

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANA PAULA IMAI

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO LINEAR DE VIGAS DE PONTES  
DE CONCRETO ARMADO COM SEÇÃO E DISTRIBUIÇÃO DE ARMADURAS  
VARIÁVEIS ATRAVÉS DA INTERAÇÃO ENTRE VEÍCULO E PONTE E DA MECÂNICA  
DO DANO

CURITIBA

2018

ANA PAULA IMAI

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO LINEAR DE VIGAS DE PONTES  
DE CONCRETO ARMADO COM SEÇÃO E DISTRIBUIÇÃO DE ARMADURAS  
VARIÁVEIS ATRAVÉS DA INTERAÇÃO ENTRE VEÍCULO E PONTE E DA MECÂNICA  
DO DANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Construção Civil.

Orientador: Prof. Roberto Dalledone Machado,  
D.Eng., M.Sc.

CURITIBA

2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

I31a

Imai, Ana Paula

Análise do comportamento dinâmico não linear de vigas de pontes de concreto armado com seção e distribuição de armaduras variáveis através da interação entre veículo e ponte e da mecânica do dano [recurso eletrônico] / Ana Paula Imai. – Curitiba, 2018.

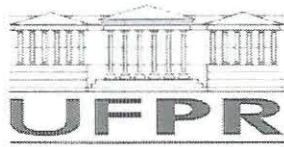
Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Construção Civil, 2018.

Orientador: Roberto Dalledone Machado .

1. Vigas de concreto. 2. Dinâmica estrutural. 3. Mecânica do dano contínuo. 4. Método dos Elementos Finitos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Machado, Roberto Dalledone. III. Título.

CDD: 620.137

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA DE  
CONSTRUÇÃO CIVIL

## TERMO DE APROVAÇÃO

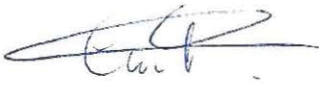
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE CONSTRUÇÃO CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **ANA PAULA IMAI** intitulada: **ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO LINEAR DE VIGAS DE PONTES DE CONCRETO ARMADO COM SEÇÃO E DISTRIBUIÇÃO DE ARMADURAS VARIÁVEIS ATRAVÉS DA INTERAÇÃO ENTRE VEÍCULO E PONTE E DA MECÂNICA DO DANO**, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 12 de Novembro de 2018.



ROBERTO DALLEDONE MACHADO  
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)



CARLOS EDUARDO ROSSIGALI  
Avaliador Externo (UFPR)



LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA  
Avaliador Externo (UTFPR)



MARCOS ARNDT  
Avaliador Interno (UFPR)

*Dedico este trabalho à minha família.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor Roberto Dalledone Machado pela orientação e paciência oferecidas durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao meu pai, por todo o apoio e confiança transmitidos. Aos meus irmãos, Fernando, pela ajuda e paciência, e Yudi, pela alegria. À minha tia Rosa, pelo carinho e companheirismo.

Ao Thiago, por toda a ajuda e incentivo e, principalmente, pela amizade.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Engenharia de Construção Civil por todo o conhecimento transmitido.

Aos colegas de CESEC, em especial Rômulo, Jair e Carlos pela amizade desenvolvida.

Aos meus amigos Ju, Carol, Harry e Daisy pelos anos de parceria, amizade e risadas.

Às professoras Elizabeth Penner e Renata Sá Brito Stramandinoli pela indicação ao ingresso no mestrado.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À Universidade Federal do Paraná e ao CESEC pela acolhida.

*"Da próxima vez que alguém reclamar que você cometeu um erro, diga a essa pessoa que talvez isso seja uma boa coisa, porque sem imperfeição nem você nem eu existiríamos."*

*(Stephen Hawking)*

## RESUMO

O concreto armado é amplamente utilizado em diversos tipos de construção devido à eficaz combinação entre as propriedades mecânicas dos materiais, uma vez que o concreto tem adequada resistência à compressão e o aço à tração. O concreto, no entanto, apresenta uma relação não linear entre tensão e deformação, decorrente, entre outros fenômenos, do surgimento de fissuras. Esta fissuração é considerada, de modo simplificado, durante o desenvolvimento de projetos. Porém, quando esta ocorre de forma excessiva, pode comprometer a aderência entre o concreto e o aço, além de amplificar os deslocamentos além do previsto, gerando efeitos que podem comprometer a integridade e o desempenho da estrutura. Considerando o caso de pontes rodoviárias e ferroviárias, os carregamentos dinâmicos originários da passagem de veículos podem amplificar os processos de fissuração do concreto e de plastificação do aço. Contudo, as normas relativas ao projeto de pontes desconsideram os efeitos dinâmicos da estrutura, prescrevendo uma majoração dos carregamentos estáticos de modo a compensar esta simplificação. Além disso, as normas sugerem a consideração de um comportamento elástico linear dos materiais na análise estrutural. A consideração da Mecânica do Dano e da plasticidade nas armaduras de aço aumenta a complexidade do modelo, transformando-o em um problema dinâmico não linear e, assim, modificando as respostas da estrutura. Em pontes, é recorrente a adoção de vigas com seções transversais que favoreçam a resistência do concreto à compressão, assumindo geometrias como I e T. Além disso, usualmente, a distribuição de armaduras nas vigas se dá de forma variável ao longo de seu comprimento. Estas considerações, portanto, contribuem para a análise de modelos mais realistas. As pontes são modeladas por meio do Método dos Elementos Finitos não linear, por elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*. A danificação ao longo do tempo é representada pela perda de rigidez da estrutura pela Mecânica do Dano. É adotado, para o concreto, um modelo constitutivo de dano baseado no modelo de *Mazars*, adaptado de tal forma que é possível considerar a inversão de esforços mecânicos devido à vibração. Emprega-se um modelo elastoplástico bilinear com encruamento para as armaduras. Utiliza-se o método de integração temporal proposto por *Newmark* em conjunto com o método iterativo de *Newton-Raphson* para solucionar as equações. O amortecimento estrutural é considerado através do método de *Rayleigh*, com atualizações dos coeficientes. A partir das contribuições deste trabalho, foram desenvolvidas rotinas computacionais ao núcleo do programa ABXDNL 2.9 de modo a aprimorar o modelo para análises dinâmicas não lineares de pontes mais realistas. Assim, este trabalho avaliou as respostas dinâmicas não lineares de pontes de concreto armado, por meio de sua interação dinâmica com modelos veiculares, em que a consideração de geometrias de seções transversais variadas e a distribuição não uniforme de armadura afetam a evolução da danificação.

**Palavras-chaves:** Dinâmica Não Linear. Mecânica do Dano. Método dos Elementos Finitos. Interação Dinâmica. Modelagem Computacional.

## ABSTRACT

Reinforced concrete is widely used in various sorts of constructions due to the effective combination between its material's mechanical properties, since the concrete has suitable compressive strength and the steel has high tensile one. The concrete, however, presents a nonlinear relation between tension and strain due, among other phenomena, to the beginning of the cracking process. This cracking is regarded, in a simplified way, during the project development. Nevertheless, when it occurs in an excessive amount, the adhesions between concrete and reinforcement can be impaired, also the displacement can be amplified beyond the expected, creating effects that can compromise the structure's health and performance. For highway and railway bridges' cases, the dynamic loads generated from the passage of vehicles on it can amplify the loss of integrity of the concrete and the strain hardening of the reinforcement. However, the normative codes for bridge's design allow neglecting the structure's dynamic effects, prescribing an increase to the static load to compensate this simplification. Besides that, the codes suggest a linear elastic behaviour for the materials in the structural analysis. Nevertheless, this method doesn't consider the process of damaging and plastification of the concrete and the steel, respectively, neither the dynamic behaviour of the system. The consideration of the Damage Mechanics on the concrete and plasticity on the steel bars enhance the model complexity, transforming it in a nonlinear and dynamic problem, modifying the structural responses. Often, in bridges, beams with cross-section that utilize the concrete's compression strength are adopted, assuming geometries such as I and T. Besides that, usually, the reinforcement distribution occurs in a variable manner through its length. These considerations, therefore, contribute to the analysis of realistic models. The bridges are modelled with the nonlinear finite elements method, with *Euler-Bernoulli's* beam finite elements. The damage evolution through time is represented by the structure's stiffness loss due to Damage Mechanics. A damage constitutive model, based on *Mazars'* model, is adopted for the concrete, adapted in order to consider the stresses' inversion due to vibration. A bilinear elastoplastic with hardening model is employed for the reinforcement. In order to solve the equations, is used the *Newmark's* temporal integration method together with *Newton-Raphson's* iterative method. The structural damping is considered through *Rayleigh's* method, with updated coefficients. From this work's contributions, computational routines were added to the ABXDNL 2.9 core, in order to improve the model to nonlinear dynamic analysis of realistic bridges. Therefore, this work evaluated the nonlinear dynamic responses of reinforced concrete bridges, through its dynamic interaction with vehicular models wherein the diverse cross-section geometries and a not uniform reinforcement distribution affect the damage evolution.

**Keywords:** Nonlinear Dynamics. Damage Mechanics. Finite Element Method. Dynamic Interaction. Computational Modeling.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – Flexão em vigas de materiais compósitos . . . . .	46
FIGURA 2 – Flexão composta plana em vigas de materiais compósitos . . . . .	47
FIGURA 3 – Viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído . . . . .	52
FIGURA 4 – Tensões axiais atuantes na seção transversal da viga (configuração deformada) . . . . .	52
FIGURA 5 – Elemento finito de viga de <i>Euler-Bernoulli</i> e seus graus de liberdade	54
FIGURA 6 – Gráfico das funções de interpolação polinomiais cúbicas de <i>Hermite</i>	55
FIGURA 7 – Processo de transição entre dano e fratura . . . . .	66
FIGURA 8 – Relação constitutiva da resposta elástica com dano pelo formalismo termodinâmico da Mecânica do Dano . . . . .	73
FIGURA 9 – Elemento de volume representativo de um sólido com dano . . . . .	74
FIGURA 10 – Acréscimo de comprimento devido à abertura de defeitos . . . . .	76
FIGURA 11 – Variação da rigidez secante do meio contínuo equivalente . . . . .	79
FIGURA 12 – Princípio de equivalência de deformação . . . . .	79
FIGURA 13 – Curva $\sigma - \varepsilon$ do comportamento à compressão do concreto . . . . .	80
FIGURA 14 – Método da aceleração constante de <i>Newmark</i> . . . . .	83
FIGURA 15 – Relação entre força e deslocamento do Método de <i>Newton-Raphson</i> Completo em análises dinâmicas não lineares . . . . .	91
FIGURA 16 – Relação entre força e deslocamento do Método de <i>Newton-Raphson</i> Modificado em análises dinâmicas não lineares . . . . .	92
FIGURA 17 – Modelo de veículo com 1 grau de liberdade . . . . .	98
FIGURA 18 – Modelo de veículo com 1 grau de liberdade acoplado com excitações	99
FIGURA 19 – Interação entre veículo e viga . . . . .	101
FIGURA 20 – Diagrama tensão-deformação do concreto . . . . .	103
FIGURA 21 – Microfissuração: a) tração, b) compressão . . . . .	106
FIGURA 22 – Diagrama tensão-deformação do modelo de dano de <i>Mazars</i> : a) tração, b) compressão . . . . .	107
FIGURA 23 – Modelo elastoplástico bilinear com encruamento para o aço estrutural	108
FIGURA 24 – Mapeamento de ida, de volta e pseudo-malha . . . . .	109
FIGURA 25 – Seção transversal retangular de ponte dividida em $n$ camadas . . . . .	110
FIGURA 26 – Seções transversais com geometria variável . . . . .	111
FIGURA 27 – Viga I simétrica com refinamento variável . . . . .	112
FIGURA 28 – Refino de camadas variável na seção transversal: a) refinamento mínimo, b) maior refinamento nas camadas inferiores, c) maior refinamento em toda seção transversal . . . . .	113
FIGURA 29 – Seções transversais com diferentes armaduras . . . . .	114

FIGURA 30 – Seções transversais de diferentes armaduras divididas em camadas	114
FIGURA 31 – Seções longitudinais com diferentes armaduras . . . . .	115
FIGURA 32 – Diferentes graus de refinamento para distribuições variáveis de armaduras . . . . .	115
FIGURA 33 – Coordenadas das camadas da seção transversal . . . . .	117
FIGURA 34 – Diferença nas deformações das camadas conforme variação da posição da linha neutra: a) posição da linha neutra situada no centro geométrico da seção transversal, b) posição da linha neutra afastada do centro geométrico da seção transversal . . . . .	118
FIGURA 35 – Coordenadas das camadas da seção transversal atualizadas analiticamente . . . . .	119
FIGURA 36 – Variação dos momentos de inércia . . . . .	120
FIGURA 37 – Parâmetros geométricos da camadas . . . . .	121
FIGURA 38 – Substituição de variável em elemento de viga de <i>Euler-Bernoulli</i> .	124
FIGURA 39 – Estados de tensões e de deformações lineares em uma viga I assimétrica . . . . .	130
FIGURA 40 – Estados de tensões e de deformações não lineares em uma viga I assimétrica . . . . .	130
FIGURA 41 – Resultado do processo de danificação dinâmico sem tratamento de erro no contorno . . . . .	132
FIGURA 42 – Danificação nos elementos próximos ao apoio da esquerda, sem tratamento de erro no contorno . . . . .	132
FIGURA 43 – Respostas dinâmicas de $\frac{d\theta}{dx}$ instáveis obtidas nos pontos de integração de <i>Gauss</i> do primeiro elemento sem tratamento do erro no contorno . . . . .	133
FIGURA 44 – Respostas dinâmicas de $\frac{d\theta}{dx}$ estáveis obtidas com tratamento do erro de contorno ao longo do tempo . . . . .	134
FIGURA 45 – Resultado do processo de danificação dinâmico com tratamento de erro de contorno ao longo do tempo . . . . .	134
FIGURA 46 – Ilustração da viga 5.1.1 . . . . .	136
FIGURA 47 – Configuração final de dano da viga 5.1.1 . . . . .	137
FIGURA 48 – Deslocamento máximo <i>versus</i> incremento de carga da viga 5.1.1	138
FIGURA 49 – Ilustração da viga 5.1.2 . . . . .	139
FIGURA 50 – Condição final da viga 5.1.2 em modelo experimental . . . . .	140
FIGURA 51 – Evolução de dano em modelagem computacional da viga 5.1.2 .	140
FIGURA 52 – Evolução de dano da viga 5.1.2 . . . . .	141
FIGURA 53 – Deslocamento máximo <i>versus</i> incremento de carga da viga 5.1.2	141
FIGURA 54 – Ilustração da Ponte 5.2 . . . . .	143
FIGURA 55 – Configuração final de dano da viga 5.2.1.1 . . . . .	144

FIGURA 56 – Evolução do dano no 15º elemento da viga 5.2.1.1 . . . . .	145
FIGURA 57 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.1.1 . . . . .	145
FIGURA 58 – Deformações das camadas superior e inferior do 15º elemento da viga 5.2.1.1 . . . . .	147
FIGURA 59 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.1.1 . . . . .	148
FIGURA 60 – Configuração final de dano da viga 5.2.1.2 . . . . .	149
FIGURA 61 – Evolução do dano no 15º elemento da viga 5.2.1.2 . . . . .	149
FIGURA 62 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.1.2 . . . . .	150
FIGURA 63 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.1.2 . . . . .	150
FIGURA 64 – Configuração final de dano da viga 5.2.1.3 . . . . .	151
FIGURA 65 – Evolução do dano no 15º elemento da viga 5.2.1.3 . . . . .	152
FIGURA 66 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.1.3 . . . . .	152
FIGURA 67 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.1.3 . . . . .	153
FIGURA 68 – Configuração final de dano da viga 5.2.1.4 . . . . .	154
FIGURA 69 – Evolução do dano no 15º elemento da viga 5.2.1.4 . . . . .	154
FIGURA 70 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.1.4 . . . . .	155
FIGURA 71 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.1.4 . . . . .	155
FIGURA 72 – Configuração final de dano da viga 5.2.1.5 . . . . .	156
FIGURA 73 – Evolução do dano no 15º elemento da viga 5.2.1.5 . . . . .	157
FIGURA 74 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.1.5 . . . . .	157
FIGURA 75 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.1.5 . . . . .	158
FIGURA 76 – Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.2.1 . . . . .	159
FIGURA 77 – Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.2.1 . . . . .	160
FIGURA 78 – Configuração final de dano da viga 5.2.2.1 . . . . .	162
FIGURA 79 – Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.2.2.1 . . . . .	163
FIGURA 80 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.2.1 . . . . .	163
FIGURA 81 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.2.1 . . . . .	164
FIGURA 82 – Configuração final de dano da viga 5.2.2.2 . . . . .	165
FIGURA 83 – Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.2.2.2 . . . . .	165
FIGURA 84 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.2.2 . . . . .	166

FIGURA 85 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.2.2 . . . . .	166
FIGURA 86 – Configuração final de dano da viga 5.2.2.3 . . . . .	167
FIGURA 87 – Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.2.2.3 . . . . .	168
FIGURA 88 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.2.3 . . . . .	168
FIGURA 89 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.2.3 . . . . .	169
FIGURA 90 – Configuração final de dano da viga 5.2.2.4 . . . . .	170
FIGURA 91 – Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.2.2.4 . . . . .	170
FIGURA 92 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.2.4 . . . . .	171
FIGURA 93 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.2.4 . . . . .	171
FIGURA 94 – Configuração final de dano da viga 5.2.2.5 . . . . .	172
FIGURA 95 – Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.2.2.5 . . . . .	173
FIGURA 96 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.2.5 . . . . .	173
FIGURA 97 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.2.5 . . . . .	174
FIGURA 98 – Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.2.2 . . . . .	175
FIGURA 99 – Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.2.2 . . . . .	176
FIGURA 100–Ilustração da Ponte 5.3 . . . . .	178
FIGURA 101–Seção transversal da viga 5.3.1 . . . . .	179
FIGURA 102–Configuração final de dano da viga 5.3.1 . . . . .	180
FIGURA 103–Evolução do dano no 16º elemento da viga 5.3.1 . . . . .	180
FIGURA 104–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.3.1 . . . . .	181
FIGURA 105–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.3.1 . . . . .	182
FIGURA 106–Seção transversal da viga 5.3.2 . . . . .	183
FIGURA 107–Configuração final de dano da viga 5.3.2 . . . . .	183
FIGURA 108–Evolução do dano no 16º elemento da viga 5.3.2 . . . . .	184
FIGURA 109–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.3.2 . . . . .	185
FIGURA 110–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.3.2 . . . . .	186
FIGURA 111–Seção transversal da viga 5.3.3 . . . . .	187
FIGURA 112–Configuração final de dano da viga 5.3.3 . . . . .	187
FIGURA 113–Evolução do dano no 16º elemento da viga 5.3.3 . . . . .	188
FIGURA 114–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.3.3 . . . . .	189

FIGURA 115–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.3.3 . . . . .	190
FIGURA 116–Seção transversal da viga 5.3.4 . . . . .	191
FIGURA 117–Configuração final de dano da viga 5.3.4 . . . . .	191
FIGURA 118–Evolução do dano no 16º elemento da viga 5.3.4 . . . . .	192
FIGURA 119–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.3.4 . . . . .	193
FIGURA 120–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.3.4 . . . . .	193
FIGURA 121–Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.3 . . . . .	194
FIGURA 122–Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.3 . . . . .	195
FIGURA 123–Ilustração da Ponte 5.4.1 . . . . .	197
FIGURA 124–Configuração final de dano da viga 5.4.1.1 . . . . .	198
FIGURA 125–Evolução do dano no 16º elemento da viga 5.4.1.1 . . . . .	199
FIGURA 126–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.1.1 . . . . .	200
FIGURA 127–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.1.1 . . . . .	200
FIGURA 128–Configuração final de dano da viga 5.4.1.2 . . . . .	202
FIGURA 129–Evolução do dano no 18º elemento da viga 5.4.1.2 . . . . .	203
FIGURA 130–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.1.2 . . . . .	204
FIGURA 131–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.1.2 . . . . .	205
FIGURA 132–Configuração final de dano da viga 5.4.1.3 . . . . .	207
FIGURA 133–Evolução do dano no 20º elemento da viga 5.4.1.3 . . . . .	207
FIGURA 134–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.1.3 . . . . .	208
FIGURA 135–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.1.3 . . . . .	209
FIGURA 136–Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.4.1 . . . . .	210
FIGURA 137–Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.4.1 . . . . .	211
FIGURA 138–Ilustração da Ponte 5.4.2 . . . . .	212
FIGURA 139–Configuração final de dano da viga 5.4.2.1 . . . . .	213
FIGURA 140–Evolução do dano no 40º elemento da viga 5.4.2.1 . . . . .	213
FIGURA 141–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.2.1 . . . . .	214
FIGURA 142–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.2.1 . . . . .	214
FIGURA 143–Configuração final de dano da viga 5.4.2.2 . . . . .	216

FIGURA 144–Evolução do dano no 45º elemento da viga 5.4.2.2 . . . . .	216
FIGURA 145–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.2.2 . . . . .	217
FIGURA 146–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.2.2 . . . . .	217
FIGURA 147–Configuração final de dano da viga 5.4.2.3 . . . . .	219
FIGURA 148–Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.4.2.3 . . . . .	219
FIGURA 149–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.2.3 . . . . .	220
FIGURA 150–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.2.3 . . . . .	220
FIGURA 151–Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.4.2 . . . . .	222
FIGURA 152–Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.4.2 . . . . .	223
FIGURA 153–Ilustração da Ponte 5.5 . . . . .	224
FIGURA 154–Ilustração da Ponte 5.5 . . . . .	225
FIGURA 155–Ilustração da Ponte 5.5 . . . . .	225
FIGURA 156–Configuração final de dano da viga 5.5.1 . . . . .	227
FIGURA 157–Evolução do dano no 70º elemento da viga 5.5.1 . . . . .	228
FIGURA 158–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.5.1 . . . . .	228
FIGURA 159–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.5.1 . . . . .	229
FIGURA 160–Configuração final de dano da viga 5.5.2 . . . . .	230
FIGURA 161–Evolução do dano no 70º elemento da viga 5.5.2 . . . . .	231
FIGURA 162–Deslocamento vertical no nó central da viga 5.5.2 . . . . .	232
FIGURA 163–Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.5.2 . . . . .	232
FIGURA 164–Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.5 . . . . .	233
FIGURA 165–Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.5 . . . . .	234

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Parâmetros da viga, carga, concreto e aço do modelo 5.1.1 . . . . .	136
TABELA 2 – Parâmetros da viga, carga, concreto e aço do modelo 5.1.2 . . . . .	139
TABELA 3 – Parâmetros do veículo, concreto, aço e de <i>Newmark</i> adotados para os modelos 5.2 . . . . .	143
TABELA 4 – Parâmetros da ponte 5.2.1 . . . . .	143
TABELA 5 – Distribuições de armadura das pontes 5.2.1 . . . . .	144
TABELA 6 – Frequências naturais da ponte 5.2.1.1 . . . . .	148
TABELA 7 – Frequências naturais da ponte 5.2.1.2 . . . . .	151
TABELA 8 – Frequências naturais da ponte 5.2.1.3 . . . . .	153
TABELA 9 – Frequências naturais da ponte 5.2.1.4 . . . . .	156
TABELA 10 – Frequências naturais da ponte 5.2.1.5 . . . . .	158
TABELA 11 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.2.1 . . . . .	161
TABELA 12 – Parâmetros da ponte 5.2.2 . . . . .	161
TABELA 13 – Distribuições de armadura das pontes 5.2.2 . . . . .	162
TABELA 14 – Frequências naturais da ponte 5.2.2.1 . . . . .	164
TABELA 15 – Frequências naturais da ponte 5.2.2.2 . . . . .	167
TABELA 16 – Frequências naturais da ponte 5.2.2.3 . . . . .	169
TABELA 17 – Frequências naturais da ponte 5.2.2.4 . . . . .	172
TABELA 18 – Frequências naturais da ponte 5.2.2.5 . . . . .	174
TABELA 19 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.2.2 . . . . .	177
TABELA 20 – Parâmetros do veículo, concreto, aço e de <i>Newmark</i> adotados para os modelos 5.3 . . . . .	178
TABELA 21 – Parâmetros da ponte 5.3 . . . . .	178
TABELA 22 – Distribuições de armadura das pontes 5.3 . . . . .	179
TABELA 23 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.3.1 . . . . .	179
TABELA 24 – Frequências naturais da ponte 5.3.1 . . . . .	182
TABELA 25 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.3.2 . . . . .	183
TABELA 26 – Frequências naturais da ponte 5.3.2 . . . . .	186
TABELA 27 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.3.3 . . . . .	187
TABELA 28 – Frequências naturais da ponte 5.3.3 . . . . .	190
TABELA 29 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.3.4 . . . . .	191
TABELA 30 – Frequências naturais da ponte 5.3.4 . . . . .	194
TABELA 31 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.3 . . . . .	196
TABELA 32 – Parâmetros do veículo, concreto, aço e de <i>Newmark</i> adotados para os modelos 5.4 . . . . .	197
TABELA 33 – Parâmetros da ponte 5.4.1.1 . . . . .	197

TABELA 34 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.1.1 . . . . .	198
TABELA 35 – Frequências naturais da ponte 5.4.1.1 . . . . .	201
TABELA 36 – Parâmetros da ponte 5.4.1.2 . . . . .	201
TABELA 37 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.1.2 . . . . .	202
TABELA 38 – Frequências naturais da ponte 5.4.1.2 . . . . .	206
TABELA 39 – Parâmetros da ponte 5.4.1.3 . . . . .	206
TABELA 40 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.1.3 . . . . .	206
TABELA 41 – Frequências naturais da ponte 5.4.1.3 . . . . .	209
TABELA 42 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.4.1 . . . . .	211
TABELA 43 – Parâmetros da ponte 5.4.2.1 . . . . .	212
TABELA 44 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.2.1 . . . . .	212
TABELA 45 – Frequências naturais da ponte 5.4.2.1 . . . . .	215
TABELA 46 – Parâmetros da ponte 5.4.2.2 . . . . .	215
TABELA 47 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.2.2 . . . . .	215
TABELA 48 – Frequências naturais da ponte 5.4.2.2 . . . . .	218
TABELA 49 – Parâmetros da ponte 5.4.2.3 . . . . .	218
TABELA 50 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.2.3 . . . . .	218
TABELA 51 – Frequências naturais da ponte 5.4.2.3 . . . . .	221
TABELA 52 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.4.2 . . . . .	223
TABELA 53 – Distribuição de armadura da ponte 5.5 . . . . .	226
TABELA 54 – Parâmetros do veículo, concreto, aço e de <i>Newmark</i> adotados para os modelos 5.5 . . . . .	226
TABELA 55 – Parâmetros da ponte 5.5 . . . . .	226
TABELA 56 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.5.1 . . . . .	226
TABELA 57 – Frequências naturais da ponte 5.5.1 . . . . .	229
TABELA 58 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.5.2 . . . . .	230
TABELA 59 – Frequências naturais da ponte 5.5.2 . . . . .	233
TABELA 60 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.5 . . . . .	234

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	- Associação Brasileira de Normas Técnicas
CPU	- Unidade Central de Processamento (Central Processing Unit)
DL	- Dinâmico Linear
DNL	- Dinâmico Não Linear
FAD	- Fator de Amplificação Dinâmica
MEF	- Método dos Elementos Finitos
NBR	- Norma Brasileira
RAM	- Memória de Acesso Aleatório (Random Access Memory)
RVE	- Elemento de Volume Representativo

## LISTA DE SÍMBOLOS

$b$	Largura
$b$	Força por unidade de massa (Seção 3.5)
$c$	Coefficiente de amortecimento do amortecedor do veículo
$d$	Distância do centro de gravidade da camada analisada até a posição da linha neutra
$e$	Número de <i>Euler</i>
$f$	Força por unidade de volume
$f(\tilde{\varepsilon}, D)$	Função para a evolução do dano
$f(x)$	Função polinomial
$it$	Iteração
$k$	Coefficiente de rigidez da mola do veículo
$k$	Curvatura da barra (Seção 3.1)
$k_s$	Relação entre o módulo de <i>Young</i> após o escoamento das barras de aço e o módulo de <i>Young</i> inicial do aço
$m_1$	Massa da roda do veículo
$m_2$	Massa suspensa do veículo
$m_u$	Massa unitária da viga
$n$	Versor que em cada ponto do contorno aponta para o exterior do corpo (Seção 3.5)
$n_p$	Número de pontos de <i>Gauss</i> utilizados
$ntgl$	Número total de graus de liberdade do sistema
$q$	Fluxo de calor (Seção 3.5)
$q(x)$	Carregamento transversal uniformemente distribuído
$q(x, t)$	Esforços externos aplicados ao longo do tempo
$r$	Fonte de calor distribuída por unidade de massa

$s$	Coordenada local
$\bar{s}_i$	Coordenada local do nó $i$
$s(x, t)$	Entropia específica por unidade de massa da partícula (Seção 3.5)
$t$	Variável de tempo
$t$	Forças distribuídas por unidade de superfície (Seção 3.5)
$tol_E$	Tolerância de convergência energética
$tol_F$	Tolerância de convergência de força
$tol_u$	Tolerância de convergência de deslocamentos
$u$	Densidade de energia interna por unidade de massa (Seção 3.5)
$\dot{u}$	Taxa de variação da densidade de energia interna por unidade de massa (Seção 3.5)
$\dot{u}_{Arm}$	Taxa de variação da densidade de energia interna armazenada por unidade de massa
$\dot{u}_{Dis}$	Taxa de variação da densidade de energia dissipada por unidade de massa
$u(x, y)$	Campo de deslocamentos axiais
$u_3$	Deslocamento vertical
$u_{calc}$	Deslocamento horizontal do ponto situado na posição da linha neutra
$u_v(t)$	Deslocamento do veículo ao longo do tempo $t$
$\dot{u}_v(t)$	Resposta dinâmica de velocidade do veículo ao longo do tempo $t$
$\ddot{u}_v(t)$	Resposta dinâmica de aceleração do veículo ao longo do tempo $t$
$u_{DL, DNL}^{Máx}$	Máximo deslocamento dinâmico, linear ou não linear, encontrado em qualquer ponto da ponte
$u_{EL}^{Máx}$	Máximo deslocamento estático linear
$v$	Velocidade do ponto material (Seção 3.5)
$v(x, y)$	Campo de deslocamentos transversais
$ x $	Coordenada no eixo das abcissas, na configuração deformada

$x_1$	Coordenada cartesiana na direção longitudinal 1
$\bar{x}_{i1}$	Coordenada cartesiana na direção longitudinal do nó $i$
$ y $	Coordenada no eixo das ordenadas, na configuração deformada
$y(t)$	Deslocamento do veículo devido à excitação de base
$\dot{y}(t)$	Velocidade associada à irregularidade da via no tempo $t$
$y$	Altura em relação à linha neutra
$y_{abs}$	Coordenadas absolutas das camadas
$y_{camada}$	Posição da camada
$y_{cg(i)}$	Cota do centro de gravidade da camada $i$
$y_{LN}$	Posição da linha neutra
$A$	Área de seção transversal constante
$A_{camada}$	Área da camada
$A_i$	Área da camada $i$
$A_C$	Parâmetro $A$ característico do material em compressão uniaxial, do modelo de dano de <i>Mazars</i>
$A_T$	Parâmetro $A$ característico do material em tração uniaxial, do modelo de dano de <i>Mazars</i>
$B_C$	Parâmetro $B$ característico do material em compressão uniaxial, do modelo de dano de <i>Mazars</i>
$B_T$	Parâmetro $B$ característico do material em tração uniaxial, do modelo de dano de <i>Mazars</i>
$D$	Variável escalar de dano
$\dot{D}$	Taxa de danificação
$D_C$	Variável de dano na compressão
$\dot{D}_C$	Taxa de dano na compressão
$D_T$	Variável de dano na tração
$\dot{D}_T$	Taxa de dano na tração

$D_{ijrs}$	Tensor de quarta ordem de dano
$D_{\bar{n}}$	Medida de dano do volume
$E$	Módulo de deformação do material ou módulo de <i>Young</i>
$\tilde{E}$	Módulo de <i>Young</i> para o material danificado
$E_c$	Módulo de <i>Young</i> para o concreto
$\dot{E}_c$	Taxa de energia cinética (Seção 3.5)
$E_{camada}$	Módulo de <i>Young</i> da camada
$E_i$	Módulo de <i>Young</i> da $i$ -ésima camada
$(E_i)_{t+\Delta t}^{it}$	Módulo de <i>Young</i> da camada $i$ , na iteração $it$ dentro de cada passo de tempo $t + \Delta t$
$E_{ijkl}$	Tensor de quarta ordem de relações constitutivas do material íntegro
$\tilde{E}_{ijkl}$	Tensor de quarta ordem de relações constitutivas do material danificado
$E_s$	Módulo de <i>Young</i> inicial do aço
$E_{sy}$	Módulo de <i>Young</i> após o escoamento das barras de aço
$EI$	Rigidez
$EI_{eqv}$	Rigidez equivalente na situação de flexão
$F_A$	Força resistiva devido ao amortecimento que age no amortecedor do veículo
$F_M$	Força resistiva elástica que age na mola do veículo
$F(\tilde{\epsilon})$	Função contínua e positiva da deformação equivalente $\tilde{\epsilon}$
$H_i(x)$	Funções polinomiais cúbicas de <i>Hermite</i>
$I$	Momento de inércia da seção transversal
$I_g$	Momento de inércia de área através do centroide da própria área da camada
$I_{ijrs}$	Tensor identidade de quarta ordem
$I_{i(t+\Delta t)}^{it}$	Vetor que contém os momentos de inércia de cada camada de cada elemento $i$ em cada iteração $it$ dentro de cada passo de tempo $t + \Delta t$

$J$	Jacobiano da transformação de coordenadas
$L$	Comprimento do elemento finito de viga
$L_b$	Comprimento da viga
$P_{ext}$	Potência mecânica externa (Seção 3.5)
$P_i$	Posição de um $i$ -ésimo ponto de <i>Gauss</i>
$Q_e$	Taxa de calor introduzida no sistema (Seção 3.5)
$Q_i$	Funções de forças não conservativas
$S$	Área da seção transversal
$S$	Entropia de $\Omega$ (Seção 3.5)
$\tilde{S}$	Área efetiva
$S(D)$	Função que liga a deformação de início de danificação e a variável de dano $D$
$S_D$	Parcela da área com danificação
$T$	Energia cinética do elemento finito de viga
$T$	Tensor de tensões (Seção 3.5)
$\dot{U}$	Taxa de energia interna
$\dot{U}_{Arm}$	Taxa de variação de energia armazenada
$\dot{U}_{Dis}$	Taxa de variação de energia dissipada
$V$	Energia potencial de deformação do elemento finito de viga
$V_d$	Volume danificado
$V_k$	Variáveis de estado internas (Seção 3.5)
$\dot{V}_k$	Taxa de variação das variáveis de estado internas (Seção 3.5)
$Y$	Variável associada à variável de dano (Seção 3.5)
$W_{Gauss(i)}$	Peso associado a um $i$ -ésimo ponto de <i>Gauss</i>
$W_{nc}$	Trabalho virtual produzido pelas forças não conservativas
$\alpha_C$	Coeficiente relativo à compressão para a combinação linear do modelo de dano de <i>Mazars</i>

$\alpha_T$	Coeficiente relativo à tração para a combinação linear do modelo de dano de <i>Mazars</i>
$\beta$	Parâmetro de <i>Newmark</i>
$\gamma$	Parâmetro de <i>Newmark</i>
$\delta$	Variação
$\zeta_B$	Razão de amortecimento da estrutura
$\varepsilon$	Deformação
$\tilde{\varepsilon}$	Deformação equivalente do modelo de dano de <i>Mazars</i> (Seção 4.3)
$\tilde{\varepsilon}$	Deformação efetiva (Seção 3.5)
$\dot{\tilde{\varepsilon}}$	Taxa de deformação equivalente (Seção 4.3)
$\dot{\varepsilon}$	Taxa de deformação para o caso de pequenas deformações (Seção 3.5)
$\varepsilon_{d0}$	Deformação de referência do modelo de dano de <i>Mazars</i> definida como a deformação máxima obtida em ensaios uniaxiais de tração
$\varepsilon_e$	Deformação elástica do material
$\varepsilon^e$	Deformação elástica (Seção 3.5.1.4)
$\dot{\varepsilon}^e$	Taxa de deformação elástica para o caso de pequenas deformações
$\varepsilon_{el}$	Deformação elástica linear do aço, na tração ou na compressão
$\varepsilon_i$	Componente de deformação principal no espaço $R^3$
$\langle \varepsilon_i \rangle_+$	Parcela positiva da componente de deformação principal no espaço $R^3$
$\varepsilon_p$	Deformação plástica ou deformação permanente
$\varepsilon_{sy}$	Limite de deformação elástica do aço
$\varepsilon_x$	Deformação relativa em relação ao eixo $x$
$\theta$	Ângulo de inclinação da viga
$\theta$	Temperatura absoluta (Seção 3.5)
$\bar{\theta}$	Rotação no coordenada local $s$

$\theta_i$	Rotação no nó $i$
$\nu$	Coeficiente de <i>Poisson</i>
$\phi_n(x)$	$n$ -ésimo modo natural de vibração
$\rho$	Massa específica do material
$\rho$	Densidade de massa (Seção 3.5)
$\tilde{\sigma}$	Tensão efetiva
$\bar{\sigma}$	Tensor de tensões
$\sigma_{sy}$	Tensão de escoamento do aço
$\sigma_x$	Tensão normal em relação ao eixo longitudinal $x$ da viga
$\psi_i(x)$	Funções de forma ou funções de interpolação para o elemento finito de viga
$\omega_{nbn}$	$n$ -ésima frequência natural de vibração
$\Delta d$	Microdefeitos de um material com dano
$\Delta_i$	Deslocamento no nó $i$
$\Delta t$	Passo de tempo
$\Pi$	Energia potencial da viga de <i>Euler-Bernoulli</i>
$\Omega$	Volume do sólido
$\{a\}$	Vetor de deslocamentos generalizados dos nós do elemento finito
$\{\bar{a}\}$	Vetor de deslocamentos na coordenada local $s$ do elemento finito
$\{g\}_{t+\Delta t}$	Vetor de forças desequilibradas no tempo $t + \Delta t$
$\{\tilde{u}\}_{t+\Delta t}$	Valores preditores dos deslocamentos no tempo $t$ em relação ao tempo $t + \Delta t$
$\{\tilde{\dot{u}}\}_{t+\Delta t}$	Valores preditores das velocidades no tempo $t$ em relação ao tempo $t + \Delta t$
$\{u\}_{t+\Delta t}$	Valores corretores das dos deslocamentos no tempo $t + \Delta t$
$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t}$	Valores corretores das velocidades no tempo $t + \Delta t$
$\{u_B\}$	Vetor de deslocamentos da viga

$\{\dot{u}_B\}$	Vetor de velocidades da viga
$\{\ddot{u}_B\}$	Vetor de acelerações da viga
$\{\dot{v}_e\}$	Vetor de velocidade elementar
$\{v_G\}$	Vetor de deslocamentos globais
$\{y_{cg}\}$	Vetor de coordenadas globais, absolutas, dos centros de gravidade de cada camada
$\{y_{rel}\}_{t+\Delta t}^{it}$	Vetor que armazena as coordenadas das camadas em cada iteração $it$ dentro de cada passo de tempo $t + \Delta t$
$\{F_B(t)\}$	Vetor de forças aplicadas à viga
$\{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t}$	Vetor de carregamentos externos atuantes na viga de ponte no tempo $t + \Delta t$
$\{F_e\}$	Vetor de solicitações externas do elemento finito de viga
$\{F^{ext}\}$	Vetor de forças externas atuantes no sistema
$\{F_G\}$	Vetor de solicitações externas globais
$\{F^{int}\}$	Vetor de forças internas do sistema
$\{F\}_t$	Vetor de forças internas no tempo $t$
$\{R\}_t$	Vetor de forças externas no tempo $t$
$\{\Delta u\}$	Vetor de incremento de deslocamentos
$\{\Delta \Delta u\}^{(i)}$	Vetor de variação incremental de deslocamentos obtido a cada iteração $i$
$\{\Delta F\}$	Vetor de incremento de forças internas ou resíduo de forças
$[B]$	Tensor B do Método dos Elementos Finitos
$[C_B]$	Matriz de amortecimento da viga
$[K_e]$	Matriz de rigidez do elemento finito de viga
$[K_B]$	Matriz de rigidez da viga
$[K]_t$	Matriz de rigidez tangente
$[K_G]$	Matriz de rigidez global

$[M_e]$  Matriz de massa do elemento finito de viga

$[M_B]$  Matriz de massa da viga

$\|\{\Delta u\}^{(i)}\|_2$  Norma euclidiana do vetor  $\{\Delta u\}^{(i)}$

$\|\{u\}_{t+\Delta t}\|_2$  Norma euclidiana do vetor  $\{u\}_{t+\Delta t}$

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>30</b>
1.1 MOTIVAÇÃO	31
1.2 OBJETIVO	33
1.2.1 Objetivo geral	33
1.2.2 Objetivos específicos	33
1.3 LIMITAÇÕES DO TRABALHO	33
1.4 METODOLOGIA	34
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>36</b>
2.1 DINÂMICA LINEAR EM PONTES	36
2.2 MECÂNICA DO DANO	38
2.3 DINÂMICA NÃO LINEAR EM PONTES	41
<b>3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>45</b>
3.1 FLEXÃO COMPOSTA PLANA EM VIGAS	45
3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	51
3.2.1 Teoria de viga de <i>Euler-Bernoulli</i>	51
3.2.1.1 Elemento finito de viga de <i>Euler-Bernoulli</i>	53
3.3 ESTÁTICA LINEAR DOS SISTEMAS	57
3.4 DINÂMICA LINEAR DOS SISTEMAS	60
3.5 MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO	65
3.5.1 Fundamentos da termodinâmica dos sólidos	66
3.5.1.1 Primeira lei da termodinâmica	67
3.5.1.2 Segunda lei da termodinâmica	68
3.5.1.3 Desigualdade de <i>Clausius-Duhem</i> e taxa de energia interna	69
3.5.1.4 Formalismo termodinâmico da Mecânica do Dano	70
3.5.1.5 Meios elásticos com danificação	72
3.5.2 Elemento de volume representativo	74
3.5.3 Tensão efetiva	74
3.5.4 Deformação efetiva	76
3.5.5 Princípios gerais de equivalência de respostas constitutivas	77
3.5.5.1 Princípio da equivalência de energia	78
3.5.5.2 Princípio da equivalência de deformação	79
3.6 ESTÁTICA NÃO LINEAR DOS SISTEMAS	81
3.6.1 Métodos de solução de equações estáticas não lineares	81
3.7 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES	82

3.7.1	Métodos de solução de equações dinâmicas não lineares . . . . .	87
3.7.1.1	Método de <i>Newton-Raphson</i> em análises dinâmicas não lineares . . . . .	89
3.7.1.2	Método de <i>Newton-Raphson</i> Modificado em análises dinâmicas não lineares	91
3.7.1.3	Critérios de convergência em análises dinâmicas não lineares . . . . .	92
3.7.1.4	Otimização computacional para análises dinâmicas não lineares . . . . .	94
<b>4</b>	<b>MODELAGEM COMPUTACIONAL . . . . .</b>	<b>98</b>
4.1	MODELO DE VEÍCULO DE 1 GRAU DE LIBERDADE . . . . .	98
4.2	MODELO DE INTERAÇÃO DINÂMICA ENTRE PONTE E VEÍCULO . . . . .	101
4.3	MODELO CONSTITUTIVO DE DANO DE <i>MAZARS</i> ADAPTADO PARA DINÂMICA NÃO LINEAR . . . . .	101
4.4	MODELO CONSTITUTIVO DE PLASTICIDADE PARA O AÇO ESTRUTURAL	108
4.5	MODELO DE RIGIDEZ EQUIVALENTE E MAPEAMENTO DE PSEUDO-MALHA	109
4.5.1	Seções transversais com geometria variável . . . . .	111
4.5.2	Distribuição variável de armaduras . . . . .	113
4.5.3	Variação analítica da posição da linha neutra . . . . .	116
4.5.4	Variação dos momentos de inércia das camadas . . . . .	119
4.6	MODELAGEM COMPUTACIONAL DINÂMICA NÃO LINEAR PROPOSTA PARA A PONTE . . . . .	122
4.6.1	Substituição de variáveis considerando os pontos de integração de <i>Gauss</i>	123
4.6.2	Condições iniciais dinâmicas partindo da configuração deformada, linear ou não linear, devido ao peso próprio . . . . .	128
4.6.3	Variação do tensor de tensões para diferentes geometrias . . . . .	129
4.6.4	Modelo de tratamento de erro no contorno ao longo do tempo . . . . .	131
<b>5</b>	<b>ANÁLISES NUMÉRICAS . . . . .</b>	<b>135</b>
5.1	COMPARAÇÃO ENTRE MODELO COMPUTACIONAL ESTÁTICO NÃO LINEAR PROPOSTO E MODELO EXPERIMENTAL DE VIGAS COM CARREGAMENTO ESTÁTICO CRESCENTE . . . . .	135
5.1.1	Comparação com viga de 6 m de Jarek et al. (2011) . . . . .	136
5.1.2	Comparação com viga de 4 m entre apoios de Mazars e Grange (2017) . . . . .	139
5.2	INFLUÊNCIA DA TAXA DE ARMADURA NO PROCESSO DE DANIFICAÇÃO DINÂMICA DE VIGAS DE PONTE . . . . .	142
5.2.1	Viga de 6 m biapoiada . . . . .	143
5.2.1.1	$\rho = 0,49\%$ . . . . .	144
5.2.1.2	$\rho = 1,16\%$ . . . . .	148
5.2.1.3	$\rho = 1,49\%$ . . . . .	151
5.2.1.4	$\rho = 2,69\%$ . . . . .	153
5.2.1.5	$\rho = 3,73\%$ . . . . .	156
5.2.1.6	Comparação entre as análises da viga de 6 m e considerações . . . . .	158

5.2.2 Viga de 20 m biapoiada . . . . .	161
5.2.2.1 $\rho = 0,54\%$ . . . . .	162
5.2.2.2 $\rho = 1,04\%$ . . . . .	164
5.2.2.3 $\rho = 1,54\%$ . . . . .	167
5.2.2.4 $\rho = 2,58\%$ . . . . .	169
5.2.2.5 $\rho = 3,90\%$ . . . . .	172
5.2.2.6 Comparação entre as análises da viga de 20 m e considerações . . . . .	174
5.3 INFLUÊNCIA DE DIFERENTES GEOMETRIAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL NO PROCESSO DE DANIFICAÇÃO DINÂMICO . . . . .	177
5.3.1 Viga retangular . . . . .	179
5.3.2 Viga I com simetria horizontal . . . . .	183
5.3.3 Viga I com assimetria horizontal . . . . .	187
5.3.4 Viga T . . . . .	190
5.3.5 Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade e aceleração e FAD	194
5.4 INFLUÊNCIA DOS COMPRIMENTOS DE BALANÇOS NO PROCESSO DE DANIFICAÇÃO DINÂMICO . . . . .	196
5.4.1 Viga com 6 m entre apoios e 2 balanços . . . . .	197
5.4.1.1 Viga com balanços de 1 m . . . . .	197
5.4.1.2 Viga com balanços de 1,5 m . . . . .	201
5.4.1.3 Viga com balanços de 2 m . . . . .	206
5.4.1.4 Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade e aceleração e FAD	209
5.4.2 Viga com 18 m entre apoios e 2 balanços . . . . .	212
5.4.2.1 Viga com balanços de 3 m . . . . .	212
5.4.2.2 Viga com balanços de 4,5 m . . . . .	215
5.4.2.3 Viga com balanços de 6 m . . . . .	218
5.4.2.4 Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade e aceleração e FAD	221
5.5 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COM MODELAGEM PROPOSTA EM UM CASO REAL DE PONTE . . . . .	224
5.5.1 VIGA RETANGULAR DA PONTE . . . . .	226
5.5.2 VIGA I FICTÍCIA COM MOMENTO DE INÉRCIA EQUIVALENTE . . . . .	230
5.5.3 Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade e aceleração e FAD	233
<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>236</b>
6.1 RESUMO E CONCLUSÕES . . . . .	236
6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	240
<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>242</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As normas brasileiras relacionadas ao desenvolvimento de projetos estruturais recomendam que as cargas sejam majoradas e as resistências dos materiais sofram determinadas penalizações, de modo que as estruturas sejam capazes de resistir às solicitações superiores às realmente necessárias, devido a incertezas, variabilidade das propriedades dos materiais, limitações das teorias aplicadas, entre outros. Além disso, para o caso de estruturas em concreto armado, as normas permitem que nas análises estruturais seja feita a consideração de um comportamento elástico linear destes materiais.

Houve uma mudança no conceito de utilização dos materiais, procurando-se maior economia que, aliada à garantia de segurança, visava a um completo aproveitamento das características de resistência. Em consequência, surgiram estruturas mais esbeltas e com maiores possibilidades de apresentarem um comportamento não linear, quer em termos de equação constitutiva, não linearidade física, quer em termos de grandes deslocamentos e mudanças acentuadas na geometria, não linearidade geométrica (MACHADO, 1983).

Apesar da maioria dos problemas na engenharia civil poder ser solucionada por meio de modelos estáticos, a maioria das estruturas está submetida a carregamentos dinâmicos e, quando esses são de baixa intensidade quando comparados aos estáticos, seus efeitos podem ser desconsiderados.

Muitas vezes a estrutura se comporta de uma maneira não linear quando submetida a carregamentos dinâmicos. Por exemplo, em transientes de curta duração, como no caso de cargas de impacto ou de explosões, pode ocorrer um escoamento do material, ocasionado por elevadas tensões (MACHADO, 1983).

Devido à sua complexidade de comportamento, a formulação de um modelo constitutivo completo para o concreto se torna algo difícil. Modelos têm sido formulados com base na teoria da elasticidade, na teoria da plasticidade e, mais recentemente, na Mecânica do Dano, cada qual fornecendo respostas coerentes desde que a situação estudada proporcione um comportamento do concreto adequado com a teoria proposta (PITUBA, 1998).

As simplificações relativas à natureza da análise e ao comportamento físico dos materiais podem não garantir a segurança estrutural, uma vez que o comportamento da estrutura pode mudar em decorrência dos efeitos dinâmicos e da degradação de seus materiais constituintes.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Atualmente, o engenheiro estrutural se defronta com problemas complexos, cuja análise deve ser realizada no domínio da dinâmica não linear. A solução desses problemas era, entretanto, extremamente difícil, se não mesmo impossível, há pouco tempo. Alguns fatores motivaram o tratamento de modelos cada vez mais complexos (MACHADO, 1983).

Um tipo de estrutura que sempre teve um efeito dinâmico de maior importância são as pontes. Nestas, uma das causas dos efeitos dinâmicos decorre da passagem dos veículos. A NBR 7188 (2013), permite o dimensionamento de pontes considerando os efeitos dinâmicos dos veículos atuantes de maneira simplificada, considerando as cargas dinâmicas como cargas estáticas multiplicadas por um coeficiente de impacto para majoração das mesmas, levando, muitas vezes, a um superdimensionamento da estrutura e desprezando os reais efeitos dinâmicos que podem ser provocados (ABECHE, 2015).

Em geral, no desenvolvimento da modelagem computacional de estruturas de pontes, mais especificamente para as análises dinâmicas das mesmas, a consideração da rigidez do material é feita, diretamente, em função de seu módulo de *Young* e de seu momento de inércia. Tal procedimento é plausível quando não se consideram demais efeitos físicos dos materiais, como em casos de não linearidade. Nesse sentido, ao alimentar o modelo com tais propriedades materiais, as respostas dinâmicas são coerentes ao tratar do comportamento elástico linear.

Em vigas de ponte em que usualmente emprega-se o concreto armado, a hipótese de comportamento elástico linear para o material não é fisicamente coerente. No caso do concreto, cujo processo de microfissuração inicia-se já nas primeiras idades, a não linearidade física é inerente ao material. Dentro desse contexto, as normativas técnicas, como a NBR 6118 (2014), apresentam diversas considerações e verificações de modo a considerar tais efeitos de forma simplificada nos procedimentos corriqueiros de cálculo e dimensionamento de estruturas, ao mesmo tempo que, também, procuram garantir a segurança e saúde estrutural. Entretanto, pela consideração dos efeitos materiais e da dinâmica de modo simplificado, esta por meio de um carregamento estático majorado, tais hipóteses normativas podem não ser adequadas durante um processo de evolução dinâmico dos fenômenos físicos nos materiais.

Para simular o comportamento real de estruturas através de uma modelagem computacional, procura-se, inicialmente, uma aproximação da solução analítica através de uma resposta numérica.

Diversos métodos numéricos foram desenvolvidos para aproximação de problemas de valor de contorno, com destaque para o Método dos Elementos Finitos (MEF),

Método dos Elementos de Contorno (MEC), Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Volumes Finitos (MVf), entre outros (MACHADO, 1992).

Destaca-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) pela sua simplicidade e pelo seu vasto campo de aplicação, sendo uma ferramenta de cálculo universalmente consagrada, em especial para os problemas de análise estrutural, cujo método foi idealizado na década de 50 (MACHADO, 1983; MACHADO, 1992).

Ao considerar os fenômenos físicos dos materiais, entretanto, diversos problemas não possuem solução analítica ou a mesma pode ter complexidade suficientemente grande para inviabilizar sua utilização prática. Nestes casos, há necessidade de incorporar modelos embasados em demais ciências, como a Mecânica do Dano, a Teoria da Plasticidade, entre outras. Deste modo, ao considerar demais campos, a modelagem computacional pode ser eficiente para simular respostas coerentes com os resultados reais dos materiais. Nestes casos, é habitual a validação numérica com resultados experimentais.

O presente trabalho dá continuidade ao trabalho desenvolvido por Abeche (2015), o qual considerou a modelagem computacional dinâmica não linear pela Mecânica do Dano e pela teoria da plasticidade de vigas retangulares de ponte em concreto armado com armadura constante em interação dinâmica com veículos em movimento e diferentes formas de irregularidade. Para tanto, neste trabalho, aprimorou-se a possibilidade de analisar vigas de ponte mais realistas, com seções transversais de geometrias variadas e distribuição variável de armaduras ao longo de seu comprimento, de modo a verificar a evolução do dano ao longo do tempo de passagem do veículo para tais casos.

A consideração da geometria da seção transversal é imprescindível nas análises dinâmicas não lineares de estruturas de ponte para obtenção de respostas realistas. A variação nos tensores de tensões e de deformações para diferentes geometrias é uma das justificativas para o diferente comportamento dinâmico. A distribuição variável de armaduras e consequente distribuição da rigidez ao longo dos elementos é outro fator importante na análise dinâmica não linear de pontes reais. Neste contexto, é interessante analisar o comportamento físico estrutural de diferentes seções transversais com distribuição de armaduras variada.

Além disso, a verificação da taxa de armadura e de efeitos de balanços na evolução dos fenômenos de danificação e de plastificação em vigas de vão curto e em vigas de vão longo é de pertinente investigação, contribuindo, entre outros fatores, para uma possível otimização estrutural, em termos de dimensionamento.

## 1.2 OBJETIVO

### 1.2.1 Objetivo geral

Analisar vigas isoladas de pontes de concreto armado com determinadas geometrias de seção transversal e com taxa de armadura realista. Analisar dinamicamente considerando a danificação no concreto.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Este trabalho tem como objetivos específicos:

- a) implementar seções transversais de diversas geometrias e variação do momento de inércia;
- b) implementar diferentes taxas de armadura, levando em consideração diferentes comprimentos de armadura;
- c) aprimorar os modelos de análise dinâmica não linear com dano propostos por Abeche (2015), considerando variação analítica da linha neutra e variação do momento de inércia;
- d) avaliar o fator de amplificação dinâmica nas aplicações não lineares;
- e) comparar os resultados das simulações com resultados numéricos e experimentais;
- f) aplicar a metodologia num caso real de ponte;
- g) comparar o desempenho das respostas dinâmicas e da evolução do dano de diferentes seções transversais;
- h) comparar os efeitos de diferentes taxas de armadura na evolução do dano;
- i) comparar respostas estáticas com respostas dinâmicas;
- j) comparar respostas lineares com respostas não lineares.

## 1.3 LIMITAÇÕES DO TRABALHO

Este trabalho foi desenvolvido com algumas simplificações teóricas. As limitações do presente trabalho são:

- a) utiliza-se apenas elemento finito unidimensional de viga de *Euler-Bernoulli*;
- b) não são realizadas análises em vigas com armadura de protensão;

- c) não há consideração da armadura transversal de cisalhamento;
- d) não é considerado o efeito da fadiga na armadura;
- e) os aprimoramentos realizados no modelo foram adaptadas apenas ao modelo proposto por Abeche (2015), o qual foi adaptado do modelo constitutivo de dano de *Mazars* (1984) para a dinâmica não linear;
- f) não é considerado o escorregamento da armadura por perda de aderência entre o concreto e o aço;
- g) é considerado um modelo simplificado de plastificação, bilinear com encruamento para o aço estrutural;
- h) não se levam em conta as irregularidades da via;
- i) é considerado um veículo simplificado como um sistema massa-mola-amortecedor com 1 grau de liberdade;
- j) apesar de, na realidade, haver acoplamento entre o movimento do veículo e a oscilação da ponte, neste trabalho os efeitos são desacoplados.

#### 1.4 METODOLOGIA

Este trabalho é uma continuação do trabalho de Abeche (2015), que executou a implementação computacional da análise dinâmica não linear do sistema entre ponte, veículo e irregularidade considerando a Mecânica do Dano e a teoria da plasticidade.

O presente trabalho traz como contribuição a possibilidade de analisar vigas de ponte com as seguintes características:

- seção transversal com geometrias variadas (retangular, viga I simétrica, viga I assimétrica, viga T, viga caixão, dentre outras);
- distribuição variável de armaduras;
- elementos com comprimentos variados; e
- discretização de elementos e camadas com refinamento variável.

Além disso, acrescentaram-se as seguintes considerações nas análises:

- variação analítica da posição da linha neutra;
- variação dos momentos de inércia das camadas;

- consideração das condições iniciais dinâmicas partindo da configuração inicial deformada devido ao peso próprio;
- consideração da variação do tensor de tensões em seções transversais com geometrias diferentes da viga retangular;
- tratamento do erro no contorno ao longo do tempo.

Foram adicionadas rotinas complementares em linguagem de programação MATLAB e Python ao *core* do programa ABXDNL 2.9, o qual foi implementado em linguagem de programação C++ com *wrapper* em MATLAB. Também foi desenvolvido um programa em linguagem de programação Python para geração dos parâmetros do modelo, como discretização das camadas das seções transversais de diferentes elementos, distribuição de armaduras variável, geometrias variáveis, refinamento local, dentre outros, de modo a alimentar o programa principal. Maiores detalhes sobre a modelagem destas rotinas são discutidas no Capítulo 4 deste documento.

Para realização das simulações computacionais foram utilizados dois computadores. O primeiro possui CPU Intel Core i7-6700 HQ com 8 *threads*, com frequência de 2,60 GHz em modo padrão e 4,1 GHz em modo *overclocking*, memória RAM de 16 GB DDR4 e placa de vídeo NVIDIA GeForce GTX 960M de 4 GB de memória GDDR5 com 640 núcleos CUDA em sistema operacional Microsoft Windows 10. O segundo computador, situado no CESEC/UFPR, possui CPU Intel Xeon E5-2650 v4 com 48 *threads*, com frequência de 2,20 GHz em modo padrão, memória RAM de 264 GB DDR4 e duas placas de vídeo, sendo a primeira uma NVIDIA Quadro P4000 de 8 GB de memória GDDR5 com 1792 núcleos CUDA e a segunda uma NVIDIA Tesla K40c de 12 GB de memória GDDR5 com 2880 núcleos CUDA, em sistema operacional Debian GNU/Linux 9.4.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste Capítulo é apresentada uma revisão bibliográfica sobre dinâmica linear em pontes, Seção 2.1, Mecânica do Dano, Seção 2.2, e dinâmica não linear em pontes, Seção 2.3.

### 2.1 DINÂMICA LINEAR EM PONTES

Yang, Yau e Hsu (1997) , em estudos acerca de vibrações em vigas de pontes causadas pela passagem de trens em alta velocidade, estabeleceram as seguintes correlações: (1) ressonância da estrutura e velocidade do veículo, (2) o efeito inercial do veículo e o período de vibração da estrutura, (3) o impacto da adição de fator de amortecimento na ressonância da estrutura, (4) influência do vão livre da viga em seu fator de impacto para a deflexão, (5) distância entre eixos do trem e a ressonância da estrutura.

Beghetto (2006) estudou os efeitos dinâmicos atuantes em um veículo ferroviário e os efeitos transmitidos à estrutura de uma ponte ferroviária, sob diferentes condições de velocidade e irregularidades verticais da via. Neste estudo, foram correlacionadas as velocidades do veículo e irregularidades verticais da via com os deslocamentos decorrentes na estrutura. Analisaram-se tanto os efeitos dinâmicos atuantes sobre a estrutura da ponte, quanto os atuantes sobre o veículo. Por fim, estabeleceram-se as condições mais favoráveis de tráfego para o veículo e para a ponte ferroviária.

Machado e Bernardes (2007) também realizaram uma análise dinâmica da interação entre veículo e ponte, estabelecendo a influência da dinâmica veicular sobre a ponte, assim como a influência da ponte sobre o veículo. No entanto, o modelo desenvolvido, denominado VBI, considera o acoplamento total entre veículo, irregularidade e pontes, ou seja, as respostas do veículo influenciam nas respostas da ponte que, por sua vez, também influenciam nas respostas do veículo. O acoplamento entre todos os sistemas ocasiona um tipo de não linearidade que precisa de um tratamento especial. Respostas importantes foram obtidas deste modelo se comparado a modelos totalmente desacoplados. Entretanto, o modelo implementado não pode prever o caso de descolamento do veículo ao passar pelas irregularidades da via.

Beghetto (2011) estudou a interação dinâmica desacoplada entre um veículo e uma ponte ferroviária considerando-se a mecânica do contato entre as rodas e os trilhos, a variação da velocidade e a presença das irregularidades da via em uma análise tridimensional. Sobre o comportamento dinâmico do veículo ferroviário, correlacionaram-

se os modos de vibração e os graus de liberdade, as amplitudes e ângulos de fase de movimento. Referente ao estudo do comportamento dinâmico da ponte ferroviária analisaram-se as frequências naturais de vibração e seus correspondentes modos naturais de vibração. Para o problema de contato, foi implementado o modelo de Kalker e o modelo de Hertz. Ao considerar o contato, ocorre um problema de não linearidade geométrica na análise.

Leander e Karoumi (2013) compararam as respostas dinâmicas lineares obtidas através da solução analítica com as condições estáticas majoradas pelo fator de amplificação dinâmica sugerido por normas. Para a estrutura da ponte foi utilizada a teoria de viga de *Timoshenko* e para a análise dinâmica utilizou-se a superposição modal. Concluiu-se no trabalho que os efeitos da fadiga na estrutura sofrem influência da hiperestaticidade e da quantidade de modos de vibração inclusos no método da superposição modal.

Johansson, Pacoste e Karoumi (2013) propuseram um método de solução do comportamento dinâmico de uma viga de ponte com múltiplos apoios seguindo a formulação de *Euler-Bernoulli*. As respostas dinâmicas foram obtidas através da superposição modal.

Yang et al. (2015) analisaram a interação entre um sistema de veículo, trilho e ponte de forma acoplada, considerando um elemento de ponte não uniforme, isto é, com altura e inércia variáveis ao longo de seu comprimento. A interface de contato entre as rodas do trem e os trilhos é levada em conta na análise. O estudo verifica a influência que diferentes tipos de irregularidades nos trilhos causam às respostas dinâmicas do sistema e, ainda, incluem a análise da relevância que o comprimento dos elementos tem na acurácia das respostas dinâmicas.

Dimitrakopoulos e Zeng (2015) propuseram uma análise da interação entre veículo e ponte ferroviária considerando uma formulação tridimensional do trem, além de modelar a ponte com curvaturas no plano horizontal. Tais considerações levaram à composição de um modelo que considera os efeitos das forças centrífuga e de Coriolis, geradas devido à curvatura da via.

Cantero e Karoumi (2016) analisaram os efeitos dinâmicos em vigas ferroviárias biapoiadas. Para esta análise, considerou-se um modelo numérico bidimensional da interação entre veículo, trilhos e ponte. Com o intuito de averiguar a localização em que ocorre o máximo carregamento na ponte devido a ações dinâmicas geradas pela passagem dos trens, simularam-se diversas situações com diferentes vãos para verificar as amplificações das respostas dinâmicas de deslocamento, aceleração e momento fletor ao longo do comprimento da viga. Os resultados mostram que a localização das situações de máximo carregamento pode não estar no centro do vão, especialmente em situações próximas às situações de ressonância.

Daniel e Kortis (2017) verificaram as diferenças entre duas simulações numéricas com diferentes abordagens na interação dinâmica entre veículo e ponte. A primeira resposta foi obtida através da simulação de uma situação de passagem dos veículos sobre a ponte sem a consideração da perda de contato. Para a segunda, desenvolveu-se um algoritmo que leva o contato em consideração. Por fim, comparam-se as respostas dinâmicas obtidas em ambas as situações, de modo a analisar como o contato entre roda e ponte pode afetar as solicitações à ponte.

## 2.2 MECÂNICA DO DANO

O conceito de dano foi introduzido por Kachanov (1958), no intuito de justificar a ruptura de um material como uma consequência da existência de defeitos no material. Essa teoria consiste na introdução de uma variável, até então escalar, que quantifica o processo de deterioração e microfissuração difusa do material (PAULA, 2001).

Rabotnov (1969) propôs que a variável de dano representasse a perda de rigidez do material como consequência da fissuração. Na sequência, Lemaitre e Chaboche (1985) formalizaram a chamada *Mecânica do Dano em Meios Contínuos*, "*Continuum Damage Mechanics*", com base em uma metodologia fundamentada na termodinâmica dos processos irreversíveis.

Janson e Hult (1977) estabeleceram a diferenciação entre o dano e a fratura, de modo a designar a Mecânica do Dano Contínuo como a que analisa o sistema segundo um processo de fissuração distribuída, ou seja, é uma ferramenta que considera a evolução da danificação de um material através da evolução do processo de microfissuração do mesmo. Já a Mecânica da Fratura trata de uma descontinuidade ou localização do processo de fissuração no sólido, de modo que a fratura pode ser entendida, portanto, como uma etapa posterior à fissuração.

Mazars (1984) propôs um modelo de dano para o concreto cujas hipóteses fundamentais são: a influência da microfissuração devido ao carregamento externo é levada em conta mediante uma variável escalar variando de 0 para o material não danificado a 1 para o material completamente danificado; o dano decorre exclusivamente da existência de alongamentos; as deformações permanentes são desprezadas, sejam elas de natureza plástica, viscosa ou induzidas pelo próprio processo de danificação; o carregamento é proporcionalmente crescente.

La Borderie (1991) apresentou um modelo de danificação capaz de considerar carregamentos dinâmicos que apresentam natureza cíclica, com ou sem inversão de sinal, que geram respostas no concreto com características particulares. Os fenômenos que o modelo em questão leva em conta são: diminuição da rigidez com a abertura das microfissuras; recuperação da rigidez com a ocorrência do fechamento das fissuras;

deformação inelástica simultânea à danificação.

Pituba (1998) comparou resultados numéricos de vigas biapoiadas de diferentes taxas de armadura e um pórtico em concreto armado considerando os modelos de dano de Mazars (1984), La Borderie (1991) e Álvares (1999), confrontando-os com resultados obtidos a partir de modelos experimentais, comparando a proximidade das respostas.

Burlion et al. (2000) desenvolveram um modelo de dano para o concreto que combina os efeitos da plasticidade, degradação e porosidade do material, de modo a considerar o surgimento de microfissuras devido à tração e o colapso dos grânulos componentes do material na compressão.

Paula (2001) propôs uma formulação e implementação numérica de modelos matemáticos de comportamento de estruturas considerando as não linearidades física e geométrica. A abordagem do comportamento não linear deu-se através da Mecânica do Dano em meios contínuos, empregando-se os modelos de dano para o concreto propostos por Mazars (1984) e La Borderie (1991).

Guello (2002) aplicou o modelo constitutivo de Mazars (1984) em modelagem de estruturas de concreto submetidas a carregamentos monotônicos crescentes. A seguir, comparou os resultados com evidências experimentais que revelam uma degradação das propriedades do concreto.

Araújo (2003) tratou da formulação e implementação numérica dos modelos de dano de Mazars (1984) e La Borderie (1991) para o concreto, com o objetivo de reproduzir laços de histerese, propondo que estes resultam da dissipação conjunta decorrente do dano evolutivo e do fenômeno de fricção interna nas faces das fissuras. Verificou-se a influência das variáveis de estado e dos parâmetros do material na forma dos diagramas de tensão-deformação de modo a utilizar o modelo na análise do comportamento dinâmico de uma viga em concreto armado submetida à vibração forçada. Destacou-se o efeito dos laços de histerese sobre o amortecimento estrutural, e seu impacto na equação do movimento.

Ragueneau e Gatuingt (2003) propuseram dois modelos de danificação para o concreto. Ambos consideram o comportamento inelástico e anisotrópico do material, acoplando, portanto, os conceitos de plasticidade e de Mecânica do Dano contínuo. Enquanto um dos modelos propostos é direcionado à reprodução do comportamento do concreto quando submetido a baixas taxas de deformação, o segundo é apropriado para estruturas submetidas a altas taxas de deformação dinâmica.

Desmorat, Gatuingt e Ragueneau (2007) propõem um modelo de dano anisotrópico para o concreto. Esse considera o fechamento de fissuras apenas sobre a porção hidrostática do tensor de tensões. Jirásek e Suárez (2016) apresentaram,

posteriormente, uma metodologia para o tratamento dos parâmetros deste modelo de dano.

Souza (2009) propôs um algoritmo numérico de remodelação anisotrópico baseado na teoria da Mecânica do Dano Contínuo, simulando a porosidade do osso como dano, seguindo o modelo proposto por Doblaré e Garcia (2002). A formulação matemática proposta incorporou a possibilidade de haver reabsorção óssea em níveis superiores de deformação, quando o dano acumulado no tecido decorrente das atividades diárias é excedido do limite. Realizou-se um estudo computacional por elementos finitos no problema de uma barra e também em problemas bidimensionais.

Desmorat et al. (2010) consideram os efeitos da taxa de deformação no desenvolvimento de um modelo de dano para o concreto que considera também o aspecto da anisotropia do material. Para tal, introduz-se este efeito nos casos de estado de tensão hidrostática positiva em simulações computacionais de impacto dinâmico em estruturas de concreto.

Pereira Júnior (2014) apresentou uma formulação de uma modelagem numérica do comportamento mecânico de vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço e sujeitas à flexão, utilizando o modelo constitutivo proposto por Pituba e Fernandes (2011), que admite o concreto como material inicialmente isotrópico e elástico, mas com a evolução do processo de danificação o material exhibe deformações plásticas, anisotropia e bimodularidade induzidas pelo dano. A incorporação das fibras na modelagem é efetuada através de um procedimento de homogeneização, adaptado do modelo de dano de La Borderie (1991).

Bouafia et al. (2014) estudaram a aplicação dos princípios Mecânica da Fratura em conjunto com a Mecânica do Dano, considerando a não linearidade do concreto a partir dos modelos constitutivos de Sargin e Handa (1968) e de Grelat (1978). Adicionou-se a estes modelos constitutivos a consideração da variação do coeficiente de *Poisson* decorrente do comportamento do concreto.

Mazars, Hamon e Grange (2015) propuseram um novo modelo de dano baseado no modelo de dano proposto por Mazars (1984), considerando o acoplamento entre comportamento elástico e dano com formulação isotrópica, respeitando os princípios dos processos irreversíveis. Esse modelo considera a abertura e fechamento de fissuras, sendo aplicável a carregamentos cíclicos e dinâmicos. As variáveis desse modelo constitutivo são associadas a superfícies de falha aplicáveis ao concreto.

Wosatko, Pamin e Polak (2015) comparam os resultados de danificação obtidos a partir de simulações que implementam dois modelos constitutivos de dano com ensaio experimental em um pilar de concreto armado previamente realizado. O primeiro modelo de dano considera a danificação associada à plastificação do concreto. Ao

segundo modelo, introduz-se o conceito de taxa de deformação viscoplástica.

Hanif et al. (2016) propuseram uma metodologia de detecção de dano em estruturas preexistentes, a partir de simulações computacionais da análise dinâmica modal. A essa simulação incorpora-se um modelo de danificação que considera a plasticidade do concreto.

Pereira, Weerheijm e Sluys (2017) também analisam a taxa de deformação viscoplástica, incorporando a influência do fator tempo no modelo constitutivo do concreto, quando submetido a carregamentos como impactos. Segundo os autores, a formação e abertura de fissuras são adiadas devido à combinação entre os efeitos micro-inerciais na ponta das fissuras e o efeito de adaptação da massa do sólido ao redor da formação da fissura.

### 2.3 DINÂMICA NÃO LINEAR EM PONTES

O desenvolvimento inicial de procedimentos de análise não linear pelo Método dos Elementos Finitos é baseado essencialmente no conhecimento de três diferentes áreas: Mecânica do Contínuo, procedimentos de análise numérica e implementação computacional. Na Mecânica do Contínuo, a formulação das equações de movimento, o desenvolvimento de elementos finitos e o desenvolvimento de modelos constitutivos de materiais são os principais temas relacionados à análise não linear. Dentro dos métodos numéricos, a integração numérica no espaço, a solução de sistemas de equações, o cálculo de autovalores e a integração numérica no tempo são o foco para análises não lineares. Já em relação às técnicas computacionais, para implementação de sistemas de análise não linear, faz-se necessário o estudo e o entendimento dos métodos de programação, coadaptação de *hardwares* e *softwares* disponíveis, estruturas de dados, flexibilidade de modificações de rotinas e organização eficiente dos programas implementados (EBECKEN, 1977).

Neste âmbito, Machado (1983) propôs um algoritmo misto de integração no tempo das equações gerais da dinâmica, através do Método da Diferença Central e do Operador de *Newmark*, aplicados a problemas não lineares de sistemas rígido-flexíveis.

A solução das respostas dinâmicas não lineares de um sistema de elementos finitos é, em essência, obtida utilizando as formulações incrementais, os procedimentos de solução iterativa e os algoritmos de integração no tempo (BATHE, 1996).

Cervera, Oliver e Manzoli (1996) propuseram uma metodologia para realizar a análise de esforços dinâmicos gerados por abalos sísmicos em barragens de concreto. Para isso, foi proposto um modelo de dano isotrópico aplicável em um algoritmo de elementos finitos não lineares. Mostrou-se a importância da consideração da não linearidade na análise, uma vez que a inclusão deste parâmetro aumentou em cerca

de 50% a resposta de deslocamento destas barragens.

Zhou et al. (1996) analisaram um sistema dinâmico não linear considerando o acoplamento entre veículo e ponte. Neste caso, contudo, a degradação da ponte não foi considerada, mas sim a não linearidade dos apoios. Encontrou-se na análise a influência que tem a rigidez dos apoios na não linearidade das respostas dinâmicas.

Abeche (2015) estudou os efeitos que a interação dinâmica desacoplada entre veículo, irregularidades e ponte têm sobre as respostas dinâmicas nos sistemas pela Mecânica do Dano e pela teoria da plasticidade. A passagem de um veículo sobre uma ponte é uma ação dinâmica sobre a estrutura. A presença de irregularidades na via tende a amplificar a excitação dinâmica decorrente da passagem do veículo, o que ocasiona vibrações adicionais na estrutura da ponte. As vibrações, por sua vez, tendem a aumentar o grau de danificação estrutural. Essa degradação do material altera o comportamento da estrutura quando submetida a esforços dinâmicos, aumentando a magnitude e as oscilações das respostas. Tais efeitos não são possíveis de ser analisados com modelos dinâmicos lineares. Para a resolução do problema, no modelo da ponte utilizaram-se elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*. Para o tratamento do comportamento do concreto, aplicou-se o modelo constitutivo de dano de *Mazars*, adaptado para considerar a condição de inversão de esforço, também devido à vibração, e para as armaduras utilizou-se um modelo elastoplástico bilinear com encruamento. As equações de movimento foram obtidas através do equilíbrio dinâmico não linear e integradas numericamente no tempo usando o Método de *Newmark* em conjunto com o Método Iterativo e Incremental de *Newton-Raphson*.

Abeche et al. (2015a) analisaram os efeitos da interação dinâmica entre veículo, irregularidade e ponte considerando a perda de rigidez pela Mecânica do Dano. Consideraram-se irregularidades harmônicas senoidais, um modelo de rigidez equivalente com o modelo de dano de *Mazars* (1984) adaptado para análises dinâmicas e um modelo elastoplástico bilinear para as armaduras. Analisou-se a influência do processo de danificação e de plasticidade nas respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração da estrutura de ponte.

Abeche et al. (2015b) analisaram a influência de diferentes metodologias dinâmicas não lineares pela Mecânica do Dano em uma ponte rodoviária biapoiada, através da interação dinâmica entre veículo, irregularidades e ponte. Verificou-se que metodologias que não levam em conta a geometria da seção transversal na análise dinâmica não conseguem captar com eficiência as respostas dinâmicas estruturais. Analisaram-se, também, os picos de respostas dinâmicas de aceleração, com outra metodologia, e sua relação com o processo de danificação e conseqüente variação nas frequências naturais de vibração da estrutura. Observou-se que mesmo em casos de vigas de ponte rodoviárias biapoiadas, a maior danificação, no final da análise dinâmica

não linear, poderia ocorrer próxima aos apoios para algumas formas de irregularidade.

Abeche et al. (2016a) aplicaram o modelo de interação dinâmica entre veículo, irregularidades e ponte, considerando a Mecânica do Dano e a teoria da plasticidade, em um caso de ponte ferroviária com balanços. Utilizaram-se irregularidades harmônicas senoidais, periódicas triangulares e periódicas retangulares. Verificou-se a influência das diferentes formas de irregularidades no processo de danificação da estrutura ao longo do tempo e as conseqüentes variações nas respostas dinâmicas de deslocamento e de deformações, bem como a redução das frequências naturais por conta da perda de rigidez.

Abeche et al. (2016b) analisaram uma ponte de concreto armado com dois balanços com a metodologia dinâmica não linear proposta, considerando irregularidades aleatórias e determinísticas. Consideraram-se variações na velocidade e movimentos acelerados. Verificou-se a variação das respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade, aceleração e deformações perante a diferença no processo de danificação gerada pelas irregularidades aleatórias. Também compararam-se os resultados com a ponte sem irregularidades e com irregularidades harmônicas senoidais. Analisou-se a diferença na evolução do processo de microfissuração ao longo do tempo e as configurações danificadas finais das vigas ao final da análise.

Abeche et al. (2016) verificaram a influência de formas aleatórias de irregularidades com diferentes amplitudes no modelo de interação entre veículo, irregularidade e ponte pela Mecânica do Dano e pela teoria da plasticidade. Utilizou-se um modelo elastoplástico bilinear que considera o encruamento na análise. Comparou-se as diferentes respostas dinâmicas de deslocamento e velocidade, bem como as configurações finais danificadas e as diferentes evoluções da danificação para ambos os casos.

Sheng e Wang (2017) propuseram um método para determinarem-se as respostas dinâmicas não lineares de estruturas submetidas a carregamentos móveis. Para a viga da ponte, é aplicado o modelo constitutivo de *Kelvin-Voigt*. As equações diferenciais não lineares são desenvolvidas utilizando a teoria de *Kármán* e o princípio de *D'Alembert*.

Imai et al. (2017a) analisaram o comportamento dinâmico não linear de vigas de pontes de concreto armado com variação na distribuição de armaduras através da interação entre veículo, ponte e a Mecânica do Dano. Considerou-se um modelo elastoplástico bilinear com encruamento para as armaduras e o modelo de dano de *Mazars* (1984) adaptado por Abeche (2015) para casos dinâmicos. Compararam-se as respostas dinâmicas não lineares com as respostas dinâmicas lineares de deslocamento e velocidade. Verificou-se a configuração danificada final perante o processo de distribuição de armaduras. Evidenciou-se a redução nas frequências naturais de vibração devido a perda de rigidez pela Mecânica do Dano considerando a

distribuição de armadura.

Abeche et al. (2017a) estenderam a metodologia dinâmica não linear pela Mecânica do Dano e teoria da plasticidade para o Estado Plano de Tensões com elementos finitos de 4 nós, considerando a interação entre o veículo, a ponte e irregularidades harmônicas senoidais. Compararam-se as respostas do modelo com as respostas dinâmicas do modelo de viga de *Euler-Bernoulli*. Observaram-se resultados próximos de deslocamentos, velocidades e acelerações com ambas metodologias desenvolvidas e a diferença nas configurações finais de dano. Evidenciou-se que a metodologia com elementos de viga de *Euler-Bernoulli* teve melhores respostas possivelmente pela característica das funções de forma desses elementos. Pelo fato das funções de forma do elemento de Estado Plano de Tensões com 4 nós não possuírem os termos quadráticos, sendo um polinômio incompleto, o comportamento dinâmico não linear foi prejudicado em comparação com o elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli*.

Imai et al. (2017b) analisaram a evolução do processo de danificação de vigas de ponte de concreto armado com seção transversal I através da interação dinâmica entre veículo e estrutura. Compararam-se as respostas dinâmicas não lineares da viga I com as respostas dinâmicas não lineares da viga retangular apresentadas no trabalho de Abeche et al. (2016b). Os resultados foram comparados com a resposta de deslocamento dinâmico linear. Comparou-se, também, o espectro de respostas dinâmicas não lineares de deslocamento. Foram apresentadas as diferentes respostas de danificação para as diferentes geometrias de seção transversal. Evidenciou-se a propagação da danificação nas respostas da viga I, bem como a influência na redução das áreas das camadas, devido ao estreitamento das larguras, no processo de danificação dinâmico.

Abeche et al. (2017b) verificaram os efeitos da evolução dinâmica não linear do dano e da plasticidade através da interação entre veículo, irregularidade e o fator de amplificação dinâmico de uma ponte em concreto armado, considerando elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli* e elementos finitos de Estado Plano de Tensões com 4 nós. Foram efetuadas 10.201 simulações dinâmicas não lineares para cada geração de cada espectro de fator de amplificação dinâmica não linear dos modelos. Verificou-se a relação entre velocidades do veículo e amplitude de irregularidades harmônicas senoidais no fator de amplificação dinâmica não linear afetados pela perda de rigidez ocasionada pela Mecânica do Dano. Analisou-se a influência de um maior número de análises, variando as velocidades e amplitudes, nas respostas de fator de amplificação dinâmica não linear.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este Capítulo apresenta a fundamentação teórica dos modelos utilizados no presente trabalho. A Seção 3.1 trata da flexão composta plana em vigas, conceito fundamental para as simulações computacionais utilizadas. A Seção 3.2 trata do Método dos Elementos Finitos, especificamente os elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*. As Seções 3.3 e 3.4 particularizam a fundamentação teórica do Método dos Elementos Finitos para, respectivamente, análises estáticas e dinâmicas lineares. Por fim, a Seção 3.5 demonstra a fundamentação teórica da Mecânica do Dano de modo a apresentar os conceitos de análise estática não linear, Seção 3.6, e análise de sistemas dinâmicos não lineares, Seção 3.7.

#### 3.1 FLEXÃO COMPOSTA PLANA EM VIGAS

Na mecânica dos sólidos deformáveis, define-se a flexão como um esforço físico que ocasiona uma deformação perpendicular ao eixo principal do sólido, o qual é paralelo à força atuante (AZEVEDO, 2003).

Existem duas principais hipóteses cinemáticas para descrever o campo de deslocamentos de um prisma mecânico deformado por flexão:

- a hipótese de *Navier-Bernoulli*; e
- a hipótese de *Timoshenko*.

A primeira propõe que duas seções planas e paralelas permanecem sendo planas e paralelas ao longo do processo de deformação, inclusive se houver plasticidade. Na segunda, supõe-se que uma seção normal ao eixo principal do prisma não mantém essa característica após a deformação, considerando a deformação devido ao esforço cortante (ABECHE, 2015).

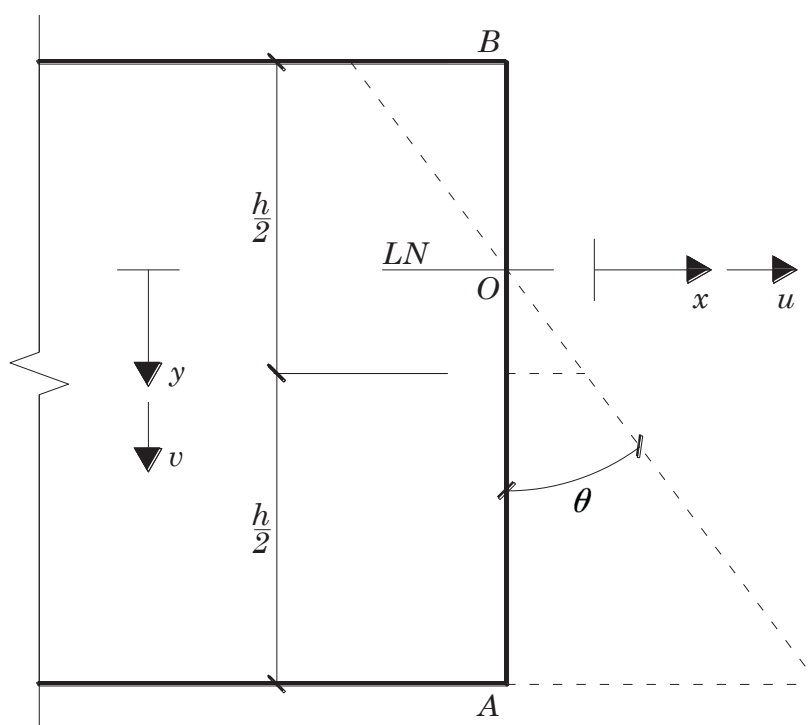
No presente trabalho, é adotada a hipótese de *Navier-Bernoulli*, ou seja, consideram-se apenas as deformações devido às tensões normais.

A flexão pode ser classificada em três tipos de acordo com os esforços atuantes: flexão pura, flexão simples e flexão composta. A flexão pura ocorre quando o único esforço interno atuante é o momento fletor, ou seja, o esforço normal e o esforço cortante são nulos. Já a flexão simples ocorre quando o esforço interno normal é nulo, havendo ação do esforço interno cortante e do esforço interno de momento fletor. Na flexão composta, por sua vez, há presença dos três esforços internos, ou seja, o esforço interno normal não é nulo. Este é o caso de vigas de pórticos (AZEVEDO, 2003).

No caso de materiais compósitos, como o concreto armado, em que há pelo menos dois componentes ou pelo menos duas fases com propriedades físicas distintas na sua composição, haverá variação da posição da linha neutra (ABECHE, 2015).

A Figura 1 apresenta um exemplo de flexão em uma viga de materiais compósitos, como o caso do concreto armado com armadura de tração.

FIGURA 1 – Flexão em vigas de materiais compósitos



FONTE: Abeche, 2015.

Nota-se variação da posição da linha neutra. Há uma rotação da face  $\overline{AB}$  em torno da linha neutra com deslocamentos por tração no ponto  $A$ , por alongamento, e deslocamentos por compressão no ponto  $B$ , por encurtamento.

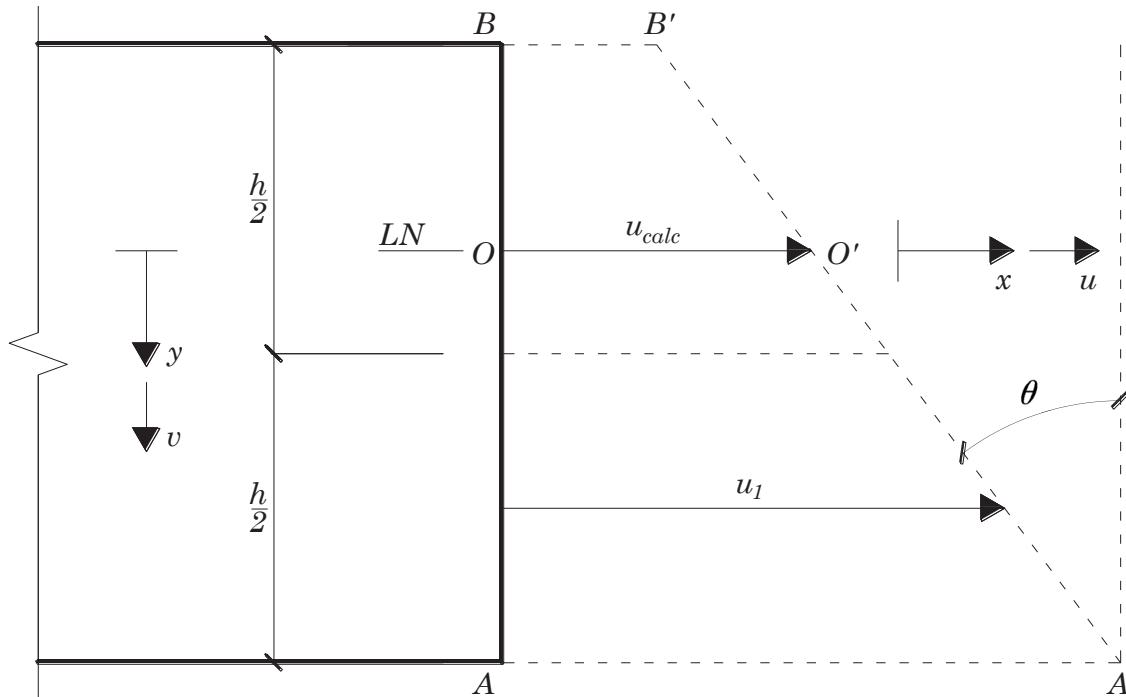
Através da definição geométrica da tangente, pode-se definir o deslocamento de qualquer ponto devido à rotação ocasionada na flexão como sendo:

$$|x| = |y| \tan(\theta) \quad (3.1)$$

em que os valores são apresentados em módulo devido à mudança de sinal dos pontos tracionados e comprimidos, adotados conforme convenção arbitrada.

A Figura 2 apresenta a flexão composta plana, em uma viga de materiais compósitos, por conta da rotação da face  $\overline{AB}$ , bem como deslocamentos ocasionados pelos esforços internos normais.

FIGURA 2 – Flexão composta plana em vigas de materiais compósitos



FONTE: Abeche, 2015.

O deslocamento no ponto 1 pode ser definido pelas seguintes equações:

$$u_1 = u_{calc} + |x| \quad (3.2)$$

ou:

$$u_1(x, y) = u_{calc} + |y| \tan(\theta(x)) \quad (3.3)$$

sendo  $u_{calc}$  o deslocamento horizontal do ponto situado na posição da linha neutra.

A extensão segundo o eixo  $x$  é definida por:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (u_{calc} + |y| \tan(\theta)) = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d \tan(\theta)}{dx} \quad (3.4)$$

Caso  $x$  seja positivo, da esquerda para a direita, a extensão  $\varepsilon_{x1}$  é positiva quando existe um alongamento. O ângulo  $\theta$  é definido por:

$$\theta(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} = \frac{dv}{dx} \quad (3.5)$$

Substituindo a Equação anterior na Equação (3.4), obtém-se:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d}{dx} \left( \tan \left( \frac{dv}{dx} \right) \right) = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d \tan \left( \frac{dv}{dx} \right)}{dx} \quad (3.6)$$

Aplicando a regra da cadeia na Equação anterior, tem-se, para a derivada da segunda parcela:

$$\frac{d \tan \left( \frac{dv}{dx} \right)}{dx} = \frac{d \tan (\beta)}{dx} = \frac{d \tan (\beta)}{d\beta} \frac{d\beta}{dx} \quad (3.7)$$

Assim, substituindo a Equação (3.7) na Equação (3.6), obtém-se:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d \tan \left( \frac{dv}{dx} \right)}{dx} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d \tan (\beta)}{dx} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d \tan (\beta)}{d\beta} \frac{d\beta}{dx} \quad (3.8)$$

sendo:

$$\beta = \frac{dv}{dx} \quad \text{e} \quad \frac{d \tan (\beta)}{d\beta} = \sec^2 (\beta) \quad (3.9)$$

Ao resolver e substituir as derivadas, obtém-se:

$$\frac{d \tan (\beta)}{d\beta} \frac{d\beta}{dx} = \sec^2 (\beta) \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) = \sec^2 \left( \frac{dv}{dx} \right) \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.10)$$

Para o caso geral de flexão composta plana em vigas a deformação do ponto genérico 1, na direção cuja normal é  $\vec{x}$ , é definida por:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \sec^2 \left( \frac{dv}{dx} \right) \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.11)$$

O sentido da deformação, alongamento ou encurtamento, para o caso geral, fica a critério da convenção adotada.

Considerando o caso de pequenas deformações e deslocamentos, a seguinte simplificação pode ser feita:

$$\tan (\theta) \cong \theta \quad (3.12)$$

Deste modo, a Equação (3.3) torna-se:

$$u_1 (x, y) = u_{calc} + |y| \theta (x) \quad (3.13)$$

Considerando a simplificação adotada, a Equação (3.6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_{x1} = u_{1,x} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d\theta}{dx} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) \quad (3.14)$$

Portanto, a deformação do ponto genérico 1 no eixo cuja normal é  $\vec{x}$ , para o caso de pequenas deformações, é dada por:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.15)$$

Azevedo (2003), nas deduções da teoria de viga de *Euler-Bernoulli*, considera apenas os deslocamentos laterais  $v(x)$ , ou seja, sendo constante a componente  $u_{calc}$  do campo de deslocamentos para determinação da deformação, ou extensão,  $\varepsilon_{x1}$ .

Uma vez consideradas pequenas as dimensões da seção transversal da viga em relação ao seu comprimento, é possível desprezar os efeitos das tensões normais aos outros eixos  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$ . Dessa forma, a lei de *Hooke* generalizada fica reduzida a:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.16)$$

sendo  $\sigma_x$  a tensão normal em relação ao eixo longitudinal  $x$  da viga.

A tensão normal no ponto 1 da seção transversal da viga,  $\sigma_{x1}$ , é definida por:

$$\sigma_{x1} = E\varepsilon_{x1} = E \frac{du_{calc}}{dx} + E|y| \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.17)$$

A resultante das tensões normais na seção transversal, por sua vez, é:

$$N = \int_S \sigma_{x1} dS = \int_S \left( E \frac{du_{calc}}{dx} + E|y| \frac{d^2v}{dx^2} \right) dS = \int_S \left( E \frac{du_{calc}}{dx} + E|y| \frac{d^2v}{dx^2} \right) dS \quad (3.18)$$

sendo  $S$  a área da seção transversal.

Semelhantemente, se define o momento fletor como sendo:

$$M = \int_S \sigma_{x1} |y| dS = \int_S \left( E \frac{du_{calc}}{dx} + E|y| \frac{d^2v}{dx^2} \right) |y| dS \quad (3.19)$$

O sentido do momento fletor fica a critério da convenção de sinal adotada para os eixos de referência. Azevedo (2003) considera que um momento fletor é positivo quando provoca trações nas fibras que têm coordenadas  $y$  positivas.

Supondo que o módulo de *Young*,  $E$ , é constante em todos os pontos da barra e passando para fora da integral tudo o que não depende nem de  $y$  nem de  $z$ , resulta das Equações (3.18) e (3.19), respectivamente:

$$N = E \frac{du_{calc}}{dx} \int_S dS + E \frac{d^2v}{dx^2} \int_S |y| dS \quad (3.20)$$

e

$$M = E \frac{du_{calc}}{dx} \int_S |y| dS + E \frac{d\theta}{dx} \int_S |y|^2 dS \quad (3.21)$$

Uma vez que os eixos  $y$  e  $z$  são os eixos principais centrais de inércia, o seguinte momento estático de área é nulo:

$$\int_S |y| dS = 0 \quad (3.22)$$

A área e o momento de inércia em relação a  $z$  são definidos com as seguintes expressões:

$$A = \int_S dS \quad (3.23)$$

$$I = \int_S |y|^2 dS \quad (3.24)$$

Assim, é possível simplificar as Equações (3.20) e (3.21) para:

$$N = EA \frac{du_{calc}}{dx} \quad (3.25)$$

e

$$M = EI \frac{d\theta}{dx} = EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.26)$$

Designando a extensão correspondente ao eixo longitudinal da barra por  $\varepsilon_o$ , têm-se:

$$\varepsilon_o = \frac{du_{calc}}{dx} \quad (3.27)$$

e

$$N = EA\varepsilon_o \quad (3.28)$$

que corresponde a expressão clássica relativa à tração de barras (BEER; JOHNSTON, 1995; BEER; JOHNSTON, 2008).

Designando por  $k$  a curvatura da barra, como sendo:

$$k = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (3.29)$$

resulta, ao substituí-la na Equação (3.26), em:

$$M = EI k \quad (3.30)$$

ou

$$k = \frac{M}{EI} \quad (3.31)$$

que correspondem às expressões clássicas da flexão de vigas (BEER; JOHNSTON, 1995; BEER; JOHNSTON, 2008).

Substituindo as Equações (3.25) e (3.26) na Equação (3.17), obtém-se:

$$\sigma_{x1} = E \frac{N}{EA} + E |y| \frac{M}{EI} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} |y| \quad (3.32)$$

que corresponde à equação clássica da flexão composta (BEER; JOHNSTON, 1995; BEER; JOHNSTON, 2008).

## 3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nesta Seção, primeiramente, apresenta-se a teoria de viga de *Euler-Bernoulli*, Seção 3.2.1 para, em sequência, particularizar a fundamentação teórica dos elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*, Seção 3.2.1.1.

### 3.2.1 Teoria de viga de *Euler-Bernoulli*

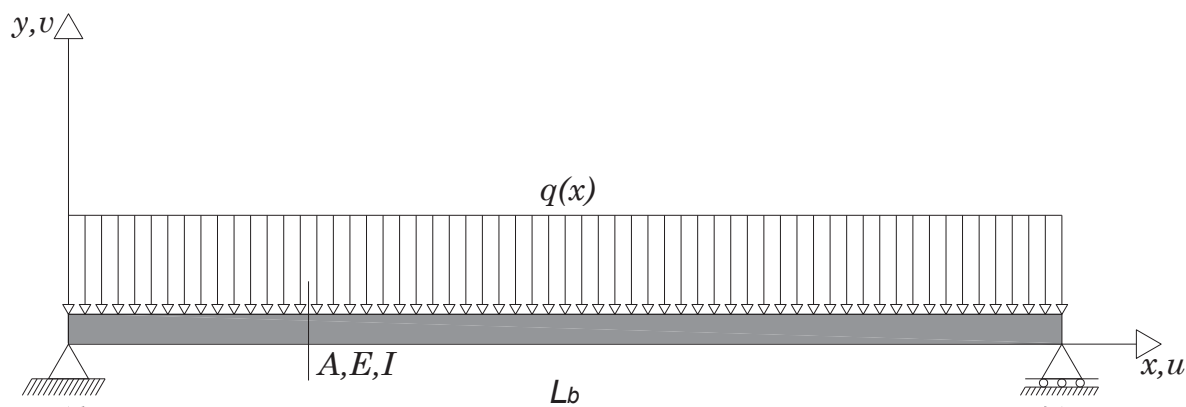
Aqui faz-se uma revisão da teoria de viga de *Euler-Bernoulli* para posteriormente apresentar os elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*, Seção 3.2.1.1, com base nos trabalhos de Beghetto (2006), Beghetto (2011) e Abeche (2015).

A teoria da viga de *Euler-Bernoulli*, conhecida como teoria clássica da viga, possui as seguintes características (CRAIG, 1981):

1. A existência da linha neutra no eixo  $x$ , onde a viga não sofre tração nem compressão;
2. Seções planas e perpendiculares à linha neutra permanecem planas e perpendiculares após a deformação, ou seja, as deformações devidas ao cisalhamento são negligenciadas;
3. Material elástico linear e homogêneo;
4. As tensões  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são desprezíveis se comparadas à tensão axial  $\sigma_x$ ; e
5. O plano  $xy$  é um plano principal.

A Figura 3 demonstra uma viga biapoiada submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído,

FIGURA 3 – Viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído

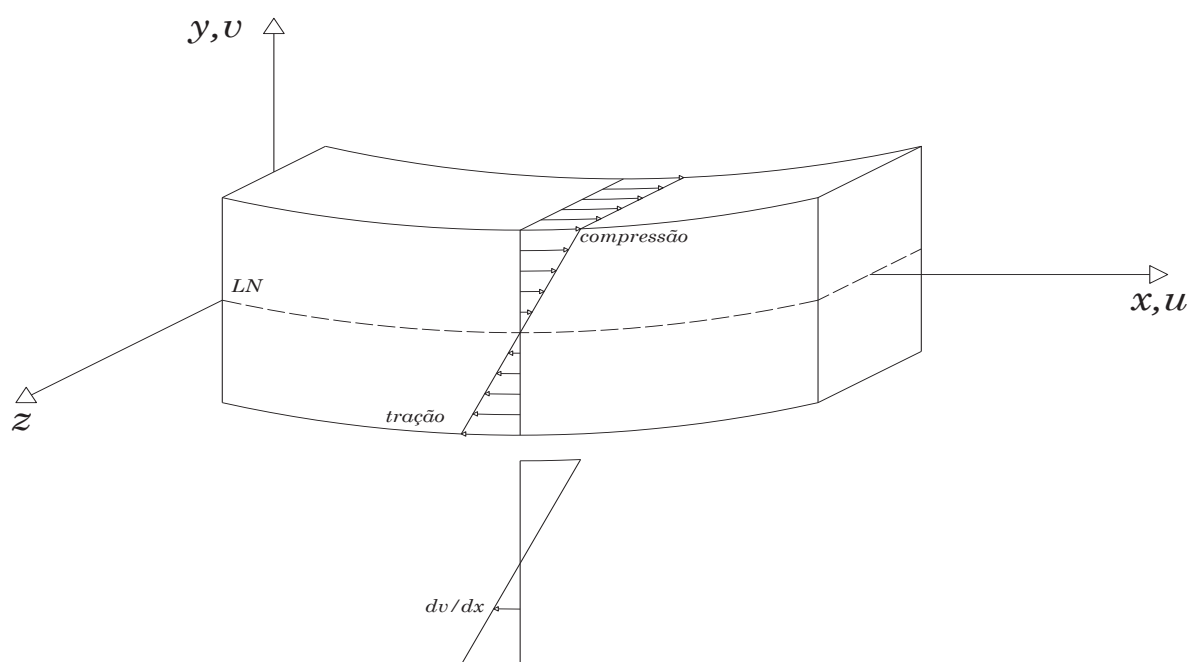


FONTE: Beghetto, 2011.

em que,  $L_b$  representa o comprimento da viga,  $A$  representa a área de seção transversal constante,  $E$  representa o módulo de deformação do material, ou módulo de *Young*,  $I$  representa o momento de inércia da seção transversal e  $q(x)$  representa o carregamento transversal uniformemente distribuído.

O carregamento transversal gera um momento fletor que produz tensões axiais de tração e de compressão. Ao sofrer flexão a viga apresenta a configuração representada na Figura 4.

FIGURA 4 – Tensões axiais atuantes na seção transversal da viga (configuração deformada)



FONTE: Abeche, 2015.

A deformação da viga sob a condição de carregamento é descrita por dois campos de deslocamentos:

$$u(x, y) \quad \text{e} \quad v(x, y) \quad (3.33)$$

em que  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  representam, respectivamente, os campos de deslocamentos axiais e transversais. Esses campos são obtidos a partir das seguintes relações:

$$u(x, y) = -y \frac{\partial v(x)}{\partial x} = -y \frac{dv}{dx} \quad \text{e} \quad v(x, y) = v(x) \quad (3.34)$$

sendo  $y$  a altura em relação à linha neutra e  $dv/dx$  é o ângulo de rotação. Através da relação entre deslocamento e deformação, obtém-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3.35)$$

Segundo a lei de *Hooke*, que relaciona as tensões e deformações, tem-se:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -Ey \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = -Ey \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3.36)$$

em que  $\sigma_x$  e  $\varepsilon_x$  representam, respectivamente, a tensão axial em relação ao eixo  $x$  e a deformação relativa axial.

A energia potencial da viga de *Euler-Bernoulli* é definida por:

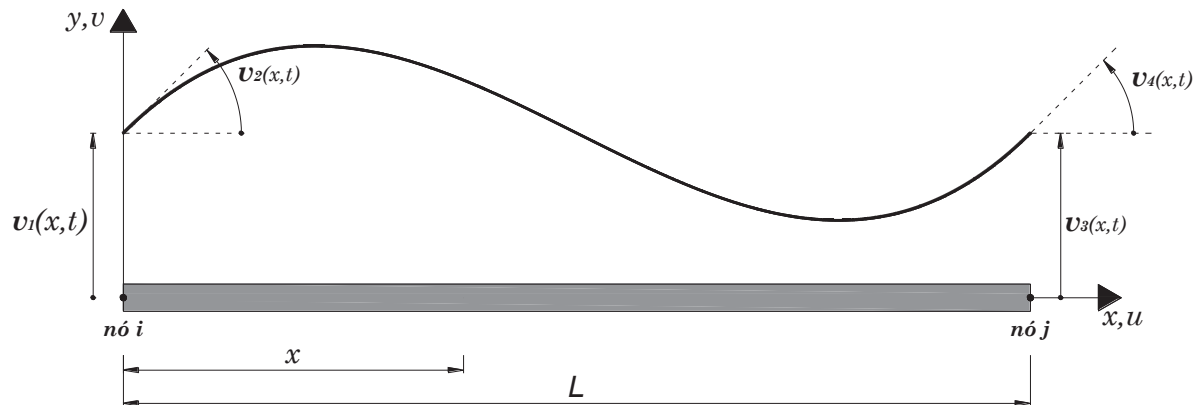
$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{L_b} EI \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^{L_b} qv dx \quad (3.37)$$

onde a primeira parcela representa a energia interna de deformação e a segunda parcela representa o trabalho produzido pelas forças externas.

### 3.2.1.1 Elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli*

Embora a formulação para o caso de flexão composta plana de vigas tenha sido apresentada na Seção 3.1, a discretização do problema contínuo é feita, neste trabalho, através de elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*. Por este motivo, a presente Seção apresenta esta formulação discreta.

Os elementos finitos de viga são originados pela subdivisão da viga em pequenas parcelas que possuem as mesmas propriedades materiais e geométricas pertencentes à viga original, global. Nos elementos finitos aqui utilizados são admitidas as hipóteses da teoria de viga de *Euler-Bernoulli*. A Figura 5 a seguir apresenta um elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli* e seus respectivos graus de liberdade,

FIGURA 5 – Elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli* e seus graus de liberdade

FONTE: Abeche, 2015.

em que  $L$  representa o comprimento total do elemento finito de viga delimitado entre os nós  $i$  e  $j$ ,  $v_1(x, t)$  e  $v_2(x, t)$  representam, respectivamente, o deslocamento transversal e a rotação do nó  $i$ ,  $v_3(x, t)$  e  $v_4(x, t)$  representam, respectivamente, o deslocamento transversal e a rotação do nó  $j$ . Observa-se que o elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli* possui quatro graus de liberdade.

A equação diferencial de quarta ordem que governa o problema de flexão de vigas sujeitas à carregamentos transversais uniformemente distribuídos é definida por (REDDY, 1984):

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - q(x) = 0, \quad (0 \leq x \leq L_b) \quad (3.38)$$

Pela formulação variacional de elementos finitos, deve-se selecionar uma função completa e contínua que represente o campo de deslocamento  $v$  e que satisfaça as condições de contorno essenciais. Neste elemento clássico, adota-se uma função polinomial cúbica, pois existem quatro condições de contorno essenciais (CRAIG, 1981; CHOPRA, 1995; BATHE, 1996).

$$v(x, t) = c_1 + c_2 \frac{x}{L} + c_3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + c_4 \left( \frac{x}{L} \right)^3 \quad (3.39)$$

sendo que as condições de contorno essenciais são:

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= v(0, t) = c_1 \\ v_2(x, t) &= v_{,x}(0, t) = \frac{c_2}{L} \\ v_3(x, t) &= v(L, t) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\ v_4(x, t) &= v_{,x}(L, t) = \frac{c_2}{L} + \frac{2c_3}{L^2} L + \frac{3c_4}{L^3} L^2 = \frac{c_2}{L} + \frac{2c_3}{L} + \frac{3c_4}{L} \end{aligned} \quad (3.40)$$

em que  $v_{,x} = dv/dx = \theta$  representa a primeira derivada em relação a  $x$ , que corresponde a rotação.

Encontrando os valores de  $c_i$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  e substituindo-os na Equação (3.39), tem-se:

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(x) v_i(x, t) \quad (3.41)$$

que em notação matricial se escreve como:

$$v(x, t) = \left\{ \begin{matrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \right\} \quad (3.42)$$

em que  $\psi_i(x)$  são as funções de forma, funções coordenadas, ou funções de interpolação para o elemento finito de viga, as quais são representadas, respectivamente, por:

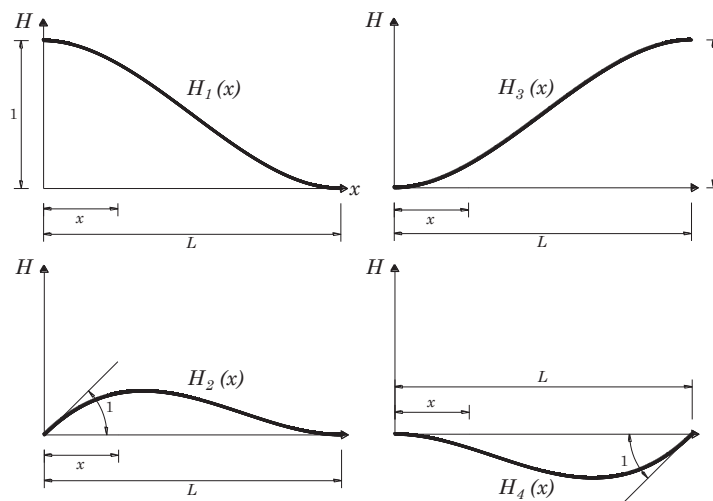
$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= H_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \psi_2(x) &= H_2(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\ \psi_3(x) &= H_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \psi_4(x) &= H_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

sendo as funções de forma, ou interpoladoras,  $H_i(x)$  conhecidas como funções polinomiais cúbicas de *Hermite*, que satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} H_1(0) &= 1 & H_{1,x}(0) &= 0 & H_1(L) &= 0 & H_{1,x}(L) &= 0 \\ H_2(0) &= 0 & H_{2,x}(0) &= 1 & H_2(L) &= 0 & H_{2,x}(L) &= 0 \\ H_3(0) &= 0 & H_{3,x}(0) &= 0 & H_3(L) &= 1 & H_{3,x}(L) &= 0 \\ H_4(0) &= 0 & H_{4,x}(0) &= 0 & H_4(L) &= 0 & H_{4,x}(L) &= 1 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Essas funções são ilustradas na Figura 6.

FIGURA 6 – Gráfico das funções de interpolação polinomiais cúbicas de *Hermite*



FONTE: Abeche, 2015.

De acordo com o exposto na Seção 3.1, considerando constante a parcela  $u_{calc}$  do campo de deslocamentos, ou seja, considerando apenas os deslocamentos laterais  $v(x)$ , tem-se:

$$\varepsilon_{x1} = |y| \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3.45)$$

Ao arbitrar a convenção da coordenada  $y$  como sendo negativa em relação ao eixo de referência, tem-se:

$$\varepsilon_{x1} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3.46)$$

Designando como  $\bar{\varepsilon}_{x1}$  a seguinte componente da Equação anterior, obtêm-se:

$$\bar{\varepsilon}_{x1} = -\frac{d^2 v}{dx^2} \quad (3.47)$$

e

$$\varepsilon_{x1} = y \bar{\varepsilon}_{x1} \quad (3.48)$$

Substituindo a Equação (3.42) na Equação (3.47), tem-se:

$$\bar{\varepsilon}_{x1} = -\frac{d^2 \left( \sum_{i=1}^4 \psi_i(x) v_i(x, t) \right)}{dx^2} = \left\{ \begin{array}{cccc} -\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} & -\frac{d^2 \psi_2}{dx^2} & -\frac{d^2 \psi_3}{dx^2} & -\frac{d^2 \psi_4}{dx^2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \right\} \quad (3.49)$$

O tensor  $[B]$  é definido por:

$$[B] = \left[ \begin{array}{cccc} -\frac{d^2 \psi_1}{dx^2} & -\frac{d^2 \psi_2}{dx^2} & -\frac{d^2 \psi_3}{dx^2} & -\frac{d^2 \psi_4}{dx^2} \end{array} \right] \quad (3.50)$$

Deste modo, reescreve-se a Equação (3.47) da seguinte forma:

$$\bar{\varepsilon}_{x1} = [B] \{v\} \quad (3.51)$$

Ao substituir a Equação (3.51) na Equação (3.48), obtêm-se:

$$\varepsilon_{x1} = y [B] \{v\} \quad (3.52)$$

Atendendo às funções de forma adotadas e integrando no domínio do elemento, entre as coordenadas locais 0 e 1, o tensor  $[B]$  passa a ter os seguintes componentes:

$$[B] = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3}x & \frac{4}{L} - \frac{6}{L^2}x & -\frac{6}{L^2} + \frac{12}{L^3}x & \frac{2}{L} - \frac{6}{L^2}x \end{array} \right] \quad (3.53)$$

Caso a integração no domínio do elemento seja feita entre as coordenadas locais  $-1/2$  e  $+1/2$ , ou seja, caso a origem esteja localizada no centro do elemento, a Equação (3.53) passa a ser:

$$[B] = \left[ -\frac{12}{L^3}x \quad \frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x \quad \frac{12}{L^3}x \quad -\frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x \right] \quad (3.54)$$

### 3.3 ESTÁTICA LINEAR DOS SISTEMAS

Particularizando o Método dos Elementos Finitos de modo a considerar a análise estática linear dos sistemas, faz-se necessário analisar a energia potencial de deformação do elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli*. Esta pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x d\Omega \\ V &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} E y^2 \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 d\Omega \\ V &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} E y^2 (v'')^2 d\Omega \\ V &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E y^2 (v'')^2 dx dy dz \\ V &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E y^2 \left[ \sum_{i=1}^4 \frac{d^2 \psi_i(x)}{dx^2} v_i(x, t) \right] \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{d^2 \psi_j(x)}{dx^2} v_j(x, t) \right] dA dx \\ V &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E y^2 \left[ \sum_{i=1}^4 \frac{d^2 H_i(x)}{dx^2} v_i(x, t) \right] \left[ \sum_{j=1}^4 \frac{d^2 H_j(x)}{dx^2} v_j(x, t) \right] dA dx \end{aligned} \quad (3.55)$$

em que  $v'' = d^2 v / dx^2$  representa a segunda derivada em relação a  $x$ ,  $V$  representa a energia potencial de deformação do elemento finito de viga e  $\Omega$  representa o volume de integração do sólido.

Restringindo a Equação anterior para os polinômios de *Hermite*, de modo que  $H'' = d^2 H / dx^2$ , tem-se:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E y^2 \left[ \sum_{i=1}^4 H_i''(x) v_i(x, t) \right] \left[ \sum_{j=1}^4 H_j''(x) v_j(x, t) \right] dA dx \\ V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left[ \int_0^L \int_A E y^2 dA H_i''(x) H_j''(x) dx \right] v_i(x, t) v_j(x, t) \end{aligned} \quad (3.56)$$

onde o momento de inércia de área é definido pela seguinte integral:

$$I = \int_A y^2 dA \quad (3.57)$$

Define-se a energia potencial de deformação do elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli* da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left[ \int_0^L E I H_i'' H_j'' dx \right] v_i(x, t) v_j(x, t) \\ V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{ij} v_i v_j \\ V &= \frac{1}{2} \{v_e\}^T [K_e] \{v_e\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde a matriz de rigidez do elemento finito de viga  $[K_e]$  pode ser obtida através das funções de forma por:

$$\begin{aligned}
 [K_e] &= \int_{\Omega} [B]^T [c] [B] d\Omega \\
 K_{ij} &= \int_0^L EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \\
 K_{ij} &= \int_0^L EI H_i'' H_j'' dx \\
 [K_e] &= \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

onde o subíndice  $e$  refere-se ao elemento, ou seja,  $[K_e]$  é a matriz de rigidez elementar de um determinado elemento da malha.

Considera-se que as ações externas, como cargas distribuídas,  $p$ , ou concentradas, apresentam o mesmo sentido dos deslocamentos generalizados. Considerando, também, a lei de *Hooke* como relação constitutiva válida para casos lineares, ao levar em conta a deformação longitudinal devido à flexão, tem-se:

$$\sigma_{x1} = E\varepsilon_{x1} = Ey [B] \{v\} \quad (3.60)$$

O princípio dos trabalhos virtuais é aqui apresentado para explicar a formulação:

$$\int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_L \delta \{v\}^T \{p\} dL \quad (3.61)$$

Delimitando o elemento entre  $-\frac{L}{2}$  até  $+\frac{L}{2}$ , a Equação anterior torna-se:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int_S \delta \varepsilon_{x1} \sigma_{x1} dS dx_1 = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \delta v p dx_1 \quad (3.62)$$

em que  $S$  é a área da superfície da seção transversal do elemento, definida por:

$$dS = dA = dx_2 dy \quad (3.63)$$

A deformação virtual é definida por:

$$\delta \varepsilon_{x1} = y [B] \delta \{v\} \quad (3.64)$$

e equivalente a:

$$\delta \varepsilon_{x1} = \delta \{v\}^T [B]^T y \quad (3.65)$$

A interpolação do campo de deslocamentos, com os valores de deslocamentos nodais, em sua forma virtual é definida, em sua forma global, da seguinte forma:

$$\delta v = \{\psi\}^T \delta \{v\} = \delta \{v\}^T \{\psi\} \quad (3.66)$$

Assim, ao substituir as Equações anteriores, tem-se o princípio dos trabalhos virtuais definido por:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int_S \delta \{v\}^T [B]^T E v^2 [B] \{v\} dS dx_1 = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \delta \{v\}^T \{\psi\} p dx_1 \quad (3.67)$$

Retirando os termos independentes da integral e reorganizando a Equação anterior, tem-se:

$$\delta \{v\}^T \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} [B]^T [B] E \int_S v^2 dS dx_1 \{v\} = \delta \{v\}^T p \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \{\psi\} dx_1 \quad (3.68)$$

Visando a viabilidade da pesquisa através da Mecânica do Dano, é importante ressaltar que o módulo de *Young* é variável ao longo do comprimento da viga. Porém, o mesmo é constante dentro de cada camada da seção transversal para cada elemento finito.

Como a Equação anterior é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, tem-se:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} [B]^T [B] E I dx_1 \{v\} = p \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \{\psi\} dx_1 \quad (3.69)$$

onde a matriz de rigidez é definida por:

$$[K_e] = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} [B]^T [B] E I dx_1 \quad (3.70)$$

e o vetor de solicitações é definido por:

$$\{F_e\} = p \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \{\psi\} dx_1 \quad (3.71)$$

Sendo o módulo de *Young* e o momento de inércia constantes ao longo do

elemento, tem-se:

$$\begin{aligned}
 [K_e] &= EI \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} [B]^T [B] dx_1 = \\
 &EI \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^3}x_1 \\ \frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 \\ \frac{12}{L^3}x_1 \\ -\frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^3}x_1 & \frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 & \frac{12}{L^3}x_1 & -\frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 \end{bmatrix} dx_1
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

em que chega-se a mesma matriz apresentada na Equação (3.59).

Considerando as funções de forma no vetor de solicitações externas, tem-se:

$$\{F_e\} = p \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2L}x_1 + \frac{2}{L^3}x_1^3 \\ \frac{L}{8} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{L^2}x_1^3 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2L}x_1 - \frac{2}{L^3}x_1^3 \\ -\frac{L}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{L^2}x_1^3 \end{Bmatrix} dx_1 = p \begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L^2}{12} \\ \frac{L}{2} \\ -\frac{L^2}{12} \end{Bmatrix} \tag{3.73}$$

O momento fletor nos elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli* é definido por:

$$M = -EI \frac{d^2v}{dx_1^2} = EI [B] \{v\} \tag{3.74}$$

Por fim, a clássica Equação governante da estática linear é aqui apresentada de forma global:

$$[K_G] \{v_G\} = \{F_G\} \tag{3.75}$$

em que  $[K_G]$ ,  $\{v_G\}$  e  $\{F_G\}$  são, respectivamente, a matriz de rigidez global, o vetor de deslocamentos globais e o vetor de solicitações externas globais.

### 3.4 DINÂMICA LINEAR DOS SISTEMAS

Para considerar a dinâmica linear dos sistemas nos elementos finitos de viga, por sua vez, é necessário utilizar o conceito de energia cinética, a qual pode ser

representada por:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{v}^2 dx \\
 T &= \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left[ \sum_{i=1}^4 H_i(x) \dot{v}_i(x, t) \right] \left[ \sum_{j=1}^4 H_j(x) \dot{v}_j(x, t) \right] dx \\
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \left[ \int_0^L \rho A H_i(x) H_j(x) dx \right] \dot{v}_i(x, t) \dot{v}_j(x, t) \\
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij} \dot{v}_i \dot{v}_j \\
 T &= \frac{1}{2} \{\dot{v}_e\}^T [M_e] \{\dot{v}_e\}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

em que  $T$ ,  $\rho$ ,  $A$  e  $(\cdot)$  representam respectivamente a energia cinética do elemento finito de viga, a massa específica do material, a área de seção transversal e a primeira derivada com relação ao tempo. A matriz de massa do elemento finito de viga  $[M_e]$ , como será vista no modelo matemático veículo-irregularidade-ponte, pode ser obtida utilizando-se as funções de forma da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 m_{ij} &= \int_0^L \rho A \psi_i \psi_j dx = \int_0^L \rho A H_i H_j dx \\
 [M_e] &= \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Os esforços externos aplicados ao longo do tempo,  $q(x, t)$ , no elemento finito de viga podem ser escritos da seguinte forma:

$$\{F_{e_i}(t)\} = \int_0^L q(x, t) H_i dx \tag{3.78}$$

Tem-se a seguinte distribuição nodal dos esforços em função do carregamento distribuído  $q(x, t)$ :

$$\{F_e(t)\}^T = \left\{ \frac{q(x,t)L}{2} \quad \frac{q(x,t)L^2}{12} \quad \frac{q(x,t)L}{2} \quad -\frac{q(x,t)L^2}{12} \right\} \tag{3.79}$$

O princípio de *Hamilton* (CLOUGH; PENZIEN, 1993), também conhecido equivocadamente como princípio do menor esforço, de mínima ação, quando na verdade a ação apenas precisa ser estacionária e não necessariamente um valor mínimo, estabelece que a variação da energia cinética e potencial mais a variação do trabalho produzido pelas forças não conservativas durante o intervalo de tempo definido entre  $t_1$  e  $t_2$  é nula (ABECHE, 2015), ou seja:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta [T(t) - V(t)] dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}(t) dt = 0 \tag{3.80}$$

em que  $W_{nc}$  representa o trabalho virtual produzido pelas forças não conservativas atuantes no sistema, como as forças externas arbitrarias e o amortecimento, e  $\delta$  refere-se à variação durante o intervalo de tempo definido.

A Equação lagrangeana de movimento advém diretamente do princípio de *Hamilton* (CLOUGH; PENZIEN, 1993) e são matematicamente equivalentes. Como as Equações de *Hamilton* podem ser derivadas das Equações de *Lagrange* e as estas, por sua vez, podem ser derivadas a partir das leis de *Newton*, as quais são equivalentes e resumem a mecânica clássica, pode-se observar que a mecânica clássica é fundamentalmente governada por um princípio de variação (ZATZKIS, 1960; DVORAK; FREISTETTER, 2005). Assim, obtém-se a Equação lagrangeana de movimento da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
T &= T(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N) \\
V &= V(q_1, q_2, \dots, q_N) \\
\delta W_{nc} &= Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N \\
\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \partial \dot{q}_i dt &= \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \partial q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \partial q_i dt \\
\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i \right\} dt &= 0 \\
Q_i &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

em que  $Q_i$  são as funções de forças não conservativas incluindo o amortecimento e as forças externas arbitrárias aplicadas nas coordenadas generalizadas  $q_i$ .

Reescrevendo a equação lagrangeana de movimento, permutando-se apropriadamente as coordenadas generalizadas pelos graus de liberdade e as forças conservativas pelos esforços nodais, tem-se (BEGHETTO, 2011):

$$\{F_e(t)\} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \{\dot{v}_e\}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \{v_e\}} + \frac{\partial V}{\partial \{v_e\}} \tag{3.82}$$

Substituindo-se a energia cinética  $T$  obtida da Equação (3.76), a energia potencial de deformação  $V$  obtida da Equação (3.58) e os esforços externos nodais  $F_{e_i}(t)$  na Equação lagrangeana de movimento, (3.82), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
F_{e_i}(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{v}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial v_i} + \frac{\partial V}{\partial v_i} \\
F_{e_i}(t) &= \sum_{j=1}^4 m_{ij} \ddot{v}_j - 0 + \sum_{j=1}^4 K_{ij} v_j
\end{aligned} \tag{3.83}$$

em que:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 m_{ij} \dot{v}_i \dot{v}_j \\
V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 K_{ij} v_i v_j
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Reescrevendo na forma matricial, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\{F_e(t)\} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \{\dot{v}_e\}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \{v_e\}} + \frac{\partial V}{\partial \{v_e\}} \\
\{F_e(t)\} &= [M_e] \{\ddot{v}_e\} + [K_e] \{v_e\}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

em que:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \{\dot{v}_e\}^T [M_e] \{\dot{v}_e\} \\ V &= \frac{1}{2} \{v_e\}^T [K_e] \{v_e\} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Na Equação de movimento anterior, a primeira parcela representa as forças inerciais, e a segunda parcela, as forças elásticas.

Os vetores de aceleração e de deslocamento elementares são dados respectivamente através da seguinte relação (BEGHETTO, 2006):

$$\{\ddot{v}_e\}^T = \left\{ \ddot{v}_1 \quad \ddot{v}_2 \quad \ddot{v}_3 \quad \ddot{v}_4 \right\} \quad \mathbf{e} \quad \{v_e\}^T = \left\{ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \right\} \quad (3.87)$$

Subdividindo a viga em  $n$  elementos, respeitando a conectividade dos elementos e as condições de contorno, a montagem das matrizes e vetores globais é feita em função das matrizes e vetores locais da seguinte forma (BEGHETTO, 2011):

$$\begin{aligned} [M_B] &= \sum_{e=1}^n [M_e] \\ [K_B] &= \sum_{e=1}^n [K_e] \\ \{F_B(t)\} &= \sum_{e=1}^n \{F_e(t)\} \\ \{u_B\} &= \sum_{e=1}^n \{v_e\} \\ \{\ddot{u}_B\} &= \sum_{e=1}^n \{\ddot{v}_e\} \end{aligned} \quad (3.88)$$

em que  $[M_B]$  e  $[K_B]$  representam as matrizes de massa e de rigidez da viga, respectivamente,  $\{F_B(t)\}$  representa o vetor de forças aplicadas à viga,  $\{u_B\}$  representa o vetor de deslocamentos da viga e  $\{\ddot{u}_B\}$  representa o vetor de acelerações da viga.

Pode-se escrever, portanto, a Equação de movimento da viga da ponte íntegra na forma matricial:

$$[M_B] \{\ddot{u}_B\} + [K_B] \{u_B\} = \{F_B(t)\} \quad (3.89)$$

Para incluir o amortecimento no sistema dinâmico linear, emprega-se o método de *Rayleigh* (CHOPRA, 1995). Desta maneira a matriz de amortecimento do sistema é obtida através de uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez da seguinte maneira:

$$[C_B] = \alpha_B [M_B] + \beta_B [K_B] \quad (3.90)$$

onde os coeficientes  $\alpha_B$  e  $\beta_B$  podem ser calculados da seguinte forma:

$$\alpha_B = \frac{2\zeta_B \omega_{nb1} \omega_{nb2}}{\omega_{nb1} + \omega_{nb2}} \quad \mathbf{e} \quad \beta_B = \frac{2\zeta_B}{\omega_{nb1} + \omega_{nb2}} \quad (3.91)$$

onde  $\omega_{nb1}$  e  $\omega_{nb2}$  representam, respectivamente, a primeira e a segunda frequências naturais de vibração. O coeficiente  $\zeta_B$  representa a razão de amortecimento da estrutura que é estimada em função do tipo da estrutura (CHOPRA, 1995).

Para efeitos de comparação entre a aproximação numérica e a solução analítica, o cálculo das frequências naturais para vigas biapoiadas e seus respectivos modos naturais de vibração podem ser obtidos analiticamente segundo Chopra (1995), pelas relações:

$$\begin{aligned}\omega_{nbn} &= \frac{n^2 \pi^2}{L_b^2} \sqrt{\frac{EI}{m_u}}, \\ \phi_n(x) &= \sin \frac{n\pi x}{L_b}, \\ n &= 1, 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (3.92)$$

em que  $\omega_{nbn}$  representa as frequências naturais de vibração,  $\phi_n(x)$  representa os modos naturais de vibração e  $m_u$  representa a massa unitária da viga.

Tanto nas análises dinâmicas lineares como nas análises dinâmicas não lineares, apresentadas nos Capítulos seguintes deste trabalho, as frequências naturais de vibração da estrutura de ponte são obtidas da relação modal entre a matriz de rigidez e a matriz de massa, da seguinte forma:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Psi\} = 0 \quad (3.93)$$

em que os autovalores  $\omega$  são as frequências naturais da estrutura e os autovetores  $\Psi$  são seus respectivos modos de vibrar.

Incluindo o amortecimento no sistema dinâmico linear, pode-se escrever a equação matricial de movimento do sistema, apresentado na Equação (3.89) para a viga de ponte íntegra, da seguinte maneira:

$$[M_B]\{\ddot{u}_B\} + [C_B]\{\dot{u}_B\} + [K_B]\{u_B\} = \{F_B(t)\} \quad (3.94)$$

em que  $[C_B]$  e  $\{\dot{u}_B\}$  representam a matriz de amortecimento e o vetor de velocidades do sistema, respectivamente, o qual é definido pela conectividade dos elementos e condições contorno da seguinte forma:

$$\{\dot{u}_B\} = \sum_{e=1}^n \{\dot{v}_e\} \quad (3.95)$$

sendo  $\{\dot{v}_e\}$  o vetor de velocidade elementar definido por:

$$\{\dot{v}_e\}^T = \left\{ \dot{v}_1 \quad \dot{v}_2 \quad \dot{v}_3 \quad \dot{v}_4 \right\} \quad (3.96)$$

Num sistema dinâmico linear, representado pela Equação (3.94), considera-se a contribuição da massa e do amortecimento no problema e não somente a parcela da rigidez, como na análise estática. Entretanto, numericamente, a resposta dinâmica linear pode ser sistematizada de forma muito similar à resposta estática linear, representada pela Equação (3.75), ao considerar uma matriz de rigidez efetiva,  $[K_{EF}]$ , com contribuições das parcelas da matriz de massa e da matriz de amortecimento, bem como um vetor de forças externas efetivas,  $\{F_{EF}\}$ , com contribuições das mesmas matrizes de massa e de amortecimento multiplicadas pelos respectivos vetores das respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração relativas aos parâmetros do método (ABECHE, 2015). Tal consideração é feita no Método de *Newmark* (1959).

Assim, a solução do problema é um conjunto de soluções similares ao da Equação (3.75) em cada passo de tempo, obtendo, deste modo, as respostas dinâmicas lineares de deslocamento, velocidade e aceleração no tempo  $t + \Delta t$ , as quais são utilizadas no vetor de forças efetivas do próximo passo de tempo para obtenção destas respostas dinâmicas. Isso ocorre até a conclusão da análise dinâmica em seu passo de tempo final  $t_f$ .

### 3.5 MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

Dentre muitas vertentes, há três principais campos para tratar os fenômenos físicos em concretos: Mecânica do Contínuo, Mecânica da Fratura e Mecânica do Dano. Embora possua grande complexidade, a Mecânica do Contínuo é válida enquanto o meio for, de fato, contínuo, com propriedades constantes do material. Quando inicia-se um processo de não linearidade geométrica ou física, como o processo de fissuração do concreto e descontinuidades, a Mecânica do Contínuo não é mais capaz de tratar destes fenômenos, sendo necessário utilizar-se ou da Mecânica da Fratura ou da Mecânica do Dano.

O entendimento da diferença entre essas duas ciências é fundamental para o enfoque do fenômeno físico que se deseja analisar. Segundo Lemaitre e Chaboche (1985), enquanto a Mecânica da Fratura lida com as condições de propagação de uma fissura macroscópica, específica, imersa num meio contínuo íntegro, a Mecânica do Dano se ocupa do efeito, sobre a resposta do material, de um processo de microfissuração distribuída que se desenvolve numa etapa preliminar à formação da fissura discreta.

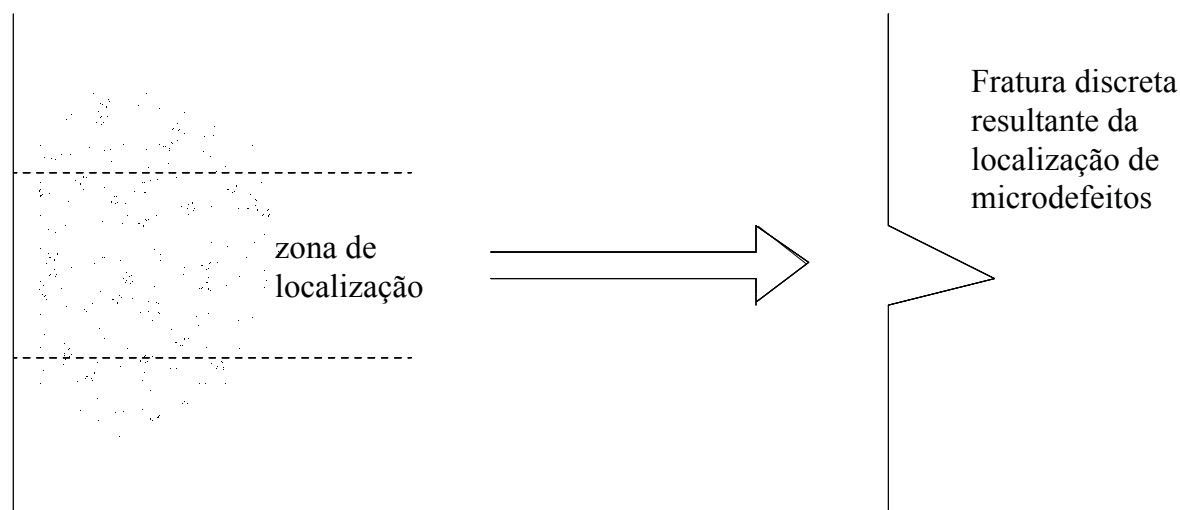
A teoria permite descrever localmente, observando-se um ‘volume representativo’ do material em torno do ponto considerado, a evolução dos fenômenos que se desenvolvem entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, caracterizado pela formação de uma fissura macroscópica que equivale à ruptura do elemento de volume (PROENÇA, 2000a).

Segundo Janson e Hult (1977), a diferença entre a Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura é, em síntese, que:

- na Mecânica do Dano a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um campo de defeitos (microfissuras ou poros) considerado continuamente distribuído; e
- na Mecânica da Fratura a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um único defeito, como uma fissura pontiaguda pré-definida, num meio mecanicamente intacto.

A Figura 7 apresenta o processo de transição entre o dano e a fratura.

FIGURA 7 – Processo de transição entre dano e fratura



FONTE: Driemeier, 1995.

As seguintes Subseções trazem uma revisão da fundamentação teórica da Mecânica do Dano baseando-se, principalmente, nos trabalhos de Proença (2000b, 2000c, 2000a), para introduzir os conceitos que explicam esta ciência.

### 3.5.1 Fundamentos da termodinâmica dos sólidos

A fundamentação, aqui apresentada, se dá no intuito de explicar o formalismo termodinâmico da Mecânica do Dano, na Seção 3.5.1.4, o qual justifica os modelos computacionais dinâmicos não lineares, através da Mecânica do Dano e da teoria da plasticidade, utilizados no presente trabalho.

Um axioma fundamental da termodinâmica dos sólidos é que o sistema possui energia interna, referenciada por unidade de massa. Uma grandeza física, mensurável direta ou indiretamente, necessária para determinar a energia interna do sistema,

em qualquer instante, é denominada variável de estado. Postula-se que um número finito de variáveis de estado seja suficiente para a determinação unívoca da energia interna. De maneira geral a escolha sobre o número de variáveis é arbitrária, até certo ponto, estando dependente dos fenômenos que se pretendem levar em conta em cada problema (COLEMAN; GURTIN, 1967).

### 3.5.1.1 Primeira lei da termodinâmica

A primeira lei da termodinâmica diz respeito ao balanço energético, à conservação de energia do sistema, entre a potência mecânica e a taxa de calor inserida no sistema com sua taxa de variação de energia total. Um sistema que sofre um processo termo-mecânico tem sua energia total variável em função do trabalho mecânico realizado e da transferência de calor (LUBLINER, 1972).

A taxa de trabalho mecânico ou potência das cargas externas mais a taxa de calor introduzida no sistema é igual à taxa de energia cinética mais a taxa de variação da energia interna. Assim, a taxa de energia total do sistema,  $\dot{E}_T$ , é definida por (PROENÇA, 2000b):

$$\begin{aligned}\dot{E}_T &= P_{ext} + Q_e = \dot{E}_c + \dot{U}, \\ P_{ext} &= \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\partial\Omega} t \cdot v d\partial\Omega, \\ Q_e &= - \int_{\partial\Omega} q \cdot n d\partial\Omega + \int_{\Omega} \rho r d\Omega, \\ \dot{E}_c &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} \rho v \cdot v \right] d\Omega, \\ \dot{U} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho u d\Omega\end{aligned}\tag{3.97}$$

sendo  $P_{ext}$  a potência mecânica externa inserida em certa quantidade de massa que ocupa, em certo instante, o volume  $\Omega$  delimitado pela superfície  $\partial\Omega$ ,  $f$  a força por unidade de volume definida por  $f = \rho b$ ,  $\rho$  a densidade de massa,  $b$  a força por unidade de massa,  $t$  forças distribuídas por unidade de superfície,  $v$  o vetor velocidade do ponto material,  $Q_e$  a taxa de calor introduzida no sistema,  $q$  é o vetor de fluxo de calor,  $n$  é o versor que em cada ponto do contorno aponta para o exterior do corpo,  $r$  uma fonte de calor distribuída por unidade de massa,  $\dot{E}_c$  a taxa de energia cinética,  $\dot{U}$  a taxa de energia interna e  $u$  a densidade de energia interna por unidade de massa.

A forma local da primeira lei da termodinâmica é definida por (LUBLINER, 1972):

$$\rho \dot{u} = T \cdot \dot{\varepsilon} - \text{div } q + \rho r\tag{3.98}$$

em que  $\dot{u}$  é a taxa de variação da densidade de energia interna por unidade de massa,  $T$  é o tensor de tensões,  $\dot{\epsilon}$  é a taxa de deformação para o caso de pequenas deformações.

A primeira lei permite a interconvertibilidade das diferentes formas de energia, desde que haja um balanço entre elas, sem qualquer restrição sobre o sentido em que a conversão possa se dar. Nos processos reversíveis esse fato realmente não tem importância. Entretanto nos processos irreversíveis, ou dissipativos, a ausência de restrição é relevante (PROENÇA, 2000b).

### 3.5.1.2 Segunda lei da termodinâmica

A segunda lei da termodinâmica trata do conceito de entropia do sistema pela imposição de variação não negativa para esta, quando ocorre um certo processo. Acaba-se por restringir as possibilidades de conversão se o processo em questão é do tipo dissipativo (LUBLINER, 1972).

Nos processos reversíveis a variação de entropia tem correspondência com a quantidade de calor transferida. A entropia relaciona-se com o grau de desordem assumido pelo sistema em função da quantidade de calor para ele transferida (PROENÇA, 2000b).

Admite-se que o volume  $\Omega$  ocupado pelo sistema em cada instante  $t$  possa ser associado a um número  $S$  chamado entropia de  $\Omega$ , definido por:

$$S = \int_{\Omega} \rho s d\Omega \quad (3.99)$$

em que  $s = s(x, t)$  é a entropia específica por unidade de massa da partícula que ocupa, na configuração atual do corpo, a posição  $x$ .

A segunda lei impõe que em processos quaisquer de transformação, os quais incluem os processos irreversíveis, a variação total de entropia de um sistema deve ser igual ou superior à variação provocada pela transferência de calor. A igualdade vale para processos reversíveis e a desigualdade para processos irreversíveis. Para o último caso, diz-se que existe produção interna de entropia (COLEMAN; GURTIN, 1967). Em sua forma geral, a lei é definida por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} S \rho d\Omega \geq \int_{\Omega} \frac{r}{\theta} \rho d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{q}{\theta} \cdot n d\partial\Omega \quad (3.100)$$

em que  $\theta$  é a temperatura absoluta definida como um campo escalar de valores positivos em cada ponto do domínio  $\Omega$  em consideração. O segundo membro da Inequação (3.100) é a taxa ou fluxo de entropia correspondente à transferência externa de calor.

A imposição da segunda lei implica em que, ao contrário dos processos reversíveis, nos processos irreversíveis a energia interna não fica totalmente armazenada no

sistema, mas parte dela acaba por ser empregada na evolução dos fenômenos internos que geram maior desordem no sistema. Isso tem suma importância no formalismo termodinâmico da Mecânica do Dano. Em praxe, faz-se referência a essa parte da energia interna como energia dissipada (PROENÇA, 2000b).

Analogamente à Equação (3.98), como a desigualdade da Inequação (3.100) deve ser válida para qualquer volume  $\Omega$  do corpo, tem-se a seguinte forma local:

$$\rho\dot{S} - \frac{\rho r}{\theta} + \text{div} \left( \frac{q}{\theta} \right) \geq 0 \quad (3.101)$$

### 3.5.1.3 Desigualdade de *Clausius-Duhem* e taxa de energia interna

É possível combinar a primeira lei, Equação (3.98), e a segunda lei, Inequação (3.101), da termodinâmica através da análise tensorial para que um processo seja termodinamicamente admissível por meio de uma desigualdade. Assim, obtém-se:

$$\rho\dot{S} + \frac{1}{\theta}(T.\dot{\varepsilon} + \rho r - \rho\dot{u}) - \frac{1}{\theta^2} \text{grad}\theta.q - \rho \frac{r}{\theta} \geq 0 \quad (3.102)$$

Assim, determina-se a desigualdade de *Clausius-Duhem* multiplicando a Inequação acima por  $\theta$ :

$$\rho\theta\dot{S} + T.\dot{\varepsilon} - \rho\dot{u} - \frac{1}{\theta} \text{grad}\theta.q \geq 0 \quad (3.103)$$

A desigualdade apresentada na Inequação acima deve ser válida para qualquer processo, em particular para os reversíveis (LUBLINER, 1972).

Processos irreversíveis consomem uma parcela positiva da variação total de energia interna. Esta possui uma parcela reversível, a qual fica armazenada no corpo, e outra parcela irreversível ou disponibilizada para a evolução dos processos internos que geram aumento da entropia, denominada dissipada (PROENÇA, 2000b). Assim, tem-se:

$$\dot{u} = \dot{u}_{Arm} + \dot{u}_{Dis} \quad (3.104)$$

em que  $\dot{u}_{Arm}$  é a taxa de variação da densidade de energia interna armazenada por unidade de massa e  $\dot{u}_{Dis}$  é a taxa de variação da densidade de energia dissipada por unidade de massa.

Considerando um processo puramente mecânico na primeira lei da termodinâmica, Equação (3.98), tem-se:

$$\rho\dot{u}_{Arm} + \rho\dot{u}_{Dis} = \dot{U}_{Arm} + \dot{U}_{Dis} = T.\dot{\varepsilon} \quad (3.105)$$

em que  $\dot{U}_{Arm}$  é a taxa de variação de energia armazenada e  $\dot{U}_{Dis}$  é a taxa de variação de energia dissipada.

Considerando que a taxa de variação da energia dissipada, irreversível, seja sempre positiva, a taxa de energia armazenada, parcialmente reversível em processos puramente mecânicos, é sempre menor que a potência das tensões, sendo igual, somente, em um processo totalmente reversível (COLEMAN; GURTIN, 1967; LUBLINER, 1972; LUBLINER, 1990; PROENÇA, 2000b). Assim, considerando a desigualdade de *Clausius-Duhem* em um processo puramente mecânico, tem-se:

$$\dot{U}_{Arm} \leq T \cdot \dot{\epsilon} \quad (3.106)$$

#### 3.5.1.4 Formalismo termodinâmico da Mecânica do Dano

A Mecânica do Dano fundamenta-se nos princípios gerais da termodinâmica e constitui-se numa teoria constitutiva para sólidos com defeitos em sua microestrutura. Em análise estrutural, por sua vez, modelos constitutivos para meios contínuos que considerem efeitos de danificação e de plasticidade podem ser formulados ao introduzir uma ou mais variáveis internas, cujas leis de evolução refletem as mudanças microestruturais. Deste modo, o meio contínuo equivalente pode apresentar reduções progressivas de resistência e rigidez, além de deformações permanentes (PROENÇA, 2000c).

O formalismo termodinâmico da Mecânica do Dano fundamenta-se nas seguintes hipóteses (LEMAITRE; MARQUIS, 1990; LEMAITRE, 1992):

- os processos irreversíveis, levados em conta por um número finito de variáveis internas, ocorrem numa velocidade suficientemente baixa, de modo que podem ser aproximados por uma sequência de estados de equilíbrio aos quais correspondem valores instantâneos das variáveis representativas; e
- o estado em que se encontra o meio e a resposta que possa apresentar perante um certo processo pelo qual venha a ser submetido, dependem exclusivamente dos valores atuais das variáveis independentes que o caracterizam, denominadas variáveis de estado.

As variáveis de estado são grandezas independentes que podem ser mensuráveis diretamente, como a deformação e a temperatura, ou mensuráveis indiretamente, neste caso recebendo o nome de variáveis internas (COLEMAN; GURTIN, 1967).

As variáveis internas a serem escolhidas devem se identificar com mecanismos dissipativos dominantes e seus valores atuais devem conter registros do histórico dos

correspondentes mecanismos. Matematicamente elas poderão ter ordens variadas, como grandezas escalares, vetoriais ou tensoriais de ordem superior, mas cada uma delas deve se identificar de modo claro com as mudanças na microestrutura que representam. A partir dessa cautela se espera que o modelo constitutivo gerado possa ser representativo da resposta observada do material (PROENÇA, 2000c).

Por tratar-se de processos puramente mecânicos, o que torna o sistema adiabático, ou seja, sem trocas de calor com o meio externo por condução, convecção ou por irradiação, algumas simplificações são consideradas no formalismo desta Seção.

A mudança na energia interna armazenada no sistema é igual ao incremento do trabalho das forças externas descontadas a soma das variações de energia cinética associada ao movimento e a energia dissipada nos processos que levam ao rearranjo irreversível da estrutura interna em um processo geral de evolução da danificação e de plastificação (LEMAITRE; MARQUIS, 1990). Essa consideração, na realidade, é a aplicação da primeira lei da termodinâmica Equação (3.97), que pode ser representada em termos de taxas da seguinte forma:

$$\dot{U}_{Arm} = P_{ext} - \dot{E}_c - \dot{U}_{Dis} \quad (3.107)$$

Admite-se que a taxa de energia armazenada,  $\dot{U}_{Arm}$ , seja recuperável em parte enquanto outra parcela permanece armazenada no sistema. Também pode-se admitir que a parte recuperável seja função de uma variável de estado reversível, como a deformação elástica. Deste modo, a parcela de energia interna armazenada é considerada uma função da deformação elástica e de variáveis internas associadas. Um exemplo é o caso de metais que sofrem encruamento, em que a energia armazenada é função da deformação elástica,  $\varepsilon^e$ , e das variáveis de estado internas,  $V_k$ , ou seja (PROENÇA, 2000c):

$$U_{Arm} = U_{Arm}(\varepsilon^e, V_k) \quad (3.108)$$

em que a energia correspondente ao acúmulo de discordâncias permanece armazenada e somente pode ser recuperada por um processo térmico adicional (LUBLINER, 1972; LUBLINER, 1990; LEMAITRE; MARQUIS, 1990; LEMAITRE, 1992). Assim, em termos de taxas, tem-se:

$$\dot{U}_{Arm} = \underbrace{\frac{\partial U_{Arm}}{\partial \varepsilon^e} \cdot \dot{\varepsilon}^e}_{\text{recuperável}} + \underbrace{\frac{\partial U_{Arm}}{\partial V_k} \cdot \dot{V}_k}_{\text{irrecuperável}} \quad (3.109)$$

sendo  $\dot{\varepsilon}^e$  a taxa de deformação elástica para o caso de pequenas deformações e  $\dot{V}_k$  a taxa de variação das variáveis de estado internas.

Aplicando a Equação acima na Inequação (3.106), tem-se:

$$T \cdot \dot{\varepsilon} - \underbrace{\frac{\partial U_{Arm}}{\partial \varepsilon^e} \cdot \dot{\varepsilon}^e}_{\text{recuperável}} - \underbrace{\frac{\partial U_{Arm}}{\partial V_k} \cdot \dot{V}_k}_{\text{irrecuperável}} \geq 0 \quad (3.110)$$

Na Inequação anterior, se o termo da esquerda for igual a zero, significa que não há energia dissipada, ou seja, trata-se de um processo totalmente reversível. Se for maior que zero, em contrapartida, terá energia dissipada. Entende-se, portanto, que a energia dissipada é irreversível. Já as parcelas recuperável e irrecuperável da energia armazenada são reversíveis. No entanto, a parcela irrecuperável da energia armazenada só pode ser reversível através de um processo térmico adicional.

O formalismo utilizado pela Mecânica do Dano apresenta três aspectos fundamentais: a escolha das variáveis internas, a forma a ser adotada para a função densidade de energia interna e as equações que exprimem as leis de evolução das variáveis internas (LEMAITRE; CHABOCHE, 1985; LEMAITRE, 1992; LEMAITRE; DESMORAT, 2005).

Ao atender os três aspectos fundamentais, pode-se formular modelos constitutivos fenomenológicos, termodinamicamente consistentes e que refletem, através do conjunto de variáveis internas, os principais fenômenos físicos observados na microestrutura (PROENÇA, 2000c).

Observa-se que a energia dissipada intrinsecamente à evolução de processos irreversíveis é dada pela diferença entre a energia associada ao processo de deformação, ou potência das tensões, e a energia interna armazenada, parcela que teoricamente poderia ser transformada em trabalho mas que se divide em parcela recuperável e parcela irrecuperável. A parcela irrecuperável da energia armazenada não pode ser extraída por um procedimento simples de descarregamento mecânico, de maneira oposta à parcela recuperável, necessitando de um processo térmico adicional. Se forem considerados somente processos puramente mecânicos, a parcela irrecuperável permanece retida no volume (LEMAITRE; CHABOCHE, 1985; LEMAITRE; DESMORAT, 2005; PROENÇA, 2000c).

### 3.5.1.5 Meios elásticos com danificação

Para materiais com dano em que se preserva a resposta elástica, toda a deformação pode ser recuperada no descarregamento, ou seja,  $\varepsilon = \varepsilon^e$ . Entretanto, o dano afeta diretamente o módulo de *Young*. Deste modo, a energia interna passa a ser determinada por duas variáveis de estado:  $\varepsilon$  e  $D$ , sendo a última uma variável interna.

Assim,  $U = U(\varepsilon, D)$ . Consequentemente, tem-se (MAZARS, 1984; LEMAITRE, 1992):

$$\dot{U} = \left. \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right|_{D=\text{fixo}} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial U}{\partial D} \dot{D} = \dot{U}_{Arm} + \dot{U}_{Dis} \quad (3.111)$$

onde considera-se a variável interna de dano de forma escalar. Observa-se, também, as parcelas de energia armazenada e dissipada.

Em modelos uniaxiais, a energia pode ser definida da seguinte forma (LEMAITRE, 1992):

$$U = \frac{1}{2}(1 - D)E\varepsilon^2 \quad (3.112)$$

Utilizando a Equação (3.111) na Equação acima, obtêm-se:

$$\dot{U}_{Arm} = (1 - D)E\varepsilon \dot{\varepsilon} \quad (3.113)$$

e

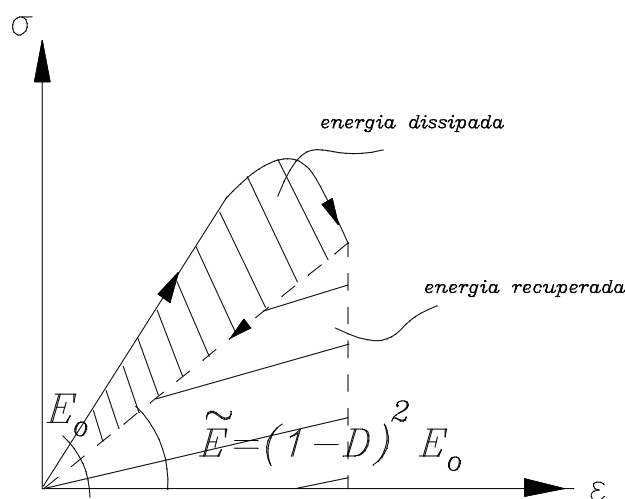
$$\dot{U}_{Dis} = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \dot{D} = Y\dot{D} \geq 0 \quad (3.114)$$

concluindo-se, por fim, que  $Y = -\frac{1}{2}E\varepsilon^2$  é a variável associada à variável de dano (LEMAITRE, 1992).

Portanto, a energia de dissipação fica diretamente representada. No entanto, ela sempre pode ser caracterizada pela diferença entre a taxa da parcela de energia recuperável e a potência das tensões (PROENÇA, 2000c).

A Figura 8 apresenta as parcelas de energia interna armazenada e dissipada para uma resposta elástica com dano, como o caso do modelo de dano de *Mazars*, o qual é adaptado para análises dinâmicas não lineares neste trabalho.

FIGURA 8 – Relação constitutiva da resposta elástica com dano pelo formalismo termodinâmico da Mecânica do Dano

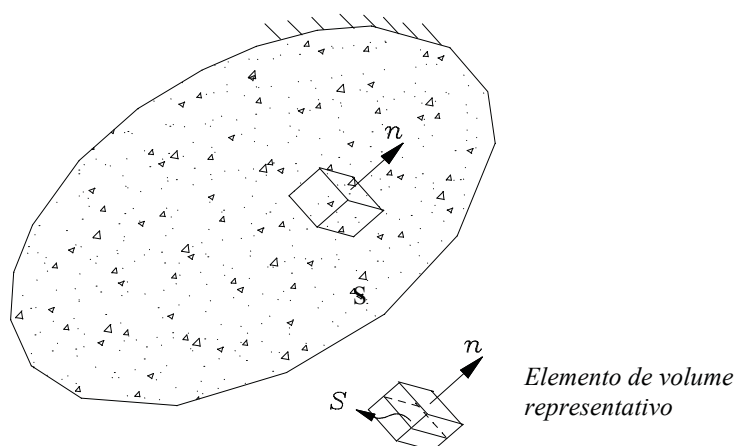


FONTE: Proença, 2000c.

### 3.5.2 Elemento de volume representativo

Considere-se um sólido danificado. Deste meio, isola-se um elemento de volume representativo, o qual deve possuir dimensões suficientemente grandes de modo a admitir-se a homogeneidade da distribuição dos defeitos nele contidos, mas ao mesmo tempo suficientemente pequenas para que se evitem variações elevadas de grandezas locais de interesse. A Figura 9 ilustra o elemento de volume representativo cuja normal é o versor  $\vec{n}$ .

FIGURA 9 – Elemento de volume representativo de um sólido com dano



FONTE: Proença, 2000a.

Assume-se, desta forma, a continuidade das funções representativas dos fenômenos que ocorrem no elemento. As propriedades nele medidas são valores médios que podem ser associados a um ponto material.

### 3.5.3 Tensão efetiva

Ocorrendo um esforço na direção de uma das faces do volume representativo, cuja normal seja definida por  $\vec{n}$ , e considerando-se que a distribuição de defeitos seja homogênea, a deterioração pode ser definida por (KACHANOV, 1958; RABOTNOV, 1969; LEMAITRE; CHABOCHE, 1985):

$$D_{\vec{n}} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S_D}{S} \quad (3.115)$$

em que  $D_{\vec{n}}$  representa a medida de dano do volume e  $S$  a área da seção transversal do elemento de volume representativo em questão. Como esta área apresenta micro-defeitos e microfissuras,  $S_D$  representa a parcela da área com danificação e, portanto, não resiste às solicitações internas.

Tem-se, portanto que:

$$D_{\bar{n}} = \frac{S - \tilde{S}}{S} \quad (3.116)$$

em que  $\tilde{S}$  é a área efetivamente resistente. Desta forma,  $D_{\bar{n}}$  pode assumir valores no intervalo de  $0 \leq D_{\bar{n}} \leq 1$ , onde  $D_{\bar{n}} = 0$  representa o material íntegro e  $D_{\bar{n}} = 1$  indica um estado de total deterioração (ABECHE, 2015).

Se todos os defeitos são abertos de tal forma que não há microforças atuando na superfície das microfissuras ou microcavidades representadas pela área  $S_D$  é conveniente introduzir uma tensão efetiva relacionada com a superfície que resiste efetivamente à carga (RABOTNOV, 1969).

Pode-se definir que (BEER; JOHNSTON, 1995):

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (3.117)$$

onde  $\sigma$  representa a tensão nominal, e  $F$  a força solicitante.

Contudo, substituindo-se  $S$  por  $\tilde{S}$  na Equação (3.117), tem-se:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{\sigma}{1 - D_{\bar{n}}} \quad (3.118)$$

onde  $\tilde{\sigma}$  representa a tensão efetiva correspondente.

Tem-se, portanto, os casos particulares em que  $\tilde{\sigma} = \sigma$  para  $D_{\bar{n}} = 0$  e  $\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$  para  $D_{\bar{n}} = 1$ .

Esta definição de tensão efetiva, contudo, considera o material submetido a um estado de tração uniaxial. Na compressão, porém, pode ocorrer o fechamento das fissuras, e no caso de o dano se manter inalterado, a superfície que efetivamente resiste à carga é maior que  $\tilde{S}$ . Em particular, se todos os defeitos se fecharem, a tensão efetiva na compressão é igual a tensão usual. Assim, deve-se observar que o conceito de área efetiva pode variar tendo em conta as concentrações de microtensões e interações mútuas dos defeitos solicitados entre tensões normais e tensões cisalhantes (RABOTNOV, 1969).

Somente a micromecânica pode dar um significado preciso do conceito de área efetiva, ao considerar este conceito globalmente na mesoescala através da identificação da variável de dano por meio de seu acoplamento com a elasticidade ou com a plasticidade. No entanto, uma forma de evitar uma análise micromecânica para cada tipo de defeito e cada tipo de mecanismo de dano é postular um princípio na mesoescala (LEMAITRE, 1992).

Dentro de certos limites pode-se adotar a hipótese de homogeneidade do processo de danificação, o que simplifica o problema, uma vez que em todas as direções a medida da danificação será a mesma (BARROS, 2002), ou seja:

$$D_{\vec{n}} = D, \quad \forall \vec{n} \quad (3.119)$$

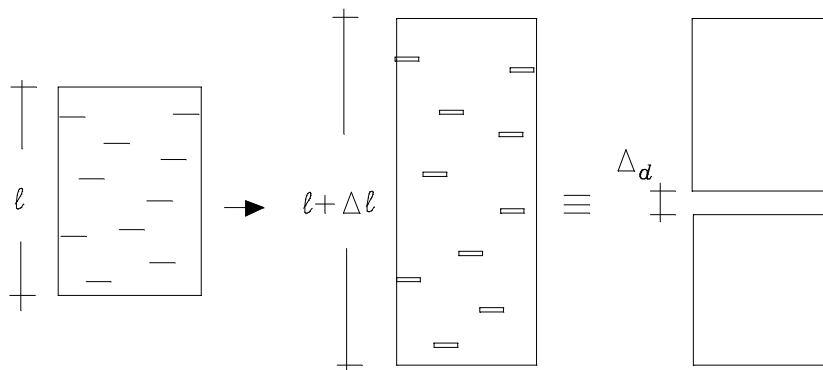
### 3.5.4 Deformação efetiva

O conceito dual de tensão efetiva é o de deformação efetiva em um mesmo elemento de volume representativo do material danificado (PROENÇA, 2000a). Definindo-se, portanto, a variação do comprimento inicial  $l_0$  como  $\Delta l$ , a deformação nominal é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3.120)$$

A abertura dos microdefeitos de um material com dano, definido por  $\Delta d$ , durante a deformação nominal, numa situação de alongamento, deve ser desconsiderada na deformação. Há diferença significativa entre o conceito de deformação e abertura de defeitos, no caso de fissuras. Por isso, somente a parcela  $\Delta l - \Delta d$  deve ser considerada durante o processo de deformação (PROENÇA, 2000a). A Figura 10 ilustra essa consideração física.

FIGURA 10 – Acréscimo de comprimento devido à abertura de defeitos



FONTE: Proença, 2000a.

Deste modo, define-se a deformação efetiva como sendo:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\Delta l - \Delta d}{l_0} \quad (3.121)$$

Assim, outra definição para a variável de dano ocorre da seguinte forma:

$$D_{\bar{n}}^* = \frac{\Delta d}{\Delta l} \quad (3.122)$$

Ao considerar a Equação (3.122), a relação entre a deformação efetiva e a deformação nominal é dada por:

$$\tilde{\varepsilon} = (1 - D_{\bar{n}}^*)\varepsilon \quad (3.123)$$

Ambas as definições para a variável escalar de dano, Equação (3.115) e Equação (3.122), podem ser unificadas ao considerar que o volume do elemento representativo do material com defeitos é o mesmo para ambos os casos. Essa consideração é factível para solicitações uniaxiais em um mesmo volume, pois ora pode-se almejar analisar o equilíbrio de tensões e ora a compatibilidade de deformações (PROENÇA, 2000a). Assim, o volume danificado pode ser considerado de duas formas:

$$V_d = S_0 \Delta l = S \Delta d \quad (3.124)$$

Considerando as Equações (3.115) e (3.122), tem-se, portanto:

$$D_{\bar{n}} = D_{\bar{n}}^* \quad (3.125)$$

### 3.5.5 Princípios gerais de equivalência de respostas constitutivas

Os princípios apresentados nesta Seção possibilitam a formulação de relações constitutivas em meios contínuos com dano através de medidas nominais de tensão e de deformação.

No âmbito dos meios contínuos, um axioma constitutivo fundamental é o da ação local, isto é: a resposta constitutiva num ponto não depende daquilo que ocorre nos elementos vizinhos. Estendendo-se esse axioma ao meio com dano, resulta que a relação constitutiva para um ponto na parte íntegra não é afetada pelo dano, porém nessa parte é importante lembrar que devem ser consideradas a tensão efetiva e a deformação efetiva (PROENÇA, 2000a).

Entretanto, quando ocorre o processo de danificação em certa região local do meio, as demais regiões passam a estar sob maiores solicitações, ou seja, há um processo de reequilíbrio de esforços que podem iniciar um novo processo de danificação local. Essa verificação do equilíbrio é realizada na modelagem computacional através de um processo iterativo.

Define-se o princípio geral da equivalência de respostas constitutivas pela lei constitutiva do material danificado através da lei constitutiva do material íntegro ao:

- substituir o tensor de tensões pelo tensor de tensões efetivas; e ao
- substituir o tensor linear de deformações pelo tensor de deformações efetivas.

Ao restringir a análise para o caso uniaxial em um meio íntegro supostamente elástico linear, o princípio geral define a seguinte relação (PROENÇA, 2000a):

$$\tilde{\sigma} = E\tilde{\varepsilon} \quad (3.126)$$

### 3.5.5.1 Princípio da equivalência de energia

Substituindo a Equação (3.126) nas definições de  $\tilde{\varepsilon}$  e  $\tilde{\sigma}$ , obtém-se para o meio contínuo equivalente:

$$\sigma = (1 - D)^2 E \varepsilon \quad (3.127)$$

Por outro lado, também é possível obter a seguinte relação:

$$\tilde{\sigma}\tilde{\varepsilon} = \sigma\varepsilon \quad (3.128)$$

o que garante que o meio contínuo equivalente produz a mesma quantidade de energia do meio danificado.

Através da Equação (3.127), define-se o módulo secante de rigidez elástica como sendo:

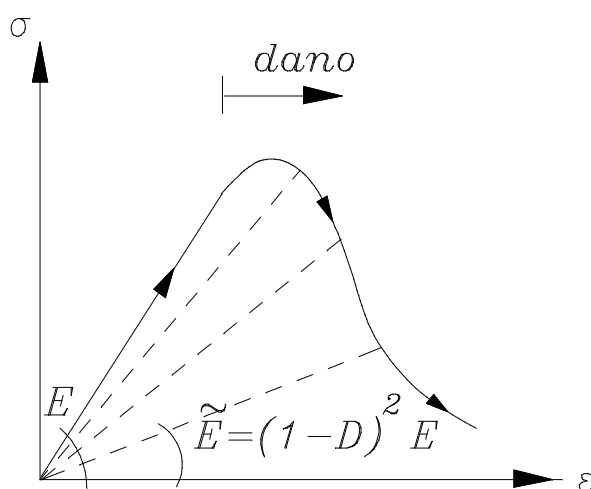
$$\tilde{E} = (1 - D)^2 E \quad (3.129)$$

Ao isolar a variável de dano na Equação anterior, tem-se:

$$D^2 = 1 - \left( \frac{\tilde{E}}{E} \right)^2 \quad (3.130)$$

Essa Equação permite identificar a variável de dano através de medidas experimentais do módulo secante de rigidez elástica em ensaios uniaxiais com deformação controlada (PROENÇA, 2000a), conforme apresentado na Figura 11.

FIGURA 11 – Variação da rigidez secante do meio contínuo equivalente



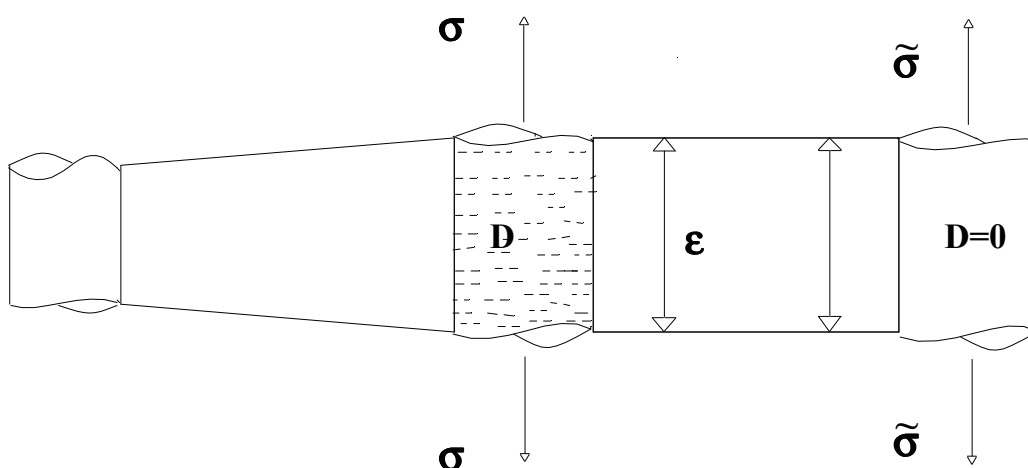
FONTE: Proença, 2000a.

### 3.5.5.2 Princípio da equivalência de deformação

O princípio de equivalência de deformação considera que a deformação do meio íntegro sujeita à ação da tensão efetiva é a mesma do meio danificado,  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ . Nesse sentido, o estado de deformação, unidimensional ou tridimensional, de um material danificado é obtido da lei de comportamento do material íntegro onde a tensão normal é substituída pela tensão efetiva (LEMAITRE; CHABOCHE, 1985).

A Figura 12 ilustra o princípio da equivalência de deformação na Mecânica do Dano.

FIGURA 12 – Princípio de equivalência de deformação



FONTE: Proença, 2000a.

Assim, o estado de deformação de um ponto em um meio danificado, considerando-se que este meio permaneça em regime elástico linear, pode ser obtido pela relação constitutiva do meio íntegro, onde se envolve a tensão efetiva. Deste modo a deforma-

ção elástica unidimensional de um meio com dano pode ser escrita como (LEMAITRE, 1992):

$$\varepsilon_e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \quad (3.131)$$

sendo  $\varepsilon_e$  a deformação elástica do material e  $E$  o módulo de elasticidade do material sem dano.

Analogamente, podemos descrever a Equação (3.131) como:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \quad (3.132)$$

em que  $\tilde{E}$  representa o módulo de *Young* para o material danificado. Obtém-se, portanto, no princípio de equivalência de deformações, a relação que evidencia a degradação das características mecânicas do material, dada por:

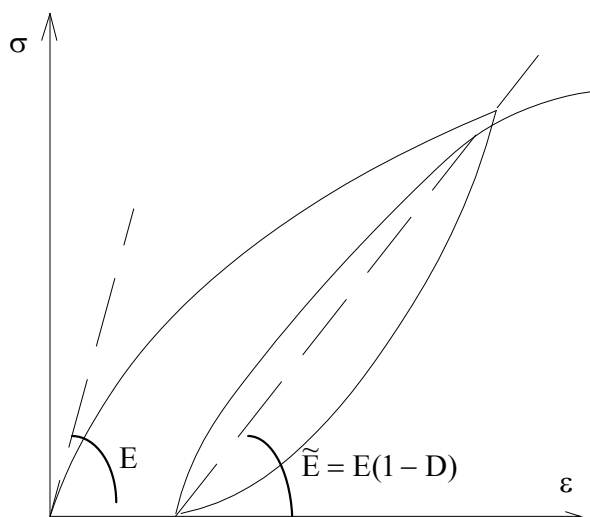
$$\tilde{E} = (1-D)E \quad (3.133)$$

A partir desta relação, pode-se isolar a variável de dano, particularizando a Equação (3.130) do princípio de equivalência de energia para o princípio de equivalência de deformação, de modo a obter:

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (3.134)$$

Esta relação permite determinar os valores de dano a partir de medidas dos valores do módulo de *Young* relativos a sucessivos carregamentos elásticos, conforme observado na Figura 13.

FIGURA 13 – Curva  $\sigma - \varepsilon$  do comportamento à compressão do concreto



FONTE: Pituba, 1998.

Uma variável de dano de natureza escalar age do mesmo modo sobre todos os componentes do tensor de tensões  $\bar{\sigma}$  ou  $\sigma_{ij}$ , num caso multiaxial, ou ainda sobre todos os componentes do tensor de relações constitutivas. Deste modo, o material inicialmente isótropo mantém a isotropia no processo de danificação. Em termos de comportamento real do material, a microfissura superficial, induzida pelo carregamento, possui uma determinada orientação, de modo que o dano é, em geral, do tipo anisótropo. Assim, o operador de dano é de natureza tensorial e a isotropia inicial do material se altera ao longo processo de danificação (PITUBA, 1998).

### 3.6 ESTÁTICA NÃO LINEAR DOS SISTEMAS

Num sistema de equações estático linear, os deslocamentos da estrutura dependem linearmente do carregamento aplicado, ou seja, é válida a lei de *Hooke* para o problema, conforme Equação abaixo (BATHE, 1996):

$$[K] \{u\} = \{F\} \quad (3.135)$$

em que  $[K]$  é a matriz que representa a rigidez do sistema, constante por ser linear,  $\{u\}$  é o vetor que representa os deslocamentos da estrutura e  $\{F\}$  representa o vetor que contém os carregamentos estáticos externos aplicados na estrutura.

Nas equações estáticas não lineares, por sua vez, as respostas de deslocamento passam a não mais depender linearmente do carregamento ou dos efeitos externos aplicados, conforme a Equação abaixo (BATHE, 1996):

$$[K(\{u\})] \{u\} = \{F\} \quad (3.136)$$

ou seja, a matriz de rigidez passa a depender dos deslocamentos.

#### 3.6.1 Métodos de solução de equações estáticas não lineares

A solução numérica da Equação (3.136) deve ser feita de maneira incremental e iterativa, considerando o histórico do carregamento e os consequentes históricos dos deslocamentos em cada passo de carga, através de algum método numérico iterativo de solução não linear. Usualmente emprega-se o Método de *Newton-Raphson* ou o Método de *Newton-Raphson* Modificado. Também pode-se utilizar alguma técnica de continuação, como o Método do Comprimento de Arco. Este é uma técnica de controle de força e iteração. Os métodos iterativos para solução de equações não lineares, como o Método de *Newton-Raphson*, podem ser associados a uma técnica de continuação para melhor obtenção da trajetória de equilíbrio. O problema de se utilizar o Método de *Newton-Raphson* com controle de força constante é sua divergência em pontos limites da trajetória uma vez que a matriz de rigidez tenda a singularizar.

O formalismo dos Métodos de *Newton-Raphson* não são detalhados neste Tópico porque serão abordados na Seção 3.7.1, métodos de solução de equações dinâmicas não lineares. Os métodos de solução da estática não linear são casos particulares dos métodos de solução da dinâmica não linear.

### 3.7 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

A fundamentação teórica necessária para obtenção da equação dinâmica não linear de movimento que rege o problema foi baseada nos trabalhos de dissertação de Machado (1983) e de Abeche (2015).

Embora um sistema dinâmico não linear evolua no tempo com um comportamento instável e aperiódico, tal comportamento é determinístico, pois seu estado futuro pode ser conhecido desde que se conheça seu estado atual. O estado futuro pode, contudo, ser radicalmente modificado a partir de pequenas mudanças no estado atual (LORENZ, 1963).

O algoritmo de *Newmark*, (1959) pode ser entendido como uma extensão do método da aceleração linear. Considera-se que a aceleração varie linearmente com o tempo. Desta forma, os deslocamentos e as velocidades podem ser expressos como (MACHADO, 1983):

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + [(1 - \gamma) \{\ddot{u}\}_t + \gamma \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (3.137)$$

e

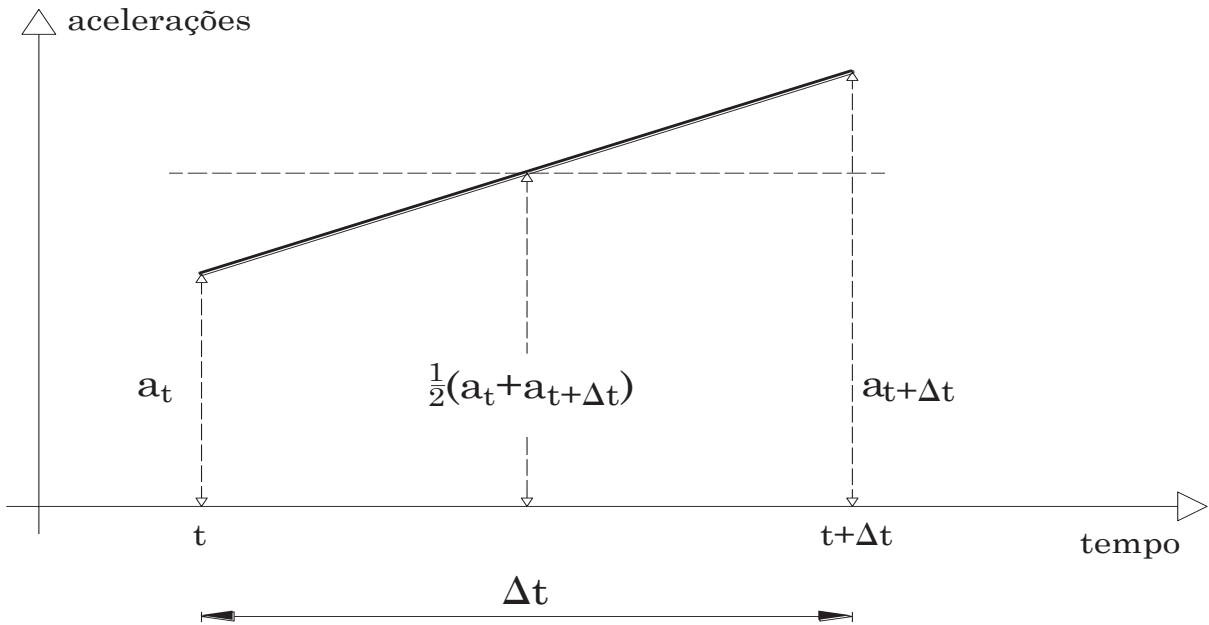
$$\{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\dot{u}\}_t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{u}\}_t + \beta \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (3.138)$$

em que  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros que podem ser determinados para obter precisão na integração numérica e estabilidade.

O Método de *Newmark* (1959) é incondicionalmente estável quando seus parâmetros obedecem aos critérios abaixo:

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 \quad (3.139)$$

Quando  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{6}$  as Equações anteriores correspondem ao método da aceleração linear. *Newmark*, (1959) inicialmente propôs como método incondicionalmente estável o método da aceleração constante média, cujos parâmetros são  $\gamma = \frac{1}{2}$  e  $\beta = \frac{1}{4}$ , também conhecido como regra trapezoidal, conforme a Figura 14.

FIGURA 14 – Método da aceleração constante de *Newmark*

FONTE: Abeche, 2015.

As soluções em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações das equações (3.137) e (3.138) são obtidas ao considerar as condições de equilíbrio no tempo  $t + \Delta t$ . Desta forma, o Método de *Newmark* é um método implícito de integração direta (MACHADO, 1983). Assim, a Equação de equilíbrio dinâmico através do Método de *Newmark* é dada por:

$$[M] \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} + [C] \{\dot{u}\}_{t+\Delta t} + [K] \{u\}_{t+\Delta t} = \{F^{ext}\}_{t+\Delta t} \quad (3.140)$$

Definem-se  $\{\tilde{u}\}_{t+\Delta t}$  e  $\{\tilde{u}\}_{t+\Delta t}$  como os valores preditores, ou das estimativas, das velocidades e dos deslocamentos, respectivamente, no tempo  $t$  em relação ao tempo  $t + \Delta t$  segundo Machado (1983) como sendo:

$$\{\tilde{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + (1 - \gamma) \{\ddot{u}\}_t \Delta t \quad (3.141)$$

$$\{\tilde{u}\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\dot{u}\}_t \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \{\ddot{u}\}_t \Delta t^2 \quad (3.142)$$

Desta forma, as Equações (3.137) e (3.138) podem ser expressas em função de seus valores preditores, conforme Equações (3.141) e (3.142), por:

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\tilde{u}\}_{t+\Delta t} + \gamma \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \Delta t \quad (3.143)$$

e

$$\{u\}_{t+\Delta t} = \{\tilde{u}\}_{t+\Delta t} + \beta \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \Delta t^2 \quad (3.144)$$

que, neste caso,  $\{\dot{u}\}_{t+\Delta t}$  e  $\{u\}_{t+\Delta t}$  passam a ser conhecidos, respectivamente, como valores corretores das velocidades e dos deslocamentos no tempo  $t + \Delta t$ , pois foram atualizado com os valores preditores do vetor das velocidades e do vetor dos deslocamentos.

O algoritmo de *Newmark* resolve o sistema da Equação (3.140) utilizando as Equações (3.143) e (3.144) satisfazendo as condições iniciais de velocidade e deslocamento do problema.

Ao isolar o vetor de aceleração no tempo  $t + \Delta t$  da Equação (3.144), obtém-se:

$$\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\{u\}_{t+\Delta t} - \{\tilde{u}\}_{t+\Delta t}) \quad (3.145)$$

Substituindo a Equação anterior na Equação (3.143), obtém-se:

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\tilde{\dot{u}}\}_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\{u\}_{t+\Delta t} - \{\tilde{u}\}_{t+\Delta t}) \quad (3.146)$$

Substituindo-se a Equação (3.142) em (3.145) e substituindo o resultado e a Equação (3.141), ambas em (3.146), obtém-se:

$$\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\{u\}_{t+\Delta t} - \{u\}_t - \{\dot{u}\}_t \Delta t - (\frac{1}{2} - \beta) \{\ddot{u}\}_t \Delta t^2) \quad (3.147)$$

e

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \{u\}_{t+\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \{u\}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \{\dot{u}\}_t + \{\ddot{u}\}_t \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \quad (3.148)$$

Aplicando-se as Equações (3.147) e (3.148) na Equação (3.140), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{[M]}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma [C]}{\beta \Delta t} + [K] \right) \{u\}_{t+\Delta t} = \{F^{ext}\}_{t+\Delta t} \\ & + \frac{[M]}{\beta \Delta t^2} (\{u\}_t + \{\dot{u}\}_t \Delta t + (\frac{1}{2} - \beta) \{\ddot{u}\}_t \Delta t^2) \\ & + [C] \left( \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \{u\}_t + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \{\dot{u}\}_t + \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \{\ddot{u}\}_t \Delta t \right) \end{aligned} \quad (3.149)$$

Apesar da complexidade da Equação anterior ela pode ser resolvida para cada passo de tempo caso o sistema tenha suas propriedades de massa, amortecimento e rigidez invariáveis durante toda análise, sendo, portanto, uma equação dinâmica linear. Caso haja variação de quaisquer das propriedades o sistema torna-se dinâmico não linear. Neste caso, somente o Método de *Newmark* não é mais suficientemente capaz de encontrar as soluções do problema (ABECHE, 2015).

Ao considerar a variação da rigidez na equação dinâmica não linear, tem-se uma rigidez que depende dos deslocamentos e do tempo ou uma rigidez que depende dos deslocamentos, em cada passo de tempo, conforme:

$$[K(\vec{u}, t)] = [K(\vec{u})]_{t+\Delta t} \quad (3.150)$$

Normalmente, na formulação das Equações dinâmicas não lineares, empregam-se coordenadas lagrangeanas (ABECHE, 2015). Nesses casos o vetor de forças pode ser dividido em:

$$\{F\} = \{F^{ext}\} - \{F^{int}\} \quad (3.151)$$

em que  $\{F^{ext}\}$  representa o vetor de forças externas atuantes no sistema e  $\{F^{int}\}$  representa o vetor de forças internas, os quais dependem das respostas dinâmicas, ou seja, do histórico no tempo.

As não linearidades a serem consideradas podem ser originadas por grandes deslocamentos da estrutura, plastificação parcial ou total da mesma ou devido a outras variações. Analiticamente, estes efeitos podem ser representados por complexas equações algébricas, equações diferenciais, equações integrais ou, em algumas vezes, são necessárias inequações como no caso da teoria da plasticidade ou na teoria do dano (MACHADO, 1983).

Considere-se o vetor de forças internas da dinâmica não linear como sendo (BATHE, 1996):

$$[K(\{u\})]_{t+\Delta t} \{u\}_{t+\Delta t} = \{F^{int}\}_{t+\Delta t} \quad (3.152)$$

Deste modo, a Equação (3.149) passa a ser (ABECHE, 2015):

$$\begin{aligned} & \left( \frac{[M]}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma [C]}{\beta \Delta t} \right) \{u\}_{t+\Delta t} + \{F^{int}\}_{t+\Delta t} = \{F^{ext}\}_{t+\Delta t} \\ & + \frac{[M]}{\beta \Delta t^2} (\{u\}_t + \{\dot{u}\}_t \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \{\ddot{u}\}_t \Delta t^2) \\ & + [C] \left( \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \{u\}_t + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \{\dot{u}\}_t + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \{\ddot{u}\}_t \Delta t \right) \end{aligned} \quad (3.153)$$

A Equação anterior representa um sistema de equações dinâmicas não lineares que permite a determinação das respostas dinâmicas de deslocamento no tempo  $t + \Delta t$ . Faz-se necessário utilizar um método de integração temporal, como o Método de *Newmark*, em conjunto com um método iterativo de solução não linear, como *Newton-Raphson* ou *Newton-Raphson Modificado*.

Como a não linearidade física abordada no presente trabalho torna a rigidez uma função dos deslocamentos da estrutura em cada instante de tempo, sendo função

das propriedades físicas e geométricas, deve-se, também, considerar os deslocamentos estruturais em cada instante de tempo.

Segundo Zienkiewicz et al. (1977) a Equação de equilíbrio em problemas constitutivos não lineares na mecânica dos sólidos, ou na elasticidade não linear, é dada por:

$$\int_V [B]^T \{\sigma\} dV + \{f\} = 0 \quad (3.154)$$

em que  $V$  é o volume do corpo.

A Equação anterior, baseada no princípio dos trabalhos virtuais, não em princípios energéticos, é válida para qualquer comportamento material. No entanto, se assumido um comportamento elástico não linear, como por exemplo  $\{\sigma\} = \{\sigma(\{\varepsilon\})\}$ , ao invés do comportamento elástico linear  $\{\sigma\} = [C] \cdot (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}$ , a Equação anterior define completamente o caso geral de sistemas não lineares discretizados da seguinte forma (ZIENKIEWICZ et al., 1977):

$$\{\Psi(\{u\})\} \equiv \{P(\{u\})\} + \{f\} \equiv [K(\{u\})] \cdot \{u\} + \{f\} = \{0\} \quad (3.155)$$

em que  $\{\Psi(\{u\})\}$  é o vetor residual de forças, também conhecido como o vetor de forças desbalanceadas. Desta forma pode-se utilizar qualquer procedimento geral para soluções de problemas de não linearidade discreta, como a Técnica Iterativa de *Newton-Raphson*, pois para qualquer deformação uma única tensão é definida e, conseqüentemente, o vetor de forças internas  $\{P(\{u\})\}$  também é unicamente definido.

Bathe (1996) define o vetor de forças internas nodais em função das componentes do tensor de tensões atuantes da seguinte forma:

$$\{F_B^{int}\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} = \sum_{m=1}^{nel} \int_{V_{t+\Delta t}^{(m)}} [B]_{t+\Delta t}^{(m)T} [\sigma]_{t+\Delta t}^{(m)} dV_{t+\Delta t}^{(m)} \quad (3.156)$$

em que  $nel$  representa o número total de elementos da viga de ponte.

O método da quadratura *Gaussiana* é definido por (AZEVEDO, 2003):

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{i=1}^{np \ int} f(P_i) W_{Gauss(i)} \quad (3.157)$$

em que  $f(x)$  é uma função polinomial,  $np \ int$  é o número de pontos de integração de *Gauss*,  $P_i$  é a posição de um  $i$ -ésimo ponto de *Gauss* ou de amostragem e  $W_{Gauss(i)}$  é o peso associado a esse  $i$ -ésimo ponto de integração.

Aplicando a Equação (3.157) na Equação (3.156), obtém-se, através da quadratura de *Gauss*:

$$\{F_B^{int}\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} = \sum_{m=1}^{nel} \sum_{p=1}^{np} [B]_{t+\Delta t}^{(p,m)T} [\sigma]_{t+\Delta t}^{(p,m)} J^{(m)} W_{Gauss}^{(p)} \quad (3.158)$$

onde  $J$  é o Jacobiano da transformação de coordenadas.

Muitos trabalhos citam o Método de *Newmark* como um processo estático efetivo e estendem essa concepção quando ocorre a união do método de integração temporal com o processo iterativo, como de *Newton-Raphson*, ou seja, tratam o problema como estático não linear efetivo. Essa afirmação é válida apenas para problemas de não linearidade simples, como, por exemplo, quando é conhecida, a priori, a curva característica das relações entre forças e deslocamentos dinâmicos. No entanto, ao incluir a Mecânica do Dano ou a teoria da plasticidade no problema, essa relação não é mais trivial, tornando o problema ainda mais não linear (ABECHE, 2015).

A matriz de amortecimento, pelo método de *Rayleigh* é função das matrizes de massa e de rigidez da estrutura. A alteração na rigidez, no entanto, afeta a matriz de amortecimento que, por sua vez, modificam as respostas dinâmicas. Isso aumenta a não linearidade do problema. Deste modo, a matriz de amortecimento deve ser atualizada, sendo definida por (ABECHE et al., 2017a):

$$[C_B(\{u_B(\vec{x}, t)\})]_{t+\Delta t}^{(i-1)} = (\tilde{\alpha}_B)_{t+\Delta t}^{(i-1)} [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} + (\tilde{\beta}_B)_{t+\Delta t}^{(i-1)} [K_B(\{u_B(\vec{x}, t)\})]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \quad (3.159)$$

onde os parâmetros  $(\tilde{\alpha}_B)_{t+\Delta t}^{(i-1)}$  e  $(\tilde{\beta}_B)_{t+\Delta t}^{(i-1)}$  são atualizados em cada iteração dentro de cada passo de tempo.

### 3.7.1 Métodos de solução de equações dinâmicas não lineares

Deve-se encontrar o estado de equilíbrio de um corpo sujeito a solicitações. Sejam os carregamentos externos dependentes do tempo, o equilíbrio de um corpo é definido por (BATHE, 1996):

$$\{R\}_t - \{F\}_t = \{0\} \quad (3.160)$$

em que o vetor  $\{R\}_t$  contém as forças externas aplicadas na configuração no tempo  $t$  e o vetor  $\{F\}_t$  contém as forças internas.

A Equação (3.160) deve expressar o equilíbrio do sistema na configuração deformada levando em conta todas as não linearidades. Na análise estática, em que não há consideração dos efeitos temporais e inerciais, o tempo é uma variável conveniente apenas para denotar variação da intensidade do carregamento aplicado

e a correspondente configuração variada, o que é conhecido como passo de carga. Entretanto, na análise dinâmica o tempo é uma variável real que deve ser devidamente incluída na modelagem do problema físico (BATHE, 1996).

Deve-se observar a diferença entre o passo de carga e o passo de tempo. Numa análise dinâmica, muitas vezes é necessário realizar um passo ou incremento de carga dentro de um passo ou incremento de tempo ao mesmo tempo em que certas análises pode-se almejar manter a intensidade da carga e realizar somente um passo de tempo, como é o caso da análise do efeito temporal nas grandezas dinâmicas, ou até mesmo retirar completamente o carregamento no passo de carga e realizar um passo de tempo, como é o caso da vibração livre amortecida e da vibração livre não amortecida (ABECHE, 2015).

No caso das análises estáticas não lineares através da Mecânica do Dano em que o tempo e os efeitos inerciais não são considerados, mas há influência da condição de danificação propriamente dita, a solução deve ser feita em pequenos passos de carga com iterações, tantas quanto necessárias, para se atingir a convergência, de modo a obter uma boa aproximação da evolução do dano. O mesmo é válido para análises dinâmicas (BATHE, 1996).

Basicamente, a solução passo a passo e incremental admite que seja conhecida a solução para o tempo  $t$  e que seja dado um incremento  $\Delta t$  convenientemente escolhido para a obtenção da solução  $t + \Delta t$  desconhecida. Assim, tem-se o vetor de forças desequilibradas:

$$\{g\}_{t+\Delta t} = \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t} = \{0\} \quad (3.161)$$

Admite-se que os carregamentos externos  $\{R\}_{t+\Delta t}$  são independentes das deformações, ou seja, um sistema desacoplado em que as forças externas não são afetadas pelas deformações resultantes dos esforços internos (ABECHE, 2015). Conhecendo a solução no instante de tempo  $t$ , tem-se:

$$\{F\}_{t+\Delta t} = \{F\}_t + \{\Delta F\} \quad (3.162)$$

onde  $\{\Delta F\}$  é vetor de incremento de forças internas,

Pode-se relacionar o incremento de forças internas com o incremento de deslocamentos da seguinte forma:

$$\{\Delta F\} = [K]_t \{\Delta u\} \quad (3.163)$$

em que  $\{\Delta u\}$  é o vetor de incremento de deslocamentos e  $[K]_t$  é a matriz de rigidez tangente, a qual pode ser definida por:

$$[K]_t = \frac{\partial \{F\}_t}{\partial \{u\}_t} \quad (3.164)$$

ou, analogamente:

$$[K]_t \{\Delta u\} = \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_t \quad (3.165)$$

Deste modo, os deslocamentos no tempo  $t + \Delta t$  podem ser expressos como:

$$\{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\Delta u\} \quad (3.166)$$

### 3.7.1.1 Método de *Newton-Raphson* em análises dinâmicas não lineares

O Método de *Newton-Raphson* é uma extensão da técnica incremental apresentada nas Equações (3.163) até (3.166). As Equações utilizadas no processo iterativo do Método de *Newton-Raphson*, para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  são:

$$\{\Delta R\}^{(i-1)} = \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \quad (3.167)$$

$$[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\Delta u\}^{(i)} = \{\Delta R\}^{(i-1)} \quad (3.168)$$

$$\{u\}_{t+\Delta t}^{(i)} = \{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \{\Delta u\}^{(i)} \quad (3.169)$$

com

$$\{u\}_{t+\Delta t}^{(0)} = \{u\}_t \quad (3.170)$$

$$\{F\}_{t+\Delta t}^{(0)} = \{F\}_t \quad (3.171)$$

As Equações anteriores são obtidas da linearização da resposta do sistema de elementos finitos sobre as condições no tempo  $t + \Delta t$  na iteração  $(i - 1)$ . Em cada iteração, calcula-se um vetor de carregamento desbalanceado na Equação (3.167) que produz um vetor de incremento de deslocamentos na Equação (3.168). Continua-se o processo iterativo até que o vetor de carregamento desbalanceado  $\{\Delta R\}^{(i-1)}$  ou o vetor de incremento de deslocamentos  $\{\Delta u\}^{(i)}$  sejam suficientemente pequenos (BATHE, 1996).

O incremento de deslocamentos pode ser definido da seguinte forma:

$$[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\Delta u\}^{(i)} = \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \quad (3.172)$$

sendo a matriz de rigidez tangente  $[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)}$  definida por:

$$[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)} = \left[ \frac{\partial \{F\}}{\partial \{u\}} \right] \Big|_{\{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}} \quad (3.173)$$

Como o método é incremental e iterativo, utilizando passos de carga e passos de tempo, as condições iniciais devem atender os seguintes critérios:

$$[K]_{t+\Delta t}^{(0)} = [K]_t \quad (3.174)$$

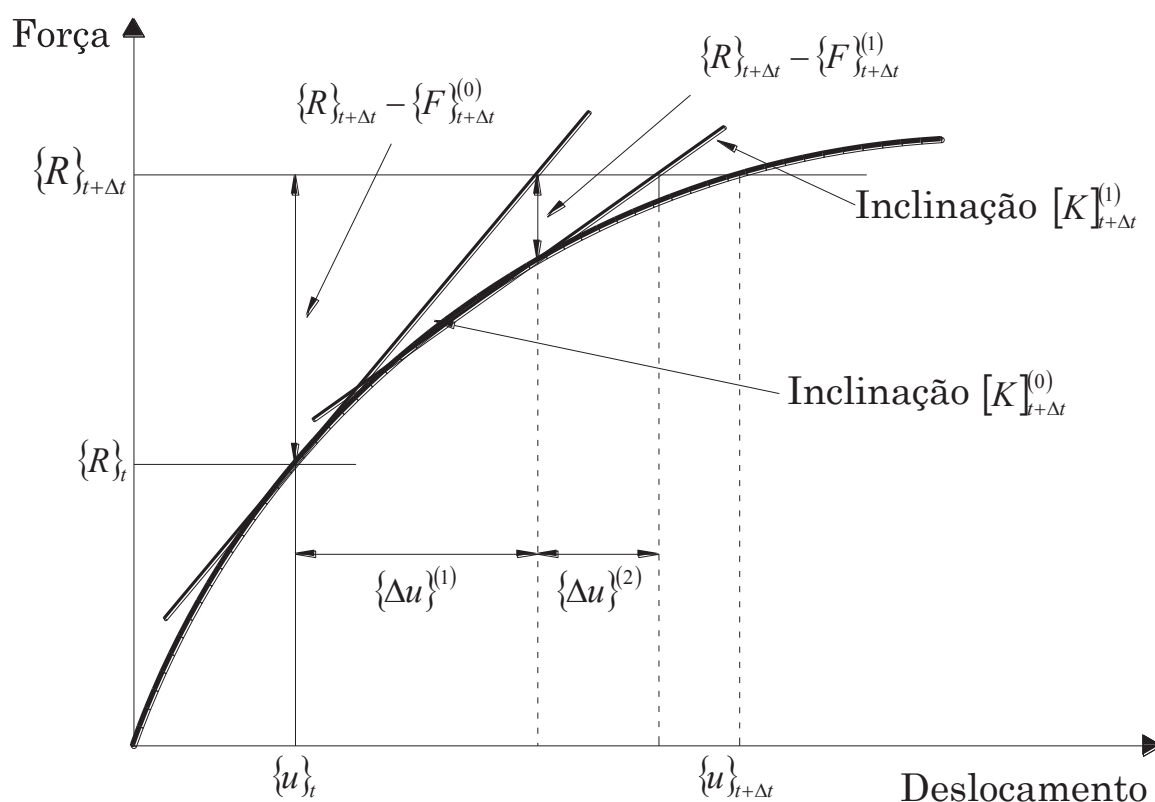
$$\{F\}_{t+\Delta t}^{(0)} = \{F\}_t \quad (3.175)$$

$$\{u\}_{t+\Delta t}^{(0)} = \{u\}_t \quad (3.176)$$

No presente método, a matriz de rigidez é recalculada em cada iteração dentro de cada passo de tempo, alterando a inclinação do diagrama de força e deslocamento. Desta forma, este método é denominado *Método de Newton-Raphson Completo*. Devido à necessidade de recalculer a matriz de rigidez em cada iteração, há um grande esforço computacional (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

A Figura 15 apresenta o diagrama de força e deslocamento com o Método de *Newton-Raphson Completo*.

FIGURA 15 – Relação entre força e deslocamento do Método de *Newton-Raphson* Completo em análises dinâmicas não lineares



FONTE: Abeche, 2015.

No caso da curva do diagrama força-deslocamento ter convexidade para baixo, como, por exemplo, perante um esforço negativo de compressão, o método funciona de forma similar (ABECHE, 2015).

### 3.7.1.2 Método de *Newton-Raphson* Modificado em análises dinâmicas não lineares

Considerando o processo iterativo do Método de *Newton-Raphson*, é reconhecido que, em geral, o maior custo computacional por iteração reside no cálculo e fatorização da matriz de rigidez tangente, bem como na resolução do sistema de equações geradas pelo processo iterativo. Uma vez que esses cálculos podem ser bastante dispendiosos, a utilização de uma modificação do algoritmo de *Newton-Raphson* completo pode ser eficiente (BATHE, 1996).

Tal modificação consiste em utilizar a matriz de rigidez inicial  $[K]_{\tau}$  na Equação (3.172). Desta forma, obtém-se:

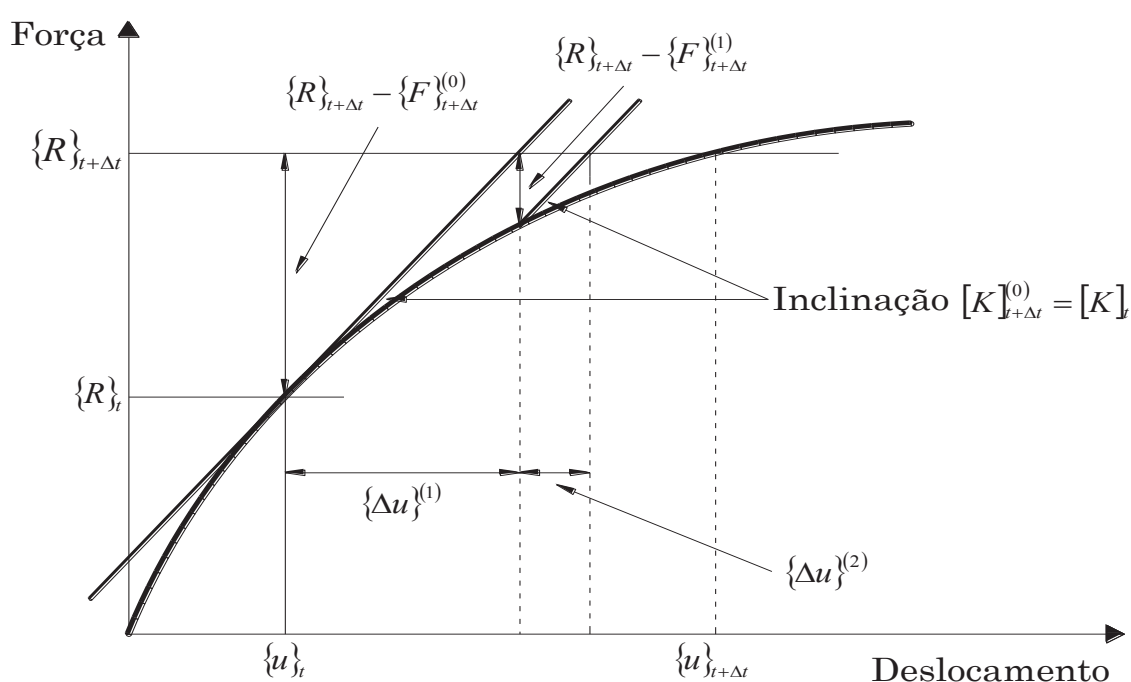
$$[K]_{\tau} \{\Delta u\}^{(i)} = \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \quad (3.177)$$

com as mesmas condições iniciais das Equações (3.175) e (3.176).  $\tau$  corresponde a uma das configurações de equilíbrio admitidas nos tempos  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ , ou  $t$ .

O Método Iterativo de *Newton-Raphson* Modificado envolve menos reformulações de rigidez do que o Método Iterativo Completo de *Newton-Raphson*. A escolha dos passos de tempo em que a matriz de rigidez deve ser atualizada depende do grau de não linearidade da resposta do sistema, isto é, quanto mais não linear for a resposta, mais frequentemente a atualização deve ser realizada (ABECHE, 2015). O refinamento da malha temporal deve levar em consideração o grau de não linearidade do problema para a convergência das respostas dinâmicas não lineares. Ainda, observa-se a necessidade de levar em consideração o controle dos passos de carga e passos de deslocamento dentro de cada passo de tempo para a obtenção das trajetórias de equilíbrio dinâmicas não lineares matemática e fisicamente plausíveis.

A Figura 16 ilustra a relação entre força e deslocamento com o Método de *Newton-Raphson* Modificado.

FIGURA 16 – Relação entre força e deslocamento do Método de *Newton-Raphson* Modificado em análises dinâmicas não lineares



FONTE: Abeche, 2015.

### 3.7.1.3 Critérios de convergência em análises dinâmicas não lineares

Para que a solução incremental baseada num processo numérico iterativo seja efetiva, um critério realístico deve ser utilizado para determinar o final do processo. No final de cada iteração, a solução obtida deve ser verificada em relação à convergência

ou divergência à tolerância admissível. Se as tolerâncias de convergência são muito grandes, resultados imprecisos podem ser obtidos. Caso as tolerâncias sejam muito pequenas, demasiado esforço computacional é gasto para obter-se uma precisão desnecessária. Similarmente, uma verificação de divergência ineficaz pode terminar a iteração, mesmo quando a solução não for realmente divergente, forçando o processo a procurar uma solução inatingível (BATHE, 1996).

Como se busca a solução em termos de deslocamento no tempo  $t + \Delta t$ , é factível, como critério de convergência, que os deslocamentos no final de cada iteração sejam uma parcela, ou tolerância, da solução de deslocamentos reais (ABECHE, 2015). Assim, têm-se os três critérios utilizados para convergência numérica:

$$\frac{\|\{\Delta u\}^{(i)}\|_2}{\|\{u\}_{t+\Delta t}\|_2} \leq tol_u \quad (3.178)$$

$$\|\{\Delta u\}^{(i)}\|_2 = \sum_{k=1}^{ntgl} (\Delta u_k^{(i)})^2 \quad (3.179)$$

$$\|\{u\}_{t+\Delta t}\|_2 = \sum_{k=1}^{ntgl} (u_{kt+\Delta t})^2 \quad (3.180)$$

em que  $tol_u$  é a tolerância de convergência de deslocamentos,  $ntgl$  é o número total de graus de liberdade do sistema, a parcela  $\|\{\Delta u\}^{(i)}\|_2$  é a norma euclidiana do vetor  $\{\Delta u\}^{(i)}$  e a parcela  $\|\{u\}_{t+\Delta t}\|_2$  é a norma euclidiana do vetor  $\{u\}_{t+\Delta t}$ .

Utiliza-se, de praxe, o último valor calculado do vetor de deslocamentos  $\{u\}_{t+\Delta t}^{(i)}$  para aproximar o vetor  $\{u\}_{t+\Delta t}$  perante uma tolerância suficientemente pequena. Para o caso do critério de convergência de deslocamentos, tem-se:

$$\frac{\|\{\Delta u\}^{(i)}\|_2}{\|\{u\}_{t+\Delta t}^{(i)}\|_2} \leq tol_u \quad (3.181)$$

Pode-se utilizar um segundo critério de convergência que mensure a norma euclidiana do vetor de carregamento desbalanceado como uma parcela, ou tolerância, da norma euclidiana do vetor de incremento de carga original. Assim, tem-se:

$$\|\{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i)}\|_2 \leq tol_F \|\{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_t\|_2 \quad (3.182)$$

em que  $tol_F$  é a tolerância de convergência em termos de força.

Um terceiro critério de convergência pode ser utilizado de modo a incluir tanto os termos de força como os de deslocamento perante os valores de equilíbrio

tolerados, comparando o incremento de energia interna durante cada iteração, o qual é a quantidade de trabalho realizado pelo vetor de carregamento desbalanceado nos incrementos de deslocamento, com o incremento de energia interna inicial (BATHE, 1996). Este critério é definido por:

$$\{\Delta u\}^{(i)T} \left( \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \right) \leq tol_E \left( \{\Delta u\}^{(1)T} \left( \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_t \right) \right) \quad (3.183)$$

em que  $tol_E$  é a tolerância de convergência energética.

Como esse critério contém termos tanto de força como de deslocamento, é uma medida atrativa na prática. Um ponto importante é que as tolerâncias de convergência  $tol_u$ ,  $tol_F$  e  $tol_E$  necessitem ser muito pequenas em algumas soluções de modo a atingir uma solução com boa precisão. Em geral, a utilização do Método de *Newton-Raphson* Completo na solução incremental leva a uma maior precisão da solução do que o Método de *Newton-Raphson* Modificado uma vez que, se houver convergência, o erro na solução diminui muito rapidamente nas últimas iterações do Método de *Newton-Raphson* Completo (BATHE, 1996).

#### 3.7.1.4 Otimização computacional para análises dinâmicas não lineares

Um problema corriqueiro de análises dinâmicas não lineares é a questão da eficiência computacional. Por fazer uma união de um método iterativo, no caso o Método *Newton-Raphson*, com um operador de integração implícita no tempo, no caso o Método de *Newmark*, trabalhando com uma formulação iterativa-incremental para as equações de movimento, a exigência computacional é muito maior do que se comparada às análises estáticas não lineares ou às análises dinâmicas lineares. Deste modo, é viável implementar uma rotina computacional otimizada no intuito de diminuir o esforço computacional e atingir maior eficiência em relação ao tempo de processamento da unidade de processamento central, CPU, e requisitos de memória RAM (ABECHE, 2015).

No intuito de otimizar a eficiência computacional, Jacob e Ebecken (1994) consideraram o incremento de deslocamentos diretamente na equação de movimento. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} & [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} + [C_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\dot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} + [K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\Delta \Delta u\}^{(i)} \\ & = \{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t} - \left\{ F_B^{int} \left( \{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \right) \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\{\Delta u\}^{(i)} = \{\Delta u\}^{(i-1)} + \{\Delta \Delta u\}^{(i)} \quad (3.185)$$

$$\{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} = \{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \{\Delta\Delta u\}^{(i)} \quad (3.186)$$

onde os vetores  $\{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)}$ ,  $\{\dot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)}$  e  $\{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i)}$  contêm valores desconhecidos de acelerações, velocidades e deslocamentos.  $\{\Delta u\}^{(i)}$  é o vetor incremental de deslocamentos e o vetor  $\{\Delta\Delta u\}^{(i)}$  é o vetor de variação incremental de deslocamentos obtido a cada iteração.  $\{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t}$  é o vetor de carregamentos externos atuantes na viga de ponte e  $\left\{F_B^{int}\left(\{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}\right)\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}$  é o vetor de forças internas que depende dos deslocamentos da viga de ponte.

O vetor incremental de deslocamentos, deste modo, também pode ser expresso como:

$$\{\Delta u\}^{(i)} = \{u_B\}_{t+\Delta t} - \{u_B\}_t \quad (3.187)$$

Deste modo, definem-se os valores preditores das acelerações e das velocidades, respectivamente, da seguinte forma:

$$\{\ddot{u}_B^*\} = -\frac{1}{\beta\Delta t} \{\dot{u}_B\}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \{\ddot{u}_B\}_t \quad (3.188)$$

e

$$\{\dot{u}_B^*\} = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \{\dot{u}_B\}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \{\ddot{u}_B\}_t \quad (3.189)$$

A Equação de movimento (3.184) pode ser reescrita em função da Equação (3.90) do amortecimento, obtendo-se (JACOB; EBECKEN, 1994):

$$\begin{aligned} & [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left( \{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} + \alpha_B \{\dot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} \right) + [K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left( \beta_B + \{\Delta\Delta u\}^{(i)} \right) \\ & = \{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t} - \left\{ F_B^{int} \left( \{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \right) \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (3.190)$$

Ao substituir os valores preditores, tem-se (ABECHE, 2015):

$$\begin{aligned} & [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left( \left( \{\ddot{u}_B^*\} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \left( \{\Delta u\}^{(i-1)} + \{\Delta\Delta u\}^{(i)} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \alpha_B \left( \{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \left( \{\Delta u\}^{(i-1)} + \{\Delta\Delta u\}^{(i)} \right) \right) \right) \\ & + [K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left( \beta_B \left( \{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \left( \{\Delta u\}^{(i-1)} + \{\Delta\Delta u\}^{(i)} \right) \right) + \{\Delta\Delta u\}^{(i)} \right) \\ & = \{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t} - \left\{ F_B^{int} \left( \{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \right) \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (3.191)$$

Uma forma de otimizar o problema, evitando multiplicações onerosas ao processamento computacional consiste em definir o vetor  $\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)}$  como os termos entre

parênteses que multiplicam  $[K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}$  na Equação (3.191) (JACOB; EBECKEN, 1994). Tem-se, portanto:

$$\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} = \beta_B \left( \{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \left( \{\Delta u\}^{(i-1)} + \{\Delta\Delta u\}^{(i)} \right) \right) + \{\Delta\Delta u\}^{(i)} \quad (3.192)$$

e, analogamente:

$$\{\Delta\Delta u\}^{(i)} = \frac{\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} - \beta_B \left( \{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \{\Delta u\}^{(i-1)} \right)}{\frac{\beta_B\gamma}{\beta\Delta t} + 1} \quad (3.193)$$

Reescrevendo a Equação (3.191) usando as Equações (3.192) e (3.193), obtêm-se (JACOB; EBECKEN, 1994):

$$\begin{aligned} & [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left( \frac{1}{\beta\Delta t^2} + \alpha_B \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \right) \left( \frac{\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} - \beta_B \left( \{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \{\Delta u\}^{(i-1)} \right)}{\frac{\beta_B\gamma}{\beta\Delta t} + 1} \right) \\ & + [K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} = \{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t} - \left\{ F_B^{int} \left( \{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \right) \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \\ & - [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left( \left( \{\ddot{u}_B^*\} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \{\Delta u\}^{(i-1)} \right) + \alpha_B \left( \{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \{\Delta u\}^{(i-1)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.194)$$

Definindo  $\hat{\alpha}_0$  por:

$$\hat{\alpha}_0 = \left( \frac{1}{\beta\Delta t^2} + \alpha_B \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \right) \left( \frac{1}{\frac{\beta_B\gamma}{\beta\Delta t} + 1} \right) \quad (3.195)$$

e transferindo novamente os termos já conhecidos da iteração  $(i)$  para o lado direito da Equação de movimento, obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \hat{\alpha}_0 [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} + [K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} \\ & = \{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t} - \left\{ F_B^{int} \left( \{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \right) \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \\ & - [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left( \left( \{\dot{u}_B^*\} + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \{\Delta u\}^{(i-1)} \right) \right) \\ & + (\alpha_B - \hat{\alpha}_0\beta_B) \left( \{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \{\Delta u\}^{(i-1)} \right) \end{aligned} \quad (3.196)$$

A Equação anterior pode ser reescrita no intuito de ganho de eficiência computacional como um sistema efetivo de equações algébricas lineares a ser resolvido em cada iteração dentro de cada passo de tempo, da seguinte forma (JACOB; EBECKEN, 1994):

$$[\hat{A}] \{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} = \{\hat{b}\}^{(i-1)} \quad (3.197)$$

em que a matriz  $[\hat{A}]$  é definida como:

$$[\hat{A}] = \hat{\alpha}_0 [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} + [K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \quad (3.198)$$

e a matriz  $\{\hat{b}\}^{(i-1)}$  como:

$$\begin{aligned} \{\hat{b}\}^{(i-1)} &= \{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t} - \left\{ F_B^{int} \left( \{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \right) \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \\ &\quad - [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left( \left( \{\ddot{u}_B^*\} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \{\Delta u\}^{(i-1)} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_B - \hat{\alpha}_0 \beta_B) \left( \{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \{\Delta u\}^{(i-1)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.199)$$

Embora na dinâmica não linear poucos processos são paralelizáveis, devido à dependência do histórico das variáveis nas iterações dentro de cada passo de tempo, com essa metodologia otimizada, há um grande ganho no tempo de processamento computacional pela redução de operações de inversão de matrizes (ABECHE, 2015).

## 4 MODELAGEM COMPUTACIONAL

Neste Capítulo são abordados os tópicos referentes à modelagem computacional. Na Seção 4.1, apresenta-se o modelo de veículo de 1 grau de liberdade. A Seção 4.2 discorre sobre o modelo de interação entre a viga de ponte e o veículo. O modelo constitutivo de dano de *Mazars* (1984) adaptado para análises dinâmicas não lineares é apresentado na Seção 4.3. Na Seção 4.4 é apresentado o modelo constitutivo de plasticidade utilizado para o aço estrutural.

A Seção 4.5 apresenta o modelo de rigidez equivalente e o mapeamento das demais dimensões em uma pseudo-malha. Nesta Seção são abordados diversas contribuições do presente trabalho, como seções transversais com geometria variável, Seção 4.5.1, distribuição variável de armaduras, Seção 4.5.2, variação analítica da posição da linha neutra, Seção 4.5.3, e variação dos momentos de inércia das camadas discretizadas, Seção 4.5.4.

Por fim, a Seção 4.6 apresenta a modelagem computacional dinâmica não linear proposta para a ponte. Nesta Seção, tratam-se dos tópicos de substituição de variáveis considerando os pontos de integração de *Gauss*, Seção 4.6.1, condições iniciais dinâmicas partindo da configuração deformada, linear ou não linear, devido ao peso próprio, Seção 4.6.2, variação do tensor de tensões para diferentes geometrias, Seção 4.6.3, e modelo de tratamento de erro no contorno ao longo do tempo, Seção 4.6.4.

### 4.1 MODELO DE VEÍCULO DE 1 GRAU DE LIBERDADE

Para as cargas externas atuantes na ponte, considera-se um modelo de veículo com 1 grau de liberdade composto por uma massa suspensa  $m_2$ , uma suspensão formada por uma mola com coeficiente de rigidez  $k$  e por um amortecedor com coeficiente de amortecimento  $c$ , e uma roda de massa  $m_1$ , conforme ilustrado na Figura 17.

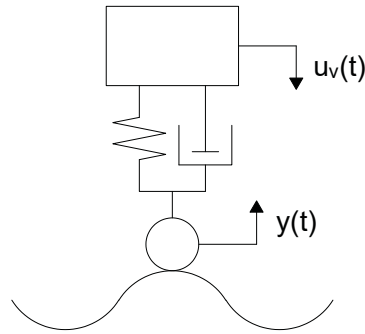
FIGURA 17 – Modelo de veículo com 1 grau de liberdade



FONTE: O autor.

As massas da mola e do amortecedor são desprezadas no presente modelo. Ao considerar a massa da roda,  $m_1$ , como sendo indeformável, tem-se um problema de excitação de base, deslocamento de base  $y(t)$ , em cada passo de tempo  $t$  durante o movimento do veículo. Deste modo, as respostas dinâmicas do veículo são influenciadas pela excitação de base. Essa consideração é demonstrada pela Figura 18,

FIGURA 18 – Modelo de veículo com 1 grau de liberdade acoplado com excitações



FONTE: O autor.

em que  $u_v(t)$  é o deslocamento do veículo ao longo do tempo  $t$ .

Por intermédio desta hipótese, é possível analisar o efeito de irregularidades da via nas respostas dinâmicas do veículo e da ponte de modo desacoplado, ou seja, sem considerar a contribuição das respostas dinâmicas da ponte na resposta do veículo. Ao considerar um comportamento elástico linear para a mola, a força resistiva elástica que age na mola é definida por:

$$F_M = k [u_v(t) - y(t)] \quad (4.1)$$

Pela mesma hipótese, ao considerar um comportamento viscoso linear para o amortecedor a força resistiva devido ao amortecimento que age no amortecedor é definida por:

$$F_A = c [\dot{u}_v(t) - \dot{y}(t)] \quad (4.2)$$

em que  $\dot{u}_v(t)$  é a resposta dinâmica de velocidade do veículo ao longo do tempo e  $\dot{y}(t)$  a velocidade associada à irregularidade da via no tempo  $t$ .

Pelo equilíbrio dinâmico linear, a Equação que representa o movimento do veículo nas irregularidades da via, pela consideração do problema de excitação de base, é definida por:

$$m_2 \ddot{u}_v(t) + F_A + F_M = 0 \quad (4.3)$$

ou, de modo expandido:

$$m_2 \ddot{u}_v(t) + c [\dot{u}_v(t) - \dot{y}(t)] + k [u_v(t) - y(t)] = 0 \quad (4.4)$$

na qual  $\ddot{u}_v(t)$  representa a resposta dinâmica de aceleração do veículo, ao longo do tempo  $t$ .

A Equação (4.4) é, então, resolvida pelo do Método de *Newmark* (1959), obtendo, como resultado, as respostas dinâmicas do veículo. Como os esforços são transmitidos de modo desacoplado para a ponte, há necessidade de compatibilização dos passos de tempo  $\Delta t$  do modelo de veículo e do modelo da ponte.

Na hipótese de indeformabilidade da roda, de massa  $m_1$ , obtêm-se as respostas dinâmicas do veículo relativas ao eixo central da massa suspensa  $m_2$ , com as contribuições do comportamento elástico linear da mola e do comportamento viscoso linear do amortecedor. As respostas dinâmicas na roda, por sua vez, são os dados de entrada da excitação, no caso das irregularidades. Nesse sentido, a massa da roda apenas contribui para o peso do veículo, já que as amplitudes da excitação,  $y(t)$ , são dados de entrada do modelo.

O presente trabalho, entretanto, não tem como objetivo analisar os efeitos de diferentes formas de irregularidades nas respostas dinâmicas não lineares de vigas com geometria de seção transversal e distribuição de armadura variáveis, propondo tais considerações como sugestão para trabalhos futuros. Entretanto, o modelo implementado permite a entrada de dados de irregularidades. Deste modo, ao desprezar os efeitos das irregularidades, a força que age na mola e a força que age no amortecedor ficam definidas, respectivamente, por:

$$F_M = k u_v(t) \quad (4.5)$$

e

$$F_A = c \dot{u}_v(t) \quad (4.6)$$

Assim, a Equação de movimento do veículo sem consideração das irregularidades, ou excitações, torna-se simplesmente:

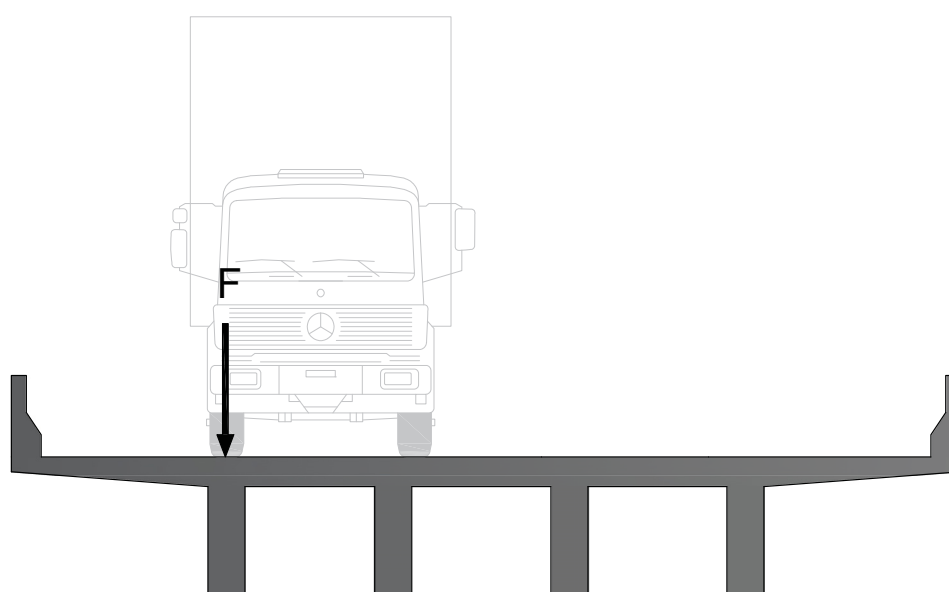
$$m_2 \ddot{u}_v(t) + c \dot{u}_v(t) + k u_v(t) = 0 \quad (4.7)$$

Dessa maneira, como não há excitação de base, nos instantes de tempo iniciais a massa suspensa  $m_2$  é deslocada para baixo na medida que supera a reação gerada pelo coeficiente de rigidez  $k$  e pelo coeficiente de amortecimento  $c$ . A força peso do veículo a ser transmitida para a viga de ponte é, portanto, a força produzida pelas massas  $m_1$  e  $m_2$ , sendo, conseqüentemente, constante durante toda a análise.

## 4.2 MODELO DE INTERAÇÃO DINÂMICA ENTRE PONTE E VEÍCULO

Após a análise dos esforços no veículo, a força gerada pelas massas é transmitida à viga de ponte de modo desacoplado. A modelagem proposta permite a análise de uma viga longarina no tabuleiro da ponte em que a carga do veículo é representada pelo modelo de 1 grau de liberdade apresentado na Seção 4.1. Considera-se que a força produzida pelo modelo de veículo passa pelo eixo central da viga, conforme demonstrado pela Figura 19.

FIGURA 19 – Interação entre veículo e viga



FONTE: O autor.

Essa consideração permite que haja somente solicitações verticais no centro da viga, desprezando esforços de torção, uma vez que o modelo não considera tal grau de liberdade.

## 4.3 MODELO CONSTITUTIVO DE DANO DE MAZARS ADAPTADO PARA DINÂMICA NÃO LINEAR

Entre os diversos modelos constitutivos dedicados ao concreto e baseados na Mecânica do Dano, o modelo constitutivo de *Mazars* (1984) além de envolver um número pequeno de parâmetros a identificar, permite representar adequadamente algumas evidências experimentais do concreto. Esse modelo utiliza uma variável escalar que representa e quantifica o estado local de deterioração do material.

O modelo de dano proposto por *Mazars* (1984) tem como hipóteses fundamentais (PITUBA, 1998):

- localmente, o dano é devido a alongamentos;

- o dano é representado por uma variável escalar, cuja evolução ocorre quando um valor de referência para o 'alongamento equivalente' é superado;
- considera-se que o dano seja isótropo, embora análises experimentais mostrem que o dano conduz, em geral, a uma anisotropia do concreto (o qual pode ser considerado inicialmente como isótropo); e
- o concreto com dano comporta-se como meio elástico. Portanto, deformações permanentes evidenciadas experimentalmente numa situação de descarregamento são desprezadas.

O quadrado da deformação equivalente é igual à soma dos quadrados das componentes de deformação principal positivas (ABECHE, 2015):

$$\tilde{\varepsilon}^2 = \sum_i \langle \varepsilon_i^2 \rangle_+ \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.8)$$

Assim, define-se a deformação equivalente,  $\tilde{\varepsilon}$ , como uma variável escalar representativa do estado local de extensão que é calculada em função da parte positiva das componentes principais da deformação no espaço  $R^3$  por:

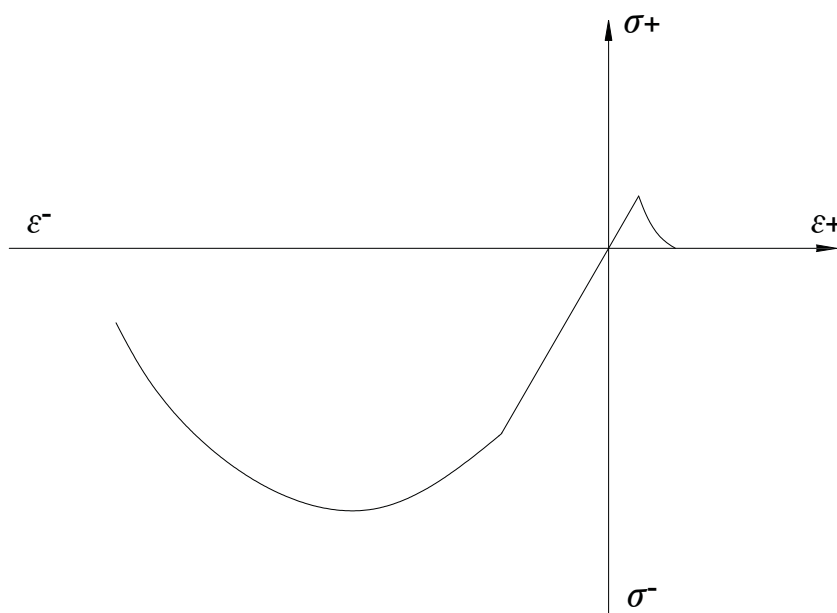
$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (4.9)$$

onde  $\varepsilon_i$  é uma componente de deformação principal e  $\langle \varepsilon_i \rangle_+$  é a sua parte positiva definida por (GUELLO, 2002):

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2}[\varepsilon_i + |\varepsilon_i|] = \begin{cases} \varepsilon_i, & \text{se } \varepsilon_i > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.10)$$

O concreto apresenta comportamento diferenciado na tração e na compressão, tendo menor resistência à tração em relação a sua resistência à compressão. Essa relação é aproximadamente de  $\frac{1}{10}$  na tração. A justificativa desse comportamento pode ser explicada na microestrutura do material, através da análise multiescala, em que a menor resistência ocorre por o concreto ser um material frágil cujos planos de clivagem sofrem maior efeito da tensão de cisalhamento durante solicitações de tração. A Figura 20 ilustra a relação constitutiva do concreto.

FIGURA 20 – Diagrama tensão-deformação do concreto



FONTE: O autor.

A baixa resistência do concreto à tração é o principal motivo pelo qual incorporam-se vergalhões de aço no concreto, de modo a ganhar maior resistência à tração do material composto, o que é possível devido à aderência entre os materiais, à proximidade entre os coeficientes de dilatação térmica, entre outros motivos. Além disso, a resistência mecânica das barras de aço, mesmo em certos limites de escorregamento das armaduras, é o que garante a estabilidade estrutural em situações de danificação do concreto e plasticidade do aço.

No modelo de dano de Mazars (1984), o início do dano se dá quando  $\tilde{\varepsilon}$  atinge um valor igual ou superior a  $\varepsilon_{d0}$ , o qual corresponde a um valor de referência para a deformação equivalente, característico do material, acima do qual ocorre o início da danificação, determinada a partir de ensaios de compressão uniaxial.

A relação constitutiva para os casos de estado de tensão unidimensionais e multidimensionais é definido, respectivamente, por (LEMAITRE; DESMORAT, 2005):

$$\sigma = (1 - D(\varepsilon)) E \varepsilon \quad \text{e} \quad \tilde{E}_{ijkl} = (I_{ijrs} - D_{ijrs}) E_{rskl} \quad (4.11)$$

em que  $I_{ijrs}$ ,  $D_{ijrs}$ ,  $E_{ijkl}$  e  $\tilde{E}_{ijkl}$  são os tensores de quarta ordem de identidade, dano, relações constitutivas do material íntegro e relações constitutivas do material danificado, respectivamente.

Neste modelo, quando a deformação equivalente  $\tilde{\varepsilon}$  atinge certo valor limite,  $\varepsilon_{d0}$ , inicia-se o processo de danificação. Esse critério pode ser descrito por uma função

para a evolução do dano,  $f$ , como se segue:

$$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - S(D) \leq 0, \quad S(0) = \varepsilon_{d0} \quad (4.12)$$

em que  $D$  representa a variável de dano,  $\varepsilon_{d0}$  pode ser entendido como a deformação máxima obtida em ensaios de tração uniaxial e  $S(D)$  é uma função que liga a deformação de início de danificação e a variável de dano (GUELLO, 2002).

Observa-se, da Equação (4.12), que se  $f < 0$  o material é elástico linear, ou seja, o dano não evolui. Portanto, se o módulo da deformação equivalente é menor que a deformação de referência ( $|\tilde{\varepsilon}| < \varepsilon_{d0}$ ), então não há dano algum ( $D = 0$ ) (ABECHE, 2015).

Admitindo a continuidade do fenômeno ao longo do tempo, a lei de evolução da variável de dano, aqui caracterizada pela perda de rigidez do material, que segue os princípios da termodinâmica é definida por (LEMAITRE; CHABOCHE, 1985):

$$\dot{D} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } f \leq 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \\ F(\tilde{\varepsilon})\langle \dot{\tilde{\varepsilon}} \rangle_+ & , \text{ se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

em que  $\dot{D}$  é a taxa de danificação,  $F(\tilde{\varepsilon})$  é uma função contínua e positiva da deformação equivalente  $\tilde{\varepsilon}$ , de modo que  $\dot{D} \geq 0$  para qualquer  $\dot{\tilde{\varepsilon}}$ . Isso garante que o dano é crescente e irreversível. Nesse sentido, a função  $F(\tilde{\varepsilon})$  deve ser capaz de reproduzir o comportamento experimental de experimentos unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

*Mazars* (1984) foi o primeiro a definir duas variáveis distintas de dano,  $D_T$  e  $D_C$ , que representam, respectivamente, o dano na tração e o dano na compressão no concreto. Conseqüentemente, há duas taxas de dano,  $\dot{D}_T$  e  $\dot{D}_C$ , para a tração e para a compressão, respectivamente. Deste modo, considerando a Equação 4.13, há, também, duas leis de evolução do processo de danificação distintas:

$$\dot{D}_T = F_T(\tilde{\varepsilon})\langle \dot{\tilde{\varepsilon}} \rangle_+, \quad \dot{D}_C = F_C(\tilde{\varepsilon})\langle \dot{\tilde{\varepsilon}} \rangle_+ \quad (4.14)$$

No modelo clássico de dano de *Mazars* (1984), a variável de dano  $D$  é definida através da seguinte combinação linear, por intermédio dos coeficientes de combinação,  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  (PEREGO, 1989 apud BARROS, 2002):

$$D(\varepsilon) = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C, \quad \alpha_T + \alpha_C = 1 \quad (4.15)$$

em que  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  são coeficientes obtidos a partir do estado de deformação em cada ponto do corpo, tendo-se sempre  $\alpha_T + \alpha_C = 1$ . Para a tração pura, tem-se que  $\alpha_T = 1$  e para a compressão pura  $\alpha_C = 1$ .

Tal consideração foi adotada em modelos unidimensionais que não consideram a discretização em camadas da seção transversal, bem como em modelos bidimensionais. Nestes últimos, determinado elemento pode estar sujeito tanto ao efeito de tração como ao efeito de compressão simultaneamente, pelo fato da posição da linha neutra poder estar contida dentro do próprio elemento, além de demais efeitos. Assim, a combinação proposta pela Equação (4.15) é factível para estes casos.

No modelo proposto, adaptado de Abeche (2015), no entanto, há discretização das camadas e, ao considerar a variação da posição da linha neutra, pode-se definir com exatidão se determinado ponto da camada sofre o efeito de tração ou de compressão durante a flexão, conforme será apresentado na Seção 4.5. Deste modo, a combinação linear proposta pela Equação (4.15) pode ser desprezada. Vale ressaltar que em algumas situações não contempladas neste trabalho, como no caso de vigas protendidas ou sujeitas a esforços axiais, a posição da linha neutra pode situar-se fora da seção transversal, ficando a seção totalmente comprimida ou tracionada.

A partir da Equação (4.9), ao considerar os efeitos da flexão nas camadas discretizadas, obtém-se diretamente o valor de  $\varepsilon_1$ , enquanto as deformações  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  são calculadas a partir de  $\varepsilon_1$ , considerando o efeito de *Poisson*, nos eixos das deformações principais. Assim, a Equação (4.9) pode ser reescrita como:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle -\nu \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle -\nu \varepsilon_1 \rangle_+^2} \quad (4.16)$$

em que  $\nu$  é o coeficiente de *Poisson* do concreto.

Para o caso de um ponto material tracionado no eixo da direção principal 1, tem-se:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + 0^2 + 0^2} = \varepsilon_1 \quad (4.17)$$

Já para o caso de um ponto material em compressão no eixo da direção principal 1, tem-se:

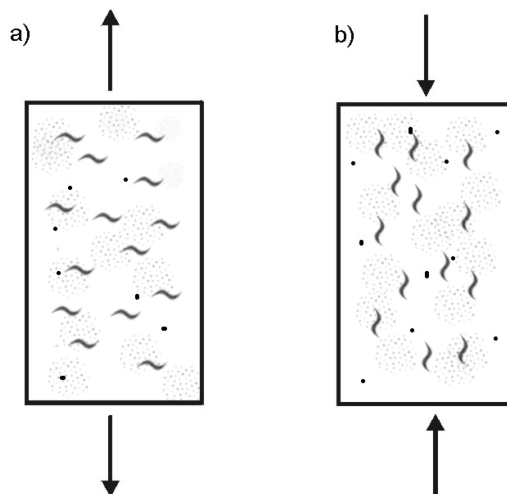
$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{0^2 + (-\nu \varepsilon_1)^2 + (-\nu \varepsilon_1)^2} = -\nu \varepsilon_1 \sqrt{2} \quad (4.18)$$

onde, uma vez que  $\varepsilon_1$  tem valor negativo devido à compressão,  $\tilde{\varepsilon}$  assume um valor positivo. Portanto, a deformação equivalente é definida por (TIAGO; LEITÃO; ROSCA, 2002):

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon_1, & \text{se } \varepsilon_1 \geq 0 \\ -\nu \varepsilon_1 \sqrt{2}, & \text{de outra forma} \end{cases} \quad (4.19)$$

A Figura 21 apresenta o estado de microfissuração devido à tração e à compressão.

FIGURA 21 – Microfissuração: a) tração, b) compressão



FONTE: Guello, 2002.

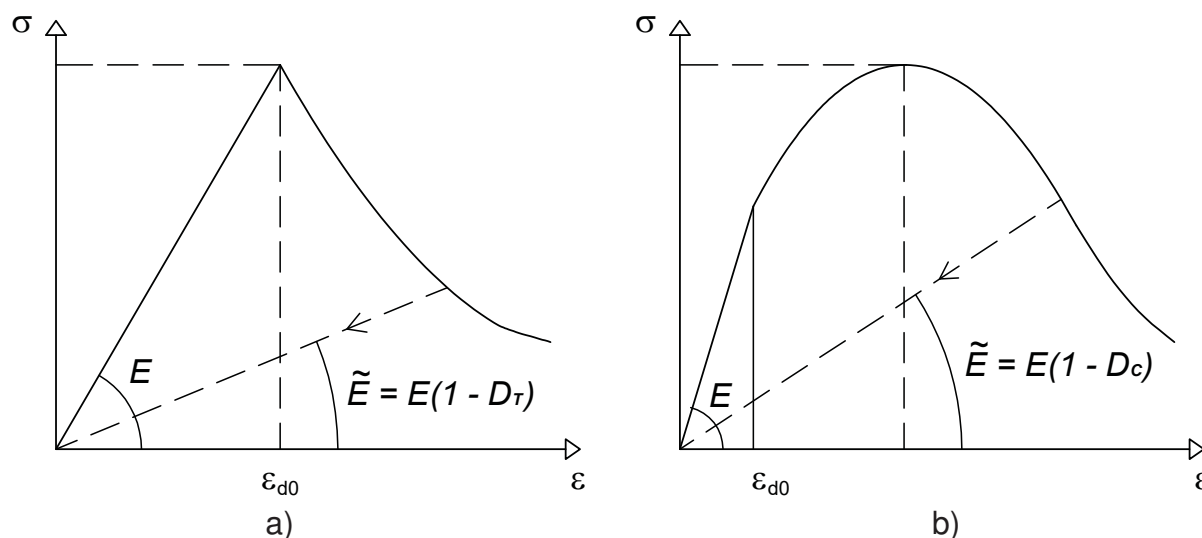
O modelo de dano proposto por *Mazars* (1984) consegue captar o efeito da danificação por formação de microfissuras perpendiculares ao carregamento axial, o qual ocorre no sólido tracionado, conforme apresentado na Figura anterior, caso a).

Já na compressão, o modelo propõe que o início da danificação, caracterizada pela perda de rigidez, se dá também pela tração devido ao efeito de *Poisson*, conforme ilustrado na Figura 21, caso b). Contudo, com a evolução do dano no sólido solicitado por compressão simples, observa-se também o fenômeno de esmagamento do concreto. Os pontos materiais comprimidos do sólido, portanto, sofrem penalização em sua rigidez devido ao efeito de microfissuração, pelo coeficiente de *Poisson*, e ao efeito de esmagamento do concreto. Este comportamento é representado na relação constitutiva do modelo.

O modelo, no entanto, não leva em consideração o efeito de fechamento de fissuras na situação de inversão de esforços devido ou à vibração ou à presença de balanços, o que poderia ser considerado como uma recuperação da danificação na compressão. Levando em conta essas considerações, a variável de dano na modelagem computacional proposta é totalmente irreversível, pois a energia é dissipada.

A Figura 22 apresenta a relação constitutiva para o concreto em tração e em compressão.

FIGURA 22 – Diagrama tensão-deformação do modelo de dano de *Mazars*: a) tração, b) compressão



FONTE: Abeche et al., 2017b.

As variáveis  $D_T$  e  $D_C$  da Figura 22 representam, respectivamente, o dano associado aos estados de tração e de compressão que podem ser calculados como:

$$D_T(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{B_T(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \quad (4.20)$$

e

$$D_C(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{e^{B_C(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \quad (4.21)$$

em que  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$  e  $B_C$  são parâmetros característicos do material em tração uniaxial e compressão uniaxial (ÁLVARES, 1999),  $\tilde{\varepsilon}$  é a deformação equivalente, abaixo da qual não ocorre dano, e  $\varepsilon_{d0}$  é o parâmetro da deformação elástica limite (ABECHE, 2015). Os subíndices  $T$  e  $C$  referem-se à tração e à compressão, respectivamente.

*Mazars* (1984) propôs os seguintes limites de variação para os parâmetros  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$  e  $B_C$ , obtidos a partir da calibração com resultados experimentais (PITUBA, 1998):

$$\begin{aligned} 0,7 \leq A_T \leq 1 & \quad 10^4 \leq B_T \leq 10^5 & \quad 10^{-5} \leq \varepsilon_{d0} \leq 10^{-4} \\ 1 \leq A_C \leq 1,5 & \quad 10^3 \leq B_C \leq 2 \cdot 10^3 & \end{aligned} \quad (4.22)$$

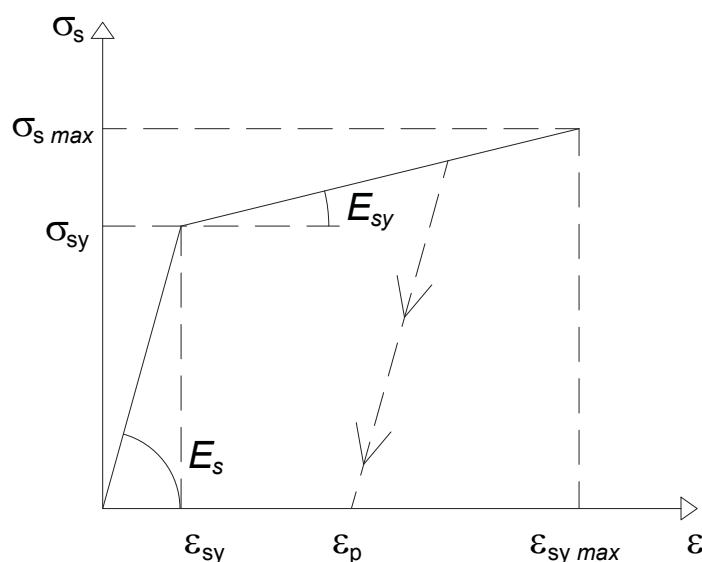
O modelo de dano proposto por Abeche (2015), adaptado do modelo de dano de *Mazars* (1984), considera o caso de inversão de esforços devido à vibração ao analisar o estado de deformações não linear quando a vibração na análise dinâmica consegue inverter as solicitações na viga de ponte, ou seja, quando um estado de deformação que seria de tração ou de compressão na estática não linear passa a ser inverso.

Tal consideração foi possível graças ao modelo de rigidez equivalente, apresentado no Tópico 4.5, e ao modelo de variação da linha neutra, Seção 4.5.3, no qual este trabalho traz como inovação a consideração da posição da linha neutra de forma analítica, geometrias de seção transversal e distribuição de armaduras variáveis, dentre outros modelos que serão apresentados em sequência.

#### 4.4 MODELO CONSTITUTIVO DE PLASTICIDADE PARA O AÇO ESTRUTURAL

Para os vergalhões de aço das vigas é adotado um modelo constitutivo elastoplástico bilinear que considera o encruamento a partir da deformação plástica, com comportamento simétrico quando sujeito à tração e à compressão. A Figura 23 mostra esse comportamento,

FIGURA 23 – Modelo elastoplástico bilinear com encruamento para o aço estrutural



FONTE: Abeche et al., 2017b.

onde  $\sigma_{sy}$  representa a tensão de escoamento do aço,  $E_s$  seu módulo de elasticidade inicial,  $\varepsilon_{sy}$  o limite da deformação elástica e  $E_{sy}$  o módulo de elasticidade após a ocorrência do escoamento das barras de aço.

O aço pode sofrer o efeito de plastificação quando alcança a tensão de escoamento  $\sigma_{sy}$ . Assim, o material terá uma deformação plástica  $\varepsilon_p$  tal que  $+\varepsilon_{sy} \leq \varepsilon_p \leq +\varepsilon_{sy \max}$ , no caso de tração, ou  $-\varepsilon_{sy} \geq \varepsilon_p \geq -\varepsilon_{sy \max}$ , para o caso de compressão. A tensão, neste modelo constitutivo, pode ser calculada como (IMAI et al., 2017a; ABECHE et al., 2017a):

$$|\sigma| = \begin{cases} |\sigma_{sy}| + E_{sy}(\varepsilon_p - |\varepsilon_{sy}|), & |\pm\varepsilon_{sy}| \leq |\varepsilon_p| \leq |\pm\varepsilon_{sy \max}| \\ E_s|\varepsilon_{el}|, & -\varepsilon_{sy} \leq |\varepsilon_{el}| \leq \varepsilon_{sy} \end{cases} \quad (4.23)$$

onde  $|\varepsilon_{el}|$  é a deformação elástica linear na tração ou na compressão.

A relação entre  $E_{sy}$  e  $E_s$  é dada por:

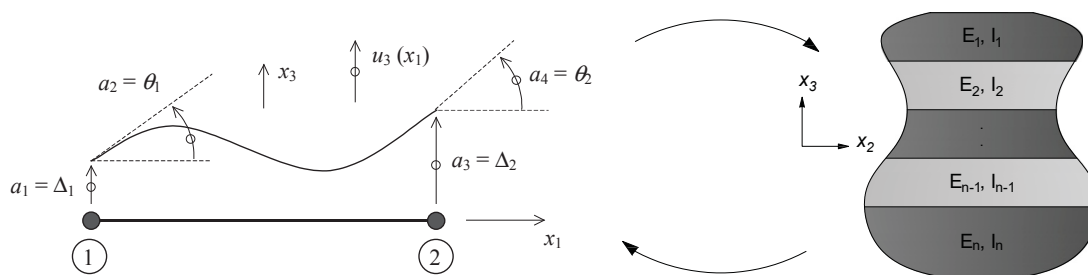
$$k_s = \frac{E_{sy}}{E_s} \quad (4.24)$$

#### 4.5 MODELO DE RIGIDEZ EQUIVALENTE E MAPEAMENTO DE PSEUDO-MALHA

Para considerar a mecânica do dano contínuo dinamicamente, faz-se necessário avaliar os danos em cada camada de cada seção transversal do elemento de ponte ao longo do tempo, ou seja, para cada iteração na análise não linear dentro de cada iteração temporal calculam-se os danos nas camadas de concreto.

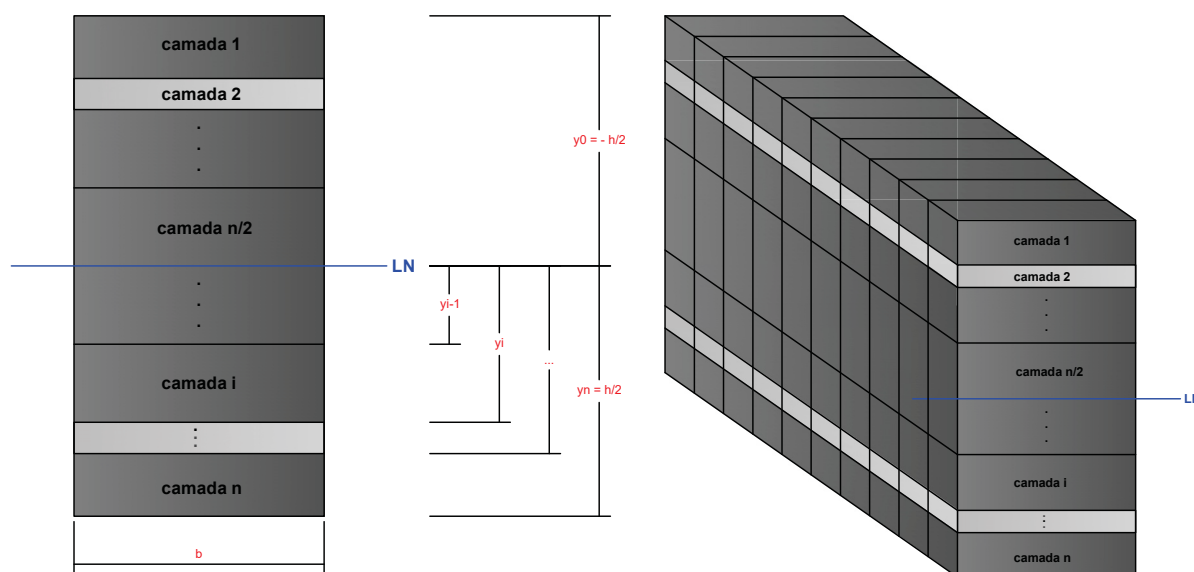
No entanto, o elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli* é um elemento de barra com dois graus de liberdade por nó, deslocamento vertical e rotação, que não leva em consideração a dimensão vertical da seção transversal diretamente. Assim, para considerar o processo de danificação nas camadas da seção transversal é necessário realizar um mapeamento dos elementos de barra para uma malha auxiliar, denominada neste trabalho de pseudo-malha, que considere a dimensão vertical. No entanto, após o processo de danificação, ou de plastificação, é necessário retornar a malha real do elemento de barra adotado. A Figura 24 ilustra esse procedimento.

FIGURA 24 – Mapeamento de ida, de volta e pseudo-malha



FONTE: O autor.

Para que o mapeamento de ida e o mapeamento de volta sejam possíveis, determina-se uma rigidez equivalente para cada elemento de viga. Deste modo, a seção transversal da ponte é dividida em  $n$  camadas, similarmente ao caso de vigas laminadas de material composto, como mostrado na Figura 25.

FIGURA 25 – Seção transversal retangular de ponte dividida em  $n$  camadas

FONTE: O autor.

Para o caso particular de simetria em vigas laminadas de material composto com largura  $b$  constante, a rigidez à flexão equivalente  $EI_{eqv}$  é determinada por (KWON; BANG, 2000):

$$EI_{eqv} = \frac{1}{3}b \sum_{i=1}^n E_i (y_i^3 - y_{i-1}^3) \quad (4.25)$$

em que  $n$  é o número de camadas,  $b$  é a largura da seção transversal retangular,  $E_i$  é o módulo de deformação da  $i$ -ésima camada, sendo  $E_c$  para camadas de concreto e  $E_s$  ou  $E_{sy}$  para camadas de aço,  $y_i$  e  $y_{i-1}$  são os valores das coordenadas no eixo  $y$  da divisão de pontos das  $i$ -ésimas camadas consecutivas, as quais subtraídas resultam na altura da camada.

Na obtenção do vetor de força interna elementar, abordado na Seção 3.6, a rigidez à flexão equivalente é determinada para cada ponto de *Gauss* na integração numérica, utilizando o método da quadratura de *Gauss*.

No processo de cálculo da rigidez equivalente, quando os materiais, concreto ou aço, apresentam comportamento não linear, a posição da linha neutra varia e é recalculada em cada iteração numérica de acordo com a deterioração de qualquer camada. Assim, as coordenadas  $y_i$  são redefinidas e a rigidez equivalente é recalculada por meio do teorema de *Steiner*, ou teorema dos eixos paralelos (BEER; JOHNSTON, 1995; BEER; JOHNSTON, 2008), conforme a Equação (4.25) para esta nova posição da linha neutra.

#### 4.5.1 Seções transversais com geometria variável

O programa ABXDNL previamente realizava análises dinâmicas não lineares em vigas com seção transversal retangular e armadura constante. Um dos objetivos deste trabalho é analisar o comportamento de vigas com diferentes geometrias perante o fenômeno de danificação e de plasticidade ao longo do tempo. Deste modo, essa Seção trata das seções transversais com geometria variável.

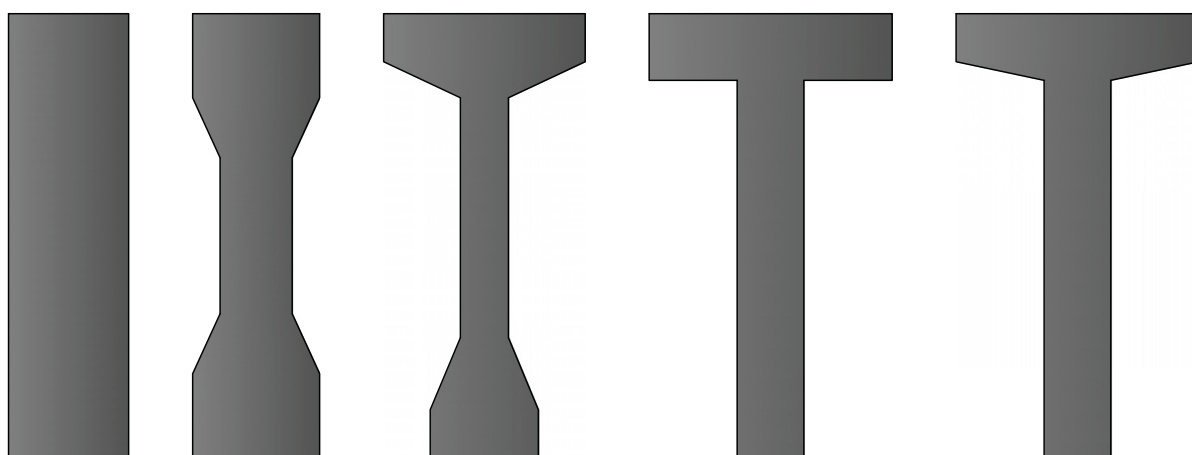
Como o dano depende do modelo constitutivo e da resistência do material, uma variação na área das camadas da seção transversal para diferentes geometrias influenciará no processo de danificação. Uma camada de certa seção transversal que tiver menor área resistente em relação a uma viga retangular poderá sofrer maior danificação se houver esgotamento da elasticidade desta camada.

Sabe-se, no entanto, que as deformações longitudinais variam linearmente com as distâncias relativas à posição da linha neutra independentemente da geometria considerada. Entretanto, o tensor de tensões efetivo da Mecânica do Dano é função da área da camada analisada. Onde houver variação da área, haverá variação no tensor de tensões, o que justifica a análise da danificação dinâmica para diferentes geometrias, conforme será apresentado na Seção 4.6.3.

Mesmo que vigas de diferentes geometrias tenham a mesma rigidez equivalente no mesmo elemento, o processo de danificação será diferente por conta da área resistente das camadas e conseqüente variação no tensor de tensões.

A Figura 26 apresenta seções transversais com geometria variável, caso de viga retangular, viga I simétrica, viga I assimétrica, viga T sem abas e viga T com abas.

FIGURA 26 – Seções transversais com geometria variável

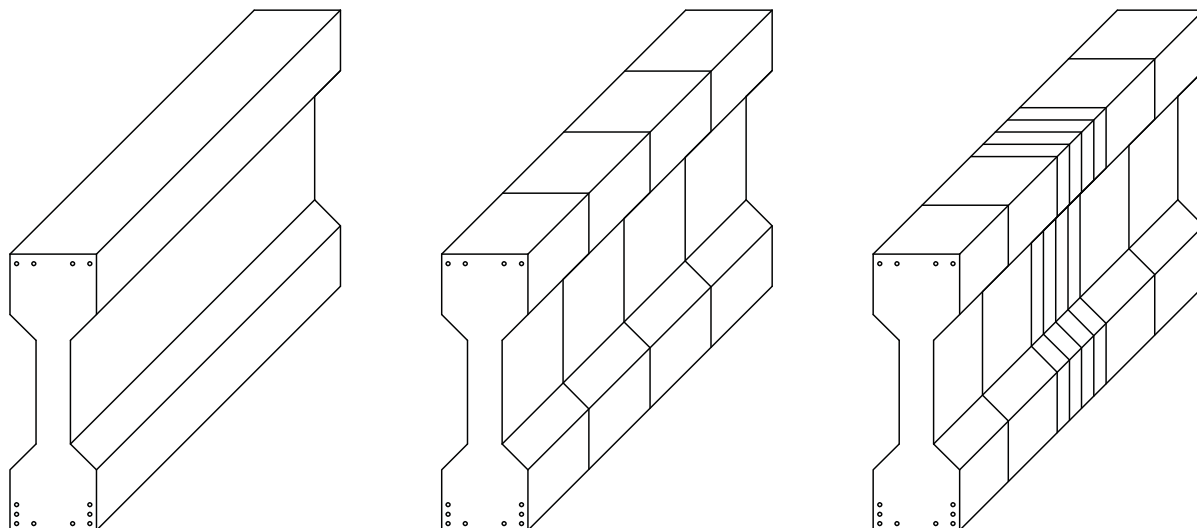


FONTE: O autor.

Pode-se almejar refinar localmente as vigas de diferentes geometrias de modo a melhor captar o efeito da danificação. Para tanto, desenvolveram-se rotinas que

possibilitam a variação do comprimento dos elementos finitos de forma individual. A Figura 27 apresenta uma viga I simétrica com refinamento variável.

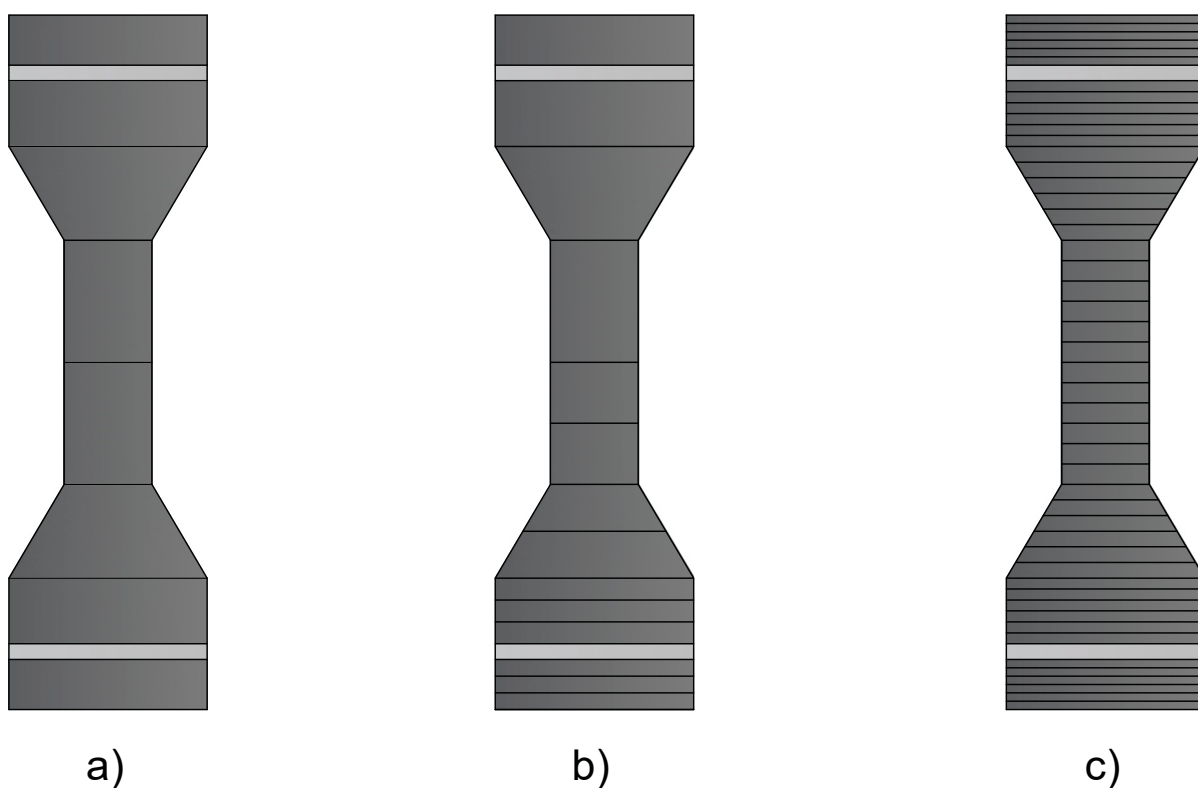
FIGURA 27 – Viga I simétrica com refinamento variável



FONTE: O autor.

Além do refino ao longo do comprimento do elemento, pode-se, também, refinar o número de camadas da seção transversal de forma variável, conforme apresentado na Figura 28.

FIGURA 28 – Refino de camadas variável na seção transversal: a) refinamento mínimo, b) maior refinamento nas camadas inferiores, c) maior refinamento em toda seção transversal



FONTE: O autor.

O refinamento da camada também influencia na danificação uma vez que a área da camada é danificada como um todo.

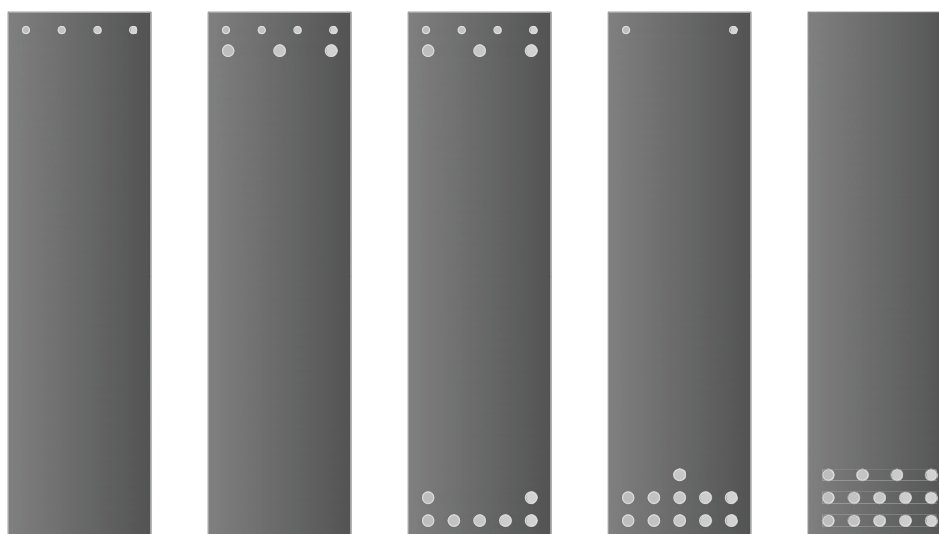
#### 4.5.2 Distribuição variável de armaduras

Ao núcleo do programa ABXDNL também incluíram-se rotinas computacionais, com a pesquisa desenvolvida neste trabalho, de modo a considerar a distribuição variável de armaduras, anteriormente considerada constante.

Com tal contribuição, é possível especificar diferentes trechos de armadura com diferentes quantidades de camadas de material. Deste modo, pode-se simular estruturas de pontes mais realistas.

A Figura 29 apresenta as seções transversais com armaduras variáveis de uma ponte realista.

FIGURA 29 – Seções transversais com diferentes armaduras



FONTE: O autor.

Como explicado anteriormente, na Seção 4.5, consideram-se armaduras em camadas, ou em chapas, como o caso de vigas laminadas de material composto, de modo a calcular a rigidez equivalente para cada seção transversal de cada elemento finito. Para tanto, é calculada a área de aço de cada seção e fazem-se camadas equivalentes, com coincidência no centro de massa e altura equivalente de modo que a área de cada camada seja a mesma das armaduras em cada linha. A Figura 30 ilustra esse procedimento.

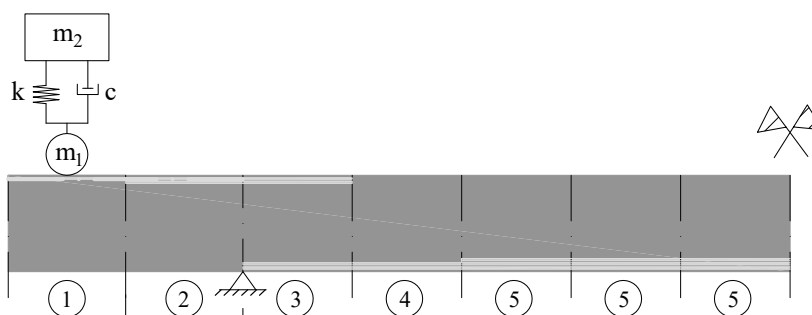
FIGURA 30 – Seções transversais de diferentes armaduras divididas em camadas



FONTE: O autor.

A Figura 31, por sua vez, ilustra as seções longitudinais com armaduras variáveis de uma ponte realista.

FIGURA 31 – Seções longitudinais com diferentes armaduras



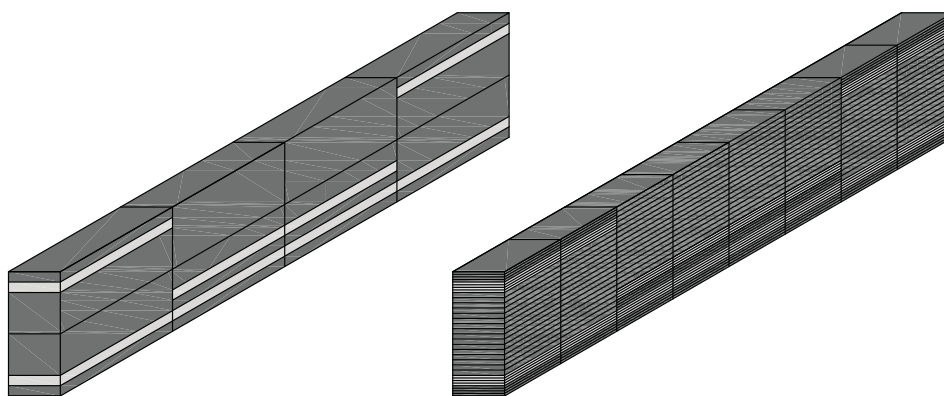
FONTE: O autor.

Assim, é possível modelar computacionalmente uma estrutura real que possua distribuição variável de armaduras, conforme ocorre em dimensionamentos normativos.

Para que essa consideração fosse possível, foi necessário discretizar localmente cada variação de armadura e de geometria nos elementos finitos. Anteriormente, tinha-se uma seção constante com armadura constante. Agora, após a inclusão das rotinas de discretização local e a adaptação do programa de modo a torná-lo geral, ou seja, de modo a considerar qualquer variação de geometria e de seções transversais nas subrotinas e no núcleo do programa, bem como generalização para facilitar a entrada dos dados no programa, o programa ABXDNL é capaz de simular, com maior facilidade ao usuário, estruturas de pontes reais, práticas, do cotidiano. Deste modo, o programa tem condições tanto de auxiliar o dimensionamento e análise estrutural de pontes em fase de projeto, como simular a situação de pontes já executadas.

A Figura 32 apresenta os diferentes graus de refinamento local para a distribuição variável de armaduras. Essa consideração do refino local também foi incluído ao programa principal.

FIGURA 32 – Diferentes graus de refinamento para distribuições variáveis de armaduras



FONTE: O autor.

### 4.5.3 Variação analítica da posição da linha neutra

Usualmente, em trabalhos de estática não linear através da Mecânica do Dano, não era considerada a variação da posição da linha neutra, sendo considerado que a esta sempre se mantinha inalterada em relação à posição inicial. No entanto, essa consideração prescrevia que os danos das camadas superiores à linha neutra, ou ao centro de gravidade, sempre ocorreriam por compressão enquanto as camadas inferiores sempre sofreriam o fenômeno de tração. Essa consideração é válida desde que a linha neutra sofresse pequena alteração.

Ao considerar que a linha neutra pode variar conforme a danificação, por outro lado, uma camada que inicialmente sofreria fenômeno de compressão pode ser tracionada. O trabalho de Abeche (2015) considera a variação da posição da linha neutra da seguinte forma:

$$y_{LN} = \frac{\sum_{j=1}^{nc} y_{camada(j)} E_{camada(j)} A_{camada(j)}}{\sum_{j=1}^{nc} E_{camada(j)} A_{camada(j)}} \quad (4.26)$$

ou seja, considerando a variação do módulo de *Young*  $E$ .

No modelo desenvolvido, após encontrada a posição da linha neutra, as coordenadas das camadas não eram atualizadas analiticamente. Ao variar a linha neutra, alguma camada, previamente tracionada ou comprimida, sofreria divisão, ou seja, teria parte de sua área comprimida e parte de sua área tracionada, e o equilíbrio de esforços externos e internos aplicados ocorria em função da contribuição de cada área iterativamente. O modelo é válido, mas necessitava de mais um processo iterativo para o equilíbrio de esforços dentro de outro processo iterativo contido em cada passo de tempo. Por conta disso, o esforço computacional para encontrar a posição de equilíbrio era maior.

Visto isso, este trabalho propôs atualizar as coordenadas das camadas analiticamente em função da posição da linha neutra, ganhando, com isso, maior velocidade de processamento.

As coordenadas absolutas das camadas são armazenadas em um vetor da



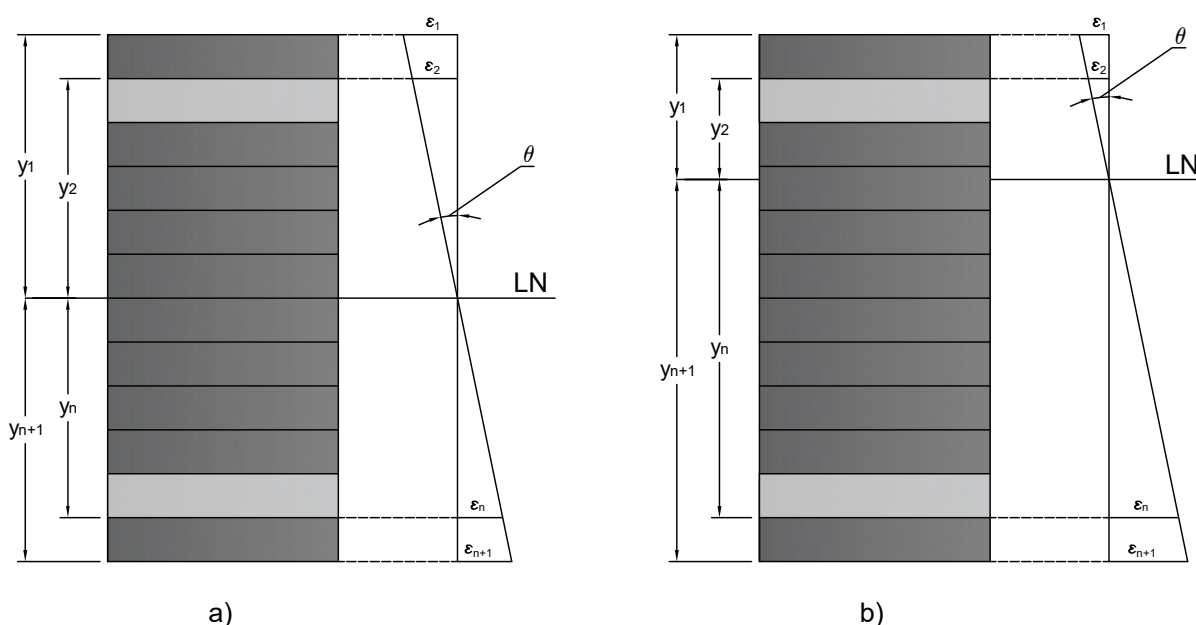
Após a atualização da posição da linha neutra  $y_{LN}$  as novas coordenadas são atualizadas analiticamente em função das coordenadas absolutas das camadas e da nova posição da linha neutra da seguinte forma:

$$\{y_{rel}\}_{t+\Delta t}^{it} = \{y_{abs}\} - (y_{LN})_{t+\Delta t}^{it} = \begin{Bmatrix} y_{abs(1)} \\ y_{abs(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{abs(n-1)} \\ y_{abs(n)} \\ y_{abs(n+1)} \end{Bmatrix} - (y_{LN})_{t+\Delta t}^{it} = \begin{Bmatrix} y_{rel(1)} \\ y_{rel(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{rel(n-1)} \\ y_{rel(n)} \\ y_{rel(n+1)} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

em que  $\{y_{rel}\}_{t+\Delta t}^{it}$  é o vetor que armazena essas coordenadas em cada iteração  $it$  dentro de cada passo de tempo  $t + \Delta t$ .

A consideração dessas coordenadas tem grande importância pois, além do exposto, as deformações das camadas são calculadas com base nessas coordenadas atualizadas através da Equação (3.46),  $\varepsilon_{x1} = -y \frac{d^2 v}{dx^2}$ . Deste modo, a deformação de cada camada é diferente, conforme apresentado na Figura 34.

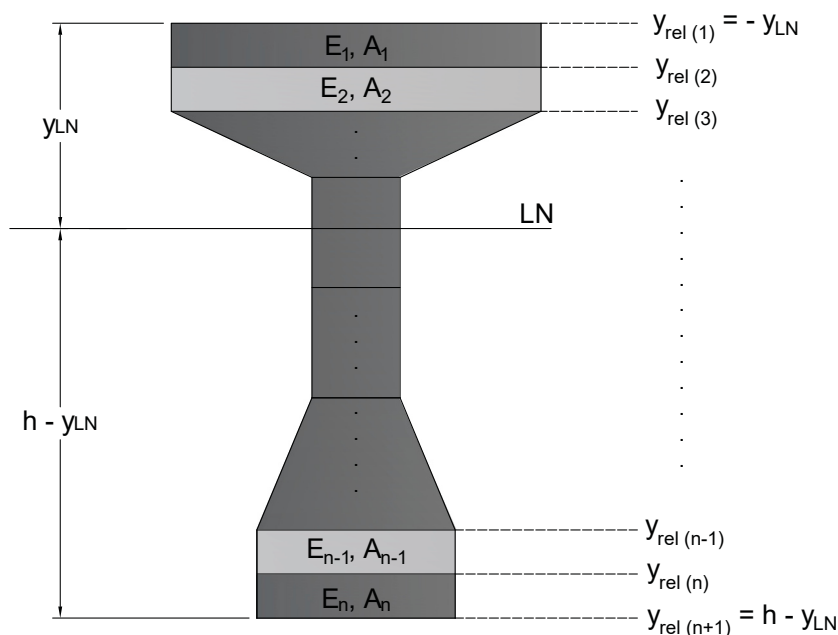
FIGURA 34 – Diferença nas deformações das camadas conforme variação da posição da linha neutra: a) posição da linha neutra situada no centro geométrico da seção transversal, b) posição da linha neutra afastada do centro geométrico da seção transversal



FONTE: O autor.

A Figura 35 apresenta as coordenadas das camadas atualizadas em função das coordenadas absolutas e da posição da linha neutra.

FIGURA 35 – Coordenadas das camadas da seção transversal atualizadas analiticamente



FONTE: O autor.

O procedimento proposto agrega grande vantagem computacional, pois o tempo de processamento necessário para encontrar a posição de equilíbrio de modo iterativo quando atualizava-se a posição da linha neutra no modelo proposto por Abeche (2015) era demasiadamente maior do que o cálculo analítico da posição da linha neutra devido ao menor número de operações computacionais.

#### 4.5.4 Variação dos momentos de inércia das camadas

Além da variação da geometria das seções transversais, da distribuição variável de armaduras, da generalização das rotinas computacionais do programa ABXDNL para essas considerações e da variação da posição da linha neutra de modo analítico, este trabalho agrega como inovação a variação dos momentos de inércia das camadas quando ocorre o processo de danificação.

Não foram encontrados trabalhos que levassem em consideração a variação dos momentos de inércia das camadas quando inicia-se o processo de danificação. Essa consideração física é plausível, pois ao variar o módulo de *Young* no processo de danificação a posição da linha neutra também varia e, conseqüentemente, variam-se os momentos de inércia das camadas. A implementação deste modelo no programa ABXDNL trouxe resultados mais coerentes na modelagem do processo de danificação

com base em resultados experimentais, conforme será apresentado nos resultados da Seção 5.1.2.

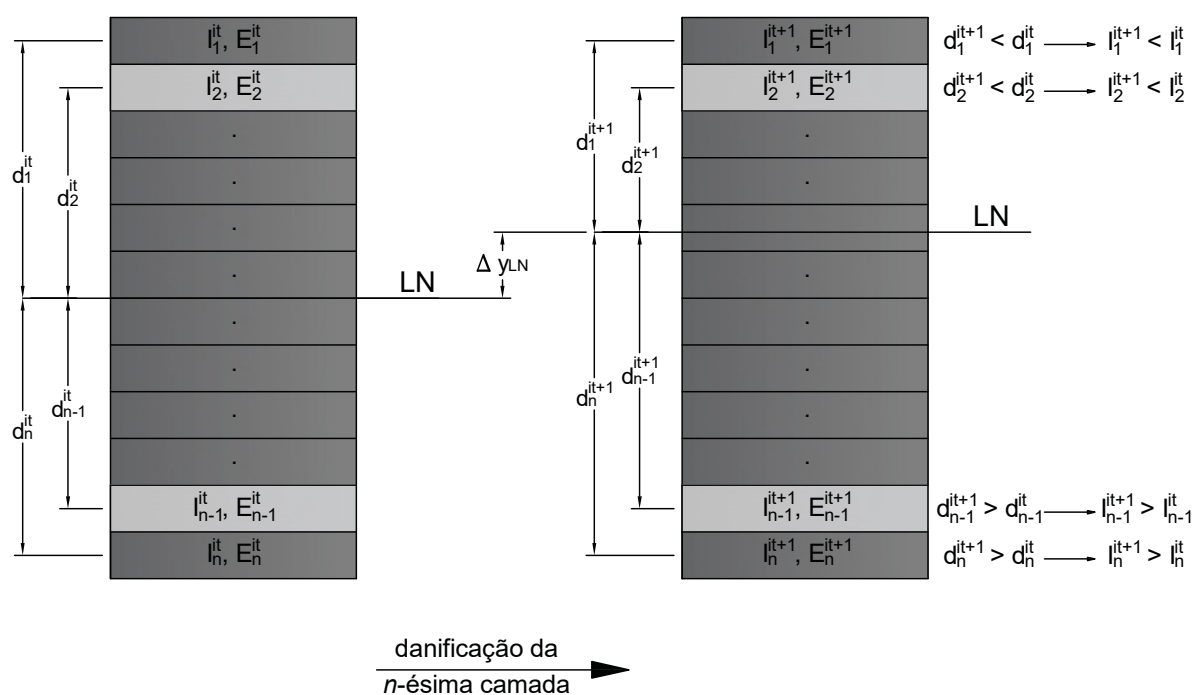
O cálculo do momento de inércia de determinada camada é definido pelo Teorema de *Steiner* como:

$$I = I_g + Ad^2 \quad (4.30)$$

em que  $I$  é o momento de inércia total da camada,  $I_g$  é o momento de inércia de área através do centroide da própria área da camada,  $A$  é área da respectiva camada e  $d$  é a distância do centro de gravidade da camada analisada até a posição da linha neutra.

A Figura 36 ilustra a variação dos momentos de inércia decorrentes da variação da posição da linha neutra.

FIGURA 36 – Variação dos momentos de inércia



FONTE: O autor.

Ao analisar a Figura 36, observa-se que numa situação em que uma camada isolada sofre danificação, ou seja, que tenha redução de seu módulo de *Young*, a mesma terá acréscimo em seu momento de inércia em decorrência do distanciamento entre seu centro de gravidade e a posição da linha neutra. Ao ocorrer esse fenômeno, todas as camadas terão as distâncias de seus centros de gravidade recalculadas. Algumas terão acréscimo de momento de inércia enquanto outras terão redução devido à aproximação da posição da linha neutra.

As coordenadas globais, absolutas, dos centros de gravidade de cada camada são armazenadas no vetor  $\{y_{cg}\}$  da seguinte forma:

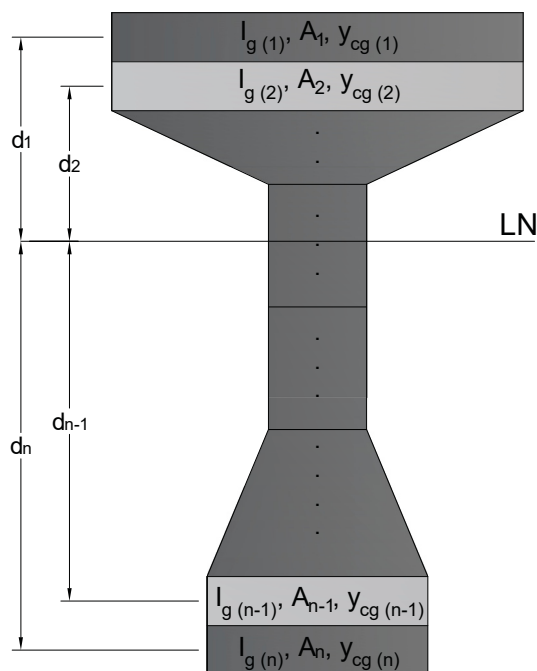
$$\{y_{cg}\} = \begin{Bmatrix} y_{cg(1)} \\ y_{cg(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{cg(n-1)} \\ y_{cg(n)} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Após a atualização da posição da linha neutra, conforme Equação (4.28), recalcula-se o vetor que contém os momentos de inércia de cada camada de cada elemento da seguinte forma:

$$I_{i(t+\Delta t)}^{it} = I_{g_i} + A_i |(y_{LN})_{t+\Delta t}^{it} - y_{cg(i)}|^2 \quad (4.32)$$

em que o índice  $i$  representa a camada analisada de cada elemento e  $I_{i(t+\Delta t)}^{it}$  representa o componente do vetor referido em cada iteração dentro de cada passo de tempo. Os parâmetros  $I_{g_i}$ ,  $A_i$  e  $y_{cg(i)}$  são invariáveis. A Figura 37 apresenta esses parâmetros.

FIGURA 37 – Parâmetros geométricos da camadas



FONTE: O autor.

Embora ocorra variação dos momentos de inércia de cada camada, observa-se que quanto mais a linha neutra afasta-se do centro de gravidade da seção transversal,

mais seu momento de inércia total aumenta, ou seja, o momento de inércia é mínimo quando a posição da linha neutra coincide com o centro de gravidade da seção transversal. Portanto, numa situação de danificação, o elemento ganha momento de inércia.

Apesar do ganho de momento de inércia por conta do afastamento da posição da linha neutra em relação ao centro de gravidade da seção transversal, ao ocorrer a redução do módulo de *Young* em função da danificação o elemento danificado acabará perdendo rigidez, *EI*. Camadas que previamente estavam íntegras têm seus momentos de inércia penalizados em decorrência da aproximação da posição da linha neutra. De um modo geral, essa consideração leva a uma redução acentuada na rigidez do elemento, uma vez que camadas danificadas ganham momento de inércia e perdem rigidez enquanto camadas íntegras perdem momento de inércia.

#### 4.6 MODELAGEM COMPUTACIONAL DINÂMICA NÃO LINEAR PROPOSTA PARA A PONTE

Inicialmente, calculam-se as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração com a ponte íntegra, sem danos, com a rotina dinâmica linear. Na rotina dinâmica não linear, ao verificar-se a presença de danos as forças não são mais linearmente dependentes dos deslocamentos, fazendo com que a matriz de rigidez previamente inalterável se torne não somente dependente dos deslocamentos como, também, instantânea, ou seja, dependente do tempo, caracterizando a não linearidade como mostrado abaixo:

$$[K_B] = [K_B(\{u_B\}, t)] \quad (4.33)$$

Adaptando a Equações de movimento da ponte (3.140) e (3.149) segundo Machado (1983) com as Equações de movimento da ponte (3.184), (3.191) e a Equação (3.197) segundo Jacob e Ebecken (1994), a Equação global de movimento da ponte danificada segundo Abeche (2015) é reescrita como:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{[M]_{t+\Delta t}^{(i-1)}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma [C]_{t+\Delta t}^{(i-1)}}{\beta \Delta t} \right) \{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} + [K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\Delta u\}^{(i)} = \\ & \{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t} + \frac{[M]_{t+\Delta t}^{(i-1)}}{\beta \Delta t^2} (\{u_B\}_t + \{\dot{u}_B\}_t \Delta t + (0.5 - \beta) \{\ddot{u}_B\}_t \Delta t^2)^{(i)} \\ & + [C]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left( \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \{u_B\}_t + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \{\dot{u}_B\}_t + \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \{\ddot{u}_B\}_t \Delta t \right)^{(i)} - \{F_B^{int}\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

ou

$$[M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} + [C_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\dot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} + [K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\Delta u\}^{(i)} = \{\Delta F_B\}_{t+\Delta t} \quad (4.35)$$

em que

$$\{\Delta F_B\}_{t+\Delta t} = \{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t} - \{F_B^{int}\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \quad (4.36)$$

Embora o Método de *Newmark* possa ser incondicionalmente estável em análises dinâmicas lineares, a partir da definição adequada de seus coeficientes, a escolha do passo de tempo deve ser apropriada de modo a garantir a estabilidade na dinâmica não linear, devido à instabilidade gerada pela alta sensibilidade de sistemas caóticos, como no caso do trabalho em questão. Para isso, na malha temporal, utiliza-se um maior número de passos de tempo de modo a captar o efeito dinâmico de modo estável. Este fato, no entanto, demanda um maior esforço computacional pois, além da questão da estabilidade dinâmica, é primordial a seleção adequada do passo de carga, dentro de cada passo de tempo, para evitar efeitos de pulsos na análise.

O modelo proposto no presente trabalho leva em consideração a distinção da geometria de diferentes seções transversais nos tensores de tensão e deformação, a variação analítica da posição da linha neutra, e conseqüentes deformações, bem como a variação do momento de inércia das camadas discretizadas para a determinação da rigidez equivalente de cada elemento no processo dinâmico não linear de danificação e de plasticidade na estrutura de ponte, sujeita a carregamentos dinâmicos.

#### 4.6.1 Substituição de variáveis considerando os pontos de integração de *Gauss*

No âmbito do Método dos Elementos Finitos (MEF), muitas integrais não são triviais. Ou a primitiva da função integranda não existe explicitamente ou é demasiadamente complicada para viabilizar a sua utilização prática. Por este motivo é essencial recorrer a técnicas de integração numérica, as quais também recebem a designação de quadratura (COOK et al., 2002). Neste trabalho utiliza-se o método da integração de *Gauss*, ou quadratura *Gaussiana*, para obter uma melhor aproximação da resposta numérica.

Num processo dinâmico não linear, em que a precisão da resposta é necessária para determinar o estado atual do sistema de modo a evitar o fenômeno de amplificação de erros pela não linearidade, o cálculo das respostas dinâmicas não lineares nos pontos de *Gauss* traz uma vantagem significativa, especialmente para a Mecânica do Dano e para a teoria da plasticidade.

Ao utilizar-se da interpolação de *Hermite* no elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli* para o cálculo das respostas dinâmicas nos pontos de integração de *Gauss* é mais preciso utilizar-se um processo de substituição de variável. No caso substitui-se a coordenada cartesiana na direção longitudinal  $x_1$  pela coordenada local  $s$ . Esta Seção apresenta o procedimento necessário para a análise não linear quando se utiliza a quadratura de *Gauss* e se faz uma substituição de variável.

Os deslocamentos generalizados dos nós do elemento finito,  $\{a\}$ , podem ser definidos por:

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

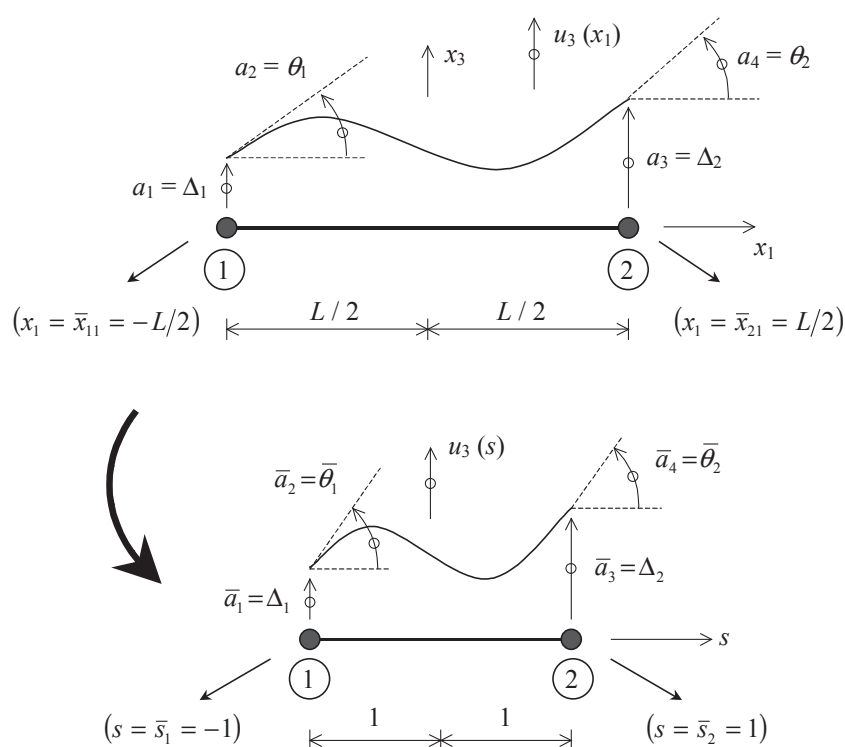
sendo

$$\theta = \frac{du_3}{dx_1} \quad (4.38)$$

em que  $\Delta_i$  e  $\theta_i$  são, respectivamente, o deslocamento e a rotação no nó  $i$  e  $u_3$  é o deslocamento vertical.

A Figura 38 ilustra esse procedimento,

FIGURA 38 – Substituição de variável em elemento de viga de *Euler-Bernoulli*



FONTE: Azevedo, 2003.

em que  $\bar{x}_{i1}$  e  $\bar{s}_i$  são, respectivamente, a coordenada cartesiana na direção longitudinal e a coordenada local do nó  $i$ .

A transformação da coordenada  $x_1$  na coordenada  $s$  se dá pela Equação:

$$x_1 = \frac{L}{2}s \quad (4.39)$$

Após a transformação na coordenada  $s$ , tem-se:

$$\{\bar{a}\} = \begin{Bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \Delta_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

sendo

$$\bar{\theta} = \frac{du_3}{ds} \quad (4.41)$$

Pela regra da cadeia, obtem-se:

$$\frac{du_3}{ds} = \frac{du_3}{dx_1} \frac{dx_1}{ds} \quad (4.42)$$

Pela Equação (4.39), neste caso, o *Jacobiano*  $J$  é resultante da seguinte derivada:

$$J = \frac{dx_1}{ds} = \frac{L}{2} \quad (4.43)$$

Deste modo, têm-se:

$$\frac{du_3}{ds} = \frac{du_3}{dx_1} J \quad (4.44)$$

$$\bar{\theta} = \theta J \quad (4.45)$$

Ao substituir a Equação (4.45) nas Equações (4.37) e (4.40), obtém-se:

$$\{\bar{a}\} = \begin{Bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 J \\ \Delta_2 \\ \theta_2 J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 J \\ a_3 \\ a_4 J \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

Deste modo, pode-se interpolar o campo de deslocamentos com base na coordenada  $s$  da seguinte forma:

$$u_3(s) = \bar{H}_1(s)\bar{a}_1 + \bar{H}_2(s)\bar{a}_2 + \bar{H}_3(s)\bar{a}_3 + \bar{H}_4(s)\bar{a}_4 \quad (4.47)$$

As funções de forma Hermitianas para um elemento finito de comprimento  $L = 2$  são definidas como:

$$\{\bar{H}(s)\} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_1(s) \\ \bar{H}_2(s) \\ \bar{H}_3(s) \\ \bar{H}_4(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^3 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s^3 \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

Substituindo a Equação (4.46) na Equação (4.47), tem-se:

$$u_3(s) = \bar{H}_1(s)a_1 + \bar{H}_2(s)Ja_2 + \bar{H}_3(s)a_3 + \bar{H}_4(s)Ja_4 \quad (4.49)$$

Como pretende-se que a interpolação de  $u_3$  seja realizada da seguinte forma:

$$u_3(s) = \{H\}\{a\} = \begin{Bmatrix} H_1(s) & H_2(s) & H_3(s) & H_4(s) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

conclui-se que:

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} H_1 & H_2 & H_3 & H_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_1 & \bar{H}_2J & \bar{H}_3 & \bar{H}_4J \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

em que:

$$\{H(s)\} = \begin{Bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \\ H_3(s) \\ H_4(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_1(s) \\ \bar{H}_2(s)J \\ \bar{H}_3(s) \\ \bar{H}_4(s)J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^3 \\ (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3)J \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s^3 \\ (-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3)J \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

Para calcular os componentes do tensor  $\{B\}$ , as seguintes operações devem ser realizadas:

$$\frac{dH_i}{ds} = \frac{dH_i}{dx_1} \frac{dx_1}{ds} = \frac{dN_i}{dx_1} J \quad (4.53)$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{dH_i}{ds} \right) = \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dH_i}{ds} \right) \frac{dx_1}{ds} \quad (4.54)$$

$$\frac{d^2H_i}{ds^2} = \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dH_i}{dx_1} J \right) J \quad (4.55)$$

$$\frac{d^2H_i}{ds^2} = \frac{d^2H_i}{dx_1^2} J^2 \quad (4.56)$$

$$\frac{d^2 H_i}{dx_1^2} = \frac{d^2 H_i}{ds^2} \frac{1}{J^2} \quad (4.57)$$

Assim, obtêm-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 H_1}{ds^2} \\ \frac{d^2 H_2}{ds^2} \\ \frac{d^2 H_3}{ds^2} \\ \frac{d^2 H_4}{ds^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}s \\ (-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s)J \\ -\frac{3}{2}s \\ (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s)J \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 H_1}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 H_2}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 H_3}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 H_4}{dx_1^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{3}{2}s}{J^2} \\ \frac{(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s)J}{J^2} \\ \frac{-\frac{3}{2}s}{J^2} \\ \frac{(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}s)J}{J^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{L^2}s \\ -\frac{1}{L} + \frac{3}{L}s \\ -\frac{6}{L^2}s \\ \frac{1}{L} + \frac{3}{L}s \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Portanto, o tensor  $\{B\}$  é definido por (AZEVEDO, 2003):

$$\{B\} = \left\{ -\frac{d^2 H_1}{dx_1^2} \quad -\frac{d^2 H_2}{dx_1^2} \quad -\frac{d^2 H_3}{dx_1^2} \quad -\frac{d^2 H_4}{dx_1^2} \right\} = \left\{ -\frac{6s}{L^2} \quad \frac{1}{L} - \frac{3s}{L} \quad \frac{6s}{L^2} \quad -\frac{1}{L} - \frac{3s}{L} \right\} \quad (4.60)$$

A matriz de rigidez para o elemento finito de viga no referencial local é definida por:

$$[K] = EI \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{B\}^T \{B\} dx_1 \quad (4.61)$$

Após a substituição da variável  $x_1$  para a variável  $s$ , a matriz de rigidez torna-se:

$$[K] = EI \int_{-1}^1 \{B\}^T \{B\} \frac{dx_1}{ds} ds = EI \sum_{l=1}^{n_p} W_l f(P_l), \quad f(s) = f(P_l) = \{B\}^T \{B\} J \quad (4.62)$$

em que  $n_p$  é o número de pontos de *Gauss* utilizados,  $W$  é o peso associado a um ponto de *Gauss*,  $P$  é a posição de um ponto de *Gauss* e  $f$  é a função, no caso polinomial de *Hermite*, que aproxima o integral.

A matriz de rigidez então fica definida por:

$$[K] = EI \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} -\frac{6s}{L^2} \\ \frac{1}{L} - \frac{3s}{L} \\ \frac{6s}{L^2} \\ -\frac{1}{L} - \frac{3s}{L} \end{pmatrix} \left\{ -\frac{6s}{L^2} \quad \frac{1}{L} - \frac{3s}{L} \quad \frac{6s}{L^2} \quad -\frac{1}{L} - \frac{3s}{L} \right\} \frac{L}{2} ds \quad (4.63)$$

Ao realizar a integração matricial, obtém-se:

$$[K] = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

que é a clássica matriz de rigidez do elemento de viga de *Euler-Bernoulli*.

É possível demonstrar que os valores mais corretos dos campos se encontram nos pontos cujas coordenadas  $s$  valem:

$$s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.65)$$

que são os valores das coordenadas dos pontos de integração de *Gauss* para esse elemento.

#### 4.6.2 Condições iniciais dinâmicas partindo da configuração deformada, linear ou não linear, devido ao peso próprio

No avanço tecnológico na área de análises dinâmicas de estruturas, não havia consideração da geometria da seção transversal, levando em consideração somente o módulo de *Young* e o momento de inércia, de modo a atender a Equação (3.94) de elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*, por exemplo. No entanto, ao analisar as respostas dinâmicas, ainda lineares, de deformação, de tensão, dentre outras, a geometria da seção transversal tem importante relevância na análise dinâmica. Obviamente, uma estrutura com seção transversal esférica terá uma deformação em suas camadas diferente de uma estrutura com seção transversal retangular. Quando se procura analisar o fenômeno de danificação dinâmica, por exemplo, ao longo do tempo, essa consideração é imprescindível.

Similarmente, o peso próprio da estrutura, em geral, não era usualmente considerado em análises dinâmicas, sendo comumente incluído na carga atuante na estrutura. Nas análises estáticas não lineares, por sua vez, o peso próprio é incluído como uma carga uniformemente distribuída ao longo do comprimento da estrutura, sendo, frequentemente, dividido nos passos de carga atuantes, de modo a captar o efeito não linear.

Ao considerar uma análise dinâmica não linear que leva em consideração a Mecânica do Dano e a plasticidade, bem como a geometria da seção transversal para isso, têm-se duas opções:

- (a) realizar a análise dinâmica partindo da estrutura indeformada, equivalente a um caso de contraflecha na viga; ou

- (b) realizar a análise dinâmica partindo da configuração deformada devido ao carregamento do peso próprio.

No primeiro caso, mesmo considerando o peso próprio como carga atuante, a condição inicial partia do repouso. No segundo, por sua vez, a condição inicial parte das respostas dinâmicas obtidas da configuração deformada final. Não foram encontrados trabalhos científicos que levassem em conta a segunda consideração na análise dinâmica.

Em uma análise dinâmica não linear, a diferença entre as considerações é extremamente significativa, levando a respostas totalmente diferentes. Na primeira, a simulação busca a condição de equilíbrio dinâmico não linear partindo do repouso, enquanto na segunda busca-se a condição de equilíbrio partindo da configuração já deformada devido ao carregamento da estrutura. Em termos práticos, a segunda consideração é mais usual para as estruturas, enquanto a primeira seria similar a simular uma estrutura executada com contraflecha.

Essa distinção é importante nas respostas dinâmicas gerais da estrutura. Ao analisar essas questões, este trabalho optou por realizar as simulações com base na segunda consideração, ou seja, a partir da configuração deformada, trazendo mais esta contribuição ao programa ABXDNL.

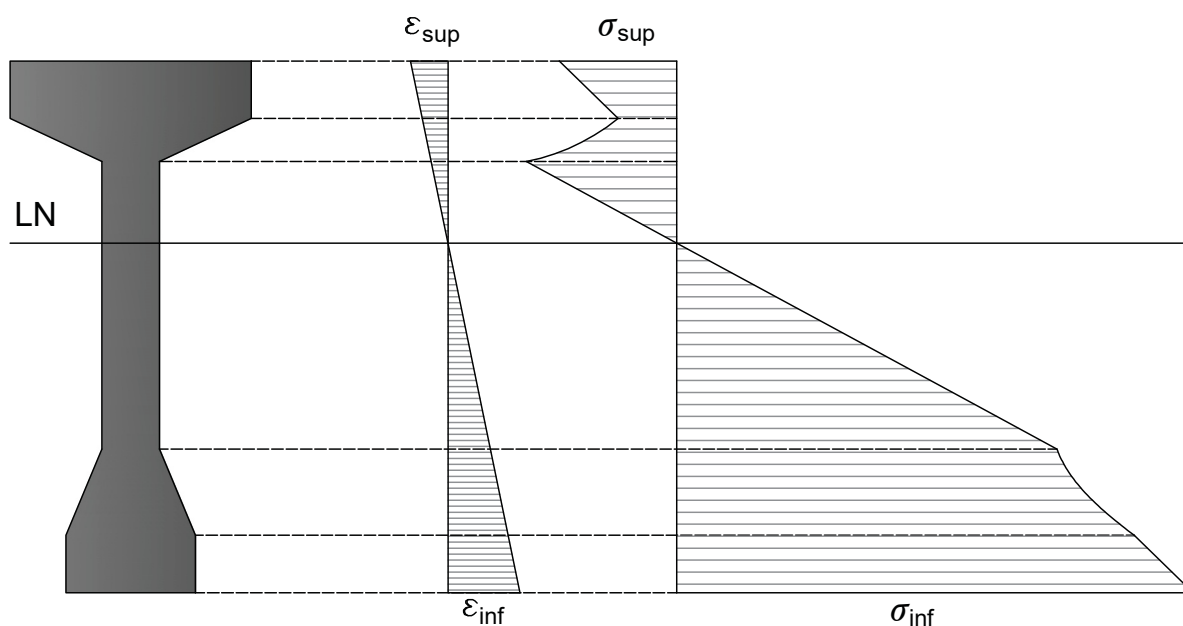
#### **4.6.3 Variação do tensor de tensões para diferentes geometrias**

Ao considerar diferentes geometrias de seções transversais faz-se necessário levar em consideração a variação no tensor de tensões. A deformação longitudinal da seção transversal em elementos de viga de *Euler-Bernoulli* varia linearmente em função da distância entre um ponto qualquer e a posição da linha neutra, o que evidencia a necessidade da consideração do modelo proposto na Seção 4.5.3. Tal comportamento computacional representa com eficácia o comportamento experimental de vigas de *Euler-Bernoulli*, nas quais as seções permanecem planas após a deformação, independentemente da geometria considerada. Entretanto, o tensor de tensões varia conforme a geometria das seção transversal.

Embora as deformações variem linearmente em relação à posição da linha neutra, as tensões dependem da área da seção transversal. Nesse sentido, camadas que possuem menor área, especificamente por conta da redução da base da camada da seção transversal, sofrem maior tensão. Isso justifica o diferente comportamento de vigas com geometrias variáveis em análises lineares.

A Figura 39 apresenta o estado de tensões e o estado de deformações lineares em uma viga I assimétrica.

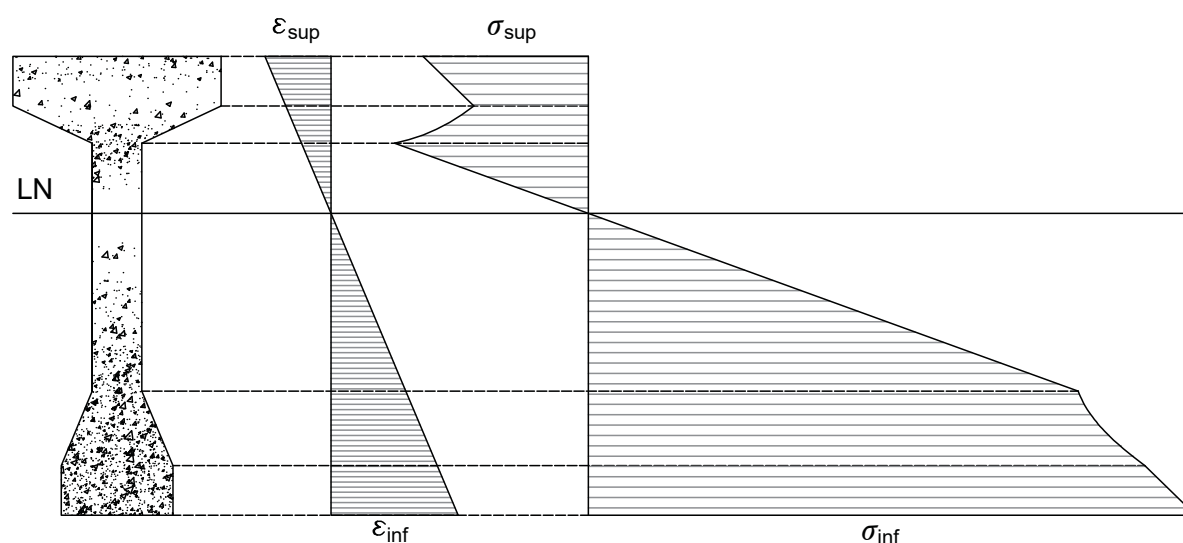
FIGURA 39 – Estados de tensões e de deformações lineares em uma viga I assimétrica



FONTE: O autor.

Em análises não lineares, por sua vez, onde o tensor de tensões efetivas  $\tilde{\sigma}$  depende da área efetiva  $\tilde{S}$ , ou seja, da área íntegra descontada da área de defeitos,  $S - S_D$ , a redução da área por conta dos defeitos ocasiona um aumento na tensão atuante. A Figura 40 ilustra esse comportamento.

FIGURA 40 – Estados de tensões e de deformações não lineares em uma viga I assimétrica



FONTE: O autor.

Ao analisar a Figura 40, observa-se que a presença de microdefeitos na estrutura, por conta do processo de danificação no concreto, ocasiona um aumento

nas deformações e nas tensões do material, bem como a variação da posição da linha neutra.

Deste modo, a Mecânica do Dano permite que o processo de danificação na alma de uma viga I ou de uma viga T possa iniciar-se previamente ao processo de danificação de suas mesas.

O caminhamento da rotina por elementos finitos não lineares, no entanto, se dá ora por passos de deslocamento, ora por passos de força. Para considerar o efeito do tensor de tensões, quando a estrutura atinge certo deslocamento e conseqüentemente certa deformação, o modelo considera a relação constitutiva na qual a tensão normal é substituída pela tensão efetiva.

#### 4.6.4 Modelo de tratamento de erro no contorno ao longo do tempo

Ao aproximar a equação diferencial que rege o problema, o Método dos Elementos Finitos tem grande vantagem numérica no domínio. Por esse motivo, este traz boa aproximação nas respostas de deslocamentos e deformações. Esta contextualização é de grande importância na análise dinâmica não linear, pois deve-se eleger as variáveis de interesse com base nas melhores aproximações. Isto posto, a metodologia dinâmica não linear desenvolvida embasa-se nas análises do tensor de deformações para o processo dinâmico de danificação e de plastificação por utilizar o Método dos Elementos Finitos não linear.

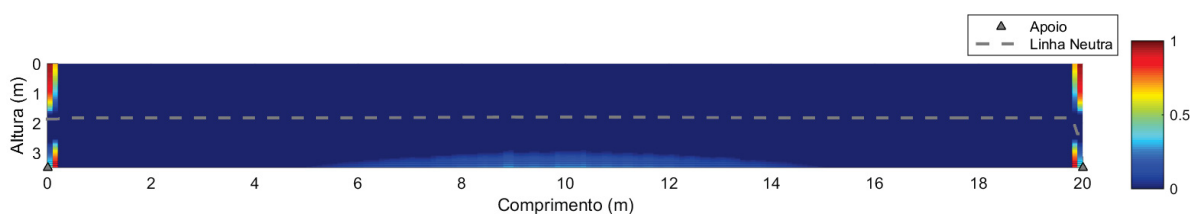
Vistas as vantagens, as desvantagens e a relevância do método utilizado para o desenvolvimento da metodologia, outra questão de suma importância é o erro no contorno. Por utilizar o Método dos Elementos Finitos, o qual tem melhor comportamento no domínio, ao obter-se as respostas estáticas de deslocamento obtidas pela inversão da matriz de rigidez multiplicada pelo vetor de forças externas, gera-se um pequeno erro no contorno. Esse erro numérico é muito pequeno nas análises estáticas com elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*. Na análise dinâmica, no entanto, este erro tem maior significância, pois, ao utilizar um procedimento de integração temporal como o Método de *Newmark*, as respostas em cada passo de tempo são funções das respostas anteriores, as quais já carregam um pequeno erro no contorno.

Na análise dinâmica não linear, em que há grande sensibilidade a perturbações (ruídos) e erros, em que erros mínimos na determinação do estado inicial e atual do sistema podem ser amplificados pela não linearidade ou pelo grande número de interações entre os componentes a propagação dinâmica dos erros no contorno podem levar a respostas pouco representativas da realidade.

A Figura 41 apresenta o resultado de uma simulação dinâmica não linear com

o programa ABXDNL sem considerar o tratamento do erro no contorno dentro do processo iterativo.

FIGURA 41 – Resultado do processo de danificação dinâmico sem tratamento de erro no contorno

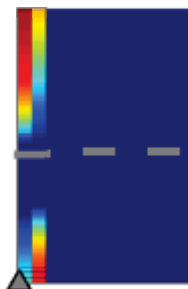


FONTE: O autor.

Ao analisar a Figura anterior, pode-se observar a inconsistência na resposta de danificação por conta da instabilidade gerada pela propagação de erros no contorno.

A Figura 42 apresenta com maior detalhe a danificação nos elementos próximos ao apoio da esquerda.

FIGURA 42 – Danificação nos elementos próximos ao apoio da esquerda, sem tratamento de erro no contorno

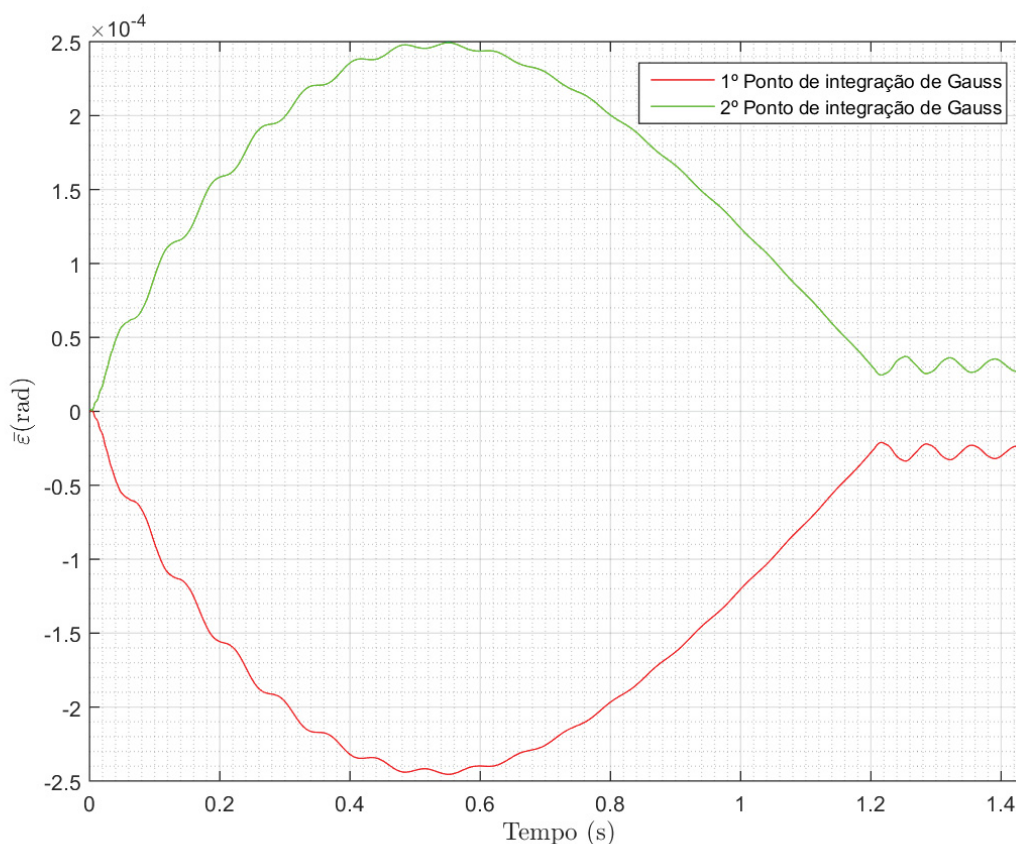


FONTE: O autor.

Ao visualizar a Figura 42, pode-se perceber, com maior clareza, a inconsistência na resposta de danificação. As duas faixas danificadas apresentadas referem-se a dois pontos de integração de *Gauss* de um mesmo elemento. O ponto de *Gauss* da esquerda inicia o processo de danificação por tração nas camadas superiores. O ponto de *Gauss* da direita também sofre danificação por tração, porém nas camadas inferiores. As camadas opostas a estas, ou seja, inferiores no primeiro ponto e superiores no segundo ponto, devido à perda de rigidez, também sofrem danificação.

A Figura 43 apresenta as respostas dinâmicas de  $\frac{d\theta}{dx}$  nos pontos de integração de *Gauss* do primeiro elemento, as quais contribuem para a propagação do erro no processo de danificação.

FIGURA 43 – Respostas dinâmicas de  $\frac{d\theta}{dx}$  instáveis obtidas nos pontos de integração de Gauss do primeiro elemento sem tratamento do erro no contorno

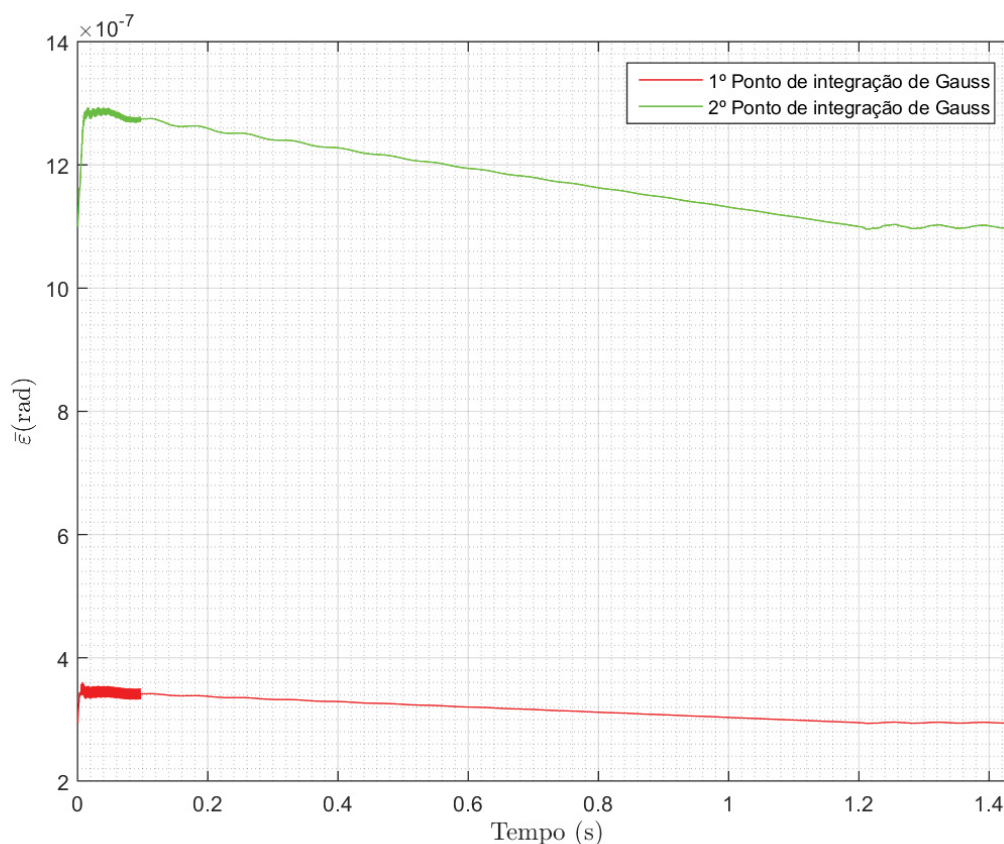


FONTE: O autor.

Observa-se, na Figura 43, que as respostas dinâmicas das  $\frac{d\theta}{dx}$  nos pontos de integração de Gauss do primeiro elemento têm sentidos inversos. Isso gera uma instabilidade nas deformações das camadas da seção transversal,  $\varepsilon_{x1} = -y \frac{d\theta}{dx}$ , o que ocasiona danos incompatíveis nos elementos próximos aos contornos da Figura 41.

Ao observar essa ocorrência e suas consequências nas respostas dinâmicas, de modo a evitar a propagação de erro no contorno ao longo do tempo, o presente trabalho traz como contribuição prescrever os deslocamentos no contorno, dentro do processo iterativo, como sendo nulos para cada iteração  $i$  dentro de cada passo de tempo  $\Delta t$  quando busca-se o vetor de deslocamentos incremental  $\{\Delta u\}_{t+\Delta t}$ . Deste modo, obtêm-se respostas de  $\frac{d\theta}{dx}$  coerentes, conforme são apresentadas na Figura 44, bem como respostas de danificação dinâmica plausíveis, apresentadas na Figura 45, em sequência.

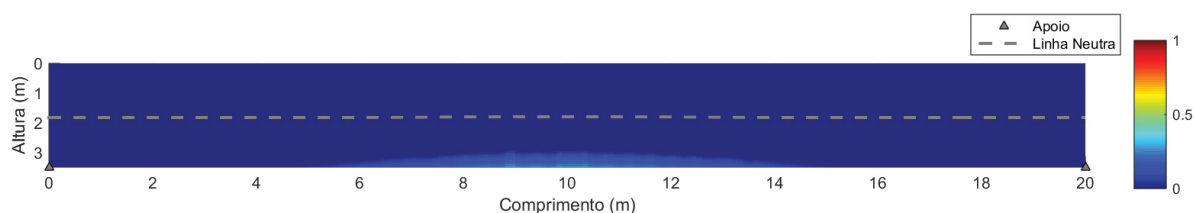
FIGURA 44 – Respostas dinâmicas de  $\frac{d\theta}{dx}$  estáveis obtidas com tratamento do erro de contorno ao longo do tempo



FONTE: O autor.

Observa-se, na Figura 44, que as respostas dinâmicas das  $\frac{d\theta}{dx}$  nos pontos de integração de *Gauss* do primeiro elemento possuem comportamento similar, sendo, portanto, coerentes.

FIGURA 45 – Resultado do processo de danificação dinâmico com tratamento de erro de contorno ao longo do tempo



FONTE: O autor.

Analisando a Figura 45, pode-se perceber que com a inclusão do tratamento proposto para a análise não linear ao longo do tempo, não ocorre danificação devido à propagação do erro numérico no contorno. Essa é mais uma contribuição ao programa ABXDNL que possibilita maior aprimoramento nas respostas obtidas.

## 5 ANÁLISES NUMÉRICAS

Neste Capítulo são descritos os resultados das simulações computacionais realizadas com os modelos apresentados no Capítulo anterior para validação dos experimentos numéricos.

Inicialmente, na Seção 5.1, são analisadas duas vigas biapoiadas sujeitas a carregamentos estáticos, tendo uma 6 m de vão, na Seção 5.1.1, e outra com 4 m de vão entre apoios e 10 cm em cada balanço, na Seção 5.1.2. Nestas simulações compara-se o modelo estático não linear proposto neste trabalho com resultados experimentais e de outras simulações computacionais.

A partir da Seção 5.2, são realizadas análises dinâmicas não lineares. Na Seção 5.2, analisa-se a influência da variação da taxa de armadura no processo dinâmico de danificação em uma viga de 6 m e outra de 20 m.

Na Seção 5.3, analisa-se a evolução do dano em seções transversais de diferentes geometrias.

A influência do comprimento dos balanços, em relação ao vão central, no processo de dinâmico de danificação é analisado na Seção 5.4.

Por fim, na Seção 5.5, faz-se uma simulação de um caso real de uma viga de ponte com seção transversal retangular e, em seguida, analisa-se uma viga hipotética de similar rigidez e seção transversal I.

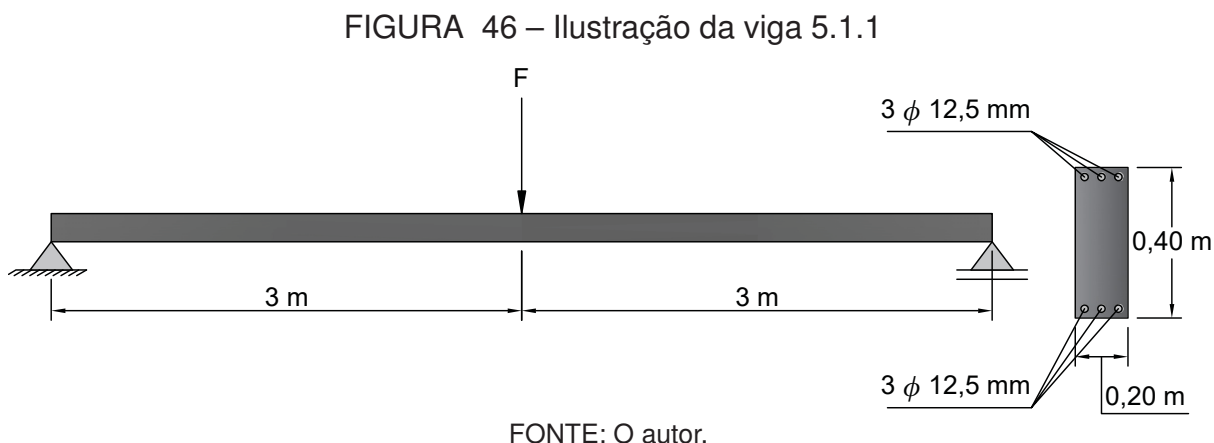
Ressalta-se que, embora sejam utilizados a vírgula para separador de casas decimais, nos gráficos de resultados obtidos a partir da implementação realizada utiliza-se o ponto para separador de casas decimais, como de praxe em programação computacional.

### 5.1 COMPARAÇÃO ENTRE MODELO COMPUTACIONAL ESTÁTICO NÃO LINEAR PROPOSTO E MODELO EXPERIMENTAL DE VIGAS COM CARREGAMENTO ESTÁTICO CRESCENTE

Nesta Seção, são analisadas duas vigas biapoiadas sujeitas a carregamentos estáticos crescentes. Aplica-se a modelagem proposta, a qual considera a Mecânica do Dano e a teoria da plasticidade, no intuito de validação do modelo numérico com os resultados experimentais.

### 5.1.1 Comparação com viga de 6 m de Jarek et al. (2011)

Nesta simulação analisa-se uma viga biapoiada com carregamento estático no meio do vão. É necessário dividir o carregamento em passos de carga  $\Delta F$  para capturar o efeito da não linearidade. A Figura 46 ilustra a geometria da viga, o carregamento e a distribuição de armaduras.



Compara-se o resultado de deslocamento obtido com os resultados da viga experimental ensaiada por Jarek et al. (2011), bem como demais modelos computacionais de Jarek et al. (2011), Souza, Machado e Abeche (2012) e Marconcin (2015).

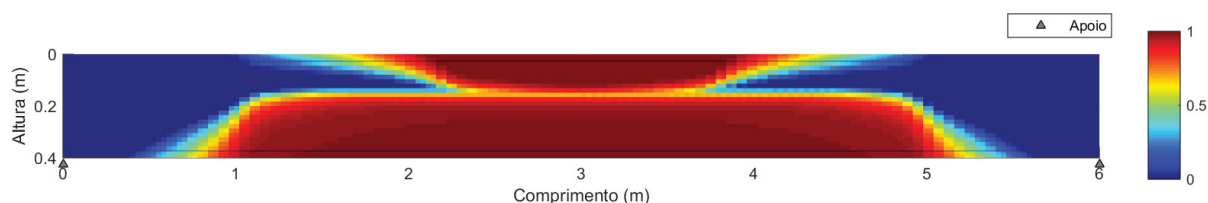
A Tabela 1 apresenta os dados de entrada da simulação.

TABELA 1 – Parâmetros da viga, carga, concreto e aço do modelo 5.1.1

Viga	Carga	Parâmetros do concreto	Parâmetros do aço
Elementos = 100 Camadas = 42	$F_{\text{máx}} = 50 \text{ kN}$ $\Delta F = 0,5 \text{ kN}$	$E_c = 30,20 \text{ GPa}$ $\nu_c = 0,2$ $\varepsilon_{d0} = 5,0 \cdot 10^{-5}$ $A_T = 0,7$ $B_T = 1,0 \cdot 10^4$ $A_C = 1,5$ $B_C = 1,0 \cdot 10^4$	$E_s = 210 \text{ GPa}$ $\nu_s = 0,3$ $\varepsilon_{sy} = 2 \text{ ‰}$ $k_s = 0,85$

A Figura 47 apresenta o resultado da danificação na viga ao final da análise.

FIGURA 47 – Configuração final de dano da viga 5.1.1



FONTE: O autor.

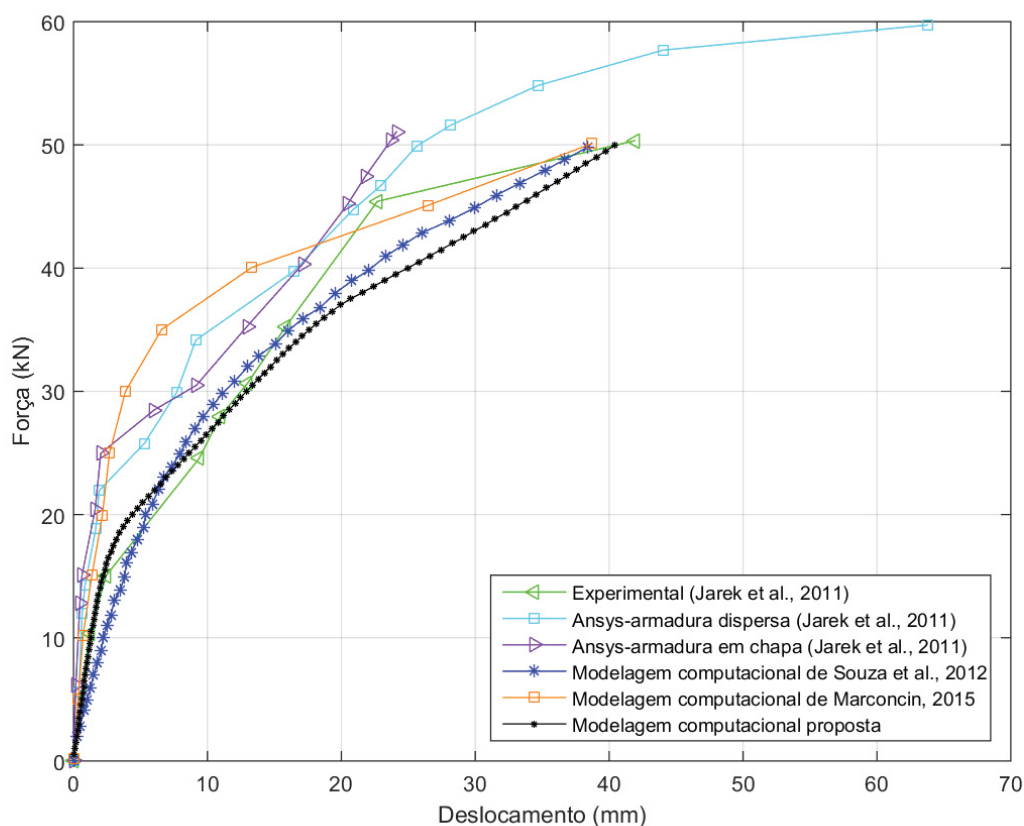
Observam-se, ao analisar a configuração final de danificação na Figura 47, duas regiões distintas de danificação cuja intersecção não está no centro geométrico da peça. Isto indica que houve variação da posição da linha neutra. Com sucessivos aumentos no incremento de carga, a viga inicia o processo de danificação por tração nas fibras inferiores. Na medida em que o dano se propaga, a posição da linha neutra se afasta do bordo inferior e o elemento perde rigidez. A partir de determinado passo de carga, a deformação da camada superior do elemento atinge a deformação de referência,  $\varepsilon_{d0}$ , de modo que se inicia o processo de danificação por compressão, esmagamento do concreto, já considerando o efeito de *Poisson* devido à tração. Este processo faz com que a posição da linha neutra se afaste do bordo superior, indo em direção às camadas de maior rigidez.

Observa-se, também, que a maior danificação ocorre no meio do vão. Entretanto, quando certa camada sofre danificação, as camadas dos elementos adjacentes são mais solicitadas devido ao reequilíbrio de esforços, por conta da mudança de rigidez, podendo ocasionar novos danos se a deformação destes elementos adjacentes também atingirem a deformação de referência. Na análise estática não linear realizada, o processo de danificação tende a ser mais suave. Se os elementos adjacentes não atingissem a deformação de referência, no entanto, a danificação seria pontual. Além disso, logicamente, as camadas de aço não sofrem danificação devido ao modelo implementado.

Deve-se ressaltar que este gráfico de danificação exibe as respostas de dano nos dois pontos de integração de Gauss de cada elemento. Apesar de, nos dois pontos, o elemento compartilhar uma mesma rigidez equivalente, as respostas de deformação variam de um ponto para outro. Este modo de exibição da configuração danificada é adotado em todas as análises deste trabalho.

A Figura 48 apresenta as respostas estáticas não lineares de deslocamento no meio vão do modelo proposto em comparação às respostas do modelo experimental e de demais simulações computacionais.

FIGURA 48 – Deslocamento máximo versus incremento de carga da viga 5.1.1



FONTE: O autor.

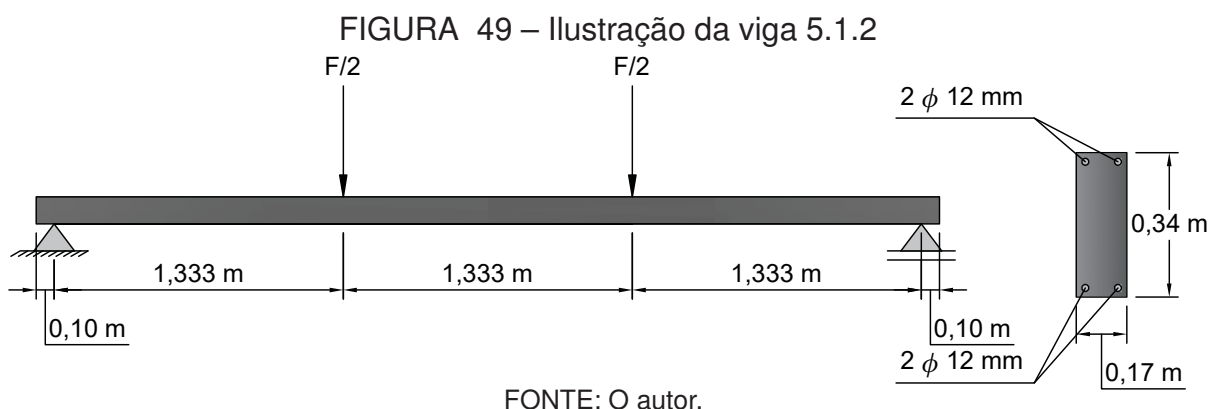
Ao analisar a Figura 48, observa-se que até aproximadamente 15 kN a resposta de deslocamento do modelo proposto ficou muito próxima à resposta experimental, enquanto o modelo de Souza, Machado e Abeche (2012), o qual utilizou o modelo clássico de dano de *Mazars* (1984) sem variação da posição da linha neutra e do momento de inércia das camadas, considerando, também, o critério de falha de *Tsai-Wu*, teve maior deslocamento e as demais simulações realizadas por Jarek et al. (2011) e Marconcin (2015) tiveram menor deslocamento.

Notam-se três trechos na resposta do modelo proposto. O primeiro trata-se de um trecho linear até aproximadamente 15 kN. Após essa carga, o processo de danificação por tração nas camadas inferiores se inicia, começando, assim, o comportamento não linear da curva. Inicia-se, também, o processo de danificação por compressão nas camadas superiores, equivalentes ao cobrimento superior do concreto. Durante esse processo de danificação por tração, mais acentuada, e por compressão, menos acentuada, tem-se o segundo trecho até aproximadamente 35 kN. A partir desta carga, a posição da linha neutra fica estabilizada, pois as camadas inferiores e superiores dos elementos mais centrais já estão com significativa danificação, o que impede a maior

variação da posição da linha neutra. Por conta disso, a partir dos 35 kN, há pouca variação de rigidez porque o concreto já está muito danificado, o que diminui a variação da inclinação da resposta no terceiro trecho. O resultado final do modelo proposto ficou mais próximo ao modelo experimental em relação às demais simulações.

### 5.1.2 Comparação com viga de 4 m entre apoios de Mazars e Grange (2017)

Nesta simulação compara-se o modelo estático não linear proposto com o resultado experimental e de simulação numérica de Mazars e Grange (2017). Há duas cargas de mesma intensidade aplicadas nos terços centrais do vão, o que ocasiona uma situação de flexão pura nesta região. A Figura 49 apresenta este carregamento e a viga em análise.



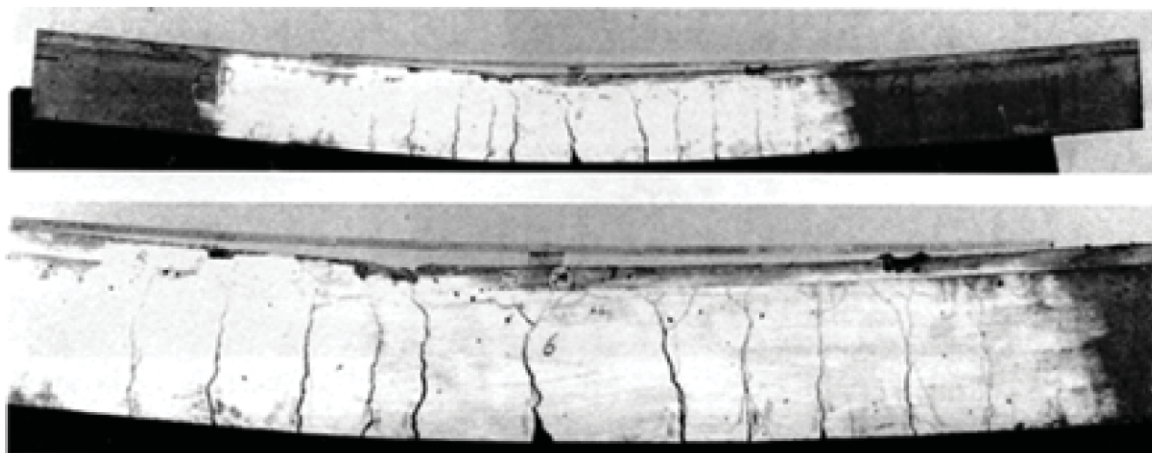
A Tabela 2 apresenta os parâmetros de entrada utilizados nesta simulação. Adotaram-se os mesmos parâmetros de calibração no modelo de dano de Mazars e Grange (2017).

TABELA 2 – Parâmetros da viga, carga, concreto e aço do modelo 5.1.2

Viga	Carga	Parâmetros do concreto	Parâmetros do aço
Elementos = 168 Camadas = 82	$F_{\text{máx}} = 73 \text{ kN}$ $\Delta F = 0,73 \text{ kN}$	$E_c = 30,20 \text{ GPa}$ $\nu_c = 0,2$ $\varepsilon_{d0} = 3,3 \cdot 10^{-5}$ $A_T = 0,9$ $B_T = 2,0 \cdot 10^4$ $A_C = 1,35$ $B_C = 300$	$E_s = 210 \text{ GPa}$ $\nu_s = 0,3$ $\varepsilon_{sy} = 2 \text{ ‰}$ $k_s = 0,85$

A Figura 50 apresenta a configuração final da viga em ensaio experimental.

FIGURA 50 – Condição final da viga 5.1.2 em modelo experimental

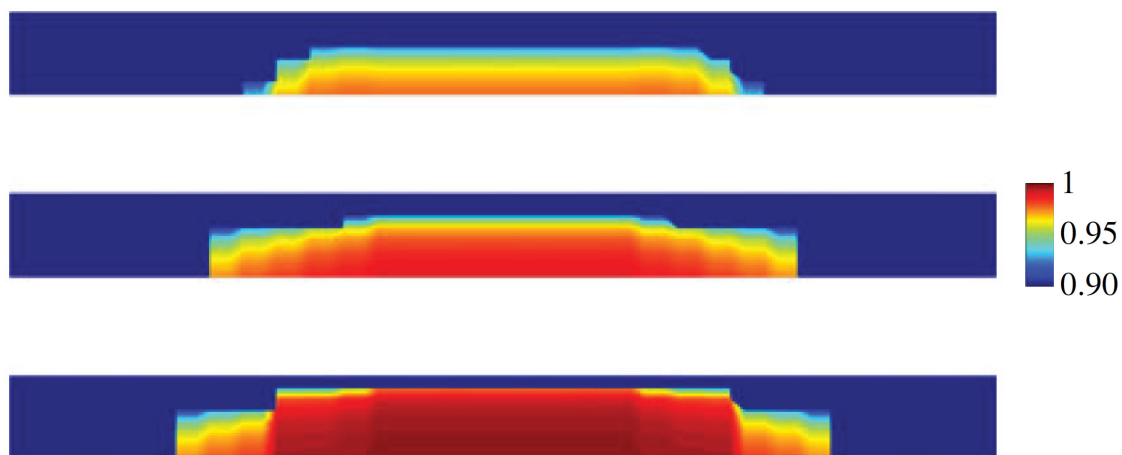


FONTE: Mazars e Grange, 2017.

Percebe-se o estado de fissuração da peça analisada.

A Figura 51 apresenta a evolução do processo de danificação em diferentes etapas da análise computacional de Mazars e Grange (2017).

FIGURA 51 – Evolução de dano em modelagem computacional da viga 5.1.2

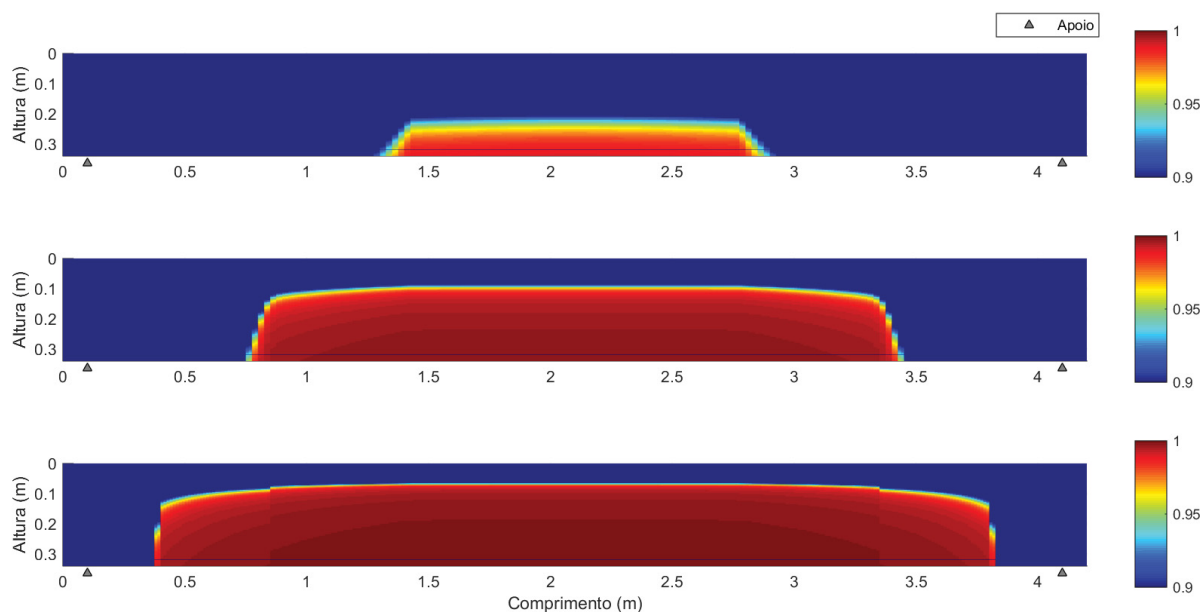


FONTE: Mazars e Grange, 2017.

Na resposta apresentada na Figura anterior, houve variação da posição da linha neutra e a evolução do dano ocorreu por tração.

A Figura 52 apresenta a evolução do processo de danificação obtido na simulação computacional proposta para diferentes etapas.

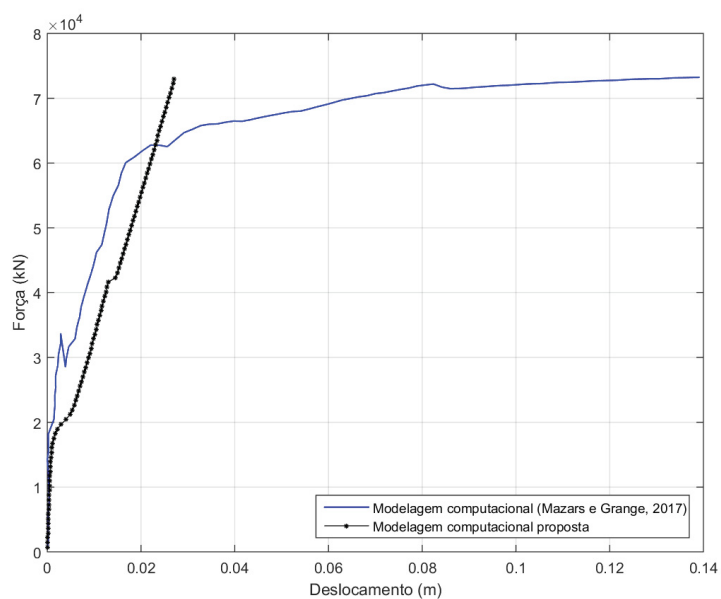
FIGURA 52 – Evolução de dano da viga 5.1.2



FONTE: O autor.

Similarmente à resposta da evolução do processo de danificação obtido por Mazars e Grange (2017), houve variação da posição da linha neutra e a danificação ocorreu por tração de forma semelhante nas etapas de deterioração.

A Figura 53 compara as respostas de deslocamento obtidas em ambas as análises.

FIGURA 53 – Deslocamento máximo *versus* incremento de carga da viga 5.1.2

FONTE: O autor.

Nota-se, na Figura 53, a diferença nas respostas de deslocamento. A simulação realizada por Mazars e Grange (2017) considera os efeitos da perda de aderência entre o concreto e o aço. Por esse motivo, as respostas de deslocamento, em sua análise, são maiores por conta de tais considerações. No modelo proposto, em que não considera-se o escorregamento da armadura e o escoamento do aço de modo mais realista, o efeito da plastificação é menos significativo nas respostas de deslocamento, principal motivo que diferencia as respostas.

Observa-se que a plastificação da armadura no modelo proposto ocorreu por volta de 4,2 kN, o que ocasionou um salto na resposta. Na resposta de Mazars e Grange (2017), no entanto, o escorregamento e o escoamento da armadura provocaram grandes deslocamentos no meio do vão da viga de concreto armado a partir de 6,2 kN.

## 5.2 INFLUÊNCIA DA TAXA DE ARMADURA NO PROCESSO DE DANIFICAÇÃO DINÂMICA DE VIGAS DE PONTE

Nesta Seção verifica-se a influência da taxa de armadura na evolução dinâmica do dano em vigas de ponte de concreto armado. Também é analisada a influência do vão entre apoios nas respostas dinâmicas. Segundo a NBR 6118 (2014), a taxa de armadura,  $\rho$ , em vigas de concreto armado deve manter-se entre  $0,15\%A_c \leq \rho \leq 4\%A_c$ , onde  $A_c$  é a área de concreto da seção transversal. Como o intuito desta análise é, especificamente, observar a influência da taxa de armadura nas respostas dinâmicas, optou-se por adotar uma única distribuição de armadura ao longo do comprimento da viga.

A partir desta análise, todas as simulações computacionais consideram um veículo de 1 grau de liberdade, massa-mola-amortecedor, em movimento no sentido da esquerda para a direita com velocidade constante, sem consideração de irregularidades, bem como análises dinâmicas não lineares. Além disso, em todas as análises subsequentes deste trabalho o tempo de análise consiste no tempo necessário para o veículo percorrer todo o comprimento da ponte acrescido de 50% do tempo, de modo a captar o efeito do amortecimento em vibração livre, ou seja, após a saída do veículo da ponte.

A Figura 54 ilustra a viga de ponte em análise.

FIGURA 54 – Ilustração da Ponte 5.2



FONTE: O autor.

A Tabela 3 apresenta os dados de entrada do modelo.

TABELA 3 – Parâmetros do veículo, concreto, aço e de *Newmark* adotados para os modelos 5.2

Veículo	Parâmetros do concreto	Parâmetros do aço	Parâmetros de <i>Newmark</i>
$m_1 = 4.400 \text{ kg}$	$E_c = 29,43 \text{ GPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$	$\gamma = 0,5$
$m_2 = 13.200 \text{ kg}$	$\nu_c = 0,2$	$\nu_s = 0,3$	$\beta = 0,25$
$k = 9.120 \text{ kN/m}$	$\varepsilon_{d0} = 1,0 \cdot 10^{-4}$	$\varepsilon_{sy} = 2 \text{ ‰}$	$dt = 6,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$
$c = 96 \text{ kNs/m}$	$A_T = 0,7$	$k_s = 0,85$	$\zeta = 0,025$
$v = 60 \text{ km/h}$	$B_T = 1,0 \cdot 10^4$		
	$A_C = 1,5$		
	$B_C = 1,0 \cdot 10^4$		

### 5.2.1 Viga de 6 m biapoiada

Nesta Seção será analisada a viga de 6 m com diferentes taxas de armadura.

A Tabela 4 apresenta os dados de entrada geométricos da seção 5.2.1.

TABELA 4 – Parâmetros da ponte 5.2.1

h (m)	b (m)	L (m)	Elementos finitos	Distribuições de armadura	Passos de tempo
1,00	0,30	6,00	30	1	900

A Tabela 5 especifica os parâmetros das armaduras de cada análise.

TABELA 5 – Distribuições de armadura das pontes 5.2.1

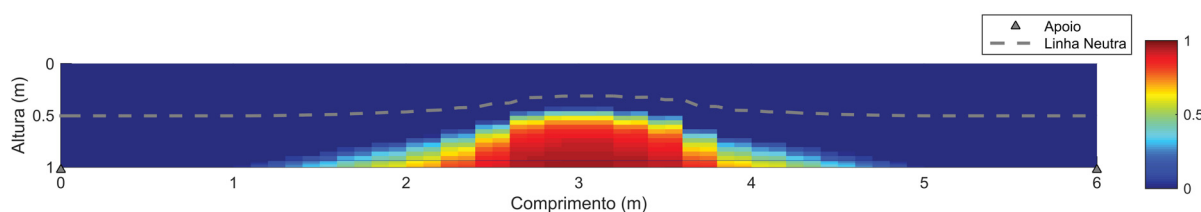
Armadura inferior	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura superior	$A_s'$ (cm <sup>2</sup> )	$\rho$ (%)	Camadas
2 $\phi$ 25 mm	9,82	4 $\phi$ 12,5 mm	4,91	0,49	42
6 $\phi$ 25 mm	29,45	4 $\phi$ 12,5 mm	4,91	1,16	53
8 $\phi$ 25 mm	39,27	4 $\phi$ 12,5 mm	4,91	1,49	64
10 $\phi$ 25 mm	49,09	6 $\phi$ 25 mm	29,45	2,69	86
14 $\phi$ 25 mm	68,72	8 $\phi$ 25 mm	68,72	3,73	119

Dimensionou-se a viga, conforme a NBR 6118, onde encontrou-se uma taxa de armadura  $\rho = 1,49\%$  para o carregamento descrito. Para verificar a influência da taxa de armadura, variou-se esse percentual entre  $0,49\%$  e  $3,73\%$ , de modo a manter-se dentro dos limites estabelecidos por norma.

#### 5.2.1.1 $\rho = 0,49\%$

A Figura 55 apresenta a configuração danificada da viga na etapa final da análise computacional.

FIGURA 55 – Configuração final de dano da viga 5.2.1.1

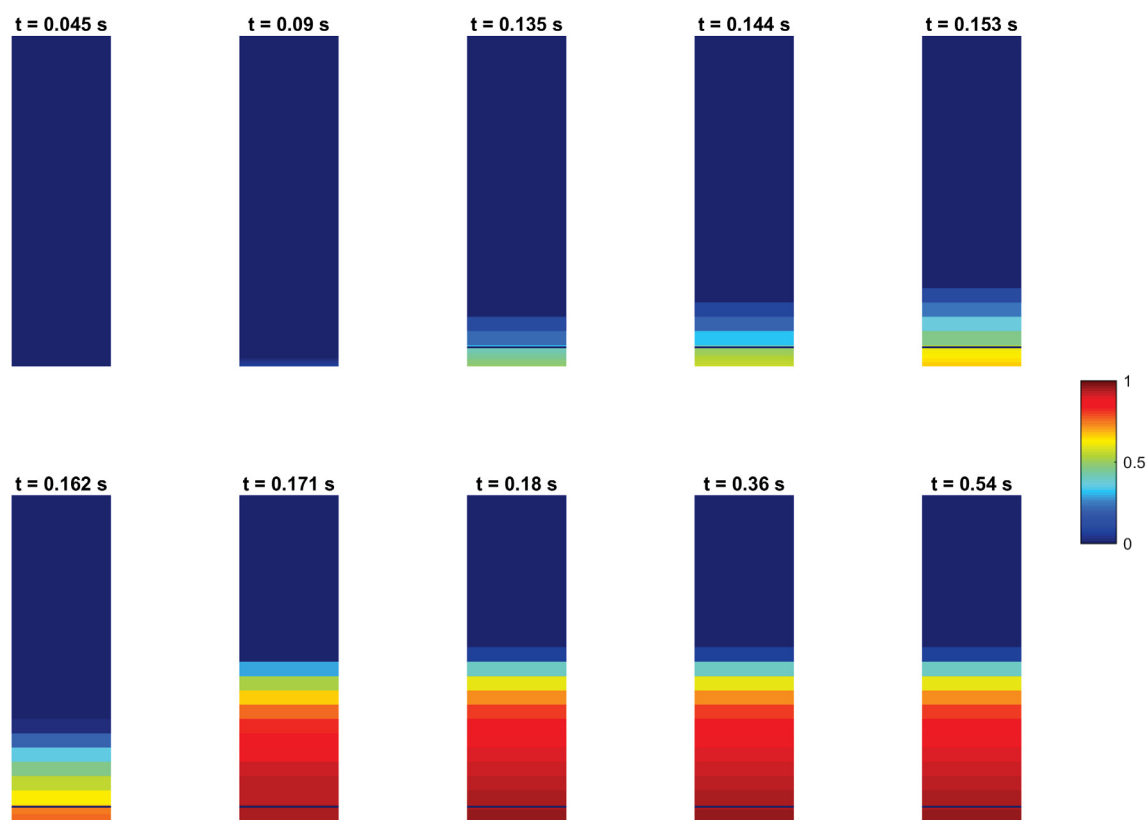


FONTE: O autor.

Ao analisar a Figura anterior, nota-se a danificação nas camadas inferiores dos elementos centrais, assim como a variação da posição da linha neutra neste trecho.

A Figura 56 demonstra a evolução do dano no elemento central da viga ao longo do tempo.

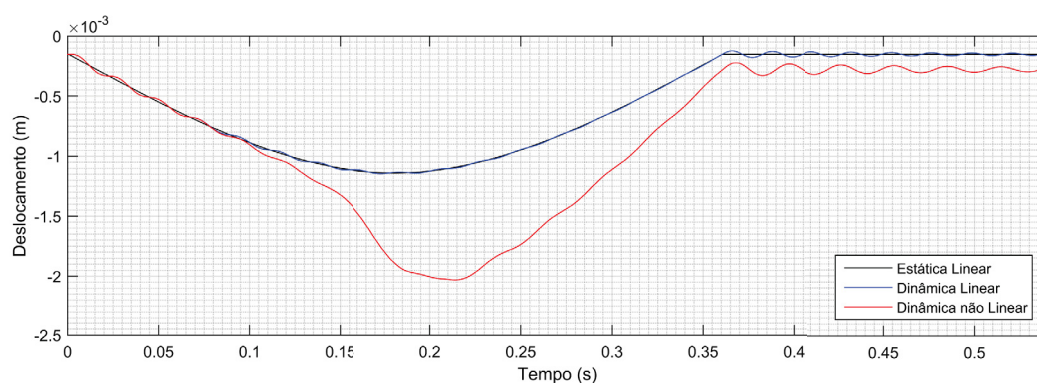
FIGURA 56 – Evolução do dano no 15º elemento da viga 5.2.1.1



FONTE: O autor.

A Figura 57 apresenta as respostas estática e dinâmica, lineares e não lineares, de deslocamento no nó central da viga.

FIGURA 57 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.1.1



FONTE: O autor.

O veículo entra na ponte no instante de tempo  $t = 0,00$  s. O carregamento dinâmico gerado pelo veículo é considerado na forma de um pulso até sua estabilização, devido à mola e ao amortecedor, tornando-se, então, constante até sua saída da ponte.

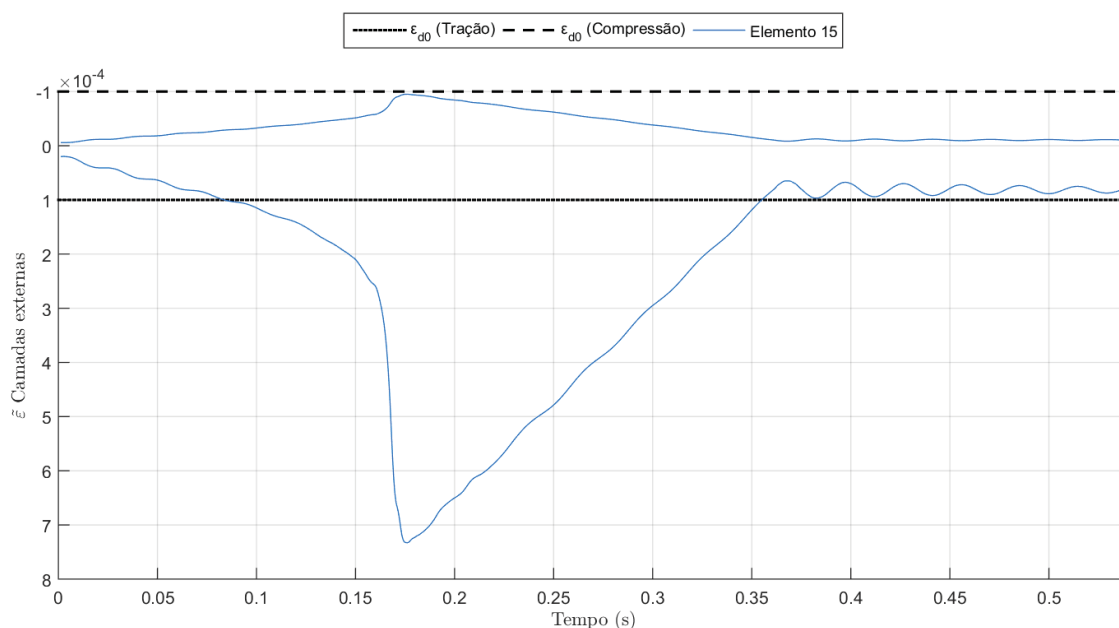
Seus efeitos dinâmicos são transmitidos à ponte de forma desacoplada. No entanto, a viga de ponte possui deslocamento prescrito devido à consideração mais apropriada do peso próprio no modelo. O peso próprio, portanto, não é analisado em forma de pulso, e sim de forma prescrita. Tal consideração, este carregamento, é mais realista. Essa consideração é adotada para todas as análises. Analogamente, as condições iniciais, tanto para a dinâmica linear como para a dinâmica não linear, são feitas partindo da configuração deformada pelo do peso próprio.

Ao analisar a Figura 57, observa-se que a resposta dinâmica linear oscila em torno da resposta estática de deslocamento. Conforme observado na Figura 56, o dano não se inicia de forma imediata na análise. Portanto, neste intervalo de tempo onde não ocorre danificação, as respostas dinâmicas não linear e linear são idênticas. No instante de tempo  $t = 0,08$  s essas respostas diferenciam-se devido ao processo de danificação.

É evidente, na medida em que a análise prossegue, que a danificação aumenta gradativamente de modo que a resposta dinâmica não linear é amplificada. No instante de tempo  $t = 0,36$  s, o veículo deixa a ponte. A partir deste instante, a resposta estática linear retorna à posição inicial, enquanto na resposta dinâmica linear há oscilação em torno da estática. Observa-se o efeito do amortecimento de *Rayleigh* nas respostas. Por outro lado, na resposta dinâmica não linear, a configuração de deslocamento da viga fica permanentemente alterada, apresentando respostas maiores que as lineares.

A Figura 58 apresenta, exclusivamente, as respostas dinâmicas não lineares de deformação das camadas externas, superior e inferior, do elemento central. Neste gráfico, também, são mostrados os limites da deformação de referência  $\varepsilon_{d0}$  na tração e na compressão.

FIGURA 58 – Deformações das camadas superior e inferior do 15º elemento da viga 5.2.1.1



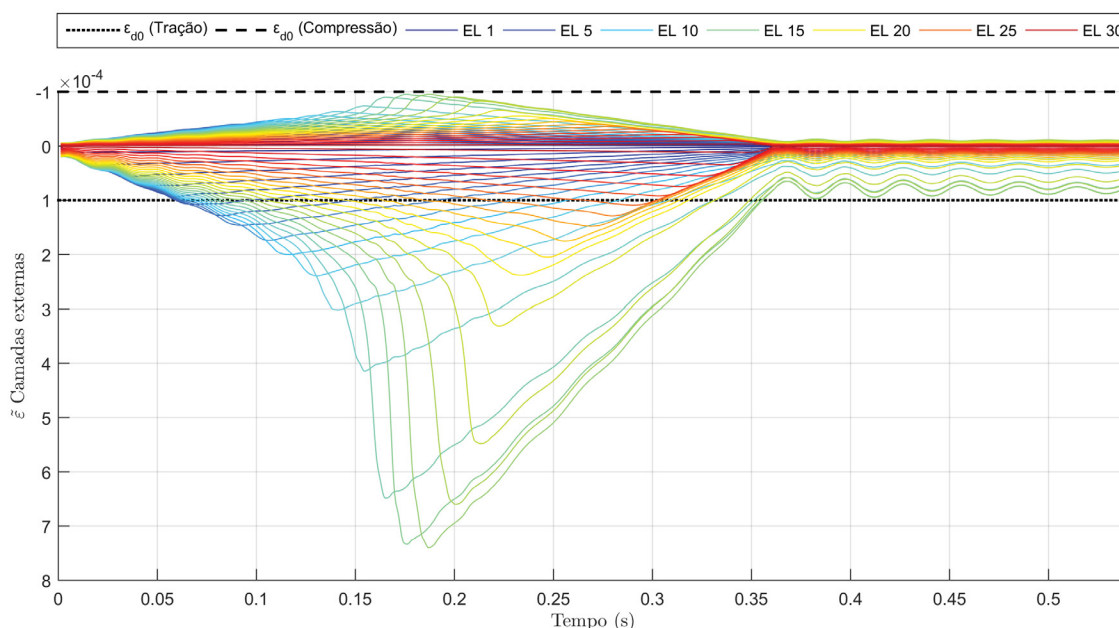
FONTE: O autor.

Na Figura anterior, é possível confirmar a observação feita na análise da Figura 57 de que o processo de danificação inicia-se em aproximadamente em  $t = 0,08$  s. No instante em que  $\tilde{\varepsilon}$  ultrapassa o valor  $\varepsilon_{d0}$  o dano se inicia. Não houve, nesta análise, danificação devido à deformação de compressão.

Observa-se, ao final da análise, que a deformação da camada externa inferior tracionada tende a estabilizar-se em uma posição maior do que o valor inicial. Isto ocorre devido à mudança da configuração de deslocamento da viga, à variação da posição da linha neutra e à variação do momento de inércia. Embora o modelo clássico de dano de *Mazars* (1984) seja elástico não linear, ou seja, numa situação de descarregamento não há deformação permanente, no modelo proposto adaptado, devido a tais considerações, há uma deformação permanente associada quando ocorre a danificação.

A Figura 59 mostra a mesma análise para todos os elementos finitos da viga de ponte, ou seja, apresenta o espectro de respostas dinâmicas não lineares de deformação.

FIGURA 59 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.1.1



FONTE: O autor.

A Tabela 6 apresenta as cinco primeiras frequências naturais da viga analisada. Esta compara os valores sem considerar a danificação, após a danificação e a variação entre elas.

TABELA 6 – Frequências naturais da ponte 5.2.1.1

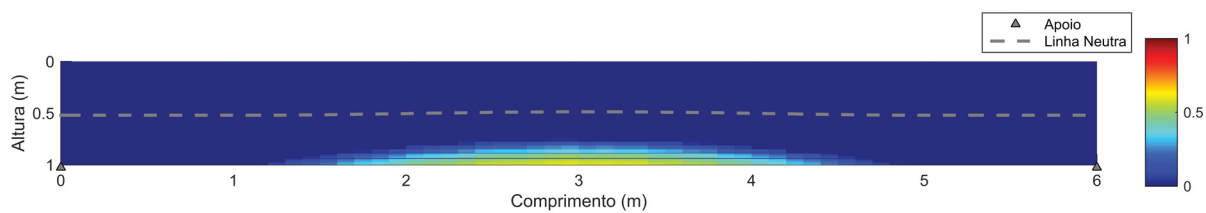
Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	285,07	214,83	-24,64
2 <sup>a</sup>	1140,42	1048,16	-8,09
3 <sup>a</sup>	2566,51	2204,79	-14,09
4 <sup>a</sup>	4564,14	3980,53	-12,79
5 <sup>a</sup>	7134,42	6232,13	-12,65

Nota-se uma redução representativa na primeira frequência natural de vibração da estrutura de 24,64%. Tal redução ocorre devido à perda de rigidez do concreto.

#### 5.2.1.2 $\rho = 1,16\%$

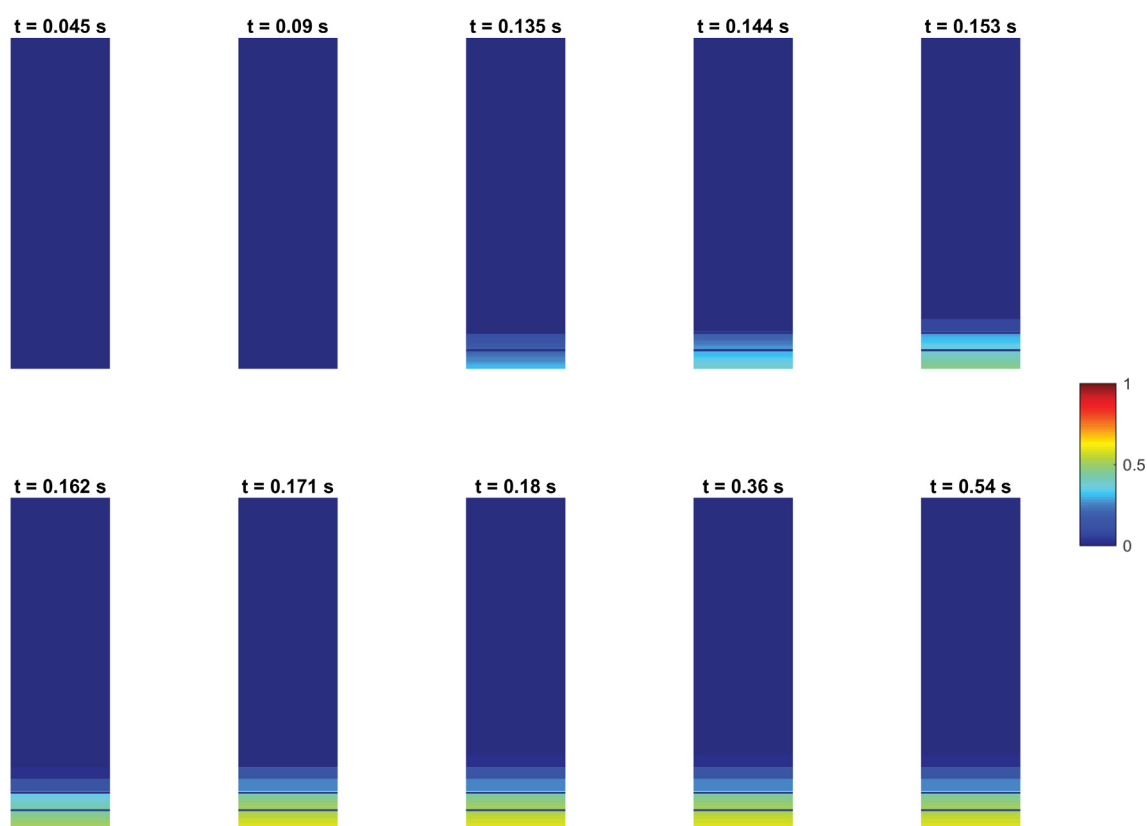
As Figuras 60, 61 e 62 apresentam, respectivamente, a configuração danificada final da viga, a evolução do dano no elemento central ao longo do tempo e as respostas estática e dinâmicas de deslocamento no nó central.

FIGURA 60 – Configuração final de dano da viga 5.2.1.2



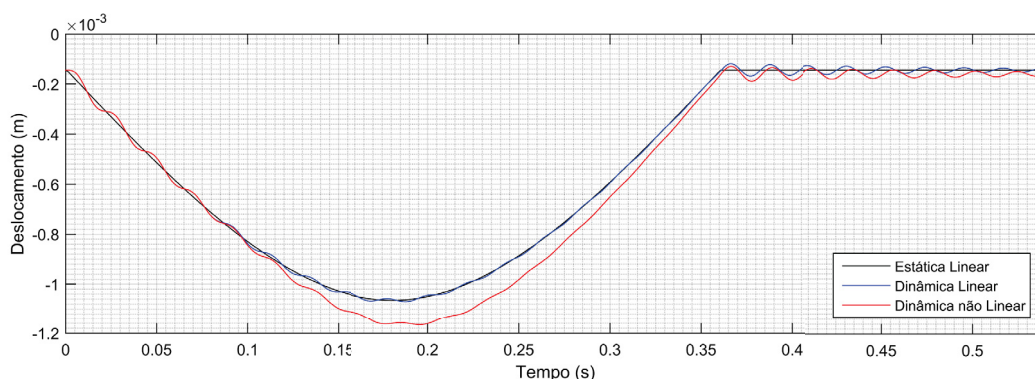
FONTE: O autor.

FIGURA 61 – Evolução do dano no 15º elemento da viga 5.2.1.2



FONTE: O autor.

FIGURA 62 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.1.2

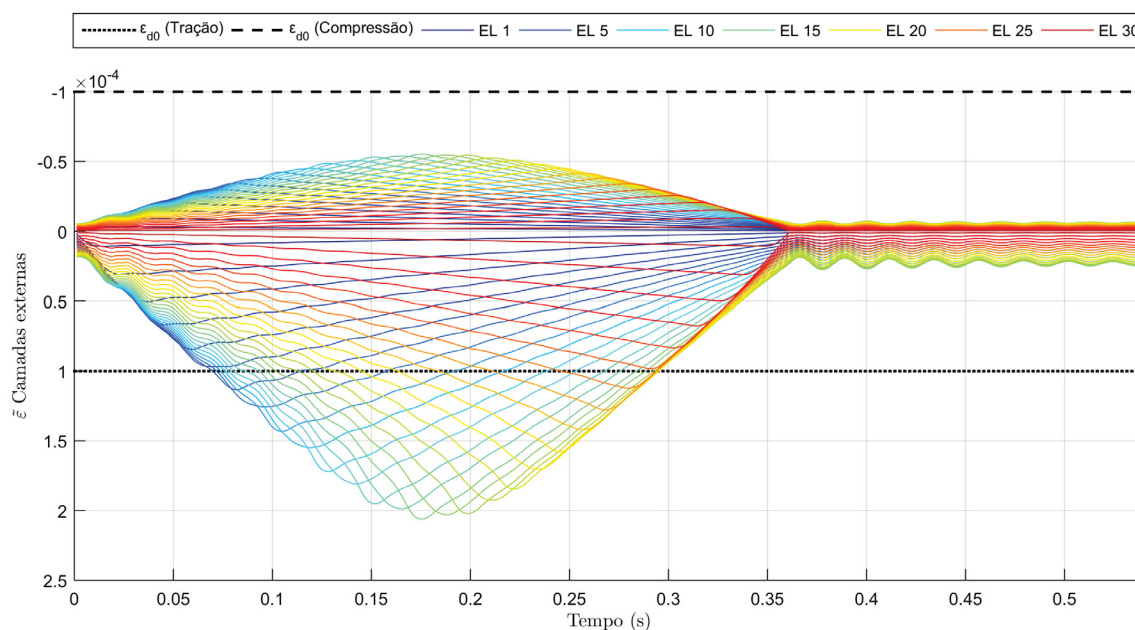


FONTE: O autor.

Ao analisar as Figuras 60, 61 e 62, em comparação com a análise de  $\rho = 0,49\%$ , nota-se que a redução no dano, ocasionada pelo ganho de rigidez por conta do aumento na taxa de armadura, faz com que a resposta dinâmica não linear de deslocamento aproxime-se das respostas lineares.

A Figura 63 e a Tabela 7 apresentam, respectivamente, as deformações equivalentes das camadas externas de todos os elementos e as frequências naturais de vibração obtidas.

FIGURA 63 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.1.2



FONTE: O autor.

TABELA 7 – Frequências naturais da ponte 5.2.1.2

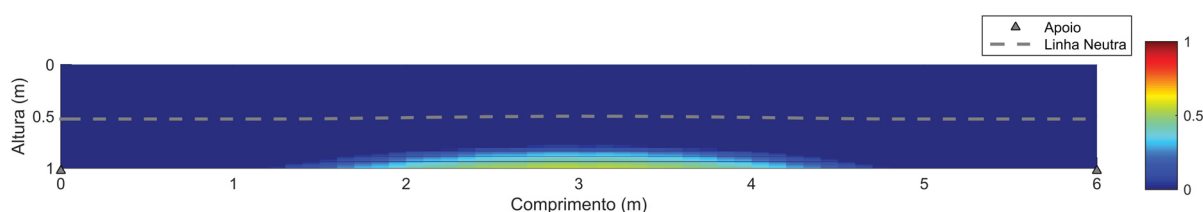
Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	293,10	279,18	-4,75
2 <sup>a</sup>	1172,56	1147,86	-2,11
3 <sup>a</sup>	2638,86	2568,91	-2,65
4 <sup>a</sup>	4692,79	4561,89	-2,79
5 <sup>a</sup>	7335,53	7131,76	-2,78

Comparando a Figura 63 com a Figura 59, observa-se que as deformações equivalentes das camadas externas apresentam valores significativamente menores na última análise, o que, de certa forma, resulta em uma menor propagação do dano. Por esse motivo, houve menor variação das frequências naturais, conforme observado na Tabela 7.

### 5.2.1.3 $\rho = 1,49\%$

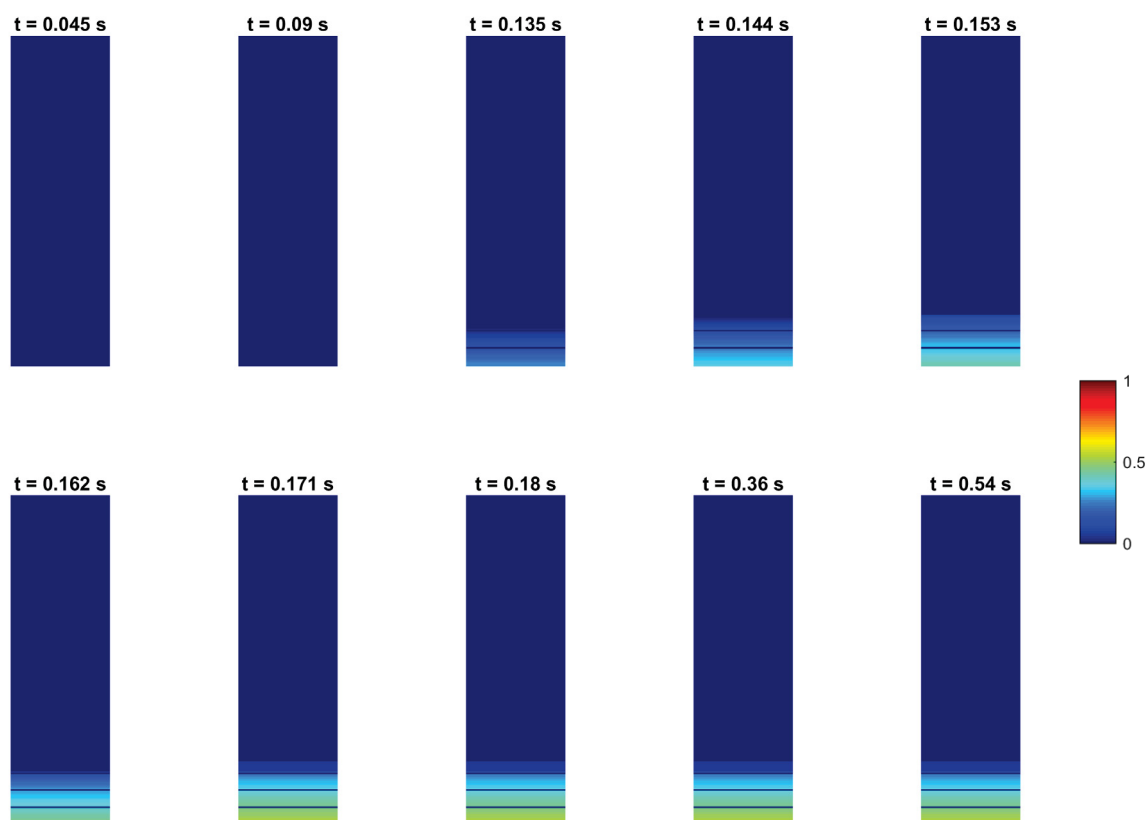
As Figuras 64, 65 e 66 apresentam a configuração danificada final da viga, a evolução do dano no elemento central ao longo do tempo e as respostas estática e dinâmicas de deslocamento no nó central, respectivamente.

FIGURA 64 – Configuração final de dano da viga 5.2.1.3



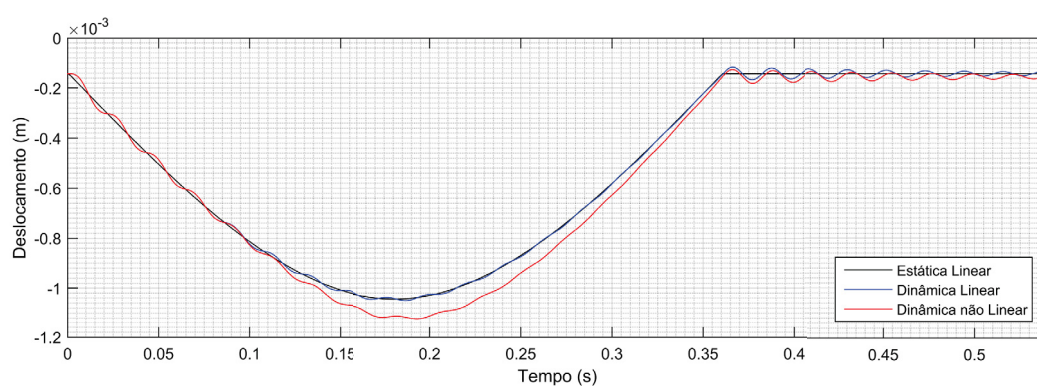
FONTE: O autor.

FIGURA 65 – Evolução do dano no 15º elemento da viga 5.2.1.3



FONTE: O autor.

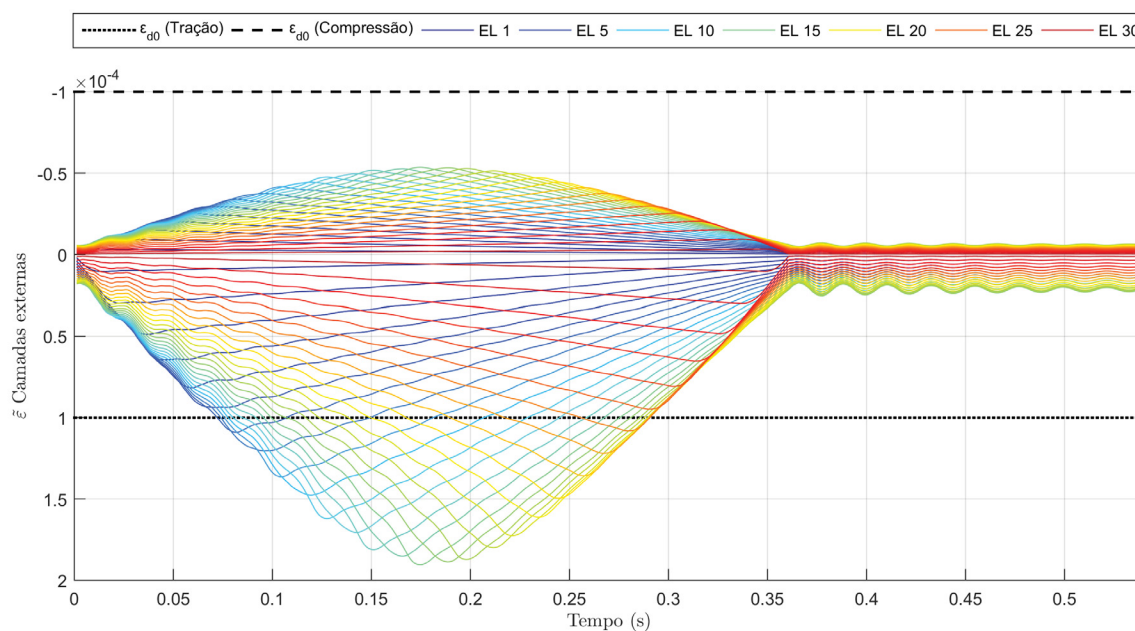
FIGURA 66 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.1.3



FONTE: O autor.

A Figura 67 e a Tabela 8 apresentam as deformações equivalentes das camadas externas de todos os elementos e as frequências naturais de vibração.

FIGURA 67 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.1.3



FONTE: O autor.

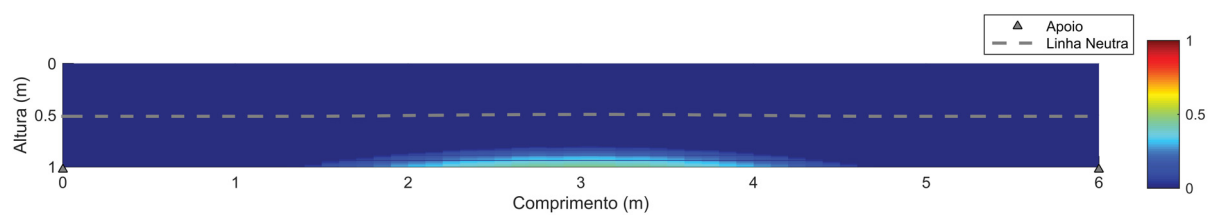
TABELA 8 – Frequências naturais da ponte 5.2.1.3

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	295,08	283,97	-3,77
2 <sup>a</sup>	1180,49	1161,22	-1,63
3 <sup>a</sup>	2656,70	2601,27	-2,09
4 <sup>a</sup>	4724,52	4619,23	-2,23
5 <sup>a</sup>	7385,12	7222,93	-2,20

#### 5.2.1.4 $\rho = 2,69\%$

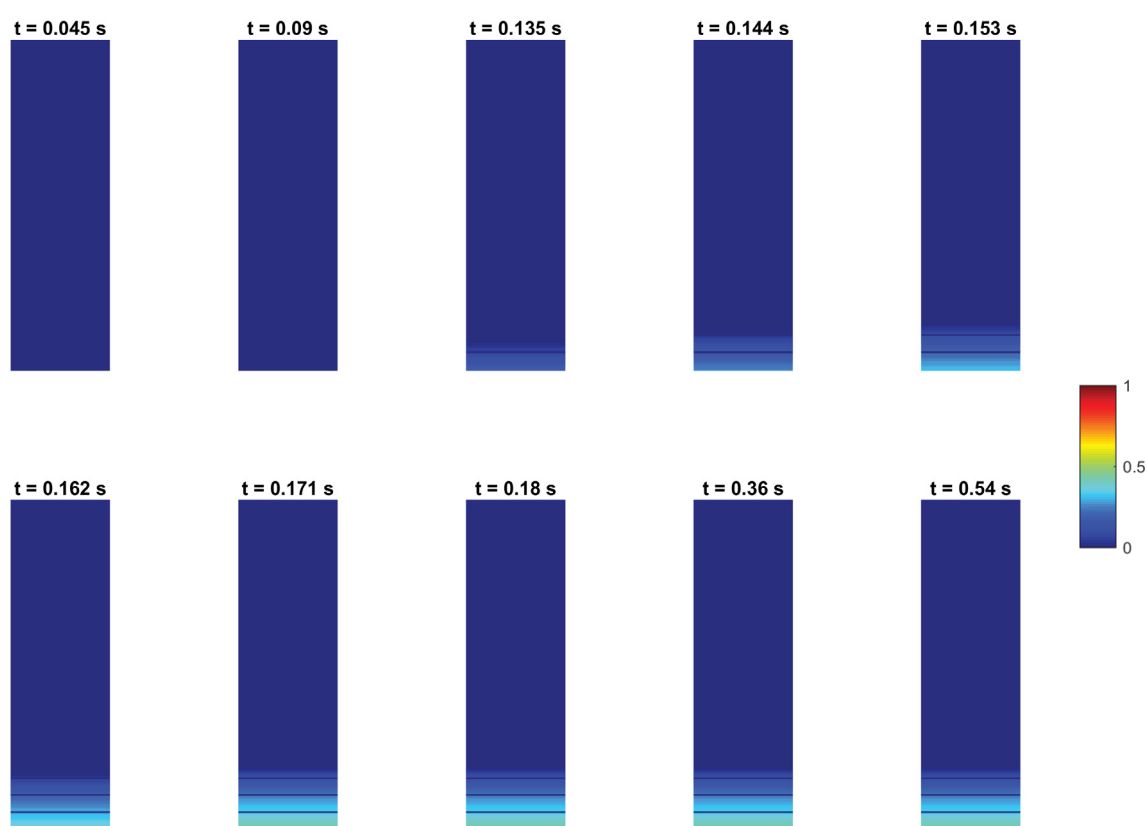
As Figuras 68, 69 e 70 apresentam a configuração danificada final da viga, a evolução do dano no elemento central ao longo do tempo e as respostas estática e dinâmicas de deslocamento no nó central, respectivamente.

FIGURA 68 – Configuração final de dano da viga 5.2.1.4



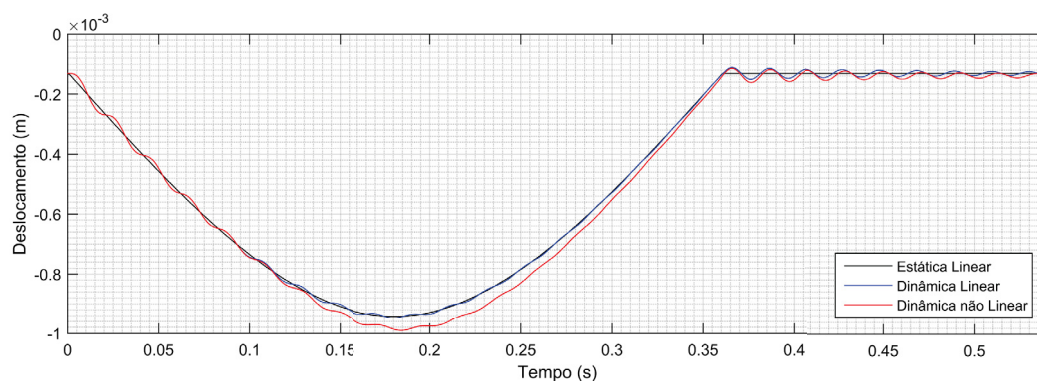
FONTE: O autor.

FIGURA 69 – Evolução do dano no 15º elemento da viga 5.2.1.4



FONTE: O autor.

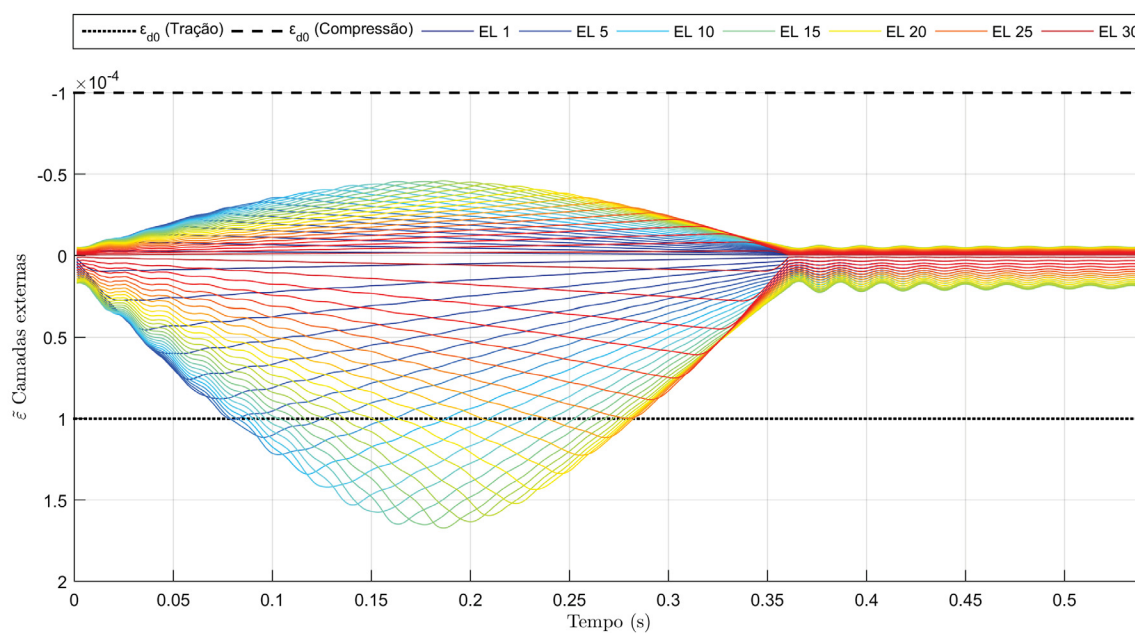
FIGURA 70 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.1.4



FONTE: O autor.

A Figura 71 e a Tabela 9 apresentam as deformações equivalentes das camadas externas de todos os elementos e as frequências naturais de vibração.

FIGURA 71 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.1.4



FONTE: O autor.

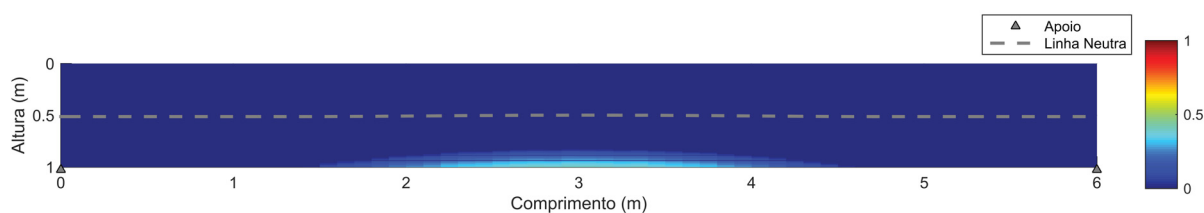
TABELA 9 – Frequências naturais da ponte 5.2.1.4

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	307,39	299,85	-2,45
2 <sup>a</sup>	1229,72	1218,15	-0,94
3 <sup>a</sup>	2767,48	2729,18	-1,38
4 <sup>a</sup>	4921,53	4850,79	-1,44
5 <sup>a</sup>	7693,07	7586,74	-1,38

5.2.1.5  $\rho = 3,73\%$ 

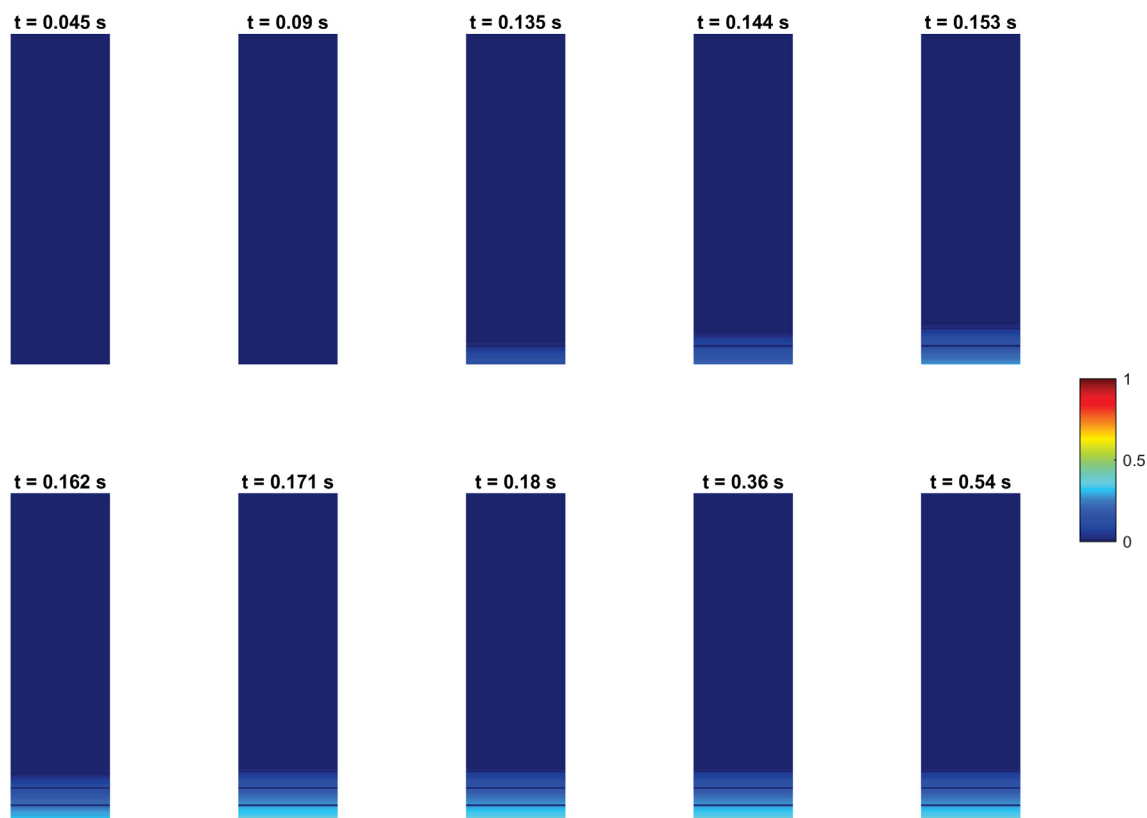
As Figuras 72, 73 e 74 apresentam a configuração danificada final da viga, a evolução do dano no elemento central ao longo do tempo e as respostas estática e dinâmicas de deslocamento no nó central, respectivamente.

FIGURA 72 – Configuração final de dano da viga 5.2.1.5



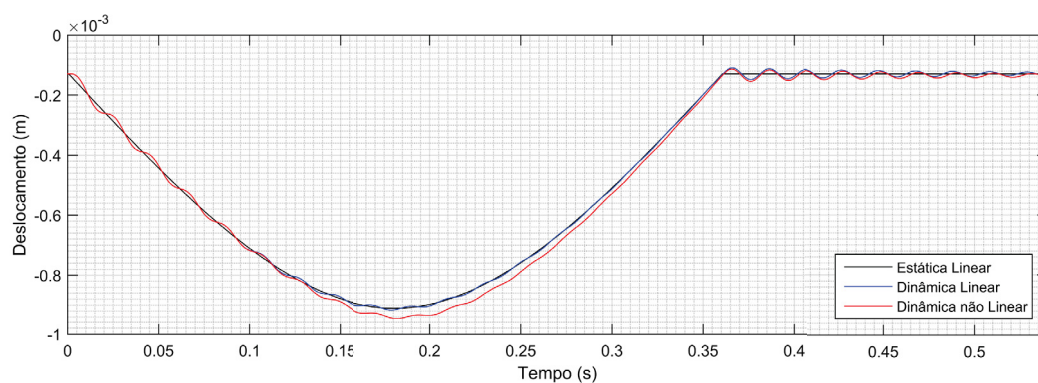
FONTE: O autor.

FIGURA 73 – Evolução do dano no 15º elemento da viga 5.2.1.5



FONTE: O autor.

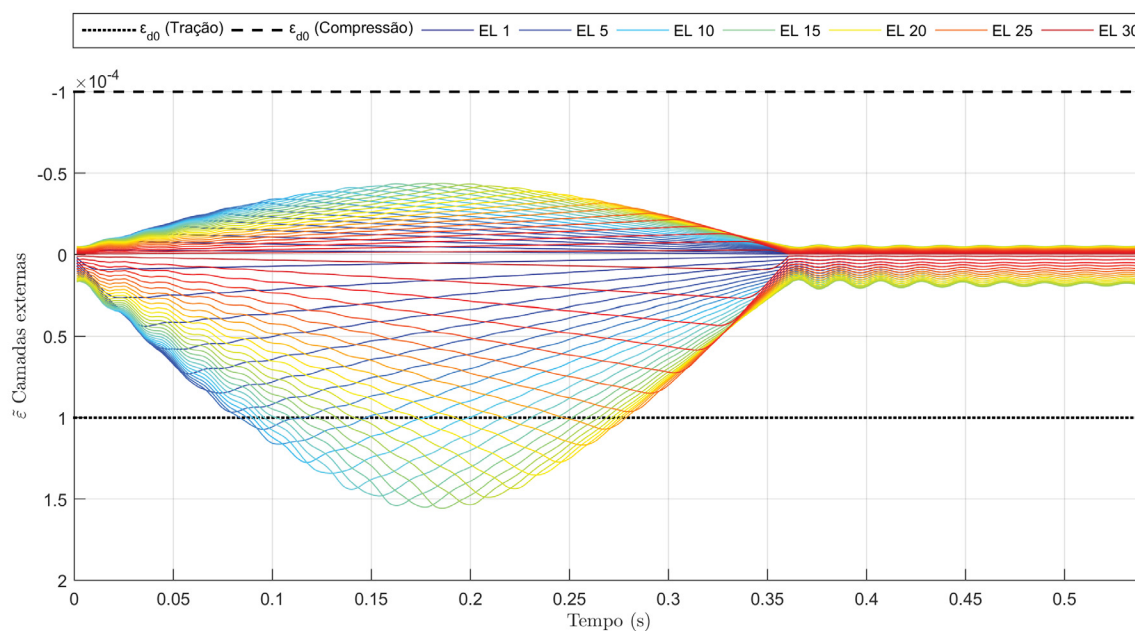
FIGURA 74 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.1.5



FONTE: O autor.

A Figura 75 e a Tabela 10 apresentam as deformações equivalentes das camadas externas de todos os elementos e as frequências naturais de vibração.

FIGURA 75 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.1.5



FONTE: O autor.

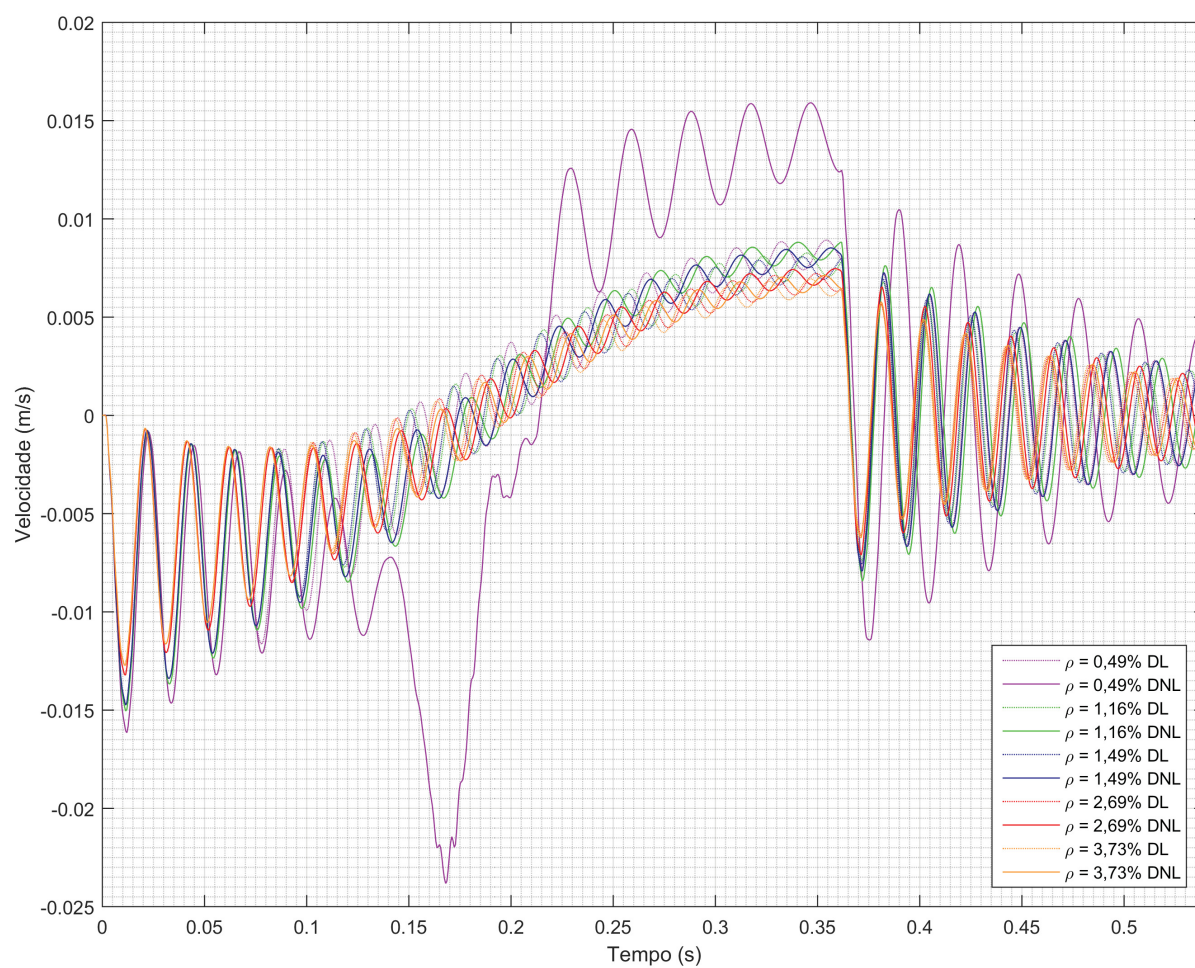
TABELA 10 – Frequências naturais da ponte 5.2.1.5

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	309,91	304,36	-1,79
2 <sup>a</sup>	1239,82	1231,78	-0,65
3 <sup>a</sup>	2790,23	2761,64	-1,02
4 <sup>a</sup>	4961,99	4910,04	-1,05
5 <sup>a</sup>	7756,31	7679,21	-0,99

#### 5.2.1.6 Comparação entre as análises da viga de 6 m e considerações

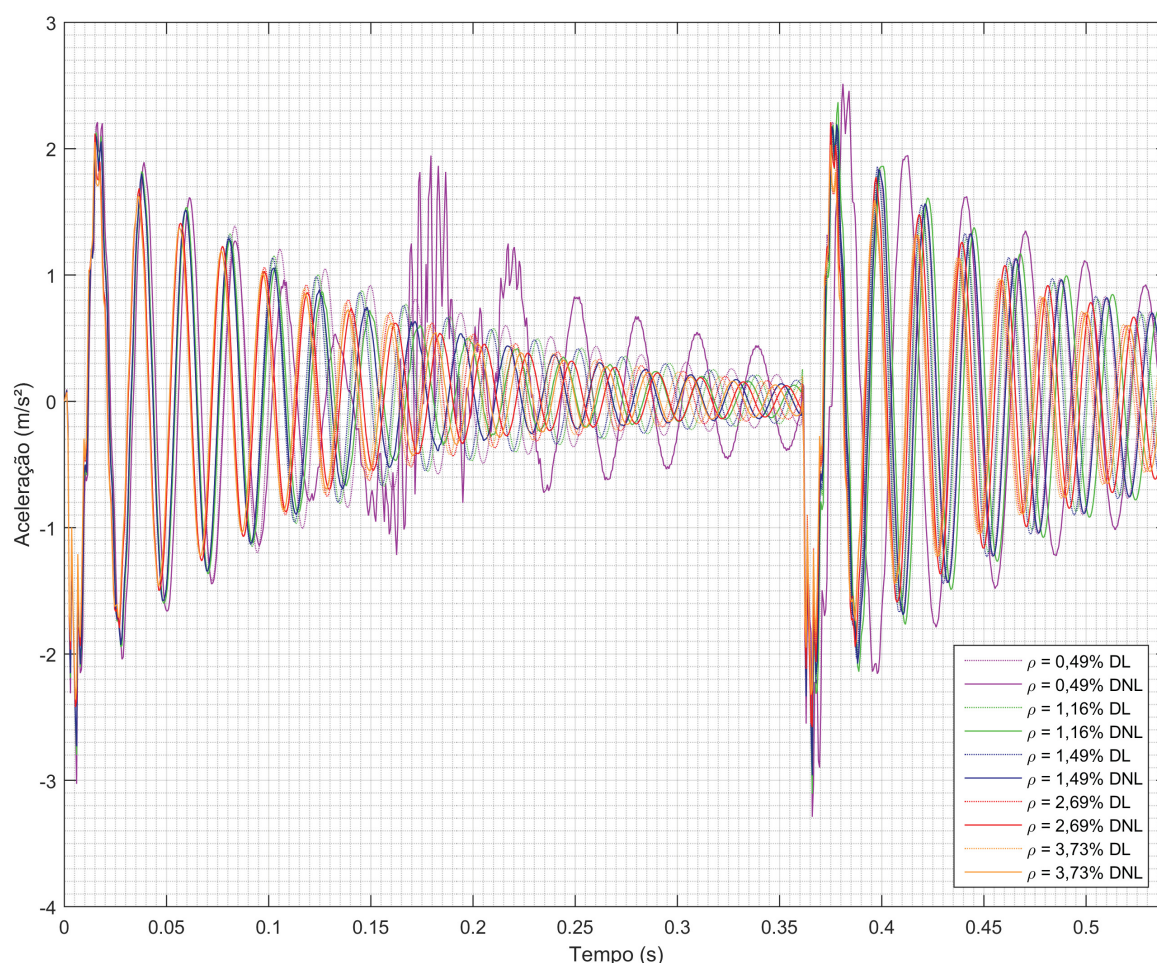
As Figuras 76 e 77 apresentam as respostas de velocidade e aceleração, respectivamente, dos nós centrais das cinco taxas de armadura, considerando as análises dinâmica linear e não linear.

FIGURA 76 – Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.2.1



FONTE: O autor.

FIGURA 77 – Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.2.1



FONTE: O autor.

Nota-se que a primeira taxa analisada,  $\rho = 0,49\%$ , por haver apresentado uma considerável perda de rigidez e alteração das frequências naturais de vibração, apresentou uma brusca amplificação em todas as respostas dinâmicas. As demais análises não lineares também apresentaram variações em relação a seus respectivos pares lineares. Contudo, como nesses casos a danificação não foi tão significativa, as respostas mantiveram-se próximas.

É possível observar nas respostas dinâmicas lineares que as cinco taxas de armaduras apresentam defasagem nas oscilações, entre si, devido à variação da rigidez proveniente da diferença das áreas de armadura. Contudo, as amplitudes se mantêm próximas.

Em todas as análises observa-se o comportamento exponencial do método de *Rayleigh* no amortecimento estrutural após o veículo sair da ponte, o que reduz as respostas, tendendo à estabilização.

O fator de amplificação dinâmico, FAD, é calculado conforme a Equação:

$$FAD = \frac{u_{DL, DNL}^{Máx}}{u_{EL}^{Máx}} \quad (5.1)$$

em que  $u_{DL, DNL}^{Máx}$  é o máximo deslocamento dinâmico, linear ou não linear, encontrado em qualquer ponto da ponte, enquanto  $u_{EL}^{Máx}$  é o máximo deslocamento estático linear. Deste modo, o FAD compara o maior deslocamento dinâmico, linear ou não linear, em relação ao maior deslocamento estático.

A Tabela 11 compara os fatores de amplificação dinâmica linear,  $FAD_L$ , e não linear,  $FAD_{NL}$ , das cinco análises.

TABELA 11 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.2.1

$\rho$ (%)	$u_{EL}^{Máx}$ (mm)	$u_{DL}^{Máx}$ (mm)	$FAD_L$	$u_{DNL}^{Máx}$ (mm)	$FAD_{NL}$
0,49	1,140	1,147	1,00587	2,031	1,78128
1,16	1,065	1,070	1,00497	1,166	1,09430
1,49	1,044	1,050	1,00555	1,123	1,07538
2,69	0,942	0,949	1,00679	0,990	1,05116
3,73	0,911	0,917	1,00658	0,945	1,03821

Percebe-se a grande variação entre o  $FAD_L$  e o  $FAD_{NL}$  para a primeira taxa de armadura. As demais taxas também apresentam aumento no fator, porém em menor proporção.

### 5.2.2 Viga de 20 m biapoiada

Aqui é analisada a viga de 20 m com diferentes taxas de armadura.

A Tabela 12 apresenta os dados de entrada geométricos da seção 5.2.2.

TABELA 12 – Parâmetros da ponte 5.2.2

h (m)	b (m)	L (m)	Elementos finitos	Distribuições de armadura	Passos de tempo
2,20	0,70	20,00	100	1	3000

A Tabela 13 especifica os parâmetros das armaduras de cada análise.

TABELA 13 – Distribuições de armadura das pontes 5.2.2

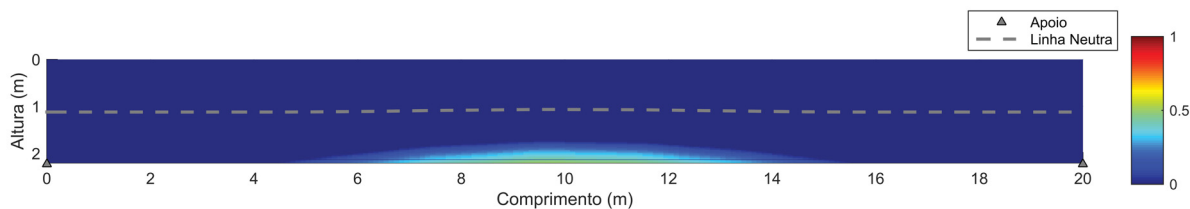
Armadura inferior	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura superior	$A_s'$ (cm <sup>2</sup> )	$\rho$ (%)	Camadas
5 $\phi$ 40 mm	68,83	4 $\phi$ 25 mm	19,63	0,54	82
11 $\phi$ 40 mm	138,23	4 $\phi$ 25 mm	19,63	1,04	104
17 $\phi$ 40 mm	213,63	4 $\phi$ 25 mm	19,63	1,54	137
17 $\phi$ 40 mm	213,63	17 $\phi$ 40 mm	213,63	2,58	192
23 $\phi$ 40 mm	289,03	23 $\phi$ 40 mm	289,03	3,90	258

O dimensionamento da viga deu-se conforme NBR 6118 (2014). Determinou-se assim, taxa de armadura  $\rho = 1,04\%$  e, a partir desta, variou-se o número de barras de modo a analisar-se os efeitos das taxas de armadura citadas na Tabela 13.

#### 5.2.2.1 $\rho = 0,54\%$

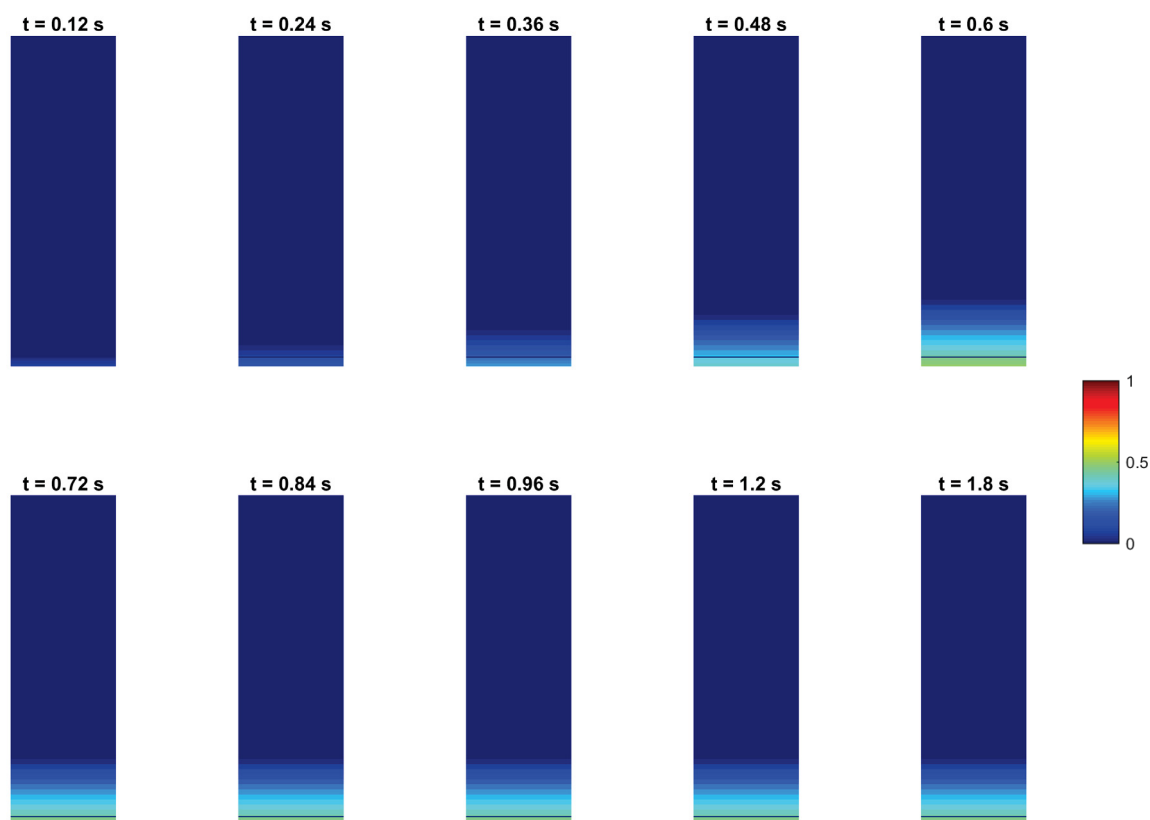
As Figuras 78, 79 e 80 apresentam, respectivamente, a configuração danificada final da viga, a evolução do dano no elemento central ao longo do tempo e as respostas estática e dinâmicas de deslocamento no nó central.

FIGURA 78 – Configuração final de dano da viga 5.2.2.1



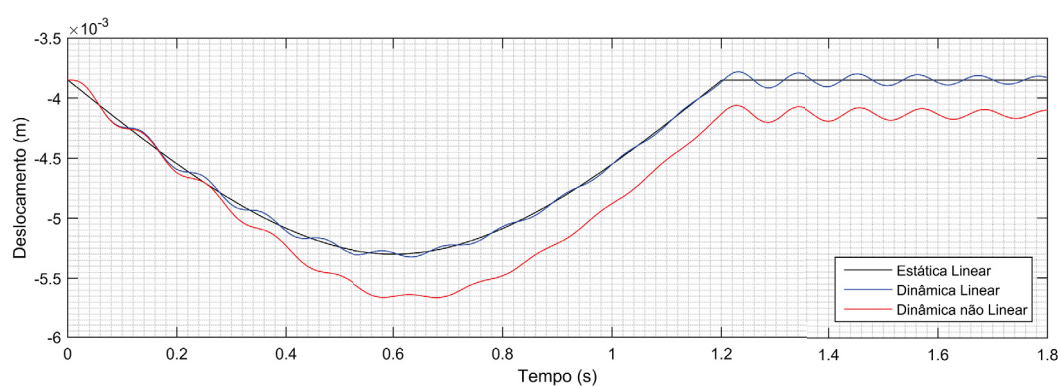
FONTE: O autor.

FIGURA 79 – Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.2.2.1



FONTE: O autor.

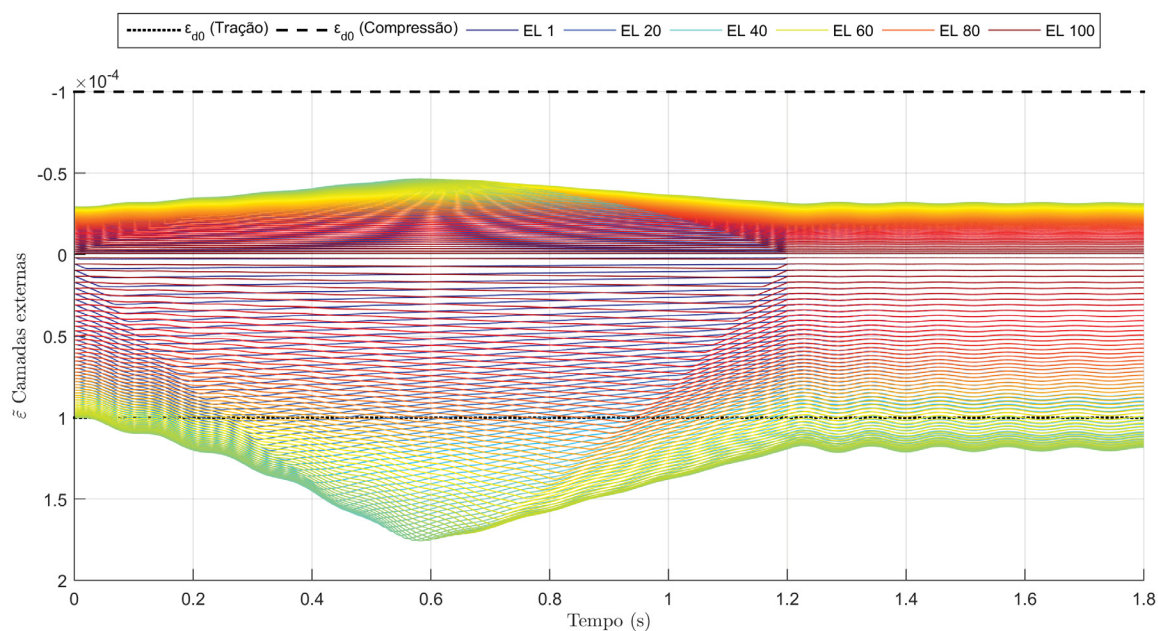
FIGURA 80 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.2.1



FONTE: O autor.

A Figura 81 e a Tabela 14 apresentam as deformações equivalentes das camadas externas de todos os elementos e as frequências naturais de vibração.

FIGURA 81 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.2.1



FONTE: O autor.

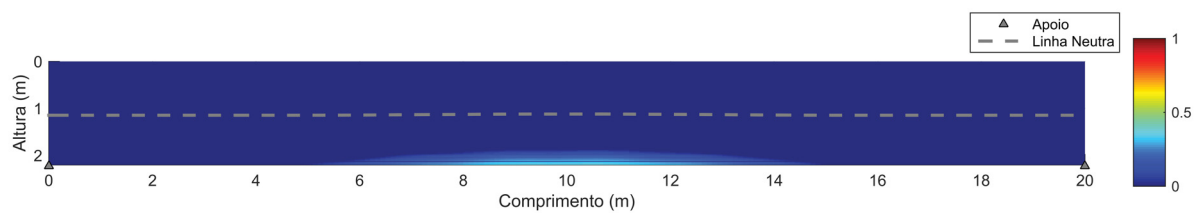
TABELA 14 – Frequências naturais da ponte 5.2.2.1

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	56,84	54,97	-3,29
2 <sup>a</sup>	227,37	224,73	-1,16
3 <sup>a</sup>	511,58	501,82	-1,91
4 <sup>a</sup>	909,49	892,34	-1,89
5 <sup>a</sup>	1421,10	1395,23	-1,82

#### 5.2.2.2 $\rho = 1,04\%$

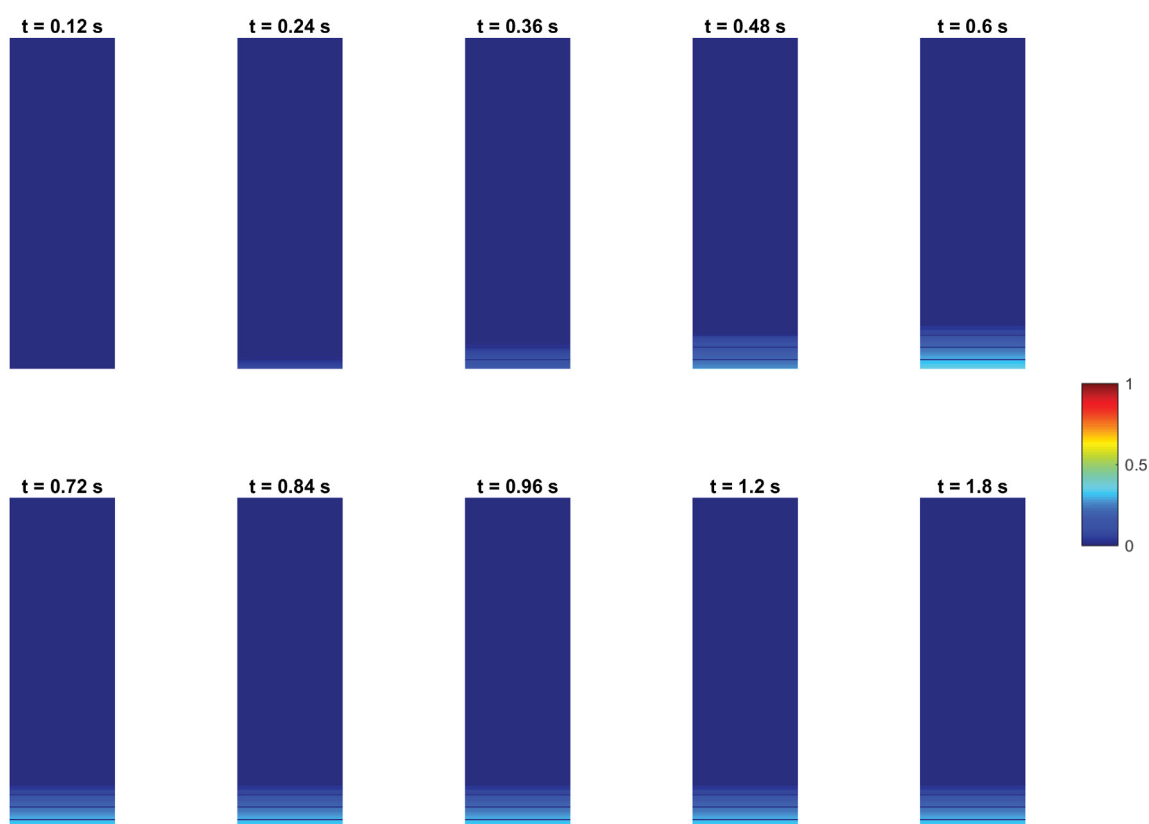
As Figuras 82, 83 e 84 apresentam, respectivamente, a configuração danificada final da viga, a evolução do dano no elemento central ao longo do tempo e as respostas estática e dinâmicas de deslocamento no nó central.

FIGURA 82 – Configuração final de dano da viga 5.2.2.2



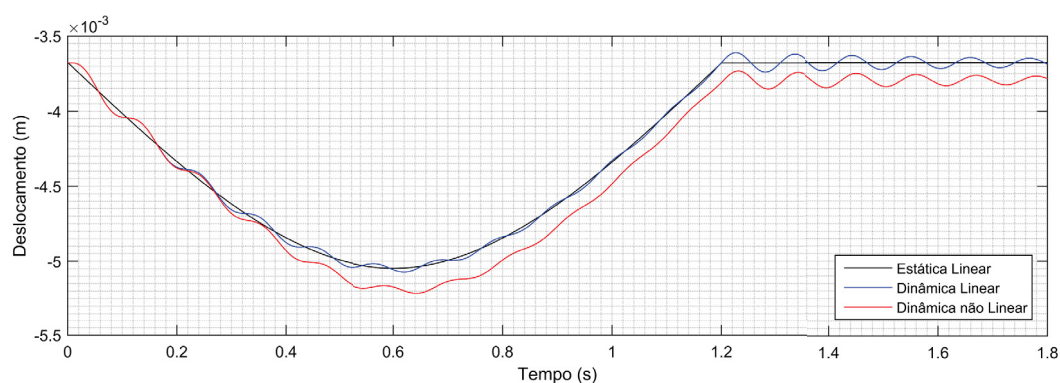
FONTE: O autor.

FIGURA 83 – Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.2.2.2



FONTE: O autor.

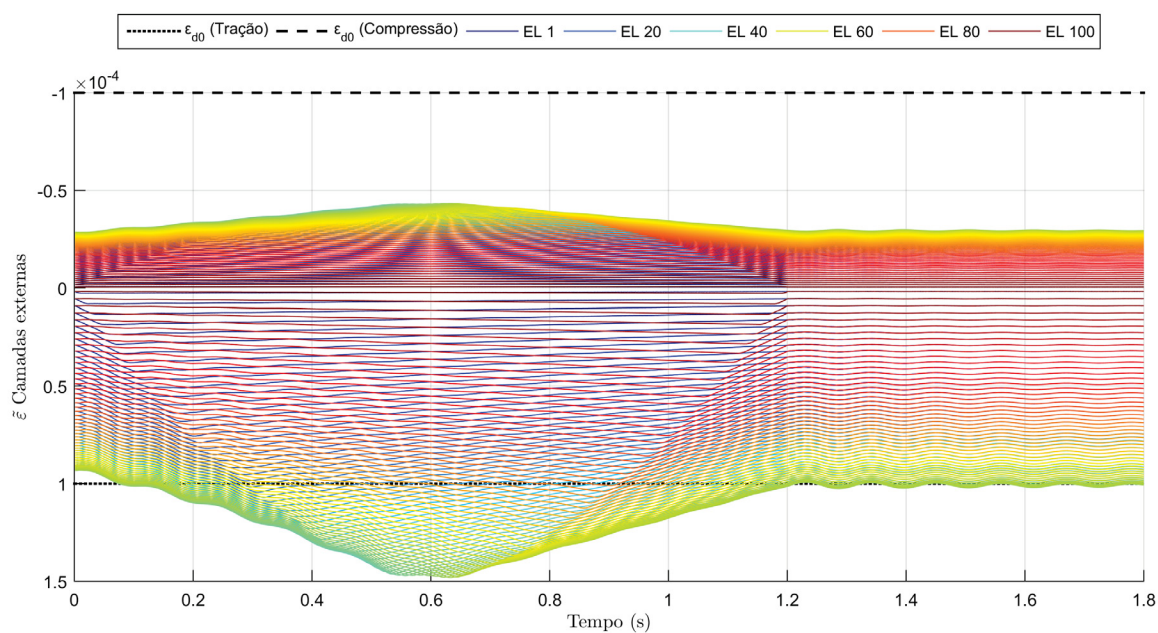
FIGURA 84 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.2.2



FONTE: O autor.

A Figura 85 e a Tabela 15 apresentam as deformações equivalentes das camadas externas de todos os elementos e as frequências naturais de vibração.

FIGURA 85 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.2.2



FONTE: O autor.

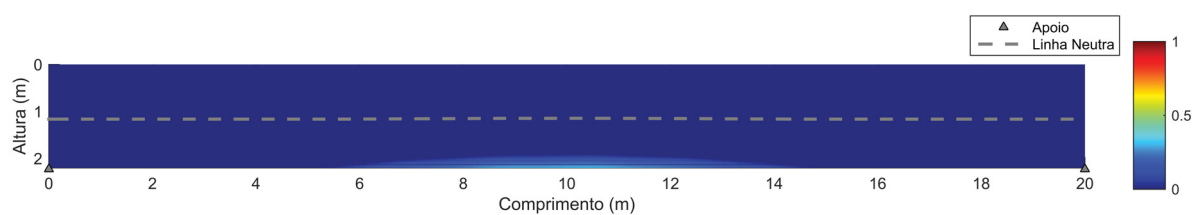
TABELA 15 – Frequências naturais da ponte 5.2.2.2

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	58,16	57,31	-1,46
2 <sup>a</sup>	232,64	231,55	-0,47
3 <sup>a</sup>	523,44	518,92	-0,86
4 <sup>a</sup>	930,57	922,78	-0,84
5 <sup>a</sup>	1454,04	1442,61	-0,79

5.2.2.3  $\rho = 1,54\%$ 

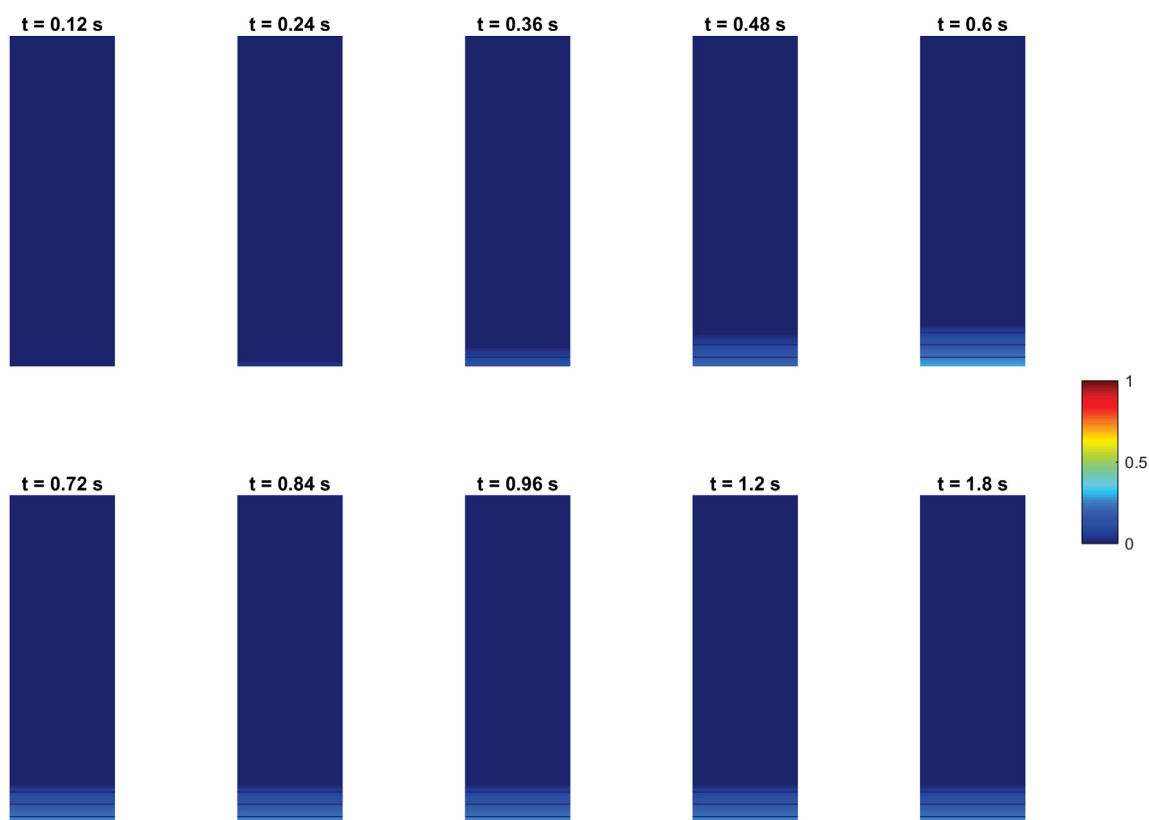
As Figuras 86, 87 e 88 apresentam, respectivamente, a configuração danificada final da viga, a evolução do dano no elemento central ao longo do tempo e as respostas estática e dinâmicas de deslocamento no nó central.

FIGURA 86 – Configuração final de dano da viga 5.2.2.3



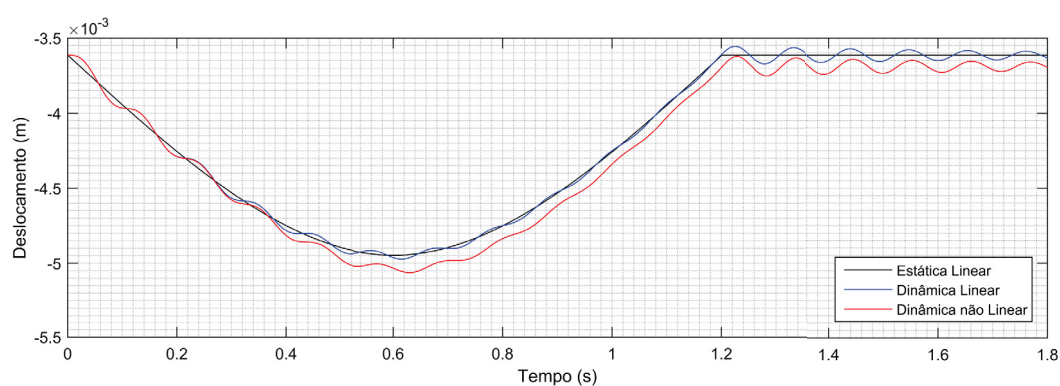
FONTE: O autor.

FIGURA 87 – Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.2.2.3



FONTE: O autor.

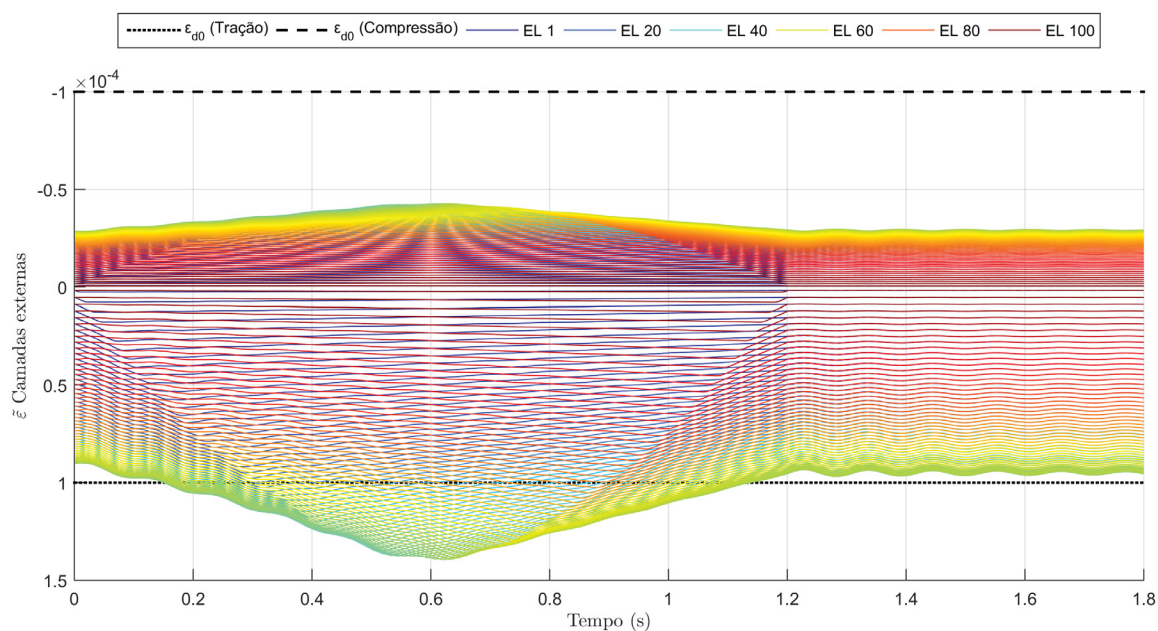
FIGURA 88 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.2.3



FONTE: O autor.

A Figura 89 e a Tabela 16 apresentam as deformações equivalentes das camadas externas de todos os elementos e as frequências naturais de vibração.

FIGURA 89 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.2.3



FONTE: O autor.

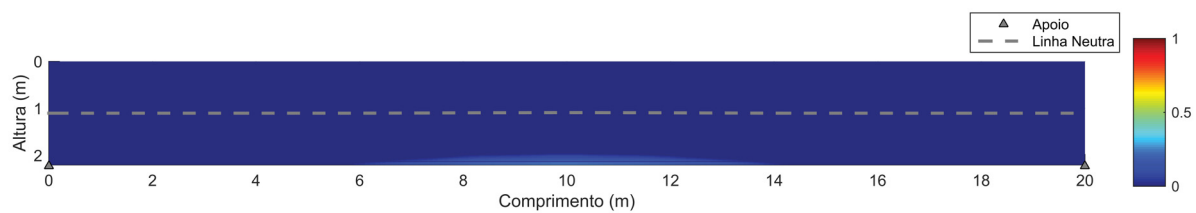
TABELA 16 – Frequências naturais da ponte 5.2.2.3

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	58,66	58,10	-0,95
2 <sup>a</sup>	234,65	233,99	-0,28
3 <sup>a</sup>	527,96	524,88	-0,58
4 <sup>a</sup>	938,60	933,59	-0,53
5 <sup>a</sup>	1466,58	1459,25	-0,50

#### 5.2.2.4 $\rho = 2,58\%$

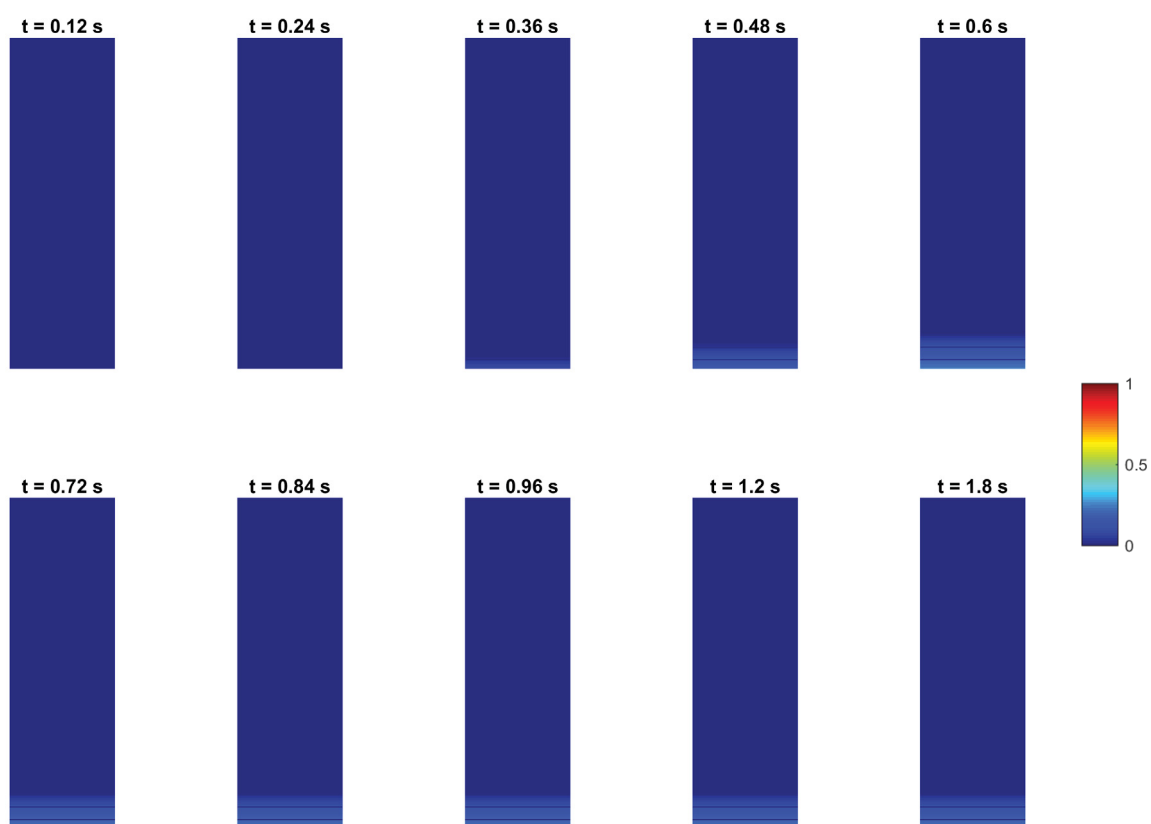
As Figuras 90, 91 e 92 apresentam, respectivamente, a configuração danificada final da viga, a evolução do dano no elemento central ao longo do tempo e as respostas estática e dinâmicas de deslocamento no nó central.

FIGURA 90 – Configuração final de dano da viga 5.2.2.4



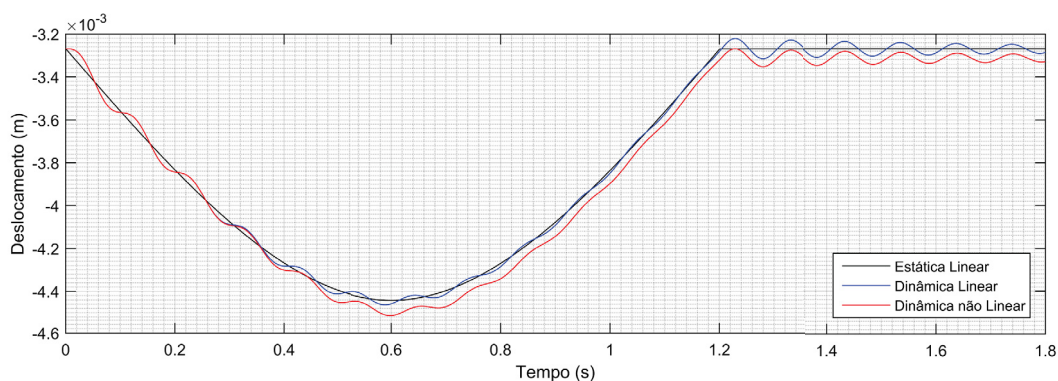
FONTE: O autor.

FIGURA 91 – Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.2.2.4



FONTE: O autor.

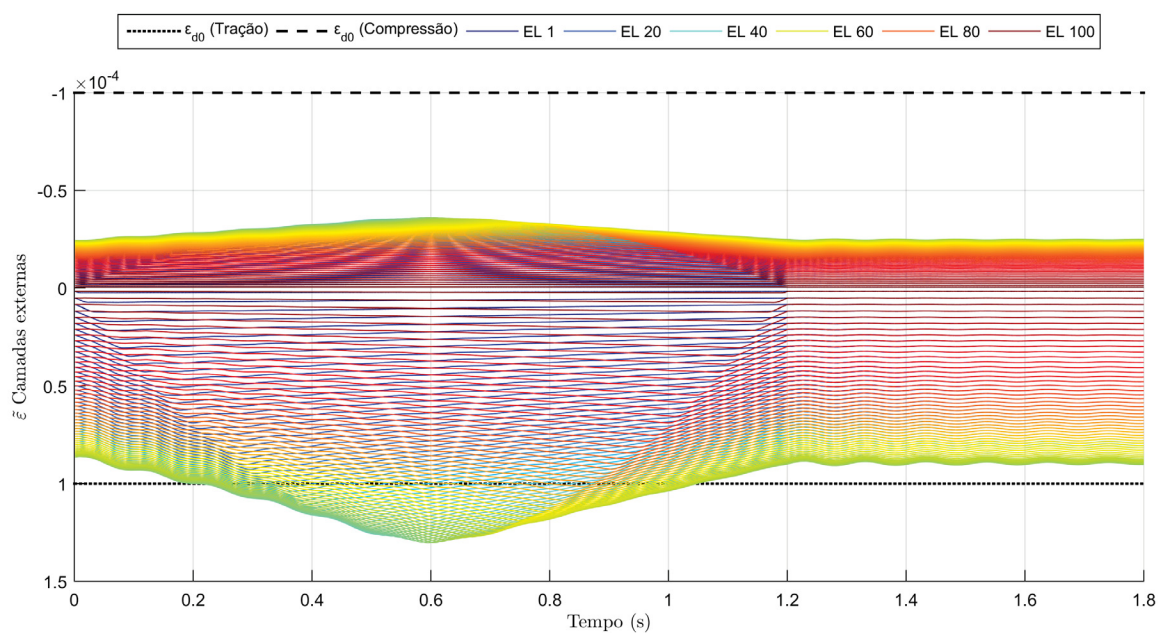
FIGURA 92 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.2.4



FONTE: O autor.

A Figura 93 e a Tabela 17 apresentam as deformações equivalentes das camadas externas de todos os elementos e as frequências naturais de vibração.

FIGURA 93 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.2.4



FONTE: O autor.

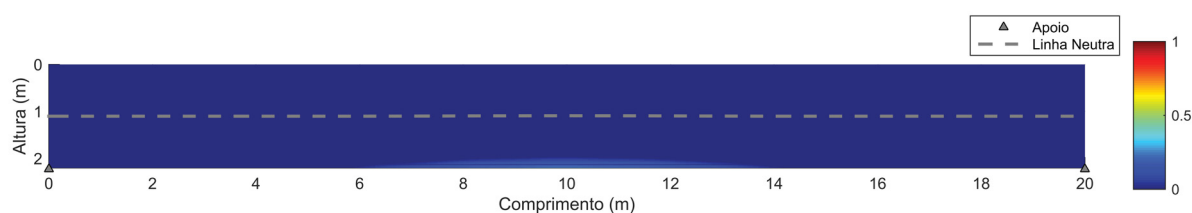
TABELA 17 – Frequências naturais da ponte 5.2.2.4

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	61,68	61,31	-0,60
2 <sup>a</sup>	246,73	246,37	-0,15
3 <sup>a</sup>	555,16	553,02	-0,39
4 <sup>a</sup>	986,95	983,79	-0,32
5 <sup>a</sup>	1542,13	1537,39	-0,31

5.2.2.5  $\rho = 3,90\%$ 

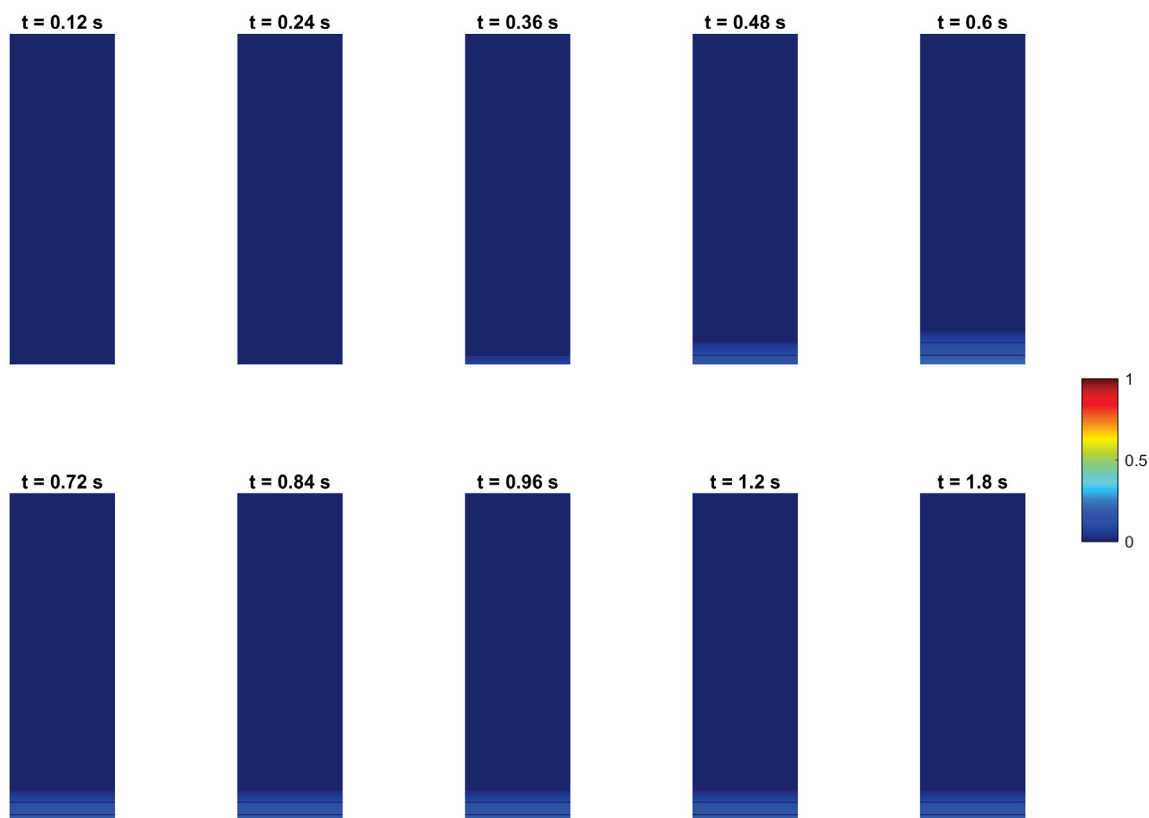
As Figuras 94, 95 e 96 apresentam, respectivamente, a configuração danificada final da viga, a evolução do dano no elemento central ao longo do tempo e as respostas estática e dinâmicas de deslocamento no nó central.

FIGURA 94 – Configuração final de dano da viga 5.2.2.5



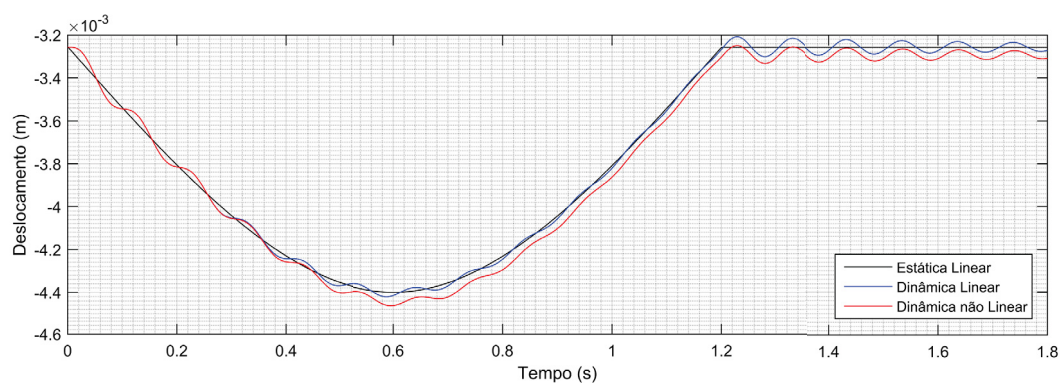
FONTE: O autor.

FIGURA 95 – Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.2.2.5



FONTE: O autor.

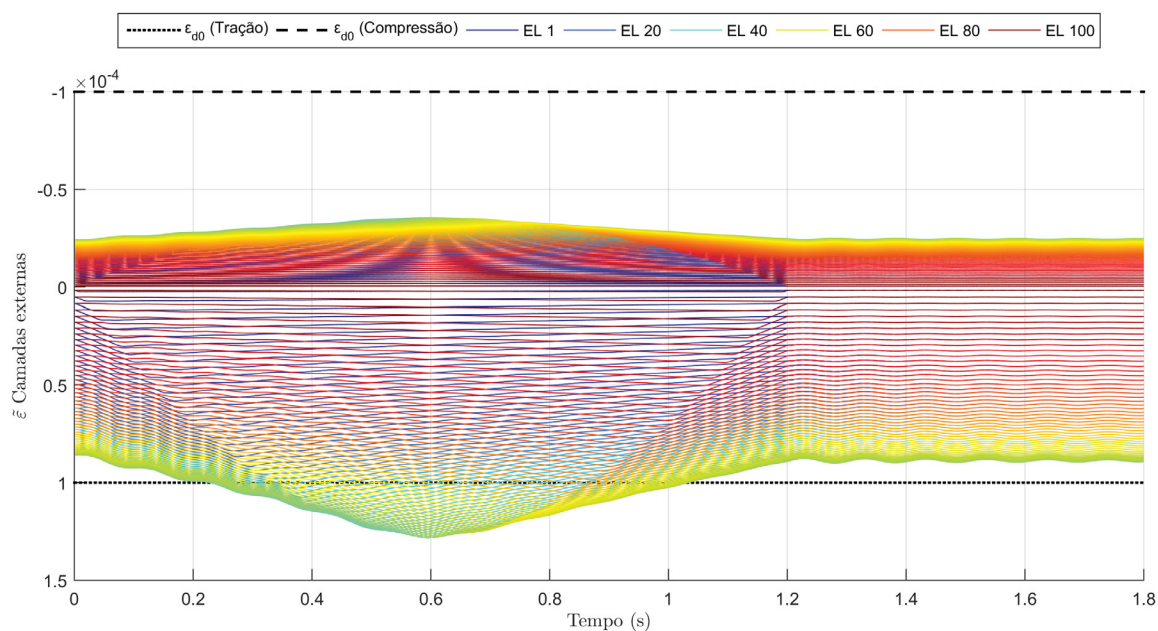
FIGURA 96 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.2.2.5



FONTE: O autor.

A Figura 97 e a Tabela 18 apresentam as deformações equivalentes das camadas externas de todos os elementos e as frequências naturais de vibração.

FIGURA 97 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.2.2.5



FONTE: O autor.

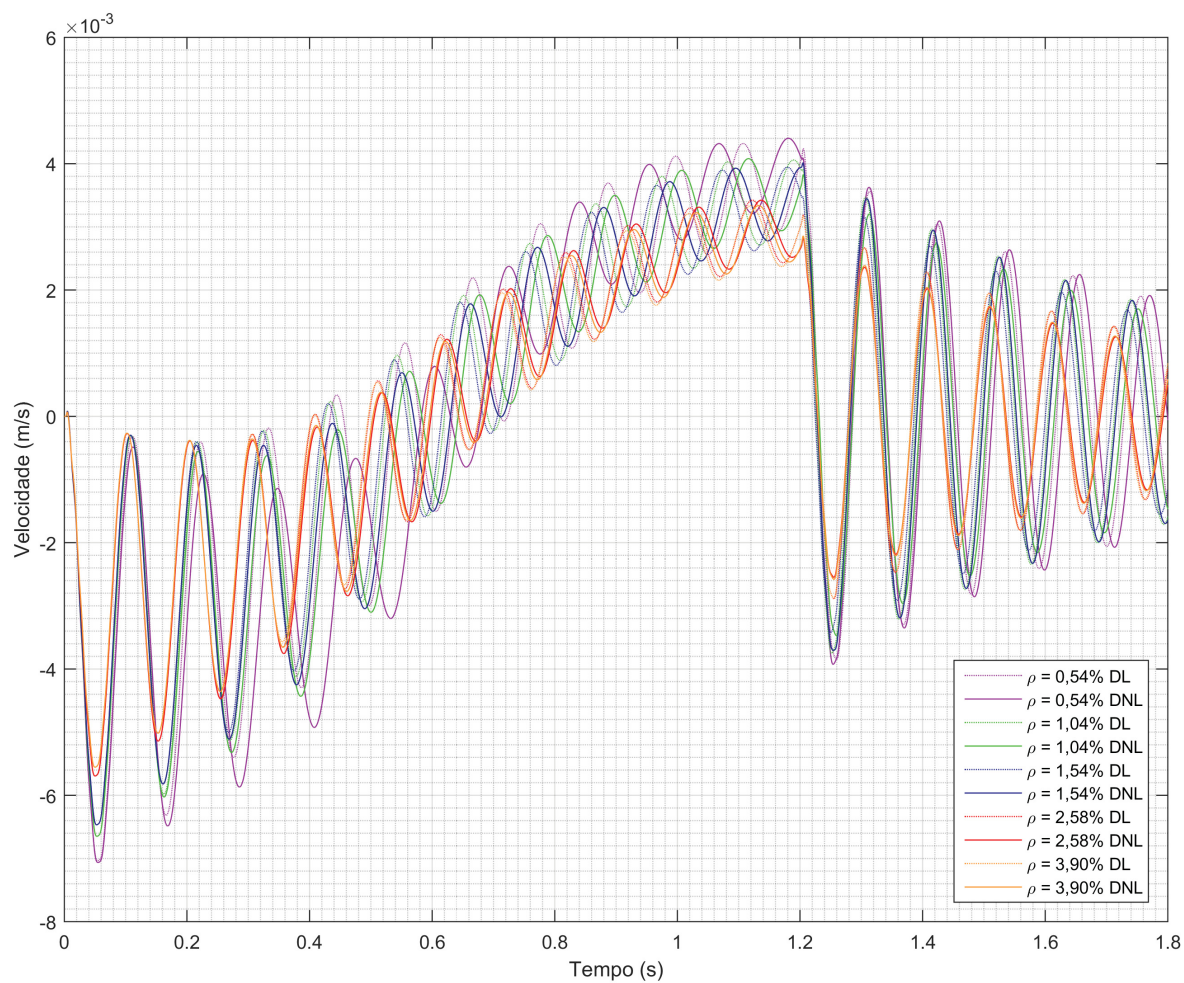
TABELA 18 – Frequências naturais da ponte 5.2.2.5

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	61,80	61,49	-0,50
2 <sup>a</sup>	247,25	246,94	-0,13
3 <sup>a</sup>	556,31	554,46	-0,33
4 <sup>a</sup>	989,00	986,33	-0,27
5 <sup>a</sup>	1545,33	1541,28	-0,26

#### 5.2.2.6 Comparação entre as análises da viga de 20 m e considerações

A Figura 98 apresenta as respostas dinâmicas de velocidade, lineares e não lineares, nos nós centrais das cinco vigas simuladas.

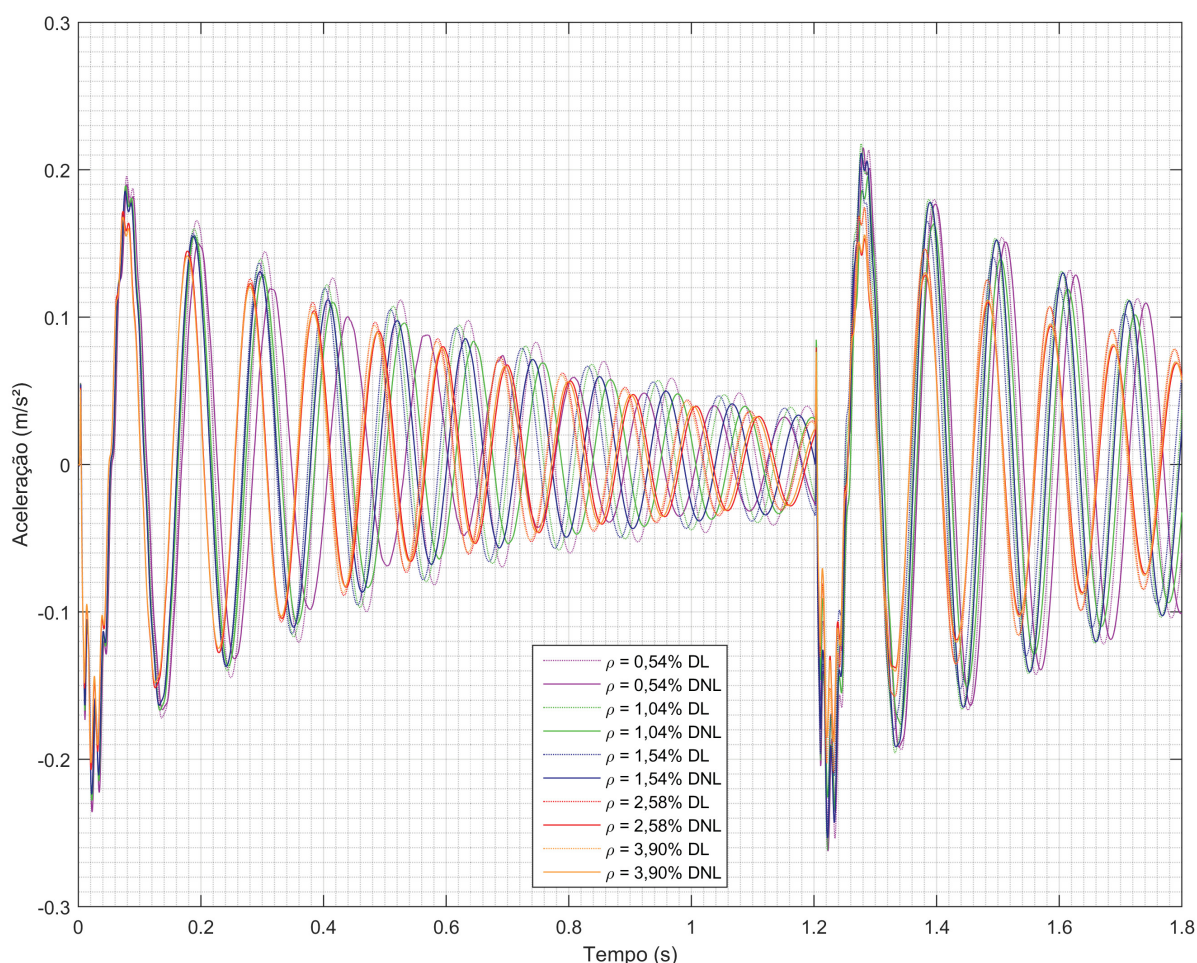
FIGURA 98 – Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.2.2



FONTE: O autor.

A Figura 99 apresenta as respostas dinâmicas de aceleração dos nós centrais das vigas.

FIGURA 99 – Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.2.2



FONTE: O autor.

Observa-se que nas simulações com menor taxa de armadura, por estas apresentarem mais danificação, as respostas dinâmicas lineares e não lineares apresentam maior defasagem entre si nas respostas de velocidade e aceleração.

A oscilação das respostas dinâmicas de velocidade apresentam valores negativos até a primeira metade do tempo de passagem do veículo pela ponte, passando a apresentar valores positivos na outra metade. Já as respostas dinâmicas de aceleração oscilam entre valores positivos e negativos ao longo de toda a trajetória.

Notam-se picos de aceleração nos instantes de tempo logo após o veículo entrar na ponte e logo após este deixar a ponte, sendo estes últimos os de maior amplitude.

A Tabela 19 compara os FADs das análises realizadas.

TABELA 19 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.2.2

$\rho$ (%)	$u_{EL}^{Máx}$ (mm)	$u_{DL}^{Máx}$ (mm)	FAD <sub>L</sub>	$u_{DNL}^{Máx}$ (mm)	FAD <sub>NL</sub>
0,54	5,300	5,323	1,00437	5,663	1,06836
1,04	5,048	5,073	1,00497	5,215	1,03304
1,54	4,946	4,973	1,00509	5,062	1,02323
2,58	4,443	4,464	1,00475	4,514	1,01600
3,90	4,400	4,421	1,00463	4,463	1,01422

Na análise dinâmica linear, o FAD apresenta um comportamento crescente nas três primeiras taxas de armadura. Nas duas últimas, o FAD é decrescente. Embora com o aumento da taxa de armadura as vigas apresentem redução nos deslocamentos tanto estático linear quanto dinâmico linear, a razão entre ambos apresenta esta descontinuidade. Isto deve-se ao fato de que os máximos deslocamentos estático e linear levam em consideração os maiores deslocamentos totais da viga, não necessariamente em um mesmo ponto. Já o FAD não linear é reduzido à medida em que aumenta-se a taxa de armadura.

### 5.3 INFLUÊNCIA DE DIFERENTES GEOMETRIAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL NO PROCESSO DE DANIFICAÇÃO DINÂMICO

É usual, no caso de pontes de concreto armado, a utilização de vigas com diferentes seções transversais nas longarinas. Isto ocorre no intuito de otimizar a área de concreto e o comportamento estrutural, de modo a gerar redução de custos e segurança estrutural.

Neste âmbito, as vigas tipo T e I têm um comportamento estrutural mais otimizado do que vigas retangulares, uma vez que nessas há maior área de concreto nas regiões que sofrem majoritariamente as ações de compressão. Já nas regiões tracionadas, reduz-se a área de concreto, tendo em vista a ineficiência do concreto à tração.

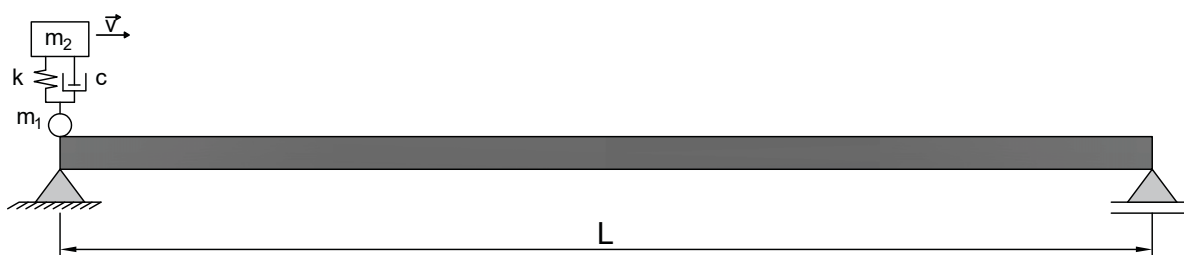
Entretanto, o objetivo deste exemplo é analisar o comportamento e evolução da danificação do concreto para essas geometrias otimizadas, pois a redução de área tracionada também pode impactar a propagação do dano.

Como a modelagem proposta não considera o efeito de torção na viga, as seções têm simetria vertical. Uma eventual assimetria neste eixo ocasionaria o efeito de torção, o qual é desprezado nesta análise devido ao modelo implementado, o que possibilitaria um aumento nos esforços internos de determinadas regiões da seção transversal e conseqüente aumento da danificação.

Assim como na análise numérica anterior, o intuito dessa Seção é verificar a evolução do dano e conseqüentes variações nas respostas não lineares em vigas de mesma rigidez, mas com diferentes seções transversais. Portanto, para não haver interferência de demais fatores que podem influenciar na danificação, não adotou-se a variação de distribuição de armaduras ao longo do comprimento da viga, assim como não levou-se em consideração o efeito de balanços.

A Figura 100 ilustra a viga biapoiada de ponte em análise.

FIGURA 100 – Ilustração da Ponte 5.3



FONTE: O autor.

As Tabelas 20, 21 e 22 apresentam os parâmetros adotados nesta análise.

TABELA 20 – Parâmetros do veículo, concreto, aço e de *Newmark* adotados para os modelos 5.3

Veículo	Parâmetros do concreto	Parâmetros do aço	Parâmetros de <i>Newmark</i>
$m_1 = 3.000 \text{ kg}$	$E_c = 29,43 \text{ GPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$	$\gamma = 0,5$
$m_2 = 12.000 \text{ kg}$	$\nu_c = 0,2$	$\nu_s = 0,3$	$\beta = 0,25$
$k = 9.120 \text{ kN/m}$	$\varepsilon_{d0} = 5,0 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_{sy} = 2 \text{ ‰}$	$dt = 0,006 \text{ s}$
$c = 96 \text{ kNs/m}$	$A_T = 0,7$	$k_s = 0,85$	$\zeta = 0,025$
$v = 30 \text{ km/h}$	$B_T = 1,0 \cdot 10^4$		
	$A_C = 1,2$		
	$B_C = 1.050$		

TABELA 21 – Parâmetros da ponte 5.3

h (m)	L (m)	Número de elementos finitos	Número de distribuições de armadura	Passos de tempo
2,00	16,00	32	1	480

TABELA 22 – Distribuições de armadura das pontes 5.3

Distribuição de armaduras inferiores	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Distribuição de armaduras superiores	$A_s'$ (cm <sup>2</sup> )
9 $\phi$ 40 mm	113,10	4 $\phi$ 40 mm	50,27

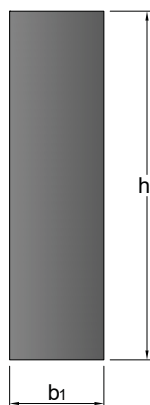
Apesar das quatro vigas analisadas terem seções transversais variadas, para verificar os diferentes comportamentos de danificação, em cada geometria, é necessário padronizar alguns parâmetros para uma análise coerente. Assim, a distribuição de armaduras, altura total da viga e rigidez são as mesmas nas quatro simulações. Desta forma, a variação geométrica se dá nas bases das camadas discretizadas. A área de concreto e, por consequência, a taxa de armadura, variam conforme a geometria. Portanto, pode-se verificar a propagação do dano nas diferentes seções transversais.

A seguir serão apresentados os resultados das vigas retangular, I com simetria horizontal, I com assimetria horizontal e viga T.

### 5.3.1 Viga retangular

A Figura 101 e a Tabela 23 apresentam, respectivamente, a seção transversal e os parâmetros geométricos da viga analisada.

FIGURA 101 – Seção transversal da viga 5.3.1



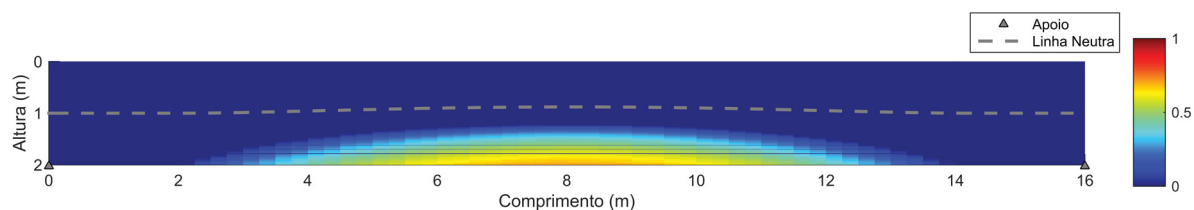
FONTE: O autor.

TABELA 23 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.3.1

Componente	h (m)	b (m)	Camadas
1	2,00	0,50	126

A Figura 102 apresenta a configuração final da viga danificada.

FIGURA 102 – Configuração final de dano da viga 5.3.1

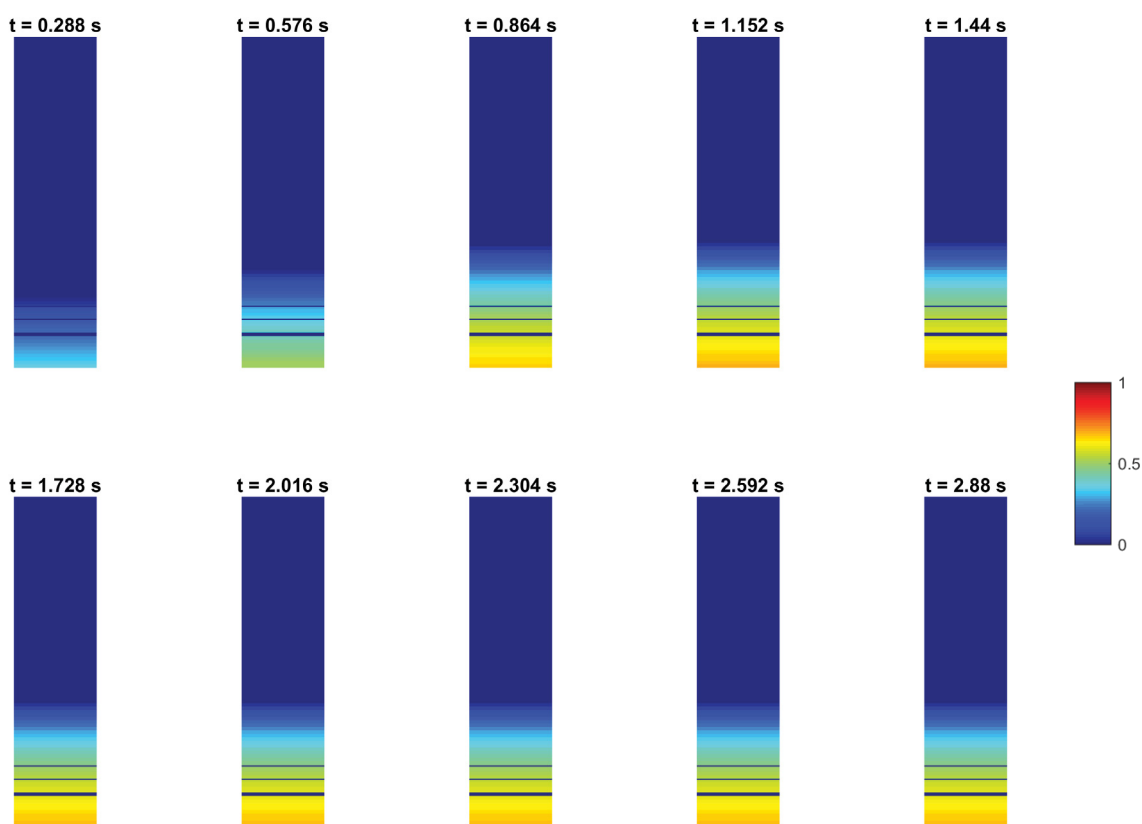


FONTE: O autor.

Ao analisar a Figura 102, observa-se uma evolução suave do dano ao redor do meio do vão, resultado esperado para uma viga sem variação de largura das camadas perante uma carga móvel. Observa-se a variação da linha neutra nos elementos mais danificados. Não houve danificação nos elementos próximos dos apoios.

A Figura 103 apresenta a variação da danificação do 16º elemento, central, ao longo do tempo de análise.

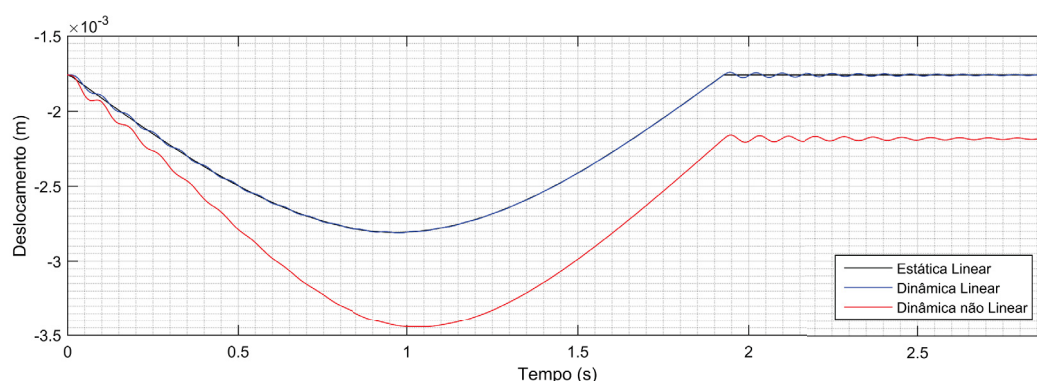
FIGURA 103 – Evolução do dano no 16º elemento da viga 5.3.1



FONTE: O autor.

A Figura 104 apresenta as respostas de deslocamento estático linear, dinâmico linear e dinâmico não linear ao longo do tempo analisado.

FIGURA 104 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.3.1



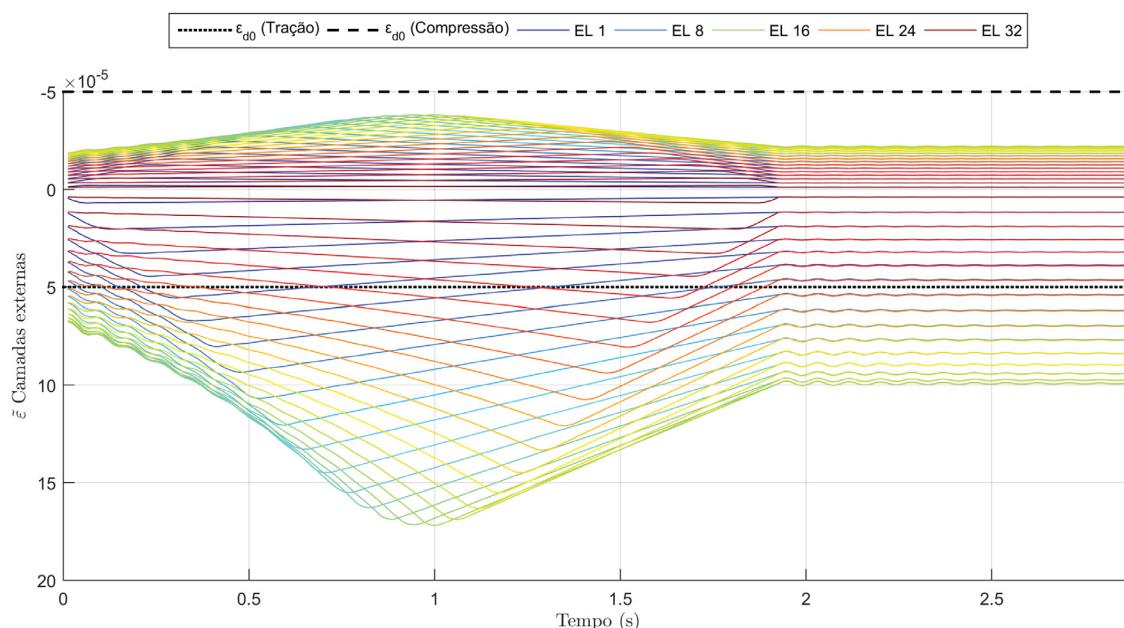
FONTE: O autor.

Pode-se observar, ao analisar a Figura anterior, a oscilação da resposta dinâmica linear em torno da resposta estática linear. Após a saída do veículo da ponte, as respostas dinâmicas lineares tendem a estabilizar-se ao longo do tempo até coincidir com a resposta estática linear.

A resposta dinâmica não linear, por sua vez, difere da resposta dinâmica linear já nos primeiros passos de tempo, devido à danificação, e amplifica-se ao longo da análise por causa da evolução do dano. Após a saída do veículo da ponte, a resposta tende a estabilizar-se com a configuração deformada permanente, ou seja, abaixo das respostas lineares.

A Figura 105 mostra as respostas dinâmicas de deformação de todos os elementos ao longo do tempo.

FIGURA 105 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.3.1



FONTE: O autor.

Ao analisar a Figura anterior, observa-se que as deformações por compressão obtidas não atingiram a deformação de referência  $\varepsilon_{d0}$ , enquanto as deformações por tração superaram a deformação de referência à tração do material nos elementos centrais, o que provocou a danificação. A perda de rigidez, de qualquer elemento, influencia nas respostas de deformação dos demais.

A Tabela 24 apresenta a variação entre as frequências naturais de vibração da ponte íntegra e danificada.

TABELA 24 – Frequências naturais da ponte 5.3.1

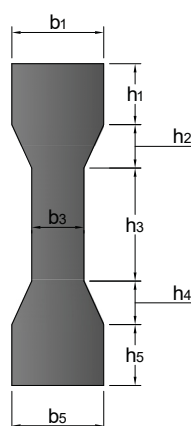
Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	84,04	75,69	-9,94
2 <sup>a</sup>	336,20	316,38	-5,90
3 <sup>a</sup>	756,60	712,09	-5,88
4 <sup>a</sup>	1345,42	1263,80	-6,07
5 <sup>a</sup>	2102,93	1972,81	-6,19

Observa-se uma redução nas frequências naturais, sendo a maior de 9,94% referente à primeira frequência.

### 5.3.2 Viga I com simetria horizontal

A Figura 106 e a Tabela 25 apresentam, respectivamente, a seção transversal e os parâmetros geométricos da viga analisada.

FIGURA 106 – Seção transversal da viga 5.3.2



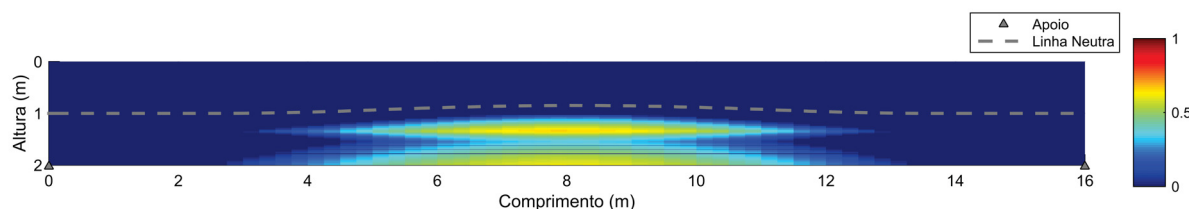
FONTE: O autor.

TABELA 25 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.3.2

Componente	h (m)	b (m)	Camadas
1	0,45	0,5317	1 a 43
2	0,20	Variável	44 a 53
3	0,70	0,20	54 a 73
4	0,20	Variável	74 a 83
5	0,45	0,5317	84 a 126

A Figura 107 apresenta a configuração de dano ao final da análise para a viga I simétrica.

FIGURA 107 – Configuração final de dano da viga 5.3.2



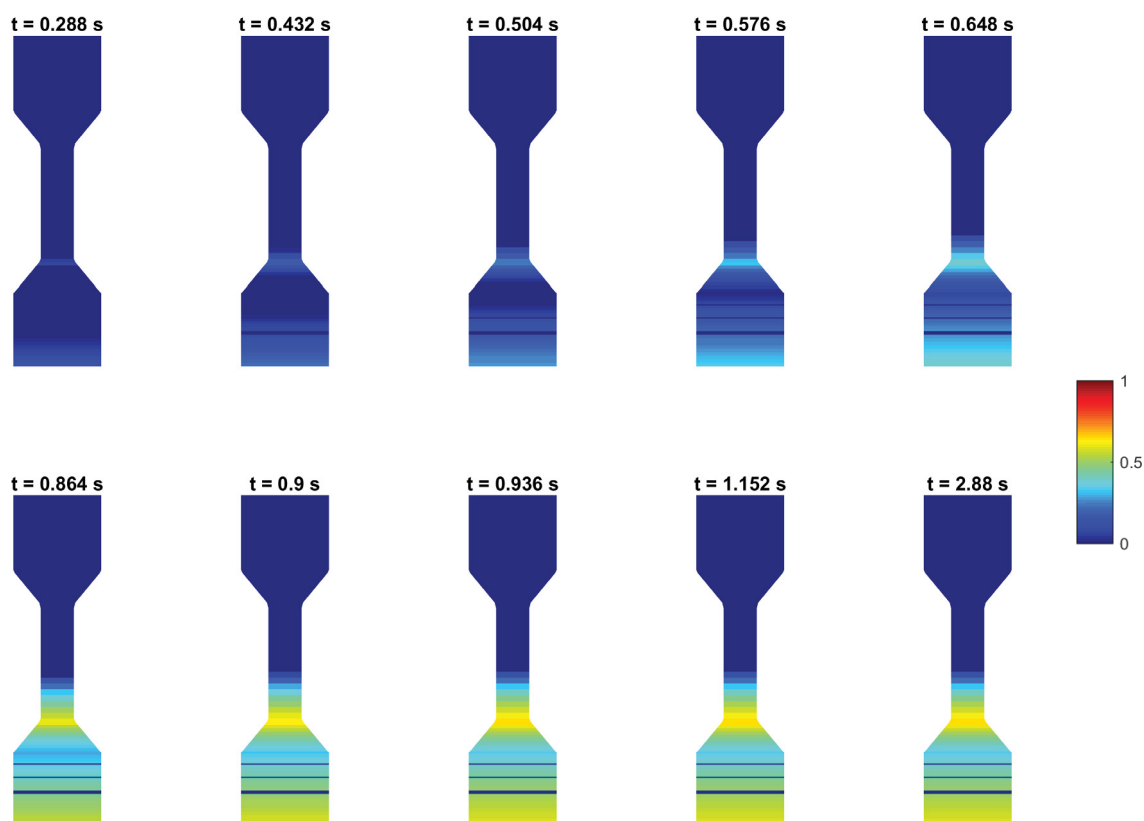
FONTE: O autor.

Ao analisar a Figura anterior, percebe-se que a redução nas bases de determinadas camadas da viga I ocasionaram danos na alma antes mesmo da propagação dos danos na mesa inferior.

Este é um resultado importante, pois a geometria da seção transversal fez com que o processo de danificação evoluísse de modo distinto ao da viga retangular. Isto é justificado pela redução da área da camada e consequente variação do tensor de tensões.

A Figura 108 representa a evolução do dano no 16º elemento da viga I simétrica.

FIGURA 108 – Evolução do dano no 16º elemento da viga 5.3.2

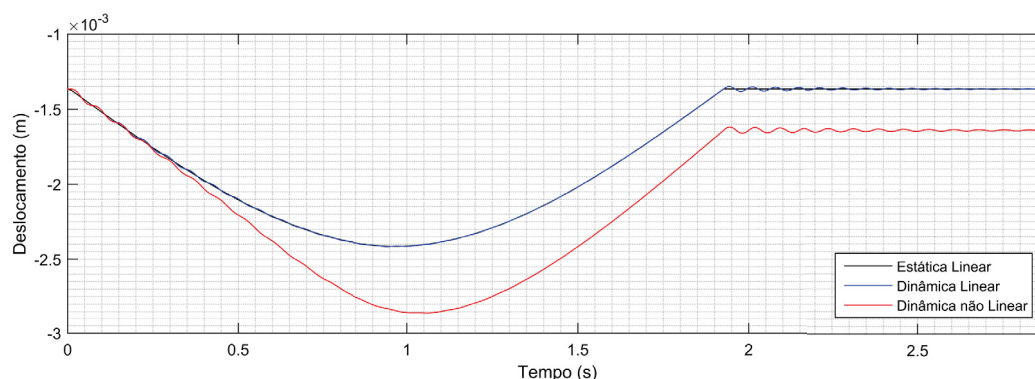


FONTE: O autor.

Inicialmente, houve danificação nas camadas externas da mesa inferior e nas camadas inferiores da alma. Após a propagação do dano, constata-se a variação da danificação conforme a variação das bases das camadas. Ao final da análise, a maior danificação se deu na camada inferior da alma, e não na camada inferior do elemento, como observa-se como padrão nas vigas retangulares. Isto é justificado tanto pela danificação inicial desta camada como pela propagação do dano proveniente das camadas da mesa inferior.

A Figura 109 apresenta as respostas estática e dinâmicas de deslocamento do nó central da viga I simétrica.

FIGURA 109 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.3.2



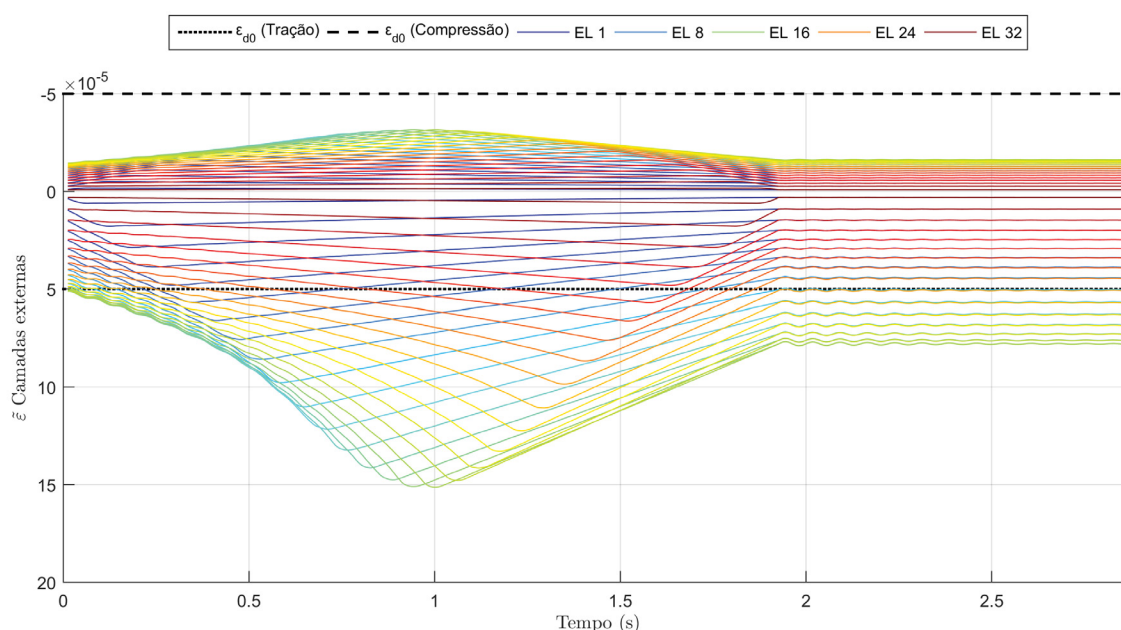
FONTE: O autor.

Nota-se que o início da danificação ocorreu em tempo posterior ao da viga retangular. Como a base da mesa inferior da viga I simétrica é maior do que a base da viga retangular, tendo maiores áreas e menores tensões, a microfissuração generalizada ocorreu previamente na viga retangular.

Ao comparar o resultado apresentado na Figura 109 com o resultado mostrado na Figura 104, observa-se que a viga I simétrica tem deslocamentos menores, 2,85 mm, que a viga retangular, 3,45 mm, na análise não linear. Isto deve-se ao fato de que apesar de um maior número de camadas entrar em processo de danificação na viga I, grande parte dos danos ocorrem na alma, a qual possui menor inércia em relação à mesa. Na mesa inferior, o dano foi menos representativo do que o ocasionado nas camadas inferiores da viga retangular. Portanto, a perda de rigidez do elemento, ao considerar-se o somatório dos momentos de inércia das camadas multiplicado por seus respectivos módulos de *Young*, é menor na viga I. Além do exposto, houve maior número de camadas, de maior área, com maior danificação na viga retangular.

A Figura 110 apresenta as respostas dinâmicas de deformação das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.3.2.

FIGURA 110 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.3.2



FONTE: O autor.

Observam-se valores menores de deformação quando comparado com as deformações da viga retangular.

A Tabela 26 apresenta as frequências naturais de vibração da viga I simétrica.

TABELA 26 – Frequências naturais da ponte 5.3.2

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	95,38	87,38	-8,39
2 <sup>a</sup>	381,58	366,35	-3,99
3 <sup>a</sup>	858,72	818,36	-4,70
4 <sup>a</sup>	1527,01	1451,22	-4,96
5 <sup>a</sup>	2386,76	2268,42	-4,96

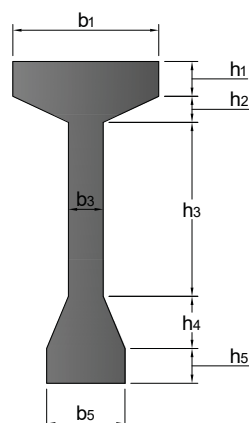
Por ter uma menor perda de rigidez, a viga I apresenta uma menor variação, em relação à retangular, das frequências naturais de vibração, sendo a maior de 8,39% na primeira frequência.

Deve-se observar que os valores obtidos para as respostas de deslocamento e frequências naturais nas análises lineares da viga I não são idênticos aos da viga retangular. Isto deve-se ao fato de que a matriz de massa e o peso próprio de ambas diferem, uma vez que a área de seção transversal é diferente. O mesmo vale para as análises subsequentes.

### 5.3.3 Viga I com assimetria horizontal

A Figura 111 e a Tabela 27 apresentam, respectivamente, a seção transversal e os parâmetros geométricos da viga analisada.

FIGURA 111 – Seção transversal da viga 5.3.3



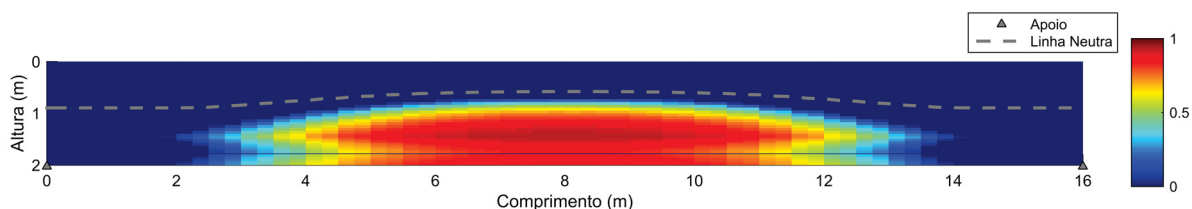
FONTE: O autor.

TABELA 27 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.3.3

Componente	h (m)	b (m)	Camadas
1	0,20	0,9084	1 a 43
2	0,15	Variável	44 a 53
3	1,10	0,20	54 a 73
4	0,30	Variável	74 a 83
5	0,25	0,45	84 a 126

A Figura 112 apresenta a configuração de dano ao final da análise para a viga I assimétrica.

FIGURA 112 – Configuração final de dano da viga 5.3.3



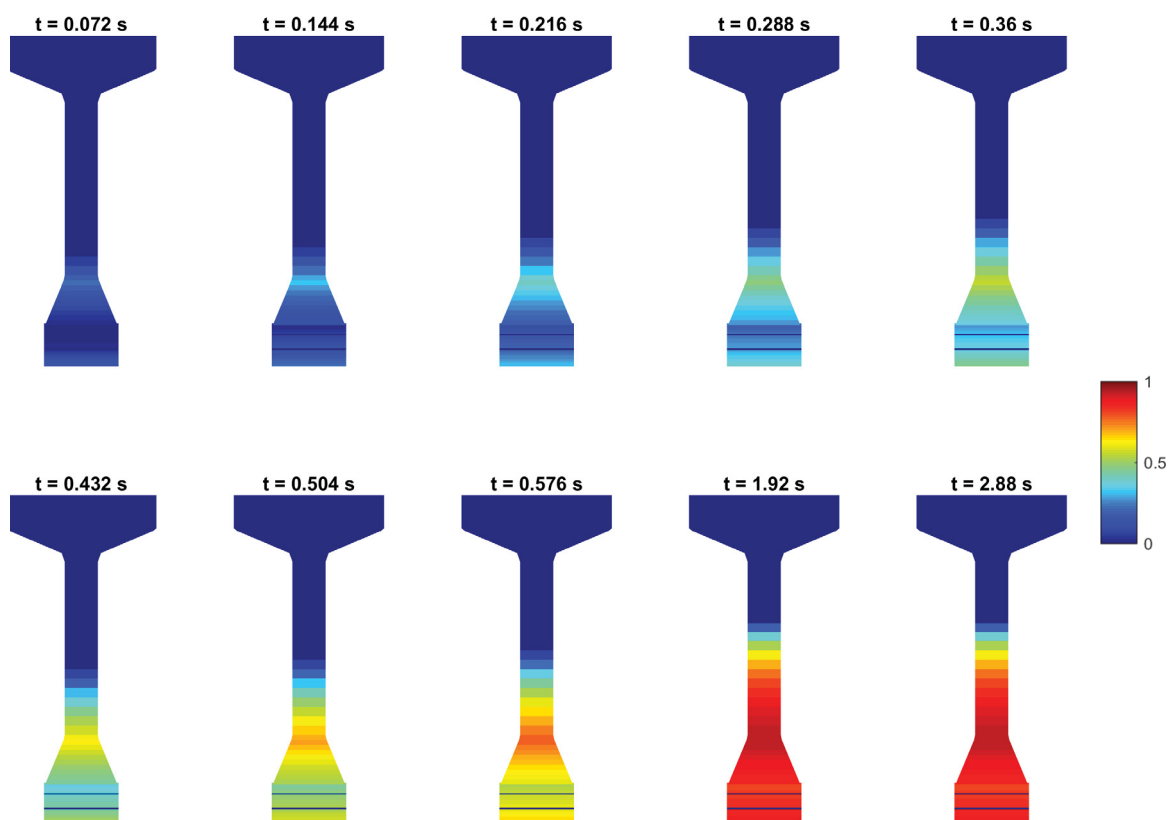
FONTE: O autor.

Observa-se maior magnitude na danificação em comparação com as análises anteriores, tanto na mesa inferior como na alma, fato que ocasionou uma maior variação na posição da linha neutra. Isto ocorreu devido à largura da mesa inferior ser menor

do que na viga retangular e na viga I simétrica. Portanto, há menor área resistente, o que provocou maior danificação e, conseqüentemente, mais rápida propagação da microfissuração. Nota-se também que não houve danificação por tração ou por compressão na mesa superior, de maior largura.

A Figura 113 representa a evolução do dano no 16º elemento da viga I simétrica.

FIGURA 113 – Evolução do dano no 16º elemento da viga 5.3.3



FONTE: O autor.

Nos primeiros passos de tempo é possível perceber uma maior danificação nas camadas inferiores da alma em relação às camadas externas da mesa inferior da viga devido à menor área resistente. Este comportamento é percebido em todos instantes apresentados. Nesta análise, o dano se propagou ao longo dos passos de tempo atingindo mais da metade da altura da viga. Observa-se que o fenômeno de propagação do dano ocorre de forma não linear.

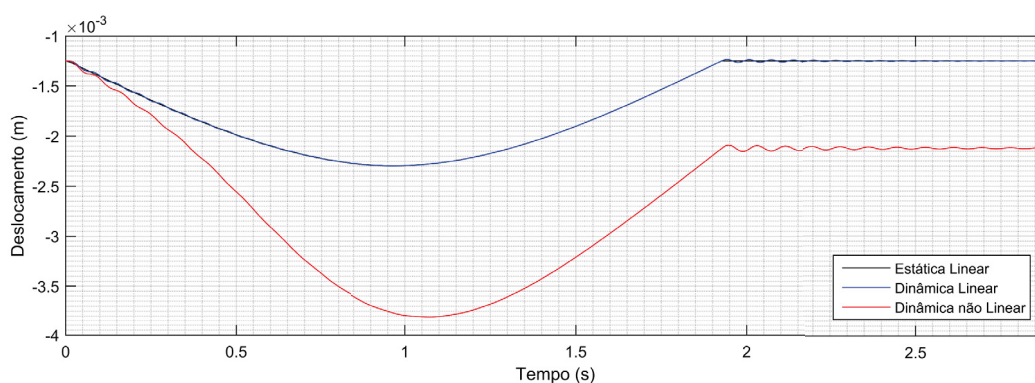
Como nesta análise o dano se deu de forma mais acentuada que nas análises anteriores, o efeito da variação da posição da linha neutra e momento de inércia das camadas também é mais perceptível. Uma vez que uma camada inferior é danificada, a linha neutra sobe. Com essa mudança de posição, os momentos de inércia são recalculados e, além disso, as deformações nas camadas também são impactadas. Uma maior distância entre a camada e a linha neutra resulta em deformações maiores,

o que acelera a propagação do dano nas camadas mais afastadas, neste caso, as inferiores.

Apesar de certas regiões terem atingido um estágio de microfissuração representativo confinado por regiões de danificação menores, o modelo proposto não é capaz de determinar o início de um processo de macrofissuração, início de abertura de fissuras macroscópicas, o que só seria possível ao acoplar algum modelo da Mecânica da Fratura. Ao mesmo tempo, apesar da magnitude da danificação, não é possível afirmar que a estrutura falhe, o que só seria passível de análise a partir da implementação de um critério de falha que levasse em conta efeitos dinâmicos.

A Figura 114 mostra as respostas de deslocamento nas análises estática linear, dinâmica linear e dinâmica não linear.

FIGURA 114 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.3.3

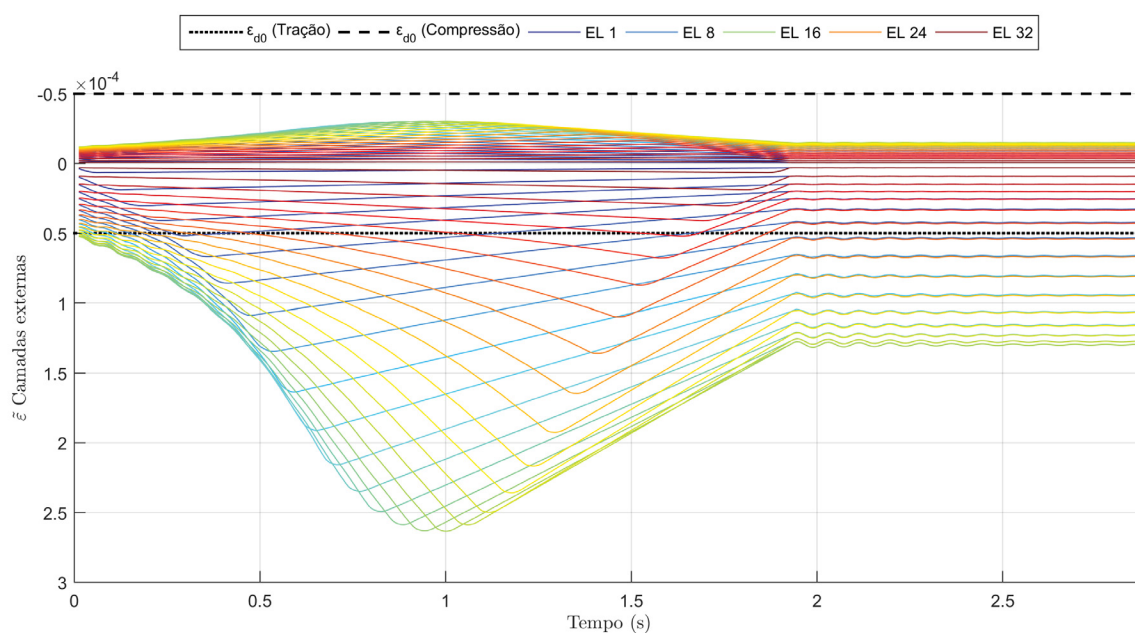


FONTE: O autor.

Analisando a Figura 114 é possível perceber a danificação da viga nos primeiros instantes de tempo altera as respostas dinâmicas não lineares logo no princípio da análise. O deslocamento é então amplificado e, como o fenômeno de microfissuração é mais representativo nesta análise do que nas duas anteriores, esta amplificação é maior.

A Figura 115 apresenta as respostas dinâmicas de deformação das camadas externas de todos os elementos.

FIGURA 115 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.3.3



FONTE: O autor.

A Tabela 28 apresenta as variações das cinco primeiras frequências naturais de vibração da viga I assimétrica.

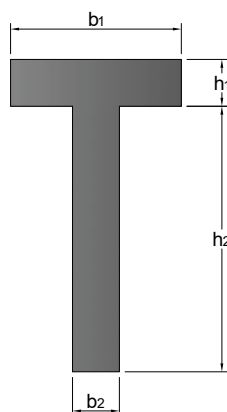
TABELA 28 – Frequências naturais da ponte 5.3.3

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	99,77	77,03	-22,79
2 <sup>a</sup>	399,12	338,73	-15,13
3 <sup>a</sup>	898,18	774,19	-13,80
4 <sup>a</sup>	1597,18	1367,76	-14,36
5 <sup>a</sup>	2496,45	2129,61	-14,69

### 5.3.4 Viga T

A Figura 116 e a Tabela 29 apresentam, respectivamente, a seção transversal e os parâmetros geométricos da viga analisada.

FIGURA 116 – Seção transversal da viga 5.3.4



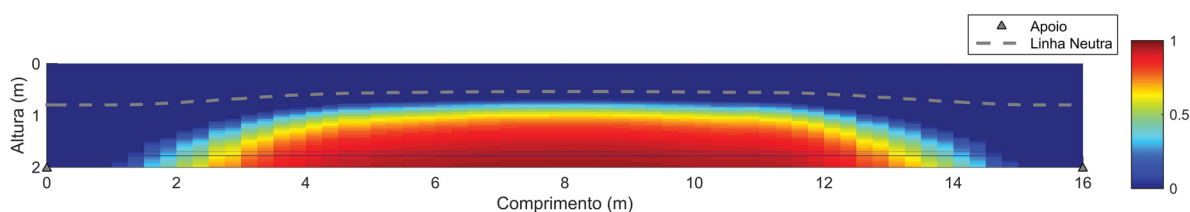
FONTE: O autor.

TABELA 29 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.3.4

Componente	h (m)	b (m)	Camadas
1	0,30	1,0930	1 a 43
2	1,70	0,30	44 a 137

A Figura 117 apresenta a configuração final da viga danificada.

FIGURA 117 – Configuração final de dano da viga 5.3.4

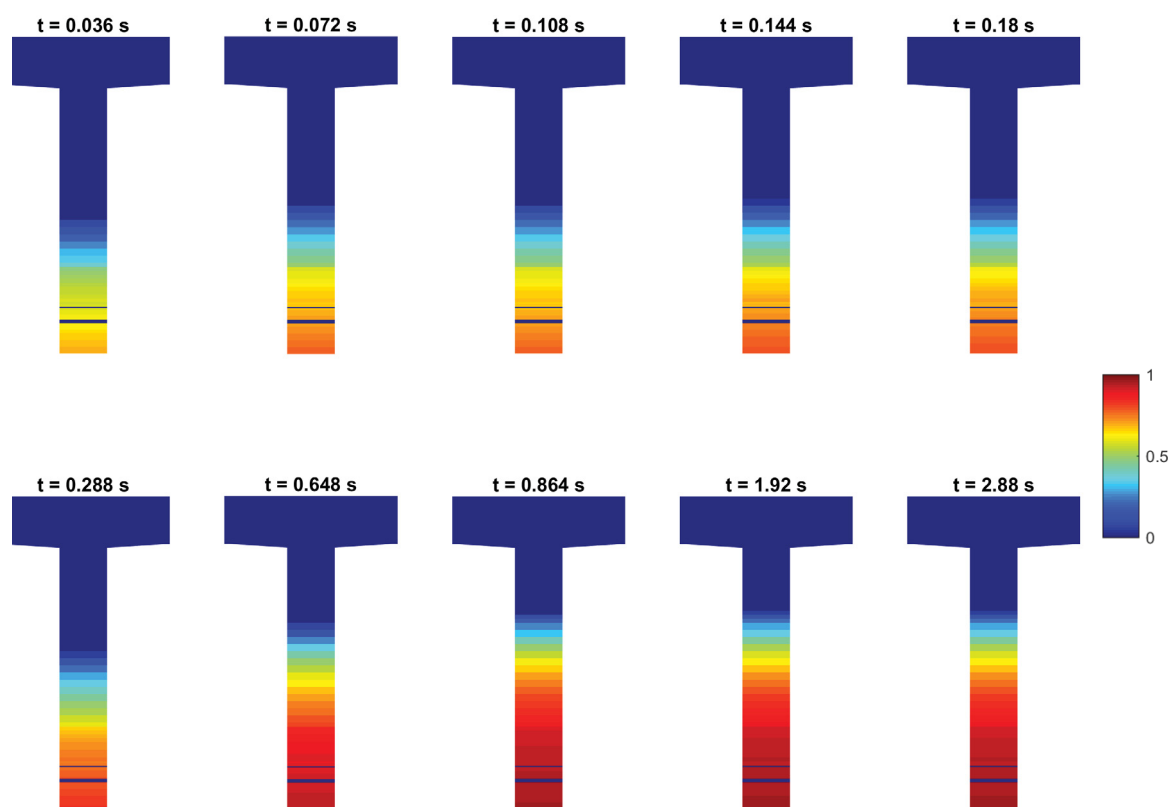


FONTE: O autor.

Nota-se que a danificação na viga T deu-se de forma mais homogênea que as vigas I simétrica e viga I assimétrica. Isto deve-se ao fato de que na região inferior, a largura é constante. Contudo, a propagação do dano deu-se de forma acentuada, de modo que o processo de microfissuração estendeu-se a elementos mais próximos dos apoios do que nas três vigas analisadas anteriormente.

A Figura 118 mostra a evolução do dano ao longo do tempo no 16º elemento da viga T.

FIGURA 118 – Evolução do dano no 16º elemento da viga 5.3.4

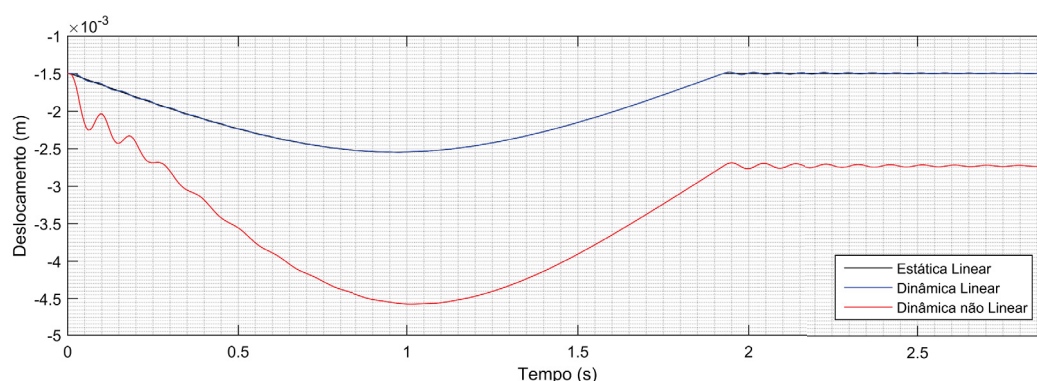


FONTE: O autor.

Percebe-se que o processo de danificação se inicia de forma significativa nos instantes iniciais. Como a largura da base inferior desta viga é significativamente menor que das vigas anteriores, esta região encontra-se mais propensa à danificação. Acrescentando-se a isto o fato de que os elementos mais danificados nesta análise são também os mais distantes da linha neutra, o que não ocorre na viga I assimétrica, a evolução do dano se dá de forma mais acentuada que nas três análises anteriores.

A Figura 119 apresenta as respostas de deslocamento da viga T.

FIGURA 119 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.3.4

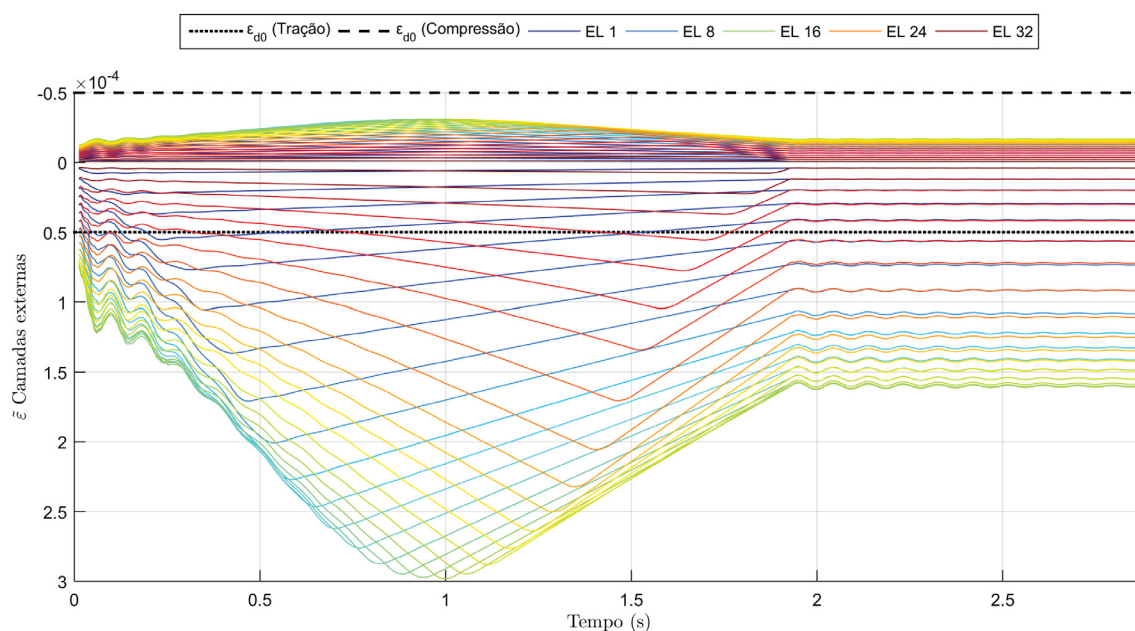


FONTE: O autor.

Analisando-se os resultados apresentados na Figura 119, e comparando-os com os resultados mostrados nas Figuras 104, 109 e 114, nota-se que a viga T foi o modelo que teve maiores respostas de deslocamento dinâmico não linear, atingindo aproximadamente 4,6 mm.

A Figura 120 mostra as respostas dinâmicas de deformação da viga T.

FIGURA 120 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.3.4



FONTE: O autor.

Em conformidade com os resultados apresentados da viga T, as deformações das camadas externas deste modelo foram, dentre as demais análises, as com maiores deformações por conta da maior perda de rigidez.

A Tabela 30 apresenta as frequências naturais de vibração da viga T.

TABELA 30 – Frequências naturais da ponte 5.3.4

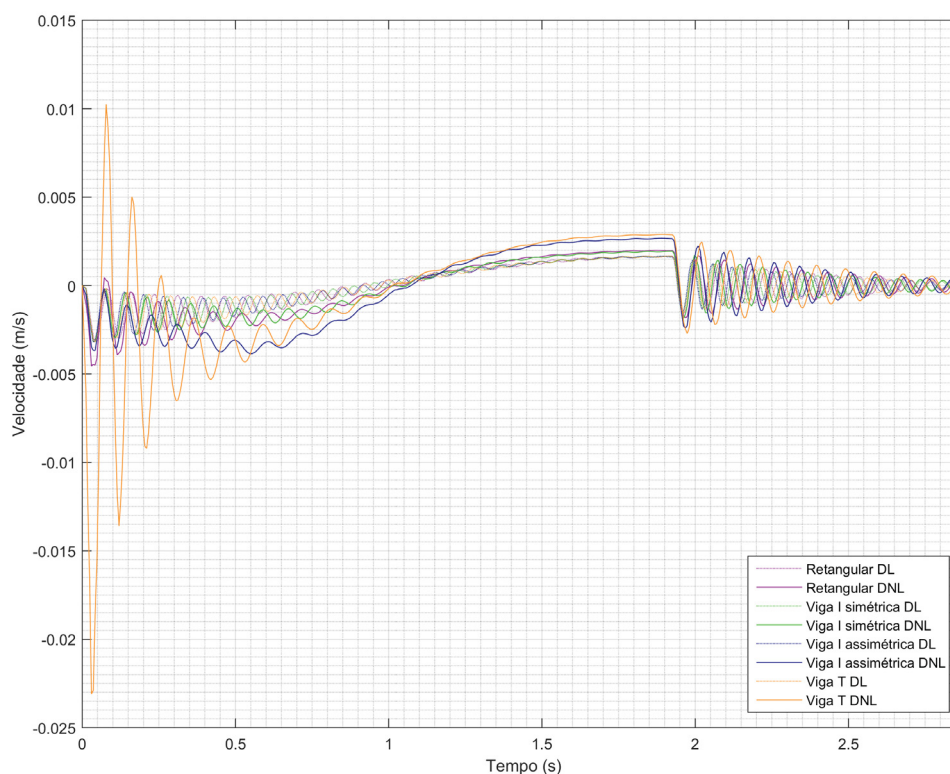
Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	91,10	67,72	-25,66
2 <sup>a</sup>	364,42	287,02	-21,24
3 <sup>a</sup>	820,10	663,88	-19,05
4 <sup>a</sup>	1458,34	1189,59	-18,43
5 <sup>a</sup>	2279,43	1855,10	-18,62

Dos quatro modelos analisados, a viga T é a que apresentou maior variação nas frequências naturais, sendo a maior alteração na primeira frequência, uma redução de 25,66%.

### 5.3.5 Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade e aceleração e FAD

A Figura 121 apresenta as respostas dinâmicas de velocidade, lineares e não lineares, nos nós centrais das quatro vigas simuladas.

FIGURA 121 – Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.3

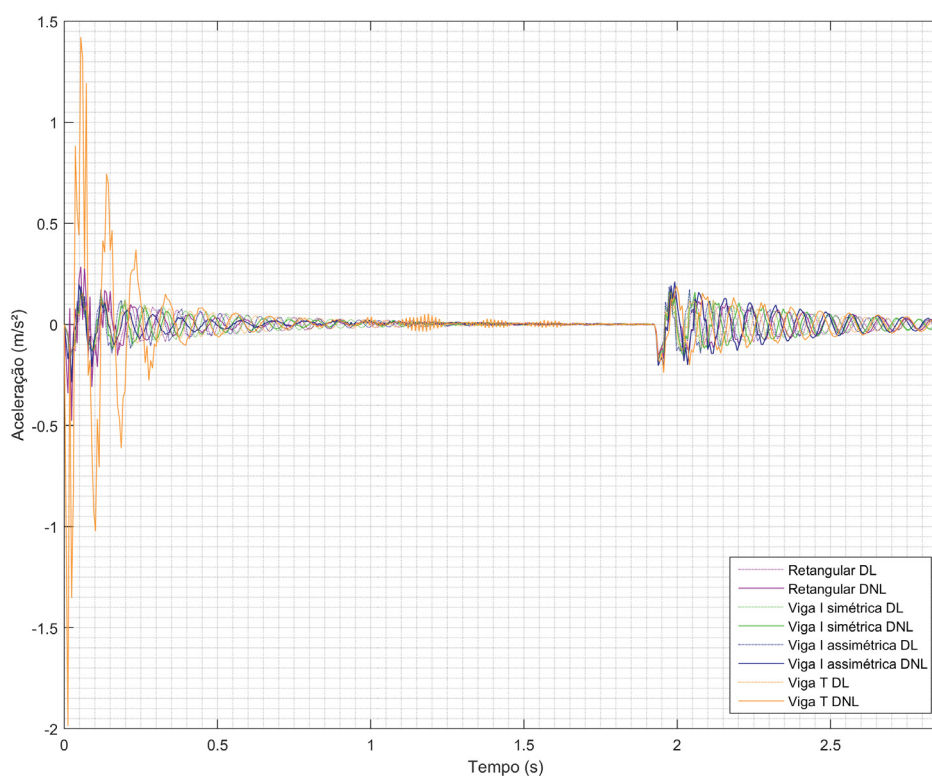


FONTE: O autor.

As vigas que tiveram mais danificação apresentaram maior amplitude nas respostas. Conforme visto anteriormente, a viga T foi a que apresentou maior danificação e, conseqüentemente, teve maiores amplitudes de velocidade. No entanto, entre  $t = 0,55$  s e  $t = 1,10$  s, a viga I assimétrica teve maiores respostas. Observa-se também que a danificação ocasiona o aumento da defasagem nas oscilações. Como esperado, as maiores oscilações ocorrem no início da análise.

A Figura 122 apresenta as respostas dinâmicas de aceleração dos nós centrais das vigas.

FIGURA 122 – Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.3



FONTE: O autor.

A viga T apresentou maiores amplitudes de aceleração na análise não linear devido à maior danificação. Observa-se o fenômeno de batimento entre  $t = 1,0$  s e  $t = 1,7$  s, caracterizado pela ocorrência de uma rápida oscilação com a baixa variação de amplitude. Este fenômeno pode ser explicado pela superposição de ondas de mesma direção com amplitudes e frequências próximas (INMAN; SINGH, 2001).

A Tabela 31 compara os FADs das análises realizadas.

TABELA 31 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.3

Seção Transversal	$u_{EL}^{Máx}$ (mm)	$u_{DL}^{Máx}$ (mm)	FAD <sub>L</sub>	$u_{DNL}^{Máx}$ (mm)	FAD <sub>NL</sub>
Retangular	2,808	2,811	1,00110	3,443	1,22622
I simétrica	2,414	2,416	1,00053	2,858	1,18391
I assimétrica	2,297	2,299	1,00090	3,809	1,65829
T	2,546	2,549	1,00097	4,571	1,79544

Na análise linear, o maior FAD ocorre na viga retangular, seguido da T, I assimétrica e I simétrica. No entanto, devido ao processo de danificação, o maior FAD na análise não linear ocorre na viga T, seguido da viga I assimétrica, viga retangular e viga I simétrica.

#### 5.4 INFLUÊNCIA DOS COMPRIMENTOS DE BALANÇOS NO PROCESSO DE DANIFICAÇÃO DINÂMICO

A presença de balanços tem grande influência na análise dinâmica e de danificação devido à possibilidade de inversão de esforços, principalmente no caso de vibração. Neste contexto, esta Seção pretende investigar a influência de variações nos comprimentos de balanço no processo de danificação ao longo do tempo de passagem da carga móvel.

Além do exposto, esta Seção apresenta diferentes distribuições de armadura dimensionadas para cada comprimento de balanço, conforme NBR 6118 (2014). Analogamente à análise da influência das taxas de armadura em vigas biapoiadas, analisam-se uma viga de vão central curto, 6 m, e uma viga de vão central longo, de 18 m. Como o máximo comprimento de balanço permitido por norma é de 1/3 da distância entre apoios, analisaram-se vigas cujos comprimentos dos balanços foram definidos por 1/3, 1/4 e 1/6 do vão central.

Nestas análises consideraram-se de vigas com seção transversal retangular.

A Tabela 32 apresenta os parâmetros dos materiais, do veículo e do Método de Integração Temporal de *Newmark* usados em todas as análises da presente Seção.

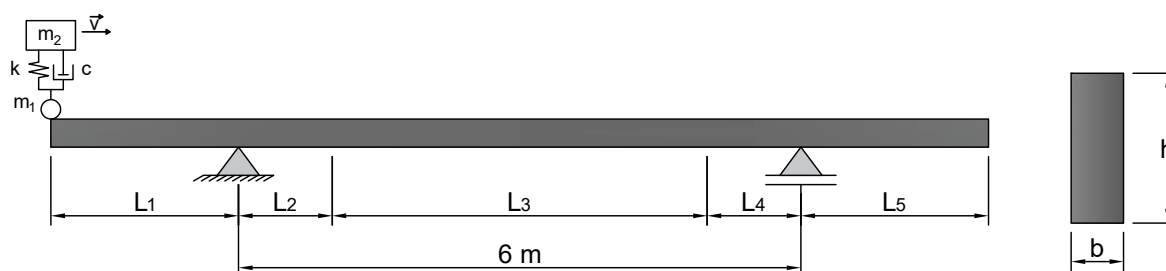
TABELA 32 – Parâmetros do veículo, concreto, aço e de *Newmark* adotados para os modelos 5.4

Veículo	Parâmetros do concreto	Parâmetros do aço	Parâmetros de <i>Newmark</i>
$m_1 = 3.000 \text{ kg}$	$E_c = 29,43 \text{ GPa}$	$E_s = 210 \text{ GPa}$	$\gamma = 0,5$
$m_2 = 12.000 \text{ kg}$	$\nu_c = 0,2$	$\nu_s = 0,3$	$\beta = 0,25$
$k = 9.120 \text{ kN/m}$	$\varepsilon_{d0} = 1,0 \cdot 10^{-4}$	$\varepsilon_{sy} = 2 \text{ ‰}$	$dt = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$
$c = 96 \text{ kNs/m}$	$A_T = 0,7$	$k_s = 0,85$	$\zeta = 0,025$
$v = 60 \text{ km/h}$	$B_T = 1,0 \cdot 10^4$		
	$A_C = 1,5$		
	$B_C = 1,0 \cdot 10^4$		

### 5.4.1 Viga com 6 m entre apoios e 2 balanços

A Figura 123 ilustra a viga de vão curto, 6 m, a qual são variados 3 comprimentos de balanço.

FIGURA 123 – Ilustração da Ponte 5.4.1



FONTE: O autor.

#### 5.4.1.1 Viga com balanços de 1 m

A Tabela 33 apresenta os parâmetros da ponte para esta análise.

TABELA 33 – Parâmetros da ponte 5.4.1.1

$h \text{ (m)}$	$b \text{ (m)}$	$L_{\text{Total}} \text{ (m)}$	Elementos finitos	Distribuições de armadura	Passos de tempo
0,90	0,25	8,00	32	5	960

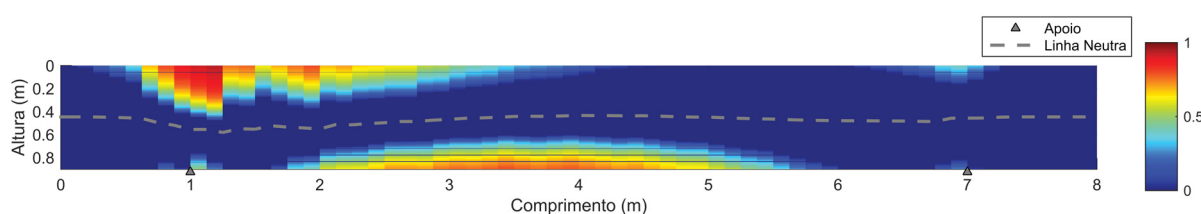
A Tabela 34 apresenta a distribuição das armaduras para cada trecho da ponte.

TABELA 34 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.1.1

Trecho	$L_{\text{Trecho}}$ (m)	Elementos	Armadura inferior	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura superior	$A_s'$ (cm <sup>2</sup> )	Camadas
1	1,00	4	3 $\phi$ 12,5 mm	3,68	4 $\phi$ 16 mm	8,04	115
2	0,25	1	3 $\phi$ 12,5 mm	3,68	4 $\phi$ 16 mm	8,04	115
3	5,50	22	5 $\phi$ 32 mm	40,21	2 $\phi$ 16 mm	4,02	115
4	0,25	1	3 $\phi$ 12,5 mm	3,68	4 $\phi$ 16 mm	8,04	115
5	1,00	4	3 $\phi$ 12,5 mm	3,68	4 $\phi$ 16 mm	8,04	115

A Figura 124 apresenta a configuração final de dano da viga de 6 m de vão entre apoios e balanços de 1 m.

FIGURA 124 – Configuração final de dano da viga 5.4.1.1



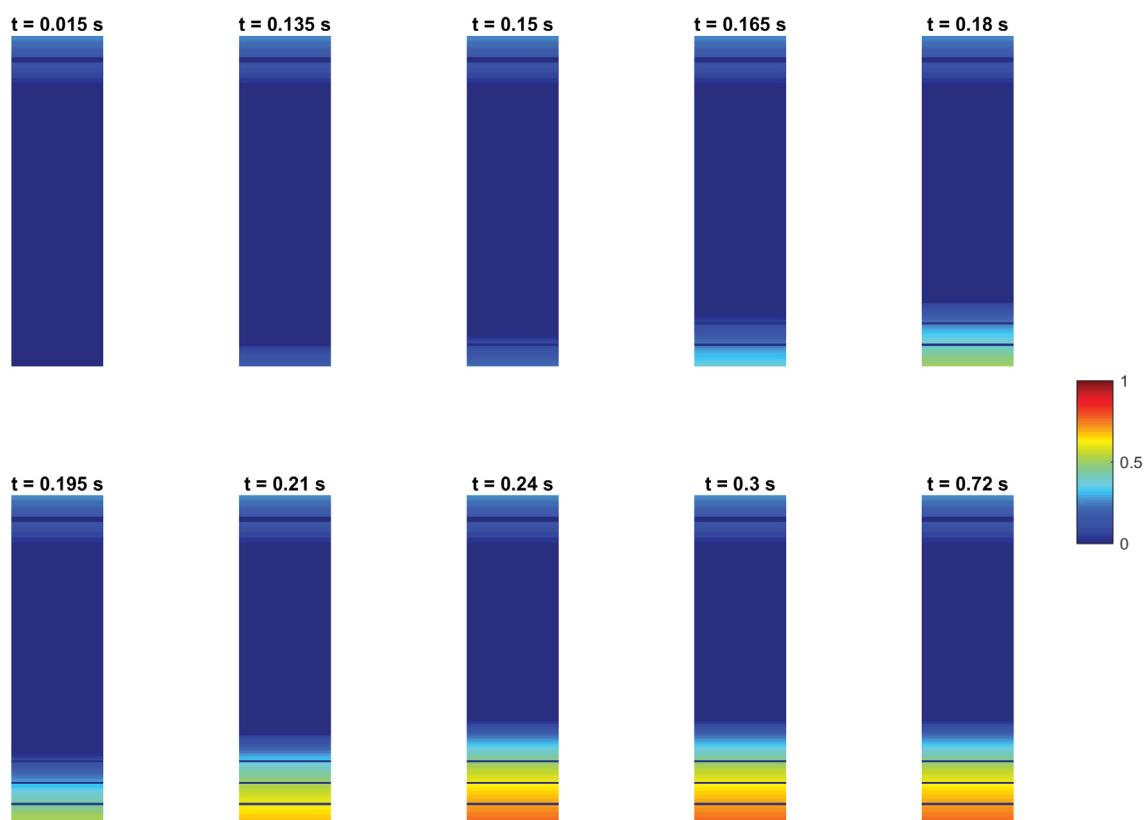
FONTE: O autor.

Apesar da variação de armadura ser simétrica em relação ao vão central, é possível perceber que a danificação é um processo assimétrico, o que é ocasionado devido ao fato da passagem do veículo se dar no sentido da esquerda para a direita, resultando em maiores danificações na região esquerda da ponte. Dentre outros motivos, isso pode ser ocasionado pela excitação inicial, instabilidade inicial, que faz com que a ponte saia do seu estado estacionário, provocando maiores efeitos dinâmicos, bem como pelo efeito do amortecimento estrutural.

Nota-se a mudança mais acentuada da danificação entre o primeiro elemento posterior ao apoio da esquerda e o elemento subsequente. Isso ocorre, também, pela diferença na quantidade de aço e conseqüente ganho de rigidez no elemento. Observam-se maiores danificações na parte superior da viga próximas ao apoio da esquerda. Nota-se com clareza a variação da posição da linha neutra nas regiões danificadas.

A Figura 125 apresenta a evolução do dano no 16º elemento da viga ao longo do tempo.

FIGURA 125 – Evolução do dano no 16º elemento da viga 5.4.1.1

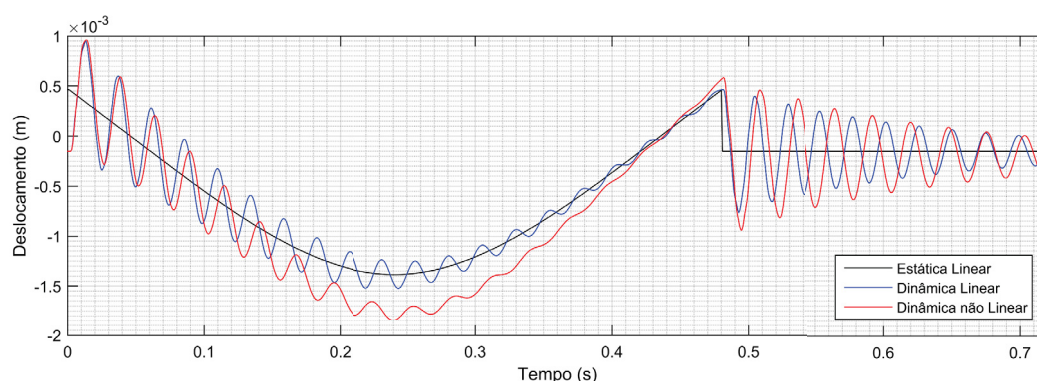


FONTE: O autor.

Observa-se que a danificação no elemento central iniciou-se nas camadas superiores. Isto ocorre devido ao fato de que o veículo entra na ponte pelo balanço, o que, pela linha de ação da carga, gera esforços de tração nas camadas superiores e de compressão nas camadas inferiores. Quando o veículo entra na zona entre apoios, as camadas inferiores sofrem maior danificação, a qual é propagada em direção ao centro da viga ao longo do tempo de análise.

A Figura 126 apresenta as respostas de deslocamento estático linear, dinâmico linear e dinâmico não linear da viga de 6 m entre vãos e 1 m de balanços.

FIGURA 126 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.1.1

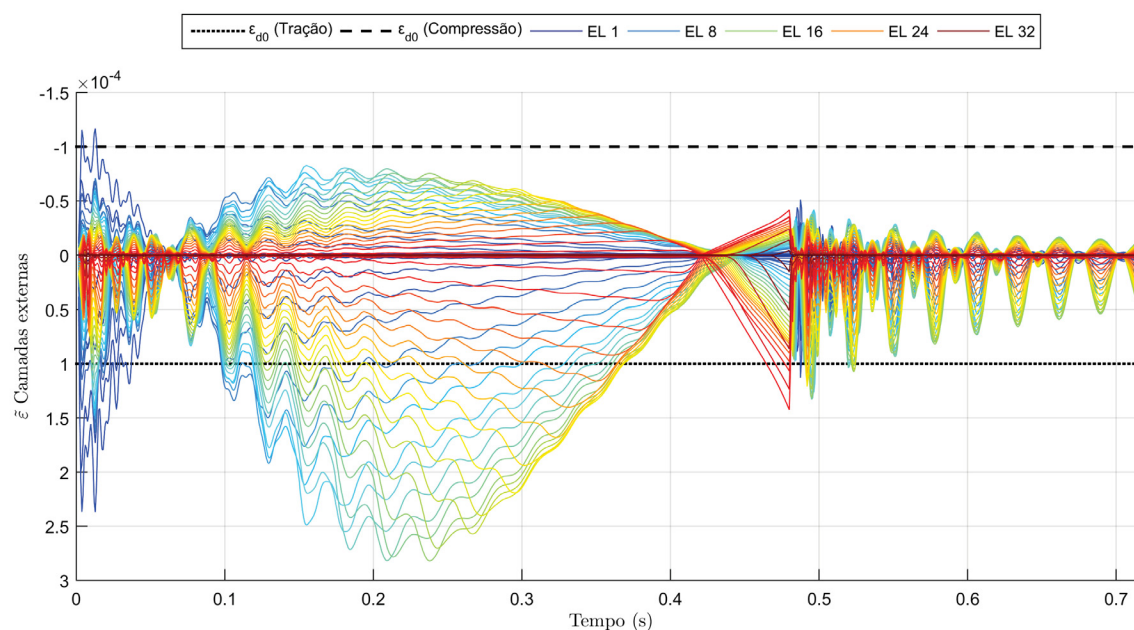


FONTE: O autor.

É possível observar a variação das respostas dinâmicas não lineares de deslocamento na medida em que evolui o processo de danificação, diferenciando-se das respostas dinâmicas lineares. Após a saída do veículo da ponte, embora as respostas dinâmicas não lineares oscilem em torno das respostas estáticas lineares, pode-se perceber que a estabilização se dá em deslocamentos superiores aos obtidos na resposta estática linear, ou seja, há um deslocamento permanente, devido ao peso próprio, ocasionado pela danificação.

A Figura 127 apresenta as respostas dinâmicas não lineares de deformação das camadas externas dos elementos.

FIGURA 127 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.1.1



FONTE: O autor.

Nota-se expressiva danificação por tração devido às deformações que superaram a deformação de referência. Também observa-se que algumas respostas de deformação superaram a deformação de referência por compressão, o que ocasiona o dano por esmagamento do concreto, já considerando o efeito de *Poisson*.

Devido ao efeito dos balanços, o espectro de deformações oscila entre valores positivos e negativos. Observa-se o efeito do amortecimento estrutural nas respostas dinâmicas não lineares de deformação, principalmente após a saída do veículo. Observam-se, também, deformações superiores à deformação de referência na tração mesmo após a saída do veículo.

O fenômeno de danificação por compressão, observado na simulação estática não linear da Seção 5.1.1, se repete nesta análise. O primeiro elemento dentro do vão central, ou 5º elemento, tem a rigidez comprometida pela danificação por tração nas fibras superiores. Esta perda de rigidez aumenta a deformação do elemento de tal forma que dá-se, então, a danificação por compressão nas fibras inferiores. Desta forma, o modelo representa bem o comportamento distinto do concreto à compressão e à tração, com menor resistência no último caso.

A Tabela 35 apresenta as frequências naturais de vibração obtidas na análise.

TABELA 35 – Frequências naturais da ponte 5.4.1.1

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	259,52	226,33	-12,79
2 <sup>a</sup>	938,06	818,38	-12,76
3 <sup>a</sup>	1668,96	1418,13	-15,03
4 <sup>a</sup>	2266,82	1954,95	-13,76
5 <sup>a</sup>	3252,35	2828,49	-13,03

Diferentemente do que ocorreu com as análises feitas nas Seções anteriores, com armadura constante e condições de contorno biapoçadas, a maior variação dessa simulação ocorreu na 3ª frequência natural de vibração, sendo esta de 15,03% devido à danificação.

#### 5.4.1.2 Viga com balanços de 1,5 m

A Tabela 36 apresenta os parâmetros da ponte para esta análise.

TABELA 36 – Parâmetros da ponte 5.4.1.2

h (m)	b (m)	L <sub>Total</sub> (m)	Elementos finitos	Distribuições de armadura	Passos de tempo
0,80	0,25	9,00	36	5	1080

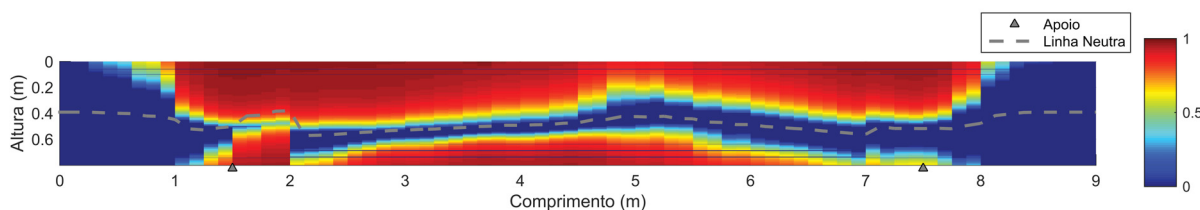
A Tabela 37 apresenta a distribuição das armaduras para cada trecho da ponte.

TABELA 37 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.1.2

Trecho	$L_{\text{Trecho}}$ (m)	Elementos	Armadura inferior	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura superior	$A_s'$ (cm <sup>2</sup> )	Camadas
1	1,50	6	3 $\phi$ 12,5 mm	3,68	7 $\phi$ 16 mm	14,07	126
2	0,50	2	3 $\phi$ 12,5 mm	3,68	7 $\phi$ 16 mm	14,07	126
3	5,00	20	7 $\phi$ 25 mm	34,36	6 $\phi$ 16 mm	12,06	126
4	0,50	2	3 $\phi$ 12,5 mm	3,68	7 $\phi$ 16 mm	14,07	126
5	1,50	6	3 $\phi$ 12,5 mm	3,68	7 $\phi$ 16 mm	14,07	126

A Figura 128 apresenta a configuração final de dano da viga de 6 m de vão entre apoios e balanços de 1,5 m.

FIGURA 128 – Configuração final de dano da viga 5.4.1.2



FONTE: O autor.

Percebe-se que a posição da linha neutra acompanha o processo assimétrico de danificação, ficando evidente a existência de regiões sem dano em torno da linha neutra. De modo análogo à viga com 1 m de balanço, a danificação foi mais acentuada na parte esquerda da viga devido ao movimento do veículo ser da esquerda para a direita, provocando maiores efeitos dinâmicos pela maior excitação ao fazer com que a ponte saia de seu estado estacionário.

Quando o veículo entra na ponte, as camadas superiores próximas ao apoio esquerdo iniciam seu processo de danificação por tração. À medida que o veículo percorre o trajeto para a direita, ainda no primeiro balanço, o dano se intensifica nessa região, causando a realocação da posição da linha neutra para uma posição mais baixa do que a inicial. Em um instante de tempo posterior, inicia-se o processo de danificação por tração nas camadas inferiores dos dois elementos imediatamente à direita do apoio esquerdo, conforme será exibido na Figura 131. Isto faz com que a posição da linha neutra se mova para cima, retornando ao ponto mais próximo do centro geométrico da seção transversal dos elementos em questão.

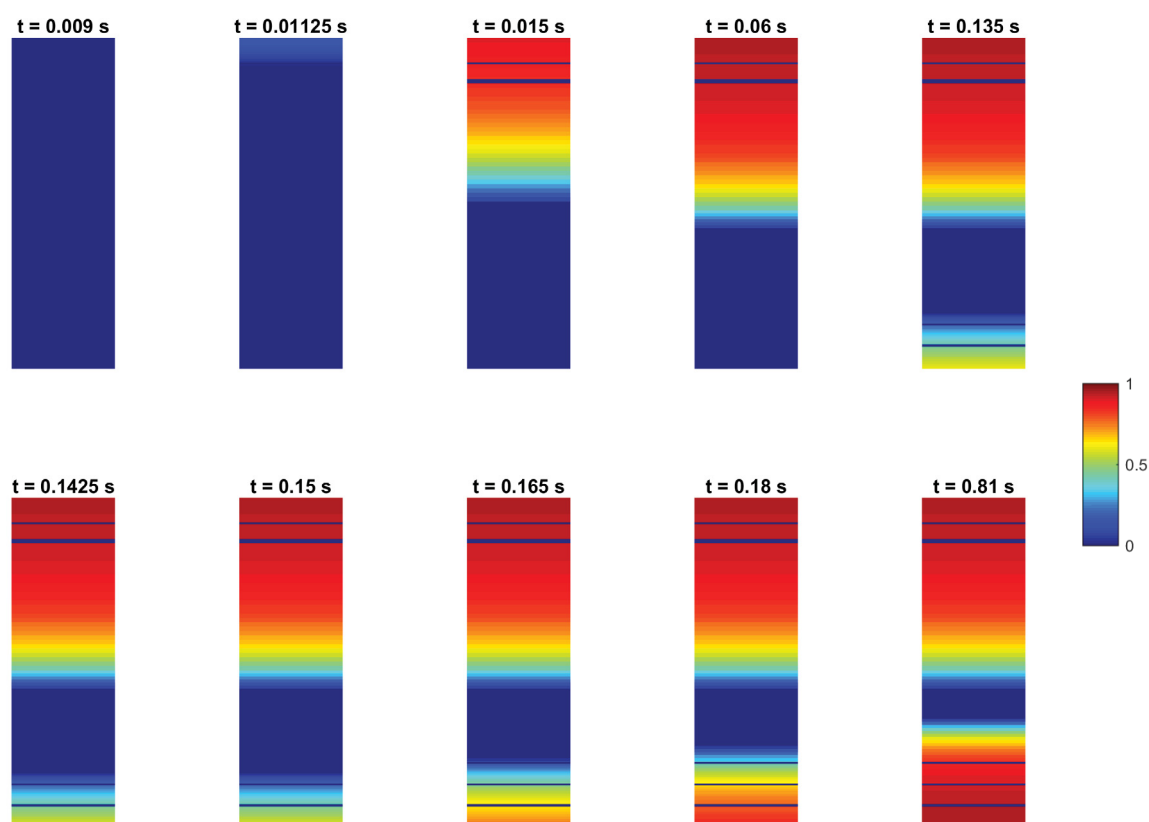
A mudança de armaduras entre o 8º e 9º elementos tem grande impacto no processo dinâmico de danificação. Percebe-se que entre estes elementos não há

suavidade na configuração danificada. Isto se dá devido à diferença entre a rigidez dos dois elementos pela presença de diferentes áreas de aço.

Nota-se que devido ao maior comprimento dos balanços em relação ao vão entre apoios para a mesma carga, quando comparado à simulação anterior, ocorreu maior danificação.

A Figura 129 apresenta a evolução do dano no 18º elemento da viga ao longo do tempo.

FIGURA 129 – Evolução do dano no 18º elemento da viga 5.4.1.2

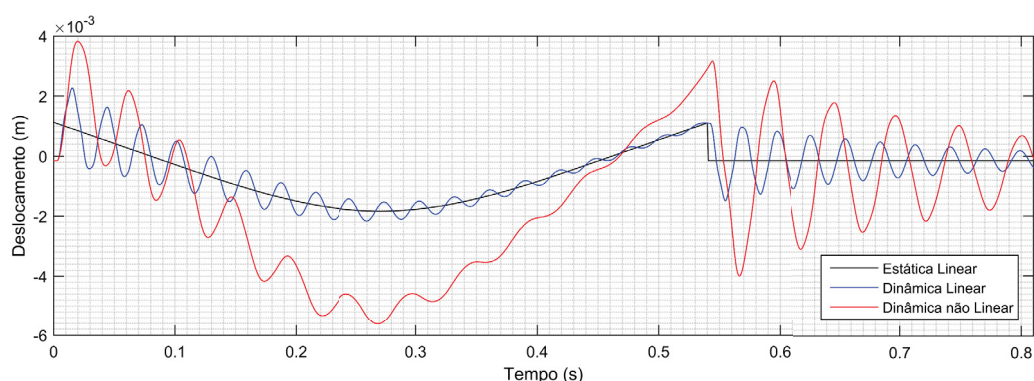


FONTE: O autor.

Nota-se que até o tempo  $t = 0,06$  s somente as camadas superiores sofrem danificação por tração. A partir deste instante, as camadas inferiores também passam a sofrer danificação, até o final da análise, também por tração, como será exposto nas respostas dinâmicas de deformação da Figura 131.

A Figura 130 apresenta as respostas de deslocamento estático linear, dinâmico linear e dinâmico não linear da viga de 6 m entre vãos e 1,5 m de balanços.

FIGURA 130 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.1.2

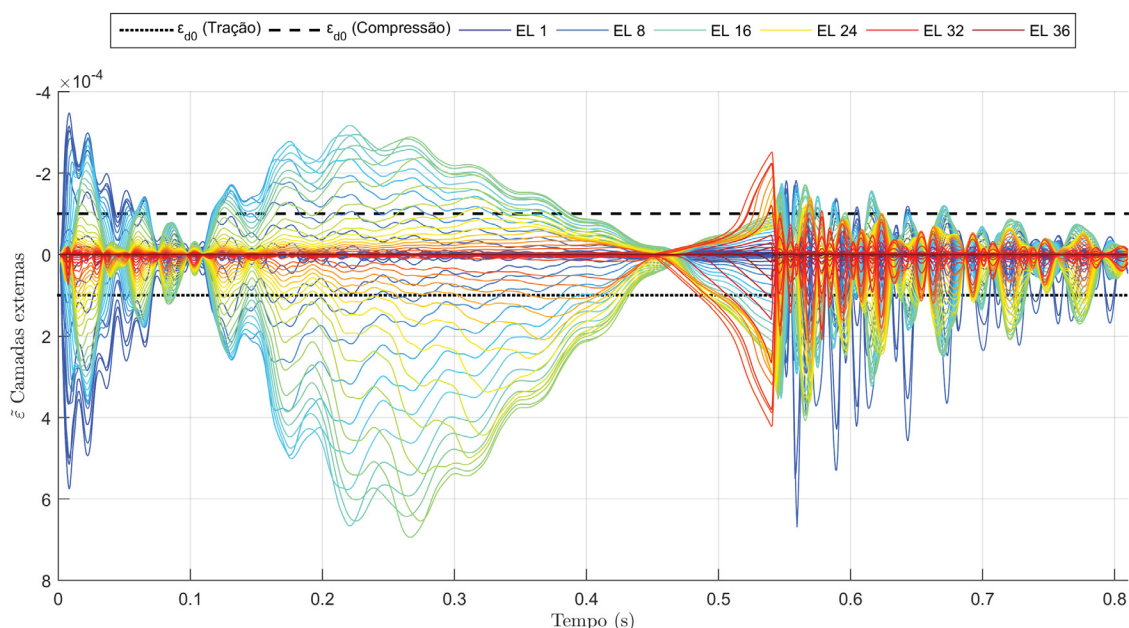


FONTE: O autor.

Observam-se maiores respostas dinâmicas não lineares de deslocamento em relação às demais. Também é possível perceber que a danificação provocou menores oscilações na resposta não linear se comparada à resposta dinâmica linear. Embora o modelo de dano, adaptado para dinâmica, seja elástico não linear, retornando à configuração inicial numa situação de descarregamento e penalizando a rigidez, nota-se um deslocamento permanente, bem como deformação permanente associada. Isto é explicado pelo fato do dano ter uma parcela irreversível, ou seja, no modelo implementado não há recuperação da rigidez em uma situação de descarregamento. Neste âmbito, o dano é progressivo e irreparável.

A Figura 131 apresenta as respostas dinâmicas não lineares de deformação das camadas externas dos elementos.

FIGURA 131 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.1.2



FONTE: O autor.

Observa-se que nos primeiros instantes o 7º e 8º elementos sofrem deformações de tração, acima do  $\varepsilon_{d0}$  seguido por deformações por compressão superiores ao  $\varepsilon_{d0}$ , ou seja, ocorre danificação por tração seguida de danificação por compressão. Nas camadas inferiores destes elementos há, portanto, uma região danificada por compressão. O veículo percorre a trajetória até o instante de tempo aproximado de  $t = 0,53$  s, quando este deixa a ponte. Entretanto, observa-se que o 7º e 8º elementos sofrem um pico de deformação no instante de tempo  $t = 0,57$  s. Assim, este maior pico de deformação ocorre na situação de vibração amortecida, a qual procura estabilizar as respostas dinâmicas. Portanto, a região previamente danificada por compressão tem sua evolução de dano por tração, o que ocasionou a subida da linha neutra conforme observado na Figura 128.

Percebe-se que com o aumento de 0,5 m no comprimento do balanço, ou seja, 8,33% do comprimento do vão entre apoios, as respostas dinâmicas de deformação apresentam grandes acréscimos em relação à simulação com balanços de 1 m. Conforme observado na Figura 127, os elementos centrais da viga de 6 m com 1 m de balanço apresentam valores em torno de  $2,8 \cdot 10^{-4}$  m/m. Na atual simulação, os valores de deformação dos elementos centrais apresentam valores de aproximadamente  $7,0 \cdot 10^{-4}$  m/m.

A Tabela 38 apresenta as frequências naturais de vibração obtidas na análise.

TABELA 38 – Frequências naturais da ponte 5.4.1.2

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	219,21	121,65	-44,51
2 <sup>a</sup>	614,90	332,40	-45,94
3 <sup>a</sup>	896,48	493,54	-44,95
4 <sup>a</sup>	1430,21	809,62	-43,39
5 <sup>a</sup>	2582,82	1458,74	-43,52

Houve maior redução das frequências naturais devido à danificação provocada pelo aumento do comprimento dos balanços, sendo a maior equivalente a 45,94% na segunda frequência natural de vibração.

#### 5.4.1.3 Viga com balanços de 2 m

A Tabela 39 apresenta os parâmetros da ponte para esta análise.

TABELA 39 – Parâmetros da ponte 5.4.1.3

h (m)	b (m)	L <sub>Total</sub> (m)	Elementos finitos	Distribuições de armadura	Passos de tempo
0,75	0,25	10,00	40	5	1200

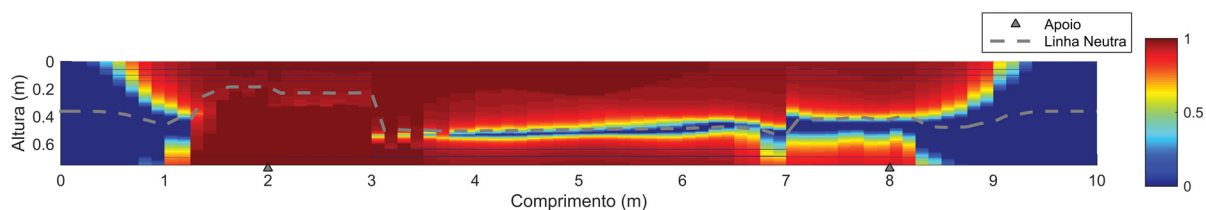
A Tabela 40 apresenta a distribuição das armaduras para cada trecho da ponte.

TABELA 40 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.1.3

Trecho	L <sub>Trecho</sub> (m)	Elementos	Armadura inferior	A <sub>s</sub> (cm <sup>2</sup> )	Armadura superior	A <sub>s</sub> ' (cm <sup>2</sup> )	Camadas
1	2,00	8	3φ12,5 mm	3,68	10φ16 mm	20,11	104
2	1,00	4	3φ16 mm	6,03	10φ16 mm	20,11	104
3	4,00	16	5φ25 mm	24,54	5φ16 mm	10,05	104
4	1,00	4	3φ16 mm	6,03	10φ16 mm	20,11	104
5	2,00	8	3φ12,5 mm	3,68	10φ16 mm	20,11	104

A Figura 132 apresenta a configuração final de dano da viga de 6 m de vão entre apoios e balanços de 2 m.

FIGURA 132 – Configuração final de dano da viga 5.4.1.3

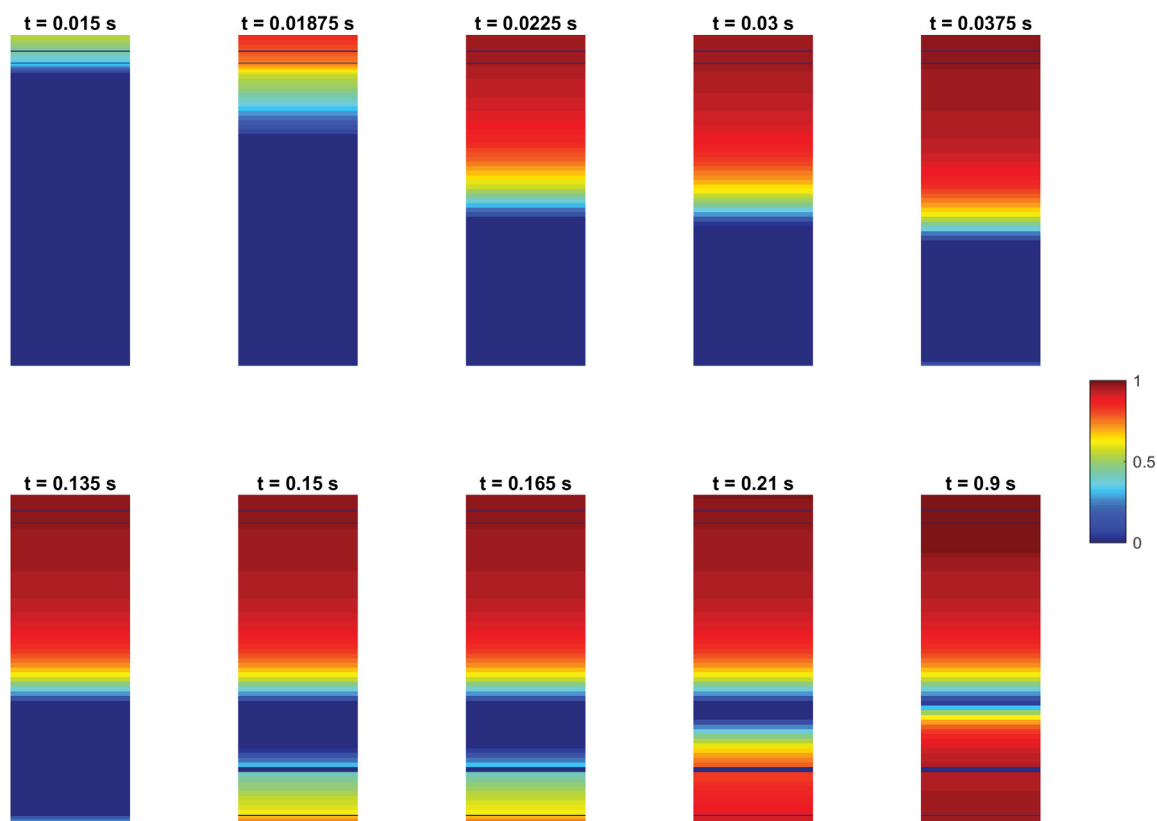


FONTE: O autor.

O aumento de mais 0,5 m no comprimento dos balanços ocasionou um significativo aumento no processo de microfissuração dinâmica da viga. Na Figura 132 ficam evidentes as diferentes respostas de dano com a mudança de armaduras. No vão entre apoios, devido à excessiva danificação, houveram pequenas regiões íntegras em torno da posição da linha neutra. Essa grande danificação também pode ser justificada por tratar-se de vigas de vão curto, as quais sofrem maiores efeitos dinâmicos segundo Chopra (1995).

A Figura 133 apresenta a evolução do dano no 20º elemento da viga ao longo do tempo.

FIGURA 133 – Evolução do dano no 20º elemento da viga 5.4.1.3

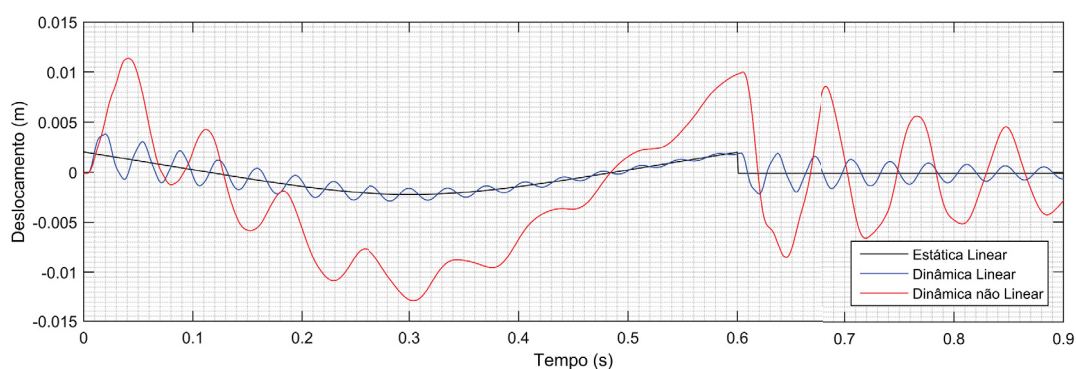


FONTE: O autor.

A danificação deste elemento foi muito maior que as dos elementos centrais das análises anteriores, restando poucas camadas íntegras de concreto no final da análise.

A Figura 134 apresenta as respostas de deslocamento estático linear, dinâmico linear e dinâmico não linear da viga de 6 m entre vãos e 1 m de balanços.

FIGURA 134 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.1.3

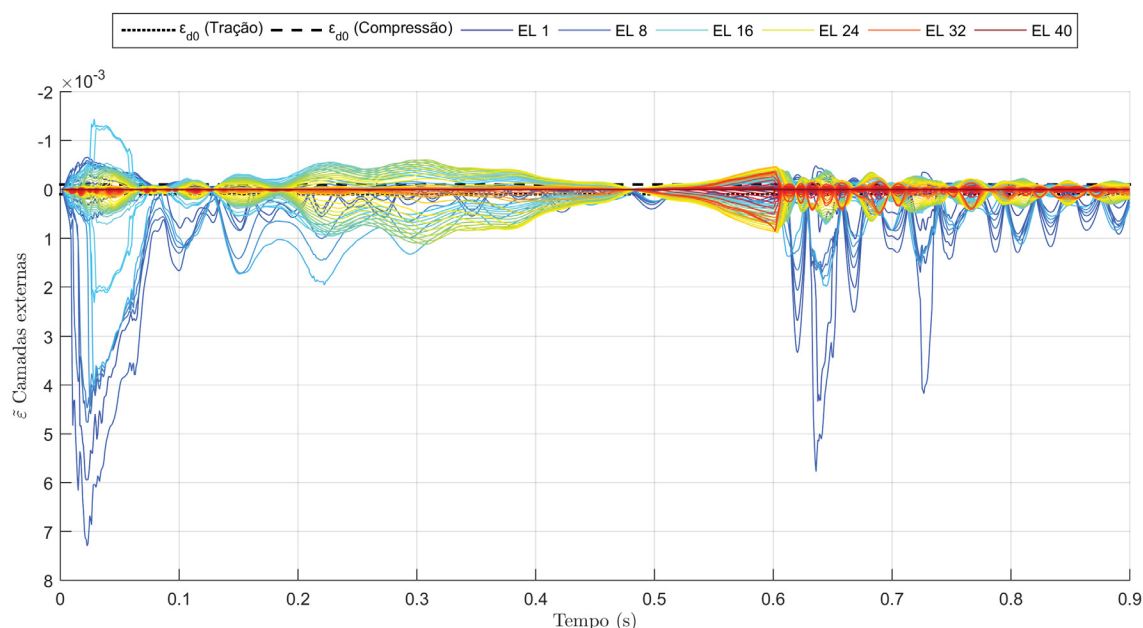


FONTE: O autor.

Adequadamente ao observado na resposta de dano, houve grande acréscimo nas respostas dinâmicas não lineares de deslocamento.

A Figura 135 apresenta as respostas dinâmicas não lineares de deformação das camadas externas dos elementos.

FIGURA 135 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.1.3



FONTE: O autor.

Ao analisar a Figura 135, nota-se o grande aumento nas respostas de deformação. Isto ocasiona maiores danificações que, por sua vez, amplificam as respostas de deformação.

A Tabela 41 apresenta as frequências naturais de vibração obtidas na análise.

TABELA 41 – Frequências naturais da ponte 5.4.1.3

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	179,07	77,25	-56,86
2 <sup>a</sup>	387,66	155,32	-59,93
3 <sup>a</sup>	592,12	267,79	-54,77
4 <sup>a</sup>	1191,51	524,43	-55,99
5 <sup>a</sup>	2252,69	989,30	-56,08

Nota-se a grande redução das frequências naturais devido à danificação provocada pelo aumento do comprimento dos balanços, sendo a maior equivalente a 59,93% na segunda frequência natural de vibração.

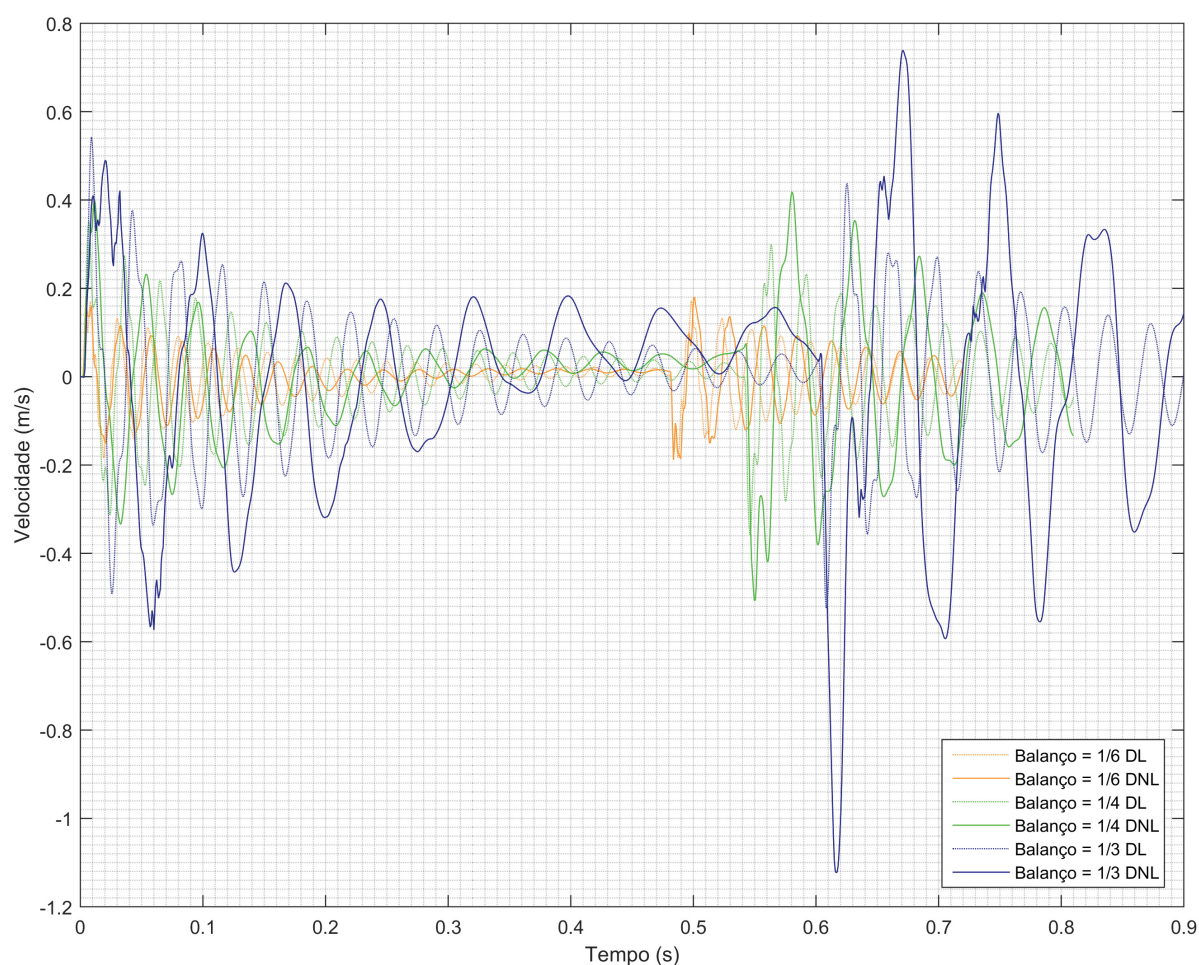
#### 5.4.1.4 Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade e aceleração e FAD

Os gráficos de velocidade e aceleração que serão apresentados nesta Seção exibem as respostas dinâmicas das três análises. Contudo, como o comprimento total

de cada ponte é diferente e o veículo tem a mesma velocidade em todas as análises, os tempos totais de cada análise são diferentes. Portanto, todas as respostas iniciam no instante de tempo  $t = 0$  s, contudo o instante de tempo final das pontes com balanços de 1 m, 1,5 m e 2 m são, respectivamente,  $t = 0,72$  s,  $t = 0,81$  s e  $t = 0,90$  s.

A Figura 136 apresenta as respostas dinâmicas de velocidade, lineares e não lineares, nos nós centrais das três vigas simuladas.

FIGURA 136 – Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.4.1

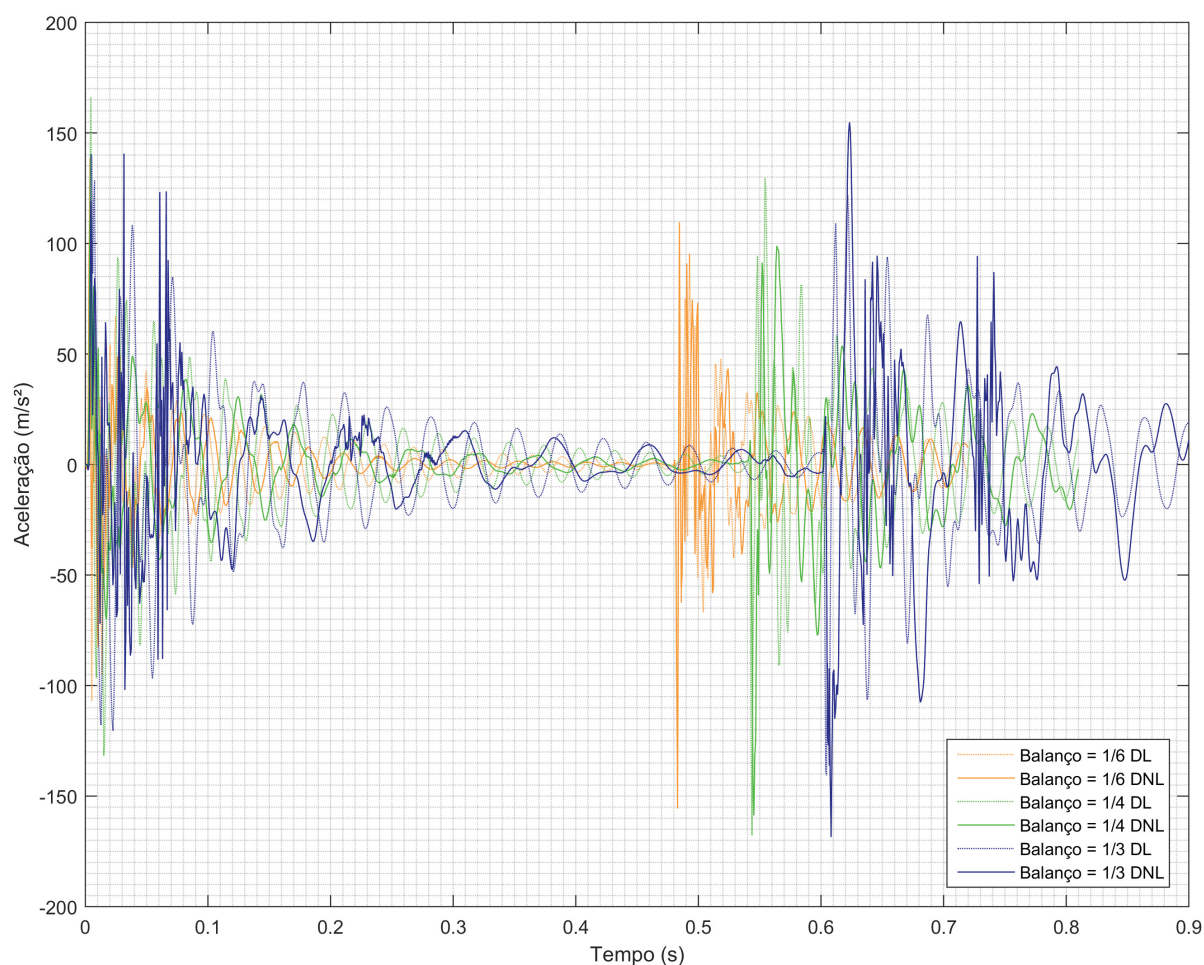


FONTE: O autor.

O maior comprimento nos balanços ocasiona maiores amplitudes de velocidade. As respostas dinâmicas não lineares diferem-se das lineares devido à danificação.

A Figura 137 apresenta as respostas dinâmicas de aceleração dos nós centrais das vigas.

FIGURA 137 – Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.4.1



FONTE: O autor.

São evidentes picos de aceleração em todas as análises. A resposta não linear é mais variável pois depende da evolução do dano ao longo do tempo.

A Tabela 42 compara os FADs das análises realizadas.

TABELA 42 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.4.1

Comprimento dos balanços	$u_{EL}^{Máx}$ (mm)	$u_{DL}^{Máx}$ (mm)	$FAD_L$	$u_{DNL}^{Máx}$ (mm)	$FAD_{NL}$
1/6	1,386	1,523	1,09839	1,846	1,33184
1/4	2,113	3,080	1,45765	6,611	3,12919
1/3	5,114	6,306	1,23300	35,214	6,88546

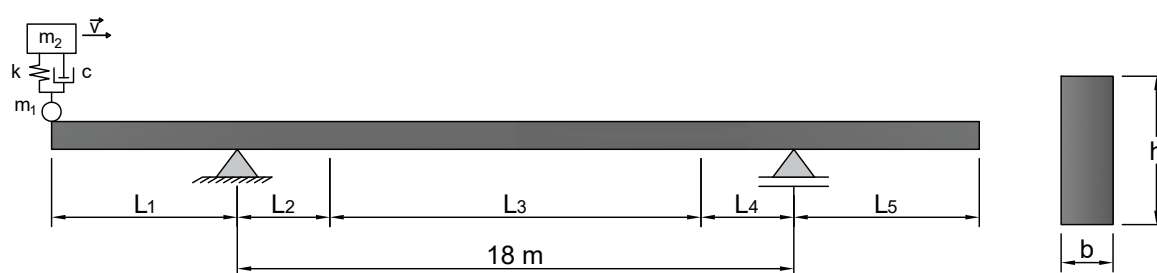
Em relação às respostas lineares, nota-se um maior FAD para o comprimento dos balanços de 1/4 do comprimento entre vãos, apesar do aumento nas respostas

de deslocamento conforme aumento do comprimento dos balanços. No entanto, nas respostas não lineares, houve aumento do FAD conforme aumento nos balanços. Neste, o maior FAD foi de aproximadamente 6,885. Embora significativo, nota-se que a maior resposta dinâmica não linear de deslocamento foi de apenas 35,214 mm.

#### 5.4.2 Viga com 18 m entre apoios e 2 balanços

A Figura 138 ilustra a viga de vão longo, 18 m, a qual são variados 3 comprimentos de balanço.

FIGURA 138 – Ilustração da Ponte 5.4.2



FONTE: O autor.

##### 5.4.2.1 Viga com balanços de 3 m

A Tabela 43 apresenta os parâmetros da ponte para esta análise.

TABELA 43 – Parâmetros da ponte 5.4.2.1

h (m)	b (m)	$L_{\text{Total}}$ (m)	Elementos finitos	Distribuições de armadura	Passos de tempo
1,90	0,50	24,00	80	5	1200

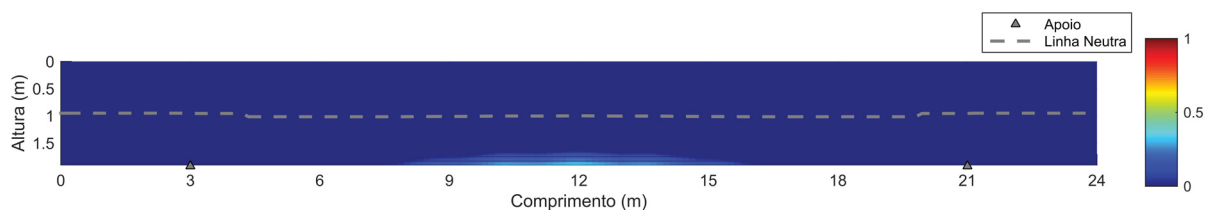
A Tabela 44 apresenta a distribuição das armaduras para cada trecho da ponte.

TABELA 44 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.2.1

Trecho	$L_{\text{Trecho}}$ (m)	Elementos	Armadura inferior	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura superior	$A_s'$ (cm <sup>2</sup> )	Camadas
1	3,00	10	11 $\phi$ 12,5 mm	13,50	11 $\phi$ 12,5 mm	13,50	82
2	1,20	4	11 $\phi$ 16 mm	22,12	11 $\phi$ 12,5 mm	13,50	82
3	15,60	52	12 $\phi$ 40 mm	150,80	11 $\phi$ 12,5 mm	13,50	104
4	1,20	4	11 $\phi$ 16 mm	22,12	11 $\phi$ 12,5 mm	13,50	82
5	3,00	10	11 $\phi$ 12,5 mm	13,50	11 $\phi$ 12,5 mm	13,50	82

A Figura 139 apresenta a configuração final de dano da viga de 18 m de vão entre apoios e balanços de 3 m.

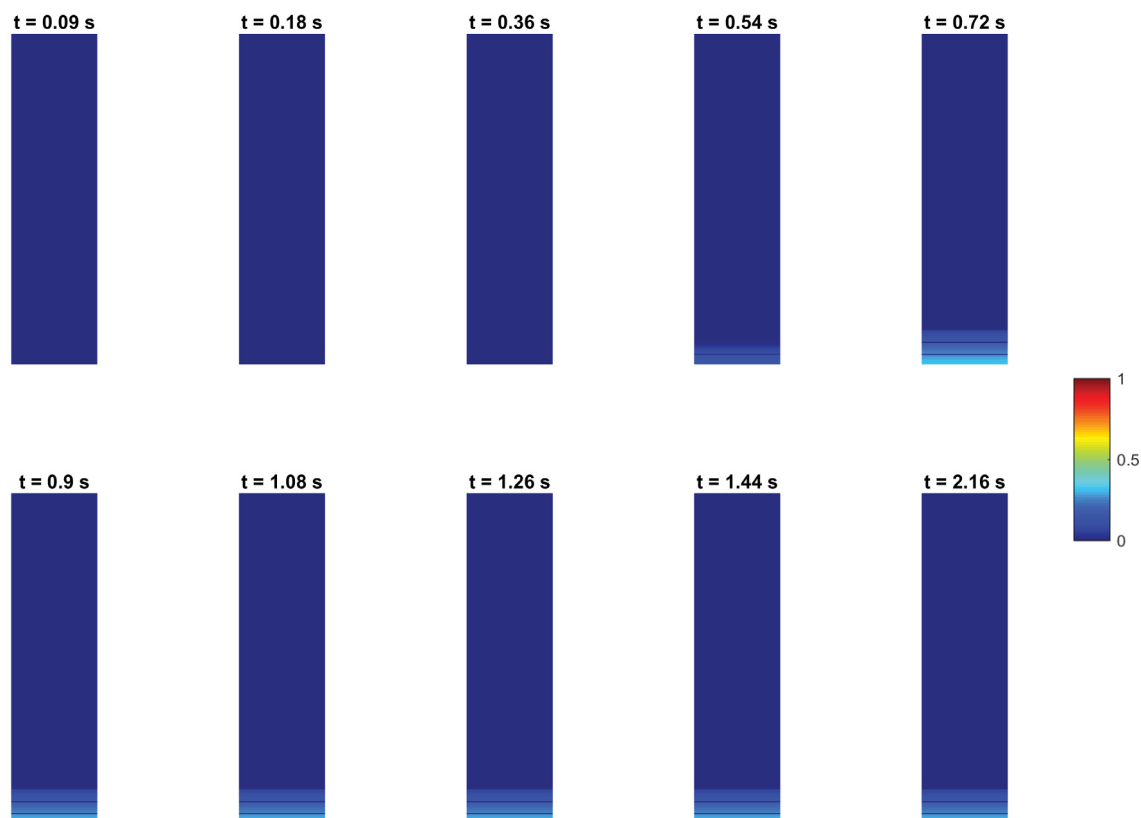
FIGURA 139 – Configuração final de dano da viga 5.4.2.1



FONTE: O autor.

A Figura 140 apresenta a evolução do dano no 40º elemento da viga ao longo do tempo.

FIGURA 140 – Evolução do dano no 40º elemento da viga 5.4.2.1

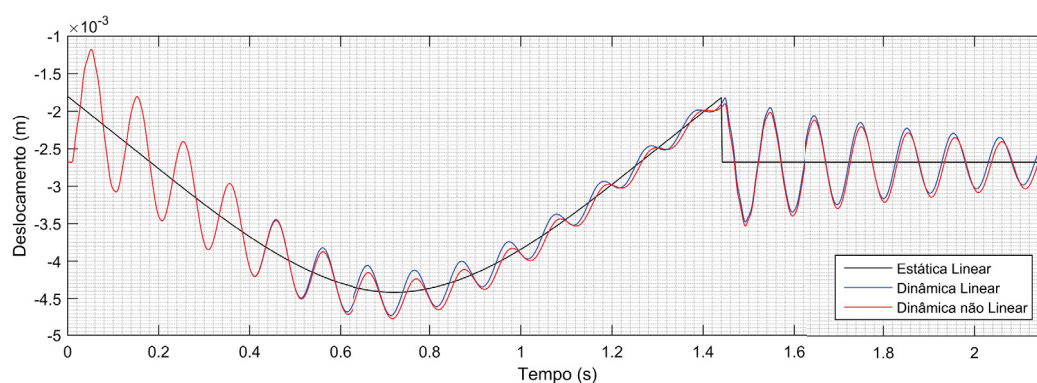


FONTE: O autor.

A configuração final apresentou poucos danos na região central entre apoios.

A Figura 141 apresenta as respostas de deslocamento estático linear, dinâmico linear e dinâmico não linear da viga de 18 m entre vãos e 3 m de balanços.

FIGURA 141 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.2.1

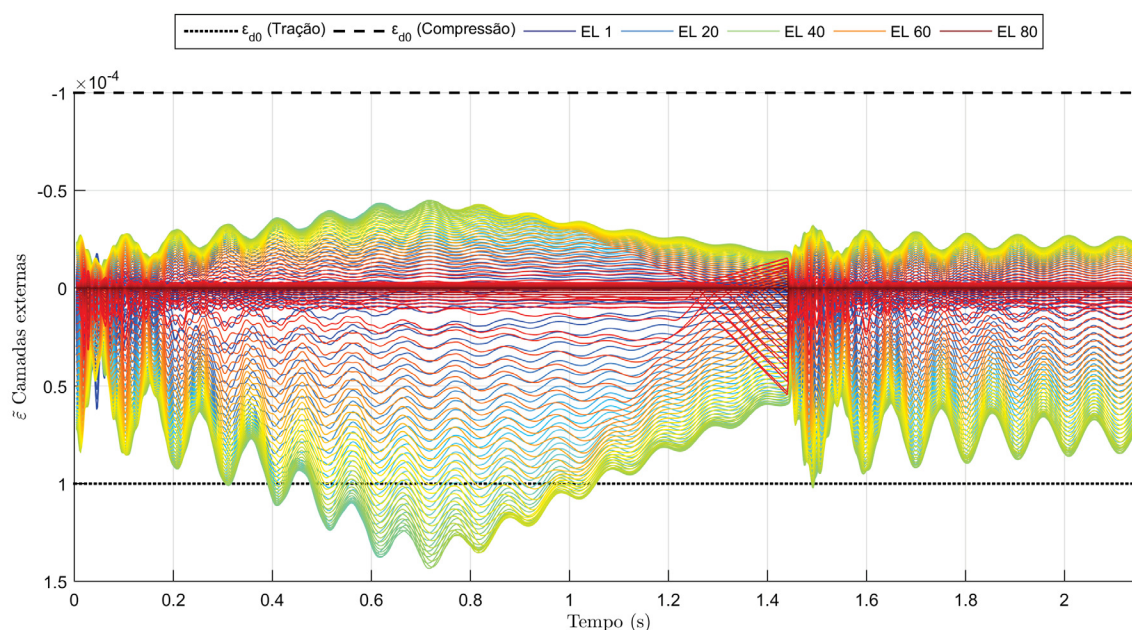


FONTE: O autor.

Devido à pequena danificação, a resposta dinâmica não linear ficou próxima da resposta dinâmica linear.

A Figura 142 apresenta as respostas dinâmicas não lineares de deformação das camadas externas dos elementos.

FIGURA 142 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.2.1



FONTE: O autor.

Nota-se que os pequenos danos ocorreram devido às deformações de tração.

A Tabela 45 apresenta as frequências naturais de vibração obtidas na análise.

TABELA 45 – Frequências naturais da ponte 5.4.2.1

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	61,71	61,15	-0,91
2 <sup>a</sup>	222,26	221,79	-0,21
3 <sup>a</sup>	391,46	390,43	-0,26
4 <sup>a</sup>	529,53	528,58	-0,18
5 <sup>a</sup>	765,44	762,51	-0,38

Houve pequena redução nas frequências naturais de vibração, sendo a maior de 0,91% na primeira frequência.

#### 5.4.2.2 Viga com balanços de 4,5 m

A Tabela 46 apresenta os parâmetros da ponte para esta análise.

TABELA 46 – Parâmetros da ponte 5.4.2.2

h (m)	b (m)	L <sub>Total</sub> (m)	Elementos finitos	Distribuições de armadura	Passos de tempo
1,80	0,45	27,00	90	5	1350

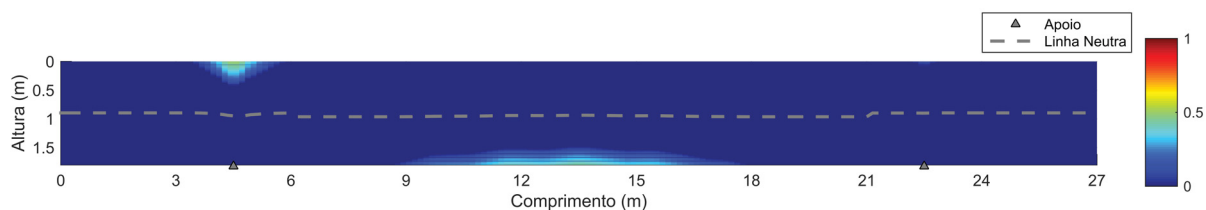
A Tabela 47 apresenta a distribuição das armaduras para cada trecho da ponte.

TABELA 47 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.2.2

Trecho	L <sub>Trecho</sub> (m)	Elementos	Armadura inferior	A <sub>s</sub> (cm <sup>2</sup> )	Armadura superior	A <sub>s</sub> ' (cm <sup>2</sup> )	Camadas
1	4,50	15	6φ16 mm	12,06	10φ16 mm	20,11	82
2	1,50	5	8φ16 mm	16,08	10φ16 mm	20,11	82
3	15,00	50	17φ32 mm	136,72	7φ16 mm	14,07	115
4	1,50	5	8φ16 mm	16,08	10φ16 mm	20,11	82
5	4,50	15	6φ16 mm	12,06	10φ16 mm	20,11	82

A Figura 143 apresenta a configuração final de dano da viga de 18 m de vão entre apoios e balanços de 4,5 m.

FIGURA 143 – Configuração final de dano da viga 5.4.2.2

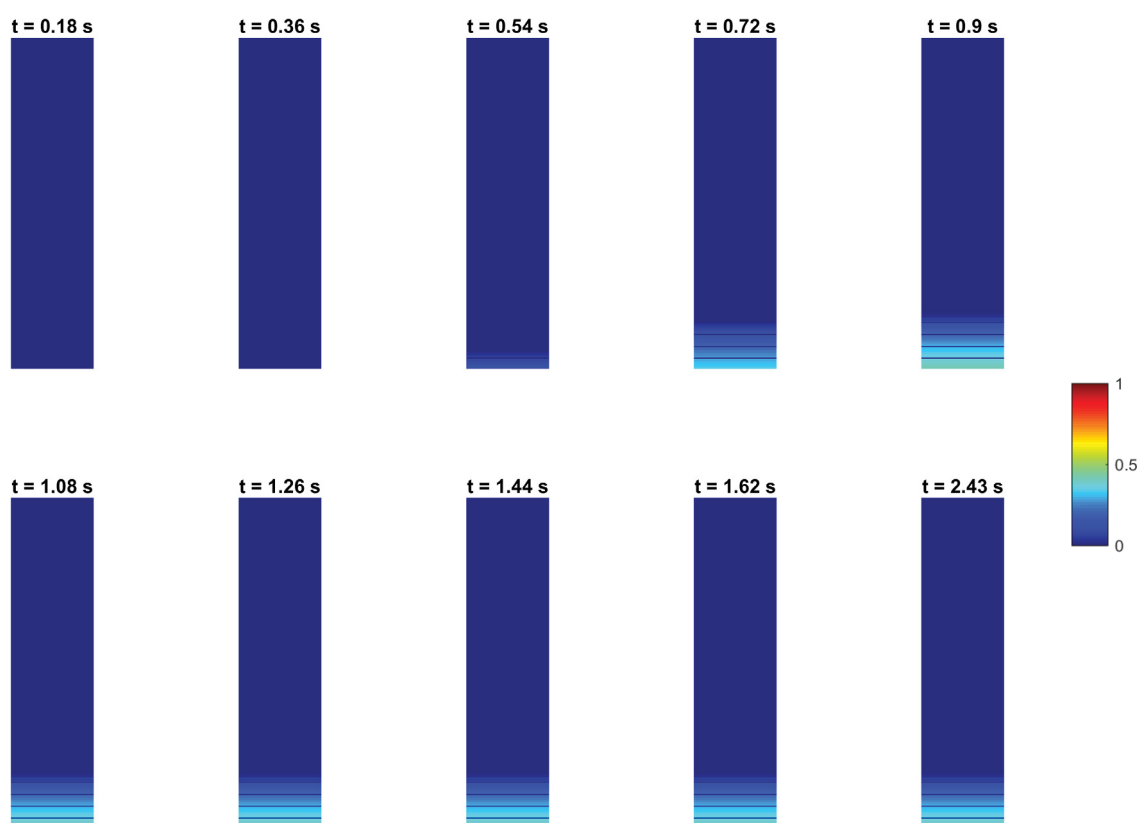


FONTE: O autor.

Apesar do aumento de 1,5 m nos balanços, houve pouco acréscimo na danificação. Isso é justificado por tratar-se de uma viga de vão central longo. Houve danificação em volta do apoio esquerdo, na região superior.

A Figura 144 apresenta a evolução do dano no elemento central da viga ao longo do tempo.

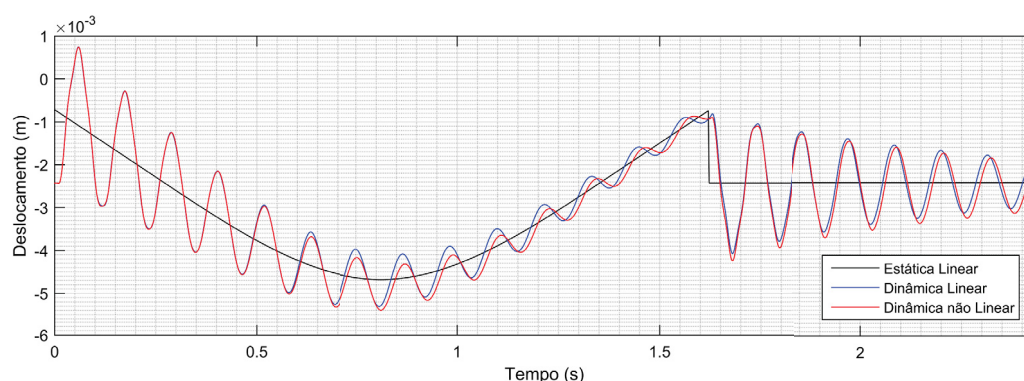
FIGURA 144 – Evolução do dano no 45º elemento da viga 5.4.2.2



FONTE: O autor.

A Figura 145 apresenta as respostas de deslocamento estático linear, dinâmico linear e dinâmico não linear da viga de 18 m entre vãos e 4,5 m de balanços.

FIGURA 145 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.2.2

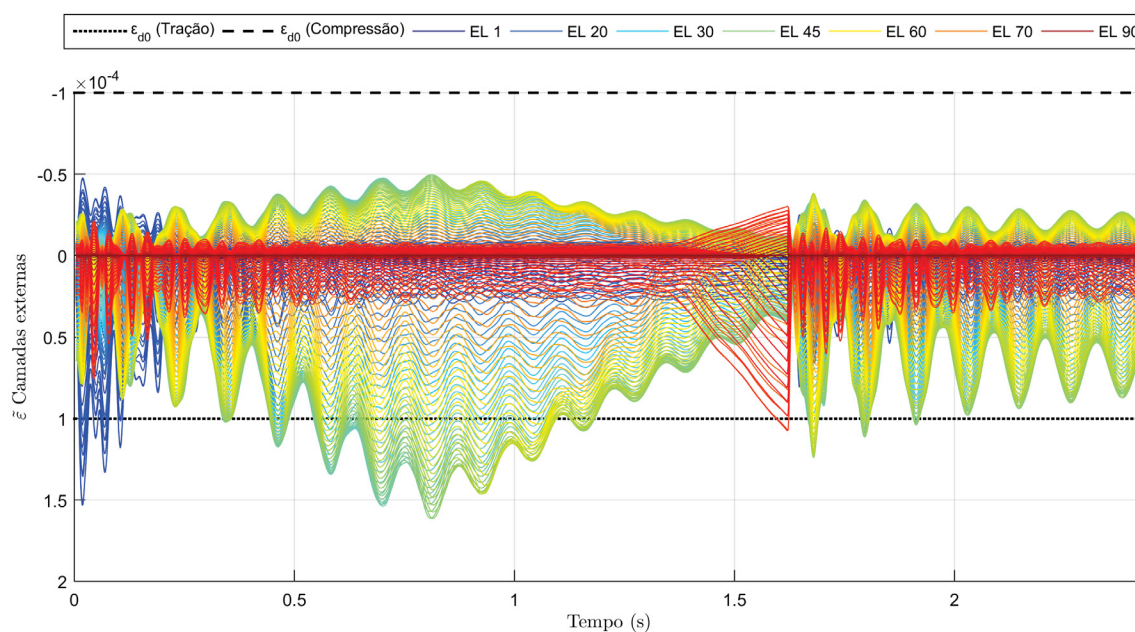


FONTE: O autor.

As respostas dinâmicas não lineares também ficaram próximas das lineares, mas houve maior defasagem devido ao acréscimo de danificação.

A Figura 146 apresenta as respostas dinâmicas não lineares de deformação das camadas externas dos elementos.

FIGURA 146 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.2.2



FONTE: O autor.

Nota-se que além dos elementos centrais, os elementos próximos ao apoio da esquerda também tiveram deformações por tração superiores ao valor limite de deformação. Além disso, os elementos próximos ao apoio da direita tiveram pequena danificação devido à ultrapassagem do valor de referência após o veículo sair da ponte.

A Tabela 48 apresenta as frequências naturais de vibração obtidas na análise.

TABELA 48 – Frequências naturais da ponte 5.4.2.2

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	54,65	53,81	-1,54
2 <sup>a</sup>	152,73	151,60	-0,74
3 <sup>a</sup>	221,85	218,87	-1,34
4 <sup>a</sup>	354,56	350,14	-1,25
5 <sup>a</sup>	641,95	634,36	-1,18

A maior redução na frequência natural foi de 1,54% na primeira frequência.

#### 5.4.2.3 Viga com balanços de 6 m

A Tabela 49 apresenta os parâmetros da ponte para esta análise.

TABELA 49 – Parâmetros da ponte 5.4.2.3

h (m)	b (m)	L <sub>Total</sub> (m)	Elementos finitos	Distribuições de armadura	Passos de tempo
1,65	0,40	30,00	100	5	1500

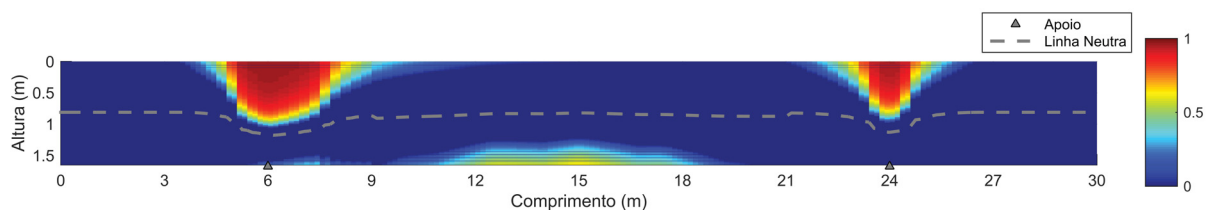
A Tabela 50 apresenta a distribuição das armaduras para cada trecho da ponte.

TABELA 50 – Distribuição de armadura da ponte 5.4.2.3

Trecho	L <sub>Trecho</sub> (m)	Elementos	Armadura inferior	A <sub>s</sub> (cm <sup>2</sup> )	Armadura superior	A <sub>s</sub> ' (cm <sup>2</sup> )	Camadas
1	6,00	20	7 $\phi$ 12,5 mm	8,59	15 $\phi$ 16 mm	30,16	93
2	3,00	10	5 $\phi$ 25 mm	24,54	15 $\phi$ 16 mm	30,16	93
3	12,00	40	22 $\phi$ 25 mm	107,99	10 $\phi$ 16 mm	20,11	126
4	3,00	10	5 $\phi$ 25 mm	24,54	15 $\phi$ 16 mm	30,16	93
5	6,00	20	7 $\phi$ 12,5 mm	8,59	15 $\phi$ 16 mm	30,16	93

A Figura 147 apresenta a configuração final de dano da viga de 18 m de vão entre apoios e balanços de 6 m.

FIGURA 147 – Configuração final de dano da viga 5.4.2.3

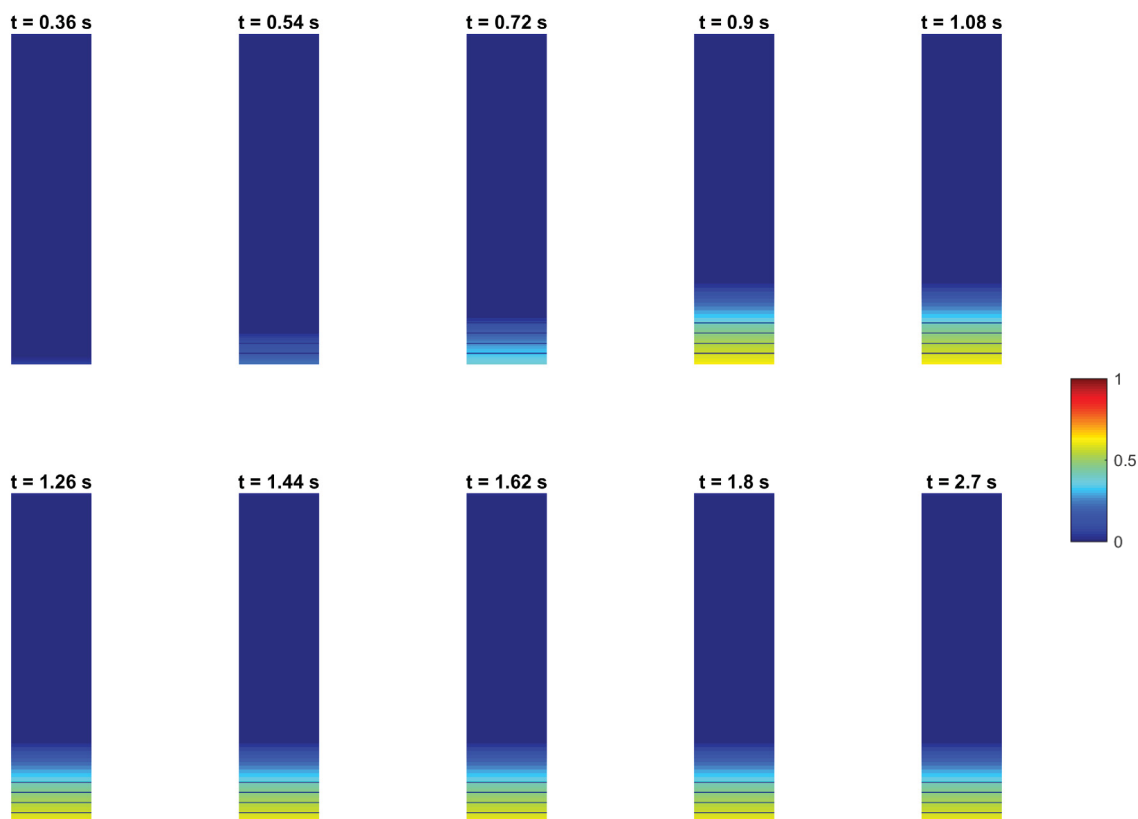


FONTE: O autor.

Nota-se que o aumento no comprimento nos balanços ocasionou maiores danos na viga, principalmente na região dos apoios. A danificação foi mais abrangente na região superior em torno do apoio da esquerda. Há momento negativo sobre os apoios. De fato, ocorre maior dano na região sobre os apoios. Com o aumento do balanço, aumentou-se a distribuição do dano na viga. Nesse sentido, conclui-se que o tamanho dos balanços e o tamanho dos vãos têm interferência no comportamento estrutural da viga de ponte devido ao processo de danificação.

A Figura 148 apresenta a evolução do dano no elemento central da viga ao longo do tempo.

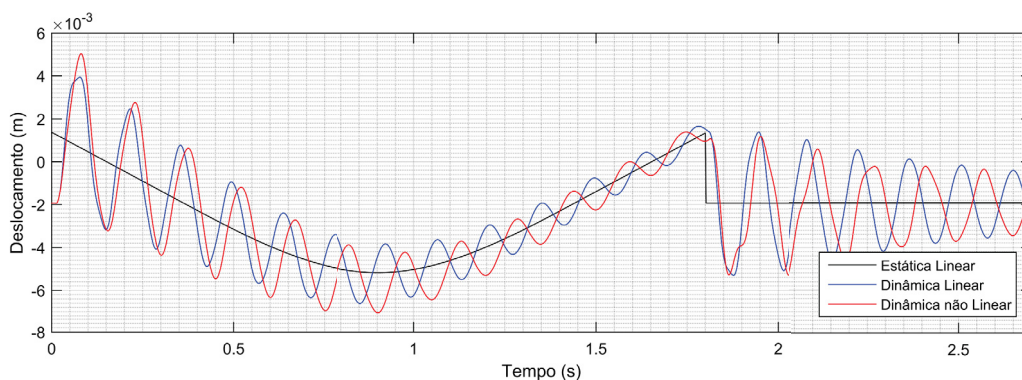
FIGURA 148 – Evolução do dano no 50º elemento da viga 5.4.2.3



FONTE: O autor.

A Figura 149 apresenta as respostas de deslocamento estático linear, dinâmico linear e dinâmico não linear da viga de 18 m entre vãos e 6 m de balanços.

FIGURA 149 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.4.2.3

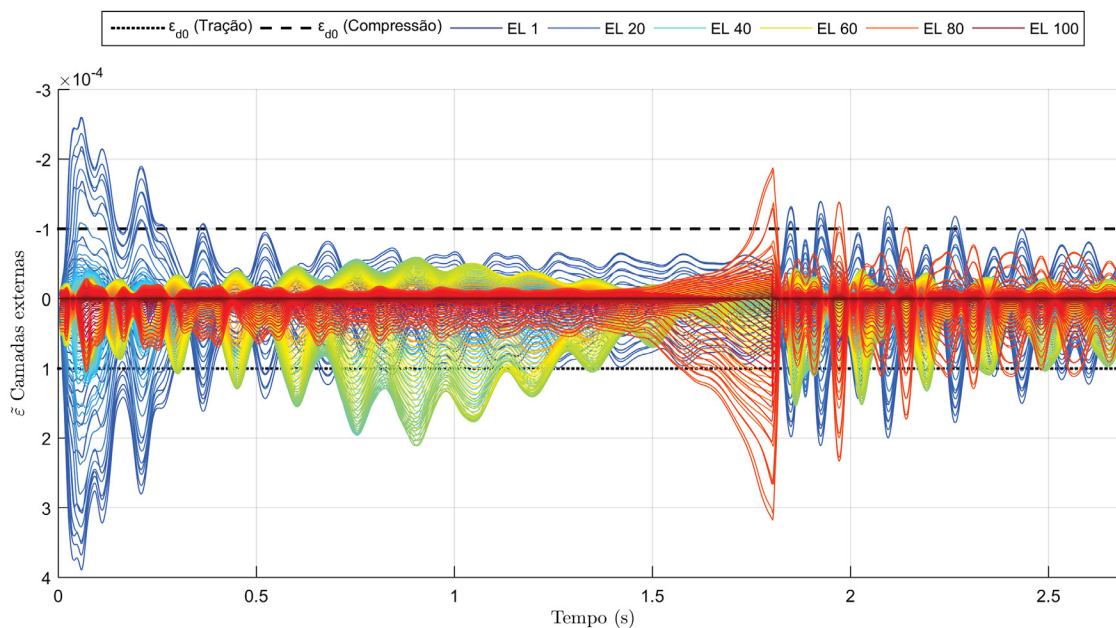


FONTE: O autor.

A danificação provocou maior defasagem entre as respostas dinâmicas de deslocamento.

A Figura 150 apresenta as respostas dinâmicas não lineares de deformação das camadas externas dos elementos.

FIGURA 150 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.4.2.3



FONTE: O autor.

As respostas dinâmicas não lineares de deformação dos elementos próximos

aos apoios provocou danificações por tração e por compressão nas regiões próximas aos dois apoios.

A Tabela 45 apresenta as frequências naturais de vibração obtidas na análise.

TABELA 51 – Frequências naturais da ponte 5.4.2.3

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	44,38	40,91	-7,82
2 <sup>a</sup>	94,75	74,08	-21,82
3 <sup>a</sup>	143,84	110,92	-22,89
4 <sup>a</sup>	292,05	257,87	-11,70
5 <sup>a</sup>	552,57	506,27	-8,38

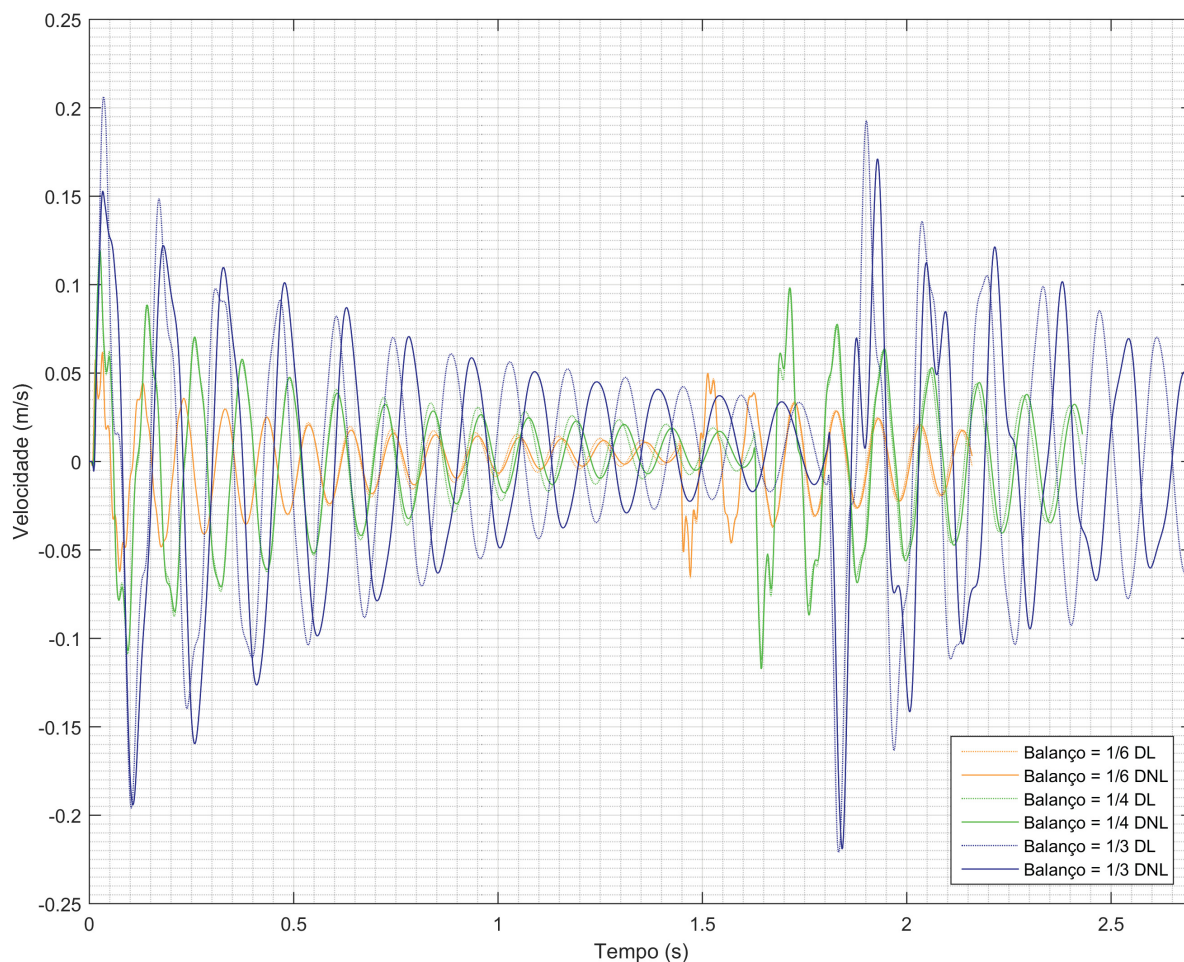
A danificação mais proeminente gerou maiores variações nas frequências naturais, principalmente na segunda e terceira frequências. A maior redução foi na terceira frequência natural, de 22,89%.

#### 5.4.2.4 Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade e aceleração e FAD

A mesma observação feita em 5.4.1.4, a respeito dos diferentes comprimentos totais das pontes é válida na presente Seção. As respostas das três pontes, nos gráficos de velocidade e aceleração apresentados a seguir, iniciam no instante de tempo  $t = 0$  s, contudo o instante de tempo final das pontes com balanços de 3 m, 4,5 m e 6 m são, respectivamente,  $t = 2,16$  s,  $t = 2,43$  s e  $t = 2,70$  s.

A Figura 151 apresenta as respostas dinâmicas de velocidade, lineares e não lineares, nos nós centrais das três vigas simuladas.

FIGURA 151 – Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.4.2

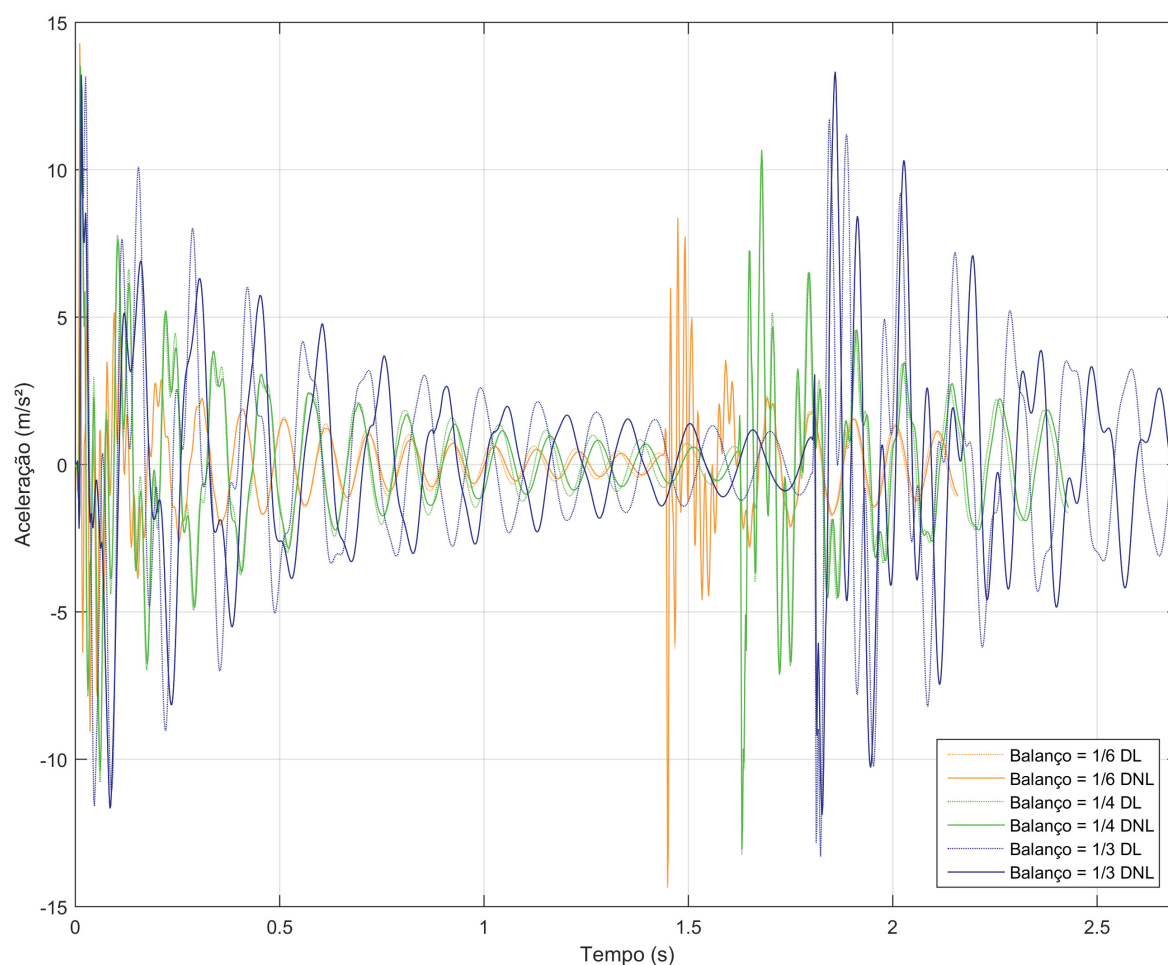


FONTE: O autor.

Há variação nas amplitudes e defasagem entre as respostas lineares e não lineares de velocidade devido à danificação. Nas respostas em que o balanço foi de 1/3 do comprimento do vão central, a defasagem foi muito mais evidente, havendo inversão no sinal de oscilação para mesmas faixas de frequência a partir de  $t = 0,7$  s.

A Figura 152 apresenta as respostas dinâmicas de aceleração dos nós centrais das vigas.

FIGURA 152 – Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.4.2



FONTE: O autor.

Nota-se, também, a variação nas amplitudes e na frequência das respostas lineares e não lineares. Em alguns instantes os picos foram maiores nas respostas não lineares, enquanto em outros instantes, os picos foram maiores nas respostas lineares. As maiores variações ocorreram entre as respostas das vigas de balanços com 1/3 do comprimento central, devido à maior danificação dinâmica.

A Tabela 52 compara os FADs das análises realizadas.

TABELA 52 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.4.2

Comprimento dos balanços	$u_{EL}^{Máx}$ (mm)	$u_{DL}^{Máx}$ (mm)	FAD <sub>L</sub>	$u_{DNL}^{Máx}$ (mm)	FAD <sub>NL</sub>
1/6	4,414	4,722	1,06994	4,767	1,08013
1/4	4,680	5,305	1,13344	5,395	1,15260
1/3	7,307	8,662	1,18536	16,145	2,20943

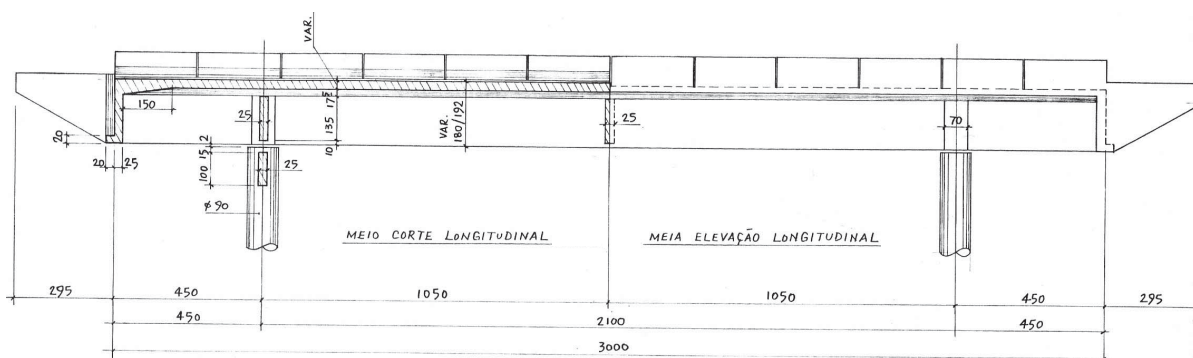
Observa-se que os FADs foram menores para as vigas de vãos longos, 18 m, se comparadas às vigas de vãos curtos, 6 m. As simulações que apresentaram menores danificações tiveram o FAD não linear mais próximo do FAD linear. A viga com balanço de 1/3 do comprimento entre apoios apresentou um deslocamento dinâmico não linear 86,39% maior do que o deslocamento dinâmico linear. O FAD não linear foi de 2,209, enquanto o FAD linear foi de 1,185, devido à maior evolução do dano.

## 5.5 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COM MODELAGEM PROPOSTA EM UM CASO REAL DE PONTE

Esta Seção trata da simulação computacional de uma longarina de uma ponte existente no estado de Santa Catarina, cujo dimensionamento é abordado conforme material de aula de Gorges (2012). A maior área de aço necessária foi determinada conforme análise normativa da fadiga. Em função da área necessária, designou-se a quantidade e a bitola das barras de aço. O objetivo desta simulação é analisar o processo dinâmico de danificação e as respostas dinâmicas não lineares estruturais de uma ponte real com o modelo computacional proposto.

A Figura 153 ilustra o corte e a elevação longitudinal da ponte analisada.

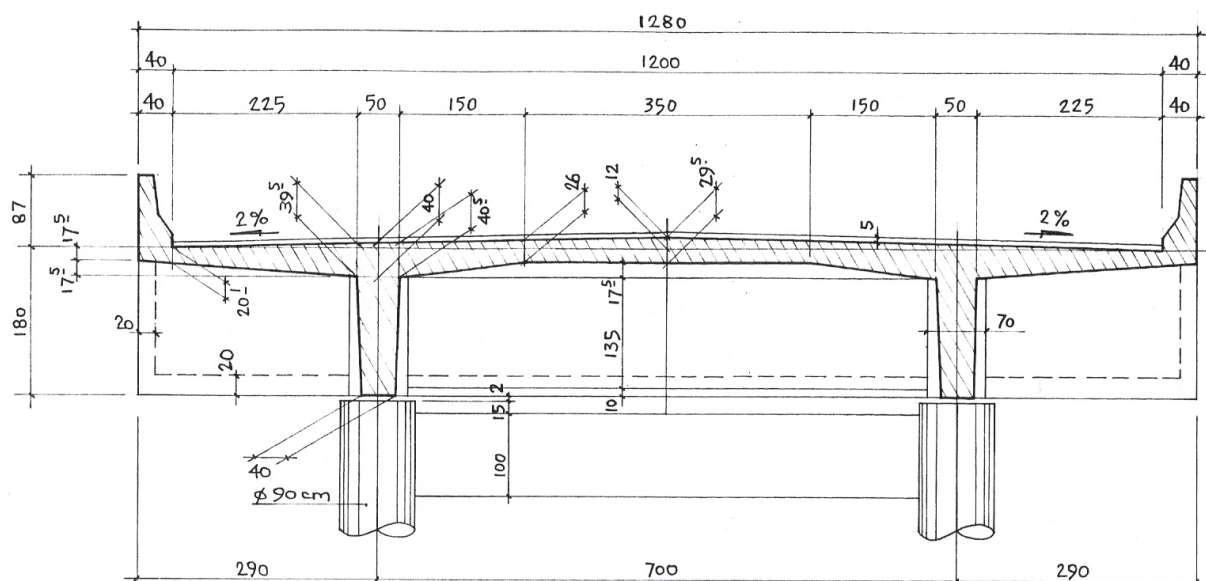
FIGURA 153 – Ilustração da Ponte 5.5



FONTE: Gorges, 2012.

A Figura 154 mostra o corte transversal da ponte.

FIGURA 154 – Ilustração da Ponte 5.5

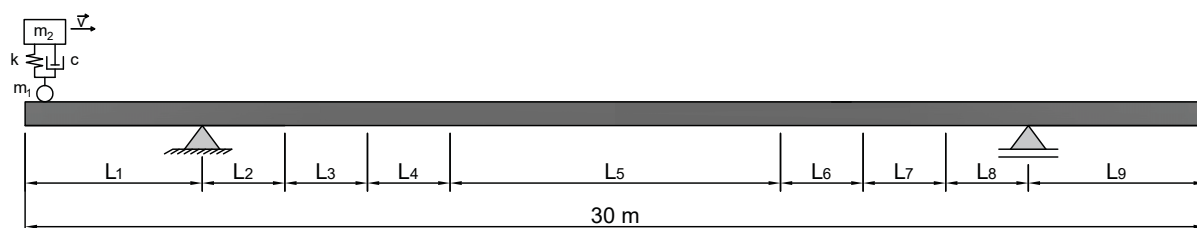


FONTE: Gorges, 2012.

Conforme explicado anteriormente, esta análise contempla apenas uma das longarinas cujo carregamento de uma das rodas do veículo se dá no eixo central da viga de ponte. Para tanto, considera-se um veículo de 1 grau de liberdade, massa-mola-amortecedor, com uma massa suspensa, uma roda em contato e uma suspensão formada por um amortecedor, com comportamento viscoso linear, e uma mola, com comportamento elástico linear.

A Figura a seguir apresenta a distribuição de trechos de armadura da longarina a ser analisada.

FIGURA 155 – Ilustração da Ponte 5.5



FONTE: O autor.

A Tabela 53 apresenta a distribuição das armaduras para cada trecho da ponte.

TABELA 53 – Distribuição de armadura da ponte 5.5

Trecho	$L_{\text{Trecho}}$ (m)	Elementos	Armadura inferior	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	Armadura superior	$A_s'$ (cm <sup>2</sup> )	Camadas
1	4,5	20	2 $\phi$ 25 mm	9,82	3 $\phi$ 32 mm	24,13	82
2	2,1	10	11 $\phi$ 32 mm	88,47	7 $\phi$ 32 mm	56,30	104
3	2,1	10	17 $\phi$ 32 mm	136,72	2 $\phi$ 25 mm	9,82	104
4	2,1	10	20 $\phi$ 32 mm	160,85	2 $\phi$ 25 mm	9,82	115
5	8,4	40	22 $\phi$ 32 mm	176,93	2 $\phi$ 25 mm	9,82	115
6	2,1	10	20 $\phi$ 32 mm	160,85	2 $\phi$ 25 mm	9,82	115
7	2,1	10	17 $\phi$ 32 mm	136,72	2 $\phi$ 25 mm	9,82	104
8	2,1	10	11 $\phi$ 32 mm	88,47	7 $\phi$ 32 mm	56,30	104
9	4,5	20	2 $\phi$ 25 mm	9,82	3 $\phi$ 32 mm	24,13	82

A Tabela 54 apresenta os dados de entrada do modelo.

TABELA 54 – Parâmetros do veículo, concreto, aço e de *Newmark* adotados para os modelos 5.5

Veículo	Parâmetros do concreto	Parâmetros do aço	Parâmetros de <i>Newmark</i>
$m_1 = 4.400$ kg	$E_c = 29,43$ GPa	$E_s = 210$ GPa	$\gamma = 0,5$
$m_2 = 13.200$ kg	$\nu_c = 0,2$	$\nu_s = 0,3$	$\beta = 0,25$
$k = 9.120$ kN/m	$\varepsilon_{d0} = 6,25 \cdot 10^{-5}$	$\varepsilon_{sy} = 2$ ‰	$dt = 0,0011$ s
$c = 96$ kNs/m	$A_T = 0,8$	$k_s = 0,85$	$\zeta = 0,025$
$v = 50$ km/h	$B_T = 1,0 \cdot 10^4$		
	$A_C = 1,5$		
	$B_C = 1.000$		

A Tabela 55 apresenta os parâmetros da ponte a ser analisada.

TABELA 55 – Parâmetros da ponte 5.5

h (m)	L (m)	Número de elementos finitos	Número de distribuições de armadura	Passos de tempo
1,85	30,00	140	9	3000

### 5.5.1 VIGA RETANGULAR DA PONTE

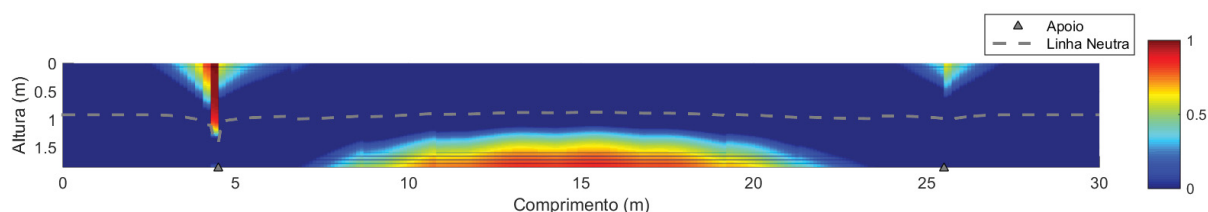
A Tabela 56 apresenta os dados geométricos da seção transversal da viga.

TABELA 56 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.5.1

Componente	h (m)	b (m)
1	1,85	0,50

A Figura 107 apresenta a configuração de dano ao final da análise para a viga retangular.

FIGURA 156 – Configuração final de dano da viga 5.5.1



FONTE: O autor.

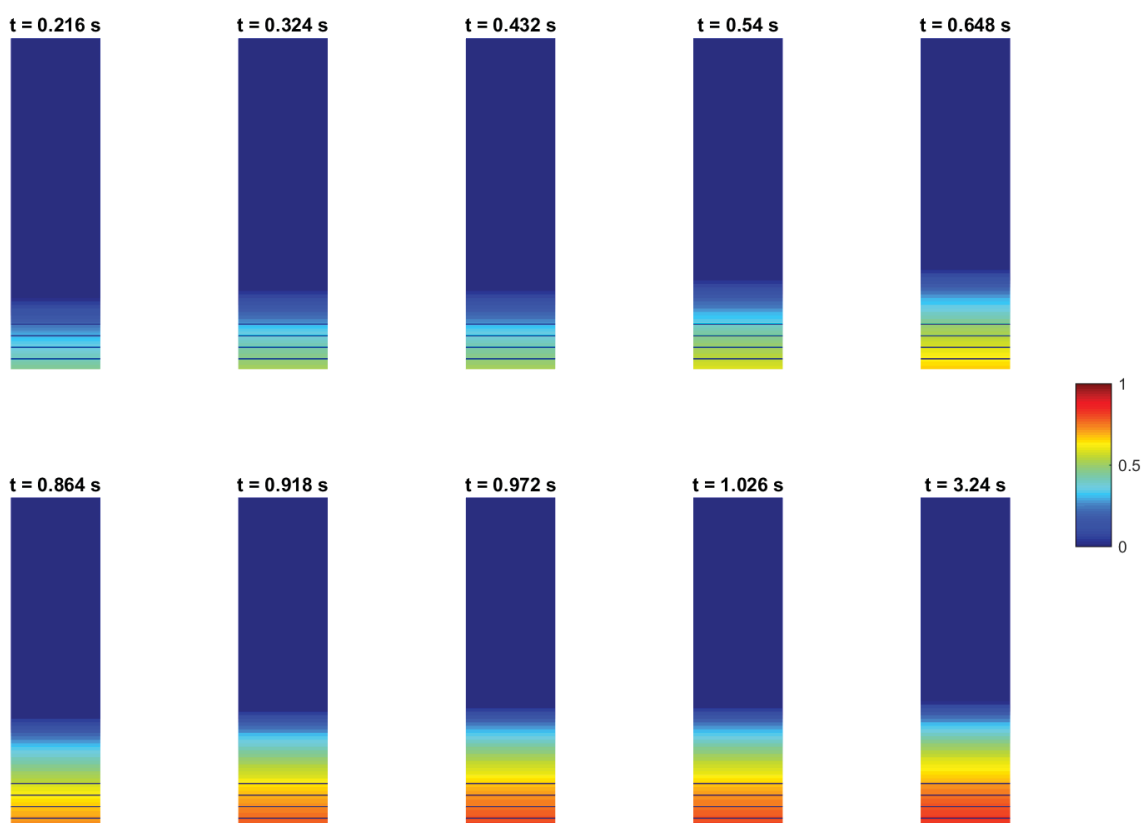
Pode-se perceber uma maior região danificada na parte inferior do vão central da viga. Esta, por sua vez, apresenta uma pequena descontinuidade conforme a variação da distribuição de armaduras. Esta perda de rigidez das camadas inferiores ocasionou a elevação da posição da linha neutra nos elementos centrais.

Nota-se também a danificação das camadas superiores nas regiões de apoio. Isto se dá principalmente devido ao efeito dos balanços, onde ocorre inversão das solicitações. Nesta região também houve variação na distribuição de armaduras, o que ocasionou uma descontinuidade no processo de danificação. No apoio da direita, esta descontinuidade, somada ao efeito dos balanços, provocou uma pequena propagação do dano. No apoio da esquerda, no entanto, as camadas superiores sofreram maiores danificações e houve uma maior propagação do dano no elemento imediatamente à esquerda do ponto de apoio. Quando o elemento sofre danificação por tração de modo que este perca rigidez e tenha sua linha neutra deslocada de forma suficiente, inicia-se o processo de danificação por compressão nas camadas opostas do mesmo elemento. Nota-se que este fenômeno ocorre no elemento citado anteriormente, pois observa-se um início de danificação nas camadas inferiores próximas ao apoio.

Conforme analisado nas simulações anteriores, a maior danificação nos apoios em vigas com balanços simétricos ocorre na região mais próxima da entrada do veículo na ponte, neste caso do lado esquerdo. Este fenômeno é explicado pelas maiores respostas dinâmicas no início da análise devido à mudança do estado estacionário da viga para um estado em movimento quando da entrada do veículo, provocando maiores danos na região próxima ao apoio da esquerda por conta do sentido do veículo. Além disso, o amortecimento estrutural, responsável por fazer com que a ponte tenda a retornar para seu estado estacionário, faz com que as respostas sejam atenuadas ao longo do movimento, o que provoca menores danos na região do apoio da direita.

A Figura 157 apresenta a variação da danificação do 70º elemento, central, ao longo do tempo de análise.

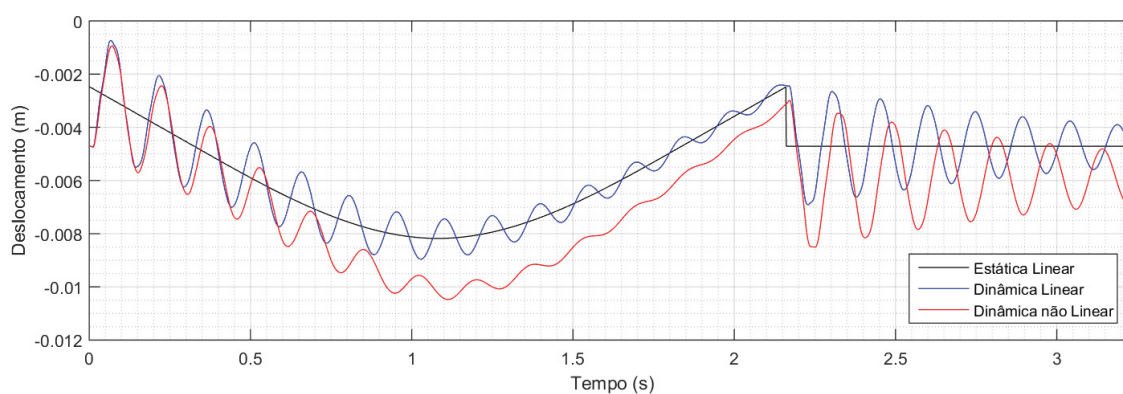
FIGURA 157 – Evolução do dano no 70º elemento da viga 5.5.1



FONTE: O autor.

A Figura 158 apresenta as respostas de deslocamento estático linear, dinâmico linear e dinâmico não linear ao longo do tempo analisado.

FIGURA 158 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.5.1

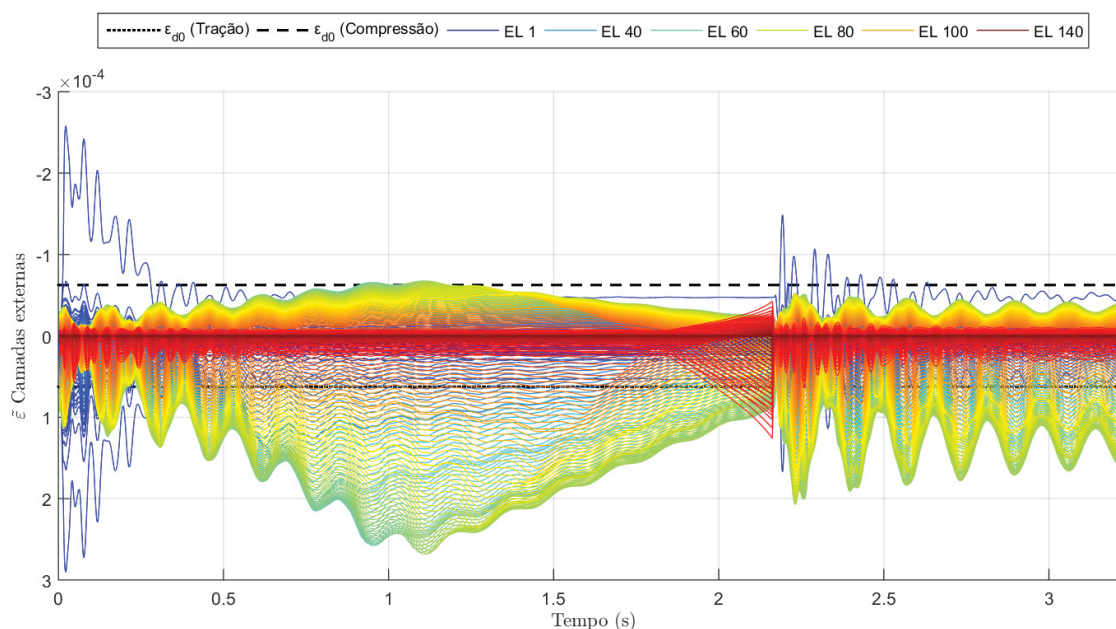


FONTE: O autor.

A partir do início do processo de danificação, nota-se o aumento das respostas dinâmicas não lineares de deslocamento devido à progressiva perda de rigidez da viga de ponte.

A Figura 159 mostra as respostas dinâmicas de deformação de todos os elementos ao longo do tempo.

FIGURA 159 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.5.1



FONTE: O autor.

Nota-se que as respostas dinâmicas de deformação que causaram danificação ocorreram quase na totalidade por tração. Entretanto, evidencia-se um pico de resposta dinâmica que superou o valor de referência para a danificação por compressão no elemento imediatamente à esquerda do primeiro apoio. Apesar deste pico por compressão, a maior parte da resposta de deformação deste elemento que provocou danificação se deu por tração.

A Tabela 57 apresenta a variação entre as frequências naturais de vibração da ponte íntegra e danificada.

TABELA 57 – Frequências naturais da ponte 5.5.1

Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	42,82	38,56	-9,95
2 <sup>a</sup>	136,48	127,02	-6,93
3 <sup>a</sup>	210,34	189,35	-9,98
4 <sup>a</sup>	302,16	269,48	-10,82
5 <sup>a</sup>	503,75	455,87	-9,50

A maior redução na frequência natural foi de 10,82% na quarta frequência.

### 5.5.2 VIGA I FICTÍCIA COM MOMENTO DE INÉRCIA EQUIVALENTE

Como simulação final, este trabalho propõe simular uma viga com geometria da seção transversal em formato I com momento de inércia equivalente ao da viga retangular existente, com mesma área de aço e distribuição de armaduras, no intuito de comparar como o processo de danificação ocorre para as vigas de diferentes geometrias e a diferença nas respostas dinâmicas estruturais.

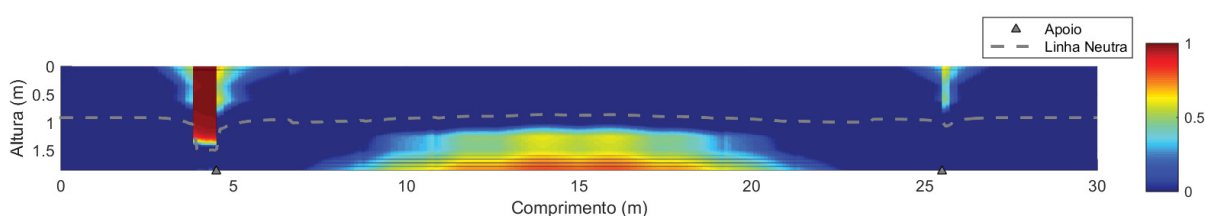
A Tabela 58 apresenta os dados geométricos da seção transversal da viga. As especificações das cotas são as mesmas apresentadas na Figura 106.

TABELA 58 – Parâmetros da seção transversal da viga 5.5.2

Componente	h (m)	b (m)
1	0,35	0,5283
2	0,25	Variável
3	0,65	0,30
4	0,25	Variável
5	0,35	0,5283

A Figura 160 apresenta a configuração de dano ao final da análise para a viga I.

FIGURA 160 – Configuração final de dano da viga 5.5.2



FONTE: O autor.

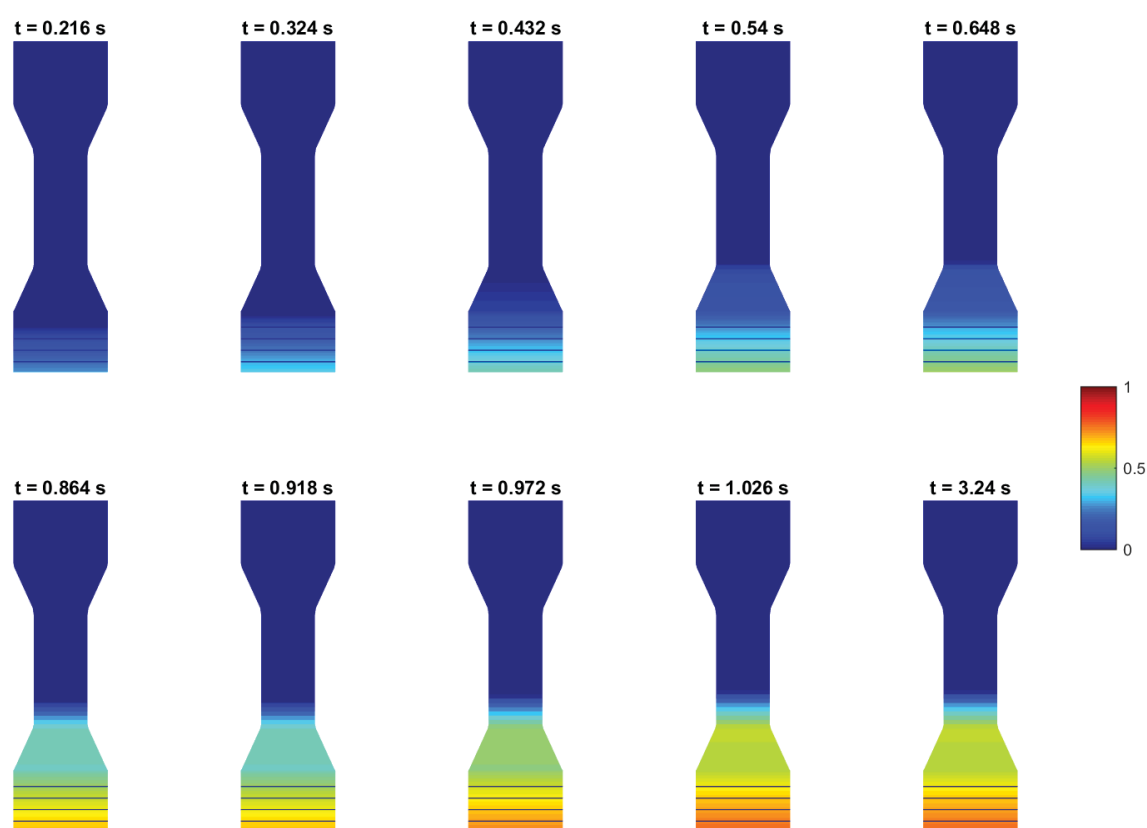
Ao analisar a Figura anterior, é possível perceber que a região entre apoios teve uma distribuição e propagação maior de danificação, contudo com menores intensidades, quando comparados à viga retangular existente. Por este motivo houve menor concentração de dano nas camadas inferiores da viga I.

Analogamente às observações da configuração final danificada da viga retangular, houve maiores regiões danificadas próximas ao apoio da esquerda na viga I. Entretanto, houve maior propagação do dano tanto na região superior do apoio da direita como no da esquerda. Neste último, três elementos apresentaram brusca propagação de dano, enquanto na simulação da viga retangular apenas um elemento teve comportamento similar. Também observa-se um maior espalhamento do dano na

viga I, abrangendo mais elementos, com uma configuração distinta do resultado da viga retangular devido à diferença na geometria da seção transversal.

A Figura 161 apresenta a variação da danificação do 70º elemento, central, ao longo do tempo de análise.

FIGURA 161 – Evolução do dano no 70º elemento da viga 5.5.2

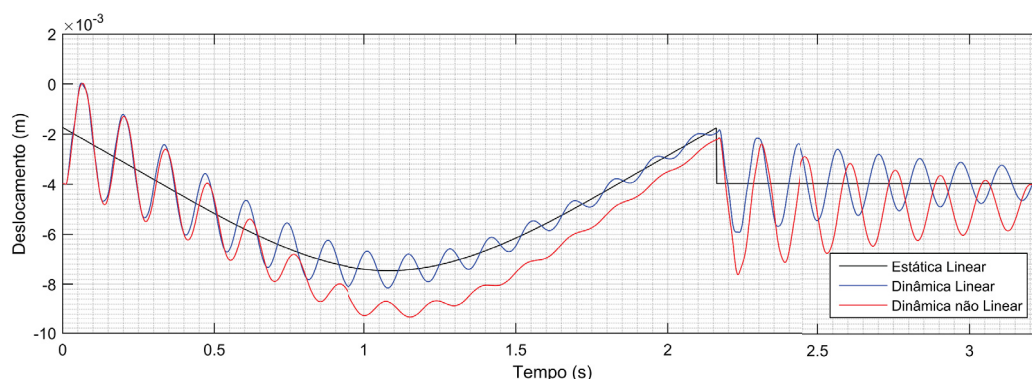


FONTE: O autor.

Fica evidente a diferença das danificações das camadas conforme redução de área devido à diminuição das larguras da seção. Esta diferença é perceptível nas camadas de base inclinada próximas à área inferior da alma, que apresentam valores maiores de dano que as camadas de base inclinada localizadas mais próximas à mesa inferior. Apesar de estas últimas apresentarem maior distância da linha neutra que as primeiras, a diminuição da área é suficiente para causar este comportamento na danificação.

A Figura 162 apresenta as respostas de deslocamento estático linear, dinâmico linear e dinâmico não linear ao longo do tempo analisado.

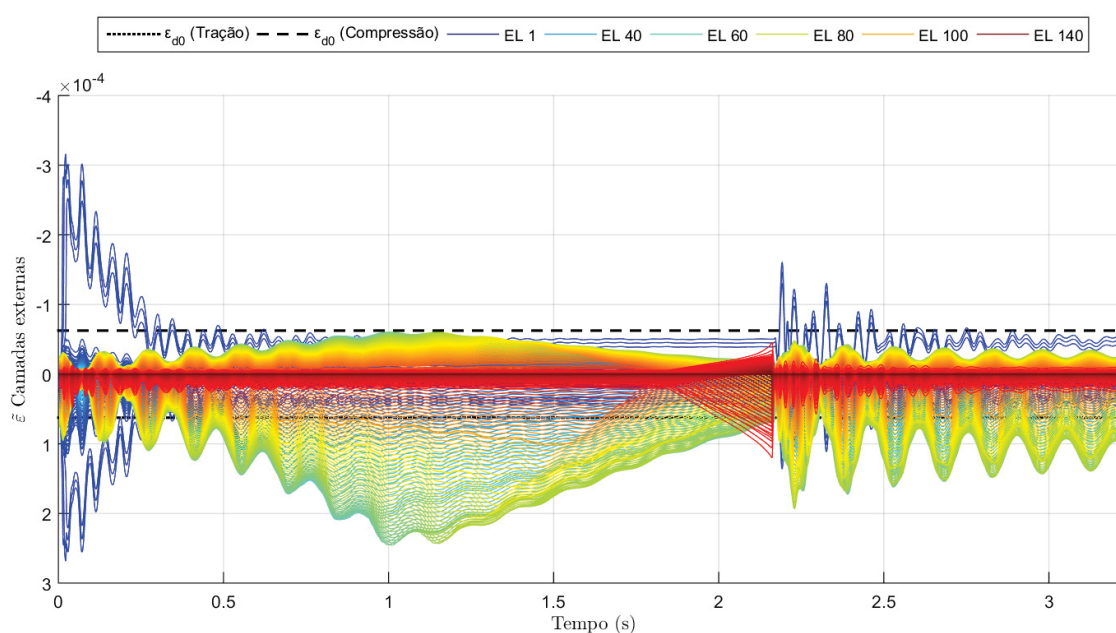
FIGURA 162 – Deslocamento vertical no nó central da viga 5.5.2



FONTE: O autor.

A Figura 163 mostra as respostas dinâmicas de deformação de todos os elementos ao longo do tempo.

FIGURA 163 – Deformações das camadas superior e inferior de todos os elementos da viga 5.5.2



FONTE: O autor.

Nota-se maior número de camadas que tiveram deformação acima da deformação de referência na compressão. É possível perceber a diferença das respostas em comparação com as respostas da viga retangular. Isto ocorre devido à diferença na geometria e à diferença do peso próprio.

A Tabela 59 apresenta a variação entre as frequências naturais de vibração da ponte íntegra e danificada.

TABELA 59 – Frequências naturais da ponte 5.5.2

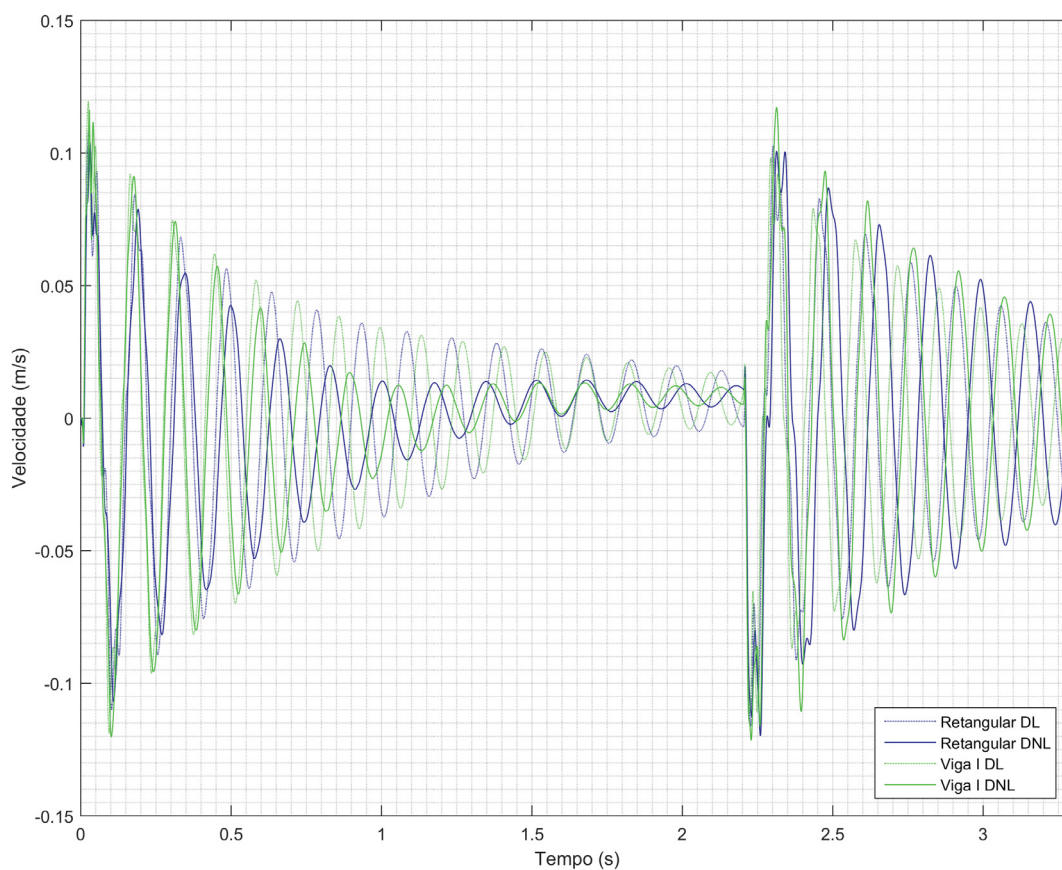
Frequência natural	Ponte sem danificação (rad/s)	Ponte após danificação (rad/s)	Variação (%)
1 <sup>a</sup>	46,63	42,34	-9,20
2 <sup>a</sup>	148,94	134,12	-9,95
3 <sup>a</sup>	229,79	190,45	-17,12
4 <sup>a</sup>	329,70	283,71	-13,95
5 <sup>a</sup>	548,99	489,39	-10,86

Houve maiores reduções nas frequências da viga I quando comparadas à viga retangular. A maior redução na frequência natural foi de 17,12% na terceira frequência.

### 5.5.3 Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade e aceleração e FAD

A Figura 164 apresenta as respostas dinâmicas de velocidade, lineares e não lineares, nos nós centrais das duas vigas simuladas.

FIGURA 164 – Respostas dinâmicas de velocidade nos nós centrais das vigas do modelo 5.5

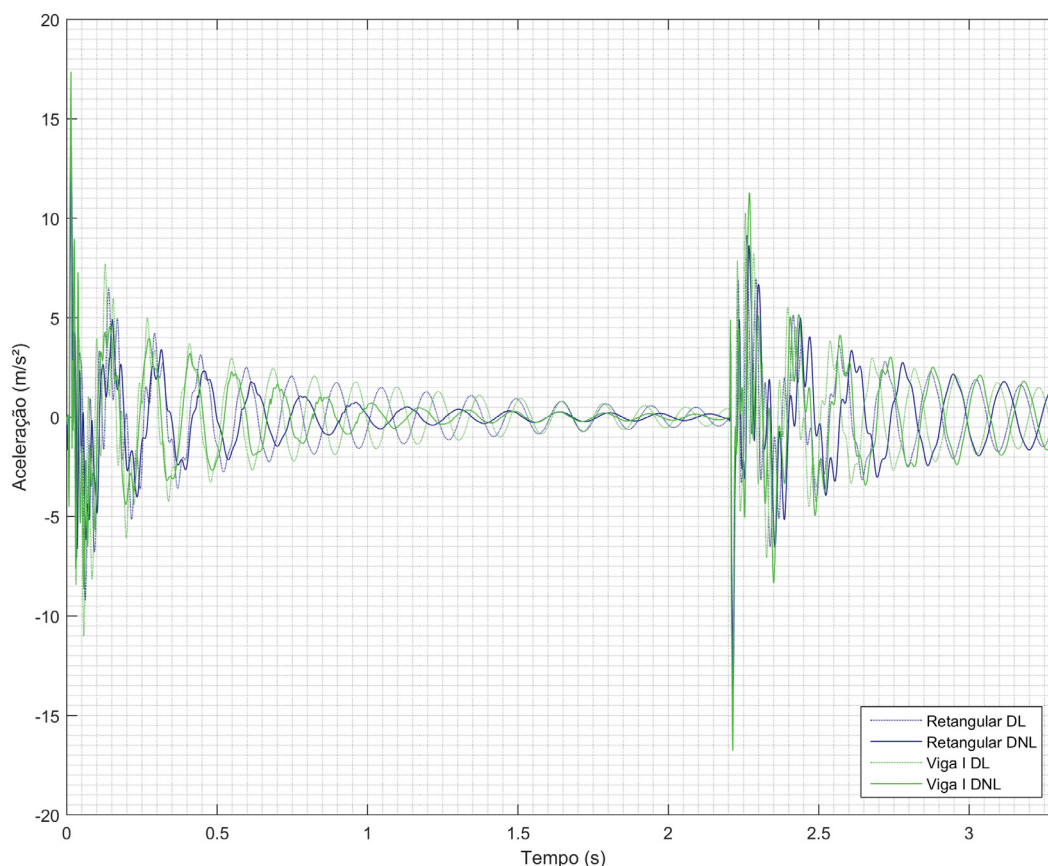


FONTE: O autor.

As maiores amplitudes de velocidade foram as da viga I. Os maiores picos se dão no início da análise e após o veículo sair da ponte.

A Figura 165 apresenta as respostas dinâmicas de aceleração dos nós centrais das vigas.

FIGURA 165 – Respostas dinâmicas de aceleração nos nós centrais das vigas do modelo 5.5



FONTE: O autor.

Há maiores amplitudes e maiores frequências no início da análise e na saída do veículo. As maiores respostas de aceleração ocorreram na viga I. Observa-se a defasagem entre todas as respostas. Nota-se, também, maiores amplitudes dos resultados não lineares em comparação com os lineares.

A Tabela 60 compara os FADs das análises realizadas.

TABELA 60 – Fator de amplificação dinâmica das vigas 5.5

Seção transversal	$u_{EL}^{Máx}$ (mm)	$u_{DL}^{Máx}$ (mm)	$FAD_L$	$u_{DNL}^{Máx}$ (mm)	$FAD_{NL}$
Retangular	8,179	8,961	1,09566	10,473	1,28053
Viga I	7,460	8,152	1,09275	9,319	1,24908

O FAD linear da viga retangular foi de, aproximadamente, 1,10 enquanto o FAD não linear foi de 1,28, aproximadamente. Na viga I houveram menores deslocamentos, sendo o FAD linear de 1,09 e o FAD não linear de 1,25, aproximadamente.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste Capítulo final são apresentadas as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

### 6.1 RESUMO E CONCLUSÕES

O presente trabalho tratou da modelagem computacional para a análise do comportamento dinâmico não linear de vigas de pontes de concreto armado com seções transversais e distribuição de armaduras variáveis por meio da interação dinâmica entre veículo e ponte, da Mecânica do Dano e da teoria da plasticidade.

Introduziu-se, no Capítulo 1, a contextualização do problema, apresentou-se a motivação, os objetivos, gerais e específicos, bem como as limitações do trabalho e a metodologia utilizada.

No Capítulo 2, tratou-se da revisão bibliográfica cronológica de trabalhos em dinâmica linear de pontes, da Mecânica do Dano e de dinâmica não linear em pontes.

Houve preocupação em abordar a fundamentação teórica dos campos envolvidos no problema no Capítulo 3. Destacou-se a teoria de flexão composta em vigas, o Método dos Elementos Finitos para vigas de *Euler-Bernoulli* com enfoque em análise estática linear e dinâmica linear de sistemas. Para explicar a teoria da Mecânica do Dano, foram apresentados os fundamentos da termodinâmica dos sólidos, as leis da termodinâmica, a desigualdade de *Clausius-Duhem*, a taxa de energia interna e o formalismo termodinâmico da Mecânica do Dano de modo a elucidar os meios com danificação. Com isso, foi possível descrever um elemento de volume representativo, os conceitos de tensão efetiva, deformação efetiva e princípios gerais de equivalências de respostas constitutivas em termos de energia, deformação e tensão. Assim, apresentada a teoria do dano, foi possível apresentar a fundamentação teórica de sistemas estáticos não lineares e de sistemas dinâmicos não lineares, detalhando métodos de solução de equações não lineares, critérios de convergência e otimização computacional para as análises devido à complexidade do problema.

Após a apresentação da fundamentação teórica necessária, foi possível detalhar os modelos computacionais utilizados no Capítulo 4. Apresentaram-se o modelo de veículo com 1 grau de liberdade e sua interação dinâmica com a ponte, o modelo constitutivo de dano de *Mazars* (1984) e as devidas adaptações necessárias para possibilitar as análises numéricas deste trabalho, bem como um modelo constitutivo elastoplástico bilinear com encruamento positivo para simulação das armaduras de aço. Em sequência, apresentou-se o modelo aperfeiçoado de rigidez equivalente e

mapeamento de pseudo-malha que considera seções transversais com geometria variável, distribuição distinta de armaduras, variação analítica da posição da linha neutra e variação dos momentos de inércia das camadas discretizadas com possibilidade de refino local variável. Por fim, com tais considerações, apresentou-se a modelagem computacional dinâmica não linear proposta com enfoque na substituição de variáveis e pontos de integração de *Gauss*, condições iniciais dinâmicas partindo da configuração deformada, linear ou não linear, devido ao peso próprio, variação do tensor de tensões para diferentes geometrias de seção transversal e tratamento de erro no contorno ao longo do tempo.

No Capítulo 5, analisaram-se vigas isoladas de ponte de concreto armado com seções quaisquer e taxa de armadura realista por meio de simulações computacionais.

Inicialmente, na Seção 5.1, comparou-se o modelo computacional proposto com resultados de modelos experimentais de Jarek et al. (2011) e de Mazars e Grange (2017). Também compararam-se as respostas com resultados de simulações computacionais de demais autores através de uma análise estática não linear. Concluiu-se que a relação constitutiva tem grande influência no processo de danificação. Apesar de ambas as análises tratarem de vigas biapoiadas com carregamento estático crescente, a evolução do dano ocorre de forma distinta. A consideração da variação da posição da linha neutra e dos momentos de inércia das camadas permitiu que o modelo computacional obtivesse respostas coerentes com as dos modelos experimentais.

Na simulação da viga proposta por Jarek et al. (2011), Seção 5.1.1, as respostas de deslocamento obtidas tiveram melhor comportamento, em comparação com o modelo experimental, do que as respostas de demais simulações computacionais, embora o resultado de Souza, Machado e Abeche (2012) também tenha se aproximado das respostas experimentais. Não houve comparação entre as respostas de danificação, pois o resultado de danificação das análises numéricas não foi apresentado.

Na simulação da viga de Mazars e Grange (2017) com a modelagem proposta, Seção 5.1.2, no entanto, as respostas de deslocamento obtidas não conseguiram acompanhar as respostas numéricas da simulação quando inicia-se o processo de plastificação. Essa diferença se dá devido ao fato de que Mazars e Grange (2017) considera a perda de aderência, escorregamento, entre o aço e o concreto. Todavia, os resultados obtidos com a modelagem proposta representaram com êxito as respostas de danificação apresentadas por Mazars e Grange (2017), bem como o resultado experimental.

Comparou-se, na Seção 5.2, a influência da taxa de armadura no processo dinâmico de danificação em dois casos de viga de ponte, uma de vão curto e outra de vão longo. Concluiu-se que quanto maior a taxa de armadura, menor a evolução do processo de danificação e, conseqüentemente, mais próximas as respostas dinâmicas

lineares das respostas dinâmicas não lineares. Conclui-se, também, que o dano reduz as frequências naturais de vibração da estrutura.

Nas vigas de vão curto, Seção 5.2.1 dimensionou-se a armadura com uma taxa de aço de 1,49% e variou-se a mesma acima e abaixo do valor dimensionado. Ao utilizar uma taxa de 0,49%, inferior à dimensionada, mas, ainda, acima da taxa de armadura mínima de 0,15%, obteve-se uma maior danificação. Embora o FAD não linear foi de aproximadamente 1,78, a maior resposta dinâmica não linear de deslocamento foi de apenas 2,031 mm. No entanto, o deslocamento ficou acima do limite permitido por norma de  $L/350$ , o qual resulta em 1,714 mm. Nas demais simulações, em que há maior quantidade de aço, os valores obtidos na análise dinâmica não linear mantiveram-se dentro do limite.

Nas vigas de maior vão, Seção 5.2.2, o dimensionou-se a armadura com a taxa de 1,04%. Mesmo na de 0,54% o deslocamento máximo na análise dinâmica não linear, 5,663 mm, não ultrapassou o valor estabelecido por norma, 5,714 mm. Mesmo com a taxa de armadura abaixo da dimensionada não houve expressiva danificação ao final da simulação.

Na sequência, na Seção 5.3, investigou-se a influência de diferentes geometrias de seção transversal no processo de danificação dinâmico da ponte. Foram abordadas seções transversais usuais de pontes, como viga retangular, viga I simétrica, viga I assimétrica e viga T. Conclui-se que a geometria da seção transversal tem grande influência no processo de danificação e, conseqüentemente, nas respostas dinâmicas da estrutura. O formato da configuração danificada depende intrinsecamente dos parâmetros geométricos da seção transversal.

A viga I simétrica foi a que teve menores danos, seguida da viga retangular, da viga I assimétrica e da viga T. No entanto, a utilização de diferentes geometrias ocorre no intuito de aproveitar a boa resistência do concreto na compressão, visto que a resistência do concreto na tração é desprezada no dimensionamento de vigas de concreto armado. Assim, as vigas T e I assimétrica, apesar de terem apresentado significativa danificação na região inferior, tiveram danos na região em que há menor concentração de momento de inércia. A região superior destas duas vigas, onde há maior concentração, necessitaria de maiores solicitações para iniciar um processo de danificação por compressão no concreto. O máximo deslocamento permitido por norma para estas vigas, de comprimento de 16 m, é de 4,571 mm. A viga retangular teve deslocamento máximo de 3,443 mm, a viga I simétrica teve 2,858 mm, a viga I assimétrica teve 3,809 mm e a viga T teve exatos 4,571 mm, idêntico ao limite estabelecido por norma. Como no dimensionamento de estruturas de concreto armado espera-se aproveitar o melhor desempenho do concreto na compressão, houve maior eficácia na utilização do volume de concreto nestas duas, ou seja, as regiões danificadas, embora

expressivas, ocorreram em um menor volume de concreto.

Analisou-se, na Seção 5.4, a influência dos comprimentos de balanço no processo de danificação para vigas de vãos centrais curtos e vigas de vãos centrais longos. Conclui-se que quanto maior a razão entre o comprimento do balanço e o vão central, maiores são as danificações. O efeito dos balanços e a consequente danificação foi muito superior nas vigas de vão central curto em comparação com as vigas de vão central longo.

Nas vigas de vão central curto analisadas na Seção 5.4.1, verifica-se, inicialmente, a tendência de danificação nas camadas superiores das regiões próximas aos apoios e nas camadas inferiores do vão central. No entanto, à medida em que aumentam-se os comprimentos dos balanços, essa danificação evolui de forma mais proeminente, também tendo danos expressivos na região superior da viga. A distribuição de armadura faz com que o processo de danificação não ocorra de forma suave, conforme observado nas análises anteriores, devido à variação de rigidez entre os elementos adjacentes. Nos resultados, evidenciou-se que a linha neutra acompanhou o processo de danificação.

Nas vigas com vão central longo, Seção 5.4.2, o resultado da danificação foi menos expressivo se comparado aos da viga de vão central curto. Observou-se danificação expressiva somente nas camadas superiores das regiões próximas aos apoios na simulação de viga com balanços de comprimento de 6 m.

Por fim, foram apresentados os resultados numéricos obtidos de simulações computacionais em um caso real de viga de ponte retangular e em uma viga I fictícia com momento de inércia equivalente, na Seção 5.5. Com as contribuições deste trabalho, foi possível realizar as simulações computacionais com a modelagem proposta em vigas de pontes reais. Nas simulações destas vigas, os resultados de danificação obtidos foram plausíveis, embora tenha havido propagação expressiva em um único elemento da viga retangular e em três elementos da viga I fictícia com momento de inércia equivalente. Houve maior redução nas frequências naturais de vibração na viga I, sendo a maior de 17,12%, contudo o FAD não linear nesta viga foi menor do que no da viga retangular.

Nota-se a diferença na evolução dos danos com a mudança da geometria da seção transversal. Nota-se, também, uma pequena descontinuidade na danificação conforme a variação da distribuição de armaduras. A variação da posição da linha neutra ao longo da viga também foi evidenciada. Na configuração danificada final da viga I fictícia observa-se uma maior propagação e distribuição de dano na região entre os apoios, contudo com menores intensidades quando comparada à viga retangular existente. Observou-se, também, a defasagem nas respostas dinâmicas na medida em que ocorre o processo de microfissuração do concreto.

A consideração da variação da posição da linha neutra de forma analítica possibilitou menor tempo de processamento por remoção de mais um processo iterativo do Método de *Newton-Raphson* nas simulações. Mesmo assim, algumas simulações computacionais tiveram tempo de processamento em torno de 9 horas por simulação. Por depender dos históricos das respostas, as simulações dinâmicas não lineares são computacionalmente custosas, mesmo em programação de baixo nível simuladas com equipamentos atuais.

A implementação do modelo de tratamento do erro no contorno ao longo do tempo possibilitou simulações dinâmicas não lineares com maior adequação.

A consideração da variação do momento de inércia das camadas foi fisicamente factível e contribui significativamente à modelagem computacional de vigas em flexão sujeitas ao processo de danificação. Em projetos de estruturas de concreto armado, tal propriedade é considerada no dimensionamento. Encontra-se a configuração de equilíbrio em função dos esforços internos, determina-se a posição da linha neutra e, a partir disto, calcula-se o momento de inércia do aço e do concreto em relação a esta posição. Deste modo, a mesma consideração na modelagem é plausível.

Por fim, conclui-se que a modelagem proposta é viável para simulações de vigas reais. É possível estender tais análises a demais casos realistas, conforme será apresentado na Seção subsequente, relativa a sugestões para trabalhos futuros.

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para trabalhos futuros, propõe-se:

- a) levar em consideração as irregularidades da via e o efeito destas nas análises dinâmicas não lineares com os modelos propostos;
- b) considerar uma situação de tráfego mais realista em que diversas combinações de veículos passam simultaneamente em ambos os sentidos;
- c) adaptar o modelo proposto para vigas em concreto protendido;
- d) considerar o efeito do escorregamento entre a armadura e o concreto;
- e) considerar o efeito da fadiga do aço nas análises dinâmicas não lineares;
- f) analisar a relação entre a danificação e a durabilidade das pontes;
- g) adaptar o modelo proposto para análises bidimensionais e tridimensionais;
- h) comparar os resultados numéricos da dinâmica não linear com modelos experimentais;

- i) incluir critérios de falha;
- j) a partir de uma variação nas frequências naturais de vibração, medidas através de acelerômetros, procurar identificar e localizar a posição e a geometria de uma falha, de um dano;
- k) modelar o sistema considerando a flexibilidade e movimentações dos apoios (terremotos);
- l) considerar modelos acoplados entre as solicitações e as respostas estruturais;
- m) adaptar o modelo para outros tipos de estruturas, como barragens, pilares, pórticos, etc;
- n) considerar modelos não lineares de contato;
- o) incluir o efeito de dissipadores de energia na análise;
- p) utilizar um modelo de veículo mais realista, com mais graus de liberdade, que considere demais efeitos físicos, como deslizamento, aceleração e frenagem;
- q) considerar o efeito de torção;
- r) levar em consideração pontes com ressaltos, juntas de dilatação e outros tipos de imperfeições, como transição entre pavimentos, bem como a influência destes nas respostas dinâmicas do veículo e da ponte;
- s) considerar a armadura de cisalhamento;
- t) contemplar vigas transversinas de ponte.

## REFERÊNCIAS

ABECHE, T. d. O. **Modelagem computacional da interação dinâmica desacoplada entre viga e veículo considerando as irregularidades da via e a mecânica do dano contínuo**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2015. Citado 35 vezes nas páginas 31, 32, 33, 34, 42, 43, 45, 46, 47, 51, 52, 54, 55, 61, 65, 75, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 102, 104, 105, 107, 116, 119 e 122.

ABECHE, T. d. O.; MACHADO, R. D.; Abdalla Filho, J. E.; BEGHETTO, F. L. M.; de Souza, L. A. F. Damage effects from dynamic interaction between vehicles, irregularities and railway bridges in the nonlinear dynamic response of structures. In: POMBO, J. (Ed.). **Third International Conference on Railway Technology: Research, Development and Maintenance (Railways 2016)**. Cagliari, Sardinia, Italy, 2016. v. 1, n. 1, p. 1–23. Citado na página 43.

ABECHE, T. d. O.; MACHADO, R. D.; Abdalla Filho, J. E.; BEGHETTO, F. L. M.; de Souza, L. A. F. Damaging of a reinforced concrete bridge due to dynamic effects of vehicles. In: **The Eighth International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management (IABMAS)**. [S.l.: s.n.], 2016. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.

ABECHE, T. d. O.; MACHADO, R. D.; BEGHETTO, F. L. M.; de Souza, L. A. F. Computational modeling of vehicle-irregularity-bridge dynamic interaction by damage mechanics. In: IDELSOHN, S. et al. (Ed.). **1st Pan-American Congress on Computational Mechanics (PANACM 2015) in conjunction with the XI Argentine Congress on Computational Mechanics (MECOM 2015)**. Buenos Aires, Argentina: Barcelona, Spain: International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), 2015. v. 1, p. 485–496. Citado na página 42.

ABECHE, T. d. O.; MACHADO, R. D.; FILHO, J. A.; BEGHETTO, F. L. M.; de Souza, L. A. F. Damage effect on the nonlinear dynamic response of a bridge. In: **XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. [S.l.: s.n.], 2015. Citado na página 42.

ABECHE, T. d. O.; MACHADO, R. D.; FILHO, J. A.; BEGHETTO, F. L. M.; de Souza, L. A. F. Nonlinear dynamic damage evolution of a highway bridge due to its interaction with random forms of irregularities and moving vehicles. In: **XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2016)**. [S.l.: s.n.], 2016. Citado na página 43.

ABECHE, T. d. O.; MACHADO, R. D.; IMAI, A. P.; ARNDT, M. Comparison of nonlinear dynamic responses of euler-bernoulli beams and two-dimensional plane stress state obtained from vehicle, irregularities and reinforced concrete bridge dynamic interaction system. In: **Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2017)**. [S.l.: s.n.], 2017. Citado 3 vezes nas páginas 44, 87 e 108.

ABECHE, T. d. O.; MACHADO, R. D.; IMAI, A. P.; ARNDT, M. Effects of the nonlinear dynamic damage and plasticity evolution from dynamic interaction between vehicle,

irregularities and bridge on reinforced concrete bridges' dynamic amplification factor. In: **24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2017)**. [S.l.: s.n.], 2017. Citado 3 vezes nas páginas 44, 107 e 108.

ÁLVARES, M. S. **Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos - USP, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 107.

ARAÚJO, F. A. **Contribuição ao emprego da mecânica do dano para a análise do comportamento dinâmico não-linear de vigas em concreto armado**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003. Citado na página 39.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7188**: Carga móvel em ponte rodoviária e passarela de pedestre – procedimento. Rio de Janeiro, 2013. Citado na página 31.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto-procedimento. Rio de Janeiro, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 31, 142, 144, 162 e 196.

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. Portugal: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 45, 49, 86, 124 e 127.

BARROS, F. B. Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas. **USP São Carlos**, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 76 e 104.

BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1996. Citado 11 vezes nas páginas 41, 54, 81, 85, 86, 87, 88, 89, 91, 93 e 94.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Mechanics of Materials**. [S.l.]: Pearson Makron Books, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 50, 51, 75 e 110.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática**. [S.l.]: Pearson Makron Books, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 50, 51 e 110.

BEGHETTO, F. L. M. **Efeitos dinâmicos em modelo de veículo e ponte ferroviária diante da variação de velocidade e irregularidades verticais da via**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 36, 51 e 63.

BEGHETTO, F. L. M. **Modelagem tridimensional da interação dinâmica entre veículo e ponte ferroviária considerando contato roda-trilho, irregularidades da via e variação da velocidade**. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 36, 51, 52, 62 e 63.

BOUAFIA, Y.; SMAHI, R.; DUMONTET, H.; KACHI, M. Modeling the behavior of concrete by damage mechanics with a Poisson's ratio variable. **Procedia Materials Science** **3**, v. 714, p. 714–719, 2014. Citado na página 40.

BURLION, N.; GATUINGT, F.; PIJAUDIER-CABOT; DAUDEVILLE, L. Compaction and tensile damage in concrete: constitutive modelling and application to dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 183, p. 291–308, 2000. Citado na página 39.

CANTERO, D.; KAROUMI, R. Numerical evaluation of the mid-span assumption in the calculation of total load effects in railway bridges. **Engineering Structures**, v. 107, p. 1–8, 2016. Citado na página 37.

CERVERA, M.; OLIVER, J.; MANZOLI, O. A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams. **Earthquake engineering and structural dynamics**, v. 25, p. 987–1010, 1996. Citado na página 41.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. [S.I.]: New Jersey: Prentice Hall, 1995. v. 3. Citado 4 vezes nas páginas 54, 63, 64 e 207.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. Dynamics of structures. 1993. **Copyright of Applied Mechanics & Materials**, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 62.

COLEMAN, B. D.; GURTIN, M. E. Thermodynamics with internal state variables. **The Journal of Chemical Physics**, AIP, v. 47, n. 2, p. 597–613, 1967. Citado 3 vezes nas páginas 67, 68 e 70.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and application of finite element analysis**. [S.I.]: John Wiley and Sons Inc, 2002. Citado na página 123.

CRAIG, R. R. **Structural Dynamics: An introduction to computer methods**. New York: John Wiley and Sons, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 54.

DANIEL, L.; KORTIS, R. The comparison of different approaches to model vehicle-bridge interaction. **Engineering Structures**, v. 190, p. 504–509, 2017. Citado na página 38.

DESMORAT, R.; CHAMBART, M.; GATUINGT, F.; GUILBAUD, D. Delay-active damage versus non-local enhancement for anisotropic damage dynamics computations with alternated loading. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 77, p. 2294–2315, 2010. Citado na página 40.

DESMORAT, R.; GATUINGT, F.; RAGUENEAU, F. Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 74, p. 1539–1560, 2007. Citado na página 39.

DIMITRAKOPOULOS, E. G.; ZENG, Q. A three-dimensional dynamic analysis scheme for the interaction between trains and curved railway bridges. **Computers and Structures**, v. 149, p. 43–60, 2015. Citado na página 37.

DOBLARÉ, M.; GARCIA, J. Anisotropic bone remodelling model based on a continuum damage-repair theory. **Journal of biomechanics**, Elsevier, v. 35, n. 1, p. 1–17, 2002. Citado na página 40.

DRIEMEIER, L. **Considerações sobre a fadiga em metais e o comportamento do concreto sob solicitação cíclica**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 1995. Citado na página 66.

DVORAK, R.; FREISTETTER, F. Orbit dynamics, stability and chaos in planetary systems. In: SPRINGER, BERLIN, HEIDELBERG. **Chaos and Stability in Planetary Systems**. [S.l.], 2005. v. 683, p. 3–140. Citado na página 62.

EBECKEN, N. F. F. **LORANE-NL – Uma Linguagem Orientada à Análise Estrutural Não-Linear**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977. Citado na página 41.

GORGES, W. **Notas de Aula de Engenharia de Pontes**. 2012. Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Citado 2 vezes nas páginas 224 e 225.

GRELAT, A. Comportement non linéaire et stabilité des ossatures en béton armé. **Annaies de l'ITBTP**, 1978. Citado na página 40.

GUELLO, G. D. A. **Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 39, 102, 104 e 106.

HANIF, M. U.; IBRAHIM, Z.; JAMEEL, M.; GHAEDI, K.; ASLAM, M. A new approach to estimate damage in concrete beams using non-linearity. **Construction and Building Materials**, v. 124, p. 1081–1089, 2016. Citado na página 41.

IMAI, A. P.; MACHADO, R. D.; ABEICHE, T. d. O.; ARNDT, M. Analysis of the nonlinear dynamic behaviour of reinforced concrete bridge beams with variable reinforcement distribution through the vehicle-bridge interaction and the damage mechanics. In: **Proceedings of the XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2017)**. [S.l.: s.n.], 2017. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 108.

IMAI, A. P.; MACHADO, R. D.; ABEICHE, T. d. O.; ARNDT, M. On the damage evolution of reinforced concrete i-beam bridges due to dynamic vehicle-structure interaction. In: **24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2017)**. [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 44.

INMAN, D. J.; SINGH, R. C. **Engineering Vibration**. [S.l.]: Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001. Citado na página 195.

JACOB, B. P.; EBECKEN, N. F. F. An optimized implementation of the newmark/newton-raphson algorithm for the time integration of non-linear problems. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 10, n. 12, p. 983–992, 1994. Citado 4 vezes nas páginas 94, 95, 96 e 122.

JANSON, J.; HULT, J. Fracture mechanics and damage mechanics a combined approach. **Journal de Mécanique Appliquée**, v. 1, p. 69—84, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 66.

JAREK, A.; MARCONCIN, L. d. R.; SOUZA, L. A. F.; MACHADO, R. D.; LACERDA, L. A. Numerical modeling combined with experimental analysis of simply supported reinforced concrete beam monitored with fiber optic sensors. In: **XXXII Iberian Latin**

**American Congress on Computational Methods in Engineering.** Ouro Preto, MG: [s.n.], 2011. Citado 4 vezes nas páginas 28, 136, 138 e 237.

JIRÁSEK, M.; SUÁREZ, F. Localization properties of desmorat's anisotropic damage model. **Computers and Structures**, v. 174, p. 139–153, 2016. Citado na página 39.

JOHANSSON, C.; PACOSTE, C.; KAROUMI, R. Closed-form solution for the mode superposition analysis of the vibration in multi-span beam bridges by concentrated moving loads. **Computers and Structures**, v. 119, p. 85–94, 2013. Citado na página 37.

KACHANOV, L. M. **Time of rupture process under creep conditions.** Tese (Doutorado) — Izvestia Akademii Nauk, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 74.

KWON, Y. W.; BANG, H. **The finite element method using MATLAB.** [S.l.]: CRC press, 2000. Citado na página 110.

La Borderie, C. **Phenomenes unilateraux dans un materiau endommageable: modelisation et application a l'analyse de structures en beton.** Tese (Doutorado) — Universite Paris, Paris, 1991. Citado 3 vezes nas páginas 38, 39 e 40.

LEANDER, J.; KAROUMI, R. Dynamics of thick bridge beams and its influence on fatigue life predictions. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 89, p. 262–271, 2013. Citado na página 37.

LEMAITRE, J. **A Course on Damage Mechanics.** [S.l.]: Springer-Verlag, 1992. Citado 6 vezes nas páginas 70, 71, 72, 73, 75 e 80.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mécanique des matériaux solides.** [S.l.]: Dunod-Bordas, 1985. Citado 6 vezes nas páginas 38, 65, 72, 74, 79 e 104.

LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. **Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures.** [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 72 e 103.

LEMAITRE, J.; MARQUIS, D. Modelling elasto-plasticity, damage and coupled behaviors in engineering materials. **Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan**, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 71.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130–141, 1963. Citado na página 82.

LUBLINER, J. On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 7, n. 3, p. 237–254, 1972. Citado 5 vezes nas páginas 67, 68, 69, 70 e 71.

LUBLINER, J. **Plasticity Theory.** New York: Macmillan Publishing Company, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 71.

MACHADO, R. D. **Análise dinâmica não-linear de sistemas rígido-flexíveis.** Dissertação (Mestrado) — Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Rio de Janeiro, 1983. Citado 8 vezes nas páginas 30, 31, 32, 41, 82, 83, 85 e 122.

MACHADO, R. D. **Desenvolvimento do método modificado da função de Green local para a solução de placas laminadas de materiais compostos**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1992. Citado na página 32.

MACHADO, R. D.; BERNARDES, V. Dynamic analysis of vehicle-bridge interaction. In: **19th International Congress of Mechanical Engineering, COBEM 2007**. Brasília: [s.n.], 2007. Citado na página 36.

MARCONCIN, L. d. R. **Uma abordagem numérico-experimental para análise de dano em lajes de barragens de enrocamento com face de concreto**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 136 e 138.

MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure**. Tese (Doutorado) — Université Paris, Paris, 1984. Citado 16 vezes nas páginas 34, 38, 39, 40, 42, 43, 73, 98, 101, 103, 104, 106, 107, 138, 147 e 236.

MAZARS, J.; GRANGE, S. Simplified strategies based on damage mechanics for concrete under dynamic loading. **Phil. Trans. R. Soc. A**, The Royal Society, v. 375, n. 2085, p. 20160170, 2017. Citado 6 vezes nas páginas 28, 139, 140, 141, 142 e 237.

MAZARS, J.; HAMON, F.; GRANGE, S. A new 3d damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. **Materials and Structures**, Springer, v. 48, n. 11, p. 3779–3793, 2015. Citado na página 40.

NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the engineering mechanics division**, ASCE, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959. Citado 3 vezes nas páginas 65, 82 e 100.

PAULA, C. F. **Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

PEREGO, M. **Danneggiamento dei materiali lapidei: leggi costitutive, analisis per elementi finiti ed applicazioni**. Dissertação (Mestrado) — Politecnico di Milano, 1989. Citado na página 104.

Pereira Júnior, W. M. **Análise numérica de estruturas de concreto com fibras utilizando mecânica do dano**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014. Citado na página 40.

PEREIRA, L. F.; WEERHEIJM, J.; SLUYS, L. J. A new effective rate dependent damage model for dynamic tensile failure of concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 176, p. 281–299, 2017. Citado na página 41.

PITUBA, J.; FERNANDES, G. Anisotropic damage model for concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 137, n. 9, p. 610–624, 2011. Citado na página 40.

PITUBA, J. J. d. C. **Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998. Citado 6 vezes nas páginas 30, 39, 80, 81, 101 e 107.

PROENÇA, P. **Introdução a Mecânica do Dano e Fraturamento: elementos de Mecânica do Dano em Meios Contínuos**. São Carlos: Notas de aula do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade de São Paulo (USP), 2000. Citado 7 vezes nas páginas 65, 66, 74, 76, 77, 78 e 79.

PROENÇA, P. **Introdução a Mecânica do Dano e Fraturamento: fundamentos da Termodinâmica dos Sólidos Parte 1**. São Carlos: Notas de aula do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade de São Paulo (USP), 2000. Citado 5 vezes nas páginas 66, 67, 68, 69 e 70.

PROENÇA, P. **Introdução a Mecânica do Dano e Fraturamento: fundamentos da Termodinâmica dos Sólidos Parte 2**. São Carlos: Notas de aula do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade de São Paulo (USP), 2000. Citado 5 vezes nas páginas 66, 70, 71, 72 e 73.

RABOTNOV, Y. N. **Creep problems in structural members**. Amsterdam, North-Holland: Elsevier, 1969. Citado 3 vezes nas páginas 38, 74 e 75.

RAGUENEAU, F.; GATUINGT, F. Inelastic behavior modelling of concrete in low and high strain rate dynamics. **Computers and Structures**, v. 81, p. 1287–1299, 2003. Citado na página 39.

REDDY, J. N. **Energy and variational methods in applied mechanics: with an introduction to the finite element method**. [S.l.]: Wiley New York, 1984. Citado na página 54.

SARGIN, M.; HANDA, V. Structural concrete and some numerical solutions. In: **ACM. Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference**. [S.l.], 1968. p. 563–574. Citado na página 40.

SHENG, G. G.; WANG, X. The geometrically nonlinear dynamic responses of simply supported beams under moving loads. **Applied mathematical modelling**, v. 48, p. 183–195, 2017. Citado na página 43.

SOUZA, L. A. F. **Modelo Numérico Anisotrópico de Remodelação Óssea Interna Fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009. Citado na página 40.

SOUZA, L. A. F.; MACHADO, R. D.; ABEICHE, T. O. Simulação numérica computacional de estruturas de concreto armado considerando a mecânica do dano e critério de resistência. In: **Anais do 54º Congresso Brasileiro do Concreto**. Maceió, AL: [s.n.], 2012. Citado 3 vezes nas páginas 136, 138 e 237.

TIAGO, C. M.; LEITÃO, V. M.; ROSCA, V. Análise de problemas unidimensionais de mecânica do dano com funções de base radial. **JM Goicolea, C. Mota Soares, M. Pastor e G. Bugeda, Editor, Métodos Numéricos en Ingeniería V, Artes Gráficas Torres SA**, 2002. Citado na página 105.

- WOSATKO, A.; PAMIN, J.; POLAK, M. A. Application of damage–plasticity models in finite element analysis of punching shear. **Computers and Structures**, v. 151, p. 73–85, 2015. Citado na página 40.
- YANG, H.; CHEN, Z.; LI, S.; ZHANG, H.; FAN, J. An integrated coupling element for vehicle-rail-bridge interaction system with a non-uniform continuous bridge. **Acta Mechanica Solida Sinica**, v. 28, 2015. Citado na página 37.
- YANG, Y. B.; YAU, J. D.; HSU, L. C. Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds. **Engineering Structures**, v. 19, p. 936–944, 1997. Citado na página 36.
- ZATZKIS, H. Special theory of relativity. **Fundamental formulas of physics**, Courier Dover Publications, v. 1, p. 178–209, 1960. Citado na página 62.
- ZHOU, S.; SONG, G.; WANG, R.; REN, Z.; WEN, B. Nonlinear dynamic analysis for coupled vehicle-bridge vibration system on nonlinear foundation. **Mechanical systems and signal processing**, v. 25, p. 987–1010, 1996. Citado na página 42.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method: solid mechanics**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000. v. 2. Citado na página 90.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method**. [S.l.]: McGraw-Hill London, 1977. v. 36. Citado na página 86.