora.*

É fácil ver que θ está bem definida, pois para todo $[\lambda] \in K$, temos

$$\theta([\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0][\lambda], [\lambda]^{-1} e) = \theta([\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0], e)$$

Vamos mostrar a injetividade. No que se segue denotaremos por γ o caminho $\sigma_n g_n \dots g_1 \sigma_0$, por γ' o caminho $\sigma'_m g'_m \dots g'_1 \sigma'_0$ e utilizaremos $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\gamma'}$ para os respectivos levantamentos. Então,

$$\theta(([\gamma], e)) = \theta(([\gamma'], e')) \Rightarrow \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma'}(1) \Rightarrow p(\tilde{\gamma}(1)) = p(\tilde{\gamma'}(1)) \Rightarrow \gamma(1) = \gamma'(1)$$

Logo, o $\mathcal{G}$-caminho $\lambda = \gamma^{-1} * \gamma'$ é um $\mathcal{G}$-laço com base em x e o seu levantamento $\tilde{\lambda} = \tilde{\gamma^{-1}} * \tilde{\gamma'}$ é um caminho em E com início em e' e final em e. Assim temos $[\lambda] \in K$

e $e' = [\lambda]^{-1}e$. Além disso,

$$[\lambda] = [\gamma^{-1}] * [\gamma'] \Rightarrow [\gamma'] = [\gamma][\lambda] \Rightarrow K([\gamma'], e') = K([\gamma][\lambda], [\lambda^{-1}]e) = K([\gamma], e)$$

ou seja, θ é injetora. Claramente θ é contínua e sobrejetora, pois $\mathcal{G} \ltimes E$ é conexo por $(\mathcal{G} \ltimes E)$-caminhos. Portanto, θ é um isomorfismo de recobrimentos, como queríamos provar. ■

Corolário 3.2.22. *Nas condições do teorema anterior, se $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ é um recobrimento de grupoides, o funtor ρ induz um isomorfismo entre $\mathrm{Aut}(p)$ e $\mathrm{Aut}(E_x)$.*

Demonstração: Como ρ é fiel e pleno, a restrição

$$\rho : \mathrm{Aut}(p) = \mathbf{CS}(\mathcal{G})(E, E) \to \pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)\text{-}\mathbf{Sets}(E_x, E_x) = \mathrm{Aut}(E_x)$$

é um isomorfismo. ■

Lema 3.2.23. *Suponha que $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ é um recobrimento universal e $x \in X$. Então, existe uma bijeção entre E_x e $\mathrm{Aut}(E_x)$.*

Demonstração: Fixe $e_0 \in E_x$, pela observação 3.2.17 temos que $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, e_0)$ é trivial, pois o recobrimento é universal. Para qualquer outro ponto $e_1 \in E_x$ também temos $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G} \ltimes E, e_1)$ trivial, e $p(e_0) = p(e_1) = x$. Logo, a proposição 3.2.15 implica a existência de um único automorfismo de recobrimento $\phi_{e_1} \in \mathrm{Aut}(p)$ tal que $\phi_{e_1}(e_0) = e_1$. A aplicação assim construída,

$$\begin{array}{rcl} E_x & \to & \mathrm{Aut}(p) \\ e & \to & \phi_e \end{array}$$

onde ϕ_e é o único automorfismo de p com $\phi_e(e_0) = e$, é uma bijeção. ■

Lema 3.2.24. *Suponha que $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ é um recobrimento universal e $x \in X$. Então, existe um isomorfismo entre $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ e $\mathrm{Aut}(E_x)$*

Demonstração: Seja $\mu : E_x \times \pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ a ação por monodromia. Como o recobrimento é universal, essa ação é livre e transitiva. Logo, a aplicação de órbita $\mu^x : \pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x) \to E_x$; $h \mapsto \mu(x, h)$, é uma bijeção. ■

Teorema 3.2.25. *Sejam $p : \mathcal{G} \ltimes E \to \mathcal{G}$ um recobrimento universal e $x \in X$ um ponto base. Então, existe um isomorfismo entre $\mathrm{Aut}(p)$ e $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)$.*

Demonstração: Pelos Lemas 3.2.23 e 3.2.24, existe uma bijeção $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x) \to \mathrm{Aut}(E_x)$, a qual pode-se checar que é um homomorfismo de grupos. Ou seja, $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ é isomorfo a $\mathrm{Aut}(E_x)$. Mas pelo Corolário 3.2.22 temos um isomorfismo entre $\mathrm{Aut}(E_x)$ e $\mathrm{Aut}(p)$. Portanto, compondo esses isomorfismos temos que $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ é isomorfo a $\mathrm{Aut}(p)$. ■

3.3 Grupo fundamental de um orbifold via grupoides de Lie

Como comentamos após as observações 3.1.22 e 3.1.23, a classe de isomorfismo de $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, x)$ é um invariante da classe de isomorfismo de $\mathcal{G}$. Porém, a condição de isomorfismo entre grupoides é muito forte, vamos demonstrar a seguir que o grupo fundamental de Haefliger é de fato um invariante da classe de equivalência de Morita de $\mathcal{G}$. A estratégia para demonstrar essa afirmação será a seguinte: sabemos que para um grupoide de Lie conexo $\mathcal{G}$ existe uma equivalência de categorias entre $\mathbf{CS}(\mathcal{G})$ e $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G})$-Sets, logo demonstraremos que se $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são Morita equivalentes as categorias $\mathbf{CS}(\mathcal{G})$ e $\mathbf{CS}(\mathcal{H})$ são equivalentes, obtendo assim uma equivalência entre $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G})$-Sets e $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{H})$-Sets, que por sua vez implica num isomorfismo entre $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G})$ e $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{H})$. Seguimos essencialmente [MM05].

Vamos começar mostrando que todo morfismo $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ entre grupoides de Lie induz um funtor $\phi^* : \mathbf{CS}(\mathcal{G}) \to \mathbf{CS}(\mathcal{H})$. De fato, suponha que $\mathcal{G} \rightrightarrows X$ e $\mathcal{H} \rightrightarrows Y$ são grupoides de Lie, $p : E \to X$ é um recobrimento de $\mathcal{G}$, com ação à esquerda $\mu : \mathcal{G}\ {}_s\!\times_p E \to E$ e que $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é morfismo de grupoides. Considere o pull-back $\phi^*(E) := Y\ {}_{\phi_0}\!\times_p E$. Como a aplicação $p : E \to X$ é um recobrimento o pull-back $\mathrm{pr}_1 : Y\ {}_{\phi_0}\!\times_p E \to Y$ é um recobrimento. Além disso, o espaço $\phi^*(E)$ possui uma ação de $\mathcal{H}$ à esquerda dada por

$$\mathcal{H}\ {}_s\!\times_{\mathrm{pr}_1} (Y\ {}_{\phi_0}\!\times_p E) \to Y\ {}_{\phi_0}\!\times_p E; (h, (y, e)) \mapsto (t(h), \phi_1(h)e)$$

Assim, $\phi^*(E)$ é um recobrimento do grupoide $\mathcal{H}$. Para definir ϕ^* em morfismos também é bastante simples. Dado $\theta : E \to E'$ um morfismo entre recobrimentos de $\mathcal{G}$, $p : E \to X$ e $p' : E' \to X$, temos

$$\phi^*(\theta) : \phi^*(E) = Y\ {}_{\phi_0}\!\times_p E \to \phi^*(E') = Y\ {}_{\phi_0}\!\times_{p'} E', \text{ dado por } \phi^*(\theta)(y, e) = (y, \theta(e))$$

A seguir, mostraremos como cada morfismo generalizado $P : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ também induz um funtor $P^* : \mathbf{CS}(\mathcal{G}) \to \mathbf{CS}(\mathcal{H})$. Suponha então
$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & P \arrow[dl, "a_l"'] \arrow[d, "a_r"] & \mathcal{G} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ X & Y & \end{tikzcd}$$
um morfismo generalizado de $\mathcal{H}$ para $\mathcal{G}$. Seja $p : E \to X$ um recobrimento do grupoide $\mathcal{G}$ e considere o produto fibrado $P\ {}_{a_r}\!\times_p E$, esse espaço admite uma ação de $\mathcal{G}$ à esquerda dada por $g(p, e) = (pg^{-1}, ge)$ de modo que o quociente $(P\ {}_{a_r}\!\times_p E)/\mathcal{G}$ é uma variedade diferenciável e possui ação de $\mathcal{H}$ à esquerda (na primeira componente).

Proposição 3.3.1. *A construção descrita acima nos dá para todo morfismo gene-*

ralizado $P : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ um funtor $P^* : \mathbf{CS}(\mathcal{G}) \to \mathbf{CS}(\mathcal{H})$.

Demonstração: Dado $p : E \to X$ um recobrimento de $\mathcal{G}$, defina $P^*(E) := (P\ {}_{a_r}{\times}_p E)/\mathcal{G}$. Segue do que vimos anteriormente que $P^*(E)$ possui uma projeção natural $\rho : (P\ {}_{a_r}{\times}_p E)/\mathcal{G} \to Y$, dada por $\rho([p, e]) = a_l(p)$ e admite uma ação de $\mathcal{H}$ à esquerda ao longo da aplicação ρ. Logo, P^* é um recobrimento de $\mathcal{H}$ desde que ρ seja um recobrimento. Considere o diagrama de produto fibrado

$$\begin{tikzcd} P \times_X E \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & P \arrow[d, "a_r"] \\ E \arrow[r, "p"] & X \end{tikzcd}$$

Como p é uma aplicação de recobrimento segue que seu pull-back $\mathrm{pr}_1 : P \times_X E \to P$ é um recobrimento. Agora considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} P \times_X E \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "q"'] & P \arrow[d, "a_l"] \\ (P \times_X E)/\mathcal{G} \arrow[r, "\rho"] & Y = P/\mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Pode-se mostrar que ese diagrama é um produto fibrado, consequentemente $\mathrm{pr}_1 : P \times_X E \to P$ é o pull-back de ρ pela submersão sobrejetora a_l, assim pr_1 ser recobrimento implica que ρ é um recobrimento. ■

Proposição 3.3.2. *Seja $p : E \to X$, um recobrimento do grupoide $\mathcal{G} \rightrightarrows X$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se $\langle \mathrm{Id} \rangle : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ é o morfismo generalizado induzido pela aplicação identidade, então existe um isomorfismo $\langle \mathrm{Id} \rangle^*(E) \to E$, natural em E.

(ii) Se $P : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ e $Q : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ são morfismos generalizados, existe um isomorfismo $Q^*(P^*(E)) \to (P \circ Q)^*(E)$, natural em E.

Corolário 3.3.3. *Se $P : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é uma equivalência de Morita, então $P^* : \mathbf{CS}(\mathcal{G}) \to \mathbf{CS}(\mathcal{H})$ é uma equivalência de categorias.*

Demonstração: De fato, se $P : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é equivalência de Morita, existe um morfismo generalizado inverso $P^{-1} : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. E pela Proposição 3.3.2, segue que $(P^{-1})^* : \mathbf{CS}(\mathcal{H}) \to \mathbf{CS}(\mathcal{G})$ é um funtor inverso de P^* a menos de isomorfismo natural. Portanto, P^* é equivalência de categorias. ■

Vejamos agora como essa construção do funtor induzido por um morfismo generalizado é uma extensão da construção inicial, do funtor induzido por um morfismo usual.

Proposição 3.3.4. *Seja $\phi : (\mathcal{H} \rightrightarrows Y) \to (\mathcal{G} \rightrightarrows X)$ um morfismo usual entre grupoides de Lie e considere o morfismo generalizado $\langle\phi\rangle : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$. Então, existe um isomorfismo $\phi^*(E) \to \langle\phi\rangle^*(E)$, natural em E, onde ϕ^* é o funtor construído no início desta seção.*

Demonstração: Relembre que $\langle\phi\rangle = Y\,{}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{G}$. Logo, $\langle\phi\rangle^*(E) = (Y\,{}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{G}\,{}_s\!\times_p E)/\mathcal{G}$. Por outro lado, $\phi^*(E) = Y\,{}_{\phi_0}\!\times_p E$. Assim, podemos definir um isomorfismo

$$Y\,{}_{\phi_0}\!\times_t \mathcal{G} \to Y\,{}_{\phi_0}\!\times_p E; \quad [(y,g,e)] \mapsto (y, ge)$$

De fato, este morfismo está bem definido e tem inverso dado por $(y,e) \mapsto (y, \varepsilon_{\phi(y)}, e)$, onde ε é a seção unidade do grupoide $\mathcal{G}$. Portanto temos o isomorfismo desejado, $\langle\phi\rangle^*(E) \to \phi^*(E)$. ■

Corolário 3.3.5. *Se $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ é uma equivalência fraca, então o funtor $\phi^* : \mathbf{CS}(\mathcal{G}) \to \mathbf{CS}(\mathcal{H})$ é uma equivalência de categorias.*

Demonstração: Sabemos que se ϕ é equivalência fraca, então o morfismo generalizado $\langle\phi\rangle$ é uma equivalência de Morita. Logo, pela demostração do Corolário 3.3.3, temos que $(\langle\phi\rangle^{-1})^*$ é inverso de $\langle\phi\rangle^*$ a menos de isomorfismo natural. Assim, pela Proposição 3.3.4, temos que $(\langle\phi\rangle^{-1})^*$ também é inverso (a menos de isomorfismo natural) do funtor ϕ^*. Portanto, ϕ^* é equivalência de categorias. ■

Lema 3.3.6. *Suponha que $L_1 : \mathbf{CS}(\mathcal{G}) \to \mathbf{CS}(\mathcal{H})$ é uma equivalência de categorias e que $p : E \to X$ um recobrimento universal de $\mathcal{G}$. Então, $L_1(E)$ é um recobrimento universal de $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Seja $L_2 : \mathbf{CS}(\mathcal{H}) \to \mathbf{CS}(\mathcal{G})$ o funtor inverso de L_1 a menos de transformação natural. Considere $\hat{E}$ um recobrimento universal de $\mathcal{H}$. Em particular, existe um morfismo de recobrimentos $\theta : \hat{E} \to L_1(E)$. Aplicando o funtor L_2, obtemos um morfismo de recobrimentos $L_2(\theta) : L_2(\hat{E}) \to L_2(L_1(E))$. Mas $L_2(L_1)(E)$ é um recobrimento isomorfo a E, que por sua vez é universal. Assim, o morfismo $L_2(\theta)$ é um isomorfismo, donde segue que θ é um isomorfismo. Portanto, $\hat{E}$ e $L_1(E)$ são isomorfos como recobrimentos de $\mathcal{H}$. Sendo $\hat{E}$ universal concluímos que $L_1(E)$ é universal. ■

Corolário 3.3.7. *Se $\phi : (\mathcal{H} \rightrightarrows Y) \to (\mathcal{G} \rightrightarrows X)$ é equivalência fraca, então $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{H}, y)$ e $\pi_{\mathrm{Hae}}(\mathcal{G}, \phi_0(y))$ são isomorfos.*

Demonstração: Se $\phi : (\mathcal{H} \rightrightarrows Y) \to (\mathcal{G} \rightrightarrows X)$ é equivalência fraca, pelo Corolário 3.3.5 temos que $\phi^* : \mathbf{CS}(\mathcal{G}) \to \mathbf{CS}(\mathcal{H})$ é uma equivalência de categorias. Em particular, $\phi^* : \mathbf{CS}(\mathcal{G})(E,E) \to \mathbf{CS}(\mathcal{H})(\phi^*(E), \phi^*(E))$ é um isomorfismo de grupos. Supondo que E é recobrimento universal de $\mathcal{G}$, pelo Lema 3.3.6, temos que $\phi^*(E)$ é recobrimento universal de $\mathcal{H}$. Logo, pelo Teorema 3.2.25 temos que $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, \phi_0(y)) \simeq \operatorname{Aut}(E)$ e $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{H}, y) \simeq \operatorname{Aut}(\phi^*(E))$. Assim, o isomorfismo $\phi^* : \operatorname{Aut}(E) \to \operatorname{Aut}(\phi^*(E))$, induz um isomorfismo $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G}, \phi_0(y)) \to \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{H}, y)$. ■

Corolário 3.3.8. *Se $\mathcal{H}$ e $\mathcal{G}$ são Morita equivalentes, então $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{H})$ e $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$ são isomorfos.*

Devido ao Corolário 3.3.8 podemos definir agora o **grupo fundamental de um orbifold** utilizando a noção de grupo fundamental de um grupoide de Lie. Ou seja,

Definição 3.3.9. Seja Q um orbifold e fixe $\mathcal{G}$ um grupoide de Lie próprio e étale que o representa. Definimos o **grupo fundamental do orbifold** Q por $\pi_{\text{Hae}}(Q) := \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$.

Pelo Teorema 2.4.17 se $\mathcal{H}$ é outro grupoide que representa Q, então $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ são Morita equivalentes, assim pelo Corolário 3.3.8 temos que $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$ é isomorfo a $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{H})$. Ou seja, trocando o grupoide que representa Q o grupo fundamental não se altera a menos de isomorfismo.

Observação 3.3.10. Ainda pelo Teorema 2.4.17 se R é outro orbifold que é isomorfo a Q e $\mathcal{K}$ é um grupoide que o representa, então $\mathcal{K}$ e $\mathcal{G}$ são Morita equivalentes. Logo, $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{K})$ é isomorfo a $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{G})$. Portanto, a classe de isomorfismo de $\pi_{\text{Hae}}(Q)$ é um invariante da classe de isomorfismo do orbifold Q.

Podemos notar que esse é um invariante mais fino que o grupo fundamental usual do espaço topológico subjacente a Q, como é o caso no exemplo a seguir:

Exemplo 3.3.11. Seja $B(0,1)/C_n$ o orbifold do Exemplo 2.1.11. Considere $C_n \ltimes B(0,1)$ o grupoide de ação que representa este orbifold. Pela Proposição 3.1.20 temos uma sequêcia exata $\{1\} \to \pi_1(B(0,1)) \xrightarrow{i} \pi_{\text{Hae}}(C_n \ltimes B(0,1)) \xrightarrow{\zeta} \pi_0(C_n) \to \{1\}$. Como $B(0,1)$ é simplesmente conexo e C_n é um grupo discreto (assim $\pi_0(C_n) \simeq C_n$) temos que $\pi_{\text{Hae}}(C_n \ltimes B(0,1))$ é isomorfo a C_n. Ou seja, pela Definição 3.3.9 temos $\pi_{\text{Hae}}(B(0,1)/C_n) \simeq C_n$. Como C_n e C_m não são isomorfos para $m \neq n$ segue de 3.3.10 que $B(0,1)/C_n$ e $B(0,1)/C_m$ não são isomorfos se $m \neq n$.

Observação 3.3.12. Suponha que K é um grupo de Lie que age em uma variedade X de maneira própria, efetiva e quase-livre. Como mencionamos no Exemplo 2.4.16, em geral $K \ltimes X$ não é étale, mas é Morita equivalente a um grupoide próprio, étale e efetivo $\mathcal{K} \rightrightarrows Y$, de modo que K representa o orbifold X/K e por definição temos $\pi_{\text{Hae}}(X/K) := \pi_{\text{Hae}}(\mathcal{K})$. Por outro lado, segue do Corolário 3.3.8 que $\pi_{\text{Hae}}(\mathcal{K})$ é isomorfo a $\pi_{\text{Hae}}(K \ltimes X)$. Assim, temos que $\pi_{\text{Hae}}(X/K)$ é isomorfo a $\pi_{\text{Hae}}(K \ltimes X)$. Ou seja, embora pela nossa definição o grupoide $K \ltimes X$ não represente o orbifold X/K, o grupo fundamental deste orbifold é isomorfo ao grupo fundamental de $K \ltimes X$. Assim, podemos utilizar as técnicas desenvolvidas para o cálculo de grupos fundamentais de grupoides de ação para dar alguns exemplos de grupos fundamentais de orbifolds.

O exemplo a seguir mostra que existem orbifolds que não são quocientes efetivos globais.

Exemplo 3.3.13. Seja $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ um orbifold como no Exemplo 2.1.25. Segue do Exemplo 3.1.21 que $\pi_{\text{Hae}}(\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1)$ é trivial. Suponha por absurdo que $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ é isomorfo a um orbifold quociente efetivo global X/G, onde X é variedade simplesmente conexa e G é finito. Então, pela Proposição 3.1.20 temos $\pi_{\text{Hae}}(\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1) \simeq \pi_{\text{Hae}}(X/G) \simeq G$. Logo $G = \{1\}$ é o grupo trivial, donde segue que $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ é difeomorfo a X como orbifold, um absurdo, pois X não possui pontos singulares.

O exemplo a seguir dá uma descrição do grupo fundamental de qualquer orbifold efetivo.

Exemplo 3.3.14. Seja Q um orbifold efetivo conexo. Pelo Corolário 2.3.10 temos que Q é isomorfo ao quociente $UFr(Q)/U(n)$, onde $UFr(Q)$ é variedade conexa. Assim, o grupoide de ação $UFr(Q) \rtimes U(n)$ representa o orbifold Q e temos por definição que $\pi_{\text{Hae}}(Q) = \pi_{\text{Hae}}(UFr(Q) \rtimes U(n))$. Logo, segue da Proposição 3.1.20 que existe uma sequêcia exata de grupos:

$$\{1\} \to \pi_1(UFr(Q)) \to \pi_{\text{Hae}}(Q) \to \pi_0(U(n)) \to \{1\}$$

ou, como $\pi_0(U(n))$ é o grupo trivial $\{1\}$, temos

$$\{1\} \to \pi_1(UFr(Q)) \to \pi_{\text{Hae}}(Q) \to \{1\} \to \{1\}$$

Portanto, $\pi_{\text{Hae}}(Q)$ é isomorfo a $\pi_1(UFr(Q))$. Ou seja, o grupo fundamental de Haefliger de qualquer orbifold é isomorfo ao grupo fundamental usual de uma variedade naturalmente associada a ele.

REFERÊNCIAS

[AB09] Alexandrino, M.M. e R.G. Bettiol: *Introduction to Lie groups, isometric and adjoint actions and some generalizations*. ArXiv e-prints, 2009.

[ALR07] Adem, A., J. Leida e A. Ruan: *Orbifolds and stringy topology*, volume 171 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 2007, ISBN 978-0521870047.

[Col09] Colman, H.: *On the 1-homotopy type of Lie groupoids*. ArXiv Mathematics e-prints, 2009.

[del12] del Hoyo, M. L.: *Lie Groupoids and their Orbispaces*. ArXiv e-prints, dezembro 2012.

[Hae71] Haefliger, A.: *Homotopy and integrability*, volume 197 de *Springer Lecture Notes in Math*, páginas 133–163. 1971.

[Hae84] Haefliger, A.: *Holonomie et classifiants*. Astérisque, 116:70–97, 1984.

[HB99] Haefliger, A. e M. R. Bridson: *Groupoids of local isometries*, volume 319 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, páginas 584–619. Springer Berlin Heidelberg, 1999, ISBN 978-3-662-12494-9.

[HS87] Hilsum, M. e G. Skandalis: *Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes)*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 20(3):325–390, 1987. `http://eudml.org/doc/82206`.

[Jel11] Jelenc, B.: *Serre fibrations in the Morita category of topological groupoids*. ArXiv e-prints, 2011.

[JM12] Jelenc, B. e J. Mrcun: *Homotopy sequence of a topological groupoid with a basegroup and an obstruction to presentability of proper regular Lie groupoids*. ArXiv e-prints, 2012.

[KN69] Kobayashi, S. e K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*. Wiley. 1969.

[Lee11] Lee, John M.: *Introduction to Topological Manifolds*. Springer Verlag, 2011.

[Lee12] Lee, J. M.: *Introduction to smooth manifolds, second edition*. Springer Verlag, 2012, ISBN 9781441999825.

[Ler10] Lerman, E.: *Orbifolds as stacks?* L'Enseign. Math., 2(56):315–363, 2010. http://arxiv.org/abs/0806.4160v2.

[MM03] Moerdijk, I. e J. Mrčun: *Introduction to foliations and Lie groupoids*, volume 91 de *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 2003, ISBN 0-521-83197-0.

[MM05] Moerdijk, I. e J. Mrčun: *Lie groupoids, sheaves and cohomology*, volume 323 de *London mathematical society lecture note series*, páginas 145–272. Cambridge University Press, 2005, ISBN 9780521615051.

[Moe02] Moerdijk, I.: *Orbifolds as groupoids: an introduction*, volume 310 de *(Madison, WI, 2001), Contemp. Math.*, páginas 205–222. Providence, RI: American Mathematical Society, 2002. http://arxiv.org/abs/math/0203100v1;http://arxiv.org/pdf/math/0203100v1.

[MP97] Moerdijk, I. e D. A. Pronk: *Orbifolds, sheaves and groupoids*. K-theory, 12(1):3–21, 1997.

[Mrc05] Mrcun, J.: *Stability and invariants of Hilsum-Skandalis maps*. ArXiv Mathematics e-prints, 2005.

[MS05] Mackenzie, K.C.H. e London Mathematical Society: *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2005.

[Pal61] Palais, R.S.: *On the existence of slices for actions of non compact Lie groups*. The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 73(No. 2):295–323, 1961.

[Sat56] Satake, I.: *On a generalization of the notion of manifold*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 42:359–363, 1956.

[Sat57] Satake, I.: *The Gauss–Bonnet theorem for V -manifolds*. J. Math. Soc. Japan, 9:464–492, 1957.

[Thu80] Thurston, W.: *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton lecture notes. http://library.msri.org/nonmsri/gt3m, 1980.