UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CAMILA FABRÍCIO KERKHOFF

OTIMIZAÇÃO NA CONSTRUÇÃO DE UMA GRADE HORÁRIA PARA O COLÉGIO ESTADUAL PROFESSOR PAULO FREIRE

PONTAL DO PARANÁ

2019

CAMILA FABRÍCIO KERKHOFF

OTIMIZAÇÃO NA CONSTRUÇÃO DE UMA GRADE HORÁRIA PARA O COLÉGIO ESTADUAL PROFESSOR PAULO FREIRE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná como requisito à obtenção do título de Licenciada em Ciências Exatas com habilitação em Matemática

Orientadora: Profª Drª Luciana Casacio

PONTAL DO PARANÁ

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE:
UFPR / SiBi - Biblioteca do Centro de Estudos do Mar
Fernanda Pigozzi – CRB 9/1151

Kerkhoff, Camila Fabrício
K394o Otimização na construção de uma grade horária para o Colégio Estadual Professor Paulo Freire. / Camila Fabrício Kerkhoff. – Pontal do Paraná, 2019.
63 f.; 29 cm.

Orientadora: Profª. Dra. Luciana Casacio

Monografia (Graduação) – Curso de Licenciatura em Ciências Exatas, habilitação em Matemática, Centro de Estudos do Mar, Setor Reitoria, Universidade Federal do Paraná.

1. Escola – organização - horário. 2. Modelos matemáticos - otimização. 3. Programação. I. Título. II. Casacio, Luciana. III. Universidade Federal do Paraná.

CDD 519.72

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
CENTRO DE ESTUDOS DO MAR
***Campus* Pontal do Paraná**

TERMO DE APROVAÇÃO

CAMILA FABRÍCIO KERKHOFF

Otimização na construção de uma grade horária para o Colégio Estadual Professor Paulo Freire

Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Ciências Exatas – Matemática, da Universidade Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos professores:

Drª. Luciana Casacio
Orientadora e Presidente

Eduardo Tadeu Bacalhau

Dr. Eduardo Tadeu Bacalhau
Membro Examinador

Dr. Fernando Araújo Borges
Membro Examinador

Pontal do Paraná, 10/07/2019.

Avenida Beira Mar s/n - Caixa Postal: 61
Balneário Pontal do Sul
Pontal do Paraná - PR - 83255-976
Tel: 41 3511-8600 - Fax: 41 3511-8648 8648

Rua Rio Grande do Norte, nº. 145
Balneário de Mirassol
Pontal do Paraná - PR - 83255-000
Tel: 41 3511-2148 - Fax: 41 3511-

www.cem.ufpr.br

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida. A minha mãe, por sempre me apoiar. Aos meus professores, em especial a minha orientadora Luciana e o professor Bacalhau, que não me deixaram desistir da graduação e seguir até o fim e, a todos que apoiaram e contribuiram para a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela saúde e força para superar as dificuldades.

A minha orientadora, Profª Drª Luciana Casacio, por todo empenho dedicado à elaboração deste trabalho, pela orientação, incentivo e confiança.

Agradeço a todos os professores que contribuíram com a minha trajetória acadêmica, em especial ao Prof. Bacalhau, pela paciência, dedicação, incentivo e auxílio em momentos difíceis.

Agradeço a minha mãe Sandra, heroína que sempre me apoia e incentiva nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

Aos amigos que fiz nesta universidade, por todos os momentos vividos, pelo companheirismo e fraternidade, em especial aos amigos do curso e da biblioteca, vocês foram fundamentais para minha formação.

Ao meu namorado, por ser tão atencioso, paciente, por aguentar as crises de estresse e ansiedade, por sempre estar ao meu lado.

A toda direção do Curso de Licenciatura em Ciências Exatas, do Campus Pontal do Paraná da Universidade Federal do Paraná, sou grata à cada membro do corpo docente, à direção e à administração dessa instituição de ensino.

A todas as pessoas que de alguma forma fizeram parte do meu percurso eu agradeço com todo meu coração.

"Se uma rosa de amor tu guardaste,
Bem no teu coração;
Se a um Deus supremo e justo endereçaste
Tua humilde oração;
Se com a taça erguida
Cantaste, um dia, o teu louvor à vida,
Tu não viveste em vão..."
Omar Khayyám

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo otimizar a construção da grade de encargos didáticos do Colégio Estadual Professor Paulo Freire da cidade de Pontal do Paraná. O colégio possui 19 turmas, com 14 disciplinas distintas e 34 professores, com 5 aulas por dia de segunda à sexta-feira, no turno matutino e vespertino. Encontrar uma solução para o problema de designação de encargos didáticos que respeite os requisitos organizacionais e pedagógicos, e ainda, as preferências dos professores, sendo gerado por um *software* gratuito, beneficia toda a comunidade escolar. O problema é modelado como um Problema de Programação Inteira Binária e os métodos exatos Método Simplex e o Algoritmo *Branch-and-Bound* são utilizados para a resolução. Após determinar o modelo matemático, que define a função objetivo e as restrições do problema, o modelo matemático é adaptado então para a linguagem computacional GLPK, através da interface gráfica GUSEK. Um estudo de caso real é sistematizado e os resultados mostram que o modelo aplicado é capaz de resolver o problema de otimização considerando simultaneamente as quantidades horas-aula de todos os professores, as quantidades de aulas das disciplinas em cada turma e as preferências dos professores em relação as turmas e turnos de trabalho.

Palavras-chave: problema de designação de encargos didáticos, programação linear inteira, otimização.

ABSTRACT

This work aims to optimize the construction of the didactic classes schedule of the Paulo Freire State College of Pontal do Paraná city. The college has 19 groups, 14 distinct subjects and 34 teachers, with 5 classes from Monday to Friday on the morning and afternoon shift. Finding a solution to the assigning teaching schedule problem that respects the organizational and pedagogical requirements and the preferences of teachers, generated by a free software, benefits the whole school community. The problem is modeled as a Binary Integer Programming Problem and the exact methods Simplex Method and the Branch-and-Bound Algorithm are used for resolution. After determining the mathematical model, the objective function is defined and constraints of the problem, the mathematical model is then adapted to the GLPK computational language through the GUSEK graphical interface. A real case study is designed and the results show that the applied model is able to solve the optimization problem considering simultaneously the number of class hours for all teachers, the number of classes of the subjects in each group and the preferences of teachers in relation to classes and work shifts.

Keywords: full frame preparation schedule, interger linear programming, optimization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

AMPL	A Mathematical Programming Language
BNC	Base Nacional Comum
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CLT	Consolidação das Leis de Trabalho
GLPK	GNU Linear Programming Kit
GUSEK	GLPK Under Scite Extended Kit
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
NRE	Núcleo Regional de Ensino
PL	Programação Linear
PLB	Programação Linear Binária
PLI	Programação Linear Inteira
PO	Pesquisa Operacional
PPL	Problema de Programação Linear
PPLI	Problemas de Programação Linear Inteira
PSS	Processo Seletivo Simplificado
QPM	Quadro Próprio do Magistério
SEED	Secretaria de Estado da Educação
SOBRAPO	Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional

SUMÁRIO

1 Introdução

A construção da grade de encargos didáticos tem como função determinar os dias da semana e horários de aula em que os professores ministram suas aulas em determinadas turmas, e ainda, esses professores são limitados a ministrar determinadas disciplinas conforme sua formação, ou seja, um professor por disciplina, em determinada turma, em um dia e horário.

No entanto, realizar a construção da grade de encargos didáticos não é uma tarefa simples pois envolve um grande conjunto de possibilidades e quanto maior o conjunto, maior a dificuldade de encontrar uma solução.

A Pesquisa Operacional (PO) é uma área do conhecimento que está associada a solução de problemas de tomada de decisão sendo possível desenvolver modelos matemáticos, que buscam soluções para diversos tipos de problemas. Neste contexto, a PO pode ser utilizada para a solução do problema de construção de grade de encargos didáticos.

Esse problema dentro da PO é dito como problema de designação, ou seja, tem como objetivo designar ou alocar algo, no caso, alocar professores a determinadas turmas, em dias e horários. Para isso, é necessário empregar métodos de resolução que podem ser métodos exatos, que possuem como característica a garantia de obtenção da solução ótima para o problema, tais como: Método Simplex e Algoritmo *Branch-and-Bound*. Ou ainda, podem ser utilizados métodos heurísticos, que buscam uma boa solução, contudo, sem a garantia de obtenção da solução ótima, entre eles: Algoritmos Genéticos e Busca Tabu.

O Colégio Estadual Professor Paulo Freire, da cidade de Pontal do Paraná-PR é objeto do estudo de caso para o Problema de Designação de encargos didáticos. O referido colégio possui turmas do Ensino Fundamental e Médio, com um total de 19 turmas, com 14 disciplinas distintas e 34 professores para ministrar todas as aulas em 5 horários de segunda à sexta-feira, no turno matutino e vespertino, gerando um problema de difícil solução, o que dificulta a construção manual da grade de encargos didáticos. A fim de viabilizar o resultado, o problema pode ser resolvido com o auxílio de *softwares* que utilizam métodos de PO como base para resolver problemas.

O Colégio Estadual Professor Paulo Freire atualmente utiliza um *software* pago e com taxa de renovação anual para a confecção da grade horária. Esse recurso financeiro poderia ser utilizado para as inúmeras outras necessidades da instituição. Portanto, torna-se essencial o desenvolvimento de um modelo que respeite as necessidades do colégio, que atenda os requisitos organizacionais e pedagógicos e que seja gratuito. Além disso, o modelo visa respeitar as preferências e restrições dos professores, otimizando a satisfação do docente e beneficiando toda comunidade escolar.

Assim, o objetivo deste trabalho consiste em levantar dados, analisar, modelar e encontrar possíveis soluções para o problema de designação de encargos didáticos de forma automatizada e gratuita. Para isso, será necessário:

i. Levantar dados junto aos professores com a utilização de um formulário que contenha: disciplina ministrada, quantidade de aulas, quantidade de hora-atividade, e as preferências por turno, turma, e dias da semana para docência e hora-atividade.

ii. Analisar e tratar os dados obtidos, gerando tabelas com as restrições encontradas;
iii. Modelar matematicamente o problema;
iv. Encontrar possíveis soluções para o problema;
v. Estudar a viabilidade das soluções encontradas.

Para a solução, o problema de designação será resolvido utilizando métodos de PO, sendo modelado como Programação Linear Inteira Binária e utilizando o Método Simplex e o Algoritmo *Branch-and-Bound* juntamente com o auxílio de um *software* gratuito para geração dos resultados.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Inicialmente é descrito o problema e o estudo de caso; em seguida a revisão de literatura, onde são apresentados alguns trabalhos que resolveram o problema de designação utilizando métodos da PO; após, os métodos de solução, entre eles: Programação Linear e Programação Linear Inteira; na sequência, a sistematização do problema; por fim, os resultados computacionais e a conclusão.

2 Descrição do problema

O processo de confeccionar a grade horária envolve fatores determinantes como, alocar os dias e os horários em que o docente realizará sua aula, com disciplina específica em determinada turma.

Para distribuir as aulas aos docentes, deve-se considerar a carga horária disponível no colégio e a matriz curricular de cada instituição de ensino, que varia conforme o número de turmas e o nível de ensino. A matriz curricular é aprovada pelo Núcleo Regional de Ensino (NRE), fundamentada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em conformidade com o Art. 26 da Lei de Diretrizes e Bases nº 9394/96 (LDB), que estabelece que os currículos da educação básica devem ter disciplinas da base do núcleo comum e serem complementadas por uma parte diversificada, que visa atender características de cada região (BRASIL, 23 dez 1996).

Em geral, a grade horária das instituições de ensino básico que possuem 25 horas-aula por semana são 9 disciplinas para o Ensino Fundamental II, que vai do 6º ao 9º ano (equivalente ao antigo Ensino Secundário), sendo 8 disciplinas da Base Nacional Comum (BNC) e uma disciplina da Parte Diversificada. E para o Ensino Médio são 12 disciplinas, sendo 11 disciplinas da BNC e uma disciplina da Parte Diversificada. A grade horária das escolas possuem aulas 5 dias por semana, de segunda-feira a sexta-feira, com 5 horas-aula por dia de 50 minutos cada e 20 minutos de intervalo entre a 3º e a 4º aula.

TABELA 1 – Disciplinas e cargas horárias do Ensino Fundamental II

	DISCIPLINAS	**CARGA HORÁRIA**			
		6º ANO	7º ANO	8º ANO	9º ANO
BASE DO NÚCLEO COMUM	Artes	2	2	2	2
	Ciências	3	3	3	3
	Educação Física	2	2	2	2
	Ensino Religioso	1	1	-	-
	Geografia	2	3	3	3
	História	3	2	3	3
	Língua Portuguesa	5	5	5	5
	Matemática	5	5	5	5
SUB TOTAL		23	23	23	23
DIVERSIFICADA	Inglês	2	2	2	2
SUB TOTAL		2	2	2	2
TOTAL		25	25	25	25

TABELA 2 – Disciplinas e cargas horárias do Ensino Médio

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">DISCIPLINAS</th><th colspan="3">CARGA HORÁRIA</th></tr>
<tr><th>1º ANO</th><th>2º ANO</th><th>3º ANO</th></tr>
<tr><td rowspan="11">BASE DO NÚCLEO COMUM</td><td>Artes</td><td>2</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Biologia</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Educação Física</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Filosofia</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Física</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Geografia</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>História</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Língua Portuguesa</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Matemática</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Química</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Sociologia</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">SUB TOTAL</td><td>23</td><td>23</td><td>23</td></tr>
<tr><td>DIVERSIFICADA</td><td>Inglês</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">SUB TOTAL</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">TOTAL</td><td>25</td><td>25</td><td>25</td></tr>
</table>

Com relação aos docentes, estes possuem critérios para sua jornada de trabalho estabelecidas pela Secretaria de Estado da Educação (SEED). Para o Paraná, o Art.10 da Resolução nº 2/2019 – GS/SEED estabelece:

> I – aos detentores de cargos de 20 (vinte) horas semanais serão atribuídas 15 (quinze) aulas de 50 (cinquenta) minutos, correspondentes a 12 (doze) horas e 30 (trinta) minutos de interação com o estudante, 5 (cinco) horas-atividade de 50 (cinquenta) minutos cumpridas na Instituição de Ensino e 4 (quatro) horas-atividade de 50 (cinquenta) minutos cumpridas em local de livre escolha, que somadas totalizam 7 (sete) horas e 30 (trinta) minutos de horas-atividade; II – aos detentores de cargos de 40 (quarenta) horas semanais serão atribuídas 30 (trinta) aulas de 50 (cinquenta) minutos, correspondentes a 25 (vinte e cinco) horas de interação com o estudante, 10 (dez) horas-atividade de 50 (cinquenta) minutos cumpridas na Instituição de Ensino e 8 (oito) horas-atividade de 50 (cinquenta) minutos cumpridas em local de livre escolha, que somadas totalizam 15 (quinze) horas de horas-atividade e, assim, proporcionalmente às demais cargas-horárias. §1.º A hora-atividade destinada ao professor em exercício de docência para estudos, planejamento, avaliação e outras atividades de caráter pedagógico, a ser efetivada na Instituição de Ensino, conforme estabelecido nos Incisos I e II deste Artigo, deverá ser cumprida no mesmo local e turno das aulas (PARANÁ, 2019).

Contudo, nem sempre os docentes conseguem completar as 25 horas-aula em uma única instituição de ensino, pois, pode ocorrer da instituição de ensino ter uma quantidade menor de aulas para determinada disciplina.

A disciplina de Biologia, por exemplo, possui 2 aulas por turma. Se considerarmos que a instituição de ensino possui uma turma de cada ano no período matutino e no vespertino, tem-se então 12 aulas por semana para essa disciplina, o que implica que o docente precisará se deslocar até outra instituição de ensino para completar as 25 aulas semanais. Com a possibilidade do docente assumir aulas em mais de uma instituição, há então a necessidade de minimizar o número de dias de aula de cada professor.

Outro fator que influencia no problema de designação é o aspecto pedagógico, que deve ser respeitado para que a grade horária seja viável, ou seja, que possua restrições obrigatórias que não devem ser descumpridas em nenhuma hipótese, tais como: o docente ministrará em uma turma por vez; cada disciplina é assumida por um único professor; e as turmas tenham 25 horas-aula semanais preenchidas em 5 dias da semana com 5 horas-aula por dia.

Além do aspecto pedagógico, para que se tenha uma alta satisfação dos docentes, os aspectos pessoais também devem ser considerados, como, as preferências por aulas geminadas, por dia da semana para aula, por dia da semana para hora-atividade, preferência por turma e evitar lacunas sem aula na grade horária, e se caso tenham lacunas, deverão ser no máximo de uma aula.

2.1 Estudo de Caso

O Colégio Estadual Professor Paulo Freire, da cidade de Pontal do Paraná, no estado do Paraná, foi escolhido como estudo de caso para o problema de designação de encargos didáticos. Nesse colégio, no presente período, são necessárias 19 turmas para comportar os alunos desde o 6º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio Regular, ofertados em dois turnos, nos períodos matutino e vespertino.

A matriz curricular das disciplinas aprovada pelo NRE para o referido colégio, são 14 disciplinas definidas pela BNCC, sendo distribuídas em 5 aulas diárias de segunda à sexta-feira. Para tanto, são necessários 34 professores que são selecionados conforme a distribuição de aulas realizada pelo NRE. Conta-se com professores que ocupam cargo efetivo, no caso, Quadro Próprio do Magistério (QPM) e os contratados pelo regime Consolidação das Leis de Trabalho (CLT), sendo aprovados no Processo Seletivo Simplificado do Paraná (PSS).

Com a distribuição de aulas e disciplinas, os docentes lotados no colégio de estudo possuem a seguinte carga horária:

TABELA 3 – Quantidade de hora-aula por professor

Professor	**Disciplina**	**Quantidade de aula**
P1	Artes	16
P2	Artes	6
P3	Artes	2
P4	Artes	4
P5	Biologia	14
P6	Ciências	15
P7	Ciências	15
P8	Ciências	6
P9	Ed. Física	28
P10	Ed. Física	10
P11	Ens. Religioso	6
P12	Filosofia	14
P13	Física	14
P14	Geografia	2
P15	Geografia	27
P16	Geografia	18
P17	História	17
P18	História	30
P19	Inglês	28
P20	Inglês	8
P21	Inglês	2
P22	Matemática	9
P23	Matemática	15
P24	Matemática	15
P25	Matemática	12
P26	Matemática	30
P27	Português	22
P28	Português	29
P29	Português	13
P30	Português	10
P31	Português	5
P32	Português	5
P33	Química	14
P34	Sociologia	14

A tabela acima possui 34 professores, pois, três professores lecionam mais de uma disciplina no colégio. Portanto, serão considerados como outros professores, quando estes lecionarem em mais de uma disciplina. Para não resultar em um conflito de horário, esses professores receberão pesos diferentes em relação aos dias de semana. Assim, pretende-se alocar os 34 professores, considerando suas respectivas disciplinas nas turmas, dias e horários de preferência.

3 Revisão de Literatura

No Brasil, a área de Pesquisa Operacional começou obter destaque a partir da década de 60, com a fundação da Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO) em 1969. Desde então, tem reunido um grande número de profissionais com essa área de estudo, auxiliando na solução de problemas das mais diversas áreas, empregando a Pesquisa Operacional em áreas de importância estratégica, tais como: Logística, Finanças, Marketing, Planejamento e Gestão de Sistemas de Serviços, Segurança da Informação, Administração Industrial, Gestão da Qualidade, entre outros. É nessa linha que se enquadra o problema de designação que é tema de estudo deste trabalho (ARENALES *et al.*, 2007).

O problema de elaboração de encargos didáticos é caracterizado pelas restrições que lhe são exigidas, tais como: aspectos operacionais, pedagógicos e pessoais. E neste sentido, a fim de evitar a confecção manual da grade horária, diversos autores resolveram o problema de designação utilizando a Pesquisa Operacional através de diferentes métodos, que são divididos em métodos exatos e métodos heurísticos. Entre os métodos exatos podem ser citados, o Método Simplex, a Relaxação Lagrangeana, a Programação Dinâmica e o Algoritmo *Branch-and-Bound*. Já os métodos heurísticos, destacam-se: os Algoritmos Genéticos, a Busca Tabu, o *Scatter Search*, o *Simulated Annealing*, entre outros. (MICHALEWICZ; FOGEL, 1998).

Dentre os trabalhos encontrados na literatura que resolveram o problema de designação através de métodos da Pesquisa Operacional, destacam-se alguns que inspiraram e auxiliaram essa pesquisa.

Ferreira *et al.* propõe resolver o problema de designação com uma formulação matemática de Programação Linear Binária e utiliza como estudo de caso a designação de encargos didáticos dos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná – UFPR. O modelo matemático foi formulado para maximizar a satisfação dos professores. Para isso, iniciou o trabalho com um questionário online para que os professores pudessem preencher com suas restrições de horários e preferências por turmas e gerou matrizes para alimentar o modelo com as restrições estabelecidas pelo questionário. Por fim, o processo de designação foi realizado com o auxilio do *software* Lingo que utiliza o Algoritmo *Branch-and-Bound*, aplicado em duas fases para reduzir o número de professores insatisfeitos (FERREIRA *et al.*, 2011).

Góes apresentou três técnicas (modelo matemático, abordagem heurística baseada em Algoritmos Genéticos e método misto) para realizar a programação de horários de professores/turmas para uma escola municipal da cidade de Araucária - PR. O objetivo foi comparar o desempenho das três técnicas, verificando qual foi mais eficaz, e desenvolver um protótipo para a construção da grade horária. Após a solução, o autor observou que as turmas designadas para alguns professores em determinados dias são as mesmas em todas as técnicas utilizadas. Portanto, os métodos utilizados apresentaram soluções satisfatórias e todos os horários foram bem aceitos pelos professores. Ainda, quando comparados os resultados gerados pelos métodos com o que é gerado manualmente na escola e com o gerado pelo software comercial, os horários gerados no trabalho obtiveram melhores resultados (GÓES, 2005).

Duque utilizou duas técnicas para produzir diferentes resultados para o problema de designação e realizou um estudo comparativo entre elas, sendo: Algoritmos Genéticos e *Simulated Annealing*. Utilizou a Divisão de Ciência da Computação do ITA para o estudo de caso. Após o processo de designação, para a comparação entre os dois métodos, foi utilizado um conjunto de parâmetros para o processamento de todas as amostra no Algoritmo Genético e outro conjunto para o processamento utilizando o *Simulated Annealing*. Após a análise, o autor pode observar que o *Simulated Annealing* é cinco vezes mais rápido que o Algoritmo Genético, contudo, esse último consegue resultados melhores que o anterior (DUQUE, 2003).

Barboza *et al.* propôs a resolução do problema de designação para jornada de trabalho de uma central telefônica de atendimento 24 horas, a fim de otimizar a escala de horários dos atendentes. Utilizou para isso a construção do modelo a Programação Linear Inteira, com o algoritmo do *Matching* de peso máximo. Finalizada a resolução do problema, o modelo obtido foi comparado com o modelo utilizado pela empresa, e o autor observou que o modelo gerado garante um grau de atendimento de 99%. Assim, custos foram diminuídos, o faturamento aumentado, atingindo maior satisfação dos funcionários (BARBOZA *et al.*, 2003).

Siqueira utilizou Redes Neurais Recorrentes para resolver o problema de alocação de salas de aula da Universidade Federal do Paraná-UFPR. Abordou como estudo de caso as disciplinas de graduação e pós-graduação. Para tanto, foram criadas matrizes de custos, e os resultados foram obtidos utilizando a aplicação da Rede Neural Recorrente, com o princípio *Winner Takes All*. Os resultados obtidos foram considerados satisfatórios, onde a melhor escolha de parâmetros resultou soluções ótimas para 95% das matrizes testadas e, erros médios inferiores a $0{,}5\%$ (SIQUEIRA, 2005).

Sousa *et al.* abordou o problema através do Algoritmo de Busca Tabu associado a uma Busca Local Aleatória e mais duas formulações matemáticas, uma baseada no agendamento de blocos de aulas duplas e unitárias, e a outra, baseada em restrições que não são tratadas. Para o estudo de caso foram utilizadas a Escola Estadual Barão Geraldo de Rezende e a Escola Estadual Professor Hilton Federici, em Campinas-SP. O método para a resolução do problema mostrou resultados satisfatórios, tanto em qualidade das soluções obtidas quanto no tempo de análise computacional (SOUSA; MORETTI; PODESTÁ, 2008).

Neste trabalho, para a resolução do problema de designação de encargos didáticos, por se tratar de um problema que pode ser modelado como Programação Linear Inteira Binária, são escolhidos os métodos exatos, baseados no Método Simplex e o Algoritmo *Branch-and-Bound*.

4 Método de Solução

Para iniciar a solução de um problema de designação de encargos didáticos, é necessário formular um modelo matemático para representar as características do problema real. A qualidade da solução do problema depende da exatidão com que o modelo representa o problema. Com o aperfeiçoamento dos métodos de solução e o avanço de recursos computacionais, tem sido possível resolver problemas cada vez mais complexos. Para tanto, é necessário conhecer a teoria no qual se baseiam os métodos para um melhor aproveitamento do recurso computacional (ARENALES *et al.*, 2007).

Na otimização de problemas, a solução factível (solução viável) é a escolha de valores que satisfazem as restrições do problema e o conjunto de todas as soluções factíveis é chamado de região factível. A solução ótima é uma solução factível, considerada como a melhor que se poderia obter, que maximizar ou minimizar a função objetivo. Os métodos exatos reduzem um sistema real a um conjunto de equações ou inequações que otimiza um objetivo e realiza a solução satisfazendo as restrições determinadas no problema gerando uma solução ótima (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Para isso, é necessário modelar o problema, coloca-lo na forma padrão e então aplicar o método de solução mais adequado.

4.1 Programação Linear

A Programação Linear é área da Pesquisa Operacional que utiliza variáveis contínuas e que apresenta comportamento linear, tanto em relação às restrições como à função objetivo (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Um mesmo modelo de PL pode ser reescrito, sem perda de suas propriedades matemáticas, utilizando a mudança no critério de otimização:

$$\text{Maximizar } \left(f\left(x\right)\right) \text{ corresponde a Minimizar } \left(-f\left(x\right)\right) \text{ e}$$
$$\text{Minimizar}\left(f\left(x\right)\right) \text{ corresponde a Maximizar } \left(-f\left(x\right)\right).$$

Problemas de PL podem ser descritos da seguinte forma:

$$\text{Otimizar: } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j^t x_j$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = 1,2,\ldots,p$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = p+1,p+2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

onde:
Z é a função objetivo;
$x = (x_j) \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis do problema;
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de restrições do problema;
$c^t = (c_j)^t \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de custos;
$b = (b_j) \in \mathbb{R}^n$.

Para aplicação dos métodos de solução se faz necessário deixar o Problema de Programação Linear (PPL) modelado em uma forma denominada forma padrão. Para isso serão introduzidas as variáveis de folga e excesso:

Se o problema original apresenta uma restrição de desigualdade do tipo

$$a_j^t x \geq b_j,$$

ou do tipo

$$a_j^t x \leq b_j,$$

onde a_j^t é uma linha da matriz A, a restrição de desigualdade pode ser substituída por uma restrição de igualdade introduzindo-se uma variável adicional x_{n+1}, não-negativa, conhecida como variável de excesso quando a desigualdade é do tipo $\geq$, e variável de folga quando a desigualdade é do tipo $\leq$. Assim, o problema fica:

$a_j^t x - x_{n+1} = b_j$, introduzindo a variável de excesso, e
$a_j^t x + x_{n+1} = b_j$, introduzindo a variável de folga.

Podem ser adicionadas tantas variáveis de excesso e/ou de folga quantas forem as restrições de desigualdade presentes no modelo original.

A forma padrão exige variáveis não-negativas. Quando ocorrer da formulação original do problema apresentar uma ou mais variáveis de decisão irrestritas ou livres, é necessário reescrever cada variável livre x_j como a diferença de duas variáveis não-negativas, x_{j1} e x_{j2}, ou seja

$$x_j = x_{j1} - x_{j2}.$$

A ideia é que qualquer quantidade (positiva, nula ou negativa) possa ser representada como a diferença de duas quantidades não-negativas, que serão incorporadas à lista de variáveis de decisão do problema.

O problema acrescido de variáveis de folga, excesso e com variáveis livres colocado na forma padrão fica:

$$\begin{array}{ll} \text{otimizar} & c^t x \\ \text{sujeito a} & A'x' + Is' = b' \\ & A''x'' - Is'' = b'' \\ & x' \text{ e } x'' \geq 0. \end{array}$$

Além disso, pode ocorrer ainda que as variáveis apareçam canalizadas, ou seja,

$$l \leq x \leq u.$$

Nesses casos, pode ser feita a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned} \tilde{x} = x - l \Rightarrow x = \tilde{x} + l \\ \tilde{u} = u - l \Rightarrow u = \tilde{u} + l. \end{aligned}$$

Essa mudança tem por objetivo anular o limite inferior de x. Acrescentando uma variável de folga, o problema se torna um problema de otimização linear na forma padrão com limite superior nas variáveis:

$$\begin{array}{ll} \text{otimizar} & c^t x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Para ilustrar o método de solução, considere um PPL com 2 variáveis expressado pelo gráfico da Figura 1. Nota-se que os vértices são formados pela interseção de duas ou mais restrições do problema. Uma solução básica em um problema de otimização linear corresponde a um vértice do polígono definido pelas restrições.

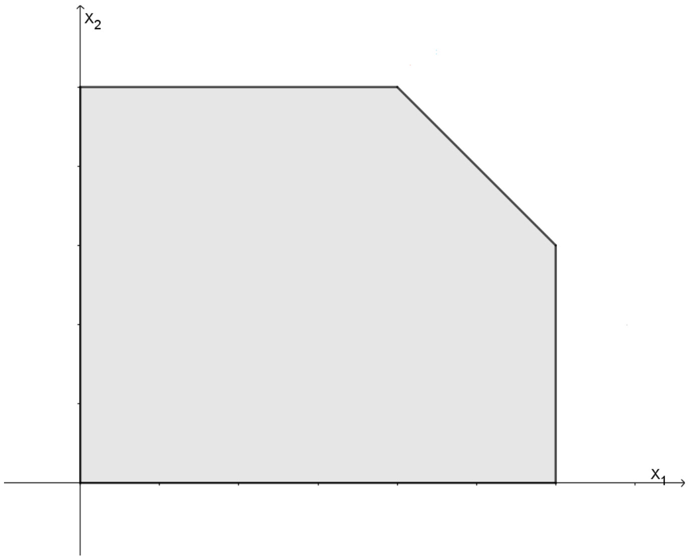


FIGURA 1 – Polígono no $\mathbb{R}^2$

O primeiro método desenvolvido para a solução de problemas de otimização linear foi o Método Simplex, proposto por Dantzig, em 1947 (LACHTERMACHER, 2007). No Método Simplex, a solução se movimenta de um vértice a outro do polígono do problema, melhorando a solução. A Figura 2 ilustra a procura de solução ótima através do Método Simplex.

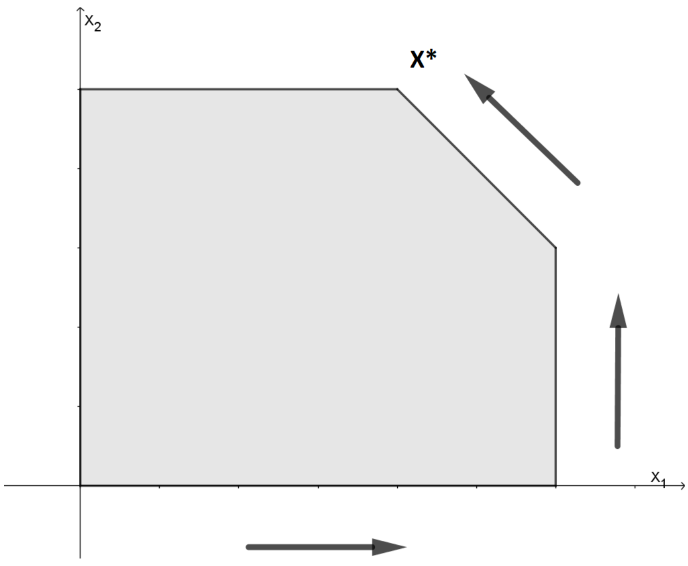


FIGURA 2 – Movimentação do Simplex

Teoricamente, o Método Simplex pode percorrer todas as soluções básicas do problema no processo de busca de soluções ótimas - existem exemplos que ilustram esta possibilidade (LACHTERMACHER, 2007).

Quando o problema possuir mais de 2 variáveis, o Algoritmo Simplex utiliza ferramentas da Álgebra Linear para determinar a solução ótima de um PPL. O algoritmo inicia uma solução factível do sistema de equações que são estabelecidas pelas restrições impostas ao problema, solução que se encontra nos pontos extremos (vértices). A partir da solução inicial, segue identificando outras possíveis soluções de valor igual ou melhor que a corrente. Possui um critério de escolha, que permite encontrar melhores vértices e determina se o vértice escolhido é ou não um vértice ótimo.

Assim, o método testa uma sequência de soluções básicas factíveis na busca de uma solução ótima para a função objetivo, o que garante o desempenho do algoritmo e a convergência em um número finito de passos.

O Teorema Fundamental da Programação Linear estabelece que é suficiente procurarmos soluções ótimas no subconjunto de soluções formado por soluções básicas.

Teorema Fundamental da Programação Linear (LUENBERGER; YE, 2008): Dado um problema linear na forma padrão, onde A é uma matriz $m \times n$ de posto m, as afirmações a seguir são verdadeiras:

i. Se existe uma solução factível, existe uma solução básica factível.
ii. Se existe uma solução ótima factível, existe uma solução ótima básica factível.

Para ilustrar o teorema, considere o exemplo resolvido utilizando o Método Simplex:

$$\text{Maximizar } Z = x_1 + x_2$$
$$\text{sujeito a:}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 7$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1 \text{ e } x_2 \geq 0.$$

Inserindo as variáveis de folga, temos o problema na forma padrão:

$$\text{Minimizar} - Z = -x_1 - x_2$$
$$\text{sujeito a:}$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 8$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 7$$
$$x_2 + x_5 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Inserindo as variáveis no quadro inicial do Simplex:

TABELA 4 – Exemplo Simplex

Eq. nº	**Var. básicas**	**Coeficientes**					**Var. independentes**
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0		-1	-1	0	0	0	0
1	x_3	2	1	1	0	0	8
2	x_4	1	2	0	1	0	7
3	x_5	0	1	0	0	1	3

O processo será repetido até que não hajam coeficientes negativos na linha da função objetivo Z.

A variável que entra na base é sempre a variável com o número negativo de maior valor absoluto. Neste exemplo, podem ser x_1 ou x_2, e por escolha, a variável que entra na base é o x_1.

Para determinar a linha pivô, ou seja, a variável que sai da base, é necessário dividir o valor das variáveis independentes pelo valor correspondente da variável que entra na base. Resultando em $\left\{\frac{8}{2}, \frac{7}{1}\right\}$. Como o menor valor é referente a variável básica x_3, então, essa linha é a linha pivô. Assim, x_1 entra na base e x_3 sai da base.

TABELA 5 – Exemplo Simplex

Eq. nº	**Var. básicas**	**Coeficientes**					**Var. independentes**
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0		-1	-1	0	0	0	0
1	x_3	2	1	1	0	0	8
2	x_4	1	2	0	1	0	7
3	x_5	0	1	0	0	1	3

Para calcular os valores de solução associados à nova base, utiliza-se um pivoteamento. O elemento pivô tem que ser igual a 1, para isso a linha será dividida por 2. A partir dai, toda coluna será escalonada resultando em uma coluna da base (Tabela 6).

TABELA 6 – Exemplo Simplex

Eq. nº	**Var. básicas**	**Coeficientes**					**Var. independentes**
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0		0	-1/2	1/2	0	0	4
1	x_1	1	1/2	1/2	0	0	4
2	x_4	0	3/2	-1/2	1	0	3
3	x_5	0	1	0	0	1	3

Como ainda existem variáveis negativas na linha da função objetivo, o processo será repetido. A variável que entra na base é x_2 e a variável que sai da base é x_4.

TABELA 7 – Exemplo Simplex

Eq. nº	Var. básicas	Coeficientes x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Var. independentes
0		0	-1/2	1/2	0	0	4
1	x_1	1	1/2	1/2	0	0	4
2	x_4	0	3/2	-1/2	1	0	3
3	x_5	0	1	0	0	1	3

Após o pivoteamento, temos uma nova tabela:

TABELA 8 – Exemplo Simplex

Eq. nº	Var. básicas	Coeficientes x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Var. independentes
0		0	0	1/3	1/3	0	5
1	x_1	1	0	2/3	-1/3	0	3
2	x_2	0	1	-1/3	2/3	0	2
3	x_5	0	0	1/3	-2/3	1	1

Temos a solução ótima, pois, não existe nenhum valor em z negativo. A solução ótima é: $x^t = (3{,}2{,}0{,}0{,}1)$

Um estudo mais aprofundado sobre o Método Simplex pode ser encontrado em (GOLDBARG; LUNA, 2005) e, para exemplos numéricos (ARENALES *et al.*, 2007).

4.2 Programação Linear Inteira

Problemas de Programação Linear Inteira (PPLI) são aqueles em que a função objetivo e as restrições são lineares, contudo, possuem uma ou mais variáveis de decisão com valores inteiros, que limita o conjunto de soluções (ARENALES *et al.*, 2007). Matematicamente, pode ser descrito como:

$$\begin{gathered}
\text{Otimizar: } z = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \\
\text{sujeito a} \\
g_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \leq b_1 \\
g_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = b_2 \\
\vdots \\
g_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \geq b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ são inteiros.}
\end{gathered}$$

onde:

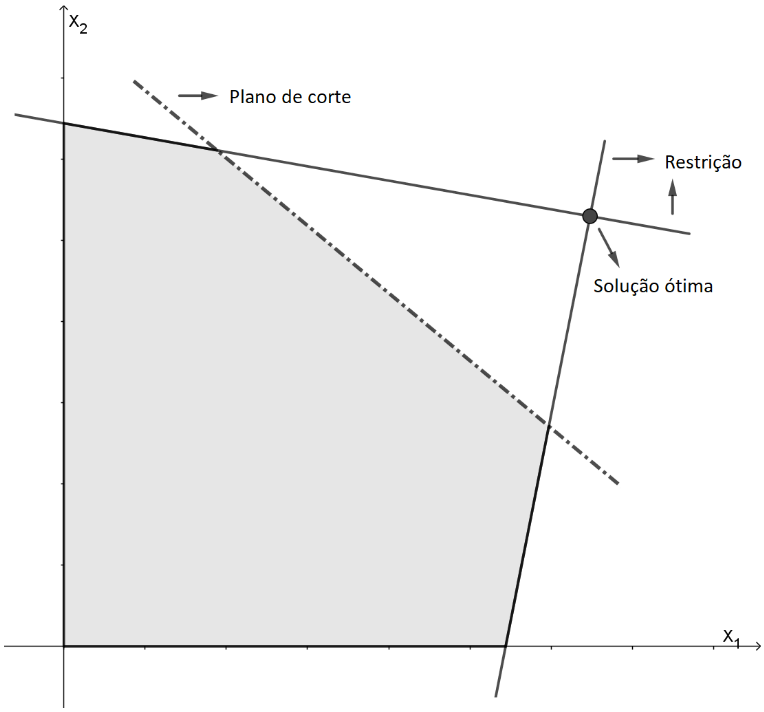
$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$g_i\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n, \quad (i = 1,2,\ldots,m)\,.$$

Para resolver um PPLI pelo método Simplex é necessário aproximar os valores encontrados para o inteiro mais próximo, contudo, se os valores forem pequenos, esse procedimento é inviável. Portanto, para a solução do problema, é necessário adicionar outros métodos que apresentam melhor desempenho para problemas inteiros. Dentre eles se destacam o Método dos Planos de Cortes e o Algoritmo *Branch-and-Bound* (GOLDBARG; LUNA, 2005).

O Método dos Planos de Cortes, que foi desenvolvido por Ralph Gomory em 1960 (GOLDBARG; LUNA, 2005), introduz novas restrições no PPLI e restringe através de um plano de corte o conjunto das soluções possíveis, o que elimina algumas soluções, inclusive a ótima não inteira, porém, sem eliminar uma solução inteira sequer. A Figura 3, ilustra o método.

FIGURA 3 – Método Plano de Corte



O Algoritmo *Branch-and-Bound* desenvolvido em 1960 por A. Lanf e G. Doig é um método de ramificação e limitação (TAHA, 2008). O método consiste em particionar ou ramificar (*branch*) sucessivamente o conjunto de soluções factíveis em subconjuntos sem interações entre si, estabelecendo limites (*bound*), inferior (minimização) ou superior (maximização), para o valor ótimo da função objetivo, excluindo os subconjuntos que não contenham soluções ótimas (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Sejam (P) e $\left(\bar{P}\right)$ funções objetivos definidas por:

$$(P) = Maximizar\left\{c^t x \mid Ax = b, \quad x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

e

$$\left(\bar{P}\right) = Maximizar\left\{c^t x \mid Ax = b, \quad x \geq 0, x \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Sejam $V(P)$ e $V(\bar{P})$ valores da função objetivo no ponto ótimo (P) e $(\bar{P})$, sendo:

$$V(P) \leq V(\bar{P}).$$

Considerando qualquer solução factível x de (P), logo:

$$V(x) \leq V(P).$$

Assim, $V(\bar{P})$ é limite superior para (P). Se $\bar{x}$ for a solução ótima de (P), com $\bar{x}_j$ não inteiro, temos:

$$x_j \geq \bar{x}_j + 1 \quad ou \quad x_j \leq \bar{x}_j,$$

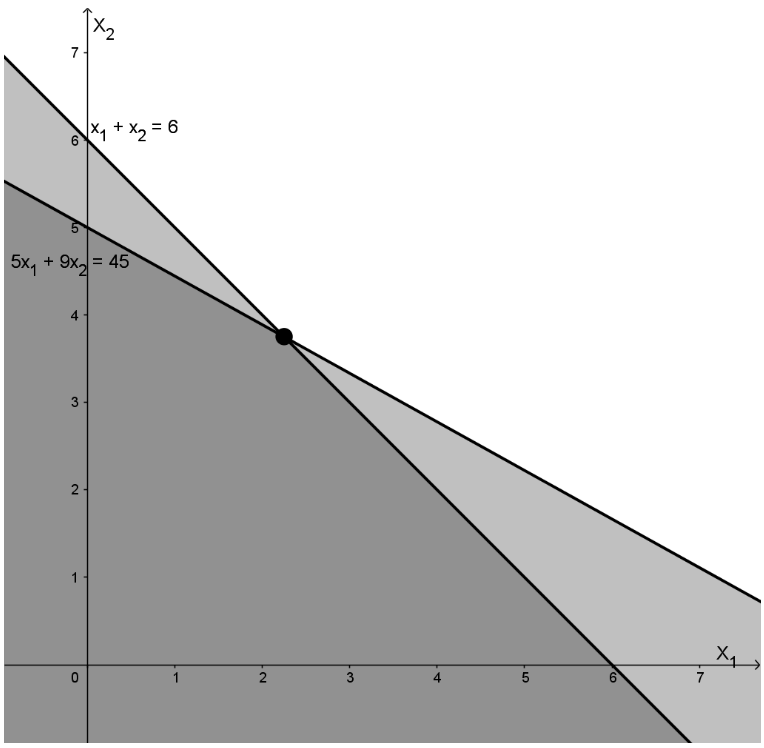
para toda solução factível de (P). Dessa maneira, o problema pode ser dividido em dois novos problemas (P_1) e (P_2).

O exemplo a seguir ilustra o processo de divisão.

$$\text{Maximizar } Z = 5x_1 + 8x_2$$
$$\text{sujeito a}$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$5x_1 + 9x_2 \leq 45$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+,$$

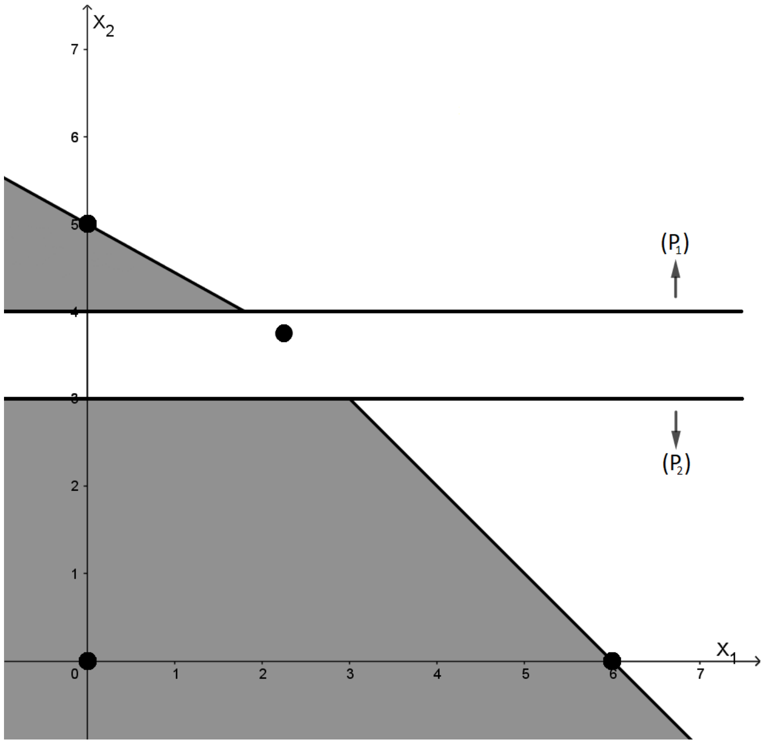
onde a solução factível contínua do problema é encontrada em: $x_1 = 2{,}25$; $x_2 = 3{,}75$ e $z = 41{,}25$ e pode ser representado graficamente como na Figura 4.

FIGURA 4 – Solução gráfica do exemplo



Tomando a variável x_2, temos que $3 < x_2 < 4$, o que gera uma disjunção no conjunto das soluções factíveis. A Figura 5 ilustra essa situação.

FIGURA 5 – Representação da divisão do problema em soluções inteiras na variável x_2



Com a disjunção, o problema original será reduzido em dois novos subproblemas:

(P_1) Maximizar $Z = c^t x$
sujeito a:

$$Ax \leq b$$
$$x_1 \leq x_i^0$$
$$x_i \in \mathbb{Z}$$

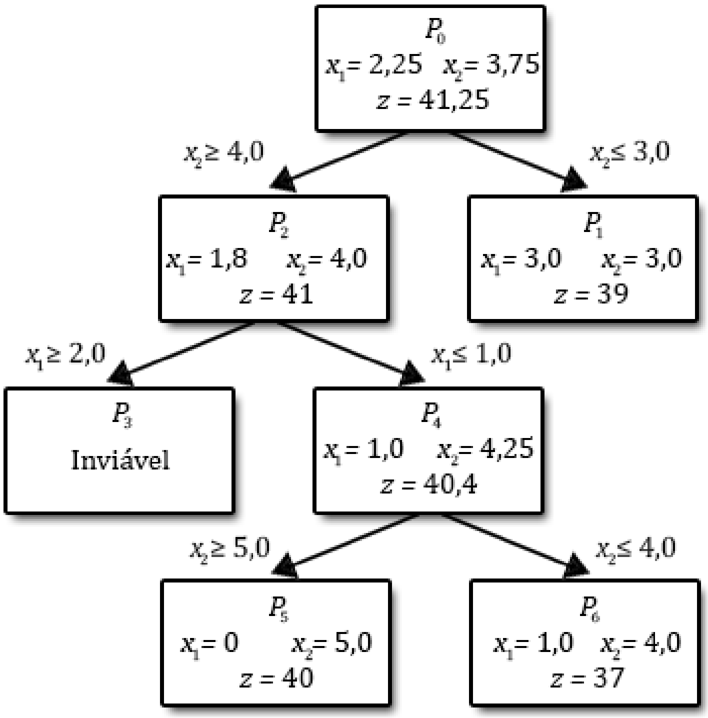
(P_2) Maximizar $Z = c^t x$
sujeito a:

$$Ax \leq b$$
$$x_1 \leq x_i^0 + 1$$
$$x_i \in \mathbb{Z}$$

Utilizando a separação (P) é possível reaplicar a estratégia para (P_1) e (P_2) na variável de x_1 e cada nível representa uma separação em relação a uma variável.

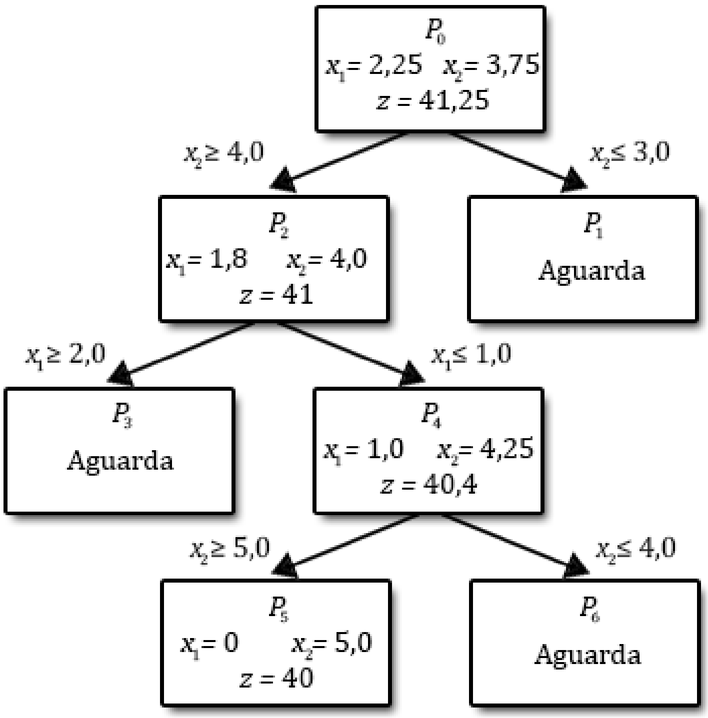
Conforme escolhidas as divisões de (P), geram ramificações que podem ser enumeradas através de uma árvore de possibilidades de solução. Na Figura 6 cada nível corresponde a uma separação em relação a uma variável do problema exemplo.

FIGURA 6 – Árvore *branch* do exemplo



Escolhido a sequência de *branchs* e ignorando a solução dos problemas marcados, temos:

FIGURA 7 – Efeito de redução do *bound*



As soluções contínuas são um limite superior para os valores de z sob as condições estabelecidas nos vértices da árvore e as soluções inteiras estabelecem um limite inferior. Como (P_4) e (P_5) são problemas de solução contínua e inteira, respectivamente, e possui z entre $40{,}4$ e 40, logo, não existindo solução melhor que 40, então, o problema P_6 não precisa ser resolvido.

Um ponto fundamental para o sucesso do Algoritmo *Branch-and-Bound* é a qualidade do limite gerado pela solução inteira e depende da estratégia de desdobramento da árvore de busca. Existem duas grandes estratégias de divisão *branch*. As Figuras 8 e 9 apresentam o aspecto das árvores desenvolvidas pela busca em profundidade e pela busca em largura (GOLDBARG; LUNA, 2005):

FIGURA 8 – Busca em Profundidade

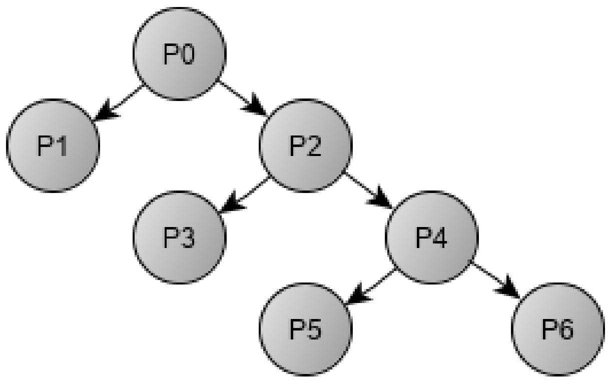
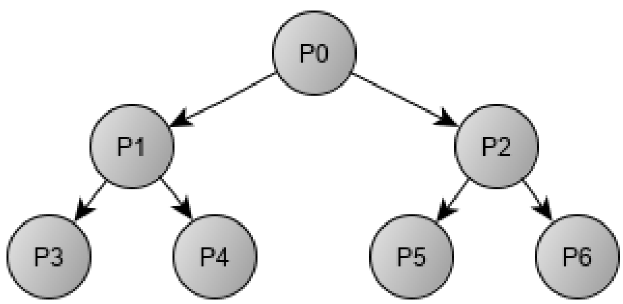


FIGURA 9 – Busca em Largura



De um modo geral, o Algoritmo *Branch-and-Bound* é sujeito a inúmeras adaptações e estratégias de implementação, onde envolvem: técnicas de desenvolvimento da árvore de enumeração, conforme a escolha do problema, podendo utilizar busca em profundidade ou em largura, ou ainda, variantes híbridas; técnicas de formação de árvore, conforme a escolha da variável de separação, e as técnicas complementares para obtenção dos limites, dentre elas, por exemplo, a Relaxação Linear, Relaxação Lagrangeana, Cortes e Algoritmos Heurísticos (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Um caso particular na PLI é quando as variáveis do problema só podem assumir valores binários, ou seja, valores iguais a 0 ou 1, para esse caso, chamamos de Programação Linear Binária (PLB) (CHEN; BATSON; DANG, 2010).

5 Sistematização do Problema

O desenvolvimento deste trabalho foi realizado em etapas que correspondem à coleta de dados, análise dos dados obtidos, modelagem do problema, implementação computacional para encontrar as possíveis soluções e análise dos resultados obtidos.

Neste capítulo serão descritos os passos para a obtenção dos dados e a preparação para a elaboração do modelo matemático.

5.1 Coleta de dados

Na coleta de dados foi utilizado um formulário para que os professores preenchessem para identificar as preferências e restrições em relação ao Colégio Estadual Professor Paulo Freire.

O formulário é composto por cinco etapas:

i. Identificação:
Esta etapa é para identificar o professor, a disciplina ministrada por ele, a quantidade de hora-aula e hora-atividade no respectivo colégio.

FIGURA 10 – Identificação

Nome: ______________________________

Disciplina: ______________________________

Quantidade de aulas: ________

Quantidade de hora-atividade: _______

ii. Preferência por turno:
O professor determina e define a preferência por turno de trabalho.

FIGURA 11 – Preferência por turno

Preferência de turno:

Matutino	Vespertino	Indiferente

iii. Preferência de dia para aula no colégio:
Determina os dias de preferência para docência no colégio e conforme a relação de preferência, estabelece a restrição do dia em que o professor irá ministrar aula no respectivo colégio, através de uma escala de 1 a 5 onde 5 significa maior preferência e 1 menor preferência.

FIGURA 12 – Preferência por dia

Preferência de dias para aula neste colégio:

Marque de 05 a 01 com relação ao dia de preferência, sendo 05 o dia de maior preferência e 01 o dia de menor preferência.

Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta

iv. Preferência por aula geminada ou não:
Define a preferência do docente em ter duas aulas na sequência em uma mesma turma ou em somente uma aula por turma em um mesmo dia.

FIGURA 13 – Preferência por aula geminada ou não

Preferência por aula geminada:

Sim	Não

v. Preferência por dia de hora-atividade:
Determina os dias de preferência para hora-atividade no colégio e conforme a relação de preferência, estabelece a restrição do dia em que o professor não estará no respectivo colégio. Considerando os dias de maior preferência quando o número escolhido estiver mais próximo de 5 e o dia em que o professor não gostaria de ter hora-atividade quando marcado igual a 1.

FIGURA 14 – Preferência por dia de hora-atividade

Preferência por dia de hora-atividade:

Marque de 05 a 01 com relação ao dia de preferência, sendo 05 o dia de maior preferência e 01 o dia de menor preferência.

Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta

5.2 Análise dos dados

Na tabela 9 são apresentadas as informações obtidas através do formulário da coleta de dados contendo: o professor, que foi atribuído um código para cada nome, de $P1$ a $P34$, cada professor está relacionado a disciplina que ministra no colégio em questão, juntamente com a preferência por turno, quantidade de aula e preferência por dia de docência no colégio.

TABELA 9 – Tabela de preferências

Prof.	Disciplina	Pref. Turno			Qtd. aula	Pref. dias de aula				
		Mat.	Ves.	Ind.		Seg	Ter	Qua	Qui	Sex
P1	Artes		x		**16**	3	3	3	3	3
P2	Artes	x			**6**	4	5	4	1	1
P3	Artes		x		**2**	1	5	1	1	1
P4	Artes	x			**4**	5	1	1	1	1
P5	Biologia			x	**14**	3	3	3	3	3
P6	Ciências	x			**15**	1	5	5	5	1
P7	Ciências		x		**15**	5	5	1	5	5
P8	Ciências		x		**6**	5	5	5	1	1
P9	Ed. Física			x	**28**	3	3	3	3	3
P10	Ed. Física	x			**10**	1	5	1	5	1
P11	Ens. Religioso			x	**6**	1	1	1	1	5
P12	Filosofia			x	**14**	5	5	5	1	1
P13	Física			x	**14**	3	3	5	5	1
P14	Geografia		x		**2**	5	1	1	1	1
P15	Geografia	x			**27**	5	5	5	5	1
P16	Geografia			x	**18**	1	5	5	5	5
P17	História	x			**17**	5	4	3	3	1
P18	História			x	**30**	5	4	3	2	1
P19	Inglês			x	**28**	1	5	1	5	5
P20	Inglês			x	**8**	5	1	1	1	5
P21	Inglês		x		**2**	1	1	1	1	5
P22	Matemática	x			**9**	5	5	5	5	1
P23	Matemática		x		**15**	5	5	5	5	1
P24	Matemática	x			**15**	5	5	5	5	5
P25	Matemática		x		**12**	5	5	5	5	1
P26	Matemática			x	**30**	4	1	5	2	3
P27	Português	x			**22**	1	5	5	5	5
P28	Português			x	**29**	5	5	5	5	1
P29	Português	x			**13**	2	5	5	5	5
P30	Português		x		**10**	1	5	5	5	1
P31	Português		x		**5**	5	5	5	1	1
P32	Português		x		**5**	1	1	5	5	5
P33	Química			x	**14**	3	3	3	3	3
P34	Sociologia			x	**14**	3	3	3	3	3

6 Modelagem Matemática do Problema

Para que seja possível resolver o problema é necessário realizar uma modelagem matemática. As variáveis de decisão, a função objetivo e as restrições impostas ao problema serão definidas.

6.1 Variáveis de decisão

Consiste na atribuição de professores para determinada turma em dias e horários de aulas para que satisfaça as restrições impostas pela preferência dos docentes.

Portanto, a variável de decisão designa se o professor p atende uma turma t, em dia d, para o horário h, na disciplina m.

Definimos então a variável de decisão como: x_{ptdh},
onde:
p - designa o professor;
t - a turma atendida por um professor p;
d - o dia da semana;
h - o horário da aula.

Trata-se de um PPLI pois, não há como atribuir uma fração de um professor para uma turma e o restante para outra, portanto, as variáveis de decisão devem possuir valores inteiros. Além disso, o problema de designação de encargos didáticos pode ser modelado como um problema binário, ou seja, a variável é 1 caso o professor p atenda a turma t, em determinado dia d, em um horário h e é 0, caso contrário:

$$x_{ptdh} = \begin{cases} 1, \text{ se } p \text{ trabalha no dia } d \text{ para turma } t \text{ e horário } h \\ 0, \text{ caso contrário .} \end{cases} \tag{1}$$

O Colégio Estadual Professor Paulo Freire conta com 9 disciplinas do Ensino Fundamental II e 12 disciplinas do Ensino Médio Regular. Ao todo são 14 disciplinas distintas, que necessitam de 34 professores para atender a todas as 19 turmas.

6.2 Função Objetivo

Para este problema, a função objetivo tem como finalidade maximizar a preferência dos professores. De acordo com a legislação do Estado, existe uma pontuação que estabelece a ordem de escolha das turmas, baseada no tempo de trabalho, que deve ser respeitada. Por isso, um peso PP foi determinado, conforme o tempo em que o docente trabalha na escola:

- 01 – para professores (QPM e PSS) que trabalham de 1 a 2 anos no colégio;

- 03 – se tiver entre 3 a 5 anos;
- 05 – entre 6 a 10 anos;
- 07 – acima de 10 anos.

Assim, a função objetivo definida como:

$$Max\,Z = \sum_p \sum_t \sum_d \sum_h PP\ x_{ptdh}. \tag{2}$$

6.3 Conjunto de Restrições

O conjunto de restrições é estabelecido para que as necessidades do colégio sejam atendidas. São elas:

- Restrição 1 - Cada turma tem um professor por horário.
  Objetivo: garantir todas as aulas diárias e semanais em todas as turmas.

$$\sum_p x_{ptdh} = 1. \tag{3}$$

- Restrição 2 – Cada professor deve lecionar em apenas uma turma por horário.
  Objetivo: garantir que o professor não assuma mais de uma turma por horário.

$$\sum_t x_{ptdh} \leq 1. \tag{4}$$

- Restrição 3 – Cada professor não deve ter mais que 2 aulas por dia em cada turma.
  Objetivo: garantir que não ultrapasse de 2 aulas por dia em cada disciplina por turma.

$$\sum_h x_{ptdh} \leq 2. \tag{5}$$

- Restrição 4 – Assegura a carga horária da disciplina para cada turma.
  Objetivo: garantir a carga horária semanal do professor.

$$\sum_d \sum_h x_{ptdh} = \text{total de aulas do professor } p \text{ na turma } t. \tag{6}$$

- Restrição 5 – Determina a preferência por dias de trabalho.
  Objetivo: Atender e satisfazer as preferências dos professores.

$$\sum_{p}\sum_{d} x_{ptdh} \leq \text{preferência de dia de trabalho do professor } p. \tag{7}$$

- Restrição 6 – Determina os dias de trabalho.
  Objetivo: atribuir cada professor no número mínimo de dias de trabalho.

$$\sum_{d}\sum_{p} x_{ptdh} = DT, \tag{8}$$

onde DT, quantidade de dias de trabalho de x_{ptdh} de cada professor, é definido por:
1 dia – caso o professor tenha carga horária inferior ou igual a 5 horas-aula semanais;
2 dias – se a carga horária foi maior que 5 horas-aula e menor ou igual a 10;
3 dias – se for maior que 10 horas-aula e menor ou igual a 15;
4 dias – se for maior que 15 horas-aula e menor ou igual a 19.

- Restrição 7 – Preferência por aulas geminadas ou não.
  Objetivo: definir se duas aulas será na sequência ou não.
  Para as preferências por aulas geminadas:

$$\begin{gathered} x_{p,t,d,1} + x_{p,t,d,3} \leq 1 \\ x_{p,t,d,1} + x_{p,t,d,4} \leq 1 \\ x_{p,t,d,1} + x_{p,t,d,5} \leq 1 \\ x_{p,t,d,2} + x_{p,t,d,4} \leq 1 \\ x_{p,t,d,2} + x_{p,t,d,5} \leq 1 \\ x_{p,t,d,3} + x_{p,t,d,5} \leq 1 \end{gathered} \tag{9}$$

Para as preferências por aulas não geminadas:

$$\begin{gathered} x_{p,t,d,1} + x_{p,t,d,2} \leq 1 \\ x_{p,t,d,2} + x_{p,t,d,3} \leq 1 \\ x_{p,t,d,3} + x_{p,t,d,4} \leq 1 \\ x_{p,t,d,4} + x_{p,t,d,5} \leq 1 \end{gathered} \tag{10}$$

Trata-se de um problema de 16150 variáveis. Uma vez que a solução manual demanda um esforço extremo de tempo para tentativas de solução, é recomentado o uso de um *software* para auxiliar na solução.

7 Resultados Computacionais

O *software* escolhido para a solução do problema de designação de encargos didáticos foi o *GNU Linear Programming Kit* (GLPK). O GLPK destina-se à resolução de Programação Linear em Larga Escala, quando um modelo possui um grande número de variáveis, Programação Inteira Mista e outros problemas relacionados. O GLPK é parte do GNU *MathProg* que é uma linguagem de modelagem para descrever modelos lineares de Programação Matemática. A linguagem GNU *MathProg* é um subconjunto da Linguagem de Programação Matemática (AMPL), em inglês, *A Mathematical Programming Language*, o qual possui implementação GLPK.

A versão do GLPK para Windows utilizada neste trabalho é o *Under Scite Extended Kit* (GUSEK). O GUSEK é um programa de interface de desenvolvimento para modelos de Programação Linear e Programação Linear Inteira Mista que utiliza o solver do GLPK, o "glpsol.exe" com interface gráfica para o usuário. É um *software* livre e pode ser encontrado no site *Sourceforge*[1] para download.

O modelo matemático é então adaptado para a linguarem GLPK. As variáveis de decisão do problema serão valores binários 0 ou 1 e cada variável é indexada em $x_{p,t,d,h}$, onde p corresponde a cada professor, t a cada turma, d cada dia da semana e h cada horário de aula. No GLPK essa informação é indicada no início do programa:

$var \;\; x\,\{P{,}T{,}D{,}H\} \;\; binary;$

O GLPK lê cada informação como um grupos de dados ou parâmetros. Assim, foram criados os grupos P, T, D e H com os respectivos dados do problema:

$set\,P;$ #professores
$set\,T;$ #turmas
$set\,D;$ #dias
$set\,H;$ #horário

$data;$

$set\,P := P1\,P2\,P3\,P4\ldots P30\,P31\,P32\,P33\,P34;$ #determina cada professor do colégio
$set\,T := 6A,\ 7A,\ 8A,\ 9A,\ 1A,\ 2A,\ 2B,\ 3A,\ 3B;$ #turmas da manhã
$set\,T := 6B\,6C\,7B\,7C\,8B\,8C\,9B\,9C\,1C\,2C;$ #turmas da tarde
$set\,D := seg,\ ter,\ qua,\ qui,\ sex;$ #dias da semana
$set\,H := H1,\ H2,\ H3,\ H4,\ H5;$ #horários das aulas

Para a função objetivo, foi criado um vetor de pesos de acordo com a pontuação de

[1] Gusek disponível para *download* em: https://sourceforge.net/projects/gusek/files/latest/download

cada professor no colégio. Cada posição do vetor corresponde a um professor. A Tabela 10 apresenta os valores dos pesos.

TABELA 10 – Tabela de pesos - PP

Professor	Disciplina	Pesos
P1	Artes	7
P2	Artes	1
P3	Artes	1
P4	Artes	3
P5	Biologia	7
P6	Ciências	7
P7	Ciências	5
P8	Ciências	3
P9	Ed. Física	5
P10	Ed. Física	5
P11	Ens. Religioso	3
P12	Filosofia	7
P13	Física	1
P14	Geografia	5
P15	Geografia	5
P16	Geografia	5
P17	História	5
P18	História	5
P19	Inglês	1
P20	Inglês	5
P21	Inglês	1
P22	Matemática	5
P23	Matemática	5
P24	Matemática	5
P25	Matemática	1
P26	Matemática	7
P27	Português	7
P28	Português	3
P29	Português	5
P30	Português	5
P31	Português	1
P32	Português	1
P33	Química	7
P34	Sociologia	3

No GLPK, a função objetivo é descrita por:

$$maximize\, obj:\ sum\,\{p\ in\, P,\ t\ in\, T,\ d\ in\, D,\ h\ in\, H\}\,(PP\,[p])\,*\,x\,[p,t,d,h]\,;,$$

assim, o peso de cada professor irá influenciar na função objetivo.

Para a inclusão do conjunto de restrições no GLPK tem-se:

i. De acordo com Restrição 1 descrita em (3), tem-se a garantia que todas as turmas terão aulas em todos os horários

$$s.t.\ \ Rest1\,\{t\ in\ T,\ d\ in\ D,\ h\ in\ H\}:\ \ sum\,\{p\ in\ P\}\ x[p{,}t{,}d{,}h]\ \ =\ \ 1;$$

ii. De acordo com Restrição 2 descrita em (4), tem-se a exigência que cada professor seja alocado em somente uma turma por horário

$$s.t.\ \ Rest2\,\{p\ in\ P,\ d\ in\ D,\ h\ in\ H\}:\ \ sum\,\{t\ in\ T\}\ x[p{,}t{,}d{,}h]\ \ <=\ \ 1;$$

iii. De acordo com Restrição 3 descrita em (6), tem-se a necessidade que cada turma tenha no máximo duas aulas da mesma disciplina

$$s.t.\ \ Rest3\,\{p\ in\ P,\ d\ in\ D,\ t\ in\ T\}:\ \ sum\,\{h\ in\ H\}\ x[p{,}t{,}d{,}h]\ \ <=\ 2;$$

Como já exposto anteriormente, de acordo com as regras do Estado é necessário respeitar a ordem de escolha das turmas de acordo com uma tabela de pontuação por tempo de serviço. Os dados da escolha de cada professor por suas turmas, realizado no início de cada ano foi acrescentada ao GLPK utilizando a função $default$. Essa função cria matrizes de dimensões maiores que 2 colocando zeros em todas as posições.

A restrição que garante a quantidade de aulas de cada professor, de acordo com a restrição descrita em (6) em cada turma é descrita como

$$s.t.\ \ Rest4\,\{p\ in\ P,\ t\ in\ T\}: sum\,\{d\ in\ D,\ h\ in\ H\}\ x[p{,}t{,}d{,}h] = R[p{,}t];,$$

onde $R[p{,}t]$ é o total de aulas de cada professor em suas turmas já escolhidas.

Com essas restrições o problema de designação de encargos didáticos se torna um problema *NP-Completo*, ou seja, tem-se a garantia que esse problema sempre terá solução uma vez que existem as mesmas quantidades de aulas e professores para cada turma.

O problema foi resolvido com as restrições descritas acima. As Tabelas 11 e 12 apresentam os resultados do período matutino e as Tabelas 13 e 14 apresentam os resultados para o vespertino. Nestas tabelas, cada professor é alocado respeitando as exigências pedagógicas do colégio e as turmas escolhidas por cada professor.

TABELA 11 – 1º Resultado - Tabela por professor período matutino - Parte 1

P1					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P2					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					6A
H3				1A	
H4					1A
H5		6A	7A		7A

P3					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P4					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					8A
H2					
H3	9A				
H4		8A		9A	
H5					

P5					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	3B	2A			
H2	1A	3A			3A
H3	2B				
H4	1A	3B			
H5	2A	2B			

P6					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	6A		8A		
H2	8A	9A	6A		
H3	7A				6A
H4	7A			7A	8A
H5	9A			9A	

P7					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P8					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P9					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		3A	9A	9A	
H2		2A			
H3	1A				
H4		2A	3A		
H5	1A				

P10					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2			7A		
H3		8A	6A		3B
H4	2B	2B			6A
H5		3B	8A	7A	

P11					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					7A
H3					
H4					
H5				6A	

P12					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		1A	3A		
H2		2B			
H3	3B	2A			3A
H4		1A	3B		
H5		2A	2B		

P13					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		2B	2A		
H2		1A	3B		
H3		3A			
H4			2A		3A
H5		1A	3B	2B	

P14					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P15					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			2B	7A	2B
H2	7A		2A		
H3		1A	3A	3B	
H4	6A		6A	2A	3B
H5	7A		1A		3A

P16					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	8A			8A	
H2				9A	
H3					
H4	9A				9A
H5					8A

TABELA 12 – 1º Resultado - Tabela por professor período matutino - Parte 2

P17					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			1A		
H2		3B			2B
H3		2B	2A		
H4			1A	3B	
H5			2A		

P18					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	7A	9A		6A	
H2	6A	7A	3A	8A	
H3	8A	9A		3A	
H4	8A				
H5	6A		9A		

P19					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	9A	7A		2A	1A
H2	9A		1A	6A	2A
H3		6A	2B	8A	
H4	3A		2B	3A	
H5	8A	7A		3B	3B

P20					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P21					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P22					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	2A			3A	
H2	3A			2A	
H3	3A		1A		
H4				1A	
H5			3A	2A	

P23					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P24					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		8A	7A		7A
H2		8A	8A	7A	8A
H3		7A	9A		9A
H4		7A	9A	8A	
H5		9A			9A

P25					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P26					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	2B	6A	3B		
H2	3B	6A	2B		
H3	6A	3B		6A	2B
H4	3B				
H5					6A

P27					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	3A	3B			2A
H2	2A			3A	
H3	2A		3B	2A	
H4		3A			
H5	3B				

P28					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1				2B	9A
H2			9A	2B	9A
H3			8A	9A	8A
H4		9A	8A		2B
H5		8A		8A	2B

P29					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			6A	1A	6A
H2					
H3			7A	7A	7A
H4		6A	7A	6A	7A
H5			6A	1A	1A

P30					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P31					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P32					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P33					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1				3B	3B
H2	2B			1A	1A
H3				2B	2A
H4	2A				
H5	3A	3A			

P34					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	1A				3A
H2				3B	3B
H3					1A
H4				2B	2A
H5	2B			3A	2A

TABELA 13 – 1º Resultado - Tabela por professor período vespertino - Parte 1

P1					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		7B	7C	9B	7C
H2	7B	8C	6C		8C
H3		6B		6C	8B
H4		9C		6B	9C
H5		8B	9B		

P2					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P3					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4			1C		
H5				1C	

P4					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P5					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2	1C	2C		1C	
H3					
H4					
H5	2C				

P6					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2	9B				
H3					
H4				9B	
H5					9B

P7					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	6B	7C	6B		
H2	8B	7B			7C
H3	8C	7C	8B		8C
H4	7B	7B	8C		8B
H5	6B				

P8					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	6C	6C			
H2		9C			
H3	6C				
H4	9C				
H5			9C		

P9					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			8C	7B	1C
H2	9C	9B	6B	7C	2C
H3	1C	7B	6C	9C	
H4	7C	2C	8B		8C
H5	6C	6B		9B	8B

P10					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P11					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2		6C			
H3	7B				
H4					
H5			6B		7C

P12					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					1C
H3		2C			
H4					1C
H5		2C			

P13					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		1C			
H2			2C		
H3					1C
H4			2C		
H5					

P14					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5		6C			6C

P15					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	7B			7C	2C
H2	7C	1C	7B		
H3			6B		
H4			7B		1C
H5	7C		2C	6B	

P16					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	8B	9B		8B	
H2	8C			8C	
H3	9B	8B			
H4	9B			9C	
H5	9C	8C			9C

TABELA 14 – 1º Resultado - Tabela por professor período vespertino - Parte 2

P17					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		9C		2C	7B
H2			7C	2C	
H3	9C		7B		
H4		7C			
H5				9C	

P18					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	8C	8C	6C	6B	6B
H2	6B			8B	9B
H3	8B	1C		8C	
H4	6C	8B	6C		
H5	9B	9B	1C		

P19					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			1C		
H2				7B	7B
H3			7C	8B	
H4	8B	1C		2C	
H5			7C	2C	

P20					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	9B			8C	9C
H2				6C	6C
H3		9C	9B		
H4					
H5	8C				

P21					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					6B
H3					
H4					
H5					6B

P22					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P23					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	9C	8B	8B	9C	8B
H2		8B	8C		
H3		8C	9C		
H4	8C	8C	9C		
H5	8B	9C			8C

P24					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P25					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	7C		9B		9B
H2		7C	9B		
H3	7C	9B	1C	7C	
H4		9B	7C		
H5					1C

P26					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	2C	6B	7B	6C	6C
H2	6C	6B		6B	
H3	6B	6C		2C	6B
H4	2C	6C		7B	
H5	7B	7B			7B

P27					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	1C	2C			
H2	2C		1C		
H3	2C				6C
H4			6C	6C	6C
H5	1C			6C	2C

P28					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			9C		8C
H2			9C	9C	9C
H3			8C		9C
H4	6B	6B	6B	6B	6B
H5			8C	8C	

P29					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P30					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2			8B	9B	8B
H3				9B	9B
H4			9B	8B	9B
H5			8B	8B	

P31					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					7C
H4				7C	7C
H5			7C	7C	

P32					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3				7B	7B
H4					7B
H5			7B	7B	

P33					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			2C	1C	
H2					
H3			2C		
H4					
H5		1C			

P34					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3				1C	2C
H4				1C	2C
H5					

A fim de otimizar o resultado levando em consideração as preferências dos professores por dias de trabalho, foram considerados os dados da Tabela 15. Esses dados foram obtidos dos formulários preenchidos pelos professores.

TABELA 15 – Preferência por dia da semana

		Preferência dias aula				
Disciplina	P	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex
Artes	P1	3	3	3	3	3
Artes	P2	4	5	4	1	1
Artes	P3	1	5	1	1	1
Artes	P4	5	1	1	1	1
Biologia	P5	1	1	1	1	1
Ciências	P6	5	5	5	5	1
Ciências	P7	5	5	1	5	5
Ciências	P8	5	5	5	1	1
Ed. Física	P9	1	1	1	1	1
Ed. Física	P10	1	5	1	5	1
Ens. Religioso	P11	1	1	1	1	5
Filosofia	P12	5	5	5	1	1
Física	P13	3	3	5	5	1
Geografia	P14	5	1	1	1	1
Geografia	P15	5	5	5	5	1
Geografia	P16	1	5	5	5	5
História	P17	5	1	1	1	1
História	P18	5	4	3	2	1
Inglês	P19	1	5	1	5	5
Inglês	P20	5	1	1	1	5
Inglês	P21	1	1	1	1	5
Matemática	P22	5	5	5	5	1
Matemática	P23	5	5	5	5	1
Matemática	P24	5	5	5	5	5
Matemática	P25	5	5	5	5	1
Matemática	P26	4	1	5	2	3
Português	P27	1	5	5	5	5
Português	P28	5	5	5	5	1
Português	P29	2	5	5	5	5
Português	P30	1	5	5	5	1
Português	P31	5	5	5	1	1
Português	P32	1	1	5	5	5
Química	P33	3	3	3	3	3
Sociologia	P34	3	3	3	3	3

A restrição descrita em (8) assegura que o professor de desloque o mínimo possível até o colégio. Essa restrição foi acrescentada ao GLPK como

$$s.t.\ Rest5\,\{p\ in\ P,\ d\ in\ D\} : sum\,\{t\ in\ T,\ h\ in\ H\}\, x[p,t,d,h]\ <=\ Prefdia\,[p,d];,$$

onde $Prefdia$ são os dados da Tabela 15.

A partir dessa restrição o problema se torna um problema *NP-Difícil*, nem sempre é possível encontrar a solução ótima; quanto mais restrito é o problema, mais difícil fica encontrar uma solução.

As Tabelas 16, 17, 18 e 19 apresentam os resultados obtidos na distribuição dos encargos didáticos para cada professor respeitando a escolha de suas turmas e os dias de preferência de trabalho.

TABELA 16 – 2º Resultado - Tabela por professor período matutino - Parte 1

P1					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P2					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	7A	1A			
H2	6A				
H3		1A			
H4	6A	7A			
H5					

P3					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P4					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	8A				
H2	9A				
H3	9A				
H4	8A				
H5					

P5					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	1A			3A	2B
H2					
H3		2A			
H4	2A		2B	3B	1A
H5	3A			3B	

P6					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			8A	7A	
H2	8A		6A	6A	
H3	6A				
H4	9A		7A	7A	
H5	9A	8A		9A	

P7					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P8					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P9					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	3A				1A
H2			1A	9A	
H3					3A
H4				2A	9A
H5					2A

P10					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		7A		2B	
H2		6A		3B	
H3		6A		8A	
H4		8A		2B	
H5		3B		7A	

P11					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					7A
H2					6A
H3					
H4					
H5					

P12					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		3B	3A		
H2	2B	2A			
H3	1A	2B	3A		
H4	1A				
H5	3B			2A	

P13					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	2A	3A			
H2		2B			
H3	3B		3B	2B	
H4			1A		
H5	2A	3A	1A		

P14					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P15					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	3B		2B	6A	
H2	3A		7A	7A	
H3	7A	1A	1A	6A	
H4		2A	3B		
H5	2B		3A	2A	

P16					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2			9A		9A
H3			8A		8A
H4					8A
H5					9A

TABELA 17 – 2º Resultado - Tabela por professor período matutino - Parte 2

P17					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	2B				3B
H2	2A				1A
H3	2A				
H4	2B				
H5	1A				3B

P18					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	9A	6A	6A		
H2	7A	9A	8A		
H3	8A	9A			
H4	3A	3A			
H5	7A	6A	8A		

P19					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		8A	2A	3B	8A
H2		7A	3A		2A
H3		3B	6A		7A
H4		2B	6A	9A	2B
H5		1A	9A	1A	3A

P20					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P21					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P22					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2	1A	3A			
H3		3A		2A	
H4		1A	2A	3A	
H5		2A		3A	

P23					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P24					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		9A	7A	9A	9A
H2		8A		8A	8A
H3				7A	9A
H4	7A		9A		7A
H5			7A	8A	8A

P25					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P26					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	6A				6A
H2	3B		3B		3B
H3	2B		2B		2B
H4					3B
H5	6A		6A		6A

P27					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		2A	3B		2A
H2		3B		3A	3A
H3			2A		2A
H4					3A
H5			3B		

P28					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		2B	9A	8A	
H2			2B	2B	
H3		8A	9A	9A	
H4		9A	8A	8A	
H5	8A	9A		2B	

P29					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			1A	1A	
H2					7A
H3		7A	7A	1A	6A
H4		6A		6A	6A
H5		7A		6A	7A

P30					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P31					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P32					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P33					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					3A
H2			2A	1A	
H3				3A	1A
H4	3B	3B	2B		2A
H5					2B

P34					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1				2A	
H2				2A	2B
H3	3A			3B	3B
H4			3A	1A	
H5		2B			1A

TABELA 18 – 2º Resultado - Tabela por professor período vespertino - Parte 1

P1					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	9B	7B	7C	6C	7C
H2		6C	6B		9C
H3	8C		8B	9C	9B
H4		7B			8C
H5	6B				8B

P2					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P3					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2		1C			
H3					
H4					
H5		1C			

P4					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P5					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2			1C		
H3			2C		
H4				2C	
H5				1C	

P6					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			9B		
H2	9B				
H3	9B				
H4					
H5					

P7					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	8C	6B		7B	8B
H2	7C			7C	8C
H3		7B			8B
H4	6B			6B	7C
H5		7B		8B	8C

P8					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2	6C	9C			
H3					
H4	9C	6C			
H5	9C	6C			

P9					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	7B	7C	1C		9C
H2	8B	8B		8C	9B
H3		6B	9C	1C	7C
H4		2C	8C	6C	6C
H5	7B	9B	2C		6B

P10					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P11					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					6C
H2					6B
H3					7B
H4					
H5					7C

P12					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		2C			
H2		2C			
H3		1C			
H4			1C		
H5					

P13					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1				1C	
H2				2C	
H3				2C	
H4				1C	
H5					

P14					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3	6C				
H4	6C				
H5					

P15					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	2C	1C	7B	7C	
H2	2C	7B			
H3			7B	6B	
H4	1C	6B	7C	7C	
H5					

P16					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1				8C	9B
H2			9B		8B
H3					9C
H4			8B	8B	9B
H5		8C	8C	9C	9C

TABELA 19 – 2º Resultado - Tabela por professor período vespertino - Parte 2

P17					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	9C	9C			
H2		7C			
H3	7B	9C			
H4	7B	7C			
H5	2C	2C			

P18					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	1C	8B	6B		
H2	1C	6B	6C		
H3	8B	6C	8C	9B	
H4		8C	9B	9B	
H5	8B	6B	6C	8C	

P19					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					2C
H2			7C		7C
H3			1C		2C
H4		8B			8B
H5			1C	7B	7B

P20					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	6C				8C
H2	9C				6C
H3					8C
H4	9B				9C
H5					9B

P21					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					6B
H2					
H3					6B
H4					
H5					

P22					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P23					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	8B	8C	9C	9C	
H2	8C		8C	8B	
H3		8B		8C	
H4	8B	9C	9C	9C	
H5	8C		8B		

P24					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P25					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	7C	9B		9B	
H2		7C		1C	
H3	1C		9B	7C	
H4	7C	9B			
H5	9B			7C	

P26					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			2C	2C	7B
H2	7B		7B	6B	2C
H3	6B		6C	7B	6C
H4			6B	7B	6B
H5	6C		6B	6C	6C

P27					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		6C	6C		1C
H2			2C	6C	
H3		2C		6C	
H4		1C	6C		1C
H5				2C	2C

P28					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	6B		8C	6B	
H2	6B	8C	9C	9C	
H3	9C	8C	6B		
H4	8C			8C	
H5		9C	9C	6B	

P29					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P30					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			8B	8B	
H2		9B	8B	9B	
H3		9B		8B	
H4					
H5		8B	9B	9B	

P31					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3	7C		7C		
H4					
H5	7C	7C	7C		

P32					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2				7B	7B
H3					
H4			7B		7B
H5			7B		

P33					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4			2C		2C
H5	1C				1C

P34					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					1C
H3	2C				1C
H4	2C				
H5					

Como não haviam professores suficientes para cobrir todas as aulas às segundas e sextas-feiras, para o período matutino os professores P12 e P19 não tiveram suas preferências de dias de trabalho respeitadas. O professor P12 em somente uma aula e o professor P19, que indicou dias insuficientes de preferência, logo, teve que ser alocado em um dia de não preferência. Para os demais, foi garantido a satisfação de 100% dos docentes. Para o período vespertino, todos os professores tiveram suas preferências atendidas.

A restrição descrita em (7), que limita o número de dias de trabalho do professor de acordo com a quantidade total de aulas no colégio é considerado nos próximos resultados. Para o período matutino estão nas Tabelas 20 e 21, respectivamente, os resultados de alocação de professores e disciplinas de acordo com as turmas escolhidas, nos dias de preferência e em menos dias de trabalho possível.

TABELA 20 – 3º Resultado - Tabela por professor período matutino - Parte 1

P1					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P2					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	7A	1A			
H2					
H3	6A	1A			
H4					
H5	6A	7A			

P3					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P4					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2	9A				
H3	8A				
H4	9A				
H5	8A				

P5					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		3B			1A
H2		2A			3A
H3		2A			2B
H4		3A			1A
H5		3B			2B

P6					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	6A		6A	7A	
H2	7A		8A	8A	
H3	9A		9A	9A	
H4	8A		6A		
H5			7A		

P7					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P8					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P9					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	1A				
H2	1A				9A
H3					2A
H4	3A				2A
H5	3A				9A

P10					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		6A		8A	
H2		7A		3B	
H3		2B		2B	
H4		3B		8A	
H5		6A		7A	

P11					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					7A
H2					6A
H3					
H4					
H5					

P12					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	2B	3A			
H2	3B	1A			
H3	3B	3A			
H4	2A	2A			
H5	1A	2B			

P13					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			2A	3A	
H2			1A	2A	
H3			3B	3A	
H4			1A	3B	
H5			2B	2B	

P14					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P15					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	3A	2B		6A	
H2	2B	3B		6A	
H3	1A	3B		1A	
H4	7A	7A		3A	
H5	7A	2A		2A	

P16					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					8A
H2				9A	
H3					9A
H4				9A	
H5				8A	8A

TABELA 21 – 3º Resultado - Tabela por professor período matutino - Parte 2

P17					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	3B				
H2	2A	2B			
H3	2A				
H4	3B	1A			
H5	2B	1A			

P18					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	8A	8A	3A		
H2		6A	7A		
H3	7A	9A	3A		
H4	6A	6A	8A		
H5	9A		9A		

P19					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		2A	8A	3B	3B
H2		2A	9A	1A	
H3		6A	7A	6A	7A
H4		9A	2B	2B	8A
H5		3A	2A	1A	

P20					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P21					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P22					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	2A				
H2	3A				2A
H3	3A				1A
H4	1A				3A
H5	2A				3A

P23					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P24					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		7A		9A	9A
H2		8A		7A	8A
H3		7A		8A	8A
H4		8A		7A	9A
H5		9A		9A	7A

P25					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P26					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			2B		2B
H2	6A		3B		2B
H3			6A		6A
H4			3B		6A
H5	3B		6A		3B

P27					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			3B	2A	
H2			3A	3A	
H3			2A	3B	
H4			2A	2A	
H5			3B	3A	

P28					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	9A	9A	9A		
H2	8A	9A	2B		
H3	2B	8A	8A		
H4	2B	2B	9A		
H5		8A	8A		

P29					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			7A	1A	6A
H2			6A		7A
H3			1A	7A	
H4			7A	6A	7A
H5			1A	6A	6A

P30					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P31					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P32					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P33					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1				2B	3A
H2				2B	1A
H3				2A	3A
H4				1A	3B
H5				3B	2A

P34					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			1A		2A
H2			2A		3B
H3			2B		3B
H4			3A		2B
H5			3A		1A

As Tabelas 22 e 23 apresentam os resultados obtidos para o período vespertino.

TABELA 22 – 3º Resultado - Tabela por professor período vespertino - Parte 1

P1					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		7B	9B		8C
H2		8B	8C	9B	9C
H3		6B	6B		8B
H4		7B	7C		6C
H5		6C		9C	7C

P2					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P3					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		1C			
H2		1C			
H3					
H4					
H5					

P4					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P5					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		2C			
H2					1C
H3		9B			
H4		2C			
H5					

P6					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3		9B			
H4		9B			9B
H5					

P7					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	8B			6B	7B
H2	6B	7B		7C	8C
H3	8C	8B		6B	8C
H4	7C				
H5		7B		7C	8B

P8					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			9C		
H2			6C		
H3					
H4	6C		9C		
H5	9C		6C		

P9					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		6C	1C	8C	6B
H2		6B	9C	8B	9B
H3		2C	1C	8C	7C
H4		6C	7B	7B	7C
H5		2C	8B	9C	9B

P10					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P11					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					6C
H2					7C
H3					7B
H4					
H5					6B

P12					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2		1C			
H3		2C			
H4		2C			
H5		1C			

P13					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1				1C	
H2				2C	
H3				1C	
H4					
H5				2C	

P14					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2	6C				
H3	6C				
H4					
H5					

P15					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	7B	6B	7C		
H2		2C	2C		
H3	7B	7B	7C		
H4	6B	7C	1C		
H5		1C			

P16					
	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		9B			9C
H2		8C			8B
H3		9C	8B		9B
H4		9C			8C
H5		8B	9B		8C

TABELA 23 – 3º Resultado - Tabela por professor período vespertino - Parte 2

P17

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	9C				7C
H2	2C				7B
H3	7C				9C
H4					2C
H5	7B				9C

P18

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	9B	8C	6B		
H2	8B	6C	8B	1C	
H3		6C	9B	6C	
H4	9B		8B	1C	
H5	8B	6B	6B	8C	

P19

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1				2C	8B
H2				7B	2C
H3				7C	1C
H4				7C	8B
H5				7B	1C

P20

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	8C				9B
H2	9B				
H3	9C				6C
H4	8C				9C
H5					6C

P21

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					6B
H4					6B
H5					

P22

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P23

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			8C	8B	
H2	9C	9C		9C	
H3	8B		8C	9C	
H4	8B	8C	8B	8C	
H5	8C	9C		8B	

P24

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P25

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	7C	7C		7C	
H2	7C	7C			
H3	9B	1C			
H4		1C		9B	
H5	9B	9B		9B	

P26

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	6C		6C	6C	2C
H2	7B		7B	6B	6B
H3	6B		7B	7B	2C
H4	7B		6B	6B	
H5	6C		2C	6C	

P27

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			2C		1C
H2			2C	6C	6C
H3			6C	2C	
H4			6C	6C	1C
H5				1C	2C

P28

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	6B	9C		9C	
H2	8C		6B	8C	
H3	9C	8C			
H4	9C	6B		9C	
H5	6B	8C	8C	6B	

P29

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2					
H3					
H4					
H5					

P30

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1		8B	8B	9B	
H2		9B	9B		
H3				8B	
H4		8B	9B	8B	
H5				9B	

P31

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2			7C		
H3		7C			
H4					
H5	7C	7C	7C		

P32

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1			7B	7B	
H2					
H3					
H4					7B
H5			7B		7B

P33

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1					
H2	1C				
H3	2C				
H4	1C				
H5	2C				

P34

	SEG	TER	QUA	QUI	SEX
H1	2C				
H2					
H3	1C				
H4	2C				
H5	1C				

Com a nova restrição o professor P5, P6 e P22 não tiveram suas preferências atendidas. O restante dos professores tiveram suas preferência atendidas, trabalhando na quantidade mínima de dias possíveis.

8 Conclusões e Trabalhos Futuros

O problema de designação de encargos didáticos do Colégio Estadual Professor Paulo Freire foi o objeto de estudo deste trabalho, tendo como foco a construção da grade de encargos didáticos que atende os requisitos organizacionais e pedagógicos do colégio, assim como os aspectos pessoais, ou seja, as preferências de cada professor.

Para solução do problema de designação de encargos didáticos, foi necessário realizar um estudo bibliográfico que motivasse uma maneira de modelar o problema. Por se tratar de um Problema de Programação Linear Inteira e que contém variáveis binárias, e portanto, um Problema de Programação Inteira Binária, foram escolhidos como métodos de solução o Método Simplex e o Algoritmo *Branch-and-Bound*. A partir da definição do método, o modelo foi estabelecido considerando restrições pedagógicas e organizacionais.

Para automatizar a confecção da grade de encargos didáticos o modelo matemático foi colocado na forma padrão do problema de programação linear e posteriormente, reescrito considerando os detalhes da linguagem de programação do *software* GUSEK, gerando um código que pode ser adaptado a outros colégios.

Os métodos implementados obtiveram soluções satisfatórias, pois respeitaram a quantidade de horas-aula dos professores e das disciplinas em cada turma, alocando os professores conforme as restrições impostas no modelo de acordo com as preferências dos professores. Em apenas poucos casos não foi possível respeitar também a quantidade de dias mínimos de trabalho. Assim, considera-se que o método apresentou resultados satisfatórios e os objetivos foram atingidos.

Contudo, o modelo pode ainda ser aperfeiçoado. O modelo implementado não considera a preferência por aulas geminadas, assim podem haver aulas da mesma disciplina no mesmo dia mas em aulas não consecutivas. Pode-se também sincronizar os períodos da manhã e da tarde no mesmo modelo e ainda, elaborar uma interface gráfica, para entrada e saída de dados que facilite o usuário final na solução do problema. Esses aspectos serão considerados nos desdobramentos deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. **Pesquisa Operacional**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 20, 22 e 28.

BARBOZA, A. O.; CARNIERI, C.; STEINER, M. T. A.; SIQUEIRA, P. H. Técnicas da pesquisa operacional no problema de horários de atendentes em centrais telefônicas. **Gestão & Produção**, v. 10, n. 1, p. 109–127, 2003. Citado na página 21.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, Seção 1, p. 27833, 23 dez 1996. Citado na página 16.

CHEN, D.-S.; BATSON, R. G.; DANG, Y. **Applied Integer Programming**: Modeling and solution. New Jersey: John Wiley Sons, 2010. Citado na página 34.

DUQUE, J. W. G. **Métodos de solução para a montagem de grades escolares**. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2003. Citado na página 21.

FERREIRA, P. S.; KARAS, E. W.; POLUCOSKI, F.; RIBEIRO, A. A.; SILVA, A. L. Aplicação de programação inteira na distribuição de encargos didáticos em instituições de ensino. **Trends in Applied and Computational Mathematics**, v. 12, n. 2, p. 135–144, 2011. Citado na página 20.

GÓES, A. R. T. **Otimização na distribuição da carga horária de professores: método exato, método heurístico, método misto e interface**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005. Citado na página 20.

GOLDBARG, M.; LUNA, H. P. L. **Otimização Combinatória e Programação Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 22, 28, 29 e 33.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**: modelagem em excel. 3. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. Citado na página 25.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and Nonlinear Programming**. 3. ed. New York: Elsevier, 2008. Citado na página 26.

MICHALEWICZ, Z.; FOGEL, D. B. **How to Solve ir: Modern Heuristic**. Germany: Springer, 1998. Citado na página 20.

PARANÁ. Resolução n.º 2/2019 - GS/SEED. Regulamenta a distribuição de aulas e funções aos professores do Quadro Próprio do Magistério – QPM, do Quadro único de Pessoal – QUP e aos professores contratados em Regime Especial nas Instituições Estaduais de Ensino do Paraná. **Secretaria de Estado da Educação**, Curitiba, 2019. Disponível em: <http://www.educacao.pr.gov.br/arquivos/File/resolucoes/2019/resolucao22019_gsseed.pdf>. Acesso em: 20 Abril 2019. Citado na página 17.

SIQUEIRA, P. H. **Uma nova abordagem na resolução do problema do caixeiro viajante**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005. Citado na página 21.

SOUSA, V. N. d.; MORETTI, A. C.; PODESTÁ, V. A. d. Programação da grade de horário em escolas de ensino fundamental e médio. **Pesquisa Operacional**, SciELO Brasil, v. 28, n. 3, p. 399–421, 2008. Citado na página 21.

TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**: uma visão geral. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. Citado na página 29.