

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PATRÍCIA LUIZA MOSCON FREISLEBEN

ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS DE TIMOSHENKO UTILIZANDO O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

CURITIBA

2019

PATRÍCIA LUIZA MOSCON FREISLEBEN

ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS DE TIMOSHENKO UTILIZANDO O MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE da Universidade Federal do Paraná - Setor de Tecnologia, como requisito parcial para obtenção do grau de "Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia", área de concentração em Mecânica Computacional.  
Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt

CURITIBA

2019

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

F866a

Freisleben, Patrícia Luiza Moscon

Análise dinâmica de vigas de Timoshenko utilizando o método dos elementos finitos generalizados [recurso eletrônico] / Patrícia Luiza Moscon Freisleben. – Curitiba, 2019.

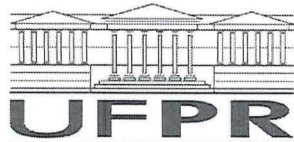
Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, 2019.

Orientador: Marcos Arndt .

1. Método dos elementos finitos. 2. Dinâmica estrutural. 3. Vigas. 4. Viga de Timoshenko. I. Universidade Federal do Paraná. II. Arndt, Marcos. III. Título.

CDD: 515.353

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
SETOR SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS  
EM ENGENHARIA - 40001016030P0

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **PATRICIA LUIZA MOSCON FREISLEBEN** intitulada: **ANÁLISE DINÂMICA DE VIGAS DE TIMOSHENKO UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS**, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 25 de Abril de 2019.

MARCOS ARNDT

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

HSU YANG SHANG

Avaliador Externo (PUCPR)

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UFPR)

JOÃO ELIAS ABDALLA FILHO

Avaliador Externo (PUCPR/UTFPR)



## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por estar sempre a frente de meus passos durante essa trajetória, pela vida, pela saúde e por me proporcionar as oportunidades até então vividas.

Agradeço também aos meus pais, Alcir Luiz Freisleben e Lurdes Moscon, por estarem ao meu lado a todo o momento, por me ampararem sempre que se mostrasse necessário e por provarem todas as condições indispensáveis para essa conquista de mais essa etapa em minha vida. Agradeço ao meu namorado Gilvan Augusto Nava pelo carinho e apoio dos últimos anos.

Ao professor Marcos Arndt pela orientação, incentivo e paciência na realização deste trabalho.

Aos amigos que fiz durante essa jornada no CESEC. Agradeço em especial à Letícia, Paulo e Thamara por compartilharmos as vitórias e derrotas, amizade, incentivo e força.

Ainda, a todos que de alguma forma fizeram parte, contribuíram e estiveram ao meu lado durante esta etapa.

E à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo incentivo financeiro.

## RESUMO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é amplamente utilizado na análise dinâmica de estruturas, contudo o método possui algumas limitações. De forma a melhorar as respostas podem ser incorporadas funções enriquecedoras às aproximações do MEF utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Já foram apresentados diversos trabalhos comprovando a eficiência do MEFG na análise dinâmica de barras, vigas de Euler-Bernoulli, treliças, entre outros elementos estruturais, contudo poucos foram os trabalhos que pesquisaram a aplicação do MEFG na análise dinâmica de vigas de Timoshenko. Nesse contexto, o presente trabalho realiza a análise modal e transiente de vigas de Timoshenko aplicando o MEFG. São realizados diversos exemplos de análise modal e transiente com três diferentes enriquecimentos e seus resultados são comparados com MEF, para que assim seja possível avaliar a eficiência de cada um nas vigas de Timoshenko. Os resultados apresentados da análise modal serão os espectros de frequência, tabelas com as respostas de frequência, gráficos de convergência e por fim gráficos do número de condição das matrizes de massa e rigidez. São apresentados como resultados da análise transiente os gráficos de deslocamentos, velocidades e acelerações. Por fim, o trabalho chega a conclusão que um dos enriquecimentos não pode ser considerado como ideal na análise dinâmica de vigas de Timoshenko.

**Palavras-chaves:** Método dos Elementos Finitos Generalizados. Viga de Timoshenko. Análise dinâmica.

## ABSTRACT

The Finite Element Method (FEM) is widely used in the dynamic analysis of structures, however the method has some limitations. In order to improve the responses enriching functions can be incorporated to FEM approximations using the Generalized Finite Element Method (GFEM). Several studies have already been carried out to prove the efficiency of GFEM in the dynamic analysis of bars, Euler-Bernoulli beams, trusses, among other structural elements, but few studies have investigated the application of GFEM in the dynamic analysis of Timoshenko beams. In this context, the present work performs the modal and transient analysis of Timoshenko beams applying the GFEM. Several examples of modal and transient analysis are carried out with three different enrichments and their results are compared with FEM, so that it is possible to evaluate the efficiency of each one in the Timoshenko beams. The presented results of the modal analysis will be the frequency spectra, frequency response tables, convergence graphs and finally graphs of the condition number of the mass and stiffness matrices. The graphs of displacements, velocities and accelerations are presented in the results of the transient analysis. Finally, the work comes to the conclusion that one of the enrichments can not be considered as ideal in the dynamic analysis of Timoshenko beams.

**Key-words:** Generalized Finite Element Method. Timoshenko beam. Dynamic analysis.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DE UM ELEMENTO DE VIGA. . . . .	46
FIGURA 2 – FUNÇÕES DE LOBATTO. . . . .	51
FIGURA 3 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO DE ARNDT (2009) PARA BARRAS. . . . .	52
FIGURA 4 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO DE ARNDT (2009) PARA VIGAS. . . . .	53
FIGURA 5 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO DE HSU (2016). . . . .	54
FIGURA 6 – VIGA BI-APOIADA. . . . .	58
FIGURA 7 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	59
FIGURA 8 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	59
FIGURA 9 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	60
FIGURA 10 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	61
FIGURA 11 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	62
FIGURA 12 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	62
FIGURA 13 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	63
FIGURA 14 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	64
FIGURA 15 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	65
FIGURA 16 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	65
FIGURA 17 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	68
FIGURA 18 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	69
FIGURA 19 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	69
FIGURA 20 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	70
FIGURA 21 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	70

FIGURA 22 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	71
FIGURA 23 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	72
FIGURA 24 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	73
FIGURA 25 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	74
FIGURA 26 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	75
FIGURA 27 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	76
FIGURA 28 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	77
FIGURA 29 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	80
FIGURA 30 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	81
FIGURA 31 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	81
FIGURA 32 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	82
FIGURA 33 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	82
FIGURA 34 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	83
FIGURA 35 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	83
FIGURA 36 – VIGA ENGASTADA-LIVRE. . . . .	84
FIGURA 37 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	85
FIGURA 38 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	85
FIGURA 39 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	86
FIGURA 40 – ZOOM DE ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	87
FIGURA 41 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	88

FIGURA 42 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	88
FIGURA 43 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	89
FIGURA 44 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	90
FIGURA 45 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	91
FIGURA 46 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	91
FIGURA 47 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	94
FIGURA 48 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	95
FIGURA 49 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	95
FIGURA 50 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	96
FIGURA 51 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	96
FIGURA 52 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	97
FIGURA 53 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	97
FIGURA 54 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	98
FIGURA 55 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	99
FIGURA 56 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	100
FIGURA 57 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	101
FIGURA 58 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	102
FIGURA 59 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	105
FIGURA 60 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	106

FIGURA 61 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	106
FIGURA 62 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	107
FIGURA 63 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	107
FIGURA 64 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	108
FIGURA 65 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	109
FIGURA 66 – VIGA BI-ENGASTADA. . . . .	109
FIGURA 67 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	110
FIGURA 68 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	111
FIGURA 69 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	112
FIGURA 70 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	112
FIGURA 71 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	113
FIGURA 72 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	114
FIGURA 73 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	115
FIGURA 74 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	115
FIGURA 75 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	116
FIGURA 76 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	117
FIGURA 77 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	120
FIGURA 78 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	121
FIGURA 79 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	121
FIGURA 80 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	122



FIGURA 81 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	122
FIGURA 82 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	123
FIGURA 83 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	124
FIGURA 84 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	125
FIGURA 85 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	126
FIGURA 86 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	127
FIGURA 87 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	128
FIGURA 88 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	129
FIGURA 89 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	132
FIGURA 90 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	133
FIGURA 91 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	133
FIGURA 92 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	134
FIGURA 93 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	134
FIGURA 94 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	135
FIGURA 95 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	135
FIGURA 96 – REPRESENTAÇÃO DA EXCITAÇÃO EXTERNA DO TIPO DEGRAU. . . . .	136
FIGURA 97 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	137
FIGURA 98 – ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	138
FIGURA 99 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	138
FIGURA 100–ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	139



FIGURA 101—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	139
FIGURA 102—ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	140
FIGURA 103—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	141
FIGURA 104—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	141
FIGURA 105—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA BI-APOIADA COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	142
FIGURA 106—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	143
FIGURA 107—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	143
FIGURA 108—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA BI-APOIADA COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	144
FIGURA 109—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	145
FIGURA 110—ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	145
FIGURA 111—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	146
FIGURA 112—ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	146
FIGURA 113—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	147
FIGURA 114—ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	147
FIGURA 115—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	148
FIGURA 116—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	149
FIGURA 117—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	149
FIGURA 118—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	150
FIGURA 119—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . .	150

FIGURA 120—RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO. . . . . 151

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	67
TABELA 2 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	79
TABELA 3 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA ENGASTADA- LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,1$ . . . . .	93
TABELA 4 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA ENGASTADA- LIVRE COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	104
TABELA 5 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,2$ . . . . .	119
TABELA 6 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO $h/l = 0,002$ . . . . .	131

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MC	- Métodos dos Elementos Compostos
MQD	- Método da Quadratura Diferencial
MQDH	- Método da Quadratura Diferencial Harmônica
MEC	- Método dos Elementos de Contorno
MEF	- Método dos Elementos Finitos
MEFG	- Método dos Elementos Finitos Generalizados
MEFH	- Método dos Elementos Finitos Hierárquicos
MPS	- Método Pseudoespectral
MPU	- Método da Partição da Unidade
PU	- Partição da Unidade

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_{ij}$	Graus de liberdade de campo
$a_j^{(i)}$	Coefficientes constantes
$b$	Base da seção transversal da viga
$b_{ij}$	Graus de liberdade de campo
$dx$	Comprimento de um elemento de viga
$f(t)$	Vetor de cargas externas
$h$	Altura da seção transversal da viga
$k^e$	Matriz de rigidez no domínio do elemento
$k_s$	Fator de correção de cisalhamento
$l$	Tamanho total da viga
$m$	Número de níveis de enriquecimento
$n$	$n$ -ésimos graus de liberdade
$t$	Tempo
$v$	Função arbitrária
$w$	Vetor de deslocamento
$x$	Comprimento da viga
$y$	Deslocamento
$\mathbf{y}$	Vetor de deslocamentos
$y_{MPU}$	Componente do deslocamento do MPU
$y^h$	Função aproximada de $y$
$y_{MEF}^h$	Função aproximada de $y$ pelo MEF
$y_{MEFG}^h$	Função aproximada de $y$ pelo MEFG
$y_i$	$i$ -ésimo deslocamento
$A$	Área da seção transversal

$B$	Matriz de deslocamentos das deformações
$C(A)$	Número de condição da matriz $A$
$C^0$	Espaço de funções que não possui derivada contínua
$C^1$	Espaço de funções que tem a primeira derivada contínua
$D$	Matriz constitutiva
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal
$G$	Módulo de elasticidade transversal
$H_y$	Matriz de funções de forma de deslocamentos
$H_\phi$	Matriz de funções de forma de rotações
$I$	Momento de inércia
$ J $	Determinante do Jacobiano
<b>K</b>	Matriz de rigidez
$M$	Momento fletor
<b>M</b>	Matriz de massa
$M^e$	Matriz de massa no domínio do elemento
$N$	Número total de graus de liberdade
$N_{elem}$	Número de elementos
$O_x$	Eixo da viga
$Q$	Força transversal de cisalhamento
$\alpha$	Constante adimensional
$\beta$	Constante adimensional
$\beta_j$	j-ésimo parâmetro de enriquecimento
$\gamma$	Ângulo de cisalhamento
$\gamma_i$	Funções de base
$\delta$	Denota que os termos são virtuais
$\eta_i$	Funções partição da unidade $C^0$

$\lambda_n$	Frequências naturais
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$\xi$	Coordenada natural
$\rho$	Densidade do material
$\phi$	Rotação
$\phi$	Vetor de rotação
$\phi^h$	Função aproximada de $\phi$
$\phi_i$	i-ésima rotação
$\psi$	Função arbitrária
$\psi_j$	Funções enriquecedoras
$\psi_j^{(i)}$	Funções especiais do conjunto $\Psi_i$
$\omega$	Frequências naturais de referência
$\omega_n$	Frequências naturais aproximadas
$\Phi_n$	Modos de vibrar
$\Psi_i$	Espaço de cobertura
$\Omega$	Domínio
$\Omega_i$	Conjunto de subdomínios

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
1.1 OBJETIVOS	25
1.1.1 Objetivo geral	25
1.1.2 Objetivos específicos	25
1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	25
<b>2 REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>27</b>
2.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS	27
2.2 VIGA DE TIMOSHENKO	33
<b>3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA VIGA DE TIMOSHENKO</b>	<b>46</b>
3.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	47
3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS	49
3.3 FUNÇÕES UTILIZADAS	50
<b>4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS</b>	<b>55</b>
4.1 ANÁLISE MODAL	55
4.1.1 Viga bi-apoiada	58
4.1.1.1 Relação $h/l = 0,2$	58
4.1.1.2 Relação $h/l = 0,002$	72
4.1.2 Viga engastada-livre	84
4.1.2.1 Relação $h/l = 0,1$	84
4.1.2.2 Relação $h/l = 0,002$	98
4.1.3 Viga bi-engastada	109
4.1.3.1 Relação $h/l = 0,2$	110
4.1.3.2 Relação $h/l = 0,002$	124
4.2 ANÁLISE TRANSIENTE	136
4.2.1 Viga bi-apoiada	137
4.2.2 Viga engastada-livre	144
<b>5 CONCLUSÕES</b>	<b>152</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>155</b>



<b>APÊNDICES</b>	<b>167</b>
<b>APÊNDICE A ABORDAGEM DE ZIETSMAN, RENSBURG E MERWE (2004)</b>	<b>168</b>
<b>APÊNDICE B MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ . . . . .</b>	<b>172</b>
B.1 Matriz de massa pela abordagem de hsu (2016) . . . . .	172
B.2 Matriz de massa pela abordagem de Zietsman, Rensburg e Merwe (2004) .	172
B.3 Matriz de rigidez pela abordagem de hsu (2016) . . . . .	173
B.4 Matriz de rigidez pela abordagem de Zietsman, Rensburg e Merwe (2004) .	173

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo das vibrações na engenharia já motivou muitas pesquisas nos últimos tempos. Ele engloba aspectos da dinâmica, mecânica dos fluidos, deformação estrutural e fadiga, eletromagnetismo, som e outros fenômenos. Com novas máquinas possuindo maiores eficiências e potência, novas estruturas que desafiam a imaginação pelas suas formas, tamanho, materiais e locais e veículos que prometem um futuro eficiente e conveniente, em todos esses avanços a vibração estará presente. Dessa forma o estudo das vibrações ainda apresenta desafios de engenharia em pleno século XXI (PALAZZOLO, 2016).

Os fenômenos dinâmicos podem ser classificados como de vibração livre e de vibração forçada. Os primeiros, ocorrem quando um sistema após uma perturbação inicial é deixado vibrar por conta própria, ou seja, quando nenhuma força externa atua no sistema. Um exemplo de vibração livre é a oscilação de um pêndulo simples, que nada mais é do que uma massa presa na ponta de um fio flexível que permite a sua movimentação livremente. Já a vibração forçada ocorre quando o sistema é submetido a uma força externa (gerada normalmente por um tipo de força repetida). Um exemplo de vibração forçada é a oscilação que ocorre nos motores das máquinas (RAO, 2011).

Quando na vibração livre são analisados os modos e as frequências naturais de vibração, esse procedimento é chamado de análise modal. Analisar os modos e frequências de vibração tem como intuito caracterizar o comportamento estrutural, pois sempre que a frequência natural de uma estrutura ou máquina coincide com a frequência de excitação externa, ocorre um fenômeno conhecido como ressonância, que gera amplificação de deslocamentos e possíveis danos à estrutura (RAO, 2011; TORII, 2012). Na literatura existem diversos relatos de danos originados pela ressonância e vibrações excessivas dos sistemas, dentre os mais famosos temos são a Ponte de Tacoma (MATSUMOTO et al., 2003; IRWIN et al., 2005; ARIOLI; GAZZOLA, 2015).

Em uma vibração forçada a energia externa pode ser fornecida através de uma força aplicada ou de uma excitação de deslocamento imposta. O que se busca reproduzir com uma análise de vibração forçada são as variações dos deslocamentos, velocidades e acelerações da estrutura ao longo do tempo. A força aplicada ou excitação de deslocamento pode ser de natureza harmônica, não harmônica mas periódica, não periódica ou aleatória. As excitações não periódicas podem ter uma duração longa ou curta. Segundo Rao (2011) se a excitação aplicada for não periódica, a análise feita sobre a estrutura é designada de análise transiente. As forças não periódicas incluem forças aplicadas de modo constante e subitamente (chamadas de força degrau), forças linearmente crescentes (chamadas de forças de rampa) ou forças de variação

exponencial, entre outras (RAO, 2011; TORII, 2012).

Para que seja possível obter as respostas modais e transientes deve ser realizado um modelo matemático do problema. Contudo, os problemas de engenharia são em geral muito complexos, de tal forma que torna-se impossível considerar todos os seus detalhes para uma análise matemática. Portanto, são consideradas apenas suas características mais importantes, para modelar o comportamento das estruturas. Habitualmente, o desempenho da estrutura pode ser determinado, considerando até mesmo um modelo mais simples do que o seu complexo sistema físico. Dessa forma, a análise de um sistema vibratório geralmente envolve a modelagem matemática e computacional (RAO, 2011; CHOPRA, 2011).

Um modelo físico é o primeiro a ser desenvolvido a partir do sistema da estrutura que será analisada. Nele devem ser incluídos detalhes suficientes que permitam a descrição do sistema. Na sequência é realizada a modelagem matemática onde o modelo físico é descrito em termos de equações para então ser aplicado o modelo computacional. As equações de movimento devem ser resolvidas para que sejam encontradas as respostas do sistema vibratório, e, para isso, dentre diversas técnicas, podem ser utilizados os métodos numéricos (RAO, 2011).

Entre os métodos numéricos existentes podem ser citados o Método dos Elementos Finitos (MEF) (BECKER; CAREY; ODEN, 1981; BATHE, 1982; HUGHES, 1987), Método da Quadratura Diferencial (MQD) (BELLMAN; CASTI, 1971; JANG; BERT; STRIZ, 1989), Método dos Elementos Compostos (MC) (ZENG, 1998), Método da Quadratura Diferencial Harmônica (MQDH) (CIVALEK, 2004), Método Pseudoespectral (MPS) (LEE; SCHULTZ, 2004; FERREIRA; FASSHAUER, 2006), Método de Análise Isogeométrica (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; COTTRELL et al., 2006). Dentre eles o MEF é amplamente utilizado na indústria para evitar problemas de vibrações estruturais. A apresentação da geometria em "malhas" de elementos finitos rapidamente se tornou uma prática padrão para a análise de sistemas de todos os tamanhos e formas (PALAZZOLO, 2016).

De forma geral o MEF é uma técnica para a construção de soluções aproximadas para problemas de valor de contorno. Ele consiste em dividir a região de solução, também designado por domínio da solução, em pequenas partes conhecidas por elementos e expressar as variáveis de campo desconhecidas em termos de funções de aproximação assumidas, também conhecidas como funções de interpolação ou funções de forma, em cada elemento. As funções de forma são definidas em variáveis de campo de pontos especificados designados por nós ou pontos nodais. Assim, na análise de elementos finitos, as incógnitas são as variáveis de campo dos pontos nodais. Uma vez que estas são encontradas, as variáveis de campo em qualquer ponto podem ser encontradas usando as funções de forma (BHAVIKATTI, 2005).

Para uma boa aplicação do MEF é necessário que o modelo matemático represente de forma apropriada o modelo real. Para isso é preciso que dentro do domínio da solução existam boas propriedades de aproximação local. Caso o modelo ainda não represente de forma apropriada o modelo real, existem duas maneiras de melhorar as propriedades de aproximação, e conseqüentemente melhorar a resposta. A primeira é a partir do refino- $h$ , onde a aproximação local é feita por polinômios de grau fixo,  $p$ , enquanto o tamanho de cada elemento,  $h$ , é refinado. Se a função que se pretende aproximar é suave o suficiente, o teorema de Taylor implica que em cada suporte o erro da aproximação é  $O(h^{p+1})$ . Outra maneira é o refino- $p$ , que fixa o tamanho dos elementos,  $h$ , enquanto refina o grau dos polinômios,  $p$ . É possível realizar esse refino pois o teorema de Weierstrass (que estabelece que o espaço de polinômios é denso no espaço de funções contínuas em domínios compactos) garante que a aproximação local com espaços de polinômios seja viável sob suposições de regularidade fracas (MELENK, 1995).

Quando se tem a presença de cantos ou mudanças súbitas nas condições de contorno no modelo gera singularidades na solução. Para que seja possível obter uma solução numérica mais precisa em pontos com singularidade deve ser feita uma divisão específica nos pontos singulares, o que acarreta em um grande número de nós, aumentando o trabalho computacional. Outro problema que ocorre é que as singularidades geradas em diferentes pontos singulares não são as mesmas. Conseqüentemente, é difícil obter a solução numérica desses problemas com precisão, mesmo realizando ambos os refinamentos ( $h$  e  $p$ ) (HAN, 1982).

Outra necessidade do MEF é que haja uma continuidade entre os elementos, pois desse modo as incógnitas locais estão interligadas de forma a gerar um sistema global que possa ser resolvido. Contudo, não é tão fácil construir espaços onde essa continuidade sempre exista. Para resolver isso, uma variedade de abordagens tem sido sugerida para criar espaços de elementos finitos que contêm funções não polinomiais e satisfazem alguma forma de continuidade entre elementos (MELENK, 1995).

Uma das abordagens, proposta por Melenk (1992), apresenta um método onde os espaços de aproximações locais são multiplicados por uma partição da unidade para formar o espaço global. A abordagem proposta por Melenk (1992) foi modificada por Melenk (1995) que a embasou matematicamente e exemplificou. Essa nova abordagem foi designada posteriormente por Método da Partição da Unidade (MPU). Como conseqüência das metodologias aplicadas, as propriedades de aproximação dos espaços locais são herdadas pelo espaço global de elementos finitos (MELENK, 1995).

O MEF é um método conforme, contudo, não apresenta a capacidade de explorar de maneira sistematizada um conhecimento prévio sobre a estrutura. Caso seja necessário utilizar funções customizadas é preciso reconstruir um modelo computacio-

nal para cada aplicação. Logo, para resolver o problema de conformidade é utilizado o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), que multiplica funções especiais, que são conhecidas a priori para aproximar a solução exata, pela partição da unidade do MPU, sem que haja a necessidade de se refazer o modelo todo (STROUBOULIS; BABUŠKA; COPPS, 2000).

Outra característica do MEFG é que as funções especiais e as funções de elementos finitos podem ser misturadas na aproximação, e serem utilizadas somente quando necessário. A única dificuldade apresentada para esta implementação de MEFG é que as funções empregadas na construção da aproximação podem ser linearmente dependentes ou quase linearmente dependentes (STROUBOULIS; BABUŠKA; COPPS, 2000).

O MEFG já apresentou bons resultados na análise dinâmica de barras (ARNDT, 2009; ARNDT; MACHADO; SCREMIN, 2010; TORII, 2012; TORII; MACHADO, 2012; SHANG, 2014; WEINHARDT; ARNDT; MACHADO, 2015; PETROLI, 2016; WEINHARDT; ARNDT; MACHADO, 2016; WEINHARDT, 2016; DEBELLA; ARNDT; MACHADO, 2017a; MALACARNE et al., 2017a; MALACARNE et al., 2017b; DEBELLA, 2018; MALACARNE, 2018; WEINHARDT et al., 2018); vigas de Euler-Bernoulli (ARNDT, 2009; TORII, 2012; SHANG, 2014; PETROLI, 2016; DEBELLA; ARNDT; MACHADO, 2017b; DEBELLA, 2018; MALACARNE, 2018); treliças (ARNDT, 2009; ARNDT; MACHADO; SCREMIN, 2010; TORII; MACHADO, 2012; MALACARNE, 2018); pórticos (ARNDT, 2009); equação da onda bidimensional (TORII, 2012; TORII; MACHADO; ARNDT, 2015); estado plano de tensões (TORII, 2012; SHANG, 2014); e, vigas curvas (CORRÊA; ARNDT; MACHADO, 2018).

Contudo, poucos foram os trabalhos que pesquisaram a aplicação do MEFG na análise dinâmica de vigas de Timoshenko (HSU, 2016; FREISLEBEN et al., 2017; FREISLEBEN et al., 2018). Essa teoria de vigas proposta por Timoshenko (1921) inclui ao modelo de viga de Euler-Bernoulli a inércia de rotação e a deformação por cisalhamento. Esse modelo de Timoshenko traz um grande aprimoramento para vigas não delgadas e para respostas de alta frequência na qual os efeitos de cisalhamento ou rotativos não são desprezíveis (TIMOSHENKO, 1921).

Dessa forma este trabalho visa contribuir com as investigações aplicando o MEFG com diferentes funções de enriquecimento em vigas de Timoshenko baseando-se no trabalho de Hsu (2016).

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é aplicar o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) para problemas de análise dinâmica de vigas de Timoshenko, para que seja possível analisar o comportamento das respostas modais e transientes dos diferentes enriquecimentos utilizados.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral proposto, pretende-se:

- Apresentar formulações a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF) dos problemas de vibração de vigas de Timoshenko;
- Implementar computacionalmente e enriquecer as formulações;
- Comparar os diferentes enriquecimentos de MEFG aplicados às vigas de Timoshenko a partir de exemplos numéricos.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. No capítulo 2 é apresentada uma revisão dos conceitos do método aproximado que será empregado no trabalho, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). São apresentados trabalhos relacionados a dinâmica de estruturas aplicando o MEFG. Na sequência é apresentada a história e as características das vigas de Timoshenko. Ao final do capítulo descreve-se a evolução dos trabalhos de análises de vigas de Timoshenko.

O capítulo 3 expõe a fundamentação matemática, apresentando as equações diferenciais características de vigas de Timoshenko. Então é apresentado o modelo de elementos finitos de Hsu (2016), que será utilizado no trabalho. Na sequência são apresentadas as formulações para o enriquecimento. Por fim são mostradas as funções de forma, empregadas no Método dos Elementos Finitos (MEF); as funções partição da unidade e os conjuntos de funções de enriquecimento utilizadas no MEFG.

O capítulo 4 é dividido em duas partes, a primeira onde são realizadas análises modais sobre as vigas e a segunda onde são realizadas análises transientes das vigas, dessa forma são apresentadas as aplicações numéricas da teoria apresentada nesse trabalho.

As considerações finais do trabalho e sugestões de trabalhos futuros são expostas no capítulo 5.

Por fim são apresentados os apêndices: no apêndice A consta a formulação adaptada do modelo de Zietsman, Rensburg e Merwe (2004). Este modelo apresenta uma diferente abordagem, utilizando o Método de Galerkin, e obtém as mesmas matrizes de massa e rigidez que as apresentadas por Hsu (2016); o apêndice B mostra as matrizes de massa e rigidez das duas abordagens, particularizadas para funções de forma lineares. Dessa forma é possível observar a semelhança entre as matrizes.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo se apresenta uma revisão da história e os conceitos sobre o método matemático empregado, o Método dos Elementos Finitos Generalizados. Logo após, são apresentadas a história e as características das vigas de Timoshenko; e dando prosseguimento ao capítulo, serão expostos alguns trabalhos realizados utilizando a teoria de vigas de Timoshenko.

### 2.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

Nos problemas de engenharia, existem algumas grandezas de interesse que, quando calculadas apropriadamente, nos permitem prever com certa qualidade o comportamento das estruturas. Essas grandezas são apresentadas em equações algébricas que descrevem os problemas (COOK et al., 2001; BHAVIKATTI, 2005).

Para se encontrar o modelo matemático que descreve os problemas de engenharia deve ser idealizado um modelo físico do sistema em estudo, e a partir dele é feita a modelagem matemática, que consiste em equações diferenciais e em condições de contorno (KWON; BANG, 1997). Com o advento de sistemas computacionais, o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos (MEF) como ferramenta de análise se popularizou. Através do MEF é possível estabelecer e resolver as equações governantes para problemas mais complexos de maneira muito eficaz. Hoje, as interfaces orientadas graficamente e de fácil utilização facilitam muito o uso eficiente do MEF (PALAZZOLO, 2016).

De acordo com Bathe (1982), o MEF tornou-se atrativo principalmente pela generalidade da estrutura que pode ser analisada, assim como, a relativa facilidade para determinar as equações governantes, e pelas boas propriedades numéricas das matrizes do sistema envolvidas.

As primeiras contribuições importantes para o método apareceram nos trabalhos de Turner et al. (1956), Argyris e Kelsey (1960) e Clough (1960). O método foi inicialmente desenvolvido em bases físicas para a análise de problemas em mecânica estrutural. Entretanto, logo foi reconhecido que poderia ser aplicado à solução de muitas outras classes de problemas obtendo bons resultados (BATHE, 1996).

O MEF é um método de aproximação da solução das equações diferenciais parciais que descrevem os modelos físicos. A solução de uma equação diferencial em cada ponto é difícil de se obter. Portanto, para superar essa dificuldade, é reformulado o problema do valor de contorno de modo a admitir condições mais fracas sobre a solução e suas derivadas. Essa reformulação tem como nome forma fraca ou variacional da



equação diferencial. As equações diferenciais na sua forma integral são as equações utilizadas para construir as aproximações da solução de MEF (BECKER; CAREY; ODEN, 1981; BATHE, 1982; HUGHES, 1987; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

Para aproximar a solução da forma integral da equação diferencial, o MEF realiza uma substituição do espaço de tentativa, sem dimensão, para aproximações com dimensão finita dos espaços teste. Então a solução de elementos finitos é dada como o elemento desse espaço que satisfaz a formulação fraca para todas as funções de teste do espaço. Logo, as questões básicas do MEF são a escolha da formulação fraca e a seleção do espaço teste de dimensão finita (HUGHES, 1987).

Para que o MEF seja aplicado em problemas lineares é necessário que ele satisfaça duas condições (MELENK; BABUŠKA, 1996a):

- Boas propriedades de aproximações locais no espaço teste;
- Continuidade entre elementos.

A primeira condição pode ser atendida ao se realizar o refino- $h$  ou refino- $p$ . Contudo, caso as condições de contorno possuam cantos ou grandes variações, isso gera uma singularidade para a solução, e os refinamentos  $h$  e  $p$  resolvem essa singularidade de maneira pobre (MELENK, 1995).

A continuidade entre os elementos deve existir para que seja possível produzir um espaço global a partir dos espaços locais. Dessa maneira as incógnitas locais estão interligadas, gerando um sistema global que pode ser resolvido. Porém, a continuidade entre elementos pode ser difícil de se aplicar. Para resolver este problema algumas abordagens foram desenvolvidas, entre elas é possível citar a proposta feita por Melenk (1992), onde os espaços de aproximação locais são multiplicados por uma Partição de Unidade (PU) para formar o espaço global. Esse método foi modificado por Melenk (1995) e posteriormente designado por Método da Partição da Unidade (MPU) (MELENK, 1995).

O MEF é um método conforme, que não apresenta a capacidade de explorar um conhecimento a priori sobre a estrutura da equação diferencial parcial particular que está sendo resolvida. Já o MPU deixa grande liberdade na escolha dos espaços de aproximação locais e, ao mesmo tempo, cria um método de conformação (MELENK, 1995).

Por consequência foi criado um método que combina o clássico MEF com o MPU. O novo método apresentado por Strouboulis, Babuška e Copps (2000) é o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Nele os espaços de MEF padrão são aumentados adicionando funções especiais que refletem as informações conhecidas a priori sobre o problema do valor de contorno e os dados de entrada. Essas funções

especiais são multiplicadas pela PU correspondente naquele mesmo nó e unidas com a base de elementos finitos existente, construindo assim um espaço de elemento finito com conformidade aumentada. Deste modo, a aproximação local oferecida pelas funções especiais é incluída na aproximação, permitindo, assim, utilizar os códigos de MEF já existentes (STROUBOULIS; BABUŠKA; COPPS, 2000).

No trabalho apresentado por Strouboulis, Babuška e Copps (2000) além de apresentar o MEFG, os autores também realizaram exemplos para ilustrar o desempenho do método, em domínio com furos e chapa em "L".

Na sequência, Strouboulis, Copps e Babuška (2000) concluíram que o MEFG pode ser projetado para atingir as mesmas metas dos métodos híbridos e métodos sem malha. O método apresenta algumas características particulares como: o MEFG pode incorporar facilmente funções especiais que se aproximam bem da solução exata localmente; ele é livre de dificuldades com a integração numérica e com a aplicação das condições de contorno de Dirichlet associadas aos métodos sem malha; e, o MEFG pode ser facilmente incorporado nos códigos de MEF preexistentes

Os autores Strouboulis, Copps e Babuška (2001) apresentaram o desenvolvimento do MEFG a partir da ilustração e implementação do método para o Laplaciano em duas dimensões espaciais em domínios que possam incluir várias centenas de vazios e/ou fendas, nos quais a construção de malhas utilizadas pelo MEF é praticamente impossível. Entretanto, é viável, pois ele é capaz de construir soluções aproximadas para o problema de valor limite de interesse, empregando malhas que podem sobrepor parte ou todo o limite do problema. Outra vantagem é a possibilidade de construir a aproximação empregando uma base de elementos finitos padrão na malha, enriquecida por funções especiais empregando o MPU, utilizando a PU correspondente à malha de elementos finitos empregada. Esse trabalho pode ser entendido como um estudo piloto para a viabilidade e demonstração das capacidades do MEFG.

O artigo de Babuška, Banerjee e Osborn (2004) apresenta uma visão geral das principais ideias do MEFG. Nele foram apresentados resultados básicos, experiências e potencialidades do método. Dentre as características do método tem-se, que no MEFG pode-se utilizar uma ampla variedade de funções de forma, permitindo que o MEFG se aproxime com êxito de soluções não suaves de problemas de valor de contorno, em domínios com cantos ou várias fissuras ou com condições de contorno de tipo misto - Dirichlet e Neumann. A construção de funções de forma que sejam suaves, ou seja, que possuam maior regularidade, é fácil. Dessa maneira, o MEFG pode ser utilizado para resolver problemas de ordem superior.

A capacidade de escolher as funções de forma apropriadas torna o MEFG adequado para resolver o problema de Helmholtz, que foi apresentado por Melenk e Babuška (1996b); e certos problemas não lineares, apresentados por Belytschko et al.

(2003). O fato do MEFG usar minimamente uma malha, permite que sem a remalha o MEFG seja usado em problemas que envolvem domínios com alteração de contorno ou com um contorno desconhecido, como em problemas de propagação de trincas ou problemas de contorno livre. O MEFG já foi utilizado com sucesso em problemas com domínios complexos, como nos trabalhos de Strouboulis, Copps e Babuška (2001), Strouboulis, Zhang e Babuška (2003), Strouboulis, Zhang e Babuška (2004), que utilizaram malhas simples que estão em conformidade com a geometria do domínio. A análise detalhada da precisão e complexidade computacional foi apresentada por Strouboulis, Zhang e Babuška (2003). Além disso, Duarte e Babuška (2002) utilizaram o MEFG em problemas com camadas limite.

Babuška, Banerjee e Osborn (2004) fornecem uma lista de problemas, nos quais o MEFG promete ser eficiente e bem-sucedido: Problemas com soluções não suaves, em que algumas informações sobre a solução são conhecidas, ou poderiam ser obtidas por um cálculo numérico local; problemas em que o domínio é tão complexo que a criação de uma malha por um gerador de malha não é viável ou não é eficiente; problemas com contorno dependentes do tempo ou contorno livres (isto é, problemas com contorno desconhecidos); e, certos problemas não lineares.

No trabalho de Santana (2004) o MEFG foi estudado e comparado com métodos sem malha (como o Método de Galerkin Sem Elementos (BELYTSCHKO; LU; GU, 1994), Mínimos Quadrados Móveis (LANCASTER; SALKAUSKAS, 1981) e Método de Nuvens hp (DUARTE; ODEN, 1996)). O trabalho chegou a conclusão que o melhor custo-benefício para o problema de propagação de trincas, no contexto da Mecânica da Fratura Linear Elástica, foram as soluções numéricas calculadas a partir do MEFG. Dentre as vantagens apresentadas pelo MEFG: o esforço computacional para a obtenção das funções de forma é comparável com o do MEF e inferior ao esforço requerido pelos métodos sem malha; e, a imposição direta das condições de contorno essenciais.

Com relação a análise dinâmica considera-se a pesquisa de Arndt (2009), que teve por objetivo investigar a aplicação do MEFG na análise de vibrações livres em estruturas reticuladas. Ele realizou refinamentos  $h$ ,  $p$ , e adaptativos do MEFG para análise de vibrações livres de barras, eixos, vigas de Euler-Bernoulli e estruturas reticuladas, tais como, treliças e pórticos. A principal contribuição, citada pelo autor, está na formulação e na investigação do desempenho do MEFG na análise de vibrações livres em estruturas reticuladas. Os exemplos mostraram que o refino adaptativo do MEFG obteve melhores resultados do que o refino  $p$  do MEFG, pois apresenta uma capacidade de refinar uma frequência específica com elevada precisão. As funções enriquecedoras, utilizadas no MEFG adaptativo, dependem das propriedades geométricas e mecânicas dos elementos, o que permite um processo adaptativo preciso que converge com maior rapidez.

Foi exibida uma aplicação do MEFG adaptativo para a análise de vibração longitudinal livre de barras retas e treliças por Arndt, Machado e Scremin (2010). Os resultados apresentaram uma boa precisão, mesmo para problemas nos quais as soluções exatas não eram representadas por funções trigonométricas. Os resultados indicaram que o MEFG adaptativo pode ser aplicado mesmo para uma discretização grosseira em problemas complexos.

Outra proposta para que seja possível obter altas frequências foi evidenciada por Garcia, Rossi e Linzmaier (2010), no qual uma alternativa baseada no MEFG com alta regularidade na abordagem do problema de autovalores e autovetores de uma barra engastada em suas extremidades é apresentada. Os resultados mostram que utilizar essas funções de enriquecimento para construir o espaço de aproximação é capaz de capturar altas frequências.

A pesquisa de Torii (2012) realizou a análise modal e transiente de barras, treliças, vigas de Euler-Bernoulli, pórticos, equação da onda bidimensional e estado plano de tensões, utilizando a formulação do MEFG proposta por Arndt (2009). Os exemplos mostraram que o método supre as deficiências do MEF em muitos exemplos, em particular, a solução de problemas que envolvem os modos e frequências de vibração mais elevados.

Uma aplicação do MEFG ao problema de análise dinâmica de barras submetidas a deslocamentos axiais e treliças para a avaliação da resposta temporal da estrutura foi estudada no trabalho de Torii e Machado (2012). A solução analítica desses problemas é composta de uma série trigonométrica, e, portanto, o enriquecimento usado nesse artigo foi baseado em funções seno e cosseno. Novamente o MEFG apresentou bons resultados, que indicam um forte potencial do MEFG para problemas de dinâmica de estruturas.

Para a análise de problemas dinâmicos da propagação de ondas elastoplásticas, Shang (2014) utilizou métodos enriquecidos, dentre eles o MEFG. O trabalho de Arndt et al. (2014) teve como objetivo apresentar uma formulação do MEFG para análise de vibração livre e transiente de barras.

Foi apresentado por Torii, Machado e Arndt (2015) a análise modal da equação de onda 2D utilizando o MEFG. O problema de análise dinâmica de barras e vigas de Euler-Bernoulli foi novamente abordado no trabalho de Shang, Machado e Abdalla Filho (2016), onde foram utilizadas funções de enriquecimento trigonométricas e exponenciais.

Weinhardt, Arndt e Machado (2015) apresentam formas de enriquecimento, tipos de PU e técnicas de pré-condicionamento das funções de enriquecimento, realizando um comparativo das abordagens no estudo de vibração de barra.

Durante a aplicação do método foi observado que, em alguns casos, são obtidos autovalores negativos, dependendo da precisão empregada nas rotinas computacionais. Dessa forma o trabalho de Petroli (2016) realiza uma análise da sensibilidade gerada pela construção numérica das matrizes de massa e rigidez do MEFG, para os casos de vibração livre de barras e vigas de Euler-Bernoulli.

Outro problema encontrado pelo MEFG é que as matrizes podem ser significativamente mal condicionadas, o que pode ocasionar uma perda de acurácia da aproximação, e até mesmo resultar em matrizes numericamente singulares. Por isso, o trabalho de Weinhardt (2016) apresentou duas propostas para evitar esse problema de sensibilidade do MEFG: uma adaptação do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado; e, uma estratégia de pré-condicionamento das funções de enriquecimento. Foram apresentados exemplos de análise transiente unidimensional utilizando essas duas propostas no trabalho de Weinhardt, Arndt e Machado (2015). As análises modal e transiente unidimensionais foram apresentadas com exemplos de barras com variação de área da seção transversal por Weinhardt et al. (2018).

As vigas de Timoshenko foram abordadas por Hsu (2016), que utiliza, pela primeira vez, o MEFG com funções de enriquecimento senoidais. O autor ao mostrar as resposta normalizadas, em gráficos de espectros de frequência, observou que para relações de altura/comprimento baixas existia o efeito de travamento mesmo utilizando funções de enriquecimento.

As vigas de Timoshenko também são abordadas por Freisleben et al. (2017), que utilizaram o mesmo enriquecimento dado por Hsu (2016), contudo com outro elemento finito de viga de Timoshenko. Um diferente elemento finito de viga de Timoshenko é utilizado por Freisleben et al. (2018) com três tipos de funções enriquecedoras.

As conexões semi-rígidas foram acopladas ao MEFG no trabalho de Souza e Arndt (2017), que partiu de duas formulações distintas e realizou a modelagem de um exemplo encontrado na literatura.

Custódio e Arndt (2017) investigaram um enriquecimento para um elemento finito quadrilateral e também verificaram a resposta de sua aplicação em um problema de vibração livre para uma estrutura submetida a um estado plano de tensões.

As abordagens clássicas do MEFG na análise dinâmica aplicam o enriquecimento sobre todos os elementos da malha, mas isso nem sempre é o mais eficiente e eleva o custo computacional da análise. Para isso Malacarne et al. (2017a) apresentam um enriquecimento adaptativo baseado no estimador de erro de Friberg, que permite escolher quais elementos enriquecer para que haja a melhora em uma frequência específica. O trabalho aplicou essa abordagem na análise de vibrações livres de barra. O mesmo enriquecimento seletivo da malha utilizando MEFG com o estimador de erro

de Friberg foi utilizado por Malacarne et al. (2017b), dessa vez realizando a análise de vibrações livres de treliças. O trabalho de Malacarne (2018) apresentou a formulação matemática para a aplicação do indicador de erro de Friberg no MEFG e estudou a sua aplicação em problemas de vibração livre de barras, treliças e vigas de Euler-Bernoulli.

Como pode ser visto há uma ampla utilização do MEFG na análise dinâmica de estruturas, porém a sua resposta numérica ainda pode ser melhorada. Para isso Debella, Arndt e Machado (2017a) realizaram a condensação da matriz modal e eliminaram dela os modos de vibração com má aproximação, isto é, aqueles que apresentam os maiores níveis de erro. Foi apresentado um exemplo da aplicação dessa alternativa na análise dinâmica de barras. O problema foi particularizado para as vigas de Euler-Bernoulli no trabalho de Debella, Arndt e Machado (2017b). O comportamento da resposta numérica da estrutura obtida pelo MEFG, realizando a condensação da matriz modal, de forma que são eliminados os modos de vibração com má aproximação e também a avaliação da influência de cada modo de vibração na resposta transiente da estrutura foram analisados em Debella (2018), que utilizou também o MEFG adaptativo, em exemplos de barra e viga de Euler-Bernoulli.

Funções enriquecedoras trigonométricas e uma PU linear foram utilizadas no trabalho de Corrêa, Arndt e Machado (2018) para a construção de um elemento de viga curva fina para análise dinâmica pelo MEFG.

Como pode ser observado nessa revisão sobre o MEFG, ele apresenta bons resultados para a análise dinâmica de estruturas. Contudo, poucos são os trabalhos que fazem a análise em vigas de Timoshenko.

A seguir será apresentada uma revisão da literatura sobre análise dinâmica de vigas de Timoshenko.

## 2.2 VIGA DE TIMOSHENKO

A primeira teoria de vigas, de Euler-Bernoulli, se iniciou com o trabalho de Jacob Bernoulli, que apresentou um exemplo que dizia respeito à forma da curva de deflexão de uma barra elástica. Ao contrário dos estudos que estavam sendo realizados por Galileu e Mariotte que investigavam os esforços internos nas vigas, Jacob Bernoulli realizou cálculos sobre a sua deflexão. Em seus estudos, afirmou que a curvatura da curva de deflexão em cada ponto é proporcional ao momento de flexão naquele mesmo ponto (TIMOSHENKO, 1983).

Daniel Bernoulli contribuiu, também, com a teoria das curvas elásticas de Jacob Bernoulli. Ele foi o primeiro a derivar a equação diferencial que governa a vibração lateral de barras prismáticas e a usou para estudar modos particulares desse movimento (TIMOSHENKO, 1983).



Leonard Euler, como um matemático, era interessado principalmente pelas formas geométricas de curvas elásticas, e aceitou a teoria dada por Jacob Bernoulli. Com base nisso, investigou as formas das curvas que uma barra elástica fazia sob várias condições de carregamento. Ele aproximou o problema do ponto de vista variacional, criando assim a teoria de vigas de Euler-Bernoulli (TIMOSHENKO, 1983).

A teoria de vigas de Euler-Bernoulli, também chamada de teoria de vigas clássica, é a mais utilizada, pois, apresenta aproximações de engenharia razoáveis para muitos problemas e é simples (HAN; BENAROYA; WEI, 1999), de maneira que ela considera apenas as forças inerciais e elásticas laterais causadas por curvas geradas pela flexão. Os efeitos secundários, como deflexões de cisalhamento e inércia rotacional, têm um efeito insignificante nos primeiros modos de uma barra fina, mas podem afetar consideravelmente os modos mais altos, sendo então a teoria de Euler-Bernoulli inadequada para a vibração de modos superiores. Também é inadequado o uso dessa teoria para vigas quando o efeito das dimensões da seção transversal nas frequências não pode ser desprezado (HUANG, 1961; KAPUR, 1966).

A equação diferencial para a vibração livre de vigas prismáticas utilizando a formulação de Euler-Bernoulli é dada pela Equação 2.1 por (TIMOSHENKO, 1921):

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

onde  $y$  é o deslocamento,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $I$  é o momento de inércia,  $\rho$  é a densidade do material,  $A$  é a área da seção transversal.

Lord Rayleigh teve suas principais contribuições publicadas em seu livro chamado "*The Theory of Sound*". Dentre elas, ele realizou uma correção na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, considerando a inércia rotacional da barra. Dessa forma, ele corrige parcialmente a superestimação das frequências naturais do modelo de Euler-Bernoulli. No entanto, deve-se lembrar que elas ainda estão superestimadas (TIMOSHENKO, 1983; HAN; BENAROYA; WEI, 1999).

Timoshenko (1921) apresenta a equação diferencial para a vibração livre de barras prismáticas considerando a inércia rotacional, mostrada na Equação 2.2 dada por:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (2.2)$$

O modelo proposto por Timoshenko (1921) e conhecido como teoria de viga de Timoshenko inclui ao modelo de Euler-Bernoulli a inércia de rotação e a deformação por cisalhamento. As equações diferenciais desse modelo são apresentadas nas Equações

2.3 e 2.4:

$$EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right) - \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.3)$$

$$k_s GA \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (2.4)$$

onde  $k_s$  é uma constante chamada de "fator de correção de cisalhamento", que depende da forma da seção transversal,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $\phi$  é a rotação. A maneira como Timoshenko (1921) chegou nessas duas equações será apresentada no capítulo 3 deste trabalho.

A correção da deformação por cisalhamento, em um exemplo exposto por Timoshenko (1922), foi quatro vezes mais importante que a correção da inércia rotacional. Contudo, ambas as correções não são importantes se o comprimento de onda das vibrações transversais for grande em comparação com as dimensões da seção transversal. O modelo de Timoshenko é um grande aprimoramento para vigas não delgadas e para respostas de alta frequência na qual os efeitos de cisalhamento ou rotativos não são desprezíveis (TIMOSHENKO, 1922; HAN; BENAROYA; WEI, 1999).

Kruszewski (1949) realizou uma análise teórica do efeito de cisalhamento transversal e da inércia rotacional nas frequências naturais de vigas uniformes. Ele obteve equações de frequência para vigas livre-livre e engastada-livre resolvendo uma equação diferencial somente em deflexão, com condições de contorno não homogêneas prescritas. Também foram obtidos os três primeiros modos antissimétricos para a viga engastada-livre e três modos antissimétricos e simétricos da viga livre-livre.

Por outro lado, Huang (1961) utilizou uma abordagem diferente, e encontrou as soluções de frequência e modos de vibração livre para as duas equações diferenciais, de translação e de rotação, para seis condições de contorno. As constantes encontradas nestas soluções são relacionadas por qualquer uma das duas equações acopladas originais das quais as duas equações diferenciais completas precedentes são derivadas; e, as condições prescritas são homogêneas. As equações de frequência são de difícil solução e mesmo quando as raízes de frequência são obtidas, é um desafio apresentá-las de maneira significativa (HAN; BENAROYA; WEI, 1999).

Para resolver o problema de vibração de vigas, Kapur (1966) utilizou o MEF. Seu uso foi feito empregando uma matriz de massa em conjunto com uma matriz de rigidez. Esse método é aplicável em vigas uniformes e não uniformes, com quaisquer condições de contorno. Mesmo com uma subdivisão grosseira da malha bons resultados foram obtidos.

Elementos finitos de vigas de Timoshenko também foram apresentados por



Davis, Henshell e Warburton (1972), baseados nas equações diferenciais exatas de um elemento infinitesimal em equilíbrio estático. Um novo elemento com dois nós e três graus de liberdade em cada nó foi apresentado por Thomas, Wilson e Wilson (1973). Há também um modelo de elementos finitos com graus nodais de liberdade que podem satisfazer todas as condições de contorno naturais e forçadas de uma viga de Timoshenko, que foi apresentado por Thomas e Abbas (1975).

Para o problema de vibração transversal de vigas de Timoshenko que transportam uma massa concentrada em um ponto arbitrário ao longo da viga foram apresentadas novas equações por Grant (1978).

Um elemento finito de viga de Timoshenko pode ser construído com um número arbitrário de graus de liberdade. Em cada nó há o deslocamento e a rotação da seção transversal, juntamente com os coeficientes de expansões polinomiais do deslocamento transversal e a deformação de cisalhamento. É possível truncar cada uma dessas séries após um número arbitrário de termos, o que permite formular um elemento para atingir qualquer grau de precisão necessário. Dessa maneira, a maioria dos elementos de viga complexos existentes foram mostrados como casos particulares dessa nova formulação apresentada por Less e Thomas (1982).

Duas abordagens foram utilizadas para resolver o problema de uma coluna de viga de Timoshenko em uma fundação elástica submetida a excitações dependentes do tempo e cargas axiais estáticas. Cheng e Pantelides (1988) apresentou a formulação das equações diferenciais, coeficientes de rigidez e forças de extremidade fixa. As duas abordagens utilizadas pelos autores diferem em termos do componente de cisalhamento assumido da carga axial estática na seção transversal. Na primeira abordagem foi suposto que essa componente é calculada a partir da inclinação total; enquanto na segunda abordagem, ele foi calculado apenas a partir da inclinação de flexão.

Experimentos numéricos utilizando o método de quadratura diferencial na análise de vibração de vigas de Timoshenko com seção transversal não uniforme foram realizados por Laura e Gutierrez (1993). No estudo de Yokoyama (1994) foi desenvolvido um elemento de viga de Timoshenko isoparamétrico de quatro nós melhorado com integração reduzida.

Uma viga de Timoshenko carregada axialmente transportando massas suportadas elasticamente foi utilizado como exemplo para o trabalho de Farchaly e Shebl (1995). As massas finais são restringidas contra rotação e translação com molas lineares. Houve também o estudo da influência dos parâmetros geométricos da inércia rotacional da viga e da massa final na frequência natural e nos coeficientes críticos de carga de flambagem.

Um elemento com quatro nós e com ordens variáveis das funções de forma foi apresentado por Houmat (1995). Tanto o deslocamento transversal do elemento quanto a rotação da seção transversal da viga são descritos por um polinômio cúbico mais um número variável de termos trigonométricos. O autor explicou que os termos polinomiais são utilizados para descrever os deslocamentos transversais e as rotações da seção transversal da viga nos quatro nós do elemento, enquanto os termos trigonométricos são usados para fornecer liberdade adicional ao interior do elemento.

Uma solução analítica para vibrações livres e forçadas de vigas de Timoshenko escalonadas foi apresentada e usada para a análise aproximada das vigas geralmente não uniformes por Tong, Tabarrok e Yeh (1995). Vários exemplos foram apresentados para ilustrar a validade e precisão da análise.

Foram desenvolvidas por Aldraihem, Wetherhold e Singh (1996) as derivações das equações governantes e as condições de contorno das estruturas inteligentes de vigas laminadas. Dois modelos matemáticos foram apresentados, o modelo de cisalhamento deformável (Timoshenko) e o modelo de cisalhamento indeformável (Euler-Bernoulli).

Foi proposto por Corn e Piranda (1997) um novo método para a construção simples e sistemática de elementos finitos de viga. Esse método, que propõe a construção de um elemento finito de dois nós, foi baseado na condensação de Guyan que leva aos resultados de formulações clássicas, mas de maneira simples e sistemática. Ao final do trabalho o método proposto foi generalizado para obter novos elementos finitos aprimorados de três nós.

A estabilidade dinâmica de uma viga de Timoshenko livre de carga com uma massa concentrada foi analisada quando uma força pulsante é aplicada. Kim e Choo (1998) discretizaram a equação de movimento a partir do MEF, e então o método de múltiplas escalas foi adotado para investigar a região de instabilidade dinâmica. Também foram estudados os efeitos de localização axial e inércia de translação da massa concentrada.

Han, Benaroya e Wei (1999) realizaram o desenvolvimento completo e análise de quatro modelos de vigas uniformes. As quatro teorias são: Euler-Bernoulli, Rayleigh, cisalhamento e Timoshenko.

Na formulação de certa classe de elementos para análise estrutural há um problema patológico, que ocorre mesmo quando os elementos satisfazem os requisitos de completude e continuidade. Esse problema é chamado de travamento, que ocorre em uma variedade de problemas estruturais, como o travamento de cisalhamento em vigas de Timoshenko e placas de Mindlin, travamento de membrana, etc.. Algumas técnicas foram criadas para contornar esse problema. Mukherjee e Prathap (2001) revisaram o

paradigma de consistência de campo para projeções que mostra o comportamento de travamento. Eles utilizaram o caso de viga de Timoshenko como exemplo ilustrativo.

Fórmulas assintóticas são derivadas para os autovalores de uma viga de Timoshenko com extremidade livre que tem densidade de massa variável e parâmetros de viga constantes. A maneira como essas fórmulas mostram as frequências naturais da viga e dependem dos parâmetros materiais e geométricos que aparecem como coeficientes nas equações diferenciais de vigas de Timoshenko, tal como mostrado por Geist e McLaughlin (2001).

O trabalho de Mukherjee, Reddy e Krishnamoorthy (2001) utilizou uma abordagem de tensão assumida para derivar um elemento superconvergente de viga de Timoshenko. Os autores propuseram um método de formulação de campo de referência a partir do qual derivadas pontuais de alta ordem podem ser derivadas para este elemento e provas teóricas foram apresentadas. Eles mostraram também que quando a discretização uniforme é adotada a ordem de convergência pode ser pelo menos duas ordens maiores do que o campo derivado de elemento finito.

As expressões exatas para a equação de frequência e modos de vibrar, para vigas compostas de Timoshenko engastadas-livres foram derivadas em forma analítica explícita usando computação simbólica por Banerjee (2001).

O problema de vibrações livres em vigas de Timoshenko foi abordado por Hoefel (2002) que desenvolveu uma formulação do Método dos Elementos Compostos para esse problema. A autora também analisou a influência da inércia rotacional e da deformação de cisalhamento na precisão do método.

Foi apresentada por Antes (2003) uma descrição da equação integral para todos os estados relevantes, a deflexão, a rotação, o momento fletor e as forças de cisalhamento é derivada de uma viga de Timoshenko.

Zietsman, Rensburg e Merwe (2004) consideraram o efeito do amortecimento no contorno em uma viga de Timoshenko em balanço com um corpo rígido preso à extremidade livre, utilizando o MEF para calcular os autovalores e os modos de vibração. Os autores utilizaram funções cúbicas de Hermite para as simulações numéricas. As funções de base lineares são funções de base admissíveis, contudo, com o seu uso ocorre o travamento, isto é, uma convergência extremamente lenta.

Uma análise baseada no método pseudoespectral de Chebyshev foi utilizada por Lee e Schultz (2004) para o estudo da vibração livre de vigas de Timoshenko e placas de Mindlin axissimétricas.

Uma forma de se obter soluções precisas é fazendo o uso de matrizes de elementos espectrais dependentes de frequência (ou matriz de rigidez dinâmica exata), enquanto se reduz o número de graus de liberdade para resolver os problemas compu-

tacionais. Assim Lee, Kim e Oh (2004) formularam um modelo de elemento espectral para uma viga de Timoshenko em movimento axial sob uma tensão uniforme.

A condição necessária e suficiente para garantir a existência de frequências naturais duplas para um viga uniforme de Timoshenko com condições de contorno livre-livre foi verificada no trabalho de Bihuna (2005). A autora também verificou se há a possibilidade de se obter esta mesma condição quando é utilizada a base dinâmica para obter a solução desse modelo.

Nascimento (2005) utilizou como base do processo  $p$ -adaptativo uma versão de MEF. O autor aplicou esse processo na resolução do problema dinâmico de vigas. O elemento finito isoparamétrico de dois nós foi utilizado para a aproximação do primeiro nível, utilizando funções de interpolação lineares. Refinamentos hierárquicos sucessivos foram utilizados, acrescentando funções de segundo, terceiro e quarto graus, para se obter os outros níveis de aproximação.

Uma abordagem sistemática para resolver os problemas de autovalores associados ao modelo de viga de Timoshenko foi apresentada por Rensburg e Merwe (2006). Foram discutidas as propriedades das frequências e modos naturais, por exemplo, autovalores duplos, estimativas para autovalores pequenos e grandes, significado de parâmetros adimensionais e de modo notáveis.

A formulação do modelo de Timoshenko foi desenvolvida para vigas elásticas, e são feitas aplicações para o caso de plataformas *offshore* e nanotecnologia. Costa (2006) determinou para os exemplos as frequências naturais e autofunções. A autora também modelou uma proposta de extensão à teoria de Timoshenko, a partir das teorias Euler-Bernoulli e de Rayleigh, baseada no comportamento de estruturas flexíveis *offshore*.

Os modelos estruturais de Euler-Bernoulli e de Timoshenko foram abordados por Klein (2006) fazendo o uso da teoria de semigrupos de operadores fortemente contínuos. A autora também realizou um estudo do espectro do modelo de Timoshenko com o uso de uma base fundamental de valor inicial para a determinação das autofunções. Para a equação característica dos autovalores foi realizada uma expansão para o caso de condições de contorno clássicas.

Uma viga de Timoshenko elástica submetida a forças concentradas em movimento foi analisada no trabalho de Lou, Dai e Zeng (2007), que apresentaram formulações de elementos finitos para esse modelo de viga. Esse método pode analisar a resposta dinâmica para vigas de Timoshenko ou Euler-Bernoulli com várias condições de contorno submetidas a forças concentradas em movimento.

Jafarali et al. (2007) demonstraram a discretização por elementos finitos do elemento de viga de Timoshenko de dois nós para elastodinâmica, o que oferece uma

compreensão muito interessante sobre os aspectos de análise de erros da formulação. Os autores introduziram algum grau de incorreção variacional para tornar o elemento livre de travamento.

A análise dinâmica de modelos de vigas infinitos foi analisado por Ruge e Birk (2007). A rigidez dinâmica translacional e rotacional das vigas de Timoshenko e Euler-Bernoulli sob fundação de Winkler são derivadas e comparados no domínio da frequência. A situação da fundação elástica foi incluída como um caso especial.

Uma fundação ou tipo de amortecimento foi representado no trabalho de Souza e Mendonça (2008) utilizando a teoria de Timoshenko a uma viga apoiada sobre uma base elástica. Essa maneira de analisar o modelo de Timoshenko exige que hajam alterações na equação diferencial governante da deflexão, assim como, na solução fundamental do sistemas de equações.

Uma nova abordagem unificada foi apresentada por Li (2008) para analisar os comportamentos estáticos e dinâmicos de vigas funcionalmente graduadas. Essa abordagem reduz as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e Rayleigh da teoria de viga de Timoshenko, no qual uma única equação diferencial parcial governante de quarta ordem é derivada. O método sugerido também foi aplicado a vigas de Timoshenko em camadas.

O trabalho de Ozgumus e Kaya (2008) realizou a análise de vibração livre de uma viga de Timoshenko rotativa, duplamente cônica, que sofre vibração de flexão. Para isso o método matemático utilizado para resolver as equações diferenciais de movimento foi o Método de Transformação Diferencial.

A vibração livre e forçada de uma viga laminada funcionalmente graduada de espessura variável sob tensões iniciais induzidas termicamente foi estudada no trabalho de Xiang e Yang (2008) dentro da estrutura da teoria de viga de Timoshenko. Para incluir o efeito da mudança de temperatura, o estado inicial de tensão foi determinado através de uma análise termoelástica antes das análises de vibração livre e forçada. O método de quadratura diferencial que faz uso de polinômios de interpolação de Lagrange foi empregado como uma ferramenta de solução numérica para resolver tanto a equação de equilíbrio termo-elástica quanto a equação dinâmica.

As frequências naturais, modos e velocidades críticas de vigas de Timoshenko com movimento axial em diferentes suportes foram analisadas no trabalho de Tang, Chen e Yang (2008), que utilizaram a abordagem do modo complexo para resolver as expressões. Os mesmos autores apresentaram a análise de vibrações não-lineares sob excitações externas fracas e fortes de vigas móveis, utilizando a abordagem do modo complexo (TANG; CHEN; YANG, 2009).

Outra maneira de resolver o problema de análise de vibração livre de vigas de

Timoshenko com várias combinações de condição de contorno foi realizada por Xu e Wang (2011) utilizando a Convolução Singular Discreta.

No trabalho de Jiang (2011), o método da matriz de raios de reverberação foi apresentado para investigar as respostas dinâmicas de uma viga de Timoshenko não amortecida sujeita a uma massa em movimento. A massa em movimento foi simplificada em uma força móvel e uma massa concentrada fixa no meio da extensão da viga. Duas coordenadas locais duplas são introduzidas.

O trabalho de Su e Ma (2012) aplicou duas abordagens analíticas, métodos de transformada de Laplace e modo normal, para investigar a resposta transiente dinâmica de uma viga engastada-livre de Timoshenko submetida a forças de impacto. Além disso, um modelo tridimensional de viga engastada-livre foi implementado. Os resultados foram comparados com as respostas transientes para deslocamento, tensão normal, tensão de cisalhamento e as frequências de ressonância de uma viga de Timoshenko e de Bernoulli-Euler.

Almeida (2012) apresentou um trabalho comparativo entre as frequências naturais de diferentes modelos de vigas. Ele realizou o estudo dinâmico de vigas escalonadas utilizando as formulações de Euler-Bernoulli, Rayleigh, Cisalhamento e Timoshenko, com diferentes condições de apoios elásticos e seções variando na forma e na dimensão.

Um novo elemento finito de dois nós foi sugerido por Moallemi-Oreh e Kar-kon (2013) para analisar a estabilidade e a vibração livre de vigas de Timoshenko. Foram selecionados para este elemento campos rotacionais de deslocamento cúbico polinomial e quadrático.

A resolução do problema de vibrações livres de uma viga não uniforme que transporta um número qualquer de elementos concentrados foi feita a partir do Método de Matriz de Transferência de Massa Contínua. O trabalho de Wu e Chang (2013) apresentou uma formulação simples desse método para vigas de Timoshenko.

As vigas funcionalmente graduadas foram estudadas novamente por Pradhan e Chakraverty (2013). Os autores realizaram uma investigação de vibração livre de vigas submetidas a diferentes conjuntos de condições de contorno. A análise foi feita com base nas teorias de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko. O trabalho teve como objetivo estudar os efeitos das frações de volume constituintes, as razões de esbeltez e as teorias de vigas sobre as frequências naturais.

Em Inch (2013) foram estudados vários aspectos sobre os efeitos do amortecimento e da deformação cisalhante na estabilidade dinâmica de vigas e tubos. Para as vigas foram comparados os resultados obtidos das vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, na qual são consideradas várias alternativas para a aplicação do



amortecimento proporcional e viscoelástico.

A abordagem de análise isogeométrica foi utilizada no artigo de Weeger, Wever e Simeon (2013) para a análise de vibrações de estruturas não lineares.

A análise de vibrações de vigas de Timoshenko danificadas e geometricamente não lineares foi realizada com um novo elemento finito de versão  $p$ . O novo elemento foi sugerido por Stojanović, Ribeiro e Stoykov (2013). A novidade desse elemento vem do uso de novas funções de forma de deslocamento, que são função dos locais do dano e, portanto, fornecem modelos mais eficientes.

Um estudo sobre o problema do segundo espectro de frequências no modelo de Timoshenko para uma viga bi-apoiada foi realizado no trabalho de Tolfo (2013). A resolução da equação característica deste modelo permite que sejam determinados dois autovalores, o de menor módulo está associado ao valor predito pela teoria de Euler-Bernoulli, enquanto o de maior módulo é usualmente referido como sendo do segundo espectro.

A abordagem isogeométrica foi utilizada para realizar a análise de vibração livre de vigas de Timoshenko. Lee e Park (2013) utilizaram três esquemas de refinamento,  $h$ ,  $p$  e  $k$ , na análise e identificação do travamento de cisalhamento. Com funções de base de ordem superior, os autores observaram que não há o fenômeno de travamento de cisalhamento.

Uma solução exata para as vibrações transversais livres de uma viga de Timoshenko transportando múltiplas massas concentradas arbitrárias em qualquer ponto da viga com várias condições de contorno foi obtida por Torabi, Jazi e Zafari (2014). Outra solução exata foi obtida por Tang et al. (2014), para a vibração livre de vigas funcionalmente graduadas analisadas através da teoria de vigas de Timoshenko. Adámek e Valeš (2015) apresentaram uma solução analítica para a resposta dinâmica de uma viga de Timoshenko heterogênea simplesmente apoiada.

Um elemento finito foi proposto por Alotta, Failla e Zingales (2014) para um modelo de viga de Timoshenko não local. Esse modelo tem como ideia chave de que os efeitos não locais consistem em forças de volume e momentos de longo alcance que contribuem para o equilíbrio de um segmento de viga juntamente com as resultantes de tensão locais clássicos. No trabalho o modelo de vigas foi reformulado dentro de uma base variacional envolvendo um funcional energético potencial elástico total consistente.

Outro elemento finito para vigas de Timoshenko foi apresentado no trabalho de Lepe, Mora e Rodríguez (2014). Os autores consideraram uma formulação mista para o elemento em termos de deslocamento transversal, rotação, tensão de cisalhamento e momento fletor.

A vibração livre de vigas de Timoshenko funcionalmente graduadas foi investigada por Su e Banerjee (2015) a partir do desenvolvimento do método de rigidez dinâmica. Outro artigo que analisa a resposta dinâmica deste tipo de vigas foi o trabalho de Wattanasakulpong e Mao (2015), que utilizaram o Método da Colocação de Chebyshev para resolver o problema de vibração. O modelo de vigas de Timoshenko funcionalmente graduadas foi também estudado por Ebrahimi e Zia (2015). Os autores estudaram as vigas feitas de material poroso.

Um modelo de viga super-convergente de Timoshenko foi melhorado por Tai e Chan (2016). Os autores adicionaram funções de forma hierárquicas de alta ordem usando polinômios de Legendre, e termos de correção que foram adicionados enquanto foi necessário.

O trabalho de Calim (2016) realizou a análise transiente de vigas de Timoshenko funcionalmente graduadas na direção axial com seção transversal variável. Na análise, as influências de inércia rotacional e deformação de cisalhamento foram levadas em consideração. O método das funções complementares foi aplicado para resolver as equações diferenciais no domínio de Laplace.

O desenvolvimento completo e a análise de vigas de Timoshenko para vibrações transversais de uma viga uniforme com suportes elásticos foram apresentados no trabalho de Azevêdo, Vasconcelos e Hoefel (2016). Um elemento de viga com dois nós e dois graus de liberdade em cada nó foi obtido com base no princípio de Hamilton.

As vigas de Timoshenko funcionalmente graduadas foram discutidas mais uma vez por Hao e Wei (2016), que estabeleceu as equações diferenciais de movimento usando o princípio de Hamilton. As propriedades do material da viga variam exponencialmente nas direções axial e de espessura.

Os métodos de elementos finitos enriquecidos são abordados pela primeira vez na análise de vibração livre de modelos de vigas de Timoshenko por Hsu (2016). O autor empregou duas diferentes abordagens de elementos finitos enriquecidos. Uma foi utilizando as funções de Lobatto para a aproximação hierárquica no contexto do Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH). E a outra, as funções de forma de Lagrange para o MPU, e a aproximação de espaço local é construída usando funções trigonométricas no contexto do MEFG.

O desenvolvimento completo e análise de vigas de Timoshenko para vigas uniformes com vibração transversal foram apresentados para as condições de contorno clássicas no trabalho de Vasconcelos, Azevêdo e Hoefel (2016). Os autores também desenvolveram um elemento finito com dois nós e dois graus de liberdade em cada nó em termos de parâmetros adimensionais de rotação e cisalhamento.

Foi realizado um estudo teórico sobre o comportamento da vibração livre de



vigas com material funcionalmente graduado e pré-tensionadas por Paul e Das (2016). As vigas funcionalmente graduadas foram estudadas também por Jing et al. (2016), que utilizou a combinação do Método de Volume Finito e a teoria de vigas de Timoshenko para analisar a estática e a vibração livre das vigas funcionalmente graduadas.

Shi et al. (2016) investigaram a vibração transversal de vigas de Timoshenko livres de carga, e concentraram a massa em duas extremidades. Um elemento de viga unificado usando formulação corrotacional foi descrito por Silva, Cunha e Gutiérrez (2017). Esse elemento integrou as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko e não apresenta travamento por deformação de cisalhamento. O método de desenvolvimento assintótico foi utilizado por Lenci, Clementi e Rega (2017) para investigar as oscilações livres não-lineares de vigas de Timoshenko.

A questão da aproximação de frequências mais altas foi abordado por Freisleben et al. (2017), que realizaram a análise dinâmica dos problemas de vigas de Timoshenko com o MEFG. Outra abordagem para encontrar as frequências das vigas de Timoshenko foi abordada por Freisleben et al. (2018), que utilizaram três diferentes enriquecimentos de MEFG em um único modelo de viga.

No artigo de Norouzzadeh e Ansari (2017) foi apresentada uma análise de elementos finitos de nano-vigas de Timoshenko com base no modelo integral da teoria do contínuo não-local, sem que fossem empregados quaisquer simplificações no modelo.

A Análise Isogeométrica foi utilizada para o estudo de deslocamentos de vigas de Timoshenko engastadas em Praciano et al. (2017), que utilizaram diferentes tipos de cargas, variando a relação comprimento/espessura das peças, o refinamento da malha e a ordem de aproximação polinomial das funções B-Splines.

No artigo de Arvin (2017) foi apresentada uma nova formulação para as vigas micro rotativas, baseada na teoria do gradiente de deformações e nas suposições dos modelos de vigas de Timoshenko e Euler-Bernoulli.

Foram identificadas por Zhang (2017) três frequências críticas independentes das condições de contorno, juntamente com um comprimento crítico, que determinam os comportamentos de vibração de uma viga de Timoshenko não local.

As vigas de Timoshenko funcionalmente graduadas bidirecionais foram investigadas novamente em Huynh, Lieu e Lee (2017), que utilizaram uma extensão do método de análise isogeométrica para a descrição da propriedade do material e para investigar as características de vibração livre da viga.

Um novo elemento finito de viga de Timoshenko generalizado com funções de forma de ordem superior foi proposto por (BITAR et al., 2018) para simular falhas estruturais. Foi adotada no nível do elemento, uma descontinuidade de rotação embutida

para descrever o desenvolvimento de rótulas plásticas e abertura de fissuras.

O artigo de Hoang, Duhamel e Foret (2018) apresentou um novo modelo de viga de Timoshenko, periodicamente apoiado, submetido a forças móveis com suportes não lineares. Já o trabalho de Navadeh, Hewson e Fallah (2018) apresentou uma avaliação da resposta dinâmica de uma viga de Timoshenko engastada homogênea, não prismática e carregada por pulso.

Uma formulação do MEF foi apresentada por Kim e Cha (2018) para uma viga de Timoshenko sujeita a movimentos dependentes do tempo espacialmente diferentes nos suportes. Os autores utilizaram o conceito de decomposição "*quasi-static*" e um elemento livre de travamento isoparamétrico de três nós para realizar a formulação.

Balobanov e Niiranen (2018) apresentou o problema de curvatura de vigas de Timoshenko formulado no contexto da elasticidade do gradiente de deformação para análises estáticas e dinâmicas. Foram apresentadas duas formulações variacionais não padronizadas na estrutura espacial de Sobolev a fim de evitar o efeito numérico de travamento de cisalhamento pronunciado no contexto do gradiente de deformação.

A dinâmica paramétrica supercrítica não-linear de uma micro-viga de Timoshenko sujeita a uma força de excitação harmônica axial foi examinada teoricamente, por Farokhi e Ghayesh (2018), por meio de diferentes técnicas numéricas, que empregou uma análise de alta dimensionalidade.

Banerjee e Ananthapuvirajah (2019) desenvolveram uma matriz de rigidez dinâmica exata para uma viga, integrando a teoria de Rayleigh-Love para vibração longitudinal na teoria de Timoshenko para a vibração de flexão.

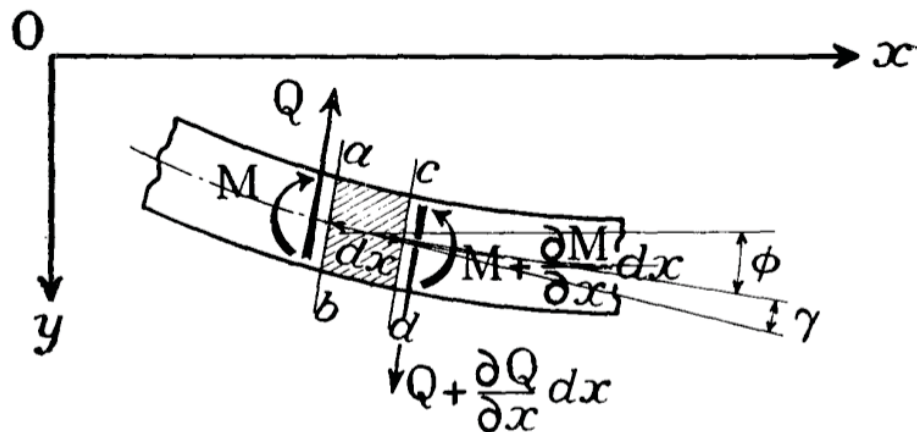
Há uma grande quantidade de trabalhos que realizam a análise dinâmica de vigas de Timoshenko. Para este trabalho foi escolhido, dentre diversos elementos finitos de Timoshenko, um elemento simples, com 4 graus de liberdade, apresentado no trabalho de Hsu (2016). Dessa forma é possível analisar a influência de cada enriquecimento sobre o elemento ao se aplicar o MEFG.

### 3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA PARA VIGA DE TIMOSHENKO

Este capítulo inicia apresentando a formulação das vigas de Timoshenko, partindo de um diagrama de corpo livre de um elemento de viga. Na sequência apresenta a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para a viga de Timoshenko, baseada na formulação apresentada por Hsu (2016). Então é apresentada a formulação do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Por fim, são mostradas as funções utilizadas no trabalho, as funções de forma, funções partição da unidade e as funções de enriquecimento.

Considerando um elemento de uma viga de comprimento,  $dx$ , mostrado na Figura 1, observa-se uma força transversal de cisalhamento,  $Q$ , e um momento fletor,  $M$ , atuando na face esquerda. Ambas as grandezas variam ao longo do comprimento da viga,  $x$ , e com o tempo,  $t$ ,  $Q = Q(x, t)$  e  $M = M(x, t)$  (LEISSA; QATU, 2011).

FIGURA 1 – DIAGRAMA DE CORPO LIVRE DE UM ELEMENTO DE VIGA.



FONTE: (TIMOSHENKO, 1921).

A posição do elemento durante a vibração será determinada pelo deslocamento do seu centro de gravidade e pela rotação,  $\phi$ , no plano  $(x, y)$ . O eixo  $Ox$  pode ser tomado como coincidente com a posição inicial do eixo da viga. O ângulo que se forma a partir da tangente à curva na qual o eixo da viga é dobrado (a curva de deflexão), será a soma do ângulo  $\phi$  com o ângulo de cisalhamento,  $\gamma$  (TIMOSHENKO, 1921). Assim, para deflexões muito pequenas, pode ser escrito

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \phi + \gamma. \quad (3.1)$$

Para determinar  $Q$  e  $M$  temos as expressões, mostradas por Timoshenko (1921)

$$Q = k_s GA \gamma = k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right), \quad (3.2)$$

$$M = -EI \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (3.3)$$

sendo  $k_s$  o fator de correção de cisalhamento,  $G$  o módulo de elasticidade transversal,  $A$  a área da seção transversal,  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal e,  $I$  o momento de inércia.

A equação de movimento para rotação será

$$M - M - \frac{\partial M}{\partial x} dx + Q dx = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dx, \quad (3.4)$$

$$-\frac{\partial M}{\partial x} dx + Q dx = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dx. \quad (3.5)$$

Substituindo as Equações 3.2 e 3.3 na Equação 3.5, para  $E$  e  $I$  constantes ao longo da viga, obtém-se

$$EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right) - \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.6)$$

A equação de translação na direção do eixo  $Oy$  é dada por

$$-Q + Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx. \quad (3.8)$$

Substituindo as Equações 3.2 e 3.3 na Equação 3.8, obtém-se

$$k_s GA \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (3.9)$$

### 3.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Será utilizada a abordagem apresentada no trabalho de Hsu (2016) para obter as matrizes de massa e rigidez do MEF.

Considerando a equação de equilíbrio dinâmico na análise de vibração livre para vigas de Timoshenko, baseado no princípio do trabalho virtual, a forma fraca da equação pode ser escrita como (LEE; PARK, 2013):

$$\int_0^l EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \int_0^l k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right) \delta \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right) dx = \int_0^l \delta y \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx + \int_0^l \delta \phi \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dx, \quad (3.10)$$

onde  $\delta$  denota que os termos são virtuais.

A discretização da Equação 3.10 pode ser feita por um elemento finito linear unidirecional, com dois nós e dois graus de liberdade em cada nó, deslocamento transversal e rotação. A solução aproximada no campo de deslocamentos é dada por

$$\bar{y}^h(x) = \sum_{i=1}^n y_i \gamma_i(x), \quad (3.11)$$

$$\bar{\phi}^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i \gamma_i(x). \quad (3.12)$$

Considerando a coordenada natural  $\xi = [-1, 1]$  no elemento de domínio, a solução aproximada no campo de deslocamentos pode ser expressa usando funções de forma lineares

$$y(\xi) = y_1 \gamma_1(\xi) + y_2 \gamma_2(\xi), \quad (3.13)$$

$$\phi(\xi) = \phi_1 \gamma_1(\xi) + \phi_2 \gamma_2(\xi). \quad (3.14)$$

Elas podem ser expressas na forma matricial:

$$y(\xi) = [H_y] \{w\}, \quad (3.15)$$

$$\phi(\xi) = [H_\phi] \{w\} \quad (3.16)$$

onde  $[H_y]$  é a matriz de funções de forma de deslocamentos,  $[H_\phi]$  é a matriz de funções de forma de rotações e  $\{w\}$  é o vetor de deslocamentos nodais

$$[H_y] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$[H_\phi] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

e

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.19)$$

Após substituir as Equações 3.11 e 3.12 na Equação 3.10, é possível determinar as matrizes de massa,  $[M^e]$  e rigidez no domínio do elemento,  $[k^e]$ ,

$$[k^e] = \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi, \quad (3.20)$$

$$[M^e] = \int_{-1}^1 (\rho A) [H_y]^T [H_y] |J| d\xi + \int_{-1}^1 (\rho I) [H_\phi]^T [H_\phi] |J| d\xi, \quad (3.21)$$

onde  $[B]$  é a matriz de deformações,  $[D]$  é a matriz constitutiva e  $|J|$  é o determinante do jacobiano, dados por:

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{|J|} \left( \frac{d\gamma_1}{d\xi} \right) & 0 & \frac{1}{|J|} \left( \frac{d\gamma_2}{d\xi} \right) \\ \frac{1}{|J|} \left( \frac{d\gamma_1}{d\xi} \right) & -\gamma_1 & \frac{1}{|J|} \left( \frac{d\gamma_2}{d\xi} \right) & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & k_s GA \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Após apropriadas manipulações algébricas na Equação 3.10 e considerando que o vetor de deslocamentos nodais pode ser expresso por  $u = \Phi_n e^{i\omega_n t}$ , a Equação 3.10 pode ser expressa como um problema de autovalores de matriz quadrática

$$[\mathbf{K} - \lambda_n^2 \mathbf{M}] \Phi_n = 0, \quad (3.24)$$

onde  $\lambda_n$  são as frequências naturais e  $\Phi_n$  são os modos de vibrar.

As frequências obtidas a partir da Equação 3.24 serão adimensionalizadas com a Equação

$$\omega_n^2 = \lambda_n l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad (3.25)$$

onde  $\omega_n$  são as frequências naturais aproximadas.

No Apêndice A será apresentada a abordagem utilizada no trabalho de Zietsman, Rensburg e Merwe (2004), esta abordagem utiliza o Método de Galerkin. As abordagens de Hsu (2016) e Zietsman, Rensburg e Merwe (2004) podem ser ditas equivalentes, pois as matrizes de massa e rigidez são similares, como pode ser visto no Apêndice B.

### 3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

Os espaços matemáticos do MEEG são construídos considerando uma partição da unidade, sua definição é apresentada na Definição 1. Segundo Strouboulis, Babuška e Capps (2000) dado um conjunto de subdomínios ou coberturas sobrepostos  $\{\Omega_i\}$  e um conjunto de funções com propriedades de aproximação desejáveis associadas a cada cobertura  $\Psi_i = \{\psi_j^{(i)}\}$  é definida, a solução aproximada do Método da Partição da Unidade sobre um domínio  $\Omega$  é definida como:

$$y_{MPU} = \sum_i \eta_i(\xi) \left( \sum_j a_j^{(i)} \psi_j^{(i)}(\xi) \right), \quad (3.26)$$

onde  $\psi_j^{(i)}$  são as funções especiais do conjunto  $\Psi_i$ . O espaço  $\Psi_i$  é chamado de espaço de cobertura, e  $a_j^{(i)}$  são coeficientes constantes. A sequência de funções  $\{\eta_i\}$  é uma partição da unidade  $C^0$  em  $\Omega$  e serve para reforçar a continuidade.

A partição pode ser construída de qualquer maneira desde que satisfaça a Definição 1. As coberturas  $\{\Omega_i\}$  e cada membro associado da sequência  $\{\eta_i\}$  devem satisfazer a Definição 1.

**Definição 1** (Partição da Unidade)  $C^0$  é uma partição da unidade subordinada a cobertura  $\{\Omega_i\}$ , sendo  $\{\Omega_i\}$  uma cobertura aberta de  $\Omega$ , se

$$\eta_i \in C^0 \quad \forall i, \quad (3.27)$$

$$\text{sup}(\eta_i) \subset \text{fechamento}(\Omega_i) \quad \forall i, \quad (3.28)$$

$$\sum_i \eta_i \equiv 1 \text{ em } \Omega, \quad (3.29)$$

$$\|\eta_i\|_{L^\infty} \leq C_\infty, \quad (3.30)$$

$$\|\nabla \eta_i\|_{L^\infty} \leq \frac{C_G}{\text{diam}(\Omega_i)}. \quad (3.31)$$

O MPU permite, dessa forma, que seja construído um espaço de aproximação com regularidade desejada, independente dos espaços de aproximações locais, preservando, assim, as propriedades desses espaços. Essa aproximação por MPU combinada com o habitual espaço linear de MEF é o método apresentado por Strouboulis, Babuška e Copps (2000), o MEFG. A aproximação da solução proposta pelo MEFG no domínio do elemento mestre pode ser escrito como combinação das componentes (ARNDT et al., 2014):

$$y^h(\xi) = y_{MEF}^h + y_{MEFG}^h. \quad (3.32)$$

### 3.3 FUNÇÕES UTILIZADAS

Para os exemplos onde não haverá o enriquecimento serão utilizadas como funções de forma, as funções lineares de Legendre. São elas

$$\gamma_1 = \frac{1 - \xi}{2}, \quad (3.33)$$

$$\gamma_2 = \frac{1 + \xi}{2}, \quad (3.34)$$

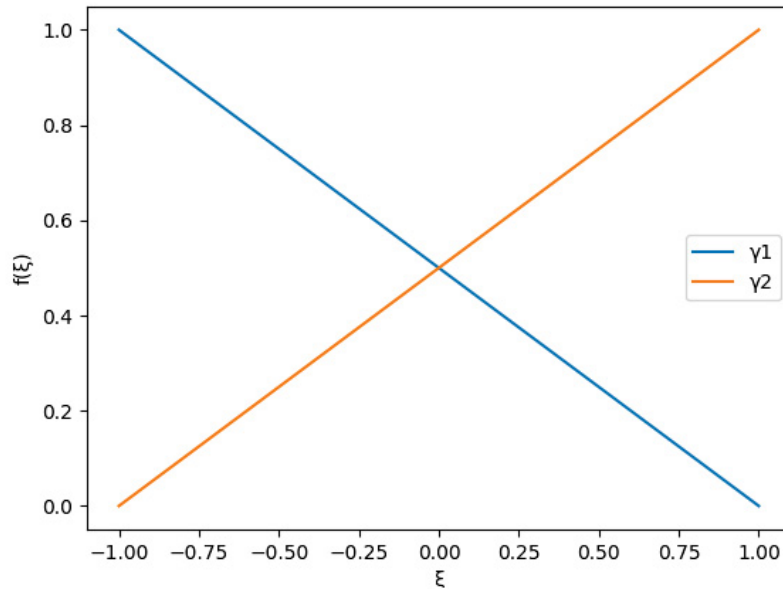
com domínio  $\xi = [-1, 1]$ .

Como dito anteriormente a aproximação da solução é uma combinação de componentes apresentada na Equação 3.32. A componente de MEF é dada então por:

$$y_{MEF}^h(\xi) = \sum_{i=1}^2 \gamma_i(\xi) y_i \quad (3.35)$$

As funções lineares de Legendre também formam uma partição da unidade, como pode ser observado na Figura 2. Portanto também serão utilizadas estas funções como partição da unidade.

FIGURA 2 – FUNÇÕES DE LOBATTO.



Assim

$$\eta_1 = \frac{1 - \xi}{2}, \quad (3.36)$$

$$\eta_2 = \frac{1 + \xi}{2}. \quad (3.37)$$

Este trabalho irá apresentar três diferentes conjuntos de funções enriquecedoras. O primeiro conjunto de funções enriquecedoras foi apresentado por Arndt (2009) para barras. No estudo de Torii (2012) foi retirado o tamanho do elemento de dentro da formulação proposta por Arndt (2009) e Weinhardt (2016) apresenta uma modificação no parâmetro  $\beta_j$ . O enriquecimento é dado pelas Equações 3.38 a 3.41, exibidas a seguir na forma:

$$\psi_{1j} = \text{sen}(\beta_j(\xi + 1)), \quad (3.38)$$

$$\psi_{2j} = \text{sen}(\beta_j(\xi - 1)), \quad (3.39)$$

$$\phi_{1j} = \cos(\beta_j(\xi + 1)) - 1, \quad (3.40)$$

$$\phi_{2j} = \cos(\beta_j(\xi - 1)) - 1, \quad (3.41)$$

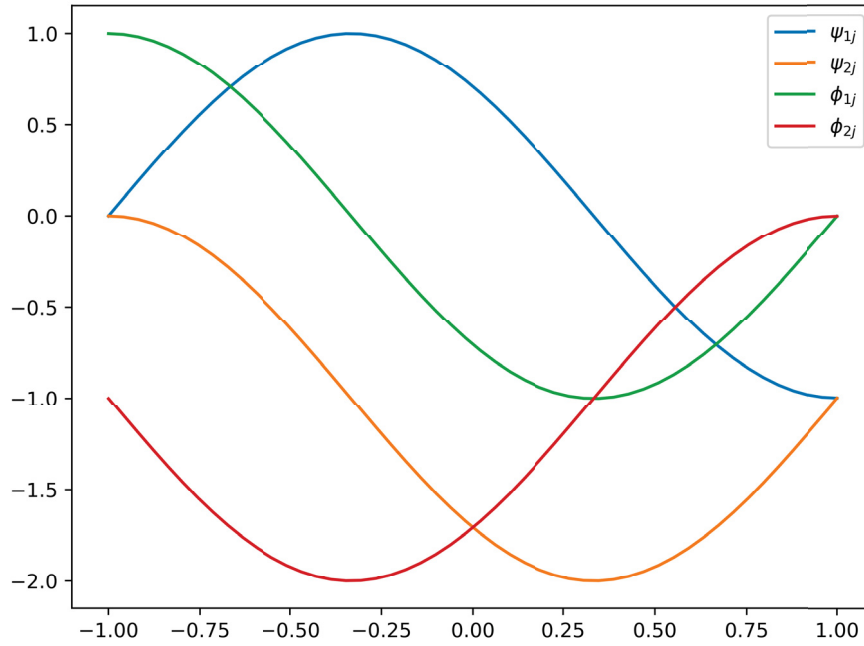


onde o parâmetro  $\beta_j$  com  $j = 1, 2, 3, \dots, m$  e  $m$  é o número de níveis de enriquecimento, é dado por:

$$\beta_j = \pi \left( 2(j-1) + \frac{3}{4} \right). \quad (3.42)$$

A Figura 3 ilustra as funções de enriquecimento de Arndt (2009) para barras.

FIGURA 3 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO DE ARNDT (2009) PARA BARRAS.



A componente de MFG da Equação 3.32 para esse enriquecimento, é dada por:

$$y_{MEFG}^h = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) \left[ \sum_{j=1}^m (\psi_{ij}(\xi) a_{ij} + \phi_{ij} b_{ij}) \right], \quad (3.43)$$

onde  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  são os graus de liberdade de campo.

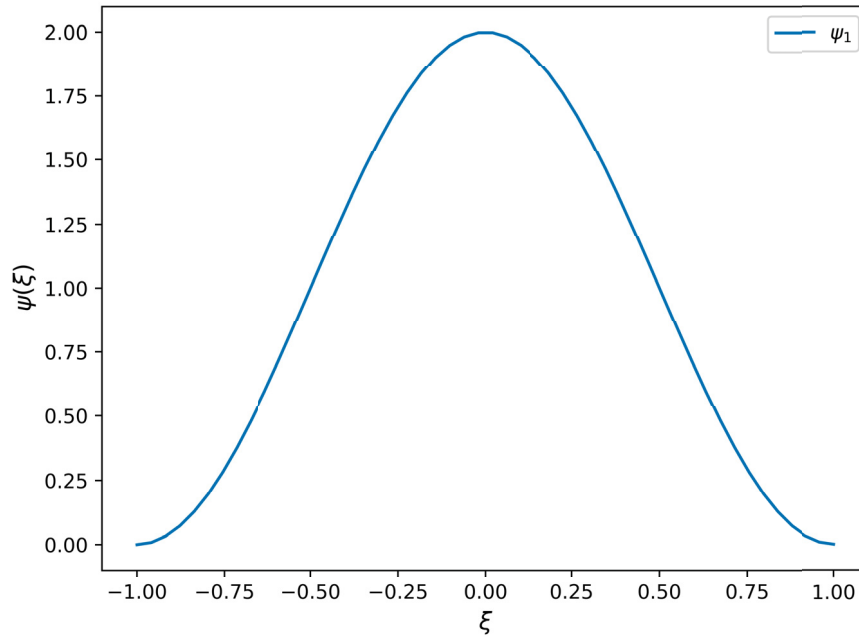
O próximo conjunto de funções enriquecedoras que será utilizado no trabalho também foi apresentado por Arndt (2009) para a resolução de problemas de vigas de Euler-Bernoulli. Ele é dado por:

$$\psi_{1j} = \cos \left( \frac{(j-1)\pi(\xi+1)}{2} \right) - \cos \left( \frac{(j+1)\pi(\xi+1)}{2} \right), \quad (3.44)$$

onde  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ .

A Figura 4 ilustra as funções de enriquecimento de Arndt (2009) para vigas.

FIGURA 4 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO DE ARNDT (2009) PARA VIGAS.



A componente de MFG da Equação 3.32 para esse enriquecimento, é dada por:

$$y_{MEFG}^h = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) \left[ \sum_{j=1}^m \psi_{1j}(\xi) a_{ij} \right]. \quad (3.45)$$

Por fim, o terceiro enriquecimento que será utilizado neste trabalho é o apresentado por Hsu (2016), dado por:

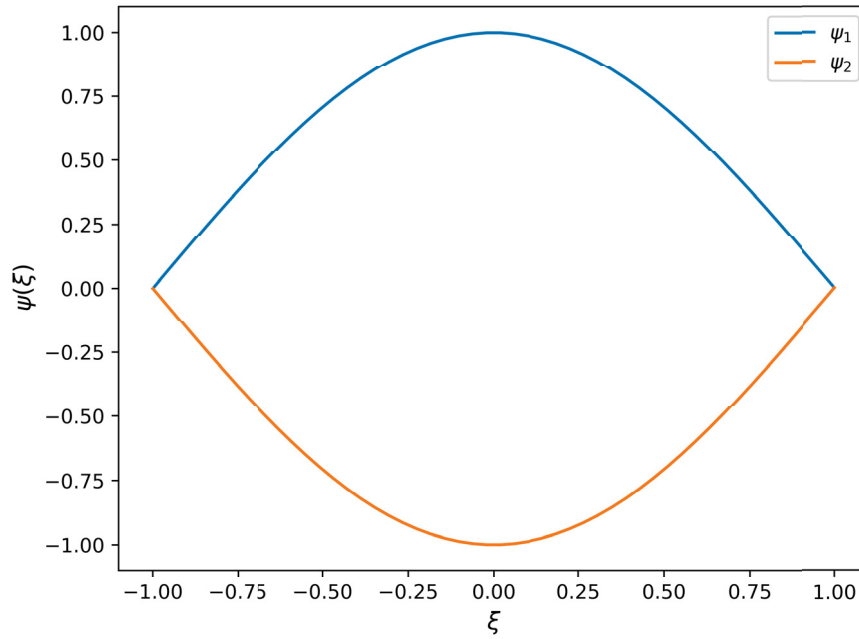
$$\psi_{1j} = \text{sen} \left( \frac{\beta_j(\xi + 1)}{2} \right), \quad (3.46)$$

$$\psi_{2j} = \text{sen} \left( \frac{\beta_j(\xi - 1)}{2} \right), \quad (3.47)$$

sendo para esse caso  $\beta_j = j\pi$ , com  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ .

A Figura 5 ilustra as funções de enriquecimento de Hsu (2016).

FIGURA 5 – FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO DE HSU (2016).



A componente de MCFG da Equação 3.32 para esse enriquecimento, é dada por:

$$y_{MEFG}^h = \sum_{i=1}^2 \eta_i(\xi) \left[ \sum_{j=1}^m \psi_{ij}(\xi) a_{ij} \right]. \quad (3.48)$$

## 4 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo serão apresentadas as aplicações numéricas da teoria mostrada nos capítulos anteriores. Os primeiros exemplos apresentados são de análise modal que tem como um dos seus objetivos principais obter as frequências de vibração de uma estrutura através da solução de um problema de autovalores como:

$$[\mathbf{K} - \lambda^2 \mathbf{M}] \Phi_n = 0, \quad (4.1)$$

enquanto os demais exemplos apresentam as respostas da análise transiente das vigas de Timoshenko. Na análise transiente é necessário solucionar a equação não homogênea:

$$\mathbf{M} \ddot{w}(t) + \mathbf{K} w(t) = f(t), \quad (4.2)$$

onde  $f(t)$  é o vetor de cargas externas.

O conjunto de funções enriquecedoras apresentadas no capítulo anterior serão aplicadas no modelo de viga de Timoshenko. São realizadas análises modais e transientes da viga com diferentes condições de contorno e variando a sua relação altura/comprimento, comparando os diferentes enriquecimentos.

Em todos os exemplos as propriedades das vigas serão  $l = 1,0$ ;  $b = 1,0$ ;  $E = 1,0$ ;  $\rho = 1,0$ ;  $k_s = 5/6$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $G = E/(2(1 + \nu))$ ;  $A = bh$ ;  $I = (bh^3)/12$  e  $l_e = l/N_{elem}$ , onde  $b$  é a base da seção transversal da viga,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $h$  é a altura da seção transversal da viga e  $N_{elem}$  é o número de elementos.

As vigas de Timoshenko sofrem com o efeito de travamento, e para aliviar esse problema foi utilizada uma integração reduzida para as análises com MEF, utilizando a quadratura Gaussiana com ordem fixa de um ponto. Para as análises com MEFG o domínio do elemento foi dividido em 10 intervalos, com três pontos de integração numérica em cada intervalo.

### 4.1 ANÁLISE MODAL

Os resultados apresentados da análise modal serão os espectros de frequência, tabelas com as respostas de frequência, gráficos de convergência e por fim gráficos do número de condição das matrizes de massa e rigidez. Esses resultados são apresentados para as vigas bi-apoiada, engastada-livre e bi-engastada, com variação da relação altura/comprimento da viga.

Para as vigas bi-apoiada e bi-engastada serão utilizadas relações  $h/l$  com valores de 0, 2 e 0,002. Enquanto para a viga engastada-livre as relações  $h/l$  serão 0, 1 e 0,002, seguindo os exemplos expostos no trabalho de Hsu (2016).

Os resultados das frequências são apresentados pelos gráficos de espectro de frequência. Neles são exibidas as frequências resultantes com os três conjuntos de funções enriquecedoras para o MEEG e as frequências de MEF. A quantidade de frequências naturais a serem analisadas é igual a quantidade total de graus de liberdade. A nível de comparação são utilizados o mesmo número de graus de liberdade. A nível de comparação são utilizados os mesmos números de grau de liberdade.

O gráfico de espectro de frequência é obtido ao se realizar um processo de normalização das frequências naturais da estrutura estudada. O eixo vertical apresenta a relação entre as frequências naturais aproximadas ( $\omega_n$ ) e as frequências naturais de referência ( $\omega$ ). Enquanto o eixo horizontal representa a relação entre a ordem da frequência,  $n$ , e as frequências obtidas na análise (igual ao número total de graus de liberdade),  $N$ . Segundo Cottrell et al. (2006) esse gráfico deve ser invariante em relação ao tamanho do modelo ao se normalizar os espectros pelo número total de graus de liberdade. Como o gráfico é normalizado, quanto mais próximos estiverem os resultados da unidade melhor é a resposta, pois, como é uma relação entre as frequências encontradas com frequências de referência, significa então que a resposta é próxima à frequência de referência. A análise do espectro indica a quantidade de frequências confiáveis fornecidas em um modelo de elementos finitos. Essa quantidade é usualmente expressa em porcentagem do número total de graus de liberdade (HSU, 2016).

A solução analítica é difícil de se obter, portanto uma solução de referência utilizando MEF foi adotada. Levando em consideração que é possível aproveitar em torno de 20% das frequências geradas por MEF, foi adotado um modelo com 8000 graus de liberdade para que a quantidade de frequências com boa precisão que podem ser retirados desse modelo supere os obtidos com os exemplos.

Também será apresentada para cada exemplo uma tabela, com as 15 primeiras frequências, para que seja possível realizar a comparação entre os resultados obtidos pelo MEEG com os enriquecimentos com os resultados de diferentes autores e métodos. Para os exemplos das vigas bi-apoiadas serão apresentados os resultados obtidos com os três diferentes enriquecimentos, MEF, viga de Euler-Bernoulli (Teoria Clássica), Método Pseudoespectral (MPS) (LEE; SCHULTZ, 2004), e Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) (HSU, 2016). Enquanto para os exemplos das vigas engastada-livre e bi-engastadas serão apresentados os resultados obtidos pelo MEEG com os três diferentes enriquecimentos, MEF, viga de Euler-Bernoulli (Teoria Clássica), Análise Isogeométrica (LEE; PARK, 2013) e Método dos Elementos Finitos Hierárquicos

(MEFH) (HSU, 2016). As frequências apresentadas de MEFG serão as obtidas com o terceiro nível de enriquecimento, as de MEF serão retiradas da solução de referência, as de Euler-Bernoulli com MEF são resultados de uma subdivisão de 130 elementos, os resultados de Análise Isogeométrica (LEE; PARK, 2013) possuem 32 elementos e ordem  $p = 3$ , o MPS (LEE; SCHULTZ, 2004) possui 35 pontos de colocação e as frequências de MEFH (HSU, 2016) são retiradas quando são empregadas 6 funções enriquecedoras e 10 elementos.

Para poder avaliar a convergência dos diferentes enriquecimentos utilizados, e dessa forma comparar o desempenho e a taxa de convergência do conjunto de funções enriquecedoras, são apresentados os gráficos com a evolução dos erros relativos de algumas frequências. O valor do erro é obtido por (ARNDT, 2009):

$$erro = \frac{|\omega_n - \omega|}{\omega} 100(\%). \quad (4.3)$$

Serão apresentados os gráficos de evolução do erro relativo com o aumento do número de níveis de enriquecimento, para as cinco primeiras frequências, em relação ao número total de graus de liberdade, com ambos os eixos apresentados em escala logarítmica. Para o primeiro enriquecimento do MEFG serão utilizados 10 elementos e considerado o aumento no número de níveis de enriquecimento. Enquanto para o segundo e terceiro enriquecimentos de MEFG serão utilizados 17 elementos com um nível de enriquecimento, 18 elementos com dois níveis de enriquecimento e a partir do terceiro nível serão fixados 19 elementos e considerado o aumento no número de níveis de enriquecimento. Dessa maneira o número de graus de liberdade será similar para todos.

Também serão avaliados os números de condição das matrizes para cada exemplo. O número de condição de uma matriz  $A$ , denotado como  $C(A)$ , fornece uma estimativa do número de dígitos de precisão necessários na resolução de equações como a Equação 3.24. O número de condição é a razão entre o maior e o menor autovalor das matrizes. Quanto mais próximo da unidade maior a estabilidade do método (COOK et al., 2001). O número de condição segundo Bazan (2003) é dado por:

$$C(A) = \|A\| \|A^{-1}\|, \quad (4.4)$$

onde a norma usualmente utilizada é a Euclidiana. Esta equação será a utilizada nesse trabalho.

Os gráficos de número de condição serão apresentados para as matrizes de massa e rigidez em cada exemplo. O número de condição é obtido utilizando um único elemento para os exemplos, e até dez níveis de enriquecimento. O número de graus de liberdade do primeiro enriquecimento com um único elemento é  $4 + 8 * m$ , enquanto

para o segundo e terceiro enriquecimento é  $4 + 4 * m$ . Como o número de graus de liberdade é diferente são apresentados dois resultados para MEF, MEF1 possui a mesma quantidade de graus de liberdade que o primeiro enriquecimento, enquanto MEF2 possui a mesma quantidade de graus de liberdade que o segundo e terceiro enriquecimentos. O eixo vertical apresenta a ordem do número de condição em escala logarítmica, enquanto o eixo horizontal apresenta os níveis de enriquecimento.

#### 4.1.1 Viga bi-apoiada

Os primeiros exemplos consistem em uma viga de Timoshenko bi-apoiada. A Figura 6 apresenta a ilustração da viga bi-apoiada.

FIGURA 6 – VIGA BI-APOIADA.



Serão realizadas as análises deste modelo de viga pelo MEFM com os três enriquecimentos apresentados no capítulo anterior variando a relação altura/comprimento da viga, lembrando que será considerado um comprimento fixo de valor unitário, dessa forma a relação alterará apenas a altura da viga. Dessa maneira será possível avaliar as características de cada enriquecimento comparando-os com outros métodos.

##### 4.1.1.1 Relação $h/l = 0,2$

Os resultados apresentados na sequência são para a viga bi-apoiada com uma relação alta entre a altura da seção transversal e o comprimento da viga, com valor de  $0,2$ . Para esse valor de relação altura/comprimento o efeito de cisalhamento é relevante.

A Figura 7 apresenta o espectro de frequência para a viga com um nível de enriquecimento. Enquanto a Figura 8 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 7 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

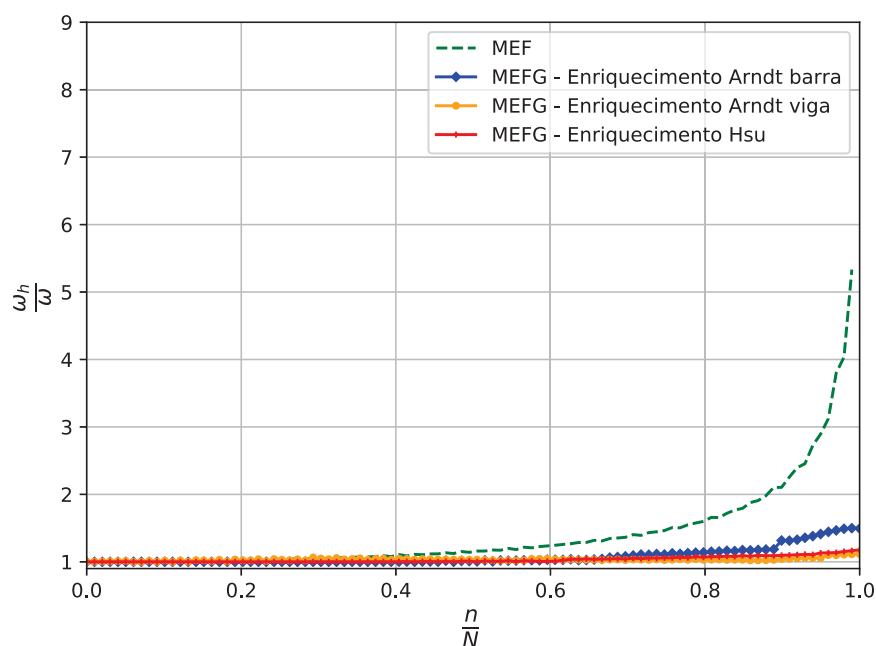
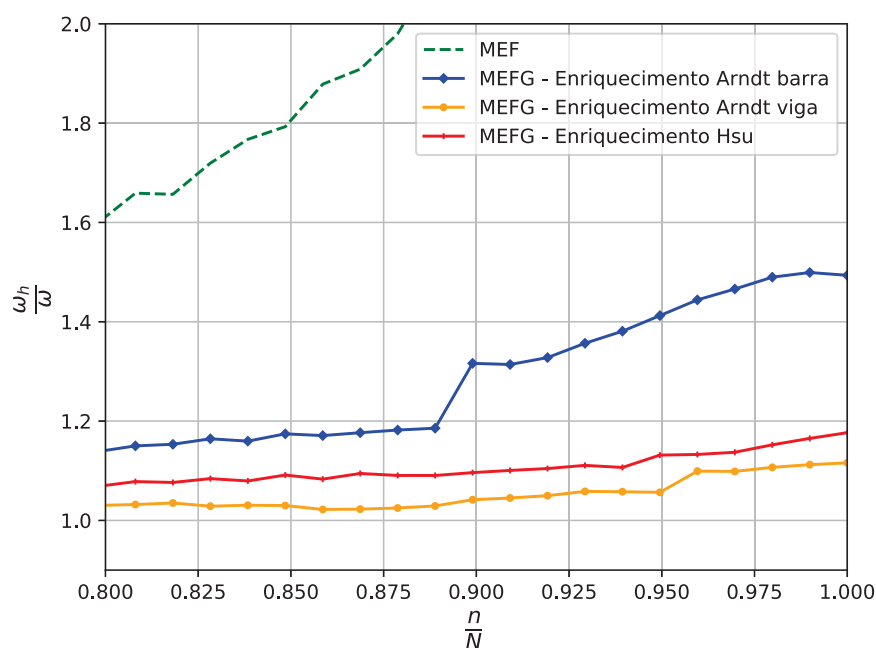


FIGURA 8 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



O modelo de MEF possui 50 elementos e um total de 102 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 80 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016)



do MEFG foram subdivididos em 17 elementos, ficando no total 36 graus de liberdade nodais e 68 graus de liberdade de campo.

Na Figura 7 é possível observar que os resultados de frequências de MEF possuem boa precisão até aproximadamente 40% das frequências, a partir desse valor os seus resultados se distanciam da solução de referência. Os três modelos de enriquecimentos, por sua vez, apresentam bons resultados até aproximadamente 70% das frequências. A partir da Figura 8 é possível de observar que o enriquecimento de Arndt (2009) para barras, dentre os três enriquecimentos, é o que apresenta um maior erro nas frequências finais.

A Figura 9 apresenta o espectro de frequência para a viga bi-apoiada com dois níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 10 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 9 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

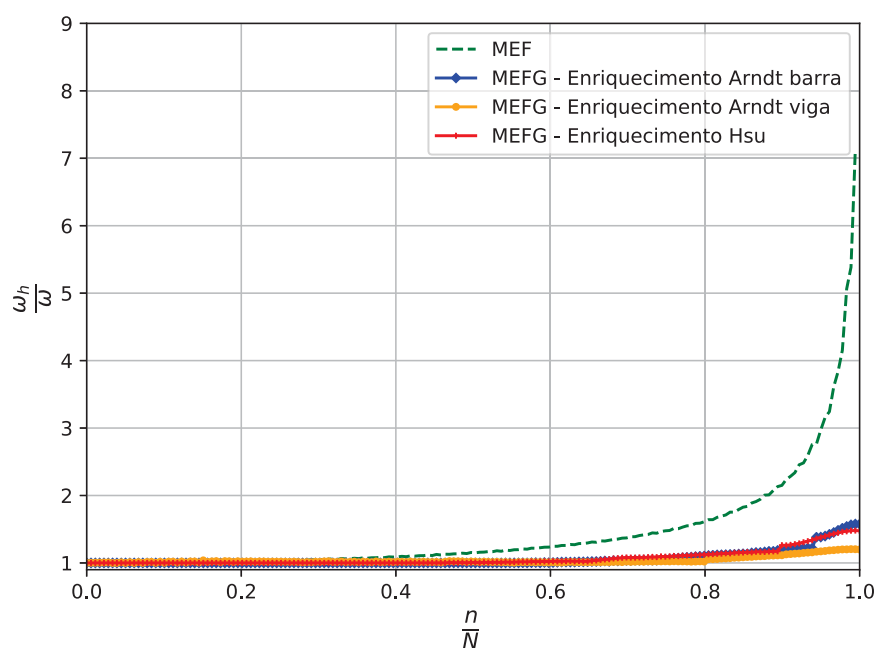
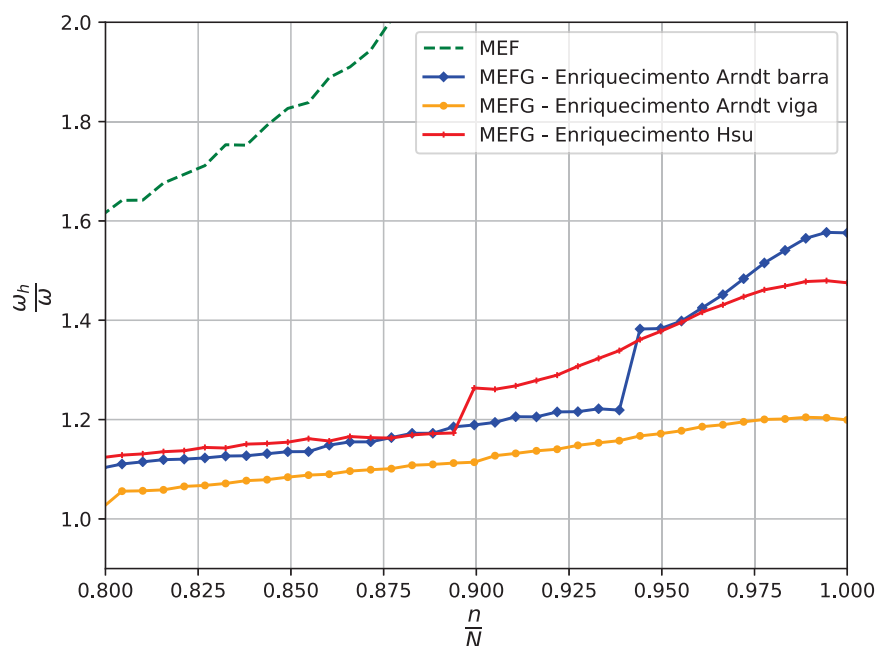


FIGURA 10 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



Para realizar o espectro de frequências com o segundo nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 90 elementos e um total de 182 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 160 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 18 elementos, ficando no total 38 graus de liberdade nodais e 144 graus de liberdade de campo.

O comportamento da curva de espectro para MEF permanece igual, podendo ser retirados resultados bons até aproximadamente 40% das frequências, enquanto a curva do enriquecimento de Hsu (2016) sofreu uma perda da acurácia das frequências a partir de aproximadamente 90%.

A Figura 11 apresenta o espectro de frequência para a viga com três níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 12 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 11 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

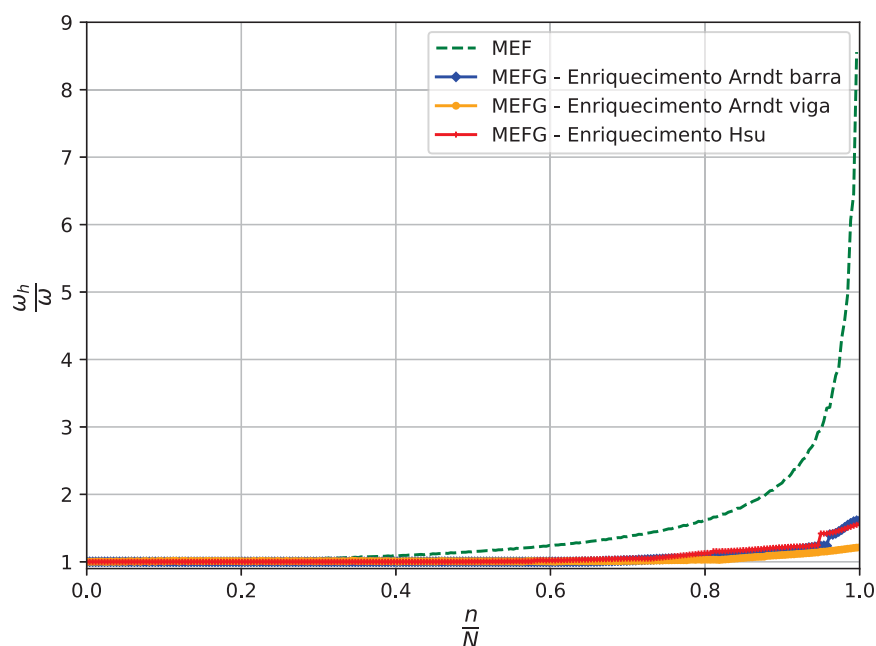
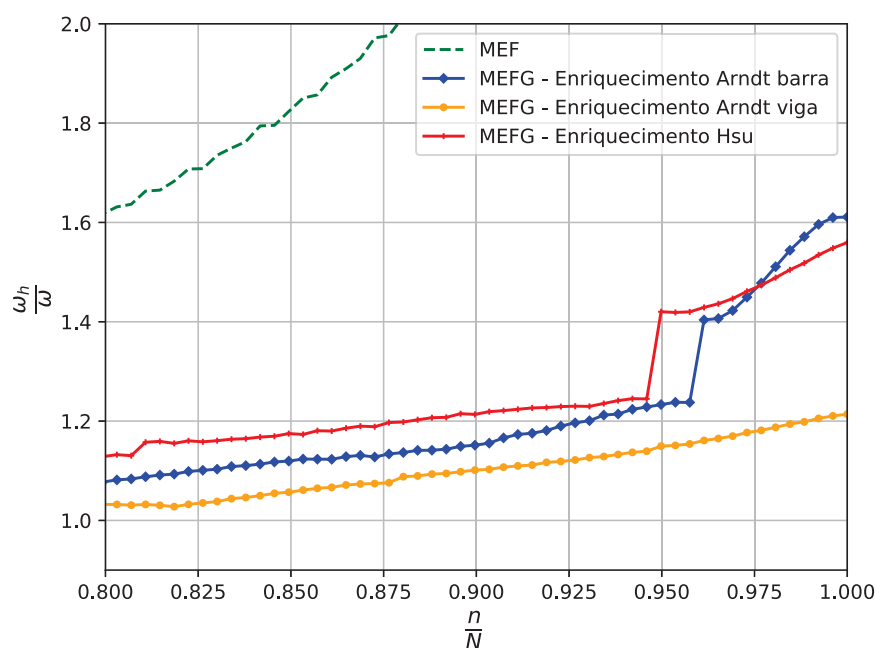


FIGURA 12 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



Para o terceiro nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 130 elementos e um total de 262 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 240 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para

vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEF foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 228 graus de liberdade de campo.

Há uma aparente suavização das curvas com o aumento do nível de enriquecimento. A resposta das frequências de MEF continuam divergindo a partir de 40%, enquanto é possível retirar boas respostas dos três enriquecimentos até 90%.

A Figura 13 apresenta o espectro de frequência para a viga com quatro níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 14 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 13 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

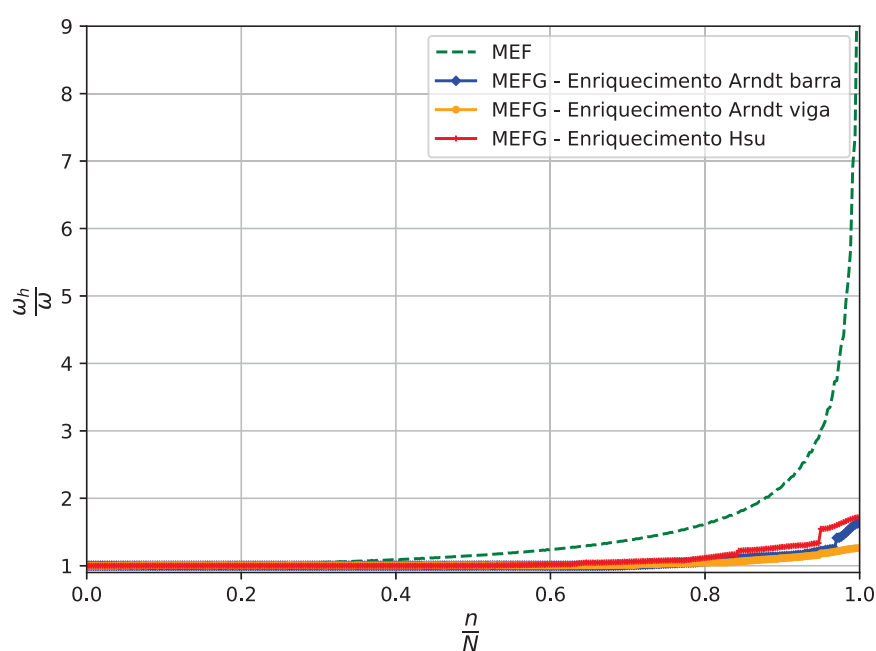
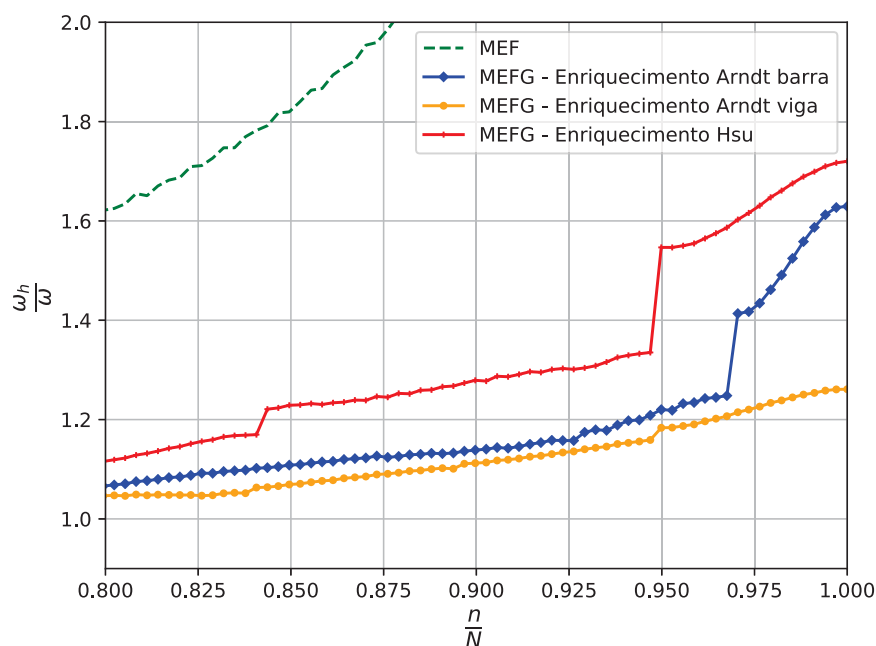


FIGURA 14 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



No quarto nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 170 elementos e um total de 342 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 320 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 304 graus de liberdade de campo.

No espectro de frequência para o quarto nível de enriquecimento os melhores resultados para o modelo enriquecido são obtidos com o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas, seguido do enriquecimento de Arndt (2009) para barras e então do enriquecimento de Hsu (2016).

A Figura 15 apresenta o espectro de frequência para a viga com cinco níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 16 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 15 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

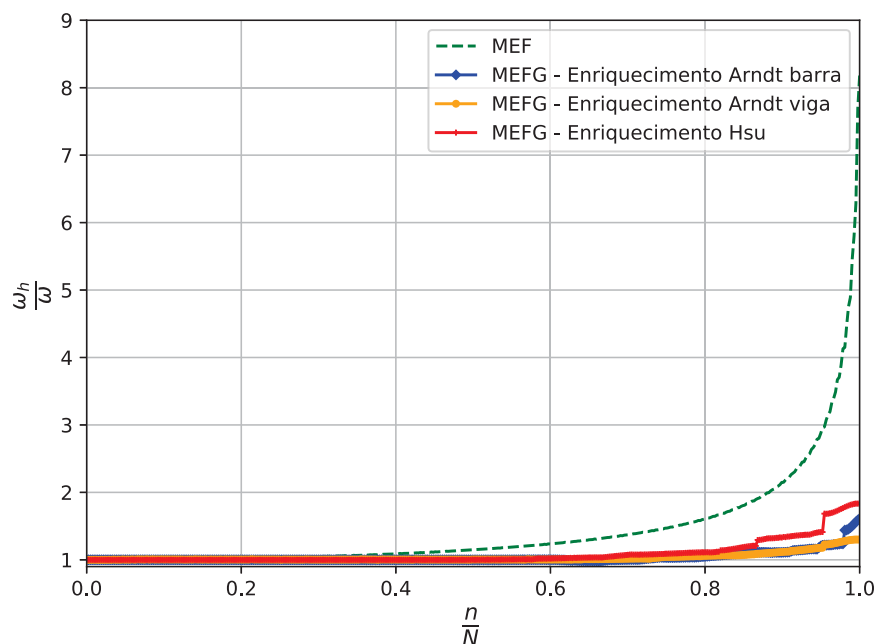
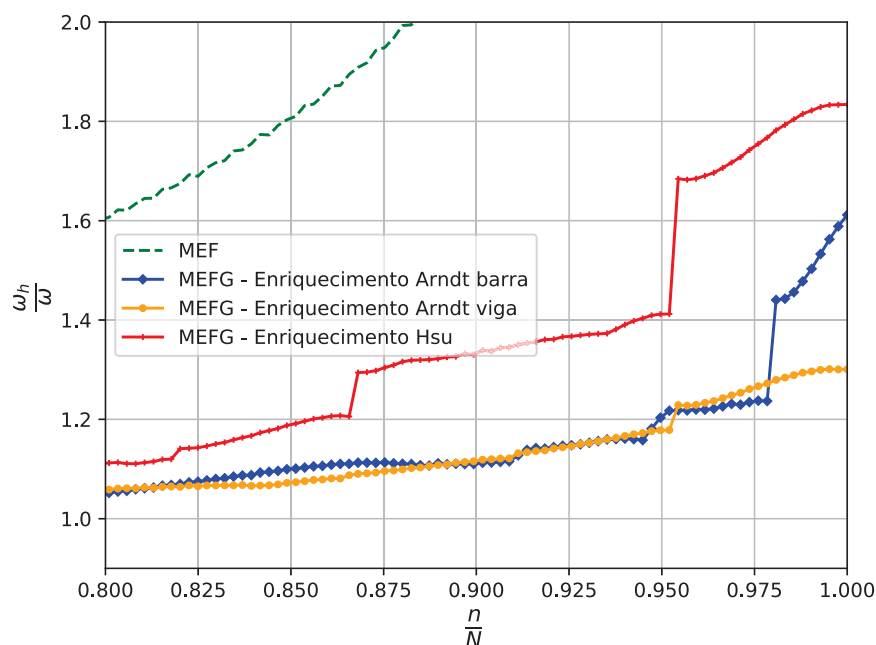


FIGURA 16 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



Com o aumento do nível de enriquecimento o modelo de MEF passa a possuir 210 elementos e um total de 422 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 400 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em

19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 380 graus de liberdade de campo.

No quinto nível há uma perturbação das respostas finais para os três enriquecimentos, sendo essa perturbação mais aparente para o enriquecimento de Hsu (2016). O modelo de MEF apresenta bons resultados até aproximadamente 40% das frequências obtidas. Enquanto para todos os enriquecimentos é possível retirar até aproximadamente 80% de bons resultados.

Ao se analisar os cinco espectros apresentados para a viga bi-apoiada com relação altura/comprimento com valor de 0,2 é possível observar que ao enriquecer o modelo de MEF as suas frequências melhoram de maneira significativa, pois praticamente é dobrada a quantidade de frequências confiáveis obtidas. Dentre os três enriquecimentos analisados o que apresentou um melhor comportamento foi o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas, seguido do enriquecimento de Arndt (2009) para barras. As respostas finais dos três enriquecimentos vão piorando conforme o aumento no número de níveis de enriquecimento, e isso pode ser causado por um mal condicionamento das matrizes, que será avaliado posteriormente.

A Tabela 1 apresenta os resultados de frequências naturais adimensionalizadas encontradas com os três enriquecimentos obtidas com o terceiro nível de enriquecimento, o resultado de MEF retirado da solução de referência, de Euler-Bernoulli com MEF são resultados de uma subdivisão de 130 elementos, de MPS do trabalho de Lee e Schultz (2004) que possui 35 pontos de colocação e de MEFH do trabalho de Hsu (2016) quando são empregadas 6 funções enriquecedoras e 10 elementos.

TABELA 1 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$

Modos	Euler-Bernoulli	MPS (LEE; SCHULTZ, 2004)	MEFH (HSU, 2016)	MEF	MEFG - Arndt (2009) para barras	MEFG - Arndt (2009) para vigas	MEFG - Hsu (2016)
1	3,141593	3,04533	3,045331	3,045331	3,045331	3,047704	3,045331
2	6,283185	5,67155	5,671552	5,671553	5,671553	5,677858	5,671553
3	9,424778	7,83952	7,839519	7,839522	7,839521	7,851944	7,839522
4	12,566371	9,65709	9,657092	9,657097	9,657094	9,677994	9,657095
5	15,707964	11,2220	11,222040	11,222050	11,222044	11,253827	11,222046
6	18,849559	12,6022	12,602211	12,602226	12,602215	12,647289	12,602218
7	21,991155	13,0323	13,032327	13,032327	13,032327	13,032327	13,032327
8	25,132753	13,4443	13,444275	13,444275	13,444275	13,444355	13,444275
9	28,274356	13,8433	13,843286	13,843307	13,843289	13,904012	13,843294
10	31,415964	14,4378	14,437764	14,437764	14,437764	14,438766	14,437764
11	34,557579	14,9766	14,976575	14,976604	14,976578	15,055196	14,976585
12	37,699204	15,6676	15,667643	15,667645	15,667644	15,671529	15,667644
13	40,840842	16,0241	16,024132	16,024170	16,024135	16,122711	16,024143
14	43,982497	16,9584	16,958424	16,958428	16,958425	16,967980	16,958426
15	47,124171	17,0019	17,001992	17,001971	17,001926	17,122266	17,001935



A partir da Tabela 1 é possível analisar que os resultados obtidos com os enriquecimentos se assemelham as frequências obtidas por demais autores e métodos. As respostas de frequências para viga com relação altura/comprimento com valor de 0,2 de Timoshenko são diferentes do que o modelo de Euler-Bernoulli, já que agora é levado em consideração o efeito de cisalhamento. Dentre os três enriquecimentos o que mais se aproxima da resposta de referência para os 15 primeiros modos é o enriquecimento de Hsu (2016), seguido do enriquecimento de Arndt (2009) para barras.

As Figuras 17 a 21 apresentam os gráficos de convergência para as cinco primeiras frequências da viga bi-apoiada com relação altura/comprimento de 0,2.

FIGURA 17 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

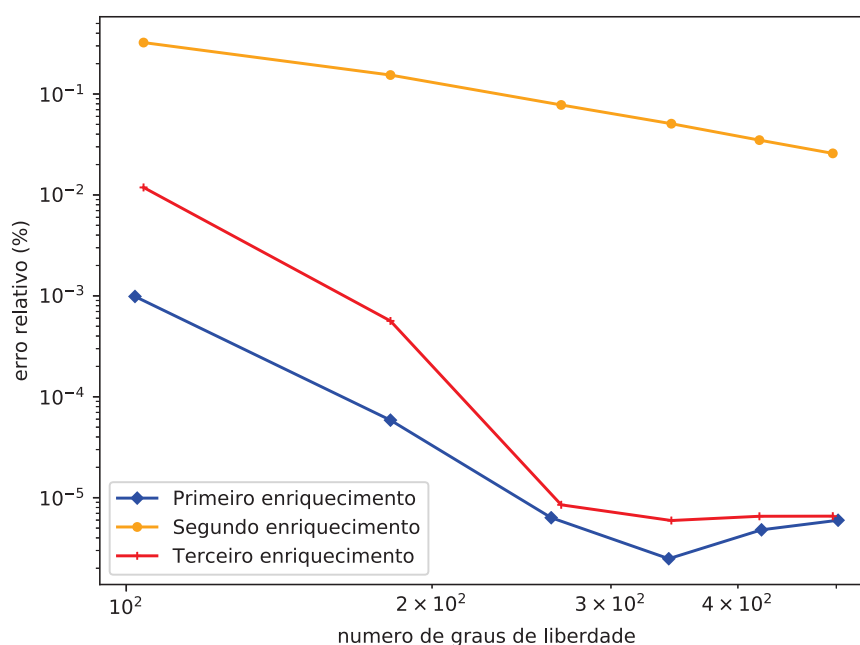


FIGURA 18 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

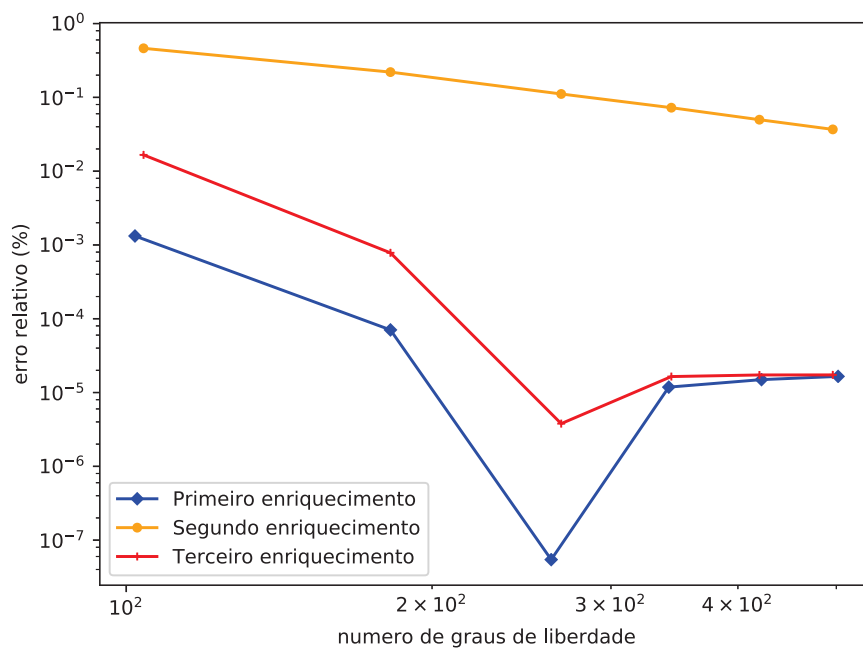


FIGURA 19 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

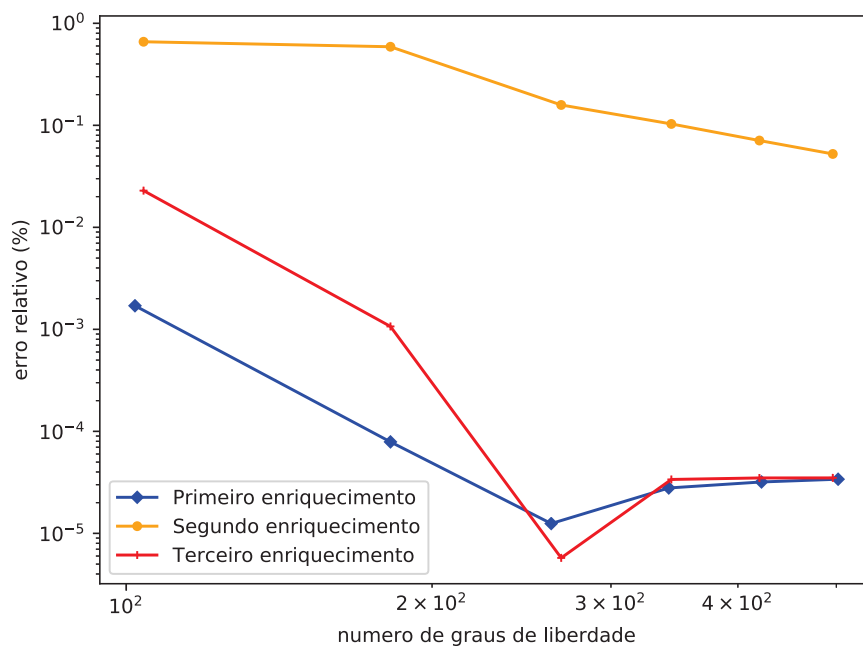


FIGURA 20 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

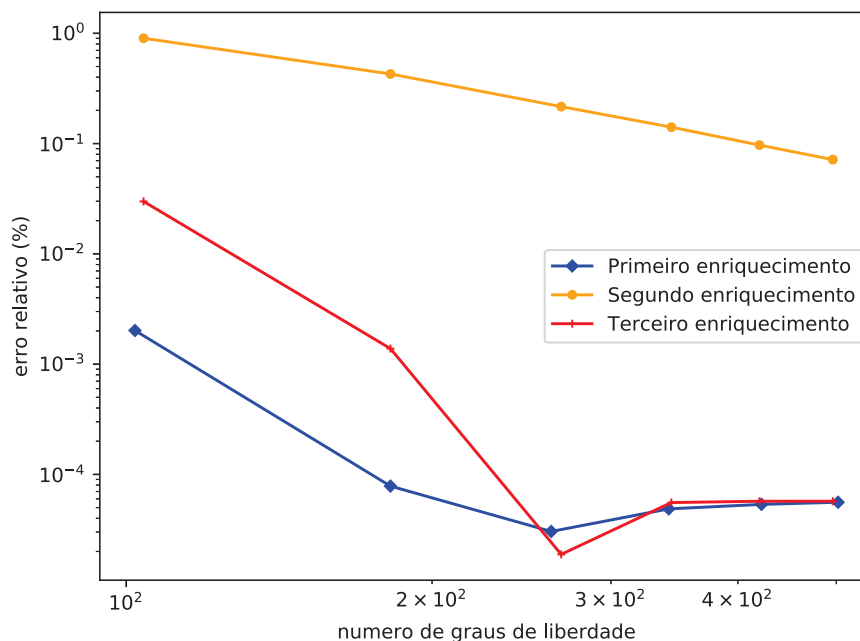
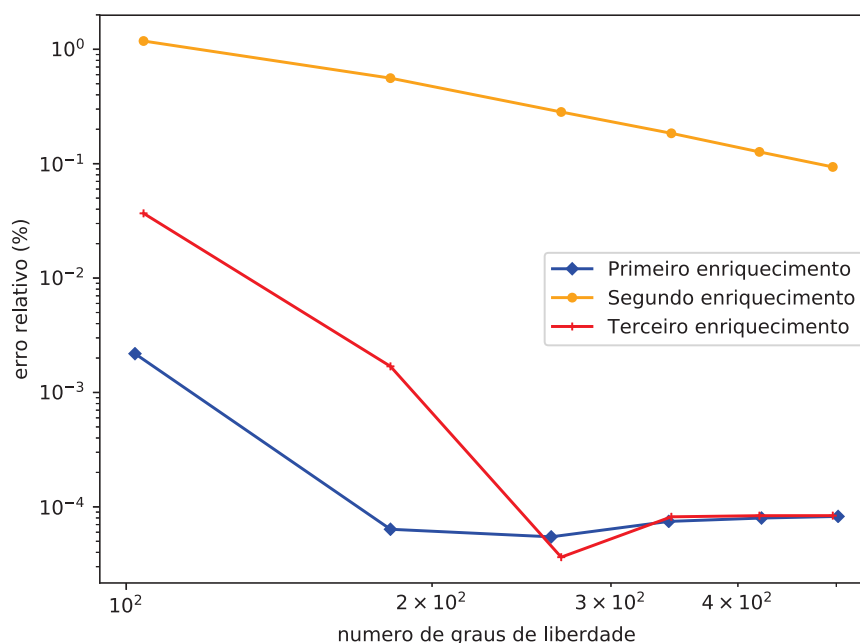


FIGURA 21 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



Para as cinco primeiras frequências os gráficos de convergência se comportam de maneira similar. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras e o enriquecimento de Hsu (2016) possuem convergências parecidas, contudo para as cinco primeiras frequências a taxa de convergência do enriquecimento de Hsu (2016) é maior. Mas o erro relativo final de ambos é sempre muito próximo. A estabilização que ocorre

com ambos os enriquecimentos com o número de graus de liberdade mais elevado pode ser causado pelo condicionamento das matrizes e esse comportamento pode ser melhor avaliado com o gráfico do número de condição das matrizes de massa e rigidez. Aparentemente, o comportamento da convergência do enriquecimento de Arndt (2009) para vigas pode ser dito monotônico pois ele vai diminuindo de maneira uniforme e constante, contudo é o que possui a menor taxa de convergência e os valores mais elevados de erro relativo,

As Figuras 22 e 23 mostram os gráficos do número de condição das matrizes de rigidez e massa, respectivamente, para esse exemplo.

FIGURA 22 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

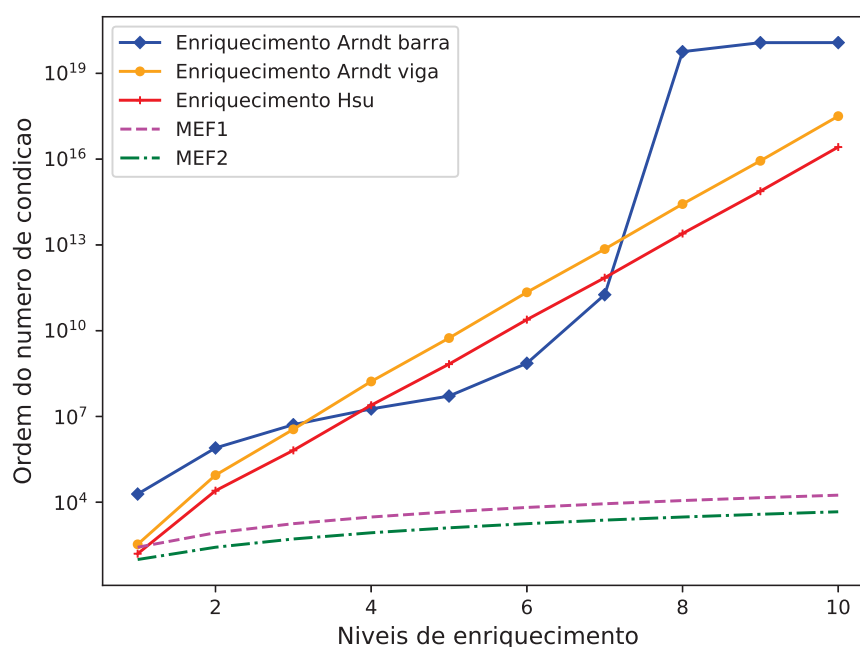
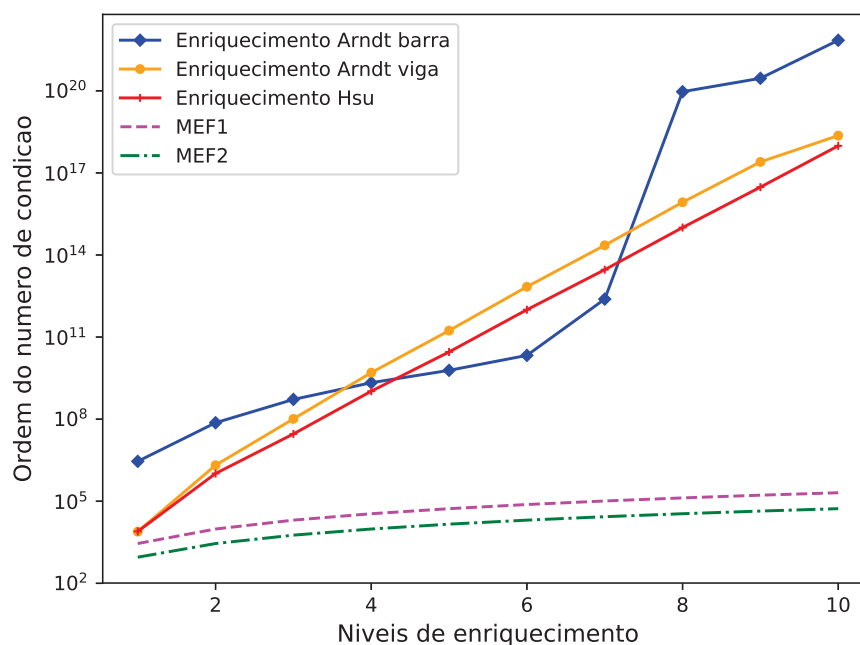


FIGURA 23 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



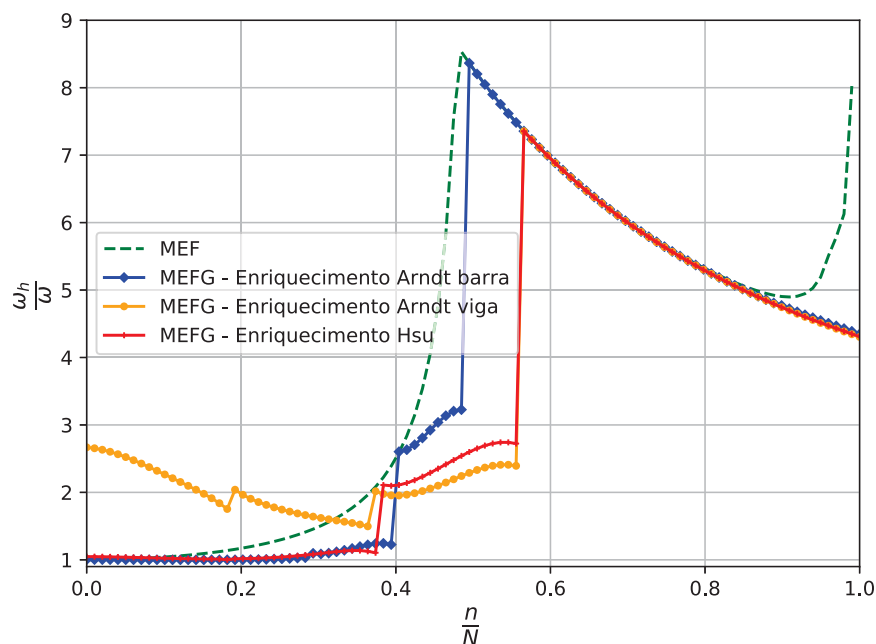
As matrizes melhores condicionadas são as matrizes de MEF, pois apresentaram os menores números de condição. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras oscila bastante, em alguns níveis de enriquecimento chega a ter um número de condição mais baixo que os demais. Dentre o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016), este segundo é o que apresenta em todos os níveis de enriquecimento os menores números de condição. Observa-se que o aumento do nível de enriquecimento piora o condicionamento das matrizes, e isso pode ser a causa dos problemas expostos nos gráficos de espectro de frequência e de erro relativo.

#### 4.1.1.2 Relação $h/l = 0,002$

As respostas apresentadas na sequência são para a viga bi-apoiada com uma relação entre a altura da seção transversal com o comprimento da viga com o valor de 0,002.

A Figura 24 apresenta o espectro de frequência para a viga com os três diferentes enriquecimentos e com um nível de enriquecimento.

FIGURA 24 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

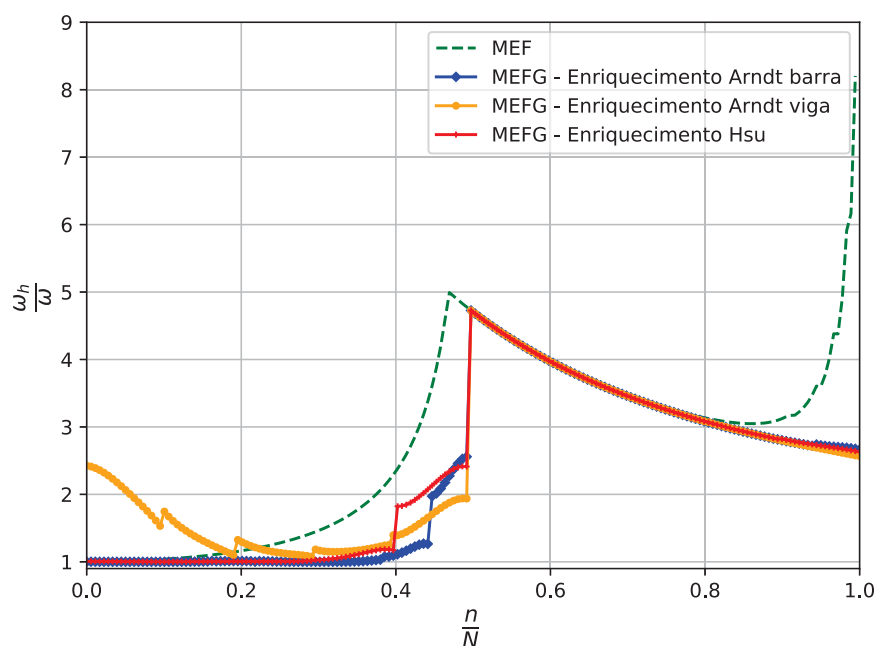


O modelo de MEF possui 50 elementos e um total de 102 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 80 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 17 elementos, ficando no total 36 graus de liberdade nodais e 68 graus de liberdade de campo.

Nesse exemplo é possível ver o efeito do travamento ocorrendo. Para as frequências obtidas por MEF são possíveis de se aproveitar até pouco mais de 20% como confiáveis. O enriquecimento de Hsu (2016) e o enriquecimento de Arndt (2009) para barras reduzem o efeito de travamento apresentado em MEF, contudo não o eliminam. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas apresenta um problema de travamento desde as primeiras frequências.

A Figura 25 apresenta o espectro de frequência para a viga com dois níveis de enriquecimento.

FIGURA 25 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

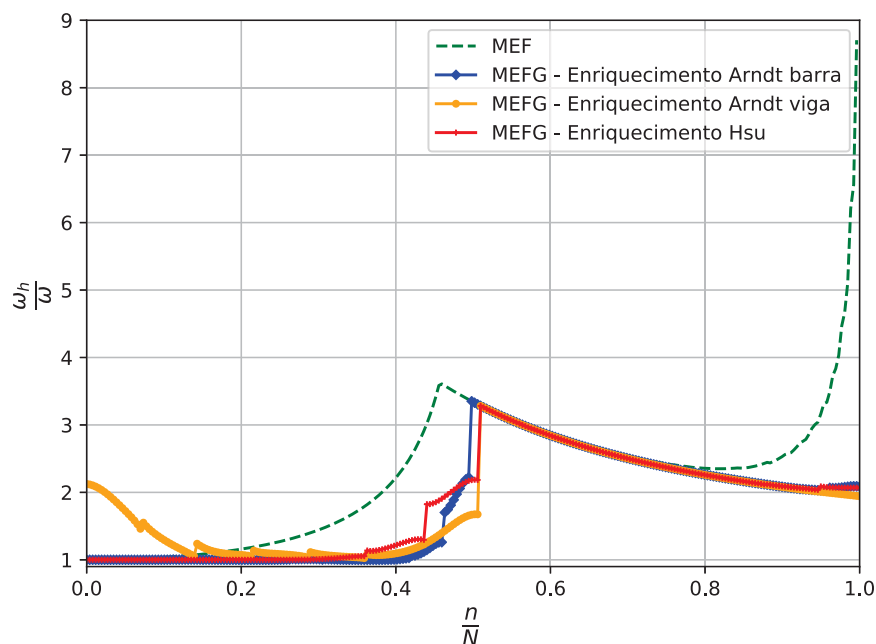


Para realizar o espectro de frequências com o segundo nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 90 elementos e um total de 182 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 160 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 18 elementos, ficando no total 38 graus de liberdade nodais e 144 graus de liberdade de campo.

Os valores máximos dos espectros para todos os enriquecimentos do MEFG e de MEF diminuíram com o aumento do nível de enriquecimento, ou seja, o resultado está convergindo. Mas ainda são considerados confiáveis a mesma porcentagem de resultado para MEF e para os enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e o de Hsu (2016).

A Figura 26 apresenta o espectro de frequência para a viga com três níveis de enriquecimento.

FIGURA 26 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .



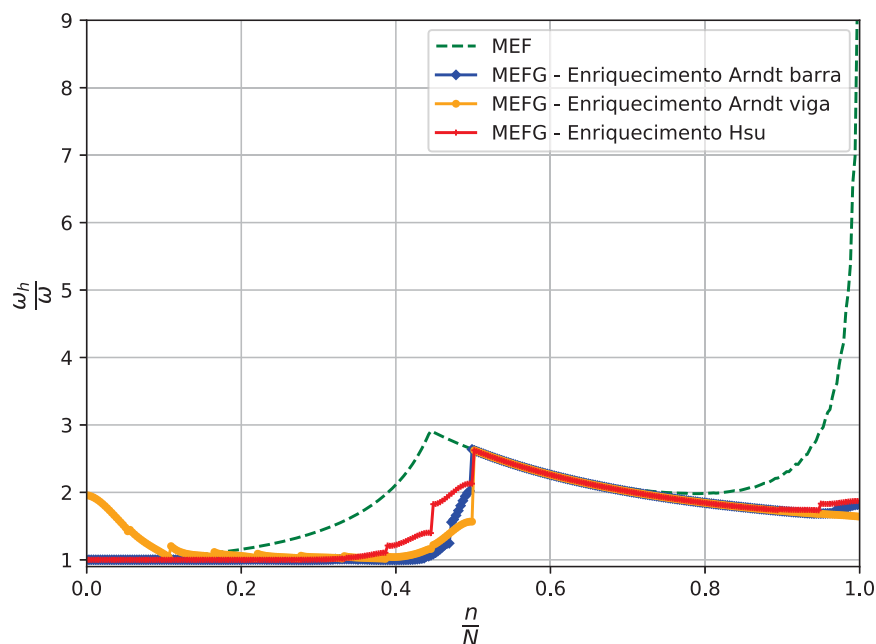
Para o terceiro nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 130 elementos e um total de 262 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 240 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 228 graus de liberdade de campo.

Para os enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e de Hsu (2016) do MEFG são possíveis de serem utilizadas com boa precisão até aproximadamente 40% das frequências obtidas. Mesmo sendo diminuído o efeito de travamento para o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas, suas respostas ainda não são boas.

A Figura 27 apresenta o espectro de frequência para a viga com quatro níveis de enriquecimento.



FIGURA 27 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

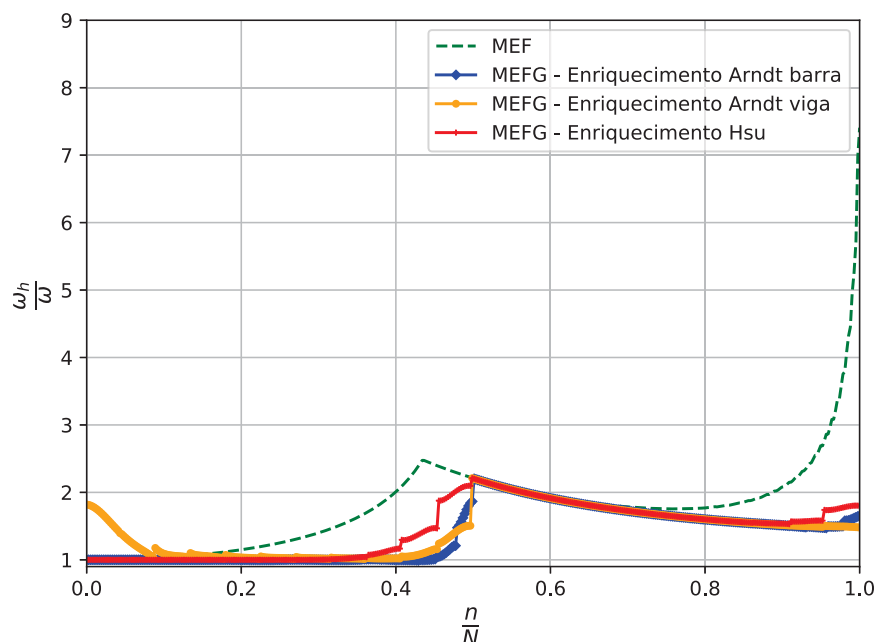


Na análise com quatro níveis de enriquecimento o modelo de MEF possui 170 elementos e um total de 342 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 320 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 304 graus de liberdade de campo.

O efeito de travamento diminuiu com o aumento do nível de enriquecimento. A quantidade de frequências que podem ser consideradas confiáveis continua em aproximadamente 20% para MEF e em pouco mais de 40% para os enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e de Hsu (2016).

A Figura 28 apresenta o espectro de frequência para a viga com cinco níveis de enriquecimento.

FIGURA 28 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-APOIADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .



Com o aumento do nível de enriquecimento o modelo de MEF passa a possuir 210 elementos e um total de 422 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 400 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 380 graus de liberdade de campo.

Mesmo sendo o quinto nível de enriquecimento o problema de travamento ainda é observado. A porcentagem de resultados que pode ser considerado confiável permanece a mesma para todos os modelos.

A viga bi-apoiada com relação  $h/l = 0,002$  apresenta o problema de travamento para todos os modelos apresentados. Para o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas o travamento ocorre desde o princípio, dessa maneira não são possíveis de serem retirados nenhum resultado confiável. Apesar do efeito de travamento diminuir com o aumento no nível de enriquecimento a porcentagem de resultados confiáveis muda pouco, sendo de aproximadamente 20% para MEF e para os outros dois enriquecimento em torno de 40%. Outra coisa que pode ser notada nas frequências mais elevadas é que mesmo ocorrendo o efeito de travamento, para os níveis mais altos, os modelos enriquecidos sofrem com o número de condição elevado que as matrizes possuem, que pode ser visto nas Figuras 34 e 35.

A Tabela 2 apresenta os resultados de frequências naturais adimensionalizadas

encontradas com os três enriquecimentos obtidas com o terceiro nível de enriquecimento, o resultado de MEF retirado da solução de referência, de Euler-Bernoulli com MEF são resultados de uma subdivisão de 130 elementos, de MPS do trabalho de Lee e Schultz (2004) que possui 35 pontos de colocação e de MEFH do trabalho de Hsu (2016) quando são empregadas 6 funções enriquecedoras e 10 elementos.

As frequências apresentadas de MEFG serão as obtidas com o terceiro nível de enriquecimento, as de MEF serão retiradas da solução de referência, as de Euler-Bernoulli com MEF são resultados de uma subdivisão de 130 elementos, os resultados de Análise Isogeométrica (LEE; PARK, 2013) possuem 32 elementos e ordem  $p = 3$ , o MPS (LEE; SCHULTZ, 2004) possui 35 pontos de colocação e as frequências de HFEM (HSU, 2016) são retiradas quando são empregadas 6 funções enriquecedoras e 10 elementos.

TABELA 2 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$

Modos	Euler-Bernoulli	MPS (LEE; SCHULTZ, 2004)	MEFH (HSU, 2016)	MEF	MEFG - Arndt (2009) para barras	MEFG - Arndt (2009) para vigas	MEFG - Hsu (2016)
1	3,141593	3,14158	3,141327	3,141611	3,142640	6,676992	3,142657
2	6,283185	6,28310	6,281059	6,283110	6,285091	13,303569	6,285204
3	9,424778	9,42449	9,417610	9,424508	9,427181	19,830720	9,427531
4	12,566371	12,5657	12,549413	12,565705	12,568778	26,212223	12,569536
5	15,707964	15,7066	15,674923	15,706645	15,709796	32,405960	15,711121
6	18,849559	18,8473	18,792631	18,847298	18,850201	38,375091	18,852197
7	21,991155	21,9875	21,901068	21,987547	21,989997	44,088992	21,992688
8	25,132753	25,1273	24,998915	25,127384	25,129218	49,523849	25,132525
9	28,274356	28,2666	28,084503	28,266698	28,267906	54,662836	28,271653
10	31,415964	31,4053	31,156826	31,405455	31,406880	59,495791	31,410025
11	34,557579	34,5434	34,214540	34,543579	34,543766	64,018383	34,547608
12	37,699204	37,6807	37,256471	37,681022	37,680896	68,230659	37,684374
13	40,840842	40,8174	40,281516	40,817719	40,817394	72,134800	40,820306
14	43,982497	43,9531	43,288649	43,953591	43,953151	75,731476	43,955389
15	47,124171	47,0880	46,276922	47,088594	47,088050	79,013191	47,089613

Os resultados apresentados na Tabela 2 mostram que para um relação de altura/comprimento da viga mais baixo, nesse caso 0,002, as frequências encontradas para a viga de Timoshenko se aproximam daqueles resultantes da viga de Euler-Bernoulli. Os resultados encontrados com os enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e de Hsu (2016) se aproximam daqueles obtidos por outros autores. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas, como já era possível ver a partir dos espectros de frequência, sofre com o efeito de travamento, dessa forma apresenta resultados diferentes. Dos outros dois enriquecimentos, com os resultados mostrados na Tabela 2, o que mais se aproxima do valor da solução de referência é o enriquecimento de Arndt (2009) para barras.

As Figuras 29 a 33 apresentam os gráficos de convergência para as cinco primeiras frequências da viga bi-apoiada com relação altura/comprimento de 0,002.

FIGURA 29 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

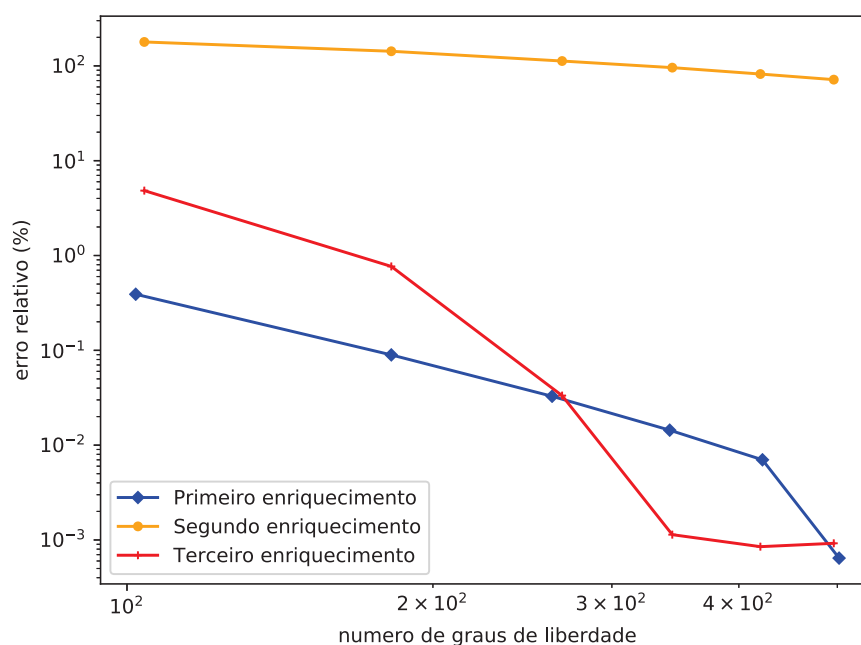


FIGURA 30 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

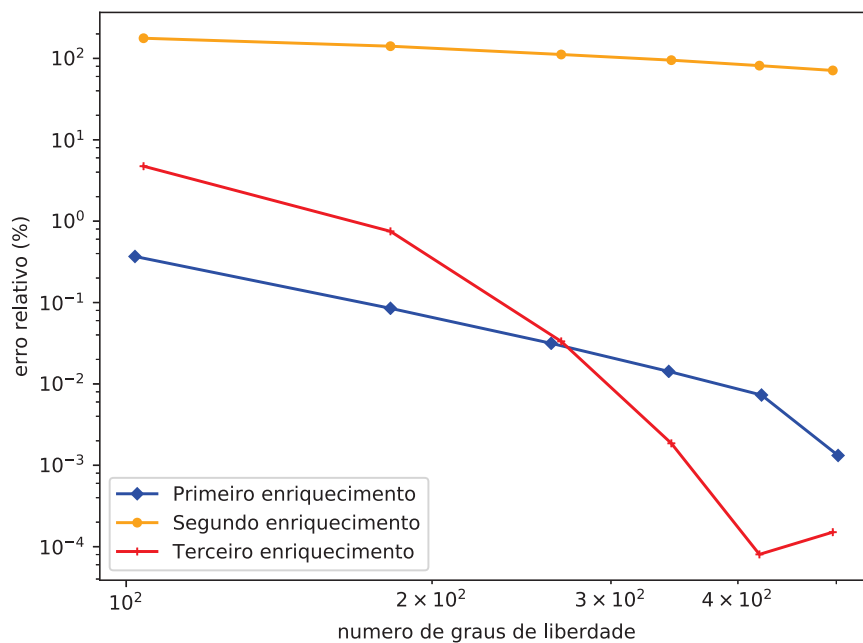


FIGURA 31 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

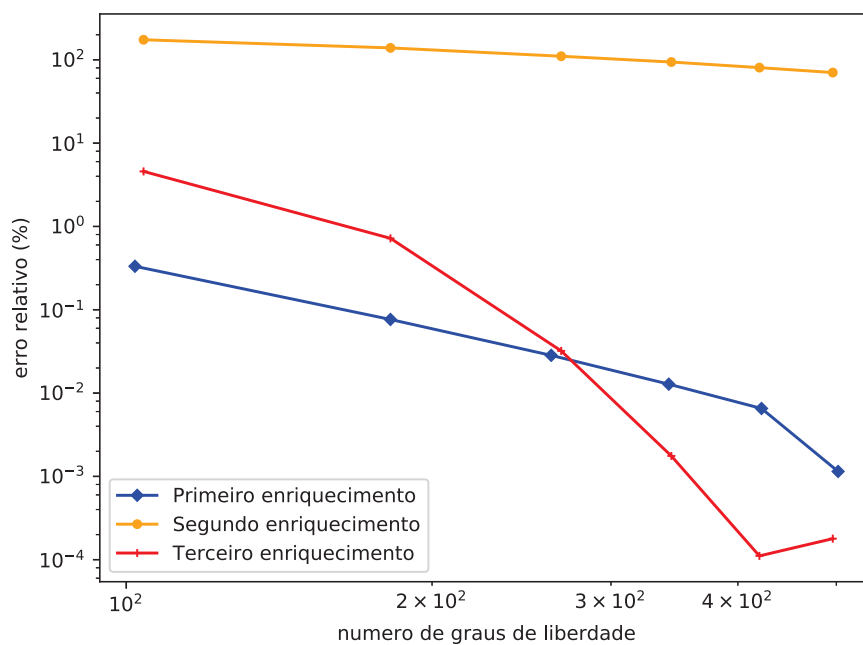


FIGURA 32 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

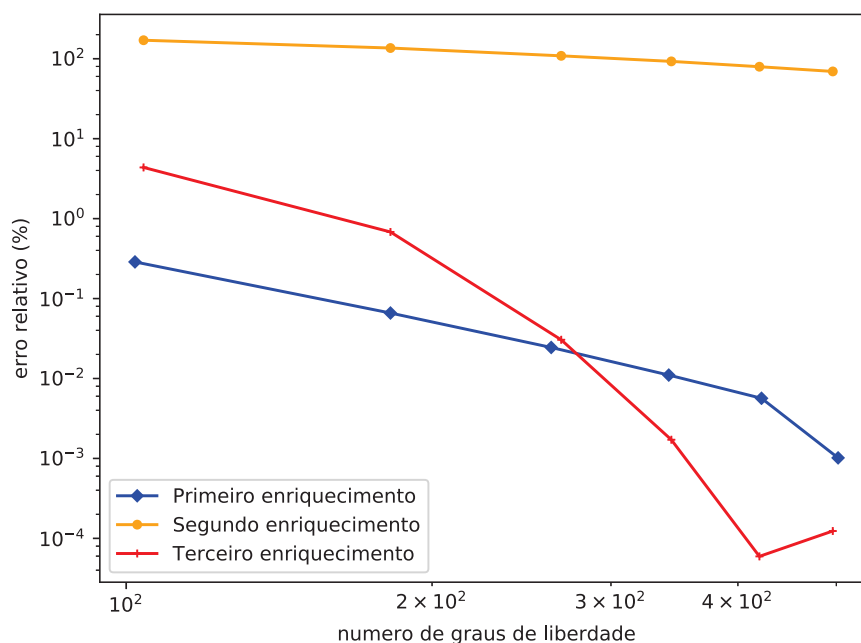
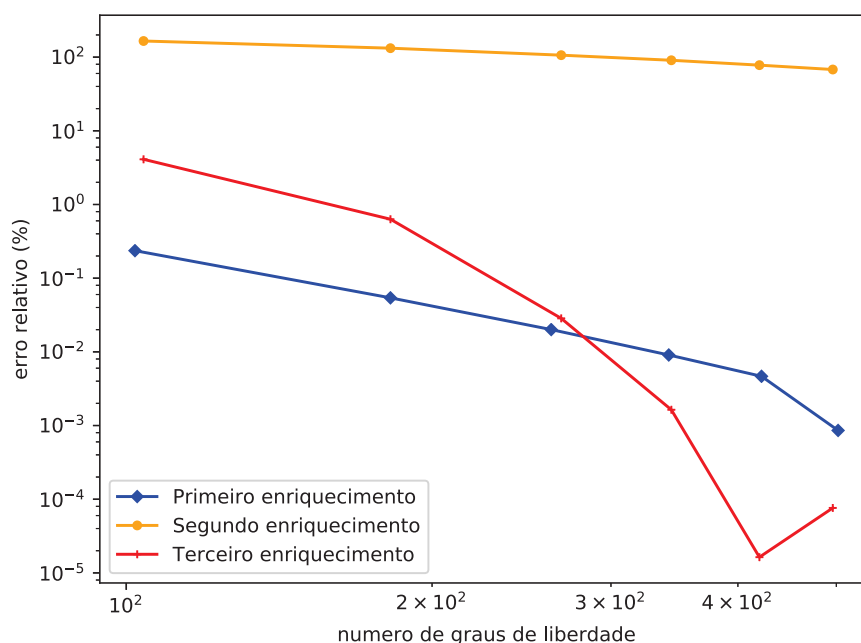


FIGURA 33 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .



Para o caso da viga bi-apoiada com relação altura/comprimento da viga baixo os gráficos de convergência confirmam que ocorre o problema de travamento com o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas, pois os seus erros relativos estão na casa de  $10^2$ . Os outros dois enriquecimentos por sua vez conseguem uma boa convergência. O enriquecimento de Hsu (2016) começa com um erro mais elevado, mas para o

caso das cinco primeiras frequências ele termina com erros menores, e sua taxa de convergência é maior.

As Figuras 34 e 35 mostram os gráficos do número de condição das matrizes de rigidez e massa, respectivamente, para esse exemplo.

FIGURA 34 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

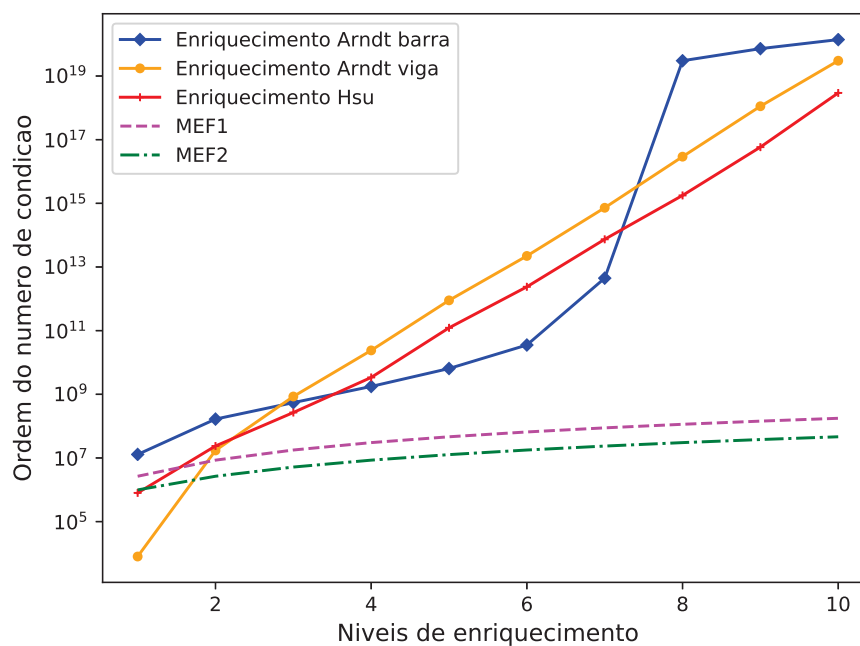
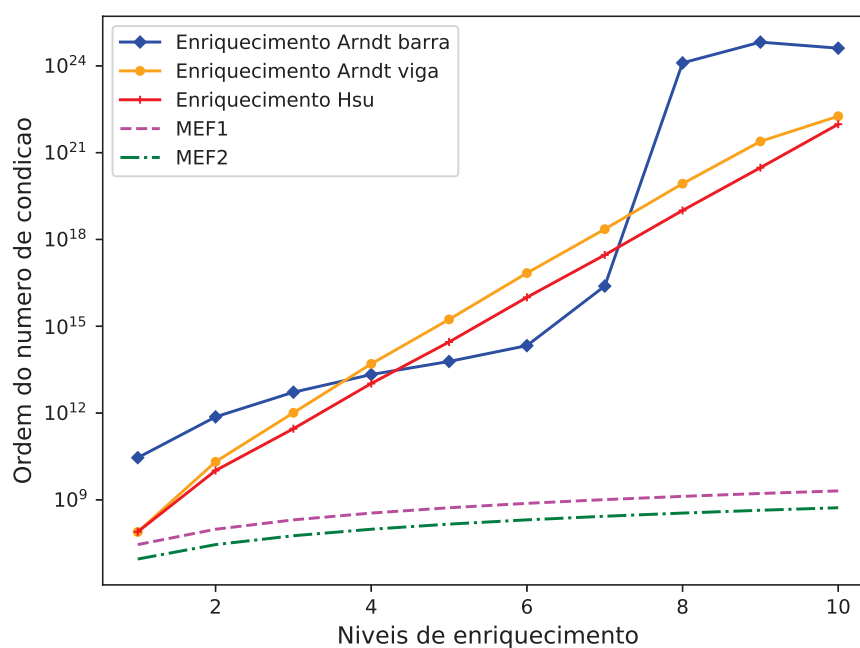


FIGURA 35 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA BI-APOIADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .





Os números de condição para as matrizes de MEF são mais baixos em todos os níveis de enriquecimento. É importante ressaltar que o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas sofre com o problema de travamento desde o princípio, mas o número de condição das suas matrizes é similar ao enriquecimento de Hsu (2016). Novamente o enriquecimento de Arndt (2009) para barras oscila entre obter números mais baixos de condição e números mais elevados, e o enriquecimento de Hsu (2016) é o que melhor se comporta.

#### 4.1.2 Viga engastada-livre

Para as próximas análises será utilizada uma viga de Timoshenko engastada-livre. De forma a ilustrar essa condição de contorno de viga é apresentada a Figura 36.

FIGURA 36 – VIGA ENGASTADA-LIVRE.



Esta viga será analisada com os três enriquecimentos do MEFG apresentados no capítulo anterior sendo realizada uma variação na relação altura da seção transversal com comprimento da viga. Será possível então, avaliar o comportamento de cada enriquecimento e compará-los com outros métodos.

##### 4.1.2.1 Relação $h/l = 0,1$

Nessa seção serão apresentados os resultados de frequência para a viga engastada-livre com uma relação entre a altura da seção transversal e o comprimento de viga com valor de 0,1. Esse valor de relação é considerado alto, e o efeito de cisalhamento deve ser levado em consideração.

A Figura 37 apresenta o espectro de frequência para a viga com um nível de enriquecimento. Enquanto a Figura 38 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 37 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .

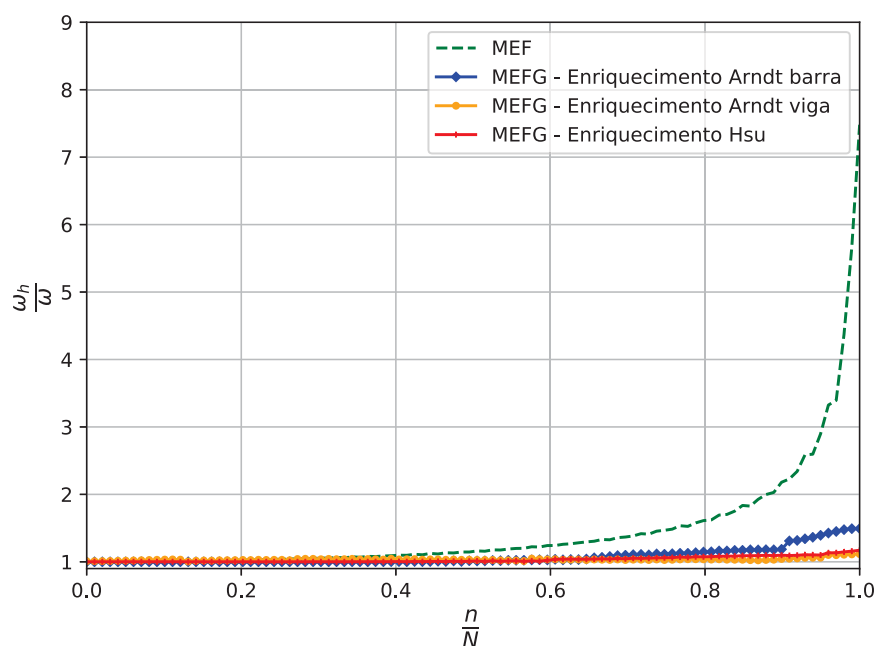
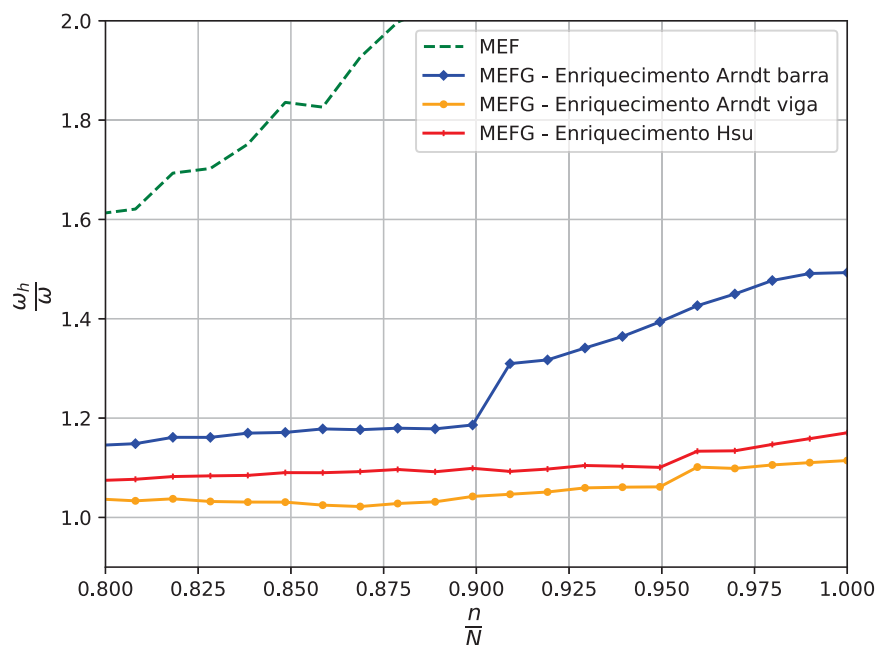


FIGURA 38 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .



O modelo de MEF possui 50 elementos e um total de 102 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 80 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016)

do MEFG foram subdivididos em 17 elementos, ficando no total 36 graus de liberdade nodais e 68 graus de liberdade de campo.

As frequências que podem ser consideradas confiáveis para MEF chegam a até aproximadamente 40% das frequências obtidas. A partir dessa quantidade de respostas o resultado diverge da solução de referência. Enquanto isso, das respostas com enriquecimento são consideradas confiáveis até aproximadamente 80% das frequências.

A Figura 39 apresenta o espectro de frequência para a viga com dois níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 40 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 39 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .

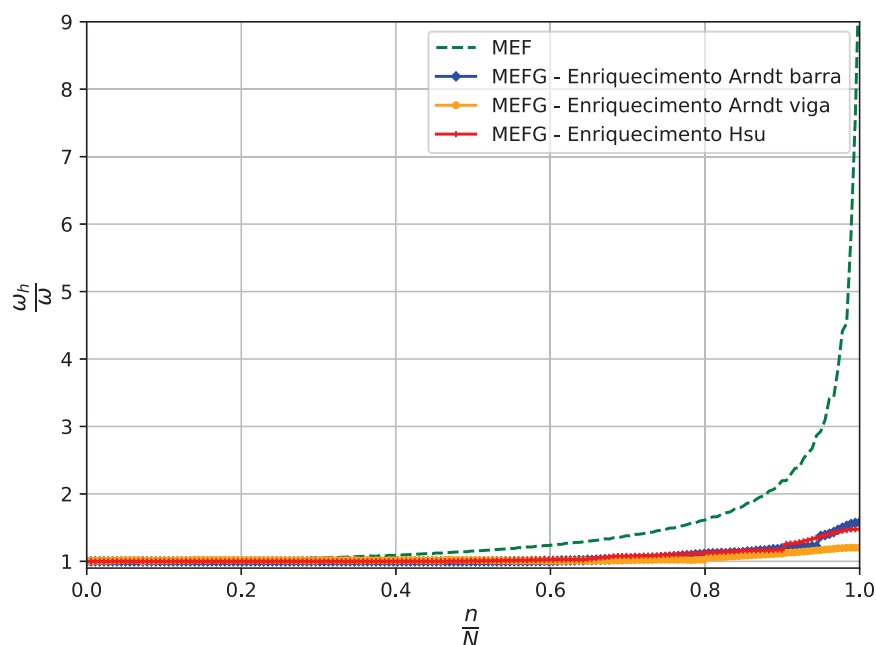
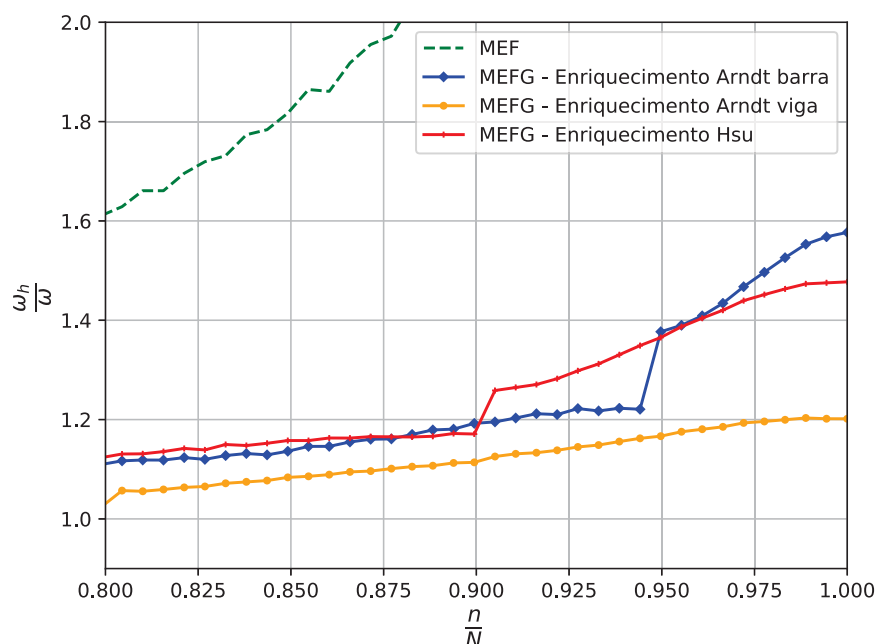


FIGURA 40 – ZOOM DE ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .



Para realizar o espectro de frequências com dois níveis de enriquecimento o modelo de MEF possui 90 elementos e um total de 182 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 160 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 18 elementos, ficando no total 38 graus de liberdade nodais e 144 graus de liberdade de campo.

A porcentagem de respostas de MEF consideradas confiáveis permanece a mesma. Enquanto no primeiro nível apenas o enriquecimento de Arndt (2009) para barras divergia mais do que os demais enriquecimentos para as frequências a partir de 90%, com o segundo nível o enriquecimento de Hsu (2016) também sofre com esse problema.

A Figura 41 apresenta o espectro de frequência para a viga com três níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 42 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 41 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .

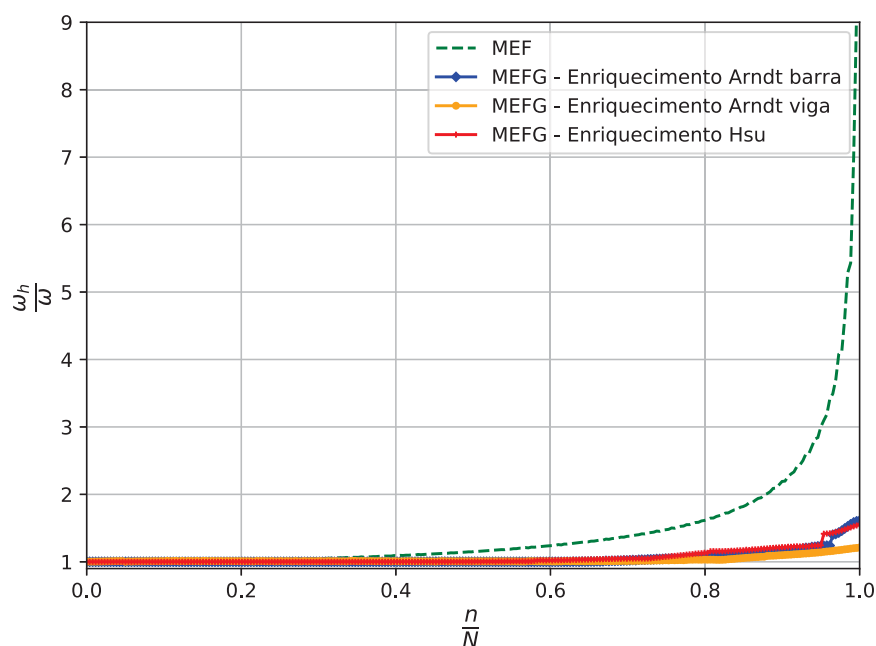
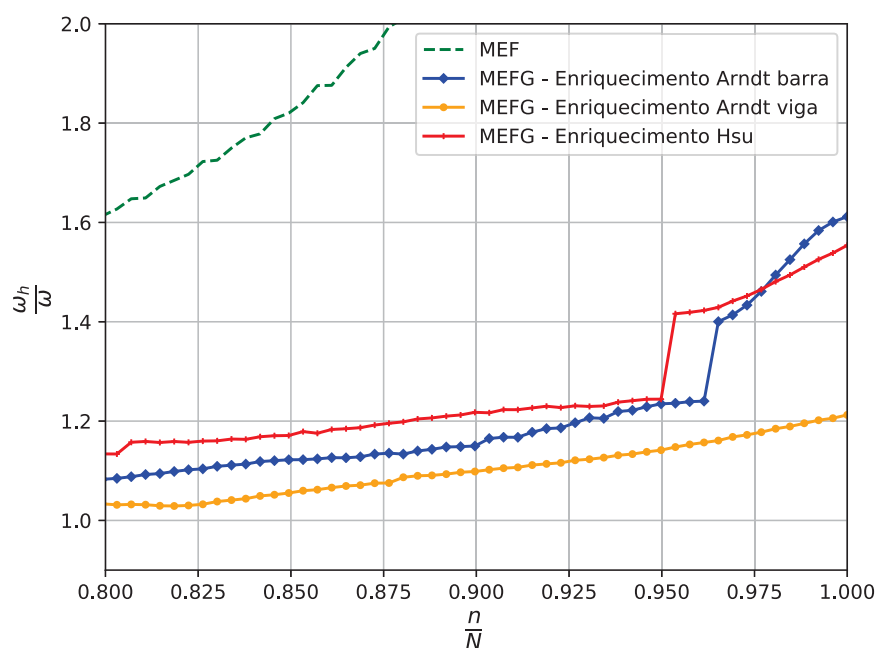


FIGURA 42 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .



Para o terceiro nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 130 elementos e um total de 262 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 240 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para

vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 228 graus de liberdade de campo.

Existe uma suavização das curvas de espectro com o aumento na quantidade de níveis de enriquecimento, contudo o comportamento, para todos os modelos, permanece o mesmo.

A Figura 43 apresenta o espectro de frequência para a viga com quatro níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 44 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 43 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .

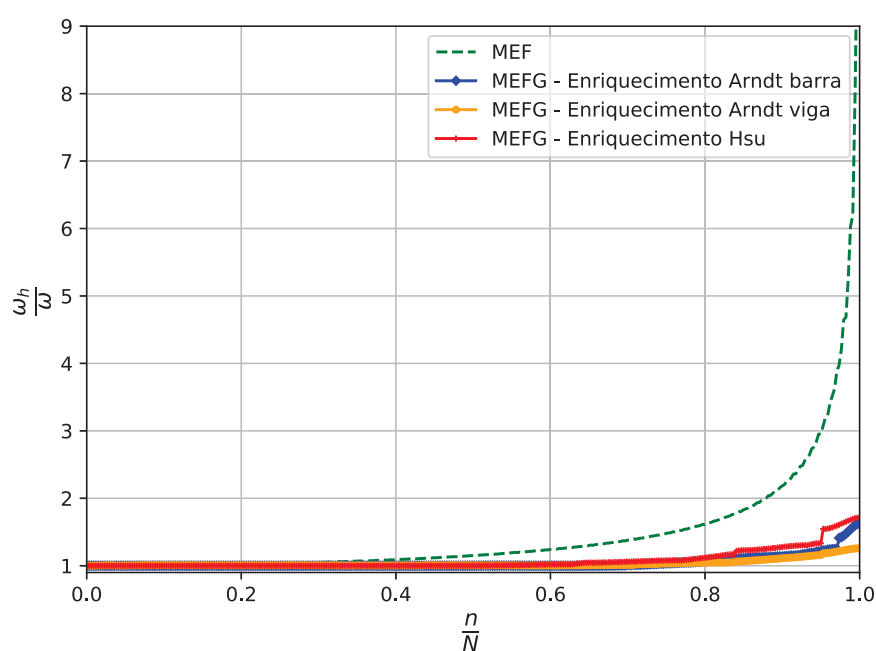
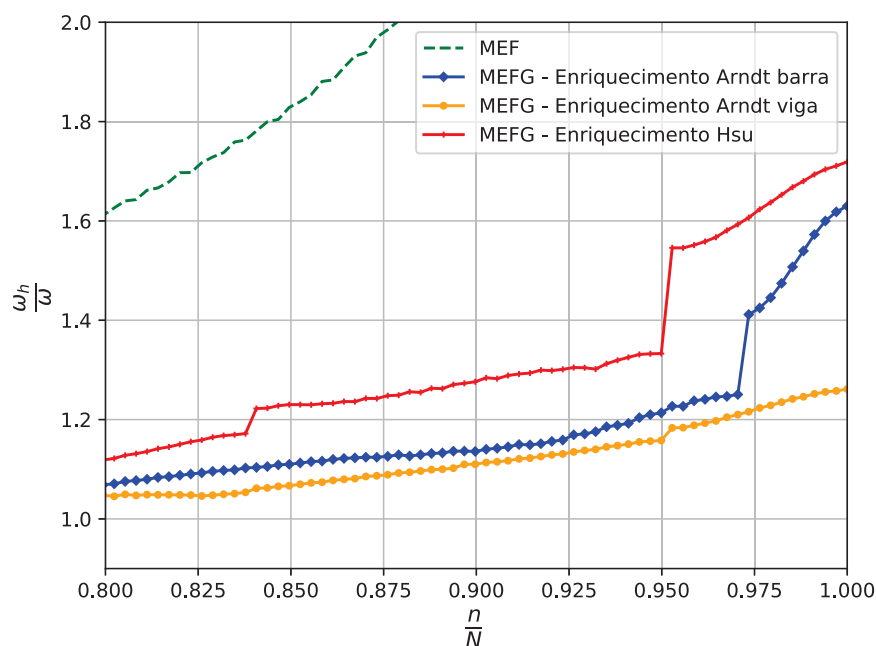


FIGURA 44 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .



No quarto nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 170 elementos e um total de 342 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 320 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 304 graus de liberdade de campo.

Com quatro níveis de enriquecimento o modelo com o enriquecimento de Hsu (2016) perde um pouco sua precisão das respostas a partir de 80% do total de frequências obtidas.

A Figura 45 apresenta o espectro de frequência para a viga com cinco níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 46 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 45 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .

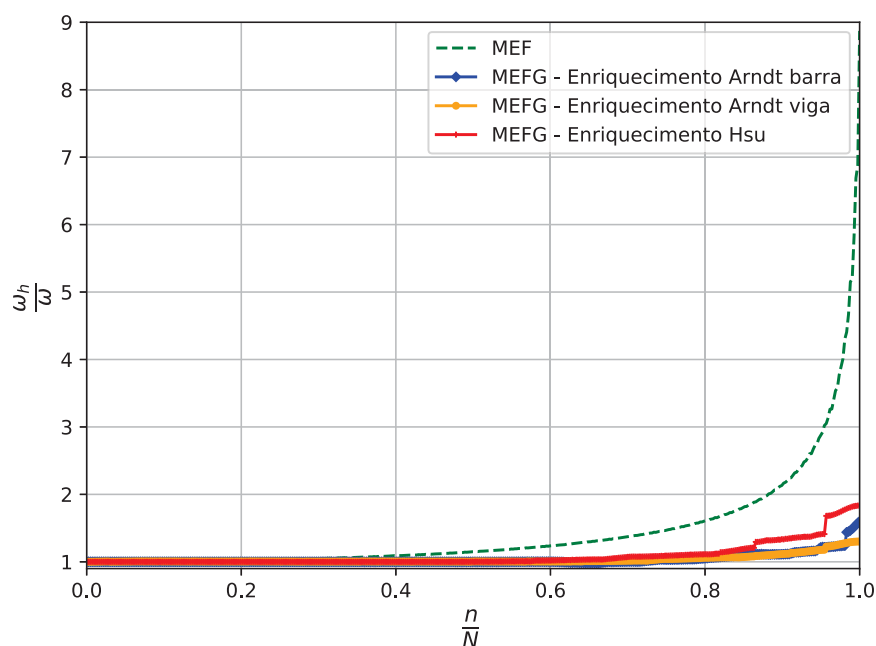
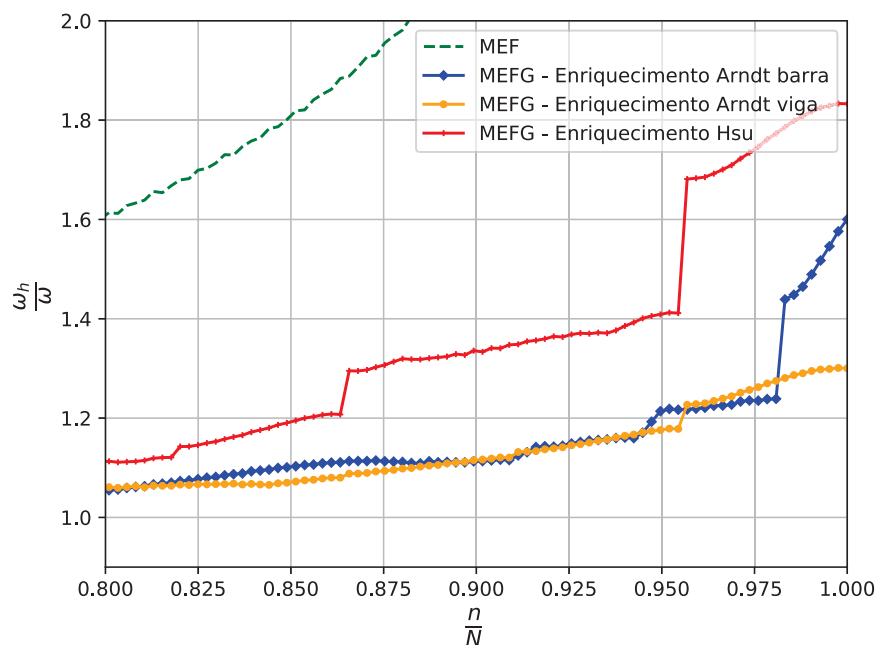


FIGURA 46 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .



Nessa análise o MEF passa a possuir 210 elementos e um total de 422 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 400 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o



enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 380 graus de liberdade de campo.

Os três enriquecimentos sofrem com o aumento do nível de enriquecimento, principalmente com as frequências acima de 80%. Em todos os enriquecimentos há uma perda da acurácia dos últimos 20% de frequências obtidas.

O comportamento do espectro para a viga engastada-livre com relação altura/comprimento da viga de 0,1 quando utilizado o MEF permanece igual, mesmo com o refinamento da malha, e dele podem ser obtidos sempre aproximadamente 40% de frequências confiáveis. Já dos modelos enriquecidos são retirados sempre no mínimo 80% de frequências confiáveis. O que acontece com os enriquecimentos é que com o aumento do nível de enriquecimento a acurácia da obtenção das frequências finais diminui. Isso pode ser causado pelo mau condicionamento das matrizes de massa e rigidez. O enriquecimento que apresenta um melhor comportamento mesmo com o aumento de níveis de enriquecimentos foi o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas, seguido do enriquecimento de Arndt (2009) para barras.

A Tabela 3 apresenta os resultados de frequências naturais adimensionalizadas encontradas com os três enriquecimentos com o terceiro nível de enriquecimento, o resultado de MEF retirado da solução de referência, de Euler-Bernoulli com MEF resultados de uma subdivisão de 130 elementos, de Análise Isogeométrica retiradas de Lee e Park (2013) com 32 elementos e ordem  $p = 3$  e de MEFH retiradas de Hsu (2016) com o emprego de 6 funções enriquecedoras e 10 elementos.

As frequências apresentadas de MEFG serão as obtidas com o terceiro nível de enriquecimento, as de MEF serão retiradas da solução de referência, as de Euler-Bernoulli com MEF são resultados de uma subdivisão de 130 elementos, os resultados de Análise Isogeométrica (LEE; PARK, 2013) possuem 32 elementos e ordem  $p = 3$ , o MPS (LEE; SCHULTZ, 2004) possui 35 pontos de colocação e as frequências de HFEM (HSU, 2016) são retiradas quando são empregadas 6 funções enriquecedoras e 10 elementos.

TABELA 3 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,1$

Modos	Euler-Bernoulli	Análise Isogeo. (LEE; PARK, 2013)	MEFH (HSU, 2016)	MEF	MEFG - Arndt (2009) para barras	MEFG - Arndt (2009) para vigas	MEFG - Hsu (2016)
1	1,875104	1,8677	1,867714	1,867714	1,867715	1,872548	1,867715
2	4,694091	4,5724	4,572408	4,572409	4,572410	4,585042	4,572411
3	7,854757	7,4154	7,415415	7,415417	7,415419	7,438700	7,415419
4	10,995541	9,9874	9,987350	9,987355	9,987355	10,024300	9,987357
5	14,137169	12,3224	12,322432	12,322442	12,322439	12,376532	12,322442
6	17,278761	14,4459	14,445893	14,445910	14,445900	14,520763	14,445906
7	20,420357	16,3883	16,388325	16,388350	16,388332	16,487471	16,388340
8	23,561954	18,1767	18,176619	18,176654	18,176626	18,303226	18,176637
9	26,703554	19,8330	19,832836	19,832883	19,832841	19,989543	19,832855
10	29,845159	21,3743	21,374051	21,374112	21,374054	21,562664	21,374072
11	32,986770	22,8130	22,812481	22,812558	22,812485	23,033447	22,812502
12	36,128390	24,1546	24,153634	24,153727	24,153635	24,404440	24,153654
13	39,270021	25,3892	25,387523	25,387630	25,387523	25,654369	25,387541
14	42,411667	26,2191	26,218657	26,218679	26,218657	26,255349	26,218660
15	45,553331	26,5577	26,555856	26,555938	26,555856	26,738758	26,555866

Na Tabela 3 é evidenciado, mais uma vez, que, com uma relação mais alta entre altura da seção transversal e comprimento as frequências obtidas pelo modelo de viga de Timoshenko diferem das respostas do modelo de Euler-Bernoulli. Os resultados obtidos com os três enriquecimentos se aproximam das respostas de outros autores. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras apresenta resultados mais baixos que os obtidos por MEF, resultados esses que são iguais aos encontrados com MEFH, logo são supostamente mais precisos. Dessa forma para as 15 primeiras frequências o enriquecimento de Arndt (2009) par barras é o melhor entre os três enriquecimentos.

As Figuras 47 a 51 apresentam os gráficos de convergência para as cinco primeiras frequências da viga engastada-livre com relação altura/comprimento de 0,1.

FIGURA 47 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .

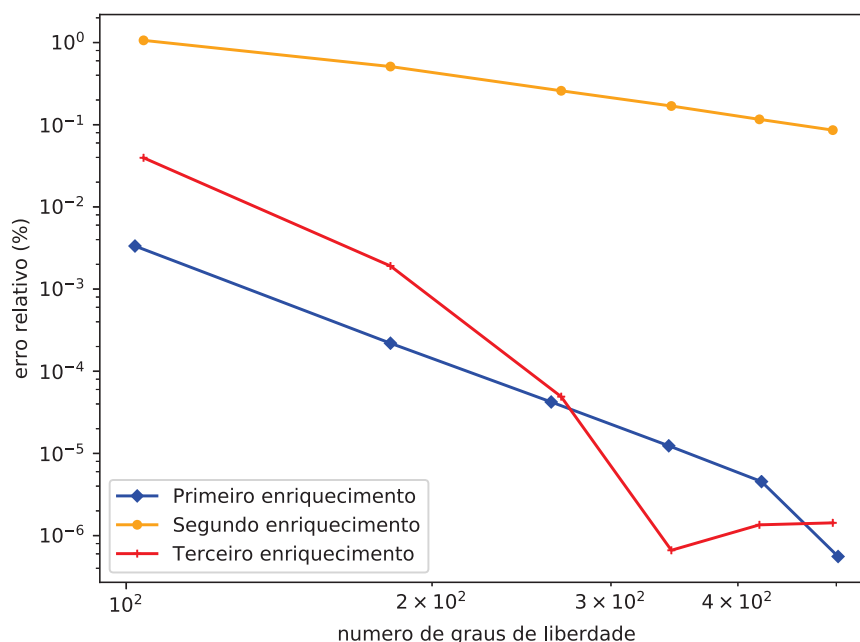


FIGURA 48 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .

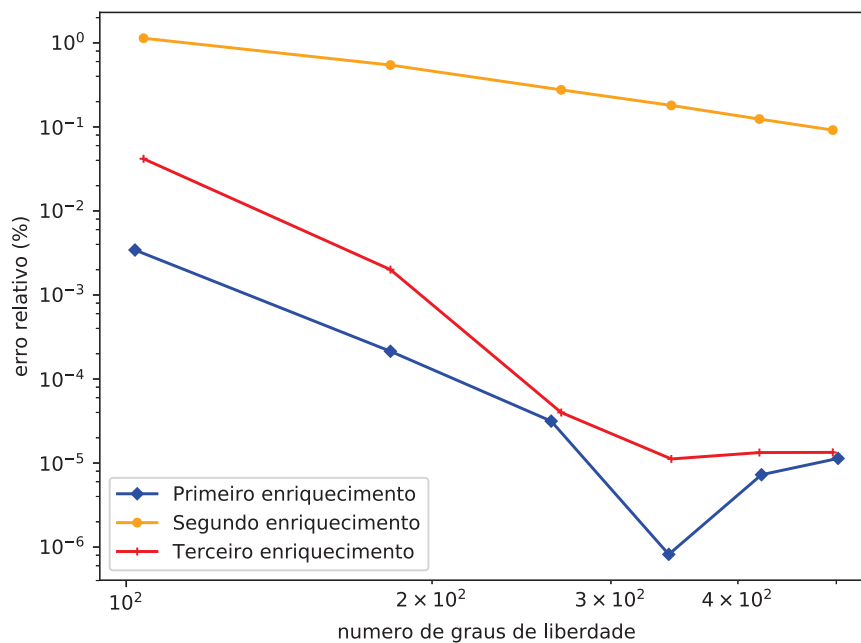


FIGURA 49 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .

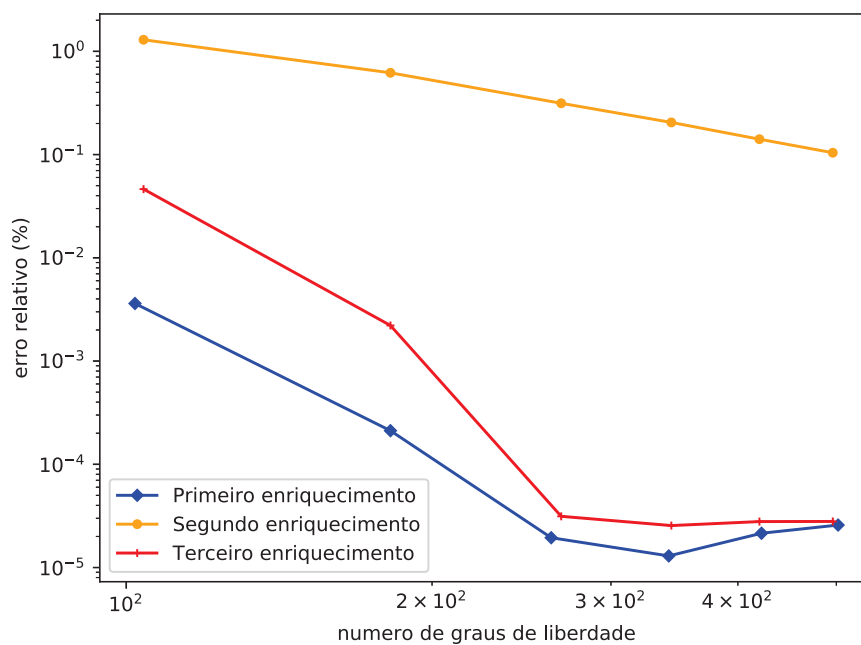


FIGURA 50 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .

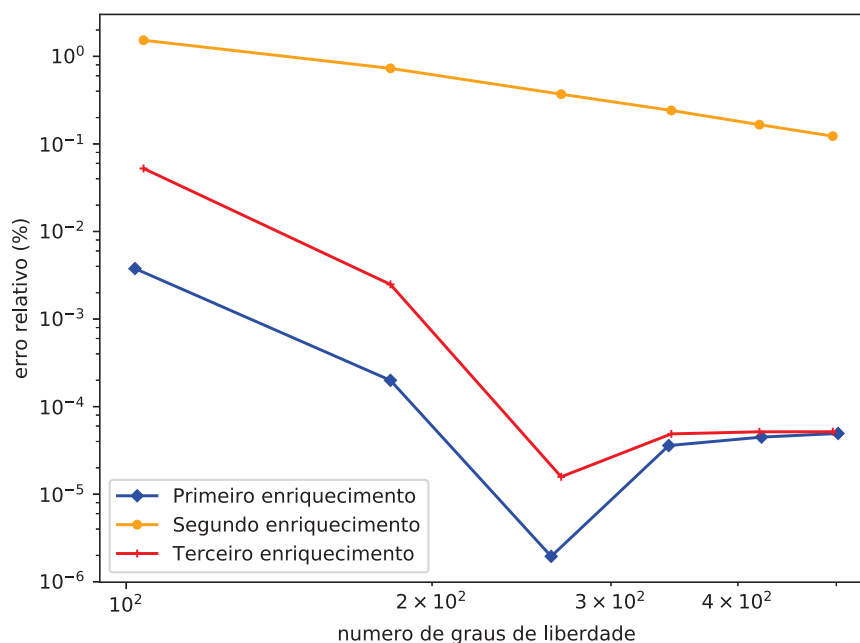
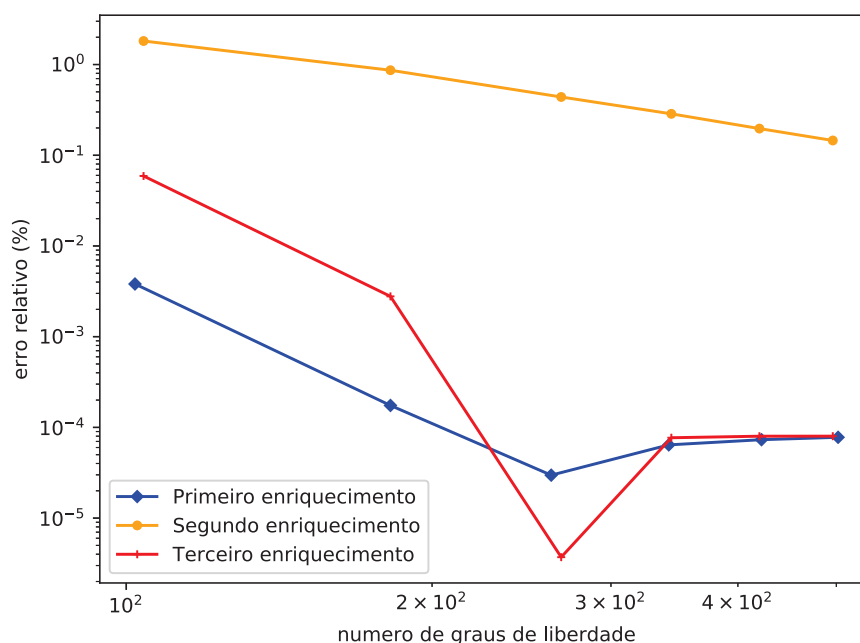


FIGURA 51 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .



O erro relativo apresentado para as cinco primeiras frequências, considerando os enriquecimento de Arndt (2009) para barras de Hsu (2016) são parecidos. O enriquecimento de Hsu (2016) apresenta uma taxa de convergência maior para a primeira, terceira e quinta frequência. O trecho final dos erros relativos de ambos podem estar sofrendo de problema de mau condicionamento, pois ao final de cada gráfico ele esta-

biliza, ou aumenta o valor do erro. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas é o que apresenta valores de erros maiores, e também uma taxa de convergência baixa, mas é o que aparenta uma convergência monotônico.

As Figuras 52 e 53 mostram os gráficos do número de condição das matrizes de rigidez e massa, respectivamente, para esse exemplo.

FIGURA 52 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .

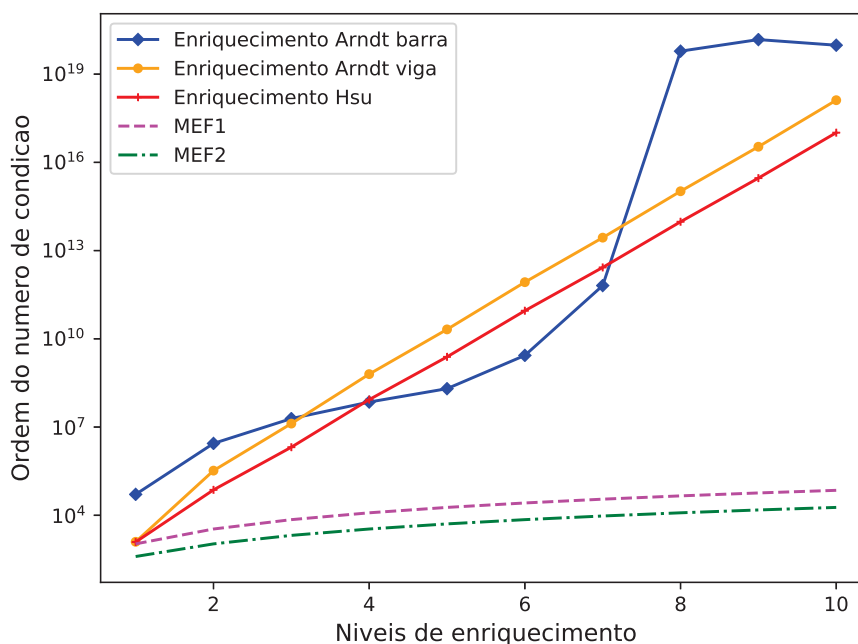
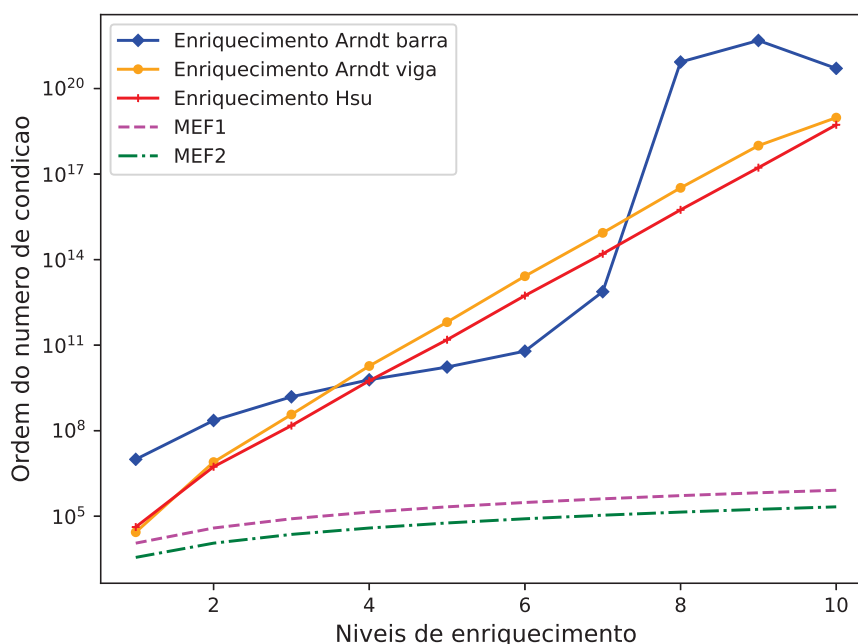


FIGURA 53 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,1$ .



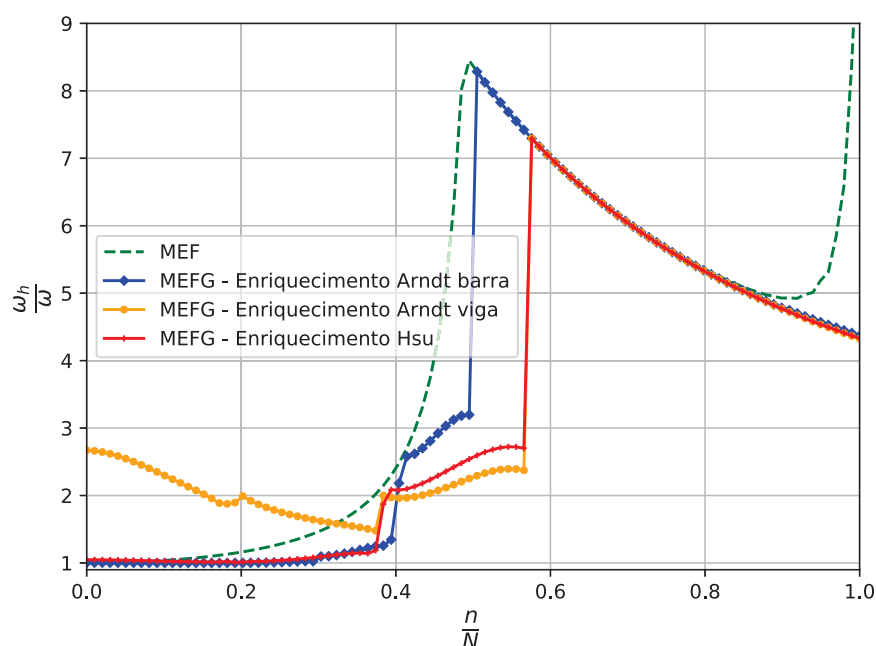
Os gráficos se comportam da mesma forma que nos exemplos anteriores. As matrizes de MEF possuem melhores números de condição, pelos 10 primeiros níveis de enriquecimento. Os números de condição do enriquecimento de Arndt (2009) para barras oscilam bastante entre os mais altos e mais baixos. Entre os outros dois enriquecimentos, o de Hsu (2016) possui as matrizes mais bem condicionadas. O efeito desse número elevado de condição das matrizes pode ser visto nos gráficos de espectro de frequência e nos gráficos de erro relativo.

#### 4.1.2.2 Relação $h/l = 0,002$

É utilizada agora uma relação altura/comprimento com valor de 0,002 para a viga engastada-livre. Com essa relação o efeito de cisalhamento é menor, dessa forma os resultados encontrados para a viga de Timoshenko se aproximam dos resultados de viga de Euler-Bernoulli.

A Figura 54 apresenta o espectro de frequência para a viga com os três diferentes enriquecimentos e com um nível de enriquecimento.

FIGURA 54 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

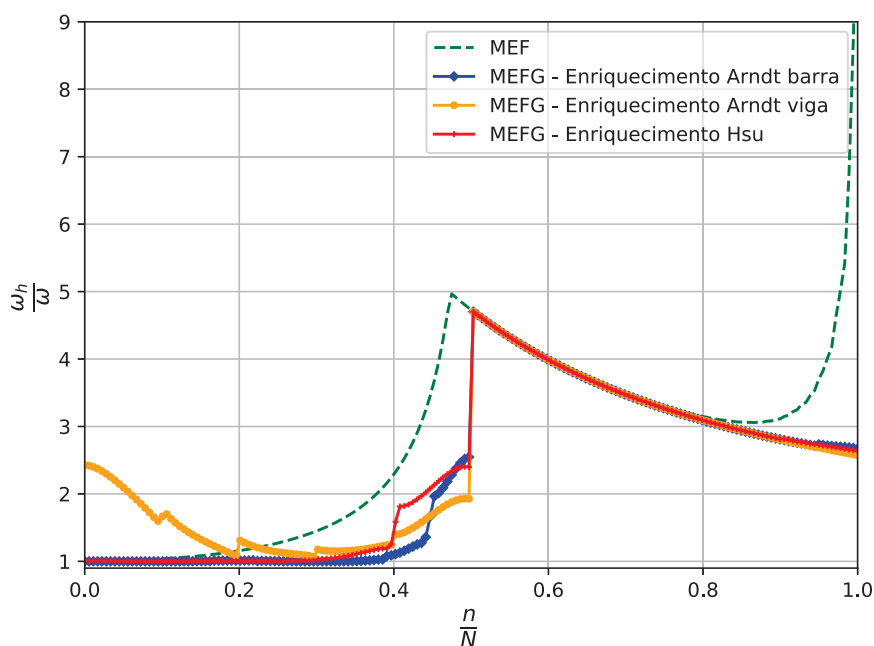


O modelo de MEF possui 50 elementos e um total de 102 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 80 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 17 elementos, ficando no total 36 graus de liberdade nodais e 68 graus de liberdade de campo.

O efeito de travamento é novamente visto nesse exemplo. O modelo de MEF sofre com o travamento e podem ser retiradas cerca de 20% de frequências confiáveis. Quando o modelo é enriquecido, com os enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e de Hsu (2016), o efeito de travamento é amenizado, mas não eliminado.

A Figura 55 apresenta o espectro de frequência para a viga com dois níveis de enriquecimento.

FIGURA 55 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .



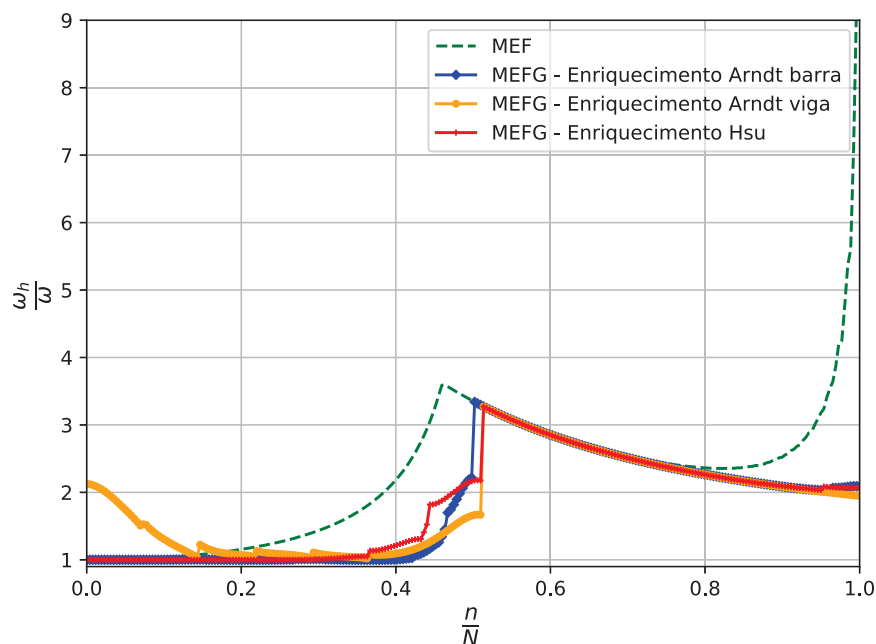
Para realizar o espectro de frequências com o segundo nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 90 elementos e um total de 182 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 160 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 18 elementos, ficando no total 38 graus de liberdade nodais e 144 graus de liberdade de campo.

O enriquecimento de Arndt (2009) sofre com o travamento desde o começo do espectro, dessa maneira é possível considerar nenhuma frequência como confiável.

A Figura 56 apresenta o espectro de frequência para a viga com três níveis de enriquecimento.



FIGURA 56 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

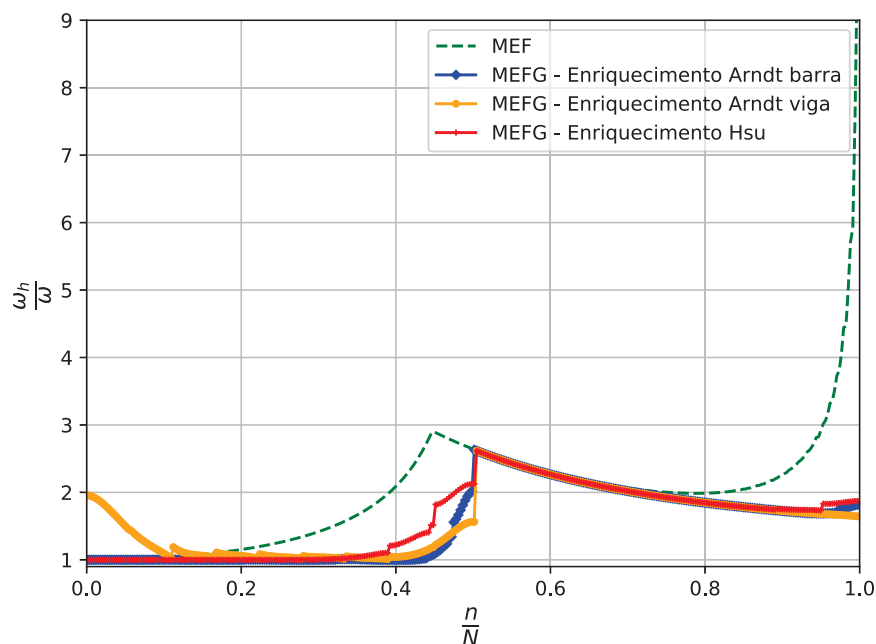


Para o terceiro nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 130 elementos e um total de 262 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 240 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 228 graus de liberdade de campo.

Observa-se que ao aumentar o nível de enriquecimento o efeito de travamento é diminuído, mas ainda assim, para os modelos enriquecidos é possível considerar como precisas cerca de 40% das frequências. Enquanto para o MEF ainda são consideradas apenas 20% das frequências como confiáveis.

A Figura 57 apresenta o espectro de frequência para a viga com quatro níveis de enriquecimento.

FIGURA 57 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

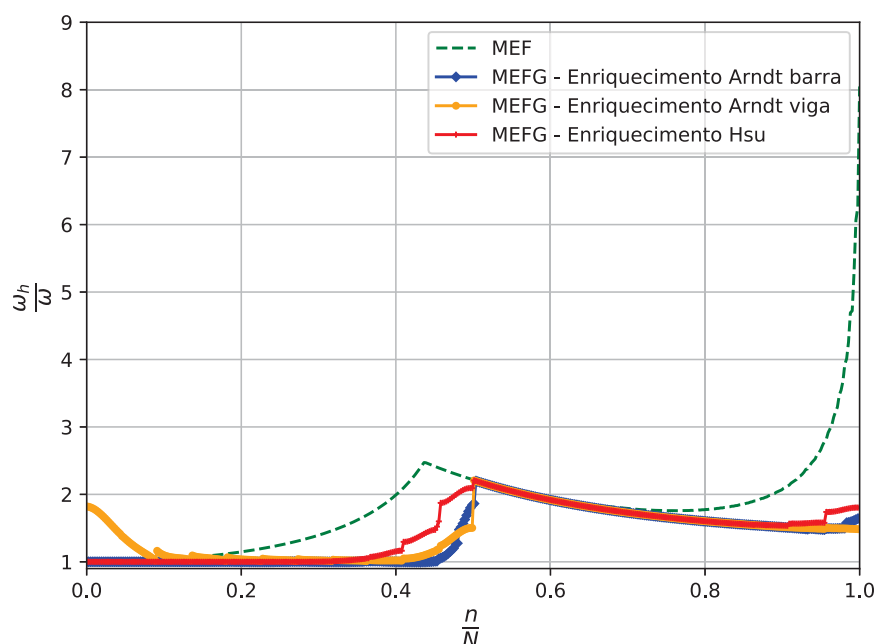


No quarto nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 170 elementos e um total de 342 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 320 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 304 graus de liberdade de campo.

O efeito de travamento para o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas é aliviado, mas ainda não é possível retirar valores de frequências precisas para esse enriquecimento.

A Figura 58 apresenta o espectro de frequência para a viga com cinco níveis de enriquecimento.

FIGURA 58 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .



Nessa análise o modelo de MEF possui 210 elementos e um total de 422 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 400 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 380 graus de liberdade de campo.

Com cinco níveis de enriquecimento o comportamento do espectro para o modelo de MEF permanece o mesmo, o efeito de travamento diminui, mas não a ponto de aumentar a quantidade de frequências confiáveis. Do enriquecimento de Arndt (2009) para barras é possível retirar pouco mais de 40% de frequências confiáveis, enquanto o enriquecimento de Hsu (2016) ao se aproximar de 40% sofre o efeito de travamento.

A viga engastada-livre com relação altura/comprimento com valor de 0,002 sofre com o efeito de travamento. O modelo com o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas sofre desde o começo do espectro com o travamento, dessa forma nenhuma faixa de frequências pode ser considerada confiável. O modelo de MEF começa a sofrer com o travamento a partir de 20% das frequências, enquanto o enriquecimento de Arndt (2009) para barras consegue passar de 40% de frequências encontradas. O enriquecimento de Hsu (2016) também melhora o resultado de MEF, mas da mesma forma, não elimina o efeito de travamento, sofrendo dele quando se aproxima de 40% das frequências obtidas.

A Tabela 4 apresenta os resultados de frequências naturais adimensionalizadas encontradas com os três enriquecimentos com o terceiro nível de enriquecimento, o resultado de MEF retirado da solução de referência, de Euler-Bernoulli com MEF resultados de uma subdivisão de 130 elementos, de Análise Isogeométrica retiradas de Lee e Park (2013) com 32 elementos e ordem  $p = 3$  e de MEFH retiradas de Hsu (2016) com o emprego de 6 funções enriquecedoras e 10 elementos.

TABELA 4 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ 

Modos	Euler-Bernoulli	Análise Isogeo. (LEE; PARK, 2013)	MEFH (HSU, 2016)	MEF	MEFG - Arndt (2009) para barras	MEFG - Arndt (2009) para vigas	MEFG - Hsu (2016)
1	1,875104	1,8751	1,875101	1,874975	1,875744	3,988469	1,875747
2	4,694091	4,6941	4,694039	4,694144	4,695584	9,952651	4,695635
3	7,854757	7,8548	7,854549	7,854308	7,856941	16,564605	7,857148
4	10,995541	10,9962	10,995001	10,994956	10,997963	23,005105	10,998487
5	14,137169	14,1407	14,136061	14,136070	14,139280	29,276756	14,140290
6	17,278761	17,2905	17,276784	17,276813	17,279949	35,339532	17,281582
7	20,420357	20,4518	20,417144	20,417210	20,419991	41,161628	20,422317
8	23,561954	23,6350	23,557076	23,557148	23,559419	46,717711	23,562422
9	26,703554	26,8580	26,696516	26,696616	26,698249	51,989288	26,701833
10	29,845159	30,1487	29,835401	29,835543	29,836288	56,964557	29,840502
11	32,986770	33,5494	32,973668	32,973855	32,975161	61,637821	32,978388
12	36,128390	37,1210	36,111255	36,111505	36,112161	66,008474	36,115460
13	39,270021	40,9461	39,248097	39,248411	39,248836	70,079442	39,251696
14	42,411667	45,1305	42,384134	42,384524	42,384856	73,854818	42,387082
15	45,553331	49,8012	45,519306	45,519783	45,520076	77,335846	45,521604

A Tabela 4 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos com os três enriquecimentos estudados e os resultados de outros autores. Comparando os resultados obtidos com uma relação entre a altura da seção transversal e comprimento da viga baixa, de valor 0,002, e a viga de Euler-Bernoulli, podemos concluir que com essa relação baixa os valores de frequência da viga de Timoshenko se aproximam da resposta de Euler-Bernoulli. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas, como já era esperado pelo observado nos espectros, sofre com o problema de travamento e as frequências encontradas possuem valores superiores aos demais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras possui as respostas que mais se aproximam da solução de referência, seguido das respostas do enriquecimento de Hsu (2016).

As Figuras 59 a 63 apresentam os gráficos de convergência para as cinco primeiras frequências da viga engastada-livre com relação altura/comprimento de 0,002.

FIGURA 59 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

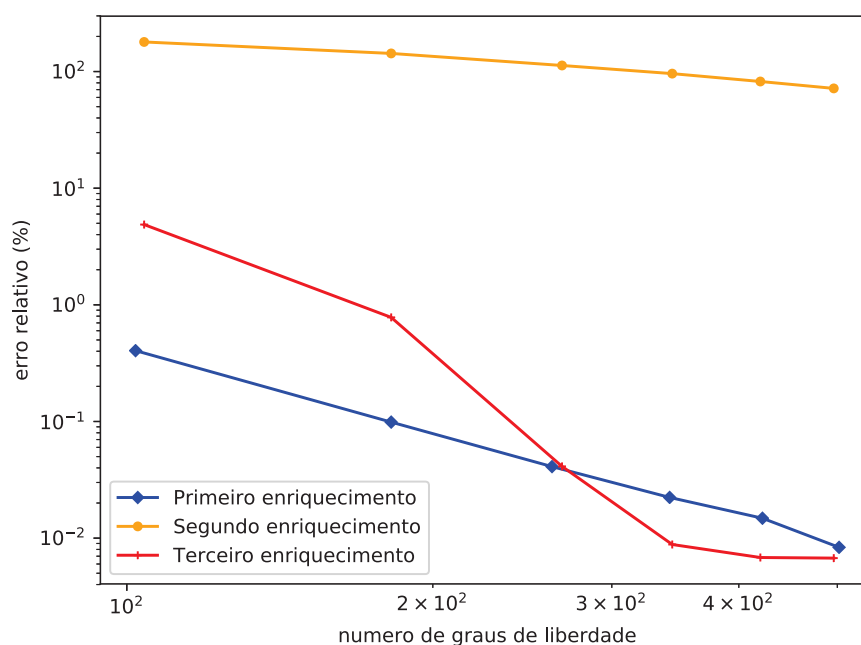


FIGURA 60 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

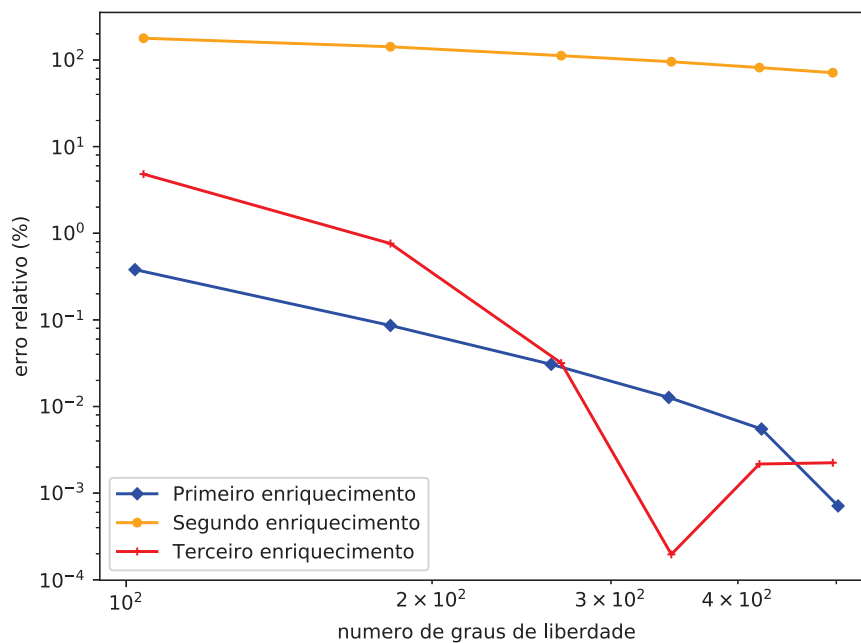


FIGURA 61 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

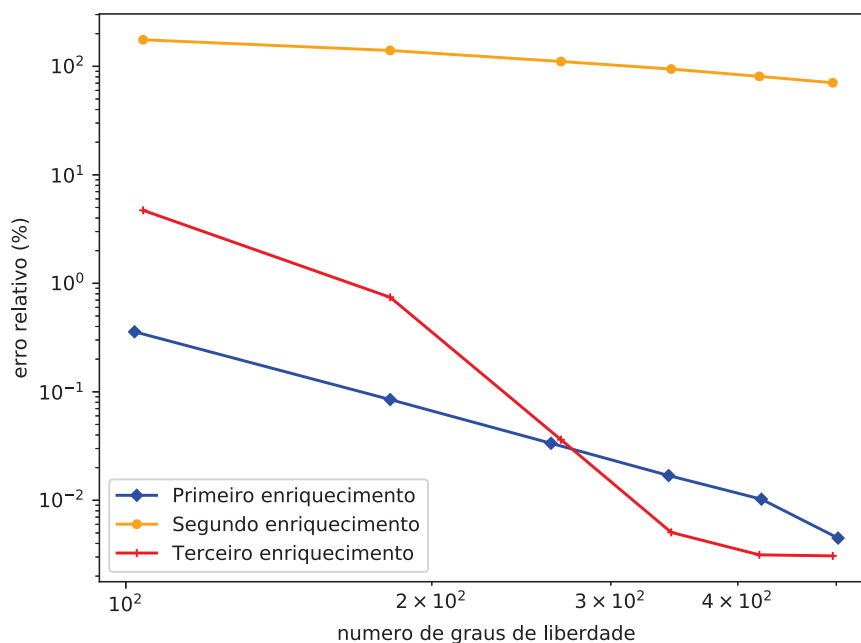


FIGURA 62 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

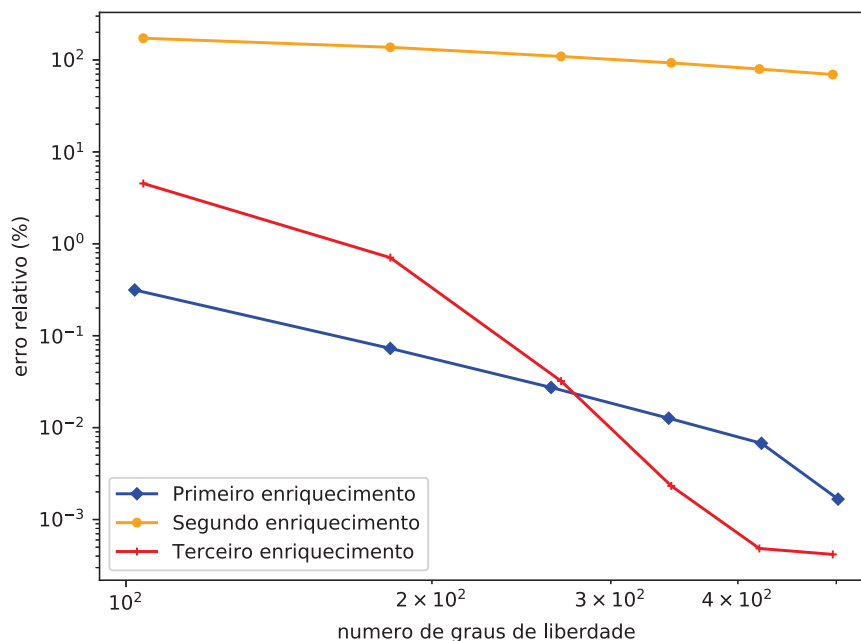
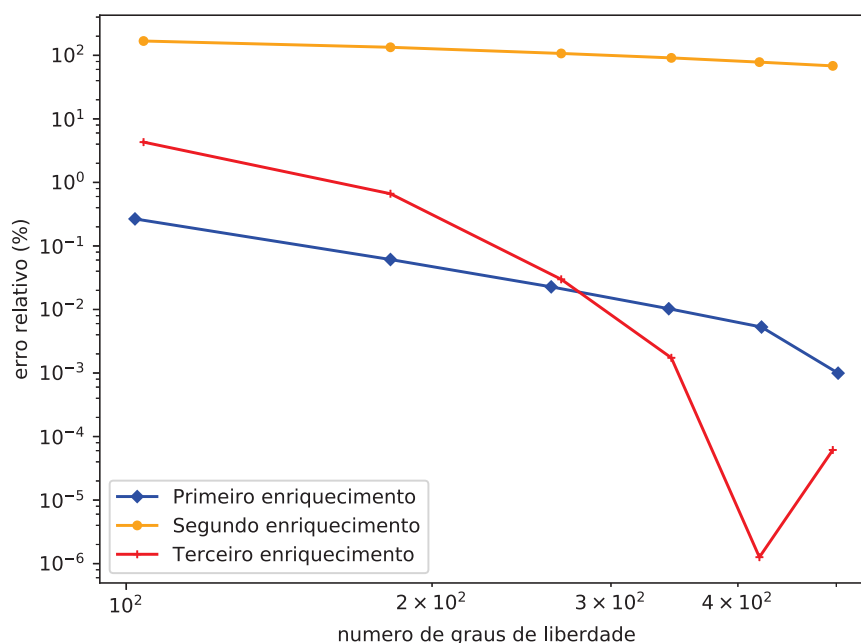


FIGURA 63 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .



Os gráficos de convergência para o caso da viga engastada-livre com relação altura/comprimento de 0,002 apontam que a maior taxa de convergência ocorre com o enriquecimento de Hsu (2016). Os menores valores do erro relativo com um maior número de graus de liberdade ocorrem também com o enriquecimento de Hsu (2016). Mas com um número de graus de liberdade elevado o enriquecimento de Hsu (2016)



apresenta resultados que ou são estáveis ou os valores de erro se elevam, e isso pode ser causado por um mau condicionamento das matrizes de massa e rigidez. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas apresenta resultados de erro relativo muito elevados, o que já podia ser visto nos espectros de frequência, causado pelo efeito de travamento.

As Figuras 64 e 65 mostram os gráficos do número de condição das matrizes de rigidez e massa, respectivamente, para esse exemplo.

FIGURA 64 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

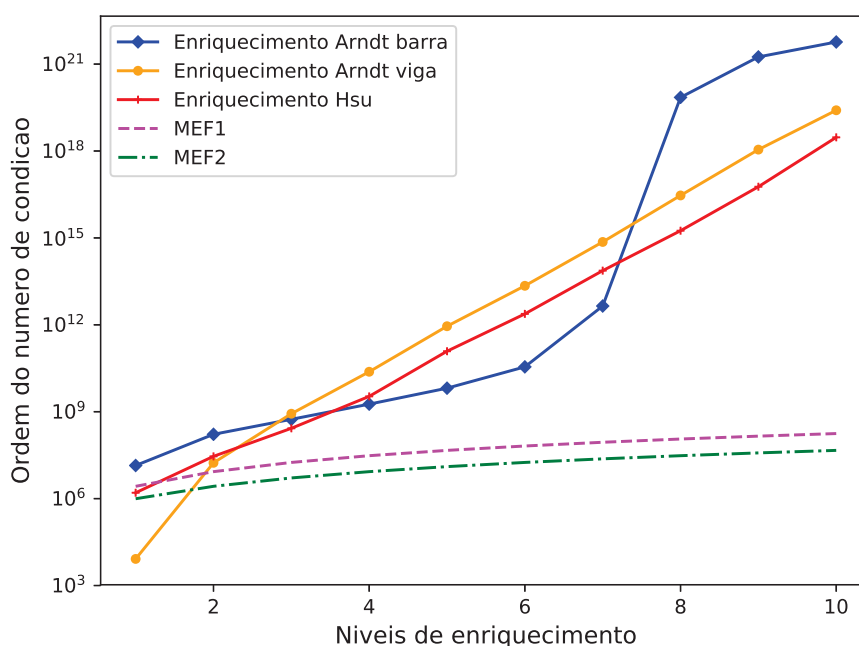
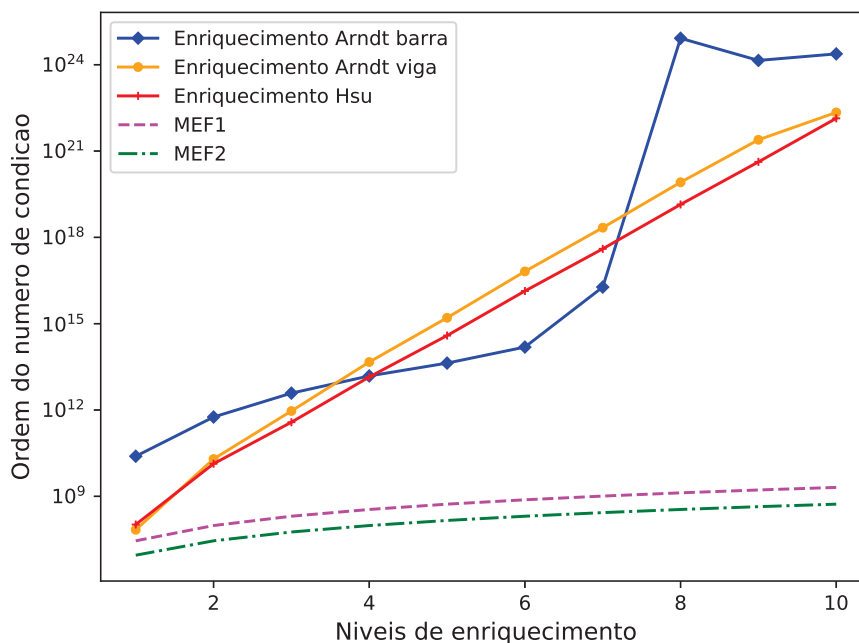


FIGURA 65 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .



Para a relação altura/comprimento da viga de 0,002, o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas sofre com o problema de travamento. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras possui o maior número de condição, chegando na casa de  $10^{24}$ . As matrizes do enriquecimento de Hsu (2016) são as que possuem melhores números de condição para o MEFG.

#### 4.1.3 Viga bi-engastada

Como condição de contorno para os últimos exemplos, será considerada uma viga bi-engastada, ilustrada na Figura 66.

FIGURA 66 – VIGA BI-ENGASTADA.



Serão realizadas análises de viga bi-engastada utilizando os três diferentes enriquecimentos do MEFG que foram apresentados no capítulo anterior, sendo realizada uma variação na relação entre a altura da seção transversal e o comprimento da viga. Após os resultados serem apresentados a partir dos espectros de frequências com variação de níveis de enriquecimento é apresentada uma tabela para que seja possível realizar uma comparação com outros trabalhos. Na sequência são apresentados os gráficos de convergência para as cinco primeiras frequências e no fim são mostrados os gráficos do número de condição das matrizes de rigidez e massa.

#### 4.1.3.1 Relação $h/l = 0,2$

Esta primeira seção apresenta os resultados de frequência para a viga bi-engastada com uma relação entre a altura da seção transversal e o comprimento de viga com valor de  $0,2$ . Esse valor de relação é considerado alto, e o efeito de cisalhamento deve ser levado em consideração.

A Figura 67 apresenta o espectro de frequência para a viga com um nível de enriquecimento. Enquanto a Figura 68 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 67 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

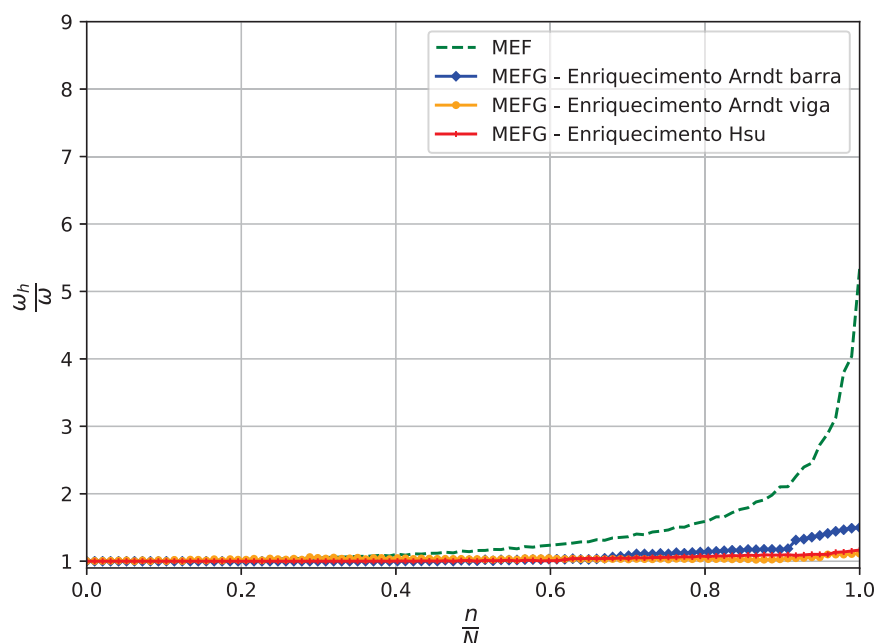
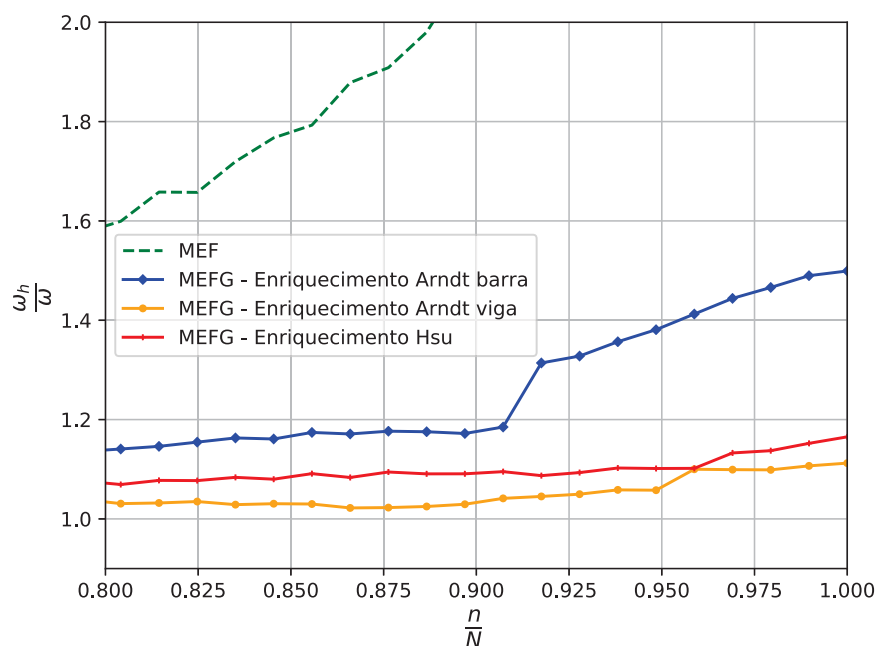


FIGURA 68 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



Nessa análise o modelo de MEF possui 50 elementos e um total de 102 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 80 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 17 elementos, ficando no total 36 graus de liberdade nodais e 68 graus de liberdade de campo.

Com um nível de enriquecimento é possível observar que a solução encontrada em MEF é a que mais se afasta da solução de referência, enquanto as soluções enriquecidas possuem melhores resultados. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras começa a perder a precisão a partir de aproximadamente 70% do total de frequências.

A Figura 69 apresenta o espectro de frequência para a viga com dois níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 70 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 69 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

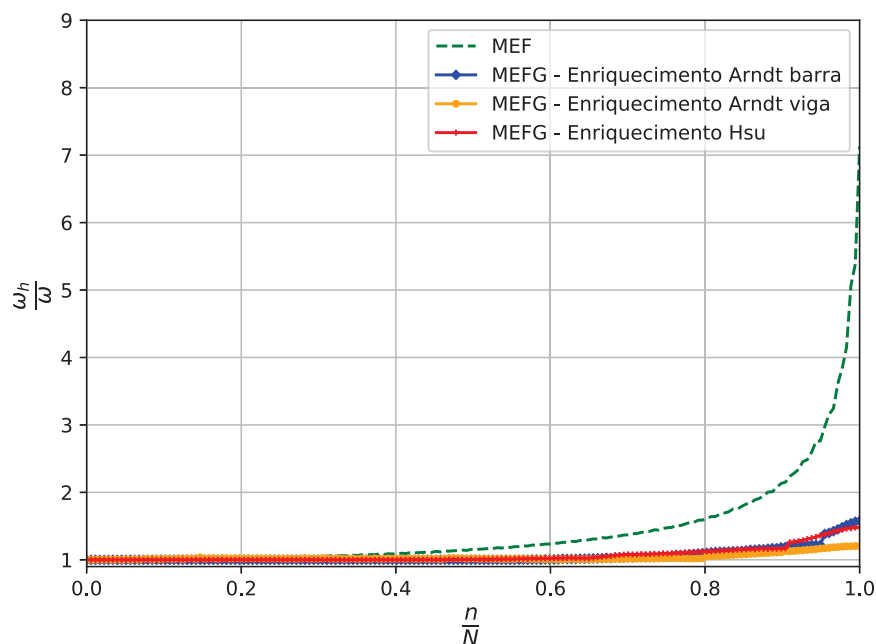
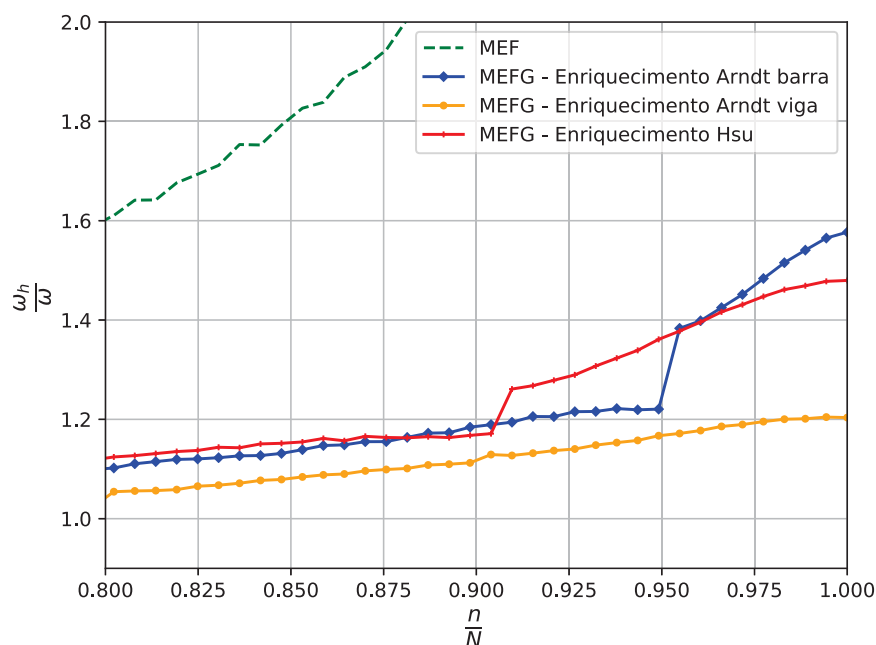


FIGURA 70 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



Para realizar o espectro de frequências com o segundo nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 90 elementos e um total de 182 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 160 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG

foram subdivididos em 18 elementos, ficando no total 38 graus de liberdade nodais e 144 graus de liberdade de campo.

Da curva de espectro de MEF é possível observar aproximadamente 40% de resultados confiáveis. A perda de precisão no enriquecimento de Arndt (2009) para barras diminui, porém, começa a ocorrer também no enriquecimento de Hsu (2016).

A Figura 71 apresenta o espectro de frequência para a viga com três níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 72 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 71 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

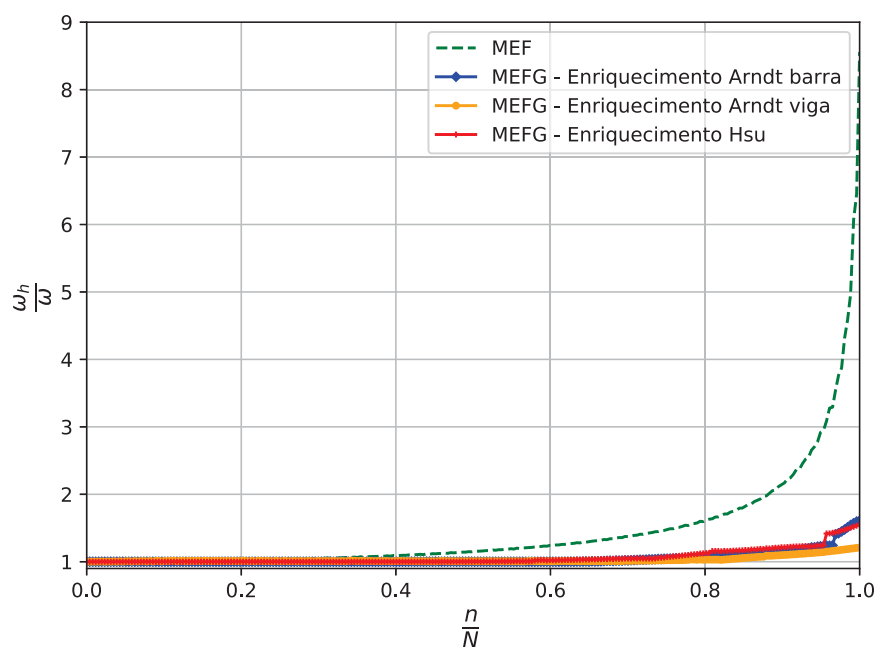
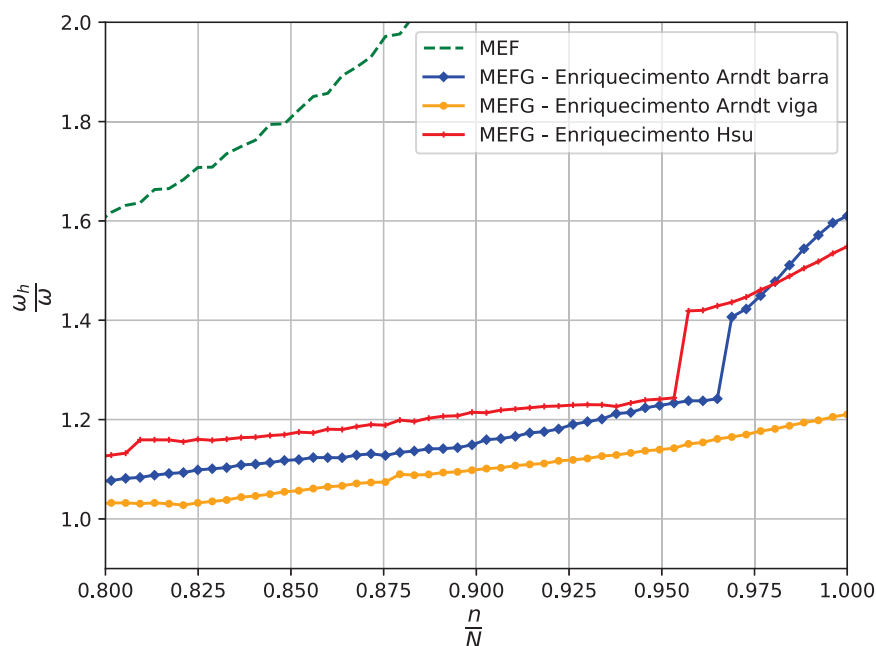


FIGURA 72 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



Para o terceiro nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 130 elementos e um total de 262 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 240 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 228 graus de liberdade de campo.

Os resultados dos modelos de MEFG são melhores do que o modelo de MEF, mesmo ocorrendo uma diminuição da precisão no final do espectro para os enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e de Hsu (2016).

A Figura 73 apresenta o espectro de frequência para a viga com quatro níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 74 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 73 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

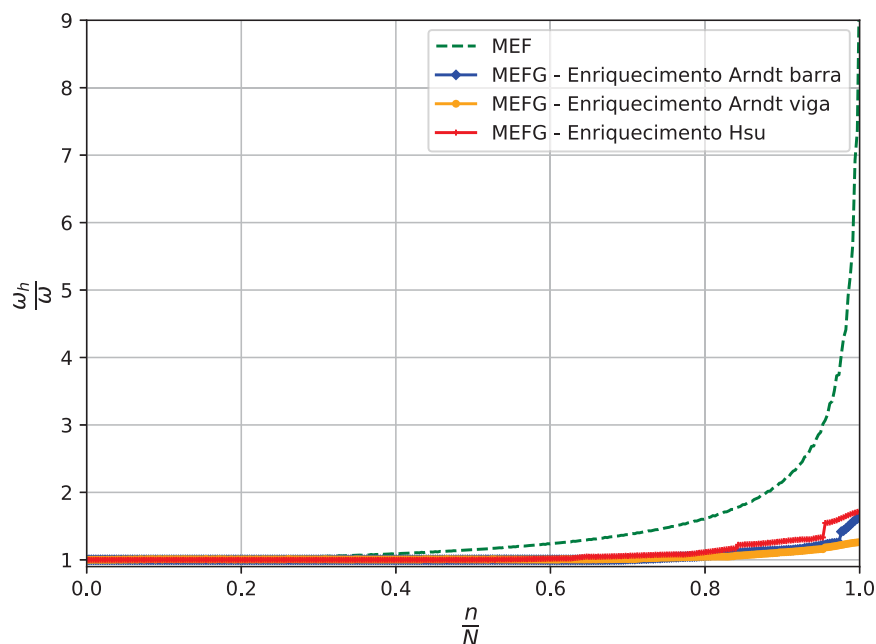
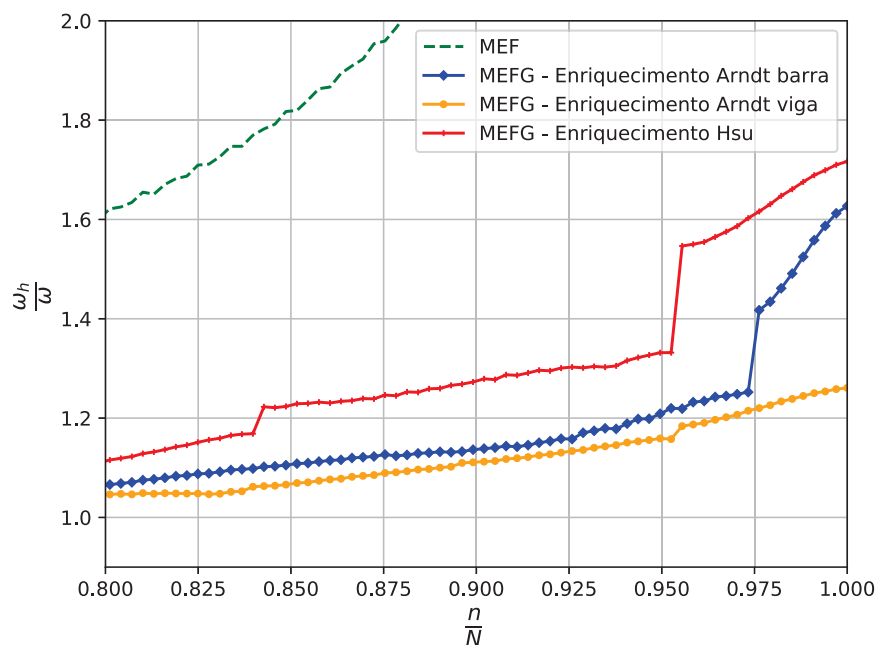


FIGURA 74 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



No quarto nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 170 elementos e um total de 342 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 320 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para



vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 304 graus de liberdade de campo.

O enriquecimento de Hsu (2016) sofre mais com o aumento do nível de enriquecimento, mas ainda assim pouco mais de 80% de suas frequências são bastante precisas. Para os outros dois enriquecimentos são precisas até aproximadamente 90% das frequências.

A Figura 75 apresenta o espectro de frequência para a viga com cinco níveis de enriquecimento. Enquanto a Figura 76 apresenta um zoom do espectro nas frequências mais altas.

FIGURA 75 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

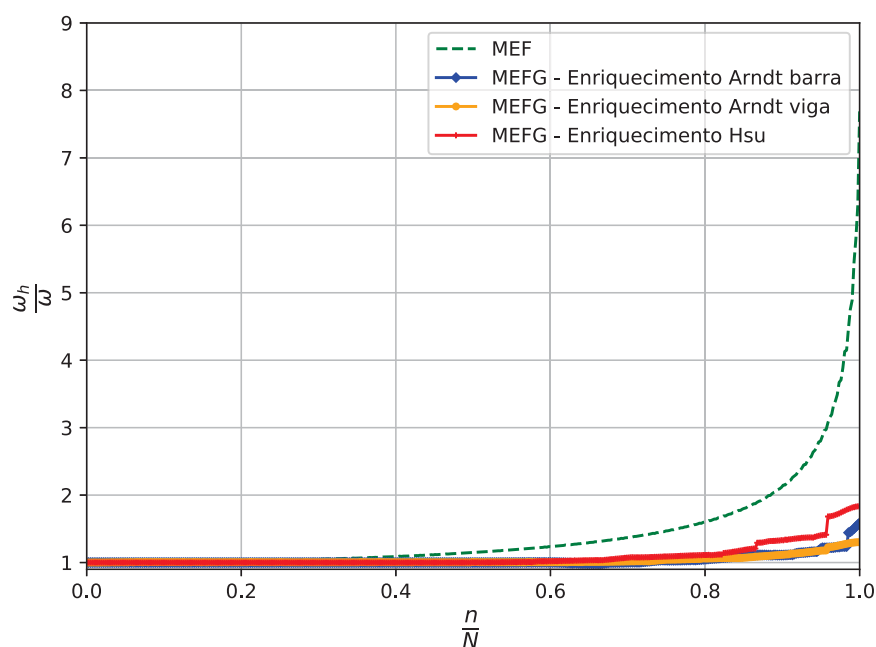
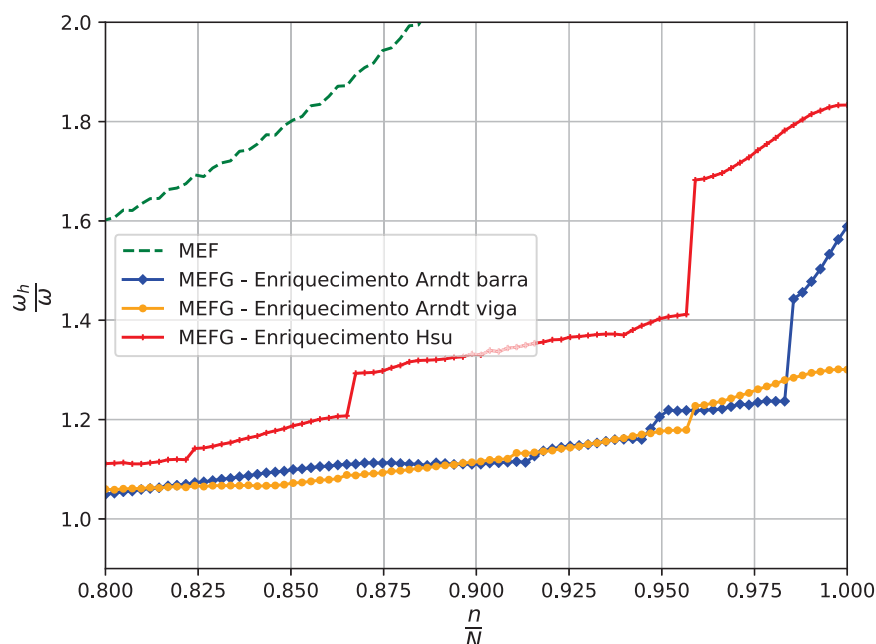


FIGURA 76 – ZOOM DO ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



Nessa análise o modelo de MEF possui 210 elementos e um total de 422 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 400 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 380 graus de liberdade de campo.

O aumento do número de níveis de enriquecimento causou um aumento do erro no final do espectro para todos os enriquecimentos. Para os enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e para vigas ele ocorre a partir de aproximadamente 90% do total de frequências, já para o enriquecimento de (HSU, 2016) ocorre a partir de 80%.

Mesmo com o aumento do refino da malha para o modelo utilizando somente MEF a quantidade de frequências que podem ser aproveitadas é de aproximadamente 40%. Os três enriquecimentos do MEFG utilizados melhoram bastante a resposta do modelo, chegando a aproximadamente 80% de frequências precisas. Com o aumento do nível de enriquecimento os três enriquecimentos sofrem para obter as frequências finais, e isso pode ser causado por um mau condicionamento das matrizes de massa e rigidez. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras sofre desde o primeiro nível de enriquecimento, mas sua resposta vai melhorando conforme se aumenta o número de níveis. O enriquecimento de Hsu (2016) começa a sofrer a partir do segundo nível e conforme os níveis de enriquecimento aumentam ele vai piorando. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas, por sua vez, é o que menos sofre, perdendo precisão nas

frequências finais somente com o quinto nível de enriquecimento.

A Tabela 5 apresenta os resultados de frequências naturais adimensionalizadas encontradas com os três enriquecimentos com o terceiro nível de enriquecimento, o resultado de MEF retirado da solução de referência, de Euler-Bernoulli com MEF resultados de uma subdivisão de 130 elementos, de Análise Isogeométrica retiradas de Lee e Park (2013) com 32 elementos e ordem  $p = 3$  e de MEFH retiradas de Hsu (2016) com o emprego de 6 funções enriquecedoras e 10 elementos.

TABELA 5 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h_c/l = 0,2$

Modos	Euler-Bernoulli	Análise Isogeo. (LEE; PARK, 2013)	MEFH (HSU, 2016)	MEF	MEFG - Arndt (2009) para barras	MEFG - Arndt (2009) para vigas	MEFG - Hsu (2016)
1	4,730041	4,2420	4,242014	4,242015	4,242015	4,245331	4,242015
2	7,853205	6,4179	6,417938	6,417939	6,417939	6,424946	6,417939
3	10,995608	8,2853	8,285317	8,285320	8,285319	8,297891	8,285319
4	14,137166	9,9037	9,903722	9,903728	9,903725	9,924156	9,903726
5	17,278762	11,3487	11,348745	11,348754	11,348748	11,379474	11,348750
6	20,420357	12,6403	12,640246	12,640259	12,640249	12,682532	12,640252
7	23,561954	13,4567	13,456739	13,456740	13,456739	13,458867	13,456740
8	26,703554	13,8102	13,810138	13,810156	13,810141	13,863431	13,810145
9	29,845159	14,4806	14,480557	14,480561	14,480558	14,489259	13,810146
10	32,986770	14,9383	14,938292	14,938318	14,938295	15,008888	14,938302
11	36,128390	15,6996	15,699635	15,699640	15,699636	15,712815	15,699637
12	39,270021	16,0041	16,004037	16,004072	16,004039	16,096363	16,004047
13	42,411667	16,9621	16,962091	16,962098	16,962091	16,980742	16,962093
14	45,553331	17,0001	16,999882	16,999928	16,999884	17,115000	16,999893
15	48,695018	17,9361	17,935684	17,935742	17,935685	18,073482	17,935695

Na Tabela 5 é possível observar que os resultados obtidos com os três enriquecimentos se aproximam da solução de outros autores. Com uma relação altura/comprimento de valor 0,2 as respostas não se aproximam da solução de Euler-Bernoulli, pois o efeito de cisalhamento é relevante. Novamente os valores encontrados para os enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e de Hsu (2016) são mais baixos que os valores de MEF, portanto devem ser mais precisos. Eles se aproximam dos valores encontrados com MEFH. E entre os dois, o que possui valores menores é o enriquecimento de Arndt (2009) para barras, que deve ser considerado mais preciso.

As Figuras 77 a 81 apresentam os gráficos de convergência para as cinco primeiras frequências da viga bi-engastada com relação altura/comprimento de 0,2.

FIGURA 77 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

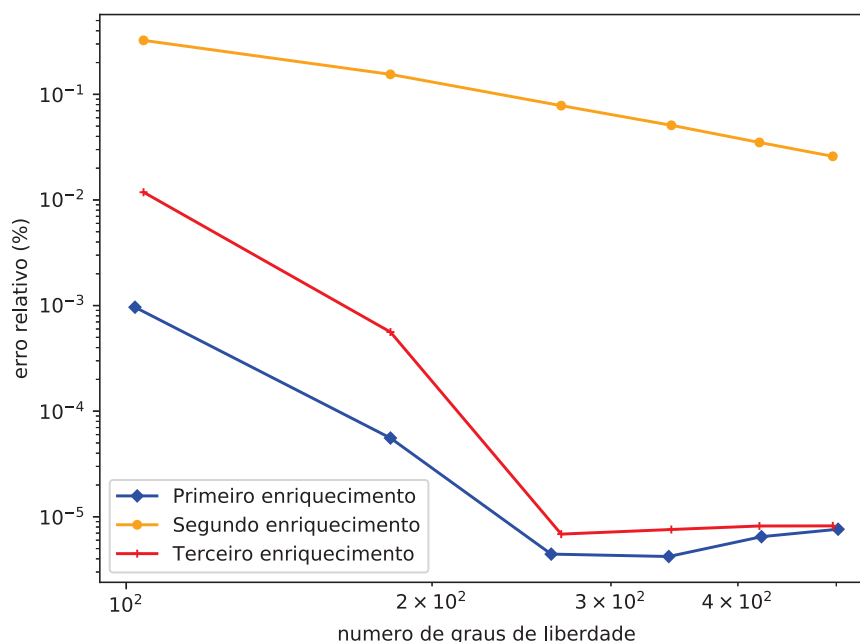


FIGURA 78 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

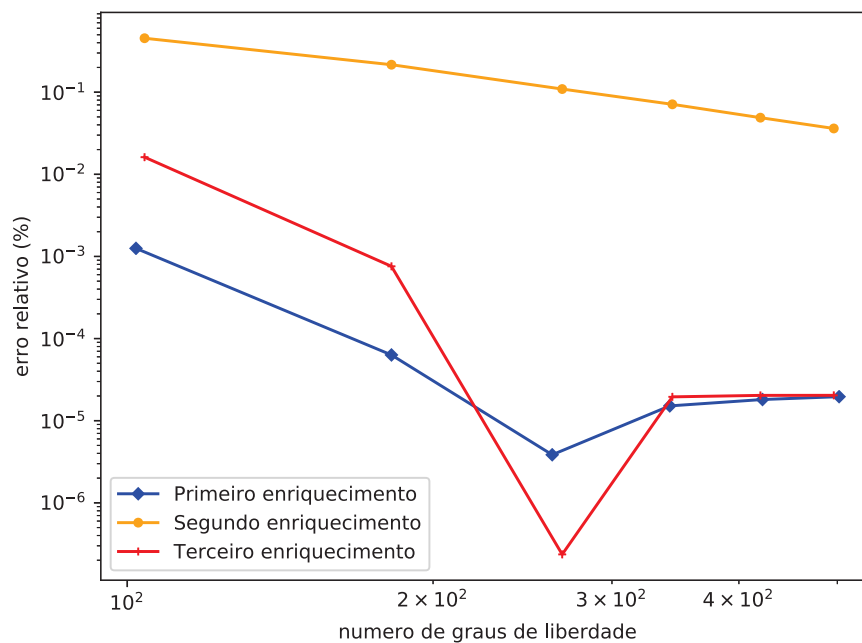


FIGURA 79 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

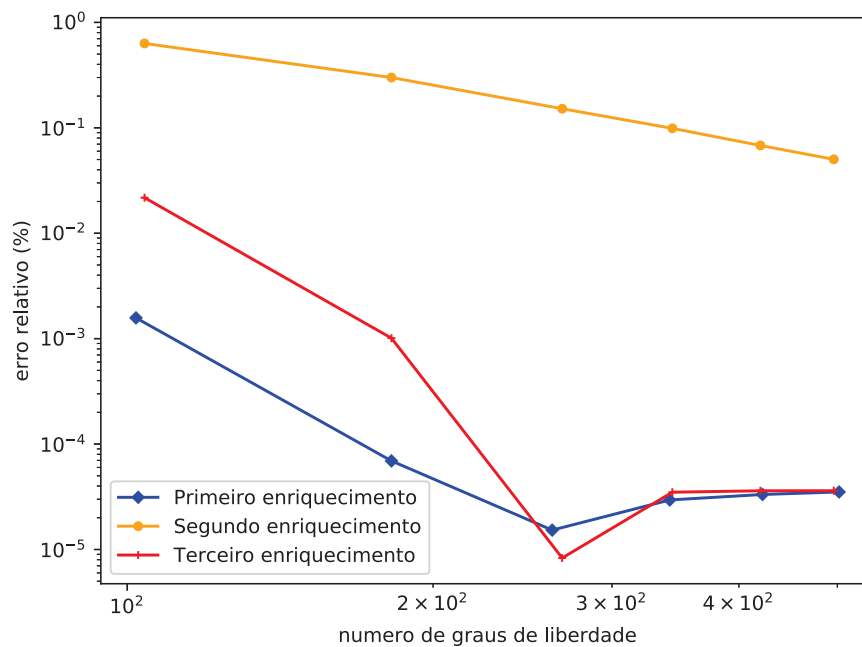


FIGURA 80 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

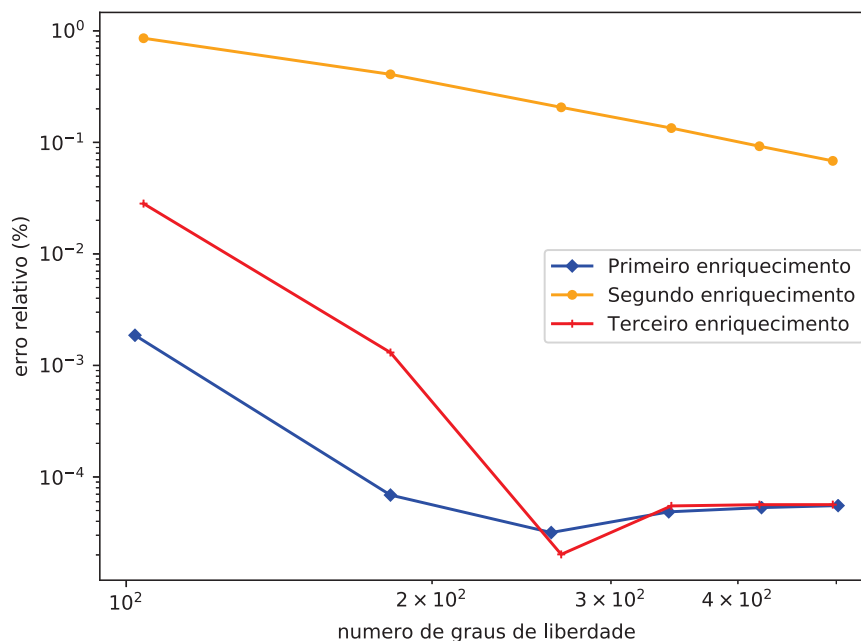
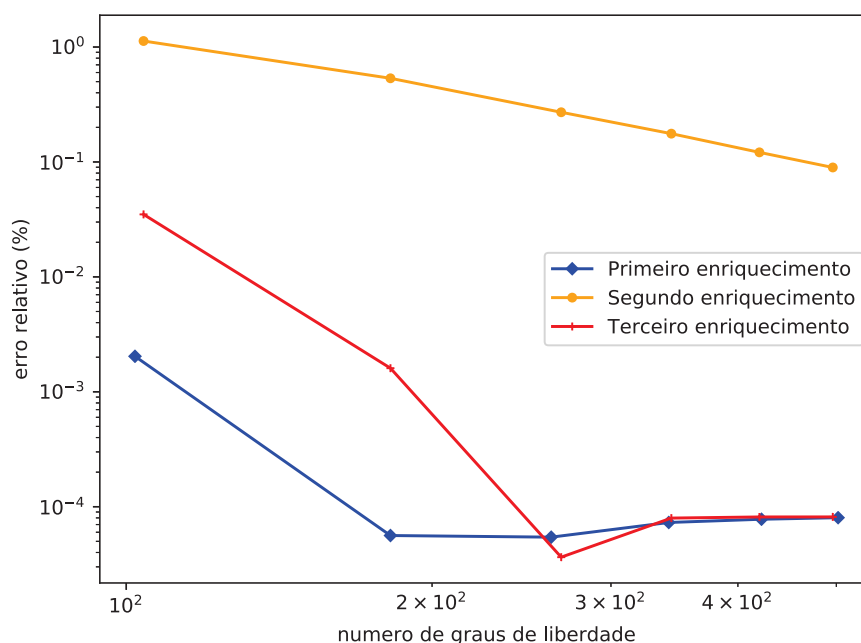


FIGURA 81 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



Os erros relativos para a viga bi-engastada com relação altura/comprimento da viga de 0,2 para os enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e de (HSU, 2016) são próximos, o enriquecimento de Hsu (2016) apresenta uma maior taxa de convergência mas o enriquecimento de Arndt (2009) para barras apresenta os resultados mais precisos. Ao final de ambos os enriquecimentos há uma estabilização do erro relativo

que pode ser causada por problema de condicionamento das matrizes de massa e rigidez. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas é o que aparenta possuir uma convergência monotônica, porém, também apresenta os maiores erros e a menor taxa de convergência.

As Figuras 82 e 83 mostram os gráficos do número de condição das matrizes de rigidez e massa, respectivamente, para esse exemplo.

FIGURA 82 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .

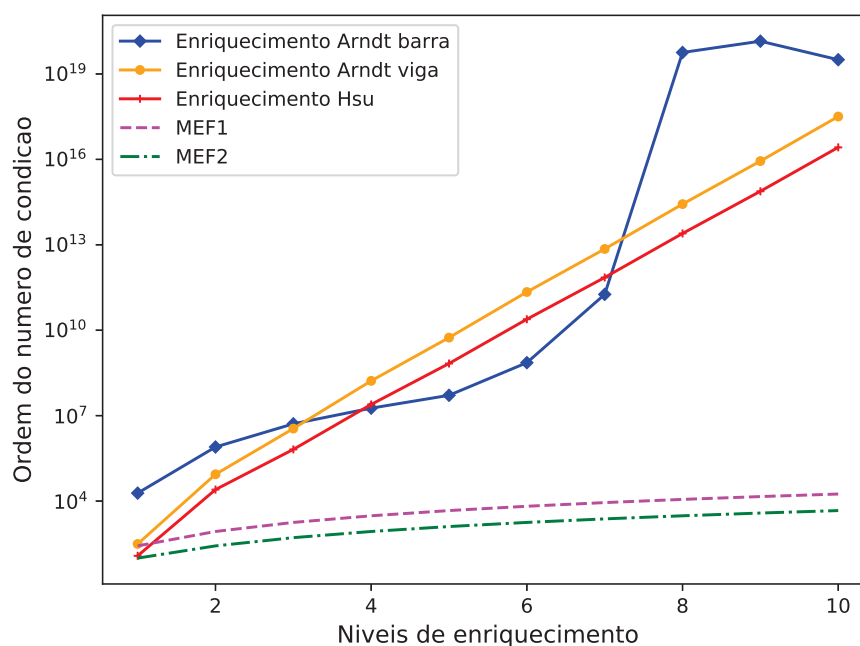
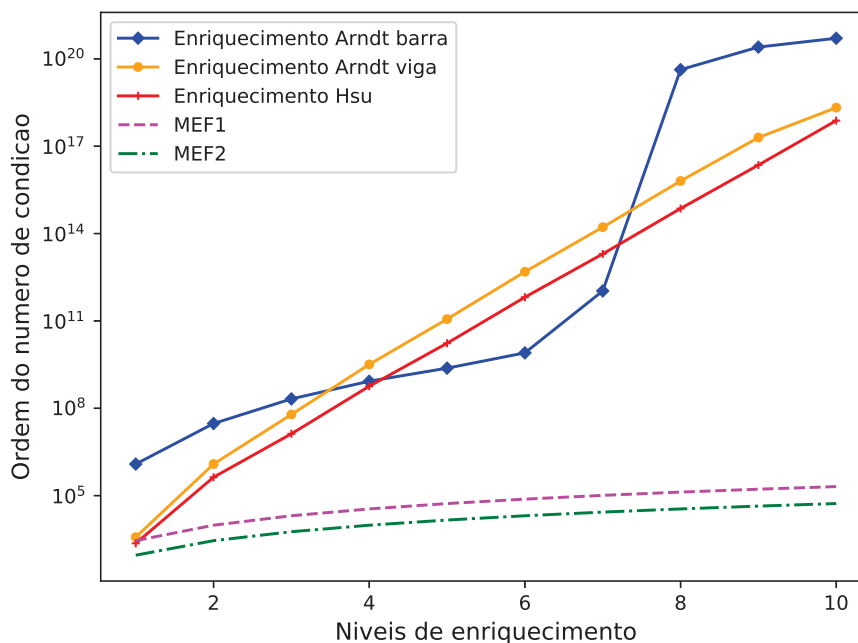




FIGURA 83 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,2$ .



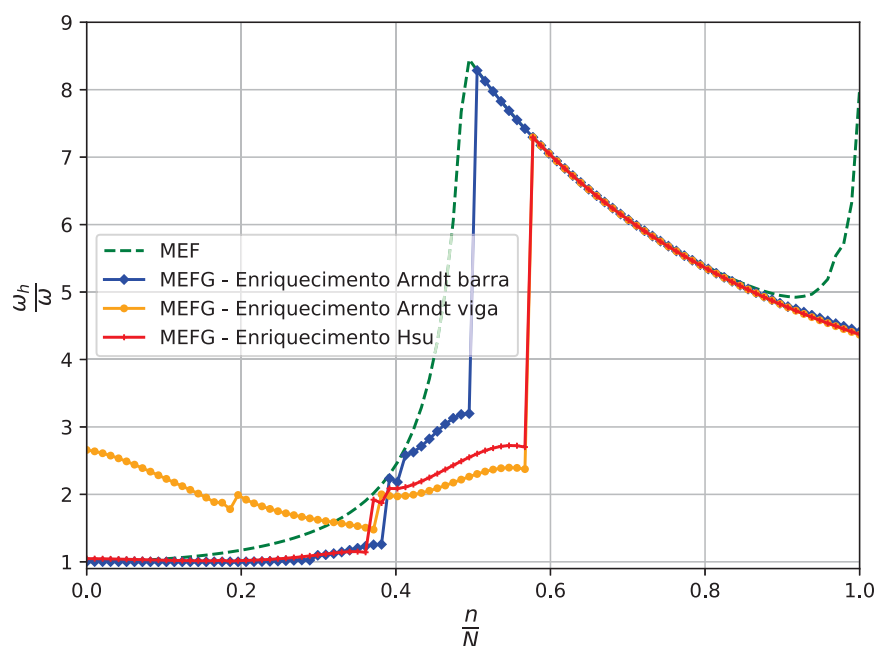
Da mesma forma que os exemplos anteriores, as matrizes de MEF são bem comportadas, possuindo os menores números de condição. O enriquecimento de Hsu (2016) foi o que apresentou, dentre os três diferentes enriquecimentos, o melhor comportamento do número de condição das matrizes.

#### 4.1.3.2 Relação $h/l = 0,002$

Nessa seção um valor menor para a relação altura/comprimento da viga é utilizado para a viga bi-engastada, no valor de 0,002.

A Figura 84 apresenta o espectro de frequência para a viga com os três diferentes enriquecimentos e com um nível de enriquecimento.

FIGURA 84 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

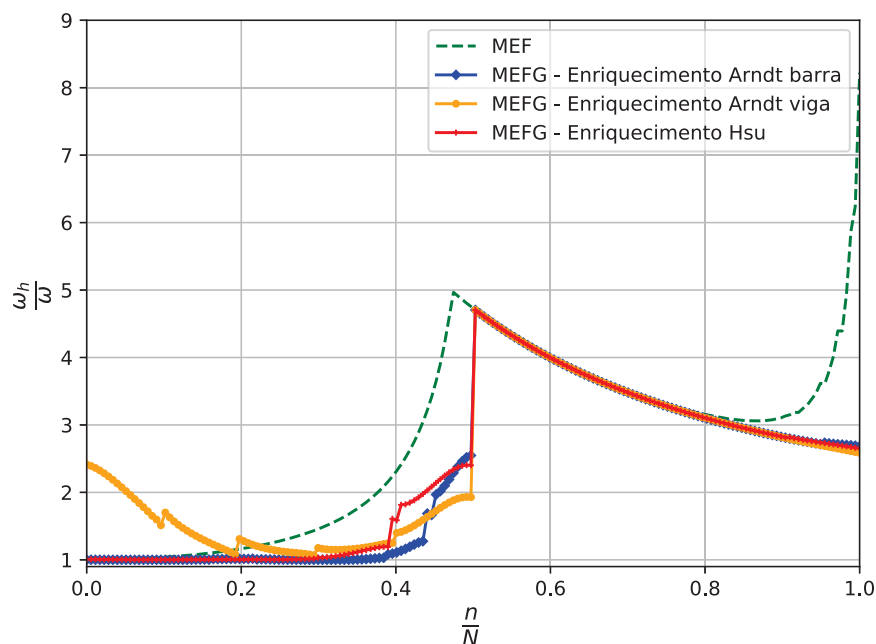


O modelo de MEF nessa análise possui 50 elementos e um total de 102 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 80 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MFG foram subdivididos em 17 elementos, ficando no total 36 graus de liberdade nodais e 68 graus de liberdade de campo.

O efeito de travamento é observado para a relação altura/comprimento mais baixa da viga bi-engastada. Ele ocorre tanto no modelo de MEF, como nos modelos enriquecidos. Com exceção do enriquecimento de Arndt (2009) para vigas, enriquecer o modelo de MEF melhorou a sua resposta, diminuindo o efeito do travamento.

A Figura 85 apresenta o espectro de frequência para a viga com dois níveis de enriquecimento.

FIGURA 85 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM DOIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

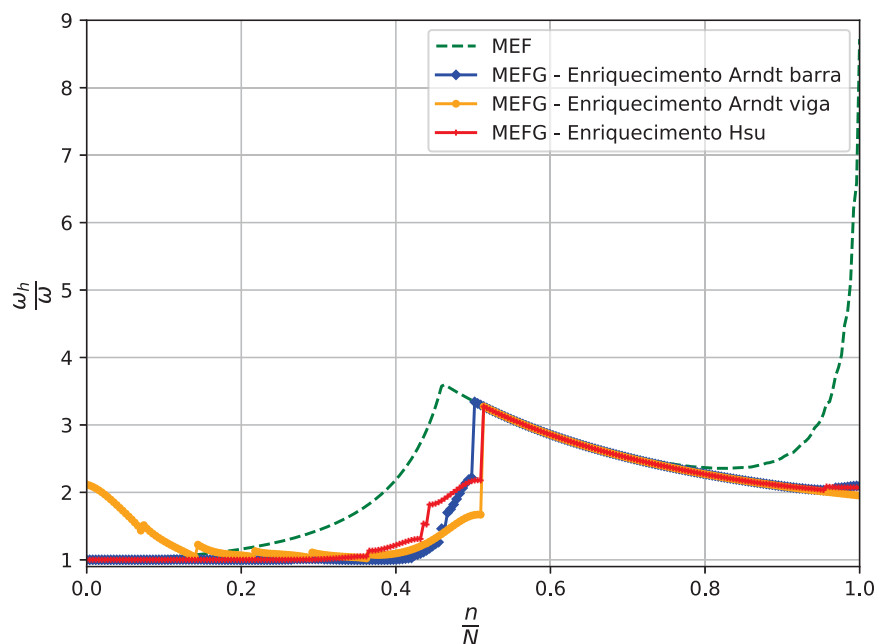


Para realizar o espectro de frequências com o segundo nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 90 elementos e um total de 182 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 160 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 18 elementos, ficando no total 38 graus de liberdade nodais e 144 graus de liberdade de campo.

O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas sofre com o travamento por todo o espectro, dessa maneira nenhum valor de frequência pode ser considerado adequadamente preciso, enquanto para o modelo de MEF podem ser consideradas precisas aproximadamente 20% das frequências, e com os outros dois enriquecimentos aproximadamente 40%.

A Figura 86 apresenta o espectro de frequência para a viga com três níveis de enriquecimento.

FIGURA 86 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

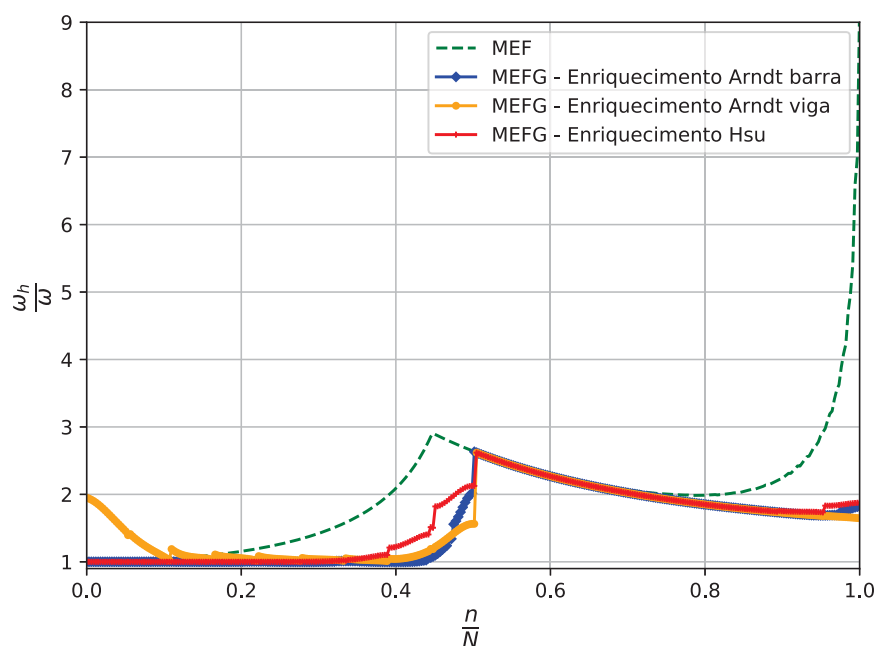


Na análise do terceiro nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 130 elementos e um total de 262 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 240 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 228 graus de liberdade de campo.

O aumento no número de níveis de enriquecimento muda levemente o comportamento dos enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e de Hsu (2016) aumentando um pouco a faixa de frequências que pode ser considerada confiável, enquanto o modelo de MEF permanece igual.

A Figura 87 apresenta o espectro de frequência para a viga com quatro níveis de enriquecimento.

FIGURA 87 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM QUATRO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

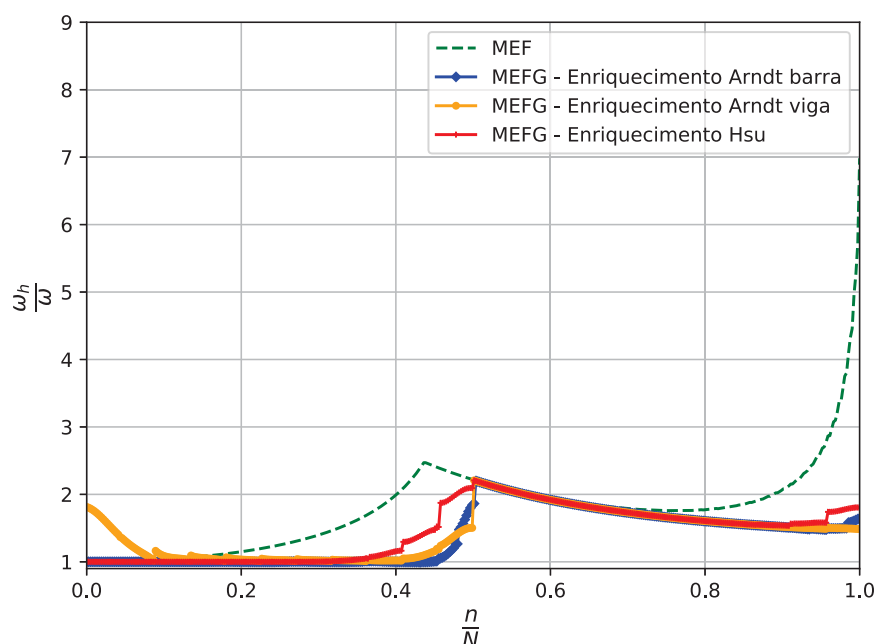


Na análise do quarto nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 170 elementos e um total de 342 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 320 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 304 graus de liberdade de campo.

Com o quarto nível de enriquecimento o efeito do travamento diminuiu, contudo ainda não aumenta a faixa de frequências que podem ser consideradas confiáveis.

A Figura 88 apresenta o espectro de frequência para a viga com cinco níveis de enriquecimento.

FIGURA 88 – ESPECTRO DE FREQUÊNCIA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM CINCO NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO E RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .



Nessa análise o modelo de MEF possui 210 elementos e um total de 422 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 400 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 380 graus de liberdade de campo.

O modelo de MEF continua tendo aproximadamente 20% das suas frequências sendo consideradas confiáveis, após esse valor o modelo sofre com o efeito de travamento. Dos enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e de Hsu (2016) podem ser retiradas cerca de 40% de frequências, consideradas confiáveis, sendo que o enriquecimento de Hsu (2016) sofre com o efeito de travamento um pouco antes do que o enriquecimento de Arndt (2009) para barras. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas sofre com o travamento desde o começo do espectro, dessa forma não é possível considerar nenhuma frequência como confiável.

Comparando a Figura 84 com a Figura 88 é possível perceber que o aumento do nível de enriquecimento diminui o efeito do travamento, contudo não o elimina. O comportamento dos espectros continua semelhante, tendo uma leve alteração na quantidade de frequências que podem ser consideradas confiáveis para os enriquecimentos de Arndt (2009) para barras e de Hsu (2016). Ao final são retiradas aproximadamente 20% de frequências confiáveis para o modelo utilizando MEF, e aproximadamente 40% de frequências confiáveis para o modelo com os enriquecimentos de Arndt (2009) para

barras e de Hsu (2016).

A Tabela 6 apresenta os resultados de frequências naturais adimensionalizadas encontradas com os três enriquecimentos com o terceiro nível de enriquecimento, o resultado de MEF retirado da solução de referência, de Euler-Bernoulli com MEF resultados de uma subdivisão de 130 elementos, de Análise Isogeométrica retiradas de Lee e Park (2013) com 32 elementos e ordem  $p = 3$  e de MEFH retiradas de Hsu (2016) com o emprego de 6 funções enriquecedoras e 10 elementos.

TABELA 6 – FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONALIZADAS PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$

Modos	Euler-Bernoulli	Análise Isgeo. (LEE; PARK, 2013)	MEFH (HSU, 2016)	MEF	MEFG - Arndt (2009) para barras	MEFG - Arndt (2009) para vigas	MEFG - Hsu (2016)
1	4,730041	4,7300	4,729975	4,729995	4,731511	10,011783	4,731578
2	7,853205	7,8532	7,852952	7,852938	7,855272	16,509350	7,855531
3	10,995608	10,9963	10,994983	10,994973	10,997808	22,908310	10,998432
4	14,137166	14,1408	14,135917	14,135940	14,138914	29,124557	14,140084
5	17,278762	17,2908	17,276573	17,276543	17,279418	35,125982	17,281279
6	20,420357	20,4524	20,416850	20,416890	20,419276	40,884147	20,421895
7	23,561954	23,6366	23,556684	23,556746	23,558520	46,377015	23,561862
8	26,703554	26,8614	26,696013	26,696112	26,697183	51,588850	26,701120
9	29,845159	30,1554	29,834773	29,834898	29,835090	56,509929	29,839619
10	32,986770	33,5620	32,972901	32,973095	32,973878	61,135964	32,977323
11	36,128390	37,1439	36,110334	36,110584	36,110836	65,467153	36,114207
12	39,270021	40,9868	39,247010	39,247326	39,247492	69,506850	39,250244
13	42,411667	45,2014	42,382867	42,383256	42,383478	73,259591	42,385433
14	45,553331	49,9214	45,517845	45,518329	45,518601	76,727943	45,519764
15	48,695018	55,2992	48,651888	48,652458	48,652699	79,906622	48,653233



A Tabela 6 mostra que os resultados obtidos com o modelo de viga de Timoshenko para a relação entre a altura da seção transversal e o comprimento da viga com valor baixo se aproximam das respostas geradas com o modelo de viga de Euler-Bernoulli. As 15 primeiras frequências obtidas com os três diferentes enriquecimentos do MEF se aproximam dos valores obtidos por outros autores. Dentre os três enriquecimentos o que mais se aproxima da resposta de referência de MEF é o enriquecimento de Arndt (2009) para barras, seguido do enriquecimento de Hsu (2016).

As Figuras 89 a 93 apresentam os gráficos de convergência para as cinco primeiras frequências da viga bi-engastada com relação altura/comprimento de 0,002.

FIGURA 89 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A PRIMEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

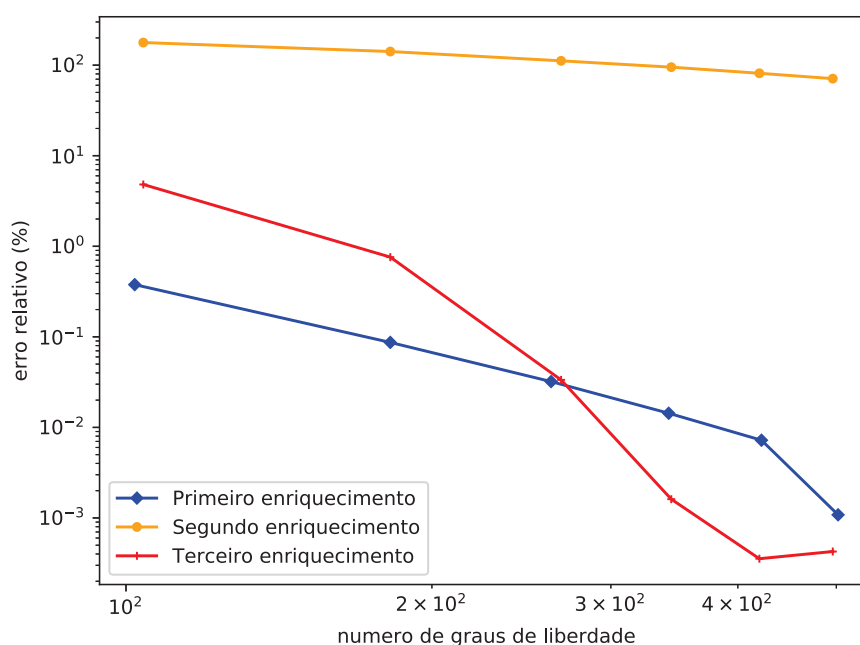


FIGURA 90 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A SEGUNDA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

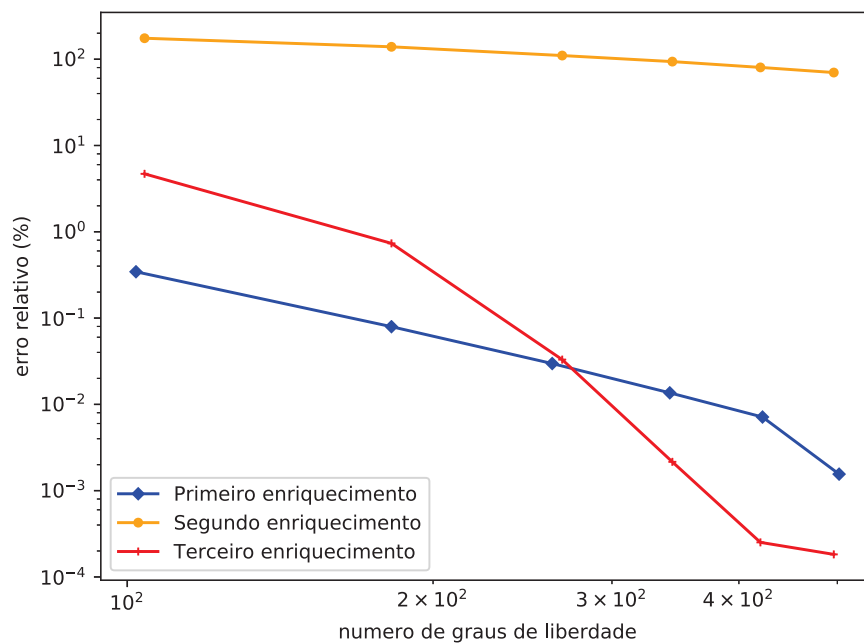


FIGURA 91 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A TERCEIRA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

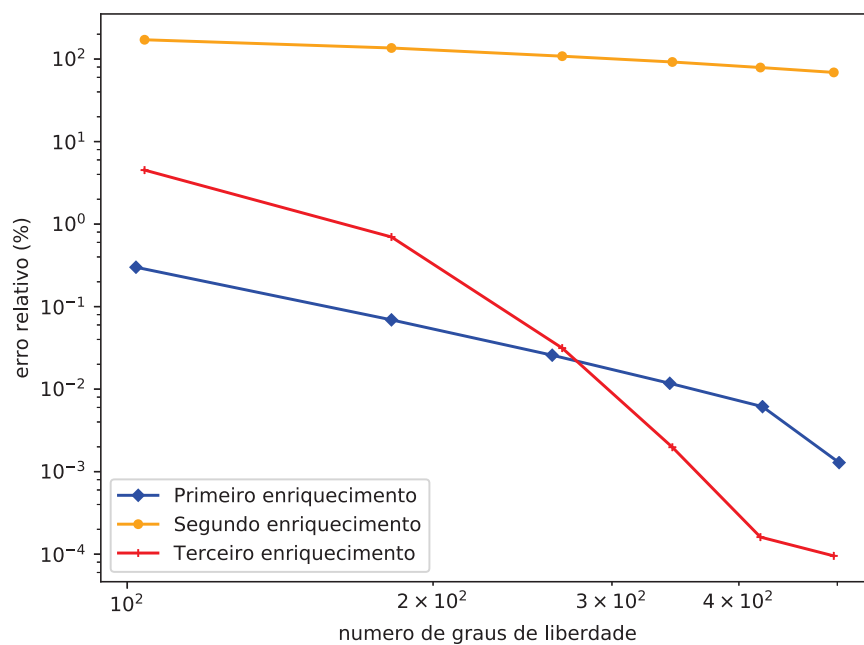


FIGURA 92 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUARTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

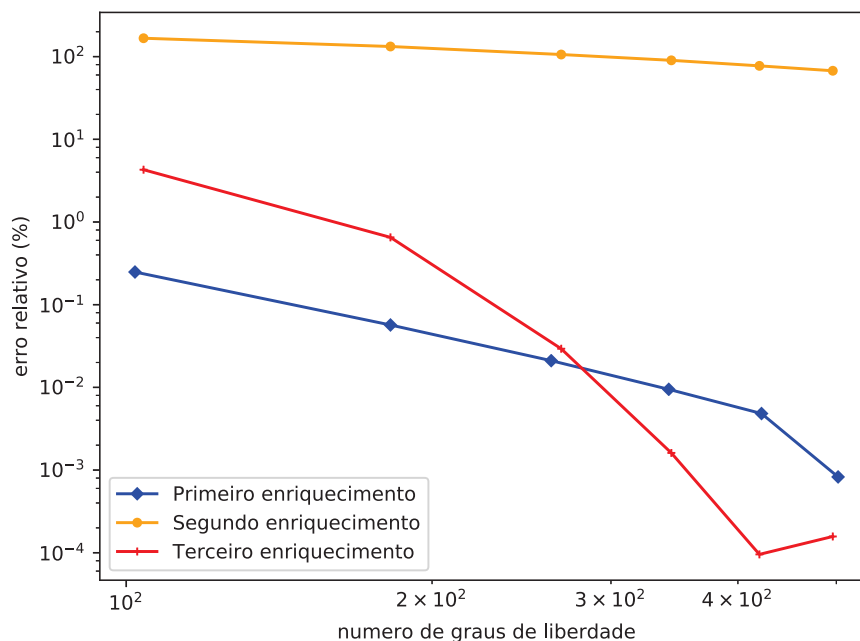
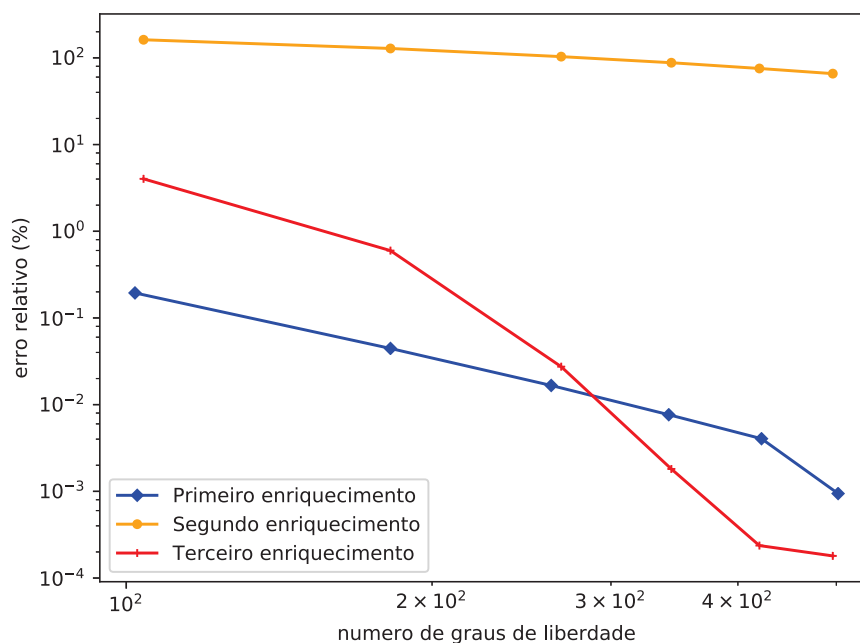


FIGURA 93 – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA PARA A QUINTA FREQUÊNCIA DA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .



Para esse último exemplo os erros relativos do enriquecimento de Hsu (2016) para um número maior de graus de liberdade são os mais baixos. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras também apresenta erros com valores baixos. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas como pode ser observado pelo espectro de frequência sofre

com o efeito de travamento, dessa maneira ele possui erros relativos muito elevados, e uma baixa taxa de convergência.

As Figuras 94 e 95 mostram os gráficos do número de condição das matrizes de rigidez e massa, respectivamente, para esse exemplo.

FIGURA 94 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE RIGIDEZ PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .

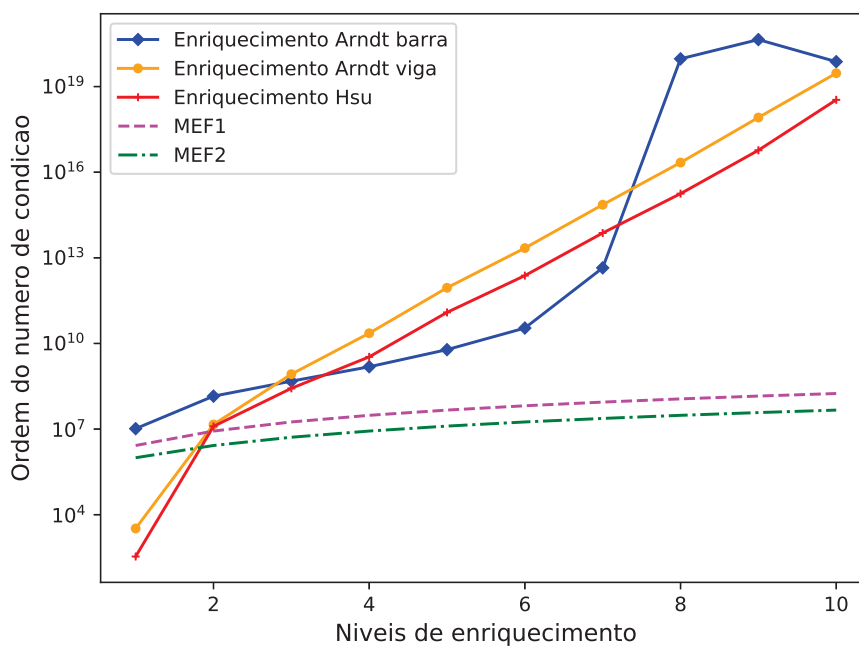
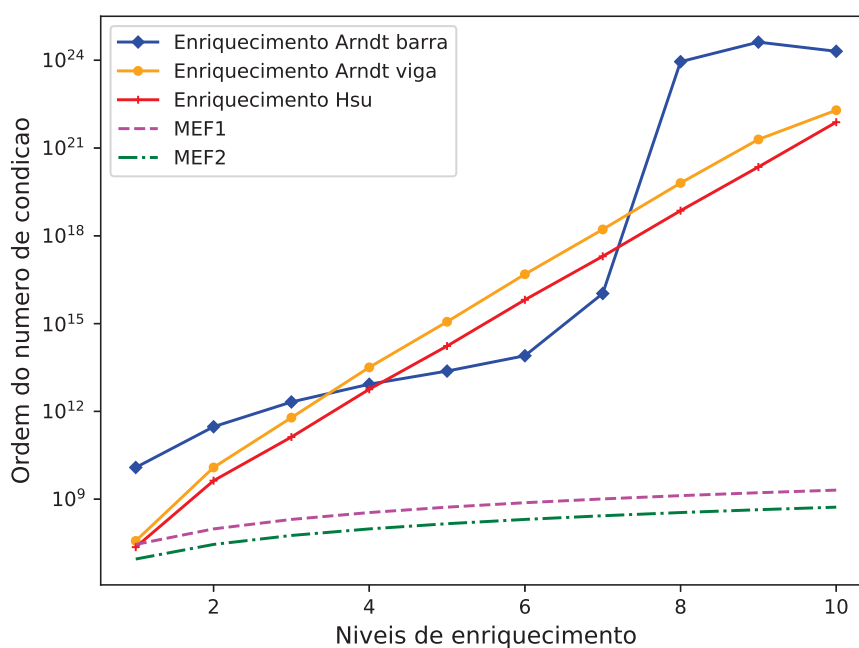


FIGURA 95 – GRÁFICO DO NÚMERO DE CONDIÇÃO PARA A MATRIZ DE MASSA PARA VIGA BI-ENGASTADA COM RELAÇÃO  $h/l = 0,002$ .



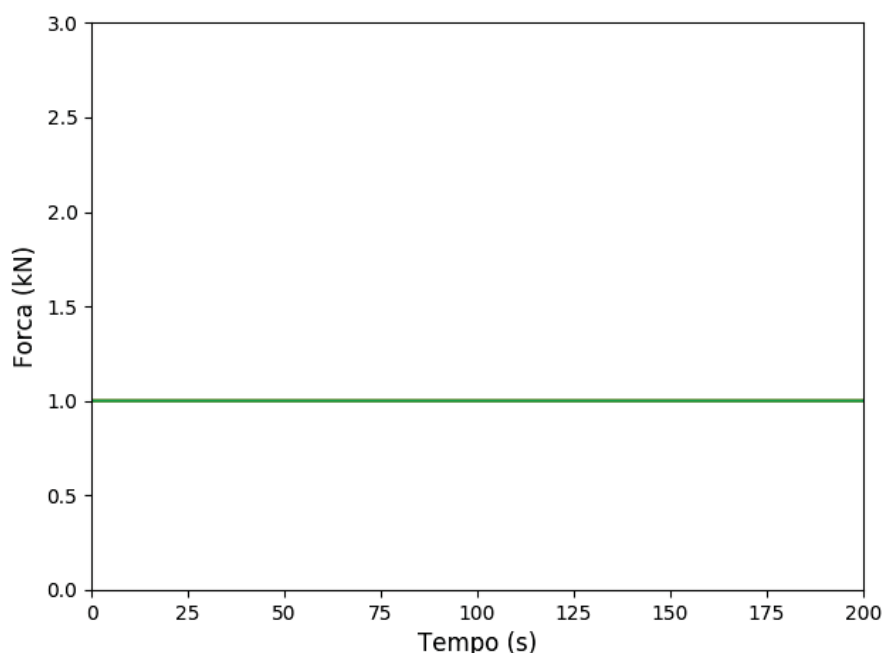
O número de condição para a matriz de rigidez do enriquecimento de Hsu (2016) no primeiro nível é bem baixo, se aproximando do enriquecimento de Arndt (2009) para vigas. O número de condição do enriquecimento de Arndt (2009) para barras continua a oscilar, ficando muitas vezes os menores entre os diferentes enriquecimento, mas o que primeiro chega a números bem elevados.

## 4.2 ANÁLISE TRANSIENTE

Nesta seção serão apresentados como resultados da análise transiente os gráficos de deslocamentos, velocidades e acelerações para as vigas bi-apoiada e engastada-livre com relação altura/comprimento de viga de 0,2.

Para a discretização temporal, o intervalo de tempo de estudo é de 200 segundos que foi analisado em passos de  $10^{-2}$  segundos. Para proporcionar uma melhor visibilidade das respostas, o intervalo de tempo mostrado em algumas figuras é menor. Para a integração no tempo foi utilizado o método de Newmark. Os gráficos são relativos ao nó central da viga para o exemplo bi-apoiado e ao nó da extremidade livre para o exemplo engastado-livre. Será utilizada uma excitação externa do tipo degrau, de 1 N em ambos os exemplos, essa excitação é representada na Figura 96.

FIGURA 96 – REPRESENTAÇÃO DA EXCITAÇÃO EXTERNA DO TIPO DEGRAU.



Nos gráficos serão exibidas as respostas da análise transiente em termos de deslocamento, velocidade e aceleração obtidos com os três conjuntos de funções enriquecedoras para o MEEG e com o MEF. Nas análise é utilizado, a nível de comparação, o mesmo número de graus de liberdade em cada nível de enriquecimento.

#### 4.2.1 Viga bi-apoiada

São apresentados na sequência os resultados da análise transiente em termos de deslocamento, velocidade e aceleração para a viga bi-apoiada com relação altura/comprimento da viga de 0,2.

As Figuras 97 a 101 apresentam as respostas em termos de deslocamento com um, três e seis níveis de enriquecimento, respectivamente.

FIGURA 97 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO.

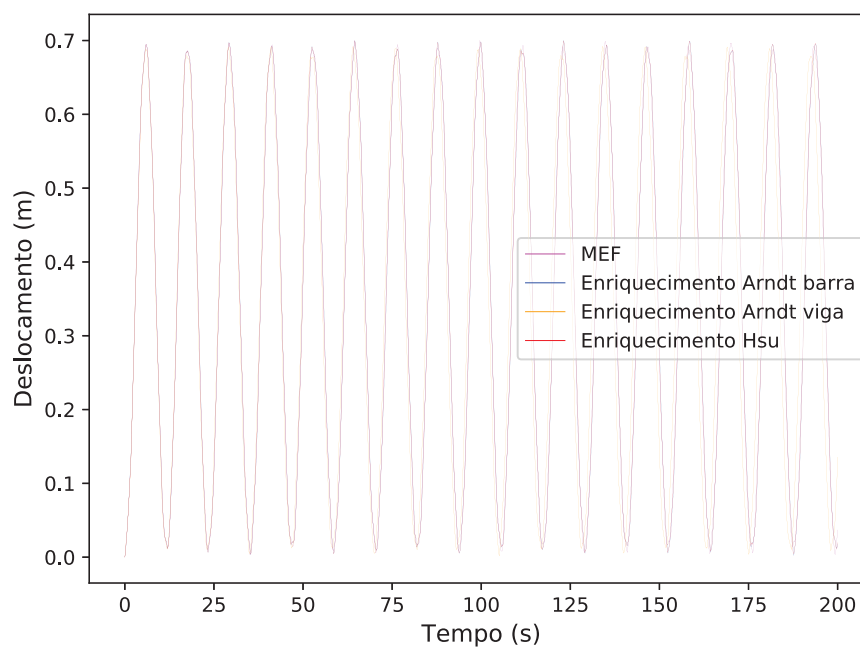
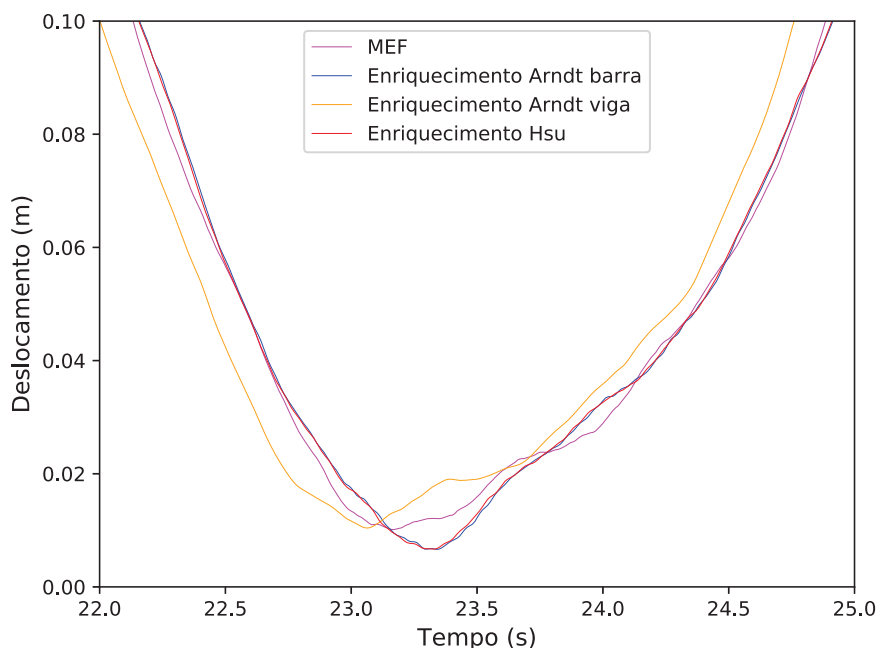


FIGURA 98 – ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO.



O modelo de MEF possui 50 elementos e um total de 102 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 80 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 18 elementos, ficando no total 38 graus de liberdade nodais e 70 graus de liberdade de campo.

FIGURA 99 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.

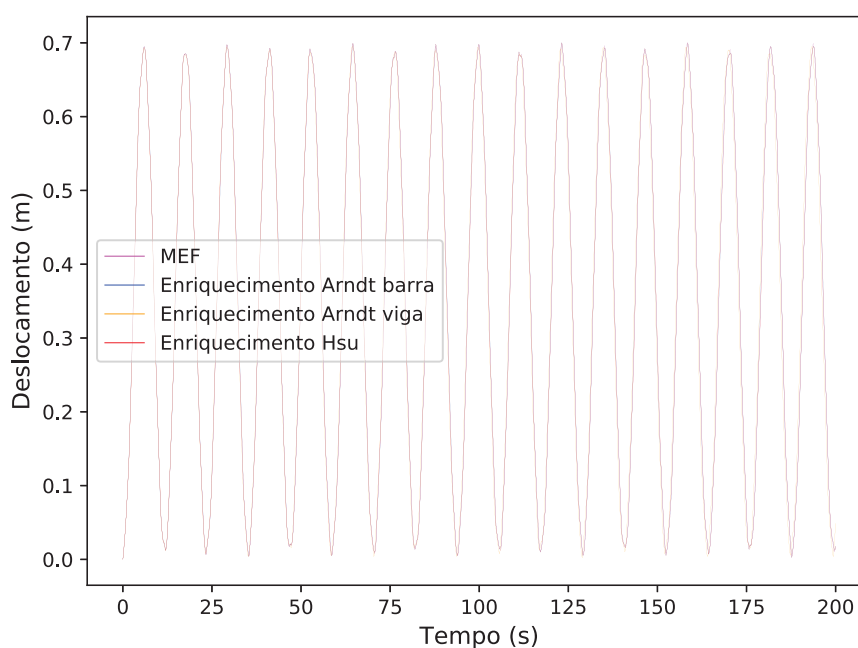
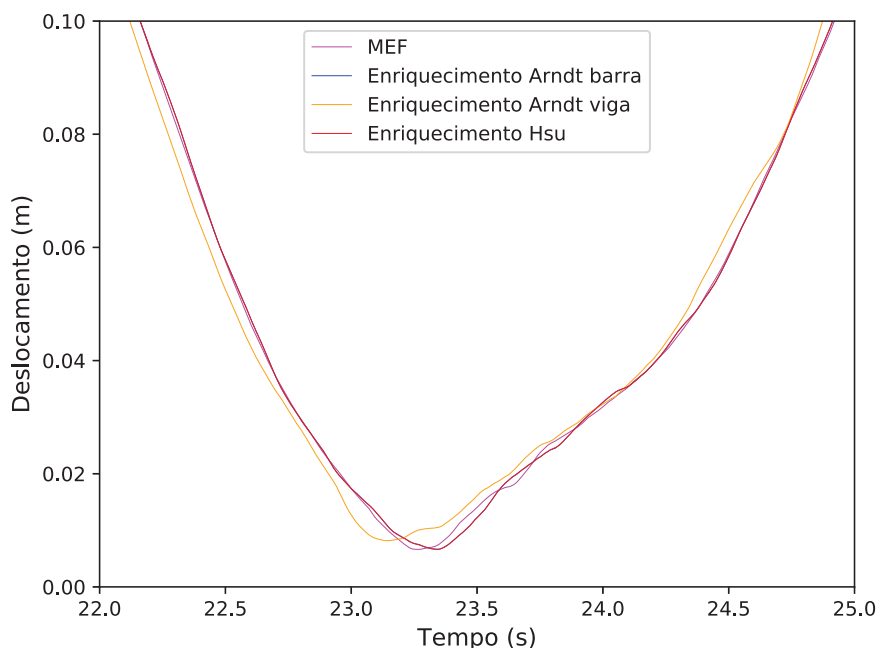


FIGURA 100 – ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.



Para o terceiro nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 130 elementos e um total de 262 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEF foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 240 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEF foram subdivididos em 18 elementos, ficando no total 38 graus de liberdade nodais e 226 graus de liberdade de campo.

FIGURA 101 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.

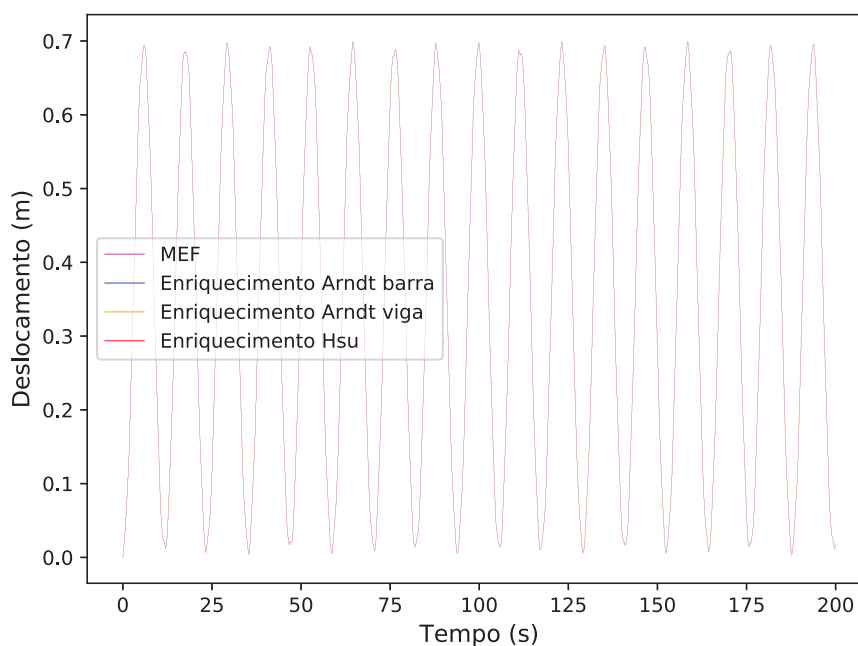
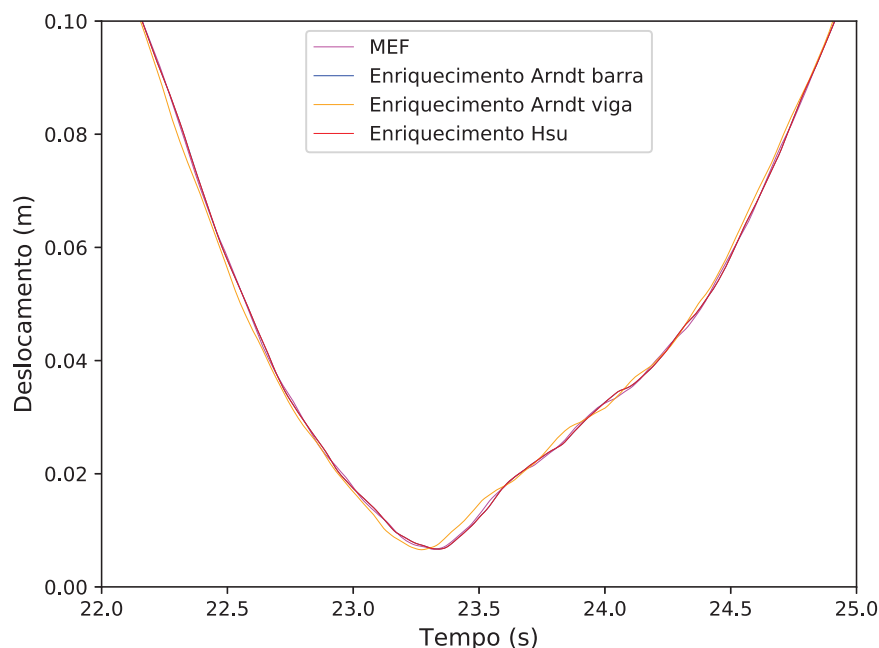




FIGURA 102 – ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA BI-APOIADA COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.



Nessa análise o MEF passa a possuir 250 elementos e um total de 502 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEF foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 480 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEF foram subdivididos em 18 elementos, ficando no total 38 graus de liberdade nodais e 454 graus de liberdade de campo.

Na Figura 98 é possível observar que o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas não é tão preciso. Contudo, ao aumentar o nível de enriquecimento as curvas ficam muito similares. Os demais enriquecimentos apresentam resultados praticamente iguais aos de MEF, sendo difícil perceber a diferença entre eles.

As Figuras 103 a 105 apresentam as respostas em termos de velocidade com um, três e seis níveis de enriquecimento, respectivamente.

FIGURA 103 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO.

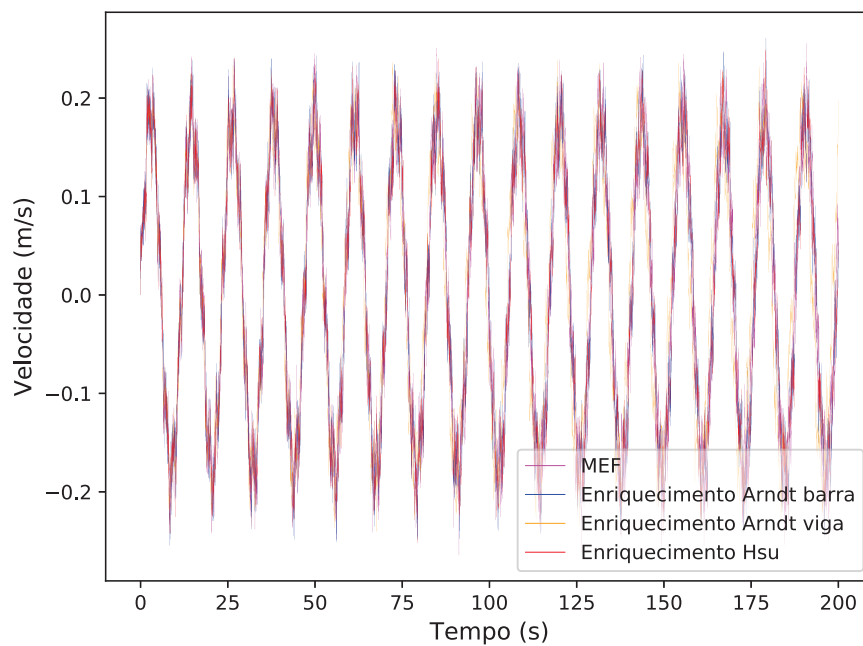


FIGURA 104 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.

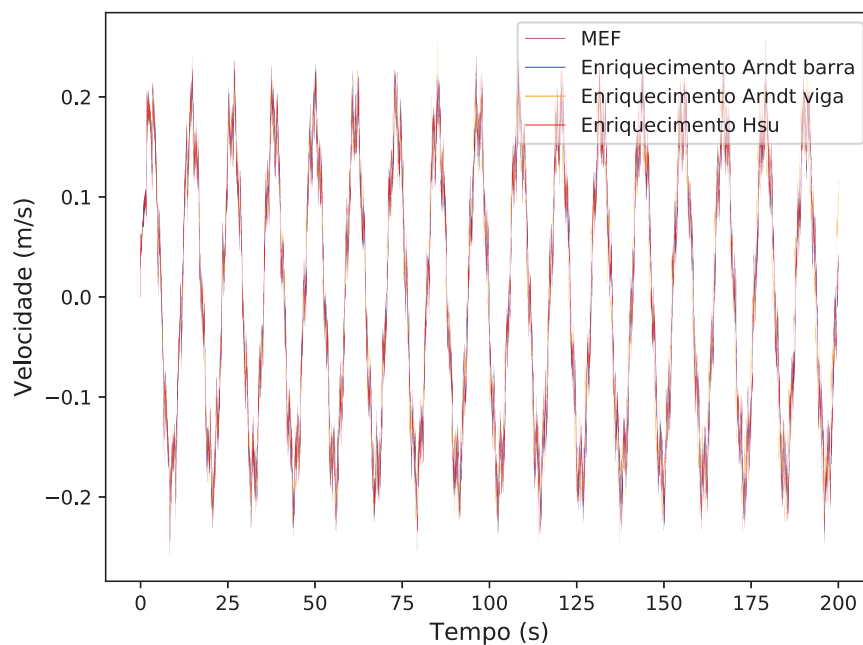
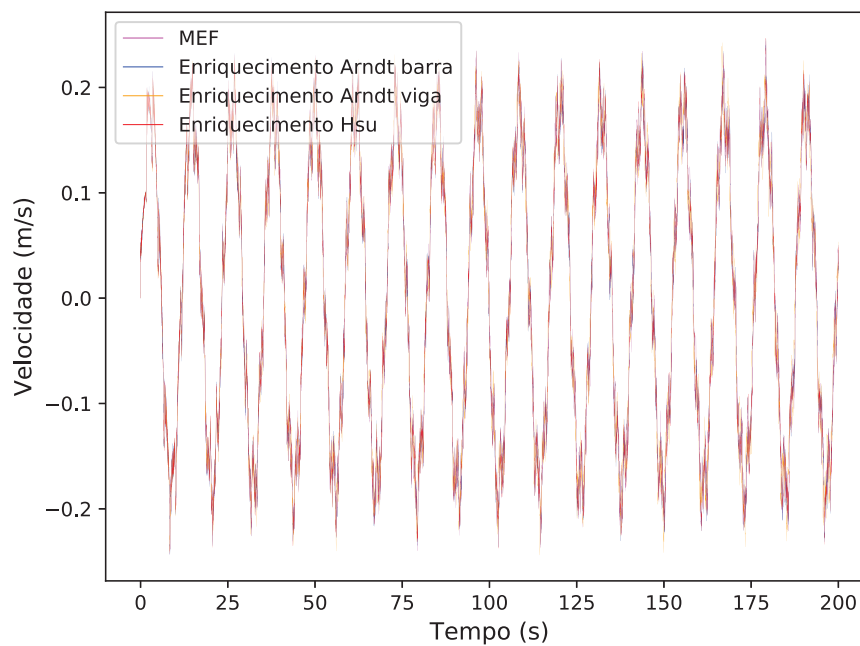


FIGURA 105 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA BI-APOIADA COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.



As curvas de velocidade são menos precisas do que as de deslocamento, contudo o comportamento das quatro curvas é similar. Mesmo que não apresentem resultados iguais é difícil distinguir qual enriquecimento se comportou de maneira mais eficiente.

As Figuras 106 a 108 apresentam as respostas em termos de aceleração com um, três e seis níveis de enriquecimento, respectivamente.

FIGURA 106 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA BI-APOIADA COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO.

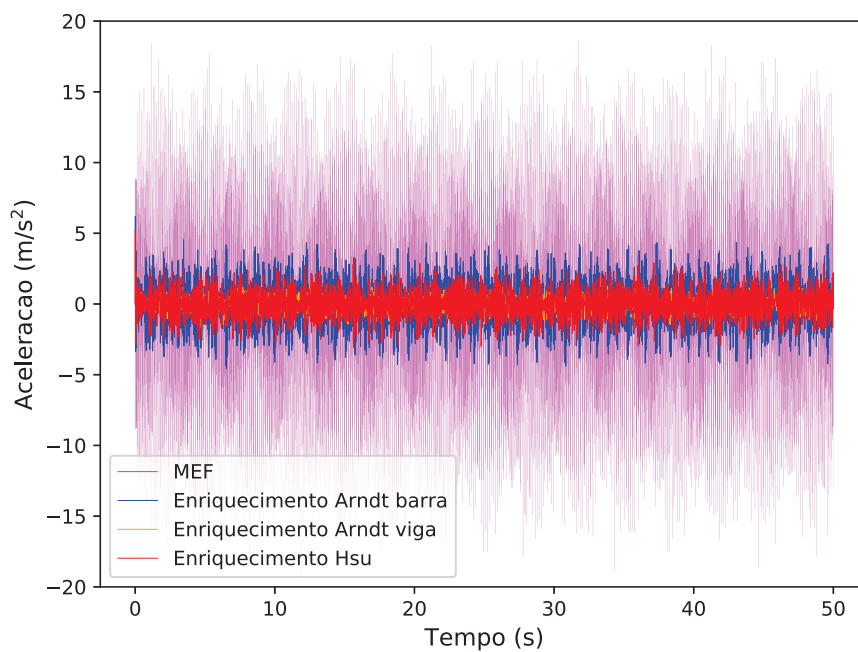


FIGURA 107 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA BI-APOIADA COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.

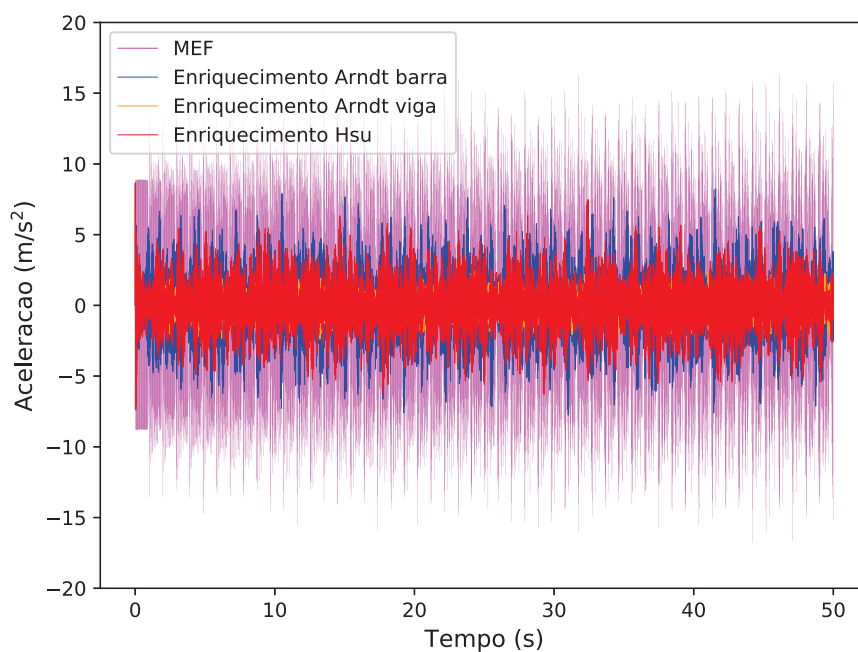
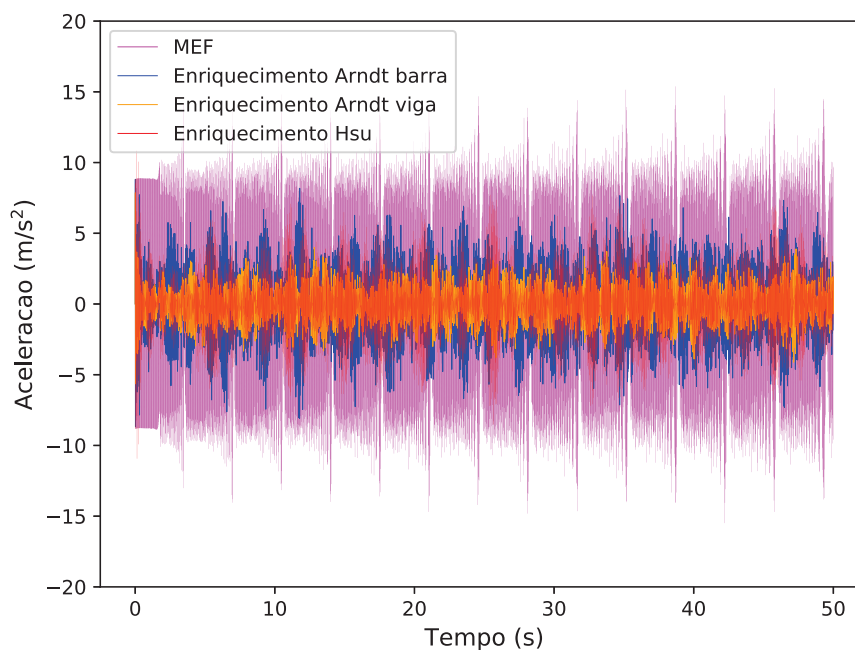


FIGURA 108 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA BI-APOIADA COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.



Os resultados de aceleração de MEF apresentam picos mais elevados do que o MEFG, mas os valores desses picos diminuem com o aumento do número de graus de liberdade. Entretanto, para os resultados do MEFG o resultado é o contrário, conforme há o aumento no número de graus de liberdade há um aumento nos valores de picos das respostas do aceleração.

#### 4.2.2 Viga engastada-livre

São apresentados na sequência os resultados da análise transiente em termos de deslocamento, velocidade e aceleração para a viga engastada-livre com relação altura/comprimento da viga de 0,2.

As Figuras 109 a 113 apresentam as respostas em termos de deslocamento com um, três e seis níveis de enriquecimento, respectivamente.

FIGURA 109 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO.

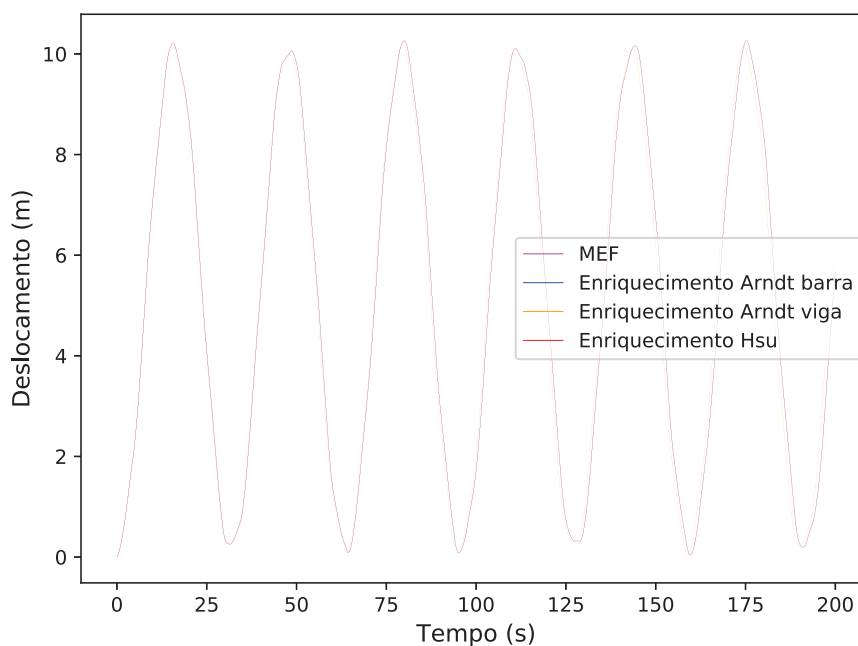
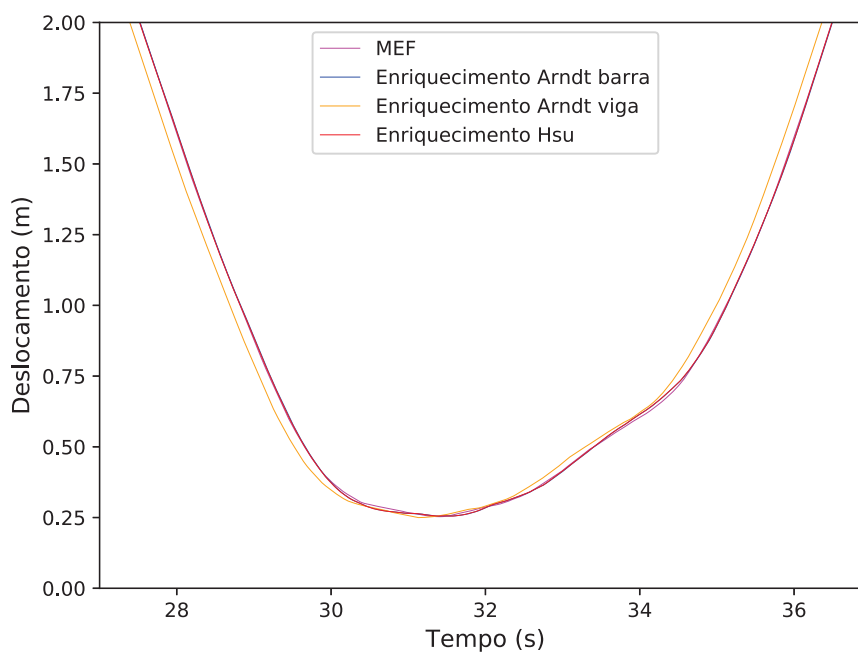


FIGURA 110 – ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO.



O modelo de MEF possui 50 elementos e um total de 102 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEF foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 80 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016)

do MEEG foram subdivididos em 17 elementos, ficando no total 36 graus de liberdade nodais e 68 graus de liberdade de campo.

FIGURA 111 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.

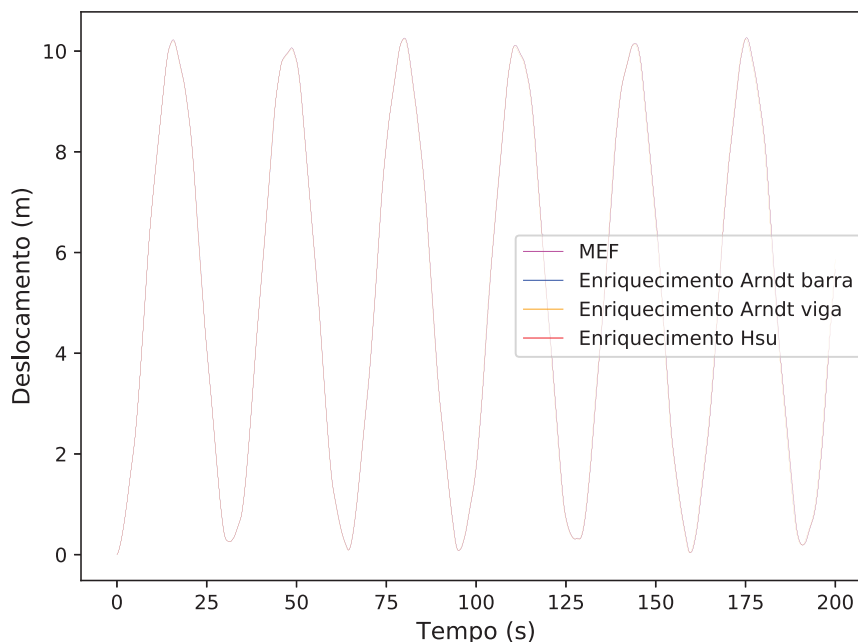
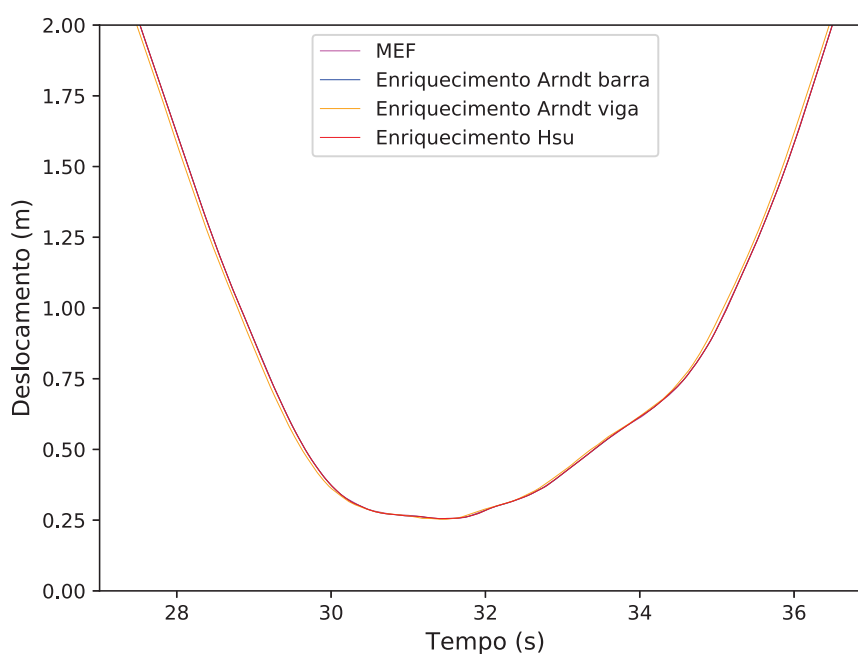


FIGURA 112 – ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.



Para o terceiro nível de enriquecimento o modelo de MEF possui 130 elementos e um total de 262 graus de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para

barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 240 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 228 graus de liberdade de campo.

FIGURA 113 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.

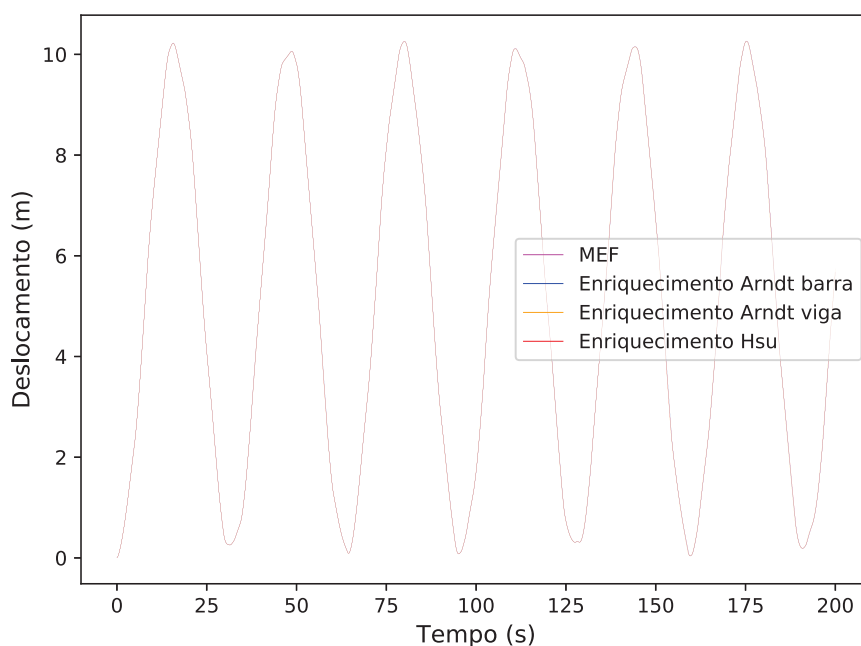
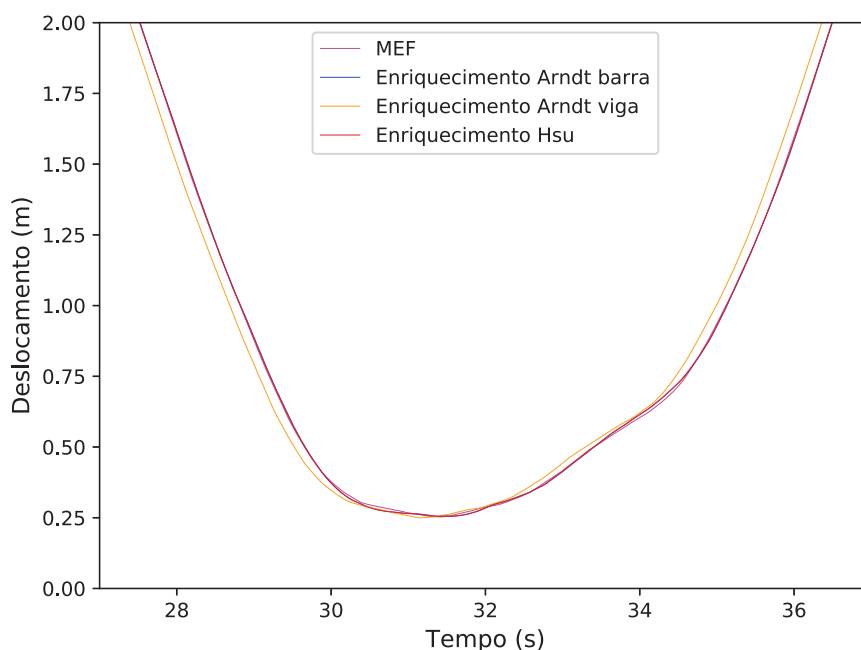


FIGURA 114 – ZOOM DA RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE DESLOCAMENTO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.



Nessa análise o MEF passa a possuir 250 elementos e um total de 502 graus



de liberdade nodais. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras do MEFG foi subdividido em 10 elementos, ficando no total 22 graus de liberdade nodais e 480 graus de liberdade de campo. O enriquecimento de Arndt (2009) para vigas e o enriquecimento de Hsu (2016) do MEFG foram subdivididos em 19 elementos, ficando no total 40 graus de liberdade nodais e 456 graus de liberdade de campo.

As respostas de deslocamento dos enriquecimentos se aproximam muito da resposta de MEF. Para esse exemplo a resposta de MEF já é precisa, portanto os enriquecimentos não apresentaram grandes melhoras nos deslocamentos. Ainda assim é possível observar que o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas na Figura 109 é o mais distante da solução de MEF, mas na Figura 113 a solução já se aproxima de MEF.

As Figuras 115 a 117 apresentam as respostas em termos de velocidade com um, três e seis níveis de enriquecimento, respectivamente.

FIGURA 115 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO.

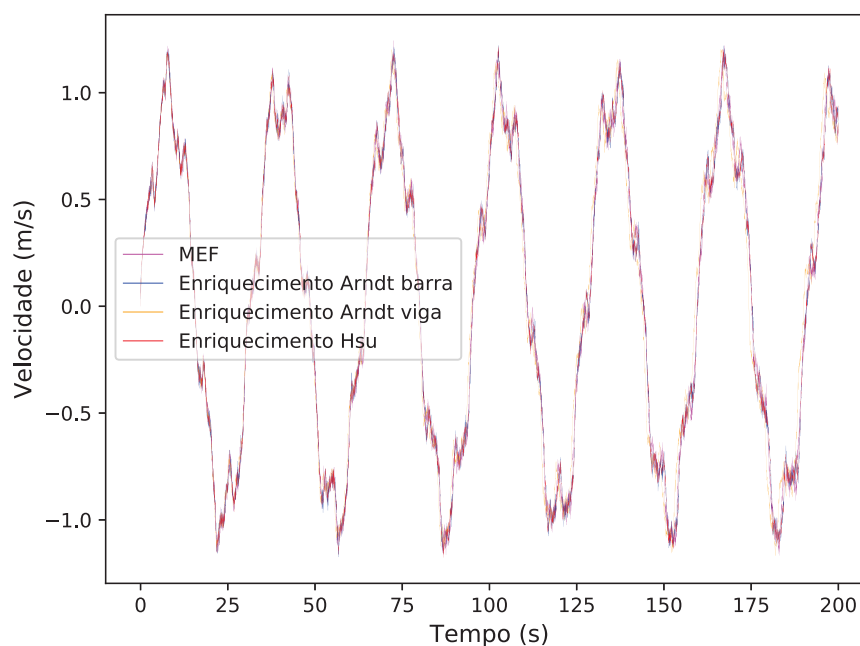


FIGURA 116 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.

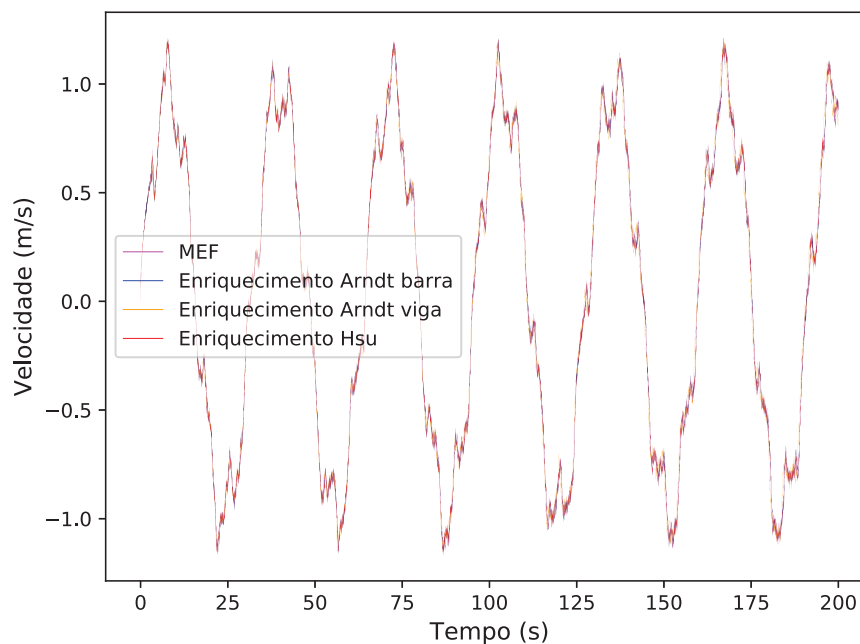
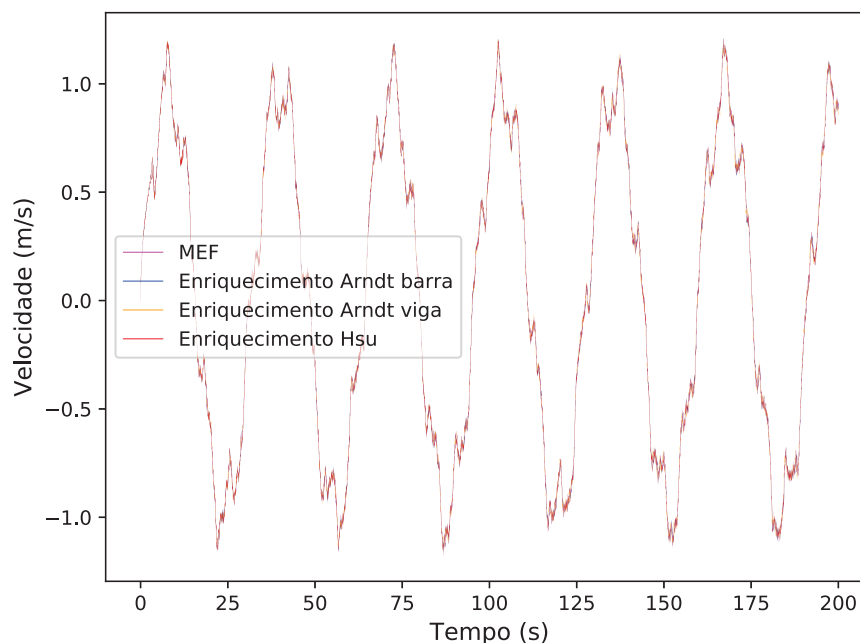


FIGURA 117 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE VELOCIDADE PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.



O comportamento das curvas é o mesmo para os três enriquecimentos e para MEF. Mesmo que não apresentem resultados iguais é difícil distinguir qual enriquecimento se comportou de maneira mais eficiente.

As Figuras 118 a 120 apresentam as respostas em termos de aceleração com um, três e seis níveis de enriquecimento, respectivamente.

FIGURA 118 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM UM NÍVEL DE ENRIQUECIMENTO.

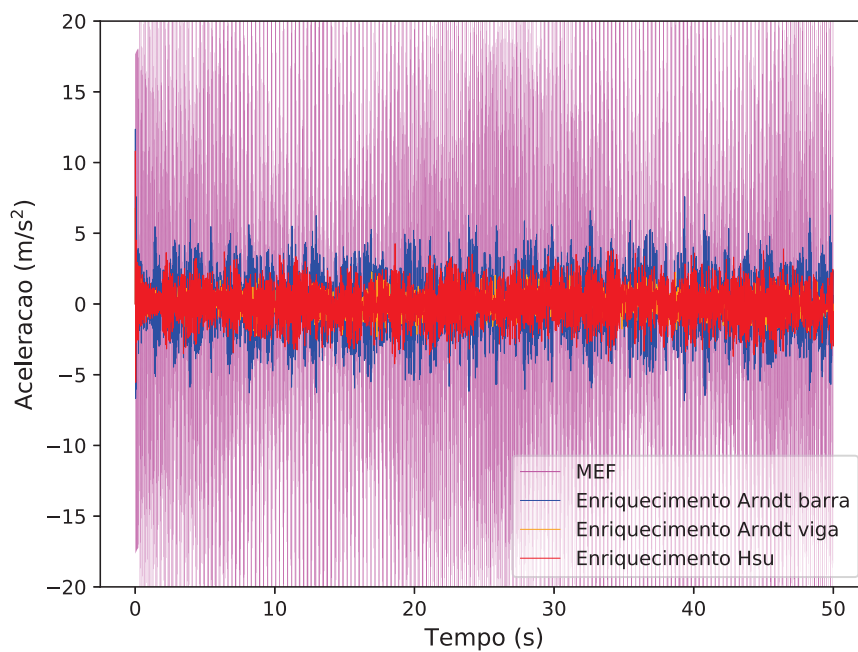


FIGURA 119 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM TRÊS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.

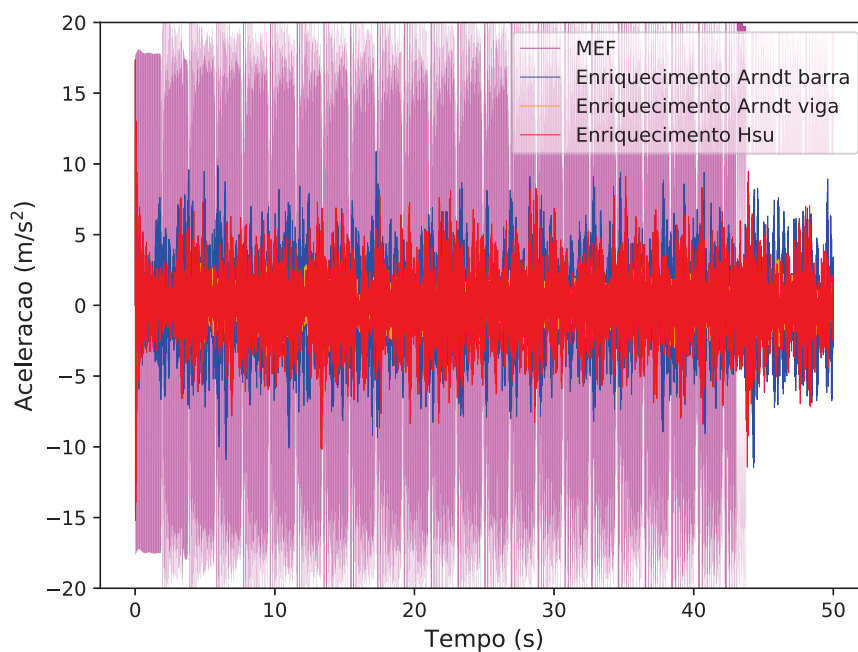
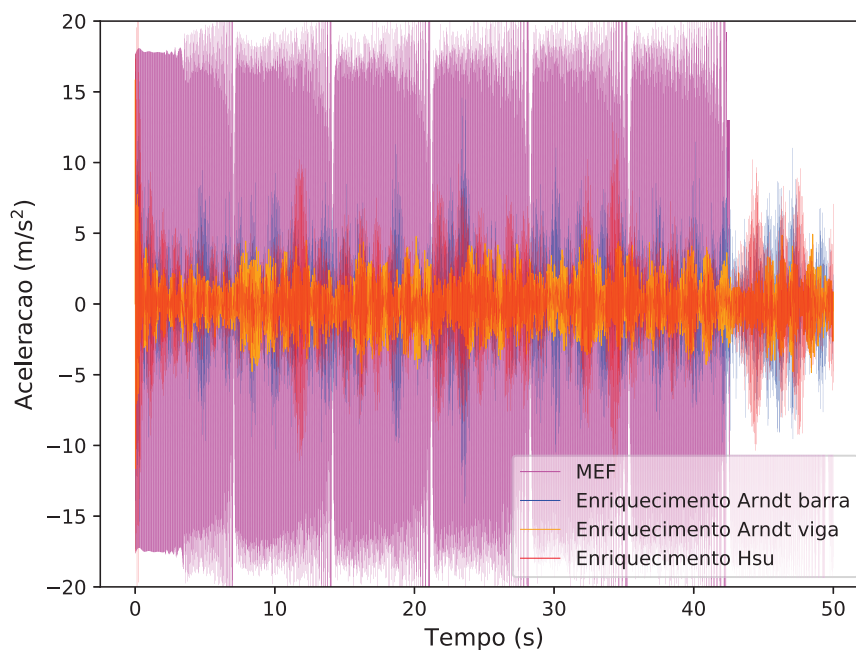


FIGURA 120 – RESPOSTA TRANSIENTE EM TERMOS DE ACELERAÇÃO PARA VIGA ENGASTADA-LIVRE COM SEIS NÍVEIS DE ENRIQUECIMENTO.



As respostas de aceleração mostram que o MEF apresenta mais perturbações nas respostas do que o MEEG. Com o aumento do número de graus de liberdade (refino da malha) a perturbação das acelerações obtidas pelo MEF diminuem, apresentando menos picos com valores absolutos altos. Para os enriquecimentos do MEEG as perturbações e as intensidades das respostas de aceleração aumentam com o aumento do nível de enriquecimento.

## 5 CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo aplicar o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) em problemas de análise dinâmica de vigas de Timoshenko e analisar o comportamento de diferentes conjuntos de funções enriquecedoras. Para alcançar o objetivo foi realizada uma ampla revisão da literatura, onde foi verificado que existem vários elementos finitos de viga de Timoshenko. Durante a revisão foi escolhido um elemento finito de viga de Timoshenko simples, apresentado no trabalho de Hsu (2016). O trabalho de Zietsman, Rensburg e Merwe (2004) apresenta uma diferente abordagem, ele utiliza o Método de Galerkin, e obtém matrizes de massa e rigidez equivalentes das apresentadas por Hsu (2016), esse segundo trabalho está apresentado no Apêndice A. Cabe ressaltar que a equivalência das abordagens valida o delineamento teóricos dos trabalhos, consolidando as análises realizadas, contribuindo assim para a evolução dos estudos de estratégias de enriquecimento para análise dinâmica em vigas de Timoshenko, possibilitando o acesso a modelos mais rebuscados conforme aplicações de interesse. No processo de revisão também se definiram quais enriquecimentos seriam aplicados a esses modelos.

Os enriquecimentos foram apresentados na seguinte ordem, o primeiro enriquecimento apresentado foi o exposto no trabalho de Arndt (2009), para barras, que sofreu modificações realizadas por Torii (2012) e Weinhardt (2016). O segundo enriquecimento foi apresentado também no trabalho de Arndt (2009) para vigas de Euler-Bernoulli. O último enriquecimento utilizado foi apresentado no trabalho de Hsu (2016), que o autor já havia empregado em vigas de Timoshenko.

Foram escolhidos seis diferentes exemplos para realizar a análise modal e para comparar os três diferentes enriquecimentos, aplicados com ao MEFG, com o Método dos Elementos Finitos (MEF). Os exemplos possuíam três diferentes condições de contorno, bi-apoiada, engastada-livre e bi-engastada; e variações na relação entre a altura da seção transversal e o comprimento da viga.

Foram mostrados resultados de espectro de frequência, comparando as funções enriquecedoras entre si e com MEF. Os resultados de espectros para vigas com maiores relações altura/comprimento indicaram que o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas obtém melhores resultados que os demais, logo na sequência vinha o enriquecimento de Arndt (2009) para barras. Contudo, quando a relação era diminuída, o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas sofria com o efeito de travamento, e então o enriquecimento de Arndt (2009) para barras era o que apresentava os melhores resultados, seguido do enriquecimento de Hsu (2016). Outro efeito visível nos gráficos de espectro de frequência foi o aumento do número de condição das matrizes com o

aumento do nível de enriquecimento.

Na sequência foi apresentada uma tabela para cada exemplo, nela eram comparados os resultados enriquecidos com o terceiro nível de enriquecimento, com os resultados de outros autores, e também do modelo de viga de Euler-Bernoulli. Com as tabelas chegou-se a conclusão de que os resultados obtidos com os três enriquecimentos se aproximaram dos obtidos por outros autores, com exceção do enriquecimento de Arndt (2009) para vigas quando a relação altura/comprimento era baixa. As tabelas também deixam claro que ao utilizar uma relação altura/comprimento de viga baixa os resultados dos modelos de Timoshenko se aproximam dos obtidos por Euler-Bernoulli como era esperado. Os resultados que apresentaram uma maior precisão foram obtidos com o enriquecimento de Arndt (2009) para barras, seguido do enriquecimento de Hsu (2016).

Os gráficos de convergência mostraram que o enriquecimento de Arndt (2009) para vigas possui um erro relativo elevado para todos os exemplos e uma baixa taxa de convergência para as cinco primeiras frequências, o que não é possível de se observar nos espectros de frequência. Os outros dois enriquecimentos possuem, para a maioria dos exemplos e com o nível de enriquecimento mais elevado, valores de erro muito próximos. A taxa de convergência do enriquecimento de Hsu (2016) foi para grande parte dos exemplos mais elevada porém em muitos casos o enriquecimento de Arndt (2009) para barras embora com menor taxa de convergência mostrou-se mais preciso. Nesses gráficos também foi possível observar efeitos do mal condicionamento das matrizes de massa e rigidez, pois com um nível de enriquecimento alto, o número de condição aumentava.

Também foram apresentados os números de condições das matrizes de massa e rigidez para cada exemplo, e com esse número de condição o enriquecimento que melhor condiciona suas matrizes é o enriquecimento de Hsu (2016) para todos os exemplos.

Para a análise transiente foram escolhidos dois exemplos, com duas diferentes condições de contorno, bi-apoiada e engastada-livre. Neles foram aplicados os três diferentes enriquecimentos e seus resultados comparados com os encontrados com MEF. Foram apresentadas as respostas da análise transiente em termos de deslocamento, velocidade e aceleração.

As respostas transientes de MEF já apresentam resultados precisos, portanto os enriquecimentos não mostram melhoras. Outro fator que vale ressaltar é o fato de que os três enriquecimentos apresentam resultados similares, sempre muito parecidos com a solução de MEF. Dessa forma, para a análise transiente não é possível destacar ou descartar nenhum dos enriquecimentos, apenas foi possível observar que eles possuem boa aplicação para a análise transiente de vigas de Timoshenko.

O trabalho chega a conclusão que o enriquecimento apresentado no trabalho de Arndt (2009) para vigas de Euler-Bernoulli aplicado ao modelo de vigas de Timoshenko apresenta problemas como o efeito de travamento, alto erro relativo e baixa taxa de convergência, apesar de apresentar um comportamento de convergência monotônica. Portanto esse trabalho não considera esse enriquecimento como ideal na análise dinâmica de vigas de Timoshenko.

Os outros dois enriquecimentos apresentaram resultados bons em diversos exemplos. O enriquecimento de Arndt (2009) para barras obteve um melhor espectro de frequência de forma geral, enquanto os gráficos de convergência apontaram uma taxa de convergência mais elevada para o enriquecimento de Hsu (2016). O enriquecimento de Hsu (2016) também apresenta número de condição mais baixo que o enriquecimento de Arndt (2009) para barras, para os níveis mais altos.

Tendo em vista todos os resultados apresentados, podem ser sugeridos trabalhos futuros, como por exemplo:

- Utilizar funções de enriquecimento diferentes, como por exemplo funções polinomiais, já que neste trabalho foram analisadas somente funções trigonométricas;
- Utilizar diferentes técnicas para aliviar o efeito de travamento;
- Utilizar técnicas de estabilização numérica, para assim melhorar as respostas dos enriquecimentos;
- Utilizar outros carregamentos dinâmicos para a análise transiente;
- Realizar a análise transiente considerando o amortecimento;
- Utilizar relação altura / comprimento da viga de 0,002 na análise transiente.

## REFERÊNCIAS

- ADÁMEK, V.; VALEŠ, F. Analytical solution for a heterogeneous timoshenko beam subjected to an arbitrary dynamic transverse load. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, v. 49, p. 373–381, 2015.
- ALDRAIHEM, O. J.; WETHERHOLD, R. C.; SINGH, T. Intelligent beam structures: Timoshenko theory vs. euler-bernoulli theory. In: CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS. **Proceedings of the 1996 IEEE International**. Dearborn, 1996.
- ALMEIDA, A. C. **Análise dinâmica de uma viga escalonada de Euler-Bernoulli, Vlasov, cisalhamento e Timoshenko com apoios elásticos variáveis**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, maio 2012.
- ALOTTA, G.; FAILLA, G.; ZINGALES, M. Finite element method for a nonlocal timoshenko beam model. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 89, p. 77–92, 2014.
- ANTES, H. Fundamental solution and integral equations for timoshenko. **Computers & Structures**, v. 81, p. 383–396, 2003.
- ARGYRIS, J. H.; KELSEY, S. **Energy theorems and structural analysis**. [S.l.]: Springer, 1960. v. 960.
- ARIOLI, G.; GAZZOLA, F. A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the tacoma narrows bridge. **Applied Mathematical Modelling**, v. 39, p. 901–912, 2015.
- ARNDT, M. **O Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado à Análise de vibrações livres de estruturas reticuladas**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.
- ARNDT, M.; MACHADO, R.; SCREMIN, A. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 329, n. 6, p. 659–672, 2010.
- ARNDT, M.; TORII, A. J.; MACHADO, R. D.; SCREMIN, A. Generalized finite element method for vibration analysis of bars. In: **10th World Congress on Computational Mechanics**. São Paulo: Blucher Mechanical Engineering Proceedings, 2014. v. 1, n. 1.
- ARVIN, H. Free vibration analysis of micro rotating beams based on the strain gradient theory using the differential transform method: Timoshenko versus euler-bernoulli beam models. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, v. 65, p. 336–348, 2017.
- AZEVEDO, A. S. d. C.; VASCONCELOS, A. C. A.; HOEFEL, S. dos S. Dynamic analysis of elastically supported timoshenko beam. In: ÁVILA, S. M. (Ed.). **XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Brasília, DF, 2016.



BABUŠKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J. E. Generalized finite element methods—main ideas, results and perspective. **International Journal of Computational Methods**, World Scientific, v. 1, n. 01, p. 67–103, 2004.

BALOBANOV, V.; NIIRANEN, J. Locking-free variational formulations and isogeometric analysis for the timoshenko beam modelsof strain gradient and classical elasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 339, p. 137–159, 2018.

BANERJEE, J. R. Frequency equation and mode shape formulae for composite timoshenko beams. **Composite Structures**, v. 51, p. 381–388, 2001.

BANERJEE, J. R.; ANANTHAPUVIRAJAH, A. An exact dynamic stiffness matrix for a beam incorporating rayleigh-love and timoshenko theories. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 150, p. 337–347, 2019.

BATHE, K. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. [S.I.]: Prentice Hall, 1982. ISBN 0-13-317305-4.

BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. [S.I.]: Prentice Hall, 1996. ISBN 0-13-301458-4.

BAZAN, F. S. V. **Autovalores de Polinômios Matriciais: Sensibilidade, computação e aplicações**. 2003.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: An Introduction**. [S.I.]: Prentice Hall, 1981. I. ISBN 0-13-317057-8.

BELLMAN, R.; CASTI, J. Differential quadrature and long-term integration. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 34, p. 235–238, 1971.

BELYTSCHKO, T.; CHEN, H.; XU, J.; ZI, G. Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 58, p. 1873–1905, 2003.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free galerkin methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, p. 229–256, 1994.

BHAVIKATTI, S. S. **Finite element analysis**. [S.I.]: New Age International (P) Limited, 2005. ISBN 978-81-224-2524-6.

BIHUNA, E. **A base dinâmica na existência de autovalores duplos no modelo de Timoshenko para uma viga uniforme livre-livre**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, mar. 2005.

BITAR, I.; KOTRONIS, P.; BENKEMOUN, N.; GRANGE, S. A generalized timoshenko beam with embedded rotation discontinuity. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 150, p. 34–50, 2018.

CALIM, F. F. Transient analysis of axially functionally graded timoshenko beams with variable cross-section. **Composites Part B: Engineering**, v. 98, p. 472–483, 2016.

CHENG, F. Y.; PANTELIDES, C. P. Dynamic timoshenko beam-columns on elastic media. **Journal of Structural Engineering**, v. 114, n. 7, p. 1524–1550, 1988.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures**. Fourth. [S.l.]: Pearson, 2011. ISBN 978-0-13-285803-8.

CIVALEK, Ö. Application of differential quadrature (dq) and harmonic differential quadrature (hdq) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns. **Engineering Structures**, v. 26, p. 171–186, 2004.

CLOUGH, R. W. The finite element in plane stress analysis. **Proc. 2<sup>nd</sup> ASCE Confer. On Electric Computation, 1960**, 1960.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2001. ISBN 978-0-471-35605-9.

CORN, N. B. S.; PIRANDA, J. Transverse vibrations of short beams: finite element models obtained by a condensation method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 201, n. 3, p. 353–363, 1997.

CORRÊA, R. M.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. Método dos elementos finitos generalizados para vibração livre de vigas curvas finas. In: UFES. **XIII SIMMEC - Simpósio de Mecânica Computacional**. Vitória, ES, 2018.

COSTA, S. N. J. **O modelo de Timoshenko em vigas elásticas, estruturas offshore e nanotubos de carbono através da resposta fundamental de valor inicial**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, abr. 2006.

COTTRELL, J. A.; REALI, A.; BAZILEVS, Y.; HUGHES, T. J. R. Isogeometric analysis of structural vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 5257–5296, 2006.

CUSTÓDIO, R.; ARNDT, M. The generalized finite element method applied in free vibration analysis under plane stress. In: FARIA, P.; LOPEZ, R.; MIGUEL, L.; GOMES, W.; NORONHA, M. (Ed.). **XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Florianópolis, SC, 2017.

DAVIS, R.; HENSHELL, R. D.; WARBURTON, G. B. A timoshenko beam element. **Journal of Sound and Vibration**, v. 22, n. 4, p. 475–487, 1972.

DEBELLA, L. B. C. **Análise dinâmica transiente pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

DEBELLA, L. B. C.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. The generalized finite element method applied to dynamic transient analysis. In: ABCM. **24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering**. Curitiba, 2017.

DEBELLA, L. B. C.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. The generalized finite element method applied to dynamic transient analysis of euler-bernoulli beams. In: FARIA, P.; LOPEZ, R.; MIGUEL, L.; GOMES, W.; NORONHA, M. (Ed.). **XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Florianópolis, SC, 2017.

DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I. Mesh-independent p-orthotropic enrichment using the generalized finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 55, p. 1477–1492, 2002.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 237–262, 1996.

EBRAHIMI, F.; ZIA, M. Large amplitude nonlinear vibration analysis of functionally graded timoshenko beams with porosities. **Acta Astronautica**, v. 116, p. 117–125, 2015.

FARCHALY, S. H.; SHEBL, M. G. Exact frequency and mode shape formulae for studying vibration and stability of timoshenko beam system. **Journal of Sound and Vibration**, v. 180, n. 2, p. 205–227, 1995.

FAROKHI, H.; GHAYESH, M. H. Supercritical nonlinear parametric dynamics of timoshenko microbeams. **Commun Nonlinear Sci Numer Simulat**, v. 59, p. 592–605, 2018.

FERREIRA, A. J. M.; FASSHAUER, G. E. Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an rbf-pseudospectral method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 134–146, 2006.

FREISLEBEN, P. L. M.; ARNDT, M.; WEINHARDT, P. de O.; MACHADO, R. D. Dynamic analysis of timoshenko beams using the generalized finite element method. In: FARIA, P.; LOPEZ, R.; MIGUEL, L.; GOMES, W.; NORONHA, M. (Ed.). **XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Florianópolis, SC, 2017.

FREISLEBEN, P. L. M.; ARNDT, M.; WEINHARDT, P. de O.; MACHADO, R. D. Técnicas de enriquecimento aplicadas ao problema de análise modal de viga de timoshenko. In: PPGMNE. **III Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia**. Curitiba, 2018.

GARCIA, O. A.; ROSSI, R.; LINZMAIER, P. R. Método de elementos finitos generalizados com alta regularidade na abordagem de problemas de vibrações livres não amortecidas. In: ABCM. **VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**. Campina Grande, 2010.

GEIST, B.; MCLAUGHLIN, J. R. Asymptotic formulas for the eigenvalues of the timoshenko beam. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 253, p. 341–380, 2001.

GRANT, D. A. The effect of rotary inertia and shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams carrying a concentrated mass. **Journal of Sound**, v. 57, n. 3, p. 357–365, 1978.

HAN, H. The numerical solutions of interface problems by infinite element method. **Numerische Mathematik**, v. 39, p. 39–50, 1982.

HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamic of transversely vibrating beams using four engineering theories. **Journal of Sound and Vibration**, v. 225, n. 5, p. 935–988, 1999.

HAO, D.; WEI, C. Dynamic characteristics analysis of bi-directional functionally graded timoshenko beams. **Composite Structures**, v. 141, p. 253–263, 2016.

HOANG, T.; DUHAMEL, D.; FORET, G. Dynamical response of a timoshenko beams on periodical nonlinear supports subjected to moving forces. **Engineering Structures**, v. 176, p. 673–680, 2018.

HOEFEL, S. d. S. **Método dos elementos compostos aplicados à análise de vibrações de viga de Timoshenko**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2002.

HOUMAT, A. Vibrations of timoshenko beams by variable order finite elements. **Journal of Sound and Vibration**, v. 187, n. 5, p. 841–849, 1995.

HSU, Y. S. Enriched finite element methods for timoshenko beam free vibration analysis. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, p. 7012–7033, 2016.

HUANG, T. The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions. **Journal of Applied Mechanics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 28, n. 4, p. 579–584, 1961.

HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. [S.l.]: Prentice Hall, 1987. ISBN 0-13-317025-X.

HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 4135–4195, 2005.

HUYNH, T. A.; LIEU, X. Q.; LEE, J. Nurbs-based modeling of bidirectional functionally graded timoshenko beams for free vibration problem. **Composite Structures**, v. 160, p. 1178–1190, 2017.

INCH, O. F. Z. **Influência da viscoelasticidade e do cisalhamento na estabilidade dinâmica de vigas e tubos**. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, nov. 2013.

IRWIN, P. A.; STOYANOFF, S.; XIE, J.; HUNTER, M. Tacoma narrows 50 years later - wind engineering investigations for parallel bridges. **Bridge Structures**, v. 1, n. 1, p. 3–17, 2005.

JAFARALI, P.; AMEEN, M.; MUKHERJEE, S.; PRATHAP, G. Variational correctness and timoshenko beam finite element elastodynamics. **Journal of Sound and Vibration**, v. 299, p. 196–211, 2007.

JANG, S. K.; BERT, C. W.; STRIZ, A. G. Application of differential quadrature to static analysis of structural components. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v. 28, p. 561–577, 1989.

JIANG, J.-Q. Transient response of timoshenko beams subject to a moving mass. **Journal of Vibration and Control**, v. 17, n. 13, p. 1975–1982, 2011.

JING, L. long; MING, P. jian; ZHANG, W. ping; FU, L. rong; CAO, Y. peng. Static and free vibration analysis of functionally graded beams by combination timoshenko theory and finite volume method. **Composite Structures**, v. 138, p. 192–213, 2016.

KAPUR, K. K. Vibrations of a timoshenko beam, using finite-element approach. **The Journal of the Acoustical Society of America**, ASA, v. 40, n. 5, p. 1058–1063, 1966.

KIM, J.-H.; CHOO, Y.-S. Dynamic stability of a free-free timoshenko beam subjected to a pulsating follower force. **Journal of Sound and Vibration**, v. 216, n. 4, p. 623–636, 1998.

KIM, Y.-W.; CHA, S. C. Finite element formulation and analysis of timoshenko beam excited by transversely fluctuating supports due to a real seismic wave. **Nuclear Engineering and Technology**, v. 50, p. 971–980, 2018.

KLEIN, V. **Um estudo evolutivo e espectral dos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, ago. 2006.

KRUSZEWSKI, E. T. **Effect of transverse shear and rotary inertia on the natural frequency of a uniform beam**. Washington, 1949.

KWON, Y. W.; BANG, H. **Finite Element Method Using MATLAB**. [S.l.]: CRC-Press, 1997. ISBN 0-8493-9653-0.

LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. Surfaces generated by moving least squares methods. **Mathematics of Computation**, v. 37, n. 155, p. 141–158, 1981.

LAURA, P. A. A.; GUTIERREZ, R. H. Analysis of vibrating timoshenko beams using the method of differential quadrature. **Shock and Vibration**, v. 1, n. 1, p. 89–93, 1993.

LEE, J.; SCHULTZ, W. W. Eigenvalue analysis of timoshenko beams and axisymmetric mindlin plates by the pseudospectral method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 269, p. 609–621, 2004.

LEE, S. J.; PARK, K. S. Vibrations of timoshenko beams with isogeometric approach. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 37, n. 22, p. 9174–9190, 2013.

LEE, U.; KIM, J.; OH, H. Spectral analysis for the transverse vibration of an axially moving timoshenko beam. **Journal of Sound and Vibration**, v. 271, p. 685–703, 2004.

LEISSA, A. W.; QATU, M. S. **Vibrations of Continuous Systems**. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2011. ISBN 978-0-07-145728-6.

LENCI, S.; CLEMENTI, F.; REGA, G. Comparing nonlinear free vibrations of timoshenko beams with mechanical or geometric curvature definition. In: **PROCEDIA IUTAM. 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics**. [S.l.], 2017. v. 20, p. 34–41.

LEPE, F.; MORA, D.; RODRÍGUEZ, R. Locking-free finite element method for a bending moment formulation of timoshenko beams. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 68, p. 118–131, 2014.



LESS, A. W.; THOMAS, D. L. Unified timoshenko beam finite element. **Journal of Sound and Vibration**, v. 80, n. 3, p. 355–366, 1982.

LI, X.-F. A unified approach for analyzing and dynamic behaviours of functionally graded timoshenko and euler-bernoulli beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 318, p. 1210–1229, 2008.

LOU, P.; DAI, G. lian; ZENG, Q. yuan. Dynamic analysis of a timoshenko beam subjected to moving concentrated forces using the finite element method. **Shock and Vibration**, v. 14, p. 459–468, 2007. ISSN 1070-9622/07/17.00.

MALACARNE, M. F. **O indicador de erro de Friberg empregado no Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado à análise dinâmica de estruturas.** Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

MALACARNE, M. F.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; WEINHARDT, P. de O.; PETROLI, T. Adaptive enrichment of the generalized finite element method based on the friberg error indicator. In: ABCM. **24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering**. Curitiba, 2017.

MALACARNE, M. F.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; WEINHARDT, P. de O. Free vibration analysis of trusses applying the generalized finite element method with a selective mesh enrichment. In: FARIA, P.; LOPEZ, R.; MIGUEL, L.; GOMES, W.; NORONHA, M. (Ed.). **XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Florianópolis, SC, 2017.

MATSUMOTO, M. et al. Effects of aerodynamic interferences between heaving and torsional vibration of bridge decks: the case of tacoma narrows bridge. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 91, p. 1547–1557, 2003.

MELENK, J. M. **Finite element methods with harmonics shape functions for solving Laplace's equation.** Dissertação (Mestrado) — Faculty of the Graduate School of the University of Maryland, Maryland, 1992.

MELENK, J. M. **On generalized finite element methods.** Tese (Doutorado) — Faculty of the Graduate School of The University of Maryland, Maryland, 1995.

MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. **The partition of unity finite element method: Basic theory and applications.** Zürich, Switzerland, 1996.

MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 289–314, 1996.

MOALLEMI-OREH, A.; KARKON, M. Finite element formulation for stability and free vibration analysis of timoshenko beam. **Advances in Acoustics and Vibration**, Hindawi, v. 2013, 2013.

MUKHERJEE, S.; PRATHAP, G. Analysis of shear locking in timoshenko beam elements using the function space approach. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 17, p. 385–393, 2001.

MUKHERJEE, S.; REDDY, J. N.; KRISHNAMOORTHY, C. S. Convergence properties and derivative extraction of the superconvergent timoshenko beam finite element. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 3475–3500, 2001.

NASCIMENTO, R. F. do. **Análise dinâmica de vigas utilizando o elemento finito de Timoshenko com refinamento p-adaptativo**. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, mar. 2005.

NAVADEH, N.; HEWSON, R. W.; FALLAH, A. S. Dynamics of transversally vibrating non-prismatic timoshenko cantilever beams. **Engineering Structures**, v. 166, p. 511–525, 2018.

NOROUZZADEH, A.; ANSARI, R. Finite element analysis of nano-scale timoshenko beams using the integral model of nonlocal elasticity. **Physica E**, v. 88, p. 194–200, 2017.

OZGUMUS, O. O.; KAYA, M. Flapwise bending vibration analysis of a rotating double-tapered timoshenko beam. **Archive of Applied Mechanics**, Springer, v. 78, n. 5, p. 379–392, 2008.

PALAZZOLO, A. **Vibration Theory and Applications with Finite Elements and Active Vibration Control**. Texas: Wiley, 2016. ISBN 978-1-118-35080-5.

PAUL, A.; DAS, D. Free vibration analysis of pre-stressed fgm timoshenko beams under large transverse deflection by a variational method. **Engineering Science and Technology**, v. 19, n. 2, p. 1003–1017, jun. 2016.

PETROLI, T. **Condicionamento do problema de autovalores obtido do Método de Elementos Finitos Generalizados na dinâmica de estruturas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

PRACIANO, J. S. C.; AUAD, S. P.; JUNIOR, E. P.; JUNIOR, J. B. M. de S. Formulação isogeométrica para vigas de timoshenko. In: FARIA, P. O.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F.; GOMES, W. J. S.; NORONHA, M. (Ed.). **XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Florianópolis, SC, 2017.

PRADHAN, K.; CHAKRAVERTY, S. Free vibration of euler and timoshenko functionally graded beams by rayleigh–ritz method. **Composites Part B: Engineering**, Elsevier, v. 51, p. 175–184, 2013.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 5th. ed. [S.l.]: Pearson, 2011. ISBN 978-0-13-212819-3.

RENSBURG, N. F. J. van; MERWE, A. J. van der. Natural frequencies and modes of a timoshenko beam. **Wave Motion**, v. 44, p. 58–69, 2006.

RUGE, P.; BIRK, C. A comparison of infinite timoshenko and euler-bernoulli beam models on winkler foundation in the frequency- and time-domain. **Journal of Sound and Vibration**, v. 304, p. 932–947, 2007.

SANTANA, W. C. de. **Um método robusto de elementos finitos generalizados aplicado à mecânica da fratura**. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, fev. 2004.

SHANG, H. Y. **Análise dinâmica elastoplástica de problemas da mecânica de sólidos via métodos enriquecidos de elementos finitos**. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2014.

SHANG, H. Y.; MACHADO, R. D.; ABDALLA FILHO, J. E. Dynamic analysis of euler-bernoulli beam problems using the generalized finite element method. **Computers and Structures**, v. 173, p. 109–122, 2016.

SHI, W.; SHEN, Z.-B.; PENG, X.-L.; LI, X.-F. Frequency equation and resonant frequencies of free-free timoshenko beams with unequal end masses. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 115-116, p. 406–415, 2016.

SILVA, W. T. M.; CUNHA, A. A.; GUTIÉRREZ, M. P. D. Análisis no lineal de pórticos planos usando la formulación corrotacional con elemento de viga timoshenko. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 33, n. 1-2, p. 115–122, 2017.

SOUZA, M. R. A.; MENDONÇA, A. V. Análise dinâmica de uma viga de timoshenko apoiada sobre base elástica utilizando equações integrais: um caso particular. In: UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE. **VIII Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional**. Natal, 2008.

SOUZA, V. H. de; ARNDT, M. Dynamic analysis of plane steel frames with semi-rigid connections by the generalized finite element method. In: FARIA, P. O.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F.; GOMES, W. J. S.; NORONHA, M. (Ed.). **XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Florianópolis, SC, 2017.

STOJANOVIĆ, V.; RIBEIRO, P.; STOYKOV, S. Non-linear vibration of timoshenko damaged beams by a new p-version finite element method. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 120, p. 107–119, 2013.

STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, p. 43–69, 2000.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 47, p. 1401–1417, 2000.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 4081–4193, 2001.

STROUBOULIS, T.; ZHANG, L.; BABUŠKA, I. Generalized finite element method using mesh-based handbooks: application to problems in domains with many voids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 3109–3161, 2003.



STROUBOULIS, T.; ZHANG, L.; BABUŠKA, I. p-version of the generalized fem using mesh-based handbooks with applications to multiscale problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 60, p. 1639–1672, 2004.

SU, H.; BANERJEE, J. R. Development of dynamics stiffness method for free vibration of functionally graded timoshenko beams. **Computers and Structures**, v. 147, p. 107–116, 2015.

SU, Y.-C.; MA, C.-C. Transient wave analysis of a cantilever timoshenko beam subjected to impact loading by laplace transform and normal modes methods. **International Journal of Solids and Structures**, v. 49, p. 1158–1176, 2012.

TAI, C.-Y.; CHAN, Y. A hierarchic high-order timoshenko beam finite element. **Computers and Struct**, v. 165, p. 48–58, 2016.

TANG, A.-Y.; WU, J.-X.; LI, X.-F.; LEE, K. Y. Exact frequency equations of free vibration of exponentially non-uniform functionally graded timoshenko beams. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 89, p. 1–11, 2014.

TANG, Y.-Q.; CHEN, L.-Q.; YANG, X.-D. Natural frequencies, modes and critical speeds of axially moving timoshenko beams with different boundary conditions. **International Journal of mechanical sciences**, Elsevier, v. 50, n. 10-11, p. 1448–1458, 2008.

TANG, Y.-Q.; CHEN, L.-Q.; YANG, X.-D. Nonlinear vibrations of axially moving timoshenko beams under weak and strong external excitations. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 320, n. 4-5, p. 1078–1099, 2009.

THOMAS, D. L.; WILSON, J. M.; WILSON, R. R. Timoshenko beam finite elements. **Journal of Sound and Vibration**, v. 31, n. 3, p. 315–330, 1973.

THOMAS, J.; ABBAS, B. A. Finite element model for dynamic analysis of timoshenko beam. **Journal of Sound and Vibration**, v. 41, n. 3, p. 291–299, 1975.

TIMOSHENKO, S. P. Lxvi. on the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 41, n. 245, p. 744–746, 1921.

TIMOSHENKO, S. P. X. on the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, Taylor & Francis, v. 43, n. 253, p. 125–131, 1922.

TIMOSHENKO, S. P. **History of Strength of Materials**. [S.l.]: Dover Publications, 1983. ISBN 0-486-61187-6.

TOLFO, D. d. R. **Sobre o espectro de frequências do modelo de Timoshenko para uma viga bi-apoiada**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, jan. 2013.

TONG, X.; TABARROK, B.; YEH, K. Y. Vibration analysis of timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section. **Journal of Sound and Vibration**, v. 186, n. 5, p. 821–835, 1995.

TORABI, K.; JAZI, A. J.; ZAFARI, E. Exact closed form solution for the analysis of the transverse vibration modes of a timoshenko beam with multiple concentrated masses. **Applied Mathematics and Computation**, v. 238, p. 342–357, 2014.

TORII, A. J. **Análise dinâmica de estruturas com o Método dos Elementos Finitos Generalizado**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

TORII, A. J.; MACHADO, R. D. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, SciELO Brasil, v. 9, n. 3, p. 1–31, 2012.

TORII, A. J.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. Gfem for modal analysis of 2d wave equation. **Engineering Computations**, v. 32, n. 6, p. 1779–1801, 2015.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805 – 854, 1956.

VASCONCELOS, A. C. A.; AZEVÊDO, A. S. da C.; HOEFEL, S. dos S. Finite element analysis of shear-deformation and rotatory inertia for beam vibration. In: ÁVILA, S. M. (Ed.). **XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Brasília, 2016.

WATTANASAKULPONG, N.; MAO, Q. Dynamic response of timoshenko functionally graded beams with classical and non-classical boundary using chebyshev collocation method. **Composite Structures**, v. 119, p. 346–354, 2015.

WEEGER, O.; WEVER, U.; SIMEON, B. Isogeometric analysis of nonlinear euler–bernoulli beam vibrations. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 72, n. 4, p. 813–835, 2013.

WEINHARDT, P. d. O. **Estudo da estabilidade do Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado à análise dinâmica**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

WEINHARDT, P. d. O.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. O método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise dinâmica: tipos de enriquecimento, escolha da partição da unidade e técnicas de pré condicionamento. In: DUMONT, N. A. (Ed.). **XXXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Rio de Janeiro, 2015.

WEINHARDT, P. d. O.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. Gfem stabilization techniques applied to transient dynamic analysis. In: ÁVILA, S. M. (Ed.). **XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Brasília, 2016.

WEINHARDT, P. d. O.; DEBELLA, L. B. C.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. Gfem stabilization techniques applied to dynamic analysis of non-uniform section bars. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 11, 2018.

WU, J.-S.; CHANG, B.-H. Free vibration of axial-loaded multi-step timoshenko beam carrying arbitrary concentrated elements using continuous-mass transfer matrix method. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, Elsevier, v. 38, p. 20–37, 2013.

XIANG, H. J.; YANG, J. Free and forced vibration of a laminated fgm timoshenko beam of variable thickness under heat conduction. **Composites Part B: Engineering**, v. 39, p. 292–303, 2008.

XU, S.; WANG, X. Free vibration analyses of timoshenko beams with free edges by using the discrete singular convolution. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 42, n. 10, p. 797–806, 2011.

YOKOYAMA, T. A reduced integration timoshenko beam element. **Journal of Sound and Vibration**, v. 169, n. 3, p. 411–418, 1994.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structure, part ii: C1 element (beam). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 659–696, 1998.

ZHANG, Y. Frequency spectra of nonlocal timoshenko beams and an effective method of determining nonlocal effect. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 128-129, p. 572–582, 2017.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **Finite Element Method**. Fifth. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2000. Volume 1: The basis. ISBN 0750650494.

ZIETSMAN, L.; RENSBURG, N. F. J. van; MERWE, A. J. van der. A timoshenko beam with tip body and boundary damping. **Wave Motion**, v. 39, p. 199–211, 2004.

## APÊNDICES

## APÊNDICE A – ABORDAGEM DE ZIETSMAN, RENSBURG E MERWE (2004)

A abordagem feita por Zietsman, Rensburg e Merwe (2004) é realizada utilizando o Método de Galerkin. Os autores realizam uma adimensionalização do problema de forma diferente que Hsu (2016), dessa maneira não é possível realizar a comparação entre as duas abordagens.

Para deixar seu equacionamento adimensional Zietsman, Rensburg e Merwe (2004) utilizam duas constantes adimensionais  $\alpha$  e  $\beta$ , dadas por

$$\alpha = \frac{Al^2}{I}, \quad (\text{A.1})$$

$$\beta = \frac{k_s GA l^2}{EI}, \quad (\text{A.2})$$

onde  $l$  é o tamanho total da viga, essas constantes são introduzidas nas Equações 3.6 e 3.9, logo no início da manipulação algébrica.

Enquanto Hsu (2016) resolve todo o sistema para, somente após encontradas as frequências naturais, adimensionalizar, utilizando a equação

$$\omega_n^2 = \lambda_n l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}. \quad (\text{A.3})$$

Para que fosse possível realizar a comparação entre as duas abordagens foi decidido utilizar a abordagem de Zietsman, Rensburg e Merwe (2004) sem a adimensionalização realizada pelos autores, para após encontradas as frequências, utilizar a Equação A.3.

É considerada uma viga engastada-livre, portanto suas condições de contorno são:

$$y(0, t) = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\phi(0, t) = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(l, t) - \phi(l, t) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (\text{A.7})$$

As Equações 3.6, 3.9, A.4 a A.7 representam o modelo matemático.

Para obter a forma variacional do problema, as equações parciais diferenciais 3.6 e 3.9 são multiplicadas por funções arbitrárias  $\psi$  e  $v$ , respectivamente. Usando a notação de produto interno,  $(f, g)$ , para o produto a integração,  $\int_0^l fg$ .

Iniciando a partir da Equação 3.6 obtém-se:

$$EI \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \psi \right) + k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi, \psi \right) - \rho I \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \psi \right) = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\left[ EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi \right]_0^l - EI \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x}, \psi \right) - k_s GA (\phi, \psi) - \rho I \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \psi \right) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Agora a partir da Equação 3.9 obtém-se:

$$k_s GA \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x}, v \right) - \rho A \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, v \right) = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\left[ k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi \right) v \right]_0^l - k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi, \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho A \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, v \right) = 0. \quad (\text{A.11})$$

O conjunto apropriado de funções teste é dado por

$$T = \{u \in C^1[0, l] : u(0) = 0\}.$$

Deve ser encontrado um par de funções  $\langle y, \phi \rangle$  tal que, para  $t > 0$ ,  $y(\cdot, t) \in T$ ,  $\phi(\cdot, t) \in T$  tal que:

$$EI \frac{\partial \phi}{\partial x}(l, t) \psi(l) - EI \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) \psi(0) - EI \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x}, \psi \right) - k_s GA (\phi, \psi) - \rho I \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \psi \right) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Logo:

$$EI \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x}, \psi \right) + k_s GA (\phi, \psi) + \rho I \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \psi \right) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x}(l, t) - \phi(l, t) \right) v(l) - k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) - \phi(0, t) \right) v(0) - k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi, \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \rho A \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, v \right) = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$k_s GA \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \phi, \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \rho A \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, v \right) = 0, \quad (\text{A.15})$$

para cada par  $\langle v, \psi \rangle$  com  $v \in T$ ,  $\psi \in T$ .

Considerando que a solução é harmônica, será utilizado um par de funções na forma  $y(x, t) = e^{\lambda t} \bar{y}(x)$  e  $\phi(x, t) = e^{\lambda t} \bar{\phi}(x)$ , onde  $\lambda$  é um número complexo. Substituindo o par de funções nas Equações A.13 e A.15

$$EI (e^{\lambda t} \bar{\phi}', \psi') - k_s GA (e^{\lambda t} \bar{y}', \psi) + k_s GA (e^{\lambda t} \bar{\phi}, \psi) + \rho I (\lambda^2 e^{\lambda t} \bar{\phi}, \psi) = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$e^{\lambda t} EI (\bar{\phi}', \psi') - e^{\lambda t} k_s GA (\bar{y}', \psi) + e^{\lambda t} k_s GA (\bar{\phi}, \psi) + \lambda^2 e^{\lambda t} \rho I (\bar{\phi}, \psi) = 0, \quad (\text{A.17})$$

$$\lambda^2 \rho I (\bar{\phi}, \psi) + EI (\bar{\phi}', \psi') + k_s GA (\bar{\phi}, \psi) - k_s GA (\bar{y}', \psi) = 0, \quad (\text{A.18})$$

$$k_s GA (e^{\lambda t} \bar{y}' - e^{\lambda t} \bar{\phi}, v') + \rho A (\lambda^2 e^{\lambda t} \bar{y}, v) = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$e^{\lambda t} k_s GA (\bar{y}', v') - e^{\lambda t} k_s GA (\bar{\phi}, v') + \lambda^2 e^{\lambda t} \rho A (\bar{y}, v) = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\lambda^2 \rho A (\bar{y}, v) + k_s GA (\bar{y}', v') - k_s GA (\bar{\phi}, v') = 0. \quad (\text{A.21})$$

O problema de autovalor quadrático foi apresentado nas Equações A.18 e A.21. A solução de problemas de aproximações dimensionais finitas é obtida considerando um conjunto  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  de funções base. A aproximação de Galerkin do problema variacional dinâmico pode ser formulada encontrando um par de funções  $\langle \bar{y}^h, \bar{\phi}^h \rangle$ , com  $\bar{y}^h(x)$  e  $\bar{\phi}^h(x)$  ambas combinações lineares das funções de base  $\gamma_i$ , tal que, as Equações A.13 e A.15 são satisfeitas para todo  $v = \gamma_i$  e  $\psi = \gamma_i$ , com  $i = 1, \dots, n$ . As funções de combinações lineares são dadas por

$$\bar{y}^h(x) = \sum_{i=1}^n y_i \gamma_i(x), \quad (\text{A.22})$$

$$\bar{\phi}^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i \gamma_i(x), \quad (\text{A.23})$$

sendo  $y_i$  o  $i$ -ésimo deslocamento e  $\phi_i$  a  $i$ -ésima rotação.

Isso leva a um problema semi-discreto da seguinte forma

$$\mathbf{M} \ddot{w}(t) + \mathbf{K} w(t) = 0, \quad (\text{A.24})$$

sendo  $\mathbf{M}$  a matriz de massa,  $w$  o vetor de deslocamento, e  $\mathbf{K}$  a matriz de rigidez.

Sejam definidas as matrizes  $N$ ,  $O$  e  $P$  por suas componentes:

$$N_{ij} = (\gamma_j', \gamma_i'), \quad (\text{A.25})$$

$$O_{ij} = (\gamma_j, \gamma'_i), \quad (\text{A.26})$$

$$P_{ij} = (\gamma_j, \gamma_i), \quad (\text{A.27})$$

sendo que  $O$  não é uma matriz simétrica.

A aproximação de Galerkin do problema de autovalor quadrático, Equações A.18 e A.21, é então dada por:

$$\lambda^2 \rho IP \phi + EIN \phi + k_s GAP \phi - k_s GAO^T \mathbf{y} = 0, \quad (\text{A.28})$$

$$\lambda^2 \rho AP \mathbf{y} + k_s GAN \mathbf{y} - k_s GAO \phi = 0, \quad (\text{A.29})$$

onde  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ .

O sistema da Equação A.24 pode ser expresso como um problema de autovalor de matriz quadrática

$$(\lambda^2 \mathbf{M} - \mathbf{K}) \Phi_n = 0, \quad (\text{A.30})$$

onde

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \phi \end{bmatrix}, \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho AP & 0 \\ 0 & \rho IP \end{bmatrix}, \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_s GAN & -k_s GAO \\ -k_s GAO^T & EIN + k_s GAP \end{bmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

As frequências obtidas a partir da Equação A.30 serão adimensionalizadas com a Equação A.3.



## APÊNDICE B – MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ

Serão apresentadas as matrizes de massa e rigidez para as abordagens de Hsu (2016) e Zietsman, Rensburg e Merwe (2004) utilizando funções de forma lineares, para verificar a similaridade entre as matrizes.

### B.1 MATRIZ DE MASSA PELA ABORDAGEM DE HSU (2016)

A matriz de massa é apresentada na Equação 3.21, utilizando funções de forma lineares ela é dada por:

$$M^e = \begin{bmatrix} \rho A |J| \gamma_1 \gamma_1 & 0 & \rho A |J| \gamma_1 \gamma_2 & 0 \\ 0 & \rho I |J| \gamma_1 \gamma_1 & 0 & \rho I |J| \gamma_1 \gamma_2 \\ \rho A |J| \gamma_1 \gamma_2 & 0 & \rho A |J| \gamma_2 \gamma_2 & 0 \\ 0 & \rho I |J| \gamma_1 \gamma_2 & 0 & \rho I |J| \gamma_2 \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

### B.2 MATRIZ DE MASSA PELA ABORDAGEM DE ZIETSMAN, RENSBURG E MERWE (2004)

A matriz de massa é apresentada na Equação A.32, utilizando funções de forma lineares ela é dada por:

$$M^e = \begin{bmatrix} \rho A |J| \gamma_1 \gamma_1 & \rho A |J| \gamma_1 \gamma_2 & 0 & 0 \\ \rho A |J| \gamma_1 \gamma_2 & \rho A |J| \gamma_2 \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho I |J| \gamma_1 \gamma_1 & \rho I |J| \gamma_1 \gamma_2 \\ 0 & 0 & \rho I |J| \gamma_1 \gamma_2 & \rho I |J| \gamma_2 \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Se forem invertidas a linha 2 com a linha 3 e a coluna 2 com a coluna 3, é observado que as matrizes de massa das duas abordagens são semelhantes.

### B.3 MATRIZ DE RIGIDEZ PELA ABORDAGEM DE HSU (2016)

A matriz de rigidez é apresentada na Equação 3.20, utilizando funções de forma lineares ela é dada por:

$$k^e = \begin{bmatrix} k_s \frac{GA}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_1}{d\xi} & -k_s GA \gamma_1 \frac{d\gamma_1}{d\xi} & k_s \frac{GA}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} & -k_s GA \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{d\xi} \\ -k_s GA \gamma_1 \frac{d\gamma_1}{d\xi} & \frac{EI}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_1}{d\xi} + k_s GA |J| \gamma_1 \gamma_1 & -k_s GA \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{d\xi} & \frac{EI}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} + k_s GA |J| \gamma_1 \gamma_2 \\ k_s \frac{GA}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} & -k_s GA \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{d\xi} & k_s \frac{GA}{|J|} \frac{d\gamma_2}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} & -k_s GA \gamma_2 \frac{d\gamma_2}{d\xi} \\ -k_s GA \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{d\xi} & \frac{EI}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} + k_s GA |J| \gamma_1 \gamma_2 & -k_s GA \gamma_2 \frac{d\gamma_2}{d\xi} & \frac{EI}{|J|} \frac{d\gamma_2}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} + k_s GA |J| \gamma_2 \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

### B.4 MATRIZ DE RIGIDEZ PELA ABORDAGEM DE ZIETSMAN, RENSBURG E MERWE (2004)

A matriz de rigidez é apresentada na Equação A.33, utilizando funções de forma lineares ela é dada por:

$$k^e = \begin{bmatrix} k_s \frac{GA}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_1}{d\xi} & k_s \frac{GA}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} & -k_s GA \gamma_1 \frac{d\gamma_1}{d\xi} & -k_s GA \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{d\xi} \\ k_s \frac{GA}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} & k_s \frac{GA}{|J|} \frac{d\gamma_2}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} & -k_s GA \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{d\xi} & -k_s GA \gamma_2 \frac{d\gamma_2}{d\xi} \\ -k_s GA \gamma_1 \frac{d\gamma_1}{d\xi} & -k_s GA \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{d\xi} & \frac{EI}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_1}{d\xi} + k_s GA |J| \gamma_1 \gamma_1 & \frac{EI}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} + k_s GA |J| \gamma_1 \gamma_2 \\ -k_s GA \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{d\xi} & -k_s GA \gamma_2 \frac{d\gamma_2}{d\xi} & \frac{EI}{|J|} \frac{d\gamma_1}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} + k_s GA |J| \gamma_1 \gamma_2 & \frac{EI}{|J|} \frac{d\gamma_2}{d\xi} \frac{d\gamma_2}{d\xi} + k_s GA |J| \gamma_2 \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Se forem invertidas a linha 2 com a linha 3 e a coluna 2 com a coluna 3, é observado que as matrizes de rigidez das duas abordagens são semelhantes.