# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 APRESENTAÇÃO DO TEMA

O mercado financeiro tem refletido celeremente às mudanças no ambiente empresarial. Incorporando novas ferramentas computacionais a tradicionais modelos matemáticos, desenvolveram-se conceitos e ferramentas financeiras que permitem à análise de investimentos extrapolar às tradicionais técnicas baseadas em projeções de fluxo de caixa e incorporar elementos do risco e da volatilidade dos mercados. É importante que os administradores compreendam melhor as opções que suas companhias possuem ou quais são capazes de criar.

Com este novo panorama, ocorreu o desenvolvimento dos mercados financeiros, estes afetados também pelo aumento do nível de incertezas em função do aumento da complexidade das relações que se estabelecem diariamente entre seus vários agentes. Desta forma tornou-se necessária melhor compreensão por parte dos administradores ao tomar decisões de modo a possibilitar captar a flexibilidade gerencial. Neste sentido conforme ressaltam Dixit e Pindyck (1995), as opções criam flexibilidade e, num mundo de incertezas, a habilidade de se avaliar e usar a flexibilidade é crítica.

Diante do exposto o tema que se apresenta é:

**PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES DE COMPRA NO MERCADO BRASILEIRO: UMA ABORDAGEM RELATIVA DE MÉTODO NUMÉRICO FRENTE AO MODELO DE BLACK & SCHOLES.**

## 1.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O presente estudo a partir do tema de pesquisa tem como problema a seguinte questão:

**A UTILIZAÇÃO DE MÉTODO NUMÉRICO TRADICIONAL APLICÁVEL A AVALIAÇÃO DE OPÇÕES DE COMPRA AMERICANAS FRENTE À UTILIZAÇÃO DO MODELO DE BLACK & SCHOLES PODE SER APLICADO AO MERCADO DE CAPITAIS BRASILEIRO?**

## 1.3 OBJETIVOS DA PESQUISA

### 1.3.1 Objetivo Geral

Comparar o desempenho de um método numérico tradicional aplicável à avaliação de opções de compra americanas frente à utilização do modelo de precificação de Black & Scholes em relação ao preço de mercado.

### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Realizar estudo comparativo da aplicação de método numérico tradicional às opções de compra de ações da empresa Telemar listada na Bolsa de Valores de São Paulo de forma a diferenciá-lo quanto seu ajustamento em relação ao preço da opção de mercado;
- Verificar o nível de precificação do método de Black & Scholes quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *in-the-money*;
- Verificar o nível de precificação do método de Cox, Ross e Rubinstein quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *in-the-money*;
- Verificar o nível de precificação do método de Black & Scholes quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *at-the-mone*y;

- Verificar o nível de precificação do método de Cox, Ross e Rubinstein quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *at-the-money*;
- Verificar o nível de precificação do método de Black & Scholes quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *out-the-mone*y;
- Verificar o nível de precificação do método de Cox, Ross e Rubinstein quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *out-the-money*;
- Verificar a influência da utilização de diferentes formas de estimação de volatilidades na aplicação de método numérico tradicional e do método de Black & Scholes às opções de compra de ações da empresa Telemar listada na Bolsa de Valores de São Paulo de forma a diferenciá-los quanto ao seu ajustamento em relação ao preço da opção de mercado.

## 1.4 JUSTIFICATIVAS TEÓRICA E PRÁTICA

O estudo de precificação de opções, no mercado de capitais brasileiro, pode contribuir de forma teórico-prática à comunidade acadêmica e também à comunidade empresarial.

### 1.4.1 Justificativa teórica:

De acordo com CHEW (1999) no prefácio de sua obra, a necessidade de garantir a saúde financeira do negócio e de oferecer maior segurança aos acionistas levou a um forte incremento do uso de derivativos nos Estados Unidos, especialmente como ferramenta de proteção contra riscos de taxa de juros. No Brasil também já se nota incremento na procura por este tipo de investimento, como forma de melhorar os resultados financeiros das empresas comprimidos pelo acirramento da competição empresarial, pela recessão econômica e pela diminuição da rentabilidade das aplicações financeiras mais tradicionais. Os derivativos[1] também têm sido procurados como prevenção contra a instabilidade das taxas de juros, flutuação cambial, variações nos preços das *commodities* e nos índices de ações.

O objetivo mais importante do avaliador é, através da aplicação de uma teoria específica ou algumas combinadas, atingir não necessariamente um só valor, mas uma região de preço para o ativo. É necessário nunca perder de vista que, em qualquer análise que esteja sendo realizada, existem duas dimensões que jamais podem ser ignoradas: o potencial de retorno seja de lucros ou de fluxo de caixa, e o risco embutido nessa projeção. PÓVOA (2004, p. 11).

Ao tornar mundial a crise[2] especulativa inicialmente localizada na Ásia reitera-se a necessidade de proteção frente a um ambiente cada vez mais volátil onde a América Latina caracteriza-se historicamente como sujeita a planos econômicos sucessivos e às mais variadas linhas governamentais tem garantido a perpetuação de dúvidas quanto ao ambiente político, tributário, monetário e cambial que cercam as empresas atuantes nesta região.

Investimentos estratégicos são descritos por LINT e PENNINGS (1998) como sendo posicionamento da organização com respeito à incerteza futura de tal forma que a proveja com flexibilidade para responder apropriadamente às mudanças circunstanciais. Empiricamente os modelos baseados em opções provêm o primeiro passo em direção à integração entre finanças e estratégia, na medida em que seus resultados coincidem com o pré-julgamento da experiência de uma administração sênior.

No ambiente atual existe necessidade de se entender como a estratégia da corporação e a execução interagem entre si e como isto afeta o valor das oportunidades do negócio. As decisões de investimento de hoje, segundo AMRAN e KULATILAKA (2000), freqüentemente requerem que os analistas aceitem:

- Eles não podem, com confiança, entender um futuro muito distante;

[1] SANTOS (1998, p. 77) Instrumento financeiro de cujo preço de mercado deriva do preço de mercado de um ativo real ou outro instrumento financeiro.

[2] SANVICENTE (2003, p. 64-65) destaca o mecanismo (*circuit breaker*) que implica a suspensão dos negócios quando o mercado cai até certa porcentagem em relação ao dia anterior. No Brasil, hoje, uma regra como essa impede efetivamente que o Índice Bovespa caia mais de 10% no espaço de um dia. Este mecanismo foi criado em função do fato de que em 19 de outubro de 1987 ("segunda-feira negra") os índices do mercado norte americano de ações caíram pouco mais de 20% num único dia.

- A empresa fará o primeiro investimento com a clara expectativa de que o investimento necessitará ser expandido ou modificado caso o projeto siga adiante, ou abandonado, caso a idéia não pareça promissora;
- A administração deve comunicar ao público novidades sobre o sucesso do projeto ou desapontamentos, mesmo que o projeto não tenha gerado fluxo de caixa positivo.

De acordo com HARRISON & PELLETIER (2000), em termos financeiros, "uma estratégia de negócios é muito mais semelhante a uma série de opções do que a uma série de fluxos de caixa estático".

### 1.4.2 Justificativa prática:

Em termos práticos, este trabalho apresenta revisão acerca de conceitos necessários para a implementação de tais modelos, bem como a evidenciação dos resultados de sua implementação. Justifica-se ainda, frente à importância dos modelos de Cox, Ross e Rubinstein e de Black & Scholes visto a sua larga utilização como sistemas de precificação de opções no mercado financeiro nacional e internacional, bem como sua utilização sobre opções de compra da empresa Telemar em função de sua importância histórica e de participação e liquidez no mercado de ações brasileiro.

# 2 BASE TEÓRICO-EMPÍRICA

Esta parte do trabalho tem por objetivo apresentar conceitos relativos à Teoria das opções financeiras, modelo de *Black & Scholes*, volatilidade e métodos numéricos mais comuns.

## 2.1 TEORIA DE OPÇÕES FINANCEIRAS

De acordo com HULL (2003, p. 22) há dois tipos básicos de opções, a opção de compra (*call option*) e a opção de venda (*put option*). A primeira dá ao detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar um determinado ativo em uma determinada data, por um certo preço. Já a opção de venda dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de vender um determinado ativo em uma determinada data por um certo preço. Sendo que este preço de contrato é conhecido como preço de exercício (*strike price*), a data de contrato é conhecida como data de vencimento (*expiration date* ou *maturity*). As opções podem ser ainda do tipo americanas (*american options*) ou européias (*european options*), onde as americanas podem ser exercidas a qualquer tempo até a data de vencimento, já as européias podem ser exercidas somente na data de vencimento.

SILVA NETO (1997, p. 88) destaca ainda que as opções podem ser classificadas por classe (definida pelo prazo de vencimento ou data de vencimento ou último dia útil de exercício) e também por série (dada por seu preço de exercício).

Quanto à probabilidade de exercício (relação de seu preço de exercício com o preço do ativo subjacente), as opções podem ser classificadas da seguinte forma:

QUADRO 1 – CLASSIFICAÇÃO DE OPÇÕES QUANTO À PROBABILIDADE DE SEU EXERCÍCIO

| Classificação | Opção de compra |
|---|---|
| Dentro-do-dinheiro (*in-the-money*) | Preço do objeto é maior do que o preço de exercício |
| No-dinheiro (*at-the-money*) | Preço do objeto é igual ao preço de exercício |
| Fora-do-dinheiro (o*ut-of-the-money*) | Preço do objeto é menor do que o preço de exercício |

FONTE: SILVA NETO (1997, p. 89)

A maioria das opções negociadas são americanas, porém as opções européias são normalmente mais fáceis de se analisar e algumas propriedades das opções americanas são freqüentemente deduzidas das opções européias.

A teoria de precificação de opções de acordo com COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979) possui uma longa e ilustre história, mas ela só se tornou revolucionária em 1973 como um instrumento financeiro quando Fischer Black & Myron Scholes[3] apresentaram a fórmula para avaliação de opções do tipo européia.

Conforme destacam MACHADO-SANTOS e FERNANDES (2001, p. 1), "como mercado organizado (regulamentado), as opções são muito recentes. Apesar de terem sido transacionadas durante muitos anos no chamado mercado *over-the-counter* (fora de bolsa), apenas em 1973, com a abertura da *Chicago Board Options Exchange* (CBOE)[4], surgem os primeiros contratos estandardizados de opções (negociados em bolsa)".

[3] Ganhadores do Prêmio Nobel de Economia de 1997.
[4] A *Chicago Board of Trade* responsável por oferecer contratos futuros de diferentes objetos de negociação como milho, aveia, soja, farelo de soja, óleo de soja, trigo, prata, títulos do Tesouro americano e *Major Market Stock Index* (índice de ações), em abril de 1973 criou-se a CBOE para a negociação de opções de ações, originalmente com o lançamento de opções sobre os Títulos do Tesouro Americano (*T-Bills*). HULL (1996. p. 3-6).

No Brasil, as principais bolsas que negociam opções são a Bolsa de Mercadorias e Futuros (BM&F) de São Paulo, que negocia opções sobre ativos financeiros como taxa de câmbio e de juros e *commodities* como algodão, cacau, café e soja. Além desta, a Bolsa de Valores de São Paulo (Bovespa) negocia opções sobre ações de algumas empresas[5].

As opções do mercado financeiro fazem parte de um conjunto de instrumentos denominados derivativos e proporcionam a seu possuidor o direito de comprar ou de vender ativos a um preço predeterminado.

De acordo com SILVA NETO (1996, p. 19) pode-se conceituar opção por: "todo contrato que dá ao seu detentor ou comprador o direito, mas não o dever, de comprar, se for uma opção de compra, ou vender, se for uma opção de venda, determinado bem (objeto negociado), pelo preço acordado na efetivação do contrato (preço do exercício)". Deste surge a figura do lançador da opção (ou vendedor) que tem a obrigação de vender, no caso de uma opção de compra, ou de comprar, no caso de uma opção de venda, o objeto do contrato pelo preço acertado na efetivação do contrato, se, e somente se, solicitado pelo titular da opção. Deve-se notar que o vendedor da opção sempre irá fazer o contrário do que indica o nome da opção: o vendedor da opção de compra irá vender, se exercido, e o da opção de venda irá comprar, caso o titular da *put* assim o solicite.

ROSS et al (1995, p. 442) destacam que "as opções de venda e de compra funcionam como peças fundamentais de contratos de opção mais complexos" desta forma podem sofrer combinações as quais podem proporcionar a eliminação de riscos, bem como podem garantir lucros.

Os fatores que influenciam o prêmio de uma opção dividem-se em dois grupos: o primeiro (preço do exercício e data de vencimento) e o segundo (preço do ativo-objeto, a taxa de juros, a volatilidade do preço do ativo-objeto e os dividendos no caso do ativo-objeto ser uma ação) e a forma pela qual estes fatores influenciam os prêmios das opções, DAMODARAN (2002a, p. 444) destaca esta relação no quadro 2.

---

[5] Informações coletadas dos sites oficiais destas entidades.

QUADRO 2 – FATORES QUE INFLUENCIAM OS PRÊMIOS DAS OPÇÕES DE COMPRA

| Fator | Efeito no Valor da Opção de Compra |
|---|---|
| Aumento no preço da ação | Aumenta |
| Aumento no preço de exercício | Diminui |
| Aumento na variância do ativo subjacente | Aumenta |
| Aumento no prazo até o vencimento | Aumenta |
| Aumento nas taxas de juros | Aumenta |
| Aumento nos dividendos pagos | Diminui |

FONTE: DAMODARAN (2002a, p. 444)

COPELAND e ANTIKAROV (2001, p. 13) destacam também dois outros tipos de opções, as compostas e as arco-íris, a saber:

> opções compostas: onde os investimentos planejados em fases enquadram-se neste tipo. Quando você se propõe a construir uma fábrica, pode escolher construí-la em etapas – etapa do projeto, etapa de engenharia e etapa de construção. Você tem a opção de parar ou adiar o projeto ao fim de cada fase. Assim, cada fase é uma opção contingente ao exercício anterior de outras opções – uma opção sobre uma opção (ou opções). Finalmente, as opções que são movidas por múltiplas fontes de incerteza são denominadas opções arco-íris. (...) Muitas das aplicações no mundo real exigem uma modelagem em termos de opções compostas do tipo arco-íris.

Em relação à formação do preço das opções, HULL (1996, p. 187) destaca que “o valor total de uma opção pode ser considerado a soma de seu valor intrínseco com seu valor tempo”.

O valor intrínseco de uma opção é definido como o máximo entre zero e o valor que teria se exercida imediatamente. A partir desta relação, o valor intrínseco de uma opção no dinheiro tem valor zero, numa opção fora-do-dinheiro seu valor será negativo e só seria positivo para as opções classificadas como dentro-do-dinheiro, nesta o tomador ou o comprador poderá realizar lucro ao exercer imediatamente a opção (do tipo americana). Esse então seria dado pela diferença entre o preço de mercado do ativo subjacente a risco da opção e o preço de exercício da opção. Desta forma, o valor intrínseco existiria quando em uma *call* o preço de exercício for menor do que o preço do ativo subjacente, e quando em uma *put* o preço do exercício for maior que o preço do ativo subjacente.

O valor temporal de uma opção de acordo com SILVA (1999, p. 59) "é simplesmente a avaliação do mercado de que parte do valor da opção está fundamentado na possibilidade de que o valor intrínseco pode aumentar no futuro".

O valor tempo é caracterizado de acordo com HULL (1996, p. 187) de forma que ele só existirá quando "o ideal para o titular de uma opção americana dentro-do-dinheiro é aguardar o vencimento, em vez de exercê-la imediatamente". MERTON (1973) destaca que o exercício antecipado de uma opção de compra não proporciona resultados ótimos se o ativo-objeto não distribui dividendos. Entretanto, DAMODARAN (2002a, p. 444) evidencia que embora o exercício antecipado não seja o ideal, existem pelo menos duas exceções a esta regra. Uma é quando o ativo subjacente paga dividendos elevados, reduzindo assim o valor do ativo e das opções de compra sobre o mesmo. A outra é quando um investidor detém tanto o ativo subjacente quanto grande quantidade de opções de venda *in-the-money* sobre aquele ativo, num momento em que as taxas de juros estiverem altas.

## 2.2 MODELO DE BLACK & SCHOLES

Num artigo clássico, publicado em 1973 no *Journal of Political Economy*, Fischer Black e Myron Scholes apresentaram uma fórmula matemática para avaliar opções européias sem o pagamento de dividendos. O modelo parte de um conceito de que o ativo objeto de uma opção segue um comportamento estocástico[6] contínuo

[6] Segundo DIXIT e PINDYCK (1994, p. 72), o movimento geométrico browniano é geralmente utilizado para modelar preços de ações, bem como a taxa de juros e outras variáveis financeiras e econômicas.
Já SANTOS (1999), o descreve como sendo um processo que segue uma variável cujo valor se altera aleatoriamente ao longo do tempo.

na forma de um Movimento Browniano Geométrico (*Geometric Brownian Motion*). Desta forma pode-se assumir que a distribuição probabilística em uma data futura dos preços do ativo subjacente é lognormal e que por decorrência, que a distribuição probabilística das taxas de retorno calculadas de forma contínua e composta entre duas datas também é normal.

A dinâmica do retorno do ativo adotado no modelo de Black & Scholes segue o conceito de passeio aleatório (*random walk*), que se baseia na hipótese de eficiência de mercado. De acordo com essa hipótese tem-se:

a) os preços dos ativos refletem toda informação passada;
b) o mercado responde imediatamente ao surgimento de nova informação.

Uma maneira de representar matematicamente a dinâmica do retomo do ativo, que é encontrada em MERTON (1973) e em HULL (2005), pode ser descrita pela expressão abaixo, também conhecida como movimento browniano geométrico.

$$dS/S = \mu\, dt + \sigma\, dz$$

onde:

*dS/S* = taxa de retorno discreta do ativo;
μ = esperança da taxa de retorno discreta do ativo;
*dt* =intervalo de tempo infinitesimal;
$\sigma$ = desvio padrão da taxa de retorno;
*dz* = variável aleatória com distribuição normal N(0; *dt)*.

Supondo-se a existência de uma opção de compra que seja função do preço do ativo (S) e do tempo (t):

$$C = f(S, t)$$

O diferencial (*dC*) da função acima pode ser obtido pela aplicação do Lema de Itô, conforme observam WILMOTT *et al* (1997, p.19) e BRIYS *et al* (1998, p. 64).

O resultado da utilização do Lema de Itô produz uma expressão conhecida como equação diferencial estocástica do derivativo:

$$dC = \left[\mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S}\right] dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dz$$

onde: *dC* = diferencial do preço do derivativo.

Utilizando-se de desenvolvimentos matemáticos obtém-se a equação diferencial parcial de Black & Scholes.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} = rC$$

A partir da resolução da equação acima encontrada em BRIYS *et al* (1998) e WILMOTT *et al* (1997, p. 76), o resultado será o valor da opção de compra do modelo de Black & Scholes:

$$C = S \times N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \times N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\ (S/K) + \left(r + \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

onde:

S = preço do ativo-objeto;

K = preço de exercício;

r = taxa livre de risco contínua;

$\sigma$ = volatilidade do retorno do ativo-objeto;

T- t = prazo da opção;

N(dx) = função probabilidade acumulada no intervalo ] -∞, $d_x$ ] de uma variável com distribuição normal com média zero e desvio padrão igual a um.

Na expectativa de um melhor entendimento da fórmula de Black & Scholes, no limite, se o preço de um ativo for muito grande, fazendo com que a opção se torne tão dentro do dinheiro que seu exercício seja praticamente garantido, o prêmio dessa opção será seu valor intrínseco, isto é, dado pela diferença entre o preço do ativo-objeto e o valor presente do preço do exercício (S – VP(K)) no caso de uma *call*. O termo (S x N($d_1$)) na expressão da *call* representa o preço do ativo-objeto em qualquer momento multiplicado pela probabilidade acumulada de $d_1$, sendo este, subtraído da segunda parte da equação ($Ke^{-r(T-t)}$ x N($d_2$)) a qual, representa o preço do exercício trazido a valor presente multiplicado pela probabilidade acumulada de $d_2$, onde N($d_2$) representa a probabilidade acumulada da opção vir a ser exercida sendo proporcional à volatilidade da ação objeto.

Na derivação de sua fórmula, Black e Scholes (1973, p. 640)[7] assumiram certas condições ideais em relação ao comportamento do mercado, como:

- A taxa de desconto é livre de risco e tem valor constante;
- O preço dos ativos tem distribuição lognormal com média e desvio padrão constantes;
- O ativo objeto não paga dividendos ou qualquer outro rendimento durante a vida da opção;
- Não existem custos de transação, impostos, ou margens. A adição de qualquer um desses custos modifica a operação de arbitragem, levando a um intervalo de preço para a opção;

[7] BARBEDO (2003, p.5) destaca que o modelo de Black & Scholes tem sido o modelo mais utilizado para a avaliação de opções pelo mercado.

- Não existem oportunidades de arbitragem livre de riscos (princípio da ausência da arbitragem é válido). Essa condição garante que o preço do modelo é o que está em vigor no mercado;
- A negociação com o ativo objeto é contínua e o ativo é divisível. Essa hipótese permite que se use o modelo em tempo contínuo;
- Vendas a descoberto são permitidas e se pode tomar emprestado ou aplicar qualquer quantia à taxa de juros corrente. Isso permite que se faça a operação de arbitragem onde a carteira equivalente contém uma posição vendida no ativo objeto, permitindo assim a compra da opção quando ela for barata.

Algumas generalizações foram realizadas no trabalho de MERTON (1973) a respeito do modelo de Black & Scholes, destaca-se então que uma opção de compra européia cujo ativo objeto pagava dividendos foi avaliada, mostrando-se que uma opção americana sobre um ativo objeto que não paga dividendos tem o mesmo valor que a opção européia de compra sobre o mesmo ativo objeto.

Segundo SANVICENTE (2003, p. 92-93), de modo complementar a esta narrativa anterior destaca-se que:

> (...) no caso específico do mercado brasileiro, em relação a uma das hipóteses do modelo de Black & Scholes, a de que a ação não distribui dividendos até a data de vencimento da opção, ou a opção é protegida contra dividendos, o regulamento da Bovespa prevê tal tipo de proteção para opções de ações, na forma de reajuste do preço de exercício, para baixo, pelo valor do dividendo que uma ação distribua antes da data de vencimento da ação. (...) Além disso, a lista de hipóteses deixa claro que a opção de compra avaliada com base na fórmula de Black & Scholes é do tipo europeu; na própria Bovespa, as opções de compra de ações são americanas (podem ser exercidas antes da data de vencimento). Como esse direito adicional deveria valer alguma coisa, a fórmula subavaliaria a opção, ao tratá-la como européia. Na verdade, esse problema é eliminado graças à proteção contra dividendos prevista no regulamento do mercado de opções de compra de ações da Bovespa”.

De forma complementar, BRITO (1989, p. 241) destaca em sua abordagem relativa às propriedades básicas da formação de prêmios em mercados de opções de compra que “uma opção brasileira deve ter um valor pelo menos igual ao de uma opção americana, que, por sua vez, deve ter um valor pelo menos igual ao de uma opção européia em idênticas condições”. Esta afirmação pode ser comprovada por argumentos de dominância, já que “uma opção brasileira tem todos os direitos de uma opção americana e mais proteção contra dividendos, a opção americana tem todos os direitos de uma opção européia, tendo ainda o direito adicional de poder ser exercida antecipadamente.

## 2.3 VOLATILIDADE

A volatilidade[8] de acordo com HULL (1996. p. 270-280) é a medida de nossa incerteza quanto aos retornos proporcionados pela ação e pode ser causada unicamente pela sucessão de fatos aleatórios de novas informações sobre retornos futuros da ação ou provém da negociação.

De acordo com SILVA NETO (1996, p. 137) “é, talvez, a variável mais importante para quem atua no mercado de opções e sem dúvida, para os que neste mercado aplicam os modelos teóricos de determinação de prêmios”. O modelo de Black & Scholes assume que a volatilidade futura do retorno de uma ação é constante durante a vida da opção e que o retorno de uma ação tem uma distribuição log-normal, esta ocorre em função da representação da flutuação dos preços dos ativos de mercado serem representadas em valores percentuais e não em valores monetários em função da inexistência de possibilidade de existência de valores negativos dos ativos subjacentes.

Em relação à premissa da volatilidade do modelo de Black & Scholes, (BLACK, 1976) destaca que os retornos das ações possuem propriedades como

---

[8] A volatilidade associada ao preço de uma mercadoria é nada menos que a variação de preço referente a um desvio-padrão da média, expresso em porcentagem, por um período de tempo predeterminado. SILVA NETO (1996, p. 154).

caudas largas, assimetria e variância mutável ao longo do tempo. No mercado brasileiro, ADLER *et al*. (1999) e LANARI (2000) constatam que a premissa de volatilidade constante do preço das ações não se verifica.

SILVA NETO (1996, p. 157-160) destaca que a volatilidade pode ser obtida a partir de duas classificações básicas: a histórica e a implícita.

Com a finalidade de calcular uma estimativa para o parâmetro volatilidade histórica, pode-se calcular o desvio padrão histórico dos retornos, a utilização de métodos estatísticos supõe que os dados passados permitem prever o futuro. Destes, o mais comum é tomar o desvio padrão da variação do logaritmo do preço do ativo objeto. Esse é o procedimento estatístico padrão para se calcular a volatilidade de uma série, no caso a taxa contínua de variação do preço do ativo objeto terá distribuição normal.

$$Volatilidade_{estimada} = Desvio\ padr\tilde{a}o\left(\left\{\log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right\}_{t=1}^{T}\right)$$

Por meio da volatilidade histórica, estimativas da volatilidade futura podem ser obtidas a partir de uma série histórica, assumindo-se que a volatilidade futura do ativo-objeto será a mesma que a volatilidade passada.

De acordo com HULL (2005, p. 239), a volatilidade histórica pode ser obtida pela seguinte fórmula:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n}u_i)^2}$$

com:

$$u_i = \ln(\frac{S_i}{S_{i-1}})$$

Algumas questões práticas sobre estimação da volatilidade histórica merecem ser discutidas conforme ressalta SILVA NETO (1996, p. 157). A primeira é o prazo da amostra utilizada, quão extensa deve ser a amostra para prever corretamente a volatilidade. Quanto maior a amostra, maior o nível de confiança estatística obtido, mas também maior a quantidade de informações antigas que podem não ser mais relevantes.

A segunda questão é o intervalo de tempo do preço coletado (dados diários, semanais, mensais, ...), se a distribuição do preço é lognormal, então não deve fazer muita diferença o tamanho do intervalo. A terceira é que preço usar, de fechamento, abertura, média ou vários destes.

Existem também estimadores que se utilizam da estatística de forma a tentar prever a volatilidade. DUARTE *et al* (1996) descrevem e comparam estimadores estatísticos para o caso brasileiro. BARCINSKI *et al* (1997) comparam diversos estimadores tipo GARCH e sua aplicação ao mercado brasileiro.

Dentre estes, encontram-se estimadores de valores extremos (EVE) que tomam como base o preço máximo e mínimo e o número de observações da amostra, segundo estudo apresentado por Parkinson (1976), pode-se definir um estimador de acordo com a seguinte fórmula:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} \frac{(H_t - L_t)^2}{4 \log 2}$$

onde:

H é o logaritmo do preço máximo;

L é o logaritmo do preço mínimo;

T é o número de observações na amostra.

Já GARMAN e KLASS (1980) destacam um estimador composto por maior número de informações, utilizando-se dos preços de fechamento, máximo e mínimo e o número de observações da amostra conforme destacado a seguir:

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} \left[ \frac{(H_t - L_t)^2}{2} + 0{,}6237 A^2 \right]$$

onde :

H é o logaritmo do preço máximo;

L é o logaritmo do preço mínimo;

T é o número de observações na amostra;

*A* é o logaritmo do preço de fechamento.

Alguns estudos, como GARMAN e KLASS, combinam esses vários preços. Sobre todas essas questões não existem provas definitivas da melhor alternativa conforme destacam os próprios autores.

Segundo FIGLEWSKI (1999), “(...) a volatilidade implícita é a expectativa de mercado para a volatilidade futura”.

Desta forma, a volatilidade implícita (ISD) é interpretada como sendo a estimativa de mercado para a volatilidade real do ativo objeto e, como a fórmula de BLACK & SCHOLES (1973) não pode ser invertida analiticamente, seu valor deve ser calculado mediante a utilização de algum método numérico tomando-se como base os dados de mercado e utilizando-se a própria fórmula de Black & Scholes. Neste procedimento comum entre praticantes, tem-se como referência a volatilidade embutida no preço de opções que estão sendo negociadas. O cálculo é feito por iteração até se descobrir qual a volatilidade que gera através da fórmula de Black & Scholes o mesmo preço negociado no mercado. Ao se calcular a volatilidade implícita é preciso tomar cuidado em obter cotações para a opção e o preço do ativo objeto que sejam do mesmo instante, pois, do contrário, essa não seria uma volatilidade possível de ser comprada no mercado.

Com relação à volatilidade, LANARI e SOUZA (2000) evidenciam que através do modelo de Black & Scholes pode-se calcular a volatilidade implícita ao se resolver a equação do modelo em termos de volatilidade tendo por base as cotações das opções de mercado, já que o modelo considera que o preço de uma ação segue um movimento geométrico Browniano com volatilidade constante. De forma oposta a idéia de volatilidade constante.

COSTA (1998, p. 66) destaca que ao contrário da premissa tradicional de que a volatilidade deve permanecer constante durante o prazo que se analisa, surge o conceito de heterocedasticidade, onde, na prática, corresponde a dizer que a volatilidade possa tender, mudar dinamicamente com o tempo, talvez continuamente, característica de uma série temporal em que a variância de uma informação de hoje esteja correlacionada com a variância de dados do passado.

Em relação a este antagonismo de volatilidade constante ou não, surge uma discussão sobre um efeito importante, LANARI e SOUZA (2000, p. 2-3) destacam que:

> Quando utilizamos B&S para calcular a volatilidade implícita de uma série opções de mesmo prazo de vencimento, verificamos que, ao contrário do pressuposto de B&S, os valores da volatilidade implícita não são constantes, mas variam em função do preço de exercício das opções. Quando os diversos valores da volatilidade implícita são representados na ordenada de um gráfico tendo como abcissa o grau de moneyness da opção, verifica-se que, geralmente, as opções at-the-money têm menores valores de volatilidade implícita do que as opções in-the-money e out-of-the-money. Isso faz com que essa curva tenha um formato de U, e seja conhecida como efeito sorriso. Essa diferença entre a premissa do modelo de B&S e as cotações das opções nos mercados de capitais indicam que existem desvios empíricos em relação a esse modelo. O desvio empírico de B&S pode ser influenciado por diversos fatores, como por exemplo o tempo para vencimento das opções e a correlação entre o retorno ativo subjacente à opção (ou ativo objeto) e a volatilidade instantânea do preço do ativo subjacente à opção.

De acordo com LEMGRUBER (1995, p.38), “se o modelo de BLACK & SCHOLES é válido, (...) sabe-se que existe apenas um único ISD que soluciona a fórmula de Black & Scholes”.

Uma variante ao cálculo da volatilidade histórica consiste em se fazer uma alteração na igualdade da proporção entre os dias passados, surge então a média móvel exponenciada ou alisamento exponencial (EWMA – *Exponentially Weighted Moving Average*).

Esta metodologia também considera que a melhor previsão da volatilidade futura é o desvio padrão de uma amostra de “n” retornos passados. Há, no entanto, uma diferença fundamental em relação à metodologia anterior, para calcular o desvio padrão dos retornos dos "n" últimos dias, atribui-se importância, um peso decrescente a cada retorno para o cálculo da volatilidade do período, à medida que ele se torna mais remoto. A redução dos pesos deve ocorrer de forma exponencial, justificando o nome da metodologia.

Seja α (onde 0 < α < 1) o peso do retorno mais recente. O peso do retorno de dois dias anteriores será α x (1-α) e o do n-ésimo dia anterior será α x $(1-\alpha)^{N-1}$. É importante ressaltar que, quanto maior for o α escolhido, maior será a importância atribuída aos dias mais recentes, comparativamente à importância dada aos dias mais distantes (ver anexo 1).

Como há restrição de que 0 < α < 1, a soma dos termos da progressão geométrica, ou seja, a soma dos pesos dos dias considerados será menor do que a unidade (somente se n tendesse ao infinito a soma tenderia à unidade). Uma vez que a soma dos pesos dos retornos tem que ser igual a um, torna-se necessário fazer um ajuste nos pesos de cada dia. O peso de cada dia, antes do ajuste, deverá ser dividido pela soma dos pesos antes do ajuste, com o objetivo de que a soma dos pesos após o ajuste passe a ser igual a um.

Finalmente, o estimador da volatilidade futura, de acordo com esta metodologia, é o seguinte:

$$\sigma\, ponderada = \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha \text{ x } (1-\alpha)^{\text{i-1}}}{1-(1-\alpha)^{n-1}}\, x (r_i - \bar{r})^2 \right)^{1/2}$$

onde:

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha \text{ x } (1-\alpha)^{\text{i-1}}}{1-(1-\alpha)^{n-1}} \; x \; r_i$$

Por esta metodologia de cálculo, a volatilidade estimada também se altera a cada dia, na medida em que, a cada dia, um novo retorno é incorporado ao passo que o mais antigo da janela temporal que se utiliza é descartado.

Na média móvel exponencial, novamente há a tendência de redução da influência de uma mudança de volatilidade, observada no mercado, nos dias mais recentes, sobre o cálculo da volatilidade do período, quando se utiliza uma janela temporal maior.

O presente método tem a vantagem de proporcionar ajustes em relação à importância dos dias a serem considerados, bem como, da utilização da janela temporal frente ao método de média móvel puro.

## 2.4 MÉTODOS NUMÉRICOS

Este item é composto por uma revisão dos métodos numéricos mais comuns e utilizados em precificação de opções, embora tenha sido implementado somente o mais popular, o de Cox, Ross e Rubinstein, chamado de modelo binomial.

Segundo HUMES (1984) *apud* ROCHMAN (1998), métodos numéricos são um conjunto de regras, escritas sob a forma de uma seqüência de operações elementares, que resulta na solução de um problema.

Muitos modelos matemáticos que descrevem o comportamento dos ativos objetos e suas opções resultam em equações diferenciais parciais e estocásticas que não possuem solução elementar, ou, para se obter uma solução, é necessária a elaboração de premissas que não condizem com a realidade do mercado.

De acordo com ROCHMAN (1998), no caso de precificação de opções, os métodos numéricos podem ser divididos em duas categorias. Uma primeira categoria reúne os métodos em que o processo estocástico fundamental do ativo-objeto é aproximado (métodos clássicos), como os Modelos de *Lattice* (binomial, trinomial, *adaptive mesh*) e a Simulação de Monte Carlo e uma segunda categoria reúne os métodos em que a equação diferencial parcial, que determina o preço da opção, é aproximada, como o Método de Diferenças Finitas.

Em seu artigo, Black e Scholes (1973) apresentam uma fórmula para avaliação de opções que se baseia em variáveis observáveis salvo a volatilidade do retorno do ativo objeto, a qual deve ser constante. Esta última (premissa), em particular, não tem sido satisfeita na prática, pois, conforme HULL (1997), os analistas de mercado precisam, freqüentemente, alterar a volatilidade quando usam a fórmula de Black & Scholes para calcular o valor de opções.

No caso de precificação de opções onde o processo estocástico[9] fundamental do ativo-objeto é aproximado, pode-se utilizar métodos baseados nos métodos de modelos *Lattice* e de simulação de Monte Carlo, sendo que geralmente a solução numérica está relacionada a uma equação diferencial ou a uma simulação.

De acordo com ROCHMAN (1998) os métodos de diferenças finitas são extremamente caros computacionalmente e os modelos baseados em *Lattice* (binomial, trinomial, *adaptive mesh*), são os mais econômicos e, também, os que possuem melhor acurácia.

### 2.4.1 MODELOS *LATTICE*

Os modelos conhecidos como *Lattice* buscam, através de um passeio aleatório discreto, modelar um movimento browniano correspondente. Os modelos baseados em *Lattice* (binomial, trinomial) são considerados muito intuitivos e flexíveis, podendo ser aplicados tanto para opções européias como para americanas, que pagam ou não dividendos, derivativos de taxas de juros, e também para as opções exóticas.

#### 2.4.1.1 MODELO BINOMIAL

Em 1979, Cox, Ross e Rubinstein (CRR) publicaram um trabalho sobre o apreçamento de opções usando método *Lattice*, extensões e generalizações de tal modelo foram desenvolvidas e em especial aquelas destinadas à avaliação de derivativos multidimensionais.

---

[9] SANTOS (1998) Define como um proceso que segue uma variável cujo valor se altera aleatoriamente ao longo do tempo. O processo estocástico de maior interesse na área de finanças é o Processo de *Markov*.

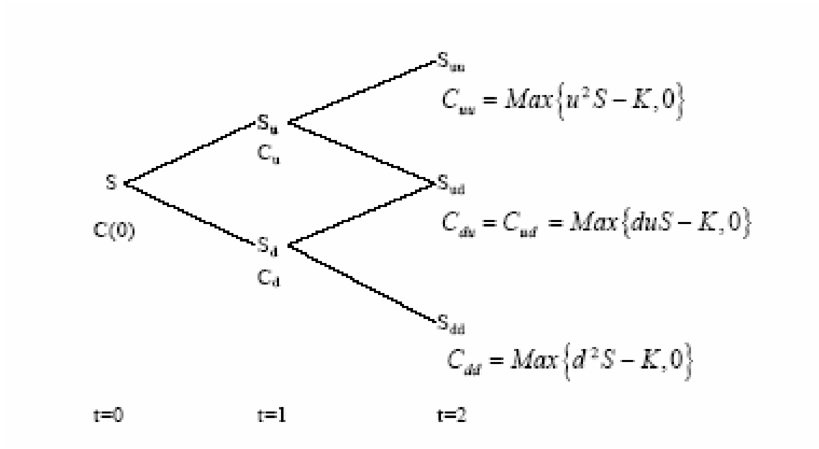
O modelo binomial assumia que o preço do ativo subjacente seguisse um processo binomial multiplicativo ao longo de sucessivos intervalos de tempo discretos. Além disso, o fato de as probabilidades de ocorrência de movimentos ascendentes e descendentes de preços não constarem das fórmulas de apreçamento, implica que, mesmo se investidores diferentes possuírem outras probabilidades subjetivas sobre tais movimentos, ainda assim poderiam concordar sobre a relação entre o prêmio da opção, o preço do ativo-objeto e suas taxas de retorno e a taxa de juro livre de risco. A idéia básica utilizada foi a mesma, ou seja, conhecendo-se as hipóteses sobre a distribuição de probabilidade dos preços dos ativos subjacentes e certificando-se de que o apreçamento neutro ao risco é apropriado, podem ser utilizadas aproximações discretas.

O modelo binomial possui a premissa de que o ativo-objeto, no caso, uma ação, segue um processo multiplicativo binomial no decorrer do tempo. Em cada período de tempo, a ação pode ter seu valor aumentado *u* vezes com probabilidade *q*, ou reduzido *d* vezes com probabilidade (1-q) sujeito à condição de que *d* é o inverso de *u.*

De acordo com DAMODARAN (1997, p. 445), "o modelo binomial de precificação de opções é baseado numa fórmula simples do processo de preços de ativos, em que o ativo, a qualquer momento, pode deslocar-se para um de dois preços possíveis".

O modelo se utiliza de algumas premissas como: a taxa livre de riscos deverá ser constante; os indivíduos podem emprestar e tomar quantias emprestadas à mesma taxa; não existem impostos nem custos de transação, ou requerimentos de margem; e a venda a descoberto é permitida sem restrições, com total uso dos seus recursos.

Conforme a abordagem desenvolvida por COX, ROSS e RUBINSTEIN (1979) considere-se uma árvore binomial de dois períodos de uma opção de compra a seguir:




Pela avaliação neutra ao risco, a cada nó da árvore binomial, o preço da opção pode ser calculado como o valor atual do preço esperado, segundo a probabilidade p. Sabendo p e o valor da opção no vencimento, basta andar para trás na árvore binomial até chegar ao preço da opção na data inicial.

No período 1, o valor da opção nos dois estados, C u e C d , é calculado por:

$$C_u = \left[ \frac{pC_{uu} + (1-p)C_{ud}}{r} \right]$$

$$C_d = \left[ \frac{pC_{du} + (1-p)C_{dd}}{r} \right]$$

Aplicando o mesmo processo para C(0), chegamos ao preço justo da opção, de acordo com a avaliação neutra ao risco e um modelo binomial para o preço do ativo objeto.

$$C(0) = \left[ \frac{pC_u + (1-p)C_d}{r} \right]$$

Para uma descrição melhor do comportamento do preço do ativo objeto, pode-se tomar um número maior de períodos. O percentual de alta ou baixa do ativo objeto pode ser obtido da volatilidade deste:

$$u = e^{\sigma\sqrt{t/n}} \quad \therefore \quad d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}}$$

onde:

t é o prazo da opção de acordo com a medida da volatilidade;
$\sigma$ é a medida da volatilidade do ativo objeto;
n é o número de períodos em que fazemos o ativo objeto se movimentar.

#### 2.4.1.2 MODELO TRINOMIAL

O modelo trinomial (também conhecido como *three-jump model*), foi inicialmente desenvolvido por PARKINSON (1977) como uma forma de resolver numericamente uma integral que representava o valor de uma opção de venda americana. Posteriormente, BOYLE (1986) formalizou o modelo trinomial, para tal, o autor utilizou a abordagem neutra em relação ao risco ao invés da estratégia de replicação da carteira de *hedging* de Cox, Ross e Rubinstein (1979). O motivo desta mudança de estratégia é a impossibilidade da formação da carteira de *hedging* (composta pelo ativo-objeto e títulos livres de risco) que forneça os mesmos proventos da opção.

O modelo trinomial diferencia-se do binomial por possuir, para cada ponto da árvore, três caminhos diferentes: aumento do preço do ativo-objeto (limite superior), redução do preço do ativo-objeto (limite inferior), e manutenção do preço do ativo-objeto (este estado pode ser substituído por um que esteja entre os limites superior e inferior).

O modelo trinomial pode ser considerado como um caso particular do modelo de diferenças finitas explícito, pois o valor de cada nó da árvore é determinado pelos valores dos três nós subseqüentes a ele.

Os parâmetros do modelo trinomial podem ser definidos, segundo HULL (1997), da seguinte forma:

$$u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}};\ d = 1/u$$

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}$$

$$p_m = \frac{2}{3}$$

$$p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{6}$$

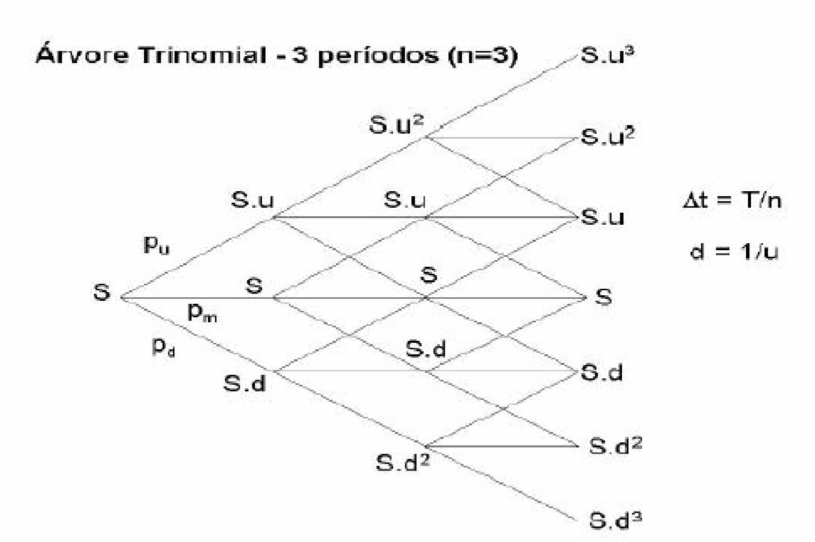
O valor da opção no nó *i* é dado pela fórmula:

$$C_i = \left[p_u.C_{ui} + p_m.C_{mi} + p_d.C_{di}\right] / e^{r.\Delta t}$$

onde:

- *Ci* é o valor da opção no nó *i*;
- *pu*, *pm*, e *pd* são valores relativos às probabilidades de subida, manutenção ou descida da árvore;
- *Cui* é o valor da opção no nó cujo ativo-objeto aumentou *u* vezes em relação ao nó *i*;
- *Cmi* é o valor da opção no nó central *m*, cujo ativo objeto não alterou seu valor em relação ao nó *i*;
- *Cdi* é o valor da opção no nó cujo ativo-objeto diminuiu *d* vezes em relação ao nó *i;*
- *r* é a taxa de juros livre de risco;
- d*t* é o intervalo de tempo entre dois períodos consecutivos.

As opções americanas no modelo trinomial são avaliadas da mesma forma descrita no modelo binomial, ou seja, comparando-se o exercício imediato da opção, com o valor presente dos valores das três opções, no final do período seguinte. Na figura abaixo, vê-se a construção de uma árvore trinomial de três períodos, usando-se os parâmetros anteriores:



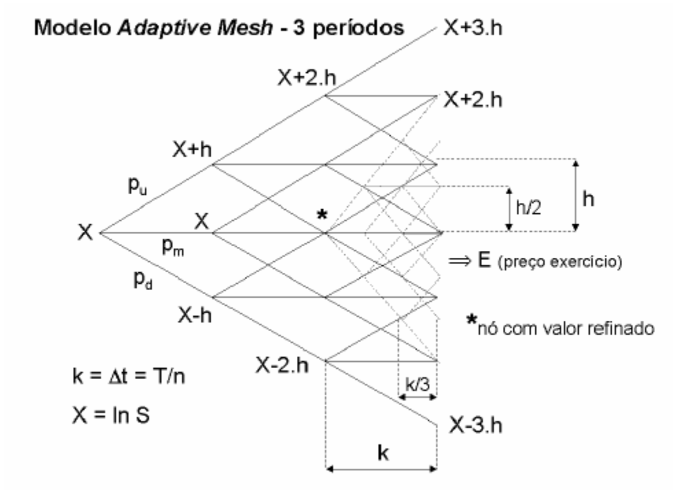

2.4.1.3 MODELO *ADAPTIVE MESH*

A idéia básica do modelo *adaptive mesh* é criar uma malha fina, ou aumentar o número de nós necessários para melhoria da convergência, apenas na área crítica ou mais sensível da árvore (binomial ou trinomial), que, no caso de uma opção européia, é a região próxima ao preço de exercício da opção. Dessa forma, aumenta-se a acurácia do resultado sem um grande aumento do custo computacional.

O procedimento para o cálculo do valor de uma opção européia ou americana é o mesmo descrito no modelo binomial. A malha fina corresponde a uma árvore binomial ou trinomial, colocada sobre a árvore principal, mas com número de períodos menor, e com tempo restante até a maturidade reduzido, como se vê na figura abaixo. A característica atrativa do modelo é de existir a possibilidade de adicionar níveis mais refinados à árvore (malha), sempre que se achar conveniente.

A figura abaixo apresenta uma versão do modelo *adaptive mesh*, com refinamento em um nó da árvore trinomial, próximo do preço de exercício da opção.

Conforme destacado por HULL (1997) os parâmetros da árvore principal são calculados de forma idêntica aos da árvore binomial, porém a malha fina têm seus parâmetros calculados com seu parâmetro de tempo (*k*) dividido por 3, e seu parâmetro de deslocamento do ativo-objeto (*h*) dividido por 4, como se nota a seguir:




O presente capítulo apresentou uma revisão a cerca de alguns métodos heurísticos.

# 3 METODOLOGIA

Neste capítulo serão abordados os parâmetros metodológicos que possibilitarão a execução do trabalho de pesquisa, bem como os métodos científicos que o pesquisador utilizou. Desta forma serão apresentados a seguir aspectos relacionados à especificação do problema de pesquisa: a especificação das perguntas de pesquisa e definição de termos e variáveis, logo após serão explicitados a delimitação e *design* de pesquisa: população e amostra de pesquisa, delineamento da pesquisa, coleta e tratamento de dados e a apresentação do método de desenvolvimento pesquisa.

## 3.1 Especificação do problema

Levando-se em consideração o objetivo geral e os específicos do presente estudo, elaborou-se as perguntas de pesquisa relacionadas ao seguinte problema de pesquisa:

A UTILIZAÇÃO DE MÉTODO NUMÉRICO TRADICIONAL APLICÁVEL A AVALIAÇÃO DE OPÇÕES DE COMPRA AMERICANAS FRENTE À UTILIZAÇÃO DO MODELO DE BLACK & SCHOLES PODE SER APLICADO AO MERCADO DE CAPITAIS BRASILEIRO?

### 3.1.1 Questões de pesquisa

- Qual o nível de precificação do método de Black & Scholes quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *in-the-money*?

- Qual o nível de precificação do método de Cox, Ross e Rubinstein quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *in-the-money*?

- Qual o nível de precificação do método de Black & Scholes quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *at-the-money*?

- Qual o nível de precificação do método de Cox, Ross e Rubinstein quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *at-the-money*?

- Qual o nível de precificação do método de Black & Scholes quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *out-the-money*?

- Qual o nível de precificação do método de Cox, Ross e Rubinstein quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *out-the-money*?

- Qual o efeito de diferentes formas de estimação de volatilidades na aplicação de método numérico tradicional e do método de Black & Scholes às opções de compra frente ao preço da opção de mercado em relação às probabilidades do exercício?

### 3.1.2 Definição de termos e variáveis

A pesquisa apresenta uma variável dependente e cinco variáveis independentes conforme exposto a seguir.

#### 3.1.2.1 Variável dependente:

- Valor da opção de compra

#### 3.1.2.2 Variáveis independentes:

- Valor do ativo sujeito a risco;
- O preço do exercício;
- Prazo de vencimento da opção;
- Desvio padrão do valor do ativo subjacente sujeito a risco;
- Taxa de retorno livre de risco ao longo da vida da opção.

#### 3.1.2.3 Definição constitutiva e operacional das variáveis

KERLINGER (1980, p. 46) destaca que as variáveis constitutivas são aquelas que “define palavras com outras palavras”.

As variáveis operacionais são aquelas que “atribui significado a um constructo ou variável especificando as atividades ou operações necessárias para medi-los ou manipulá-los” destaca KERLINGER (1980, p. 46).

As variáveis constitutivas terão seus conceitos apresentados conforme SANTOS (1998).

- a) Valor da opção de compra:

  DC: Instrumento financeiro cujo comprador tem o direito (mas não a obrigação) de comprar (de quem vende o instrumento) um ativo por um preço predeterminado, dentro de certo prazo.

  DO: Obteve-se mediante a utilização da fórmula de precificação de opções de Black & Scholes e também através da utilização de método numérico.

- b) Valor do ativo sujeito a risco:

  DC: Preço de um ativo ou instrumento financeiro no mercado à vista.
  DO: Esta variável foi operacionalizada através do banco de dados da Bolsa de Valores de São Paulo.

- c) O preço do exercício:

  DC: Preço fixo pelo qual o titular (*holder*) de uma ação (*option contract*) pode comprar do lançador (*writer*) (se tratar de uma opção de compra (*call option*)) ou vender a ele (ao se tratar de uma opção de venda (*put option*)) um determinado ativo real ou instrumento financeiro.
  DO: Esta variável foi operacionalizada através do banco de dados da Bolsa de Valores de São Paulo.

- d) Prazo de vencimento da opção:

  DC: Data em que um instrumento financeiro deixa de ter validade, em particular, uma opção (*option contract*), também conhecido como *expiration date*.
  DO: Esta variável foi operacionalizada através do banco de dados da Bolsa de Valores de São Paulo.

- e) Desvio padrão do valor do ativo subjacente sujeito a risco:

  DC: O mesmo que risco (*risk*), isto é, a incerteza associada à obtenção dos retornos de um investimento.
  DO: Esta variável foi operacionalizada através da metodologia de cálculo de volatilidades do tipo histórica e implícita no período de 22/03/99 a 30/09/05 com a utilização de dados do banco de dados da Bolsa de Valores de São Paulo.

- f) Taxa de retorno livre de risco ao longo da vida da opção:

  DC: Taxa de juros (*interest rate*) que títulos do governo do país em causa rendem.
  DO: Esta variável foi operacionalizada através da taxa de Certificado de Depósito Interbancário (CDI) *over* mensal obtida junto ao *site* do Banco Central que consiste na expressão percentual do custo do dinheiro no mercado interbancário.

## 3.2 DELIMITAÇÃO E *DESIGN* DE PESQUISA

### 3.2.1. POPULAÇÃO E AMOSTRAGEM

#### 3.2.1.1 POPULAÇÃO

O mercado acionário brasileiro caracteriza-se historicamente por um perfil de concentração de negócios em poucos papéis, no mercado de opções de compra, a predominância ocorre sobre ações preferenciais de Telemar Participações (TNLP4) e Petrobrás (PETR4), desta forma, optou-se pelo estudo sobre a Telemar.

A população consiste em todos os preços diários de fechamento para cada opção e valor à vista da ação da empresa Telemar (TNLP4). Além destes, serão obtidos o número de negócios e o volume negociado em reais por dia para cada opção e para o total de opções de compra da empresa Telemar compreendidos entre 22/03/99 e 30/09/05, obtidos do banco de dados da Bolsa de Valores de São Paulo[10]. Além destes, serão necessárias as taxas de juros para todos os prazos de

[10] A partir de 21/09/98 as ações de Telebrás deixaram de ser negociadas desde então, foi dada ao investidor a opção de deter recibos de Telebrás, um certificado representando uma cesta das 12 novas ações oriundas da cisão da *holding* Telebrás, sendo que até então as ações da Telebrás funcionavam como uma *proxy* do mercado.

vencimentos das opções, desta forma será utilizada a taxa CDI[11] (Certificado de Depósito Interbancário) anual composta e contínua, utilizada como *proxy* para a taxa de juros livre de risco.

### 3.2.1.2 AMOSTRA

Dentre o universo observado para estudo consistido em conjuntos de opções de compra sobre ações negociadas no mercado brasileiro de opções, observa-se que o mercado brasileiro negocia opções apenas sobre uma pequena relação de ativos-objetos, destes, optou-se por opções com representatividade no mercado.

Objetivando selecionar uma amostra que fosse significante, a amostra inicial é de cunho intencional, consistindo em séries de opções de compra e preço do ativo à vista com base em ações da empresa Telemar, estas derivam predominantemente de ações preferenciais de Telemar Participações (TNLP4), cotadas na Bolsa de valores de São Paulo para o período de 22/03/99 a 30/09/05 num total de 22.233 observações. Todos os preços diários de fechamento para cada opção e valor à vista da ação (TNPL4), número de negócios por dia para cada opção de compra da empresa Telemar e as taxas de juro[12] para todos os prazos de vencimentos das opções, compreendido entre 22/03/99 e 30/09/05 foram coletadas.

## 3.2.2 DELINEAMENTO DA PESQUISA

O presente trabalho utilizou-se do método de pesquisa do tipo levantamento com uma estratégia de pesquisa descritivo-quantitativa de plano longitudinal com amostra intencional utilizando-se de fontes secundárias.

---

[11] A taxa CDI obtida junto ao Banco Central é mensal over sendo feita a conversão de anual composta para contínua. De acordo com FORTUNA (2005, p. 116), os Certificados de Depósitos Interbancários prefixados esbelecem padrão de taxa média diária, o CDI *over* que reflete a expectativa de custo das reservas bancárias para a manhã seguinte à do fechamento das transações e que o custo do dinheiro de um dia negociado no mercado interbancário é muito próximo do custo de troca das reservas bancárias disponíveis lastreadas em títulos federais que ocorrem no mercado aberto. Até 1997, trabalhava-se com a taxa mensal com capitalização diária para apenas um dia útil, conhecida como taxa over. Desde janeiro de 1998, o Banco Central determinou que as taxas de juros praticadas pelo mercado fossem tratadas no formato anual com 252 dias úteis.

[12] Utilizou-se a taxa dos certificados de Depósitos Interbancários (CDI) *over* mensal.

A investigação *ex post factum* refere-se a um fato já ocorrido e aplica-se quando o pesquisador não pode controlar ou manipular variáveis seja porque suas manifestações já ocorreram, seja porque as variáveis não são controláveis, estes aspectos encontram amparo ao exposto em VERGARA (1998).

### 3.2.3 COLETA E TRATAMENTO DE DADOS

#### 3.2.3.1 COLETA DE DADOS

Foram obtidas informações a nível secundário por meio das seguintes fontes: pesquisa bibliográfica em livros, revistas científicas, periódicos, pesquisas já realizadas sobre o assunto e sobre assuntos congêneres e bases de dados[13].

#### 3.2.3.2 TRATAMENTO DE DADOS

A estratégia estatística utilizada foi composta da utilização de regreção linear, ANOVA e teste de Tuckey-Kramer sobre os valores de precificação desenvolvidos mediante a utilização do modelo de Cox, Ross e Rubinstein (Modelo Binomial) e do modelo de Black & Scholes.

## 3.3 METODOLOGIA DE DESENVOLVIMENTO

Inicialmente foram coletados os dados referentes às observações objeto de estudo como definido anteriormente.

[13] Os dados utilizados foram obtidos através da Bolsa de Valores do Estado de São Paulo.

A partir destas observações, aplicam-se alguns critérios de corte, o primeiro critério será o de liquidez por número de negócios, desta forma, elimina-se as opções que constavam no dia do pregão com menos de cinco negócios, o que evidencia uma baixa liquidez. Desta forma, a nova amostra contempla 18.612 opções.

De forma complementar, excluiram-se as cotações para as quais o módulo do resultado da expressão ($K/S_t$ exp ($R_t$) – 1) fosse maior que 0,10, assim eliminou-se por meio deste artifício as opções que estavam muito fora do dinheiro, mesmo critério utilizado por BRAGA (2002). Fato de que as opções assim classificadas (muito fora do dinheiro) são particularmente sensíveis a erros de mensuração das volatilidades implícitas e, de forma complementar, indica se a opção será exercida ou não, embora não haja estimação sobre a probabilidade de ocorrência do exercício. Após este tratamento, reduziu-se em 10.476 opções, desta forma resultando em uma nova amostra, de 8.137 opções.

Destas, aplicou-se um novo critério de corte eliminando-se as opções com tempo até a maturação de até cinco dias úteis (o equivalente a uma semana de pregão), devido ao fato de que estas cotações em relação à liquidez apresentam vieses, além disto, utilizou-se o modelo de Black & Scholes diretamente em quatro das oito simulações implementadas, e, conforme destacado pela teoria, a volatilidade calculada através deste é evidenciada como instável para pequenas maturidades. Este critério de corte também foi utilizado por MALZ (2000) e BARROS e LEMGRUBER (2000).

NUNES evidencia em sua resenha sobre a testabilidade do modelo de Black & Scholes para o mercado brasileiro, que a semana anterior ao vencimento de cada série de opção caracteriza-se pela existência do efeito da pressão compradora/vendedora sobre o preço do papel à vista. SANVICENTE e MONTEIRO (2005, p.34) destacam que “parece haver indícios do chamado efeito de pressão sobre preços, (...) isso significa que, nessas datas, a formação de preços de ações não é inteiramente racional e eficiente, o que contradiz a maioria dos estudos semelhantes efetuados nos mercados de outros países e reportados na literatura”.

Desta forma, este padrão de corte em particular foi responsável por uma filtragem em mais 811 observações, sendo que o perfil deste corte eliminou 128 opções que venciam em um dia, 160 opções que venciam em dois dias, 166 opções que venciam em três dias, 183 opções que venciam em quatro dias e finalmente, 174 opções que venciam em cinco dias resultando na nova amostra final, com 7.326 observações, as quais representam cerca de 33% do volume inicial.

Feita a seleção da amostra final, torna-se necessário destacar que o primeiro dia de pregão utilizado para a precificação das opções foi 10 de maio de 2000. Ilustra-se a seguir, no gráfico 1, o retorno logarítmico da ação da Telemar (TNLP4) e no gráfico 2, o valor da ação no mercado à vista no período.

GRÁFICO 1 - Retornos logarítmicos da ação da Telemar (TNLP4) de 10/05/00 a 30/09/05

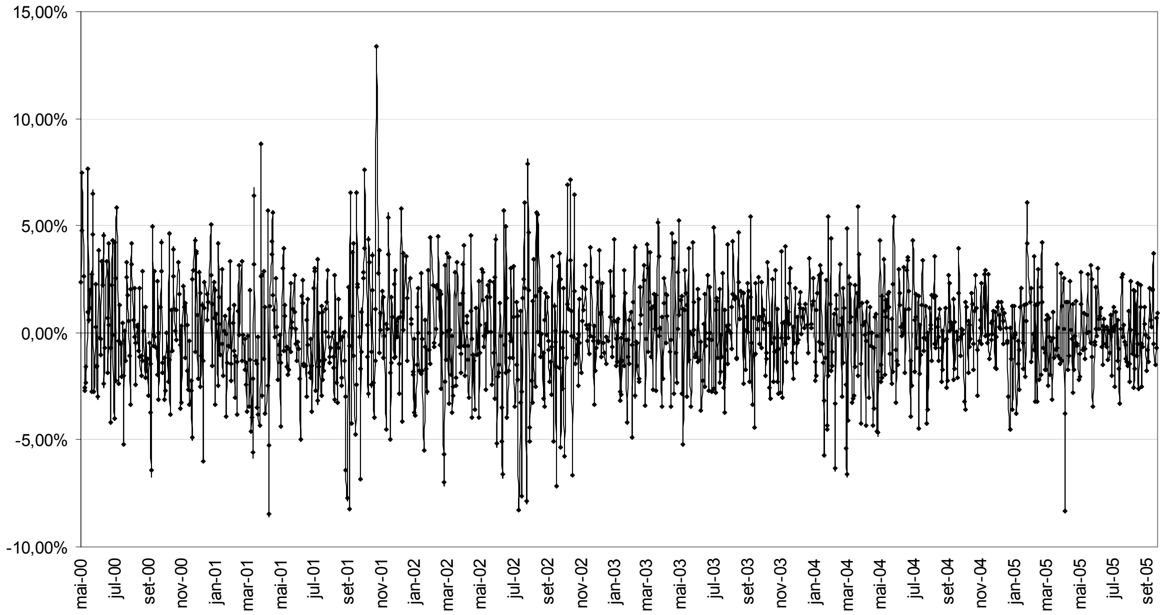


GRÁFICO 2 - Valor da Ação Telemar (TNLP4) em R$ de 10/05/00 a 30/09/05


Em seguida, parte-se ao desenvolvimento de uma nova fase da pesquisa relativa à aplicação dos modelos selecionados, o de Black & Scholes e o de Cox, Ross e Rubinstein, este conhecido popularmente como modelo binomial. A escolha deu-se justamente pela sua difusão e importância de utilização junto ao mercado.

Neste momento torna-se necessário o cálculo da volatilidade, visto que a volatilidade é um parâmetro que deve ser estimado antes de ser inserido no modelo.

A volatilidade a ser inserida no modelo Black & Scholes é a volatilidade futura, prevista para o período, compreendido entre o instante da avaliação e o instante de encerramento da vida da opção. Entretanto, para que seja possível prever a volatilidade futura é necessário basear-se na volatilidade "passada".

Um primeiro ponto a ser considerado, é o tamanho da janela temporal de retornos passados a ser utilizada, para um dado espaço temporal futuro, para o qual se deseja estimar a volatilidade. Visto que não há uma resposta única, e diferentes analistas utilizam-se diferentes janelas temporais para um mesmo prazo futuro, tendo em vista diferentes opiniões e diferentes métodos existentes de estimativa de volatilidade. No entanto, a maioria dos autores concordam ao menos com uma regra geral, a de utilizar janelas temporais maiores, quando há a necessidade de prever volatilidades para períodos longos de tempo, e de se utilizar de janelas temporais menores, quando se pretende estimar volatilidades para curtos períodos de tempo.

Outro aspecto importante diz respeito à escolha de qual(is) preço(s) diário(s) deve(m) ser utilizado(s) como base para o cálculo dos retornos e da volatilidade. Tradicionalmente, utilizam-se os preços de fechamento dos ativos, esta metodologia não incorpora as volatilidades (variações de preços) no chamado *intraday*. Alguns estudos apontam a uma alternativa de que se for utilizado mais de um preço por dia, como, por exemplo, os preços de abertura, máximo, mínimo e de fechamento, obtêm-se melhores estimativas de volatilidade (chamado preço de pivô), porém outros destacam que esta relação não é unânime, pois tanto é que existe a tradição de utilização de preços de fechamento, desta forma, optou-se pela tradição, ou seja, pela utilização do preço de fechamento do ativo para a estimação.

O presente trabalho utilizou-se da determinação das volatilidades histórica, implícita e derivações destes tipos de volatilidades como a média móvel, a qual se utiliza da volatilidade histórica, e a média móvel exponenciada, também conhecida como alisamento exponencial (*Exponentially Weighted Moving Average*), sendo este um método popularizado pelo banco J. P. Morgan no *Riskmetrics Technical Manual*.

Para tanto, utlizou-se o software *Matrix Laboratory*, versão 7.0, para programar os respectivos modelos de apreçamento com suas nuances de cálculo de volatilidades.

Neste ponto, torna-se necessário ressaltar que houve necessidade de se fazer uma adaptação do modelo de Black & Scholes ao mercado brasileiro, este utiliza-se de uma quantidade de dias úteis para a estimativa, em vez de dias corridos, sendo que o fator de anualização da volatilidade passará a ser o número de dias úteis do ano; em geral, usa-se 252. Já para o modelo de Cox, Ross e Rubinstein a aplicação se deu de forma direta. (Ver ilustração no anexo 2).

Os dados que foram inseridos nos programas eram sempre matrizes coluna (n x 1), padrão este que foi seguido em todos os programas, desta forma foi necessário a organização dos dados em planilha Excel.

A previsão da volatilidade se deu da seguinte forma, primeiramente foi projetado o cálculo da volatilidade através do método de média móvel com a utilização da volatilidade histórica.

A volatilidade histórica foi calculada como o desvio padrão da amostra dos retornos diários, medidos em taxas logarítmicas, ao longo de um determinado período, utilizou-se num primeiro momento, os 21 dias úteis imediatamente anteriores ao dia para o qual está sendo efetuado o cálculo do apreçamento e noutra oportunidade, com cinco dias úteis imediatamente anteriores ao dia para o qual está sendo efetuado o cálculo do apreçamento. A volatilidade histórica foi calculada pela fórmula a seguir:

$$\sigma \text{ histórica} = \left[ \sum_{i=1}^{n} \frac{(r_i - \bar{r})^2}{n-1} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sendo que:

$r_i =$ retornos diários medidos em taxas logarítmicas;

r = média aritmética dos retornos diários medidos em taxas logarítmicas;

n = número de dias da janela temporal considerada;

A forma logarítmica foi a preferida, visto o preço do objeto varia continuamente. Além disso, este cálculo é coerente com o expoente da função log-normal.

A média aritmética dos retornos, ou seja, o retorno médio foi obtido através da seguinte fórmula:

$$\bar{r} = \sum_{t=1}^{n} \frac{r_i}{n} \quad , \qquad r_i = \ln\left(\frac{PV_{i+1}}{PV_i}\right)$$

O termo média móvel associa-se ao fato de haver um deslocamento da janela, previamente definida, a cada dia que passa em relação ao tempo de vida da opção, acresce-se o retorno observado no dia mais recente e exclui-se o retorno observado do dia mais distante.

O programa utilizou-se dos parâmetros necessários ao cálculo como o preço à vista do ativo e a janela temporal, tinha-se liberdade para definir o tamanho da janela.

Noutra fase, a do cálculo da volatilidade implícita, utilizou-se o método da bissecção de forma a descobrir qual a volatilidade que gera através da fórmula de Black & Scholes o mesmo preço negociado no mercado, visto que a equação do modelo não pode ser invertida em termos de volatilidade, conforme ressalta HULL (1997, p. 246). Esta rotina gerou valores enquanto o número de iterações não foi atingido, estipulando-se o número máximo de 100 iterações, ou a situação em que a diferença entre o preço teórico e o de mercado não fosse menor que um erro máximo admitido, no caso, o valor de 0,001%.

Posteriormente, a volatilidade foi projetada através do método de alisamento exponencial, sendo que, em relação a este método, optou-se pela utilização de dois fatores diferentes de decaimento (α). Primeiramente com α = 0,94, sendo que este valor é sugerido pelo *Riskmetrics* para dados diários, e um segundo valor de α = 0,90 de forma a perceber a ocorrência de impacto na precificação de um pequeno relaxamento do valor indicado pelo *Riskmetrics.*

Após o cálculo de todas as volatilidades pelos métodos destacados, passa-se a simulação dos valores de apreçamento das *call´s* aos modelos de Black & Scholes e de Cox, Ross e Rubinstein.

Na realização dos respectivos apreçamentos, utiliza-se dos valores gerados anteriormente de cada conjunto de volatilidades a cada um dos dois modelos de precificação, desta forma tem-se oito conjuntos de resultados de precificação e um conjunto de dados relativos aos efetivos de mercado.

A partir desta relação cruzada, obteve-se os seguintes conjuntos modelos *versus* volatilidades:

- m1 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias;
- m2 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias;

- m3 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias;
- m4 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias;
- m5 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94;
- m6 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94;
- m7 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90;
- m8 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90.

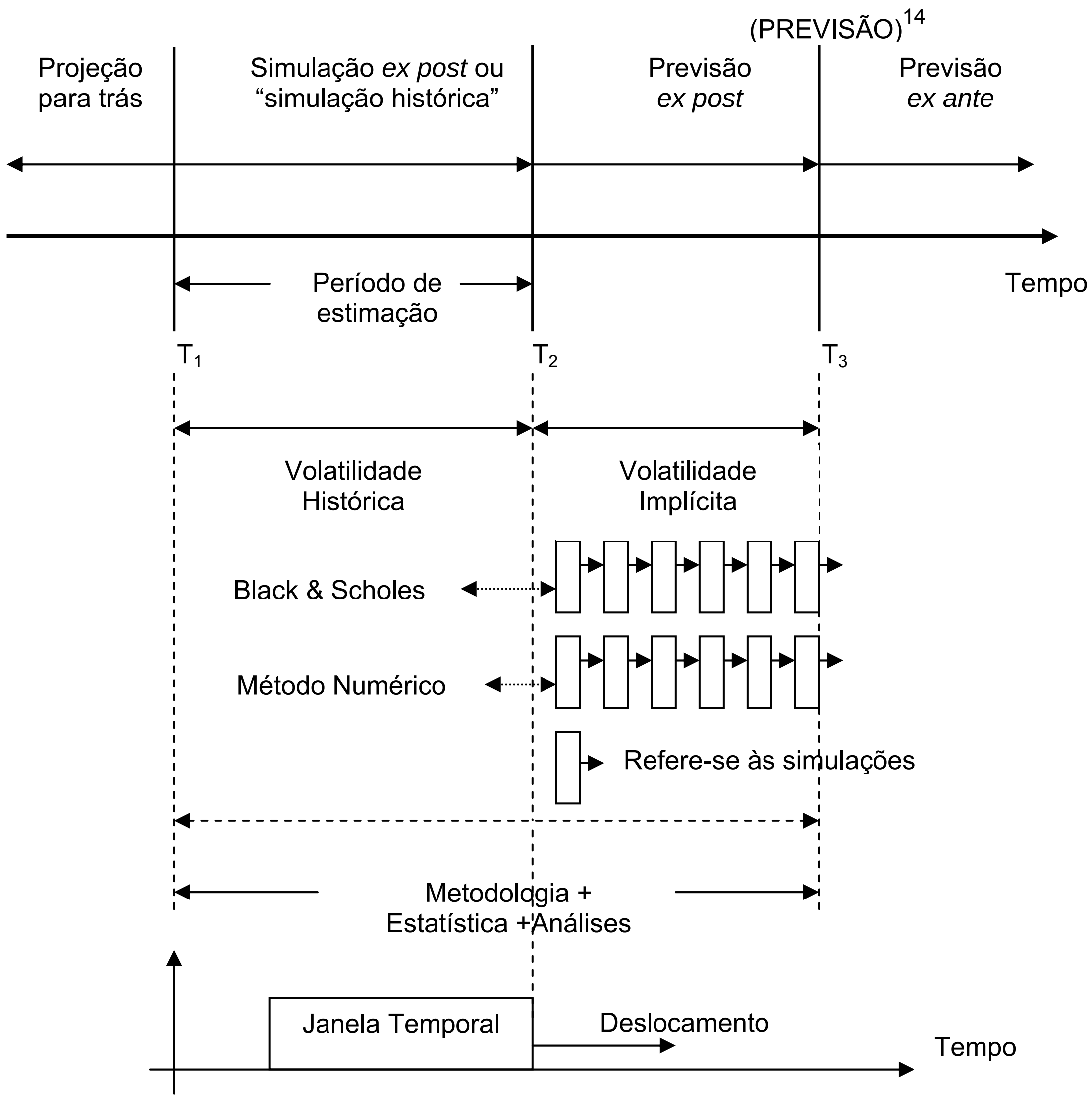
De posse dos resultados, já classificados de acordo com o mesmo critério de adotado por DONANGELO, SILVA e LEMGRUBER (2000) quanto ao seu *moneyness*, a saber:

> "uma forma de se classificar as opções quanto ao *moneyness* é a razão entre o preço do ativo-objeto e o valor presente do preço de exercício da opção, sendo classificadas como fora-do-dinheiro, quando esta relação for menor que 0,95; no-dinheiro, quando se situa entre 0,95 e 1,05; e dentro-do-dinheiro, quando for maior que 1,05". Tal classificação é uma indicação se a opção será ou não exercida, porém não estima com que probabilidade o exercício poderá ocorrer ou não."

Pode-se então partir para a próxima etapa, a de análise dos resultados.

O quadro 3 a seguir, propõe-se a esquematizar a estrutura da metodologia de desenvolvimento da pesquisa.

QUADRO 3 – Diagrama esquemático da metodologia de desenvolvimento




FONTE: PINDYCK (2004, p. 444), adaptado pelo autor.

[14] De acordo com PINDYCK (2004, p. 444), A previsão envolve a simulação do modelo no tempo para além do período da estimação.
Previsão *ex post* caracteriza-se quando o período de estimação não chega até o ano corrente (isto é, $T_2$ é menor que $T_3$), podemos optar por iniciar o período de previsão no fim do período de estimação e estendê-lo até o presente, talvez comparando resultados com dados disponíveis e se faz com freqüência para testar a capacidade preditiva de um modelo.
Uma previsão feita, cuja simulação começa no ano corrente e se estende para o futuro, é denominada de previsão *ex ante*.

# 4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Com base nos conceitos apresentados na revisão de literatura, e na metodologia proposta, analisa-se os resultados dos apreçamentos dos modelos de precificação de Black & Scholes e de Cox, Ross e Rubinstein mediante a utilização de estimadores diferenciados de volatilidade perfazendo um conjunto de análise de oito combinações de simulações.

Frente à metodologia de análise estatística, cabe destacar que os dados foram submetidos à análise de variância (ANOVA), seguido do teste de Tukey-Kramer.

Foram também realizadas análises de regressão linear comparando-se os diversos tratamentos com os valores de mercado. Os valores de $R^2$ foram utilizados para a análise de precisão dos dados, isto é, a perspectiva de mensuração do grau de associação entre as variáveis, enquanto que os valores do intercepto e declividade foram utilizados para análises de exatidão considerando os valores de mercado como padrão.

O valor de $R^2$, coeficiente de determinação, pode ser utilizado para o cálculo da variação concomitante das variáveis estudadas. O parâmetro $(1 - R^2)$ é a parcela não explicada, ou seja, a variação ao acaso. Os valores da declividade e intercepto foram utilizados para análise de exatidão dos valores em relação aos dados de mercado considerados como padrão. A declividade se aproxima do valor 1, quando os dados do tratamento (simulação) se aproximam dos valores de mercado, sendo que (1-b) em percentual, é o afastamento do valor ideal.

O intercepto se aproxima do valor zero, quando os dados do modelo se aproximam dos valores de mercado, o percentual de "a" em relação ao valor máximo de y representa o afastamento do valor zero, quanto maior for o percentual, mais o intercepto se afasta do valor ideal (zero).

As análises apresentadas na seqüência estão estruturadas com a seguinte ordenação:

a) Resultados referentes à regressão linear entre os oito conjuntos de apreçamentos e o valor observado de mercado em data da observação do valor da *call* observado no mercado, tomando-se como objeto de análise, cada conjunto de precificação *versus* o conjunto de preços observados de mercado de acordo com sua classificação em relação a seu grau de *moneyness*, de forma a se testar a equivalência entre cada modelo de precificação e o valor de mercado;

b) Resultados referentes à análise da ANOVA entre os oito conjuntos de apreçamentos e o valor observado de mercado em data da observação do valor da *call* observado no mercado, tomando-se como objeto de análise, cada conjunto de precificação *versus* o conjunto de preços observados de mercado de acordo com sua classificação em relação a seu grau de *moneyness*, de forma a se testar a equivalência entre cada modelo de precificação e o valor de mercado. Desta forma, adotou-se como hipótese $H_0$, a equivalência preditiva do modelo frente ao valor de mercado e como hipótese $H_1$, a não equivalência preditiva do modelo frente ao valor de mercado utilizando-se um nível de significância de 5%.

A partir dos resultados obtidos da regressão linear destacados na tabela 1 e graficamente representados no anexo 3, procede-se à interpretação.

Tabela 1 - Resultados relativos à regressão linear entre os valores de mercado e os apreçamentos com grau de *moneyness* classificado como *out-the-money*

| | | Mercado *versus* | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | m1 | m2 | m3 | m4 | m5 | m6 | m7 | m8 |
| Coef. determinação | R2 | 0,8961 | 0,8992 | 0,6231 | 0,6291 | 0,6168 | 0,6223 | 0,5978 | 0,6036 |
| declividade | b | 0,9858 | 1,0094 | 0,9528 | 0,9758 | 0,9130 | 0,9353 | 0,9009 | 0,9231 |
| Intercepto | a | 0,0127 | 0,0117 | 0,0650 | 0,0645 | 0,0511 | 0,0508 | 0,0481 | 0,0479 |
| | | | | | | | | | |
| Erro de precisão (%)[1] | | 10,39 | 10,08 | 37,69 | 37,09 | 38,32 | 37,77 | 40,22 | 39,64 |
| Erro de exatidão (%)[2] | | 1,42 | -0,94 | 4,72 | 2,42 | 8,70 | 6,47 | 9,91 | 7,69 |
| Erro de exatidão (%)[3] | | 0,50 | 0,46 | 2,08 | 2,03 | 1,65 | 1,62 | 1,54 | 1,51 |

1- Indica a dispersão dos dados em relação aos valores do próprio modelo.
2- Indica uma relação entre o valor do modelo *versus* o valor de mercado.
3- Indica uma relação entre o valor do modelo *versus* o maior valor de mercado.
m1 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
m2 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
m3 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
m4 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
m5 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0,94$.
m6 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0,94$.
m7 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0,90$.
m8 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0,90$.

Com relação aos índices de dispersão (em relação ao próprio modelo), tem-se que os menores valores ocorrem nos modelos de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1) e binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2) da ordem de 10,39% e 10,08%, enquanto os demais métodos possuem valores variando de 37,09% a 40,22%.

Observa-se que os modelos de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1) e binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2), caracterizados por BS (Black & Scholes) e CRR (Cox, Ross e Rubinstein) com utilização volatilidade implícita e média móvel com janela temporal de cinco dias, características comuns, apresentam os menores valores de erros de exatidão, 1,42% e -0,94% respectivamente, denotando desta forma um menor desvio de apreçamento em relação ao valor "alvo", o preço de mercado.

Já os modelos de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com valor de $\alpha = 0{,}94$ (m5), binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0{,}94$ (m6), Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0{,}90$ (m7) e binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0{,}90$ (m8) apresentam os maiores valores de erros de exatidão, 8,70%, 6,47%, 9,91% e 7,69% respectivamente, sendo estes possuidores de uma característica comum, a de utilização da metodologia de determinação da volatilidade através do alisamento exponencial.

O modelo binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2) possui erro de exatidão negativo (-0,94%), apontando desta forma para uma leve super-precificação do valor da *call* em relação ao valor de mercado, o que não ocorreu nos outros modelos.

Destaca-se ainda, o aumento dos erros de exatidão e de precisão ao se variar os fatores de decaimento dos métodos de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m5), e o binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m6), de um valor de α = 0,94 para α = 0,90, caracterizando a partir de então, os modelos de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m7) e binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m8).

O mesmo evento ocorre ao se analisar os pares dos métodos de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1) e binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2), estes, caracterizados comumente por apresentar o cálculo da volatilidade através da utilização de uma janela temporal de cinco dias para o par dos métodos de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m3), e binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m4), caracterizados pelo cálculo da volatilidade através de uma janela temporal maior, de 21 dias.

A partir dos resultados obtidos da regressão linear destacados na tabela 2 e graficamente representados no anexo 4, procede-se à interpretação dos dados relativos à regressão linear entre os valores de mercado e os apreçamentos com grau de *moneyness* classificado como *at-the-money.*

Tabela 2 - Resultados relativos à regressão linear entre os valores de mercado e os apreçamentos com grau de *moneyness* classificado como *at-the-money*

| | | Mercado *versus* | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | m1 | m2 | m3 | m4 | m5 | m6 | m7 | m8 |
| Coef. determinação | R2 | 0,9465 | 0,9478 | 0,7019 | 0,7059 | 0,6999 | 0,7044 | 0,6869 | 0,6918 |
| declividade | b | 0,9132 | 0,9247 | 0,8640 | 0,8753 | 0,8433 | 0,8547 | 0,8366 | 0,8482 |
| Intercepto | a | 0,1168 | 0,1262 | 0,2845 | 0,2943 | 0,2589 | 0,2682 | 0,2503 | 0,2594 |
| | | | | | | | | | |
| Erro de precisão (%)[1] | | 5,35 | 5,22 | 29,81 | 29,41 | 30,01 | 29,56 | 31,31 | 30,82 |
| Erro de exatidão (%)[2] | | 8,68 | 7,53 | 13,60 | 12,47 | 15,67 | 14,53 | 16,34 | 15,18 |
| Erro de exatidão (%)[3] | | 2,69 | 2,87 | 6,04 | 6,18 | 5,46 | 5,60 | 5,24 | 5,37 |

1- Indica a dispersão dos dados em relação aos valores do próprio modelo.
2- Indica uma relação entre o valor do modelo *versus* o valor de mercado.
3- Indica uma relação entre o valor do modelo *versus* o maior valor de mercado.
m1 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.

m2 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
m3 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
m4 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
m5 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94.
m6 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94.
m7 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90.
m8 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90.

Em relação aos índices de dispersão, tem-se que os menores valores ocorrem para o modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1) e binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2) da ordem de 5,35% e 5,22%, enquanto os demais métodos possuem valores maiores variando de 29,41% a 31,31%.

Observa-se que o modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1) e binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2), caracterizados por BS (Black & Scholes) e CRR (Cox, Ross e Rubinstein) com utilização volatilidade implícita e média móvel com janela temporal de cinco dias, características comuns, apresentam os menores valores de erros de exatidão, 8,68% e 7,53% respectivamente, denotando desta forma um menor desvio de apreçamento em relação ao valor de mercado.

De forma oposta, os modelos de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m5), binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m6), Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m7) e binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m8), apresentam os maiores valores de erros de exatidão, 15,67%, 14,53%, 16,34% e 15,18% respectivamente, sendo estes possuidores de uma característica comum, a de utilização da metodologia de determinação da volatilidade através do alisamento exponencial.

Todos os modelos possuem erros de exatidão positivo, apontando desta forma para uma sub-precificação do valor da *call* em relação ao valor de mercado.

Destaca-se ainda, o aumento dos erros de exatidão e de precisão ao se variar os fatores de decaimento dos métodos de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m5), e binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m6), de um valor de α = 0,94 para α = 0,90, caracterizando os métodos de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m7) e binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m8).

O aumento dos erros de exatidão e de precisão também ocorre ao se analisar os pares dos métodos de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1) e o binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2), caracterizados por apresentar o cálculo da volatilidade através da utilização de uma janela temporal de cinco dias, para o outro par dos métodos, Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m3) e binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m4), caracterizados pelo cálculo da volatilidade através de uma janela temporal maior, de 21 dias.

A partir dos resultados obtidos da regressão linear destacados na tabela 3 e graficamente representados no anexo 5, procede-se à interpretação dos dados relativos à regressão linear entre os valores de mercado e os apreçamentos com grau de *moneyness* classificado como *in-the-money.*

Tabela 3 - Resultados relativos à regressão linear entre os valores de mercado e os apreçamentos com grau de *moneyness* classificado como *in-the-money*

| | | Mercado *versus* | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | m1 | m2 | m3 | m4 | m5 | m6 | m7 | m8 |
| Coef. determinação | R2 | 0,9303 | 0,9534 | 0,8572 | 0,8582 | 0,8590 | 0,8603 | 0,8529 | 0,8545 |
| declividade | b | 0,9207 | 0,9364 | 0,9096 | 0,9153 | 0,8973 | 0,9031 | 0,8933 | 0,8993 |
| Intercepto | a | 0,1831 | 0,1693 | 0,2627 | 0,2883 | 0,2666 | 0,2924 | 0,2707 | 0,2961 |
| Erro de precisão (%)[1] | | 6,97 | 4,66 | 14,28 | 14,18 | 14,10 | 13,97 | 14,71 | 14,55 |
| Erro de exatidão (%)[2] | | 7,93 | 6,36 | 9,04 | 8,47 | 10,27 | 9,69 | 10,67 | 10,07 |
| Erro de exatidão (%)[3] | | 2,83 | 2,59 | 4,23 | 4,59 | 4,42 | 4,79 | 4,21 | 4,57 |

1- Indica a dispersão dos dados em relação aos valores do próprio modelo.
2- Indica uma relação entre o valor do modelo *versus* o valor de mercado.
3- Indica uma relação entre o valor do modelo *versus* o maior valor de mercado.
m1 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
m2 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
m3 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
m4 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
m5 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94.
m6 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94.
m7 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90.
m8 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90.

Com relação aos índices de dispersão, tem-se que os menores valores ocorrem nos modelos de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1), e binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2) da ordem de 6,97% e 4,66%, enquanto os demais métodos possuem valores variando de 13,97% a 14,71%.

Observa-se que o modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1) e binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2), caracterizados por pela utilização da volatilidade implícita e média móvel com janela temporal de cinco dias, apresentam os menores valores de erros de exatidão, 7,93% e 6,36% respectivamente, desta forma denotam um menor desvio de apreçamento em relação ao valor de mercado.

De forma contrária, os modelos de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m5), binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m6), Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m7) e binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m8), apresentam os maiores valores de erros de exatidão, 10,27%, 9,69%, 10,67% e 10,07% respectivamente, sendo estes possuidores da característica comum de utilização da metodologia de determinação da volatilidade através do alisamento exponencial.

Todos os modelos possuem erros de exatidão positivos, apontando desta forma para uma sub-precificação do valor da *call* em relação ao valor de mercado.

Evidencia-se ainda, o aumento dos erros de exatidão e de precisão ao se variar os fatores de decaimento dos métodos de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m5) e binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m6), de um valor de α = 0,94 para α = 0,90, caracterizando os métodos de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m7) e modelo binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m8). Esta piora também ocorre ao se analisar os pares dos métodos de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1) e binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2), caracterizados por apresentar o cálculo da volatilidade através da utilização de uma janela temporal de cinco dias, para o par dos métodos de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m3) e binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m4), caracterizados pelo cálculo da volatilidade através de uma janela temporal maior, de 21 dias.

Utilizou-se da ANOVA para a verificação da equivalência preditiva dos modelos aos preços de mercado, cabe destacar que todos os valores foram classificados de acordo como já destacado na metodologia, em três grupos de análise: o*ut-the-money, at-the money* e *in-the-money*.

Desta forma segue-se à verificação da capacidade preditiva de cada grupo em relação ao mercado em relação às categorias.

- Categoria *Out-the-money*

De forma a efetuar a análise, fez-se comparação entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1), sendo a partir destes geradas as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 1290 | 829,96 | 0,64338 | 0,200364 |
| m1 | 1290 | 834,5797 | 0,646961 | 0,217262 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,008271996 | 1 | 0,008272 | 0,039614 | 0,842252 | 3,845059 |
| Dentro dos grupos | 538,3206862 | 2578 | 0,208813 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 538,3289582 | 2579 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 0,643379845 |
| n do Grupo B | 1290 |
| Média do grupo m1 | 0,646961018 |
| n do Grupo m1 | 1290 |
| MQD | 0,2088133 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m1 | |
| Diferença absoluta | 0,003581173 |
| Erro padrão da diferença | 0,012722845 |
| Amplitude Crítica | 0,03524228 |
| Médias dos grupos B e m1 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, que é o limite da região de rejeição, tem-se um F observado (0,039) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p, o qual representa a probabilidade de rejeitar $H_0$, sendo $H_0$ verdadeira, como essa probabilidade (84,22%) é maior que o nível de significância estabelecido (5%), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Tomando-se como referencial o teste de Tukey-Kramer, o qual tem como referencial, se a diferença absoluta (entre os valores das médias dos grupos) for maior que o intervalo crítico, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente diferentes, o que não acontece entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B), com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 1290 | 829,96 | 0,64338 | 0,200364 |
| m2 | 1290 | 852,8056 | 0,66109 | 0,227284 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,202295585 | 1 | 0,202296 | 0,946083 | 0,33081 | 3,845059 |
| Dentro dos grupos | 551,238968 | 2578 | 0,213824 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 551,4412636 | 2579 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 0,643379845 |
| n do Grupo B | 1290 |
| Média do grupo m2 | 0,661089632 |
| n do Grupo m2 | 1290 |
| MQD | 0,21382427 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m2 | |
| Diferença absoluta | 0,017709787 |
| Erro padrão da diferença | 0,012874597 |
| Amplitude Crítica | 0,035662634 |
| Médias dos grupos B e m2 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (0,946) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,33), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m3), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 1290 | 829,96 | 0,64338 | 0,200364 |
| m3 | 1290 | 874,5812 | 0,67797 | 0,29192 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,771726538 | 1 | 0,771727 | 3,13529 | 0,076733 | 3,845059 |
| Dentro dos grupos | 634,5540977 | 2578 | 0,246142 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 635,3258242 | 2579 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 0,643379845 |
| n do Grupo B | 1290 |
| Média do grupo m3 | 0,677969948 |
| n do Grupo m3 | 1290 |
| MQD | 0,246142008 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m3 | |
| Diferença absoluta | 0,034590103 |
| Erro padrão da diferença | 0,013813318 |
| Amplitude Crítica | 0,038262891 |
| Médias dos grupos B e m3 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (3,135) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,07), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m4), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 1290 | 829,96 | 0,64338 | 0,200364 |
| m4 | 1290 | 893,149 | 0,692364 | 0,303287 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 1,547616392 | 1 | 1,547616 | 6,145586 | 0,013238 | 3,845059 |
| Dentro dos grupos | 649,2066098 | 2578 | 0,251826 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 650,7542262 | 2579 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 0,643379845 |
| n do Grupo B | 1290 |
| Média do grupo m4 | 0,692363569 |
| n do Grupo m4 | 1290 |
| MQD | 0,251825683 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m4 | |
| Diferença absoluta | 0,048983724 |
| Erro padrão da diferença | 0,01397189 |
| Amplitude Crítica | 0,038702135 |
| Médias dos grupos B e m4 são: | Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (6,145) maior que o F crítico (3,845), desta forma, pode-se rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias não deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,01), ao ser menor que o nível de significância estabelecido (0,05), não se confirma a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias não é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente diferentes entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m5), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 1290 | 829,96 | 0,64338 | 0,200364 |
| m5 | 1290 | 823,7033 | 0,63853 | 0,270804 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,015173161 | 1 | 0,015173 | 0,064407 | 0,799682 | 3,845059 |
| Dentro dos grupos | 607,3361097 | 2578 | 0,235584 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 607,3512829 | 2579 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 0,643379845 |
| n do Grupo B | 1290 |
| Média do grupo m5 | 0,638529661 |
| n do Grupo m5 | 1290 |
| MQD | 0,235584216 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m5 | |
| Diferença absoluta | 0,004850183 |
| Erro padrão da diferença | 0,013513823 |
| Amplitude Crítica | 0,037433291 |
| Médias dos grupos B e m5 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (0,06) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,79), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m6), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 1290 | 829,96 | 0,64338 | 0,200364 |
| m6 | 1290 | 841,816 | 0,652571 | 0,281653 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,054482121 | 1 | 0,054482 | 0,226059 | 0,634502 | 3,845059 |
| Dentro dos grupos | 621,3205139 | 2578 | 0,241009 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 621,374996 | 2579 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 0,643379845 |
| n do Grupo B | 1290 |
| Média do grupo m6 | 0,652570514 |
| n do Grupo m6 | 1290 |
| MQD | 0,241008733 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m6 | |
| Diferença absoluta | 0,009190669 |
| Erro padrão da diferença | 0,013668521 |
| Amplitude Crítica | 0,037861804 |
| Médias dos grupos B e m6 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (0,22) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,63), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m7), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 1290 | 829,96 | 0,64338 | 0,200364 |
| m7 | 1290 | 809,8405 | 0,627783 | 0,272041 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,156896956 | 1 | 0,156897 | 0,664248 | 0,41514 | 3,845059 |
| Dentro dos grupos | 608,930016 | 2578 | 0,236202 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 609,0869129 | 2579 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 0,643379845 |
| n do Grupo B | 1290 |
| Média do grupo m7 | 0,627783336 |
| n do Grupo m7 | 1290 |
| MQD | 0,236202489 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m7 | |
| Diferença absoluta | 0,015596509 |
| Erro padrão da diferença | 0,013531545 |
| Amplitude Crítica | 0,037482379 |
| Médias dos grupos B e m7 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (0,66) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,41), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha$ = 0,90 (m8), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 1290 | 829,96 | 0,64338 | 0,200364 |
| m8 | 1290 | 827,9197 | 0,641798 | 0,282831 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,001613478 | 1 | 0,001613 | 0,006678 | 0,934875 | 3,845059 |
| Dentro dos grupos | 622,8384951 | 2578 | 0,241598 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 622,8401085 | 2579 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 0,643379845 |
| n do Grupo B | 1290 |
| Média do grupo m8 | 0,641798227 |
| n do Grupo m8 | 1290 |
| MQD | 0,241597554 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m8 | |
| Diferença absoluta | 0,001581618 |
| Erro padrão da diferença | 0,013685208 |
| Amplitude Crítica | 0,037908027 |
| Médias dos grupos B e m8 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (0,006) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,93), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

De acordo com a análise, quando a classificação da categoria for *out-the-money*, verifica-se que somente o modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias não obtém a equivalência preditiva frente ao valor de mercado a um nível de significância de 5%.

- Categoria *At-the-money*

De forma a efetuar a análise, fez-se comparação entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1), sendo a partir destes geradas as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 3803 | 6286,16 | 1,652948 | 0,599502 |
| m1 | 3803 | 6110,07 | 1,606645 | 0,548771 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 4,076732082 | 1 | 4,076732 | 7,10063 | 0,007722 | 3,842672 |
| Dentro dos grupos | 4365,735041 | 7604 | 0,574137 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 4369,811773 | 7605 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 1,652947673 |
| n do Grupo B | 3803 |
| Média do grupo m1 | 1,606644802 |
| n do Grupo m1 | 3803 |
| MQD | 0,574136644 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m1 | |
| Diferença absoluta | 0,046302871 |
| Erro padrão da diferença | 0,012286961 |
| Amplitude Crítica | 0,034034881 |
| Médias dos grupos B e m1 são: | Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (7,1) maior que o F crítico (3,845), desta forma, pode-se rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias não deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,007), ao ser menor que o nível de significância estabelecido (0,05), não se confirma a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias não é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente diferentes entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B), com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 3803 | 6286,16 | 1,652948 | 0,599502 |
| m2 | 3803 | 6234,949 | 1,639482 | 0,563651 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,344807341 | 1 | 0,344807 | 0,592884 | 0,44133 | 3,842672 |
| Dentro dos grupos | 4422,308804 | 7604 | 0,581577 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 4422,653611 | 7605 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 1,652947673 |
| n do Grupo B | 3803 |
| Média do grupo m2 | 1,639481627 |
| n do Grupo m2 | 3803 |
| MQD | 0,581576644 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m2 | |
| Diferença absoluta | 0,013466046 |
| Erro padrão da diferença | 0,012366315 |
| Amplitude Crítica | 0,034254693 |
| Médias dos grupos B e m2 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (0,592) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,44), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m3), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 3803 | 6286,16 | 1,652948 | 0,599502 |
| m3 | 3803 | 6306,451 | 1,658283 | 0,653479 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,054129259 | 1 | 0,054129 | 0,086401 | 0,768812 | 3,842672 |
| Dentro dos grupos | 4763,835871 | 7604 | 0,626491 | | | |
| Total | 4763,89 | 7605 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 1,652947673 |
| n do Grupo B | 3803 |
| Média do grupo m3 | 1,658283084 |
| n do Grupo m3 | 3803 |
| MQD | 0,626490777 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m3 | |
| Diferença absoluta | 0,005335411 |
| Erro padrão da diferença | 0,01283495 |
| Amplitude Crítica | 0,035552811 |
| Médias dos grupos B e m3 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (0,086) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,76), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m4), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 3803 | 6286,16 | 1,652948 | 0,599502 |
| m4 | 3803 | 6431,516 | 1,691169 | 0,668748 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 2,777856685 | 1 | 2,777857 | 4,380614 | 0,036383 | 3,842672 |
| Dentro dos grupos | 4821,886572 | 7604 | 0,634125 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 4824,664428 | 7605 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 1,652947673 |
| n do Grupo B | 3803 |
| Média do grupo m4 | 1,691169087 |
| n do Grupo m4 | 3803 |
| MQD | 0,634125009 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m4 | |
| Diferença absoluta | 0,038221414 |
| Erro padrão da diferença | 0,012912915 |
| Amplitude Crítica | 0,035768773 |
| Médias dos grupos B e m4 são: | Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (4,38) maior que o F crítico (3,845), desta forma, pode-se rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias não deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,036), ao ser menor que o nível de significância estabelecido (0,05), não se confirma a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias não é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente diferentes entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m5), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 3803 | 6286,16 | 1,652948 | 0,599502 |
| m5 | 3803 | 6117,196 | 1,608519 | 0,633364 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 3,753453384 | 1 | 3,753453 | 6,08899 | 0,013625 | 3,842672 |
| Dentro dos grupos | 4687,355607 | 7604 | 0,616433 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 4691,10906 | 7605 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 1,652947673 |
| n do Grupo B | 3803 |
| Média do grupo m5 | 1,60851859 |
| n do Grupo m5 | 3803 |
| MQD | 0,616432878 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m5 | |
| Diferença absoluta | 0,044429083 |
| Erro padrão da diferença | 0,012731505 |
| Amplitude Crítica | 0,035266268 |
| Médias dos grupos B e m5 são: | Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (6,088) maior que o F crítico (3,845), desta forma, pode-se rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias não deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,013), ao ser menor que o nível de significância estabelecido (0,05), não se confirma a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias não é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente diferentes entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m6), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 3803 | 6286,16 | 1,652948 | 0,599502 |
| m6 | 3803 | 6241,851 | 1,641297 | 0,64855 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,258119836 | 1 | 0,25812 | 0,413636 | 0,520149 | 3,842672 |
| Dentro dos grupos | 4745,092339 | 7604 | 0,624026 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 4745,350459 | 7605 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 1,652947673 |
| n do Grupo B | 3803 |
| Média do grupo m6 | 1,641296691 |
| n do Grupo m6 | 3803 |
| MQD | 0,62402582 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m6 | |
| Diferença absoluta | 0,011650982 |
| Erro padrão da diferença | 0,012809675 |
| Amplitude Crítica | 0,0354828 |
| Médias dos grupos B e m6 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (0,413) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,52), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0,90$ (m7), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 3803 | 6286,16 | 1,652948 | 0,599502 |
| m7 | 3803 | 6061,717 | 1,59393 | 0,637259 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 6,62304463 | 1 | 6,623045 | 10,71031 | 0,00107 | 3,842672 |
| Dentro dos grupos | 4702,165112 | 7604 | 0,61838 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 4708,788157 | 7605 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 1,652947673 |
| n do Grupo B | 3803 |
| Média do grupo m7 | 1,593930191 |
| n do Grupo m7 | 3803 |
| MQD | 0,618380472 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m7 | |
| Diferença absoluta | 0,059017482 |
| Erro padrão da diferença | 0,012751601 |
| Amplitude Crítica | 0,035321935 |
| Médias dos grupos B e m7 são: | Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (10,71) maior que o F crítico (3,845), desta forma, pode-se rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias não deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,001), ao ser menor que o nível de significância estabelecido (0,05), não se confirma a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias não é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente diferentes entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0,90$ (m8), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 3803 | 6286,16 | 1,652948 | 0,599502 |
| m8 | 3803 | 6186,451 | 1,626729 | 0,652466 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 1,30711285 | 1 | 1,307113 | 2,088093 | 0,148492 | 3,842672 |
| Dentro dos grupos | 4759,982466 | 7604 | 0,625984 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 4761,289579 | 7605 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 1,652947673 |
| n do Grupo B | 3803 |
| Média do grupo m8 | 1,626729141 |
| n do Grupo m8 | 3803 |
| MQD | 0,625984017 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m8 | |
| Diferença absoluta | 0,026218532 |
| Erro padrão da diferença | 0,012829758 |
| Amplitude Crítica | 0,035538429 |
| Médias dos grupos B e m8 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (2,088) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,14), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

De acordo com a análise, quando a classificação da categoria for *at-the-money*, verifica-se que os modelos Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2), modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m3), modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 e o modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m8) obtém a equivalência preditiva frente ao valor de mercado a um nível de significância de 5%.

- Categoria *In-the-money*

De forma a efetuar a análise, fez-se comparação entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1), sendo a partir destes geradas as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 2161 | 7506,65 | 3,473693 | 0,735217 |
| m1 | 2161 | 7306,797 | 3,381211 | 0,669873 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 9,241360602 | 1 | 9,241361 | 13,15412 | 0,00029 | 3,84361 |
| Dentro dos grupos | 3034,99479 | 4320 | 0,702545 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 3044,236151 | 4321 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 3,473692735 |
| n do Grupo B | 2161 |
| Média do grupo m1 | 3,381211084 |
| n do Grupo m1 | 2161 |
| MQD | 0,70254509 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m1 | |
| Diferença absoluta | 0,092481651 |
| Erro padrão da diferença | 0,018030581 |
| Amplitude Crítica | 0,049944709 |
| Médias dos grupos B e m1 são: | Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (13,15) maior que o F crítico (3,845), desta forma, pode-se rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias não deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,0002), ao ser menor que o nível de significância estabelecido (0,05), não se confirma a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias não é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente diferentes entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B), com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 2161 | 7506,65 | 3,473693 | 0,735217 |
| m2 | 2161 | 7400,346 | 3,4245 | 0,679366 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 2,614676262 | 1 | 2,614676 | 3,696745 | 0,054584 | 3,84361 |
| Dentro dos grupos | 3055,49894 | 4320 | 0,707291 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 3058,113616 | 4321 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 3,473692735 |
| n do Grupo B | 2161 |
| Média do grupo m2 | 3,424500497 |
| n do Grupo m2 | 2161 |
| MQD | 0,707291421 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m2 | |
| Diferença absoluta | 0,049192237 |
| Erro padrão da diferença | 0,018091385 |
| Amplitude Crítica | 0,050113136 |
| Médias dos grupos B e m2 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (3,696) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,054), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m3), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 2161 | 7506,65 | 3,473693 | 0,735217 |
| m3 | 2161 | 7425,313 | 3,436054 | 0,730373 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 1,530707939 | 1 | 1,530708 | 2,088862 | 0,148449 | 3,84361 |
| Dentro dos grupos | 3165,67454 | 4320 | 0,732795 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 3167,205248 | 4321 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 3,473692735 |
| n do Grupo B | 2161 |
| Média do grupo m3 | 3,436054107 |
| n do Grupo m3 | 2161 |
| MQD | 0,732795032 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m3 | |
| Diferença absoluta | 0,037638628 |
| Erro padrão da diferença | 0,018414667 |
| Amplitude Crítica | 0,051008628 |
| Médias dos grupos B e m3 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (2,088) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,14), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m4), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 2161 | 7506,65 | 3,473693 | 0,735217 |
| m4 | 2161 | 7518,849 | 3,479338 | 0,739214 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,034434928 | 1 | 0,034435 | 0,046709 | 0,828902 | 3,84361 |
| Dentro dos grupos | 3184,769942 | 4320 | 0,737215 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 3184,804377 | 4321 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 3,473692735 |
| n do Grupo B | 2161 |
| Média do grupo m4 | 3,479338037 |
| n do Grupo m4 | 2161 |
| MQD | 0,737215264 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m4 | |
| Diferença absoluta | 0,005645302 |
| Erro padrão da diferença | 0,018470123 |
| Amplitude Crítica | 0,051162239 |
| Médias dos grupos B e m4 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (0,046) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,82), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m5), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 2161 | 7506,65 | 3,473693 | 0,735217 |
| m5 | 2161 | 7351,11 | 3,401717 | 0,715239 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 5,597547182 | 1 | 5,597547 | 7,718327 | 0,00549 | 3,84361 |
| Dentro dos grupos | 3132,985111 | 4320 | 0,725228 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 3138,582658 | 4321 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 3,473692735 |
| n do Grupo B | 2161 |
| Média do grupo m5 | 3,401716936 |
| n do Grupo m5 | 2161 |
| MQD | 0,725228035 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m5 | |
| Diferença absoluta | 0,071975799 |
| Erro padrão da diferença | 0,018319344 |
| Amplitude Crítica | 0,050744582 |
| Médias dos grupos B e m5 são: | Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (7,718) maior que o F crítico (3,845), desta forma, pode-se rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias não deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,005), ao ser menor que o nível de significância estabelecido (0,05), não se confirma a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias não é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente diferentes entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m6), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 2161 | 7506,65 | 3,473693 | 0,735217 |
| m6 | 2161 | 7445,302 | 3,445304 | 0,72398 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 0,870803514 | 1 | 0,870804 | 1,193538 | 0,274678 | 3,84361 |
| Dentro dos grupos | 3151,865436 | 4320 | 0,729598 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 3152,73624 | 4321 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 3,473692735 |
| n do Grupo B | 2161 |
| Média do grupo m6 | 3,445303891 |
| n do Grupo m6 | 2161 |
| MQD | 0,729598481 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m6 | |
| Diferença absoluta | 0,028388844 |
| Erro padrão da diferença | 0,01837446 |
| Amplitude Crítica | 0,050897253 |
| Médias dos grupos B e m6 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (1,193) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,27), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m7), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 2161 | 7506,65 | 3,473693 | 0,735217 |
| m7 | 2161 | 7332,8 | 3,393244 | 0,716808 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 6,993055922 | 1 | 6,993056 | 9,632145 | 0,001924 | 3,84361 |
| Dentro dos grupos | 3136,373087 | 4320 | 0,726012 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 3143,366143 | 4321 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 3,473692735 |
| n do Grupo B | 2161 |
| Média do grupo m7 | 3,393243649 |
| n do Grupo m7 | 2161 |
| MQD | 0,726012289 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m7 | |
| Diferença absoluta | 0,080449086 |
| Erro padrão da diferença | 0,018329246 |
| Amplitude Crítica | 0,050772012 |
| Médias dos grupos B e m7 são: | Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (9,632) maior que o F crítico (3,845), desta forma, pode-se rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias não deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,001), ao ser menor que o nível de significância estabelecido (0,05), não se confirma a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias não é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente diferentes entre estes modelos.

Efetuou-se a análise entre os valores observados no mercado (B) com os valores advindos das *call´s* precificadas através do modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m8), tendo por base as informações a seguir.

RESUMO

| Grupo | Contagem | Soma | Média | Variância |
|---|---|---|---|---|
| B | 2161 | 7506,65 | 3,473693 | 0,735217 |
| m8 | 2161 | 7427,272 | 3,436961 | 0,725655 |

ANOVA

| Fonte da variação | SQ | gl | MQ | F | valor-P | F crítico |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Entre grupos | 1,457851269 | 1 | 1,457851 | 1,995865 | 0,157801 | 3,84361 |
| Dentro dos grupos | 3155,482969 | 4320 | 0,730436 | | | |
| | | | | | | |
| Total | 3156,94082 | 4321 | | | | |

| Tuckey-Kramer | |
|---|---|
| Média do grupo B | 3,473692735 |
| n do Grupo B | 2161 |
| Média do grupo m8 | 3,436960765 |
| n do Grupo m8 | 2161 |
| MQD | 0,730435872 |
| Estatística Q | 2,77 |
| Comparação do Grupo B com o grupo m8 | |
| Diferença absoluta | 0,03673197 |
| Erro padrão da diferença | 0,018385001 |
| Amplitude Crítica | 0,050926453 |
| Médias dos grupos B e m8 são: | Não Diferentes |

A partir dos dados anteriores, o valor observado da estatística F e o valor da distribuição F crítico, tem-se um F observado (1,995) menor que o F crítico (3,845), desta forma, não se pode rejeitar a hipótese nula $H_0$ de que as médias são iguais ao nível de significância de 5% evidenciando que a igualdade das médias deva ser aceita. A partir da observação do valor-p (0,15), ao ser maior que o nível de significância estabelecido (0,05), confirma-se a necessidade de rejeitar a hipótese nula, desta forma a hipótese de igualdade entre as médias é confirmada. Levando-se em conta o teste de Tukey-Kramer, as duas médias dos grupos são consideradas como sendo significativamente iguais entre estes modelos.

De acordo com a análise, quando a classificação da categoria for in-*the-money*, verifica-se que os modelos de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1), modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94 (m5) e o modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90 (m7), não obtém a equivalência preditiva frente ao valor de mercado a um nível de significância de 5%.

Objetivando exposição mais sintética acerca da capacidade preditiva de cada modelo em face dos valores de mercado, pode-se observar os resultados quanto à diferenciação dos resultados a partir da aplicação da ANOVA com o teste de Tuckey-Kramer na tabela a seguir.

Tabela 4 – Síntese da aplicação da ANOVA e teste de Tuckey-Kramer

| | m1 | m2 | m3 | m4 | m5 | m6 | m7 | m8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Out-the-money* | ND | ND | ND | D | ND | ND | ND | ND |
| *At-the-money* | D | ND | ND | D | D | ND | D | ND |
| *In-the-money* | D | ND | ND | ND | D | ND | D | ND |

ND – Não difere significativamente.
D – Difere significativamente.
m1 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
m2 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
m3 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
m4 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
m5 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94.
m6 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94.
m7 – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90.
m8 – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90.

Destaca-se da síntese da aplicação da ANOVA e teste de Tuckey-Kramer, explicados ao longo deste item, que das vinte e quatro combinações realizadas, oito delas possuem diferença estatisticamente significativa frente ao valor de mercado.

A partir da modelagem de Cox, Ross e Rubinstein, o modelo com estimação de volatilidade histórica com um período de 21 dias apresenta diferença quando classificado em relação à probabilidade de exercício como *out-the-money* e *at-the-money*, enquanto que a partir da modelagem de Black & Scholes, quando as opções forem classificadas em relação à probabilidade de exercício como *at-the-money* e *in-the-money*, ocorre diferenciação mediante a estimação da volatilidade implícita com média móvel de cinco dias e com estimação da volatilidade através do método de alisamento exponencial com utilização da média móvel de 21 dias com fatores de decaimento de 0,94 e 0,90.

# 5 CONCLUSÕES, RECOMENDAÇÕES E ESTUDOS FUTUROS

O presente trabalho teve por objetivo geral, comparar o desempenho de um método numérico tradicional aplicável à avaliação de opções de compra americanas frente à utilização do modelo de Black & Scholes em relação ao preço de mercado.

A verificação do apreçamento dos modelos de Black & Scholes e de Cox, Ross e Rubinstein frente ao valor das opções de compra sobre as ações da Telemar Participações (TNLP4) observadas no mercado utilizou-se de uma abordagem relativa ao estudo da volatilidade frente à teoria e à expectativa do impacto de formas diferenciadas de estimação de volatilidades ao apreçamento de cada um dos dois métodos base em relação ao valor observado de mercado.

Concluída a comparação dos métodos, em termos de apreçamento, torna-se interessante a respeito do conteúdo informacional dos mesmos de forma a responder às questões de pesquisa relacionadas a seguir:

- Qual o nível de precificação do método de Black & Scholes quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *in-the-money*?

Em face desta pergunta de pesquisa, conclui-se que o modelo de Black & Scholes dentre suas quatro variações relativas ao cálculo da volatilidade apresentadas neste trabalho obteve a equivalência preditiva do modelo frente ao valor de mercado somente em um caso particular, o de estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m3), além disto, constatou-se o sub-apreçamento em todos os modelos para as opções classificadas em relação à probabilidade do exercício como *in-the-money*.

- Qual o nível de precificação do método de Cox, Ross e Rubinstein quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *in-the-money*?

Para as opções classificadas em relação à probabilidade do exercício como *in-the-money*, frente a esta pergunta de pesquisa, tem-se como conclusivo que o modelo de Cox, Ross e Rubinstein dentre suas quatro variações relativas ao cálculo da volatilidade apresentadas neste trabalho obteve a equivalência preditiva do modelo frente ao valor de mercado em todos os casos, constatando-se também, seu sub-apreçamento em relação ao valor de mercado.

- Qual o nível de precificação do método de Black & Scholes quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *at-the-money*?

Com relação a esta pergunta de pesquisa, conclui-se que o modelo de Black & Scholes dentre suas quatro variações relativas ao cálculo da volatilidade apresentadas neste trabalho obteve a equivalência preditiva do modelo frente ao valor de mercado somente em um caso particular, o de estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m3), além disto, constatou-se o sub-apreçamento em todos os modelos para as opções classificadas em relação à probabilidade do exercício como *at-the-money*.

- Qual o nível de precificação do método de Cox, Ross e Rubinstein quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *at-the-money*?

Face a esta pergunta de pesquisa, conclui-se que o modelo de Cox, Ross e Rubinstein dentre suas quatro variações relativas ao cálculo da volatilidade apresentadas neste trabalho não obteve a equivalência preditiva do modelo frente ao valor de mercado somente em um caso particular, o de estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m4), além disto, constatou-se o sub-apreçamento em todos os modelos.

- Qual o nível de precificação do método de Black & Scholes quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *out-the-money*?

Conclui-se frente a esta, que o modelo de Black & Scholes com suas quatro variações relativas ao cálculo da volatilidade apresentadas neste trabalho obtiveram a equivalência preditiva do modelo frente ao valor de mercado, além disto, concluiu-se também como verdadeira a existência de viés sistemático associado ao modelo, o de sub-apreçamento conforme destacado por BARBEDO (2005) dentre outros para as opções classificadas em relação à probabilidade do exercício como *out-the-money*.

- Qual o nível de precificação do método de Cox, Ross e Rubinstein quando a classificação das opções em relação à probabilidade do exercício for *out-the-money*?

Conclui-se frente a esta, que o modelo de Cox, Ross e Rubinstein dentre suas quatro variações relativas ao cálculo da volatilidade apresentadas neste trabalho não obteve a equivalência preditiva do modelo frente ao valor de mercado somente em um caso particular, o de estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m4), além disto, constatou-se um o super-apreçamento no modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2) e o sub-apreçamento nos demais modelos.

- Qual o efeito de diferentes formas de estimação de volatilidades na aplicação de método numérico tradicional e do método de Black & Scholes às opções de compra frente ao preço da opção de mercado em relação às probabilidades do exercício?

Para as opções classificadas em relação à probabilidade do exercício como *in-the-money*, frente a esta pergunta de pesquisa, tem-se como conclusivo o fato de que somente o modelo binomial não apresenta diferença significativa frente aos valores de mercado quanto a utilização de diferentes formas de estimação de volatilidades, possuindo inclusive, menores valores de erros de precisão e de exatidão em relação aos de Black & Scholes, o qual só não apresenta diferença significativa quando da estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias (m3), sugerindo desta forma, que para a classificação *in-the-money*, a estimativa da volatilidade através do método histórico utilizando um período de 21 dias torna-se o mais apropriado.

Quando as opções foram classificadas em relação à probabilidade do exercício como *at-the-money*, não se pode determinar sobre qual metodologia de estimativa da volatilidade é a mais adequada, pois ocorrem diferenças significativas entre os métodos ao longo das estimativas de volatilidades e os valores de mercado não possibilitando desta forma a relativação entre pares.

Nas opções classificadas em relação à probabilidade do exercício como *out-the-money*, tem-se como conclusivo o fato de que dentre os modelos que não apresentam diferenças significativas frente aos valores de mercado, os métodos de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m1) e binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2) apresentam uma performance significativamente melhor aos demais, tendo como característica comum, a determinação da volatilidade implícita através da utilização da média móvel de cinco dias, desta forma evidencia-se como o mais apropriado.

Destaque a parte das perguntas de pesquisa, pode-se concluir também, que o modelo binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias (m2) foi o que melhor se ajustou ao estudo, no sentido de apresentar os menores erros de precisão, de exatidão e confirma a hipótese de igualdade entre as médias nas três classificações relativas às probabilidades do exercício. Cabe destacar que quando a probabilidade do exercício foi *out-the-money*, ocorreu a tendência de super-precificação do valor da opção.

Frente a precificação de opções de compra mediante a utilização dos modelos de Cox, Ross e Rubinstein e de Black & Scholes com diferentes formas de estimação de volatilidades cabe destacar que as conclusões apresentadas aplicam-se somente ao contexto de precificação sobre opções de compra da empresa

Telemar Participações, não extinguindo de forma alguma, a possibilidade de variação dos resultados mediante a utilização de outros períodos, formas e diferentes janelas temporais de estimação de volatilidades.

Sugere-se como perspectiva de estudos futuros a estimação e relativação com outros modelos de precificação, desde modelos mais simples como os de *Lattice*, modelos alternativos da família ARCH e finalmente a utilização de redes neurais como bases de precificação dos valores das opções.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ADLER, A. S.; FARIA, H. B.; SANTOS, L. F.; LEMGRUBER, E.F. **Árvores Binomiais Implícitas: Aplicação para Opções de Telebrás no Exercício de Abril de 1999**. *Anais, XXIII ENANPAD*, 1999.

AMRAM, M., KULATILAKA, N. Strategy and Shareholder Value Creation: The Real Options Frontier. Bank of America. **Journal of Applied Corporate Finance**. v. 13, n. 2, p. 8-21, summer, 2000.

BARCINSKI, A., et al. **Estimação da Volatilidade do Retorno das Ações Brasileiras: Um Método Alternativo à Familia GARCH**. Resenha da BM&F n. 116.

BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **Journal of Political Economy**, v. 81, n. 3, p. 637-659, May/June, 1973.

BLACK, F. Studies in Stock Price volatility Changes. Proceedings of 1976 Meeting of The Business and Economic Statistic Section, ***American Statistical Association***, p. 177-181, 1976.

BARBEDO, C. H. da S.; ARAÚJO, G. S.; LEMGRUBER, E. F. **Inclusão do decaimento temporal na metodologia delta-gama para o cálculo do VaR de carteiras compradas em opções no Brasil**. Banco Central do Brasil. Working Paper Series, n. 79, 2003.

BARBEDO, C. H. da S.; ARAÚJO, G. S.; LION, O. M. B. **Mercado de derivativos no Brasil: conceitos, operações e estratégias**. Rio de Janeiro: Record. 2005. 366p.

BARROS, P.; LEMGRUBER, E. F. **Análise da Relação entre Liquidez e Ganhos de Arbitragem no Mercado de Opções da Telebrás após o Plano Real**. ENANPAD. 1997.

BRAGA, N. M. **Um estudo da literatura pós-Black-Scholes de avaliação de opções européias e uma avaliação empírica de seu potencial uso na indústria**. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2002.

BRENNAN, M.J., SCHWARTZ, E.S. Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contigent Claims: A Synthesis. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**. n.13, p. 461-474. sep. 1978.

BRITO, N. R. O.DE; *et a*l. **Gestão de investimentos**. 1. ed. São Paulo: Atlas. 1989. 338 p.

BOYLE, P. (1977). "Options: A Monte Carlo Approach". **Journal of Financial Economics**. v. 4, p. 323-338.

BRYIS, E.C.; BELLALAH, M.; MAI, H.M.; VARENNE, F. **Options, futures and exotic derivatives**. New York, John Wiley & Sons. 1998.

CHEW, L. **Gerenciando os riscos de derivativos: o uso e o abuso da alavancagem**. Rio de Janeiro: Qualitymark. 1999. 338 p.

COPELAND, T.; ANTIKAROV, V. **Opções reais: um novo paradigma para reinventar a avaliação de investimentos**. Rio de Janeiro: Campus. 2001. 368 p.

COPELAND, T.; KOLLER, T.; MURRIN, J. **Avaliação de empresas – Valuation: Calculando e gerenciando o valor das empresas**. São Paulo: Makron Books, 2000.

COSTA, C. L. DA. **Opções: operando a volatilidade**. 1. ed. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros. 1998. 247 p.

COX, J. C.; ROSS. S. A.; RUBINSTEIN, M. *Option pricing: A simplified Approach*. **Journal of Financial Economics**. v. 7, n. 3, p. 229-263, september, 1979.

DAMODARAN, A. **Avaliação de investimentos: ferramentas e técnicas para a determinação do valor de qualquer ativo**. 1. ed. Rio de Janeiro: Qualitymark. 2002a. 630 p.

DAMODARAN, A. **The promise and peril of real options**. Disponível em: <http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/pdfiles/papers/realopt.pdf> Acesso em: 25 out. 2004. 2002b.

DAY, T.; LEWIS, C. The Behavior of the Volatility Implicit in the Prices of Stock Index Options. ***Journal of Financial Economics***. v. 22, p. 103-122, 1988.

DIXIT, A. K., PINDYCK, R. S. **Investment Under Uncertainty**. New Jersey: Princeton University Press, 1994. 467 p.

DONANGELO, A.; SILVA, W.; LEMGRUBER, E. F. **Estimadores de volatilidade para modelos de valor em risco de ativos lineares e não-lineares: Investigação**

**para períodos de crises e estáveis no mercado brasileiro**. *Anais, XXIV ENANPAD*, 2000.

DUARTE, A., HEIL, T. e PINHEIRO, M. **Estimação da Volatilidade de Ativos e Índices Brasileiros**. Resenha da BM&F n. 111.

FIGLEWSKI, S.; GAO, B. The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing. **Journal of Financial Economics**, 1999.

FORTUNA, E. **Mercado financeiro: produtos e serviços**. 16. ed. Rio de Janeiro: Qualitimark, 2005. 812 p.

GARMAN, M. and KLASS, M. (1980), “On the estimation of security price volatilities from historical data. **Journal of Business**. v. 53, p. 67-78.

HARRISON, E. F. , PELLETIER, M. A. (2000), *Levels of Strategic Decision Success*, Management Decision, v. 38, Issue 2. In: Santos, E. M.; Pamplona, E. O. *Teoria das Opções Reais: uma Abordagem Estratégica para Análise de Investimentos.* XXI Encontro Nacional de Engenharia de Produção, Salvador, Bahia, Outubro de 2001.

HIRSCHLEIFER, On the theory of optimal investment decision. In: **Journal of Political Economy**. v. 66, August, 1958.

HULL, J. C. **Options, futures & others derivatives**. 1. ed. Upper Saddle River. Prentice Hall: 1993. 492p.

HULL, J. C. **Options, futures & others derivatives**. 4. ed. Upper Saddle River. Prentice Hall: 1999. 698p.

HULL, J. C. **Options, futures & others derivatives**. 5. ed. Upper Saddle River. Prentice Hall: 2003. 744p.

HULL, J. C. **Introdução aos mercados futuros e de opções**. 2. ed. São Paulo. Cultura Editores Associados: 1996. 448p.

KERLINGER, F. N. **Metodologia da pesquisa em ciências sociais**. São Paulo: 1980.

LANARI, C.S.; SOUZA A. A.; DUQUE, J.C. **Desvios em Relação ao Modelo de Black–Scholes: Estudos Relacionados à Volatilidade dos Ativos Subjacentes às Opções**. Anais, XIX Enegep. Rio de Janeiro, 1999.

LANARI, C. S.; SOUZA, A. A. de. 1998. **Modelo de BLACK e SCHOLES: Estudo Empírico sobre as Opções Telebrás PN no ano de 1998**. *Anais, XXIII ENANPAD*, 2000.

LEMGRUBER, E. F. **Avaliação de Contratos de Opções**. Edição Revisada e Ampliada. São Paulo: BM&F, 1995. 62 p.

LEMGRUBER, E. F. *et al*. **Gestão de risco e derivativos: aplicações no Brasil**. 1. ed. São Paulo. Atlas: 2001. 274 p.

LINT, O., PENNINGS, E. R&D *As an Option on Market Introduction.* ***R&D Management.*** n. 4, p. 279-287, 1998.

MALZ, A. M. Do Implied Volatilities Provide Early Warning of Market Stress? ***RiskMetrics Journal***. v.1, n.1, p.41-60, 2000.

MERTON, R. C. The Theory of rational option pricing. **Bell Journal of Economics**, v. 4, p. 141-183, 1973.

NUNES, A. da C. **Testando o modelo de Black & Scholes para o mercado brasileiro**. Resenha 123. BMF.

PARKINSON, M. The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return. **Journal of Business**. v. 53, p. 61-66, 1976.

PARKINSON, M. Option pricing: the american put. **Journal of Business**. v. 50, p. 21-36, 1977.

PINDYCK, R. S.; RUBINFELD, D. L. **Econometria: modelos e previsões**. 4. ed. Rio de Janeiro: Campus. 2004. 726 p.

PÓVOA, A. **Como precificar ações**. 1. ed. São Paulo: Globo. 2004. 373 p.

ROCHMAN, R. R. **Análise de métodos numéricos para precificação de opções**. São Paulo. Dissertação (Mestrado). Escola de Administração de Empresas de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, 1998.

ROSS, S. A.; WESTERFIELD. R. W.; JAFFE, J. F. (1995*).* **Administração financeira***.* São Paulo: Atlas.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books. 1996. 406 p.

SALIBY, E.; MOREIRA, F. F. P. **Estudo comparativo dos métodos de quase-Monte Carlo, amostragem descritiva, hipercubo latino e monte Carlo clássico na análise de risco.**. *Anais, I Encontro da Sociedade Brasileira de Finanças*, 2000.

SANTOS, J. E. dos. **Dicionário de derivativos: inglês-português**. 1. ed. São Paulo: Atlas. 1998. 222 p.

SANVICENTE, A. Z. **Derivativos**. 1. ed. São Paulo: Publifolha. 2003. 119 p.

SANVICENTE, A. Z.; MONTEIRO, R. da C. **A guerra entre comprados e vendidos no mercado de opções de compra da Bolsa de Valores de São Paulo**. Revista de Administração da USP. v. 40, n. 1, p. 34-43, Jan/Mar, 2005.

SILVA, L. M. **Mercado de opções: Conceitos e estratégias**. 2. ed. Rio de Janeiro: Halip. 1999. 217 p.

SILVA NETO, L. A. **Opções: Do tradicional ao exótico**. 2. ed. São Paulo: Atlas. 1996. 291 p.

SILVA NETO, L. A. **Derivativos: definições, emprego e risco**. 4. ed. São Paulo: Atlas. 1997. 298 p.

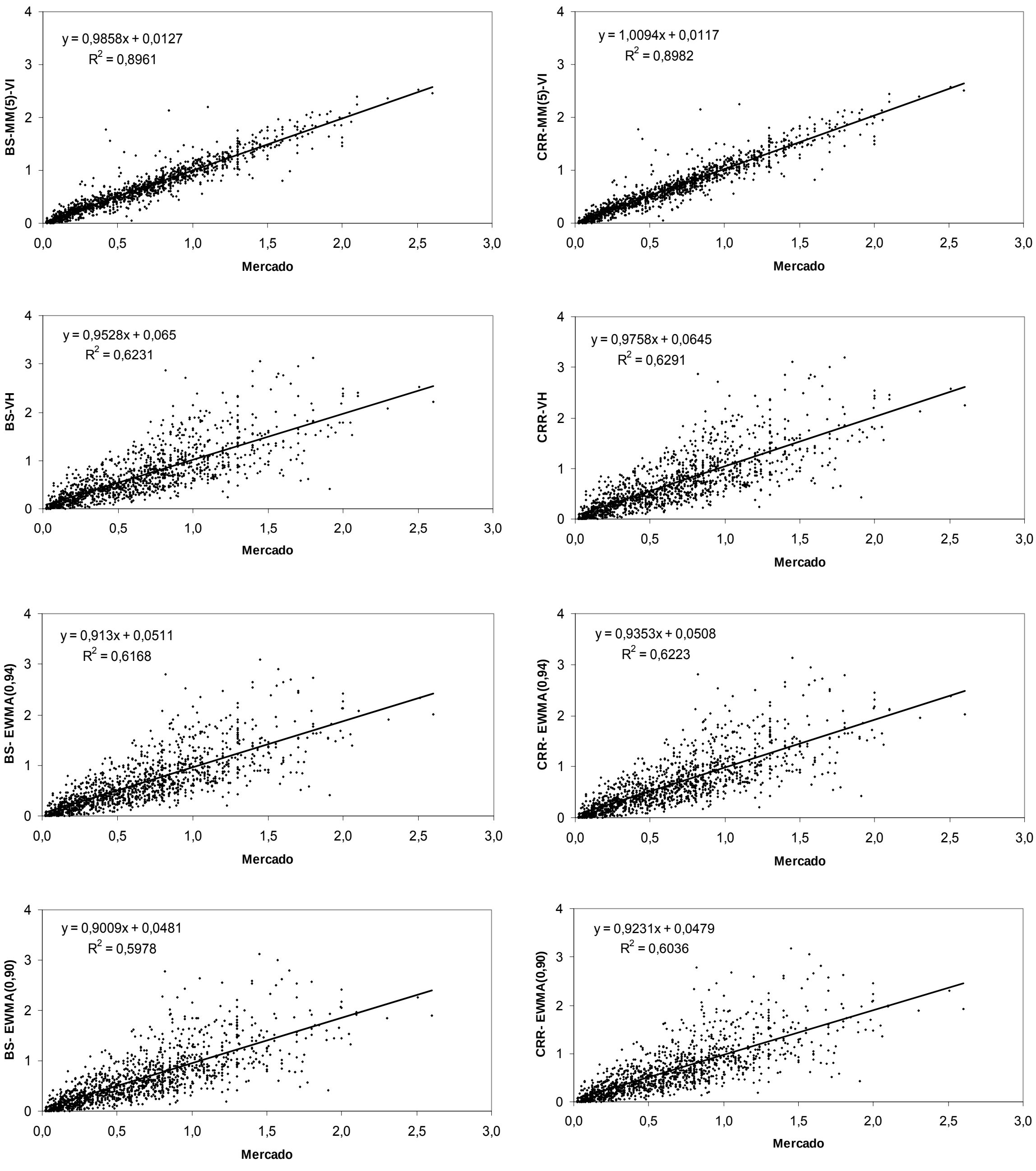
TRIGEORGIS, L. The Nature of Options Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**. v. 28, n. 1, march, p. 1-21, 1993.

VITIELLO Jr.; L. R. de **Opções de compra: o ajustamento de dois modelos de precificação ao mercado brasileiro**. *Anais, XXII ENANPAD*, 1998.

WILMOTT, P.; HOWISON, S; DEWYNNE, J. **The Matematics of Financial Derivatives**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

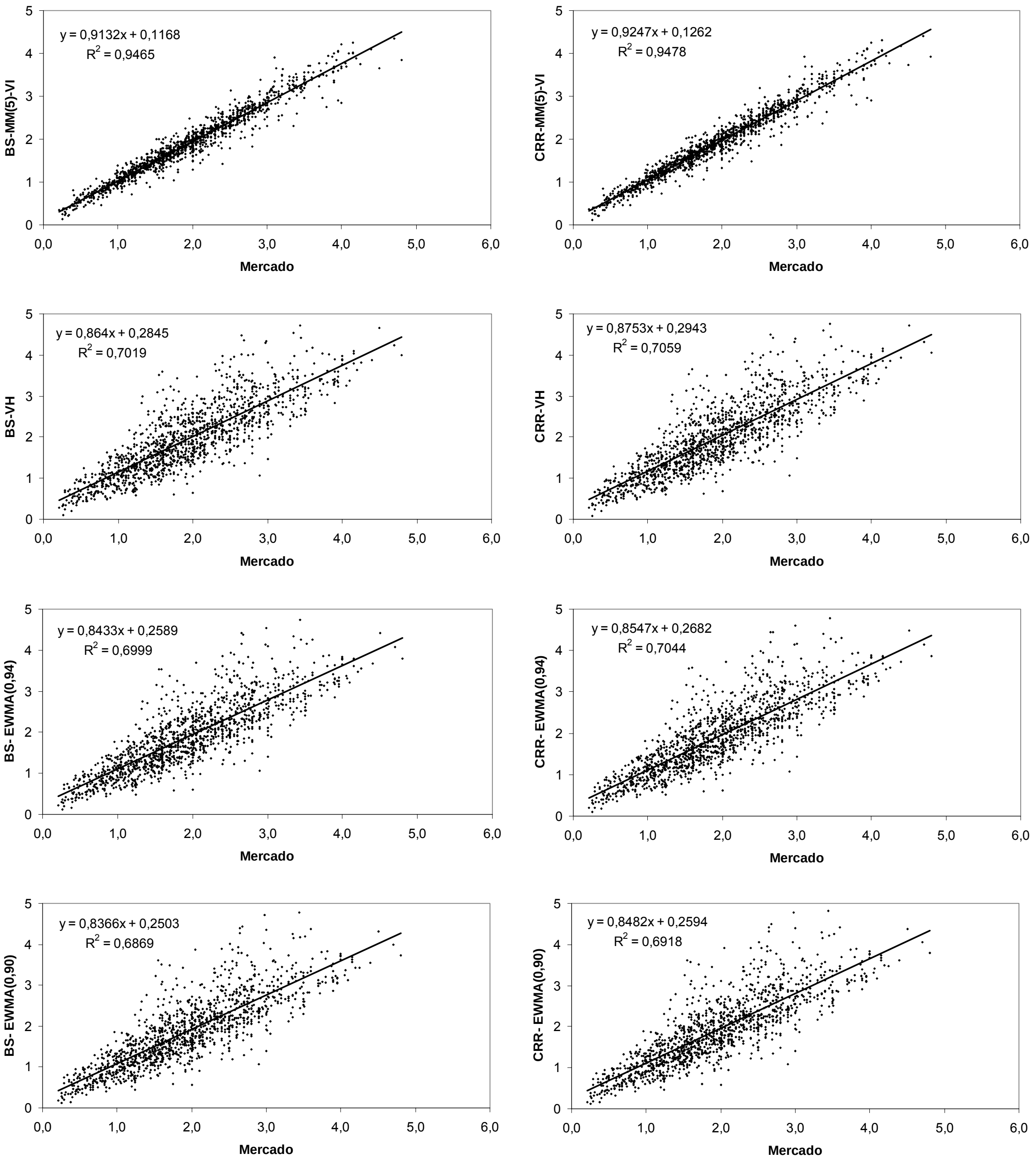
# ANEXOS

# Anexo 3 – Diagramas de dispersão entre os valores de mercado e os apreçamentos com grau de *moneyness* classificado como *out-the-money*



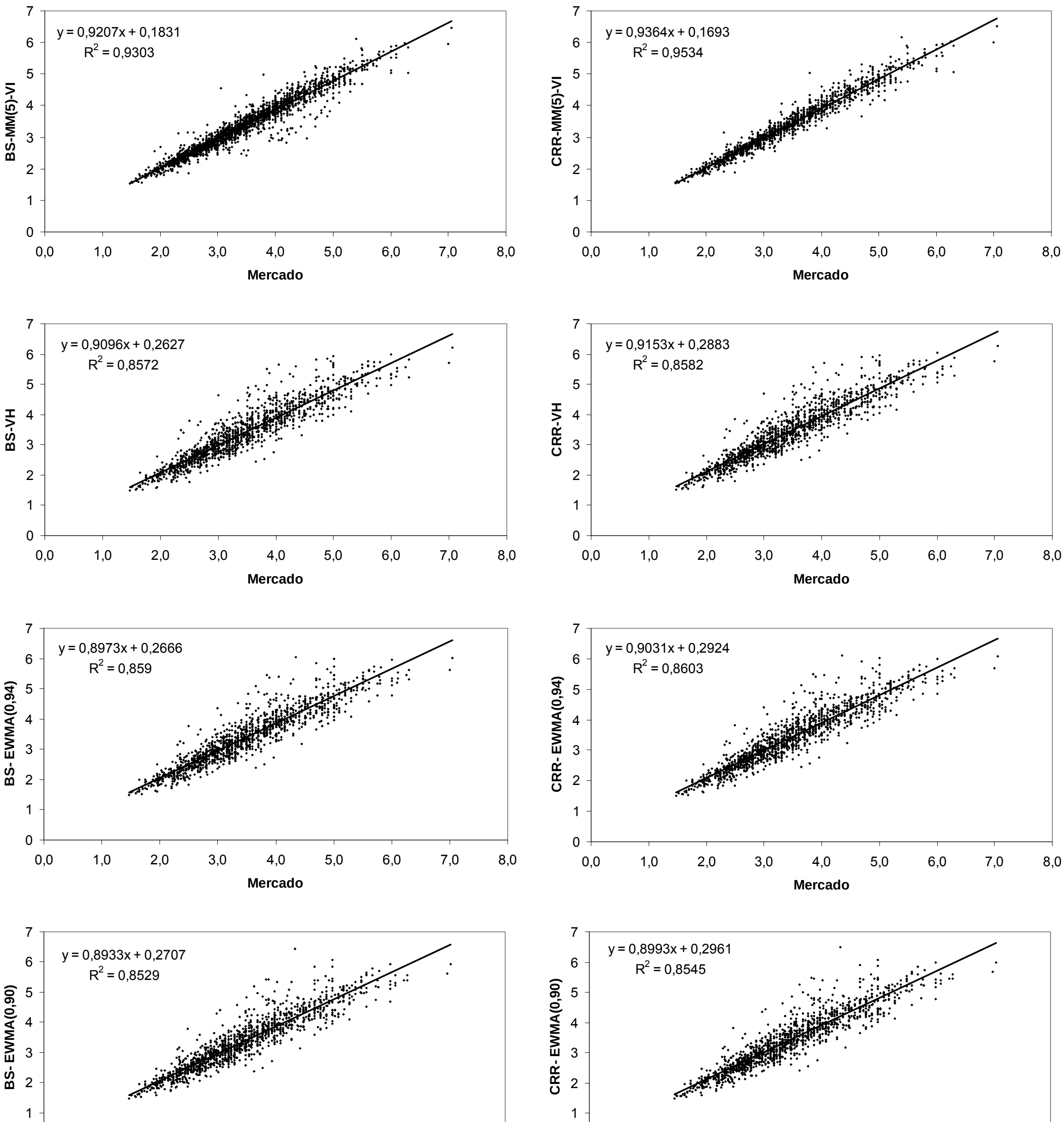

BS-MM(5)-VI (m1) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
CRR-MM(5)-VI (m2) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
BS-VH (m3) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
CRR-VH (m4) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
BS-EWMA(0,94) (m5) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0,94$.
CRR-EWMA(0,94) (m6) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0,94$.
BS-EWMA(0,90) (m7) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0,90$.
CRR-EWMA(0,90) (m8) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com $\alpha = 0,90$.

# Anexo 4 – Diagramas de dispersão entre os valores de mercado e os apreçamentos com grau de *moneyness* classificado como *at-the-money*




BS-MM(5)-VI (m1) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
CRR-MM(5)-VI (m2) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
BS-VH (m3) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
CRR-VH (m4) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
BS-EWMA(0,94) (m5) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94.
CRR-EWMA(0,94) (m6) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94.
BS-EWMA(0,90) (m7) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90.
CRR-EWMA(0,90) (m8) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90.

Anexo 5 – Diagramas de dispersão entre os valores de mercado e os apreçamentos com grau de *moneyness* classificado como *in-the-money*




BS-MM(5)-VI (m1) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
CRR-MM(5)-VI (m2) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade implícita utilizando média móvel de cinco dias.
BS-VH (m3) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
CRR-VH (m4) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade histórica utilizando um período de 21 dias.
BS-EWMA(0,94) (m5) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94.
CRR-EWMA(0,94) (m6) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,94.
BS-EWMA(0,90) (m7) – Modelo de Black & Scholes com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90.
CRR-EWMA(0,90) (m8) – Modelo Binomial com estimação de volatilidade através do método de alisamento exponencial utilizando média móvel de vinte e um dias com α = 0,90.